

Ю. Е. ПЕНЗОВ

обороному

25.4.68

ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛОГИКИ И ТЕОРИИ
МНОЖЕСТВ

в 5-2-70

Издательство Саратовского университета
1968

517.214.13

II25

2-2-3

Курс «Элементы математической логики и теории множеств» впервые был прочитан для студентов 1-го курса механико-математического факультета Саратовского университета в 1961 году профессором В. В. Вагнером. С тех пор он читается ежегодно с сохранением в основном первоначальной программы.

С 1963 года этот курс введен в учебные планы мехматов университетов.

Настоящая книга является обработкой лекций, которые автор читал в Саратовском университете в 1962—66 гг. В § 1 вводятся основные понятия теории множеств. В § 2 и § 3 излагаются элементы содержательного исчисления высказываний и предикатов. Содержательное исчисление предикатов представляет наибольшие трудности, этот раздел занимает в книге значительное место. Формальное исчисление высказываний и предикатов не затрагивается. В § 4 и § 5 логика предикатов применяется для построения начал алгебры подмножеств и теории бинарных отношений. В § 6 на основе теории бинарных отношений излагаются начальные сведения по теории отображений и преобразований множеств. Каждый параграф книги снабжен упражнениями. Часть из них содержит дополнительные теоретические сведения. В конце книги приведен краткий список литературы, по которой можно более подробно познакомиться с математической логикой и теорией множеств.

Выражаю глубокую благодарность профессору В. В. Вагнеру, постоянно следившему за подготовкой рукописи к изданию и сделавшему многочисленные ценные указания. Выражаю благодарность также доценту М. А. Спиваку и старшему преподавателю Л. Н. Либиху за ряд замечаний и советов.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Логикой называется наука о законах и формах мышления. Основоположником ее является древнегреческий ученый Аристотель (IV век до н. э.).

Математическая логика, называемая также теоретической или символической, есть часть общей логики, в которой законы мышления выражаются формулами аналогично тому, как в алгебре выражаются правила действий с числами.

Идея математической логики впервые была высказана немецким математиком и философом Лейбницем в XVII веке. Но систематическое ее развитие началось только с середины XIX века с опубликования английским математиком Дж. Булем работы «Математический анализ логики» (1847 г.).

Новый этап в развитии математической логики начался в 20-х годах нашего века, когда немецкий математик Д. Гильберт разработал теорию математического доказательства, теорию формального построения математических наук.

В настоящее время математическая логика имеет большое практическое значение, она широко применяется в вычислительной математике и в теории конечных автоматов.

Понятие множества является одним из простейших, одним из первоначальных понятий математики. Оно не определяется, а только поясняется на примерах. Так можно говорить о множестве натуральных чисел, о множестве точек плоскости, множестве жителей данного города. Начала теории множеств были разработаны немецким математиком Г. Кантором в 70-х годах прошлого века.

Теория множеств и математическая логика составляют основу современной математики.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Множества. Равенство и включение множеств. Кантор следующим образом описывал введенный им термин множество: «Под «множеством» мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных вполне различаемых объектов m из нашего восприятия или мысли, которые называются «элементами» M .

Множество называется также *совокупностью*, *классом*, *системой*.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом \emptyset . Например, множество всех целых чисел, квадраты которых отрицательны, пустое.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*, в противном случае оно называется *бесконечным*. Так, например, множество жителей на Земле — конечное, а множество всех треугольников на плоскости — бесконечное. Множество, образованное из n элементов a_1, a_2, \dots, a_n , обозначается $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, в частности, множество из одного элемента a — обозначается $\{a\}$ и называется *единичным множеством*.

Чтобы задать множество, надо или перечислить все его элементы (что можно сделать только для конечных множеств), или указать общее свойство всех его и только его элементов. Так, например, множество всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, определяется свойством: «быть действительным числом, большим 0 и меньшим 1».

Множества будем обозначать буквами M, N, L, \dots , элементы их — соответственно $x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, y_1, y_2, \dots, z_0, z_1, z_2, \dots$. Условие, что x_0 есть элемент множества M , записывают следующим образом: $x_0 \in M$ и читают кратко: « x_0 принадлежит M » или « M содержит x_0 »; условие, что y_0 не является элементом множества M записывают так: $y_0 \notin M$ и читают: « y_0 не принадлежит M ».

жит M » или « M не содержит y_0 ». Знак « \in » называют *символом принадлежности*. Например, если a и b два каких-либо различных элемента, то $a \in \{a\}$ и $b \notin \{a\}$.

С каждым множеством M связываются особые символы x, x', x'', \dots , называемые *предметными переменными* или *переменными, принимающими значения в множестве M* , вместо которых в выражениях, их содержащих, можно подставлять любой элемент этого множества. Множество M называется *областью возможных значений* переменных x, x', x'', \dots *.

Два множества M_1 и M_2 называются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов. В этом случае пишут: $M_1 = M_2$. Если каждый элемент множества M_1 принадлежит множеству M_2 , то говорят, что M_1 *включается* в M_2 или, что M_2 *включает* M_1 , и пишут $M_1 \subset M_2$ или $M_2 \supset M_1$. Знак « \subset » называется *символом включения* множеств. Два множества равны тогда и только тогда, когда каждое из них включается в другое.

2. **Подмножество. Дополнение подмножества. Пересечение и объединение подмножеств.** Определение 1. Подмножеством или частью множества M называется любое множество M_1 , включающееся в M .

Например, для множества всех действительных чисел подмножествами будут: множество всех рациональных чисел, множество всех целых чисел, множество всех натуральных чисел, единичное множество $\{3\}$.

Подмножества множества M будем обозначать буквами: X_0, X_1, X_2, \dots , подмножества множества N — буквами: Y_0, Y_1, Y_2, \dots . Множество всех подмножеств множества M будем обозначать $P(M)$, его предметные переменные — X, X', X'', \dots .

Для любого множества само это множество и пустое множество можно рассматривать как его подмножества. Они называются *несобственными* подмножествами, все другие подмножества множества называются *собственными*.

Над подмножествами одного и того же множества производятся операции дополнения, пересечения и объединения, первая из них *всюду определенная унарная* операция, т. е. она применяется к любому одному подмножеству, две другие —

* Иногда предметное переменное множество называется *переменным элементом* этого множества. Такая терминология может приводить к недоразумениям. Элементами множества являются некоторые определенные предметы. Предметное переменное множества не является его элементом, это символ, вместо которого в выражениях, его содержащих, можно ставить любой элемент из области его возможных значений..

всюду определенные бинарные операции, — они применяются к любым двум подмножествам*.

Определение 2. Дополнением подмножества X_0 множества M называется совокупность всех элементов множества M , не принадлежащих X_0 .

Дополнение подмножества X_0 обозначается X'_0 . Например, для множества целых чисел дополнением подмножества четных чисел будет множество нечетных чисел.

Определение 3. Пересечением подмножеств X_1 и X_2 множества M называется совокупность всех элементов множества M , принадлежащих одновременно первому и второму подмножеству.

Пересечение подмножеств X_1 и X_2 обозначается символом $X_1 \cap X_2$. Пересечение подмножеств может быть пустым множеством; в таком случае говорят, что данные подмножества не пересекаются; в противном случае говорят, что они пересекаются.

Например, пересечение множества всех прямоугольников на плоскости с множеством всех ромбов есть множество всех квадратов; пересечение множества чисел, делящихся на 2, с множеством чисел, делящихся на 3, есть множество чисел, делящихся на 6; множество положительных и множество отрицательных действительных чисел не пересекаются.

Определение 4. Объединением подмножеств X_1 и X_2 множества M называется совокупность всех элементов множества M , принадлежащих первому или второму подмножеству.

Объединение подмножеств X_1 и X_2 обозначается символом $X_1 \cup X_2$. Например, объединением двух конечных подмножеств множества действительных чисел $X_1 = \{1, 2, \pi, \sqrt{10}\}$ и $X_2 = \{1, \pi, 2\sqrt{10}, \sqrt[3]{7}\}$ будет множество из 6 чисел: $\{1, 2, \pi, \sqrt{10}, 2\sqrt{10}, \sqrt[3]{7}\}$.

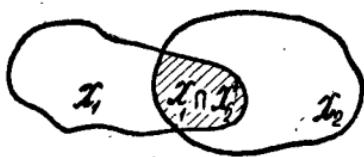
Смысл введенных операций над подмножествами может быть пояснен наглядно на подмножествах множества всех точек плоскости, которое будем обозначать E_2 . В этом случае дополнение подмножества X_0 есть часть плоскости, дополняющая X_0 до всей плоскости; пересечение двух подмножеств $X_1 \cap X_2$ есть часть плоскости, общая для X_1 и X_2 ; объединение двух подмножеств $X_1 \cup X_2$ есть часть плоскости, состоящая из всех точек частей X_1 и X_2 (рис. 1).

* Термины «унарный» и «бинарный» происходят от латинских слов: *unus* — один и *bini* — два.

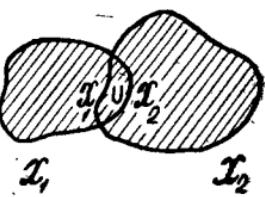
3. Упорядоченные системы элементов. Если a и b два каких-либо элемента, то из них можно образовать двухэлементное множество $\{a, b\}$ (или, что то же самое, $\{b, a\}$). Из этих же элементов можно образовать еще два новых объекта: 1) *упорядоченную пару с первой компонентой a и второй компонентой b* , которая обозначается (a, b) и 2) *упорядоченную пару с первой компонентой b и второй компонентой a* , которая обозначается (b, a) . Если $a \neq b$, то упорядоченные пары (a, b) и (b, a) считаются различными. Вообще, две упорядоченные пары (a, b) и (c, d) считаются равными только в случае, когда соответствующие компоненты их равны: $a = c$ и $b = d$. Упорядоченная пара (a, b) иногда называется просто *парой* (a, b) .



a)



б)



в)

Рис. 1.

Аналогично, если a_1, a_2, \dots, a_n некоторые элементы, то из них, наряду с множеством $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, можно образовать новые объекты: 1) *упорядоченную n -систему с первой компонентой a_1 , второй компонентой a_2, \dots, n -й компонентой a_n* , которая обозначается (a_1, a_2, \dots, a_n) ; 2) *упорядоченную n -систему с первой компонентой a_2 , второй компонентой a_1 , третьей компонентой a_3 , четвертой компонентой a_4, \dots, n -й компонентой a_n* , которая обозначается $(a_2, a_1, a_3, a_4, \dots, a_n)$ и т. д. Если $a_1 \neq a_2$, то упорядоченная n -система (a_1, a_2, \dots, a_n) отлична от n -системы $(a_2, a_1, a_3, a_4, \dots, a_n)$. Вообще две упорядоченные n -системы (a_1, a_2, \dots, a_n) и (b_1, b_2, \dots, b_n) считаются равными только в том случае, когда все соответствующие компоненты их равны: $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Следовательно, из n попарно различных элементов можно образовать точно $n!$ различных упорядоченных n -систем. Например, из чисел 1, 2 и 3 можно образовать 6 различных упорядоченных троек: $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$.

4. Декартово произведение множеств. Определение 1.

Пусть M и N два множества. Декартовым или прямым произведением M на N называется множество всех упорядоченных пар, первая и вторая компоненты которых принадлежат соответственно множеству M и множеству N .

Декартово произведение множества M на множество N обозначается символом $M \times N$. Множество M называется первым, а множество N — вторым сомножителем произведения $M \times N$. Меняя ролями множества M и N , получим декартово произведение $N \times M$, которое отлично от декартова произведения $M \times N$ (если только, конечно, $M \neq N$), ибо элементами $N \times M$ будут упорядоченные пары, первая компонента которых принадлежит множеству N , а вторая компонента — множеству M .

Если M конечное множество, состоящее из n элементов x_1, x_2, \dots, x_n , и N конечное множество, состоящее из m элементов y_1, y_2, \dots, y_m , то декартово произведение $M \times N$ также будет конечным множеством, его элементами будут все nm упорядоченные пары: $(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_m), (x_2, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_m), \dots, (x_n, y_1), (x_n, y_2), \dots, (x_n, y_m)$.

Определение 1 легко обобщается на случай произвольного конечного числа множеств*.

Определение 2. Пусть даны n множеств M_1, M_2, \dots, M_n ($n = 2, 3, \dots$). Декартовым или прямым произведением их, которое обозначается символом $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, называется множество всех упорядоченных n -систем, первая, вторая, \dots , n -я компоненты которых принадлежат соответственно 1-му, 2-му, \dots , n -му данному множеству.

Например, если $x_1, x_2 \in M_1, x_3 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$, то $(\underset{0}{x_1}, \underset{0}{x_2}, \underset{0}{x_3}, \dots, \underset{0}{x_n}), (\underset{1}{x_1}, \underset{0}{x_2}, \underset{0}{x_3}, \dots, \underset{0}{x_n}) \in M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$.

Определение 3. n -й декартовой степенью множества M ($n = 2, 3, \dots$), которая обозначается M^n , называется декартово произведение множества M на себя n раз:

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ раз}}$$

* При ссылках на предыдущие теоремы (определения, формулы) будем придерживаться следующему правилу: если теорема принадлежит рассматриваемому пункту, то указывается только ее номер, если она принадлежит другому пункту данного параграфа, то указывается номер теоремы и пункт, если же она содержится в другом параграфе, то указывается параграф, пункт и номер теоремы.

2-я и 3-я декартовы степени множества называются также его *декартовым квадратом* и *декартовым кубом* соответственно.

Согласно определениям 3 и 2 элементами n -й декартовой степени M^n будут упорядоченные n -системы, образованные из элементов множества M . В частности, элементами декартова квадрата M^2 будут всевозможные упорядоченные пары, образованные из элементов множества M , элементами декартова куба M^3 — всевозможные упорядоченные тройки, образованные из элементов множества M . Например, если $M = \{a, b\}$, то $M^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ и $M^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$.

5. Арифметическое пространство n измерений. Определение 1. Одномерным арифметическим пространством, короче, арифметической или числовой прямой, называется множество всех действительных чисел. Оно обозначается R^1 или R . Каждое действительное число называется точкой R^1 , числа 0 и 1 называются соответственно *нулевой* и *единичной точками*.

Для наглядного изображения точек числовой прямой выбирают в плоскости некоторую прямую OX и отмечают на ней единичный отрезок OE (рис. 2). Луч прямой OX с вершиной O , содержащий конец E единичного отрезка, называется положительным, а дополнительный ему луч — отрицательным. Тогда начало единичного отрезка O принимается за изображение нулевой точки, каждая точка положительного луча принимается за изображение положительного числа, равного расстоянию ее до точки O , каждая точка отрицательного луча — за изображение отрицательного числа, равного расстоянию ее до точки O , взятому со знаком минус. При этом каждая точка прямой OX будет изображать единственное действительное число и обратно, каждое действительное число будет изображаться единственной точкой этой прямой. На рис. 2 для примера изображены две точки R^1 : 3 и -1 .

Определение 2. n -мерным арифметическим пространством R^n ($n = 2, 3, 4, \dots$), короче, арифметическим n -пространством, называется n -я декартова степень числовой прямой.

Элементами R^n будут упорядоченные n -системы, образованные из действительных чисел, они называются *точками* про-

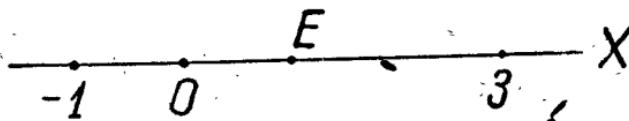


Рис. 2.

странства R^n : Точка $(0, 0, \dots, 0)$, все компоненты которой равны нулю, называется *нулевой точкой* R^n .

Простейшими арифметическими пространствами при $n \geq 2$ будут R^2 и R^3 . Двумерное арифметическое пространство R^2 называется также *арифметической* или *числовой плоскостью*. Точками R^2 являются упорядоченные пары действительных чисел: $(1, 3/2)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt[3]{7})$, \dots . Для наглядного изображения точек R^2 в плоскости выбирают две взаимно перпендикулярные прямые OX и OY и отмечают на них единичные отрезки OE_1 и OE_2 (рис. 3). Лучи прямых OX и OY с вершиной в точке O , содержащие концы еди-

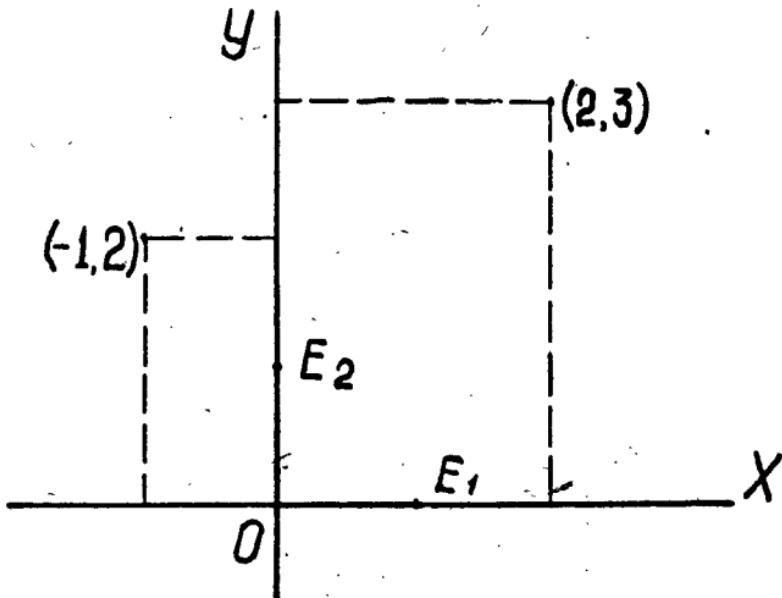


Рис. 3.

ничных отрезков E_1 и E_2 , называются *положительными*, дополнительные им лучи — *отрицательными*. Тогда общее начало единичных отрезков O принимается за изображение нулевой точки R^2 . Каждая другая точка A плоскости принимается за изображение точки R^2 , компоненты которой равны расстояниям от точки O проекций A_1 и A_2 точки A на прямые OX и OY соответственно; взятым со знаком + или — в зависимости от того, принадлежат ли точки A_1 и A_2 положительным или отрицательным лучам прямых OX и OY соответственно. При этом каждая точка плоскости будет изображать единственную точку R^2 и обратно, каждая точка R^2 изобразится единственной точкой плоскости. На рис. 3 для примера изображены две точки R^2 : $(2, 3)$ и $(-1, 2)$.

Трехмерное арифметическое пространство R^3 называется также арифметическим или числовым пространством. Точками R^3 являются упорядоченные тройки действительных чисел: $(-\sqrt{2}, 7, \pi)$, $(1, \frac{7}{3}, -\sqrt{5})$, ... Для наглядного изображения точек R^3 выбирают в пространстве три попарно взаимно перпендикулярные прямые OX , OY и OZ и отмечают на них единичные отрезки OE_1 , OE_2 и OE_3 . Лучи прямых OX , OY и OZ с вершиной O , содержащие концы E_1 , E_2 , E_3 единичных отрезков, называются положительными, дополнительные им лучи — отрицательными. Тогда точка O принимается за изображение нулевой точки R^3 . Каждая другая точка A пространства рассматривается как изображение точки R^3 , компоненты которой равны расстояниям от точки O проекций A_1 , A_2 и A_3 точки A на прямые OX , OY и OZ соответственно, взятым со знаком + или — в зависимости

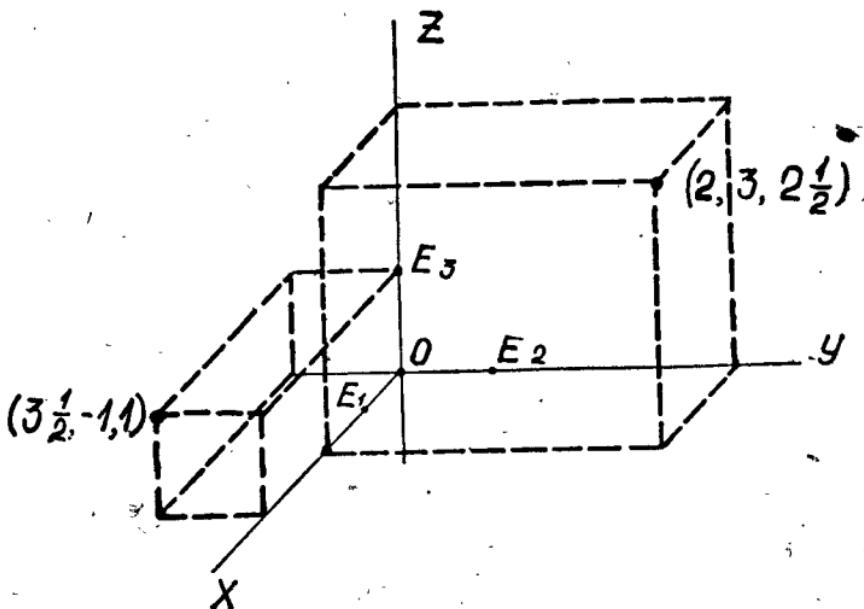


Рис. 4

ности от того, принадлежат ли точки A_1 , A_2 , A_3 положительным или отрицательным лучам прямых OX , OY и OZ соответственно. При этом каждая точка пространства будет изображать единственную точку R^3 и обратно, каждая точка R^3 изобразится единственной точкой пространства. На рис. 4 для примера изображены две точки R^3 : $(2, 3, 2 \frac{1}{2})$ и $(3 \frac{1}{2}, -1, 1)$.

6. n -отношение. Определение 1. Пусть M_1, M_2, \dots, M_n — некоторые множества ($n = 2, 3, 4, \dots$). Отношением порядка n или n -отношением между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n называется подмножество декартова произведения этих множеств. Множества M_1, M_2, \dots, M_n называются базисными множествами n -отношения, соответственно первым, вторым, ..., n -тым. n -отношение, все базисные множества которого совпадают, называется однородным. Отношение 2-го порядка называется также бинарным, отношение 3-го порядка — тернарным.

n -отношения обычно обозначаются малыми греческими буквами $\rho, \sigma, \tau, \dots$, при этом для бинарных отношений индекс над буквой, как правило, опускается. Если ρ некоторое n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n и упорядоченная n -система (x_1, x_2, \dots, x_n) принадлежит ρ , то говорят также,

что элементы x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют ρ , если же эта n -система не принадлежит ρ , то говорят, что x_1, x_2, \dots, x_n не удовлетворяют ρ .

В частности, если ρ бинарное отношение между элементами множеств M и N и упорядоченная пара (x_0, y_0) принадлежит ρ , то говорят еще, что элемент x_0 находится в отношении ρ с элементом y_0 , в противном случае говорят, что элемент x_0 не находится в отношении ρ с элементом y_0 .

Согласно определению 1 каждое n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n есть некоторая совокупность упорядоченных n -систем, первая, вторая, ..., n -я, компонента которых принадлежит соответственно множествам M_1, M_2, \dots, M_n . Следовательно, чтобы задать n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n , надо из всех упорядоченных n -систем, образованных из элементов данных множеств, выделить каким-либо образом определенную их совокупность.

Например, множество всех упорядоченных троек целых чисел, третья из которых является общим делителем двух первых, будет однородным тернарным отношением между целыми числами; упорядоченная тройка (15, 9, 3) принадлежит этому отношению, а тройка (8, 12, 6) — не принадлежит. Далее, совокупность всех упорядоченных пар взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей пространства будет бинарным отношением между прямыми и плоскостями пространства. Прямая l_0 и

плоскость π будут удовлетворять этому отношению в том и только в том случае, когда они взаимно перпендикулярны.

Каждое однородное бинарное отношение между действительными числами является некоторой частью числовой плоскости, его можно изобразить геометрически. Так, например, *отношением равенства действительных чисел* называется множество всех упорядоченных пар равных между собой действительных чисел. *Отношением различия действительных чисел* называется множество всех пар различных действительных чисел. Геометрически они будут изображаться соответственно биссектрисой

угла между прямыми OX и OY и ее дополнением до всей плоскости.

Определение 2. Пусть M_1, M_2, \dots, M_n — некоторые множества ($n = 2, 3, \dots$). Универсальным n -*отношением* между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n называется декартово произведение этих множеств. Пустым n -*отношением* между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n называется пустое множество.

Очевидно, что универсальное n -*отношение* между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n будет удовлетворяться любыми n элементами, а пустое n -*отношение* не будет удовлетворяться никакими элементами данных множеств.

7. Функция. Одним из важнейших типов n -*отношений* являются функции. Их наиболее часто обозначают латинскими буквами $f, f_1, \dots, F, F_1, \dots$. Различают функции одного и многих переменных.

Определение 1. Пусть M и N — некоторые множества. *Функцией, определенной на множестве M и принимающей значения в множестве N ,* называется бинарное отношение f между элементами множеств M и N , такое, что для каждого элемента множества M существует единственный элемент множества N , с которым выбранный элемент множества M находится в отношении f .

Множество M называется *областью определения*, а его элементы — *аргументами* функции f . Если упорядоченная пара (x_0, y_0) принадлежит f , то y_0 называется *значением* функции f .

для x_0 и обозначается $f(x_0)$ (читают: « f от x_0 »). Совокупность всех значений функции называется множеством ее значений.

Например, отношение равенства действительных чисел является функцией, область определения которой есть множество действительных чисел R . Ее значение для любого действительного числа есть само это число. В то же время бинарное отношение перпендикулярности прямых и плоскостей пространства не будет функцией, т. к. для каждой прямой пространства существует более чем одна плоскость, ей перпендикулярная.

Каждая функция определяется заданием ее значений для всех ее аргументов или указанием способа вычисления ее значений для каждого аргумента. Так, например, говорят о линейной функции действительного переменного $y = ax + b$ (с постоянными a и b), имея в виду функцию, значение которой для действительного числа x_0 есть число $ax_0 + b$.

Каждая функция, определенная на каком-либо множестве действительных чисел и принимающая значения в множестве действительных чисел, будет подмножеством числовой плоскости, ее можно изобразить геометрически как совокупность всех точек (x_0, y_0) числовой плоскости, первая компонента x_0 , которых принадлежит области определения функции, а вторая — y_0 , есть значение функции для аргумента x_0 . Такое графическое изображение функции известно из элементарной алгебры.

Простейшими функциями одного переменного являются конечные и бесконечные последовательности.

Определение 2. *m-последовательностью* элементов множества M называется функция, определенная на множестве целых чисел $\{1, 2, \dots, m\}$ и принимающая значения в множестве M . *Бесконечной последовательностью* элементов множества M называется функция, определенная на множестве всех целых положительных чисел и принимающая значения в множестве M .

Значение последовательности элементов множества M для целого n называется также *элементом* или *членом последовательности соответствующим n* и обозначается x_n . *m-элементная* и *бесконечная последовательности*, значения которых для целого n есть элемент x_n , обозначаются соответственно (x_1, x_2, \dots, x_m) и (x_n) . Например, $(n!)$ есть бесконечная последовательность целых чисел, значение которой для каждого n есть $n!$.

Функция f , определенная на множестве M и принимающая значения в множестве N , называется также *отображением M в N*; область определения и множество значений функции называются также соответственно *первой* и *второй проекциями f*.

и обозначаются $pr_1 f$ и $pr_2 f$. Значение $y_0 = f(x_0)$ функции f для элемента x_0 называется образом x_0 при отображении f , а x_0 называется прообразом элемента y_0 при отображении f . Говорят также, что f отображает (преобразует) элемент x_0 в y_0 и пишут: « $f : x_0 \rightarrow y_0$ ».

Кроме того, функция f , определенная на множестве M и принимающая значения в множестве N , называется еще семейством элементов множества N с множеством индексов M . В этом случае элементы множества M называются индексами; множество значений f называется множеством элементов семейства; значение f для элемента x_0 называется элементом семейства, соответствующим индексу x_0 и обозначается также y_{x_0} (читают: « y с индексом x_0 »). Семейство с множеством индексов M , значение которого для элемента $x_0 \in M$ есть y_{x_0} , обозначается $(y_x)_{x \in M}$.

Функции многих переменных определяются аналогичным образом.

Определение 3. Пусть M_1, M_2, \dots, M_n, L — некоторые множества ($n = 2, 3, \dots$). Функцией, определенной на множествах M_1, M_2, \dots, M_n и принимающей значения в множестве L , называется $(n+1)$ -отношение F между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n, L такое, что для произвольно взятых элементов x_1, x_2, \dots, x_n множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно существует единственный элемент z_0 множества L , для которого $(n+1)$ -система $(x_1, x_2, \dots, x_n, z_0)$ принадлежит F .

Элементы множеств M_1, M_2, \dots, M_n называются аргументами функции F , соответственно первыми, вторыми, ..., n -ми. Декартово произведение $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ называется областью определения функции F . Значением функции F для n -системы (x_1, x_2, \dots, x_n) ее аргументов, короче, для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , называется элемент z_0 множества Z такой что упорядоченная $(n+1)$ -система $(x_1, x_2, \dots, x_n, z_0)$ принадлежит F , он обозначается $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читается « F от x_1, x_2, \dots, x_n »). Совокупность всех значений функции называется множеством ее значений.

Например, тернарное отношение, образованное из всех упорядоченных троек целых чисел, у которых третье число есть об-

щий наибольший делитель двух первых, является функцией двух переменных. Область ее определения есть декартов квадрат множества всех целых чисел; ее значение для каждой пары целых чисел есть их общий наибольший делитель. В то же время, множество всех упорядоченных троек целых чисел, у которых третье число есть некоторый общий делитель двух первых, не будет функцией, т. к. существуют пары целых чисел, имеющие более одного общего делителя; такой парой будет, например {18, 12}.

Каждая функция многих переменных определяется заданием ее значений для всех упорядоченных n -систем ее аргументов или указанием способа вычисления ее значения для каждой такой n -системы. Так, например, говорят о функции двух действительных переменных $z = x + y$, имея в виду функцию, значения которой для любых двух действительных чисел есть их сумма.

В заключение заметим, что функции одного переменного, определенные на множестве M , обозначаются также символами $f(x), g(x), \dots$, а функции многих переменных, определенные на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , — символами $F(x_1, x_2, \dots, x_n), G(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$.

8. Отображение множества на множество. Взаимно-однозначное отображение. Среди отображений множеств выделяют: отображения множества на множество и взаимно-однозначные отображения.

Определение 1. Отображение f множества M в множество N называется *отображением M на N* , если его вторая проекция совпадает с множеством N : $\text{pr}_2 f = N$, другими словами, если каждый элемент множества N имеет некоторый образ.

Определение 2. Отображение f множества M в множество N называется *взаимно-однозначным* (*одно-однозначным* или еще *отображением «1—1»*), если образами двух любых различных элементов множества M являются различные элементы множества N .

Например, отображение d множества всех отрезков некоторой прямой в множество действительных чисел такое, что образом каждого отрезка является его длина (при выбранной единице масштаба): $d(AB) = |AB|$ есть отображение первого множества на второе, но не взаимно-однозначное.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что множества $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ и $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

2. Найти:

а) все подмножества множества $\{a, b\}$, где $a \neq b$;

б) все собственные подмножества множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ при условии, что все элементы a_1, a_2, \dots, a_n попарно различны.

3. Пусть M — множество всех треугольников на плоскости, X_1 — множество равносторонних треугольников, X_2 — множество прямоугольных треугольников. Найти: а) $X_1 \cup X_2$; б) $X_1 \cap X_2$; в) $X_1 \cap X_2'$; г) $X_1' \cap X_2$.

4. Пусть L — множество всех целых чисел, Z_1 — множество целых чисел, кратных 2, Z_2 — множество целых чисел, кратных 3. Найти: а) $Z_1 \cup Z_2$; б) $Z_1 \cap Z_2$; в) $Z_1 \cap Z_2'$; г) $Z_1' \cup Z_2$.

5. Пусть M — множество всех параллелограммов на плоскости, X_1 — множество квадратов, X_2 — множество прямоугольников, X_3 — множество ромбов на плоскости. Найти: а) $X_i \cup X_j$; б) $X_i \cap X_j$; в) $X_i \cap X_j'$, ($i, j = 1, 2, 3$).

6. Известно, что из 100 студентов в секциях спортклуба занимались: в гимнастической секции — 28, в волейбольной — 42, в баскетбольной — 30, в гимнастической и волейбольной — 10, в гимнастической и баскетбольной — 8, в волейбольной и баскетбольной — 5, во всех трех секциях — 3.

Найти: а) сколько студентов занималось только в одной волейбольной секции?

б) сколько студентов не занималось ни в одной секции?

7. Разностью двух подмножеств X_1 и X_2 множества M , которая обозначается $X_1 \setminus X_2$, называется совокупность всех элементов множества M , принадлежащих X_1 и не содержащихся в X_2 .

Показать, что: а) $X_1 \setminus X_2 = X_1 \cap X_2'$; б) $(X_1 \setminus X_2) \setminus X_3 = X_1 \setminus (X_2 \cup X_3)$.

8. Доказать, что два подмножества множества равны тогда и только тогда, когда их пересечение и объединение совпадают.

9. Для подмножеств множества натуральных чисел:
 $N_1 = \{1, 3, 5\}$, $N_2 = \{5, 4, 2, 1\}$, $N_3 = \{5, 9, 3, 7, 1\}$ и $N_4 = \{2, 6\}$
найти:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (N_1 \times N_2) \cup (N_3 \times N_4); & \text{б) } (N_1 \cup N_3) \times (N_2 \cap N_4); \\ \text{в) } (N_1 \times N_2) \cap (N_3 \times N_4); & \text{г) } (N_1 \cup N_3) \times (N_2 \cup N_4). \end{array}$$

Какими соотношениями связаны между собой найденные множества?

10. Доказать, что декартово произведение двух множеств пустое тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из данных множеств пустое.

11. Какие из перечисленных ниже множеств являются бинарными отношениями, в частности, функциями? Для каждой функции указать область определения и множество значений:

а) множество пар целых чисел, из которых первое равняется квадрату второго;

б) множество пар жителей города N , первый из которых сын второго;

в) множество всех целых чисел, делящихся на 5;

г) множество всех пар подобных между собой треугольников;

д) множество всех пар, образованных из противоположных между собой свободных векторов.

12. Какие из следующих отображений являются отображениями «на» взаимно-однозначными?

- а) отображение множества R в себя: $x \rightarrow x^3$;
- б) отображение отрезка $[0, \pi]$ в отрезок $[0, 1]$: $x \rightarrow \sin x$;
- в) отображение множества $P(M)$ в себя: $X \rightarrow X'$;
- г) отображение множества $P(M) \times P(M)$ в $P(M)$: $(X_1, X_2) \rightarrow X_1 \cap X_2$;
- д) отображение множества всех квадратных матриц в множество действительных чисел, при котором образом каждой матрицы является ее определитель;
- е) отображение множества всех свободных векторов пространства в множество действительных чисел: $a \rightarrow |a|$.
13. Привести примеры взаимно-однозначных отображений:
- а) множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ в себя;
- б) множества R на множество положительных действительных чисел;
- в) отрезка $[0, \frac{\pi}{2}]$ на отрезок $[0, 1]$;
- г) множества $P(M)$ в множество $P(M \times M)$.

§ 2. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1. **Логические операции над высказываниями.** Под *простым высказыванием* понимается предложение, утверждающее что-то о чем-либо. Рассматривая простое высказывание в определенных условиях времени и места, мы можем сказать *истинно* оно или *ложно*, другими словами, что его логическое значение есть «истина» или «ложь».

Например, предложение: «Саратов стоит на Волге» в настоящий момент есть истинное высказывание, а предложение: « $2=1$ » — ложное высказывание.

Из простых высказываний можно образовывать новые *составные* высказывания. В математике для этого наиболее часто используют следующие грамматические связи: «и е», «и», «и ли», «если..., то», «тогда и только тогда». Построение из данных высказываний нового составного высказывания называется *логической операцией* над высказываниями.

В алгебре высказываний все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от содержания их отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и что ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Высказывания обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, \dots подобно тому, как в алгебре числа обозначаются буквами a, b, c, \dots Основными логическими операциями над высказываниями являются: 1) отрицание, 2) конъюнкция, 3) дизъюнкция, 4) импликация и 5) эквивалентность. Первая из них есть всюду определенная унарная операция, остальные четыре — всюду определенные бинарные операции.

Определение 1. *Отрицанием* высказывания A называется новое высказывание, обозначаемое символом $\neg A$ (чита-

ется: «неверно, что A » или, короче, «не A »), которое считается истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно.

Например, для истинного высказывания: «2 больше 1» отрицанием будет ложное высказывание: «неверно, что 2 больше 1», или короче «2 не больше 1».

Зависимость логического значения отрицания $\neg A$ от логического значения высказывания A можно выразить наглядно с помощью следующей таблицы, называемой *таблицей истинности отрицания*:

A	$\neg A$
и	л
л	и

В строках первого столбца таблицы указаны два возможных логических значения высказывания A : «и» (истина) и «л» (ложь), в строках второго столбца таблицы — соответствующие логические значения отрицания $\neg A$: «л» (ложь) в первом случае и «и» (истина) — во втором.

Определение 2. Конъюнцией двух высказываний A, B называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \wedge B$ (читается: « A и B »), которое считается истинным, если оба высказывания A, B истинны, и ложным, если хотя бы один из них ложно. Высказывания A, B называются членами конъюнкции.

Например, для высказываний: « $2 > 1$ », «275 делится на 5» конъюнкция будет истинным высказыванием: « $2 > 1$ и 275 делится на 5».

Зависимость логического значения конъюнкции $A \wedge B$ от логических значений ее членов A и B можно выразить следующей таблицей, называемой *таблицей истинности конъюнкции*:

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

В строках двух первых ее столбцов указаны всевозможные комбинации логических значений высказываний A и B , в строках третьего столбца — соответствующие логические значения конъюнкции $A \wedge B$.

Из определения 2 видно, что союз «и» в алгебре высказываний употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далекие друг от друга по содержанию. В алгебре высказываний рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Определение 3. *Дизъюнкцией* двух высказываний A, B называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \vee B$ (читается: « A или B »), которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний A, B истинно, и ложным, если оба они ложны. Высказывания A, B называются *членами дизъюнкции*.

Например, для двух высказываний: « $3^2 = 7$ », «снег белый» дизъюнкция будет истинным высказыванием: « $3^2 = 7$ или снег белый».

Таблица истинности дизъюнкции, наглядно выражающая зависимость логического значения дизъюнкции от логических значений её членов, имеет вид:

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

В повседневной речи «или» употребляется в различном смысле: во-первых, в неисключающем, когда оно выражает, что из двух высказываний по крайней мере одно истинно, а возможно, что и оба истинны, и, во-вторых, — в исключающем, в смысле «либо... либо», когда выражается, что из двух высказываний истинно только одно, а другое ложно. Например, в предложении: «студенты университета готовят экзамены по учебникам или по конспектам лекций» союз «или» имеет неисключающий смысл, а в предложении: «сегодня вечером мы пойдем в театр или цирк» «или» употреблено в исключающем смысле. В алгебре высказываний «или» употребляется всегда в неисключающем смысле, что и выражает определение 3. Кроме того, в повседневной речи употребляют только дизъюнкции, члены которых как-то связаны по содержанию, тогда как в логике рассматриваются дизъюнкции любых двух высказываний.

Определение 4. *Импликацией* двух высказываний A, B называется новое высказывание, обозначаемое символическим $A \rightarrow B$ (читается: «если A , то B »), которое считается ложным,

если A истинно и B ложно, и истинным при всех других логических значениях высказываний A, B . Высказывание A называется *условием* или *посылкой*, высказывание B — *заключением* или *следствием импликации*.

Импликация $A \rightarrow B$ читается также следующим образом: « A влечет B », или «из A следует B », или « A имплицирует B ».

