В. П. ПЕТРЕНКО

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
„ВИЩА ШКОЛА"
1978

517.2
П30

УДК 517.5

Рост мероморфных функций. Петренко В. П. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1978, 136 с.

В монографии рассмотрены основные элементы теории роста мероморфных функций, связь между теорией роста и классической теорией распределения значений, изложены приложения теории роста мероморфных функций к аналитической теории дифференциальных уравнений. Предназначена для специалистов-математиков. Ил. 6. Список лит. 56 назв.

Редакция естественнонаучной литературы
И. о. зав. редакцией *Н. Н. Сорокун*

П $\frac{20203-645}{М226(04)-78}$ БЗ—10—6—78

ВВЕДЕНИЕ

1. Распределение значений мероморфных функций

Мероморфные функции являются наиболее употребительными в математическом анализе, в частности в аналитической теории дифференциальных уравнений. Впервые теория распределения значений мероморфных функций была построена в 20-х годах нашего столетия в трудах известного финского математика Рольфа Неванлинны [21; 50], который так сформулировал ее основную задачу: «Учение о распределении значений однозначных аналитических функций занимается изучением систем $\{z_a\}$ точек области G_z, в которых функция $w(z)$ принимает заданное значение $w = a$; при этом рассматриваются всевозможные значения a» [21, с. 7]. Рассмотренные в книге вопросы примыкают к теории распределения значений мероморфных функций во всей открытой плоскости z. Исключение составляют лишь § 4 и 5 гл. III, в которых исследуется рост мероморфных функций в круге $K(0; 1) = \{z : |z| < 1\}$.

Для заданного значения a количественная характеристика систем $\{z_a\}$ a-точек мероморфной функции $f(z)$ определяется так:

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)] \frac{dt}{t} + n(0, a, f) \ln r,$$

где $n(t, a, f)$ означает число a-точек с учетом их кратностей, попавших в круг $\overline{K(0; t)} = \{z : |z| \leqslant t\}$, а $n(0, a, f)$ означает кратность a-точки при $z = 0$. Кроме этой характеристики в неванлинновской теории распределения значений используется характеристика среднего приближения функции $f(z)$ к числу a:

$$m(r, a, f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \text{ если } a \neq \infty; \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|, d\Theta, \text{ если } a = \infty. \end{cases}$$

По первой основной теореме Р. Неванлинны сумма $m(r, a, f) + N(r, a, f)$ с точностью до ограниченного при $r \to \infty$ слагаемого сохраняет постоянное для различных a значение $T(r, f)$ [21, с. 169]. В этом смысле все значения a для мероморфной функции $f(z)$ являются равноправными. Для каждой мероморфной функции $T(r, f) \to \infty$ при $r \to \infty$. Эта функция называется характеристикой мероморфной функции $f(z)$. Ясно, что представляют интерес лишь вопросы, связанные с изучением роста одной из характеристик в инвариантной сумме $m(r, a, f) + N(r, a, f)$. Такое

исследование раскрывает внутренние свойства мероморфных функций, характеризуя их распределение значений и асимптотическое среднее приближение к различным комплексным числам. Из второй основной теоремы Р. Неванлинны следует, что для подавляющего большинства значений a основную роль при $r \to \infty$ играет функция $N(r, a, f)$. Действительно, по этой теореме для произвольных q $(q \geqslant 3)$ различных комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_q$ для функции $f(z)$

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu, f) \leqslant 2T(r, f) + S(r, f), \tag{1.1}$$

где $S(r, f)$ при $r \to \infty$ играет роль остаточного члена, т. е. растет существенно слабее функции $T(r, f)$. В силу первой основной теоремы Р. Неванлинны оценку (1.1) можно переписать так:

$$(q-2)\,T(r, f) \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu, f) + S(r, f).$$

Другими словами, для каждых q $(q \geqslant 3)$ различных значений $\{a_\nu\}_{\nu=1}^{q}$ сумма $\sum_{\nu=1}^{q} N(r, a_\nu, f)$ имеет рост порядка роста $(q-2)\,T(r, f)$. Неванлинновская теория распределения значений использует следующие количественные характеристики роста величин $N(r, a, f)$ и $m(r, a, f)$ по сравнению с ростом характеристики $T(r, f)$.

Число $\delta(a, f) = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$ называется дефектом мероморфной функции $f(z)$ в точке a в смысле Р. Неванлинны, а число

$$\Delta(a, f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \lim_{r\to\infty} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$$

— дефектом мероморфной функции $f(z)$ в точке a в смысле Ж. Валирона. Из соотношения (1.1) следует соотношение дефектов Р. Неванлинны: для каждой мероморфной функции $f(z)$ множество $D(f) = \{a : \delta(a, f) > 0\}$ не более чем счетно и

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2. \tag{1.2}$$

Если для некоторого числа a $\delta(a, f) > 0$, то это означает, что для такого значения a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} = 1 - \delta(a, f) < 1,$$

т. е. функция $f(z)$ асимптотически мало принимает данное значение a. Отсюда следует смысл названия «дефект мероморфной функции в точке a». Если для некоторого числа a $\delta(a, f) > 0$,

то функция $f(z)$ в процессе своего изменения при $z \to \infty$ принимает данное значение a существенно реже по сравнению с другими значениями a, для которых $\delta(a, f) = 0$ и которые составляют подавляющее множество комплексных чисел. Для дефектов мероморфных функций в смысле Ж. Валирона имеют место существенно более слабые результаты. Это объясняется в первую очередь известной теоремой Ж. Валирона: множество $V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\}$ может иметь мощность континуума. Однако множество $V(f)$ для произвольной мероморфной функции $f(z)$ является исключительным. Л. Альфорс [40] и Р. Неванлинна [21] установили, что данное множество всегда имеет нулевую логарифмическую емкость. Элементы описанной выше теории распределения значений Р. Неванлинны для мероморфных функций изложены в гл. I.

2. Рост мероморфных функций

Возникает вопрос, насколько точно учитывает характер приближения функции $f(z)$ к числу a величина $m(r, a, f)$, другими словами, можно ли указать способ изучения приближения мероморфной функции $f(z)$ к числу a, который бы более точно учитывал характер приближения $f(z)$ к числу a. Функция $m(r, a, f)$ есть норма

$$\left\| \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} \right\|$$

в метрике $L^1_{[0, 2\pi]}$. Положим для произвольной мероморфной функции $f(z)$

$$L(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln^+ \dfrac{1}{|f(z) - a|}, & \text{если } a \neq \infty, \\ \max\limits_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|, & \text{если } a = \infty. \end{cases}$$

Ясно, что функция $L(r, a, f)$ характеризует скорость приближения $f(z)$ к числу a в более сильной метрике, чем $L^1_{[0, 2\pi]}$. Уместно привести такой пример. Пусть $E_0(z)$ — целая функция [см. соотношения (3.1.12), (3.1.13)]. Она остается ограниченной при $z \to \infty$ и $z \notin A_0 = \{z : z = x + iy,\ x > 0,\ |y| < \pi\}$. Отсюда следует, что

$$m(r, \infty, E_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |E_0(re^{i\theta})| \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta(r)}^{\theta(r)} \ln^+ |E_0(re^{i\theta})| \, d\theta + C \leqslant \frac{1}{\pi} L(r, \infty, E_0)\, \theta(r) + C,$$

где при $r \geqslant \pi$ $\theta(r) = \arcsin(\pi/r)$. Другими словами, при $r \to \infty$ $m(r, \infty, E_0) = o(L(r, \infty, E_0))$.

Используя этот пример, легко строить примеры мероморфных функций, для которых при некотором значении a и $r \to \infty$ $m(r, a, f) = o(L(r, a, f))$.

Таким образом, функция $L(r, a, f)$ учитывает более тонкие асимптотические свойства мероморфных функций, чем функция $m(r, a, f)$. По аналогии с классическим случаем мы определяем следующую количественную характеристику приближения мероморфной функции $f(z)$ к числу a. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция и a — любое комплексное число. Положим

$$\beta(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величину $\beta(a, f)$ мы называем величиной отклонения функции $f(z)$ относительно числа a, а множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ — множеством положительных отклонений $f(z)$. Если для некоторого значения a функция $L(r, a, f)$ при $r \to \infty$ растет быстрее функции $m(r, a, f)$, то на всей окружности $\{z : |z| = r\}$ или на некоторой ее части функция $f(z)$ не должна равномерно относительно $\arg z$ приближаться к значению a. В этом смысле величина $\beta(a, f)$ характеризует отклонение функции $f(z)$ относительно числа a. При изучении свойств величин положительных отклонений и структуры множества $\Omega(f)$ для произвольной мероморфной при $z \neq \infty$ функции (гл. II, III) получены результаты, которые можно условно разбить на две группы. С одной стороны, величины $\beta(a, f)$ обладают многими свойствами, аналогичными свойствам дефектов Р. Неванлинны и дефектов Ж. Валирона. Особенно ясно выражаются эти свойства величин $\beta(a, f)$ для мероморфных функций конечного нижнего порядка λ. С другой стороны, величины положительных отклонений обладают своими специальными свойствами, отличными от свойств неванлинновских и валироновских дефектов. Эти отличительные свойства величин $\beta(a, f)$ ясно выражаются для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. Для мероморфных функций конечного нижнего порядка множество $\Omega(f)$ $(D(f) \subseteq \Omega(f))$ не более чем счетно и всегда сходится ряд

$$\sum_{(a)} \beta(a, f) \leqslant C(\lambda). \tag{2.1}$$

Оценка (2.1) представляет собой аналог оценки (1.2) для неванлинновских дефектов. Из первой основной теоремы Р. Неванлинны сразу следует, что для каждого числа a $\delta(a, f) \leqslant 1$. Это точная оценка для $\delta(a, f)$. Нахождение же точной оценки для $\beta(a, f)$ потребовало создания нового метода исследования роста мероморфных функций.

Пусть λ — конечный нижний порядок мероморфной функции $f(z)$, тогда для каждого комплексного числа a

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, \text{ если } \lambda \geqslant 0{,}5, \text{ либо если} \\ \quad 0 < \lambda < 0{,}5, \text{ но } \sin\frac{\pi\lambda}{2} \geqslant \sqrt{0{,}5\Delta}; \\ \pi\lambda\left[\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{2}\right], \text{ если } 0 < \lambda < 0{,}5 \text{ и} \\ \quad \sin\frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{0{,}5\Delta}; \ \Delta, \text{ если } \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\Delta = \Delta(a, f)$ означает дефект в смысле Ж. Валирона $f(z)$ в точке a.

На оценке (2.2) следует остановиться подробнее. В 1932 г. Пейли [51] высказал следующую гипотезу:

Если $g(z)$ — целая функция порядка $\rho > 0{,}5$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(r, \infty, g)}{T(r, g)} \leqslant \pi\rho. \tag{2.3}$$

Эта гипотеза была доказана лишь через 35 лет Н. В. Говоровым [5]. Н. В. Говоров использовал разработанные им методы, применяемые в решении краевой задачи Римана с бесконечным индексом. Позднее нами [23] было установлено, что для каждой мероморфной функции конечного нижнего порядка λ и любого числа a

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}, \text{ если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5; & (2.4) \\ \pi\lambda, \text{ если } \lambda > 0{,}5. & (2.5) \end{cases}$$

Оценка (2.4) следует из одного результата работы А. А. Гольдберга и И. В. Островского [10, теорема 2.3; см. также 22; 24]. Для доказательства оценки (2.5) использовано специальное представление для $\ln|f(z)|$ [23] в секторе через среднее значение этой функции на дугах окружностей, содержащихся в этом секторе, и через функции Грина для сектора от нулей и полюсов $f(z)$. Найденный нами метод давал возможность получать оценку для $\beta(a, f)$ через некоторую функцию $b(x, \lambda, \Delta(a, f))$, зависящую при фиксированных a и λ от переменного x $(x \geqslant 0{,}5)$. Для фиксированных Δ и λ Д. Шиа нашел $\min\limits_{x\geqslant 0{,}5} b(x, \lambda, \Delta$ [46], который совпадает с правой частью оценки (2.2). Несколько раньше Т. Б. Ламзина получила менее точную оценку сверху для $\beta(a, f)$, зависящую от λ и $\Delta(a, f)$ [16]. Следует отметить, что из результатов А. А. Гольдберга и И. В. Островского [10; 22] следует [24], что для каждой мероморфной функции $f(z)$ нижнего порядка λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5)$ $\beta(a, f) \leqslant \pi\lambda\{\Delta(a, f)\operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg}0{,}5\pi\lambda\}$. Эта оценка в соответствующем случае совпадает с оценкой (2.2).

Для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка множество $\Omega(f)$ может иметь мощность континуума, а множество $D(f)$ всегда не более чем счетно. Несмотря на это, множество $\Omega(f)$, подобно множеству $V(f)$, является исключительным в том смысле, что оно всегда имеет нулевую логарифмическую емкость. В 1975 г. А. Ф. Гришин показал [12], что для каждого λ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$ существует мероморфная функция $f_\lambda(z)$ нижнего порядка λ, для которой $\beta(\infty, f_\lambda) \geqslant 1$, а $\delta(\infty, f_\lambda) = 0$. Возникает вопрос о том, существует ли мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, для которой множество $\Omega(f)$ является счетным, а $D(f)$ — пустым множеством.

Под теорией роста мероморфных функций мы понимаем далее исследование асимптотических свойств мероморфных функций с использованием более сильных метрик, чем метрика $L^1_{[0,\,2\pi]}$, причем такое исследование понимается как независимое от классического случая, так и в связи с ним. В этой связи следует упомянуть также работы И. П. Проскурни [32] и А. Ф. Гришина [12], в которых выясняется характер роста величин

$$\left\| \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} \right\|_{L^p_{[0,\,2\pi]}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^{+p} \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

При рассмотрении некоторых приложений теории роста мероморфных функций к исследованию асимптотических свойств мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (гл. IV) установлено, что если мероморфная функция является решением некоторых общих классов обыкновенных дифференциальных уравнений, то она растет подобно экспоненциальной функции, т. е. не может приближаться с большой скоростью ко многим комплексным числам.

Рост функций, мероморфных в круге $K(0, 1)$, исследован в гл. III. Если $f(z)$ — мероморфная при $|z| < 1$ функция, ее характеристика роста $T(r, f)$ и функция $L(r, a, f)$ для каждого r $(0 \leqslant r < 1)$ определяются так же, как и для мероморфных при $z \neq \infty$ функций. Величина отклонения $f(z)$ относительно числа a

$$\beta(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{L(r, a, f)}{T(r, f)},$$

а множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ называется множеством положительных отклонений функции $f(z)$. Для мероморфных при $|z| < 1$ функций множество $\Omega(f)$ подобно множеству $\Omega(f)$ для мероморфных при $z \neq \infty$ функций, которые имеют бесконечный нижний порядок, т. е. это множество может иметь мощность континуума независимо от скорости возрастания при $r \to 1$ функции $T(r, f)$. Исключительность множества $\Omega(f)$ доказана не в

общем случае, а для некоторых общих классов мероморфных при $|z| < 1$ функций.

В приложении помещен сокращенный вариант нашей работы [30] о росте и распределении значений целых функций многих комплексных переменных, медленно растущих по определенной группе переменных. С точки зрения роста и распределения значений мероморфные функции оказываются весьма частным случаем таких классов целых функций многих переменных. Нам представляется, что эти новые постановки задач могут ввести читателя в область собственных исследований.

Приведем некоторые обозначения, использованные в тексте. Буквой K обозначены не обязательно равные между собой абсолютные положительные постоянные, а буквой C — положительные постоянные, зависящие от рассматриваемых функций. Иногда мы указываем, от каких величин зависят положительные постоянные C. Если имеются в виду различные постоянные K или C, мы снабжаем их индексами. Через $[x]$ обозначена целая часть числа x, а через x^+ — величина, равная $0{,}5\,(x + |x|)$.

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Напомним формулу Грина для конечносвязной области [36, с. 179]. Рассмотрим ограниченную конечносвязную область D, лежащую в ζ-плоскости, граница которой состоит из кусочно-гладких кривых Жордана. Пусть $u(\zeta) = u(x, y)$ и $v(\zeta) = v(x, y)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{D}$. Справедлива формула

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\, d\sigma = -\int\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds, \qquad (1.0.1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает оператор дифференцирования по внутренней нормали относительно области D к ее границе $\Gamma = \partial D$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $d\sigma$ — элемент площади; ds — элемент длины дуги кривой, а интегрирование вдоль Γ ведется в положительном направлении.

1. Формула Пуассона — Иенсена

Теорема 1.1.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. При любом R, $0 < R < \infty$ и z, $|z| < R$ имеет место формула*

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|\,\mathrm{Re}\,\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta +$$

$$+ \sum_{|b_k|\leqslant R} \ln\left|\frac{R^2 - z\bar{b}_k}{R(z-b_k)}\right| - \sum_{|a_k|\leqslant R} \ln\left|\frac{R^2 - z\bar{a}_k}{R(z-a_k)}\right|, \qquad (1.1.1)$$

где b_k — полюсы $f(z)$; a_k — ее корни, а суммирование проводится с учетом кратности нулей и полюсов $f(z)$. Выражение (1.1.1) называется формулой Пуассона — Иенсена для мероморфной функции $f(z)$ [21; 50; 37].

Доказательство. Пусть при $0 < R < \infty$ $K(0, R) = \{\zeta : |\zeta| < R\}$. Для фиксированного $z \in K(0, R)$ обозначим

$$G(\zeta, z) = \ln\left|\frac{R^2 - \zeta\bar{z}}{R(\zeta - z)}\right|$$

функцию Грина области $K(0, R)$ с полюсом в точке z. Известно* [11, с. 12], что при $\zeta = Re^{i\theta} \in \partial K(0,R) = L(R) = \{\zeta : |\zeta| = R\}$

$$\frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n} ds = \left(\operatorname{Re}\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right) d\theta = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta. \qquad (1.1.2)$$

Пусть $\{c_k\}_{k=1}^{\omega}$ $(\omega \leqslant \infty)$ означает объединенную последовательность нулей и полюсов $f(z)$ и $z \in K(0, R)$ — любое фиксированное число, не совпадающее ни с нулем, ни с полюсом $f(z)$. Выберем ε, $0 < \varepsilon < 1$, настолько малым, чтобы замкнутые кружки с центрами в точках $\{c_k\}$ и z с радиусами ε не пересекались. Обозначим эти кружки соответственно через $\overline{K(c_k, \varepsilon)}$ и $\overline{K(z, \varepsilon)}$, а их границы — через $\gamma(c_k, \varepsilon) = \partial\overline{K(c_k, \varepsilon)}$ и $\gamma(z, \varepsilon) = \partial\overline{K(z, \varepsilon)}$. Заметим, что если $|c_k| = R$, вместо $\gamma(c_k, \varepsilon)$ $(\overline{K(c_k, \varepsilon)})$ мы будем рассматривать $\gamma(c_k, \varepsilon) \cap \overline{K(0, R)}$ $(\overline{K(c_k, \varepsilon)} \cap \overline{K(0, R)})$, не меняя при этом обозначений. Пусть

$$D(R, \varepsilon) = K(0, R) \setminus \left\{\bigcup_{k=1}^{\omega} \overline{K(c_k, \varepsilon)} \cup \overline{K(z, \varepsilon)}\right\},$$

а $\Gamma(R, \varepsilon) = \partial D(R, \varepsilon)$ — граница области $D(R, \varepsilon)$, обходимая в положительном направлении. Применим формулу (1.0.1) к области $D(R, \varepsilon)$ с $u(\zeta) = \ln|f(\zeta)|$ и $v(\zeta) = G(\zeta, z)$. Из построения $D(R, \varepsilon)$ видно, что в $D(R, \varepsilon)$ функции $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$ гармонические, следовательно, в этой области $\Delta u = \Delta v \equiv 0$. Учитывая это замечание и соотношение (1.1.2), приводим выражение (1.0.1) к виду

$$\left(\text{при } \zeta = Re^{i\theta},\ \frac{d\zeta}{\zeta} = i d\theta\right)$$

---

* При $\zeta = Re^{i\theta}$ $(d\zeta = iRe^{i\theta}d\theta)$ и $z \in K(0, R)$, с одной стороны,

$$d \ln \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}} = \left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right) d\zeta = i\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta,$$

с другой стороны [15, с. 23],

$$d \ln \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial s} \ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right| + i\frac{\partial}{\partial s} \arg \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right) ds =$$

$$= i\left(\frac{\partial}{\partial s} \arg \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right) ds = -i\frac{\partial}{\partial n} \ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \zeta\bar{z}}\right| ds = i\frac{\partial G(\zeta, z)}{dn} ds.$$

$$0 = \operatorname{Re} \int\limits_{\Gamma(R,\,\varepsilon)\cap L(R)} \ln|f(\zeta)| \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{i\zeta} + \sum\limits_{|c_k|\leqslant R} \int\limits_{\gamma(c_k,\,\varepsilon)} \ln|f(\zeta)| \frac{\partial G(\zeta,\,z)}{dn} ds +$$

$$+ \int\limits_{\gamma(z,\,\varepsilon)} \ln|f(\zeta)| \frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial n} ds -$$

$$- \sum\limits_{|c_k|\leqslant R} \int\limits_{\gamma(c_k,\,\varepsilon)} G(\zeta,\,z) \frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial n} ds - \int\limits_{\gamma(z,\,\varepsilon)} G(\zeta,\,z) \frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial n} ds. \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Пусть p_k равно кратности корня $f(z)$ в точке c_k и кратности, взятой со знаком минус, если точка c_k — полюс функции $f(z)$. Простые вычисления дают ($\zeta = c_k + \varepsilon e^{i\theta}$)

$$\frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial n} = \frac{\partial \ln\left|f\left(c_k + \varepsilon e^{i\theta}\right)\right|}{\partial \varepsilon} = \frac{p_k}{\varepsilon} + A_k(\zeta);$$

$$\frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial n} = -\frac{\partial \ln\left|z - c_k - \varepsilon e^{i\theta}\right|}{\partial \varepsilon} + B_k(\zeta,\,z), \quad \textbf{(1.1.4)}$$

где функции $A_k(\zeta)$ и $B_k(\zeta,\,z)$ ограничены при $\zeta \to c_k$ (у нас z фиксированное и $z \neq c_k$). Пусть

$$|A_k(\zeta)| \leqslant C(k) < \infty; \quad |B_k(\zeta,\,z)| \leqslant C(k,\,z) < \infty. \quad \textbf{(1.1.5)}$$

Если же $\zeta = z + \varepsilon e^{i\theta}$, то аналогично

$$\frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial n} = \frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} + B(\zeta,\,z), \quad \textbf{(1.1.6)}$$

где $B(\zeta,\,z)$ — ограниченная при $\zeta \to z$ функция. Из определения $G(\zeta,\,z)$ и из соотношений (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6) легко находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(c_k,\,\varepsilon)} G(\zeta,\,z) \frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial n} ds = p_k 2\pi G(c_k,\,z); \quad \textbf{(1.1.7)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(z,\,\varepsilon)} G(\zeta,\,z) \frac{\partial \ln|f(\zeta)|}{\partial n} ds = 0; \quad \textbf{(1.1.8)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(c_k,\,\varepsilon)} \ln|f(\zeta)| \frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial n} ds = 0; \quad \textbf{(1.1.9)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(z,\,\varepsilon)} \ln|f(\zeta)| \frac{\partial G(\zeta,\,z)}{\partial n} ds = -2\pi \ln|f(z)|. \quad \textbf{(1.1.10)}$$

Формула Пуассона — Иенсена легко следует из соотношений* (1.1.3), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.9), (1.1.10).

---

* Если z совпадает с нулем либо с полюсом $f(z)$, формула (1.1.1) превращается в тривиальное равенство.

Замечание. Выберем некоторую окрестность точки $z_0 \in K(0, R)$, которая не содержит корней и полюсов функции $f(z)$. В такой окрестности выберем однозначную ветвь* $\ln f(z)$ и обозначим ее через $\ln_0 f(z)$. Ясно, что

$$\ln_0 f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\, d\theta +$$

$$+ \sum_{|b_k|<R} \ln \frac{R^2 - z\bar{b}_k}{R(z-b_k)} - \sum_{|a_k|<R} \ln \frac{R^2 - z\bar{a}_k}{R(z-a_k)} + iC_0, \qquad (1.1.11)$$

где C_0 — действительное число. Построим полную аналитическую функцию в области $K(0, R)$ $\ln f(z)$, осуществляя всевозможные аналитические продолжения $\ln_0 f(z)$ вдоль кривых, не проходящих через нули и полюсы $f(z)$ [18, с. 476; 38, с. 137]. Учитывая свойство единственности для полных аналитических функций, мы можем теперь рассматривать выражение справа в равенстве (1.1.11) при всех $z \in K(0, R) \setminus \bigcup_{k=1}^{\omega} \{c_k\}$ как значения полной аналитической функции $\ln f(z)$. Производная от полной аналитической функции $\ln f(z)$ является однозначной мероморфной функцией, которую легко найти из выражения (1.1.11). Таким образом, мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 1.1.2. *Если $f(z)$ — мероморфная функция, то при $z \in K(0, R)$ справедлива формула*

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})| \frac{2Rze^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}\, d\theta +$$

$$+ \sum_{|a_k|<R} \frac{z}{z-a_k} - \sum_{|b_k|<R} \frac{z}{z-b_k} +$$

$$+ \sum_{|a_k|<R} \frac{z\bar{a}_k}{R^2 - z\bar{a}_k} - \sum_{|b_k|<R} \frac{z\bar{b}_k}{R^2 - z\bar{b}_k}. \qquad (1.1.12)$$

Равенство (1.1.12) называется формулой для логарифмической производной мероморфной функции $f(z)$.

---

* Справа в равенстве (1.1.11) выбираются однозначные ветви для $\ln \frac{R^2 - z\bar{c}_k}{R(z-c_k)}$ в упомянутой окрестности точки z_0.

2. Первая основная теорема и основные характеристики распределения значений мероморфных функций

Положим

$$\alpha(f) = \lim_{z\to 0} \ln\left|\frac{f(z)}{z^{p_0}}\right|, \tag{1.2.1}$$

где p_0 равно кратности корня $f(z)$ в нуле либо кратности полюса функции $f(z)$ в нуле, взятой со знаком минус. Если же $f(0) \neq 0, \infty$, полагаем

$$\alpha(f) = \lim_{z\to 0} \ln|f(z)|. \tag{1.2.2}$$

Применим формулу Пуассона — Иенсена к мероморфной функции $\Phi(z) = \frac{f(z)}{z^{p_0}}$ и перейдем к пределу при $z \to 0$. Простые вычисления приводят нас к равенству

$$\alpha(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})|\,d\theta - p_0 \ln R + \\ + \sum_{0<|b_k|<R} \ln\frac{R}{|b_k|} - \sum_{0<|a_k|<R} \ln\frac{R}{|a_k|}, \tag{1.2.3}$$

где b_k — полюсы $f(z)$, а a_k — ее корни, при этом суммирование проводится с учетом кратностей корней и полюсов. Соотношение (1.2.3) называется формулой Иенсена для мероморфной функции $f(z)$. Если a — произвольное конечное комплексное число, то, применяя формулу (1.2.3) к функции $f(z) - a$, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 1.2.1. *Если $f(z)$ — мероморфная функция, то для любого a ($|a| < \infty$ и $R > 0$ имеет место соотношение*

$$\alpha(a, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta}) - a|\,d\theta - p_0(a) \ln R + \\ + \sum_{0<|b_k|<R} \ln\frac{R}{|b_k|} - \sum_{0<|a_k|<R} \ln\frac{R}{|a_k(a)|}, \tag{1.2.4}$$

где $\{a_k(a)\}_{k=1}^{\omega}$ — a-точки $f(z)$, b_k — ее полюсы, а $\alpha(a, f)$ определяется соотношением (1.2.1) *или* (1.2.2) *с заменой $f(z)$ на $f(z) - a$.*

Обозначим через $n(t, a, f)$ число a-точек функции $f(z)$ (с учетом их кратностей), которые попали в круг $\overline{K(0, t)} = \{z : |z| \leqslant t\}$, а через $n(0, a, f)$ — кратность a-точки $f(z)$ при $z = 0$.

Функцией числа a-точек $f(z)$ называется

$$N(r, a, f) = \int_0^r [n(t, a, f) - n(0, a, f)]\frac{dt}{t} + n(0, a, f) \ln r. \tag{1.2.5}$$

При $a=\infty$ формула (1.2.5) определяет считающую функцию $N(r, \infty, f)$ полюсов $f(z)$.

Функцией приближения $f(z)$ к числу a называется

$$m(r, a, f)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta, & \text{если } a\neq\infty;\\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta, & \text{если } a=\infty,\end{cases}$$

где для $x\geqslant 0$ обозначено $\ln^+x=\max(\ln x, 0)$. Заметим, что для каждых m неотрицательных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$, определенных на промежутке $[a, b]$, имеют место такие элементарные соотношения:

$$\ln^+\sum_{k=1}^m\varphi_k(x)\leqslant\sum_{k=1}^m\ln^+\varphi_k(x)+\ln m;$$

$$\ln^+\prod_{k=1}^m\varphi_k(x)\leqslant\sum_{k=1}^m\ln^+\varphi_k(x).$$

Первая основная теорема Р. Неванлинны. *Для любой мероморфной функции $f(z)$ и произвольного комплексного числа a справедливо соотношение* $m(r, a, f)+N(r, a, f)=m(r, \infty, f)+N(r, \infty, f)-\alpha(a, f)+\sigma(a, r)$, **(1.2.6)** *где* $|\sigma(a, r)|\leqslant\ln^+|a|+\ln 2$.

Доказательство. Мы находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})-a|d\theta=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(Re^{i\theta})-a|}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(Re^{i\theta})-a|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(Re^{i\theta})-a|d\theta-m(R, a, f). \quad (1.2.7)$$

Кроме этого, $\ln^+|f(Re^{i\theta})|\leqslant\ln^+|f(Re^{i\theta})-a|+\ln^+|a|+\ln 2$ и $\ln^+|f(Re^{i\theta})-a|\leqslant\ln^+|f(Re^{i\theta})|+\ln^+|a|+\ln 2$, значит,

$$\ln^+|f(Re^{i\theta})-a|=\ln^+|f(Re^{i\theta})|+\sigma(R, a, \theta), \quad (1.2.8)$$

где $|\sigma(R, a, \theta)|\leqslant\ln^+|a|+\ln 2$.

Наконец, учитывая свойства интеграла Стильтьеса [36, с. 97], получаем

$$\sum_{0<|a_k|<R}\ln\frac{R}{|a_k|}=\int\limits_0^R\ln\frac{R}{t}d[n(t, a, f)-n(0, a, f)]=$$

$$= [n(t, a, f) - n(0, a, f)] \ln \frac{R}{t} \Big|_0^R + \int_0^R [n(t, a, f) -$$

$$- n(0, a, f)] \frac{dt}{t}. \qquad (1.2.9)$$

Равенство (1.2.6) является простым следствием соотношений (1.2.4), (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9).

Первая основная теорема Р. Неванлинны показывает, что для каждого a $m(r, a, f) + N(r, a, f)$ с точностью до ограниченного слагаемого совпадает с величиной $m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$. В этом смысле выражение (1.2.6) иногда называют соотношением равновесия для мероморфных функций. Величина $T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f)$ называется характеристической функцией мероморфной функции $f(z)$, или характеристикой Р. Неванлинны для $f(z)$.

3. Свойства характеристической функции $T(r, f)$

Напомним, что мероморфная функция $f(z)$ называется трансцендентной, если она не является рациональной.

Теорема 1.3.1. *Если $f(z)$ — трансцендентная мероморфная функция, то*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\ln r} = \infty. \qquad (1.3.1)$$

Доказательство. Предположим, что $f(z)$ имеет либо бесконечное число нулей, либо бесконечное число полюсов. Пусть, например, у $f(z)$ бесконечное число нулей, тогда при $r \geqslant 1$

$$N(r, 0, f) = \int_0^r [n(t, 0, f) - n(0, 0, f)] \frac{dt}{t} + n(0, 0, f) \ln r \geqslant$$

$$\geqslant \int_1^r n(t, 0, f) \frac{dt}{t} \geqslant \int_{r_0}^r n(t, 0, f) \frac{dt}{t} \geqslant n(r_0, 0, f) \ln \frac{r}{r_0}. \qquad (1.3.2)$$

Поэтому в силу первой основной теоремы Р. Неванлинны и оценки (1.3.2) при $r > 1$ $T(r, f) \geqslant N(r, 0, f) - \ln 2 + \alpha(0, f) \geqslant$ $\geqslant n(r_0, 0, f) \ln \frac{r}{r_0} - \ln 2 + \alpha(0, f)$, т. е.

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\ln r} \geqslant n(r_0, 0, f). \qquad (1.3.3)$$

Из неравенства (1.3.3) следует соотношение (1.3.1), потому что при $r_0 \to \infty$ $n(r_0, 0, f) \to \infty$. Пусть теперь у $f(z)$ конечное число нулей и полюсов. Покажем, что и в этом случае выполняется

равенство (1.3.1). Действительно, если $\varliminf\limits_{R\to\infty}\frac{T(R,f)}{\ln R}=C(f)<\infty$, значит $\varliminf\limits_{R\to\infty}\frac{T(R,f)}{R}=0$.

Выберем в соотношении (1.1.12) $R\in\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$, где последовательность $\{R_k\}$, $R_k\nearrow\infty$, выбрана так, что

$$\lim_{R_k\to\infty}\frac{T(R_k,f)}{R_k}=0. \tag{1.3.4}$$

Будем считать, что в формуле (1.1.12) $|z|\leqslant 0{,}5R_k$. Простые вычисления дают

$$\frac{|2Re^{i\theta}|}{|Re^{i\theta}-z|^2}\leqslant\frac{2R}{(R-r)^2}\leqslant\frac{8}{R};\quad \left|\frac{\bar b_k}{R^2-zb_k}\right|\leqslant\frac{R}{R^2-rR}\leqslant\frac{8}{R}. \tag{1.3.5}$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}d\theta\right|\leqslant\frac{8}{R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(Re^{i\theta})||d\theta=$$

$$=\frac{8}{R}[m(R,0,f)+m(R,f)]\leqslant 16R^{-1}[T(R,f)+C(f)]. \tag{1.3.6}$$

Перейдем к пределу в равенстве (1.1.12) при $R=R_k\nearrow\infty$. В силу соотношений (1.3.4), (1.3.5), (1.3.6) имеем для каждого z

$$\frac{f'(z)}{f(z)}\sum_{|a_k|\leqslant R_0}\frac{1}{z-a_k}-\sum_{|b_k|\leqslant R_0}\frac{1}{z-b_k}, \tag{1.3.7}$$

где R_0 выбрано таким, чтобы круг $K(0,R_0)$ содержал все нули и полюсы $f(z)$. Если $f(0)\neq 0,\ \infty$, проинтегрируем равенство (1.3.7) вдоль непрерывной спрямляемой кривой L, соединяющей точку O и z и не проходящей через нули и полюсы $f(z)$. Находим

$$f(z)=C\prod_{|a_k|\leqslant R_0}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\prod_{|b_k|\leqslant R_0}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1},$$

т. е. $f(z)$ — рациональная. Если же $f(0)=0$ либо ∞, то аналогично функция $f(z)z^{-p}$ является рациональной (p совпадает с кратностью корня $f(0)$ либо p равно кратности полюса $f(z)$ в нуле, взятому с обратным знаком). Таким образом, во всех случаях $f(z)$ — рациональная функция. Тем самым теорема (1.3.1) доказана полностью. Всюду далее, если не будет оговорено противное, мы интересуемся свойствами лишь трансцендентных мероморфных функций. Следующее утверждение принадлежит А. Картану [41].

Теорема 1.3.2. *Если для мероморфной функции* $f(z)$, $f(0) \neq \neq \infty$, *то*

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + \ln^+ |f(0)|. \qquad (1.3.8)$$

Если же $f(z)$ *имеет при* $z = 0$ *полюс кратности* p, *то*

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, f)\, d\theta + \alpha(f), \qquad (1.3.9)$$

где [*см. равенство* (1.2.3)] $\alpha(f) = \lim\limits_{z\to 0} \ln |z^p f(z)|$.

Доказательство. Докажем сначала соотношение (1.3.8). Применим формулу (1.2.3) к функции $f(z) = z - a$ с $R = 1$ и $a \neq 0$. Имеем ($\ln |f(0)| = \ln |a|$)

$$\ln |a| = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - a|\, d\theta, \text{ если } |a| \geqslant 1, \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - a|\, d\theta - \ln \frac{1}{|a|}, \text{ если } |a| < 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - a|\, d\theta = \ln^+ |a|. \qquad (1.3.10)$$

Соотношение (1.3.10) справедливо и при $a = 0$. Положим в формуле (1.2.4) $a = e^{i\varphi}$ и $R = r$. Находим

$$\alpha(e^{i\varphi}, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) - e^{i\varphi}|\, d\theta + N(r, \infty, f) - N(r, e^{i\varphi}, f), \qquad (1.3.11)$$

где $\alpha(e^{i\varphi}, f) = \begin{cases} \ln |f(0) - e^{i\varphi}|, \text{ если } f(0) \neq e^{i\varphi}; \\ \lim\limits_{z\to 0} \ln \left| \frac{f(z - e^{i\varphi}}{z^p} \right|, \text{ если } f(z) - e^{i\varphi} \text{ имеет при } z = \\ = 0 \text{ корень кратности } p. \end{cases}$

Ясно, что [см. равенство (1.3.10)]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(e^{i\varphi}, f)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(0) - e^{i\varphi}|\, d\varphi = \ln^+ |f(0)|. \qquad (1.3.12)$$

Проинтегрируем соотношение (1.3.11) по φ от 0 до 2π и изменим порядок интегрирования. Учитывая соотношения (1.3.10) и (1.3.12), находим

$$\ln^+ |f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta + N(r, \infty, f) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\varphi}, f)\,d\varphi = T(r, f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\varphi}, f)\,d\varphi.$$

Тем самым доказана формула (1.3.8).

Пусть теперь $f(z)$ имеет при $z=0$ полюс кратности p, тогда равенство (1.3.8), примененное к функции $f^{-1}(z)$, дает

$$T(r, f^{-1}) = m(r, 0, f) + N(r, 0, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\varphi}, f)\,d\varphi.$$

Для получения выражения (1.3.9) достаточно заметить соотношение $\alpha(f) + m(r, 0, f) + N(r, 0, f) = T(r, f)$, которое непосредственно вытекает из формулы (1.2.3). Теорема 1.3.2 доказана полностью.

Следствие. *Для произвольной мероморфной функции $f(z)$ характеристическая функция $T(r, f)$ является непрерывной неубывающей функцией, при этом**

$$r\frac{dT(r, f)}{dr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta}, f)\,d\theta.$$

Определение. *Число*

$$\rho = \rho(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

называется порядком роста мероморфной функции $f(z)$, а число

$$\lambda = \lambda(f) = \underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r, f)}{\ln r}$$

— нижним порядком роста мероморфной функции $f(z)$.

Лемма 1.3.1. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то для любого $p>1$ существует последовательность $R_k = R_k(p) \nearrow \infty$, для которой при $R_n \geqslant R_0$ $T(pR_n, f) \leqslant p^{\lambda+1}T(R_n, f)$.* **(1.3.13)**

Доказательство. Пусть для некоторого $p>1$ оценка (1.3.13) не имеет места, т. е. при

$$R \geqslant R_0 \quad T(pR, f) > p^{\lambda+1}T(R, f). \qquad \textbf{(1.3.14)}$$

Положим в неравенстве (1.3.14) $R_n = R_0 p^n$. Находим

$$T(R_n, f) = T(p^n R_0, f) \geqslant p^{\lambda+1}T(p^{n-1}R_0, f) \geqslant p^{2(\lambda+1)}T(p^{n-2}R_0, f) \geqslant$$
$$\geqslant \ldots \geqslant p^{n(\lambda-1)}T(R_0, f) = R_n^{\lambda+1}R_0^{-(\lambda+1)}T(R_0, f) = R_n^{\lambda+1}C(f). \qquad \textbf{(1.3.15)}$$

---

* Равенство имеет место во всех точках r, в которых функция $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r, e^{i\theta}, f)\,d\theta$ непрерывная.

Пусть теперь r — любое ($r > R_0$), тогда найдется $n = n(r)$ такое, что $R_n \leqslant r < R_{n+1}$. Из формулы (1.3.15) получаем

$$T(r, f) \geqslant T(R_n, f) \geqslant R_n^{\lambda+1} C(f) =$$
$$= p^{-(\lambda+1)} R_{n+1}^{\lambda+1} C(f) \geqslant r^{\lambda+1} C(p, f). \qquad (1.3.16)$$

Оценка (1.3.16) дает $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} \geqslant \lambda + 1$, а это противоречит тому факту, что $f(z)$ имеет нижний порядок λ.

Следующую лемму можно рассматривать как вариант известной леммы Бореля — Неванлинны о возрастании монотонных функций [37, с. 35; 11, с. 120].

Лемма 1.3.2. *Пусть $T(x)$ — непрерывная неубывающая функция, определенная при $x \geqslant R_0 \geqslant 0$, и такая, что $T(R_0) \geqslant 2$ и $\lim\limits_{x\to\infty} T(x) = \infty$. Тогда для каждого $\nu > 1$ существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n = x_n(\nu) \nearrow \infty$ ($x_1 \geqslant R_0$) такая, что при*

$$x_n \leqslant x \leqslant x_n + \ln^{-\nu} T(x_n) \quad T(x) < \nu T(x_n). \qquad (1.3.17)$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы не справедливо, т. е. для некоторого $\nu > 1$ и всех достаточно больших x найдется $\zeta(x)$ такое, что $x \leqslant \zeta(x) \leqslant x + \ln^{-\nu} T(x)$ и $T(\zeta(x)) \geqslant \nu T(x)$. **(1.3.18)** Зафиксируем одно такое $x = x_1$ и положим $\zeta(x_1) = x_2$. Соотношение (1.3.18) принимает вид $T(x_2) \geqslant \nu T(x_1)$. Вообще, если у нас определено некоторым способом x_n, то x_{n+1} находим, как $\zeta(x_n) = x_{n+1}$, для которого имеет место оценка (1.3.18), т. е. $T(\zeta(x_n)) \geqslant \nu T(x_n)$. Таким образом, мы получаем неубывающую последовательность $\{x_n\}$, для которой

$$T(x_n) \geqslant \nu T(x_{n-1}) \geqslant \ldots \geqslant \nu^{n-1} T(x_1) \geqslant 2\nu^{n-1}, \qquad (1.3.19)$$

следовательно $\ln T(x_n) \geqslant (n-1) \ln \nu$. Поэтому $0 \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant \ln^{-\nu} T(x_n) \leqslant (n-1)^{-\nu} \ln^{-\nu} \nu$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся. Пусть

$$R_0 \leqslant t = \lim_{n\to\infty} x_n < \infty.$$

В силу непрерывности $T(x)$

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(t) < \infty,$$

что противоречит соотношению (1.3.19). Лемма доказана.

4. Рост логарифмической производной мероморфной функции

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция и a — фиксированное комплексное число. Напомним, что логарифмической производной мероморфной функции $f(z) - a$ называется мероморфная

функция $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$. Выберем произвольные $q\,(q \geqslant 2)$ различные комплексные числа $\{a_k\}_{k=1}^{q}\,(a_k \neq \infty)$ и положим

$$S(r,\ q,\ f) = S(r) = \sum_{k=1}^{q} \ln^+ M\left(r,\ \frac{f'}{f-a_k}\right), \text{ где}$$

$$M\left(r,\ \frac{f'}{f-a}\right) = \max_{|z|=r}\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right|.$$

Обозначим при фиксированном k, $1 < k < 2$, $e(R,\ k) = r : Rk^{-1} \leqslant \leqslant r \leqslant Rk^{-1/2}$.

Лемма 1.4.1. *Для каждого $R \geqslant R_0$ при фиксированных $k > 1$ и $q > 2$ множество $e(R,\ k)$ содержит подмножество $e_1(R,\ k,\ q) = = e_1(R)$ такое, что $\operatorname{mes} e_1(R,\ k,\ q) \geqslant \frac{3}{4} \operatorname{mes} e(R, k)$, и при $r \in e_1(R)$*

$$S(r,\ q,\ f) \leqslant 2q \ln T(kR,\ f) + C(f)\, q \ln \frac{q}{k-1}. \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

Доказательство. Из формулы (1.1.12), заменяя $f(z)$ на $f(z)-a$, получаем

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right| \leqslant \frac{2rR}{(R-r)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln|f(Re^{i\theta})-a||\,d\theta +$$

$$+ \sum_{|b_k|<R} \frac{r}{|z-b_k|} + \sum_{|a_k|(a)<R} \frac{r}{|z-a_k(a)|} + \sum_{|b_k|<R} rR\,(R^2 - r|b_k|)^{-1} +$$

$$+ \sum_{|a_k(a)|<R} Rr\,(R^2 - r|a_k|)^{-1} \leqslant 4R^2(R-r)^{-2}[T(R,\ f) + C(f)] +$$

$$+ \sum_{|c_k|<R} r\,(|r-|c_k||)^{-1} + \sum_{|c_k|<R} R^2(R^2 - r|c_k|)^{-1}, \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

где b_k — полюсы $f(z)$, $a_k(a)$ — ее a-точки и $\{c_k\}$ — их объединенная последовательность. Из оценки (1.4.2) легко находим

$$r^{1/2}M^{1/2}\left(r,\ \frac{f'}{f-a}\right) \leqslant 2R(R-r)^{-1}T^{1/2}(R,\ f) + CR(R-r)^{-1} +$$

$$+ \sum_{|c_k|<R} r^{1/2}(|r-|c_k||)^{-1/2} + \sum_{|c_k|<R} R(R^2 - r|c_k|)^{-1/2}. \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

Если $r \in e(R)$, то $R(R-r)^{-1} \leqslant k^{1/2}(k^{1/2}-1)^{-1} \leqslant 6(k-1)^{-1}$; $R^2(R^2 - r|c_k|)^{-1} \leqslant R(R-r)^{-1} \leqslant 6(k-1)^{-1}$. Поэтому оценка (1.4.3) принимает вид

$$r^{1/2}M^{1/2}\left(r,\ \frac{f}{f-a}\right) \leqslant 12(k-1)^{-1}T^{1/2}(kr,\ f) + C(k-1)^{-1} +$$

$$+\sum_{|c_k|\leqslant R} r^{1/2}(|r-|c_k||)^{-1/2}+3(k-1)^{-1/2}[n(R,f)+n(R,a,f)]. \tag{1.4.4}$$

Далее заметим*, что для каждого $x>1$ и для каждого $k>1$ $n(x,a,f)\leqslant \ln^{-1}kN(kx,a,f)$. Значит, $n(R,a,f)\leqslant \ln^{-1}kN(kR,a,f)$ **(1.4.5)** и оценка (1.4.4) в силу неравенства (1.4.5) принимает вид

$$r^{1/2}M^{1/2}\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)\leqslant \sum_{|c^k|\leqslant R} r^{1/2}(|r-|c_k||)^{-1/2}+K(k-1)^{-2}\times$$
$$\times[T^{1/2}(kR,f)+T(kR,f)+C(f)]. \tag{1.4.6}$$

Проинтегрируем оценку (1.4.6) по r по множеству $e(R,k)$. Так как $\operatorname{mes} e(R,k)=R(k^{-1/2}-k^{-1})<R(k-1)$, то

$$\int_{e(R,k)} r^{1/2}M^{1/2}\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)dr\leqslant KR(k-1)^{-1}[T(kR,f)+C(f)]+$$
$$+\sum_{|c_k|\leqslant R}\int_{e(R,k)} r^{1/2}(|r-|c_k||^{-1/2}dr. \tag{1.4.7}$$

Пусть $I=\int_{e(R,k)} r^{1/2}(|r-|c_k||)^{-1/2}dr$.

Если $|c_k|\leqslant R/4$, то $|r-|c_k||\geqslant R/4$, так как $r\geqslant Rk^{-0,5}>0,5R$. Значит, $I\leqslant 2R(k-1)$ **(1.4.8)**. Пусть теперь $R/4\leqslant|c_k|\leqslant R$. В этом случае получаем

$$I\leqslant\int_{0,5R}^{R}\frac{r^{0,5}dr}{|r-|c_k||^{0,5}}\leqslant|c_k|\int_{0,5}^{4}\left(\frac{s}{s-1}\right)^{0,5}ds\leqslant KR. \tag{1.4.9}$$

Оценка (1.4.7) принимает вид

$$\int_{e(R,k)} r^{0,5}M^{0,5}\left(r,\frac{f'}{f-a}\right)dr\leqslant KR(k-1)^{-1}[T(kR,f)+C]+$$
$$+KR[n(R,f)+n(R,a,f)]\leqslant KR(k-1)^{-1}[T(kR,f)+C]. \tag{1.4.10}$$

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ $(q\geqslant 2)$ — различные фиксированные комплексные числа. Обозначим для фиксированных $R>R_0$, $k>1$ и ν

$$e_\nu=e(R,k,\nu,q)=\left\{r\in e(R,k):\ M^{0,5}\left(r,\frac{f'}{f-a_\nu}\right)>\right.$$
$$\left.>K(q+1)(k-1)^{-2}[T(kR,f)+C]\right\},$$

---

* Достаточно в соотношении (1.3.2) положить $r_0=x$; $r=kr_0$.

где постоянные K и C те же, что и в оценке 1.4.10. Простые вычисления дают

$$KR(k-1)^{-1}[T(kR, f)+C] \geqslant \int_{e_\nu} r^{0,5} M^{0,5}\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) dr \geqslant$$

$$\geqslant 0{,}5R^{0,5}K(q+1)(k-1)^{-2}[T(kR, f)+C] \operatorname{mes} e_\nu.$$

Поэтому

$$\operatorname{mes} e_\nu \leqslant 2(q+1)^{-1}R^{0,5}(k-1) \leqslant$$

$$\leqslant (k-1)(q+1)^{-1}R/24 < (q+1)^{-1}\, 0{,}25 \operatorname{mes} e(R, k).$$

Значит,

$$\operatorname{mes}\left\{\bigcup_{\nu=1}^{q} e_\nu\right\} \leqslant \sum_{\nu=1}^{q} \operatorname{mes} e_\nu \leqslant 0{,}25 \operatorname{mes} e(R, k).$$

Покажем, что искомым множеством является

$$e_1(R, k, q) = e(R, k) \setminus \left\{\bigcup_{\nu=1}^{q} e_\nu\right\}.$$

Действительно, $\operatorname{mes} e_1(R, k, q) \geqslant 0{,}75 \operatorname{mes} e(R, k)$ и при $r \in e_1 \times \times (R, k, q)$ для каждого ν $(\nu = 1, 2, \ldots, q)$

$$M^{0,5}\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) \leqslant Kq(k-1)^{-2}[T(kR, f)+C],$$

т. е. при $r \in e_1(R, k, q)$

$$\sum_{\nu=1}^{q} \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) \leqslant 2q \ln^+ T(kR, f) + Cq \ln[q(k-1)^{-1}].$$

Следствие 1. *Если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то при $k = 1+(\lambda+1)^{-1}$ существует последовательность $R_\nu \nearrow \infty$, такая, что каждое из множеств $e(R_\nu, k)$ содержит подмножество $e_1(R_\nu, k, q)$, обладающее такими свойствами:*

$$\operatorname{mes} e_1(R_\nu, k, q) \geqslant (\lambda+2)^{-1} 0{,}25 R_\nu;$$

при $r \in e_1(R_\nu, k, q)$

$$S(r, q, f) \leqslant C(q, \lambda) \ln T(r, f) + C(q, \lambda). \qquad \textbf{(1.4.11)}$$

Доказательство. Положим в оценке (1.4.1)

$$k = 1+(\lambda+1)^{-1};\ R_\nu = [1+(\lambda+1)^{-1}]\, x_\nu = kx_\nu,$$

где $\{x_n\} \nearrow \infty$ — последовательность, определенная леммой 1.3.1, с $p = [1+(\lambda+1)^{-1}]^2$. Тогда

$$T[(1+(\lambda+1)^{-1}]^2 x_\nu, f] \leqslant [1+(\lambda+1)^{-1}]^{2(\lambda+1)} T(x_\nu) \leqslant e^2 T(x_\nu, f).$$

Вычисления показывают, что

$$\operatorname{mes} e_1(R_\nu, k, q) \geqslant 0{,}75R_\nu\left[\sqrt{1+(\lambda+1)^{-1}}-1\right]\times$$
$$\times\left[1+(\lambda+1)^{-1}\right]^{-1} \geqslant 0{,}25R_\nu(\lambda+2)^{-1}$$

и при $r \in e_1(R_\nu, k, q)$

$$S(r, q, f) \leqslant 2q \ln T\left[(1+(\lambda+1)^{-1})^2 x_n\right]+$$
$$+Cq\ln[q(\lambda+1)] \leqslant 2q\ln T\left[R_\nu(1+(\lambda+1)^{-1}), f\right]+$$
$$+Cq\ln[q(\lambda+1)] \leqslant 2q\ln T(r, f)+Cq\ln[q(\lambda+1)],$$

что и доказывает оценку 1.4.11.

Следствие 2. *Если $f(z)$ имеет бесконечный нижний порядок, тогда существует неограниченная последовательность $\{r_k\}$, для которой при каждом $r \in \{r_k\}$* и $r \geqslant r_0$

$$S(r, q, f) \leqslant 4q\ln T(r, f)+Cq\ln\ln T(r, f). \qquad \textbf{(1.4.12)}$$

Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}=\{x_n(\nu)\}$ определена по функции $T(r, f)$ с помощью соотношения (1.3.17). Положим в лемме 1.4.1

$$k=k_n=\left\{1+x_n^{-1}\ln^{-\nu}T(x_n, f)\right\}^{0,5},$$

где $R_n=kx_n$, $1<\nu<2$ и $R_n \geqslant r_0$. При $r \in [R_nk^{-1}, R_nk^{-0,5}]$ и $R_n \geqslant r_0$ имеем в силу неравенства (1.3.17)

$$T(kR_n, f)=T(k^2x_n, f)=T(x_n+\ln^{-\nu}T(x_n, f), f) \leqslant \nu T(x_n, f)=$$
$$=\nu T(R_nk^{-1}, f) \leqslant \nu T(r, f); \qquad \textbf{(1.4.13)}$$
$$(k-1)^{-1}=(k+1)(k^2-1)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2x_n\ln^\nu T(x_n, f) \leqslant 2r\ln^\nu T(r, f). \qquad \textbf{(1.4.14)}$$

Оценка (1.4.12) непосредственно вытекает из неравенств (1.4.13), (1.4.14), (1.4.1).

5. Дефектные значения мероморфных функций в смысле Р. Неванлинны

В основе неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций лежат характеристики средней плотности распределения a-точек мероморфных функций. Положим для произвольного комплексного числа a

$$\delta(a, f)=\varliminf_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\, m(r, a, f).$$

Определение. *Если для некоторого a $\delta(a, f)>0$, это число a называется дефектным значением мероморфной функции $f(z)$*

в смысле Р. Неванлинны, а величина $\delta(a, f)$ — *дефектом мероморфной функции* $f(z)$ *в точке* a.

Из первой основной теоремы Р. Неванлинны непосредственно следует, что для каждого a

$$\delta(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} \leqslant 1.$$

Если a — дефектное значение функции $f(z)$, это означает, что $f(z)$ асимптотически мáло (по сравнению с ростом $T(r, f)$) принимает значение a, так как в этом случае

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a, f)}{T(r, f)} < 1.$$

Множество $D(f) = \{a : \delta(a, f) > 0\}$ называется множеством дефектных значений функции $f(z)$. Для каждой мероморфной функции $f(z)$ множество $D(f)$ представляет собой редкое множество в том смысле, что подавляющее множество точек a ему не принадлежит.

Пример. Пусть $h(z) = e^z$. Имеем

$$T(r, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ e^{r\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\cos^+\theta d\theta = \frac{r}{\pi}.$$

Ясно, что для этой функции $N(r, 0, h) = N(r, \infty, h) \equiv 0$, значит, $\delta(0, h) = \delta(\infty, h) = 1$. Пусть теперь $a \neq 0, \infty$. Оценим $n(t, a, h)$. Ясно, что a-точки функции $h(z)$ есть

$$z_k(a) = L_n a = \ln|a| + i\arg a + 2k\pi i$$

при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Подсчет показывает, что для каждого $t \geqslant r_0 = r_0(a)$ $1 + t\pi^{-1} \geqslant n(t, a, h) \geqslant t\pi^{-1} - 2$. Поэтому при $r \geqslant r_0$

$$N(r, a, h) = \int_0^r [n(t, a) - n(0, a)]\frac{dt}{t} + n(0, a)\ln r \geqslant$$

$$\geqslant \int_1^r [n(t, a) - n(0, a)]\frac{dt}{t} + n(0, a)\ln r = \int_1^r n(t, a)\frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\int_{r_0}^r \frac{t - 2\pi}{t} dt = \frac{r}{\pi} - C\ln r.$$

Аналогично $N(r, a, h) \leqslant r/\pi + C\ln r$. Значит,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, a, h)}{T(r, h)} = 1.$$

Таким образом, для каждого $a \neq 0, \infty$ $\delta(a, h) = 0$, т. е. $D(h)$ содержит лишь две точки: 0 и ∞.

Теперь мы докажем основную теорему о дефектных значениях и о величинах дефектов произвольной мероморфной функции.

Теорема. *Для произвольной мероморфной функции $f(z)$ справедливы утверждения:*

а) множество $D(f)$ не более чем счетно;

б) $\sum\limits_{a \in D(f)} \delta(a, f) \leqslant 2.$

Доказательство. Рассмотрим произвольное конечное множество различных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ $(q \geqslant 2,\ a_k \neq \infty)$ и вспомогательную мероморфную функцию

$$h(z) = \prod_{k=1}^{q} (f(z) - a_k).$$

Имеем

$$h^{-1}(z) = \left\{\prod_{k=1}^{q} (f(z) - a_k)\right\}^{-1} = \sum_{k=1}^{q} A_k (f(z) - a_k)^{-1},$$

где

$$A_\nu = \left\{\prod_{k \neq \nu} (a_\nu - a_k)\right\}^{-1}.$$

Поэтому

$$m(r, 0, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|h(re^{i\theta})|}\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|}\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{h(re^{i\theta})}\right| d\theta \leqslant m(r, 0, f') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} m\left(r, \frac{f'}{f - a_k}\right) + C(q) \leqslant m(r, 0, f') + S(r, f, q) + C(q). \tag{1.5.1}$$

Оценим теперь снизу $m(r, 0, h)$. В силу первой основной теоремы

$$m(r, 0, h) = m(r, h) + N(r, h) - N(r, 0, h) + C(h). \tag{1.5.2}$$

Кроме того,

$$n(r, 0, h) = \sum_{k=1}^{q} n(r, a_k, f),$$

значит,

$$N(r, 0, h) = \sum_{k=1}^{q} N(r, a_k, f). \tag{1.5.3}$$

Аналогично убеждаемся, что

$$N(r, \infty, h) = N(r, h) = qN(r, f). \tag{1.5.4}$$

Наконец, рассмотрим

$$m(r, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \prod_{k=1}^{q} |f(re^{i\theta}) - a_k|\, d\theta.$$

Пусть

$$d = \max_{1 \leqslant k \leqslant q} |a_k| \text{ и } E(r) = \{\theta: |f(re^{i\theta})| > 2d + 1\}.$$

Если $E(r) \neq \varnothing$, то

$$m(r, h) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E(r)} \ln \prod_{k=1}^{q} |f(re^{i\theta}) - a_k|\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{q}\int_{E(r)} \ln|f(re^{i\theta}) - a_k|\, d\theta \geqslant \frac{q}{2\pi}\int_{E(r)} \ln\frac{|f(re^{i\theta})|}{3}\, d\theta =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\int_{E(r)} \ln^+|f(re^{i\theta})|\, d\theta - C(q) =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta - C(q, f) = qm(r, f) - C(q, f). \quad \textbf{(1.5.5)}$$

Если же $E(r) = \varnothing$, то $m(r, f) \leqslant \ln(1 + 2d)$, значит, и в этом случае

$$m(r, h) \geqslant qm(r, f) - C(q).$$

Таким образом, оценка (1.5.5) имеет место для всех $r > 0$. В силу соотношений (1.5.3), (1.5.4), (1.5.5) и первой основной теоремы теории мероморфных функций равенство (1.5.2) дает

$$m(r, 0, h) \geqslant qm(r, f) + qN(r, f) - \sum_{k=1}^{q} N(r, a_k, f) + C =$$

$$= qT(r, f) - \sum_{k=1}^{q} N(r, a_k, f) + C =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} m(r, a_k, f) + C(r, q), \quad \textbf{(1.5.6)}$$

где величина $|C(r, q)|$ ограничена при $r \to \infty$.

Оценки (1.5.1) и (1.5.6) приводят нас к соотношению

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, a_k, f) \leqslant m(r, 0, f') + S(r, f, q) + C(r, q)$$

или

$$\sum_{k=1}^{q+1} m(r, a_k, f) \leqslant m(r, 0, f') + m(r, f) + S(r, f, q) + C(r, q),$$

где $m(r, a_{q+1}, f) = m(r, \infty, f) = m(r, f)$. Заметим далее, что

$$m(r, 0, f') + m(r, f) \leqslant T(r, f') + m(r, f) + C(f) =$$
$$= m(r, f') + N(r, f') + m(r, f) + C(f) \leqslant$$
$$\leqslant 2m(r, f) + N(r, f') + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + C(f) \leqslant$$
$$\leqslant 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + C(f).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{q+1} m(r, a_k, f) \leqslant 2T(r, f) + S(r, f, q+1) + C(r, f). \qquad (1.5.7)$$

В силу леммы 1.4.1 и полученных из нее следствий [см. соотношения (1.4.11) и (1.4.12)] оценка (1.5.7) дает

$$\varliminf_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{q+1} m(r, a_k, f)\, T^{-1}(r, f) \leqslant 2 + \varliminf_{r\to\infty} S(r, f, q+1)\, T^{-1}(r, f) \leqslant 2.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{q+1} \varliminf_{r\to\infty} m(r, a_k, f)\, T^{-1}(r, f) \leqslant 2,$$

т. е. для любого конечного числа различных конечных или бесконечных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{q+1}$

$$\sum_{k=1}^{q+1} \delta(a_k, f) \leqslant 2. \qquad (1.5.8)$$

Из этого результата уже легко следует теорема. Покажем, что множество $D(f)$ не более чем счетно. Пусть при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$D_n(f) = \{a : (n+1)^{-1} < \delta(a, f) \leqslant n^{-1}\}.$$

Множества $D_n(f)$ не пересекаются при различных n и $D(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n(f)$. Множества $D_n(f)$ при каждом n содержат конечное множество точек. Действительно, для каждого $a \in D_n$ справедливо $\delta(a, f) \geqslant (n+1)^{-1}$. Если $\omega(n)$ означает число точек из множества $D_n(f)$, то из формулы (1.5.8) непосредственно получаем, что $\omega(n) \leqslant 2(n+1)$. Тем самым теорема 1.5.1 доказана полностью.

Приведенный выше пример функции $h(z) = e^z$ показывает, что в теореме 1.5.1 постоянная 2 является точной.

6. Модифицированные примеры А. А. Гольдберга мероморфных функций, обладающих счетным множеством дефектных значений

Теорема 1.6.1. *Пусть* $\{\eta_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — *последовательность положительных чисел такая, что* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu = 1$. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *произвольная последовательность различных комплексных чисел. Тогда существует мероморфная функция* $f(z)$ *первого порядка, для которой*

$$\delta(a_n, f) \geqslant \eta_n^3/9, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что η_ν образуют невозрастающую последовательность (этого всегда можно добиться с помощью соответствующей перенумерации η_ν и $\{a_\nu\}$). Пусть $\eta_0 = \eta_1$, $\theta_0 = 0$ и $\theta_n = \pi \sum_{\nu=0}^{n-1} \eta_\nu$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, θ_n образуют строго возрастающую последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu = \pi\eta_0 + \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \leqslant 2\pi.$$

Выберем далее последовательность положительных чисел $\{c_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ такую, что

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |a_n| < \infty, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Примем

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \exp\left(ze^{-i\theta_n}\right); \quad \varphi_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(ze^{-i\theta_n}\right).$$

Покажем, что искомой функцией является

$$f(z) = \varphi_1(z)\,\varphi_2^{-1}(z).$$

Прежде всего, при $|z| = r$ имеем

$$|\varphi_1(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n |a_n| \exp \operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta_n}\right) \leqslant S_1 \exp r;$$

$$|\varphi_2(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp \operatorname{Re}\left(ze^{-i\theta_n}\right) \leqslant S_2 \exp r.$$

Поэтому

$$T(r, f) = m(r, \varphi_1/\varphi_2) + N(r, \infty, f) \leqslant m(r, \varphi_1) + m(r, 0, \varphi_2) + \\ + N(r, 0, \varphi_2) \leqslant T(r, \varphi_1) + T(r, \varphi_2) + C \leqslant 2r + C. \quad (1.6.1)$$

Пусть

$$n \geqslant 1 \text{ и } \theta_n - \pi\eta_n/3 < \arg z = \theta \leqslant \theta_n + \pi\eta_n/3. \quad \textbf{(1.6.2)}$$

Если

$$\nu < n, \text{ то } \theta - \theta_\nu \geqslant \theta_n - \pi\eta_n/3 - \theta_\nu \geqslant (\theta_n - \theta_{n-1}) - \pi\eta_n/3 =$$
$$= \pi(\eta_{n-1} - \eta_n/3) \geqslant \pi(\eta_n - \eta_n/3) = 2\pi\eta_n/3,$$

а если $\nu > n$, то

$$\theta_\nu - \theta \geqslant \theta_{n+1} - \theta \geqslant \theta_{n+1} - \theta_n - \pi\eta_n/3 = \pi\eta_n - \pi\eta_n/3 = 2\pi\eta_n/3.$$

Таким образом, во всех случаях при $\nu \neq n$ и $n \geqslant 1$ $|\theta_\nu - \theta_n| \geqslant 2\pi\eta_n/3$, поэтому

$$\cos(\theta_\nu - \theta_n) \leqslant \cos(2\pi\eta_n/3). \quad \textbf{(1.6.3)}$$

Оценка (1.6.3) очевидно выполняется и при $n = 0$. Пусть $\arg z = \theta$ удовлетворяет условию (1.6.2), тогда в силу неравенства (1.6.3)

$$|\varphi_1(z) - c_n a_n \exp(ze^{-i\theta_n})| \leqslant \sum_{\nu \neq n} |c_\nu a_\nu \exp[r\cos(\theta - \theta_\nu)]| \leqslant$$
$$\leqslant S_1 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3).$$

Аналогично для этих же значений $\arg z = \theta$

$$|\varphi_2(z) - c_n \exp(ze^{-i\theta_n})| \leqslant S_2 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3),$$

поэтому при

$$r \geqslant r_0(n) \quad |\varphi_2(z)| \geqslant c_n |\exp re^{i(\theta-\theta_n}| - S_2 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3) \geqslant$$
$$\geqslant c_n \exp r\cos(\pi\eta_n/3) - S_2 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3) \geqslant 0{,}5c_n \exp r\cos(\pi\eta_n/3).$$

Таким образом, при $r \geqslant r(n)$ и для $\arg z = \theta$, удовлетворяющего соотношению (1.6.2),

$$|f(z) - a_n| = |[\varphi_1(z) - a_n\varphi_2(z)]\varphi_2^{-1}(z)| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_1(z) - c_n a_n \exp ze^{-i\theta_n} + c_n a_n \exp ze^{-i\theta_n} - a_n\varphi_2(z)| \times$$
$$\times [c_n \exp r\cos(\pi\eta_n/3)]^{-1} \leqslant 2[S_1 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3) +$$
$$+ |a_n| S_2 \exp r\cos(2\pi\eta_n/3)][c_n \exp r\cos(\pi\eta_n/3)]^{-1} =$$
$$= S_3 \exp r[\cos(2\pi\eta_n/3) - \cos\pi\eta_n/3] =$$
$$= S_3 \exp - 2r\sin(\pi\eta_n/6)\sin 0{,}5\pi\eta_n,$$

т. е.

$$\ln^+ |f(re^{i\theta}) - a_n|^{-1} \geqslant 2r\sin(\pi\eta_n/6)\sin 0{,}5\pi\eta_n + C \geqslant 2r\eta_n^2/3 + C. \quad \textbf{(1.6.4)}$$

Значит,

$$m(r, a_n, f) \geqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_n - \pi\eta_n/3}^{\theta_n + \pi\eta_n/3} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a_n|} d\theta \geqslant 2r\eta_n^3/9 + C. \qquad (1.6.5)$$

Из соотношений (1.6.1) и (1.6.5) получаем, что при $r \geqslant r(n)$

$$m(r, a_n, f)\, T^{-1}(r, f) \geqslant \eta_n^3/9.$$

Теорема 1.6.1 доказана.

Метод доказательства и сама формулировка теоремы 1.6.1 в приведенном здесь виде принадлежит У. Хейману [37], который существенно упростил первоначальные рассуждения А. А. Гольдберга [6].

7. Вспомогательные сведения о логарифмической емкости множеств

Основы приложений теории потенциала к теории мероморфных функций были заложены в трудах О. Фростмана [45], Л. Альфорса [10] и Р. Неванлинны [21; см. также 17; 13]. Имея большое прикладное значение, эти вопросы являются специальной темой исследования, выходящей за пределы наших рассмотрений.

Пусть K — компакт из комплексной плоскости C. Обозначим через $\Gamma(K)$ множество мер, носители* которых содержатся в K, и таких, что для каждого $z \in K$

$$v(z, \mu) = \int_K \ln|z - a|\, d\mu(a) \geqslant -1.$$

Определение. *Если компакт K содержится в круге $K(0, 1) = \{a; |a| < 1\}$, то логарифмической емкостью K называется величина* $\operatorname{cap}_2 K = \exp\{-W^{-1}(K)\}$,
где

$$W(K) = \sup_{\mu \in \Gamma(K)} \mu(K).$$

Если же компакт K содержится в круге $K(0, R)$ с $R > 1$, то

$$\operatorname{cap}_2 K = R \operatorname{cap}_2 K_R,$$

где K_R — компакт, полученный из K преобразованием подобия относительно начала координат с коэффициентом подобия R^{-1}.

Таким образом, емкостные характеристики компактов достаточно изучать в круге единичного радиуса.

---

* Носителем меры μ называется $S(\mu) = K \setminus G_0(\mu)$, где $G_0(\mu)$ — наибольшее открытое множество, для которого $\mu(G_0) = 0$.

Определение. *Будем говорить, что компакт K имеет нулевую логарифмическую емкость, если* $W(K) = \sup\limits_{\mu \in \Gamma(K)} \mu(K) = 0$. *Если E — произвольное множество из $\mathbf{C}$, то внутренняя емкость E $\underline{\mathrm{cap}}_2 E$ определяется как точная верхняя грань емкостей компактов K, содержащихся в E, т. е.*

$$\underline{\mathrm{cap}}_2 E = \sup_{K \subset E} \mathrm{cap}_2 K.$$

Внешней емкостью E $\overline{\mathrm{cap}}_2 E$ называется точная нижняя грань внутренних емкостей открытых множеств G, содержащих множество E, следовательно,

$$\overline{\mathrm{cap}}_2 E = \inf_{E \subset G} \underline{\mathrm{cap}}_2 G.$$

Если для некоторого множества E $\overline{\mathrm{cap}}_2 E = 0$, то множество E называется множеством нулевой логарифмической емкости.

Множества нулевой логарифмической емкости представляют собой исключительные (т. е. редкие) множества. В них могут нарушаться некоторые общие свойства аналитических или мероморфных функций. Если для некоторого множества E $\underline{\mathrm{cap}}_2 E = \overline{\mathrm{cap}}_2 E$, то такое множество называется измеримым по емкости. Важным результатом измеримости множеств по емкости является следующая теорема Шоке [42].

Теорема 1.7.1. *Любое борелевское множество* измеримо по емкости.*

Приведем еще два утверждения, которые ниже будут неоднократно использоваться.

Теорема 1.7.2 [21, с. 139]. *Если компакт K имеет положительную логарифмическую емкость, то существует мера μ_0 с носителем на K такая, что*

а) $\sup\limits_{\mu \in \Gamma(K)} \mu(K) = \mu_0(K) = W(K)$;

б) равенство

$$v(z, \mu_0) = \int_K \ln|z - a|\, d\mu_0(a) = -1$$

выполняется для каждого $z \in K$, за возможным исключением множества нулевой логарифмической емкости;

в) при всех z

$$v(z; \mu_0) \geqslant -1. \qquad (1.7.1)$$

Мера μ_0, фигурирующая в теореме 1.7.2, называется равновесной мерой Робена компакта K.

---

* Множества, принадлежащие наименьшей σ-алгебре, содержащей класс всех компактов [4].

Теорема 1.7.3 [21, с. 131]. *Если* $\{K_n\}_{n=1}^{\omega}$ — *конечное или счетное множество компактов, содержащихся в круге* $K(0, 0{,}5)$ *и* $E = \bigcup_{n=1}^{\omega} K_n$, *то*

$$W(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\omega} W(K_n). \tag{1.7.2}$$

Лемма 1.7.1. *Пусть* $h(z)$ — *неотрицательная борелевская функция*, определенная на множестве* $\Omega \subset \mathbf{C}$. *Если для любого компакта* K, *такого, что* $K \subset \Omega$ *и* $\operatorname{cap}_2 K > 0$ *справедливо*

$$\int_K h(z)\, d\mu_0(z) = 0, \tag{1.7.3}$$

где μ_0 — *равновесная мера Робена компакта* K. *Тогда множество* $E(h) = \{z : h(z) > 0\}$ *имеет нулевую логарифмическую емкость.*

Доказательство. Пусть** $\operatorname{cap}_2 E(h) > 0$. **(1.7.4)** Положим при $n = 1, 2, 3, \ldots$ $E_n(h) = \{z : h(z) \geqslant 1/n\}$. Тогда $E(h) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(h)$. Покажем, что существует хотя бы одно множество $E_m(h)$, для которого

$$\operatorname{cap}_2 E_m(h) > 0. \tag{1.7.5}$$

Действительно, если бы для всех m $\operatorname{cap}_2 E_m(h) = 0$, то тогда и $\operatorname{cap}_2 E(h) = 0$, а это противоречит неравенству (1.7.4). Таким образом, оценка (1.7.5) имеет место, значит, найдется компакт $K_0 \subset E_m(h)$ такой, что $\operatorname{cap}_2 K_0 > 0$ **(1.7.6).** Пусть μ_0' — равновесная мера Робена K_0, тогда

$$m^{-1}\mu_0'(K_0) = m^{-1}\int_{K_0} d\mu_0'(z) \leqslant \int_{K_0} h(z)\, d\mu_0'(z). \tag{1.7.7}$$

В силу условия (1.7.6) левая часть оценки (1.7.7) положительная, а в силу равенства (1.7.3) правая часть соотношения (1.7.7) равна нулю. Полученное противоречие доказывает лемму.

8. Дефектные значения мероморфных функций в смысле Ж. Валирона

В ряде работ Ж. Валирона и других авторов [21; 52] исследуется плотность распределения a-точек мероморфной функции $f(z)$ с помощью величины

$$\Delta(a, f) = \varlimsup_{r \to \infty} m(r, a, f)\, T^{-1}(r, f).$$

---

* Для любого действительного α $E(\alpha, f) = \{z : f(z) > \alpha\}$ является борелевским множеством.

** В силу теоремы Шоке

$$\operatorname{cap}_2 E(h) = \overline{\operatorname{cap}_2} E(h).$$

Определение. *Если для некоторого комплексного числа a $\Delta(a, f) > 0$, это число называется дефектным значением мероморфной функции $f(z)$ в смысле Ж. Валирона, а величина $\Delta(a, f)$ называется валироновским дефектом мероморфной функции $f(z)$ в точке a. Множество $V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\}$ называется множеством дефектных значений $f(z)$ в смысле Ж. Валирона.*

Как показал Ж. Валирон, существуют мероморфные функции конечного порядка, для которых множество $V(f)$ имеет мощность континуума (в отличие от множества неванлинновских дефектных значений $D(f)$). Однако для каждой мероморфной функции $f(z)$ множество* $V(f)$ является исключительным множеством.

Лемма 1.8.1. *Если $f(z)$ — мероморфная функция, K — произвольный компакт из $K(0, 1)$ и μ_0 — равновесная мера Робена K, тогда*

$$\int_K m(r, a, f)\, d\mu_0(a) \leqslant 1 + 2W(K). \tag{1.8.1}$$

Доказательство. В силу неравенства (1.7.1) для каждого ζ

$$\int_K \ln(|\zeta - a|)^{-1} d\mu_0(a) \leqslant 1. \tag{1.8.2}$$

Если $|\zeta| \leqslant 2$, находим

$$\int_K \ln \frac{1+|\zeta|}{|\zeta - a|} d\mu_0(a) = \int_K \ln \frac{1}{|\zeta - a|} d\mu_0(a) + \int_K \ln(1 + |\zeta|)\, d\mu_0(a) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \ln(1 + |\zeta|)\, W(K) \leqslant 1 + 2W(K), \tag{1.8.3}$$

а если $|\zeta| > 2$, то для каждого

$$a \in K \ (|a| < 1) \ \ln(1 + |\zeta|)(|\zeta - a|)^{-1} \leqslant \ln(1 + |\zeta|)(|\zeta| - |a|)^{-1} \leqslant \ln(1 + |\zeta|)(|\zeta| - 1)^{-1} < \ln 3 < 2.$$

Следовательно, при $|\zeta| > 2$

$$\int_K \ln \frac{1+|\zeta|}{|\zeta - a|} d\mu_0(a) \leqslant 2W(K).$$

Таким образом, оценка (1.8.3) справедлива при всех ζ. Так как

$$\ln(1 + |\zeta|)(|\zeta - a|)^{-1} = \ln^+(1 + |\zeta|)(\zeta - a|)^{-1} \geqslant \ln^+ \frac{1}{|\zeta - a|},$$

оценка (1.8.3) дает

$$\int_K \ln^+ \frac{1}{|\zeta - a|} d\mu_0(a) \leqslant 1 + 2W(K). \tag{1.8.4}$$

---

* Нетрудно убедиться что функция $\Delta(a, f)$ является борелевской, т. е. $V(f)$ — борелевское множество.

Из неравенства (1.8.4) находим

$$\int_K \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\mu_0(a) \leqslant 2W(K)+1,$$

значит, $\int_K m(r, a, f)\, d\mu_0(a) \leqslant 1+2W(K)$. Лемма доказана.

Следствие. *Для каждой мероморфной функции $f(z)$ и для любого компакта K, содержащегося в круге единичного радиуса и имеющего положительную емкость, справедлива оценка*

$$\int_K N(r, a, f)\, d\mu_0(a) \geqslant T(r, f)\, W(K) - 1 + C(f)\, W(K). \quad \textbf{(1.8.5)}$$

Действительно, в силу первой основной теоремы [см. равенство (1.2.6)] и оценки (1.8.1)

$$\int_K N(r, a, f)\, d\mu_0(a) \geqslant T(r, f)\, W(K) - \int_K m(r, a, f)\, d\mu_0(a) -$$

$$-\int_K \alpha(a, f)\, d\mu_0(a) - \ln 2W(K) \geqslant T(r, f)\, W(K) -$$

$$-1 - 4W(K) - \int_K \alpha(a, f)\, d\mu_0(a).$$

Если $f(0) \neq \infty$, то

$$-\int_K \alpha(a, f)\, d\mu_0(a) = \int_K \ln \frac{1}{|f(0)-a|} d\mu_0(a) = \int_K \ln \frac{1+|f(0)|}{|f(0)-a|} d\mu_0(a) +$$

$$+\ln \frac{1}{1+|f(0)|} W(K) \geqslant W(K) \ln \frac{1}{1+|f(0)|}. \quad \textbf{(1.8.6)}$$

Если же $f(0) = \infty$, то для каждого a

$$\alpha(a, f) = \lim_{z\to 0} \ln |z^p f(z)| = C(f),$$

где p — кратность полюса $f(z)$ в нуле. В этом случае

$$-\int_K \alpha(a, f)\, d\mu_0(a) = -C(f)\, W(K). \quad \textbf{(1.8.7)}$$

Оценка (1.8.5) следует из неравенства (1.8.6) и из равенства (1.8.7).