Таблица истинности импликации имеет вид:

A	B	$A \rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Например, импликации: «если $2 \times 2 = 5$, то снег черный» и «если $2 = 2$, то 6 делится на 3» обе истинны, т. к. у первой из них посылка ложна, а у второй истинно следствие. А импликация «если $2 = 2$, то 3 — отрицательное число» ложна, т. к. ее условие истинно, а заключение ложно.

Принятые чтения импликаций $A \rightarrow B$ неудачны в том отношении, что в обычной речи предложения «если A , то B », «из A следует B » и « A влечет B » имеют совсем другой смысл: они выражают, что между высказываниями A и B существует некоторая зависимость, в силу которой высказывание B как-то может быть выведено из высказываний A . С этой точки зрения приведенное выше предложение: «если $2 \times 2 = 5$, то снег черный» лишено смысла. Согласно же определению 4, можно рассматривать импликацию любых двух высказываний, даже если они не связаны между собой по содержанию, и истинность импликации определяется только логическими значениями ее посылки и заключения.

Значение импликации для математических доказательств состоит в том, что из истинности импликации $A \rightarrow B$ и ее посылки A мы заключаем об истинности ее следствия B .

Определение 5. Эквивалентностью двух высказываний A, B называется новое высказывание, обозначаемое символом $A \leftrightarrow B$ (читается: « A тогда и только тогда, когда B » или, короче: « A эквивалентно B »), которое считается истинным, когда оба высказывания A, B либо истинны, либо ложны, и ложным — в остальных случаях. Высказывания A, B называются *членами эквивалентности*.

Эквивалентность $A \leftrightarrow B$ читается также следующим образом «для того, чтобы A , необходимо и достаточно, чтобы B », или « A , если и только если B », или «если A , то B , и обратно», или « A равносильно B ». Таблица истинности эквивалентности имеет вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Например, эквивалентность: «треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда, $\nexists P = \nexists Q$ » — истина, т. к. ее члены либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Значение эквивалентности для математических доказательств состоит в том, что из истинности эквивалентности и истинности либо ложности одного из ее членов мы заключаем соответственно об истинности либо ложности другого ее члена.

2. Составные высказывания. С помощью рассмотренных в предыдущем по логических операций, из заданной совокупности элементарных высказываний можно строить различные составные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками, как в арифметике. Например, из трех высказываний A , B и C можно построить высказывания $\neg(A \wedge B) \vee C$ и $A \rightarrow [B \leftrightarrow (A \vee C)]$. Первое из них есть дизъюнкция отрицания конъюнкции высказываний A , B и высказывания C , второе есть импликация, посылкой которой является высказывание A , а заключением — эквивалентность высказывания B и дизъюнкции высказываний A , C . Чтобы уменьшить число скобок в составном высказывании, согласимся отрицание высказывания в скобки не заключать.

Логическое значение составного высказывания зависит только от логических значений образующих его элементарных высказываний. Оно может быть найдено на основании определений логических операций над высказываниями № 1. Например, если A , B — истинные, а C — ложное высказывания, то дизъюнкция $\neg(A \wedge B) \vee C$ будет ложна, т. к. оба ее члена ложны, а импликация $A \rightarrow [B \leftrightarrow (A \vee C)]$ истинна, т. к. её посылка и заключение истинны.

3. Формулы и тавтологии. Прежде всего, введем особые символы P , P_1 , P_2 , ..., которые будем называть *пропозиционными*.

ми буквами. Из пропозиционных букв, логических символов и скобок можно составлять различные выражения; некоторые из них называются формулами.

Определение 1. Формулами исчисления высказываний являются:

- а) каждая пропозиционная буква;
- б) выражения $\neg(\Phi)$, $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \rightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \leftrightarrow (\Psi)$, в которых Φ и Ψ — некоторые формулы.

Выражение $\neg(\Phi)$ называется *отрицанием* формулы Φ , выражения $(\Phi) \wedge (\Psi)$, $(\Phi) \vee (\Psi)$, $(\Phi) \rightarrow (\Psi)$, $(\Phi) \leftrightarrow (\Psi)$ — соответственно *конъюнкцией*, *дизъюнкцией*, *импликацией* и *эквивалентностью* формул Φ и Ψ .

Согласно определению 1, каждая формула исчисления высказываний либо является пропозиционной буквой, либо может быть получена из конечного числа пропозиционных букв путем многократного применения пункта б) сначала к исходным пропозиционным буквам, а затем к уже полученным перед этим формулам. Для уменьшения числа скобок в формулах согласимся пропозиционную букву и отрицание формулы в скобки не заключать. Например, выражение $P_1 \leftrightarrow (\neg P_2 \vee \vee (P_3 \wedge P_4))$ является формулой, образованной из четырех пропозиционных букв P_1 , P_2 , P_3 , P_4 следующим образом: сначала строится конъюнкция пропозиционных букв P_3 и P_4 , затем берется отрицание пропозиционной буквы P_2 и строится дизъюнкция двух построенных формул: $\neg P_2$ и $(P_3 \wedge P_4)$, наконец, образуется эквивалентность пропозиционной буквы P_1 и построенной перед этим дизъюнкции $\neg P_2 \vee (P_3 \wedge P_4)$. Примерами выражений, образованных из пропозиционных букв, логических символов и скобок, которые не являются формулами, могут служить: $P \neg$, $(P_1 P_2)$, $\rightarrow (P_1 \wedge P_2)$.

Формулы исчисления высказываний, образованные из пропозиционных букв P_1 , P_2 , ..., P_n , логических символов и скобок, будем обозначать $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$, $\Psi(P_1, P_2, \dots, P_n)$, ... Если в формуле $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$ пропозиционные буквы P_1, P_2, \dots, P_n заменим какими-либо высказываниями A_1, A_2, \dots, A_n соответственно, то получим некоторое, вообще говоря, составное высказывание, которое будем обозначать $\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Определение 2. Пусть $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$ формула исчисления высказываний, образованная из пропозиционных букв P_1, P_2, \dots, P_n , и A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые высказывания. Значением формулы $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$ для высказываний A_1, A_2, \dots, A_n называется логическое значение высказывания

$\Phi(A_1, A_2, \dots, A_n)$, которое получается из данной формулы при замене пропозиционных букв P_1, P_2, \dots, P_n высказываниями A_1, A_2, \dots, A_n соответственно.

Согласно определению 2, значение формулы $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$ для данных высказываний A_1, A_2, \dots, A_n зависит только от логического значения последних. Эту зависимость можно выразить наглядно с помощью таблицы из 2^n строк и $(n+1)$ -го столбца. Число строк таблицы равно числу возможных комбинаций логических значений высказываний A_1, A_2, \dots, A_n , которые и отмечаются в строках первых n ее столбцов. В строках $(n+1)$ -го столбца указываются соответствующие значения данной формулы. Для облегчения составления таблицы в нее можно вводить дополнительные столбцы, в строках которых указываются значения отдельных частей данной формулы. Например, для формулы $\neg(P_1 \wedge P_2) \vee P_3$ таблица значений будет иметь вид:

A_1	A_2	A_3	значение $\neg(P_1 \wedge P_2) \vee P_3$
и	и	и	и
и	л	и	и
л	и	и	и
л	л	и	и
и	и	л	л
и	л	л	и
л	и	л	и
л	л	л	и

Действительно, в первых четырех случаях значения формулы есть «истина», т. к. A_3 истинно; в пятом случае конъюнкция $A_1 \wedge A_2$ истинна, ее отрицание $\neg(A_1 \wedge A_2)$ ложно и высказывание A_3 ложно, следовательно, значение формулы есть «ложь», в последних трех случаях значения формулы есть «истина», т. к. конъюнкция $A_1 \wedge A_2$ ложна, а ее отрицание $\neg(A_1 \wedge A_2)$ истинно.

Определение 3. Формула исчисления высказываний $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$, образованная из пропозиционных букв P_1, P_2, \dots, P_n , называется *тавтологией исчисления высказываний* или *тождественно истинной формулой*, если ее значение для любых высказываний есть «истина».

Нахождение тавтологий является одной из основных задач исчисления высказываний, т. к. они выражают законы логи-

кого мышления, на которые мы опираемся при проведении логических доказательств.

Для каждой данной формулы исчисления высказываний легко проверить, является ли она тавтологией или нет. С этой целью можно составить таблицу ее значений, которая покажет какие значения (и в каком случае) имеет данная формула. Так, из приведенной выше таблицы следует, что формула $\neg(P_1 \wedge P_2) \vee \vee P_3$ не является тавтологией, т. к. одно из ее значений есть «ложь». Этот метод определения, является ли данная формула исчисления высказываний тавтологией, довольно прост, но несколько утомителен. Чтобы доказать, что формула $\Phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$

является тавтологией, достаточно только убедиться, что для любых высказываний ее значение не есть «ложь», что в ряде случаев можно сделать довольно быстро. Так, например, чтобы доказать, что эквивалентность $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow \neg\Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$ есть тавтология, достаточно показать, что для произвольно выбранных высказываний A_1, A_2, \dots, A_n значения ее членов совпадают, т. е. что если $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ истинное высказывание, то и $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ истинное высказывание и, если $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ложно, то и $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ложно, или, короче, что логическое значение $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть «истина» («ложь») тогда и только тогда, когда логическое значение $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть «истина» («ложь»).

Аналогично, чтобы доказать, что импликация $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow \Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$ есть тавтология, достаточно показать, что для произвольно выбранных высказываний A_1, A_2, \dots, A_n значения условия и заключения этой импликации не могут быть «истиной» и «ложью» соответственно, т. е. если $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ истинное высказывание, то и $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ тоже истинное высказывание, или же, что если $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ложно, то и $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ложно.

4. Некоторые основные тавтологии. Теорема 1. Приведенные ниже формулы исчисления высказываний являются тавтологиями:

- (I) $P \vee \neg P$
(закон исключенного третьего),
- (II) $\neg(\neg P \wedge \neg\neg P)$
(закон отрицания противоречия),
- (III) $\neg\neg P \leftrightarrow P$
(закон двойного отрицания).

Действительно, по определению отрицания, для любого высказывания A либо оно, либо его отрицание истинно, и, следовательно, дизъюнкция $A \vee \neg A$ истинна. Т. о., значение формулы

лы (I) для любого высказывания есть «истина», что и доказывает первое утверждение теоремы. Далее, по определению отрицания, для любого высказывания A либо оно, либо его отрицание ложно и, следовательно, конъюнкция $A \wedge \neg A$ ложна, ее отрицание $\neg(A \wedge \neg A)$ истинно. Т. о. значение формулы (II) для любого высказывания есть «истина», что и доказывает второе утверждение теоремы. Наконец, опять-таки по определению отрицания, для любого высказывания A оно и его двойное отрицание одновременно либо истинны, либо ложны. Т. о. для любого высказывания значения членов эквивалентности (III) совпадают, что и доказывает третье утверждение теоремы.

Теорема 2 (свойства конъюнкции и дизъюнкции). Нижеприведенные формулы исчисления высказываний являются тавтологиями:

- (IV) $(P \wedge P) \leftrightarrow P$, (V) $(P \vee P) \leftrightarrow P$
(законы идемпотентности);
- (VI) $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_1$, (VII) $P_1 \rightarrow (P_1 \vee P_2)$
(законы упрощения);
- (VIII) $(P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow (P_2 \wedge P_1)$, (IX) $(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow (P_2 \vee P_1)$
(законы коммутативности);
- (X) $[(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3] \leftrightarrow [P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)]$, (XI) $[(P_1 \vee P_2) \vee P_3] \leftrightarrow [P_1 \vee (P_2 \vee P_3)]$ (законы ассоциативности);
- (XII) $[(P_1 \vee P_2) \wedge P_3] \leftrightarrow [(P_1 \wedge P_3) \vee (P_2 \wedge P_3)]$, (XIII) $[(P_1 \wedge P_2) \vee P_3] \leftrightarrow [(P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3)]$
(законы дистрибутивности);
- (XIV) $\neg(P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee \neg P_2)$, (XV) $\neg(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \wedge \neg P_2)$
(законы де-Моргана).

Для примера докажем законы (IV), (VI), (XII) и (XIV), остальные читатель докажет самостоятельно.

Доказательство закона (IV). Пусть A — некоторое высказывание. По определению 2 п° 1, конъюнкция $A \wedge A$ будет истинна тогда и только тогда, когда высказывание A истинно. Следовательно, значения членов эквивалентности (IV) для любого высказывания совпадают. Т. о., формула (IV) есть тавтология.

Доказательство закона (VI). Пусть A_1, A_2 — некоторые высказывания. По определению 2 п° 1, если конъюнкция $A_1 \wedge A_2$ истинна, то и высказывание A_1 истинно. Т. о. для любых двух высказываний значение импликации (VI) не может быть ложью, следовательно, это тавтология.

Доказательство закона (XII). Пусть A, B, C — три высказывания. Заменим в членах эквивалентности (XII) пропозиционные буквы P_1, P_2, P_3 высказываниями A, B, C .

соответственно. Получим два составных высказывания: $(A \vee \vee B) \wedge C$ (*) и $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (**). Допустим, во-первых, что первое из них истинно. Тогда, согласно определениям 2 и 3 п^o 1, будут истинны, по крайней мере, одно из высказываний A , B и высказывание C , и, следовательно, будет истинна одна из конъюнкций $A \wedge C$ или $B \wedge C$. Отсюда находим, что дизъюнкция (**) истинна. Допустим, во-вторых, что высказывание (*) ложно. Тогда будут ложны или оба высказывания A и B или высказывание C , и, следовательно, ложны обе конъюнкции $A \wedge C$ и $B \wedge C$. Отсюда получаем, что дизъюнкция (**) ложна. Т. о., для любых трех высказываний значения членов эквивалентности (XII) совпадают, следовательно, она является тавтологией.

Доказательство закона (XIV). Пусть A , B — два высказывания. Рассмотрим два составных высказывания $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$, которые получаются из членов эквивалентности (XIV) при замене пропозиционных букв P_1 , P_2 высказываниями A и B соответственно. Допустим, во-первых, что отрицание $\neg(A \wedge B)$ истинно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ будет ложной, а следовательно, по крайней мере, одно из высказываний A или B ложно. Но в таком случае, по крайней мере одно из высказываний $\neg A$ или $\neg B$ истинно, а следовательно, их дизъюнкция $\neg A \vee \neg B$ тоже истинна. Допустим, во-вторых, что отрицание $\neg(A \wedge B)$ ложно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ истинна. Следовательно оба высказывания A , B истинны, а их отрицания $\neg A$, $\neg B$ — оба ложны, т. е. дизъюнкция $\neg A \vee \neg B$ ложна. Т. о. для любых двух высказываний значения членов эквивалентности (XIV) совпадают. Следовательно, формула (XIV) — тавтология.

Определение 1. Для импликации $A \rightarrow B$ следующие три импликации: а) $B \rightarrow A$, б) $\neg A \rightarrow \neg B$ и в) $\neg B \rightarrow \neg A$ называются соответственно *обратной*, *противоположной* и *обратно-противоположной*.

Аналогично определяются обратная, противоположная и обратно-противоположная эквивалентности для данной эквивалентности.

Теорема 3 (свойства импликации и эквивалентности). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$(XVI) P \rightarrow P$$

(закон тождества);

$$(XVII) (P_1 \rightarrow P_2) \leftrightarrow (\neg P_2 \rightarrow \neg P_1)$$

(закон контрапозиции);

$$(XVIII) [(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_3)] \rightarrow (P_1 \rightarrow P_3)$$

(правило цепного заключения);

$$(XIX) P \leftrightarrow P, \quad (XX) (P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_2 \leftrightarrow P_1)$$

$$(XXI) [(P_1 \leftrightarrow P_2) \wedge (P_2 \leftrightarrow P_3)] \rightarrow (P_1 \leftrightarrow P_3)$$

(законы рефлексивности, симметричности и транзитивности)

$$(XXII) (P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \leftrightarrow \neg P_2)$$

(закон противоположности).

Доказательство закона (XVII). Пусть A, B — некоторые высказывания. По определениям 4 и 1 п° 1, импликация $A \rightarrow B$ ложна в том и только в том случае, когда A истинно, а B ложно, т. е., когда $\neg B$ истинно; а $\neg A$ ложно. Последнее, в свою очередь, возможно в том и только в том случае, когда импликация $\neg B \rightarrow \neg A$ ложна. Т. о. для любых двух высказываний члены эквивалентности (XVII) имеют одинаковые значения, следовательно, это тавтология.

Доказательство закона (XVIII). Пусть A, B, C — три высказывания. Допустим, что импликация $A \rightarrow C$ ложна. Тогда по определению 4 п° 1, высказывание A истинно, а C — ложно. Высказывание B может быть либо истинным либо ложным. В первом случае будет ложна импликация $B \rightarrow C$, а во втором — будет ложна импликация $A \rightarrow B$. Следовательно, независимо от логического значения высказывания B , конъюнкция $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ ложна. Т. о., для любых трех высказываний значение импликации (XVIII) не может быть «ложью», т. е. это тавтология.

Доказательство закона (XXII). Пусть A, B — некоторые высказывания. По определению 5 п° 1 эквивалентность $A \leftrightarrow B$ истинна в том и только в том случае, когда высказывания A и B оба истинны или оба ложны, что по определению 1 п° 1 равносильно тому, что отрицания $\neg A$ и $\neg B$ или оба ложны, или оба истинны. Последнее возможно в том и только в том случае, когда эквивалентность $\neg A \leftrightarrow \neg B$ истинна. Т. о. для любых двух высказываний значения членов эквивалентности (XXII) совпадают, следовательно, это тавтология.

Остальные утверждения теоремы читатель докажет самостоятельно.

Теорема 4 (зависимость между логическими операциями). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$(XXIII) (P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow \neg(\neg P_1 \vee \neg P_2),$$

$$(XXIV) (P_1 \vee P_2) \leftrightarrow \neg(\neg P_1 \wedge \neg P_2)$$

(выражение конъюнкции через дизъюнкцию и отрицание и дизъюнкции через конъюнкцию и отрицание);

$$(XXV) (P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow [(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_1)]$$

(выражение эквивалентности через конъюнкцию и импликацию);

$$(XXVI) (P_1 \rightarrow P_2) \leftrightarrow \neg(P_1 \wedge \neg P_2), (XXVII) (P_1 \rightarrow P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \vee P_2)$$

(выражение импликации через конъюнкцию и отрицание и через дизъюнкцию и отрицание);

$$(XXVIII) (P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow \neg(\neg P_1 \rightarrow \neg P_2), (XXIX) (P_1 \vee P_2) \leftrightarrow (\neg P_1 \rightarrow P_2)$$

(выражение конъюнкции и дизъюнкции через отрицание и импликацию).

Доказательство закона (XXV). Пусть A, B — два высказывания. Допустим сначала, что эквивалентность $A \leftrightarrow B$ истинна. Тогда по определению 5 п° 1 высказывания A, B оба или истинны или ложны. В обоих случаях, по определению 4 п° 1, обе импликации $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow A$, а следовательно, и их конъюнкция истинны. Допустим, во-вторых, что эквивалентность $A \leftrightarrow B$ ложна. Тогда один из ее членов истинен, а другой ложен. Если A истинно, а B ложно, то импликация $A \rightarrow B$ ложна, если же A ложно, а B истинно, то импликация $B \rightarrow A$ ложна. Т. о. в обоих случаях конъюнкция $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ложна. Следовательно, для любых двух высказываний значения членов эквивалентности (XXV) совпадают, что и доказывает, что это тавтология.

Доказательство закона (XXVI). Пусть A, B — два высказывания. По определению 4 п° 1, импликация $A \rightarrow B$ ложна в том и только в том случае, когда A истинно, а B ложно, т. е. когда A и $\neg B$ оба истинны. Последнее, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда конъюнкция $A \wedge \neg B$ истинна, а ее отрицание $\neg(A \wedge \neg B)$ ложно. Т. о. для любых двух высказываний значения членов эквивалентности (XXVI) совпадают, следовательно, это тавтология.

Доказательство закона (XXVIII). Пусть A, B — два высказывания. По определениям 2 и 1 п° 1 конъюнкция $A \wedge B$ истинна в том и только в том случае, когда оба высказывания A и B истинны, т. е. когда A истинно и $\neg B$ ложно. Последнее равносильно тому, что импликация $A \rightarrow \neg B$ ложна, а ее отрицание $\neg(A \rightarrow \neg B)$ истинно. Т. о. для любых двух высказываний значения членов эквивалентности (XXVIII) совпадают, следовательно, это тавтология.

Остальные утверждения теоремы предоставляем доказать читателю самостоятельно.

5. Равносильные формулы. Определение 1. Две формулы исчисления высказываний $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n)$ и $\Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$, образованные из одних и тех же пропозиционных букв, называются *равносильными*, если значения их для любых высказываний совпадают.

Каждые две равносильные формулы будут иметь одну и ту же таблицу значений и, наоборот, формулы, таблицы значений которых совпадают, равносильны. Этим замечанием можно пользоваться на практике для установления равносильности данных формул.

Теорема 1 (условие равносильности формул исчисления высказываний). Две формулы исчисления высказываний $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n)$ и $\Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$, образованные из одних и тех же пропозиционных букв P_1, P_2, \dots, P_n , равносильны тогда и только тогда, когда эквивалентность их

$$\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow \Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (*)$$

является тавтологией.

Действительно, докажем сначала необходимость условия теоремы. Пусть формулы $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n)$ и $\Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$ равносильны. Тогда, согласно определению 1, значения их для произвольно выбранных высказываний A_1, A_2, \dots, A_n будут совпадать, т. е. высказывания $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ будут либо оба истинны, либо оба ложны. В обоих случаях эквивалентность $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n) \leftrightarrow \Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ истинна. Т. о. для любых высказываний значение формулы (*) есть «истина», следовательно эта формула тавтология.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть формула (*) есть тавтология, тогда для произвольно выбранных высказываний A_1, A_2, \dots, A_n ее значение будет «истина», т. е. эквивалентность $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n) \leftrightarrow \Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть истинное высказывание. Следовательно, высказывания $\Phi_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $\Phi_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$ либо оба истинны, либо оба ложны. Т. о. для любых высказываний значения формул $\Phi_1(P_1, P_2, \dots, P_n)$ и $\Phi_2(P_1, P_2, \dots, P_n)$ совпадают, следовательно они равносильны. Теорема доказана.

На основании теоремы 1 и теорем предыдущего п° можно указать большое число равносильных формул. В частности, согласно теореме 4 предыдущего п°, равносильны между собой следующие пары формул:

a) $P_1 \wedge P_2$ и $\neg(\neg P_1 \vee \neg P_2);$

- | | | |
|------------------------------|---|---|
| б) $P_1 \vee P_2$ | и | $\neg(\neg P_1 \wedge \neg P_2);$ |
| в) $P_1 \leftrightarrow P_2$ | и | $(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_1);$ |
| г) $P_1 \rightarrow P_2$ | и | $\neg(P_1 \wedge \neg P_2);$ |
| д) $P_1 \rightarrow P_2$ | и | $\neg P_1 \vee P_2;$ |
| е) $P_1 \wedge P_2$ | и | $\neg(P_1 \rightarrow \neg P_2);$ |
| ж) $P_1 \vee P_2$ | и | $\neg P_1 \rightarrow P_2.$ |

Имея это в виду, говорят, что: а) операция конъюнкции может быть выражена через дизъюнкцию и отрицание; б) операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание; в) операцию эквивалентности можно выразить через конъюнкцию и импликацию, и так далее. Т. о. приходим к выводу, что все 5 основных логических операций можно выразить через одну из следующих пар: конъюнкцию и отрицание, дизъюнкцию и отрицание, импликацию и отрицание.

6. О методах математических доказательств. Каждое логическое доказательство опирается на законы исчисления высказываний. Выясним логические основания наиболее распространенных в математике методов доказательства.

1^о **Доказательство с помощью построения цепочки импликаций.** Этим методом пользуются при доказательстве теорем, выраженных в форме импликации: «Если высказывание A истинно, то и высказывание B истинно». Для доказательства находят последовательность истинных импликаций вида:

$$A \rightarrow A_1, A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n, A_n \rightarrow B, \quad (*)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые вспомогательные высказывания. Отсюда делают заключение о справедливости данной теоремы $A \rightarrow B$. Этот вывод опирается на правило цепного заключения (XVIII).

В дальнейшем последовательность импликаций вида (*) будем называть *цепочкой импликаций* и записывать сокращенно следующим образом:

$$A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n \rightarrow B.$$

2^о **Доказательство от противного.** Этот метод используется при доказательствах теорем, выраженных в форме импликации: « $\neg A \rightarrow B$ ». Для доказательства предполагают, что заключение теоремы B ложно и выводят отсюда, что условие теоремы A тоже ложно, т. е. доказывают истинность обратно-противоположной импликации: $\neg B \rightarrow \neg A$. Отсюда делают зак-

лючение о справедливости данной теоремы. Этот вывод опирается на закон контрапозиции (XVII).

3º Равносильные условия. В математике часто встречаются теоремы вида: «Условие A равносильно условию B », что выражается также словами: «Для того чтобы имело место условие A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие B ». Доказательство такой теоремы обычно сводится к доказательству двух утверждений: 1) «Если имеет место условие A , то выполняется и условие B », короче, « B необходимо для A » и 2) «Если выполняется условие B , то имеет место и условие A », короче, « B достаточно для A ». Первое из них называется также прямой, второе — обратной теоремами. С точки зрения логики каждая теорема указанного вида есть эквивалентность $A \leftrightarrow B$, указанный способ ее доказательства опирается на тавтологию (XXV).

Существует другой способ доказательства теорем вида: « A равносильно B », когда одновременно доказывается и необходимость и достаточность условия B для A . Для этого находят последовательность истинных эквивалентностей вида:

$$A \leftrightarrow A_1, A_1 \leftrightarrow A_2, \dots, A_{n-1} \leftrightarrow A_n, A_n \leftrightarrow B, \quad (**)$$

где A_1, A_2, \dots, A_n — некоторые вспомогательные высказывания. На основании закона транзитивности (XI) отсюда можно сделать вывод об истинности данной теоремы. В дальнейшем этот метод будет часто использоваться. Последовательность эквивалентностей вида (**) будем называть цепочкой эквивалентностей и записывать кратко следующим образом:

$$A \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow B.$$

Далее, доказательство теоремы « A равносильно B » часто заменяют доказательством противоположной теоремы: «не A равносильно не B », другими словами: «Для того, чтобы не имело место условие A , необходимо и достаточно, чтобы не выполнялось условие B ». Этот метод основывается на тавтологии (XXII).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:
 - а) Москва — столица СССР;
 - б) Студент механико-математического факультета университета;
 - в) Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$;
 - г) $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} = 28$;
 - д) Луна есть спутник Марса;
 - е) $a > 0$.

2. Пусть A и B есть соответственно высказывания: «Этот треугольник равнобедренный» и «Этот треугольник правильный». Прочитать словами следующие высказывания:

- а) $\neg A \wedge \neg B$; б) $\neg(A \vee B)$; в) $\neg A \rightarrow \neg B$;
г) $(A \vee B) \leftrightarrow A$; д) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg B$.

3. Следующие составные высказывания расчленить на простые и записать символически, введя сокращенные обозначения для простых их членов:

- а) Если 18 делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6;
б) Произведение трех чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю;
в) Число x_0 является корнем системы n уравнений с одним неизвестным тогда и только тогда, когда оно является корнем каждого из уравнений системы;
г) Если в треугольнике медиана не является высотой и биссектрисой, то этот треугольник не равнобедренный и не равносторонний.

4. Из двух данных высказываний A и B построить составное высказывание с помощью операций отрицания и конъюнкции, которое было бы:

- а) истинно тогда и только тогда, когда оба данные высказывания ложны;
б) должно тогда и только тогда, когда оба данные высказывания истинны;
в) должно тогда и только тогда, когда A — истинно, а B — ложно.

5. Из трех данных высказываний A , B , C построить составное высказывание, которое истинно, когда истинно какое-либо одно из данных высказываний, и только в этом случае.

6. Используя дизъюнкцией двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читают: «либо A , либо B »), которое истинно, когда одно и только одно из данных высказываний истинно, и ложно в остальных случаях.

Составить таблицу истинности используя дизъюнкцию и выразить ее через основные операции над высказываниями.

7. Штрихом Шеффера двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A|B$ (читают: « A не совместно с B »), которое должно только тогда, когда оба данные высказывания истинны.

Составить таблицу истинности штриха Шеффера и выразить его через основные операции над высказываниями.

Доказать, что все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Шеффера.

8. Штрихом Лукасевича двух высказываний A и B называется новое высказывание, обозначаемое $A \downarrow B$ (читают: «ни A , ни B »), которое истинно в том и только в том случае, когда оба данные высказывания ложны.

Составить таблицу истинности штриха Лукасевича и выразить его через основные операции над высказываниями.

Доказать, что все основные операции над высказываниями можно выразить через штрих Лукасевича.

9. Сколько существует: а) различных унарных операций над высказываниями? б) различных бинарных операций над высказываниями?

Выписать их таблицы истинности.

10. Доказать, что все бинарные операции над высказываниями мож-

ио выразить через одну из следующих пар: а) отрицание и конъюнкцию; б) отрицание и дизъюнкцию; в) отрицание и импликацию.

11. Доказать, что операция отрицания не может быть выражена через основные бинарные операции над высказываниями.

12. Доказать, что каждая тернарная логическая операция над высказываниями может быть выражена через основные операции над высказываниями.

Обобщить утверждение для n -арных логических операций над высказываниями.

13. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления высказываний:

а) $(\neg P_1 \wedge \neg P_2) \rightarrow (P_1 \vee P_2)$;

б) $[(P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 P_2)] \rightarrow \neg P_3$;

в) $P_1 \rightarrow (P_2 \vee P_3) \rightarrow P_3$;

г) $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow ((P_1 \rightarrow \neg P_2) \rightarrow \neg P_1)$;

д) $(P_1 \wedge (\neg P_2)) \leftrightarrow (P_2 \rightarrow \neg P_1)$;

е) $(P_1 \rightarrow P_3) \rightarrow [(P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow ((P_1 \vee P_2) \rightarrow P_3)]$;

ж) $[(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_1 \rightarrow P_3)] \rightarrow [P_1 \rightarrow (P_2 \wedge P_3)]$;

з) $[(P_1 \wedge \neg P_2) \rightarrow (\neg \neg P_1 \vee \vee P_2)] \leftrightarrow (\vee P_1 \vee P_2)$.

14. Составить таблицу значений следующих формул:

а) $\neg (P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow P$;

б) $[(P_1 \wedge P_2) \wedge \neg P_2] \leftrightarrow P_1$;

в) $[(P_1 \vee P_2) \vee \neg P_2] \leftrightarrow \neg P_1$;

г) $(P_1 \rightarrow P_2) \leftrightarrow [(P_1 \wedge P_3) \rightarrow (P_2 \wedge P_3)]$.

15. Привести примеры составных высказываний, имеющих схему:

а) закона исключенного третьего;

б) закона двойного отрицания;

в) законов де-Моргана;

г) правила цепного заключения и убедиться в их истинности непосредственно.

16. Пользуясь основными законами исчисления высказываний, проверить, что следующие составные высказывания истинны:

а) Действительное число a больше 2-х или меньше -1 в том и только в том случае, когда из того, что a не больше 2-х, следует, что $a < -1$;

б) Если справедливо утверждение, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами нечетной степени имеет, по крайней мере, один действительный корень, то справедливо и утверждение, что каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами, не имеющее действительного корня, имеет четную степень;

в) Два утверждения: «Система n линейных однородных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель системы отличен от нуля» и «Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет, по крайней мере, два решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю» одновременно истинны или одновременно ложны;

г) Если справедливо, что дифференцируемая функция непрерывна, то невозможно, чтобы функция была дифференцируема и разрывна;

д) Если справедливо, что невырожденная матрица имеет обратную, то справедливо также, что матрица вырождается или имеет обратную.

17. Используя только законы исчисления высказываний, выяснить, какие из приведенных ниже высказываний следуют из высказывания: «Если целое число n делится на 6, то n делится на 3»:

- а) Чтобы n делилось на 3, достаточно, чтобы оно делилось на 6;
- б) Чтобы n делилось на 6, достаточно, чтобы оно делилось на 3;
- в) Чтобы n не делилось на 3, необходимо, чтобы n не делилось на 6;
- г) Число n делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3;
- д) Число n не делится на 3 только тогда, когда оно не делится на 6.

18. Выяснить на основе законов исчисления высказываний, какие из приведенных ниже высказываний будут истинны, если истинно высказывание: «Равные треугольники подобны»:

- а) Треугольники равны только в случае их подобия;
- б) Подобие треугольников является необходимым условием их равенства;
- в) Треугольники подобны только в случае их равенства;
- г) Равенство треугольников является достаточным условием их подобия;
- д) Подобие треугольников является необходимым и достаточным условием их равенства.

19. Обобщить законы де-Моргана для конъюнкций и дизъюнкций с произвольным числом членов.

20. Какие из следующих формул являются тавтологиями:

- а) $[(P_1 \rightarrow P_2) \vee (P_1 \rightarrow P_3)] \rightarrow [P_1 \rightarrow (P_2 \vee P_3)];$
- б) $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow [(P_3 \rightarrow P_2) \rightarrow [(P_1 \wedge P_3) \rightarrow P_2]];$
- в) $[P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_3)] \rightarrow [(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow (P_1 \rightarrow P_3)];$
- г) $\neg[(\neg P_1 \wedge P_2) \wedge (P_1 \vee P_3)];$
- д) $[(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_1 \rightarrow P_3)] \rightarrow [P_1 \rightarrow (P_2 \wedge P_3)].$

21. Доказать тавтологию:

- а) $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow [(P_1 \vee P_3) \rightarrow (P_2 \vee P_3)];$
- б) $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow [(P_1 \wedge P_3) \rightarrow (P_2 \wedge P_3)];$
- в) $(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow [(P_2 \rightarrow P_3) \rightarrow (P_1 \rightarrow P_3)];$
- г) $[(P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3] \leftrightarrow [P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_3)];$
- д) $[(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow P_2] \leftrightarrow (P_1 \rightarrow P_2);$
- е) $[(P_1 \wedge P_2) \leftrightarrow P_2] \leftrightarrow (P_2 \rightarrow P_1).$

22. Доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:

- а) $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P;$
- б) $[\neg P \rightarrow (P_1 \wedge \neg P_1)] \rightarrow P.$

Какие математические доказательства используют эти тавтологии?

Привести примеры таких доказательств.

23. Доказать, что если две формулы исчисления высказываний Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$ являются тавтологиями, то формула Ψ — тавтология (правило отщепления).

24. Доказать, что если формула $\Phi(P)$, содержащая пропозиционную букву P , является тавтологией исчисления высказываний, то формула

получающаяся из $\Phi(P)$ заменой пропозиционной буквы P произвольной формулой исчисления высказываний, также является тавтологией (*правило подстановки*).

25. Пользуясь основными законами исчисления высказываний и правилом подстановки, доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:

а) $P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_1 \wedge P_2));$

б) $\neg(P_1 \leftrightarrow P_2) \leftrightarrow (P_1 \leftrightarrow \neg P_2);$

в) $(P_1 \vee P_2) \leftrightarrow [(P_1 \rightarrow P_2) \rightarrow P_2];$

г) $[(P_1 \vee P_3) \wedge (P_2 \vee P_3)] \leftrightarrow [(\neg P_1 \vee \neg P_2) \rightarrow P_3];$

д) $\{P_1 \rightarrow [P_1 \wedge \neg(P_2 \vee P_3)]\} \leftrightarrow [\neg P_1 \vee (\neg P_2 \wedge \neg P_3)];$

26. *Принципом полной дизъюнкции* называется следующая теорема: «Пусть даны две импликации, такие, что: а) условие, по крайней мере, одной из них выполняется и б) заключения их несовместны. Тогда, если данные импликации истинны, то и обратные им импликации тоже истинны».

Выразить принцип полной дизъюнкции формулой и убедиться, что это будет тавтология.

Обобщить принцип полной дизъюнкции на произвольное конечное число импликаций. Привести примеры, иллюстрирующие принцип полной дизъюнкции.

27. Следующие формулы заменить равносильными так, чтобы они содержали только знаки операций отрицания и дизъюнкции:

а) $P_1 \leftrightarrow P_2;$ б) $(\neg P_1 \wedge P_2) \rightarrow (\neg P_2 \wedge P_1).$

28. Для нижеследующих формул найти более простые равносильные формулы:

а) $\neg[(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow \neg P_1)];$

б) $[(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_2 \rightarrow P_3)] \rightarrow (P_3 \rightarrow P_1);$

в) $(P_1 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_3) \vee (P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)).$

§ 3. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

1. Понятие предиката. В математике и других науках наряду с высказываниями мы встречаемся с выражениями, грамматически имеющими форму высказываний, но содержащими предметные переменные некоторых множеств. Такое выражение можно получить из любого высказывания, заменив в нем обозначения предметов предметными переменными множеств, к которым принадлежат эти предметы. Если в этом выражении все предметные переменные снова заменить какими-либо элементами данных множеств, то опять получим высказывание. Например, предложение: «2 — простое число» есть высказывание. Заменим «2» предметным переменным множества натуральных чисел $\langle n \rangle$, получим выражение: « n — простое число». Грамматически оно имеет ту же форму, что и данное высказывание, но не является таковым. При замене предметного переменного $\langle n \rangle$ любым натуральным числом 1, 2, 3, ... построенное выражение будет снова обращаться в высказывание. Все подобные выражения называются предикатами или функциями-высказываниями.

В дальнейшем будем рассматривать предикаты, определенные на n множествах M_1, M_2, \dots, M_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Предметные переменные множества M_1 будем обозначать x_1, x'_1, x''_1, \dots , его элементы — $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots$, аналогично предметные переменные множества M_2 будем обозначать x_2, x'_2, x''_2, \dots , его элементы $x_2^0, x_2^1, x_2^2, \dots$ и так далее.

Определение 1. *n-местным предикатом, определенным на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , называется выражение, содержащее предметные переменные данных множеств и обращающееся в высказывание при замене последних любыми элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответственно.*

жества M_1, M_2, \dots, M_n называются *базисными множествами* предиката, их элементы — *аргументами* предиката соответственно первыми, вторыми, ..., n -ми. n -местный предикат ($n \geq 2$), все базисные множества которого совпадают, называется *однородным*.

n -местные предикаты, определенные на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , содержащие предметные переменные x_1, x_2, \dots, x_n , обозначаются $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ... Высказывание, в' которое обращается предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при замене предметных переменных x_1, x_2, \dots, x_n аргументами $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n$ соответственно, обозначается $A(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n)$.

Поясним определение 1 примерами:

а) Пусть x есть переменное, принимающее значение в множестве действительных чисел. Тогда выражение: « x больше двух» есть одноместный предикат, определенный на множестве действительных чисел. Заменяя x числом 3, получим истинное высказывание: « $3 > 2$ », а заменяя x числом 1, получим ложное высказывание: « $1 > 2$ ».

б) Пусть M переменное, принимающее значение в множестве всех точек плоскости, A — некоторая точка плоскости, x — переменное, принимающее значение в множестве действительных чисел. Тогда выражение: «расстояние от точки A до точки M равняется x см» есть двухместный предикат, определенный на множестве всех точек плоскости и множестве всех действительных чисел. Заменяя M и x соответственно точкой A и числом 0, получим истинное высказывание: «расстояние от точки A до точки A равняется 0 см», а заменяя M и x соответственно точкой A и числом 1, получим ложное высказывание: «расстояние от точки A до точки A равняется 1 см».

в) Каждое уравнение (и каждая система уравнений) с n неизвестными, допустимая область значений которых есть множество действительных чисел, будет однородным n -местным предикатом, определенным на множестве действительных чисел. Если в уравнении неизвестные заменим каким-либо решением этого уравнения, то получим истинное высказывание. При замене неизвестных числами, не образующими решения уравнения, получим ложное высказывание.

Определение 2. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n$ — некоторые элементы множеств M_1, M_2, \dots

\dots, M_n соответственно. Значением предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , называется логическое значение высказывания $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которое обращается данный предикат при замене предметных переменных x_1, x_2, \dots, x_n аргументами x_1, x_2, \dots, x_n соответственно.

Если значение предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n есть «истина», то говорят, что аргументы x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют данному предикату, в противном случае говорят, что аргументы x_1, x_2, \dots, x_n не удовлетворяют данному предикату.

Например, относительно предиката « $x > 2$ », рассмотренного выше в примере а), можно сказать, что значение его для чисел 3 и 1 есть соответственно «истина» и «ложь», и следовательно, число 3 удовлетворяет, а число 1 не удовлетворяет этому предикату.

2. Равносильные предикаты. Следствие предиката. Определение 1. Два n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах M_1, M_2, \dots, M_n , называются *равносильными*, если значения их для любых аргументов совпадают, иначе говоря, если они удовлетворяются одними и теми же аргументами.

Например, если x — переменное, принимающее значение в множестве действительных чисел, то одноместные предикаты « $x > 2$ » и « $x - 2 > 0$ » равносильны. Далее, любые два уравнения равносильные в алгебраическом смысле слова будут равносильными предикатами.

Определение 2. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — два n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Тогда предикат $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *следствием* предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяется любыми аргументами, удовлетворяющими $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Например, одноместный предикат, определенный на множестве целых чисел, « n делится на 3» есть следствие одноместного предиката, определенного на том же множестве: « n делится на 6».

Сопоставляя определения 1 и 2, приходим к следующей теореме:

Теорема 1. Два n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого.

3. Тождественно истинный, тождественно ложный и выполнимый предикаты. Определение 1. n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , называется: а) *тождественно истинным*, если значение его для любых аргументов есть «истина»;

б) *тождественно ложным*, если значение его для любых аргументов есть «ложь»;

в) *выполнимым*, если существует, по крайней мере, одна n -система его аргументов, для которой значение предиката есть «истина».

Например, пусть x, y — переменные, принимающие значения в множестве действительных чисел. Тогда: а) однородный двухместный предикат $x + y = y + x$ будет тождественно истинным; б) одноместный предикат $x + 1 = x$ будет тождественно ложным; в) однородный двухместный предикат $x^2 + y^2 = 5$ будет выполнимым, но не тождественно истинным.

Очевидно, что: 1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно; 2) каждый выполнимый предикат будет не тождественно ложным и обратно, каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым; 3) каждый тождественно истинный предикат удовлетворяется любыми его аргументами; 4) каждый тождественно ложный предикат не удовлетворяется никакой n -системой его аргументов.

Теорема 1. Каждые два тождественно истинных n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, и каждые два тождественно ложных n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны между собой. Обратно, каждый предикат, равносильный тождественно истинному предикату, будет тождественно истинным, и каждый предикат, равносильный тождественно ложному предикату, будет тождественно ложным.

Теорема 2. а) Каждый тождественно истинный n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , является следствием любого другого n -местного предиката, определенного на тех же множествах;

б) Каждый n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , является следствием любого тождественно ложного n -местного предиката, определенного на тех же множествах.

Несложные доказательства теорем 1 и 2 предоставляем проделать читателю самостоятельно.

Теорема 3. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — два n -местных предиката, определенные на одних и тех же мно-

жествах M_1, M_2, \dots, M_n , такие, что $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть следствие $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда:

- если $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно истинный, то и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно истинный;
- если $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполнимый, то и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполнимый;
- если $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный, то и $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный.

В с. д., по условию теоремы, любые аргументы, удовлетворяющие предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяют и предикату $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Следовательно:

а') если предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяется любыми аргументами, то и предикат $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет удовлетворяться любыми аргументами;

б') если предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяется какими-либо аргументами, то и предикат $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворится этими аргументами;

в') если предикат $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не удовлетворяется никакими аргументами, то не могут существовать аргументы, удовлетворяющие предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Согласно определению 1, утверждения а'), б'), в') равносильны утверждениям теоремы а), б) и в) соответственно.

4. Множество истинности предиката. Классификатор. Определение 1. *Множеством истинности* n -местного предиката, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , называется совокупность всех n -систем его аргументов, для которых значение предиката есть «истина», другими словами, которые удовлетворяют данному предикату.

Множество истинности предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обозначается символом $(\mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_n))A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читается: «множество всех n -систем (x_1, x_2, \dots, x_n) таких, что $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ »). Знак $(\mathcal{C}(x_1, x_2, \dots, x_n))$ называется *символом абстракции* или *классификатором* (по переменным x_1, x_2, \dots, x_n). Например, для рассмотренного выше одноместного предиката « $x > 2$ », определенного на множестве действительных чисел, множество истинности есть бесконечный интервал $(2, \infty)$. Это можно выразить равенством: $(\mathcal{C}x)(x > 2) = (2, \infty)$.

Из определения 1 видно, что множество истинности любого одноместного предиката, определенного на множестве M , есть подмножество множества M ; множество истинности n -местного предиката, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , при $n \geq 2$ есть n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots

..., M_n . В частности, множества истинности одноместного однородного двухместного предикатов, определенных на множестве действительных чисел, будут соответственно подмножества числовой прямой и числовой плоскости, их можно изображать на чертеже.

Непосредственно из определений 1 данного и второго пунктов следует

Теорема 1 (условие совпадения множеств истинности предикатов). Множества истинности двух n -местных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на один и тех же множествах M_1, M_2, \dots, M_n , совпадают тогда и только тогда, когда данные предикаты равносильны.

Следующая теорема показывает, что между классами равносильных n -местных предикатов, определенных на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и n -отношениями между элементами этих множеств существует взаимно-однозначное соответствие.

Теорема 2. Каждому классу равносильных n -местных предикатов, определенных на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , соответствует n -отношение между элементами этих множеств — множество истинности любого предиката данного класса, и обратно, каждому n -отношению между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n соответствует класс равносильных предикатов определенных на тех же множествах, для которых данное n -отношение является их общим множеством истинности.

Действительно, первое утверждение теоремы следует непосредственно из предыдущей теоремы. Для доказательства второго утверждения возьмем некоторое n -отношение ρ между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n . Рассмотрим выражение «упорядоченная n -система (x_1, x_2, \dots, x_n) принадлежит n -отношению ρ ». Это выражение есть n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , удовлетворяющий теми и только теми n -системами его аргументов, которые принадлежат n -отношению ρ . Следовательно, множество истинности построенного предиката есть данное n -отношение ρ . Совокупность всех n -местных предикатов, определенных на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , равносильных с построенным предикатом, будет искомым классом предикатов. Теорема доказана.

Заметим, что, согласно только что сказанному, справедливо следующее равенство:

$$\rho = (\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \rho \}). \quad (1)$$

Теорема 3 (условие включения множеств истинности предикатов). Если $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах M_1, M_2, \dots, M_n , то множество истинности предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ включается в множество истинности предиката $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является следствием $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

В с. д., множество истинности предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ включается в множество истинности предиката $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда каждая n -система (x_1, x_2, \dots, x_n) , принадлежащая первому множеству, принадлежит и второму множеству, т. е. когда любые аргументы x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющие предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяют и предикату $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По определению 2 п^о 2 последнее равносильно тому, что $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является следствием $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Непосредственно из определений 1 этого и третьего пунктов и определений универсального и пустого n -отношений, следует

Теорема 4. n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , будет:

а) тождественно истинным тогда и только тогда, когда множество истинности его есть универсальное n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n ;

б) тождественно ложным тогда и только тогда, когда множество истинности его есть пустое n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n ;

в) выполнимым тогда и только тогда, когда множество истинности его есть непустое n -отношение между элементами множеств M_1, M_2, \dots, M_n .

5. Предикаты и пропозиционные функции. Определение 1. Пропозиционной функцией (одного или нескольких переменных) называется функция, принимающая значения в множестве, состоящем из двух элементов: «истина» и «ложь».

Пропозиционные функции часто определяются с помощью предикатов.

Определение 2. Пусть дан n -местный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Пропозиционной функцией, соответствующей предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется функция, определенная на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , значение которой для аргумент-

тов x_1, x_2, \dots, x_n есть значение данного предиката для этих же аргументов.

Например, для одноместного предиката « $x > 2$ », определенного на множестве действительных чисел, соответствующей пропозиционной функцией будет функция, определенная на множестве действительных чисел, значение которой для действительного числа x_0 есть логическое значение высказывания « $x_0 > 2$ ». Так, для числа 1 значение этой пропозиционной функции есть «ложь», а для числа 3 ее значение есть «истина».

Непосредственно из определения 2 и определения 1 п° 2 следует

Теорема 1. Два n -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда соответствующие им пропозиционные функции совпадают.

Заметим, что в литературе иногда предикат отождествляют с соответствующей ему пропозиционной функцией.

6. Простейшие логические операции над предикатами. Простейшими логическими операциями над предикатами, так же как и для высказываний, являются: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность, которые обозначаются с помощью тех же символов, что и для высказываний. При этом от содержания предикатов отвлекаются, они рассматриваются только с точки зрения их значений, другими словами, равносильные предикаты не различаются.

Определение 1. Отрицанием n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , называется новый n -местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читается: «неверно, что $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ »), который имеет значение «истина» для тех и только тех его аргументов

x_1, x_2, \dots, x_n , для которых значение данного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть «ложь». Другими словами, предикат $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяется теми и только теми аргументами, которые не удовлетворяют данному предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Например, для одноместного предиката, определенного на множестве действительных чисел, « x больше двух», отрицанием будет одноместный предикат, также определенный на множестве действительных чисел, « x не больше двух». Число $\sqrt{3}$ данному предикату не удовлетворяет, а его отрицанию удовлетворяет.

Теорема 1. Для n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , множество истинности его отрицания $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совпадает с дополнением множества истинности данного предиката:

$$(\bigcup(x_1, x_2, \dots, x_n)) \neg A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = [(\bigcup(x_1, x_2, \dots, x_n)) A(x_1, x_2, \dots, x_n)]'. \quad (1)$$

В с. д., согласно определению 1, множество истинности предиката $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совпадает с множеством всех n -сistem (x_1, x_2, \dots, x_n) его аргументов, не удовлетворяющих предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое, в свою очередь, является дополнением множества истинности предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Теорема 2 (условие тождественной истинности отрицания предиката). Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

Действительно, пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — некоторый n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Предикат $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда он удовлетворяется любыми его аргументами. По определению 1 это возможно в том и только в том случае, когда данный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не удовлетворяется никакими его аргументами, т. е. когда $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный.

Определение 2. Конъюнцией n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и m -местного предиката $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах N_1, N_2, \dots, N_m , называется новый $(n+m)$ -местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (читается: « $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ »), который имеет значение «истина» для тех и только тех его аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$,

что значения обоих данных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$, для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m соответственно суть «истина». Другими словами, конъюнкции $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ удовлетворяют такие и только такие аргументы $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют пре-

дикату $A (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и y_1, y_2, \dots, y_m удовлетворяют предикату $B (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Например, для одноместного предиката « $x > 2$ », определенного на множестве действительных чисел, и двухместного предиката «точка M лежит на прямой l », определенного на множестве всех точек и множестве всех прямых плоскости, конъюнцией будет трехместный предикат « $x > 2$ и точка M лежит на прямой l », определенный на множествах действительных чисел, точек и прямых плоскости. Если l_0 некоторая определенная прямая плоскости, A — одна из точек прямой l_0 , то значение построенной конъюнкции для числа 3, точки A и прямой l_0 будет «истина», а значение ее для числа 1, точки A и прямой l_0 будет «ложь».

Определение 3. *Дизъюнцией n -местного предиката $A (x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и m -местного предиката $B (y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах N_1, N_2, \dots, N_m , называется новый $(n+m)$ -местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$, обозначаемый $A (x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B (y_1, y_2, \dots, y_m)$ (читается: « $A (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $B (y_1, y_2, \dots, y_m)$ »), который имеет значение «истина» для тех и только тех его аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что значение, по крайней мере, одного из предикатов $A (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $B (y_1, y_2, \dots, y_m)$ для аргументов $\underset{0}{x}_1, \underset{0}{x}_2, \dots, \underset{0}{x}_n$ и $\underset{0}{y}_1, \underset{0}{y}_2, \dots, \underset{0}{y}_m$ соответственно есть «истина». Другими словами, дизъюнкция $A (x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B (y_1, y_2, \dots, y_m)$ удовлетворяют такие и только такие аргументы $\underset{0}{x}_1, \underset{0}{x}_2, \dots, \underset{0}{x}_n, \underset{0}{y}_1, \underset{0}{y}_2, \dots, \underset{0}{y}_m$, что x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют предикату $A (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или y_1, y_2, \dots, y_m удовлетворяют предикату $B (y_1, y_2, \dots, y_m)$.*

Операции конъюнкции и дизъюнкции можно применять также к предикатам, у которых имеются общие переменные. В таком случае число переменных конъюнкции и дизъюнкции будет равняться числу различных переменных у их членов. В частности, конъюнкция и дизъюнкция двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, будет n -местным предикатом, зависящим от этих же переменных. При этом конъюнкция будет иметь значение «истина» для тех и только тех её аргументов, для которых оба ее члена имеют значение «истина», а дизъюнкция будет иметь значение «истина» для тех и только

тех её аргументов, для которых, по крайней мере, один из ее членов имеет значение «истина».

Теорема 3. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — два n -местных предиката, зависящие от одних и тех же переменных. Тогда:

a) множество истинности конъюнкции $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равняется пересечению множеств истинности ее членов;

б) множество истинности дизъюнкции $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равняется объединению множеств истинности ее членов:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, \dots, x_n)[A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ = (C(x_1, x_2, \dots, x_n)) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \cap \\ \cap (C(x_1, x_2, \dots, x_n)) B(x_1, x_2, \dots, x_n); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (C(x_1, x_2, \dots, x_n))[A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \\ = (C(x_1, x_2, \dots, x_n)) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \cup \\ \cup (C(x_1, x_2, \dots, x_n)) B(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, согласно сделанному выше замечанию, множество истинности конъюнкции $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совпадает с множеством всех n -систем (x_1, x_2, \dots, x_n)

ее аргументов, удовлетворяющих обоим данным предикатам, которое в то же время является пересечением множеств истинности данных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тем самым доказано утверждение а). Утверждение б) доказывается аналогично.

Теорема 4 (условие тождественной истинности конъюнкции предикатов). Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

В с. д., пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ — m -местный предикат, определенный на множествах N_1, N_2, \dots, N_m . Конъюнкция $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ будет тождественно истинна тогда и только тогда, когда она удовлетворяется любыми ее аргументами. По определению 2 это возможно в том и только том случае, когда предикаты

$A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ удовлетворяются любыми своими аргументами, т. е. когда оба данных предиката тождественно истинны.

Теорема 5. (*Условие выполнимости дизъюнкции предикатов*). *Дизъюнкция двух предикатов выполнима тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из них выполним.*

В с. д., дизъюнкция $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ будет выполнима тогда и только тогда, когда она удовлетворяется некоторыми ее аргументами $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$.

По определению 3 это возможно в том и только в том случае, когда аргументы x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или аргументы y_1, y_2, \dots, y_m удовлетворяют $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$, т. е. когда $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ есть выполнимый предикат.

Из теоремы 5, пользуясь законом противоположности (XXII) и законом де-Моргана для дизъюнкции (XV) и учитывая, что каждый невыполнимый предикат будет тождественно ложным и обратно, получаем

Следствие (*условие тождественной ложности дизъюнкции предикатов*). *Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.*

Определение 4. *Импликацией* n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и m -местного предиката $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах N_1, N_2, \dots, N_m , называется новый предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (читается: «если $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ », который имеет значение «ложь» для тех и только тех его аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что значение предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для x_1, x_2, \dots, x_n есть «истина», а значение предиката $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ для y_1, y_2, \dots, y_m есть «ложь»). Другими словами, импликация $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ не удовлетворяется теми и только теми ее аргументами $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что x_1, x_2, \dots, x_n удовлетворяют ее посылке и y_1, y_2, \dots, y_m не удовлетворяют ее заключению.

Определение 5. *Эквивалентностью* n -местного пре-

диката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , и m -местного предиката $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$, определенного на множествах N_1, N_2, \dots, N_m , называется новый предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n, N_1, N_2, \dots, N_m$, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ (читается: « $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ »), который имеет значение «истина» для тех и только тех его аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что значения предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ для аргументов x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m соответственно совпадают. Другими словами, эквивалентность $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ удовлетворяется теми и только теми ее аргументами $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$, что x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют предикатам $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_m)$ соответственно.

Операции импликации и эквивалентности можно применять также к предикатам, у которых имеются общие переменные. В этом случае число переменных импликации и эквивалентности будет равно числу различных переменных у их членов. В частности, импликация и эквивалентность двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, будет n -местным предикатом, зависящим от тех же переменных. При этом импликация будет иметь значение «ложь» для тех и только тех ее аргументов, для которых посылка имеет значение «истина», а заключение имеет значение «ложь». Эквивалентность будет иметь значение «истина» для тех и только тех ее аргументов, для которых значения членов эквивалентности совпадают.

Например, для одноместных предикатов, определенных на множестве целых чисел, « n делится на 6» и « n делится на 3» импликацией будет тождественно истинный предикат, определенный на том же множестве: «если n делится на 6, то n делится на 3». Эквивалентностью указанных предикатов будет одноместный предикат, определенный на множестве целых чисел: « n делится на 6 тогда и только тогда, когда n делится на 3». Для аргумента $n_1 = 12$ ее значение есть «истина» (ибо высказывание: «12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3» истинно), а для аргумента $n_1 = 9$ ее значение есть «ложь» (т. к. высказывание: «9 делится на 6 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3» ложно).

Теорема 6 (условие тождественной истинности имплика-

ции предикатов). Импликация двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, тождественно истинна тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки.

В с. д., пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n -местных предиката, определенные на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Рассмотрим импликацию:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (*)$$

Для доказательства теоремы, докажем, что импликация (*) не тождественно истинна тогда и только тогда, когда $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не является следствием $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Действительно, импликация (*) будет не тождественно истинной в том и только в том случае, когда существуют аргументы x_1, x_2, \dots, x_n , $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$, которые ей не удовлетворяют. По определению 4 последнее возможно тогда и только тогда, когда эти аргументы x_1, x_2, \dots, x_n , $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ удовлетворяют предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и не удовлетворяют предикату $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что равносильно тому, что $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не есть следствие $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Теорема 7 (условие тождественной истинности эквивалентности предикатов). Эквивалентность двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, тождественно истинна тогда и только тогда, когда данные предикаты равносильны.

В с. д., пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — два n -местных предиката, определенные на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Тогда эквивалентность их:

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (*)$$

будет тождественно истинна тогда и только тогда, когда она удовлетворяется любыми ее аргументами. По определению 5 последнее возможно в том и только в том случае, когда произвольно взятые аргументы одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют данным предикатам, т. е. когда они равносильны.

7. Логические операции квантификации. В логике предикатов имеются еще новые логические операции *квантификации*, которые делают ее значительно более богатой по содержанию. При этом, как и в случае простейших операций, предикаты рассматриваются только с точки зрения их значений, т. е. равносильные предикаты не различаются. Основными операциями квантификации являются *квантор общности* и *квантор существования*.

вования, которые называются *двойственными* друг для друга. Рассмотрим их сначала для одноместных предикатов.

Определение 1. Пусть $A(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве M . Универсальным высказыванием, соответствующим $A(x)$, называется высказывание: «каждый элемент множества M удовлетворяет предикату $A(x)$ », которое обозначается символом $(\forall x)A(x)$ и считается истинным, если данный предикат тождественно истинный, и ложным — в противном случае.

Символ $(\forall x)$ называется *квантором общности по переменному x* , его читают: «для всех x » или «для каждого x ». *Универсальное высказывание $(\forall x)A(x)$ читают кратко: «для всех x , $A(x)$ » или «для каждого x , $A(x)$ ». Говорят, что высказывание $(\forall x)A(x)$ есть результат применения квантора общности к предикату $A(x)$.

Например, для предикатов: $x = x$ и $x > 2$, определенных на множестве действительных чисел, соответствующие универсальные высказывания будут соответственно: $(\forall x)(x = x)$ — «каждое действительное число равно себе» (истинное) и $(\forall x)(x > 2)$ — «каждое действительное число больше 2-х» (ложное).

Теорема 1. Если $A(x)$ — одноместный предикат, определенный на конечном множестве, состоящем из m элементов a_1, a_2, \dots, a_m , то соответствующее ему универсальное высказывание эквивалентно конъюнкции m высказываний $A(a_1), A(a_2), \dots, A(a_m)$:

$$(\forall x)A(x) \leftrightarrow [A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_m)]. \quad (1)$$

В с. д., согласно определению 1, высказывание $(\forall x)A(x)$ будет истинным тогда и только тогда, когда предикат $A(x)$ тождественно истинен, т. е. когда истинны все m высказываний $A(a_1), A(a_2), \dots, A(a_m)$, получающиеся из данного предиката при замене переменного x аргументами a_1, a_2, \dots, a_m соответственно. Последнее возможно в том и только в том случае, когда истинна конъюнкция этих m высказываний. Т. о., члены эквивалентности (1) одновременно истинны или ложны, а следовательно, эквивалентность (1) истинна.

Теорема 1 показывает, что для предикатов, определенных на конечном множестве, операция квантора общности может быть выражена через конъюнкцию. Для предикатов, определенных на бесконечном множестве, это сделать невозможно, в этом случае операция квантора общности является существенно новой.

* См. Примечания в конце книги.

Определение 2. Пусть $A(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве M . Экзистенциональным высказыванием, соответствующим $A(x)$, называется высказывание: «существует элемент множества M , удовлетворяющий предикату $A(x)$ », которое обозначается символом $(\exists x)A(x)$, и считается истинным, если предикат $A(x)$ выполнимый, и ложным — в противном случае.

Символ $(\exists x)$ называется квантором существования по переменному x , его читают: «существует x такой, что...» или «для некоторого x , ...». *Экзистенциональное высказывание $(\exists x)A(x)$ читают кратко: «существует x такой, что $A(x)$ » или «для некоторого x , $A(x)$ ». Говорят, что высказывание $(\exists x)A(x)$ есть результат применения квантора существования к предикату $A(x)$.

Например, для предикатов: « $x > 2$ » и « $x = x + 1$ », определенных на множестве действительных чисел, соответствующие им экзистенциональные высказывания будут соответственно $(\exists x)(x > 2)$ — «существует действительное число, большее 2-х» (истинное) и $(\exists x)(x = x + 1)$ — «существует действительное число, равное себе плюс 1» (ложное).

Теорема 2. Если $A(x)$ — одноместный предикат, определенный на конечном множестве из m элементов a_1, a_2, \dots, a_m , то соответствующее ему экзистенциональное высказывание эквивалентно дизъюнкции m высказываний $A(a_1), A(a_2), \dots, A(a_m)$:

$$(\exists x)A(x) \leftrightarrow [A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_m)]. \quad (2)$$

В с. д., согласно определению 2, высказывание $(\exists x)A(x)$ будет ложным тогда и только тогда, когда ложны все m высказываний $A(a_1), A(a_2), \dots, A(a_m)$, которые получаются из данного предиката при замене переменного x аргументами a_1, a_2, \dots, a_m соответственно. Последнее возможно в том и только в том случае, когда ложна дизъюнкция этих m высказываний. Т. о., члены эквивалентности (2) одновременно истинны или ложны, следовательно, эта эквивалентность истинна.

Теорема 2 показывает, что для предикатов, определенных на конечном множестве, операция квантора существования может быть выражена через дизъюнкцию. Для предикатов, определенных на бесконечном множестве, это сделать невозможно, операция квантора существования тогда является существенно новой.

В дальнейшем следует твердо помнить, что для любого данного предиката $A(x)$, определенного на множестве M , выражения $(\forall x)A(x)$ и $(\exists x)A(x)$ суть высказывания, а не предикаты,

* См. Примечания в конце книги.

хотя в них присутствует предметное переменное множества M . Присутствие x здесь чисто внешнее, связанное с принятым способом обозначений. Как видно из предыдущих примеров, и универсальное и экзистенциальное высказывания, соответствующие заданному предикату, выражаются без помощи переменного. Поэтому переменное x , входящее в выражения $(\forall x)A(x)$ и $(\exists x)A(x)$, называется *каждущимся* или *связанным*, тогда как переменное x , входящее в предикат $A(x)$, называется *собственным* или *свободным*.

Перейдем теперь к рассмотрению операций квантификации над многоместными предикатами. В этом случае с помощью кванторов для каждого предиката можно построить новые предикаты с меньшим числом свободных переменных.

Определение 3. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n ($n \geq 2$). Предикатом, полученным из $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ применением квантора общности по переменному x_1 , называется $(n-1)$ -местный предикат, определенный на множествах M_2, M_3, \dots, M_n , значение которого для любых аргументов x_2, x_3, \dots, x_n совпадает с логическим значением универсального высказывания, соответствующего одноместному предикату $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, получающемуся из данного n -местного предиката заменой переменных x_2, x_3, \dots, x_n аргументами x_2, x_3, \dots, x_n соответственно.

Определение 4. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n ($n \geq 2$). Предикатом, полученным из $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ применением квантора существования по переменному x_1 , называется $(n-1)$ -местный предикат, определенный на множествах M_2, M_3, \dots, M_n , значение которого для любых аргументов x_2, x_3, \dots, x_n есть логическое значение экзистенциального высказывания, соответствующего одноместному предикату $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, получающемуся из данного n -местного предиката заменой переменных x_2, x_3, \dots, x_n аргументами x_2, x_3, \dots, x_n соответственно.

Предикаты, полученные из $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ применением кванторов общности и существования по переменному x_1 , обозначаются соответственно $(\forall x_1)A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читают:

«для всех $x_1, A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ») и $(\forall x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (читают: «существует x_1 такой, что $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ »). В этих выражениях x_2, x_3, \dots, x_n — свободные переменные, x_1 — связанное переменное; в первом случае оно связано квантором общности, во втором — квантором существования.

Например, применяя к однородному двухместному предикату, определенному на множестве действительных чисел: $x > y$ кванторы общности и существования по переменному x , получим одноместные предикаты, определенные на множестве действительных чисел: $(\wedge x) (x > y)$ — «все действительные числа больше y » и соответственно: $(\forall x) (x > y)$ — «существует действительное число, большее y ». Первый из них тождественно ложный, второй — тождественно истинный.

К $(n - 1)$ -местным предикатам $(\wedge x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(\forall x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ снова можно применить один из кванторов по любому свободному переменному. В результате получим $(n - 2)$ -местные предикаты, к которым опять можно применить один из кванторов по какому-либо свободному переменному. Операции квантификации можно повторять до тех пор, пока не будут исчерпаны все свободные переменные. После n -кратного применения кванторов к n -местному предикату все его свободные переменные будут связаны и мы получим высказывание. Так, для рассмотренного выше предиката: $x > y$, двукратным применением кванторов можно, например, получить высказывания: $(\forall y) (\wedge x) (x > y)$ — «существует действительное число, меньшее любого другого действительного числа» (ложное) и $(\wedge x) (\forall y) (x > y)$ — «для любого действительного числа существует меньшее действительное число» (истинное).

Определение 5. Универсальным высказыванием, соответствующим n -местному предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, \dots, M_n ($n \geq 2$), называется высказывание, полученное из $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последовательным применением n кванторов общности по переменным x_1, x_2, \dots, x_n в каком-либо порядке.

Универсальное высказывание, соответствующее предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, полученное последовательным применением кванторов $(\wedge x_n), (\wedge x_{n-1}), \dots, (\wedge x_1)$, будем обозначать $(\wedge x_1, x_2, \dots, x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и читать кратко так: «для всех $x_1, x_2, \dots, x_n, A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ »,

Определение 6. Экзистенциональным высказыванием, соответствующим n -местному предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, \dots, M_n ($n \geq 2$), называется высказывание, полученное из $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последо-

вательным применением n кванторов существования по переменным x_1, x_2, \dots, x_n в каком-либо порядке.

Экзистенциональное высказывание, соответствующее предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, полученное последовательным применением кванторов $(\vee x_n), (\vee x_{n-1}), \dots, (\vee x_1)$, будем обозначать $(\vee x_1, x_2, \dots, x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и читать так: «существуют x_1, x_2, \dots, x_n такие, что $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ».

Например, для однородного двухместного предиката: « $x > y$ », определенного на множестве действительных чисел, одним из соответствующих ему универсальных высказываний будет: $(\wedge x, y) (x > y)$ — «для любых двух действительных чисел первое из них больше второго» (ложное), а одним из соответствующих ему экзистенциональных высказываний будет $(\vee x, y) (x > y)$ — «существуют два действительных числа, из которых первое больше второго» (истинное).

Теорема 3 (условие тождественной истинности квантифицированного предиката). $(n - 1)$ -местный предикат, полученный из n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , применением квантора общности по какому-либо переменному, тождественно истинен тогда и только тогда, когда данный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно истинный.

Действительно, применим к данному предикату квантор общности, например, по переменному x_1 , получим $(n - 1)$ -местный предикат $(\wedge x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенный на множествах M_2, M_3, \dots, M_n . По определению 1 п° 3, предикат $(\wedge x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда значение его для произвольно взятых аргументов x_2, x_3, \dots, x_n есть «истина», т. е., согласно определению 3, истинно универсальное высказывание $(\wedge x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

соответствующее одноместному предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на множестве M_1 . В силу определения 1, последнее возможно в том и только в том случае, когда предикат $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ тождественно истинен, что, в силу произвольности выбора аргументов x_2, x_3, \dots, x_n , равносильно тождественной истинности данного n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теорема доказана.

Теорема 4 (условие тождественной ложности квантифицированного предиката). $(n - 1)$ -местный предикат, полученный из n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенного на мно-

жествах M_1, M_2, \dots, M_n , применением квантора существования по какому-либо переменному, тождественно ложен тогда и только тогда, когда данный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тождественно ложный.

В с. д., применим к данному предикату квантор существования, например, по переменному x_1 , получим $(n - 1)$ -местный предикат $(\forall x_1) A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, определенный на множествах M_2, M_3, \dots, M_n . По определению 1 п° 3, он будет тождественно ложным тогда и только тогда, когда его значение для произвольно взятых аргументов x_2, x_3, \dots, x_n есть «ложь», т. е., согласно определению 4, должно экзистенциальное высказывание $(\forall x_1) A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, соответствующее одноместному предикату $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, определенному на множестве M_1 . В силу определения 2, последнее, в свою очередь, возможно в том и только в том случае, когда предикат $A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ тождественно ложен, что в силу произвольности выбора аргументов x_2, x_3, \dots, x_n равносильно тождественной ложности данного n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теорема доказана.

8. Высказывания, как 0-местные предикаты. До сих пор мы противопоставляли предикаты высказываниям: предикаты — это выражения, содержащие предметные переменные некоторых множеств, а высказывания — предложения, не содержащие никаких переменных. Однако для достижения большей общности в дальнейшем удобно каждое высказывание рассматривать как предикат особого вида, число переменных которого равно нулю и который имеет только одно значение, совпадающее с логическим значением данного высказывания. Тогда любые два истинные и любые два ложные высказывания будем считать равносильными между собой. Каждое истинное высказывание будем рассматривать как тождественно истинный 0-местный предикат, а каждое ложное высказывание — как тождественно ложный 0-местный предикат. Будем еще полагать, что для всякого высказывания логическое значение соответствующего ему универсального и экзистенциального высказываний совпадают с логическим значением данного высказывания. В силу этого соглашения и закона рефлексивности (XXI) для любого высказывания A будут справедливы следующие эквивалентности:

$$(\wedge x)A \leftrightarrow A \quad \text{и} \quad (\vee x)A \leftrightarrow A \quad (1)$$

9. Формулы и тавтологии. Введем особые символы двух видов:

1) x, x_1, x_2, x_3, \dots и

2) P, P_1, P_2, P_3, \dots ;

первые будем называть *индивидуальными переменными*, вторые — *предикатными буквами*. Из предикатных букв, индивидуальных переменных, логических символов и скобок можно образовывать различные выражения, некоторые из которых называются формулами.

Определение 1. *Формулами исчисления предикатов* являются:

а) каждая предикатная буква и каждая предикатная буква со следующими за ней в скобках индивидуальными переменными (их будем называть *предикатными буквами с придаными переменными*) и

б) выражения $\neg(\Phi)$, $(\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \vee (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \rightarrow (\Phi_2)$, $(\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$, $(\wedge x)(\Psi)$ и $(\vee x)(\Psi)$, где $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi$ — некоторые формулы, x — некоторая индивидуальная переменная; их будем называть соответственно: *отрицанием формулы* Φ , *конъюнкцией*, *дизъюнкцией*, *импликацией*, *эквивалентностью* формул Φ_1 и Φ_2 и *квантификацией формулы* Ψ по переменному x квантором общности и квантором существования. Формула Ψ называется *областью действия квантора*. Индивидуальная переменная, входящая в формулу, называется *свободной*, если она не следует непосредственно за квантором и не входит в область действия квантора по этой переменной, все другие переменные, входящие в формулу, называются *важными*.

Из определения 1 видно, что каждая формула исчисления предикатов является или предикатной буквой с некоторым числом n приданых переменных ($n \geq 0$), или получается из конечной совокупности предикатных букв с придаными переменными последовательным применением пункта б) сначала к данным предикатным буквам, затем к формулам, из них образованным. Строение формулы определяется по расположению скобок, как в элементарной алгебре. В дальнейшем формулу, образованную из одной предикатной буквы с придаными переменными, в скобки заключать не будем.

Например, выражения $(\wedge x)P$ и $(\vee x)P(x) \rightarrow P(x)$ являются формулами. Первая из них есть квантификация квантором общности по переменному x предикатной буквы P , вторая есть импликация, заключением которой служит предикатная буква с приданым переменным $P(x)$, а посылкой — квантификация квантором существования по переменному x той же предикатной буквы. В первой формуле свободных переменных нет, во второй

формуле первое и второе x связанные, а третье x — свободное. Примерами выражений, которые не являются формулами исчисления предикатов, могут служить следующие $P(P_1P_2)$, $(\forall x)$, (\wedge) $(\forall x) P(x)$.

Согласно определению 1, каждая формула исчисления предикатов обратится в некоторый предикат, если все входящие в нее предикатные буквы с придаными переменными заменить какими-либо предикатами с соответствующим числом предметных переменных. В частности, формула, все переменные которой связанные, при этом обратится в высказывание.

Определение 2. Формула исчисления предикатов называется *тавтологией*, если она обращается в тождественно истинный предикат при замене всех входящих в нее предикатных букв с придаными переменными любыми предикатами с соответствующим числом переменных, принимающими значения в каких-либо множествах.

Например, возьмем вторую из вышеприведенных формул и заменим в ней предикатную букву $P(x)$ предикатом: « $x > 0$ », определенным на множестве действительных чисел. Получим однозначный предикат, определенный опять-таки на множестве действительных чисел: «если существует положительное действительное число, то $x > 0$ ». Для -10 его значение есть «ложь», следовательно, взятая формула не является тавтологией. Примеры формул, являющихся тавтологиями, будут даны в дальнейших теоремах.

Нахождение тавтологий является одной из основных задач исчисления предикатов. В исчислении высказываний был указан простой общий метод определения, является ли данная формула тавтологией или нет, состоящий в построении таблицы значений данной формулы. В исчислении предикатов такого общего метода не существует. Дело в том, что каждое высказывание имеет только одно из двух логических значений: «истина» или «ложь», тогда как значение предиката зависит от выбора его аргументов, что, вообще говоря, можно сделать бесчисленным числом способов.

Простейшие тавтологии исчисления предикатов получаются на основании следующей теоремы:

Теорема 1. Формула, получающаяся из тавтологии исчисления высказываний при замене входящих в нее пропозиционных букв предикатными буквами с произвольным числом приданых переменных, является тавтологией исчисления предикатов.

Докажем, например, что следующая формула:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \neg P(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1')$$

получающаяся из закона исключенного третьего исчисления высказываний заменой пропозиционной буквы P предикатной буквой с n придаными переменными, является тавтологией. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Подставляя его в (1') вместо предикатной буквы $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим n -местный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee \neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (*) определенный на тех же множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Согласно определению 1 п° 6, для любых аргументов x_1, x_2, \dots, x_n

предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или его отрицание $\neg A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеют значение «истина». Но тогда, по определению 3 п° 6, значение дизъюнкции (*) для этих аргументов будет «истина». Следовательно, предикат (*) тождественно истинный. Отсюда, в силу произвольности выбора предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ следует справедливость высказанного утверждения.

Аналогично, используя определения 1—5 п° 6, можно доказать теорему 1 для любой формулы логики предикатов.

10. Некоторые тавтологии с кванторами. Вначале рассмотрим тавтологии, содержащие предикатные буквы с одной приданной индивидной переменной.

Теорема 1 (законы де-Моргана для кванторов). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$(XXX) \neg(\wedge x)P(x) \leftrightarrow (\vee x)\neg P(x); \quad (XXXI) \neg(\vee x)P(x) \leftrightarrow (\wedge x)\neg P(x).$$

Доказательство. В формулах (XXX) и (XXXI) нет свободных переменных. Следовательно, если входящую в них предикатную букву $P(x)$ заменим каким-либо одноместным предикатом $A(x)$, определенным на некотором множестве M , то получим высказывания:

$$\neg(\wedge x)A(x) \leftrightarrow (\vee x)\neg A(x) \quad (*) \quad \text{и} \quad \neg(\vee x)A(x) \leftrightarrow (\wedge x)\neg A(x). \quad (**)$$

Докажем, что эквивалентности (*) и (**) истинны, для чего проверим, что логические значения их членов совпадают. Действительно, во-первых, высказывание $\neg(\wedge x)A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда универсальное высказывание $(\wedge x)A(x)$ ложно, т. е. когда предикат $A(x)$ не тождественно истинен. Последнее, согласно теореме 2 п° 6, возможно в том и только в том случае, когда $\neg A(x)$ выполнимый предикат, т. е. соответствующее ему экзистенциональное высказывание $(\vee x)\neg A(x)$ истинно. Далее, во-вторых, высказывание $\neg(\vee x)A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда экзистенциональное высказывание

$(\forall x)A(x)$ ложно, т. е. когда $A(x)$ тождественно ложный предикат. Последнее, согласно теореме 2 п° 6, возможно в том и только в том случае, когда $\neg A(x)$ тождественно истинный предикат; то есть, когда соответствующее ему универсальное высказывание $(\forall x)\neg A(x)$ истинно.

Отсюда, в силу произвольности выбора предиката $A(x)$, следует, что формулы (XXX) и (XXXI) действительно являются тавтологиями. Заметим, что тавтология (XXXI) может быть выведена из (XXX) с помощью закона симметрии (XX), закона противоположности (XXII) и закона двойного отрицания (III). Предлагаем читателю проделать это самостоятельно.

Непосредственно из теоремы 1 и закона противоположности (XXII) вытекает

Следствие (выражение кванторов через двойственные). Следующие формулы являются тавтологиями:

$$(XXXa) (\forall x)P(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg P(x); (XXXIa) (\forall x)P(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg P(x).$$

Следствие показывает, что каждый из кванторов общности и существования может быть выражен через двойственный и операцию отрицания.