Теорема 1.8.1. *Для произвольной мероморфной функции $f(z)$ множество $V(f)$ имеет логарифмическую емкость нуль.*

Доказательство. Множество $V(f)$ является борелевским. Пусть для каждого ε, $0 < \varepsilon < 0{,}5$,

$$E(r) = \{a : N(r, a) \leqslant T(r) - T^{0,5+\varepsilon}(r),\ |a| \leqslant 0{,}5\}, \quad \textbf{(1.8.8)}$$

где

$$T(r, f) = T(r);\ N(r, a, f) = N(r, a).$$

Множество $E(r)$ — замкнутое [21, с. 278]. Из формул (1.8.5) и (1.8.8) находим

$$\int\limits_{E(r)} N(r, a)\, d\mu_0(a) \leqslant [T(r) - T^{0,5+\varepsilon}(r)]\, W(E(r)); \qquad (1.8.9)$$

$$\int\limits_{E(r)} N(r, a)\, d\mu_0(a) \geqslant T(r)\, W(E(r)) + C(f)\, W(E(r)) - 1. \qquad (1.8.10)$$

Из выражений (1.8.9) и (1.8.10) следует, что при $r \geqslant r_0$

$$W(E(r)) \leqslant \{T^{0,5+\varepsilon}(r) + C(f)\}^{-1} \leqslant 2T^{-0,5-\varepsilon}(r). \qquad (1.8.11)$$

При $0 < \varepsilon < 0{,}5$ функция $x - x^{0,5+\varepsilon}$ строго возрастает при $x > 1$. Выберем r так, чтобы $T(r) > 1$ и определим последовательность $\{r_n\}$ из рекуррентного соотношения

$$T(r_n) - T^{0,5+\varepsilon}(r_n) = T(r_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Находим

$$T(r_n) = T(r_{n-1}) + T^{0,5+\varepsilon}(r_n) > 1 + T(r_{n-1}),$$

значит,

$$\lim_{n\to\infty} T(r_n) = \infty,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$. Пусть $\{E(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — система множеств, определенных соотношением (1.8.8) с $r = r_n$. Положим при фиксированном $m \geqslant m_0$ $E_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E(r_n)$. Выберем любое $r \geqslant r_m$ и найдем n такое, что $r_n \leqslant r < r_{n+1}$, тогда для каждого $a \notin E_m$ имеем

$$a \notin E(r_n).$$

Таким образом,

$$N(r, a) \geqslant N(r_n, a) > T(r_n) - T^{0,5+\varepsilon}(r_n) \geqslant T(r_n) -$$
$$- T^{0,5+\varepsilon}(r_n) + \{T(r) - T^{0,5+\varepsilon}(r)\} - \{T(r_{n+1} - T^{0,5+\varepsilon}(r_{n+1})\} =$$
$$= T(r) - T^{0,5+\varepsilon}(r) - T^{0,5+\varepsilon}(r_n) \geqslant T(r) - 2T^{0,5+\varepsilon}(r). \qquad (1.8.12)$$

Из выражения (1.8.12) непосредственно следует, что для каждого $a \notin E_m$ $\Delta(a, f) = 0$, значит, для каждого m

$$V(f) \cap K(0, 1/2) = V_1(f) \subset E_m.$$

Поэтому

$$\operatorname{cap}_2 V_1(f) \leqslant \operatorname{cap}_2 E_m. \qquad (1.8.13)$$

С другой стороны, в силу соотношений (1.7.2) и (1.8.11)

$$W(E_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} W(E(r_n)) \leqslant 2 \sum_{n=m}^{n} T^{-0,5-\varepsilon}(r_n) =$$

$$= 2\sum_{n=m}^{\infty}\frac{T(r_n)-T(r_{n-1})}{T^{1+\varepsilon}(r_n)} = 2\sum_{n=m}^{\infty}\int_{r_{n-1}}^{r_n}\frac{dT(r)}{T^{1+\varepsilon}(r_n)} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{n=m}^{\infty}\int_{r_{n-1}}^{r_n}\frac{dT(r)}{T^{1+\varepsilon}(r)} = 2\int_{r_{m-1}}^{\infty}\frac{dT}{T^{1+\varepsilon}} = \frac{2}{\varepsilon}T^{-\varepsilon}(r_{m-1}). \qquad (1.8.14)$$

Таким образом, правая часть оценки (1.8.14) может быть сделана произвольно малой с возрастанием m. Так как оценка (1.8.13) выполняется при любом m, то отсюда следует, что $\operatorname{cap}_2 V_1(f) = 0$.

Пусть теперь $R > 1$ любое и $V_R(f) = V(f) \cap K(0, 0{,}5R)$. Покажем, что $\operatorname{cap}_2 V_R(f) = 0$. Для этой цели рассмотрим мероморфную функцию $f_R(z) = R^{-1}f(z)$ и заметим, что $V_R(f)$ получается из $V_1(f_R)$ преобразованием подобия относительно начала координат. Таким образом, $\operatorname{cap}_2 V_R(f) = R\operatorname{cap}_2 V_1(f_R) = 0$, следовательно, $\operatorname{cap}_2 V(f) = \operatorname{cap}_2 V(f) = 0$. Теорема доказана полностью.

9. Пики Г. Полиа для монотонных неограниченных функций

Установим теперь одну закономерность роста непрерывных неограниченных и неубывающих функций. Для последовательностей соответствующая закономерность роста первоначально была установлена Г. Полиа [31, с. 40]. Для общих классов функций пики Полиа введены в 1965 г. А. Эдреем в работе [43].

Определение. *Пусть $T(t)$ имеет конечный нижний порядок λ. Последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \infty$ называется последовательностью пиков Полиа функции $T(t)$, если по этой последовательности можно определить четыре последовательности:*

$$\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty};\ \{a_k\}_{k=1}^{\infty};\ \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty};\ \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ такие, что } a_k \geqslant 0;\ \zeta_k \geqslant 0;$$

$$A_k \geqslant 0;\ \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k = \lim_{k\to\infty}a_k = \lim_{k\to\infty}\zeta_k = 0,$$

а $\lim\limits_{k\to\infty}A_k = \lim\limits_{k\to\infty}a_k r_k = \infty$ и для каждого x, $a_k r_k \leqslant x \leqslant A_k r_k$, справедливо ($k \geqslant k_0$)

$$T(x) \geqslant (1-\zeta_k)(x/r_k)^{\lambda+\varepsilon_k}T(r_k). \qquad (1.9.1)$$

Имеет место следующая теорема существования пиков Полиа [43]:

Теорема 1.9.1. *Для любой положительной, непрерывной, неограниченной и неубывающей при $t \geqslant 0$ функции $T(t)$, имеющей*

конечный нижний порядок λ, существует последовательность ее пиков Полиа.

Прежде чем доказать эту теорему, приведем некоторые известные сведения относительно уточненного нижнего порядка функции $T(t)$.

Определение. *Функция $\lambda(t)$, заданная на $[0, +\infty)$, называется уточненным порядком, если она удовлетворяет таким условиям:*

1) $\lambda(t) \geqslant 0$;
2) $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \lambda$, $0 \leqslant \lambda < \infty$;
3) *функция $\lambda(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$;*
4) $\lim\limits_{t\to\infty} t\lambda'(t) \ln t = 0$.

Известно [11, с. 70], что если $T(t)$ положительная, непрерывная, неограниченная, неубывающая при $t \geqslant 0$ и имеет конечный нижний порядок λ, эта функция имеет уточненный порядок $\lambda(t)$ такой, что

$$\varliminf_{t\to\infty} T(t)\, t^{-\lambda(t)} = \sigma, \tag{1.9.2}$$

где $0 < \sigma < \infty$.

Уточненный порядок $\lambda(t)$, удовлетворяющий соотношению (1.9.2), называется нижним уточненным порядком функции $T(t)$. Из конструкции $\lambda(t)$ видно [11, с. 72], что $\lambda'(t)$ удовлетворяет оценке

$$|\lambda'(t)| \leqslant (\lambda + 2)^2 \{t \ln t \ln_2 t\}^{-1} \tag{1.9.3}$$

для всех $t \geqslant t_0$, за возможным исключением отдельной последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \infty$. Через $\ln_k t$ мы обозначаем

$$\ln(\ln_{k-1} t);\ \ln_1 t = \ln t;\ k = 2, 3, 4, \ldots$$

Далее нам понадобится

Лемма 1.2.1 [37, с. 155]. *Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные положительные при $t \geqslant t_0$ функции, $\psi(t)$ не убывает и*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty;\ \lim_{t\to\infty} \varphi(t)\,[\psi(t)]^{-1} = 0.$$

Тогда существует неограниченная последовательность $\{r_k\} \nearrow \infty$, для которой одновременно выполняются такие неравенства:

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(r_k),\quad t_0 \leqslant t \leqslant r_k; \tag{1.9.4}$$

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \leqslant \frac{\varphi(r_k)}{\psi(r_k)},\quad r_k \leqslant t. \tag{1.9.5}$$

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1.9.1. Положим при $t \geqslant t_0$ $\varphi(t) = \left\{t^{\lambda(t) + \ln_2^{-1} t}\right\} T^{-1}(t)$; $\psi(t) = t^{2\ln_2^{-1} t}$, где $\lambda(t)$ означает нижний уточненный порядок $T(t)$.

В силу соотношения (1.9.2) при $t \geqslant t_0$ $\varphi(t) \leqslant 2\sigma^{-1} t^{\ln_2^{-1} t}$,

поэтому $$\varphi(t)[\psi(t)]^{-1} \leqslant 2\sigma^{-1} t^{-\ln_2^{-1} t} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Кроме того, $$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, \varphi(t) = \infty.$$

Таким образом, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1.9.1. Поэтому существует последовательность $\{r_k\}_{k=1}^{\infty} \nearrow \infty$ такая, что [см. неравенства (1.9.4), (1.9.5)] при $t_0 \leqslant x \leqslant r_k$

$$\left\{x^{\lambda(x)+\ln_2^{-1} x}\right\} T^{-1}(x) \leqslant \left\{r_k^{\lambda(r_k)+\ln_2^{-1} r_k}\right\} T^{-1}(r_k) \qquad (1.9.6)$$

и при $x \geqslant r_k$

$$\left\{x^{\lambda(x)-\ln_2^{-1} x}\right\} T^{-1}(x) \leqslant \left\{r_k^{\lambda(r_k)-\ln_2^{-1} r_k}\right\} T^{-1}(r_k). \qquad (1.9.7)$$

Положим $a(x) = \{\ln_2 x\}^{-0,5}$ и $a_k = a(r_k)$, $A_k = a_k^{-1}$, где $\{r_k\}$ — последовательность, удовлетворяющая соотношениям (1.9.6) и (1.9.7). Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k r_k = \infty$.

Если $a_k r_k \leqslant x \leqslant r_k$, то в силу оценки (1.9.6)

$$T(x) \geqslant (x/r_k)^{\lambda(r_k)+\ln_2^{-1} r_k} x^{\lambda(x)-\lambda(r_k)} T(r_k) \geqslant$$
$$\geqslant (x/r_k)^{\lambda} (x/r_k)^{\lambda(r_k)-\lambda} x^{\lambda(x)-\lambda(r_k)} \left\{\ln_2 r_k^{-0,5\ln_2^{-1} r_k}\right\} T(r_k). \qquad (1.9.8)$$

Далее,

$$x^{\lambda(x)-\lambda(r_k)} \{\ln_2 r_k\}^{-0,5\ln_2^{-1} r_k} = \exp\{[\lambda(x) - \lambda(r_k)] \ln x -$$
$$- 0,5 \ln_3 r_k (\ln_2^{-1} r_k)\}. \qquad (1.9.9)$$

В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях и оценки (1.9.3) $$|\lambda(x) - \lambda(r_k)| \leqslant \max_{x\leqslant t\leqslant r_k} |\lambda'(t)| (r_k - x) \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda+2)^2 (r_k - x)(x \ln x \ln_2 x)^{-1}.$$

Значит, при $r_k \geqslant r_0$

$$|\lambda(x) - \lambda(r_k)| \ln x \leqslant (\lambda+2)^2 (r_k - x)(x \ln_2 x)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\lambda+2)^2 r_k/x (\ln_2^{-1} x) \leqslant (\lambda+2)^2 a_k^{-1} \ln_2^{-1} x \leqslant (\lambda+2)^2 \times$$
$$\times (\ln_2 r_k)^{0,5} \ln_2^{-1} a_k r_k \leqslant 2(\lambda+2)^2 (\ln_2 r_k)^{-0,5}. \qquad (1.9.10)$$

Положим для $r_k \geqslant r_0$

$$1 - \zeta_k = \exp - \{2(\lambda+2)^2 (\ln_2 r_k)^{-0,5} + 0,5 \ln_3 r_k \ln_2^{-1} r_k\}; \qquad (1.9.11)$$

$\varepsilon_k = \lambda(r_k) - \lambda$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ и в силу соотношений (1.9.8), (1.9.9), (1.9.10) для каждого x, $a_k r_k \leqslant x \leqslant r_k$,

$$T(x) \geqslant (x/r_k)^{\lambda+\varepsilon_k}(1-\zeta_k)\,T(r_k).$$

Таким образом, мы получили оценку (1.9.1).

Пусть теперь $\quad r_k \leqslant x \leqslant r_k a_k^{-1} = A_k r_k.$

В этом случае будем исходить из неравенства (1.9.7). Имеем

$$T(x) \geqslant (x/r_k)^{\lambda(r_k)} x^{\lambda(x)-\lambda(r_k)} (r_k/x)^{\ln_2^{-1} x}\, T(r_k).$$

Аналогично находим $\quad x^{\lambda(x)-\lambda(r_k)} (r_k/x)^{\ln_2^{-1} r_k} \geqslant$

$$\geqslant \exp\left\{[\lambda(x)-\lambda(r_k)]\ln x - 0{,}5\ln_3 r_k \ln_2^{-1} r_k\right\} \geqslant 1-\zeta_k,$$

где ζ_k определено соотношением (1.9.11).

Теорема 1.9.1 доказана полностью. Она дает возможность эффективно оценить рост $r_k^{-1}T(r_k)$. Пусть функция $T(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.9.1, $\{r_k\}$ — ее последовательность пиков Полиа.

Лемма 1.9.2. *Пусть $\{S_k\}$ и $\{R_k\}$ — две последовательности такие, что для каждого k $S_k \leqslant M^{-2}R_k$, где M — фиксированное достаточно большое число и для каждого k числа $2S_k$ и $2R_k$ — пики Полиа функции $T(r)$ (т. е. для каждого k $2S_k \in \{r_k\}$ и $2R_k \in \{r_k\}$). Тогда для $k \geqslant k_0$*

$$S_k^{-\lambda}T(2S_k) + R_k^{-\lambda}T(2R_k) \leqslant 2^{\lambda+1}\ln^{-1} 0{,}5M \int\limits_{2S_k}^{0{,}5R_K} \frac{T(x)}{x^{\lambda+1}}\,dx, \qquad (1.9.12)$$

где λ — нижний порядок $T(r)$.

Действительно, если $2S_k \leqslant x \leqslant MS_k$, тогда для $k \geqslant k_0$

$$T(x) \geqslant (1-\zeta_k)(0{,}5xS_k^{-1})^{\lambda}(2M^{-1})^{|\varepsilon_k|}\,T(2S_k) \geqslant$$
$$\geqslant 0{,}5\,(0{,}5xS_k^{-1})^{\lambda}\,T(2S_k). \qquad (1.9.13)$$

Аналогично для каждого x, $M^{-1}R_k \leqslant x \leqslant 0{,}5R_k$,

$$T(x) \geqslant (1-\zeta_k)(0{,}5xR_k^{-1})^{\lambda}(2M^{-1})^{|\varepsilon_k|}\,T(2R_k) \geqslant$$
$$\geqslant 0{,}5\,(0{,}5xR_k^{-1})^{\lambda}\,T(2R_k). \qquad (1.9.14)$$

Оценки (1.9.13) и (1.9.14) дают

$$\int\limits_{2S_k}^{0{,}5R_k} \frac{T(x)}{x^{\lambda+1}}\,dx \geqslant 0{,}5\,(0{,}5S_k^{-1})^{\lambda}\,T(2S_k) \int\limits_{2S_k}^{MS_k} \frac{dx}{x} + 0{,}5\,(0{,}5R_k^{-1})^{\lambda} \times$$

$$\times\, T(2R_k) \int\limits_{M^{-1}R_k}^{0{,}5R_k} \frac{dx}{x} = 2^{-\lambda-1}\left\{S_k^{-\lambda}T(2S_k) + R_k^{-\lambda}T(2R_k)\right\}\ln 0{,}5M.$$

Последнее неравенство равносильно выражению (1.9.12).

Глава II

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

В этой главе, исходя из формулы Грина, получена формула для представления $\ln|f(z)|$ мероморфной функции $f(z)$ в секторе $d_R = \{z : |z| < R,\ |\arg z| < \alpha\}$ через среднее значение $\ln|f(z)|$ на дугах окружностей, содержащихся в этом секторе, и через функции, зависящие от нулей и полюсов $f(z)$, попавших в данный сектор. Различные варианты такой формулы были первоначально выведены в ряде наших работ [23; 25; 26]. Аналогичное представление для целых функций, но основанное на другой идее, было найдено Н. В. Говоровым [5]. Дальнейшая модификация формулы для представления $\ln|f(z)|$ мероморфных функций в секторе была осуществлена В. Фуксом [16].

1. Представление мероморфных функций в секторе

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и

$$d_R = \{z : |z| < R,\ |\arg z| < \alpha\},$$

где $0 < \alpha < \pi$, $R > 1$. Сделаем замену:

$$\zeta = z^{2x} = r^{2x} e^{2i\varphi x} = \rho e^{i\theta},$$

где $x = \pi(2\alpha)^{-1}$. Тогда в секторе

$$D_R = \{\zeta : |\zeta| < R^{2x} = R_1,\ |\arg \zeta| < \pi\}$$

определится мероморфная функция

$$F(\zeta) = f(\zeta^{(2x)^{-1}}) = f(z). \tag{2.1.1}$$

Рассмотрим при $0 < v < R_1$ и $\zeta \in D_R$ функцию

$$Q(v, \zeta) = \ln\{[|R_1^2 - v\zeta|][|R_1(v - \zeta)|]^{-1} \times$$
$$\times [R_1(v + |\zeta|)][R_1^2 + v|\zeta|]^{-1}\}. \tag{2.1.2}$$

Если $\zeta \in \partial D_R$, то для каждого v, $0 < v < R_1$, $Q(v, \zeta) = 0$.

Вычислим производные от $Q(v, \zeta)$ на границе D_R по направлению внутренней нормали. Пусть $\zeta = \rho e^{i\theta}$, тогда

$$\left.\frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n}\right|_{\zeta = R_1 e^{i\theta}} = -\left.\frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial \rho}\right|_{\rho = R_1} = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{R_1^2 - v\zeta}{R_1(v - \zeta)} + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{R_1(v+\rho)}{R_1^2+v\rho}\Bigg\}_{\rho=R_1}=-\mathrm{Re}\left\{-\frac{ve^{i\theta}}{R_1^2-v\rho e^{i\theta}}+\frac{e^{i}}{v-\rho e^{i\theta}}+\frac{1}{v+\rho}-\right.$$

$$\left.-\frac{v}{R_1^2+v\rho}\right\}_{\rho=R_1}=-\mathrm{Re}\left\{-\frac{ve^{i\theta}}{R_1(R_1-ve^{i\theta})}+\frac{e^{i\theta}}{v-R_1e^{i\theta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{v+R_1}-\frac{v}{R_1(R_1+v)}\right\}=-\mathrm{Re}\left\{\frac{v^2-R_1^2}{R_1(R_1-ve^{i\theta})(R_1-ve^{-i\theta})}+\right.$$

$$\left.+\frac{R_1-v}{R_1(v+R_1)}\right\}=\frac{R_1^2-v^2}{R_1(R_1^2+v^2-2R_1v\cos\theta)}-\frac{R_1-v}{R_1(R_1+v)}=$$

$$=\frac{2v(R_1-v)}{R_1+v}\,\frac{1+\cos\theta}{R_1^2+v^2-2R_1v\cos\theta}. \qquad (2.1.3)$$

Пусть теперь $0<\rho<R_1$ и $\theta\neq\pm\pi$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Re}\ln\frac{R_1^2-v\rho e^{i\theta}}{R_1(v-\rho e^{i\theta})}=\mathrm{Re}\left\{-\frac{v\rho ie^{i\theta}}{R_1^2-v\rho e^{i\theta}}+\right.$$

$$\left.+i\frac{\rho e^{i\theta}}{v-\rho e^{i\theta}}\right\}\underset{\theta\to\pm\pi}{\to}\mathrm{Re}\left\{i\frac{v\rho}{R_1^2+v\rho}-i\frac{\rho}{v+\rho}\right\}=0.$$

Отсюда следует, что

$$\left\{\frac{\partial Q(v,\ \zeta)}{\partial n}\right\}_{\zeta=\rho e^{\pm i\pi}}=0. \qquad (2.1.4)$$

Найдем значение $\Delta Q(v,\ \rho e^{i\varphi})$. Если ζ не принадлежит некоторой окрестности точки v, то

$$\Delta\ln\left|\frac{R_1^2-v\zeta}{R_1(v-\zeta)}\right|=0.$$

Значит,

$$\Delta Q(v,\ \rho e^{i\varphi})=\Delta\ln\frac{R_1(v+\rho)}{R_1^2+v\rho}.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$\Delta Q(v,\ \rho e^{i\varphi})=\frac{(R_1^2-v^2)\,v\,(R_1^2-\rho^2)}{\rho(v+\rho)^2(R_1^2+v\rho)^2}. \qquad (2.1.5)$$

Пусть c_k — нули и полюсы функции $f(z)$, попавшие в замкнутый сектор $\overline{d_R}$, и $p_k=c_k^{2x}$ — их образы в ζ-плоскости. Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы замкнутые круги

$$\overline{K(p_k,\ \varepsilon)}=\{\zeta:|\zeta-p_k|\leqslant\varepsilon\},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

не пересекались при различных p_k, где $p_0 = 0$; $p_{n-1} = -R_1$; $p_n = v$. Обозначим через $l(p_k, \varepsilon)$ либо полную границу $K(p_k, \varepsilon)$, либо ту ее часть, которая попала в область D_R. Выбросим из области D_R кружки $K(p_k', \varepsilon)$, полностью содержащиеся в D_R, и части кружков $K(p_k'', \varepsilon) \cap D_R$. Полученную многосвязную область обозначим через $B_R(\varepsilon)$ и применим к ней формулу Грина [см. равенство (1.0.1)]:

$$-\iint\limits_{B_R(\varepsilon)} (P\Delta Q - Q\Delta P)\, d\sigma = \int\limits_{\partial B_R(\varepsilon)} \left(P\frac{\partial Q}{\partial n} - Q\frac{\partial P}{\partial n}\right) ds \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

с функциями $P = P(\zeta) = \ln|F(\zeta)|$ и $Q = Q(v, \zeta)$, определенными соотношениями (2.1.1) и (2.1.2). Замечая, что при $\zeta \in B_R(\varepsilon)$ $\Delta P(\zeta) \equiv 0$ и учитывая соотношения (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), равенство (2.1.6), получаем

$$-\iint\limits_{B_R(\varepsilon)} \ln|F(\rho e^{i\theta})| \frac{(R_1^2 - v^2)\, v\, (R_1^2 - \rho^2)}{\rho\,(v+\rho)^2\,(R_1^2 + v\rho)^2}\, \rho d\rho d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int\limits_{l(p_k,\, \varepsilon)} \ln|F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds - \int\limits_{l(p_k,\, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln|F(\zeta)|}{\partial n}\, ds \right\} +$$

$$+ \int\limits_{l(v,\, \varepsilon)} \ln|F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n}\, ds - \int\limits_{l(v,\, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln|F(\zeta)|}{\partial n}\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_R'} \ln|F(R_1 e^{i\theta})\, 2v \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \frac{(1+\cos\theta)\, R_1}{R_1^2 + v^2 - 2R_1 v \cos\theta}\, d\theta, \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

где Γ_R — внешняя граница области $B_R(\varepsilon)$ и

$$\Gamma_R' = \Gamma_R \setminus \bigcup_{p_k''} \{\Gamma_R \cap K(p_k'', \varepsilon)\} \text{ (рис. 1).}$$

Если $\zeta \in l(p_k, \varepsilon)$ и p_k совпадает с нулем либо с полюсом функций $F(\zeta)$, то

$$\ln|F(\zeta)| = \lambda_k \ln|\zeta - p_k| + \ln|\psi_k(\zeta)|, \qquad \textbf{(2.1.8.)}$$

где λ_k равно порядку корня p_k, либо порядку полюса, взятому со знаком минус, а $\psi_k(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \overline{K(p_k, \varepsilon)}$. Полагая в выражении (2.1.8) $\zeta = p_k + \varepsilon e^{i\theta}$, находим

$$\frac{\partial \ln|F(\zeta)|}{\partial n} = \frac{\lambda_k}{\varepsilon} + \alpha_k(\zeta), \qquad \textbf{(2.1.9)}$$

где $|\alpha_k(\zeta)| \leqslant M_k$, причем постоянная M_k не зависит от ε. Из формулы (2.1.9) получаем

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int\limits_{l(p_k,\, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln|F(\zeta)|}{\partial n}\, ds = 2\pi\lambda_k Q(v, p_k). \qquad \textbf{(2.1.10)}$$

Соотношение (2.1.10) сохраняет силу, когда $p_k = 0$ или $p_k = -R_1$. В этом случае его правая часть равна нулю. Если $p_k = v$, в силу равенства (2.1.9) и определения $Q(v, \zeta)$ получаем

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{l(v,\,\varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln |F(\zeta)|}{\partial n} ds = \infty. \qquad (2.1.11)$$

Если же v не совпадает ни с нулем, ни с полюсом $F(\zeta)$, правая часть формулы (2.1.11) равна нулю. Пусть снова $\zeta \in l(p_k, \varepsilon)$ и p_k — либо нуль, либо полюс $F(\zeta)$. Если $p_k \neq v$, то

$$\left| \frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n} \right| \leqslant C_k < \infty, \text{ следовательно,}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l(p_k,\,\varepsilon)} \ln |F(\zeta)| \frac{\partial}{\partial n} Q(v, \zeta)\, ds = 0. \qquad (2.1.12)$$

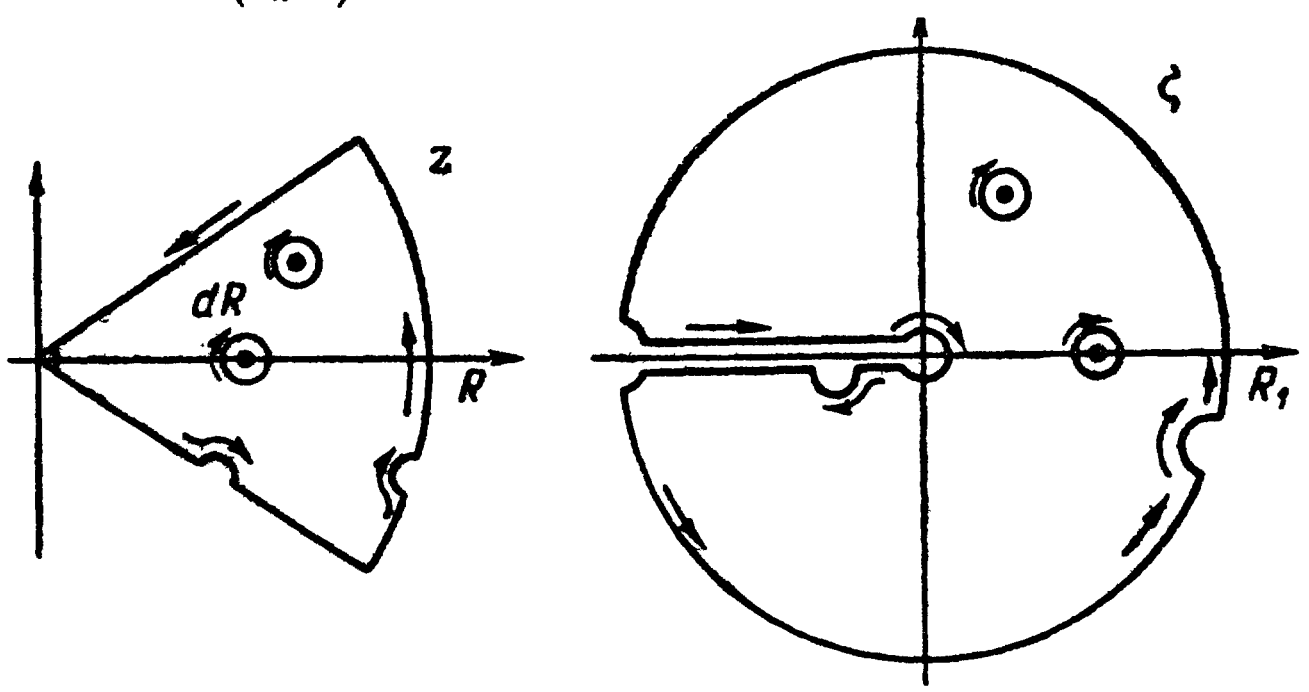

Рис. 1.

Если же $\zeta \in l(v, \varepsilon)$, то

$$\frac{\partial}{\partial n} Q(v, \zeta) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(1) \quad (\varepsilon \to 0),$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{l(v,\varepsilon)} \ln |F(\zeta)| \frac{\partial}{\partial n} Q(v, \zeta)\, ds = -2\pi \ln |F(v)|. \qquad (2.1.13)$$

Соотношение (2.1.13) сохраняет силу и в случае, когда либо корень, либо полюс $F(\zeta)$ совпадает с v.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соотношении (2.1.7). Учитывая выражения (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12), (2.1.13), находим

$$-\int_0^{R_1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(\rho e^{i\theta})| \frac{(R_1^2 - v^2)(R_1^2 - \rho^2)}{(v+\rho)^2 (R_1^2 + v\rho)^2} v\, d\rho\, d\theta =$$

$$= -2\pi \ln |F(v)| + 2\pi \sum_{p_k} \Delta_k Q(v, p_k) + 2v \int_{-\pi}^{\pi} \ln |F(R_1 e^{i\theta})| \times$$

$$\times \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2R_1 v \cos\theta} R_1 d\theta, \qquad (2.1.14)$$

где суммирование в правой части проводится по всем нулям и полюсам $F(\zeta)$ с учетом их кратностей, а $\Delta_k = 1$, если p_k — полюс и $\Delta_k = -1$, когда p_k — корень $F(\zeta)$.

Перейдем в z-плоскость. Для этого заметим, что $\zeta = \rho e^{i\theta} = t^{2x}e^{2i\varphi x}$, т. е. $\rho = t^{2x}$; $\theta = 2\varphi x$; $R^{2x} = R_1$; $\alpha = \pi/2x$; $d\rho = 2xt^{2x-1}dt$; $d\theta = 2xd\varphi$; $d\rho d\theta = 4x^2t^{2x-1}dtd\varphi$. Пусть $v = r^{2x}$, тогда [см. уравнение (2.1.1)] $F(v) = f(r)$. Соотношение (2.1.14) принимает вид

$$\ln|f(r)| = \frac{4r^{2x}}{2\pi}x^2\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln|f(te^{i\varphi})|\frac{(R^{4x}-r^{4x})(R^{4x}-t^{4x})t^{2x-1}dtd\varphi}{(r^{2x}+t^{2x})^2(R^{4x}+r^{2x}t^{2x})^2}+$$

$$+2x\frac{R^{2x}r^{2x}}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln|f(Re^{i\varphi})|\frac{R^{2x}-r^{2x}}{R^{2x}+r^{2x}}\times$$

$$\times\frac{(1+\cos 2x\varphi)\,d\varphi}{R^{4x}+r^{4x}-2R^{2x}r^{2x}\cos 2x\varphi}+\sum_{c_k\in d_R}\Delta_k Q(r^{2x},\ c_k^{2x}). \qquad (2.1.15)$$

Теперь мы имеем весь вспомогательный материал для доказательства основного результата этого параграфа.

Теорема 2.1.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция; $0 < \alpha \leqslant \pi$, $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$, $R > 1$ — произвольные фиксированные числа. Тогда для каждого r, $0 < r < R$, справедливо соотношение*

$$\ln|f(re^{i\vartheta})| = (2x)^2r^{2x}\int_0^R\frac{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln|f(te^{i(\theta+\vartheta)})|\,d\theta\right\}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}t^{2x-1}dt+$$

$$+\sum_{b_k(\vartheta)\in d_R}\ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-b_k^{2x}}\right|-$$

$$-\sum_{a_k(\vartheta)\in d_R}\ln\left|\frac{r^{2x}+|a_k|^{2x}}{r^{2x}-a_k^{2x}}\right|+K(R,\ r,\ \vartheta,\ \alpha), \qquad (2.1.16)$$

*где $b_k(\vartheta)$ — полюсы мероморфной функции $f(ze^{i\vartheta})$; $a_k(\vartheta)$ — ее нули; для каждого $r < R$ имеет место оценка**

$$|K(R,\ r,\ \vartheta,\ \alpha)| \leqslant 2x(r/R)^{2x}[T(R,\ f)+C]+$$

$$+\frac{2r^{2x}}{R^{2x}-r^{2x}}n(R,\ 0,\ \infty,\ f)+C(r/R)^{2x}+$$

$$+4x\frac{R^xr^x}{R^{2x}-r^{2x}}[T(R,\ f)+C]. \qquad (2.1.17)$$

---

* Использовано обозначение $n(R,\ 0,\ \infty,\ f) = n(R,\ 0,\ f) + n(R,\ \infty,\ f)$.

Доказательство. Применим формулу (2.1.15) к функции $f_1(z) = f(ze^{i\vartheta})$ (ϑ — фиксировано). В силу равенства (2.1.2)

$$Q(r^{2x}, c_k^{2x}) = \ln\left|\frac{R^{4x} - r^{2x}c_k^{2x}}{R^{2x}(r^{2x} - c_k^{2x})}\right| \frac{R^{2x}(r^{2x} + |c_k|^{2x})}{R^{4x} + r^{2x}|c_k|^{2x}} =$$

$$= \ln\frac{r^{2x} + |c_k|^{2x}}{|r^{2x} - c_k^{2x}|} + \ln\left|\frac{R^{4x} - r^{2x}c_k^{2x}}{R^{4x} + r^{2x}|c_k|^{2x}}\right|.$$

Тогда

$$K(R, r, \vartheta, \alpha) = -(2x)^2 r^{2x} \int_0^R \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(te^{i(\vartheta+\varphi)})|\, d\varphi\right\} \frac{R^{4x}t^{2x-1}dt}{(R^{4x} + r^{2x}t^{2x})^2} +$$

$$+ 2x\frac{(Rr)^{2x}}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(Re^{i(\vartheta+\varphi)})| \frac{R^{2x} - r^{2x}}{R^{2x} + r^{2x}} \frac{(1 + \cos 2x\varphi)\, d\varphi}{R^{4x} + r^{4x} - 2R^{2x}r^{2x}\cos 2x\varphi} +$$

$$+ \sum_{b_k(\vartheta)\in d_R} \ln\left|\frac{R^{4x} - r^{2x}b_k^{2x}}{R^{4x} + r^{2x}|b_k|^{2x}}\right| -$$

$$- \sum_{a_k(\vartheta)\in d_R} \ln\left|\frac{R^{4x} - r^{2x}a_k^{2x}}{R^{4x} + r^{2x}|a_k|^{2x}}\right|. \qquad (2.1.18)$$

Далее отметим ($0 \leqslant t \leqslant R$), что

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(te^{i(\vartheta+\varphi)})|\, d\varphi \geqslant -m(t, f) \geqslant -T(t, f) \geqslant -T(R, f)$$

и [см. выражение (1.2.6)]

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(te^{i(\vartheta+\varphi)})|\, d\varphi \leqslant m(t, 0, f) \leqslant T(t, f) +$$

$$+ C + n(0, 0, f)\ln^+(1/t).$$

Оценки (2.1.18) и (2.1.19) дают ($R > 1$; $r < R$)

$$|K(R, r, \vartheta, \alpha)| \leqslant (2x)^2 r^{2x}[T(R, f) + C]\int_0^R \frac{R^{4x}t^{2x-1}dt}{(R^{4x} + r^{2x}t^{2x})^2} +$$

$$+ 4xR^{2x}r^{2x}\frac{R^{2x} - r^{2x}}{R^{2x} + r^{2x}}\frac{2}{(R^{2x} - r^{2x})^2}[T(R, f) + C] +$$

$$+ \sum_{|c_k|\leqslant R} \ln\frac{R^{4x} + r^{2x}|c_k|^{2x}}{|R^{4x} - r^{2x}|c_k|^{2x}|} +$$

$$+ (2x)^2 r^{2x}\int_0^1 \frac{R^{4x}t^{2x-1}n(0, 0, f)\ln^+ 1/t}{(R^{4x} + r^{2x}t^{2x})^2}dt \leqslant$$

$$\leqslant 2x(r/R)^{2x}[T(R, f) + C] + n(0, 0, f)(r/R^2)^{2x} +$$

$$+ 4x\frac{(Rr)^x}{R^{2x} - r^{2x}}[T(R, f) + C] + n(R, 0, \infty, f)\ln\frac{R^{2x} + r^{2x}}{R^{2x} - r^{2x}}.$$

Отсюда легко следует оценка (2.1.17).

2. Величины отклонений мероморфных функций

Положим для произвольной мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$

$$L(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln^+ (|f(z) - a|)^{-1}, & \text{если } a \neq \infty; \\ \max\limits_{|z|=r} \ln^+ |f(z)|, & \text{если } a = \infty. \end{cases}$$

Определение. *Величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ относительно числа a называется значение*

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r \to \infty} L(r, a, f) T^{-1}(r, f).$$

Множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ называется множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$.

Ясно, что всегда $\delta(a, f) \leqslant \beta(a, f)$. Простые примеры показывают, что величины отклонений могут отличаться от величин дефектов. Приведем два примера.

Пример 1. Пусть $h(z) = e^z$. Имеем $L(r, 0, h) = L(r, \infty, h) = r$; $T(r, h) = r/\pi$. Значит,

$$\beta(0, h) = \beta(\infty, h) = \pi; \quad \delta(0, h) = \delta(\infty, h) = 1.$$

Пример 2. Пусть $f(z) = \varphi_1(z)[\varphi_2(z)]^{-1}$ — функция, определенная в гл. I (§ 6). Из соотношений (1.6.1) и (1.6.4) следует, что для этой функции существует счетное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что для

$$n = 1, 2, 3, \ldots \; L(r, a_n, f) \geqslant 0{,}5 r \eta_n^2 + C \; (r \geqslant r_0(n)), \quad \textbf{(2.2.1)}$$

а $T(r, f) \leqslant 2r + C$, где $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность положительных чисел, подчиненная единственному условию: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k = 1$. Оценка (2.2.1) показывает, что для $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\beta(a_n, f) \geqslant 0{,}25\eta_n^2$.

Изучение свойств величин отклонений для произвольной мероморфной функции мы начнем с нахождения точной оценки сверху для величины отклонения мероморфной функции конечного нижнего порядка. Имеет место следующий результат [23; 24; 46]:

Теорема 2.2.1. *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ, то для каждого комплексного числа a*

$$\beta(a, f) \leqslant B(\lambda, \Delta(a, f)), \quad \textbf{(2.2.2)}$$

где

$$B(\lambda)\ \Delta) = \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5 \text{ либо} \\ & \text{если } 0<\lambda<0{,}5, \text{ но} \\ & \sin 0{,}5\pi\lambda \geqslant \sqrt{0{,}5\Delta}; \\ \pi\lambda\,[\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda], & \text{если } 0<\lambda<0{,}5 \text{ и} \\ & \sin 0{,}5\pi\lambda < \sqrt{0{,}5\Delta}; \\ \Delta & \text{если } \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

а $\Delta(a, f)$ *означает дефект в смысле Ж. Валирона в точке* a.

Доказательство. Рассмотрим случай $a=\infty$. Пусть $\beta(\infty, f)>0$ и при фиксированном $r \geqslant r_0$ $\boldsymbol{L}(r, \infty, f) = \boldsymbol{L}(r, f) = \ln|f(re^{i\vartheta(r)})|$. Применяя соотношение (2.1.16) при фиксированном r с $\vartheta=\vartheta(r)$ и $r \leqslant R\ k^{-1}$, где $1<k\leqslant 2$ — фиксированное число, получаем

$$\boldsymbol{L}(r, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t, f)\, t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{|b_k|\leqslant R} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} + 2x\,(r/R)^{2x}\,[T(R, f)+C] +$$

$$+ \frac{4}{\ln k}\,(r/R)^{2x}\,\frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\,[T(kR, f)+C] +$$

$$+ 4x\left(\frac{r}{R}\right)^x \frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\,[T(R, f)+C] + C\left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \leqslant$$

$$\leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t, f)\, t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt + \sum_{|b_k|\leqslant R} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} + C\left(\frac{r}{R}\right)^{2x} +$$

$$+ \frac{10x}{\ln k}\left(\frac{r}{R}\right)^x \frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\,[T(kR, f)+C]. \tag{2.2.4}$$

Заметим, что оценка (2.2.4) справедлива при любом фиксированном $x \geqslant 0{,}5$. Будем далее считать, что $x > \max(0{,}5;\ \lambda)$. Выберем S так, что $0<2S<0{,}5R$, поделим обе части неравенства (2.2.4) на $r^{\lambda+1}$ и проинтегрируем его по r от $2S$ до $0{,}5R$. Получаем, полагая $k=2$,

$$\int_{2S}^{0{,}5} \frac{L(r, f)}{r^{\lambda+1}}\, dr \leqslant (2x)^2 \int_0^R m(t, f)\, t^{2x-1} dt \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{r^{2x-\lambda-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dr +$$

$$+ \sum_{|b_k|<R} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\, dr +$$

$$+ 40x[T(2R, f) + C]R^{-\lambda}(x-\lambda)^{-1} + CR^{-\lambda}(x-\lambda)^{-1}. \quad (2.2.5)$$

Далее нам понадобятся значения следующих двух интегралов:

Лемма 2.2 1. *Для каждого* $t > 0$ *и* $0 < \lambda < 2x$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{r^{2x-\lambda-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2} = t^{-2x-\lambda}\pi\lambda(2x)^{-2}\sin^{-1}(0{,}5\pi\lambda x^{-1}). \quad (2.2.6)$$

Если же $\lambda = 0$, *то* $I_1 = t^{-2x}(2x)^{-1}$. *Для каждого* $|b_k| > 0$ *и* $0 < \lambda < 2x$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{1}{r^{\lambda+1}} \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{|r^{2x} - |b_k|^{2x}|} dr = \pi |b_k|^{-\alpha}\lambda^{-1} \operatorname{tg} 0{,}25(\pi\lambda x^{-1}). \quad (2.2.7)$$

Если $\lambda = 0$, *то* $I_2 = 0{,}25\pi^2 x^{-1}$.