Теорема 2 (законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$(XXXII) (\forall x)[P_1(x) \wedge P_2(x)] \leftrightarrow [(\forall x)P_1(x) \wedge (\forall x)P_2(x)];$$

$$(XXXIII) (\forall x)[P_1(x) \vee P] \leftrightarrow [(\forall x)P_1(x) \vee P];$$

$$(XXXIV) (\forall x)[P_1(x) \vee P_2(x)] \leftrightarrow [(\forall x)P_1(x) \vee (\forall x)P_2(x)];$$

$$(XXXV) (\forall x)[P_1(x) \wedge P] \leftrightarrow [(\forall x)P_1(x) \wedge P].$$

Доказательство. В формулах (XXXII) и (XXXIII) нет свободных переменных. Следовательно, если входящие в них предикатные буквы $P_1(x)$, $P_2(x)$ и P заменим соответственно какими-либо предикатами $A(x)$ и $B(x)$, определенными на некотором множестве M , и высказыванием C , то получим высказывания:

$$(\forall x)[A(x) \wedge B(x)] \leftrightarrow [(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)] \quad (*)$$

и

$$(\forall x)[A(x) \vee C] \leftrightarrow [(\forall x)A(x) \vee C]. \quad (**)$$

Докажем, что эквивалентности (*) и (**) истинны, для чего убедимся, что логические значения их членов совпадают. Действительно, во-первых, согласно определению 1 п° 7 и теореме 4 п° 6, высказывание $(\forall x)[A(x) \wedge B(x)]$ будет истинно тогда и

только тогда, когда оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ тождественно истинны. Последнее, в свою очередь, возможно в том и только в том случае, когда оба универсальных высказывания $(\forall x)A(x)$ и $(\forall x)B(x)$, а следовательно и их конъюнкция $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ истинны. Далее, во-вторых, согласно определению 1 п° 7 высказывание $(\forall x)[A(x) \vee C]$ будет истинно тогда и только тогда, когда дизъюнкция $A(x) \vee C$ тождественно истинна, т. е. или $A(x)$ тождественно истинный предикат, или C — истинное высказывание. Последнее, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда универсальное высказывание $(\forall x)A(x)$ или высказывание C истинны, т. е. истинна их дизъюнкция. Отсюда, в силу произвольности выбора предикатов $A(x)$ и $B(x)$ и высказывания C , следует справедливость первой части теоремы. Вторую часть теоремы читатель докажет самостоятельно, пользуясь доказанное, следствие теоремы 1 и законы де-Моргана для конъюнкции и дизъюнкции.

Теорема 3 (законы пронесения кванторов через импликацию). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

- $$\begin{aligned} & (\text{XXXVI}) (\forall x)[P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \rightarrow [(\forall x)P_1(x) \rightarrow (\forall x)P_2(x)]; \\ & (\text{XXXVII}) (\forall x)[P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \rightarrow [(\forall x)P_1(x) \rightarrow (\forall x)P_2(x)]; \\ & (\text{XXXVIII}) (\forall x)[P_1(x) \rightarrow P] \leftrightarrow [(\forall x)P_1(x) \rightarrow P]. \end{aligned}$$

Доказательство. Заменим в формулах (XXXVI) — (XXXVIII) предикатные буквы $P_1(x)$, $P_2(x)$ и P какими-либо одноместными предикатами $A(x)$ и $B(x)$, определенными на множестве M , и некоторым высказыванием C соответственно. Тогда получим высказывания:

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)]; \quad (*)$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)] \rightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)]; \quad (**)$$

$$(\forall x)[A(x) \rightarrow C] \leftrightarrow [(\forall x)A(x) \rightarrow C]. \quad (***)$$

Докажем, что они истинны. Действительно, заключение импликации (*) будет ложно только в том случае, когда универсальное высказывание $(\forall x)A(x)$ истинно, а универсальное высказывание $(\forall x)B(x)$ ложно, т. е. когда $A(x)$ тождественно истинный, а $B(x)$ не тождественно истинный предикаты. Следовательно, предикат $B(x)$ не будет следствием предиката $A(x)$. Но тогда по теореме 6 п° 6, импликация $A(x) \rightarrow B(x)$ не тождественно истинна, и следовательно, соответствующее ей универсальное высказывание $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$ ложно. Т. о., импликация (*) не может быть ложной.

Далее, заключение импликации (***) будет ложно только в том случае, когда экзистенциальное высказывание $(\forall x)A(x)$ истинно, а экзистенциальное высказывание $(\forall x)B(x)$ ложно, т. е. когда $A(x)$ выполнимый, а $B(x)$ — тождественно ложный предикаты. Следовательно, предикат $B(x)$ не будет следствием предиката $A(x)$. Но тогда по теореме 6 п° 6, импликация $A(x) \rightarrow B(x)$ не будет тождественно истинной, и следовательно, соответствующее ей универсальное высказывание $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$ ложно. Т. о., импликация (**) также не может быть ложной.

Наконец, для доказательства истинности эквивалентности (****) покажем, что ее члены не могут иметь различные логические значения. Действительно, допустим, во-первых, что высказывание $(\forall x)[A(x) \rightarrow C]$ истинно, а высказывание $(\forall x)A(x) \rightarrow C$ ложно. Тогда, с одной стороны, импликация $A(x) \rightarrow C$ будет тождественно истинна. С другой стороны, будем иметь, что экзистенциальное высказывание $(\forall x)A(x)$ истинно, и следовательно предикат $A(x)$ выполнимый, а высказывание C ложно, откуда вытекает, что импликация $A(x) \rightarrow C$ не тождественно истинна (ее значение для аргумента x_0 , удовлетворяющего предикату $A(x)$, будет «ложь»). Следовательно, этот случай невозможен.

Допустим, во-вторых, что высказывание $(\forall x)[A(x) \rightarrow C]$ ложно, а высказывание $(\forall x)A(x) \rightarrow C$ истинно. Тогда, с одной стороны, импликация $A(x) \rightarrow C$ не будет тождественно истинной, и, следовательно, C — ложное высказывание, а $A(x)$ не тождественно ложный предикат. С другой стороны, т. к. C ложно, а импликация $(\forall x)A(x) \rightarrow C$ истинна, то экзистенциальное высказывание $(\forall x)A(x)$ будет ложно, и следовательно, $A(x)$ тождественно ложный предикат. Т. о. и этот случай невозможен. Отсюда, в силу произвольности выбора предикатов $A(x)$, $B(x)$ и C , следует справедливость всех утверждений теоремы.

Теорема 4 (законы удаления квантора общности и введения квантора существования). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$(XXXIX) (\forall x)P(x) \rightarrow P(x);$$

$$(XL) P(x) \rightarrow (\forall x)P(x).$$

Доказательство. Индивидное переменное x , входящее в заключение импликации (XXXIX), свободное. Следовательно, если в этой формуле предикатную букву $P(x)$ заменим каким-либо предикатом $A(x)$, определенным на некотором множестве M , то получим одноместный предикат, определенный на том же множестве M :

$$(\forall x)A(x) \rightarrow A(x).$$

Покажем, что он тождественно истинен. Действительно, в противном случае существовал бы аргумент $x_0 \in M$, для которого предикат (*) имел бы значение «ложь». По определению 4 п° 6, это возможно лишь в случае, когда значение предиката $A(x)$ для x_0 есть «ложь» и универсальное высказывание $(\forall x)A(x)$, соответствующее предикату $A(x)$, истинно. Следовательно, предикат $\bar{A}(x)$, с одной стороны, не тождественно истинный, а с другой стороны, согласно определения 1 п° 7, тождественно истинный, что невозможно.

Далее, индивидное переменное, входящее в посылку импликации (XL), свободное. Следовательно, если в этой формуле предикатную букву $P(x)$ заменим каким-либо предикатом $A(x)$, определенным на некотором множестве M , то получим одноместный предикат, определенный на том же множестве M :

$$A(x) \rightarrow (\forall x) A(x). \quad (**)$$

Покажем, что он тождественно истинный. Действительно, в противном случае существовал бы аргумент $x_0 \in M$, для которого значение предиката (**) было бы «ложь», что возможно лишь в случае, когда значение предиката $A(x)$ для x_0 есть «истина», а экзистенциальное высказывание $(\forall x)A(x)$, соответствующее предикату $A(x)$, ложно. Следовательно, предикат $A(x)$, с одной стороны, выполнимый, а с другой стороны, согласно определения 2 п° 7, невыполнимый, что невозможно. Отсюда в силу произвольности выбора предиката $A(x)$ следуют оба утверждения теоремы.

Теорема 5 (законы коммутативности для кванторов). Нижеприведенные формулы являются тавтологиями:

$$\text{XLI) } (\wedge x_1, x_2) P(x_1, x_2) \leftrightarrow (\wedge x_2, x_1) P(x_1, x_2);$$

$$(\text{XLII) } (\vee x_1, x_2) P(x_1, x_2) \leftrightarrow (\vee x_2, x_1) P(x_1, x_2).$$

Доказательство. В формуле (XLI) нет свободных переменных. Следовательно, заменяя в ней предикатную букву $P(x_1, x_2)$ каким-либо двухместным предикатом $A(x_1, x_2)$, определенным на некоторых множествах M_1 и M_2 , получим высказывание:

$$(\wedge x_1, x_2) A(x_1, x_2) \leftrightarrow (\wedge x_2, x_1) A(x_1, x_2). \quad (*)$$

Докажем его истинность, для чего проверим, что логические значения членов эквивалентности (*) совпадают. Действительно, согласно определения 1 п° 7, первый ее член $(\wedge x_1, x_2) A(x_1, x_2)$ истинен тогда и только тогда, когда тождественно истинен одноместный предикат $(\wedge x_2) A(x_1, x_2)$, определенный на мно-

жестве M_1 , что, в свою очередь, возможно в том и только в том случае, когда двухместный предикат $A(x_1, x_2)$ — тождественно истинный. Аналогично найдем, что второй член эквивалентности (*) истинен тогда и только тогда, когда предикат $A(x_1, x_2)$ — тождественно истинный. Отсюда, в силу произвольности выбора предиката $A(x_1, x_2)$, следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы читатель докажет самостоятельно.

Все доказанные тавтологии содержат предикатные буквы с одним и в двух последних случаях с двумя приदанными переменными. Во что обратятся эти формулы, если в них увеличить число индивидных переменных? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема 6. *Если в тавтологии исчисления предикатов к входящим в нее предикатным буквам присвоить какое угодно конечное число свободных индивидных переменных, то полученная формула также будет тавтологией исчисления предикатов.*

Докажем для примера, справедливость утверждения теоремы для закона де-Моргана (XXX), т. е. докажем, что следующая формула является тавтологией:

$$(XXX') \neg(\wedge x_1) P(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow (\vee x_1) \neg P(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Доказательство. В формуле (XXX') переменное x_1 — связанное, а переменные x_2, x_3, \dots, x_n — свободные. Следовательно, заменив в ней предикатную букву $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ каким-либо n -местным предикатом $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенным на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , получим $(n-1)$ -местный предикат, определенный на множествах M_2, M_3, \dots, M_n :

$$\neg(\wedge x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow (\vee x_1) \neg A(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (*)$$

Покажем, что он тождественно истинный. Для этого проверим, что значения членов эквивалентности (*) для произвольных элементов x_2, x_3, \dots, x_n множеств M_2, M_3, \dots, M_n соответственно совпадают. Действительно, рассмотрим одноместный предикат $\overset{0}{A}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, определенный на множестве M_1 , получающийся из выбранного n -местного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при подстановке вместо переменных x_2, x_3, \dots, x_n элементов x_2, x_3, \dots, x_n соответственно. По доказанному закону де-Моргана (XXX) будет истинна эквивалентность:

$$\neg(\wedge x_1) \overset{0}{A}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leftrightarrow (\vee x_1) \overset{0}{A}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \quad (**)$$

Следовательно, логические значения ее членов одинаковые.

Но, согласно определения 1 п° 6 и определений 3 и 4 п° 7, логические значения членов эквивалентности (**) совпадают со значениями соответствующих членов эквивалентности (*) для взятых элементов x_2, x_3, \dots, x_n . Отсюда, в силу произвольности выбора предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, следует, что формула (XXX') является тавтологией.

Аналогично можно доказать справедливость теоремы 6 для любой формулы исчисления предикатов. Рекомендуем читателю доказать в качестве упражнения следующие тавтологии:

$$(XXXIII') (\wedge x_1) [P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee P_2(x_2, x_3, \dots, x_n)] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow [(\wedge x_1) P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee P_2(x_2, x_3, \dots, x_n)].$$

$$(XXXVIII') (\wedge x_1) [P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow P_2(x_2, x_3, \dots, x_n)] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow [(\vee x_1) P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow P_2(x_2, x_3, \dots, x_n)].$$

Эти формулы являются обобщением ранее доказанных законов (XXXIII) и (XXXVIII).

11. Квантор существования и единственности. С помощью кванторов общности и существования можно построить новые кванторы. Среди них важным является *квантор существования и единственности*, который обозначается символом $(\vee!x)$ (читают: «существует один и только один x , такой, что...» или «существует точно один (единственный) x , такой, что...»).

Определение 1. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — n -местный предикат, определенный на множествах M_1, M_2, \dots, M_n . Тогда выражение:

$$(\vee x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \neg (\vee x_1, x_1') [A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \\ \wedge A(x_1', x_2, \dots, x_n) \wedge x_1 \neq x_1'] \quad (*)$$

будет $(n - 1)$ -местным предикатом, определенным на множествах M_2, M_3, \dots, M_n . Говорят, что предикат (*) получен из данного предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ применением квантора существования и единственности (по переменному x_1) и записывают его кратко $(\vee!x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Т. о. имеем эквивалентность:

$$(\vee!x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \{(\vee x_1) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge \\ \neg (\vee x_1, x_1') [A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge A(x_1', x_2, \dots, x_n) \wedge x_1 \neq x_1']\}. \quad (1)$$

Заметим, что второй член конъюнкции правой части эквивалентности (1), пользуясь законом де-Моргана (XXXI), выражением конъюнкции через импликацию и отрицание (XXVIII) и законом двойного отрицания (III), можно заменить предикатом:

$$(\wedge x_1, x_1') [(A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge A(x_1', x_2, \dots, x_n)) \rightarrow x_1 = x_1'].$$

Согласно эквивалентности (1), определению конъюнкции предикатов и определению операции квантора существования для многоместных предикатов, значение квантифицированного предиката $(\forall !x_1)A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет «истина» для тех и только тех его аргументов x_2, x_3, \dots, x_n , для которых, во-первых, истинно экзистенциальное высказывание $(\forall x_1)A(x_1, \underset{0}{x_2}, \underset{0}{x_3}, \dots, \underset{0}{x_n})$ («существует элемент множества M_1 , удовлетворяющий предикату $A(x_1, \underset{0}{x_2}, \underset{0}{x_3}, \dots, \underset{0}{x_n})$ ») и, во-вторых, истинно отрицание экзистенциального высказывания $\neg(\forall x_1, x_1') [A(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge A(x_1', \underset{0}{x_2}, \dots, \underset{0}{x_n}) \wedge x_1 \neq x_1']$, соответствующего однородному двухместному предикату, определенному на множестве M_1 («не существует двух разных элементов множества M_1 , удовлетворяющих предикату $A(x_1, \underset{0}{x_2}, \dots, \underset{0}{x_n})$ »).

В частности, если $A(x)$ — одноместный предикат, определенный на множестве M , то, применяя к нему квантор существования и единственности по переменному x , получим высказывание: $(\forall !x)A(x)$ («существует единственный x , такой, что $A(x)$ »). Это высказывание будет истинным тогда и только тогда, когда истинны два высказывания: 1) экзистенциальное высказывание $(\forall x)A(x)$, соответствующее данному предикату («существует, по крайней мере, один элемент множества M , удовлетворяющий предикату $A(x)$ ») и 2) отрицание экзистенциального высказывания $\neg(\forall x, x') [A(x) \wedge A(x') \wedge x \neq x']$, соответствующего однородному двухместному предикату $A(x) \wedge A(x') \wedge x \neq x'$, определенному на множестве M («не существует двух разных элементов множества M , удовлетворяющих данному предикату»).

Например, если x — переменное, принимающее значение в множестве действительных чисел, а z — переменное, принимающее значение в множестве комплексных чисел, то высказывание $(\forall !x) (x^3 = 1)$ истинно, а высказывание $(\forall !z) (z^3 = 1)$ ложно.

12. Применение логики предикатов в математических науках.
Понятие о правилах вывода. Каждая математическая наука имеет дело с высказываниями об объектах этой науки. Пользуясь логическими и теоретико-множественными символами и специальными символами данной науки, каждое такое высказывание можно выразить формулой. Это, прежде всего, относится к определениям и теоремам. Определение может быть выражено равенством, левая часть которого есть новый определенный символ, а правая часть содержит только уже ранее введенные символы.

Определение может быть выражено также эквивалентностью, первый член которой содержит новый определяемый символ, а второй — есть выражение, образованное из известных символов. Чтобы выделить формулы-определения среди других формул, принято в этих формулах под знаком равенства или под знаком эквивалентности ставить буквы df (от французского *definition* — «определение»).

Например, определение треугольника на плоскости с вершинами A, B, C можно выразить равенством:

$$\triangle ABC \underset{df}{=} \{A, B, C\}. \quad (1)$$

Определение логарифма числа при данном основании можно выразить эквивалентностью:

$$\lg_a b \underset{df}{=} N \leftrightarrow a^N = b. \quad (2)$$

Теоремы каждой математической науки выражаются равенствами, импликациями и эквивалентностями. Многие теоремы являются общеутвердительными высказываниями вида: «Все элементы данных n множеств M_1, M_2, \dots, M_n удовлетворяют предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ », или более общего вида: «Все элементы данных n множеств M_1, M_2, \dots, M_n , удовлетворяющие предикату $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , удовлетворяют и предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на тех же множествах». Такие теоремы можно выразить с помощью квантора общности следующими формулами соответственно:

$$(\wedge x_1, x_2, \dots, x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3)$$

и

$$(\wedge x_1, x_2, \dots, x_n) [B(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow A(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (3')$$

Например, теорема арифметики: «Каждое целое число, делящееся на 4, делится на 2» записывается формулой: $(\wedge n) (\frac{4}{n} \rightarrow \frac{2}{n})$. Теорему: «Каждое положительное действительное число является квадратом некоторого действительного числа» можно записать формулой: $(\wedge x)[x > 0 \rightarrow (\vee y)(x = y^2)]$.

Многие теоремы являются частноутвердительными высказываниями вида: «Некоторые элементы данных n множеств M_1, M_2, \dots, M_n удовлетворяют предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ », или более общего вида: «Некоторые элементы данных n множеств M_1, M_2, \dots, M_n , удовлетворяющие предикату $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, \dots, M_n , удовлетворяют и предикату $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенному на тех же множествах».

Такие теоремы можно выразить с помощью квантора существования соответственно формулами:

$$(\forall x_1, x_2, \dots, x_n) A(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

и

$$(\forall x_1, x_2, \dots, x_n) [B(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge A(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (4')$$

Например, теорема: «Некоторые целые числа, делящиеся на 2, не делятся на 4» записывается формулой: $(\forall n) (\frac{2}{n} \wedge \neg \frac{4}{n})$.

Большое место в каждой математической науке занимают доказательства теорем. Доказательство есть последовательность утверждений, каждое из которых является или условием теоремы, или аксиомой, или ранее доказанной теоремой, или следствием предыдущих членов этой последовательности. Все члены этой последовательности можно записать формулами. Тогда доказательство превращается в последовательность формул. Чтобы придать доказательству более формальный характер, вводятся особые правила вывода. Правило вывода есть некоторая фигура, образованная из формул, разделенных горизонтальной чертой. Формулы, стоящие над чертой, называются *посылками*, формула, стоящая под чертой, называется *непосредственным следствием посылок по данному правилу вывода*. Одним из основных правил вывода является *правило отсечения* или *modus ponens*, которое имеет вид:

$$\frac{\Phi, \Phi \rightarrow \Psi}{\Psi}.$$

Здесь две посылки: Φ и $\Phi \rightarrow \Psi$, формула Ψ есть их непосредственное следствие. Определение доказательства теперь может быть сформулировано следующим образом:

Доказательство есть конечная последовательность формул, каждый член которой есть или аксиома данной науки, или формула, данная по условию, или ранее доказанная формула, или непосредственное следствие предыдущих формул этой последовательности по некоторому правилу вывода. Каждое доказательство называется также *доказательством его последней формулы*. Формулы, для которых существует доказательство, называются *доказуемыми* (при данных условиях).

Построение полных доказательств с применением правил вывода требует довольно много времени, но тем самым исключается возможность допущения ошибок. Построение формальных доказательств можно даже поручить вычислительным машинам.

При доказательстве теорем каждой математической науки используются тавтологии исчисления предикатов. Каждая фор-

мула, получающаяся из какой-либо тавтологии при замене входящих в нее предикатных букв определенными предикатами данной науки, является теоремой этой науки.

В следующих параграфах будет показано, как логика предикатов может быть использована при построении таких разделов теории множеств, как алгебра подмножеств и теория бинарных отношений. Многие из приведенных в этих параграфах теорем интуитивно очевидны. Но независимо от «очевидности» для каждой теоремы будет дано строгое доказательство, опирающееся на законы исчисления предикатов.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Какие из следующих выражений можно рассматривать как предикаты при определенном выборе области изменения входящих в них переменных:

- а) $x^3 - x + 2 = 0$;
- б) x — истинно;
- в) $5 - 3 = 2$;
- г) x включается в y ;
- д) площадь x равняется y ;
- е) $x = y$;
- ж) x при делении на y дает остаток z ;
- з) x и y лежат по разные стороны от z ;
- и) $x^2 + y^2 = z^2$.

2. Для каждого приведенного ниже высказывания найти предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных некоторыми аргументами:

- а) $2 + 3 = 5$;
- б) сегодня — четверг;
- в) $\lg_{10} 2 = 1$;
- г) Володя и Саша — братья.

3. Найти множество истинности следующих предикатов, определенных на множестве точек плоскости (A, B — определенные точки, a — определенная прямая плоскости):

- а) отрезок AB виден из точки M под прямым углом;
- б) точка M располагается по одну сторону с точкой A от прямой a ;
- в) точки M и M' равноудалены от прямой a и лежат по разные стороны от a ;
- г) точки M и M' равноудалены от точки M'' .

4. Пусть l_0 — некоторая прямая, M, M', M'', M''' — переменные, принимающие значения в множестве точек прямой l_0 . Обозначим трехместный однородный предикат: «точка M' лежит между точками M и M''' » символом $MM'M'''$.

Найти множество истинности следующих предикатов (A, B, C , — определенные точки прямой l_0):

- а) AMB ;
- б) MBC ;
- в) MBM' ;
- г) $MM'C$;
- д) $MM'M'''$.

5. Даны два одноместных предиката: $x > 2$ и $x < 2$, определенные на множестве действительных чисел. Для каких действительных чисел истинна: а) конъюнкция, б) дизъюнкция, в) импликация, г) эквивалентность данных предикатов?

6. Доказать, что: а) конъюнкция тождественно истинного n -местного предиката с любым другим предикатом, зависящими от тех же переменных, равносильна последнему;

б) конъюнкция тождественно ложного n -местного предиката с любым другим предикатом есть тождественно ложный предикат;

в) дизъюнкция тождественно истинного n -местного предиката с любым другим предикатом есть тождественно истинный предикат;

г) дизъюнкция тождественно ложного n -местного предиката с любым предикатом, зависящим от тех же переменных, равносильна последнему.

7. Доказать, что:

а) импликация двух предикатов тождественно истинна, если ее посылка тождественно ложна или заключение тождественно истинно;

б) импликация двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, с тождественно истинной посылкой равносильна ее заключению;

в) импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, с тождественно ложным заключением равносильна отрицанию ее посылки.

8. Доказать, что эквивалентность двух n -местных предикатов, зависящих от одних и тех же переменных;

а) равносильна одному из ее членов тогда и только тогда, когда другой ее член тождественно истинен;

б) равносильна отрицанию одного из ее членов тогда и только тогда, когда другой ее член тождественно ложен.

9. Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n -местных предиката, определенных на одних и тех же множествах. Найти: а) множество истинности импликации данных предикатов; б) множество истинности эквивалентности данных предикатов.

10. Найти множество истинности следующих двухместных однородных предикатов, определенных на множестве действительных чисел:

а) $x^2 - y^2 = 0$;

б) $xy = 0$;

в) $|x| = -|y|$;

г) $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$.

11. Найти множество истинности следующих двухместных однородных предикатов, определенных на множестве действительных чисел:

а) $x > 0 \wedge y < 0$;

б) $x > 0 \vee y < 0$;

в) $x > 0 \rightarrow y < 0$;

г) $x > 0 \leftrightarrow y < 0$.

12. Каким условиям удовлетворяют множества истинности одноместных предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M , если конъюнкция их:

а) тождественно истинна; б) тождественно ложна;

в) удовлетворяется всеми элементами, принадлежащими множеству истинности предиката $A(x)$.

13. Каким условиям удовлетворяют множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M , если:

а) дизъюнкция их тождественно истинна;

б) импликация $A(x) \rightarrow B(x)$ тождественно ложна;

в) эквивалентность данных предикатов тождественно ложна;

г) эквивалентность $A(x) \leftrightarrow B(x)$ удовлетворяется всеми элементами,

принадлежащими множеству истинности предиката $A(x)$, и только такими элементами.

14. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ два одноместных предиката, определенные на множестве M , такие, что эзистенциальное высказывание

$$(\vee x) \{A(x) \rightarrow [\neg A(x) \vee \neg(\neg B(x) \rightarrow A(x))]\}$$

истинно. Доказать, что универсальное высказывание $(\wedge x) A(x)$ ложно.

15. Каким условиям будут удовлетворять множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, определенных на множестве M , если истинны высказывания:

- $(\wedge x) [A(x) \rightarrow B(x)] \wedge (\vee x) [\neg A(x) \wedge B(x)];$
- $\neg(\vee x) [A(x) \wedge B(x)] \wedge (\wedge x) [A(x) \rightarrow B(x)];$
- $(\vee x) [A(x) \wedge B(x)] \rightarrow (\wedge x) [A(x) \rightarrow B(x)].$

16. Для трехместного однородного предиката, определенного на множестве целых чисел: $x + y = z$ построить с помощью кванторов общности и существования все соответствующие ему высказывания. Выяснить, какие из них истинны.

17. Записать в виде формул известные свойства неравенств для действительных чисел.

18. Дан одноместный предикат $A(x)$, определенный на множестве M . Записать с помощью кванторов общности и существования следующие высказывания:

- существует не менее одного элемента множества M , который удовлетворяет $A(x)$ (для которого $A(x)$);
- существует не более одного элемента множества M , удовлетворяющего предикату $A(x)$;
- существуют, по крайней мере, два элемента множества M , удовлетворяющие $A(x)$;
- существует не более двух элементов множества M , для которых $A(x)$;
- существуют точно два элемента множества M , удовлетворяющие $A(x)$.

19. Записать формулами следующие предложения евклидовой планиметрии, обозначая переменные, принимающие значения в множестве точек плоскости: M, M', M'', \dots , переменные, принимающие значения в множестве прямых плоскости: l, l', l'', \dots :

- каждой прямой принадлежат, по крайней мере, две различные точки;
- через любые две различные точки проходит не более одной прямой;
- две различные прямые пересекаются не более, чем в одной точке;
- существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой.

д) любые две прямые пересекаются, параллельны или совпадают.

20. Записать формулами следующие предложения:

- каждое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет не более двух действительных корней;
- каждое квадратное уравнение с действительными коэффициентами имеет точно два комплексных корня, сопряженных между собой, которые, в частности, могут быть действительными, различными или совпадающими,

в) значение функции тангенса действительного переменного на отрезке $[0, \pi]$ может быть любым действительным числом, и значением тангенса однозначно определяется аргумент.

21. Прочитать кратко следующее высказывание:

$$(\wedge x, y) \left\{ y \neq 0 \rightarrow [(\vee z) \left(z = \frac{x}{y} \right) \wedge (\wedge z') \left(z' = \frac{x}{y} \rightarrow z' = z \right)] \right\}$$

(x, y, z, z') — переменные, принимающие значения в множестве действительных чисел).

22. Пусть $P(x)$ и $A(x)$ — два одноместных предиката, определенные на множестве M . Тогда:

а) высказывание $(\wedge x) (P(x) \rightarrow A(x))$, — «каждый элемент множества M , удовлетворяющий предикату $P(x)$, удовлетворяет и предикату $A(x)$ », — записывается кратко $(\wedge P(x)) A(x)$ и читается также: «для всех x , удовлетворяющих $P(x)$, $A(x)$ ». Символ $(\wedge P(x))$ называется *ограниченным квантором общности*;

б) высказывание $(\vee x) (P(x) \wedge A(x))$, — «существует элемент множества M , удовлетворяющий одновременно предикатам $P(x)$ и $A(x)$ », — записывается кратко $(\vee P(x)) A(x)$ и читается также: «некоторые x , удовлетворяющие $P(x)$, удовлетворяют и $A(x)$ » или «существует x , удовлетворяющий $P(x)$, такой, что $A(x)$ ». Символ $(\vee P(x))$ называется *ограниченным квантором существования*.

Доказать законы де-Моргана для ограниченных кванторов:

- $\neg(\wedge P(x)) A(x) \leftrightarrow (\vee P(x)) \neg A(x);$
- $\neg(\vee P(x)) A(x) \leftrightarrow (\wedge P(x)) \neg A(x).$

23. Записать с помощью ограниченных кванторов следующие высказывания:

а) каждое положительное число имеет при данном основании a логарифм;

б) каждые две различные прямые плоскости пересекаются или параллельны;

в) каждая невырожденная матрица имеет обратную, и каждая обратимая матрица не вырождается;

г) некоторые параллелограммы суть ромбы;

д) некоторые непрерывные функции дифференцируемы.

24. Какие из следующих выражений являются формулами исчисления предикатов? Объяснить, почему. В каждой формуле выделить свободные и связанные переменные:

- $(\wedge x) [P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \leftrightarrow [(\vee x) P_1(x) \rightarrow (\wedge x) P_2(x; x_1)];$
- $(\wedge \vee x) [P_1(x) \vee P] \rightarrow (\vee \wedge x) [P_1(x) \wedge P];$
- $\neg(\vee x_1) [P_1(x_1) \wedge x_2];$
- $[(\wedge x_1) P(x_1) \vee \neg(\vee x_1) P(x_1)] \rightarrow \neg P(x_1);$
- $(\vee x_1) (\wedge x_2) (\vee x_3) [(P_1(x_1) \vee P_2(x_1)) \wedge P_3(x_2)].$

25. Построить отрицание следующих высказываний и прочитать их словами (x, y, z, t — переменные, принимающие значения в множестве действительных чисел):

- $(\wedge x, y) [(x > y) \vee (x < y) \vee (x = y)];$
- $(\vee x) (\wedge y) [(y \neq 0) \rightarrow (x + y = x)];$
- $(\vee x, y) (\wedge z) [(x + y \neq z) \vee (\vee t) [(x \pm y = t) \wedge z \neq t]].$

26. Записать в виде формулы аксиому параллельности евклидовской планиметрии. Отрицание этой аксиомы есть аксиома параллельности планиметрии Лобачевского.

Выразить аксиому параллельности Лобачевского формулой и, преобразовав ее, прочитать словами.

27. Доказать законы пронесения квантора общности через эквивалентность:

- $(\wedge x) [P_1(x) \leftrightarrow P_2(x)] \rightarrow [(\wedge x) P_1(x) \leftrightarrow (\wedge x) P_2(x)];$
- $(\wedge x) [P_1(x) \leftrightarrow P_2(x)] \rightarrow [(\vee x) P_1(x) \leftrightarrow (\vee x) P_2(x)].$

28. Доказать следующие законы пронесения квантора существования через импликацию:

- $(\vee x) [P \rightarrow P_1(x)] \leftrightarrow [P \rightarrow (\vee x) P_1(x)];$
- $(\vee x) [P_1(x) \rightarrow P] \leftrightarrow [(\wedge x) P_1(x) \rightarrow P];$
- $(\vee x) [P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \leftrightarrow [(\wedge x) P_1(x) \rightarrow (\vee x) P_2(x)].$

29. Доказать, что формула

$$(\vee x_1) (\wedge x_2) P(x_1, x_2) \rightarrow (\wedge x_2) (\vee x_1) P(x_1, x_2)$$

является тавтологией, а обратная ей импликация не является тавтологией.

30. Записать в виде формулы определения непрерывности и равномерной непрерывности скалярной функции, определенной на числовом множестве. Используя предыдущую задачу, доказать теорему: «Функция, равномерно непрерывная на множестве, непрерывна в каждой его точке».

31. Какие из нижеприведенных формул являются тавтологиями:

- $(\vee x) [P_1(x) \wedge P_2(x)] \rightarrow [(\vee x) P_1(x) \wedge (\vee x) P_2(x)];$
- $(\vee x) [P_1(x) \wedge P_2(x)] \leftrightarrow [(\vee x) P_1(x) \wedge (\vee x) P_2(x)];$
- $[(\wedge x) P_1(x) \vee (\wedge x) P_2(x)] \rightarrow (\wedge x) [P_1(x) \vee P_2(x)];$
- $[(\wedge x) P_1(x) \vee (\wedge x) P_2(x)] \leftrightarrow (\wedge x) [P_1(x) \vee P_2(x)].$

32. Какие из нижеприведенных формул являются тавтологиями:

- $(\wedge x) [P \rightarrow P_1(x)] \leftrightarrow [P \rightarrow (\wedge x) P_1(x)];$
- $(\wedge x) [P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \leftrightarrow [(\wedge x) P_1(x) \rightarrow (\wedge x) P_2(x)];$
- $(\vee x) [P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \rightarrow [(\vee x) P_1(x) \rightarrow (\vee x) P_2(x)];$
- $(\vee x) [P_1(x) \rightarrow P_2(x)] \leftrightarrow [(\vee x) P_1(x) \rightarrow (\vee x) P_2(x)].$

33. Доказать правило отделения и правило подстановки для формул логики предикатов (см. задачи 23 и 24 § 2).

34. Доказать, что если формула логики предикатов $\Phi(x)$, содержащая свободно только индивидуальное переменное x , является тавтологией, то формула $(\wedge x) \Phi(x)$ также является тавтологией, и обратно.

Обобщить сформулированное утверждение на формулы, содержащие любое конечное число индивидуальных переменных.

35. Если формула логики предикатов $\Phi(x)$, содержащая - свободно только индивидуальное переменное x , является тавтологией, то формула $(\vee x) \Phi(x)$ также является тавтологией. Верно ли обратное?

36. Доказать, что:

- если формула логики предикатов $\Phi \rightarrow \Psi$ является тавтологией, то формулы $(\wedge x) \Phi \rightarrow (\wedge x) \Psi$ и $(\vee x) \Phi \rightarrow (\vee x) \Psi$ также являются тавтологиями;
- если формула логики предикатов $\Phi \leftrightarrow \Psi$ является тавтологией, то формулы $(\wedge x) \Phi \leftrightarrow (\wedge x) \Psi$ и $(\vee x) \Phi \leftrightarrow (\vee x) \Psi$ также являются тавтологиями.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ К АЛГЕБРЕ ПОДМНОЖЕСТВ

1. Равенство и включение подмножеств. В п° 1 § 1 были сформулированы определения равенства и включения двух множеств. Эти определения применимы и к подмножествам данного множества. Ограничивааясь теперь только подмножествами данного множества, мы сформулируем оба этих определения еще раз и выразим их формулами, на которые будем опираться в дальнейшем.

Определение 1. Два подмножества X_1 и X_2 множества M называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент множества M принадлежит подмножеству X_1 тогда и только тогда, когда он принадлежит подмножеству X_2 :

$$X_1 = X_2 \leftrightarrow (\bigwedge_x) \underset{df}{(x \in X_1 \leftrightarrow x \in X_2)}. \quad (1)$$

Определение 2. Отношением включения подмножеств множества M называется однородное бинарное отношение между элементами множества $P(M)$, образованное из всех упорядоченных пар (X_1, X_2) таких, что X_1 является подмножеством X_2 , т. е. каждый элемент множества M , принадлежащий подмножеству X_1 , содержится в подмножестве X_2 . Если упорядоченная пара подмножеств (X_1, X_2) принадлежит отношению включения, то говорят также, что X_1 включается в X_2 , или что X_2 включает X_1 и пишут $X_1 \subset X_2$ или $X_2 \supset X_1$:

$$X_1 \subset X_2 \leftrightarrow (\bigwedge_x) \underset{df}{(x \in X_1 \rightarrow x \in X_2)}. \quad (2)$$

Например, для подмножеств множества четырехугольников на плоскости имеют место следующие включения: подмножество квадратов включается в подмножество прямоугольников, ко-

торое, в свою очередь, включается в подмножество параллелограммов.

Для подмножеств плоскости отношение включения имеет ясный наглядный смысл: подмножество X_1 включается в подмножество X_2 , если X_1 является частью X_2 (см. рис. 5).

Теорема 1. Если X_0 некоторое подмножество множества M , то:

$$\text{а) } X_0 \subset X_0; \text{ б) } X_0 \subset M; \text{ в) } \emptyset \subset X_0.$$

Действительно, по закону тождества (XVI) тождественно истинна импликация $x \in X_0 \rightarrow x \in X_0$. Следовательно, соответствующее ей универсальное высказывание $(\wedge x)(x \in X_0 \rightarrow x \in X_0)$ истинно. По определению (2) отсюда следует справедливость утверждения а).

Далее, рассмотрим импликации: $x \in X_0 \rightarrow x \in M$ и $x \in \emptyset \rightarrow x \in X_0$. Обе они тождественно истинны, т. к. у первой тождественно истинно заключение, а у второй тождественно ложна посылка. Следовательно, соответствующие им универсальные высказывания $(\wedge x)(x \in X_0 \rightarrow x \in M)$ и $(\wedge x)(x \in \emptyset \rightarrow x \in X_0)$ истинны. По определению (2) отсюда следует справедливость утверждений б) и в). Теорема доказана.