Действительно, равенство (2.2.6) получается так:

$$I_1 = t^{-2x-\lambda}(2x)^{-1}\int_0^\infty \frac{u^{-\lambda/(2x)}}{(1+u)^2} du =$$

$$= t^{-2x-\lambda}\pi\lambda(2x)^{-2}\sin^{-1} 0{,}5\pi\lambda x^{-1}.$$

Равенство (2.2.7) следует из соотношения

$$I_2 = |b_k|^{-\lambda}(2x)^{-1}\int_0^\infty \frac{1}{u^{1+\lambda/(2x)}} \ln\frac{1+u}{|1-u|} du =$$

$$= |b_k|^{-\lambda}\pi\lambda^{-1}[\sin^{-1}(0{,}5\pi\lambda x^{-1}) - \operatorname{tg}^{-1}(0{,}5\pi\lambda x^{-1})] =$$

$$= |b_k|^{-\lambda}\pi\lambda^{-1}\operatorname{tg} 0{,}25(\pi\lambda x^{-1}).$$

Продолжим доказательство теоремы 2.2.1. Имеем для каждого S $(0 < S < 0{,}25R;\ \lambda > 0)$ [с учетом соотношения (2.2.6)]

$$(2x)^2\int_0^R m(t, f)t^{2x-1}dt \int_{2S}^{0{,}5} \frac{r^{2x-\lambda-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2} dr \leqslant$$

$$\leqslant (2x)^2\int_0^{2S} m(t, f)t^{2x-1}dt \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{r^{2x-\lambda-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2} dr +$$

$$+ \frac{\pi\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})}\int_{2S}^R \frac{m(t, f)}{t^{\lambda+1}} dt \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})}\int_{2S}^{0{,}5} \frac{m(t, f)}{t^{\lambda+1}} dt +$$

$$+ \frac{\pi 2^\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})}\frac{T(R, f)}{R^\lambda} + (2x)^2 T(2S, f)\int_{2S}^{0{,}5R} r^{2x-\lambda-1}dr \times$$

$$\times \int_0^{2S} \frac{t^{2x-1}dt}{(t^{2x}+r^{2x})^2} \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{m(t, f)}{t^{\lambda+1}} dt +$$

$$+ \frac{2x}{\lambda} \frac{T(2S, f)}{(2S)^{\lambda}} + \frac{\pi 2^{\lambda}}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})} \frac{T(R, f)}{R^{\lambda}}. \qquad (2.2.8)$$

Далее, в силу равенства (2.2.7) при $\lambda > 0$

$$\sum_{|b_k|<R} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} dr \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|b_k|<S} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} dr +$$

$$+ \frac{\pi}{\lambda} \sum_{S<|b_k|<R} |b_k|^{-\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n(S, f)}{\lambda(2S)^{\lambda}} \ln 3 + \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_S^R \frac{dn(t, f)}{t^{\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \frac{T(2S, f)}{\lambda(2S)^{\lambda}} + \frac{\pi(2+\lambda)}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} T(2R, f) R^{-\lambda} +$$

$$+ \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_S^R \frac{N(t, f)}{t^{\lambda}+1} dt \leqslant C \left\{ \frac{T(2S, f)}{(2S)^{\lambda}} + \right.$$

$$\left. + \frac{T(2R, f)}{(2R)^{\lambda}} \right\} + \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{N(t, f)}{t^{\lambda+1}} dt. \qquad (2.2.9)$$

Оценки (2.2.5), (2.2.8), (2.2.9) в случае $\lambda > 0$ дают

$$\int_{2S}^{0{,}5} \frac{L(r, f)}{r^{\lambda}+1} dr \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{m(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr +$$

$$+ \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{N(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr + C(x, \lambda) \{T(2S, f)(2S)^{-\lambda} +$$

$$+ T(2R, f)(2R)^{-\lambda}\} = \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{T(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr +$$

$$+ \left[\frac{\pi\lambda}{\sin(0{,}5\pi\lambda x^{-1})} - \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{4x} \right] \int_{2S}^{0{,}5R} \frac{m(r, f)}{r^{\lambda+1}} dr +$$

$$+C(x,\ \lambda)\{T(2S,\ f)(2S)^{-\lambda}+T(2R,\ f)(2R)^{-\lambda}\}=$$

$$=\pi\lambda\operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2x}\int\limits_{2S}^{0,5R}\frac{m(r,\ f)}{r^{\lambda+1}}dr+\pi\lambda\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x}\int\limits_{2S}^{0,5R}\frac{T(r,\ f)}{r^{\lambda+1}}dr+$$

$$+C(x,\ \lambda)\{T(2S,\ f)(2S)^{-\lambda}+T(2R,\ f)(2R)^{-\lambda}\}. \qquad \textbf{(2.2.10)}$$

По условию $x>\lambda$, поэтому $\operatorname{ctg}\ 0{,}5\pi\lambda x^{-1}>0$. Далее, для каждого $\varepsilon>0$ существует $S_0(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого $r\geqslant S_0(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$m(r,\ f)\leqslant\Delta(\infty,\ f)(1+\varepsilon)T(r,\ f). \qquad \textbf{(2.2.11)}$$

Положим теперь в формуле (2.2.10) $S=S_\nu\in\{S_k\}$ $(S_\nu>S_0(\varepsilon))$ и $R=R_\nu\in\{R_k\}$, где $\{S_k\}$ и $\{R_k\}$ — две последовательности, такие что для каждого k $S_k\leqslant 0{,}5e^{-\varepsilon^{-1}}R_k$ и для каждого k $2S_k$ и $2R_k$ являются пиками Полиа функции $T(r,\ f)$. Учитывая соотношения (1.9.12), (2.2.10), (2.2.11), получаем

$$\int\limits_{2S_\nu}^{0,5R_\nu}L(r,\ f)\frac{dr}{r^{\lambda+1}}\leqslant$$

$$\leqslant\pi\lambda\left\{\operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2x}(1+\varepsilon)\Delta(\infty,\ f)+\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x}+C(x,\ \lambda)\varepsilon\right\}\int\limits_{2S_\nu}^{0,5R_\nu}\frac{T(r,\ f)}{r^{\lambda+1}}dr.$$

Таким образом, на сегменте $[2S_\nu,\ 0{,}5R_\nu]$ содержится значение r_ν такое, что

$$L(r_\nu,\ f)\leqslant\pi\lambda\left\{(1+\varepsilon)\Delta(\infty,\ f)\operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2x}+\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x}+\varepsilon C(x,\ \lambda)\right\}T(r_\nu,\ f),$$

поэтому для каждого $x>\max(0{,}5;\ \lambda)$ имеет место оценка

$$\beta(\infty,\ f)\leqslant\pi\lambda\left\{\Delta(\infty,\ f)\operatorname{ctg}\frac{\pi\lambda}{2x}+\operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x}\right\}. \qquad \textbf{(2.2.12)}$$

В случае $\lambda=0$ для каждого $x>0{,}5$ $\beta(\infty,\ f)\leqslant 2x\Delta(\infty,\ f)$. **(2.2.13)**

Пусть $\sigma=0{,}5\pi\lambda x^{-1}$. В силу выбора x $0<\sigma<0{,}5\pi$. Найдем минимум функции $\psi(\sigma)=\Delta\operatorname{ctg}\sigma+\operatorname{tg}0{,}5\sigma$ $(0<\Delta\leqslant 1)$ на интервале $0<\sigma<0{,}5\pi$. Имеем $\psi'(\sigma)=\sin^{-2}\sigma(2\sin^2 0{,}5\sigma-\Delta)$. Когда $\lambda\geqslant 0{,}5$, σ может принимать любое значение из интервала $(0;\ 0{,}5\pi)$, поэтому минимум $\psi(\sigma)$ достигается в точке

$$\sigma_0=2\arcsin\sqrt{0{,}5\Delta}. \qquad \textbf{(2.2.14)}$$

Вычисления показывают, что $\psi(\sigma_0)=\Delta\operatorname{ctg}\sigma_0+\operatorname{tg}0{,}5\sigma_0=\sqrt{\Delta(2-\Delta)}$.

Пусть теперь $0<\lambda<0{,}5$, а $2\sin^2 0{,}5\pi\lambda>\Delta$. **(2.2.15)** В этом случае $0<\sigma=0{,}5\pi\lambda x^{-1}<\pi\lambda$ и в силу условия (2.2.15) промежуток $[0;\ \pi\lambda]$ содержит точку σ_0, определенную соотношением (2.2.14). Следовательно, и в этом случае $\psi(\sigma)\geqslant\psi(\sigma_0)=\sqrt{\Delta(2-\Delta)}$.

Пусть $0 < \lambda < 0{,}5$, а $2\sin^2 0{,}5\pi\lambda < \Delta$. Тогда

$$\sin 0{,}5\sigma = \sin\frac{\pi\lambda}{4x} \leqslant \sin 0{,}5\pi\lambda < \sqrt{0{,}5\Delta},$$

т. е. $\psi'(\sigma) < 0$, поэтому $\psi(\sigma) \geqslant \psi(\pi\lambda) = \Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda$. Если $\lambda = 0$, соотношение (2.2.13) дает $\beta(\infty, f) \leqslant \Delta(\infty, f)$. Теорема 2.2.1 доказана полностью для случая $a = \infty$.

Если $a \neq \infty$ — любое фиксированное число, рассмотрим функцию $\Phi(z) = (f(z) - a)^{-1}$. Для нее верны такие соотношения: $L(r, \infty, \Phi) = L(r, a, f)$; $T(r, \Phi) = T(r, f) + O(1)$ $(r \to \infty)$, поэтому $\beta(\infty, \Phi) = \beta(a, f)$. Тем самым теорема 2.2.1 доказана полностью.

Следствие 1. *Для произвольной мероморфной при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ конечного нижнего порядка λ величина отклонения подчинена такой оценке:*

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5, \text{ либо} \\ & 0 < \lambda < 0{,}5, \text{ но } \sin 0{,}5\pi\lambda \geqslant \\ & \geqslant \sqrt{0{,}5\Delta}; \\ \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\Delta(2-\Delta), & \text{если } 0 < \lambda < 0{,}5, \text{ но} \\ & \sin 0{,}5\pi\lambda < \sqrt{0{,}5\Delta}; \\ \Delta, & \text{если } \lambda = 0, \end{cases} \tag{2.2.16}$$

где $\Delta = \Delta(a, f)$.

Действительно, при $0 < \lambda < 0{,}5$ и $\sin 0{,}5\pi\lambda < \sqrt{0{,}5\Delta}$

$$\pi\lambda(\Delta \operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda) =$$

$$= \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}(\Delta + 2(1-\Delta)\sin^2 0{,}5\pi\lambda) \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}\Delta(2-\Delta). \tag{2.2.17}$$

Оценка (2.2.16) сразу следует из выражений (2.2.2), (2.2.3), (2.2.17).

Следствие 2. *Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ, для множества ее положительных отклонений $\Omega(f)$ справедливо включение $\Omega(f) \subseteq V(f)$, где $V(f)$ — множество дефектных значений $f(z)$ в смысле Ж. Валирона.*

В силу теоремы 1.8.1 множество $V(f)$ имеет логарифмическую емкость нуль, поэтому для мероморфных функций конечного нижнего порядка множество $\Omega(f)$ также имеет логарифмическую емкость нуль.

3. О точности оценки для $\beta(a, f)$

Так как $\Delta(2-\Delta) \leqslant 1$ для любого значения Δ, из неравенства (2.2.16) получаем, что для мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ при каждом a

$$\beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5; \quad (2.3.1) \\ \pi\lambda\sin^{-1}\pi\lambda, & \text{если } 0 \leqslant \lambda < 0{,}5. \quad (2.3.2) \end{cases}$$

В 1932 г. Пэйли [51] высказал гипотезу: если $g(z)$ — целая функция конечного порядка ρ, то

$$\beta(\infty, g) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, g)}{T(r, g)} \leqslant \begin{cases} \pi\rho, & \text{если } \rho \geqslant 0{,}5; \quad (2.3.3) \\ \pi\rho \sin^{-1}\pi\rho, & \text{если } 0 \leqslant \rho < 0{,}5. \quad (2.3.4) \end{cases}$$

Неравенство (2.3.4) впервые было доказано Ж. Валироном [53] и А. Валундом [55], а неравенство (2.3.3) — Н. В. Говоровым [5]. Ясно, что из оценок (2.3.1) и (2.3.2), в частности, следуют неравенства (2.3.3) и (2.3.4). Оценка (2.3.1) доказана [23] нами, а оценка (2.3.2) впервые была приведена [24] как следствие одного соотношения из работы [10]. Пейли было известно [51], что в неравенствах (2.3.3) и (2.3.4) для функции Миттаг — Леффлера [см., например, 11, с. 111] достигается равенство. М. Н. Шеремета доказал [39], что для любых чисел λ и ρ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, существует целая функция $E_{\lambda,\rho}(z)$, нижнего порядка λ и порядка ρ, для которой

$$\beta(\infty, E_{\lambda,\rho}) = \begin{cases} \pi\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5; \\ \pi\lambda \sin^{-1}\pi\lambda, & \text{если } 0 \leqslant \lambda < 0{,}5. \end{cases}$$

Легко заметить, что для каждого $\lambda\,(0 \leqslant \lambda < \infty)$ при $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$ справедливо

$$B(\lambda, \Delta) \leqslant B(\lambda, 1) = \begin{cases} \pi\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant 0{,}5, \\ \pi\lambda \sin^{-1}\pi\lambda, & \text{если } 0 \leqslant \lambda < 0{,}5. \end{cases}$$

Так как для каждой целой функции $g(z)$ $\Delta(\infty, g) = 1$, то неравенство (2.2.2) может достигаться при $\Delta(a, f) = 1$. Вероятно, оценка (2.2.2) является точной и для других значений $\Delta(a, f)$.

Построим по наперед заданным числам λ и ρ, $0{,}5 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, целую функцию $E_{\lambda,\rho}(z)$ нижнего порядка λ и порядка ρ, для которой $\beta(\infty, E_{\lambda,\rho}) = \pi\lambda$. Зафиксируем числа λ и ρ такие, что $0{,}5 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$ $(\lambda < \infty)$, и пусть $\varphi(r)$ — монотонно возрастающая и непрерывно дифференцируемая на интервале $(0, \infty)$ функция*, причем $0 \leqslant \varphi(0) < \infty$; $\lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = \rho \geqslant \lambda > 0{,}5$; $r \ln(r + r_0) \ln_2(r + r_0) \ln_3(r + r_0) \varphi'(r) \leqslant C$, **(2.3.5)** где $r_0 = \exp_2 e$. Пусть

$$\alpha(r) = \lambda \cos^2 \ln_4(r + r_0) + \varphi(r) \sin^2 \ln_4(r + r_0). \quad (2.3.6)$$

Ясно, что функция

$$l(z) = z \int_0^\infty \frac{\alpha(t)}{(t + z)^2}\, dt \quad (z = re^{i\varphi})$$

---

* Как обычно, через $f_k(x)$ мы обозначаем k-ю итерацию функции $f(x) = f_0(x)$, т. е. $f_k(x) = f(f_{k-1}(x))$.

аналитическая в области $D_\delta = (z: 0 < |z| < \infty,\ |\arg z| < \pi - \delta,\ 0 < \delta < \pi)$.

Лемма 2.3.1. *При $z \in D_\delta$ и $|z| = r \to \infty$ справедлива асимптотика* $l(z) = l(re^{i\varphi}) = \alpha(r) + o(\ln^{-1} r)$. **(2.3.7)**

Доказательство. При $|\varphi| \leqslant \pi - \delta$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\varphi} dt}{(t + e^{i\varphi})^2} = 1; \quad l(z) = \int_0^\infty \frac{\alpha(ru)\, e^{i\varphi} du}{(u + e^{i\varphi})^2}.$$

Поэтому при $r \geqslant r_0$ и $|\varphi| \leqslant \pi - \delta$

$$|l(re^{i\varphi}) - \alpha(r)| \leqslant \int_0^\infty \frac{|\alpha(ru) - \alpha(r)|}{|u + e^{i\varphi}|^2} du =$$

$$= \int_0^{(\ln r \ln_2 r)^{-1}} \frac{|\alpha(ru) - \alpha(r)|}{|u + e^{i\varphi}|^2} du + \int_{(\ln \ln_2 r)^{-1}}^{\ln r \ln_2 r} \frac{|\alpha(ru) - \alpha(r)|}{|u + e^{i\varphi}|^2} du +$$

$$+ \int_{\ln r \ln_2 r}^\infty \frac{|\alpha(ru) - \alpha(r)|}{|u + e^{i\varphi}|^2} du = I_1 + I_2 + I_3. \qquad \textbf{(2.3.8)}$$

Заметим, что $|\alpha(ru) - \alpha(r)| \leqslant 2\lambda |\cos \ln_4 (ru + r_0) - \cos \ln_4 (r + r_0)| + 2\varphi(r) |\sin \ln_4 (ru + r_0) - \sin \ln_4 (r + r_0)| + |\varphi(ru) - \varphi(r)|$. **(2.3.9)** Из выражения (2.3.5) следует, что при $r \geqslant r_0 = \exp_2 e$ $\varphi(r) \leqslant C \ln_4 r$ **(2.3.10)** и для каждого $u > (\ln r \ln_2 r)^{-1}$ $|\varphi(ru) -$

$$- \varphi(r)| = \left| \int_r^{ru} \varphi'(t)\, dt \right| \leqslant C |\ln_4 ru - \ln_4 r|. \qquad \textbf{(2.3.11)}$$

Приступим к оценке интегралов I_1, I_2, I_3. Из неравенств (2.3.9) и (2.3.10) имеем для

$$0 \leqslant u \leqslant (\ln r \ln_2 r)^{-1} \quad |\alpha(ru) - \alpha(r)| \leqslant 4\lambda + 6\varphi(r) \leqslant C(1 + \ln_4 r),$$

поэтому

$$I_1 \leqslant C \sin^{-2}\delta\, (1 + \ln_4 r) \int_0^{(\ln r \ln_2 r)^{-1}} \frac{du}{(1 + u)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sin^{-2}\delta\, (1 + \ln_4 r)(\ln r \ln_2 r)^{-1}. \qquad \textbf{(2.3.12)}$$

Аналогично доказываем, что при $r \to \infty$ $I_3 = o\ (\ln^{-1} r)$. **(2.3.13)** Для оценки I_2 прежде всего отметим, что в силу теоремы о конечных приращениях, при $u \in [(\ln r \ln_2 r)^{-1}, \ \ln r \ln_2 r]$ $(r > r_0)$; $|\ln_4 (ru + r_0) - \ln_4 (r + r_0| \leqslant C (\ln r \ln_3 r)^{-1}$; $|\cos \ln_4 (ru + r_0) -$ $- \cos \ln_4 (r + r_0)| \leqslant C (\ln r \ln_3 r)^{-1}$; $|\sin \ln_4 (ru + r_0) - \sin \ln_4 (r + r_0)| \leqslant$

$\leqslant C(\ln r \ln_3 r)^{-}$. Поэтому [см. выражения (2.3.11), (2.3.8). (2.3.9)] $|\alpha(ru)-\alpha(r)| \leqslant C \ln_4 (r+r_0)(\ln r \ln_3 r)^{-1}$, значит, $I_2 = o(\ln^{-1} r)$. **(2.3.14)** Соотношение (2.3.7) следует из выражений (2.3.8), (2.3.12), (2.3.13), (2.3.14).

Рассмотрим кривую Γ^+ с уравнением в полярных координатах:

$$\Gamma^+ = \left\{ re^{i\theta} : \theta = \theta(r) = \frac{\pi}{2\alpha(r)(1-\varepsilon)}, \quad r > 0 \right\},$$

где $\alpha(r)$ определено соотношением (2.3.6), а $\varepsilon = 0{,}5 \min[0{,}5; 1-(2\lambda)^{-1}]$ ($\lambda > 0{,}5$ — фиксированное). **(2.3.15)** Пусть Γ^- — кривая, симметричная с Γ^+ относительно действительной оси. Обозначим через $A(R)$ область, содержащую положительную ось и ограниченную кривыми Γ^+, Γ^- и дугой окружности $\gamma = (z: |z| = R,\ R \geqslant 1)$. Пусть $L(R, \varepsilon)$ — граница области $A(R)$, обходимая так, что область $A(R)$ остается слева. Очевидно, при $\lambda > 0{,}5$ функция $\exp z^{l(z)}$ аналитическая в области $A(R)$. Определим теперь в круге $K(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ функцию $E_{\lambda,\rho}(z)$ с помощью несобственного интеграла типа Коши [18, т. I, с. 270]:

$$E_{\lambda,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(1,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta. \qquad \textbf{(2.3.16)}$$

Лемма 2.3.2. *Функция $E_{\lambda,\rho}(z)$, определенная в круге $K(0, 1)$ соотношением (2.3.16), допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $z \neq \infty$. Для полученной аналитическим продолжением целой функции $E_{\lambda,\rho}(z)$ справедливы следующие разложения в асимптотические ряды:*

$$E_{\lambda,\rho}(z) \sim \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^{n+1}}, & \text{если } z \to \infty \text{ и } z \notin \overline{A(1)}; \\ \exp z^{l(z)} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^{n+1}}, & \text{если } z \to \infty \text{ и } z \in A(1); \end{cases} \qquad \textbf{(2.3.17)}$$

$$\text{где } a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(1,\varepsilon)} \zeta^n \exp \zeta^{l(\zeta)} d\zeta. \qquad \textbf{(2.3.18)}$$

Доказательство. В силу равенства (2.3.7) при $\zeta \in L(1, \varepsilon)$ и $\zeta \to \infty$

$$\operatorname{Re} \zeta^{l(\zeta)} = \operatorname{Re} \exp[\ln|\zeta| \pm i\theta(|\zeta|)][\alpha(|\zeta|) + o(\ln^{-1}|\zeta|)] =$$
$$= \{\exp \ln|\zeta| [\alpha(|\zeta|) + o(1)]\} \cos[\theta(|\zeta|)\alpha(|\zeta|) + o(\ln^{-1}|\zeta|)] \leqslant$$
$$\leqslant -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) |\zeta|^{\alpha(|\zeta|)} (1 + o(1)) \quad (0 < \delta < \pi/2). \qquad \textbf{(2.3.19)}$$

Условие (2.3.19) обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость интегралов (2.3.16) и (2.3.18). Докажем, что $E_{\lambda,\rho}(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость $z \neq \infty$. Выберем $R > 1$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, где ε определено соотношением (2.3.15). Тогда при $|z| < 1$ имеем, используя теорему Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(1,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(R,\,\varepsilon_1)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Так как интеграл по контуру $L(R, \varepsilon_1)$ определяет функцию, аналитическую при $|z| < R$, то тем самым доказано, что $E_{\lambda,\rho}(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость $z \neq \infty$. Если $z \notin \overline{A(1)}$, то целая функция $E_{\lambda,\rho}(z)$ представима в виде интеграла

$$E_{\lambda,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(1,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{2.3.20}$$

Так как $1/(\zeta - z) = -1/z - \zeta/z^2 - \ldots - \zeta^{N-1}/z^N + \zeta^N/z^N \cdot 1/(\zeta - z)$, из уравнения (2.3.20) имеем ($z \to \infty$), $z \notin \overline{A(1)}$)

$$E_{(\lambda,\rho)}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{z^{n+1}} + z^{-N}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(1,\,\varepsilon)} \frac{\zeta^N \exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{z^{n+1}} + O\left(\frac{1}{z^N}\right),$$

следовательно, мы получили первую асимптотическую формулу для $E_{\lambda,\rho}(z)$.

Пусть теперь $z \in A(1)$. Тогда, как было показано,

$$E_{\lambda,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(R,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta$$

при $|z| < R$. Используя теорему о вычетах, получим

$$E_{\lambda,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(R,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta = \exp z^{l(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(1,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Для последнего интеграла, рассуждая как и выше, получаем асимптотику

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(1,\,\varepsilon)} \frac{\exp \zeta^{l(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (z \to \infty,\ z \in A(1)).$$

Лемма 2.3.2 доказана.

Здесь мы непосредственно подошли к доказательству следующего утверждения:

Теорема 2.3.1. *Для любых действительных чисел λ и ρ, таких что $0{,}5 < \lambda \leqslant \rho \leqslant \infty$, существует целая функция $E_{\lambda,\rho}(z)$ нижнего порядка λ и порядка ρ, для которой $\beta(\infty, E_{\lambda,\rho}) = \pi\lambda$.*

Действительно, если $0.5 < \lambda < \infty$, то в качестве $E_{\lambda,\rho}(z)$ выберем функцию, определенную в лемме 2.3.2. Из формул (2.3.17) и (2.3.7) получаем (при $r \to \infty$)

$$L(r, \infty, E_{\lambda,\rho}) = \ln^+ M(r, \infty, E_{\lambda,\rho}) = r^{l(r)}(1 + o(1)) =$$
$$= r^{\alpha(r)}(1 + o(1)), \quad T(r, E_{\lambda,\rho}) =$$
$$= \frac{r^{\alpha(r)}}{\pi}(1 + o(1)) \int\limits_0^{\pi(2\alpha(r))^{-1}} \cos\theta\, \alpha(r)\, d\theta = \frac{r^{\alpha(r)}}{\pi\alpha(r)}(1 + o(1)).$$

Поэтому* $\beta(\infty, E_{\lambda,\rho}) = \varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{L(r, \infty, E_{\lambda,\rho})}{T(r, E_{\lambda,\rho})} = \pi \varliminf\limits_{r\to\infty} \alpha(r) = \pi\lambda.$

Если $\lambda = \rho = \infty$, то следует рассмотреть функцию $h(z) = \exp\exp z$. Для нее имеют место такие соотношения [см. оценку (3.1.21)]: $L(r, \infty, h) = \exp r$; $T(r, h) \leqslant \exp r\,(r^{-1/2})$. Поэтому $\beta(\infty, h) = \infty$. Ниже (см. теорему 3.1.1) построен пример целой функции $g(z)$ бесконечного нижнего порядка, для которой $\beta(a, g)$ обращается в бесконечность для каждого значения a из некоторого множества, имеющего мощность континуума.

4. Отличие свойств величин положительных отклонений от свойств дефектов Р. Неванлинны для мероморфных функций конечного нижнего порядка

В 1975 г. А. Ф. Гришин доказал следующее утверждение [12]:

Теорема 2.4.1. *Для любого наперед заданного числа λ, $0 \leqslant \lambda < \infty$ существует мероморфная функция $f_\lambda(z)$ нижнего порядка λ, для которой в некоторой точке a $\beta(a, f_\lambda) \geqslant 1$, а $\delta(a, f_\lambda) = 0$.*

Несколько упрощая рассуждения А. Ф. Гришина, приведем доказательство соответствующей теоремы для случая $\lambda > 1$. Прежде чем приступить к доказательству теоремы об отличии величин положительных отклонений от величин дефектов в смысле Р. Неванлинны, установим ряд вспомогательных утверждений. Пусть $\lambda > 1$ и $R > 3^{3\lambda}$ — фиксированные числа. Положим

$$a = a(R) = R \ln^{-1}(R^\lambda e^{-1}) = R(\lambda \ln R - 1)^{-1};$$

---

* Заметим, что $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{L(r, \infty, E_{\lambda,\rho})}{T(r, E_{\lambda,\rho})} = \pi \varlimsup \alpha(r) = \pi \lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = \pi\rho \leqslant \infty.$

$$E_R(z) = \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{1}{n!} \exp\left(\frac{z}{a} n\right); \tag{2.4.1}$$

$$E(z, R) = \exp\exp\frac{z}{a}. \tag{2.4.2}$$

Ясно, что для каждого фиксированного R функция $E_R(z)$ является целой функцией конечного порядка, а функция $E(z, R)$ — целой функцией бесконечного нижнего порядка.

Лемма 2.4.1. *Если* $r = |z| \leqslant R$, *то*

$$\left| E_R(r) - \exp\exp\frac{r}{R}\ln(R^\lambda e^{-1}) \right| \leqslant 3R^{-0,5\lambda}. \tag{2.4.3}$$

Если $R \leqslant r = |z| \leqslant R\ln R^\lambda \{\ln(R^\lambda e^{-1})\}^{-1} = R\lambda\ln R\{\lambda\ln R - 1\}^{-1}$, *то*

$$E_R(r) \geqslant 0,5\exp\exp(rR^{-1}\ln(R^\lambda e^{-1}) - 1) \tag{2.4.4}$$

и

$$E_R(r) \leqslant \exp R^\lambda. \tag{2.4.5}$$

Если $r > R\lambda\ln R(\lambda\ln R - 1)^{-1}$, *то*

$$E_R(r) \geqslant 0,25\exp\{0,5R^\lambda(rR^{-1} - 1)\ln(R^\lambda e^{-1})\}; \tag{2.4.6}$$

$$E_R(r) \leqslant \exp\{R^\lambda(rR^{-1} - 1)\ln(R^\lambda e^{-1})\}. \tag{2.4.7}$$

Доказательство. Из выражений (2.4.1) и (2.4.2) получаем*

$$|E_R(z) - E(z, R)| \leqslant \sum_{n=[R^\lambda]+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left|\exp\left(\frac{z}{a}n\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=[R^\lambda]+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\exp\left\{\frac{r}{R}\ln\left(\frac{R^\lambda}{e}\right)^n\right\} \leqslant \sum_{n=[R^\lambda]+1}^{\infty} \frac{R^{\lambda n}}{n!e^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=[R^\lambda]+1}^{\infty} \frac{R^{\lambda n}}{n^n\sqrt{n}} < 2\int_{[R^\lambda]}^{\infty}\left(\frac{R^\lambda}{x}\right)^x \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant 2R^{0,5\lambda}\int_1^\infty \left(\frac{1}{t}\right)^{R^\lambda t}\frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant$$

$$\leqslant 2R^{0,5\lambda}\int_1^\infty \frac{dt}{t^{R^\lambda}} = 2R^{0,5\lambda}(R^\lambda - 1)^{-1} < 3R^{-0,5\lambda}. \tag{2.4.8}$$

Оценка (2.4.3) сразу следует из выражений (2.4.2) и (2.4.8). Докажем неравенства (2.4.4) и (2.4.5). Из соотношений (2.4.1) и (2.4.3) находим

$$E_R(r) = \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{1}{n!}\exp\left\{\frac{rn}{R}\ln\frac{R^\lambda}{e}\right\} \geqslant \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{R^{\lambda n}}{e^n n!} =$$

$$= E_R(R) \geqslant \exp(R^\lambda e^{-1}) - 3R^{-0,5\lambda} \geqslant \exp\exp(ra^{-1} - 1) - 3R^{-0,5\lambda} \geqslant$$

$$\geqslant 0,5\exp\exp(ra^{-1} - 1),$$

Используется оценка $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \geqslant n! \geqslant n^n e^{-(n+1)}\sqrt{2\pi n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

что равносильно оценке (2.4.4). Неравенство (2.4.5) доказывается так:

$$E_R(r) \leqslant \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{1}{n!} \exp\left(n \frac{r}{R} \ln \frac{R^\lambda}{e}\right) \leqslant \exp\exp(rR^{-1} \ln R^\lambda e^{-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \exp R^\lambda. \qquad (2.4.9)$$

Оценка (2.4.6) получается из таких соотношений:

$$E_R(r) \geqslant \frac{1}{[R^\lambda]!} \exp \frac{r}{R} \ln \frac{R^\lambda}{e} [R^\lambda] \geqslant$$
$$\geqslant (2\pi R^\lambda)^{-0,5} \{\exp [rR^{-1} \ln (R^\lambda e^{-1}) [R^\lambda] - [R^\lambda] \ln ([R^\lambda] e^{-1})]\} \geqslant$$
$$\geqslant (2\pi R^\lambda)^{-0,5} \exp \{[R^\lambda] (rR^{-1} - 1) \ln (R^\lambda e^{-1})\} =$$
$$= (2\pi e)^{-0,5} \exp \{[R^\lambda] (rR^{-1} - 1) \ln R^\lambda e^{-1} - 0,5 \ln (R^\lambda e^{-1})\} >$$
$$> 0,25 \exp \{0,5 R^\lambda (rR^{-1} - 1) \ln R^\lambda e^{-1}\}.$$

Докажем оценку (2.4.7). Имеем

$$|E_R(z)| \leqslant E_R(r) = \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{1}{n!} \exp\left\{\frac{r}{R} n \ln \frac{R^\lambda}{e}\right\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{R^{\lambda n}}{n!} \exp\left(\frac{r}{R} \ln \frac{R^\lambda}{e} - \ln R^\lambda\right) n \leqslant$$
$$\leqslant \exp R^\lambda \left(\frac{r}{R} \ln \frac{R^\lambda}{e} - \ln R^\lambda\right) \sum_{n=0}^{[R^\lambda]} \frac{R^{\lambda n}}{n!} \leqslant$$
$$\leqslant \exp R^\lambda [rR^{-1} \ln (R^\lambda e^{-1}) - \ln R^\lambda + 1] = \exp R^\lambda (rR^{-1} - 1) \ln (R^\lambda e^{-1}).$$

Таким образом, лемма 2.4.1 доказана полностью.

Лемма 2.4.2. *Для каждого фиксированного* $\lambda > 1$ *и* $R \geqslant 3^{3\lambda}$ *функция* $E_R(z)$ *обладает такими свойствами:*

а) для каждого z, $|z| = r > e$,

$$|E_R(z)| \leqslant E_R(r) \leqslant 27 \exp r^\lambda (4\lambda)^\lambda \ln^\lambda r; \qquad (2.4.10)$$

б) $$m(R, E_R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |E_R(Re^{i\theta})| d\theta \leqslant R^\lambda (\lambda \ln R)^{-0,5}; \qquad (2.4.11)$$

в) $$L(R, E_R) = \max_{|z|=R} \ln^+ |E_R(z)| \geqslant R^\lambda e^{-2} - \ln 2. \qquad (2.4.12)$$

Доказательство. В силу неравенства (2.4.9)

$$E_R(r) \leqslant \exp\exp [rR^{-1} \ln (R^\lambda e^{-1})]. \qquad (2.4.13)$$

Если $0 \leqslant r \leqslant R \ln^{-1} (R^\lambda e^{-1})$, из выражения (2.4.13) получаем $E_R(r) \leqslant \exp_2 1$. **(2.4.14)** Если же $R \ln^{-1} (R^\lambda e^{-1}) \leqslant r \leqslant R \ln R^\lambda \times \times \{\ln (R^\lambda e^{-1})\}^{-1}$, **(2.4.15)** из формул (2.4.5), (2.4.13), (2.4.15) имеем

$$E_R(r) \leqslant \exp R^\lambda \leqslant \exp r^\lambda \ln^\lambda (R^\lambda e^{-1}). \qquad (2.4.16)$$

Из неравенства (2.4.15) следует, что $\ln(R^\lambda e^{-1}) \leqslant 4\lambda \ln r$ **(2.4.17)**. Поэтому для $0 \leqslant r \leqslant R$ оценка (2.4.10) следует из соотношений (2.4.14), (2.4.16), (2.4.17). Пусть теперь
$r \geqslant R\lambda \ln R (\lambda \ln R - 1)^{-1}$. В этом случае оценка (2.4.7) дает

$$E_R(r) \leqslant \exp(\lambda r R^{\lambda-1} \ln R) \leqslant \exp \lambda r^\lambda \ln r.$$

Таким образом, неравенство (2.4.10) доказано для всех случаев.

Для доказательства оценки (2.4.11) мы будем исходить из следующей оценки [см. оценку (3.1.21)], справедливой для каждого $r \geqslant 1$:

$$m(r, \exp_2 z) \leqslant e^r r^{-0,5}. \tag{2.4.18}$$

В силу неравенства (2.4.8)

$$|E_R(Re^{i\theta})| \leqslant |\exp_2 e^{i\theta} \ln(R^\lambda e^{-1})| + 3R^{-0,5\lambda}. \tag{2.4.19}$$

Из формул (2.4.18) и (2.4.19) получаем

$$m(R, E_R) \leqslant m(\ln(R^\lambda e^{-1}), \exp_2 z) + \ln 2 \leqslant \exp[\ln(R^\lambda e^{-1})] \times$$
$$\times [\ln(R^\lambda e^{-1})]^{-0,5} + \ln 2 \leqslant R^\lambda (\lambda \ln R)^{-0,5},$$

что доказывает оценку (2.4.11). Оценка (2.4.12) непосредственно следует из неравенства (2.4.4). Лемма 2.4.2 доказана.