Теорема 2 (условие равенства двух подмножеств). Два подмножества X_1 и X_2 множества M равны тогда и только тогда, когда каждое из них включается в другое:

$$X_1 = X_2 \leftrightarrow (X_1 \subset X_2 \wedge X_2 \subset X_1). \quad (3)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением (1), выражением эквивалентности через конъюнкцию и импликацию (XXV), законом пронесения квантора общности через конъюнкцию (XXXII) и определением (2), можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} X_1 = X_2 &\leftrightarrow (\wedge x)(x \in X_1 \leftrightarrow x \in X_2) \leftrightarrow (\wedge x)[(x \in X_1 \rightarrow x \in X_2) \wedge \\ &\wedge (x \in X_2 \rightarrow x \in X_1)] \leftrightarrow [(\wedge x)(x \in X_1 \rightarrow x \in X_2) \wedge \\ &\wedge (\wedge x)(x \in X_2 \rightarrow x \in X_1)] \leftrightarrow (X_1 \subset X_2 \wedge X_2 \subset X_1), \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

2. Основные свойства операций дополнения, пересечения и объединения. Как известно (см. § 3 п° 4), каждое подмножество множества M можно рассматривать, как множество истинности некоторого одноместного предиката, определенного на M . В частности, так именно определялись дополнение подмножест-

ва, пересечение и объединение двух подмножеств. Теперь мы можем сказать, что:

1) *дополнение* X_0' подмножества X_0 есть множество истинности отрицания предиката «элемент x множества M принадлежит подмножеству $X_0»:$

$$X_0' = \underset{df}{=} (\exists x) \neg(x \in X_0); \quad (1)$$

2) *пересечение* $X_1 \cap X_2$ подмножеств X_1 и X_2 есть множество истинности конъюнкции двух предикатов: «элемент x множества M принадлежит подмножеству X_1 » и «элемент x множества M принадлежит подмножеству $X_2»:$

$$X_1 \cap X_2 = \underset{df}{=} (\exists x) (x \in X_1 \wedge x \in X_2); \quad (2)$$

3) *объединение* $X_1 \cup X_2$ подмножеств X_1 и X_2 есть множество истинности дизъюнкции двух предикатов: «элемент x множества M принадлежит подмножеству X_1 » и «элемент x множества M принадлежит подмножеству $X_2»:$

$$X_1 \cup X_2 = \underset{df}{=} (\exists x) (x \in X_1 \vee x \in X_2); \quad (3)$$

4) подмножество X_0 есть множество истинности предиката: «элемент x множества M принадлежит подмножеству $X_0»:$

$$X_0 = (\exists x) (x \in X_0). \quad (4)$$

Основные свойства операций дополнения, пересечения и объединения подмножеств могут быть получены на основании определений (1) — (3) и свойств логических операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции для предикатов. Так, с помощью тавтологий (I) — (XV), легко доказать теорему:

Теорема 1. Если X_0, X_1, X_2, X_3 — некоторые подмножества множества M , то:

$$1^\circ X_0 \cup X_0' = M, \quad 2^\circ X_0 \cap X_0' = \emptyset, \quad 3^\circ (X_0')' = X_0$$

(свойства дополнения);

$$4^\circ X_0 \cap X_0 = X_0, \quad 5^\circ X_0 \cup X_0 = X_0$$

(идемпотентность пересечения и объединения);

$$6^\circ (X_1 \cap X_2) \subset X_1, \quad 7^\circ X_1 \subset (X_1 \cup X_2)$$

(свойства отношения включения);

$$8^\circ X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_1, \quad 9^\circ X_1 \cup X_2 = X_2 \cup X_1$$

(переместительность пересечения и объединения);

$$10^\circ (X_1 \cap X_2) \cap X_3 = X_1 \cap (X_2 \cap X_3),$$

$$11^{\circ} (X_1 \cup X_2) \cup X_3 = X_1 \cup (X_2 \cup X_3)$$

(сочетательность пересечения и объединения);

$$12^{\circ} (X_1 \cup X_2) \cap X_3 = (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3),$$

$$13^{\circ} (X_1 \cap X_2) \cup X_3 = (X_1 \cup X_3) \cap (X_2 \cup X_3).$$

(распределительность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения);

$$14^{\circ} (X_1 \cap X_2)' = X_1' \cup X_2', \quad 15^{\circ} (X_1 \cup X_2)' = X_1' \cap X_2'$$

(законы де-Моргана для пересечения и объединения).

Для примера докажем формулы 1°, 3°, 6°, 12° и 14°, остальные читатель аналогично докажет самостоятельно.

По определению объединения двух подмножеств и определению дополнения подмножества имеем равенства:

$$X_0 \cup X_0' = (\exists x)(x \in X_0 \vee x \in X_0') = (\exists x)[x \in X_0 \vee \neg(x \in X_0)].$$

Но, согласно закону исключенного третьего (I), одноместный предикат $x \in X_0 \vee \neg(x \in X_0)$ тождественно истинный, и, следовательно, его множество истинности есть все множество M . Тем самым доказана формула 1°.

Далее, пользуясь последовательно дважды определением дополнения подмножества, законом двойного отрицания (III) и формулой (4), находим следующую цепочку равенств:

$$(X_0')' = (\exists x)\neg(x \in X_0') = (\exists x)\neg\neg(x \in X_0) = (\exists x)(x \in X_0) = X_0,$$
 которая доказывает формулу 3°.

Далее, согласно тавтологии (VI), одноместный предикат $(x \in X_1 \wedge x \in X_2) \rightarrow x \in X_1$ тождественно истинный. Следовательно, соответствующее ему универсальное высказывание $(\forall x)[(x \in X_1 \wedge x \in X_2) \rightarrow x \in X_1]$ истинно. Отсюда, учитывая определение (2) и определение отношения включения подмножеств, получаем формулу 6°.

Затем, используя последовательно определения пересечения и объединения двух подмножеств, закон распределительности конъюнкции относительно дизъюнкции, а затем снова определения (2) и (3), можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (X_1 \cup X_2) \cap X_3 &= (\exists x)[(x \in X_1 \cup X_2) \wedge x \in X_3] = \\ &= (\exists x)[(x \in X_1 \vee x \in X_2) \wedge x \in X_3] = (\exists x)[(x \in X_1 \wedge x \in X_3) \vee \\ &\quad \vee (x \in X_2 \wedge x \in X_3)] = (\exists x)[(x \in X_1 \cap X_3) \vee (x \in X_2 \cap X_3)] = \\ &= (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3), \end{aligned}$$

откуда следует формула 12°.

Наконец, пользуясь последовательно определением дополнения подмножества, определением пересечения двух подмножеств

жеств, законом де-Моргана для конъюнкции (XIV), а затем снова определением (1) и определением (3), получаем цепочку равенств:

$$(X_1 \cap X_2)' = (\exists x)(x \in X_1 \cap X_2) = (\exists x)(x \in X_1 \wedge x \in X_2) = \\ = (\exists x)[\neg(x \in X_1) \vee \neg(x \in X_2)] = (\exists x)(x \in X_1' \vee x \in X_2') = X_1' \cup X_2'$$

которая доказывает формулу 14°.

3. Объединение и пересечение совокупности подмножеств и семейства подмножеств. Определение 1: Пусть Q — некоторая совокупность подмножеств множества M (конечная или бесконечная). *Объединением* Q , которое обозначается символом $\sqcup Q$, называется множество всех элементов множества M , принадлежащих, по крайней мере, одному из подмножеств совокупности Q :

$$\sqcup Q = (\exists x)(\forall X)(X \in Q \wedge x \in X), \quad (1)$$

Пересечением Q , которое обозначается символом $\sqcap Q$, называется множество всех элементов множества M , принадлежащих каждому подмножеству совокупности Q :

$$\sqcap Q = (\exists x)(\forall X)(X \in Q \rightarrow x \in X). \quad (2)$$

Например, если Q есть множество всех отрезков числовой прямой, один конец которых есть 0, то $\sqcup Q = R$, а $\sqcap Q = \{0\}$, ибо для каждого действительного числа a , с одной стороны, существует отрезок $[0, a]$, содержащий a , а с другой стороны, если $a \neq 0$, то отрезок $[0, \frac{a}{2}]$ не содержит a .

Определение 2. *Семейством подмножеств множества* M называется семейство элементов множества $P(M)$.

Более подробно, семейство подмножеств множества M есть функция, определенная на некотором множестве индексов I , значениями которой являются подмножества множества M . Семейство подмножеств множества M с множеством индексов I , значение которого для индекса i есть подмножество X_i , обозначается $(X_i)_{i \in I}$.

Семейства подмножеств могут отличаться между собой или совокупностью их подмножеств, или множеством индексов, или значениями для некоторых индексов. Например, у семейств:

$$(\{\sin x\})_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \text{ и } (\{\cos x\})_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]}$$

совокупности подмножеств одинаковые — в обоих случаях это

есть совокупность всех одноЭлементных подмножеств отрезка $[0, 1]$ числовой прямой; множества индексов также совпадают — у обоих семейств это есть отрезок $[0, \frac{\pi}{2}]$ числовой прямой. Но

значением для индекса $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ для первого семейства будет подмножество $\{\sin x_0\}$, а для второго — подмножество $\{\cos x_0\}$. Следовательно, эти семейства различны.

Если множество индексов семейства конечное, состоящее из n элементов, то и множество подмножеств семейства также конечное, оно будет содержать не более n подмножеств.

Каждой совокупности подмножеств Q -множества M можно различным образом сопоставить семейство подмножеств, для которого множеством элементов будет данная совокупность Q . С этой целью следует выбрать некоторое множество индексов I , мощность которого не меньше мощности Q и определить отображение $i \rightarrow X_i$ множества I на Q . В частности, за множество индексов можно взять саму совокупность Q , а за отображение — тождественное отображение Q на себя. Тогда получим семейство $(X)_{x \in Q}$.

Определение 3. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство подмножеств множества M с множеством индексов I . *Объединением* данного семейства, которое обозначается символом $\sqcup_{i \in I} X_i$, называется совокупность всех элементов множества M , принадлежащих, по крайней мере, одному из значений семейства:

$$\sqcup_{i \in I} X_i = (\exists x)(\bigvee i)(x \in X_i). \quad (3)$$

Пересечением данного семейства, которое обозначается $\sqcap_{i \in I} X_i$, называется совокупность всех элементов множества M , принадлежащих каждому значению семейства*:

$$\sqcap_{i \in I} X_i = (\forall x)(\bigwedge i)(x \in X_i). \quad (4)$$

Можно сказать также, что объединение и пересечение семейства подмножеств множества M есть соответственно объединение и пересечение совокупности Q всех подмножеств данного семейства. Следовательно, они не зависят ни от множества индексов семейства, ни от соответствия между индексами и подмножествами совокупности Q , а зависят только от последней.

Например, для семейства отрезков числовой прямой с множеством индексов R , значение которого для каждого действи-

* См. Примечания в конце книги.

тельного числа a есть отрезок $[0, a]$, совокупность его подмножеств совпадает с рассмотренной в начале этого пункта совокупностью отрезков числовой прямой. Следовательно, $\bigsqcup_{a \in R} [0, a] = R$ и $\bigsqcap_{a \in R} [0, a] = \{0\}$.

Для конечного семейства подмножеств множества M с множеством индексов $I = \{1, 2, \dots, n\}$ объединение и пересечение обозначаются также соответственно $\bigsqcup_{i=1}^n X_i$ и $\bigsqcap_{i=1}^n X_i$. Согласно определению 3 и теоремам 1 и 2 п° 7 § 3, будут справедливы равенства:

$$\bigsqcup_{i=1}^n X_i = (\exists x)(x \in X_1 \vee x \in X_2 \vee \dots \vee x \in X_n) \text{ и } (5_1)$$

$$\bigsqcap_{i=1}^n X_i = (\forall x)(x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge \dots \wedge x \in X_n). \quad (5_2)$$

Следовательно, нахождение объединения и пересечения конечного семейства подмножеств сводится к повторному применению бинарных операций объединения и пересечения подмножеств соответственно:

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i=1}^n X_i &= (\dots ((X_1 \cup X_2) \cup X_3) \cup \dots) \cup X_n; \\ \bigsqcap_{i=1}^n X_i &= (\dots ((X_1 \cap X_2) \cap X_3) \cap \dots) \cap X_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Объединение и пересечение семейства и совокупности подмножеств обладают свойствами, аналогичными для бинарных операций объединения и пересечения соответственно.

Теорема 1 (обобщенные законы де-Моргана). Пусть дано семейство подмножеств множества M с множеством индексов $I: (X_i)_{i \in I}$. Построим новое семейство с тем же множеством индексов I , значение которого для каждого индекса i есть дополнение X'_i значения данного семейства для того же индекса i . Тогда:

1° дополнение объединения данного семейства совпадает с пересечением семейства дополнений;

2° дополнение пересечения данного семейства совпадает с объединением семейства дополнений:

$$(\bigsqcup_{i \in I} X_i)' = \bigsqcap_{i \in I} X'_i; \quad (\bigsqcap_{i \in I} X_i)' = \bigsqcup_{i \in I} X'_i. \quad (7)$$

Действительно, используя последовательно определение дополнения подмножества, определение (3), закон де-Моргана для квантора существования (XXXI), затем снова определение дополнения подмножества и, наконец, определение (4), можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)' &= (\exists x) \neg (x \in \bigcup_{i \in I} X_i) = (\exists x) \neg (\vee i) (x \in X_i) = \\ &= (\exists x) (\wedge i) \neg (x \in X_i) = (\exists x) (\wedge i) (x \in X_i') = \bigcap_{i \in I} X_i', \end{aligned}$$

которая доказывает первое утверждение теоремы.

Аналогично получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} X_i\right)' &= (\exists x) \neg (x \in \bigcap_{i \in I} X_i) = (\exists x) \neg (\wedge i) (x \in X_i) = \\ &= (\exists x) (\vee i) \neg (x \in X_i) = (\exists x) (\vee i) (x \in X_i') = \bigcup_{i \in I} X_i', \end{aligned}$$

которая доказывает второе утверждение теоремы.

Заметим, что в случае, когда $I = \{1, 2\}$, формулы (7) совпадают с ранее доказанными законами де-Моргана для объединения и пересечения 2-х подмножеств.

Теорема 2. Пусть даны два семейства подмножеств одного и того же множества M с общим множеством индексов I : $(X_i)_{i \in I}$ и $(X_i)_{i \in I}$ такие, что для каждого индекса i соответствующие подмножества X_i и X_i первого и второго семейств удовлетворяют отношению включения. Тогда объединение первого семейства включается в объединение второго семейства:

$$(\wedge i) (X_1 \subset X_2) \rightarrow \left[\left(\bigcup_{i \in I} X_1 \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} X_2 \right) \right]. \quad (8)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением отношения включения подмножеств, законом переместительности кванторов общности (XLI) вместе с законом пронесения квантора через импликацию (XXXVII), определением 3 и затем опять определением отношения включения подмножеств, можем написать следующую цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} (\wedge i) (X_1 \subset X_2) &\rightarrow (\wedge i) (\wedge x) (x \in X_1 \rightarrow x \in X_2) \rightarrow \\ &\rightarrow (\wedge x) \left[(\vee i) (x \in X_1) \rightarrow (\vee i) (x \in X_2) \right] \rightarrow \\ &\rightarrow (\wedge x) \left[(x \in \bigcup_{i \in I} X_1) \rightarrow (x \in \bigcup_{i \in I} X_2) \right] \rightarrow \left[\left(\bigcup_{i \in I} X_1 \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} X_2 \right) \right], \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Заметим, что если $I = \{1, 2\}$, то формула (8) принимает вид:

$$(X_1 \subset X_1 \wedge X_2 \subset X_2) \rightarrow \left[(X_1 \cup X_2) \subset (X_1 \cup X_2) \right] \quad (9)$$

Последняя может быть доказана непосредственно с помощью тавтологии $[(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_3 \rightarrow P_4)] \rightarrow [(P_1 \wedge P_3) \rightarrow (P_2 \wedge P_4)]$. Это предоставляем проделать читателю самостоятельно.

Теорема 3. Объединение семейства подмножеств множества M будет пустым тогда и только тогда, когда все его подмножества пустые:

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \emptyset \Leftrightarrow (\wedge i)(X_i = \emptyset). \quad (10)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением пустого подмножества, определением (3), законом переместительности кванторов общности (XLI) вместе с законом де-Моргана (XXXI) и затем снова определением пустого подмножества, получаем следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} X_i = \emptyset &\Leftrightarrow \neg(\vee x)(x \in \bigsqcup_{i \in I} X_i) \Leftrightarrow \neg(\vee x)(\vee i)(x \in X_i) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\wedge i) \neg(\vee x)(x \in X_i) \Leftrightarrow (\wedge i)(X_i = \emptyset), \end{aligned}$$

которая доказывает утверждение теоремы. Заметим, что в случае когда $I = \{1, 2\}$, формула (10) принимает вид:

$$X_1 \cup X_2 = \emptyset \Leftrightarrow (X_1 = \emptyset \wedge X_2 = \emptyset). \quad (11)$$

Определение 4. Пусть дано семейство элементов множества M с множеством индексов $I : (x_i)_{i \in I}$ и пусть J некоторое подмножество множества I . Тогда семейство элементов множества M с множеством индексов J , значение которого для каждого индекса, принадлежащего J , совпадает со значением данного семейства для того же индекса, называется *подсемейством* данного семейства.

Теорема 4. Пусть дано семейство подмножеств множества M с множеством индексов I и два его подсемейства с множествами индексов I_1 и I_2 , объединение которых есть множество $I : I = I_1 \cup I_2$. Тогда объединение данного семейства равно объединению объединений обоих его подсемейств:

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \left(\bigsqcup_{i \in I_1} X_i \right) \cup \left(\bigsqcup_{i \in I_2} X_i \right). \quad (12)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением (3), условием теоремы и определением объединения 2-х подмножеств, законом распределительности конъюнкции относительно дизъюнкции (XII), законом пронесения квантора существования через дизъюнкцию (XXXII), затем снова определением (3) и, наконец, определением объединения двух подмножеств, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{i \in I} X_i &= (\exists x)(\vee i)(i \in I \wedge x \in X_i) = (\exists x)(\vee i)[(i \in I_1 \vee i \in I_2) \wedge x \in X_i] = \\ &= (\exists x)(\vee i)[(i \in I_1 \wedge x \in X_i) \vee (i \in I_2 \wedge x \in X_i)] = \\ &= (\exists x)[(\vee i)(i \in I_1 \wedge x \in X_i) \vee (\vee i)(i \in I_2 \wedge x \in X_i)] = \end{aligned}$$

$$=(\forall x)\left[\left(x \in \bigsqcup_{i \in I_1} X_i\right) \vee \left(x \in \bigsqcup_{i \in I_2} X_i\right)\right] = \left(\bigsqcup_{i \in I_1} X_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{i \in I_2} X_i\right),$$

которая доказывает теорему.

Теорема 5. Для любого семейства подмножеств объединение каждого его подсемейства включается в объединение самого семейства.

В с. д., пусть дано семейство подмножеств множества M с множеством индексов $I : (X_i)_{i \in I}$ и его подсемейство с множеством индексов J . Рассмотрим новое подсемейство данного семейства подмножеств с множеством индексов J' . Тогда по формуле 1° теоремы 1 предыдущего п° будет верно равенство: $I = J \cup J'$. По теореме 4 отсюда следует, что объединение данного семейства равняется объединению объединения данного его подсемейства с объединением только что введенного его подсемейства:

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i = \left(\bigsqcup_{i \in J} X_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{i \in J'} X_i\right). \quad (*)$$

В то же время по формуле 7° теоремы 1 предыдущего п° имеем

$$\bigsqcup_{i \in J} X_i \subset \left(\bigsqcup_{i \in J} X_i\right) \cup \left(\bigsqcup_{i \in J'} X_i\right). \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует утверждение теоремы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дано множество M и два его подмножества X_1 и X_2 . Доказать:

- a) $X_1 = X_2 \Leftrightarrow X_1' = X_2'$;
б) $X_1 \subset X_2 \Leftrightarrow X_2 \subset X_1$.

2. Пользуясь условием равенства множеств, доказать *вакансы поглощения*:

- а) $X_1 \cup (X_1 \cap X_2) = X_1$; б) $X_1 \cap (X_1 \cup X_2) = X_1$.

3. Доказать, что для каждого множества M :

- а) $M' = \emptyset$; б) $\emptyset' = M$.

4. Принципом двойственности в теории множеств называется следующее утверждение: если в тождестве алгебры подмножеств, содержащем только знаки операций дополнения, пересечения и объединения, заменить а) знаки \cup и \cap соответственно на \cap и \cup и б) M на \emptyset и \emptyset на M , то получится новое тождество, называемое *двойственным* к исходному.

Доказать принцип двойственности и привести примеры иллюстрирующие его.

5. Доказать, что если X_0 подмножество множества M , то:

- a) $X_0 \cap M = X_0$; б) $X_0 \cup \emptyset = X_0$;
в) $X_0 \cup M = M$; г) $X_0 \cap \emptyset = \emptyset$.

6. Для каждого множества M и любых его подмножеств X_1, X_2 :

- a) $X_1 \cup X_2 = M \leftrightarrow X_1' \subset X_2 \leftrightarrow X_2' \subset X_1$;
б) $X_1 \cap X_2 = \emptyset \leftrightarrow X_1 \subset X_2 \leftrightarrow X_2 \subset X_1'$;
в) $X_1 \cup X_2 = X_2 \leftrightarrow X_1 \subset X_2$;
г) $X_1 \cap X_2 = X_2 \leftrightarrow X_1 \supset X_2$.

Доказать!

7. Дано множество M и три его подмножества X_1, X_2, X_3 . Доказать справедливость следующих импликаций:

- a) $(X_1 \subset X_2) \rightarrow [(X_1 \cup X_3) \subset (X_2 \cup X_3)]$;
б) $(X_1 \subset X_2) \rightarrow [(X_1 \cap X_3) \subset (X_2 \cap X_3)]$;
в) $(X_1 \subset X_2 \wedge X_3 \subset X_4) \rightarrow [(X_1 \cup X_3) \subset (X_2 \cup X_4)]$;
г) $(X_1 \subset X_2 \wedge X_3 \subset X_4) \rightarrow [(X_1 \cap X_3) \subset (X_2 \cap X_4)]$.

8. Упростить следующие выражения:

- a) $(X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2')$;
б) $(X_1 \cap X_2) \cup (X_1' \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2')$;
в) $(X_1' \cup X_2' \cup X_3) \cup (X_1' \cup X_2) \cup (X_1' \cup X_3)$.

9. Выразить определение разности двух подмножеств (см. задачу 7 § 1) формулой и доказать следующие свойства разности:

- a) $X_1 \cap X_2 = X_1 \setminus (X_1 \setminus X_2) = X_2 \setminus (X_2 \setminus X_1)$;
б) $X_1 \cap (X_2 \setminus X_3) = (X_1 \cap X_2) \setminus (X_1 \cap X_3)$;
в) $X_1 \cup (X_2 \setminus X_3) = (X_1 \cup X_2) \setminus (X_3 \setminus X_1)$.

10. Симметрична разность двух подмножеств X_1 и X_2 множества M определяется равенством

$$X_1 \dot{-} X_2 = (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1).$$

Доказать следующие свойства симметричной разности:

- а) $X_1 \dot{-} X_2 = (X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2)$;
б) $X_1 \dot{-} (X_2 \dot{-} X_3) = (X_1 \dot{-} X_2) \dot{-} X_3$.

(сочетательность);

в) $X_1 \cap (X_2 \dot{-} X_3) = (X_1 \cap X_2) \dot{-} (X_1 \cap X_3)$.

(распределительность).

11. Показать, что множество истинности эквивалентности двух n -местных предикатов, определенных на одних и тех же множествах, равняется дополнению симметричной разности множеств истинности членов эквивалентности.

12. Показать, что для множества M :

- а) объединение всех его подмножеств совпадает с M ;
б) пересечение всех его подмножеств есть пустое множество.

13. Обобщить принцип двойственности на тождества алгебры подмножеств, содержащие, кроме операций дополнения, пересечения и объединения, также знаки операций объединения и пересечения семейства подмножеств.

14. Доказать следующие свойства пересечения семейства подмножеств:

а) Если $\underset{1}{(X_i)_{i \in I}}$ и $\underset{2}{(X_i)_{i \in I}}$ два семейства подмножеств множества

M с общим множеством индексов I такие, что соответствующие подмножества первого и второго семейства удовлетворяют отношению включения, то пересечение первого семейства подмножеств включается в пересечение второго семейства;

б) Пересечение каждого семейства подмножеств включается в пересечение любого его подсемейства;

в) Пусть даны: семейство подмножеств $(X_i)_{i \in I}$ множества M и два его подсемейства $(X_i)_{i \in I_1}$ и $(X_i)_{i \in I_2}$ такие, что $I = I_1 \cup I_2$. Тогда:

$$\underset{i \in I}{\sqcap} X_i = \left(\underset{i \in I_1}{\sqcap} X_i \right) \cap \left(\underset{i \in I_2}{\sqcap} X_i \right).$$

15. Доказать обобщенные законы распределительности:

а) $X \cap (\underset{i \in I}{\sqcup} X_i) = \underset{i \in I}{\sqcup} (X \cap X_i);$

б) $X \cup (\underset{i \in I}{\sqcap} X_i) = \underset{i \in I}{\sqcap} (X \cup X_i).$

16. Даны два семейства подмножеств $(X_i)_{i \in I}$ и $(X_k)_{k \in K}$ множества M с множествами индексов I и K соответственно. Доказать:

а) $(\underset{i \in I}{\sqcup} X_i) \cup (\underset{k \in K}{\sqcup} X_k) = \underset{(i, k) \in I \times K}{\sqcup} (X_i \cup X_k);$

б) $(\underset{i \in I}{\sqcup} X_i) \cap (\underset{k \in K}{\sqcup} X_k) = \underset{(i, k) \in I \times K}{\sqcap} (X_i \cap X_k);$

в) $(\underset{i \in I}{\sqcap} X_i) \cap (\underset{k \in K}{\sqcap} X_k) = \underset{(i, k) \in I \times K}{\sqcap} (X_i \cap X_k);$

г) $(\underset{i \in I}{\sqcap} X_i) \cup (\underset{k \in K}{\sqcap} X_k) = \underset{(i, k) \in I \times K}{\sqcup} (X_i \cup X_k).$

§ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

1: Простейшие понятия. Согласно общему определению *n*-отношения, данного в п° 6 § 1, *бинарное отношение* ρ между элементами множеств M и N есть подмножество декартова произведения этих множеств, которые называются соответственно первым и вторым *базисными множествами* отношения ρ . При совпадении базисных множеств, бинарное отношение называется однородным. Можно также сказать, что бинарное отношение между элементами множеств M и N есть некоторая совокупность упорядоченных пар, первая и вторая компонента которых принадлежит соответственно множеству M и множеству N . Следовательно, чтобы задать бинарное отношение между элементами данных множеств M и N , следует из всех упорядоченных пар, образованных из элементов этих множеств, выделить определенную их совокупность. Если упорядоченная пара (x_0, y_0) принадлежит ρ , то говорят также, что элементы x_0, y_0 удовлетворяют ρ , или что элемент x_0 находится в отношении ρ с элементом y_0 ; в противном случае говорят, что элементы x_0, y_0 не удовлетворяют ρ или, что элемент x_0 не находится в отношении ρ с элементом y_0 . *Универсальное бинарное отношение* между элементами множеств M и N есть декартово произведение $M \times N$, *пустое бинарное отношение* между элементами множеств M и N есть пустое подмножество декартова произведения $M \times N$.

Вот несколько примеров бинарных отношений.

1) *Отношение равенства.* Определение 1. Отношением *равенства* или *тождественным отношением* между элементами множества M называется множество всех пар с равными компонентами, образованных из элементов множества M .

Тождественное бинарное отношение между элементами множества M обозначается Δ_M и называется еще диагональю множества M :

$$\Delta_M = (\subset (x, x'))(x = x'). \quad (1)$$

Отношение равенства между действительными числами Δ_R на числовой плоскости изобразится биссектрисой угла между прямыми OX и OY (рис. 6).

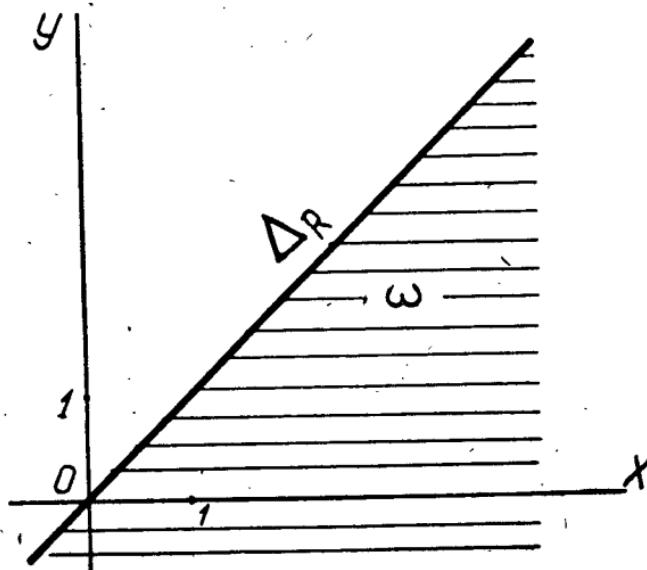


Рис. 6.

2) Множество всех упорядоченных пар действительных чисел, у которых первое число больше второго, есть однородное бинарное отношение между действительными числами. Его в дальнейшем будем обозначать буквой ω и называть *отношением «больше»*. Например, пара $(7, \sqrt{28})$ принадлежит отношению «больше», а пара $(3, \pi)$ не принадлежит ему. На чертеже бинарное отношение ω изобразится полуплоскостью числовой плоскости, расположенной под биссектрисой угла между прямыми OX и OY (см. рис. 6).

3) Множество всех упорядоченных пар целых чисел, произведение которых равно 6, есть конечное однородное бинарное отношение между целыми числами. Оно состоит из 4-х упорядоченных пар: $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$.

4) Множество всех пар мужчин и женщин, являющихся братом и сестрой друг для друга, есть бинарное отношение между множеством всех мужчин и множеством всех женщин. Каждый мужчина находится в этом отношении с каждой своей сестрой, с любой другой женщиной он в этом отношении не находится.

К бинарным отношениям между элементами двух данных множеств применимы все понятия и операции, которые вводятся для подмножеств заданного множества. В частности, согласно определений п° 1 и п° 2 предыдущего параграфа, можно сказать, что:

1° Два бинарных отношения ρ и σ между элементами одних и тех же множеств M и N равны, если они состоят из одинаковых упорядоченных пар, т. е. каждая упорядоченная пара, образованная из элементов множеств M и N , принадлежит ρ тогда и только тогда, когда она принадлежит σ :

$$\rho = \sigma \Leftrightarrow (\wedge(x,y))[(x,y) \in \rho \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma]; \quad (2)$$

2° Бинарное отношение ρ между элементами множеств M и N включается в бинарное отношение σ между элементами тех же множеств, другими словами, σ включает ρ , если каждая упорядоченная пара, образованная из элементов множеств M и N , принадлежащая отношению ρ , принадлежит и отношению σ :

$$\rho \subseteq \sigma \Leftrightarrow (\wedge(x,y))[(x,y) \in \rho \rightarrow (x,y) \in \sigma]; \quad (3)$$

3° Пересечение двух бинарных отношений ρ и σ между элементами одних и тех же множеств M и N есть множество всех упорядоченных пар, образованных из элементов множеств M и N , принадлежащих одновременно обоим данным отношениям:

$$\rho \cap \sigma = (\wedge(x,y))[(x,y) \in \rho \wedge (x,y) \in \sigma]; \quad (4)$$

4° Объединение двух бинарных отношений ρ и σ между элементами одних и тех же множеств M и N есть множество всех упорядоченных пар, образованных из элементов множеств M и N , принадлежащих, по крайней мере, одному из данных отношений:

$$\rho \cup \sigma = (\vee(x,y))[(x,y) \in \rho \vee (x,y) \in \sigma]. \quad (5)$$

Например, объединение бинарных отношений ω и Δ_R между действительными числами есть отношение «не меньше», т. е. множество всех упорядоченных пар действительных чисел, первое из которых не меньше второго; отношение ω включается в отношение «не меньше»; пересечение отношений ω и «не меньше» есть ω .

2. Проекции бинарного отношения. Определение 1.

Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N . *Первой проекцией* ρ , которая обозначается $pr_1\rho$, называется множество всех первых компонент упорядоченных пар, принадлежащих ρ ; *второй проекцией* ρ , которая обозначается $pr_2\rho$, называется множество всех вторых компонент упорядоченных пар, принадлежащих ρ . Другими словами, первая проекция ρ есть совокупность всех элементов первого базисного множества M , которые находятся в отношении ρ , по крайней мере, с одним элементом множества N ; вторая проекция ρ есть совокупность всех элементов второго базисного множества N , с которыми в отношении ρ находится, по крайней мере, один элемент множества M :

$$pr_1\rho = (\underset{df}{\subset} x)(\forall y)[(x,y) \in \rho]; \quad pr_2\rho = (\underset{df}{\subset} y)(\forall x)[(x,y) \in \rho]. \quad (1)$$

Так, например, для бинарного отношения ρ третьего примера предыдущего пункта $pr_1\rho = pr_2\rho = \{1, 2, 3, 6\}$.

Для однородного бинарного отношения ρ между действительными числами первая и вторая проекции совпадают с множеством проекций всех точек числовой плоскости, принадлежащих ρ , на OX и OY соответственно (рис. 7). Пользуясь этим геомет-

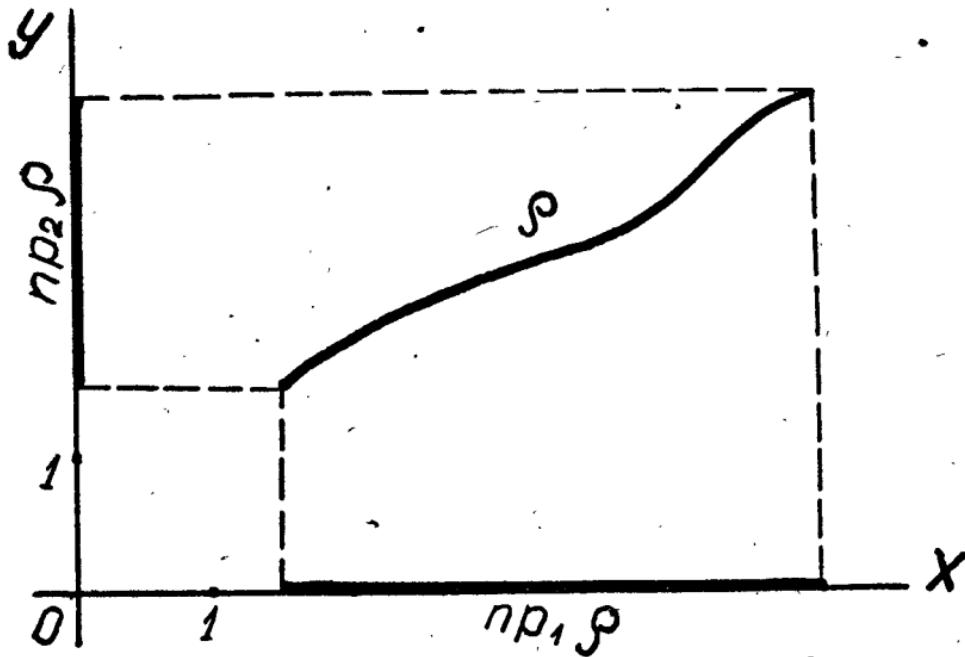


Рис. 7.

рическим представлением проекций, найдем, например, что для отношения «больше» между действительными числами обе проекции совпадают со всем множеством действительных чисел: $pr_1\omega = pr_2\omega = R$ (см. рис. 6).

Определение 2. Бинарное отношение между элементами множеств M и N называется *полным*, если его первая проекция совпадает с множеством M , а вторая проекция совпадает с множеством N .

Для полного отношения ρ между элементами множеств M и N , каждый элемент первого базисного множества M находится в отношении ρ , по крайней мере, с одним элементом множества N , и с каждым элементом второго базисного множества N , по крайней мере, один элемент множества M находится в отношении ρ .

Например, тождественное бинарное отношение Δ_M между элементами множества M является полным.

Теорема 1 (необходимые условия включения бинарных отношений). Для того чтобы бинарные отношения ρ и σ между элементами множеств M и N удовлетворяли отношению включений, необходимо, чтобы их первые (вторые) проекции удовлетворяли отношению включений:

$$(\rho \subset \sigma) \rightarrow (pr_i\rho \subset pr_i\sigma) \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Действительно, пользуясь последовательно формулой (3) предыдущего пункта, законом пронесения квантора общности через импликацию (XXXVII), определением первой проекции бинарного отношения и, наконец, определением отношения включения подмножеств, можем написать следующую цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} (\rho \subset \sigma) &\rightarrow (\bigwedge x)(\bigwedge y)[(x, y) \in \rho \rightarrow (x, y) \in \sigma] \rightarrow \\ &\rightarrow (\bigwedge x)[(\bigvee y)((x, y) \in \rho) \rightarrow (\bigvee y)((x, y) \in \sigma)] \rightarrow \\ &\rightarrow (\bigwedge x)(x \in pr_1\rho \rightarrow x \in pr_1\sigma) \rightarrow (pr_1\rho \subset pr_1\sigma). \end{aligned}$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично.

Заметим, что указанные необходимые условия включения бинарных отношений не являются достаточными, так как существуют бинарные отношения, которые не удовлетворяют отношению включений, а соответствующие проекции их удовлетворяют отношению включения. Таковыми будут, например, два следующие конечные однородные бинарные отношения между натуральными числами: $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ и $\sigma = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Следствие (необходимые условия равенства бинарных отношений). Для того чтобы бинарные отношения ρ и σ между элементами множеств M и N были равны, необходимо, чтобы первые (вторые) проекции их были равны:

$$(\rho = \sigma) \rightarrow (np_i \rho = np_i \sigma) \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

В с. д., согласно признака равенства подмножеств Π^o 1 предыдущего параграфа и доказанной теоремы, справедлива следующая цепочка импликаций:

$$\begin{aligned} (\rho = \sigma) &\rightarrow (\rho \subseteq \sigma \wedge \sigma \subseteq \rho) \rightarrow (np_i \rho = np_i \sigma \wedge np_i \sigma \subseteq np_i \rho) \rightarrow \\ &\rightarrow (np_i \rho = np_i \sigma) \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

которая доказывает следствие.

Теорема 2 (признаки пустого бинарного отношения). Бинарное отношение пустое тогда и только тогда, когда первая (вторая) проекция его пустая:

$$\rho = \emptyset \leftrightarrow np_i \rho = \emptyset \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

В с. д., пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N . Тогда, пользуясь сначала определением пустого бинарного отношения, затем определением первой проекции бинарного отношения и, наконец, определением пустого множества, можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\rho = \emptyset \leftrightarrow \neg (\forall x)(\forall y)[(x, y) \in \rho] \leftrightarrow \neg (\forall x)[x \in np_1 \rho] \leftrightarrow np_1 \rho = \emptyset.$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично.

Теорема 3 (проекции объединения бинарных отношений). Если ρ и σ — бинарные отношения между элементами одних и тех же множеств M и N , то каждая проекция их объединения равняется объединению соответствующих проекций ρ и σ :

$$np_i(\rho \cup \sigma) = np_i \rho \cup np_i \sigma \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением первой проекции бинарного отношения, формулой (5) предыдущего пункта, законом пронесения квантора существования через дизьюнкцию (XXXIV), затем снова определением (1) и, наконец, определением объединения двух подмножеств, можем написать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} np_1(\rho \cup \sigma) &= (\exists x)(\forall y)[(x, y) \in \rho \cup \sigma] = (\exists x)(\forall y)[(x, y) \in \rho \vee \\ &\vee (x, y) \in \sigma] = (\exists x)[(\forall y)[(x, y) \in \rho] \vee (\forall y)[(x, y) \in \sigma]] = \\ &= (\exists x)[x \in np_1 \rho \vee x \in np_1 \sigma] = np_1 \rho \cup np_1 \sigma, \end{aligned}$$

которая доказывает формулу (5) для $t = 1$. Для $t = 2$ формула (5) доказывается аналогично.

3. Обратное бинарное отношение. Определение 1. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N . *Обратным отношением для ρ , короче, обращением ρ* , которое обозначается $\bar{\rho}$, называется бинарное отношение между элементами множеств N и M , образованное из всех упорядоченных пар, вторая компонента которых находится в отношении ρ с ее первой компонентой:

$$\bar{\rho} = (\subset (y, x)) [(x, y) \in \rho].$$

Из определения видно, что если ρ — однородное бинарное отношение между элементами множества M , то его обращение

$\bar{\rho}$ будет также однородным бинарным отношением между элементами этого же множества. Например, для тождественного бинарного отношения Δ_M между элементами множества M обратное отношение совпадает с ним самим: $\bar{\Delta}_M = \Delta_M$; для отношения «больше» между действительными числами обращением будет отношение «меньше», так как по определению 1 и определению ω имеем равенства:

$$\bar{\omega} = (\subset (x, x')) [(x', x) \in \omega] = (\subset (x, x')) (x' > x) = (\subset (x, x')) (x < x').$$

Если ρ — однородное бинарное отношение между действительными числами, то его обращение $\bar{\rho}$ будет зеркальным образом ρ относительно диагонали Δ_R числового плоскости, ибо две точки числового плоскости, отличающиеся только порядком компонент, располагаются симметрично относительно Δ_R (рис. 8).

Теорема 1. *Бинарные отношения между элементами одних и тех же множеств равны тогда и только тогда, когда равны их обращения:*

$$\rho = \sigma \leftrightarrow \bar{\rho} = \bar{\sigma}. \quad (2)$$

Действительно, пусть ρ и σ суть бинарные отношения между элементами множеств M и N . Их обращения $\bar{\rho}$ и $\bar{\sigma}$ будут бинарными отношениями между элементами множеств N и M . Тогда, используя сначала определение равенства бинарных отношений, затем закон переместительности кванторов общности (XLI) вместе с определением 1 и, наконец, опять определение

равенства бинарных отношений, получаем следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma \Leftrightarrow (\wedge(y, x)) [(y, x) \in \rho \Leftrightarrow (y, x) \in \sigma] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\wedge(x, y)) [(x, y) \in \rho \Leftrightarrow (x, y) \in \sigma] \Leftrightarrow \rho = \sigma, \end{aligned}$$

которая вместе с законом симметричности (ХХ) доказывает теорему.

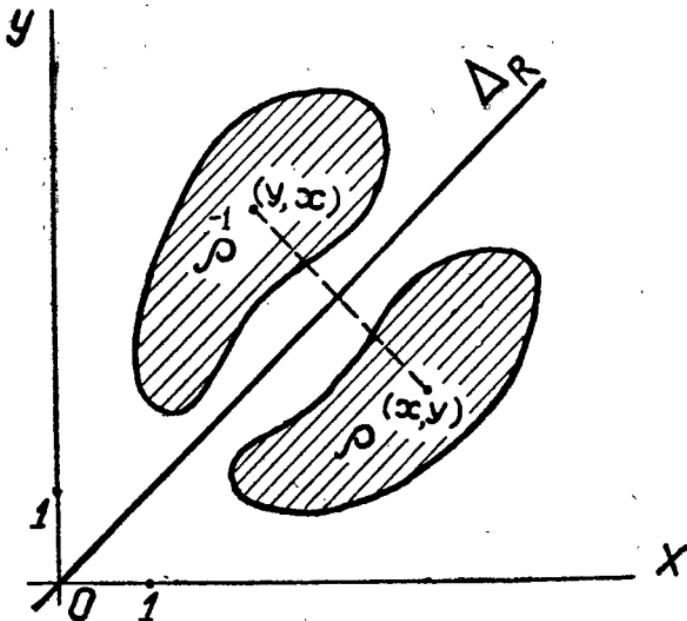


Рис. 8.

Теорема 2. Двойное обращение любого бинарного отношения совпадает с ним самим:

$$\begin{array}{c} \overline{\rho}^{-1} \\ \overline{\rho}^1 \\ \overline{\rho} = \rho. \end{array} \quad (3)$$

Действительно, пусть ρ есть бинарное отношение между элементами множеств M и N . Его обращение ρ^{-1} будет бинарным отношением между элементами множеств N и M , а двойное об-

ращение ρ^{-1} — снова бинарным отношением между элементами множеств M и N . Дважды используя определение 1, находим:

$$\rho = (\exists (x,y)) \left[(y,x) \in \rho^{-1} \right] = (\exists (x,y)) [(x,y) \in \rho],$$

что и доказывает теорему.

Теорема 3 (проекции обращения). Первая и вторая проекции обращения бинарного отношения совпадают соответственно со второй и первой проекциями данного отношения:

$$pr_1 \rho = pr_2 \rho; \quad pr_2 \rho = pr_1 \rho. \quad (4)$$

В с. д., пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N . Его обращение ρ будет бинарным отношением между элементами множеств N и M . Тогда, пользуясь сначала определением проекций бинарного отношения, затем определением 1 и потом снова определением проекций, можем написать следующие две цепочки равенств:

$$pr_1 \rho^{-1} = (\exists y) (\forall x) [(y,x) \in \rho^{-1}] = (\exists y) (\forall x) [(x,y) \in \rho] = pr_2 \rho,$$

$$pr_2 \rho^{-1} = (\exists x) (\forall y) [(y,x) \in \rho^{-1}] = (\exists x) (\forall y) [(x,y) \in \rho] = pr_1 \rho,$$

которые доказывают теорему.

Следствие. Бинарное отношение будет полным тогда и только тогда, когда его обращение есть полное бинарное отношение.

Теорема 4. Если ρ и σ — два бинарных отношения между элементами множеств M и N , то:

1° ρ включается в σ тогда и только тогда, когда обращение ρ^{-1} включается в обращение σ^{-1} : $\rho^{-1} \subset \sigma^{-1} \Leftrightarrow \rho \subset \sigma$; (5)

2° Обращение объединения $\rho \cup \sigma$ равняется объединению обращений ρ и σ : $\overline{\rho \cup \sigma} = \overline{\rho} \cup \overline{\sigma}$; (6)

3° Обращение пересечения $\rho \cap \sigma$ равняется пересечению обращений ρ и σ : $\overline{\rho \cap \sigma} = \overline{\rho} \cap \overline{\sigma}$; (7)

Несложное доказательство этой теоремы предоставляем проделать читателю самостоятельно.

4. Срез бинарного отношения. Различают срез бинарного отношения через элемент и через подмножество первого базисного множества.

Определение 1. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N . Тогда:

1° Срезом ρ через элемент x_0 множества M , который обозначается символом $\rho < x_0 >$, называется множество всех элементов множества N , с которыми x_0 находится в отношении ρ :

$$\rho < x > = \bigcup_{y \in N} \{y \mid (x, y) \in \rho\}; \quad (1)$$

2° Срезом ρ через подмножество X_0 множества M , который обозначается символом $\rho(X_0)$, называется объединение совокупности S всех срезов ρ через элементы подмножества X_0 или, что то же самое, объединение семейства срезов $(\rho < x >)_{x \in X_0}$, множеством индексов которого является подмножество X_0 , а значениями для каждого элемента подмножества X_0 — срезы ρ через этот элемент:

$$\rho(X) = \bigcup_{df} S = \bigcup_{x \in X} \rho < x >. \quad (2)$$

Согласно определению 1, чтобы найти срез бинарного отношения ρ через элемент x_0 его первого базисного множества, следует из всех упорядоченных пар, принадлежащих ρ , выделить те упорядоченные пары, первая компонента которых есть x_0 ; совокупность всех вторых компонент этих пар будет искомым срезом $\rho < x_0 >$. Чтобы найти срез бинарного отношения ρ через подмножество X_0 его первого базисного множества, следует найти срез ρ через каждый элемент подмножества X_0 ; объединение полученной совокупности подмножеств будет искомым срезом $\rho(X_0)$.

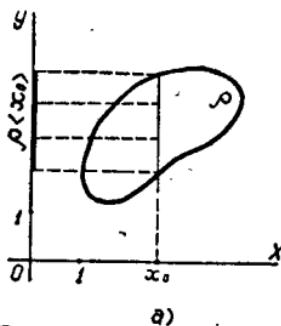
Например, для отношения «больше» между действительными числами ω срез через ноль есть множество всех отрицательных действительных чисел: $\omega < 0 > = (-\infty, 0)$; срез ω через отрезок $[0, 1]$ есть бесконечный интервал $(-\infty, 1)$: $\omega([0, 1]) = = (-\infty, 1)$.

Если ρ — бинарное отношение между действительными числами, то срез ρ через число x_0 можно найти геометрически следующим образом: в точке x_0 прямой OX восстановить к ней перпендикуляр и найти его пересечение с ρ ; множество проекций на прямую OY всех точек, принадлежащих пересечению построенного перпендикуляра с ρ , будет срезом $\rho < x_0 >$. Срез ρ через непустое подмножество X_0 геометрически получается так: из каждой точки подмножества X_0 прямой OX восстанавливается к ней перпендикуляр и находятся проекции на прямую OY всех точек, принадлежащих пересечению построенных перпендикуляров с ρ ; их объединение будет срезом $\rho(X_0)$ (рис. 9).

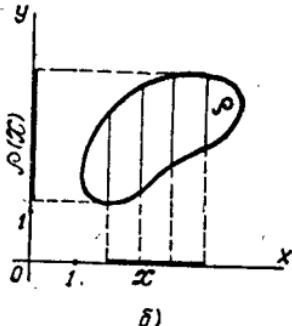
Теорема 1. Срез бинарного отношения ρ между элементами множеств M и N через элемент x_0 множества M совпадает со срезом ρ через одноэлементное подмножество, образованное из этого элемента:

$$\rho \langle x_0 \rangle = \rho (\{x_0\}). \quad (3)$$

В с. д., совокупность S срезов ρ через элементы одноэлементного множества $\{x_0\}$ содержит только срез ρ через элемент $x_0 : S = \{\rho \langle x_0 \rangle\}$. Объединение такой совокупности S совпадает со срезом ρ через x_0 . Отсюда и определения (2) следует утверждение теоремы.



а)



б)

Рис. 9.

Теорема 2. Срез бинарного отношения ρ между элементами множеств M и N через подмножество X_0 множества M совпадает с множеством всех элементов множества N , с которыми какой-либо элемент подмножества X_0 находится в отношении ρ :

$$\rho(X_0) = (\exists y)(\forall x)[x \in X_0 \wedge (x, y) \in \rho]. \quad (4)$$

В с. д., пользуясь сначала определением (2) вместе с определением объединения семейства подмножеств, а затем определением (1), получаем равенства:

$$\begin{aligned} \rho(X_0) &= (\exists y)(\forall x)(x \in X_0 \wedge y \in \rho \langle x \rangle) = \\ &= (\exists y)(\forall x)[x \in X_0 \wedge (x, y) \in \rho], \end{aligned}$$

которые доказывают теорему.

Теорема 3 (условие включения бинарных отношений). Два бинарных отношения ρ и σ между элементами одних и тех же множеств M и N удовлетворяют отношению включения тогда и только тогда, когда срезы их через каждый элемент первого базисного множества удовлетворяют отношению включения:

$$\rho \subset \sigma \Leftrightarrow (\wedge x)(\rho < x > \subset \sigma < x >). \quad (5)$$

Действительно, используя последовательно формулу (3) п° 1, определение (1) и определение отношения включения подмножеств, получаем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \rho \subset \sigma &\Leftrightarrow (\wedge x, y)[(x, y) \in \rho \rightarrow (x, y) \in \sigma] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\wedge x)[(\wedge y)(y \in \rho < x > \rightarrow y \in \sigma < x >)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\wedge x)(\rho < x > \subset \sigma < x >), \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Следствие (условие равенства бинарных отношений). Два бинарных отношения ρ и σ между элементами одних и тех же множеств M и N равны тогда и только тогда, когда срезы их через каждый элемент первого базисного множества совпадают:

$$\rho = \sigma \Leftrightarrow (\wedge x)(\rho < x > = \sigma < x >). \quad (6)$$

В с. д., пользуясь последовательно условием равенства подмножеств, теоремой 3, законом принесения квантора общности через конъюнкцию (XXXII) и затем снова условием равенства подмножеств, можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \rho = \sigma &\Leftrightarrow (\rho \subset \sigma \wedge \sigma \subset \rho) \Leftrightarrow [(\wedge x)(\rho < x > \subset \sigma < x >) \wedge \\ &\wedge (\wedge x)(\sigma < x > \subset \rho < x >)] \Leftrightarrow (\wedge x)[(\rho < x > \subset \sigma < x >) \wedge \\ &\wedge (\sigma < x > \subset \rho < x >)] \Leftrightarrow (\wedge x)(\rho < x > = \sigma < x >), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 4 (монотонность среза относительно включения бинарных отношений). Если ρ и σ — два бинарных отношения между элементами множеств M и N , удовлетворяющие отношению включения, X_0 — подмножество множества M , то срез ρ через X_0 включается в срез σ через X_0 :

$$\rho \subset \sigma \rightarrow [\rho(X_0) \subset \sigma(X_0)]. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим два семейства срезов бинарных отношений ρ и σ через элементы подмножества X_0 : $(\rho < x >)_{x \in X_0}$ и $(\sigma < x >)_{x \in X_0}$. Согласно условию доказываемой теоремы и теоремы 3, срезы бинарных отношений ρ и σ через каждый элемент подмножества X_0 будут удовлетворять отношению включения. Следовательно, объединение первого семейства включается в объединение второго: $\bigsqcup_{x \in X_0} \rho < x > \subset \bigsqcup_{x \in X_0} \sigma < x >$ (см. теорему 2 п° 3 § 4), что, согласно определению (2), равносильно утверждению теоремы.

Теорема 5 (монотонность среза относительно включения подмножеств). Если X_1 и X_2 два подмножества множества M , удовлетворяющие отношению включения, ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , то срез ρ через X_1 включается в срез ρ через X_2 :

$$(X_1 \subseteq X_2) \rightarrow [\rho(X_1) \subseteq \rho(X_2)]. \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим два семейства срезов ρ через элементы подмножеств X_1 и X_2 : $(\rho < x>)_{x \in X_1}$ и $(\rho < x>)_{x \in X_2}$. При условиях теоремы, первое семейство будет подсемейством второго. Следовательно, объединение первого семейства включается в объединение второго семейства: $\bigcup_{x \in X_1} \rho < x> \subseteq \bigcup_{x \in X_2} \rho < x>$ (см. теорему 5 п° 3 § 4), что, согласно определению (2), равносильно утверждению теоремы.

Теорема 6 (срез через объединение). Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , X_1 , X_2 — два подмножества множества M . Тогда срез ρ через объединение $X_1 \cup X_2$ равен объединению срезов ρ через каждое из подмножеств X_1 и X_2 :

$$\rho(X_1 \cup X_2) = \rho(X_1) \cup \rho(X_2). \quad (9)$$

Доказательство. Рассмотрим три семейства срезов ρ через элементы подмножеств X_1 и X_2 и их объединения $X_1 \cup X_2$: $(\rho < x>)_{x \in X_1}$, $(\rho < x>)_{x \in X_2}$ и $(\rho < x>)_{x \in X_1 \cup X_2}$. По теореме 4 п° 3 § 4 объединение объединений двух первых семейств равно объединению третьего семейства, что, в силу определения (2), равносильно утверждению теоремы.

Теорема 7: Если ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , X_0 — подмножество множества M , то срез ρ через X_0 будет пустым тогда и только тогда, когда X_0 не пересекается с первой проекцией ρ :

$$\rho(X_0) = \emptyset \leftrightarrow (X_0 \cap \rho p_1 \rho = \emptyset). \quad (10)$$

Действительно, пользуясь последовательно определением пустого множества, теоремой 2, законом переместительности кванторов существования (XLII) вместе с законом пронесения квантора существования через конъюнкцию с одним постоянным членом (XXXV), определением первой проекции бинарного отношения, определением пересечения двух подмножеств и, наконец, снова определением пустого множества, получаем следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \rho(X_0) = \emptyset &\leftrightarrow \neg(\forall y)[y \in \rho(X_0)] \leftrightarrow \neg(\forall y)(\forall x)[x \in X_0 \wedge \\ &\wedge (x, y) \in \rho] \leftrightarrow \neg(\forall x)[x \in X_0 \wedge (\forall y)((x, y) \in \rho)] \leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\forall x)[x \in X_0 \wedge x \in np_1\rho] \Leftrightarrow \exists (x \in X_0 \cap np_1\rho) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (X_0 \cap np_1\rho = \emptyset),$$

которая доказывает справедливость утверждения теоремы.

Из теоремы и формулы (3) непосредственно получаем

Следствие. Если ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , то:

1° Срез ρ через пустое множество есть пустое множество:

$$\rho(\emptyset) = \emptyset; \quad (11)$$

2° Срез ρ через элемент $x_0 \in M$ будет пустым тогда и только тогда, когда x_0 не принадлежит первой проекции ρ :

$$\rho < x_0 > = \emptyset \Leftrightarrow x_0 \notin np_1\rho. \quad (12)$$

Теорема 8 (выражение проекций через срез). Первая и вторая проекции бинарного отношения ρ между элементами множеств M и N равны соответственно срезу обращения ρ^{-1} через второе базисное множество N и срезу ρ через первое базисное множество M :

$$np_1\rho = \rho(N); \quad np_2\rho = \rho(M). \quad (13_1), (13_2)$$

Для доказательства заметим, прежде всего, что конъюнкция $x \in M \wedge (x, y) \in \rho$ равносильна ее второму члену, т. к. первый член тождественно истинен. Отсюда, учитывая теорему 2 и определение второй проекции бинарного отношения, получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \rho(M) &= (\exists y)(\forall x)[x \in M \wedge (x, y) \in \rho] = (\exists y)(\forall x)[(x, y) \in \rho] = \\ &= np_2\rho, \end{aligned}$$

которая доказывает формулу (13₂). Формула (13₁) следует из доказанного и известного равенства $np_1\rho = np_2\rho$.

5. Умножение бинарных отношений:

Определение 1. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , σ — бинарное отношение между элементами множеств N и L . Произведением ρ на σ , которое обозначается $\sigma \circ \rho$, называется новое бинарное отношение между элементами первого множества M и третьего множества L , состоящее из всех упорядоченных пар (x_0, z_0) элементов множеств M и L , таких, что существует элемент y_0 второго множества N , с которым x_0 находится в отношении ρ и который, в свою очередь, находится в отношении σ с элементом z_0 :

$$\sigma \circ \rho = (\exists (x, z))(\forall y)[(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma]. \quad (1)$$

Подчеркнем, что в произведении $\sigma \circ \rho$ первым сомножителем является ρ , а вторым — σ . Такая непривычная запись сомножителей произведения «справа налево», принятая в теории бинарных отношений, оказывается удобной в некоторых вопросах. Полный кружок « \circ », стоящий между первым и вторым сомножителями, является знаком умножения бинарных отношений, опускать его нельзя.

Согласно определению, произведение $\sigma \circ \rho$ существует только тогда, когда второе базисное множество первого сомножителя ρ является в то же время первым базисным множеством второго сомножителя σ . В частности, если ρ и σ однородные бинарные отношения между элементами одного и того же множества M , то произведение их всегда существует и снова будет однородным бинарным отношением между элементами множества M . В частности, для любого однородного бинарного отношения ρ между элементами множества M существует произведение его на самого себя $\rho \circ \rho$, которое называется *квадратом* ρ и обозначается ρ^2 :

$$\rho^2 = \rho \circ \rho = (\underset{df}{\sigma}(x, x'')) (\forall x') [(x, x') \in \rho \wedge (x', x'') \in \rho]. \quad (2)$$

Например, пусть ρ и σ — два бинарных отношения между мужчинами: ρ — множество упорядоченных пар мужчин, первый из которых является сыном второго, а σ — множество пар братьев. Тогда произведение $\sigma \circ \rho$ будет новым бинарным отношением между мужчинами, состоящим из упорядоченных пар мужчин (m_1, m_2), для которых существует третий мужчина m_3 , являющийся одновременно отцом m_1 и братом m_2 , т. е. это есть множество всех упорядоченных пар мужчин, первый из которых племянник второго. Далее, для бинарного отношения «больше» между действительными числами, его квадрату ω^2 будут принадлежать все пары чисел (x_1, x_2) , для которых существует третье число x_3 , меньшее x_1 и в то же время большее x_2 , т. е. все пары чисел, у которых первое больше второго. Следовательно,

$$\omega^2 = \omega.$$

Теорема 1 (срез произведения). Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , σ — бинарное отношение между элементами множеств N и L , X_0 — некоторое подмножество, x_0 — некоторый элемент множества M . Тогда срез произведения $\sigma \circ \rho$ через подмножество X_0 (через элемент x_0) равняется срезу второго сомножителя σ через срез первого сомножителя ρ через подмножество X_0 (через элемент x_0):

$$\sigma \circ \rho(X_0) = \sigma(\rho(X_0)), \quad (3)$$

$$\sigma \circ \rho < x_0 > = \sigma(\rho < x_0 >). \quad (3')$$

Доказательство. Произведение $\sigma \circ \rho$ есть бинарное отношение между элементами множеств M и L , срез $\sigma \circ \rho(X_0)$ — подмножество множества L , срез $\rho(X_0)$ — подмножество множества N . Учитывая это и пользуясь последовательно теоремой 2 предыдущего параграфа для среза $\sigma \circ \rho(X_0)$, определением 1, законом пронесения квантора существования $(\exists y)$ через конъюнкцию (XXXV) вместе с законом ассоциативности конъюнкции (X) и законом коммутативности кванторов (XLII), затем снова упомянутым законом пронесения для квантора $(\forall x)$, и, наконец, дважды теоремой 2 предыдущего параграфа для среза $\rho(X_0)$ и для среза отношения σ через подмножества $\rho(X_0)$, можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \rho(X_0) &= (\exists z)(\forall x)\{x \in X_0 \wedge [(x, z) \in \sigma \circ \rho]\} = \\ &= (\exists z)(\forall x)\{x \in X_0 \wedge (\forall y)[(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma]\} = \\ &= (\exists z)(\forall y)(\forall x)\{[x \in X_0 \wedge (x, y) \in \rho] \wedge (y, z) \in \sigma\} = \\ &= (\exists z)(\forall y)\{(\forall x)[x \in X_0 \wedge (x, y) \in \rho] \wedge (y, z) \in \sigma\} = \\ &= (\exists z)(\forall y)[y \in \rho(X_0) \wedge (y, z) \in \sigma] = \sigma(\rho(X_0)),\end{aligned}$$

которая доказывает первое утверждение теоремы. Второе ее утверждение следует из доказанного и формулы (3) предыдущего параграфа.

Теорема 2 (ассоциативность произведения). Если ρ есть бинарное отношение между элементами множеств M и N , σ — бинарное отношение между элементами множеств N и L , τ — бинарное отношение между элементами множеств L и T , то:

$$(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho). \quad (4)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что произведение $\sigma \circ \rho$ есть бинарное отношение между элементами множеств M и L , а произведение $\tau \circ \sigma$ есть бинарное отношение между элементами множеств N и T ; следовательно, оба двойных произведения $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$ и $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$ существуют и будут бинарными отношениями между элементами множеств M и T . Найдем теперь срезы произведений $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$ и $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$ через элемент $x_0 \in M$. Применяя в каждом случае формулы (3) и (3'), получаем:

$$((\tau \circ \sigma) \circ \rho) \langle x_0 \rangle = (\tau \circ \sigma)(\rho \langle x_0 \rangle) = \tau(\sigma(\rho \langle x_0 \rangle)),$$

$$(\tau \circ (\sigma \circ \rho)) \langle x_0 \rangle = \tau((\sigma \circ \rho) \langle x_0 \rangle) = \tau(\sigma(\rho \langle x_0 \rangle)).$$

Отсюда, по условию равенства бинарных отношений предыдущего пункта, следует формула (4).

Теорема 3 (обращение произведения). Обращение произведения бинарных отношений равно произведению обращений сомножителей в обратном порядке:

$$\overline{\sigma \circ \rho} = \overline{\rho} \circ \overline{\sigma}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть ρ — бинарное отношение между элементами множеств M и N , σ — бинарное отношение между элементами множеств N и L . Тогда произведение $\sigma \circ \rho$ будет бинарным отношением между элементами множеств M и L ,

а его обращение $\overline{\sigma \circ \rho}$ — бинарным отношением между элементами множеств L и M ; обращения σ и ρ будут соответственно бинарными отношениями между элементами множеств L и N и N и M . Следовательно, произведение $\rho \circ \sigma$ существует и, так

же как и $\overline{\sigma \circ \rho}$, является бинарным отношением между элементами множеств L и M . На основании определения обратного бинарного отношения, определения 1 и закона переместительности конъюнкции (VIII), можно написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma \circ \rho} &= (\bigcap (z, x))[(x, z) \in \sigma \circ \rho] = (\bigcap (z, x))(\bigvee y)[(x, y) \in \rho \wedge \\ &\wedge (y, z) \in \sigma] = (\bigcap (z, x))(\bigvee y)[(z, y) \in \overline{\sigma} \wedge (y, x) \in \overline{\rho}] = \overline{\rho} \circ \overline{\sigma}, \end{aligned}$$

которые доказывают формулу (5).

Теорема 4 (проекции произведения). Первая проекция произведения $\sigma \circ \rho$ равна срезу обращения первого сомножителя ρ через первую проекцию второго сомножителя σ , и вторая проекция произведения $\sigma \circ \rho$ равна срезу второго сомножителя σ через вторую проекцию первого сомножителя ρ :

$$np_1(\sigma \circ \rho) = \overline{\rho}(np_1 \sigma), \quad np_2(\sigma \circ \rho) = \sigma(np_2 \rho). \quad (6)$$

Доказательство. По формулам (13) предыдущего пункта имеем равенства: $np_1 \sigma = \sigma(L)$ и $np_2 \rho = \rho(M)$. Выражая проекции произведения $\sigma \circ \rho$ через срез по упомянутым формулам и пользуясь двумя предыдущими свойствами, найдем:

$$np_1(\sigma \circ \rho) = \overline{\sigma \circ \rho}(L) = \overline{\rho} \circ \overline{\sigma}(L) = \overline{\rho}(\sigma(L)) = \overline{\rho}(np_1 \sigma);$$

$$np_2(\sigma \circ \rho) = \sigma \circ \rho(M) = \sigma(\rho(M)) = \sigma(np_2 \rho).$$

Теорема 5 (произведение полных бинарных отношений). Если ρ — полное бинарное отношение между элементами множества M и N , σ — полное бинарное отношение между элементами множества N и L , то их произведение $\sigma \circ \rho$ будет полным бинарным отношением между элементами множеств M и L .

Действительно, если $pr_1\rho = M$, $pr_2\rho = N$, $pr_1\sigma = N$, $pr_2\sigma = L$, то по формулам (6) и формулам (13) предыдущего пункта найдем: $pr_1(\sigma \circ \rho) = \rho(N) = pr_1\rho = M$ и $pr_2(\sigma \circ \rho) = \sigma(N) = pr_2\sigma = L$, что и доказывает теорему.

Теорема 6 (пустое произведение). Произведение $\sigma \circ \rho$ будет пустым тогда и только тогда, когда вторая проекция первого сомножителя ρ и первая проекция второго сомножителя σ не пересекаются:

$$(\sigma \circ \rho = \emptyset) \leftrightarrow (pr_2\rho \cap pr_1\sigma = \emptyset). \quad (7)$$

Доказательство. Используя последовательно признак пустого бинарного отношения № 2, теорему 4 и формулу (10) № 4, можем написать следующую цепочку эквивалентностей: $\sigma \circ \rho = \emptyset \leftrightarrow pr_2(\sigma \circ \rho) = \emptyset \leftrightarrow \sigma(pr_2\rho) = \emptyset \leftrightarrow (pr_2\rho \cap pr_1\sigma = \emptyset)$, откуда следует формула (7).

6. Рефлексивные, симметричные и транзитивные бинарные отношения. Среди бинарных отношений общего вида выделяются некоторые типы, наиболее часто встречающихся на практике. Для однородных отношений таковыми являются рефлексивные, симметричные и транзитивные.

Определение 1. Однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M называется *рефлексивным*, если оно включает диагональ множества M :

$$(\rho \text{ — рефл.}) \leftrightarrow \underset{df}{\rho} \supseteq \Delta_M. \quad (1)$$

Для проверки рефлексивности бинарного отношения можно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 1 (условие рефлексивности). Однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M рефлексивно тогда и только тогда, когда каждый элемент множества M находится в отношении ρ с самим собой:

$$(\rho \text{ — рефл.}) \leftrightarrow (\bigwedge x)[(x, x) \in \rho]. \quad (2)$$

В с. д., пользуясь сначала определением 1 вместе с формулой (3) № 1, затем определением диагонали множества и, наконец, законом пронесения квантора общности через имплика-

цию (XXXVIII), приходим к следующей цепочке эквивалентностей:

$$\begin{aligned} (\rho \text{ — рефл.}) &\leftrightarrow (\wedge (x, x')) [(x, x') \in \Delta_M \rightarrow (x, x') \in \rho] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\wedge x) (\wedge x') [x' = x \rightarrow (x, x) \in \rho] \leftrightarrow (\wedge x) [(\vee x') (x' = x) \rightarrow \\ &\quad \rightarrow (x, x) \in \rho]. \end{aligned}$$

Выражение $(\vee x') (x' = x)$ есть тождественно истинный одноместный предикат, определенный на множестве M . Следовательно, импликация $(\vee x') (x' = x) \rightarrow (x, x) \in \rho$ равносильна ее заключению. Т. о. приходим к эквивалентности:

$$(\wedge x) [(\vee x') (x' = x) \rightarrow (x, x) \in \rho] \leftrightarrow (\wedge x) [(x, x) \in \rho],$$

которая вместе с ранее выписанной цепочкой эквивалентностей доказывает теорему.

Например, диагональ любого множества M есть рефлексивное бинарное отношение, ибо $\Delta_M \supseteq \Delta_M$. В то же время отношение «больше» для действительных чисел не рефлексивно, т. к., например, 3 не больше 3.

Определение 2. Однородное бинарное отношение называется *симметричным*, если оно включается в свое обращение:

$$(\rho \text{ — сим.}) \underset{df}{\leftrightarrow} \rho \subset^{-1} \rho. \quad (3)$$

Для определения симметричности бинарного отношения применяется также следующая теорема.

Теорема 2 (условие симметричности). Однородное бинарное отношение между элементами множества M симметрично тогда и только тогда, когда для любых двух элементов множества M , если первый из них находится в отношении ρ со вторым, то второй, в свою очередь, находится в отношении ρ с первым:

$$(\rho \text{ — сим.}) \leftrightarrow (\wedge x, x') [(x, x') \in \rho \rightarrow (x', x) \in \rho]. \quad (4)$$

В с. д., используя сначала определение 2 вместе с формулой (3) п° 1, а затем определение обратного отношения, получаем цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} (\rho \text{ — сим.}) &\leftrightarrow (\wedge (x, x')) [(x, x') \in \rho \rightarrow (x, x') \in \rho] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\wedge x, x') [(x, x') \in \rho \rightarrow (x', x) \in \rho], \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Теорема 3. Однородное бинарное отношение симметрично тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим обращением:

$$(\rho \text{ — сим.}) \Leftrightarrow \rho = \overset{-1}{\rho}. \quad (5)$$

Действительно, используя последовательно определение 2 вместе с законом идемпотентности конъюнкции (IV), теоремы 4 и 2 об обратном бинарном отношении, условие равенства подмножеств, получаем цепочку эквивалентностей:

$$(\rho \text{ — сим.}) \Leftrightarrow (\rho \subseteq \overset{-1}{\rho} \wedge \overset{-1}{\rho} \subseteq \rho) \Leftrightarrow (\rho \subseteq \overset{-1}{\rho} \wedge \overset{-1}{\rho} \subseteq \rho) \Leftrightarrow \rho = \overset{-1}{\rho},$$

которая доказывает теорему.

Например, диагональ Δ_M любого множества M есть симметричное бинарное отношение, т. к. $\Delta_M = \overset{-1}{\Delta_M}$. В то же время отношение «больше» для действительных чисел несимметрично, ибо для чисел 3 и 2 имеем, что $3 > 2$, а $2 \not> 3$.

Определение 3. Однородное бинарное отношение называется *транзитивным*, если оно включает свой квадрат:

$$(\rho \text{ — транз.}) \Leftrightarrow \rho \supseteq \overset{2}{\underset{df}{\rho}}. \quad (6)$$

Теорема 4 (условие транзитивности). Однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M транзитивно тогда и только тогда, когда для любых трех элементов множества M , если первый из них находится в отношении ρ со вторым и второй находится в отношении ρ с третьим, то первый элемент находится в отношении ρ с третьим элементом:

$$(\rho \text{ — транз.}) \Leftrightarrow (\bigwedge x, x', x'') \{[(x, x') \in \rho \wedge (x', x'') \in \rho] \rightarrow (x, x'') \in \rho\}. \quad (7)$$

Действительно, пользуясь сначала определением 3 вместе с формулой (3) п° 1, затем определением произведения бинарных отношений и, наконец, законом пронесения квантора через импликацию (XXXVIII), можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} & (\rho \text{ — транз.}) \Leftrightarrow (\bigwedge x, x'') \{[(x, x'') \in \rho \rightarrow (x, x'') \in \rho] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\bigwedge x, x'') \{(\bigvee x') [(x, x') \in \rho \wedge (x', x'') \in \rho] \rightarrow (x, x'') \in \rho\} \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\bigwedge x, x'') (\bigwedge x') \{[(x, x') \in \rho \wedge (x', x'') \in \rho] \rightarrow (x, x'') \in \rho\}, \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Например, диагональ Δ_M любого множества M и отношение «больше» между действительными числами являются транзитивными бинарными отношениями. В то же время отношение перв-

перпендикулярности прямых пространства не транзитивно, т. к., если прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2 , а l_2 перпендикулярна прямой l_3 , то прямые l_1 и l_3 , вообще говоря, не перпендикулярны.

7. Отношения эквивалентности и разбиения множества. Ядро отображения. Определение 1. *Отношением эквивалентности* (короче, *эквивалентностью*), определенным на множестве M , называется рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение между элементами множества M .

Например, отношение равенства действительных чисел есть эквивалентность на R , отношение подобия треугольников есть эквивалентность на множестве всех треугольников. Отношение «не меньше» («больше или равно») между действительными числами не будет эквивалентностью, — оно рефлексивно и транзитивно, но не симметрично.

В теории бинарных отношений эквивалентности обычно обозначают буквами: ε , ε_1 , ε_2 , Если упорядоченная пара (x_1, x_2) принадлежит ε , то говорят также, что x_1 эквивалентен x_2 (по модулю ε) и пишут: $x_1 \equiv x_2 \text{ (mod } \varepsilon\text{)}$ или короче $x_1 \equiv x_2$. В противном случае говорят, что x_1 не эквивалентен x_2 и пишут: $x_1 \not\equiv x_2$.

Согласно определению 1 данного пункта и определениям 1—3 и теоремам 1, 2, 4 предыдущего п°, бинарное отношение ε между элементами множества M будет эквивалентностью тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:

$$\Delta_M \subset \varepsilon, \quad \varepsilon \subset \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \subset \varepsilon^2, \quad (1)$$

которые равносильны соответственно условиям:

$$\begin{aligned} & (\wedge x)(x \equiv x), \quad (\wedge x, x')(x \equiv x' \rightarrow x' \equiv x), \\ & (\wedge x, x', x'')[(x \equiv x' \wedge x' \equiv x'') \rightarrow x \equiv x'']. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение 2. Пусть ε — эквивалентность, определенная на множестве M . Фактор-множеством множества M по ε , которое обозначается символом M/ε , называется совокупность всех срезов ε через элементы множества M . Каждый срез ε через элемент множества M называется также *классом* ε , а его элементы — *представителями* этого класса.

Определение фактор-множества можно записать равенством:

$$M/\varepsilon = (\underset{df}{\cup} X)(\forall x)(X = \varepsilon < x>). \quad (3)$$

Каждое отображение одного множества в другое определяет отношение эквивалентности между элементами первого множества.

Определение 3. Пусть ϕ — отображение множества M в множество N . Ядром ϕ , которое обозначается ε_ϕ , называется совокупность всех упорядоченных пар, образованных из элементов множества M , образы которых при отображении ϕ совпадают:

$$\varepsilon_\phi = \{ (x, x') \mid \phi(x) = \phi(x') \}. \quad (4)$$

Например, если ϕ — взаимно-однозначное отображение множества M в множество N , то ядром ϕ будет диагональ множества M .

Теорема 1. Пусть ϕ — отображение множества M в множество N . Тогда: а) ядро ε_ϕ есть эквивалентность, определенная на M ; б) ядро ε_ϕ равняется произведению отображения ϕ и его обращения ϕ^{-1} :

$$\varepsilon_\phi = \phi \circ \phi^{-1}. \quad (5)$$

Действительно, непосредственно из определения 3 видно, что ядро ε_ϕ есть бинарное отношение между элементами множества M , удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Следовательно, утверждение а) справедливо.

Далее, по условию теоремы, предикат $x \in \text{pr}_1\phi$ тождественно истинен. Следовательно, равенство $\phi(x) = \phi(x')$ равносильно конъюнкции $x \in \text{pr}_1\phi \wedge \phi(x) = \phi(x')$. Учитывая последовательно определение 3 вместе со сделанным замечанием, определение первой проекции бинарного отношения, закон пронесения квантора существования через конъюнкцию (XXXV) вместе с определением образа элемента при отображении, еще раз определением образа элемента при отображении вместе с определением обратного бинарного отношения и, наконец, определением произведения бинарных отношений, можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\phi &= \{ (x, x') \mid [x \in \text{pr}_1\phi \wedge \phi(x) = \phi(x')] \} = \{ (x, x') \mid \\ &\{ (V y) [(x, y) \in \phi] \wedge \phi(x) = \phi(x') \} = \{ (x, x') \mid (V y) [(x, y) \in \\ &\in \phi \wedge y = \phi(x')] \} = \{ (x, x') \mid (V y) [(x, y) \in \phi \wedge (y, x') \in \\ &\in \phi] \} = \phi \circ \phi^{-1}, \end{aligned}$$

которая доказывает утверждение б). Теорема доказана.

Эквивалентности тесно связаны с разбиениями множества.

Определение 4. Разбиение непустого множества M есть совокупность Q его непустых подмножеств, называемых классами разбиения, такая, что каждый элемент множества M принадлежит, по крайней мере, одному подмножеству из Q и ни один элемент множества M не принадлежит двум различным подмножествам из Q .

Можно также сказать, что разбиение множества M есть совокупность Q его подмножеств, удовлетворяющая трем условиям:

1) каждое подмножество из Q не пусто: $(\bigwedge X)(X \in Q \rightarrow X \neq \emptyset)$;

2) объединение совокупности Q совпадает с множеством M : $\sqcup Q = M$;

3) различные подмножества из Q не пересекаются:

$$(\bigwedge X_1, X_2)[(X_1 \in Q \wedge X_2 \in Q \wedge X_1 \neq X_2) \rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset].$$

Например, совокупность всех попарно параллельных между собой прямых на плоскости будет разбиением плоскости, а совокупность всех прямых плоскости, проходящих через одну точку не будет разбиением, т. к. для нее не выполняется третье условие.

Теорема 2. Если ε — эквивалентность, определенная на множестве M , то фактор-множество M/ε является разбиением множества M .

Действительно, в силу рефлексивности ε каждый элемент $x_1 \in M$ эквивалентен себе и, следовательно, принадлежит сразу ε через этот элемент: $x_1 \in \varepsilon < x_1 >$. Отсюда получаем, во-первых, что каждый класс ε не пуст и, во-вторых, что каждый элемент множества M принадлежит некоторому классу ε . Далее допустим, что существует элемент x_0 множества M , принадлежащий двум различным классам ε , например, классам $\varepsilon < x_1 >$ и $\varepsilon < x_2 >$. Тогда будут справедливы формулы:

$$x_1 \equiv x_0 \text{ и } x_2 \equiv x_0, \quad (*)$$

и, кроме того, будет существовать элемент x_3 множества M , принадлежащий одному из этих классов и не принадлежащий другому. Пусть, например, $x_3 \in \varepsilon < x_1 >$ и $x_3 \notin \varepsilon < x_2 >$. Следовательно:

$$x_1 \equiv x_3 \text{ и } x_2 \not\equiv x_3. \quad (**)$$

Пользуясь симметричностью и транзитивностью ε , получаем из (*) и первой формулы (**):

$$x_2 \equiv x_3,$$

что противоречит второй формуле (**). Полученное противоречие доказывает, в-третьих, что ни один элемент множества M не принадлежит двум различным классам ε . Теорема доказана.