Теорема 2.4.1. *Для каждого $\lambda > 1$ существует целая функция $H_\lambda(z)$ нижнего порядка λ, для которой по некоторой неограниченной последовательности $\{R_k\} \nearrow \infty$ выполняются соотношения:*

$$m(R_k, H_\lambda) \leqslant R_k^\lambda (\lambda \ln R_k)^{-0,5} (1 + o(1)); \tag{2.4.20}$$

$$L(R_k, H_\lambda) \geqslant R_k^\lambda e^{-2} (1 + o(1)); \tag{2.4.21}$$

$$\ln M(r, H_\lambda) = L(r, H_\lambda) \leqslant K \exp r^\lambda (6\lambda)^\lambda \ln^\lambda r. \tag{2.4.22}$$

Покажем, что искомой является целая функция

$$H_\lambda(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k^{-2} E_{R_k}(z), \tag{2.4.23}$$

где $R_k = 3^{3^k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и
$E_R(z)$ — целая функция, определенная соотношением (2.4.1). Займемся нахождением асимптотических свойств функции $H_\lambda(z)$. Если

$$R_k \leqslant |z| = r < R_{k+1}, \tag{2.4.24}$$

то при $n = 2, 3, \ldots$ [в силу неравенства (2.4.3)]

$$E_{R_{k+n}}(r) \leqslant \exp \exp \frac{r}{R_{k+n}} \ln(R_{k+n}^\lambda e^{-1}) + 3R_{k+n}^{-0,5\lambda} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \exp \exp(\lambda 3^{k+n} R_{k+1} R_{k+n}^{-1}) \leqslant 1 + \exp \exp[\lambda 3^{k+n} 3^{-(n3^k)}] \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \exp \exp \lambda = C_0(\lambda).$$

Поэтому для каждого значения r, удовлетворяющего соотношению (2.4.24), справедлива оценка

$$\sum_{\nu=k+2}^{\infty} \nu^{-2} E_{R_\nu}(r) \leqslant C(\lambda). \tag{2.4.25}$$

Далее, для каждого r, для которого справедливо (2.4.24), при $n = 1, 2, 3, \ldots, k-3$ и $\lambda > 1$

$$rR_{k-n}^{-1} \geqslant R_k R_{k-n}^{-1} > 3^2 > \lambda \ln R_{k-n} (\lambda \ln R_{k-n} - 1)^{-1}.$$

В силу неравенства (2.4.7)

$$E_{R_{k-n}}(r) \leqslant \exp R_{k-n}^{\lambda} \left(rR_{k-n}^{-1} - 1\right) \ln \left(R_{k-n}^{\lambda} e^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp R_k^{\lambda 3^{-n}} \left(rR_k^{-3^{-n}} - 1\right) \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right). \tag{2.4.26}$$

Если

$$R_k \leqslant r \leqslant R_k \lambda \ln R_k (\lambda \ln R_k - 1)^{-1},$$

то из соотношений (2.4.26) и (2.4.4) получаем

$$E_{R_{k-n}}(r) \leqslant \exp R_k^{(\lambda-1)3^{-n}} \left(r - R_k^{3^{-n}}\right) \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp \left[R_k^{1+(\lambda-1)3^{-n}} \ln R_k^{\lambda} - R_k^{\lambda 3^{-n}} \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \exp R_k^{(\lambda+2)3^{-1}} \ln R_k^{\lambda} = \exp \left[R_k^{\lambda} e^{-2} \lambda e^2 R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}} \ln R_k\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2 \left[E_{R_k}(r)\right]^{\lambda e^2 R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}} \ln R_k}. \tag{2.4.27}$$

Пусть теперь $R_{k+1} > r > R_k \lambda \ln R_k (\lambda \ln R_k - 1)^{-1}$. В этом случае в силу оценок (2.4.26) и (2.4.6) для $n = 1, 2, \ldots, k-3$

$$E_{R_{k-n}}(r) \leqslant \exp \left\{R_k^{(\lambda-1)3^{-n}} \left(r - R_k^{3^{-n}}\right) \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp R_k^{(\lambda-1)3^{-n}} (r - R_k) \ln R_k^{\lambda} \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp \left\{R_k^{(\lambda+2)3^{-1}} \left(rR_k^{-1} - 1\right) \ln R_k^{\lambda} \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right)\right\} =$$
$$= \exp \left\{0{,}5 R_k^{\lambda} \left(rR_k^{-1} - 1\right) \ln \left(R_k^{\lambda} e^{-1}\right)\right\} 2\lambda R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}} \ln R_k \leqslant$$
$$\leqslant 4 \left[E_{R_k}(r)\right]^{2\lambda R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}} \ln R_k}. \tag{2.4.28}$$

Учитывая неравенства (2.4.25), (2.4.27), (2.4.28), получаем для каждого z такого, что $|z|$ удовлетворяет соотношению (2.4.24),

$$\left|H_\lambda(z) - k^{-2} E_{R_k}(z) - (k+1)^{-2} E_{R_{k+1}}(z)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=k+2}^{\infty} \nu^{-2} E_{R_\nu}(r) + \sum_{\nu=3}^{k-1} \nu^{-2} E_{R_\nu}(r) \leqslant$$

$$\leqslant C + 12\left[E_{R_k}(r)\right]^{9\lambda R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}}\ln R_k}. \qquad (2.4.29)$$

Если $R_k \leqslant r \leqslant R_{k+1}6^{-1}$, (2.4.30) то [см. формулу (2.4.3)]

$$E_{R_{k+1}}(r) \leqslant 1 + \exp\exp 6^{-1}\ln\left(R_{k+1}^{\lambda}e^{-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \exp R_k^{0,5\lambda} \leqslant 1 + \exp r^{0,5\lambda}. \qquad (2.4.31)$$

Поэтому, если r удовлетворяет соотношению (2.4.30), оценка (2.4.29), с учетом неравенства (2.4.10), дает

$$|H_\lambda(re^{i\theta})| \leqslant \left|E_{R_k}(re^{i\theta})\right| + \exp r^{0,5\lambda} +$$

$$+ C + K\exp\left[r^\lambda(4\lambda)^\lambda\ln^\lambda r R_k^{2(1-\lambda)3^{-1}}9\lambda\ln r\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left|E_{R_k}(re^{i\theta})\right| + K\exp\left[Cr^{(7\lambda+2)9^{-1}}\ln^{\lambda+1}r\right]. \qquad (2.4.32)$$

Из выражений (2.4.11) и (2.4.32) находим

$$m(R_k, H_\lambda) \leqslant m(R_k, E_{R_k}) + CR_k^{(7\lambda+2)9^{-1}}\ln^{\lambda+1}R_k \leqslant$$

$$\leqslant R_\lambda^k(\lambda\ln R_k)^{-0,5} + CR_k^{(7\lambda+2)9^{-1}}\ln^{\lambda+1}R_k,$$

откуда для $\lambda > 1$ следует оценка (2.4.20). Полагая в формуле (2.4.29) $r = R_k$ и учитывая неравенство (2.4.31), имеем

$$\left|H_\lambda(R_k) - k^{-2}E_{R_k}(R_k)\right| \leqslant \exp R_k^{0,5\lambda} +$$

$$+ C + K\exp\left[CR_k^{3^{-1}(\lambda+2)}\ln^{\lambda+1}R_k\right]. \qquad (2.4.33)$$

Оценка (2.4.21) следует из соотношений (2.4.12) и (2.4.33). Остается доказать неравенство (2.4.22). Если r удовлетворяет условию (2.4.30), то оценка (2.4.22) следует из выражений (2.4.32) и (2.4.10). Если $6^{-1}R_{k+1} < r < R_{k+1}$, то снова в силу неравенств (2.4.29), (2.4.10), (2.4.3) получаем

$$H_\lambda(r) \leqslant E_{R_k}(r) + E_{R_{k+1}}(r) +$$

$$+ K\exp\left[(Cr^\lambda\ln^\lambda r\ln R_k)R^{2(1-\lambda)3^{-1}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant K\exp(Cr^\lambda\ln^\lambda r) + K\exp\left[Cr^{\lambda-2(\lambda-1)3^{-1}}\ln^\lambda r\right] \leqslant$$

$$\leqslant K\exp(6\lambda)^\lambda r^\lambda\ln^\lambda r.$$

Теорема 2.4.1 доказана полностью. Результат теоремы 2.4.1 позволяет установить следующий основной результат этого параграфа [см. также 9]:

Теорема 2.4.2. *Для каждого* $\lambda > 1$ *существует мероморфная функция* $\psi_\lambda(z)$ *порядка* λ, *для которой* $\beta(\infty, \psi_\lambda) \geqslant 0,5$, *а* $\delta(\infty, \psi_\lambda) = 0$.

Доказательство. Пусть $H_\lambda(z)$ — целая функция, определенная соотношением (2.4.23). Из определения $H_\lambda(z)$ следует, что

$$\ln M(r, H_\lambda) = \ln H_\lambda(r) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} E_{R_k}(r);$$

$$\frac{M'(r, H_\lambda)}{M(r, H_\lambda)} = \sum_{k=3}^{\infty} k^{-2} \frac{E'_{R_k}(r)}{E_{R_k}(r)}.$$

Пусть

$$\nu(r) = [rM'(r, H_\lambda) M^{-1}(r, H_\lambda)] - [rM'(r, H_\lambda) M^{-1}(r, H_\lambda)]_{r=0},$$

где $[x]$ означает целую часть x; $\{a_k\}$ — последовательность положительных чисел, для которых $\nu(r)$ является считающей функцией (с учетом кратности) каждого a_k. Положим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}}{z + a_k}.$$

Тогда

$$|\varphi(z)| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = |\operatorname{Im} z|^{-1},$$

значит, при $r \geqslant 1$

$$m(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{r|\sin\theta|} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\sin\theta|} d\theta = K. \qquad (2.4.34)$$

Покажем, что искомой функцией является $\psi_\lambda(z) = \varphi(z) + H_\lambda(z)$. Действительно,

$$N(r, \infty, \psi_\lambda) = N(r, \infty, \varphi) = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t} dt =$$

$$= C + \int_1^r \frac{\nu(t)}{t} dt \geqslant \int_1^r \frac{M'(t, H_\lambda)}{M(t, H_\lambda)} dt -$$

$$- C \ln r \geqslant \ln M(r, H_\lambda) - C \ln r.$$

Аналогично $N(r, \infty, \psi_\lambda) \leqslant \ln M(r, H_\lambda) + C \ln r$.

Таким образом, при $r \to \infty$

$$N(r, \infty, \psi_\lambda) = \ln M(r, H_\lambda) + O(\ln r). \qquad (2.4.35)$$

В силу неравенства (2.4.34) при $r \to \infty$

$$m(r, \psi_\lambda) = m(r, H_\lambda) + O(1); \tag{2.4.36}$$

$$L(r, \infty, \psi_\lambda) \geqslant \ln \psi_\lambda(r) \geqslant \ln H_\lambda(r). \tag{2.4.37}$$

Из соотношений (2.4.35), (2.4.36), (2.4.20), (2.4.21) получаем

$$\delta(\infty, \psi_\lambda) = \varliminf_{r\to\infty} m(r, \infty, \psi_\lambda) T^{-1}(r, \psi_\lambda) =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty} m(r, H_\lambda)[m(r, H_\lambda) + N(r, \psi_\lambda)]^{-1} =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty} m(r, H_\lambda)[m(r, H_\lambda) + \ln M(r, H_\lambda)]^{-1} = 0,$$

а исходя из неравенства (2.4.37)

$$\beta(\infty, \psi_\lambda) = \varliminf_{r\to\infty} L(r, \infty, \psi_\lambda) T^{-1}(r, \psi_\lambda) \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{r\to\infty} L(r, H_\lambda)[m(r, H_\lambda) + \ln M(r, H_\lambda)]^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{r\to\infty} L(r, H_\lambda)[2L(r, H_\lambda)]^{-1} = 0{,}5.$$

Теорема 2.4.2 доказана.

5. Аналог соотношения дефектов Р. Неванлинны для величин положительных отклонений мероморфных функций конечного нижнего порядка

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.5.1. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то:*

а) ее множество положительных отклонений $\Omega(f)$ не более чем счетно;

б) справедлива оценка

$$\sum_{a\in\Omega(f)} \beta(a, f) \leqslant K(\lambda+1)^2. \tag{2.5.1}$$

Неравенство (2.5.1) можно рассматривать как некоторый аналог классического соотношения Р. Неванлинны для дефектов мероморфных функций. Прежде чем доказать теорему 2.5.1, установим несколько вспомогательных утверждений.

Леммма 2.5.1. *Для произвольного конечного набора различных конечных комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^q$, $(\{a_k\}_{k=1}^q \subseteq \Omega(f))$ величины*

$L(r, a_k, f)$ *для произвольной мероморфной функции* $f(z)$ *удовлетворяют такому соотношению* ($r \geqslant r_0(q, f)$):

$$\sum_{k=1}^{q} L(r, a_k, f) \leqslant r \int_0^{2\pi} \left| \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right| d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{q} \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f-a_k}\right) + Cq \ln r. \qquad (2.5.2)$$

Доказательство. Пусть

$$C(q) = \min_{m \neq n} |a_m - a_n|; \qquad (2.5.3)$$

$$E_k(r) = \theta : |f(re^{i\theta}) - a_k| < \min[1, C(q)/4].$$

Так как $a_k \in \Omega(f)$, при $r \geqslant r_0(q)$ ни одно из множеств $E_k(r)$ не сводится к пустому множеству и при различных значениях k множества $E_k(r)$ не пересекаются. Выберем произвольные множества $E_m(r)$ и $E_n(r)$ ($m \neq n$). Пусть $\theta_m \in E_m(r)$; $\theta_n \in E_n(r)$ — произвольные точки этих множеств. Имеем, учитывая равенство (2.5.3),

$$0{,}5C(q) \leqslant |a_m - a_n| - 0{,}5C(q) \leqslant |f(re^{i\theta_m}) - f(re^{i\theta_n})|. \qquad (2.5.4)$$

Если на одной из дуг окружности, содержащей точки $z_m = re^{i\theta_m}$ и $z_n = re^{i\theta_n}$, нет полюсов $f(z)$, на такой дуге окружности найдется точка $z_{m,n}$ ($|z_{m,n}| = r$) такая, что

$$|f(re^{i\theta_m}) - f(re^{i\theta_n})| = \left| \int_{z_m}^{z_n} f'(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant |f'(z_{m,n})|\, 2\pi r. \qquad (2.5.5)$$

Ясно, что оценка (2.5.5) сохраняет силу и в том случае, когда на дуге окружности с центром в начале координат, соединяющей точки z_m и z_n, имеется полюс функции $f(z)$. Из неравенств (2.5.4) и (2.5.5) следует, что для каждых двух чисел a_m и a_n (a_m, $a_n \in \Omega(f)$) на каждой из двух дуг окружности, соединяющих точки z_m и z_n, содержится точка $z_{m,n}$ такая, что

$$|zf'(z)| \geqslant (4\pi)^{-1} C(q) = C \quad (z = z_{m,n}). \qquad (2.5.6)$$

Пусть

$$L(r, a_m, f) = \ln(|f(re^{i\theta_m}) - a_m|)^{-1}, \qquad (2.5.7)$$

где $\theta_m = \theta_m(r) \in E_m(r)$; $m = 1, 2, \ldots, q$. Если равенство (2.5.7) выполняется для нескольких значений $\theta_m \in E_m(r)$, то условимся в равенстве (2.5.7) выбирать наименьшее значение θ_m ($0 \leqslant \theta_m < 2\pi$). Кроме этого при фиксированном r перенумеруем множества $E_m(r)$ таким образом, чтобы $\{\theta_n\}_{n=1}^{q}$ образовали возрастающую последовательность. Рассмотрим мероморфную функцию

$F(z) = zf'(z)$ и отметим некоторые ее свойства. В силу неравенства (2.5.6) между любыми двумя соседними точками θ_m и θ_{m+1} существует точка $\bar{\theta}_m$ такая, что

$$\left| re^{i\bar{\theta}_m} f'(re^{i\bar{\theta}_m}) \right| = \left| F(re^{i\bar{\theta}_m}) \right| \geqslant C.$$

Поэтому

$$L(r, a_m, f) = \ln \left| \frac{f'(re^{i\theta_m})}{f(re^{i\theta_m}) - a_m} \right| +$$

$$+ \ln r + \ln (\left| re^{i\theta_m} f'(re^{i\theta_m}) \right|)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \ln \left| \frac{re^{i\bar{\theta}_m} f'(re^{i\bar{\theta}_m})}{re^{i\theta_m} f'(re^{i\theta_m})} \right| + \ln \left| \frac{f'(re^{i\theta_m})}{f(re^{i\theta_m}) - a_m} \right| +$$

$$+ C \ln r \leqslant \ln \left| \frac{f'(re^{i\bar{\theta}_m})}{f'(re^{i\theta_m})} \right| + \ln^+ M\left(r, \frac{f'}{f - a_m}\right) + C \ln r. \quad (2.5.8)$$

Далее,

$$(\bar{z}_m = re^{i\bar{\theta}_m}) \ln \left| f'(re^{i\theta_m}) \right| - \ln \left| f'(re^{i\theta_m}) \right| =$$

$$= \operatorname{Re} \{ \ln f'(re^{i\bar{\theta}_m}) - \ln f'(re^{i\theta_m}) \} =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{z_m}^{\bar{z}_m} (\ln f'(z))' \, dz = \operatorname{Re} \int_{z_m}^{\bar{z}_m} \frac{f''(z)}{f'(z)} \, dz =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{\theta_m}^{\bar{\theta}_m} rie^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \, d\theta \leqslant r \int_{\theta_m}^{\bar{\theta}_m} \left| \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right| d\theta. \quad (2.5.9)$$

Оценка (2.5.2) следует из выражений (2.5.8) и (2.5.9).

Положим для произвольной мероморфной функции $f(z)$

$$\sigma(r, f) = r \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| d\theta.$$

Рост функции $\sigma(r, f)$ достаточно полно исследован в работах [29; 47]. Как и в гл. I, для любого k, $1 < k < 2$, положим $e(R, k) = \{r : Rk^{-1} \leqslant r \leqslant Rk^{-0,5}\}$.

Лемма 2.5.2. *Для любых фиксированных чисел k, $1 < k < 2$, и $R > 1$ существует множество $e_2(R, k) \subset e(R, k)$ и $\operatorname{mes} e_2(R, k) \geqslant 3 \operatorname{mes} e(R, k)/4$, такое, что при*

$$r \in e_2(R, k) \quad \sigma(r, f) \leqslant K(k-1)^{-2} T(kR, f) + C(k-1)^{-2}. \quad (2.5.10)$$

Доказательство. Из оценки (1.1.12) следует, что ($r < R$)

$$r\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \leqslant \sum_{|c_k|\leqslant R} \frac{r}{|re^{i\theta}-c_k|} + 4Rr(R-r)^{-2}[T(R, f)+C] +$$

$$+ r(R-r)^{-1}[n(R, 0, f)+n(R, \infty, f)],$$

где $\{c_k\}$ — объединенная последовательность нулей и полюсов $f(z)$. Поэтому для $r \in e(R, k)$ [см. формулу (1.4.5)]

$$r\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leqslant \sum_{|c_k|\leqslant R} \frac{r}{|re^{i\theta}-c_k|} + 44(k-1)^{-2}[T(kR, f)+C]. \quad (2.5.11)$$

Оценка (2.5.11) дает

$$\sigma(r, f) \leqslant 88\pi(k-1)^{-2}[T(kR, f)+C] + A(r), \quad (2.5.12)$$

где

$$A(r) = r\sum_{|c_k|\leqslant R}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|re^{i\theta}-|c_k||}.$$

Простые вычисления показывают*, что

$$r\int_{e(R, k)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta dr}{|re^{i\theta}-c_k|} \leqslant \iint_{K(|c_k|, 2R)}\frac{rd\theta dr}{|re^{i\theta}-|c_k||} =$$

$$= \int_0^{2R}\int_0^{2\pi}\frac{\rho d\rho d\theta}{\rho} = 4\pi R,$$

поэтому

$$\int_{e(R, k)} A(r)\,dr \leqslant 4\pi R[n(R, 0, f)+n(R, \infty, f)] \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi R[T(kR, f)+C]\ln^{-1}k. \quad (2.5.13)$$

Пусть

$$e'(R, k) = \left\{r \in e(R, k) : A(r) > \frac{32\pi k}{(\sqrt{k}-1)\ln k}[T(kR, f)+C]\right\}.$$

В силу неравенства (2.5.13)

$$\operatorname{mes} e'(R, k)\frac{32\pi k}{(\sqrt{k}-1)\ln k}[T(kR, f)+C] \leqslant 8\pi R\ln^{-1}k[T(kR, f)+C],$$

поэтому $\operatorname{mes} e'(R, k) \leqslant R(k^{-0,5}-k^{-1})/4$. Значит, найдется мно-

---

Как и выше, $K(a, r)$ — круг с центром в точке a и радиусом r.

жество $e_2(R, k) \subset e(R, k)$ такое, что $\operatorname{mes} e_2(R, k) \geqslant 3 \operatorname{mes} e(R, k)/4$ и при* $r \in e_2(R, k)$

$$A(r) \leqslant \frac{32\pi k}{(\sqrt{k}-1)\ln k}[T(kR, f)+C] \leqslant \frac{320\pi}{(k-1)^2}[T(kR, f)+C]. \tag{2.5.14}$$

Оценка (2.5.10) непосредственно вытекает из неравенств (2.5.12) и (2.5.14).

Приступим к доказательству теоремы 2.5.1. Пусть $e_2(R, k) \subset e(R, k)$ — множество значений r, на котором выполняется оценка (2.5.10), а $e_1(R, k) \subset e(R, k)$ — множество значений r, на котором справедлива оценка (1.4.1). Положим $e_3(R, k) = e_2(R, k) \cap e_1(R, k)$. Имеем $\operatorname{mes} e_1 + \operatorname{mes} e_2 - \operatorname{mes} e_3 = \operatorname{mes}(e_1 + e_2) \leqslant \operatorname{mes} e(R, k)$, т. е. $1{,}5 \operatorname{mes} e(R, k) \leqslant \operatorname{mes} e(R, k) + \operatorname{mes} e_3(R, k)$, или $\operatorname{mes} e_3(R, k) \geqslant 0{,}5 \operatorname{mes} e(R, k)$.

В силу оценок (1.4.1), (2.5.2), (2.5.10) имеем** для $r \in e_3(R, k)$ и $r \geqslant r_0$

$$\sum_{k=1}^{q} L(r, a_k, f) \leqslant 816\pi(k-1)^{-2}[T(kR, f)+C] + C\ln T(kR, f). \tag{2.5.15}$$

Положим в выражении (2.5.15) $k = 1 + (\lambda+1)^{-1}$; $R_n = [1 + (\lambda+1)^{-1}]x_n = kx_n$, где λ — нижний порядок функции $f(z)$; $\{x_n\}$ — последовательность, определяемая леммой 1.3.1, с $p = k^2 = [1+(\lambda+1)^{-1}]^2$. При $r \in e(R_n, k) = e(R_n, 1+(\lambda+1)^{-1})$ имеем в силу соотношения (1.3.13)

$$T(kR_n, f) = T(k^2x_n, f) \leqslant e^2T(x_n, f) \leqslant \\ \leqslant e^2T(R_nk^{-1}, f) \leqslant e^2T(r, f). \tag{2.5.16}$$

Для $r \in e_3(R_n, k)$ оценки (2.5.15) и (2.5.16) дают

$$\sum_{k=1}^{q} L(r, a_k, f) \leqslant 816\pi(\lambda+1)^2 T(r, f) + C\ln T(r, f),$$

значит,

$$\sum_{k=1}^{q} \beta(a_k, f) \leqslant 816\pi(\lambda+1)^2. \tag{2.5.17}$$

Так как правая часть оценки (2.5.17) не зависит от q, то из неравенства (2.5.17) следует, что множество $\Omega(f)$ не более чем счетно*** и что

$$\sum_{a \in \Omega(f)} \beta(a, f) \leqslant 816\pi(\lambda+1)^2.$$

---

* Учитывалась оценка $\ln^{-1} k \leqslant 2(k-1)^{-1}$ $(1 < k < 2)$.

** См. также доказательство оценки (1.5.7).

*** См. доказательство не более чем счетности множества $D(f)$ и соотношения для дефектов в смысле Р. Неванлинны.

6. Дополнительные сведения о величинах положительных отклонений мероморфных функций малого нижнего порядка

В 1950 г. Ж. Валирон установил [54], что каждая мероморфная функция нулевого порядка не может иметь более одного дефектного значения, т. е. для таких функций множество $D(f) = \{a : \delta(a, f) > 0\}$ содержит не более одной точки. Исследованию свойств величин дефектов мероморфных функций малого нижнего порядка посвящено много работ [см., например, 27; 22]. Соответствующие результаты этих работ свидетельствуют о том, что каждая мероморфная функция нижнего порядка λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$, не может, в определенном смысле, сильно приближаться к более чем одному комплексному числу. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.6.1. *Пусть мероморфная функция $f(z)$ имеет нижний порядок λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$, тогда:*

а) если $0 < \lambda \leqslant 0{,}5$, *а множество $\Omega(f)$ содержит не менее двух точек, то для каждых $a \neq b \in \Omega(f)$* $\beta(a, f) + \beta(b, f) \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda \times$ $\times [2 - \delta(a, f) - \delta(b, f)]$; **(2.6.1)**

б) если $\lambda = 0$, то множество $\Omega(f)$ содержит самое большее одну точку.

Докажем сначала первую часть теоремы 2.6.1. Пусть нижний порядок $f(z)$ равен λ, $0 < \lambda \leqslant 0{,}5$, и $0, \infty \in \Omega(f)$. Тогда для $r \geqslant r_0$, $L(r, 0, f) = \ln[|f(re^{i\vartheta_2(r)})|]^{-1} > 0$; $L(r, \infty, f) = \ln|f(re^{i\vartheta_1(r)})| > 0$.

Положим для фиксированного r в формуле (2.1.16) $\alpha = \pi$ (т. е. $x = 0{,}5$), тогда

$$\ln|f(re^{i\vartheta_1(r)})| + \ln[|f(re^{i\vartheta_2(r)})|]^{-1} = \sum_{b_k(\vartheta_1) \in {}^dR} \ln\frac{r + |b_k|}{|r - b_k|} -$$

$$- \sum_{a_k(\vartheta_1) \in {}^dR} \ln\frac{r + |a_k|}{|r - a_k|} - \sum_{b_k(\vartheta_2) \in {}^dR} \ln\frac{r + |b_k|}{|r - b_k|} + \sum_{a_k(\vartheta_2) \in {}^dR} \ln\frac{r + |a_k|}{|r - a_k|} +$$

$$+ K(R, r, \vartheta_1, \pi) - K(R, r, \vartheta_2, \pi).$$

Поэтому [см. выражения (2.1.7), (2.2.4)]

$$L(r, 0, f) + L(r, \infty, f) \leqslant \sum_{|b_k| \leqslant R} \ln\frac{r + |b_k|}{r - |b_k||} + \sum_{|a_k| \leqslant R} \ln\frac{r + |a_k|}{|r - |a_k||} +$$

$$+ K(k - 1)^{-2}(rR^{-1})^{0,5}[T(kR, f) + C], \qquad (2.6.2)$$

где $\{a_k\}$ — корни $f(z)$; $\{b_k\}$ — полюсы $f(z)$.

Полагая в оценке (2.6.2) $k=2$ и учитывая соотношения (2.2.7), (2.2.9), имеем

$$\int_{2S}^{0,5R} L[r, 0, f)+L(r, \infty, f)]\frac{dr}{r^{\lambda+1}} \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda \int_{2S}^{0,5R} [N(r, 0, f)+$$

$$+N(r, \infty, f)]\frac{dr}{r^{\lambda+1}}+C[(2S)^{-\lambda}T(2S, f)+R^{-\lambda}T(2R, f)] \leqslant$$

$$\leqslant \pi\lambda \operatorname{tg} 0{,}5\pi\lambda(1+\varepsilon)(2-\delta(a, f)-\delta(b, f)]\int_{2S}^{0,5R} T(r, f)\frac{dr}{r^{\lambda\pm1}}+$$

$$+C[(2S)^{-\lambda}T(2S, f)+R^{-\lambda}T(2R, f]. \qquad (2.6.3)$$

Оценка (2.6.1) следует из неравенства (2.6.3) точно так, как оценка (2.2.12) следует из неравенства (2.2.10).

Докажем вторую часть теоремы 2.6.1. Пусть множество $\Omega(f)$ содержит две точки ($a=0$; $b=\infty$). Тогда выражение (2.6.2) с учетом (1.9.12) ($\lambda=0$) дает

$$\int_{2S_k}^{0,5R_k} [L(r, 0, f)+L(r, \infty, f)]\frac{dr}{r} \leqslant 0{,}5\pi^2[n(R, 0, f)+n(R, \infty, f)]+$$

$$+K[T(2R_k, f)+C] \leqslant K[T(2R_k, f)+C] \leqslant \frac{K}{\ln 0{,}5M}\int_{2S_k}^{0,5R_k} T(r)\frac{dr}{r}.$$

В этом случае $\beta(0, f)+\beta(\infty, f) \leqslant \varliminf_{r\to\infty}[L(r, 0, f)+L(r, \infty, f)]\times$ $\times T^{-1}(r, f) \leqslant K\ln^{-1}0{,}5M$, а так как M можно выбрать как угодно большим, $\beta(0, f)=\beta(\infty, f)=0$.

Таким образом, мы получили противоречие с тем, что 0 и ∞ содержится во множестве $\Omega(f)$. Случай, когда $a\neq 0, \infty$, а $b=$ $=\infty$, сводится к предыдущему с помощью перехода к функции $\Phi(z)=f(z)-a$. Если же $a\neq\infty$ и $b\neq\infty$ — любые числа ($a\neq b$), то переходим к функции $\Phi(z)=(f(z)-a)(f(z)-b)^{-1}$. Для нее $\beta(0, \Phi)=\beta(a, f)$; $\beta(\infty. \Phi)=\beta(b, f)$.

Теорема 2.6.1 доказана полностью.

Покажем, что утверждение теоремы 2.6.1 усилить нельзя. Пусть для фиксированного λ, $0<\lambda<1$,

$$h(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{1/\lambda}}\right). \qquad (2.6.4)$$

Для этой целой функции $t^{\lambda}-1 \leqslant n(t, 0, h)=n(t) \leqslant t^{\lambda}$. Рассмотрим в области $D_0=\{z: 1<|z|<\infty, |\arg z|<\pi\}$ однозначную и непрерывную ветвь $\ln h(z)$, для которой $\ln h(0)=0$. Для этой

ветви $\ln h(z)$ из равенства (2.6.4) получаем, что для каждого $z = re^{i\theta} \in D_0$

$$\ln h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{n^{1/\lambda}}\right) = \int_{0,5}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{t}\right) dn(t) = z \int_{0,5}^{\infty} \frac{n(t)\, dt}{t(t+z)}.$$

Поэтому

$$\left|\ln h(z) - z\int_{0,5}^{\infty} \frac{t^{\lambda-1}dt}{t+z}\right| \leqslant r\int_{0,5}^{\infty} \frac{n(t) - t^{\lambda}}{t(t+z)} dt\Bigg| \leqslant r\int_{0,5}^{\infty} \frac{dt}{t\,|t+z|} \leqslant Kr(\pi - |\theta|)^{-1} \times$$

$$\times \int_{0,5}^{\infty} \frac{dt}{t(t+r)} = K(\pi - |\theta|)^{-1} \ln(1 + 2r). \qquad (2.6.5)$$

Далее, $\left|z\int_{0}^{0,5} \frac{t^{\lambda-1}dt}{t+z}\right| \leqslant Kr(\pi - |\theta|)^{-1} \int_{0}^{0,5} \frac{t^{\lambda-1}dt}{t+r} \leqslant$

$$\leqslant K\lambda^{-1}(\pi - |\theta|)^{-1}. \qquad (2.6.6)$$

Из соотношений (2.6.5) и (2.6.6) имеем

$$\ln h(z) = z\int_{0}^{\infty} \frac{t^{\lambda-1}dt}{t+z} + \alpha(z), \qquad (2.6.7)$$

где $\alpha(0) = 0$ и для каждого $re^{i\theta} \in D_0$

$$|\alpha(re^{i\theta})| \leqslant K(\pi - |\theta|)^{-1}[\lambda^{-1} + \ln(1 + 2r)]. \qquad (2.6.8)$$

Переходя в равенстве (2.6.7) к действительным частям и проводя вычисления интеграла с помощью теории вычетов, получаем для каждого $re^{i\theta} \in D_0$

$$\ln|h(re^{i\theta})| = \pi r^{\lambda} \sin^{-1} \pi\lambda \cos\lambda\theta + \gamma(re^{i\theta}), \qquad (2.6.9)$$

где $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(re^{i\theta})$ удовлетворяют оценке (2.6.8). Положим $f_{\lambda}(z) = h(z)\, h^{-1}(-z)$.

Лемма 2.6.1. *Для каждого фиксированного* λ, $0 < \lambda < 0,5$ *мероморфная функция* $f_{\lambda}(z)$ *обладает такими свойствами:*

1) для каждого θ, $0 < |\theta| < \pi$, *и* $z = re^{i\theta}$

$$\ln|f_{\lambda}(re^{i\theta})) = \pi r^{\lambda} \sin^{-1} \pi\lambda \{\cos\lambda\theta - \cos\lambda(\pi - |\theta|)\} + \omega(re^{i\theta}), \qquad (2.6.10)$$

где $|\omega(re^{i\theta})| \leqslant K|\sin^{-1}\theta| \{\lambda^{-1} + \ln(1 + 2r)\}$;

2) при $r \to \infty$

$$T(r, f_{\lambda}) = 2r^{\lambda}\lambda^{-1} \sin^{-1} \pi\lambda \sin 0,5\pi\lambda + O(\ln r); \qquad (2.6.11)$$

3) неванлинновские дефекты $f_{\lambda}(z)$ *относительно* 0 *и* ∞ *удовлетворяют условию* $\delta(0, f_{\lambda}) = \delta(\infty, f_{\lambda}) = 1 - \cos 0,5\pi\lambda$. **(2.6.12)**

Доказательство. Из равенства (2.6.9) следует, что для каждого $re^{i(\theta-\pi)} \in D_0$ и $0 < \theta < \pi$

$\ln|h(re^{i(\theta-\pi)})| = \pi r^\lambda \sin^{-1}\pi\lambda \cos\lambda(\pi-\theta) + \gamma_1(re^{i\theta})$, где $|\gamma_1(re^{i\theta})| \leqslant \leqslant K\theta^{-1}\{\lambda^{-1} + \ln(1+2r)\}$.

Поэтому для каждого θ, $0 < \theta < \pi$,

$$\ln|f_\lambda(re^{i\theta})| = \pi r^\lambda \sin^{-1}\pi\lambda\{\cos\lambda\theta - \cos\lambda(\pi-\theta)\} + \gamma_2(re^{i\theta}),$$

где $\gamma_2(re^{i\theta})$ удовлетворяет оценке $|\gamma_2(re^{i\theta})| \leqslant K|\sin^{-1}\theta|\{\lambda^{-1} + \ln(1+2r)\}$.

Так как $|f_\lambda(z)| = |f_\lambda(\bar{z})|$, тем самым доказано соотношение (2. 6.10). Из него находим ($r \to \infty$)

$$m(r, f_\lambda) = \pi r^\lambda \sin^{-1}\pi\lambda \frac{1}{\pi}\int_0^{0,5\pi}[\cos\lambda\theta - \cos\lambda(\pi-\theta)]\,d\theta + O(\ln r) =$$

$$= r^\lambda\lambda^{-1}\sin^{-1}\pi\lambda[2\sin 0{,}5\pi\lambda - \sin\pi\lambda] + O(\ln r). \qquad \textbf{(2.6.13)}$$

Аналогично

$$m(r, 0, f_\lambda) = r^\lambda\lambda^{-1}\sin^{-1}\pi\lambda(2\sin 0{,}5\pi\lambda - \sin\pi\lambda) + O(\ln r). \qquad \textbf{(2.6.14)}$$

Кроме этого, $N(r, f_\lambda) = \int_{0,5}^{r} n(t, 0, h)\frac{dt}{t} = r^\lambda\lambda^{-1} + O(\ln r)$. **(2.6.15)**

Из равенств (2.6.13) и (2.6.15) сразу следует соотношение (2.6.11). Равенство (2.6.12) следует из выражений (2.6.13), (2.6.14), (2.6.11). Лемма 2.6.1 доказана.

Положим в выражении (2.6.10) $\theta = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, тогда для каждого $r \geqslant r_0$ $L(r, \infty, f_\lambda) \geqslant \pi r^\lambda \sin^{-1}\pi\lambda[\cos\lambda\varepsilon - \cos\lambda(\pi-\varepsilon)] + + O(\ln r)$. **(2.6.16)**

Если же в формуле (2.6.10) положить $\theta = \pi - \varepsilon$, имеем

$L(r, 0, f_\lambda) \geqslant \pi r^\lambda \sin^{-1}\pi\lambda\,]\cos\lambda\varepsilon - \cos\lambda(\pi-\varepsilon)] + O(\ln r)$. **(2.6.17)**

Соотношения (2.6.11), (2.6.12), (2.6.16), (2.6.17) дают

$$\beta(\infty, f_\lambda) \geqslant \pi\lambda 0{,}5\sin^{-1}0{,}5\pi\lambda(1-\cos\pi\lambda) = \pi\lambda\sin 0{,}5\pi\lambda =$$
$$= \pi\lambda\,\mathrm{tg}\,0{,}5\pi\lambda\cos 0{,}5\pi\lambda = \pi\lambda\,\mathrm{tg}\,0{,}5\pi\lambda[1-\delta(\infty, f_\lambda)].$$

Аналогично убеждаемся в справедливости оценки $\beta(0, f_\lambda) \geqslant \pi\lambda \times \times \mathrm{tg}\,0{,}5\pi\lambda[1-\delta(0, f_\lambda)]$. В силу неравенства (2.6.1) для данной функции $\beta(0, f_\lambda) + \beta(\infty, f_\lambda) = \pi\lambda\,\mathrm{tg}\,0{,}5\pi\lambda[2-\delta(0, f_\lambda)-\delta(\infty, f_\lambda)]$.

Наиболее актуальные нерешенные проблемы, относящиеся к материалу главы II

1. Пусть Δ и λ — произвольные наперед заданные числа, удовлетворяющие условию $0 < \Delta \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda < \infty$. Существует ли мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$, имеющая нижний порядок λ,

для которой в некоторой точке a $\beta(a, f) = B(\lambda, \Delta(a, f))$, где $\Delta(a, f) = \Delta$ — валироновский дефект $f(z)$ в точке a, а функция $B(\lambda, \Delta)$ определена соотношением (2.2.3)?

2. Существует ли мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ конечного нижнего порядка λ, для которой при $\lambda \geqslant 0{,}5$ для двух различных чисел a_1 и a_2 $\beta(a_1, f) = \beta(a_2, f) = B(\lambda, 1) = \pi\lambda$?

3. Существует ли мероморфная функция конечного нижнего порядка, для которой множество $\Omega(f)$ является счетным, а $D(f)$ — пустым множеством?

4. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка и $S(f) = \sum\limits_{a \in \Omega(f)} \beta(a, f)$. Положим $\sigma(\lambda) = \sup\limits_{\{f\}}, S(f)$, где sup берется по всем мероморфным функциям, имеющим нижний порядок λ. Найти точное значение для $\sigma(\lambda)$.

5. Пусть Q — класс мероморфных функций нижнего порядка $\lambda \leqslant 0{,}5$, для которых множество $\Omega(f)$ содержит не менее двух точек. Положим $\sigma(\lambda, Q) = \sup\limits_{f \in Q} S(f)$, где sup берется по всем $f(z) \in Q$, имеющим нижний порядок λ. Известно, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma(\lambda, Q) = 0$. Найти асимптотику для функции $\sigma(\lambda, Q)$ при $\lambda \to 0$.

6. Известно, что для каждой мероморфной функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ ряд $\sum\limits_{a \in \Omega(f)} \beta^{\alpha}(a, f)$ сходится для $\alpha > 0{,}5$. Этот ряд может расходиться для $\alpha < 0{,}5$ [см. оценку (1.6.4)]. Для каждой ли мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ сходится ряд $\sum\limits_{a \in \Omega(f)} \beta^{0,5}(a, f)$?

Глава III

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА И ФУНКЦИЙ, МЕРОМОРФНЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Свойства величин положительных отклонений мероморфных функций бесконечного нижнего порядка и функций, мероморфных в круге $K(0, 1) = \{z : |z| < 1\}$ могут сильно отличаться от соответствующих свойств неванлинновских дефектов. Несмотря на это обстоятельство, множество $\Omega(f)$ носит характер исключительного множества и для таких функций.

1. О мощности множеств положительных отклонений мероморфных функций бесконечного нижнего порядка

Докажем, что для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка множество $\Omega(f)$ может иметь мощность континуума. Прежде всего установим ряд вспомогательных утверждений. Пусть для любого $R\,(-\infty < R < \infty)$ L_R означает контур, состоящий из вертикального отрезка $l_0 = \{z : z = x + iy,\ x = R,\ |y| \leqslant \pi\}$ и из двух горизонтальных лучей: $l_1 = \{z : z = x + iy,\ y = \pi,\ x \geqslant R\}$; $l_2 = \{z : z = x + iy,\ y = -\pi,\ x \geqslant R\}$. Далее считаем, что на L_R определено направление обхода по часовой стрелке. Пусть для $a < b$ $P_{a,b} = L_a \setminus L_b$, т. е. $P_{a,b}$ является границей прямоугольника с заданным направлением обхода по часовой стрелке. Обозначим через D_0 область, лежащую слева от L_0, а через A_0 — область с границей L_0, содержащую действительную положительную ось (рис. 2).

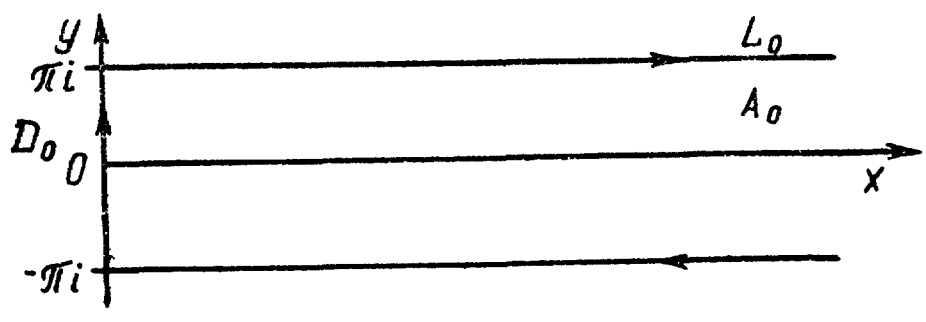

Рис. 2.

Определим в D_0 с помощью интеграла типа Коши функцию

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.1.1}$$

Легко заметить, что в D_0 функция $E(z)$ аналитическая. Это следует из абсолютной сходимости интеграла типа Коши в D_0 [18, с. 271]. В частности, при $z \in D_0$

$$E'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Найдем асимптотическое поведение при $|z| \to \infty$ функции $E(z)$ [см. также 37, с. 126—128]. Пусть $z \in D_0$ — любое число. Положим $R = 1 + |z|$, тогда

$$E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{P_{0,R}} \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.1.2}$$

Заметим, что при $\zeta \in L_R$ $|z - \zeta| \geqslant 1$ (z фиксировано), кроме этого,

$$(\zeta - z)^{-1} = -z^{-1}(1 - \zeta z^{-1})^{-1} = -z^{-1} - \zeta z^{-2} - (\zeta z^{-1})^2 (z - \zeta)^{-1}. \tag{3.1.3}$$

Из равенств (3.1.2.) и (3.1.3) получаем

$$E(z) = -z^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \exp_2 \zeta d\zeta - \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \zeta \exp_2 \zeta d\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \zeta^2 \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right\}. \tag{3.1.4}$$

Пусть $I(R) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \exp_2 \zeta d\zeta$;

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \zeta \exp_2 \zeta d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_R} \zeta^2 \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3.1.5}$$

Легко заметить, что $I(R)$ не зависит от R. Действительно, пусть $R_1 \neq R_2$ $(R_1 < R_2)$, имеем

$$I(R_1) - I(R_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{P_{R_1, R_2}} \exp_2 \zeta d\zeta = 0.$$

Далее, для каждого $R > 0$

$$I(-R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(e^{-R + iy}) dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-R}^{+\infty} \exp(-e^x) dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty}^{-R}\exp(-e^x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(e^{-R+iy})dy.$$

Таким образом, $\lim\limits_{R\to\infty} I(-R)=1$, значит, $I(R)\equiv 1$. Оценка (3.1.4) принимает вид $E(z)=-z^{-1}-z^{-2}\psi_1(z)$. **(3.1.6)**

Покажем, что для каждого $z\in\overline{D_0}\,|\psi_1(z)|\leqslant K$ **(3.1.7)**. Для каждого $z\in D_0$ интегралы, стоящие справа в формуле (3.1.5), не зависят от R, т. е. для каждого $z\in D_0$

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\zeta\exp_2\zeta d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\zeta^2\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

Построим круг $(z\in\overline{D_0})\,K(z,\ \pi/4)=\{\zeta:|\zeta-z|<\pi/4\}$ и положим $\alpha(z)=CD_0\frown K(z,\ \pi/4)$. Пусть $l(z)$ — часть границы $\alpha(z)$, совпадающая с дугой окружности, если $\alpha(z)\neq\varnothing$; L'_0 — контур, полученный из L_0 путем замены отрезка контура L_0, попавшего в $K(z,\ \pi/4)$, дугой $l(z)$ (рис. 3).

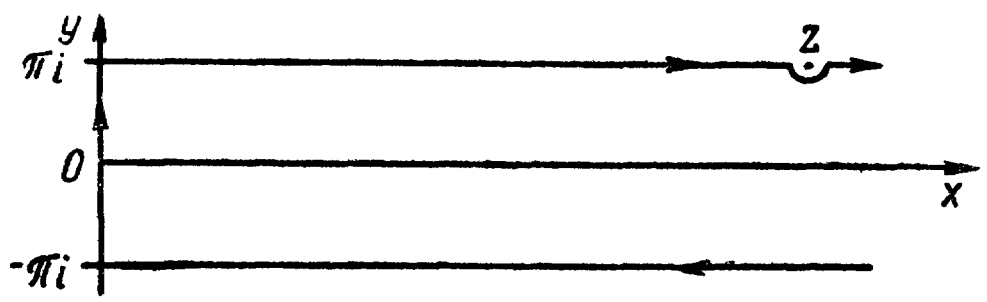

Рис. 3.

Положим $C_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\zeta\exp_2\zeta d\zeta$, тогда выражение (3.1.8) дает в случае $\mathrm{Re}z>\pi/4$

$$|\psi_1(z)-C_1|\leqslant\frac{2}{\pi^2}\int\limits_{L'_0}|\zeta|^2\exp\mathrm{Re}\,e^{\zeta}|d\zeta|\leqslant\frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}(x^2+$$

$$+\pi^2)\exp\left(-\cos\frac{\pi}{4}e^x\right)dx+4\int\limits_0^{\pi}\exp\cos y\,dy=K.$$

Если же $\mathrm{Re}z\leqslant\pi/4$, то для получения неравенства (3.1.7) следует в формуле (3.1.8) заменить контур L_0 на L_1 и провести предыдущие рассуждения. Таким образом, мы подходим к следующему утверждению [см. соотношения (3.1.6), (3.1.7)].

Лемма 3.1.1. *Для функции $E(z)$, определенной в области D_0 соотношением* (3.1.1), *для каждого $z\in D_0$ справедливо равенство* $E(z)=-z^{-1}+z^{-2}\psi_1(z)$, **(3.1.9)** где $\psi_1(z)$ — *аналитическая функция в $\overline{D_0}$, для которой выполняется оценка* (3.1.7).

Лемма 3.1.2. *Аналитическая функция $E(z)$, определенная в области D_0 соотношением* (3.1.1), *аналитически продолжается до целой функции. Для продолженной целой функции $E(z)$ справедливо равенство*

$$E(z)=\begin{cases}-z^{-1}+z^{-2}\psi_1(z), & \text{если } z\in\overline{D_0};\\ \exp_2 z-z^{-1}-z^2\psi_2(z), & \text{если } z\in\overline{A_0},\end{cases}\tag{3.1.10}$$

где $\psi_1(z)$ — аналитическая функция в $\overline{D_0}$; $\varphi_2(z)$ — аналитическая функция в $\overline{A_0}$, при этом $|\psi_1(z)|\leqslant K$; $|\psi_2(z)|\leqslant K$.

Доказательство. Равенство (3.1.10) для $z\in\overline{D_0}$ следует из выражения (3.1.9) [см. также доказательство соотношения (3.1.6)]. Докажем, что $E(z)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость. Действительно, в силу равенства (3.1.2) для любого $R>0$

$$E(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_R}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}.\tag{3.1.11}$$

Ясно, что интеграл справа в соотношении (3.1.11) определяет аналитическую функцию не только в области D_0, но и в области D_R, лежащей слева от контура L_R. Так как в формуле (3.1.11) $R>0$ может быть выбрано любым, $E(z)$ аналитически продолжается на всю открытую комплексную плоскость. Таким образом, $E(z)$ — целая функция.

Найдем асимптотику для $E(z)$ при $z\in A_0$. Положим, как и выше, $R=1+|z|$. В силу равенства (3.1.11)

$$E(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_R}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{P_{0,R}}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\exp_2 z+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Далее аналогично, как и при доказательстве леммы 3.1.1, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\exp_2\zeta\frac{d\zeta}{\zeta-z}=-z^{-1}-z^{-2}\psi_2(z),$$

где $\psi_2(z)$ — аналитическая функция в $\overline{A_0}$ и для каждого $z\in\overline{A_0}$ $|\psi_2(z)|\leqslant K$. Лемма 3.1.2 доказана.

Рассмотрим целую функцию $E_0(z)=E'(z)$.

Лемма 3.1.3. *Целая функция $E_0(z)$ удовлетворяет таким соотношениям:*

$$E_0(z) = \begin{cases} z^{-2}\psi_3(z), \text{ если } z \in \overline{D}_0; & (3.1.12) \\ \exp(z + e^z) + z^{-2}\psi_4(z), \text{ если } z \in \overline{A}_0, & (3.1.13) \end{cases}$$

где $\psi_3(z)$ — *аналитическая функция в* $\overline{D}_0$; $\psi_4(z)$ — *аналитическая функция в* $\overline{A}_0$; *для каждого* $z: |z| \geqslant 1$ *в своих областях определения* $|\psi_3(z)| \leqslant K$; $|\psi_4(z)| \leqslant K$.

Доказательство. По формуле Коши

$$E_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K(z,\, \pi/4)} E(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} E\left(z + \frac{\pi}{4} e^{i\theta}\right) e^{-i\theta} d\theta.$$

Если $z \in \overline{D}_0$, то в силу равенства (3.1.10)

$$E_0(z) = \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{z + \frac{\pi}{4} e^{i\theta}} + \frac{\psi_1\left(z + \frac{\pi}{4} e^{i\theta}\right)}{\left(z + \frac{\pi}{4} e^{i\theta}\right)^2} \right\} e^{-i\theta} d\theta =$$

$$= (-z^{-1} + z^{-2}\psi_1(z))' = z^{-2} + z^{-2}\psi_1'(z) - 2z^{-3}\psi_1(z) =$$

$$= z^{-2}\{1 + \psi_1'(z) - 2z^{-1}\psi_1(z)\}. \qquad (3.1.14)$$

Из выражения (3.1.8) имеем для каждого $z \in D_0$

$$\psi_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \zeta^2 \exp_2 \zeta \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Далее аналогично, как и при доказательстве ограниченности функции $\psi_1(z)$, убеждаемся, что для каждого $z \in \overline{D}_0 |\psi_1'(z)| \leqslant K$. Из равенства (3.1.14) находим (при $|z| \geqslant 1$ и $z \in \overline{D}_0$), что $\psi_3(z) = 1 + \psi_1'(z) - 2z^{-1}\psi_1(z)$ удовлетворяет оценке $|\psi_3(z)| \leqslant K$. Соотношение (3.1.13) доказывается аналогично, исходя из второго выражения в равенстве (3.1.10).

Рассмотрим систему полуполос $A_n = \{z = x + iy : x > 0, (2n - 1)\pi \leqslant y < (2n + 1)\pi\}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, и положим $E_n(z) = E_0(z - 2\pi i n)$. Поведение $E_n(z)$ в полосе A_n такое же, как и поведение $E_0(z)$ в полосе A_0.

Лемма 3.1.4. *Если m — фиксированное целое число и $z \in A_m$, то для каждого $n \neq m$*

$$|E_n(z)| \leqslant \begin{cases} Kn^{-2}, & \text{если } |n| \geqslant 2|m| + 1; \\ K, & \text{если } n \neq m \text{ и } |n| < 2|m| + 1. \end{cases} \qquad (3.1.15)$$

Доказательство. Пусть $|n| \geqslant 2|m|+1$. Имеем $|z-2n\pi i| \geqslant |y-2n\pi| = |n||2\pi - yn^{-1}| \geqslant |n|(2\pi - |y||n|^{-1} \geqslant |n|\{2\pi-(2|m|+1)\pi|n|^{-1}\} \geqslant \pi|n| \geqslant \pi$. В этом случае $(z-2\pi in) \in D_0$, значит, в силу соотношения (3.1.12) $|E_n(z)| = |E_0(z-2\pi in)| \leqslant K|z-2\pi in|^{-2} \leqslant Kn^{-2}$. Если же $m \neq n$ и $z \in A_m$, то $\operatorname{Im}(z-2\pi in) = |y-2\pi n| \geqslant \pi$, т. е. и в этом случае $(z-2\pi in) \in D_0$, следовательно, $|E_n(z)| = |E_0(z-2\pi in)| \leqslant K|z-2\pi in|^{-2} \leqslant K$. Лемма 3.1.4 доказана.

Лемма 3.1.5. *Пусть* $\varphi(y) = \max(0, -\cos y)$;

$$I(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta.$$

Тогда для $r \geqslant r_0$ $I(r) \leqslant e^r r^{-0,5}$. **(3.1.16)**

Доказательство. Имеем

$$I(r) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi 6^{-1}} \exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta + \exp 0{,}5r\sqrt{3}. \quad \textbf{(3.1.17)}$$

Сделаем замену $r\sin\theta = y$ и положим

$$\psi(y) = \int_0^y \varphi(t)\,dt;\ \varkappa(y) = (r^2-y^2)^{-0,5}\exp(r^2-y^2)^{0,5}.$$

Тогда $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi 6^{-1}} \exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{0,5r} \exp(r^2-y^2)^{0,5} \times$

$$\times \frac{\varphi(y)}{(r^2-y^2)^{0,5}}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{0,5r} \varkappa(y)\,d\psi(y) = \pi^{-1}\psi(0{,}5r)\,\varkappa(0{,}5r) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{0,5r} \psi(y)\,\varkappa'(y)\,dy. \quad \textbf{(3.1.18)}$$

Если $0 \leqslant y \leqslant 0{,}5r$ и $r \geqslant 2$, то $\varkappa'(y) = y(r^2-y^2)^{-1}\exp(r^2-y^2)^{0,5} \times \{-1+(r^2-y^2)^{-0,5}\} \leqslant 0$;

$$|\psi(0{,}5r)\,\varkappa(0{,}5r)| \leqslant \exp 0{,}5r\sqrt{3};\ 0 \leqslant \psi(y) \leqslant \int_0^y |\varphi(t)|\,dt \leqslant y.$$

Оценка (3.1.18) принимает вид

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi 6^{-1}} \exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta \leqslant -\frac{1}{\pi}\int_0^{0,5r} y\varkappa'(y)\,dy + \exp(0{,}5r\sqrt{3}) =$$

$$= -0{,}5\pi^{-1}r\varkappa(0{,}5r) + \int_0^{0,5r} \varkappa(y)\,dy +$$

$$+ \exp 0{,}5r\sqrt{3} \leqslant \int_0^{0,5r} \varkappa(y)\,dy + \exp 0{,}5r\sqrt{3}. \quad \textbf{(3.1.19)}$$

Пусть $(r^2-y^2)^{0,5}=r-u$; $\theta=1-0,5\sqrt{3}$. Тогда

$$\int_0^{0,5r}\varkappa(y)\,dy=\int_0^{\theta r}\frac{e^{r-u}du}{(2ru-u^2)^{0,5}}=e^r\int_0^{\theta r}\frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{2ru}\sqrt{1-u(2r)^{-1}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{e^r}{\sqrt{2r}\sqrt{1-0,5\theta}}\int_0^{\theta r}\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}}\leqslant\frac{e^r}{\sqrt{r}\sqrt{1,8}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}}=$$

$$=\frac{e^r\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1,8r}}<0,7r^{-0,5}e^r. \qquad \textbf{(3.1.20)}$$

Оценка (3.1.16) следует из выражений (3.1.17), (3.1.19), (3.1.20).

Замечание. Найдем оценку снизу для функции $I(r)$. Прежде всего заметим, что для $y\geqslant 2\pi$ $\psi(y)\geqslant 2[y(2\pi)^{-1}]\geqslant y\pi^{-1}-2$. Поэтому [см. доказательство оценок (3.1.18), (3.1.19)] при $r\geqslant r_0$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/6}\exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta\geqslant-\frac{1}{\pi^2}\int_0^{0,5r}y\varkappa'(y)\,dy+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{0,5r}\varkappa'(y)\,dy-K\exp 0,5r\sqrt{3}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{0,5r}\varkappa(y)\,dy-K\exp 0,5r\sqrt{3}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{e^r}{\pi^2\sqrt{2r}}\int_0^{\theta r}\frac{e^{-u}du}{\sqrt{u}\sqrt{1-u(2r)^{-1}}}-K\exp 0,5r\sqrt{3}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{e^r}{\pi^2\sqrt{2r}}\int_0^{\theta r}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du-K\exp 0,5r\sqrt{3}\geqslant$$

$$\geqslant 0,5\pi^{-2}r^{-0,5}e^r-K\exp 0,5r\sqrt{3}.$$

Тогда [см. неравенство (3.1.17)]

$$I(r)\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi 6^{-1}}\exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta-$$

$$-\exp 0,5r\sqrt{3}\geqslant 0,5\pi^{-2}r^{-0,5}e^r-K\exp 0,5r\sqrt{3}.$$

Следствие. *Для* $r\geqslant r_0$ $0,25\pi^{-2}r^{-0,5}e^r\leqslant m(r,\ \exp_2 z)\leqslant$ $\leqslant r^{-0,5}e^r$. **(3.1.21)**

Действительно, $m(r,\ \exp_2 z)=m(r,\ 0,\ \exp_2 z)=\frac{1}{\pi}\times$

$\times\int_0^{\pi}\exp(r\cos\theta)\,\varphi(r\sin\theta)\,d\theta=I(r)$. Поэтому соотношение (3.1.21) непосредственно следует из оценок для $I(r)$.

Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(b_n \neq 0)$ — произвольная ограниченная последовательность различных комплексных чисел (т. е. $\forall n\,|b_n| \leqslant K$, $\forall n \neq m$, $b_n \neq b_m$). Положим $b_0 = 1$; $b_{-n} = b_n$.

Лемма 3.1.6. *Функция*

$$g(z) = \exp(-z - e^z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n E_n(z) \qquad (3.1.22)$$

является целой функцией, для которой при $r \geqslant r_0$ $T(r, g) \leqslant 2r^{-0,5}e^r$ **(3.1.23)** и при $r \geqslant r_0(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $L(r, b_n, g) \geqslant 0{,}5e^r$. **(3.1.24)**

Доказательство. То, что $g(z)$ — целая функция, сразу следует из свойств функций $E_n(z)$ [см. формулу (3.1.15)]. Докажем оценку (3.1.23). Пусть $|z| = r$ и $\operatorname{Re} z \geqslant \pi$, тогда существует одно значение $m = m(r)$ такое, что $z \in A_{m(r)}$. Учитывая оценку (3.1.13), имеем

$$g(z) = \exp(-z - e^z)\, b_m E_m(z) + \exp(-z - e^z) \sum_{n \neq m} b_n E_n(z) =$$

$$= b_m + \exp(-z - e^z)\, b_m (z - 2\pi i m)^{-2} \psi_4(z - 2\pi i m) +$$

$$+ \exp(-z - e^z) \sum_{|n| \leqslant 2|m|+1} b_n E_n(z) +$$

$$+ \exp(-z - e^z) \sum_{|n| > 2|m|+1} b_n E_n(z). \qquad (3.1.25)$$

Из выражений (3.1.15) и (3.1.25) имеем для каждого z такого, что $\operatorname{Re} z \geqslant \pi$, $\ln^+|g(z)| \leqslant \ln^+|\exp(-z - e^z)| + C + \ln^+ K(1 + |m|) \leqslant \ln^+|\exp(-z - e^z)| + C \ln(2 + r) = \ln^+ \exp(-e^x \cos y - x) + C \ln(2 + r) \leqslant e^{r\cos\theta}\varphi(r \sin\theta) + C(1 + r)$ **(3.1.26)**, где $\varphi(y) = \max(0, -\cos y)$. Пусть $\operatorname{Re} z < \pi$. В этом случае

$$|\exp(-z - e^z)| = \exp(-e^x \cos y - x) \leqslant e^{-x} \exp_2 \pi. \qquad (3.1.27)$$

Заметим, что при $|z| \leqslant 2\pi$ $|E_0(z)| \leqslant K$. Поэтому, если $|z - 2m\pi i| \leqslant 2\pi$, $|E_m(z)| \leqslant K$. В случае, когда $|z| > 2\pi$ и $\operatorname{Re} z < \pi$, имеем $z \in D_0$, значит, в силу соотношения (3.1.12) $|E_0(z)| \leqslant |z|^{-2}K$. Таким образом, для каждого z такого, что $\operatorname{Re} z < \pi$,

$$|E_n(z)| \leqslant \begin{cases} K, & \text{если } |z - 2\pi i n| \leqslant 2\pi; \\ K(|z - 2\pi i n|)^{-2}, & \text{если } |z - 2\pi i n| > 2\pi, \end{cases}$$

$$\text{поэтому} \quad \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n E_n(z)\right| \leqslant \sum_{|n| > 1+|z|} |b_n|\,|E_n(z)| +$$

$$+ \sum_{|n| \leqslant 1+|z|} |b_n|\,|E_n(z)| \leqslant K(1 + |z|) + K \sum_{|n| > 1+|z|} |z - 2\pi i n|^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n)^{-2} + K(1 + |z|) \leqslant K(1 + |z|. \qquad (3.1.28)$$

Из выражений (3.1.27) и (3.1.28) получаем для $\operatorname{Re} z < \pi$ $\ln^+ |g \times \times (z)| < K(1 | + |z|)$ (3.1.29). Оценки (3.1.16), (3.1.26), (3.1.29) показывают, что при $r \geqslant r_0$

$$T(r, g) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(r \cos\theta) \varphi(r \sin\theta) d\theta + C(1 + r) =$$

$$= I(r) + C(1 + r) \leqslant 2r^{-0,5} e^r.$$

Остается доказать оценку (3.1.24). Положим для фиксированного m в равенстве (3.1.25) $z = x + 2\pi i m = re^{i\theta_m}$ с $x > 1$ и $|z| = r$. Тогда

$$g(re^{i\theta_m}) - b_m = \exp(-x - e^x) \left\{ b_m \frac{\psi_4(x)}{x^2} + C(1 + r) \right\}.$$

Поэтому

$$|g(re^{i\theta_m}) - b_m| \leqslant Ce^{-x} \exp\{-e^{(r^2 - y^2)^{0,5}}\}(1 + r),$$

значит, для $r \geqslant r_0$ $L(r, b_m, g) \geqslant \exp(r^2 - y^2)^{0,5} - C \geqslant \exp\{r[1 - - 2\pi m r^{-1})^2]^{0,5}\} - C \geqslant \exp\{r[1 - 2(2\pi m r^{-1})^2]\} - C > 0,5e^r$. Лемма 3.1.6 доказана полностью.

Из оценок (3.1.22) и (3.1.23) видно, что для целой функции $g(z)$, определенной соотношением (3.1.22), для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\beta(b_n, g) = \infty$. Теперь мы имеем весь необходимый материал для доказательства основного утверждения этого параграфа.

Теорема 3.1.1. *Существует множество C, имеющее мощность континуума, и целая функция $g(z) = g(z, C)$ бесконечного нижнего порядка, для которой для каждого $a \in C$ $\beta(a, g) = \infty$.*

Доказательство. Искомая функция имеет вид правой части равенства (3.1.22) со специальным образом выбранной последовательностью $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\theta(n) = \exp_3(2n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Если $n \geqslant k + 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то

$$\theta(n) - \theta(k + 1) = \sum_{\nu=k+2}^{n} [\theta(\nu) - \theta(\nu - 1)] \geqslant (n - k - 1) \exp_2 2k \geqslant n - k.$$

Рассмотрим следующее множество действительных чисел C:

$$C = \left\{ a\colon\ a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \exp[-\theta(n)] \right\}, \qquad (3.1.30)$$

где γ_n принимает независимо два значения: 0 и 1, причем в представлении (3.1.30) для каждого a 1 встречается бесконечное число раз. Покажем, что множество C, определенное равенством (3.1.30), имеет мощность континуума. Для этого достаточно убедиться в том, что различным последовательностям, состоящим из нулей и единиц, в которых единица встречается бесконечное

число раз $\{\gamma_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ отвечают различные числа a_1 и a_2 из C. Пусть $\gamma_1^{(1)} = \gamma_1^{(2)}, \ldots, \gamma_{k-1}^{(1)} = \gamma_{k-1}^{(2)}, \gamma_k^{(1)} \neq \gamma_k^{(2)}$.

$$\text{Имеем } |a_1 - a_2| = \left| \sum_{\nu=k}^{\infty} [\gamma_\nu^{(1)} - \gamma_\nu^{(2)}] \exp[-\theta(\nu)] \right| \geqslant$$

$$\geqslant \exp[-\theta(k)] - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \exp[-\theta(\nu)] = \exp[-\theta(k)] -$$

$$- \exp[-\theta(k+1)] - \sum_{n=k+2}^{\infty} \exp[-\theta(n)] = \exp[-\theta(k)] -$$

$$- \exp[-\theta(k+1)] \left\{ 1 + \sum_{n=k+2}^{\infty} \exp[\theta(k+1) - \theta(n)] \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp[-\theta(k)] - \exp[-\theta(k+1)] \left\{ 1 + \sum_{n=k+2}^{\infty} \exp(k-n) \right\} =$$

$$= \exp[-\theta(k)] - \exp[-\theta(k+1)] [1 + e^{-1}(e-1)^{-1}].$$

Из определения $\theta(n)$ видно, что для $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\theta(k+1) - \theta(k) \geqslant 2$, поэтому $|a_1 - a_2| \geqslant \exp[-\theta(k)] \{1 - e^{-2} - e^{-3} \times (e-1)^{-1}\} \geqslant \exp[-\theta(k)](1 - 1/4 - 1/8) \geqslant 0{,}6 \exp[-\theta(k)] \neq 0$. Множество C имеет мощность континуума.

Запишем теперь каждое натуральное число n в двоичной системе:

$$n = \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k 2^{k-1} \ (\gamma_k = 0, 1). \tag{3.1.31}$$

При этом $q(n)$ определяется однозначно, как наибольший индекс, для которого $\gamma_{q(n)} = 1$. Между множеством натуральных чисел (3.1.31) и множеством

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k \exp[-\theta(k)], \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1.32}$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Пусть $b_0 = 1$ и $b_{-n} = b_n$. С помощью последовательности $\{b_n\}_{n=-\infty}$ составим целую функцию $g(z)$ по формуле (3.1.22). Убедимся в том, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Прежде всего заметим, что в силу выражений (3.1.23) и (3.1.24) для каждого b_n вида (3.1.32) $\beta(b_n, g) = \infty$. Покажем, что для каждого $a \in C$, где множество C определено соотношением (3.1.30), также справедливо $\beta(a, g) = \infty$. Зафиксируем произвольное число $a \in C$. Представление (3.1.30) для этого числа порождает

последовательность $\{\gamma_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$, а значит, последовательность целых неотрицательных чисел

$$n_m(a) = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k(a)\, 2^{k-1}. \qquad (3.1.33)$$

Ясно, что для фиксированного a числа $n_m(a)$ могут совпадать между собой лишь для конечного множества индексов m. Так как в представлении (3.1.30) для каждого a среди чисел $\gamma_k(a)$ единица встречается бесконечное число раз, то $n_m(a) \to \infty$ при $m \to \infty$. Выберем теперь любое $r \geqslant \exp e$ и будем проводить соответствующие оценки в зависимости от различных возможных случаев расположения членов последовательности $\{n_m(a)\}_{m=1}^{\infty}$.

Случай 1. Найдется хотя бы одно $n_k(a)$ такое, что для выбранного значения r $0{,}5 \ln r \leqslant n_k(a) \leqslant \ln r$. **(3.1.34)** Выберем одно такое $n_k(a)$. Соответствующее этому числу $n_k(a)$ значение $b_{n_k(a)}$ имеет вид

$$b_{n_k(a)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu(a) \exp[-\theta(\nu)] \quad (\gamma_k(a) = 1).$$

Далее, $0 \leqslant a - b_{n_k(a)} = \sum\limits_{\nu=k+1}^{\infty} \gamma_\nu(a) \exp[-\theta(\nu)] \leqslant \exp(-\theta(k+1)] +$

$$+ \sum_{\nu=k+2}^{\infty} \exp[-\theta(\nu)] = \exp[-\theta(k+1)] \left\{ 1 + \sum_{\nu=k+2}^{\infty} \exp[\theta(k+1) - \right.$$

$$\left. - \theta(\nu)] \right\} \leqslant \exp[-\theta(k+1)] \left\{ 1 + \sum_{\nu=k+2}^{\infty} \exp(k-\nu) \right\} =$$

$= \exp[-\theta(k+1)] \{1 + e^{-1}(e-1)^{-1}\} \leqslant 1{,}5 \exp[-\theta(k+1)]$. В силу оценки (3.1.34) $0{,}5 \ln r \leqslant n_k(a) \leqslant \sum\limits_{\nu=1}^{k} 2^{\nu-1} = 2^k - 1 < e^k$. Поэтому $\theta(k+1) = \exp_3(2k+2) = \exp_2(e^{2+2k}) \geqslant \exp_2 \ln^2 r \geqslant \exp r^2$. Таким образом, $0 \leqslant a - b_{n_k(a)} \leqslant 1{,}5(\exp_2 r^2)^{-1}$. **(3.1.35)** Пусть $z_k = x + 2\pi i n_k(a)$, где $x > 0$ и $|z_k| = r$. Тогда [см. соотношения (3.1.25) и (3.1.26)] $g(z_k) = b_{n_k(a)} + \exp(-z_k - e^{z_k}) \{b_{n_k(a)} x^{-2} \psi_4(x) + C(1 + |z_k|)\}$, значит, в силу неравенства (3.1.35) $|g(z_k) - a| \leqslant 1{,}5(\exp_2 r^2)^{-1} + |g(z_k) - b_{n_k(a)}| \leqslant 1{,}5(\exp_2 r^2)^{-1} + C \exp(-x - e^x)(1 + r) = 1{,}5(\exp_2 r^2)^{-1} + C(r+1) e^{-x} (\exp_2 x)^{-1}$. **(3.1.36)**

Так как $r^2 = x^2 + 4\pi^2 n_k^2(a) \leqslant 4\pi^2 \ln^2 r + x^2$, $x \geqslant r(1 - 4\pi^2 r^{-2} \times \ln^2 r)^{0,5} \geqslant r\{1 - (2\pi r^{-1} \ln r)^2\} = r - 4\pi^2 r^{-1} \ln^2 r \geqslant r - 4\pi^2$. Оценка (3.1.36) принимает вид $|g(z_k) - a| \leqslant C[\exp_2(r - 4\pi^2)]^{-1}$. Поэтому $L(r, a, g) \geqslant \exp(r - 4\pi^2) - C$. **(3.1.37)**

Случай 2. Соотношение (3.1.34) не выполняется ни при одном значении $n_k(a)$. Здесь возможны такие подслучаи (r фиксировано):

1) Имеется хотя бы одно, отличное от нуля, значение $n_k(a)$ такое, что $n_k(a) < 0{,}5 \ln r$. Пусть $\max\limits_{n_k(a) < 0{,}5 \ln r} n_k(a) = n_\nu(a) < 0{,}5 \ln r$ и $n_{\nu+j}(a)$ $(j \geqslant 1)$ — первое число, определенное соотношением (3.1.33), отличное от $n_\nu(a)$ и следующее за $n_\nu(a)$. Ясно, что в рассматриваемом случае $n_{\nu+j}(a) > \ln r$. **(3.1.38)** В силу неравенства (3.1.38) имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_\nu(a)} = \sum_{k=\nu+j}^{\infty} \gamma_k(a) \exp[-\theta(k)] \leqslant 1{,}5 \exp[-\theta(\nu+j)] \leqslant$$

$$\leqslant 1{,}5 (\exp_2 r^2)^{-1}. \qquad \textbf{(3.1.39)}$$

Положим $z_\nu = z_\nu(a) = x + 2\pi i n_\nu(a)$ $(x > 0,\ |z_\nu| = r)$. Далее аналогично, как и в случае 1, убеждаемся в справедливости оценки $|g(z_\nu) - b_{n_\nu(a)}| \leqslant K[\exp_2(r - 4\pi^2)]^{-1}$. **(3.1.40)** Из выражений (3.1.39) и (3.1.40) снова следует, что для $r \geqslant r_0$ $L(r, a, g) \geqslant \exp(r - 4\pi^2) - C$.

2) Все $n_k(a) < 0{,}5 \ln r$ равны нулю. В этом случае мы снова приходим к оценкам (3.1.39) и (3.1.40) с $b_{n_\nu(a)} = b_0 = 1$ и $z_\nu = z_\nu(a) = r$. Таким образом, оценка (3.1.37) имеет место для всех $r \geqslant r_0$. Теорема 3.1.1 сразу следует из оценок (3.1.37) и (3.1.23).

2. Исключительность множества положительных отклонений мероморфных функций

Выше было установлено, что для каждой мероморфной функции $f(z)$, имеющей конечный нижний порядок λ, множество ее положительных отклонений $\Omega(f)$ всегда не более чем счетно (см. теорему (2.5.1). С другой стороны, результат предыдущего параграфа показывает, что множество $\Omega(f)$ для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка может иметь мощность континуума. По этой причине возникает вопрос о структуре множества $\Omega(f)$ и для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.2.1. *Для каждой мероморфной функции $f(z)$ множество $\Omega(f)$ имеет нулевую логарифмическую емкость.*

Так как для мероморфных функций конечного нижнего порядка множество $\Omega(f)$ не более чем счетно, его логарифмическая емкость равна нулю. Поэтому теорему 3.2.1 следует доказывать лишь для мероморфных функций бесконечного нижнего порядка.

Для установления этого факта будем пользоваться оценкой (2.2.4), примененной к функции $\{f(z)-a\}^{-1}$. Имеем для каждого $a \neq \infty$ $(1<k<2,\ x>0{,}5)$

$$L(r,\ a,\ f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t,\ a,\ f)\, t^{2x-1} dt}{(t^{2x}+r^{2x})^2} +$$

$$+ \sum_{|b_k|<R} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} + 10x \ln^{-1} k\, (rR^{-1})^x k^{2x} (k^{2x}-1)^{-1} \times$$

$$\times \{T(kR,\ f)+C\}, \qquad (3.2.1)$$

где b_k — a-точки $f(z)$, а $r \leqslant Rk^{-1}$. Пусть $\varphi(y) = T(e^y,\ f) = T(e^y)$ и $\{y_n\}$ — последовательность, для которой выполняется соотношение (1.3.17) для функции $\varphi(y)$. Для каждого фиксированного $n \geqslant n_0$ положим в выражении (3.2.1) $R = \exp\{y_n + 0{,}5 \ln^{-\nu}\varphi(y_n)\}$;

$$k = \exp\{[\ln^{-\nu}\varphi(y_n)]/3\}, \qquad (3.2.2)$$

а r будем считать принадлежащим сегменту $[r_1,\ r_2]$, где $r_1 = \exp y_n$; $r_2 = \exp\{y_n + [\ln^{-\nu}\varphi(y_n)]/6\}$. (3.2.3). Тогда оценка (3.2.1) дает [см. также формулы (1.2.6), (1.2.1), (1.2.2)]

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r,\ a,\ f)\frac{dr}{r} \leqslant (2x)^2 \int_{r_0}^{R} m(t,\ a,\ f)\, t^{2x-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{2x-1}dr}{(t^{2x}+r^{2x})^2} dt +$$

$$+ 2x\,[T(r_0) + \ln^+|a| + \ln 2 - \alpha(a,\ f)] \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ \sum_{|b_k|<R} \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} \frac{dr}{r} + 10 \ln^{-1} k k^{2x} (k^{2x}-1)^{-1} \times$$

$$\times (r_2^x - r_1^x) R^{-x} [T(kR)+C]. \qquad (3.2.4)$$

Пусть K — произвольный компакт из круга $K(0;\ 0{,}5) = \{a : |a| < 0{,}5\}$ и μ_0 — равновесная мера Робена для K. Проинтегрируем неравенство (3.2.4) по мере μ_0 и по компакту K. В силу соотношений (1.4.5), (1.8.1), (1.8.7), (2.2.7) оценка (3.2.4) дает

$$\int_{r_1}^{r_2} \{\int_K L(r,\ a,\ f)\, d\mu_0(a)\} \frac{dr}{r} \leqslant [1+2W(K)]\, 2x \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ C(f)\, W(K)\, x \ln(r_2 r_1^{-1}) + \pi^2 (4x)^{-1} \int_K n(R,\ a,\ f)\, d\mu_0(a) +$$

$$+ 10 \ln^{-1} k k^{2x} (k^{2x}-1)^{-1} (r_2 R^{-1})^x [T(kR)+C] \leqslant$$

$$\leqslant Cx \ln(r_2 r_1^{-1}) + K(x \ln k)^{-1} [T(kR)+C] +$$

$$+ K \ln^{-1} k k^{2x} (k^{2x}-1)^{-1} (r_2 R^{-1})^x [T(kR)+C]. \qquad (3.2.5)$$

Выберем любое* $\nu > 1$ и положим в неравенстве (3.2.5) при фиксированном $n \geqslant n_0$ $x = \ln^{3\nu}\varphi(y_n)$. Тогда для $n \geqslant n_0 = n_0(\nu, f)$ [см. равенства (3.2.2), (3.2.3)]

$$(r_2R^{-1})^x = \exp\{-x[\ln^{-\nu}\varphi(y_n)]/3\} =$$
$$= \exp\{-[\ln^{2\nu}\varphi(y_n)]/3\} \leqslant 18\ln^{-4\nu}\varphi(y_n) \leqslant 0{,}5; \qquad (3.2.6)$$
$$T(kR) \leqslant T\{\exp[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]\} = \varphi[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]; \qquad (3.2.7)$$
$$k^{2x} = \exp\{2x[\ln^{-\nu}\varphi(y_n)]3\} \geqslant \exp[0{,}5\ln^{2\nu}\varphi(y_n)] \geqslant 1 +$$
$$+ 6^{-1}\ln^{4\nu}\varphi(y_n) > 2. \qquad (3.2.8)$$

В силу соотношений (1.3.17), (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8) оценка (3.2.5) принимает вид

$$\int_{r_1}^{r_2}\left\{\int_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a)\right\}\frac{dr}{r} \leqslant Cx\ln(r_2r_1^{-1}) + Kx^{-1}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,\varphi(y_n +$$
$$+ \ln^{-\nu}\varphi(y_n)) + K\ln^{-3\nu}\varphi(y_n)\,\varphi(y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)) \leqslant$$
$$\leqslant Cx\ln^{-\nu}\varphi(y_n) + K\nu x^{-1}\varphi(y_n)\ln^{\nu}\varphi(y_n) + K\nu\varphi(y_n)\ln^{-3\nu}\varphi(y_n) \leqslant$$
$$\leqslant C\{\ln^{2\nu}\varphi(y_n) + \varphi(y_n)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\} = \omega(y_n). \qquad (3.2.9)$$

Пусть $B = \{r : r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ и

$$\int_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a) > 6e\nu\omega(y_n)\ln^{\nu}\varphi(y_n)\}.$$

Тогда из неравенства (3.2.9) следует, что

$$6e\nu\omega(y_n)\,r_2^{-1}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,\mathrm{mes}\,B \leqslant$$
$$\leqslant \int_B\left\{\int_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a)\right\}\frac{dr}{r} \leqslant \omega(y_n),$$

т. е. при $n \geqslant n_0$ $\mathrm{mes}\,B \leqslant r_2[6e\nu\ln^{\nu}\varphi(y_n)]^{-1} = r_2(e\nu)^{-1}\ln(r_2r_1^{-1}) =$
$= r_2(e\nu)^{-1}\ln[1 + r_1^{-1}(r_2 - r_1)] \leqslant (e\nu)^{-1}r_2r_1^{-1}(r_2 - r_1) \leqslant \nu^{-1}(r_2 - r_1)$,
значит, существует $r \in [r_1, r_2]$ такое, что

$$\int_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a) \leqslant 6e\nu\omega(y_n)\ln^{\nu}\varphi(y_n) = C\ln^{\nu}\varphi(y_n)\{\ln^{2\nu}\varphi(y_n) +$$
$$+ \varphi(y_n)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\} = C\{\ln^{3\nu}\varphi(y_n) + \varphi(y_n)\ln^{-\nu}\varphi(y_n)\} =$$
$$= C\{\ln^{3\nu}T(r_1) + T(r_1)\ln^{-\nu}T(r_1)\} \leqslant CT(r)\ln^{-\nu}T(r). \qquad (3.2.10)$$

Оценка (3.2.10) выполняется на каждом сегменте $[r_1, r_2]$, где $\{r_1 = r_1(n)\} \uparrow \infty$ и $\{r_2 = r_2(n)\} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, следовательно,

$$\varliminf_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\int_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a) = 0,$$

---

* $\nu > 1$ заранее фиксируется, по этому значению строится последовательность $\{y_n\}$ для функции $\varphi(y)$ [см. формулу (1.3.17)].

и по лемме Фату

$$\int_K \beta(a, f)\, d\mu_0(a) = 0. \qquad (3.2.11)$$

Из равенства (3.2.11) выводим, что множество $\Omega_1(f) = \Omega(f) \cap \cap K(0;\ 0{,}5)$ имеет нулевую логарифмическую емкость (см. лемму 1.7.1). Далее, аналогично, как и при доказательстве теоремы о структуре множества $V(f)$ (см. теорему 1.8.1), приходим к выводу, что любой компакт, содержащийся во множестве $\Omega(f)$, имеет нулевую логарифмическую емкость, следовательно, $\mathrm{cap}_2\, \Omega(f) = 0$. Теорема 3.2.1 доказана.

3. О связи между ростом функций $m(r, a, f)$ и $L(r, a, f)$

Из полученной оценки для величины $\beta(a, f)$ в случае мероморфных функций конечного нижнего порядка [см. формулу (2.2.16)] следует, что из условия $\Delta(a, f) = 0$ вытекает условие $\beta(a, f) = 0$. Другими словами, если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний порядок и для некоторого числа a при $r \to \infty$ $m(r, a, f) = o(T(r, f))$ **(3.3.1)**, то для данного значения $a\beta(a, f) = 0$. При этом условие $\varliminf\limits_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\, m(r, a, f) = 0$, вообще говоря, не обеспечивает равенства $\beta(a, f) = 0$ (см. гл. II, § 4). Покажем, что в случае мероморфных функций бесконечного нижнего порядка, (условие (3.3.1) не является достаточным для того, чтобы $\beta(a, f) = 0$.

При доказательстве нам понадобится лемма о логарифмической производной мероморфной функции Р. Неванлинны [50], которая легко следует из оценки роста логарифмической производной, полученной в § 4 гл. I.

Лемма 3.3.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и $a \neq \infty$ — любое число. Тогда для каждого $r \geqslant r_0$ и каждого фиксированного k, $1 < k < 2$,*

$$m\left(r, \frac{f'}{(f-a)}\right) \leqslant 2 \ln T(kr, f) + \ln [C\,(k-1)^{-1}]. \qquad (3.3.2)$$

Доказательство. Если в оценке (1.4.2) не переходить к функции $M\left(r, \frac{f'}{f-a}\right)$, то соотношение (1.4.4) принимает такой вид $(r \leqslant Rk^{-1})$:

$$r^{0,5}\left|\frac{f'(z)}{f(z)-a}\right|^{0,5} \leqslant 12\,(k-1)^{-1} T(kr, f) + C\,(k-1)^{-1} + \\ + 3\,(k-1)^{-1}[n(R, f) + n(R, a, f)] + \\ + \sum_{|c_k| \leqslant R} r^{0,5}\,|z - c_k|^{-0,5}.$$

Поэтому [см. выражение (1.4.5)]

$$\frac{\sqrt{r}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})-a}\right|^{0,5}d\theta \leqslant 12(k-1)^{-1}T(kr,\ f)+C(k-1)^{-1}+$$

$$+6(k-1)^{-1}[N(kR,\ f)+N(kR,\ a,\ f)]+\sum_{|c_k|\leqslant R}\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{|re^{i\theta}-c_k|}\right)^{0,5}d\theta. \qquad (3.3.3)$$

Вычисления показывают, что

$$I_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{|re^{i\theta}-c_k|}\right)^{0,5}d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{r}{||re^{i\theta}-|c_k||}\right)^{0,5}d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{|\alpha_k-e^{i\theta}|^{0,5}}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}=K,$$

где $\alpha_k=\min\left(\frac{|c_k|}{r},\ \frac{r}{|c_k|}\right)$. Оценка (3.3.3) принимает вид

$$\frac{\sqrt{r}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})-a}\right|^{0,5}d\theta\leqslant K(k-1)^{-1}\{T(kr,\ f)+N(kR,\ f)+$$

$$+N(kR,\ a,\ f)+C\}\leqslant K(k-1)^{-1}\{T(kr,\ f)+C\}.$$

Поэтому

$$0,5m\left(r,\ \frac{f'}{f-a}\right)\leqslant\ln^+\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})-a}\right|^{0,5}d\theta\right\}\leqslant\ln T(kr,\ f)+$$

$$+\ln^+C(k-1)^{-1},$$

откуда и следует оценка (3.3.2).