Следствие. Каждый класс эквивалентности определяется любым одним его представителем.

В с. д., пусть X_0 — некоторый класс эквивалентности ε , определенной на множестве M , и x_0 — некоторый представитель класса X_0 . Тогда будут справедливы формулы: $x_0 \in X_0$ и $x_0 \in \varepsilon < x_0 >$. Отсюда по теореме получаем, что $X_0 = \varepsilon < x_0 >$.

Теорема 3. Для каждого разбиения Q множества M существует, и притом единственное, отношение эквивалентности ε такое, что фактор-множество M/ε совпадает с Q .

Доказательство. Рассмотрим отображение φ множества M на данное разбиение Q такое, что образом каждого элемента множества M является класс разбиения Q , содержащий этот элемент:

$$\varphi(x) = X \Leftrightarrow (X \in Q \wedge x \in X). \quad (*)$$

По теореме 1 ядро ε_φ отображения φ есть эквивалентность, определенная на M . Покажем, что:

а) фактор-множество M / ε_φ совпадает с данным разбиением Q ; б) не существует эквивалентности, определенной на M , отличной от ε_φ , для которой фактор-множество совпадает с разбиением Q .

Действительно, пусть x_0 — элемент множества M . Тогда найдется класс X_0 разбиения Q , содержащий x_0 . Учитывая определение среза бинарного отношения, определение 3 и эквивалентность (*), приходим к цепочке равенств:

$$\varepsilon_\varphi < x_0 > = (\cup x) [\varphi(x) = \varphi(x_0)] = (\cup x) [\varphi(x) = X_0] = X_0$$

Следовательно, каждый класс эквивалентности ε_φ является классом данного разбиения Q . Обратно, пусть X_1 — один из классов разбиения Q . Тогда существует элемент x_1 множества M , принадлежащий X_1 . Из предыдущего видно, что $X_1 = \varepsilon_\varphi < x_1 >$. Т. о. каждый класс разбиения Q есть класс эквивалентности ε_φ . Тем самым утверждение а) доказано.

Далее, допустим, что ε есть некоторая эквивалентность, определенная на множестве M такая, что $M / \varepsilon = Q$. Пусть x_0 — некоторый элемент множества M и X_0 — класс разбиения Q , содержащий x_0 . Согласно допущения, срез ε через x_0 будет классом разбиения Q , который, в силу рефлексивности ε , содержит элемент x_0 . Следовательно, $\varepsilon < x_0 > = X_0$. В тоже время, по ранее доказанному, срез эквивалентности ε_φ через x_0 также равен X_0 . Т. о. $\varepsilon < x_0 > = \varepsilon_\varphi < x_0 >$. Отсюда и ус-

ловия равенства бинарных отношений №4 следует утверждение б). Теорема доказана. Заметим еще, что эквивалентность ε_Q , определяемая разбиением Q , совпадает с объединением семейства декартовых квадратов всех подмножеств разбиения Q :
 $\varepsilon_Q = \bigsqcup_{X \in Q} X \times X$. Действительно, учитывая сначала равенство

во (5) вместе с определением произведения бинарных отношений и эквивалентностью (*), а затем определение объединения семейства подмножеств вместе с определением декартова произведения множеств, приходим к равенствам:

$$\varepsilon_Q = (\subset(x, x')) (\vee X) (X \in Q \wedge x \in X \wedge x' \in X) = \bigsqcup_{X \in Q} X \times X,$$

которые доказывают высказанное утверждение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что между элементами двух конечных множеств, состоящих из n и m различных элементов соответственно, существует 2^{nm} различных бинарных отношений.

2. Дано конечное однородное бинарное отношение между натуральными числами: $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,5)\}$.

Найти:

- a) первые проекции ρ , его обращения ρ^{-1} и объединения ρ с обращением ρ^{-1} ;
- б) срез ρ через числа 1 и 4 и через подмножество $\{1, 2\}$;
- в) произведения $\rho \circ \rho$ и $\rho \circ \rho$ и квадрат ρ .

3. Бинарное отношение между элементами множеств M и N называется *прямоугольным*, если оно является декартовым произведением непустых подмножеств. Доказать следующие свойства прямоугольных отношений:

а) $np_1(X \times Y) = X; np_2(X \times Y) = Y;$

б) $\overline{X \times Y} = Y \times X;$

в) $x \in X \rightarrow (X \times Y) \subset x = Y;$

г) $X \cap X_1 \neq \emptyset \rightarrow (X \times Y) (X_1) = Y;$

д) $\sigma \circ (X \times Y) = X \times \sigma(Y) \quad (\sigma \subseteq N \times L);$

е) $(Y \times Z) \circ \rho = \rho(Y) \times Z \quad (Z \subseteq L, \rho \subseteq M \times N).$

4. Доказать, что первая и вторая проекции пересечения двух бинарных отношений между элементами одних и тех же множеств включаются в пересечение соответствующих проекций данных отношений.

Выяснить, имеют ли место обратные включения.

5. Доказать, что:

а) срез бинарного отношения ρ между элементами множеств M и N через подмножество $X_0 \subseteq M$ равняется срезу ρ через пересечение X_0 с первой проекцией ρ ;

б) срез обращения ρ через подмножество $Y_0 \subset N$ равняется срезу ρ через пересечение Y_0 с второй проекцией ρ .

6. Доказать, что каждое бинарное отношение ρ между элементами множеств M и N равняется объединению семейства декартовых произведений каждого элемента первой проекции ρ на срез ρ через этот элемент:

$$\rho = \bigsqcup_{x \in \text{pr}_1 \rho} \{x\} \times \rho \langle x \rangle.$$

7. Доказать, что:

а) срез бинарного отношения через пересечение двух подмножеств первого базисного множества включается в пересечение срезов этого отношения через каждое из данных подмножеств;

б) срез пересечения двух бинарных отношений между элементами одних и тех же множеств через подмножество первого базисного множества включается в пересечение срезов каждого из данных отношений через то же подмножество.

Справедливы ли обратные включения?

8. Пусть $(\rho_i)_{i \in I}$ — семейство бинарных отношений между элементами одних и тех же множеств M и N . Доказать:

а) каждая проекция объединения семейства равняется объединению семейства соответствующих проекций бинарных отношений данного семейства:

$$\text{pr}_k \bigsqcup_{i \in I} \rho_i = \bigsqcup_{i \in I} \text{pr}_k \rho_i \quad (k = 1, 2);$$

б) обращения пересечения и объединения данного семейства равняются соответственно пересечению и объединению семейства обращений бинарных отношений данного семейства:

$$\overline{\bigsqcup_{i \in I} \rho_i} = \bigsqcup_{i \in I} \overline{\rho_i}; \quad \overline{\prod_{i \in I} \rho_i} = \prod_{i \in I} \overline{\rho_i};$$

в) срезы объединения и пересечения семейства через элемент первого базисного множества соответственно равны объединению и пересечению семейства срезов бинарных отношений данного семейства через этот же элемент:

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} \rho_i \right) \langle x_0 \rangle = \bigsqcup_{i \in I} \rho_i \langle x_0 \rangle; \quad \left(\prod_{i \in I} \rho_i \right) \langle x_0 \rangle = \prod_{i \in I} \rho_i \langle x_0 \rangle.$$

9. Доказать, что:

а) первая проекция произведения двух бинарных отношений включается в первую проекцию первого сомножителя;

б) вторая проекция произведения двух бинарных отношений включается во вторую проекцию второго сомножителя.

10. Пусть ρ_1 и ρ_2 — бинарные отношения между элементами множеств M и N , σ , σ_1 , σ_2 — бинарные отношения между элементами множеств N и L . Тогда:

$$a) (\rho_1 \subset \rho_2 \wedge \sigma_1 \subset \sigma_2) \Rightarrow (\sigma_1 \circ \rho_1 \subset \sigma_2 \circ \rho_2);$$

$$b) \sigma \circ (\rho_1 \cup \rho_2) = (\sigma \circ \rho_1) \cup (\sigma \circ \rho_2);$$

$$b) \sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2) \subset [(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)].$$

Доказать!

11. Какие из нижеприведенных бинарных отношений являются рефлексивными? симметричными? транзитивными?

- а) отношение параллельности прямых;
- б) отношение перпендикулярности прямых;
- в) отношение делимости целых чисел;
- г) отношение взаимной простоты натуральных чисел;
- д) отношение равносильности предикатов;
- е) отношение дополнения подмножеств данного множества.

12. Показать, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности однородных бинарных отношений независимы между собой, т. е. что никакое из них не следует из двух других.

13. Доказать, что:

а) объединение и пересечение двух рефлексивных бинарных отношений между элементами одного и того же множества рефлексивно;

б) произведение двух рефлексивных бинарных отношений между элементами одного и того же множества рефлексивно;

в) обращение рефлексивного бинарного отношения рефлексивно.

14. Доказать, что произведение двух однородных симметричных бинарных отношений симметрично тогда и только тогда, когда оно не зависит от порядка сомножителей.

15. Доказать транзитивность отношения включения подмножеств множества.

16. Доказать, что:

а) обращение транзитивного бинарного отношения транзитивно;

б) пересечение двух транзитивных отношений транзитивно;

в) произведение двух транзитивных, перестановочных между собой бинарных отношений транзитивно.

17. Какие из перечисленных ниже бинарных отношений являются эквивалентностями? Для каждого отношения эквивалентности найти фактор-множество:

а) отношение параллельности прямых;

б) отношение сравнения целых чисел по модулю r , т. е. множество всех пар целых чисел, дающих при делении на r один и тот же остаток;

в) отношение включения подмножеств;

г) отношение равносильности предикатов;

д) отношение между точками прямой «лежать по одну сторону от данной точки этой прямой» (т. е. множество пар точек прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки);

е) отношение между точками плоскости «лежать по одну сторону от данной прямой плоскости».

18. Бинарное отношение ε между фундаментальными последовательностями рациональных чисел $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots\}$, ... определяемое равенством:

$$\varepsilon = (\mathcal{C}(x, y)) [\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0],$$

является эквивалентностью. Классы ε есть действительные числа. Доказать!

19. Доказать, что однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M будет эквивалентностью тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$\Delta_M \subset \rho \text{ и } \rho \circ \rho \subset \rho.$$

-1

20. Доказать, что:

- а) обращение отношения эквивалентности есть эквивалентность;
- б) пересечение двух эквивалентностей, определенных на одном и том же множестве, есть эквивалентность;
- в) любая степень эквивалентности есть эквивалентность, совпадающая с ней самой;

г) произведение двух перестановочных между собой отношений эквивалентности, определенных на одном и том же множестве, является эквивалентностью.

21. Доказать, что подмножество X_0 множества M принадлежит фактор-множеству M по отношению эквивалентности ρ тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия: 1) X_0 не пусто, 2) декартов квадрат X_0 включается в ρ и 3) срез ρ через X_0 включается в X_0 .

22. Однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M называется антисимметричным, если пересечение этого отношения с ρ^{-1} его обращением ρ включается в диагональ множества M : $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_M$.

Доказать, что бинарное отношение между элементами множества M антисимметрично тогда и только тогда, когда для любых двух элементов множества M из принадлежности обоих упорядоченных пар, образованных из этих элементов, следует, что эти элементы равны.

Привести примеры антисимметричных бинарных отношений.

23. Отношением порядка на множестве M называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение между элементами множества M . Множество, с заданным на нем отношением порядка, называется упорядоченным.

Проверить, что следующие однородные бинарные отношения являются отношением порядка:

- а) отношение деломости целых чисел;
- б) отношение включения подмножеств множества;
- в) отношение «не больше» для действительных чисел.

Привести примеры упорядоченных множеств.

24. Доказать: а) обращение отношения порядка также является отношением порядка;

- б) пересечение двух отношений порядка, определенных на одном и том же множестве, есть отношение порядка.

25. Доказать, что свойства рефлексивности, антисимметричности и транзитивности бинарных отношений независимы между собой.

26. Найти все однородные бинарные отношения, которые:

- а) одновременно симметричны и антисимметричны;
- б) являются одновременно отношением эквивалентности и отношением порядка.

§ 6. ЧАСТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ

Частичные отображения и частичные преобразования множеств играют большую роль в различных математических науках. Теория их может быть построена на основе теории бинарных отношений:

1. Частичное отображение и частичное преобразование. Определение 1. Частичным отображением множества M в множество N называется бинарное отношение ϕ между элементами множеств M и N , такое, что каждый элемент множества M находится в отношении ϕ не более чем с одним элементом множества N *:

(ϕ —част. отобр.) $\leftrightarrow (\wedge x) \sqsupseteq (\vee y, y')[(x, y) \in \phi \wedge (x, y') \in \phi \wedge y \neq y']$. (1)

Если элемент x_0 находится в отношении ϕ с элементом y_0 , то y_0 называется образом x_0 при частичном отображении ϕ , короче, ϕ -образом x_0 и обозначается $\phi(x_0)$, а x_0 называется прообразом y_0 при частичном отображении ϕ .

Частичное отображение множества M в себя называется частичным преобразованием M . Частичное отображение M в N называется также однозначным бинарным отношением между элементами множеств M и N .

Например, если X_0 — собственное подмножество множества M , то множество всех пар с равными компонентами, образованных из элементов подмножества X_0 , будет частичным преобразованием множества M , для которого первая проекция есть X_0 , и образом каждого элемента, принадлежащего X_0 , является этот же элемент. Оно называется *частично- тождественным пре-*

* Т. е. каждый элемент множества M или находится в отношении ϕ точно с одним элементом множества N , или не находится в отношении ϕ и с одним элементом множества N .

образованием множества M , определенным на подмножестве X_0 , и обозначается Δ_{X_0} .

Пустое бинарное отношение между элементами множеств M и N является частичным отображением; оно называется *пустым отображением* M в N . Пустое однородное бинарное отношение между элементами множества M есть частичное преобразование, оно называется *пустым преобразованием* M . Каждое однородное бинарное отношение между действительными числами такое, что любой перпендикуляр к прямой OX пересекает его не более чем в одной точке, есть частичное преобразование множества действительных чисел (рис. 10).

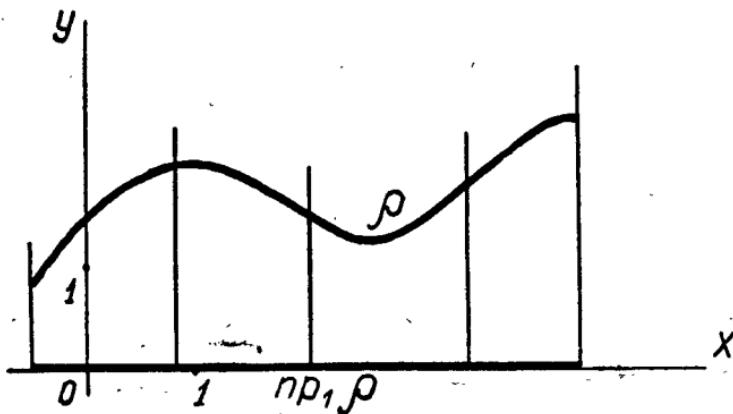


Рис. 10

Сопоставим теперь определение 1 с определением функции или отображения, которое было дано в № 7 § 1. Отображение множества M в множество N будем называть теперь **полным отображением** M в N . Непосредственно приходим к следующим выводам.

1) Каждое полное отображение одного множества в другое является частичным отображением, но обратное неверно. Точнее говоря, полное отображение множества M в множество N есть такое частичное отображение, для которого первая проекция совпадает с множеством M . Частичное отображение ϕ множества M в N , первая проекция которого не равна M , не будет полным отображением, ибо элементы множества M , не принадлежащие первой проекции ϕ , не находятся в отношении ϕ ни с одним элементом множества N . Следовательно, множество всех частичных отображений множества M в множество N вклю-

чает, как собственное подмножество, множество всех полных отображений M в N , а множество всех частичных преобразований множества M включает, как собственное подмножество, множество всех полных преобразований множества M .

2) Каждое частичное отображение ϕ множества M в множество N является функцией, определенной на первой проекции ϕ и принимающей значение в множестве N , и обратно, каждая функция, определенная на некотором подмножестве X_0 множества M и принимающая значение в множестве N , есть частичное отображение M в N , первая проекция которого совпадает с X_0 .

3) Для полного отображения f множества M в множество N , каждый элемент множества M имеет f -образ и притом единственный, а для частичного отображения ϕ множества M в множество N ϕ -образы имеют только те элементы множества M , которые принадлежат первой проекции ϕ . Элементы множества M , не принадлежащие первой проекции ϕ , не находятся в отношении ϕ ни с каким элементом множества N , и, следовательно, они не имеют образов.

4) Полное отображение одного множества в другое определяется заданием образов всех элементов первого базисного множества (или указанием способа нахождения образов), а чтобы задать частичное отображение, необходимо указать, во-первых, его первую проекцию и, во-вторых, образ каждого элемента этой проекции (или общий способ нахождения образов).

Теорема 1 (условие, при котором бинарное отношение является частичным отображением). Бинарное отношение ϕ между элементами множеств M и N является частичным отображением тогда и только тогда, когда срез ϕ через любой элемент множества M содержит не более одного элемента:

$$(\phi \text{ — част. отобр.}) \leftrightarrow (\bigwedge x \sqcap (\forall y, y') (y \in \phi \langle x \rangle \wedge y' \in \phi \langle x \rangle \wedge y \neq y')); \quad (2)$$

если элемент x_0 принадлежит первой проекции частичного отображения ϕ , то срез ϕ через x_0 есть однозначное множество, состоящее из образа x_0 при отображении ϕ :

$$(x_0 \in np_1 \phi) \rightarrow (\phi \langle x_0 \rangle = \{\phi(x_0)\}). \quad (3)$$

Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно заметить, что, согласно определению среза бинарного отношения через элемент, предикаты $(x, y) \in \phi$ и $y = \phi \langle x \rangle$ равносильны. Далее, если x_0 есть элемент первой проекции частичного отображения ϕ , то с ним в отношении ϕ будет находиться только его образ $\phi(x_0)$. Отсюда и из определения среза бинарно-

го отношения через элемент следует второе утверждение теоремы.

Определение 2. Частичное отображение ф множества M в множество N называется *частичным отображением M на N* , если вторая проекция ϕ совпадает с множеством N .

2. Образ и прообраз подмножества. Полный прообраз элемента. **Определение 1.** Пусть ϕ — частичное отображение множества M в множество N , X_0 — подмножество множества M , Y_0 — подмножество множества N , y_0 — элемент множества N . Тогда:

а) образом X_0 при частичном отображении ϕ , короче, ϕ -образом X_0 , называется срез ϕ через подмножество X_0 ;

б) прообразом Y_0 при частичном отображении ϕ , короче, ϕ -прообразом Y_0 , называется срез обращения ϕ через подмножество Y_0 ;

в) полным прообразом y_0 при частичном отображении ϕ , короче, полным ϕ -прообразом y_0 , называется срез обращения ϕ через элемент y_0 .

Согласно определению 1, для образа и прообраза подмножества при частичном отображении будут справедливы все свойства, которые имеют место для среза бинарного отношения через подмножество. Так, например, если ϕ — частичное отображение множества M в множество N , X_1, X_2 — подмножества M , Y_1, Y_2 — подмножества N , то, как было доказано в № 4 § 5 (см. теоремы 5 и 6):

1) если X_1 включается в X_2 , то ϕ -образ X_1 включается в ϕ -образ X_2 , и, если Y_1 включается в Y_2 , то ϕ -прообраз Y_1 включается в ϕ -прообраз Y_2 :

$$(X_1 \subset X_2) \rightarrow (\phi(X_1) \subset \phi(X_2)); \quad (Y_1 \subset Y_2) \rightarrow (\phi(Y_1) \subset \phi(Y_2)); \quad (1)$$

2) ϕ -образ объединения $X_1 \cup X_2$ равняется объединению ϕ -образов каждого из подмножеств X_1 и X_2 , и ϕ -прообраз объединения $Y_1 \cup Y_2$ равняется объединению ϕ -прообразов каждого из подмножеств Y_1 и Y_2 :

$$\phi(X_1 \cup X_2) = \phi(X_1) \cup \phi(X_2); \quad \phi(Y_1 \cup Y_2) = \phi(Y_1) \cup \phi(Y_2). \quad (2)$$

Кроме того, образ и прообраз подмножества при частичном отображении обладают рядом новых специфических свойств.

Теорема 1. Для непустого частичного отображения ϕ образ непустого подмножества X_0 множества M равен объединению

семейства образов всех элементов множества M , принадлежащих пересечению X_0 с первой проекцией ϕ :

$$\phi(X_0) = \bigcap_{x \in X_0 \cap np_1 \phi} \{\phi(x)\}. \quad (3)$$

В с. д., из определения 1, известного равенства $\phi(X_0) = \phi(X_0 \cap np_1 \phi)$ (см. задачу 5 § 5) и определения среза бинарного отношения через подмножество следует, что ϕ -образ X_0 равен объединению семейства срезов ϕ через элементы пересечения подмножества X_0 с первой проекцией ϕ : $\phi(X_0) = \bigcup_{x \in X_0 \cap np_1 \phi} \phi < x >$.

Отсюда, учитывая теорему 1 предыдущего п⁰, приходим к равенству (3).

Теорема 2. Для непустого частичного отображения ϕ множества M в множество N прообраз непустого подмножества Y_0 множества N равен совокупности всех элементов первой проекции ϕ , срез ϕ через которые включается в Y_0 :

$$\overline{\phi}(Y_0) = (\exists x)(x \in np_1 \phi \wedge \phi < x > \subset Y_0). \quad (4)$$

Действительно, пользуясь последовательно теоремой 2 п⁰ 4 § 5, определением обращения бинарного отношения вместе с определением среза бинарного отношения через элемент, определением пересечения двух подмножеств, свойствами пересечения подмножеств вместе с теоремой 1 предыдущего пункта и, наконец, следствием теоремы 7 п⁰ 4 § 5, можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \overline{\phi}(Y_0) &= (\exists x)(\forall y)[y \in Y_0 \wedge (y, x) \in \overline{\phi}] = (\exists x)(\forall y)[y \in Y_0 \wedge y \in \\ &\in \phi < x >] = (\exists x)(Y_0 \cap \phi < x > \neq \emptyset) = (\exists x)[\phi < x > \neq \\ &\neq \emptyset \wedge \phi < x > \subset Y_0] = (\exists x)[x \in np_1 \phi \wedge \phi < x > \subset Y_0], \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

Следствие 1. Если ϕ — полное отображение M в N , то прообраз непустого подмножества Y_0 множества N совпадает с совокупностью всех элементов множества M , ϕ -образы которых принадлежат Y_0 :

$$\overline{\phi}(Y_0) = (\exists x)[\phi(x) \in Y_0]. \quad (5)$$

В с. д., для полного отображения ϕ его первая проекция совпадает с множеством M . Отсюда и теоремы 1 п⁰ 1, во-первых, следует, что предикат $x \in np_1 \phi$ тождественно истинен, а во-вторых, что предикат $\phi < x > \subset Y_0$ равносителен предикату $\phi(x) \in Y_0$. В таком случае, согласно свойствам конъюнкций предикатов, формула (4) может быть заменена формулой (5).

Следствие 2. Для непустого частичного отображения φ множества M в множество N полный прообраз элемента $y_0 \in N$ совпадает с совокупностью всех элементов множества M , через φ через которые есть одноэлементное множество, образованное из y_0 :

$$\varphi^{-1}\{y_0\} = (\exists x)(\varphi\{x\} = \{y_0\}). \quad (6)$$

Действительно, согласно теореме 2 и следствию теоремы 7 п° 4 § 5, имеем равенство:

$$\varphi^{-1}\{y_0\} = (\exists x)(\varphi\{x\} \neq \emptyset \wedge \varphi\{x\} \subset \{y_0\}),$$

откуда, учитывая, что у одноэлементного множества $\{y_0\}$ имеется точно два подмножества — само это множество и пустое, получаем доказываемое равенство (6).

• Доказанными теоремами 1 и 2 и следствиями теоремы 2 можно пользоваться при практическом нахождении образов и прообразов при частичном отображении. Так, например, по формулам (3) и (4) находим, что для частично-тождественного преобразования Δ_{X_0} множества M образом и прообразом подмножества X_1 множества M будет пересечение подмножеств X_0 и

$$X_1: \Delta_{X_0}(X_1) = X_0 \cap X_1 \text{ и } \Delta_{X_0}^{-1}(X_1) = X_0 \cap X_1.$$

Теорема 3. Пусть φ — частичное отображение множества M в множество N , Y_1, Y_2 — подмножества множества N . Тогда φ -прообраз пересечения $Y_1 \cap Y_2$ равен пересечению φ -прообразов каждого из подмножеств Y_1 и Y_2 :

$$\varphi^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = \varphi^{-1}(Y_1) \cap \varphi^{-1}(Y_2). \quad (7)$$

Действительно, пользуясь последовательно формулой (4), свойством отношения включения подмножеств, идемпотентностью, переместительностью и сочетательностью конъюнкции, затем снова теоремой 2 и определением пересечения подмножеств, можем написать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= (\exists x)\{x \in np_1 \varphi \wedge [\varphi\{x\} \subset (Y_1 \cap Y_2)]\} = \\ &= (\exists x)[x \in np_1 \varphi \wedge (\varphi\{x\} \subset Y_1 \wedge \varphi\{x\} \subset Y_2)] = \\ &= (\exists x)[(x \in np_1 \varphi \wedge \varphi\{x\} \subset Y_1) \wedge (x \in np_1 \varphi \wedge \varphi\{x\} \subset Y_2)] = \\ &= (\exists x)[x \in \varphi^{-1}(Y_1) \wedge x \in \varphi^{-1}(Y_2)] = \varphi^{-1}(Y_1) \cap \varphi^{-1}(Y_2), \end{aligned}$$

которая доказывает теорему.

3. Частичное взаимно-однозначное отображение и частичное взаимно-однозначное преобразование. Определение 1. Частичное отображение множества M в множество N называется φ^{-1} взаимно-однозначным, если его обращение φ является частичным отображением множества N в множество M . Обращение φ^{-1} называется φ обратным отображением для φ . Частичное взаимно-однозначное отображение множества M в себя называется взаимно-однозначным преобразованием M , его обращение называется обратным преобразованием.

Например, частично-тождественное преобразование Δ_{X_0} множества M является взаимно-однозначным. Обратное преобразование для Δ_{X_0} совпадает с ним самим: $\Delta_{X_0} = \Delta_{X_0}$. Пустое отображение множества M в N является взаимно-однозначным, обратным отображением для него будет пустое отображение N в M . Каждое бинарное отношение между действительными числами такое, что любой перпендикуляр к прямой OX и любой перпендикуляр к прямой OY пересекают его не более, чем в одной точке, является взаимно-однозначным преобразованием множества действительных чисел (рис. 11а).

Теорема 1. Обратное отображение для частичного взаимно-однозначного отображения множества M в множество N является частичным взаимно-однозначным отображением множества N в множество M .

Для доказательства достаточно вспомнить, что двойное обращение бинарного отношения совпадает с ним самим.

Следует подчеркнуть, что обратное отображение существует только у взаимно-однозначного частичного отображения, для не взаимно-однозначного частичного отображения его обращение, согласно определению 1, не будет частичным отображением. Аналогично, обратное преобразование существует только у взаимно-однозначного преобразования.

Непосредственно из определения 1, теоремы 1 и теоремы о проекциях обращения бинарного отношения п° 3 § 5 следует, что если φ — частичное взаимно-однозначное отображение множества M на множество N , то обратное отображение φ^{-1} будет полным взаимно-однозначным отображением N в M , а если φ — полное взаимно-однозначное отображение M на N , то обратное отображение φ^{-1} будет полным взаимно-однозначным отображением N на M .

Теорема 2 (условия взаимно-однозначности частичного отоб-

ражения). Частичное отображение ϕ множества M в множество N взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих трех условий:

1º полный прообраз любого элемента множества N содержит не более одного элемента:

$$(\wedge y) \sqcap (\vee x, x') [x \in \overset{-1}{\phi} < y > \wedge x' \in \overset{-1}{\phi} < y > \wedge x \neq x']; \quad (1)$$

2º срезы ϕ через различные элементы множества M не пересекаются:

$$(\wedge x, x') [x \neq x' \rightarrow (\phi < x > \cap \phi < x' > = \emptyset)]; \quad (2)$$

3º различные элементы первой проекции ϕ имеют различные ϕ -образы:

$$\begin{aligned} & (\wedge x, x') (\wedge y, y') [x \neq x' \wedge x \in \text{pr}_1 \phi \wedge x' \in \text{pr}_1 \phi \wedge \\ & \wedge (x, y) \in \phi \wedge (x', y') \in \phi \rightarrow y \neq y']. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Условие (1), согласно определению 1 предыдущего пункта и теореме 1 пº 1, выражает, что обра-
щение ϕ есть частичное отображение N в M , т. е. что ϕ — взаимно-однозначно. Следовательно, первое утверждение теоремы справедливо.

Далее, пользуясь последовательно законом де-Моргана (XXXI) вместе с определением среза бинарного отношения и законом сочетательности конъюнкции, выражением конъюнкции через отрицание и импликацию (XXVI) вместе с законом коммутативности кванторов общности, законом пронесения квантора общности через импликацию (XXXVIII) и, наконец, законом контрапозиции (XVII) вместе с определением пересечения подмножеств, можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} & (\wedge y) \sqcap (\vee x, x') [x \in \overset{-1}{\phi} < y > \wedge x' \in \overset{-1}{\phi} < y > \wedge x \neq x'] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\wedge y) (\wedge x, x') \sqcap [(y \in \phi < x > \wedge y \in \phi < x' >) \wedge x \neq x'] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\wedge x, x') (\wedge y) [(y \in \phi < x > \wedge y \in \phi < x' >) \rightarrow x = x'] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\wedge x, x') [(\forall y) (y \in \phi < x > \wedge y \in \phi < x' >) \rightarrow x = x'] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow (\wedge x, x') [x \neq x' \rightarrow (\phi < x > \cap \phi < x' > = \emptyset)]. \end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения 1º следует второе утверждение теоремы.

Наконец, пользуясь последовательно выражением импликации через конъюнкцию и отрицание (XXVI), определением пересечения двух множеств, законом пронесения квантора существования через конъюнкцию (XXXV) вместе с законом

де-Моргана (XXXI) и сочетательностью конъюнкции и, наконец, выражением конъюнкции через отрицание и импликацию (XXVII) и равносильностью предиката $y \in \Phi < x >$ с конъюнкцией $x \in p_1\Phi \wedge (x, y) \in \Phi$, можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
 (\wedge x, x') [x \neq x' \rightarrow (\Phi < x > \cap \Phi < x' > = \emptyset)] &\leftrightarrow (\wedge x, x') \neg [x \neq x' \wedge \\
 &\wedge (\Phi < x > \cap \Phi < x' > \neq \emptyset)] \leftrightarrow (\wedge x, x') \neg [x \neq x' \wedge \\
 &\wedge (\vee y, y') (y \in \Phi < x > \wedge y' \in \Phi < x' > \wedge y = y')] \leftrightarrow (\wedge x, x') (\wedge y, y') \neg \\
 &\neg [(x \neq x' \wedge y \in \Phi < x > \wedge y' \in \Phi < x' >) \wedge y = y'] \leftrightarrow \\
 &\leftrightarrow (\wedge x, x') (\wedge y, y') \{[x \neq x' \wedge x \in p_1 \Phi \wedge x' \in p_1 \Phi \wedge \\
 &\wedge (x, y) \in \Phi \wedge (x', y') \in \Phi] \rightarrow y \neq y'\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения 2° следует справедливость третьей части теоремы. Доказательство закончено.

Теорема 3. Пусть Φ — непустое частичное взаимно-однозначное отображение множества M в множество N , x_0 — элемент первой проекции Φ , y_0 — элемент второй проекции Φ . Тогда y_0 будет образом x_0 при отображении Φ тогда и только тогда, когда x_0 является образом y_0 при обратном отображении Φ^{-1} :

$$y_0 = \Phi(x_0) \leftrightarrow x_0 = \Phi^{-1}(y_0). \quad (4)$$

Действительно, при условиях теоремы Φ будет частичным отображением множества N в множество M и y_0 будет принадлежать первой проекции Φ . Следовательно, оба члена эквивалентности (4) имеют смысл, при этом они соответственно равносильны высказываниям $(x_0, y_0) \in \Phi$ и $(y_0, x_0) \in \Phi^{-1}$, которые, в свою очередь, согласно определению обращения бинарного отношения, равносильны между собой.

Отметим еще, что бинарное отношение между элементами двух множеств, обращение которого однозначно, называется *обратно-однозначным*. Нетрудно убедиться, что бинарное отношение ρ между элементами множеств M и N обратно-однозначно тогда и только тогда, когда с каждым элементом множества N в отношении ρ находится не более чем один элемент множества M :

$$\begin{aligned}
 (\rho \text{ — обр. однозн.}) \leftrightarrow (\wedge y \underset{df}{\neg} (\vee x, x') [(x, y) \in \rho \wedge (x', y) \in \rho \wedge \\
 \wedge x \neq x']).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Таковым, например, будет любое бинарное отношение между действительными числами, для которого каждый перпендикуляр к прямой OY пересекает его не более чем в одной точке (рис. 11б). Теперь можно сказать, что частичное взаимно-однозначное отображение множества M в множество N есть такое бинарное отношение между элементами этих множеств, которое одновременно однозначно и обратно-однозначно.

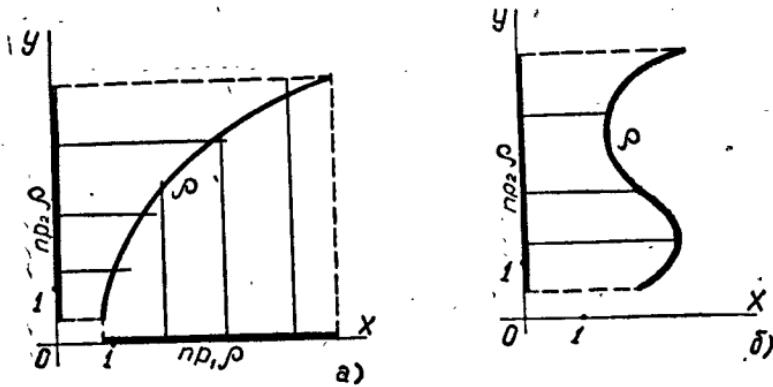


Рис. 11

4. Произведение частичных отображений и частичных преобразований. Для частичных отображений и преобразований множеств, так же как и для бинарных отношений общего вида, основной бинарной операцией является операция умножения. Для них сохраняются все свойства произведения бинарных отношений общего вида. Кроме того, имеют место некоторые новые свойства.

Теорема 1 (произведение частичных отображений). Если φ — частичное отображение множества M в множество N , ψ — частичное отображение множества N в множество L , то произведение $\psi \circ \varphi$ будет частичным отображением M в L .

Если произведение $\psi \circ \varphi$ не пусто и x_0 — элемент первой проекции произведения, то $(\psi \circ \varphi)$ -образ x_0 равняется ψ -образу от φ -образа этого элемента:

$$(\psi \circ \varphi)(x_0) = \psi(\varphi(x_0)). \quad (1)$$

Произведение $\psi \circ \varphi$ называется также *суперпозицией* отображений или *сложной функцией*, составленной из φ и ψ .

Доказательство. При условиях теоремы, произведение $\psi \circ \varphi$ будет бинарным отношением между элементами множеств M и L . Рассмотрим его срез через элемент x_0 первого

базисного множества M . По теореме 1 п^o 5 § 5 имеем равенство:

$$\psi \circ \varphi < x_0 > = \psi(\varphi < x_0 >).$$

В силу теоремы 1 п^o 1 срез $\varphi < x_0 >$ есть либо пустое, либо однозначное подмножество множества N . В первом случае, срез $\psi(\varphi < x_0 >)$ будет пустым (см. следствие теоремы 7 п^o, 4 § 5). Во втором случае, согласно теоремы 1 п^o 4 и теоремы 1 п^o 1, срез $\psi(\varphi < x_0 >)$ содержит не более одного элемента множества L . Следовательно, срез произведения $\psi \circ \varphi$ через любой элемент множества M содержит не более одного элемента, что, в силу теоремы 1 п^o 1, доказывает первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\psi \circ \varphi \neq \emptyset$ и $x_0 \in np_1 \psi \circ \varphi$. Согласно теореме 4 п^o 5 § 5 и теореме 2 п^o 2 имеем равенство:

$$np_1(\psi \circ \varphi) = (\exists x)[x \in np_1 \psi \wedge \varphi < x > \subset np_1 \psi].$$

Отсюда, вместе с теоремой 1 п^o 1, следует, что элемент x_0 принадлежит первой проекции φ , а φ -образ x_0 принадлежит первой проекции ψ :

$$x_0 \in np_1 \varphi; \quad \varphi(x_0) \in np_1 \psi. \quad (*)$$

Учитывая (*) и пользуясь последовательно теоремой 1 п^o 5 § 5, теоремой 1 п^o 1 для частичного отображения φ , теоремой 1 п^o 4 § 5 для частичного отображения ψ , а затем снова теоремой 1 п^o 1, получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi < x_0 > &= \psi(\varphi < x_0 >) = \psi(\{\varphi(x_0)\}) = \psi < \varphi(x_0) > = \\ &= \{\psi(\varphi(x_0))\}. \end{aligned} \quad . \quad (**)$$

В то же время для частичного отображения $\psi \circ \varphi$, по теореме 1 п^o 1, будет справедливо равенство: $\psi \circ \varphi < x_0 > = \{(\psi \circ \varphi)(x_0)\}$, которое вместе с (**) доказывает второе утверждение теоремы.

Непосредственно из теоремы 1 и теоремы 5 п^o 5 § 5 получаем:

Следствие 1. Если φ — полное отображение множества M на множество N , ψ — полное отображение множества N на множество L , то произведение $\psi \circ \varphi$ является полным отображением M на L .

Следствие 2. Если φ — частичное взаимно-однозначное отображение множества M в множество N , ψ — частичное взаимно-однозначное отображение N в множество L , то:

а) произведение $\psi \circ \varphi$ является частичным взаимно-однозначным отображением M в L ;

б) обратное отображение для произведения $\psi \circ \varphi$ равняется произведению обратных отображений для сомножителей в обратном порядке.

В с. д., при условиях теоремы, произведение $\psi \circ \varphi$ есть частичное отображение M в L , обращения σ и ρ суть частичные отображения соответственно L в N и N в M . Следовательно, об-

ращение произведения $\psi \circ \varphi$, равное произведению $\varphi \circ \psi$ (см. теорему 3 п° 5 § 5), есть частичное отображение L в M , что и доказывает утверждение а). Утверждение б) является частным случаем упомянутой выше общей теоремы 3 п° 5 § 5.