Пусть для фиксированного $a\neq 0$ $\Psi(z)=aE_0(z)\exp-(z+e^z)$ **(3.3.4)**. Имеет место

Теорема 3.3.1. *Целая функция* $\Psi(z)$ *удовлетворяет таким асимптотическим соотношениям:*

Для каждого $b\neq 0,\ \infty$ *и* $r\geqslant r_0$ $m(r,\ b,\ \Psi)\leqslant Kr^{-1}e^r$; **(3.3.5)** $L(r,\ a,\ \Psi)\geqslant Ke^r$; **(3.3.6)** $K_1r^{-0,5}e^r\leqslant T(r,\ \Psi)\leqslant K_2r^{-0,5}e^r$. **(3.3.7)**

Доказательство. В силу выражений (3.1.12) и (3.1.13) для $|z| \geqslant r_0$

$$\ln^+|E_0(z)| \leqslant \begin{cases} 0, & \text{если } z \in \overline{D}_0; \\ r + e^{r\cos\theta}\cos^+(r\sin\theta), & \text{если } z = re^{i\theta} \in \overline{A}_0. \end{cases}$$

Поэтому

$$(r \geqslant r_0)\, m(r, E_0) \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\arcsin \pi r^{-1}} e^{r\cos\theta}\cos^+(r\sin\theta)\,d\theta +$$

$$+ r \leqslant \pi^{-1}e^r \arcsin \pi r^{-1} + r \leqslant 2r^{-1}e^r. \qquad (3.3.8)$$

Из неравенства (3.1.21) получаем при $r \geqslant r_0$ $m(r, \exp(z+e^z)) \geqslant m(r, \exp_2 z) - m(r, e^{-z}) \geqslant 3^{-1}\pi^{-2}r^{-0,5}e^r$. **(3.3.9)** Формула (3.3.4) дает $\exp(z+e^z) = a\Psi^{-1}(z)E_0(z)$, поэтому из неравенства (3.3.9) имеем $m(r, \exp_2 z) \leqslant m(r, 0, \Psi) + m(r, E_0) + \ln^+|a| + r$.

Таким образом, для $r \geqslant r_0$ [см. выражение (3.3.8)] $m(r, 0, \Psi) \geqslant m(r, \exp_2 z) - m(r, E_0) - r\pi^{-1} - \ln^+|a| \geqslant m(r, \exp_2 z) - 2r^{-1}e^r - r$ **(3.3.10)**. Кроме этого, при $r \geqslant r_0$ $m(r, \Psi) \leqslant m(r, E_0) + m(r, 0, \exp(z+e^z)) + \ln^+|a| \leqslant r + 2r^{-1}e^r + m(r, \exp_2 z)$ **(3.3.11)**.

Выберем теперь любое $b \neq 0, \infty$. Тогда [см. соотношения (1.5.1), (1.5.6)]

$$m(r, b, \Psi) + m(r, 0, \Psi) \leqslant m(r, 0, \Psi') + m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi}\right) +$$

$$+ m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi - b}\right) + C \leqslant m(r, \Psi) +$$

$$+ 2m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi}\right) + m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi - b}\right) + C. \qquad (3.3.12)$$

Из выражений (3.1.21) и (3.3.11) следует, что при $r \geqslant r_0$

$$m(r, \Psi) = T(r, \Psi) \leqslant r^{-0,5}e^r, \qquad (3.3.13)$$

поэтому [см. неравенство (3.3.2)]

$$m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi - b}\right) + m\left(r, \frac{\Psi'}{\Psi}\right) \leqslant 4kr + \ln C(k-1)^{-1}. \qquad (3.3.14)$$

Из выражений (3.3.10), (3.3.12) и (3.3.14) находим $(k = 2)$ $m(r, b, \psi) \leqslant 4r^{-1}e^r + 12r + C$, т. е. мы получили оценку (3.3.5). Правая часть неравенства (3.3.7) следует из выражения (3.3.13), а левая — из соотношений (3.3.10) и (3.1.21).

Для получения оценки (3.3.6) положим в формуле (3.3.4) $z = r \geqslant r_0$. В силу равенства (3.1.13) $\psi(r) = a + r^{-2}\exp[-(r+e^r)] \times \psi_4(r)$, т. е. $|\Psi(r) - a| \leqslant Kr^{-1}\exp[-(r+e^r)]$. Оценка (3.3.6) является простым следствием этого неравенства. Теорема 3.3.1 доказана полностью.

Положим в неравенстве (3.3.5) $b = a$. Тогда из выражений (3.3.5) и (3.3.7) получаем $(r \geqslant r_0)\, m(r, a, \psi) \leqslant KT(r, \psi) \ln^{-0,5} T \times \times (r, \psi)$. Из оценки (3.3.6) следует, что $L(r, a, \psi) \geqslant KT(r, \psi) \ln^{0,5} T(r, \psi)$, поэтому $\beta(a, \psi) = \infty$.

Теперь становится естественным вопрос, существует ли ограничение на рост функции $m(r, a, f)$, обеспечивающее условие $\beta(a, f) = 0$. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 3.3.2. *Пусть $f(z)$ — произвольная мероморфная функция. Если для некоторого числа a и $\tau > 0$ при $r \geqslant r_0(a)$ $m(r, a, f) \leqslant KT(r, f) \ln^{-\tau} T(r, f)$,* **(3.3.15)** *то для каждого $\nu > 1$ существует неограниченное множество E_ν такое, что при $r \geqslant r_0(a)$ и $r \in E_\nu$ $L(r, a, f) \leqslant K\nu T(r, f) \ln^{\nu - 0,5\tau} T(r, f)$.* **(3.3.16)**

Из этого утверждения сразу следует, что если для некоторого a оценка (3.3.15) выполняется при $\tau > 2$, то для такого значения a $\beta(a, f) = 0$.

Теорема 3.3.2 доказывается по той же схеме, что и теорема 3.2.1. Действительно, подставим в неравенство (3.2.4) вместо функции $m(r, a, f)$ правую часть оценки (3.3.15). Имеем [см. формулу (2.2.7)]

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r, a, f) \frac{dr}{r} \leqslant (2x)^2 KT(R, f) \ln^{-\tau} T(R, f) \int_{r_0}^{R} t^{2x-1} \times$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{2x-1} dr dt}{(t^{2x} + r^{2x})^2} + 2x\,[T(r_0) + \ln^+ |a| + \ln 2 - \alpha(a, f)] \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ \sum_{|b_k| \leqslant R} \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{|r^{2x} - |b_k|^{2x}|} \frac{dr}{r} + 10 \ln^{-1} k k^{2x} (k^{2x} - 1)^{-1} (r_2 R^{-1})^x \times$$

$$\times [T(kR, f) + C] \leqslant Kx\,[T(R, f) \ln^{-\tau} T(R, f) + C] \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ \pi^2 (4x)^{-1} n(R, a, f) + K(k-1)^{-1} k^{2x} (k^{2x} - 1)^{-1} (r_2 R^{-1})^x \times$$

$$\times [T(kR, f) + C] \leqslant KxT(R, f) \ln^{-\tau} T(R, f) \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ K[x(k-1]^{-1} T(kR, f) +$$

$$+ K(k-1)^{-1} k^{2x} (k^{2x} - 1)^{-1} (r_2 R^{-1})^x T(kR, f), \qquad \textbf{(3.3.17)}$$

где r_2, r_2, R, k определены соотношениями (3.2.2) и (3.2.3). Выберем теперь в неравенстве (3.3.17) $x = \ln^{\nu + 0,5\tau} T(r_1) = \ln^{\nu + 0,5\tau} \varphi(y_n)$, где $\nu > 1$ — фиксированное число*. Тогда для $n \geqslant n_0$

$$(r_2 R^{-1})^x = \exp[-x 3^{-1} \ln^{-\nu} \varphi(y_n)] = \exp\{-[3^{-1} \ln^{0,5\tau} \varphi(y_n)]\} \leqslant$$

* Для этого фиксированного числа по функции $\varphi(y) = T(e^y, f)$ строится последовательность $\{y_n\}$, удовлетворяющая условиям леммы 1.3.2 [см. выражение (1.3.17)].

$$\leqslant 3^m m! \ln^{-3\nu-0,5\tau}\varphi(y_n); \qquad (3.3.18)$$

$$k^{2x} = \exp\{2x[\ln^{-\nu}\varphi(y_n)]/3\} = \exp\{2[\ln^{0,5\tau}\varphi(y_n)]/3\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 + 3^{-m}(m!)^{-1}\ln^{3\nu+0,5\tau}\varphi(y_n) > 2,$$

где $m[6\nu\tau^{-1}] + 2$. **(3.3.19)**

В силу выражений (3.3.18), (3.3.19), (3.2.2), (3.2.3), оценка (3.3.17) принимает вид $(n \geqslant n_0)$

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r, a, f)\frac{dr}{r} \leqslant Kx\ln^{-\nu}\varphi(y_n)T(R)\ln^{-\tau}T(R) + Kx^{-1}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\times$$
$$\times T(kR) + Km!3^m T(kR)\ln^{-2\nu-0,5\tau}\varphi(y_n) \leqslant K\varphi[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]\times$$
$$\times\ln^{-0,5\tau}\varphi(y_n) + Km!3^m\varphi[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]\ln^{-2\nu-0,5\tau}\varphi(y_n) \leqslant$$
$$\leqslant K\nu\varphi(y_n)\ln^{0,5\tau}\varphi(y_n).$$

Из этого соотношения точно так же, как и при выводе оценки (3.2.10) из неравенства (3.2.9) следует, что на сегменте $[r_1, r_2]$ существует значение r, для которого $L(r, a, f) \leqslant K\nu\varphi(y_n) \times \times \ln^{\nu-0,5\tau}\varphi(y_n) = K\nu T(r_1)\ln^{\nu-0,5\tau}T(r_1) \leqslant K\nu T(r)\ln^{\nu-0,5\tau}T(r)$, а это равносильно выражению (3.3.16).

4. О мощности множества $\Omega(f)$ для функций, мероморфных в круге $K(0,1)$

Свойства величин положительных отклонений для функций, мероморфных в единичном круге, оказались подобными свойствам величин положительных отклонений мероморфных при $z \neq \infty$ функций, которые имеют бесконечный нижний порядок. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге $K(0, 1) = \{z : |z| < < 1\}$. Характеристикой роста $f(z)$ называем функцию [21] $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$, где $0 \leqslant r < 1$.

Функция $L(r, a, f)$ определяется так же, как и для мероморфных во всей открытой плоскости функций. Величиной отклонения $f(z)$ относительно числа a называется

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r\to 1} T^{-1}(r, f)L(r, a, f).$$

При этом мы, как правило, рассматриваем лишь функции неограниченного вида, т. е. те, для которых $\lim\limits_{r\to 1} T(r, f) = \infty$. Множество $\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$ называем множеством положительных отклонений $f(z)$. Порядок $\rho = \rho(f)$ и нижний порядок $\lambda = \lambda(f)$ функции $f(z)$ определяется так:

$$\rho = \varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln T(r, f)}{\ln(1-r)^{-1}}; \quad \lambda = \varliminf_{r\to 1}\frac{\ln T(r, f)}{\ln(1-r)^{-1}}.$$

Теорема 3.4.1. *Для любого числа* λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, *существует мероморфная при* $|z| < 1$ *функция* $f_\lambda(z)$, *имеющая нижний порядок* λ, *для которой множество* $\Omega(f_\lambda)$ *имеет мощность континуума.*

Данная теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 3.1.1, поэтому мы будем опускать некоторые рассуждения.

Выберем для аналитической при $|z| < 1$ функции $d(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$ непрерывную ветвь $\arg d(z)$ такую, что $-0{,}5\pi < \arg d(z) < 0{,}5\pi$. Тогда для любого числа λ, $0 < \lambda < \infty$, функция $d^{1+\lambda}(z)$ будет однозначной и аналитической при $|z| < 1$. Для любого θ, $0 < \theta < 0{,}5\pi$, дуга окружности $\Gamma(\theta) = \{(z : |z| < 1) \cap (z : |z + i \operatorname{ctg} \theta| = \sin^{-1}\theta)\}$ переходит при отображении с помощью функции $d(z)$ в луч $\arg d(z) = \theta$. При этом для каждого $z = x + iy \in \Gamma(\theta)$ $0 < |d(z)| = (1-x)^{-1}\{x \cos\theta + \sqrt{1 - x^2 \sin\theta}\}$.

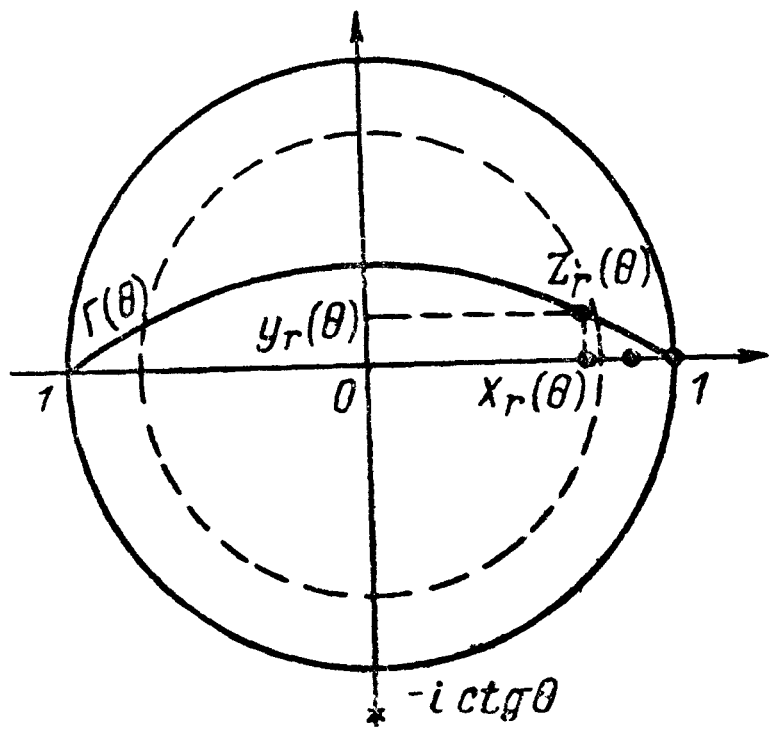

Рис. 4.

Пусть $z_r(\theta) = x_r(\theta) + iy_r(\theta) = x_r + iy_r$ — та точка пересечения дуги $\Gamma(\theta)$ с окружностью $\{z : |z| = r\}$ $(0 < r < 1)$, для которой $x_r(\theta) > 0$ (рис. 4). Вычисления показывают, что при $\geqslant \operatorname{tg} 0{,}5\theta$

$$x_r(\theta) = \sqrt{r^2 - (0{,}5(1-r^2)\operatorname{tg}\theta)^2}; \quad y_r(\theta) = 0{,}5(1-r^2)\operatorname{tg}\theta;$$

$$\arg z_r(\theta) = \operatorname{arc\,tg}\{(1-r^2)\operatorname{tg}\theta\,[(2r)^2 - (1-r^2)^2\operatorname{tg}^2\theta]^{-0{,}5}\};$$

$$|d(z_r(\theta))| \geqslant (1-x_r)^{-1} x_r \cos\theta \geqslant \cos^3\theta\,(1-r^2)^{-1}\,[r^2 - \operatorname{tg}^2 0{,}5\theta]. \qquad (3.4.1)$$

Пусть C — множество мощности континуума, определенное соотношением (3.1.30); $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетное множество, определенное соотношением (3.1.32); $\{c_n\}$ — сходящаяся последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n = S_1 < \infty; \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n = S_2 < \infty. \qquad (3.4.2)$$

Обозначим

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \exp\{e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z)\};$$

$$g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\{e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z)\};$$

$$f_\lambda(z) = g_1(z)\, g_2^{-1}(z), \tag{3.4.3}$$

где θ_n, $0 < \theta_n < 0{,}5(1+\lambda)^{-1}\pi$ — монотонно возрастающая последовательность, которая будет определена ниже; $0 < \lambda < \infty$. Очевидно, $f_\lambda(z)$ — мероморфная при $|z| < 1$ функция. Так как [см. равенство (3.4.2)] при $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < 1)$

$$|g_1(z)| \leqslant S_1 \exp |d(z)|^{1+\lambda}; \quad |g_2(z)| \leqslant S_2 \exp |d(z)|^{1+\lambda};$$

$$|d(z)| \leqslant (1 - r^2 + 2r|\sin\varphi|)(1 + r^2 - 2r\cos\varphi)^{-1},$$

то $(\nu = 1, 2)$

$$T(r, g_\nu) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{0{,}5\pi} \left(\frac{1 - r^2 + 2r\sin\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}\right)^{1+\lambda} d\varphi + K.$$

Дальнейшие вычисления дают $T(r, g_\nu) \leqslant 4 \cdot 2^{2\lambda}(1-r)^{-\lambda}\{1 + (\pi\lambda)^{-1}\}$, поэтому в силу формулы (3.4.3) $T(r, f_\lambda) \leqslant 8 \cdot 2^{2\lambda}(1-r)^{-\lambda}\{1 + (\pi\lambda)^{-1}\}$ **(3.4.4)**.

Пусть для фиксированного k, $k = 1, 2, \ldots$, $z_k = z(\theta_k) \in \Gamma(\theta_k)$. Тогда

$$f_\lambda(z_k) - b_k = g_2^{-1}(z_k)\left\{\sum_{n=1}^{k-1} c_n(b_n - b_k)\exp\left[e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z_k)\right]\right\} +$$

$$+ g_2^{-1}(z_k)\left\{\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n(b_n - b_k)\exp\left[e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z_k)\right]\right\}. \tag{3.4.5}$$

Заметим, что для $1 \leqslant n \leqslant k-1$

$$\left|\exp e^{i(\theta_k - \theta_n)(1+\lambda)} |d(z_k)|^{1+\lambda}\right| = \exp\{\cos[(\theta_k - \theta_n)(1+\lambda)]\, |d(z_k)|^{1+\lambda}\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\cos[(\theta_k - \theta_{k-1})(1+\lambda)]\, |d(z_k)|^{1+\lambda}\}, \tag{3.4.6}$$

а для $n \geqslant k+1$

$$\left|\exp\left\{e^{i(\theta_k - \theta_n)(1+\lambda)} |d(z_k)|^{1+\lambda}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\{\cos[(\theta_k - \theta_{k+1})(1+\lambda)]\, |d(z_k)|^{1+\lambda}\}. \tag{3.4.7}$$

Пусть $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \eta_k < 1$, — монотонно убывающая последовательность, для которой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k = 1$. Положим

$$(\eta_0 = \eta_1) \quad \theta_n = 0{,}5\pi(1+\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \eta_k. \tag{3.4.8}$$

Замечая, что для $z = z(\theta_k) = z_k \in \Gamma(\theta_k)$ $\arg d(z_k) = \theta_k$, из выражений (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8) получаем

$$\left|\sum_{n=1}^{k-1} c_n(b_n - b_k)\exp\left\{e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z_k)\right\}\right| +$$

$$+\left|\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n (b_n - b_k) \exp\{e^{-i\theta_n(1+\lambda)} d^{1+\lambda}(z_k)\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2S_1 \exp\cos 0{,}5\pi\eta_k |d(z_k)|^{1+\lambda}; \qquad (3.4.9)$$

$$|g_2(z_k) - c_k \exp|d(z_k)|^{1+\lambda}| \leqslant$$

$$\leqslant 2S_2 \exp\{\cos 0{,}5\pi\eta_k |d(z_k)|^{1+\lambda}\}. \qquad (3.4.10)$$

Из соотношений (3.4.1) и (3.4.10) следует, что для каждого k такого, что $c_k > 0{,}25 \ln^{-2}(1-r)^{-1}$ и r, $0 < r_k < r < 1$,

$$|g_2(z_k)| \geqslant c_k \exp|d(z_k)|^{1+\lambda} - 2S_2 \exp\{\cos 0{,}5\pi\eta_k |d(z_k)|^{1+\lambda}\} \geqslant$$

$$\geqslant 0{,}5 c_k \exp|d(z_k)|^{1+\lambda} \geqslant$$

$$\geqslant 0{,}1 \ln^{-2}(1-r)^{-1} \exp\{\cos^3\theta_k (1-r^2)^{-1}(r^2 - \operatorname{tg}^2 0{,}5\theta_k)\}. \qquad (3.4.11)$$

Из выражений (3.4.9), (3.4.5), (3.4.11) получаем при $z_k = re^{i\varphi_k(r)}$ и $r \geqslant r_k$

$$|f_\lambda(z_k) - b_k| \leqslant K \ln^2(1-r)^{-1} \exp\{-2\sin^2 0{,}25\pi\eta_k [\cos^3\theta_k \times$$

$$\times (1-r^2)^{-1}(r^2 - \operatorname{tg}^2 0{,}5\theta_k)]^{1+\lambda}\} \leqslant$$

$$\leqslant K \ln^2(1-r)^{-1} \exp\{-\eta_k^2 0{,}5\lambda^{3(1+\lambda)}(1+\lambda)^{-3(1+\lambda)} \times$$

$$\times (1+r)^{-(1+\lambda)}(r^2 - \operatorname{tg}^2 0{,}5\theta_k)^{1+\lambda}(1-r)^{-(1+\lambda)}\}. \qquad (3.4.12)$$

Из определения θ_k следует, что для $r > \sqrt{\operatorname{tg} 0{,}25\pi (1+\lambda)^{-1}}$ справедливо

$$(1+r)^{-1}(r^2 - \operatorname{tg}^2 0{,}5\theta_k) \geqslant 0{,}5 \operatorname{tg} 0{,}25\pi (1+\lambda)^{-1}\{1 -$$

$$- \operatorname{tg} 0{,}25\pi (1+\lambda)^{-1}\} = \alpha(\lambda) > 0.$$

Поэтому оценка (3.4.12) принимает вид $(r > r_k > \sqrt{\operatorname{tg} 0{,}25\pi (1+\lambda^{-1})}$

$$|f_\lambda(z_k) - b_k| \leqslant K \ln^2(1-r)^{-1} \exp\{-(1-r)^{-(1+\lambda)}\eta_k^2 \alpha(\lambda)\}. \qquad (3.4.13)$$

Таким образом, оценка (3.4.13) выполняется для всех k таких, что $c_k \geqslant 0{,}25 \ln^{-2}(1-r)^{-1}$ **(3.4.14)** и $r \geqslant r_k$.

Соотношения (3.4.13) и (3.4.4) показывают, что для каждого k, $k = 1, 2, \ldots$, $\beta(b_k, f_\lambda) = \infty$. Нетрудно показать, что функция $f_\lambda(z)$ имеет нижний порядок λ.

Теперь уже легко завершить доказательство теоремы 3.4.1. Пусть C — множество мощности континуума, определенное соотношением (3.1.30), и a — произвольное число из множества C. Пусть $\{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, соответствующая числу a в соотношении (3.1.33). Положим для определенности в формулах (3.4.2) и (3.4.8) $c_n = n^{-2}$, $\eta_n = \pi^2 \times (6n^2)^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и выберем любое r, $1 > r \geqslant r_0 > \sqrt{\operatorname{tg} \pi [4(1+\lambda)]^{-1}}$. Рассмотрим следующий возможный случай расположения членов последовательности $\{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть най-

дется хотя бы одно значение $n_k(a)$ такое, что для выбранного r $0{,}5\ln(1-r)^{-1} \leqslant n_k(a) \leqslant \ln(1-r)^{-1}$. **(3.4.15)** В этом случае будем оценивать величину отклонения функции $f_\lambda(z)$, определенной соотношением (3.4.3), относительно числа a при $|z| = r$ и $z \in \Gamma(\theta_{n_k(a)})$.

Находим $0 \leqslant a - b_{n_k(a)} \leqslant 1{,}5\exp[-\theta(k+1)]$. **(3.4.16)** Учитывая неравенство (3.4.15), получаем $0{,}5\ln(1-r)^{-1} \leqslant 2^k - 1 < e^k$. В этом случае $\theta(k+1) = \exp_2 e^{2(k+1)} > \exp(1-r)^{-1}$. Легко заметить, что выполняется оценка (3.4.14). Из неравенств (3.4.16) и (3.4.13) находим для $r \geqslant r_0(a) > \sqrt{\operatorname{tg}\pi[4(\lambda+1)]^{-1}}$

$$L(r, a, f_\lambda) \geqslant C(\lambda)(1-r)^{-(1+\lambda)}\ln^{-2}(1-r)^{-1}. \qquad \textbf{(3.4.17)}$$

Другие возможные варианты расположения членов последовательности $\{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$ рассматриваются, как и при доказательстве теоремы 3.1.1. Они тоже приводят нас к оценке (3.4.17). Таким образом, для каждого $a \in C$ $\beta(a, f_\lambda) = \infty$, т. е. теорема 3.4.1 доказана для случая $0 < \lambda < \infty$. В случае $\lambda = 0$ следует рассмотреть функцию $\eta(z) = \exp\{(z+1)(1-z)^{-1}\}$. **(3.4.18)** Имеем $T(r, \eta) = 1$, поэтому для каждого φ, $0 < \varphi < 2\pi$,

$$\beta(e^{i\operatorname{ctg}0{,}5\varphi}, \eta) = \varliminf_{r\to 1} L(r, e^{i\operatorname{ctg}0{,}5\varphi}, \eta) = \infty.$$

Другими словами $A = \{e^{i\theta} : \theta = \operatorname{ctg}0{,}5\varphi,\ 0 < \varphi < 2\pi\} \subset \Omega(\eta)$. Случай $\lambda = \infty$ можно получить так же, как и соответствующий случай для функций, мероморфных во всей открытой плоскости.

5. Об исключительности множества положительных отклонений для функций, мероморфных в круге $K(0,1)$

Для функции $\eta(z)$, определенной соотношением (3.4.18), множество $\Omega(\eta)$ содержит множество положительной емкости. Докажем, что для достаточно быстро растущих мероморфных при $|z| < 1$ функций такой ситуации не может быть. Отметим сначала два утверждения, которые непосредственно следуют из лемм 1.3.1 и 1.3.2.

Лемма 3.5.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $|z| < 1$ функция. Для любого $\nu > 1$ существует последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \{r_n^*(\nu)\}_{n=1}^{\infty} \nearrow 1$ такая, что для каждого значения*

$$r,\ r_n \leqslant r \leqslant r_n + (1-r_n)^2[1 - r_n + \ln^\nu T(r_n, f)]^{-1}$$

справедлива оценка $T(r, f) \leqslant \nu T(r_n, f)$. **(3.5.1)** *Если нижний порядок λ у функции $f(z)$ конечен, существует последовательность $\{r_n\} \nearrow 1$, для которой*

$$T(r_n + (1-r_n)(\lambda+3)^{-1}, f) \leqslant e^4 T(r_n - 2(1-r_n)(\lambda+3)^{-1}, f). \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

Проведем подробное исследование структуры множества $\Omega(f)$ для мероморфных при $|z|<1$ функций, имеющих конечный нижний порядок λ. Соотношение (3.2.1) справедливо и для мероморфных при $|z|<1$ функций с $R<1$. Положим в неравенстве (3.2.1) для фиксированного R, $7/8<R<1$, $k=1+(1-R)[R(\lambda+3)]^{-1}$; $x=T^{0,5}(kR, f)=T^{0,5}(kR)$ **(3.5.3)** и определим для каждого $q>0$ $\mu=\mu(q)=1-(1-R)[Rq(\lambda+3)]^{-1}$. Тогда

$$\mu^x(1)=\{1-(1-R)[R(\lambda+3)]^{-1}\}^x\leqslant -x^{-1}\ln^{-1}\{1-(1-R)\times$$
$$\times[R(\lambda+3)]^{-1}\}\leqslant K(\lambda+3)[x(1-R)]^{-1}; \qquad \textbf{(3.5.4)}$$

$$k^{2x}=\{1+(1-R)[R(\lambda+3)]^{-1}\}^{2x}=\exp 2x\ln\{1+(1-R)\times$$
$$\times[R(\lambda+3)]^{-1}\}\geqslant 1+x(1-R)[R(\lambda+3)]^{-1}. \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

Интегрирование оценки (3.2.1) в пределах от $\mu(0,5)R$ до $\mu(1)R$ дает [см. выражения (2.2.7), (3.2.4), (3.5.5)]

$$\int\limits_{\mu(0,5)R}^{\mu(1)R} L(r, a, f)\frac{dr}{r}\leqslant(2x)^2\int\limits_{\mu(0,5)R}^{\mu(1)R} r^{2x-1}\times$$
$$\times\int\limits_0^R\frac{m(t, a, f)t^{2x-1}dtdr}{(t^{2x}+r^{2x})^2}+10\ln^{-1}k\mu^x(1)\{1+[x(1-R)]^{-1}\}\times$$
$$\times\{T(kR, f)+C\}+K(x\ln k)^{-1}\{T(kR, f)+C\}. \qquad \textbf{(3.5.6)}$$

Пусть K — любой компакт из a-плоскости, имеющий положительную емкость; $\mu_0(a)$ — равновесная мера Робена компакта K. Учитывая оценки (1.8.1), (3.2.5), (3.5.6), находим

$$\int\limits_{\mu(0,5)R}^{\mu(1)R}\left\{\int\limits_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a)\right\}\frac{dr}{r}\leqslant\{1+2W(K)\}\,2x\ln\{\mu(1)[\mu(0,5)]^{-1}\}+$$
$$+CW(K)\,x\ln\{\mu(1)[\mu(0,5)]^{-1}\}+C\ln^{-1}k[x(1-R)]^{-1}\{1+$$
$$+[x(1-R)]^{-1}\}\{T(kR, f)+C\}+K(x\ln k)^{-1}\{T(kR, f)+C\}. \qquad \textbf{(3.5.7)}$$

Из определения $\mu(1)$ [см. неравенство (3.5.4)] вытекает

$$\ln\{\mu(1)[\mu(0,5)]^{-1}\}\leqslant 0,5(1-R),$$

а из выражения (3.5.3) следует, что $\ln k\geqslant K(1-R)[R(\lambda+3)]^{-1}$. Формула (3.5.7) принимает такой вид:

$$\int\limits_{\mu(0,5)R}^{\mu(1)R}\left\{\int\limits_K L(r, a, f)\,d\mu_0(a)\right\}\frac{dr}{r}\leqslant Cx^{-1}(1-R)^{-2}\{1+[x(1-$$
$$-R)]^{-1}\}\{T(kR, f)+C\}+Cx(1-R)\leqslant CT^{0,5}(kR, f)(1-R)+$$
$$+C(1-R)^{-2}\{(1-R)^{-1}+T^{0,5}(kR, f)\}=$$
$$=CT^{0,5}(R+(1-R)(\lambda+3)^{-1}, f)\{1-R+(1-R)^{-2}\}+$$
$$+C(1-R)^{-3}. \qquad \textbf{(3.5.8)}$$

Выберем в неравенстве (3.5.8) в качестве R значения R_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), для которых имеет место оценка (3.5.3). Тогда (при $R = R_n$)

$$\int\limits_{\mu(0,5)R}^{\mu(1)R} \left\{ \int\limits_K L(r, a, f)\, d\mu_0(a) \right\} \frac{dr}{r} \leqslant CT^{0,5}(\mu(0,5)R, f)(1-R)^{-2} + C(1-R)^{-3}. \qquad (3.5.9)$$

На сегменте $[\mu(0,5)R, \mu(1)R]$ существует значение $r(R)$ такое, что [см. выражение (3.5.9)]

$$\int\limits_K L(r(R), a, f)\, d\mu_0(a) \leqslant C(1-R)^{-3}T^{0,5}(\mu(0,5)R, f) + C(1-R)^{-4} \leqslant C(1-R)^{-3}T^{0,5}(r(R), f) + C(1-R)^{-4}. \qquad (3.5.10)$$

Из определения нижнего порядка λ функции $f(z)$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется R_0, $0 < R_0 < 1$, такое что для каждого $r > R_0$ $T(r, f) > (1-r)^{-\lambda(1+\varepsilon)^{-1}}$. Поэтому, если $f(z)$ имеет нижний порядок $\lambda > 0$, то $(R > R_0)$ $(1-R)^{-3}T^{0,5}[\mu(0,5)R] + (1-R)^{-4} \leqslant C\{T^{0,5+3\lambda^{-1}(1+\varepsilon)}(\mu(0,5)R, f) + T^{4\lambda^{-1}(1+\varepsilon)}(\mu(0,5)R, f)\}$. Из этой оценки и выражения (3.5.10) видно, что для $\lambda > 6$ существует последовательность $\{r_n\} \nearrow 1$ такая, что $(n \to \infty)$

$$\int\limits_K L(r_n, a, f)\, d\mu_0(a) = o(T(r_n, f)),$$

т. е.

$$\int\limits_K \beta(a, f)\, d\mu_0(a) = 0. \qquad (3.5.11)$$

Соотношение (3.5.11) сохраняет силу и в случае мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. В этом случае следует вместо неравенства (3.5.2) использовать оценки (3.5.1) и (3.2.1). Таким образом, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 3.5.1. *Для каждой мероморфной при $|z| < 1$ функции $f(z)$ нижнего порядка $\lambda > 6$ множество $\Omega(f)$ имеет логарифмическую емкость ноль.*

Наиболее актуальные нерешенные проблемы, относящиеся к материалу главы III

1. Пусть C — произвольное множество комплексных чисел, лежащее в a-плоскости и имеющее логарифмическую емкость ноль. Существует ли мероморфная функция $f(z)$, для которой $\Omega(f) = C$?

2. Всегда ли при $\tau > 1$ из условия (см. теорему 3.3.2) $m(r, a, f) = O(T(r, f) \ln^{-\tau} T(r, f))$ $(r \to \infty)$ следует условие $\beta(a, f) = 0$?

3. Найти точную границу скорости возрастания мероморфных при $|z| < 1$ функций, для которых множество $\Omega(f)$ имеет нулевую логарифмическую емкость (см. теорему 3.5.1).

Глава IV

ПРИЛОЖЕНИЕ К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теория распределения значений Р. Неванлинны нашла эффективное применение в аналитической теории дифференциальных уравнений. В первую очередь к данному кругу вопросов относятся исследования Ж. Валирона [2], Г. Виттиха [3], А. А. Гольдберга [8], Ш. И. Стрелица [34], М. Фрея [44], Э. Хилла [48; 49]. Основную задачу этих исследований можно сформулировать так. Пусть нам дано некоторое обыкновенное дифференциальное уравнение, обладающее мероморфным решением $w(z)$. Какую можно извлечь информацию о распределении значений или о росте функции $w(z)$, исходя лишь из вида дифференциального уравнения, решением которого она является? В этой главе мы дадим ответ на данный вопрос для некоторых общих классов дифференциальных уравнений. Мероморфные решения дифференциальных уравнений будем исследовать с точки зрения описанной выше теории роста мероморфных функций.

1. Рост решений линейных дифференциальных уравнений с целыми коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_0(z)\, w = 0 \quad (a_0(z) \not\equiv 0), \quad \textbf{(4.1.1)}$$

где $\{a_{k-1}(z)\}_{k=1}^{n}$ — целые функции. Из теории дифференциальных уравнений известно, что каждое решение уравнения (4.1.1) является целой функцией [см., например, 14]. Пусть $\{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$ — фундаментальная система решений уравнения (4.1.1) такая, что для каждого $k w_k(z)$ удовлетворяет начальным данным задачи Коши (единица находится на k-м месте): $w_k(0)$, $w_k'(0), \ldots,$ $w_k^{(n-1)}(0)) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Функцию

$$T(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n} |w_k(re^{i\theta})|^2}\, d\theta$$

назовем характеристикой дифференциального уравнения (4.1.1). Известно, что функции $T(r)$, построенные по различным фундаментальным системам отличаются между собой на ограниченное при $r \to \infty$ слагаемое*. Кроме того, функция $T(r)$ является неубывающей и обладает многими другими свойствами, установленными выше для характеристики роста мероморфных функций [см., например, 56]. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (4.1.1) первого порядка, т. е. $w' + a_0(z)w = 0$. **(4.1.2)** Его общее решение имеет вид $w(z) = a \exp\left\{-\int_0^z a_0(\zeta)\,d\zeta\right\}$, **(4.1.3)** где a — произвольная постоянная. Для каждого $a \neq 0$ функция $w(z)$, определенная равенством (4.1.3), обладает таким свойством: $N(r, 0, w) = N(r, \infty, w) = 0$. Значит, каждое нетривиальное решение дифференциального уравнения (4.1.2) удовлетворяет условию $\delta(0, w) = \delta(\infty, w) = 1$. Поэтому для каждого $a \neq 0, \infty$ $\delta(a, w) = 0$. Оказывается, что это свойство отсутствия конечных, отличных от нуля, дефектных значений присуще, в определенном смысле, подавляющему большинству решений и в общем случае, т. е. для дифференциальных уравнений вида (4.1.1) с произвольным n. Однако для дифференциальных уравнений порядка выше первого возможны отдельные решения, для которых это свойство может нарушаться. Такие решения следует рассматривать как исключительные.

Определение. *Будем говорить, что решение $w(z)$ уравнения* (4.1.1) *является стандартным, если для каждого $a \neq 0, \infty$ $\beta(a, w) = 0$. В противном случае будем называть решение $w(z)$ нестандартным.*

Таким образом, рост стандартного решения подобен росту экспоненциальной функции (4.1.3).

Теорема 4.1.1 *Пусть $T(r)$ — характеристика уравнения* (4.1.1), *а $w(z)$ — некоторое его решение. Если для некоторого $\tau > 0$ при всех $r \geqslant r_0$ выполняется оценка*

$$\ln T(r) \leqslant A T(r, w) \ln^{-\tau} T(r, w), \qquad (4.1.4)$$

где $A = A(w)$ — положительная постоянная, то для каждого числа $a \neq 0, \infty$ и каждого $\nu > 1$ существует неограниченное множество $E_\nu(a) \subset R_+$ такое, что для $r \geqslant r_0(a)$ и $r \in E_\nu(a)$

$$L(r, a, w) \leqslant C\nu T(r, w) \ln^{\nu - 0{,}5\tau} T(r, w), \qquad (4.1.5)$$

где C — положительная постоянная, зависящая лишь от функции $w(z)$ и от порядка дифференциального уравнения (4.1.1).

---

* Этот факт сразу следует из теоремы о связи между различными фундаментальными системами решений [14, с. 82].

Следствие. *Если решение $w(z)$ дифференциального уравнения* (4.1.1) *таково, что его характеристика $T(r, w)$ удовлетворяет оценке* (4.1.4) *с некоторым $\tau > 2$, такое решение является стандартным.*

Для решений, имеющих конечный нижний порядок, это следствие допускает такое уточнение:

Теорема 4.1.2. *Если решение дифференциального уравнения* (4.1.1) *$w(z)$ имеет конечный нижний порядок и*

$$\lim_{r\to\infty} T^{-1}(r, w)\ln T(r) = 0, \qquad \textbf{(4.1.6.)}$$

то такое решение является стандартным.

Пусть $\{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$ — фиксированная фундаментальная система решений уравнения (4.1.1). Рассмотрим вспомогательную систему мероморфных функций. Положим для $m = 2, 3, \ldots, n$

$$w_{1,m}(z) = \left(\frac{w_m(z)}{w_1(z)}\right)'.$$

Функции $w_{s,m}(z)$ для каждого s, $1 < s \leqslant n-1$ и $m = s+1, \ldots, n$ определяем по рекуррентной формуле

$$w_{s,m}(z) = \left(\frac{w_{s-1,m}(z)}{w_{s-1,s}(z)}\right)'. \qquad \textbf{(4.1.7)}$$

При этом $w_{0,m}(z) = w_m(z)$. Рост функций $w_{s,m}(z)$ характеризует

Лемма 4.1.1. *Для любых натуральных чисел s, $1 \leqslant s \leqslant n-1$; $m = s+1, \ldots, n$ и для любого числа k, $1 < k < 2$ при $r \geqslant r_0$ справедлива оценка*

$$T(r, w_{s,m}) \leqslant C(n)[T(r) + \ln T(kr) + \ln C(k-1)^{-1}], \qquad \textbf{(4.1.8)}$$

где $T(r)$ — характеристика уравнения (4.1.1); *$C(n)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от порядка дифференциального уравнения* (4.1.1).