Теорема 2 (условия однозначности и обратной однозначности бинарного отношения). Бинарное отношение ρ между элементами множеств M и N :

а) однозначно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1º произведение обращения ρ на ρ включается в диагональ множества N ;

2º произведение обращения ρ на ρ равняется частично-тождественному преобразованию множества N , определенному на второй проекции ρ :

$$(\rho - \text{однозн.}) \leftrightarrow (\rho \circ \rho \subseteq \Delta_N);$$

$$(\rho - \text{однозн.}) \leftrightarrow (\rho \circ \rho = \Delta_{\text{пр}, \rho}); \quad (2)$$

б) обратно однозначно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1º произведение ρ на его обращение ρ включается в диагональ множества M ;

2º произведение ρ на его обращение ρ равняется частично-тождественному преобразованию множества M , определенному на первой проекции ρ :

$$(\rho - \text{обр. однозн.}) \leftrightarrow (\rho \circ \rho \subseteq \Delta_M); (\rho - \text{обр. одноз.}) \leftrightarrow (\rho \circ \rho = \Delta_{\text{пр}, \rho}). \quad (3)$$

Доказательство. Пользуясь последовательно определением 1 п° 1 вместе с законом де-Моргана (XXXI) и выражением конъюнкции через отрицание и импликацию (XXVIII), законом переместительности кванторов общности вместе с законом пронесения квантора общности через импликацию (XXXVIII) и определением обращения бинарного отношения, определением произведения бинарных отношений вместе с определением диагонали множества и, наконец, определением включения подмножеств, можем написать следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
 (\rho \text{ — однозн.}) &\leftrightarrow (\wedge x)(\wedge y, y') [((x, y) \in \rho \wedge (x, y') \in \rho) \rightarrow y = y'] \leftrightarrow \\
 &\leftrightarrow (\wedge y, y') [(\vee x) ((y', x) \in \rho \wedge (x, y) \in \rho) \rightarrow y' = y] \leftrightarrow \\
 &\leftrightarrow (\wedge (y', y)) [(y', y) \in \rho^{-1} \circ \rho \rightarrow (y', y) \in \Delta_N] \leftrightarrow [\rho^{-1} \circ \rho \subset \Delta_N],
 \end{aligned}$$

которая доказывает первое условие однозначности бинарного отношения.

Достаточность 2-го условия однозначности непосредственно следует из первого условия, ибо каждое частично-тождественное преобразование множества N включается в его диагональ. Для доказательства необходимости 2-го условия найдем, прежде всего, первую проекцию произведения $\rho \circ \rho$. Согласно теоремам § 5 имеем: $np_1(\rho \circ \rho) = np_2\rho$. Отсюда и из 1-го условия однозначности следует, что для каждого однозначного бинарного отношения ρ , произведение $\rho \circ \rho$ есть частично-тождественное преобразование множества N , определенное на $np_2\rho$; что и требовалось доказать. Тем самым первая часть теоремы доказана. Вторая ее часть доказывается аналогично, это предоставляем проделать читателю самостоятельно.

Следствие. Однородное бинарное отношение ρ между элементами множества M является полным взаимно-однозначным преобразованием M на себя тогда и только тогда, когда произведение ρ на его обращение в любом порядке равняется тождественному преобразованию множества M :

$$\rho^{-1} \circ \rho = \rho \circ \rho^{-1} = \Delta_M. \quad (4)$$

Действительно, если ρ — полное взаимно-однозначное преобразование множества M на себя, то: $np_1\rho = M$, $np_2\rho = M$, ρ — однозначно и обратно-однозначно. Следовательно, равенства (4) выполняются. Обратно, пусть для ρ выполняются равенства (4). Тогда, согласно теореме, ρ будет однозначным и обратно-однозначным, а согласно необходимому условию равенства бинарных отношений № 2 § 5, будут выполняться равенства:

$$np_1(\rho^{-1} \circ \rho) = np_1(\rho \circ \rho^{-1}) = M. \quad (*)$$

С другой стороны находим, что:

$$np_1(\rho \circ \rho) = np_1\rho \text{ и } np_1(\rho \circ \rho^{-1}) = np_2\rho.$$

Следовательно, $np_1\rho = M$ и $np_2\rho = M$. Т. о. ρ есть полное взаимно-однозначное преобразование M на себя.

5. Частичные преобразования в R^n . Каждое частичное преобразование ϕ в n -мерном арифметическом пространстве R^n можно выразить системой n скалярных функций от n действительных переменных:

$$\begin{cases} *x^1 = f^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ *x^2 = f^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \vdots \\ *x^n = f^n(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases} \quad (1)$$

коротко $*x^i = f^i(x^j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), которые позволяют по заданным компонентам $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ точки R^n , принадлежащей первой проекции ϕ , находить компоненты ее образа $*x^i = f^i(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$. Обратно, каждая система n скалярных функций от n действительных переменных определяет в R^n частичное преобразование, первая проекция которого равна пересечению первых проекций данных n функций.

Частичное преобразование ϕ , заданное в R^n системой (1) будет взаимно-однозначно, если из этой системы переменные x^1, x^2, \dots, x^n можно выразить как функции переменных $*x^1, *x^2, \dots, *x^n$. Полученная при этом система функций

$$\begin{cases} x^1 = f^1(*x^1, *x^2, \dots, *x^n), \\ x^2 = f^2(*x^1, *x^2, \dots, *x^n), \\ \vdots \\ x^n = f^n(*x^1, *x^2, \dots, *x^n) \end{cases} \quad (2)$$

будет выражать обратное преобразование для ϕ .

Если в R^n задано еще одно частичное преобразование ψ системой n функций:

$$**x^i = g^i(*x^1, *x^2, \dots, *x^n), \quad (3)$$

то произведение $\psi \circ \phi$ будет выражаться системой n сложных функций, получаемых заменой переменных $*x^1, x^2, \dots, *x^n$ в (3) их выражениями из (1):

$$\begin{cases} **x^1 = g^1(f^1(x^i), f^2(x^i), \dots, f^n(x^i)), \\ **x^2 = g^2(f^1(x^i), f^2(x^i), \dots, f^n(x^i)), \\ \vdots \\ **x^n = g^n(f^1(x^i), f^2(x^i), \dots, f^n(x^i)). \end{cases} \quad (4)$$

Например, система функций:

$$*x^i = x^i + a^i \quad (a^i - const, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

определяет полное взаимно-однозначное преобразование R^n на себя. Его обращение выражается системой функций:

$$x^i = *x^i - a^i. \quad (6)$$

Преобразования вида (5) называются *параллельными переносами* R^n . Произведение параллельного переноса (5) на другой параллельный перенос

$$**x^i = *x^i + b^i \quad (7)$$

есть также параллельный перенос R^n , выражющийся системой функций:

$$**x^i = x^i + (a^i + b^i). \quad (8)$$

ДОПОЛНЕНИЕ

Аксиомы исчисления высказываний

Аксиоматическая форма исчисления высказываний получается путем выделения из всех тавтологий алгебры высказываний некоторой их совокупности в качестве аксиом и задания формальных правил вывода, с помощью которых из выбранных аксиом можно вывести все остальные тавтологии.

В качестве аксиом можно, например, взять следующие четыре формулы:

- 1⁰ $(P \vee P) \rightarrow P,$
- 2⁰ $P \rightarrow (P \vee P_1),$
- 3⁰ $(P \vee P_1) \rightarrow (P_1 \vee P),$
- 4⁰ $(P \rightarrow P_1) \rightarrow [(P_2 \vee P) \rightarrow (P_2 \vee P_1)],$

причем формула $F_1 \rightarrow F_2$ рассматривается как сокращение формулы $\neg F_1 \vee F_2$, а в качестве правил вывода — известное правило отделения (см. § 3, п.° 12) и следующее *правило подстановки*:

Если $F(P)$ — формула, содержащая пропозиционную букву P , то формула $S_P^\Phi(F(P))$, получающаяся из $F(P)$ заменой буквы P всюду, где она встречается, формулой Φ , непосредственно выводима из $F(P)$, что символически можно записать так:

$$\frac{F(P)}{S_P^\Phi(F(P))}.$$

Легко показать, что каждая формула, доказуемая на основе выбранной системы аксиом и правил вывода, является тавтологией алгебры высказываний. Действительно, доказуемыми формулами, согласно определению доказательства, приведенного по п.° 12 § 3, будут, прежде всего, аксиомы 1° — 4°. Все они являются тавтологиями алгебры высказываний (см. закон идемпотентности (V), закон упрощения (VII), закон коммутативности (IX) и задачу 21 § 2). Далее, каждая доказуемая формула получается из аксиом применением правил вывода. Но согласно задачам 23 и 24 второго параграфа, применение правила отделения и правила подстановки к тавтологиям алгебры высказываний снова дает тавтологию. Следовательно, любая доказуемая формула является тавтологией алгебры высказываний. Можно доказать и обратное предположение, что каждая тавтология алгебры высказываний доказуема на основе выбранной системы аксиом.

Примером доказательства является следующая последовательность восьми формул:

1. $P \rightarrow (P \vee P_1)$,
2. $P \rightarrow (P \vee P)$,
3. $(P \vee P) \rightarrow P$,
4. $(P \rightarrow P_1) \rightarrow [(P_2 \vee P) \rightarrow (P_2 \vee P_1)]$,
5. $[(P \vee P) \rightarrow P] \rightarrow [(\neg P \vee (P \vee P)) \rightarrow (\neg P \vee P)]$,
6. $[\neg P \vee (P \vee P)] \rightarrow (\neg P \vee P)$,
7. $[P \rightarrow (P \vee P)] \rightarrow (P \rightarrow P)$,
8. $P \rightarrow P$.

Первая из них есть аксиома 2°; вторая — получается из первой заменой P_1 на P ; третья формула есть аксиома 1°; четвертая — аксиома 4°; формула 5 получается из формулы 4 заменой P на $P \vee P$, P_1 на P и P_2 на $\neg P$; формула 6 есть непосредственное следствие формул 3 и 5 по правилу отделения; формула 7 есть формула 6, записанная сокращенно; наконец, формула 8 есть непосредственное следствие формул 2 и 7 по правилу отделения.

Таким образом, действительно приведенная последовательность формул является доказательством; это есть доказательство закона тождества: $P \rightarrow P$.

Важнейшим вопросом для каждой системы аксиом является вопрос о ее внутренней непротиворечивости. Система аксиом называется *внутренне непротиворечивой*, если на ее основе нельзя доказать никакие две формулы, одна из которых явля-

ется отрицанием другой. Система аксиом, не удовлетворяющая этому условию, называется *противоречивой*. На основе противоречивой системы аксиом можно доказать любую формулу, поэтому такие системы аксиом не представляют никакого интереса.

Покажем, что система аксиом $1^\circ - 4^\circ$ исчисления высказываний внутренне непротиворечива. Действительно, допустим противное, что система аксиом $1^\circ - 4^\circ$ противоречива: Тогда будет существовать некоторая формула F , которая вместе с ее отрицанием $\neg F$ доказуема на основе этих аксиом. По ранее доказанному, отсюда следует, что как формула F , так и ее отрицание $\neg F$ являются тавтологиями алгебры высказываний, что невозможно, так как, если, например, формула F — тавтология, то все значения формулы $\neg F$ суть «ложь».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть l_1 и l_2 — две пересекающиеся прямые на плоскости, S — точка, не лежащая ни на одной из них. Бинарное отношение π между точками l_1 и l_2 , образованное из всех упорядоченных пар точек, для которых соединяющая их прямая проходит через точку S , называется *центральной проекцией* прямой l_1 в прямую l_2 с центром проекций S . Доказать, что π есть частичное взаимно-однозначное отображение. Найти первую и вторую проекции π и обратное отображение π .

2. Какие из следующих однородных бинарных отношений между действительными числами являются частичными преобразованиями? Для каждого частичного преобразования выяснить более точно его природу:

- а) $(\mathcal{C}(x, y)) (2x - 3y + 5 = 0)$;
- б) $(\mathcal{C}(x, y)) (x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \wedge y \geq 0)$;
- в) $(\mathcal{C}(x, y)) \left[\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right) \wedge y = \operatorname{tg} x \right]$;
- г) $(\mathcal{C}(x, y)) (x^2 - y^2 + 1 = 0)$.

3. Для каких из перечисленных ниже двухместных однородных предикатов, определенных на множестве жителей города N , множество истинности является частичным преобразованием:

- а) x_1 есть отец x_2 ;
- б) x_2 есть сын x_1 ;
- в) x_2 есть бабушка x_1 ;
- г) x_2 есть бабушка x_1 по матери.

4. Пусть M и N конечные множества, состоящие из n и m элементов соответственно. Найти число различных:

- а) полных отображений M в N ;
- б) частичных отображений M в N ;
- в) полных взаимно-однозначных отображений M в N ;
- г) частичных взаимно-однозначных отображений M в N .

5. Доказать, что:

а) частично-тождественное преобразование множества M , определенное на подмножестве X_0 , равняется пересечению диагонали множества M с декартовым квадратом X_0 ;

б) два частично-тождественных преобразования множества M , определенные на подмножествах X_1 и X_2 , удовлетворяют отношению включения тогда и только тогда, когда X_1 и X_2 удовлетворяют отношению включения;

в) произведение двух частично-тождественных преобразований множества M , определенных на подмножествах X_1 и X_2 , есть частично-тождественное преобразование множества M , определенное на пересечении $X_1 \cap X_2$;

г) квадрат частично взаимно-одиозначного преобразования Φ множества M равен Φ тогда и только тогда, когда Φ есть частично-тождественное преобразование множества M .

6. Доказать, что частичное отображение Φ множества M в множество N является полным тогда и только тогда, когда дополнение Φ -прообраза каждого подмножества множества N совпадает с Φ -прообразом дополнения этого подмножества.

7. Доказать, что бинариое отношение ρ между элементами множеств M и N :

а) одиозначно тогда и только тогда, когда срез обращения ρ через пересечение любых двух подмножеств множества N равен пересечению срезов ρ через каждое из этих подмножеств;

б) обратно-одиозначно тогда и только тогда, когда срез ρ через пересечение любых двух подмножеств множества M равен пересечению срезов ρ через каждое из этих подмножеств.

8. Ограничением частичного отображения Φ множества M в множество N относительно подмножества X_0 множества M называется иное частичное отображение $\bar{\Phi}$ в N , обозначаемое Φ_{X_0} , образованное из всех упорядоченных пар, прилежащих Φ , первая компонента которых содержится в X_0 :

$$\Phi_{X_0} = (\langle (x, y) \rangle | (x, y) \in \Phi \wedge x \in X_0).$$

Доказать: а) ограничение Φ_{X_0} равняется пересечению Φ с декартовым произведением X_0 на N ;

б) ограничение Φ_{X_0} равняется произведению частично-тождественного преобразования множества Δ_{X_0} , определенного на X_0 , с данным отображением Φ ;

в) ограничение частично взаимно-одиозначного отображения есть частично взаимно-одиозначное отображение;

г) ограничение Φ_{X_0} совпадает с Φ тогда и только тогда, когда первая проекция Φ включается в X_0 ;

д) ограничение Φ_{X_0} пусто тогда и только тогда, когда X_0 не пересекается с первой проекцией Φ .

9. Доказать, что объединение двух частичных отображений Φ и Ψ множества M в множество N является частичным отображением M в N тогда и только тогда, когда ограничения Φ и Ψ относительно пересечения их первых проекций совпадают (такие частичные отображения называются совместными).

10. Найти необходимое и достаточное условие, при котором объединение двух частичных взаимно-однозначных отображений ϕ и ψ множества M в множество N является частичным взаимно-однозначным отображением M в N .

11. Частичным линейным преобразованием в n -мерном арифметическом пространстве R^n называется непустое частичное преобразование Φ , для которого существует n линейных функций:

$$*x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i x^j + A_0^i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

значения которых для каждой арифметической точки, принадлежащей первой проекции Φ , совпадают с соответствующими компонентами Φ -образа этой точки. Матрица n -го порядка (A_j^i) ($i, j = 1, 2, \dots, n$) называется матрицей частичного линейного преобразования Φ . Φ называется вырождающимся или невырождающимся в зависимости от того, вырождается или не вырождается его матрица.

Доказать: а) частичное линейное преобразование Φ взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда оно не вырождается;

б) если ранг матрицы вырожденного частичного линейного преобразования Φ равен r , то вторая проекция Φ есть подмножество r -плоскости в R^n ;

в) при полном невырожденном линейном преобразовании образом m -плоскости является m -плоскость;

г) при полном невырожденном линейном преобразовании параллельные гиперплоскости преобразуются в параллельные.

12. Группой преобразований называется совокупность G полных взаимно-однозначных преобразований некоторого множества M на себя, удовлетворяющая двум условиям:

1° G замкнута относительно операции умножения:

$$(\wedge g, g') [(g \in G \wedge g' \in G) \rightarrow g' \circ g \in G];$$

2° G замкнута относительно операции обращения:

$$(\wedge g) (g \in G \rightarrow \bar{g}^{-1} \in G).$$

Группа преобразований G_1 , включающаяся в G , называется подгруппой последней.

Доказать:

а) совокупность S_M всех полных взаимно-однозначных преобразований множества M на себя есть группа преобразований (она называется симметричной группой множества M);

б) совокупность, образованная из одного тождественного преобразования множества M , есть подгруппа S_M ;

в) совокупность всех полных невырожденных линейных преобразований в R^n есть группа преобразований.

13. Обобщенной группой частичных преобразований называется совокупность G частичных взаимно-однозначных преобразований некоторого множества M , удовлетворяющая условиям 1°, 2° предыдущей задачи. Обобщенная группа частичных преобразований G_1 , включающаяся в G , называется обобщенной подгруппой последней.

Доказать:

а) совокупность всех частичных взаимно-однозначных преобразований множества M есть обобщенная группа. Ее обобщенной подгруппой будет

совокупность, образованная из пустого и тождественного преобразования миожества M ;

б) совокупность всех частичных линейных невырожденных преобразований в R^n есть обобщенная группа.

14. Частичным дробно-линейным преобразованием в R^n называется не-пустое частичное преобразование φ , для которого существует n дробно-линейных функций:

$$*x^l = \frac{\sum_{j=1}^n A_j^l x^j + A_0^l}{\sum_{k=1}^n A_k^0 x^k + A_0^0} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

значения которых для каждой арифметической точки, принадлежащей первой проекции φ , совпадают с соответствующей компонентой φ -образа этой точки. Матрица порядка $n+1$: (A_l^i) ($i, l = 1, 2, \dots, n, 0$) называется матрицей φ . Частичное дробно-линейное преобразование называется вырожденным или невырожденным в зависимости от того, вырождается или не вырождается его матрица.

Доказать:

а) частичное дробно-линейное преобразование в R^n взаимно-однозначно тогда и только тогда, когда оно невырождено;

б) совокупность всех невырожденных частичных дробно-линейных преобразований в R^n есть обобщенная группа.

15. Найти все преобразования миожества M , ядро которых совпадает с самим преобразованием.

16. Если φ отображение миожества M на миожество N , ψ — отображение N в миожество L , то ядро φ включается в ядро произведения $\psi \circ \varphi$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Доказательство необходимости. Если $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ то $\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\}$ или же $\{a\} = \{c, d\}$ и $\{a, b\} = \{c\}$. В первом случае теорема верна. Второй случай при $c \neq d$ и $a \neq b$ невозможен. Если же $c = d$ и $a = b$, то $\{c, d\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{a\}$ и, следовательно, $a = c = d = b$.

6. а) 30; б) 20.

8. Указание. Для доказательства достаточности проверить, что если два подмножества не равны, то объединение их отлично от их пересечения.

9. $(N_1 \times N_2) \cap (N_3 \times N_4) = (N_1 \cap N_3) \times (N_2 \cap N_4)$ и $[(N_1 \times N_2) \cup (N_3 \times N_4)] \subset (N_1 \cup N_3) \times (N_2 \cup N_4)$.

10. Указание. Показать, что если $M \times N \neq \emptyset$, то $M, N \neq \emptyset$ и обратно, если $M, N \neq \emptyset$, то $M \times N \neq \emptyset$.

§ 2

4. б) $\neg(A \wedge B)$. 5. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee$
 $\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$.

6. $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$.

7. $(A \mid B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$; $\neg A \leftrightarrow (A \mid A)$; $(A \wedge B) \leftrightarrow ((A \mid B) \mid (A \mid B))$;
 $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B))$; $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \mid (B \mid B))$.

8. $(A \downarrow B) \leftrightarrow \neg(A \vee B)$; $\neg A \leftrightarrow (A \downarrow A)$; $(A \vee B) \leftrightarrow ((A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B))$.

9. а) 4; б) 16.

10. Указание. Пусть \perp некоторая бинария логическая операция над высказываниями. Если $A \perp B$ ложно для любых A и B , то $(A \perp B) \leftrightarrow \neg(A \Delta \neg A)$. Если $A \perp B$ истинно только в одном случае, например, когда A и B ложны, то $(A \perp B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$. Если $A \perp B$ истинно только в двух случаях, например, когда A и B ложны и когда A истинно, а B ложно, то $(A \perp B) \leftrightarrow [(\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B)]$ и т. д. Далее, воспользоваться зависимостями между основными операциями над высказываниями..

11. Решение. Для любого высказывания A : $(A \wedge A) \leftrightarrow A$, $(A \vee A) \leftrightarrow A$; а $A \rightarrow A$ и $A \leftrightarrow A$ истинны. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность высказывания A с истинным высказыванием или равносильна A или истинна. Следовательно, применяя к высказыванию A основные бинарии операции, можно получить только высказывание, эквивалентное A или истинное.

12. Решение. Пусть O_3 некоторая тернария логическая операция над высказываниями. Обозначим через O_2 и O_2^* бинарные операции над высказываниями, такие, что для любых высказываний $A, B: O_2(A, B) \leftrightarrow O_3(A, B, u)$, а $O_2^*(A, B) \leftrightarrow O_3(A, B, \lambda)$. Тогда: $O_3(A, B, C) \leftrightarrow \{[O_2(A, B) \wedge C] \vee [O_2^*(A, B) \vee \neg C]\}$.

13. б), в), д), з) не формулы. В б) выражение $(P_1 P_2)$ не формула; в в) не расставлены скобки; в д) выражение $(\rightarrow P_2)$ не формула; в з) выражения $(\neg \neg P \vee \vee P)$ и $(\vee P \vee P)$ не формулы.

20. а), в) и д) — тавтологии.

22. Доказательства от противного.

$$26. [(P_1 \rightarrow P_2) \wedge (P_3 \rightarrow P_4) \wedge (P_1 \vee P_3) \wedge \neg (P_2 \wedge P_4)] \rightarrow \\ \rightarrow [(P_2 \rightarrow P_1) \wedge (P_4 \rightarrow P_3)].$$

$$28. \text{а)} P_1; \text{ б)} P_1 \wedge \neg P_3; \text{ в)} P_1 \vee (P_2 \wedge P_3).$$

§ 3

3. в) Однородное бинарие отношение между точками плоскости, образованное из всех пар точек, симметричных относительно прямой a ; г) однородное терниарное отношение между точками плоскости, образованное из упорядоченных троек точек, две первые из которых лежат на окружности с центром в третьей точке.

4. а) Открытый отрезок с концами A и B ; б) луч прямой l_0 с вершиной B , не содержащий точку C ; в) однородное бинарие отношение между точками l_0 , образованное из пар точек, прилежащих дополнительным лучам прямой l_0 с вершиной B ; д) однородное терниарное отношение между точками прямой l_0 , образованное из упорядоченных троек точек, из которых вторая лежит между первой и третьей.

5. в) для всех действительных чисел, не больших 2-х;

г) только для 2.

9. а) Объединение дополнения множества истинности предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с множеством истинности предиката $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Указание. Выразить импликацию через дизъюнкцию и отрижение. б) объединение пересечения множеств истинности предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с пересечением дополнений множеств истинности этих предикатов.

11. в) Множество точек второй, третьей и четвертой координатных четвертей; г) множество точек второй и четвертой координатных четвертей.

12. а) Множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ совпадают с множеством M ; б) пересечение множеств истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ пусто; г) множество истинности предиката $A(x)$ включается в множество истинности предиката $B(x)$.

13. а) Объединение множеств истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ совпадает с множеством M ; б) множество истинности предиката $A(x)$ есть множество M , а множество истинности предиката $B(x)$ пустое; в) множество истинности предиката $A(x)$ равняется дополнению множества истинности предиката $B(x)$; г) множество истинности предиката $B(x)$ равняется множеству M .

15. а) Множество истинности предиката $A(x)$ есть собственное подмножество множества истинности предиката $B(x)$; б) множество истинности предиката $A(x)$ пустое; в) множества истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$ не пересекаются или первое из них включается во второе.

18. б) $\neg (\vee x, x') ((A(x) \wedge A(x')) \wedge x \neq x')$ или же $(\wedge x, x') [(A(x) \wedge A(x')) \rightarrow x = x']$; в) $(\vee x, x') [A(x) \wedge A(x') \wedge x \neq x']$ г) $\neg (\vee x, x', x'') [A(x) \wedge A(x') \wedge A(x'') \wedge x \neq x' \wedge x' \neq x'' \wedge x'' \neq x]$ или же $(\wedge x, x', x'') [(A(x) \wedge A(x') \wedge A(x'')) \rightarrow (x = x' \vee x' = x'' \vee x'' = x)]$.

22. Решение. а) $\neg (\wedge P(x)) A(x) \leftrightarrow \neg (\wedge x) [P(x) \rightarrow A(x)] \leftrightarrow (\vee x) \neg \neg [P(x) \rightarrow A(x)] \leftrightarrow (\vee x) [P(x) \wedge \neg A(x)] \leftrightarrow (\vee P(x)) \neg A(x)$.

24. б) и в) не формулы.

26. Аксиома параллельности Евклида:

$(\wedge l)(\wedge M) [M \in l \rightarrow \neg (\vee l', l'') (M \in l' \wedge M \in l'' \wedge l \cap l' = \emptyset \wedge l \cap l'' = \emptyset \wedge l' \neq l'')]$.

27. Указание. Воспользоваться выражением эквивалентности через конъюнкцию и импликацию и законами пронесения квантора общности через конъюнкцию и импликацию.

31. а) и в). Формула б) не является тавтологией, т. к. при замене предикатных букв $P_1(x)$ и $P_2(x)$ предикатами $x > 2$ и $x < 2$, определенными на множестве действительных чисел, она обращается в ложное высказывание.

32. а).

§ 4

1. Указание. Воспользоваться: а) законом противоположности и б) законом контрапозиции.

4. Решение. Если $\Phi = \Psi$ тождество, то $\Phi' = \Psi'$ также тождество. Находим Φ' и Ψ' по законам де-Моргана и в полученном после этого тождестве заменяем дополнение каждого подмножества самим этим подмножеством. Это будет двойственным тождеством для $\Phi = \Psi$.

5. Воспользоваться задачей 6 § 3 и принципом двойственности.

6. Указание. Воспользоваться: а) тавтологией д) задачи 21 § 2; б) тавтологией е) задачи 21 § 2; в) выражением дизъюнкции через импликацию и отрицание; г) выражением конъюнкции через импликацию и отрицание.

7. Указание. Воспользоваться тавтологиями а) и б) зад. 21 § 2.
8. а) X_1 ; б) $X_1 \cap X_2$; в) M .

12. Решение а). По определению объединения совокупности подмножеств $\sqcup P(M) \subset M$. С другой стороны, $\{M\}$ есть подсовокупность $P(M)$. Следовательно, $\sqcup \{M\} \subset \sqcup P(M)$, т. е. $M \subset P(M)$. Т. о. $\sqcup P(M) = M$.

14. Решение а). Используя последовательно определение отношения включения, закон коммутативности кванторов общности, закон пронесения квантора общности через импликацию, определение пересечения семейства подмножеств и снова определение отношения включения, можем написать цепочку импликаций:

$$\begin{aligned} (\wedge i) (X_i \subset X_l) \rightarrow (\wedge i) (\wedge x) (x \in X_i \rightarrow x \in X_l) \rightarrow (\wedge x) (\wedge i) (x \in X_i \rightarrow x \in X_l) \rightarrow \\ \rightarrow (\wedge x) [(\wedge i) (x \in X_i) \rightarrow (\wedge i) (x \in X_l)] \rightarrow (\wedge x) [(x \in \sqcap_{i \in I} X_i) \rightarrow \\ \rightarrow (x \in \sqcap_{i \in I} X_i)] \rightarrow [(\sqcap_{i \in I} X_i) \subset (\sqcap_{i \in I} X_i)]. \end{aligned}$$

15. Решение а). Используя последовательно определение пересечения двух подмножеств вместе с определением объединения семейства подмножеств, закон пронесения квантора существования через конъюнкцию с одним постоянным членом, определение пересечения двух подмножеств и оп-

пределение объединения семейства подмножеств, можем написать следующую цепочку равенств:

$$X \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) = (\exists x) [x \in X \wedge (\vee i) (x \in X_i)] = (\exists x) (\vee i) (x \in X \wedge x \in X_i) = (\exists x) (\vee i) (x \in X \cap X_i) = \bigsqcup_{i \in I} (X \cap X_i).$$

16. Решение. а) Пользуясь сначала определением объединения двух подмножеств вместе с определением объединения семейства подмножеств, затем законом пронесения квантора существования через дизъюнкцию вместе с определением объединения двух подмножеств и понятием упорядоченной пары и, наконец, опять определением объединения семейства подмножеств, можем написать цепочку равенств:

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) \cup \left(\bigsqcup_{k \in K} X_k \right) = (\exists x) [(\vee i) (x \in X_i) \vee (\vee k) (x \in X_k)] = \\ = (\exists x) (\vee (i, k)) (x \in X_i \cup X_k) = \bigsqcup_{(i, k) \in I \times K} (X_i \cup X_k).$$

§ 5

1. Указание. Декартово произведение множеств, состоящих из n и m различных элементов, содержит $n m$ различных упорядоченных пар. Непустое бинарное отношение между элементами этих множеств может состоять из 1-й пары, из 2-х различных пар, из 3-х различных пар, ..., из 2 в $\frac{m}{2}$ всех $m n$ пар. Число последних равняется соответственно: $C_{n m}^1, C_{n m}^2, \dots, C_{n m}^{m n}$

2. а) $np_1 \rho = \{1, 2, 3\}; np_1^{-1} \rho = \{1, 2, 3, 4, 5\}; np_1 (\rho \cup \rho) = \{1, 2, 3, 4, 5\},$
 б) $\rho <1> = \{1, 2, 3\}; \rho <4> = \emptyset; \rho <(1, 2)> = \{1, 2, 3, 4\};$ в) $\rho \circ \rho = \{(1, 1),$
 $(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}; \rho \circ \rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3),$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}; \rho^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5),$
 $(2, 5)\}.$

3. **Решение** д) $\sigma \circ (X \times Y) = (\exists (x, z)) (\vee y) [(x, y) \in X \times Y \wedge (y, z) \in \sigma] =$
 $= (\exists (x, z)) [(x \in X) \wedge (\vee y) (y \in Y \wedge z \in \sigma <y>)] =$
 $= (\exists (x, z)) (x \in X \wedge z \in \sigma(Y)) = X \times \sigma(Y).$

4. **Указание.** а) Воспользоваться формулой $(\rho \cap \sigma) \subseteq \bar{\rho}$ и необходимым условием включения бинарных отношений; б) обратные включения в общем случае не справедливы.

5. **Указание.** а) Воспользоваться равносильностью предикатов $x \in np_1 \rho \wedge (x, y) \in \rho$ и $(x, y) \in \rho.$

6. **Решение.**

$$\bigsqcup_{x \in np_1 \rho} \{x\} \times \rho <x> = (\exists (x, y)) (\vee x') [x' \in np_1 \rho \wedge (x, y) \in \{x'\} \times \rho <x'>] = \\ = (\exists (x, y)) (\vee x') [x' \in np_1 \rho \wedge x = x' \wedge y \in \rho <x'>] = (\exists (x, y)) (\vee x') [x = x' \wedge (x \in np_1 \rho \wedge (x, y) \in \rho)] = (\exists (x, y)) [(\vee x') (x' = x) \wedge (x, y) \in \rho] = \\ = (\exists (x, y)) ((x, y) \in \rho) = \rho.$$

7. **Указание.** а) Воспользоваться формулой $(X_1 \cap X_2) \subseteq X_1$ и монотонностью среза бинарного отношения относительно включения подмножеств.

8. Решение. а) $\bigcup_{t \in I} \rho_t = (\exists y) (\forall x) [(x, y) \in \bigcup_{t \in I} \rho_t] =$
 $= (\exists y) (\forall x) (\forall t) [(x, y) \in \rho_t] = (\exists y) (\forall t) (\forall x) [(x, y) \in \rho_t] =$
 $= (\exists y) (\forall t) (y \in \bigcup_{t \in I} \rho_t) = \bigcup_{t \in I} \bigcup_{t \in I} \rho_t.$

9. Указание. б) Воспользоваться теоремой 4 № 5, монотонностью среза бинарного отношения относительно включения подмножеств и выражением второй проекции через срез; а) следует из б) в силу теоремы $\text{pr}_1 \tau =$
 $= \text{pr}_2 \tau$.

12. Указание. Для доказательства достаточно найти бинарные отношения, обладающие двумя из рассматриваемых свойств и не обладающие третьим.

15. Указание. • Воспользоваться правилом цепного заключения для предикатов и задачей 35 § 3.

21. Решение. Необходимость. Пусть $X_0 = e < x_0 >$. Тогда
 $1^{\circ} x_0 \in X_0$ и, следовательно, $X_0 \neq \emptyset$; $2^{\circ} X_0 \times X_0 = e < x_0 > \times e < x_0 > =$
 $= ((x, x')) (x \in e < x_0 > \wedge x' \in e < x_0 >) = ((x, x')) (x \equiv x_0 \wedge x' \equiv x_0) \subset$
 $\subset ((x, x')) (x \equiv x') = e$; $3^{\circ} e(X_0) = e (e < x_0 >) = (e \circ e) < x_0 > \subset e < x_0 >$.

Достаточность. Пусть для X_0 условия 1° , 2° и 3° выполняются. Тогда существует $x_0 \in X_0$. Покажем, что $X_0 = e < x_0 >$. Действительно, во-первых, $e < x_0 > \subset e(X_0) \subset X_0$ и, во-вторых, $X_0 \times X_0 \subset e \rightarrow$
 $\rightarrow [(X_0 \times X_0) < x_0 > \subset e < x_0 >] \rightarrow X_0 \subset e < x_0 >$.

25. Указание. См. указание к задаче 12.

§ 6

2. а) — полное взаимно-однозначное преобразование R на себя;
 б) — частичное не взаимно-однозначное преобразование R , его первая проекция есть отрезок $[-\sqrt{6}, +\sqrt{6}]$, вторая проекция — отрезок $[0, 3]$; в) — частичное взаимно-однозначное преобразование R на себя.

4. а) m^n ; б) $(m+1)^n$. Указание. Найти число частичных отображений M в N , первая проекция которых содержит n элементов, $(n-1)$ элементов, ..., 1 элемент, 0 элементов и просуммировать эти числа; в) 0, если $m < n$ и $C_m^n n!$, если $m \geq n$.

5. Доказательство необходимости. Пусть $\Phi = \Phi^2$ и $(x, x') \in \Phi$ (*). Тогда $(x, x') \in \Phi^2$. Следовательно, существует $x' \in M$ такой, что $(x, x') \in \Phi$ (***) и $(x', x') \in \Phi$ (***). Из отмеченных формул и взаимно-однозначности Φ следует: $x' = x' = x$.

6. Указание. Достаточность условия теоремы следует из того, что для неполного отображения $\Phi : \Phi(\emptyset) \neq [\Phi(\emptyset)]'$.

7. Доказательство достаточности а): (ρ — неоднозн.) \rightarrow

$\rightarrow (\forall x) (\forall y, y') [y \neq y' \wedge (x, y) \in \rho \wedge (x, y') \in \rho] \rightarrow (\forall x, y, y') (y \neq y' \wedge$
 $\wedge x \in \rho < y > \wedge x \in \rho < y' >) \rightarrow (\forall Y_1 = \{y\}, Y_2 = \{y'\}) [Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \wedge$
 $\wedge \rho(Y_1) \cap \rho(Y_2) \neq \emptyset] \rightarrow (\forall Y_1, Y_2) [\rho(Y_1 \cap Y_2) \neq \rho(Y_1) \cap \rho(Y_2)]$.

10. Отображения Φ и Ψ и их обращения Φ^{-1} и Ψ^{-1} попарно совместны.

15. Δ_M .

ПРИМЕЧАНИЯ

К стр. 53.* Символ квантора общности напоминает символ конъюнкции, только по размерам он должен быть больше последнего примерно в два раза.

К стр. 54.* Символ квантора существования напоминает символ дизъюнкции, только по размерам он должен быть больше последнего примерно в два раза.

К стр. 81.* Символы операций объединения и пересечения совокупности подмножеств и семейства подмножеств похожи на символы бинарных операций объединения и пересечения множеств соответственно, но они больше последних по размерам.

Литература

1. Бурбаки Н. Теория множеств. Изд. «Мир», 1965.
2. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики, ИЛ, 1947.
3. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
4. Гохман А. В., Спивак М. А. и др. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. Изд. СГУ, 1965.
5. Грежгорчик А. Популярная логика, Изд. «Наука», 1965.
6. Драбкина М. Е. Логические упражнения по элементарной математике. Изд. «Высшая шк.», Минск, 1965.
7. Калужинин Л. А. Что такое математическая логика? Изд. «Наука», 1964.
8. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. ИЛ, 1963.
9. Клини С. К. Введение в математику. ИЛ, 1961.
10. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, 1962.
11. Новиков П. С. Элементы математической логики. Физматгиз, 1959.
12. Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теория множеств. Изд. «Прогресс», 1965.
13. Столляр А. А. Элементарное введение в математическую логику. Изд. «Просвещение», 1965.
14. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. ИЛ, 1948.
15. Хаусдорф Ф. Теория множеств.ОНТИ, 1935.
16. Черч А. Введение в математическую логику. ИЛ, 1960.

О ГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Основные понятия теории множеств	
1. Множества. Равенство и включение множеств	5
2. Подмножество. Дополнение подмножества. Пересечение и объединение подмножеств	6
3. Упорядоченные системы элементов	8
4. Декартово произведение множеств	9
5. Арифметическое пространство n измерений	10
6. n -отношение	13
7. Функция	14
8. Отображение множества на множество. Взаимно-однозначное отображение	17
Упражнения	18
2. Алгебра высказываний	
1. Логические операции над высказываниями	20
2. Составные высказывания	24
3. Формулы и тавтологии	24
4. Некоторые основные тавтологии	27
5. Равносильные формулы	32
6. О методах математических доказательств	33
Упражнения	34
3. Логика предикатов	
1. Понятие предиката	39
2. Равносильные предикаты. Следствие предиката	41
3. Тождественно истинный, тождественно ложный и выполнимый предикаты	42
4. Множество истинности предиката. Классификатор	43
5. Предикаты и пропозиционные функции	45
6. Простейшие логические операции над предикатами	46
7. Логические операции квантификации	52
8. Высказывания как 0-местные предикаты	58
9. Формулы и тавтологии	59
10. Некоторые тавтологии с кванторами	61

11. Квантор существования и единственности	67
12. Применение логики предикатов в математических науках. Понятие о правилах вывода	68
Упражнения	71
4. Применение логики предикатов к алгебре подмножеств	
1. Равенство и включение подмножеств	76
2. Основные свойства операций дополнения, пересечения и объединения	77
3. Объединение и пересечение совокупности подмножеств и семейства подмножеств	80
Упражнения	85
5. Элементы теории бинарных отношений	
1. Простейшие понятия	88
2. Проекции бинарного отношения	91
3. Обратное бинарное отношение	94
4. Срез бинарного отношения	96
5. Умножение бинарных отношений	101
6. Рефлексивные, симметричные и транзитивные бинарные отношения	105
7. Отношения эквивалентности и разбиения множества. Ядро отображения	108
Упражнения	112
§ 6. Частичные отображения и частичные преобразования множеств	
1. Частичное отображение и частичное преобразование	116
2. Образ и прообраз подмножества. Полный прообраз элемента	119
3. Частичное-взаимно-однозначное отображение и частичное взаимно-однозначное преобразование	122
4. Произведение частичных отображений и частичных преобразований	125
5. Частичные преобразования в R^n	129
Дополнение	130
Упражнения	132
Ответы и решения	136
Примечания	141
Литература	141