Доказательство*. В силу неравенства (3.3.2)

$$T(r, w_{s,m}) = T(r, [w_{s-1,m}(w_{s-1,s})^{-1}]') \leqslant 2T(r, w_{s-1,m}w_{s-1,s}^{-1}) +$$
$$+ 2\ln^+ T\left(kr, \frac{w_{s-1,m}}{w_{s-1,s}}\right) + \ln C(k-1)^{-1} \leqslant 2[T(r, w_{s-1,m}) +$$
$$+ T(r, w_{s-1,s})] + 2[\ln^+ T(kr, w_{s-1,m}) +$$
$$+ \ln^+ T(kr, w_{s-1,s})] + \ln C(k-1)^{-1}. \qquad \textbf{(4.1.9)}$$

В выражении (4.1.9) характеристика функции $w_{s,m}(z)$ оценивается через характеристики функций $w_{s-1,m}(z)$ и $w_{s-1,s}(z)$. При-

* Используем следующие легко доказываемые оценки [см. также доказательство оценки (1.5.7)]: $T(r, f_1f_2) = m(r, f_1f_2) + N(r, f_1f_2) \leqslant m(r, f_1) + m(r, f_2) + N(r, f_1) + N(r, f_2) = T(r, f_1) + T(r, f_2)$; $T(r, f^{-1}) \leqslant T(r, f) + C$.

меняя аналогичные формулы для $w_{s-1,m}(z)$ и $w_{s-1,s}(z)$, приходим к заключению, что их характеристики также оцениваются через характеристики функций $w_{s-2,m}(z)$, $w_{s-2,s-1}(z)$ и $w_{s-2,s}(z)$. Подставляя полученные оценки в неравенство (4.1.9), находим оценку характеристики функции $w_{s,m}(z)$ через характеристики функций $w_{s-2,m}(z)$, $w_{s-2,s-1}(z)$, $w_{s-2,s}(z)$. Продолжая этот процесс s раз, мы приходим к оценке сверху для функции $T(r, w_{s,m})$ через сумму конечного числа (зависящего от s и, значит, от n) характеристик $T(r, w_{0,m})$ и $\{T(r, w_{0,\nu})\}_{\nu=1}^{s}$. Так как

$$w_{0,\nu}(z) = w_\nu(z), \text{ то } T(r, w_{0,\nu}) = m(r, w_\nu) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\sqrt{1+|w_\nu(re^{i\theta})|^2}d\theta \leqslant T(r).$$

Из этих рассуждений и следует оценка (4.1.8)*.

Понизим порядок уравнения (4.1.1) по известной фундаментальной системе решений $\{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$. На первом этапе процесса понижения порядка положим $w = w_1(z)u$. В новой переменной u уравнение (4.1.1) принимает вид

$$u^{(n)} + a_{n-2,1}(z)u^{(n-1)} + \ldots + a_{i,1}(z)u^{(i+1)} + \ldots +$$
$$+ a_{0,1}(z)u' = 0, \qquad (4.1.10)$$

где при $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$

$$a_{i,1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1-i} C_{n-j}^{i+1} a_{n-j}(z)\frac{w_1^{n-1-i-j}(z)}{w_1(z)}.$$

Полагая в уравнении (4.1.10) $u' = y_1$, приходим к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка

$$y_1^{(n-1)} + a_{n-2,1}(z)y_1^{(n-2)} + \ldots + a_{0,1}(z)y_1 = 0. \qquad (4.1.10а)$$

При этом мероморфные функции

$$\{w_{1,m}(z)\}_{m=2}^{n}\left(w_{1,m}(z) = \left(\frac{w_m(z)}{w_1(z)}\right)'\right)$$

представляют собой $(n-1)$-линейно независимое решение дифференциального уравнения (4.1.10а). Понижаем порядок уравнения (4.1.10а), производя замену $y_1 = w_{1,2}(z)u$. Продолжая этот процесс s раз, $1 < s \leqslant n-1$, мы придем к уравнению

$$y_s^{(n-s)} + a_{n-s-1,s}(z)y_s^{(n-s-1)} + \ldots + a_{0,s}(z)y_s = 0, \qquad (4.1.10б)$$

где при i 0, 1, 2, ..., $n-s-1$

$$a_{i,s}(z) = \sum_{j=0}^{n-s-i} C_{n-s+1-j}^{i+1} a_{n-s+1-j,s-1}(z)\frac{w_{s-1,s}^{(n-s-i-j)}(z)}{w_{s-1,s}(z)} \qquad (4.1.11)$$

---

* Оценка (4.1.8) сохраняет силу, если $C(n) = 2^n(n!)^2$.

и для каждого $s = 1, 2, \ldots, n-1$ $a_{n-s+1,\, s-1}(z) \equiv 1$. Таким образом, формула (4.1.11) выражает коэффициенты уравнения (4.1.10б) через коэффициенты уравнения, полученного на $(s-1)$-м шаге процесса понижения порядка дифференциального уравнения (4.1.1), и логарифмические производные функций (4.1.7). При этом мероморфные функции $\{w_{s,\, m}(z)\}_{m=s+1}^{n}$ представляют собой $n-s$ линейно независимых решений уравнения (4.1.10б).

Лемма 4.1.2. *Для каждого* ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, *и любого* i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n-\nu$, *имеет место соотношение*

$$a_{i,\, n-\nu-i}(z) = -\sum_{k=1}^{\nu} a_{k,\, n-\nu}(z)\frac{w^{(k)}_{n-\nu,\, n}(z)}{w_{n-\nu,\, n}(z)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n-\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} C^{k}_{\nu+k-j} a_{\nu+k-j,\, n-\nu-k}(z)\frac{w^{(\nu-j)}_{n-\nu-k,\, n-\nu-k+1}(z)}{w_{n-\nu-k,\, n-\nu-k+1}(z)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-\nu-i}\sum_{j=0}^{\nu-1} C^{k+i}_{\nu+i+k-j} a_{k+i+\nu-j,\, n-\nu-i-k}(z)\frac{w^{(\nu-j)}_{n-\nu-i-k,\, n-\nu-i-k+1}(z)}{w_{n-\nu-i-k,\, n-\nu-i-k+1}(z)}. \tag{4.1.12}$$

Доказательство. Из формулы (2.4.11) выводится такое соотношение ($s = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-s-1$):

$$a_{i,\, s}(z) = a_{i+s}(z) + \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-s-i-1} C^{k+i}_{n-s+k-j} a_{n-s+k-j,\, s-k}(z)\frac{w^{(n-s-i-j)}_{s-k,\, s-k+1}(z)}{w_{s-k,\, s-k+1}(z)} \tag{4.1.13}$$

Чтобы получить выражение (4.1.13), следует в правой части равенства (4.1.11) выделить слагаемое $a_{1+i,\, s-1}(z)$ (т. е. с $j = n-i-s$) и снова представить его по формуле (4.1.11):

$$a_{i,\, s}(z) = \sum_{j=0}^{n-s-i-1} C^{1+i}_{n-s+1-j} a_{n-s+1-j,\, s-1}(z)\frac{w^{(n-s-i-j)}_{s-1,\, s}(z)}{w_{s-1,\, s}(z)} +$$

$$+ a_{i+1,\, s-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-s-i-1} C^{i+1}_{n-s+1-j} a_{n-s+1-j,\, s-1}(z)\frac{w^{(n-s-i-j)}_{s-1,\, s}(z)}{w_{s-1,\, s}(z)} +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-s-i-1} C^{i+2}_{n-s+2-j} a_{n-s+2-j,\, s-2}(z)\frac{w^{(n-s-i-j)}_{s-2,\, s-1}(z)}{w_{s-2,\, s-1}} + a_{i+2,\, s-2}(z).$$

Далее снова представим $a_{i+2,\, s-2}(z)$ по формуле (4.1.11). Продолжая этот процесс s раз, приходим к равенству (4.1.13). Положим в уравнении (4.1.13) $i = 0$, $s = n-\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Имеем

$$a_{n-\nu}(z) = a_{0,\, n-\nu}(z) - \sum_{k=1}^{n-\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} C^{k}_{\nu+k-j} a_{\nu+k-j,\, n-\nu-k}(z) \times$$

$$\times \frac{w^{(\nu-i)}_{n-k-\nu,\, n-k-\nu+1}(z)}{w_{n-k-\nu,\, n-k-\nu+1}(z)}. \qquad (4.1.14)$$

Положим в выражении (4.1.10б) $s = n - \nu$ и заметим, что $w_{n-\nu,\, n}(z)$ является его решением. Тогда

$$a_{0,\, n-\nu}(z) = -\sum_{k=1}^{\nu} a_{k,\, n-\nu}(z) \frac{w^{(k)}_{n-\nu,\, n}(z)}{w_{n-\nu,\, n}(z)}. \qquad (4.1.15)$$

Соотношение (4.1.12) непосредственно следует из равенств (4.1.13), (4.1.14), (4.1.15), если принять в формуле (4.1.13) $s = n - \nu - i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n - s - 1$). Лемма доказана.

Положим в выражении (4.1.12) $\nu = 1$ и заметим, что для каждого $s = 1, 2, \ldots, {}^{n-1}$ $a_{n-s+1,\, s-1}(z) \equiv 1$. Тогда для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$

$$a_{i,\, n-1-i}(z) = -\frac{w'_{n-1,\, n}(z)}{w_{n-1,\, n}(z)} - \sum_{k=1}^{n-1} C^{k}_{k+1} \frac{w'_{n-1-k,\, n-k}(z)}{w_{n-1-k,\, n-k}(z)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1-i} C^{i+1}_{k+i+1} \frac{w'_{n-1-i-k,\, n-i-k}(z)}{w_{n-1-i-k,\, n-k-i}(z)}. \qquad (4.1.16)$$

Таким образом, мы получили представление мероморфных функций $a_{m,\, q}(z)$, имеющих сумму индексов $m + q = n - 1$, через логарифмические производные решений дифференциального уравнения (4.1.10б). Соотношение (4.1.12) выражает мероморфные функции $a_{i,\, n-\nu-i}(z)$, имеющие сумму индексов $n - \nu$, через мероморфные функции $a_{m,\, q}(z)$, имеющие сумму индексов $m + q \geqslant n - \nu + 1$ и логарифмические производные решений уравнения вида (4.1.10б). Из этого замечания следует, что для каждого ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$ и любого i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n - \nu$ функции $a_{i,\, n-\nu-i}(z)$ растут так же, как и логарифмические производные мероморфных функций $w_{s,\, m}(z)$. Необходимые количественные оценки мы установим в следующих двух леммах.

Лемма 4.1.3. *Для каждой мероморфной функции $f(z)$ при любом m, $m = 1, 2, 3, \ldots$; k, $1 < k < 2$; $r \geqslant r_0$*

$$m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right) \leqslant C(m) \{\ln T(kr, f) + \ln C(k-1)^{-1}\}. \qquad (4.1.17)$$

Доказательство. В силу неравенства (3.3.2)

$$m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right) = m\left(r, \prod_{\nu=1}^{m} \frac{f^{(\nu)}}{f^{(\nu-1)}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m} m\left(r, \frac{f^{(\nu)}}{f^{(\nu-1)}}\right) \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{m} \ln T(kr, f^{(\nu-1)}) + m \ln C(k-1)^{-1} =$$

$$= 2\ln T(kr, f) + 2\sum_{\nu=1}^{m-1} \ln T(kr, f^{(\nu)}) + m \ln C(k-1)^{-1}.$$

Так как

$$N(r, f^{(\nu)}) \leqslant (\nu+1) N(r, f), \quad T(r, f^{(\nu)}) \leqslant$$

$$\leqslant m(r, f^{(\nu)}) + (\nu+1) N(r, f) \leqslant m\left(r, \frac{f^{(\nu)}}{f}\right) + (\nu+1) T(r, f),$$

значит,

$$m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right) \leqslant 2\ln T(kr, f) +$$

$$+ 2\sum_{\nu=1}^{m-1} \ln^{+} m\left(kr, \frac{f^{(\nu)}}{f}\right) + C(m) \ln C(k-1)^{-1}. \qquad (4.1.18)$$

Таким образом, функция $m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right)$ растет не быстрее $\ln T(kr, f)$ и $m\left(r, \frac{f^{(\nu)}}{f}\right)$ с $1 \leqslant \nu \leqslant m-1$. В силу оценки (4.1.18) для каждого ν

$$m\left(kr, \frac{f^{(\nu)}}{f}\right) \leqslant 2\nu \ln T(k^2 r, f) +$$

$$+ 2\sum_{\nu_1=1}^{\nu-1} \ln^{+} m\left(k^2 r, \frac{f^{(\nu_1)}}{f}\right) + C(\nu) \ln C(k-1)^{-1}. \qquad (4.1.19)$$

Из неравенств (4.1.18), (4.1.19) получаем

$$m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right) \leqslant 4m \ln T(k^2 r, f) +$$

$$+ 2\sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{\nu_1=1}^{\nu-1} \ln^{+} m\left(k^2 r, \frac{f^{(\nu_1)}}{f}\right) + C(m) \ln C(k-1)^{-1}.$$

Продолжая этот процесс m раз, получим такую оценку:

$$m\left(r, \frac{f^{(m)}}{f}\right) \leqslant C(m) \ln T(k^m r, f) + C(m) \ln C(k-1)^{-1}.$$

Так как k, $1 < k < 2$,— любое фиксированное число, мы приходим к оценке (4.1.17).

Следствие. *Пусть мероморфные функции* $w_{s,m}(z)$ $(0 \leqslant s \leqslant n-1,\ s+1 \leqslant m \leqslant n)$ *определены соотношением* (4.1.7).

Тогда для каждого μ, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$; k, $1 < k < 2$; $r \geqslant r_0$

$$m\left(r, \frac{w_{s,m}^{(\mu)}}{w_{s,m}}\right) \leqslant C(\mu, n)\{\ln T(kr) + \ln C(k-1)^{-1}\}, \quad \textbf{(4.1.20)}$$

где $T(r)$ — *характеристика дифференциального уравнения* (4.1.1); $C(\mu, n)$ — *положительная постоянная, зависящая лишь от* μ *и от порядка* n *дифференциального уравнения* (4.1.1).

Действительно, в силу неравенства (4.1.17)

$$m\left(r, \frac{w_{s,m}^{(\mu)}}{w_{s,m}}\right) \leqslant C(\mu)\{\ln T(kr, w_{s,m}) + \ln C(k-1)^{-1}\}.$$

Оценка (4.1.20) следует из этого неравенства и оценки (4.1.8).

Лемма 4.1.4. *Для любых* ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$; i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n-\nu$, *мероморфные функции* $a_{i,n-\nu-i}(z)$, *определенные соотношением* (4.1.11), *удовлетворяют такому условию* ($r \geqslant r_0$, $1 < k < 2$):

$$m(r, a_{i,n-\nu-i}) \leqslant C(n)\{\ln T(kr) + \ln C(k-1)^{-1}\}, \quad \textbf{(4.1.21)}$$

где $T(r)$ — *характеристика дифференциального уравнения* (4.1.1); n — *порядок дифференциального уравнения* (4.1.1).

Доказательство. То, что оценка (4.1.21) справедлива при $\nu = 1$, вытекает из выражений (4.1.16) и (4.1.20) (с $\mu = 1$). Формула (4.1.12) показывает, что из справедливости оценки (4.1.21) для $a_{q,m}(z)$ с $q + m \geqslant n - \nu + 1$ следует ее справедливость и для $a_{q,m}(z)$ с $q + m = n - \nu$. Так как оценка (4.1.21) уже доказана для $a_{q,m}(z)$ с $q + m = n - 1$ и с $q + m = n$ (в случае $q + m = n$ $a_{q,m}(z) \equiv 1$), тем самым оценка (4.1.21) доказана для произвольного ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Теперь мы непосредственно подошли к утверждению, определяющему рост коэффициентов $\{a_k(z)\}_{k=0}^{n-1}$ дифференциального уравнения (4.1.1) относительно роста его характеристики $T(r)$.

Теорема 4.1.3. *Для каждого коэффициента* $a_{n-\nu}(z)$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$) *дифференциального уравнения* (4.1.1) *при любом* k, $1 < k < 2$, *и* $r \geqslant r_0$ *справедлива оценка*:

$$m(r, a_{n-\nu}) \leqslant C(n)\{\ln T(kr) + \ln C(k-1)^{-1}\}. \quad \textbf{(4.1.22)}$$

Действительно, положим в неравенстве (4.1.21) $i = n - \nu$. Получаем оценку (4.1.22) для $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Остается доказать оценку (4.1.22) для $\nu = n$. Заметим, что из формулы (4.1.1) непосредственно получаем ($a_n(z) \equiv 1$):

$$a_0(z) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu}(z) \frac{w_m^{(n-\nu)}(z)}{w_m(z)},$$

где $w_m(z)$ — некоторое решение дифференциального уравнения (4.1.1). Из этого соотношения сразу следует оценка (4.1.22) и для $\nu = n$.

Приступим к доказательству теоремы 4.1.1. Пусть a ($a \neq 0, \infty$) — произвольное комплексное число и $w(z)$ — решение уравнения (4.1.1). Имеем

$$w(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(z)}{a_0(z)} w^{(k)}(z),$$

поэтому

$$\frac{w(z)}{w(z)-a} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(z)}{a_0(z)} \frac{w^{(k)}(z)}{w(z)-a}.$$

Значит, в силу неравенств (4.1.17), (4.1.22), (3.3.2) для любого k, $1 < k < 2$, при $r \geqslant r_0$

$$m(r, a, w) \leqslant \sum_{k=0}^{n} m(r, a_k) + C +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} m\left(r, \frac{w^{(k)}}{w-a}\right) \leqslant C(n)\{\ln T(kr) + \ln c(k-1)^{-1}\} +$$

$$+ C(n) \ln T(kr, w). \qquad (4.1.23)$$

Так как $w(z)$ — решение дифференциального уравнения (4.1.1),

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k w_k(z), \qquad (4.1.24)$$

где $\{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$ — фиксированная фундаментальная система решений дифференциального уравнения (4.1.1), по которой строится его характеристика $T(r)$. Из равенства (4.1.24) следует, что $T(r, w) \leqslant T(r) + C$, поэтому оценка (4.1.23) принимает вид ($r \geqslant r_0$)

$$m(r, a, w) \leqslant C(n)\{\ln T(kr) + \ln C(k-1)^{-1}\}. \qquad (4.1.25)$$

Из соотношений (4.1.25) и (3.2.4) получаем (см. доказательство теоремы 3.3.2)

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r, a, w) \frac{dr}{r} \leqslant C(n)(2x)^2 \int_{r_0}^{R} \{\ln T(kt) +$$

$$+ \ln C(k-1)^{-1}\} t^{2x-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{t^{2x-1} dr dt}{(t^{2x} + r^{2x})^2} + xC \ln(r_2 r_1^{-1}) +$$

$$+ \sum_{|b_k| < R} \int_{r_1}^{r_2} \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{|r^{2x} - |b_k|^{2x}|} \frac{dr}{r} +$$

$$+\frac{10}{\ln k}\frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\left(\frac{r_2}{R}\right)^x[T(kR,\ w)+C]\leqslant C(n)\,x\,\{\ln T(kR)+$$

$$+\ln C(k-1)^{-1}\}\ln(r_2r_1^{-1})+\frac{K}{k-1}\frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\left(\frac{r_2}{R}\right)^x T(kR,\ w)+$$

$$+\frac{K}{x(k-1)}T(kR,\ w). \qquad \textbf{(4.1.26)}$$

В оценке (4.1.26) r_1, r_2, R и k определены равенствами (3.2.2) и (3.2.3); $T(r)$ — характеристика дифференциального уравнения (4.1.1); $T(r,\ w)$ — характеристика решения $w(z)$. При этом в качестве функции $\varphi(y)$, по которой определяется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ [см. формулы (3.2.2), (3.2.3)], выбираем функцию $\varphi(y)=T(e^y,\ w)$. По условию теоремы 4.1.1 для $r\geqslant r_0$ $\ln T(r)\leqslant AT(r,\ w)\ln^{-\tau}T(r,\ w)$. Оценка (4.1.26) принимает вид оценки (3.3.17), значит, дальнейшее доказательство теоремы 4.1.1 совпадает с доказательством теоремы 3.3.2.

Докажем теорему 4.1.2. В силу условия (4.1.6) для каждого ε, $0<\varepsilon<1$, найдется $r_0=r_0(\varepsilon)$ такое, что для $r\geqslant r_0(\varepsilon)$ $\ln T(r)\leqslant\varepsilon T(r,\ w)$. Поэтому оценка (4.1.25) при $r\geqslant r_0$ принимает вид $(a\neq 0,\ \infty)$ $m(r,\ a,\ w)\leqslant C(n)\{1+\varepsilon T(2r,\ w)\}$. Учитывая это неравенство и применяя соотношение (2.2.10) к функции $f(z)=(w(z)-a)^{-1}$, мы приходим к оценке

$$\int_{2s}^{0,5R} L(r,\ a,\ w)\frac{dr}{r^{\lambda+1}}\leqslant C(n)(\lambda+1)\varepsilon x\int_{2s}^{0,5R} T(2r,\ w)\frac{dr}{r^{\lambda+1}}+$$

$$+\frac{C(\lambda+1)}{x}\int_{2s}^{0,5R} T(r,\ w)\frac{dr}{r^{\lambda+1}}+C(x,\ \lambda)\left\{\frac{T(2s,\ w}{(2s)^{\lambda}}+\frac{T(2R,\ w)}{(2R)^{\lambda}}\right\},$$

из которой, как и при доказательстве неравенства (2.2.12), следует, что для каждого $x>\max(0{,}5;\ \lambda)$ и каждого ε, $0<\varepsilon<1$,

$$\beta(a,\ w)\leqslant C(n,\ \lambda)(\varepsilon x+x^{-1}). \qquad \textbf{(4.1.27)}$$

Полагая в оценке (4.1.27) $x=(\lambda+1)\varepsilon^{-0,5}$, получим $\beta(a,\ w)\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$. Так как $\varepsilon>0$ можно выбрать как угодно малым, $\beta(a,w)=0$.

Обсудим точность теорем 4.1.1 и 4.1.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $w''+e^{-z}w'-w=0$. Его фундаментальная система решений имеет вид $w_1(z)=e^z+1$; $w_2(z)=\exp(z+e^{-z})$. Для функции $w_1(z)$ имеем $\delta(w_1,\ 1)=1$; $\beta(1,\ w_1)=\pi$. Значит, $w_1(z)$ — нестандартное решение. В силу неравенства (3.1.21) характеристика этого уравнения удовлетворяет условию $(r\geqslant r_0)$ $(3\pi^2\sqrt{r})^{-1}e^r\leqslant T(r)\leqslant r^{-0,5}e^r$, поэтому $\lim\limits_{r\to\infty}T^{-1}(r,\ w_1)\ln T(r)=\pi$. Другими словами, условие $\ln T(r)=O(T(r,\ w_1))$, $r\to\infty$, еще не обеспечивает свойства стандартности решения $w_1(z)$.

2. Замечание о структуре множества нестандартных решений линейных дифференциальных уравнений с целыми коэффициентами

Возникает вопрос: как много существует стандартных решений дифференциального уравнения 4.1.1? В этом отношении представляет интерес

Теорема 4.2.1. *Каждая фундаментальная система решений дифференциального уравнения* (4.1.1) $\{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$ *содержит хотя бы одно стандартное решение.*

Доказательство. Из определения характеристики уравнения (4.1.1) $T(r)$ следует, что $T(r) \leqslant \sum_{k=1}^{n} T(r, w_k) + C.$ **(4.2.1)**

Рассмотрим функцию $\varphi(y) = T(e^y)$. Пусть для фиксированного ν, $1 < \nu < 1{,}5$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает последовательность, для которой выполняется соотношение (1.3.17). Положим $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in\{e^{y_n}\}}}} \frac{T(r, w_k)}{T(r)} = \theta_k(\nu).$$

Из неравенства (4.2.1) следует, что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \theta_k(\nu) = \theta_{k_0}(\nu) \geqslant n^{-1}$. Таким образом, существует решение $w_{k_0}(z)$, для которого* при $r \in \{e^{y_n}\}$ и $r \geqslant r_0$ $T(r, w_{k_0}) \geqslant 0{,}5n^{-1}T(r)$. **(4.2.2)** Определим для каждого y_n величину y_n' из условия $y_n' - \ln^{-\nu}\varphi(y_n') = y_n$. Ясно, что $y_n < y_n' \leqslant y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)$. Положим в оценке (4.1.26)

$$k = \exp\{0{,}25\ln^{-\nu}\varphi(y_n')\};\quad R = \exp\{y_n' - 0{,}25\ln^{-\nu}\varphi(y_n')\};$$

$$r_1 = \exp\{y_n' - \ln^{-\nu}\varphi(y_n')\} = \exp y_n;$$

$$r_2 = \exp\{y_n' - 0{,}5\ln^{-\nu}\varphi(y_n')\};\quad x = \ln^{3\nu}\varphi(y_n').$$

Тогда

$$kR = \exp y_n' \leqslant \exp\{y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)\}.$$

Оценка (4.1.26) принимает вид $(n \geqslant n_0)$

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r, a, w_{k_0})\frac{dr}{r} \leqslant C(n)\,\nu x\{\ln\varphi(y_n) + \ln\ln\varphi(y_n)\}\ln^{-\nu}\varphi(y_n) +$$

$$+ Kx^{-1}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,T(kR, w_{k_0}) +$$

$$+ K\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,T(kR, w_{k_0})\exp\{-0{,}25x\ln^{-\nu}\varphi(y_n)\} \leqslant$$

---

* Оценка (4.2.2) может выполняться по некоторой подпоследовательности $\{e^{y_n}\}$.

$$\leqslant C(n)\nu\{\ln^{3\nu}\varphi(y_n)+T(kR,\ w_{k_0})\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}\leqslant$$
$$\leqslant C(n)\nu\{\ln^{3\nu}\varphi(y_n)+T(kR)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}=$$
$$=C(n)\nu\{\ln^{3\nu}\varphi(y_n)+\varphi(y_n+\ln^{-\nu}\varphi(y_n))\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}\leqslant$$
$$\leqslant C(n)\nu\{\ln^{3\nu}\varphi(y_n)+\varphi(y_n)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}=$$
$$=C(n)\nu\{\ln^{3\nu}T(r_1)+T(r_1)\ln^{-2\nu}T(r_1)\}. \qquad (4.2.3)$$

В силу условия (4.2.2) при $n\geqslant n_0$ $T(r_1)\leqslant 2nT(r_1,\ w_{k_0})$. Оценка (4.2.3) принимает вид

$$\int_{r_1}^{r_2} L(r,\ a,\ w_{k_0})\frac{dr}{r}\leqslant C(n)\nu\{\ln^{3\nu}T(r_1,\ w_{k_0})+$$
$$+T(r_1,\ w_{k_0})\ln^{-2\nu}T(r_1,\ w_{k_0})\}. \qquad (4.2.4)$$

Из неравенства (4.2.4), как и при доказательстве теоремы 3.2.1, убеждаемся в наличии значения $r\in[r_1,\ r_2]$ такого, что

$$L(r,\ a,\ w_{k_0})\leqslant C\{T(r,\ w_{k_0})\ln^{-\nu}T(r,\ w_{k_0})+\ln^{4\nu}T(r,\ w_{k_0})\},$$

откуда и следует теорема 4.2.1.

Теорема 4.2.1 допускает следующее обобщение:

Пусть A — фиксированная допустимая система n-мерных комплексных векторов (т. е. каждые n различных векторов из этой системы A линейно независимы), а $\overline{G}(z)=\{w_k(z)\}_{k=1}^n$ — n-мерная целая кривая, компоненты которой $\{w_k(z)\}_{k=1}^n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (4.1.1). Целой кривой $\overline{G}(z)$ называется переменный n-мерный вектор, компоненты которого $\{w_k(z)\}_{k=1}^n$ представляют собой линейно независимые целые функции [56; 8]. Обозначим

$$M(A,\ \overline{G})=\left\{w(z,\ \overline{a})=\sum_{k=1}^n a_k w_k(z):\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\in A\right\}.$$

Ясно, что множество целых функций $M(A,\ \overline{G})$ представляет собой некоторое множество решений* дифференциального уравнения (4.1.1). Множество $M(A,\ \overline{G})$ может быть достаточно мощным. Например, если $A_0=\{\overline{a}:\overline{a}=(1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{n-1})\cup(0,\ 0,\ \ldots,\ 1)\}$, то для каждого комплексного числа a $w(z,\ \overline{a})\in M(A_0,\ \overline{G})$.

Теорема 4.2.2. *Каждое множество $M(A,\ \overline{G})$ может содержать самое большее $n-1$ нестандартных решений.*

Действительно, если бы множество $M(A,\ \overline{G})$ имело не меньше, чем n различных нестандартных решений, то, выбрав из них n произвольных решений, мы получили бы фундаментальную си-

* Это множество следует рассматривать как множество всех решений дифференциального уравнения (4.1.1).

стему, состоящую из n нестандартных решений. Это противоречит теореме 4.2.1.

Покажем теперь, что утверждение теоремы 4.2.1 усилить нельзя. Рассмотрим для каждого фиксированного натурального числа n дифференциальное уравнение

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_1(z)\, w' - w = 0, \qquad (4.2.5)$$

где целые функции $\{a_k(z)\}_{k=1}^{n-1}$ определяются из системы

$$\begin{cases} a_{n-1}(z) + \ldots + a_1(z) = -c_1 e^{-z} \\ 2^{n-1} a_{n-1}(z) + \ldots + 2a_1(z) = 1 - 2^n - c_2 e^{-2z} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)_{n-1} a_{n-1}(z) + \ldots + (n-1)\, a_1(z) = 1 - \\ \qquad\qquad - (n-1)^n - c_{n-1} e^{-(n-1)z}. \end{cases} \qquad (4.2.6)$$

При этом $\{c_k\}_{k=1}^{n-1}$ — произвольные, отличные от нуля комплексные числа. Ясно, что функции $\{a_k(z)\}_{k=1}^{n-1}$ определяются однозначно. Систему (4.2.6) можно записать в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} [1 + a_{n-1}(z) + \ldots + a_1(z)]\, e^z = e^z - c_1 \\ [2^n + 2^{n-1} a_{n-1}(z) + \ldots 2a_1(z)]\, e^{2z} = e^{2z} - c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)^n + (n-1)^{n-1} a_{n-1}(z) + \ldots + (n-1) \times \\ \qquad\qquad \times a_1(z)]\, e^{(n-1)z} = e^{(n-1)z} - c_{n-1}. \end{cases} \qquad (4.2.7)$$

Система (4.2.7) показывает, что каждая из функций $w_k(z) = e^{kz} - c_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ является решением дифференциального уравнения (4.2.5). Каждая из функций $w_k(z)$ представляет собой нестандартное решение дифференциального уравнения (4.2.5).

Отметим одну связь между структурой множества нестандартных решений дифференциального уравнения (4.1.1) и структурой множества валироновских дефектных значений для n-мерных целых кривых. В теории роста и распределения значений n-мерных целых кривых, развивающейся параллельно теории роста и распределения значений мероморфных функций, используются следующие характеристики:

$$m(r, \bar{a}, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|\bar{G}(re^{i\theta})\|\, \|\bar{a}\|}{|(\bar{G}(re^{i\theta}), \bar{a})|}\, d\theta, \qquad (4.2.8)$$

где $\|\bar{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$ и $\|\bar{G}(z)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |w_k(z)|^2}$, характеризует среднее отклонение переменного вектора $\bar{G}(z)$ относительно

постоянного вектора* $\bar{a}$ на окружности $\{z : |z| = r\}$. Функция $N(r, \bar{a}, \bar{G})$ строится по функции $n(t, \bar{a}, \bar{G})$, которая совпадает с числом корней (с учетом их кратности) скалярного произведения

$$(\bar{G}(z), \bar{a}) = \sum_{k=1}^{n} w_k(z) a_k, \bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

попавших в круг $K(0, t) = \{z : |z| \leqslant t\}$. Характеристика целой кривой $\bar{G}(z)$ определяется так:

$$T(r, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|\bar{G}(re^{i\theta})\| d\theta.$$

Из выражений (1.2.4) и (4.2.8) следует первая основная теорема теории целых кривых:

Для любой n-мерной целой кривой $\bar{G}(z)$ и произвольного комплексного n-мерного вектора $\bar{a}$ $(\bar{a} \neq (0, 0, \ldots, 0))$ справедливо соотношение $m(r, \bar{a}, \bar{G}) + N(r, \bar{a}, \bar{G}) = T(r, \bar{G}) - \alpha(\bar{a}, \bar{G}) - \ln \|\bar{a}\|$, где

$$\alpha(\bar{a}, \bar{G}) = \begin{cases} \ln |(\bar{G}(0), \bar{a})|, \text{ если } (\bar{G}(0), \bar{a}) \neq 0; \\ \lim\limits_{z \to 0} \ln \left| \dfrac{(\bar{G}(z), \bar{a})}{z^{p_0}} \right|, \text{ если } (\bar{G}(z), \bar{a}) \text{ имеет} \\ \text{при } z = 0 \text{ корень кратности } p_0. \end{cases}$$

Как и в мероморфном случае, дефект в смысле Ж. Валирона целой кривой $\bar{G}(z)$ относительно вектора $\bar{a}$

$$\Delta(\bar{a}, \bar{G}) = \overline{\lim_{r \to \infty}} T^{-1}(r, \bar{G}) m(r, a, \bar{G}) =$$

$$= 1 - \underline{\lim_{r \to \infty}} T^{-1}(r, \bar{G}) N(r, \bar{a}, \bar{G}). \qquad \textbf{(4.2.9)}$$

Множество

$$V(\bar{G}) = \{\bar{a} \in C^n : \Delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\}$$

называется множеством дефектных значений целой кривой $\bar{G}(z)$ в смысле Ж. Валирона. В настоящее время структура множества $V(\bar{G})$ изучена достаточно полно. Доказано, что оно, подобно множеству дефектных значений мероморфных функций $V(f)$, для произвольной целой кривой является исключительным в том смысле, что подавляющее большинство векторов $\bar{a} \in C^n$ не принадлежит этому множеству [28; 35].

---

* Это становится очевидным, если $(\widehat{\bar{G}(z), \bar{a}}) = \arccos \dfrac{|(\bar{G}(z), \bar{a})|}{\|\bar{G}(z)\| \|\bar{a}\|}$ принять за размер угла между векторами $\bar{G}(z)$ и $\bar{a}$.

Обозначим через M множество всех решений дифференциального уравнения (4.1.1). Таким образом, множество M представляет собой n-мерное линейное пространство над полем комплексных чисел, базис которого — фиксированная фундаментальная система решений дифференциального уравнения (4.1.1). Каждое решение $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = w(z, \bar{a}) = \sum_{k=1}^{n} a_k w_k(z) = (\bar{G}(z), \bar{a}),$$

где $(\bar{G}(z), \bar{a})$ — скалярное произведение целой кривой $\bar{G}(z) = \{w_k(z)\}_{k=1}^{n}$, построенной по фиксированной фундаментальной системе решений уравнения (4.1.1), на некоторый постоянный вектор $\bar{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(a \neq (0, 0, \ldots, 0))$.

Рассмотрим $(n+1)$-мерную целую кривую $\bar{G}_1(z) = \{1, \bar{G}(z)\} = \{1, w_1(z), w_2(z), \ldots, w_n(z)\}$. Примем обозначение $V_1(\bar{G}_1) = \{\bar{a} \in C^n : \Delta((1, \bar{a}), \bar{G}_1) > 0\}$. Множество $V_1(\bar{G}_1)$ образовано пересечением множества $V(\bar{G}_1)$ n-мерной гиперплоскостью $\bar{b} = \{(1, \bar{a}) : \bar{a} \in C^n\}$. Пусть некоторый вектор $\bar{b}_0 = (1, \bar{a}_0) = (1, a_1^0, \ldots, a_n^0) \notin V_1(\bar{G}_1)$. Тогда в силу равенства (4.2.9) при $r \geqslant r_0$ $N(r, \bar{b}_0, \bar{G}_1) \geqslant 0{,}5T(r, \bar{G}_1) = 0{,}5T(r)$, где $T(r)$ — характеристика уравнения (4.1.1). С другой стороны, $N(r, \bar{b}_0, \bar{G}_1) = N(r, 1, w(z, \bar{a}_0)) \leqslant T(r, w(z, \bar{a}_0)) + C$, где $w(z, \bar{a}_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k^0 w_k(z)$. **(4.2.10)** Для решения (4.2.10) $T(r, w(z, \bar{a}_0)) \geqslant 0{,}5T(r) - C$, значит, это стандартное решение уравнения (4.1.1). Следовательно, все нестандартные решения дифференциального уравнения (4.1.1) образуются из векторов $\bar{b} = (1, \bar{a}) \in V_1(\bar{G}_1)$. А так как множество $V_1(\bar{G}_1)$ является исключительным [35], то и множество всех нестандартных решений дифференциального уравнения (4.1.1) представляет собой исключительное множество в том смысле, что подавляющее большинство решений этого уравнения — стандартные решения.

3. Рост мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений

Пусть

$$P(z, w, w_1, \ldots, w_p) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} a_{k_0,\ldots,k_p}(z) w^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_p^{k_p} - \qquad (4.3.1)$$

неприводимый многочлен $(p+1)$-й переменной $w, w_1, \ldots, w_p$ с мероморфными коэффициентами $a_{k_0,\ldots,k_p}(z)$. Для каждого j ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) функция

$$\Omega_j(z, w, w_1, \ldots, w_p) = \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} a_{k_0,\ldots,k_p}(z)\, w^{k_0} w_1^{k_1} \ldots w_p^{k_p}$$

называется однородной частью многочлена $P(z, w, w_1, \ldots, w_p)$ степени j. Если в уравнении (4.3.1) коэффициенты $a_{k_0,\ldots,k_p}(z)$ — многочлены, то дифференциальное уравнение $P(z, w, w', \ldots, w^{(p)}) = 0$, (4.3.2) определяемое многочленом $P(z, w, w_1, \ldots, w_p)$, называется алгебраическим дифференциальным уравнением [2; 3]. Если же в равенстве (4.3.1) коэффициенты $a_{k_0,\ldots,k_p}(z)$ — мероморфные при $z \neq \infty$ функции, то уравнение (4.3.2) естественно назвать алгебраическим дифференциальным уравнением с мероморфными коэффициентами. Пусть $T(r, a_{k_0,\ldots,k_p})$, как обычно, означает неванлинновскую характеристику мероморфной функции $a_{k_0,\ldots,k_p}(z)$. Положим для каждого r ($r \geqslant 0$)

$$Q(r, P) = \max T(r, a_{k_0,\ldots,k_p}),$$

где max берется по всем мероморфным коэффициентам уравнения (4.3.2). Функцию $Q(r, P)$ будем называть характеристикой роста коэффициентов дифференциального уравнения (4.3.2). Если в выражении (4.3.1) $\Omega_n(z, w, w_1, \ldots, w_p) \not\equiv 0$, как функция совокупности всех переменных, уравнение (4.3.2) называется дифференциальным уравнением степени n и порядка p.

Прежде чем сформулировать закономерность роста мероморфных решений алгебраических дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами, отметим некоторые предшествующие результаты, полученные в этом направлении. Ш. И. Стрелиц установил [34], что если $P(z, w, w', \ldots, w^{(p)}) = 0$ — алгебраическое дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами и $w(z)$ — его трансцендентное мероморфное решение конечного порядка такое, что для некоторого конечного числа a $\delta(a, f) > 0$, то $P(z, a, 0, \ldots 0) \equiv 0$ [34, с. 213]. Позднее А. З. Мохонько и В. Д. Мохонько распространили этот результат на алгебраические дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами, освободившись при этом от требования конечности порядка мероморфного решения $w(z)$ [19]. Наконец, недавно В. Д. Мохонько, используя метод из работы С. С. Бойко, В. П. Петренко [1], получила следующее утверждение:

Если $w(z)$ — трансцендентное мероморфное решение алгебраического дифференциального уравнения с мероморфными коэффициентами, имеющее нижний порядок λ и такое, что при $r \to \infty$

характеристика роста коэффициентов уравнения удовлетворяет условию

$$Q(r, P) = \begin{cases} O(T^m(r, w)), \text{ для некоторого } m < 1, \text{ если } \lambda = \infty; \\ o(T(r, w)), \text{ если } \lambda < \infty, \end{cases}$$

то для каждого конечного числа a такого, что $P(z, a, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$ справедливо $\beta(a, w) = 0$ [20].

Здесь мы излагаем дальнейшую модификацию нашего метода, с помощью которого выведена

Теорема 4.3.1. *Пусть $w(z)$ — мероморфное решение алгебраического дифференциального уравнения* (4.3.2), *имеющего степень n и порядок p с мероморфными коэффициентами, такое что при некотором $\tau > 0$ и при всех $r \geqslant r_0$ функция роста коэффициентов $Q(r, P)$ удовлетворяет оценке*

$$Q(r, P) \leqslant AT(r, w) \ln^{-\tau} T(r, w), \tag{4.3.3}$$

где $A = A(w)$ — положительная постоянная. Тогда для каждого комплексного числа a $(a \neq \infty)$, для которого $P(z, a, 0, \ldots, 0) \not\equiv \not\equiv 0$ и для каждого $\nu > 1$ существует неограниченное множество $E_\nu(a) \subset R_+$, такое, что для $r \geqslant r_0(a)$ и $r \in E_\nu(a)$

$$L(r, a, w) \leqslant CT(r, w) \ln^{\nu - 0,5\tau} T(r, w), \tag{4.3.4}$$

где C — положительная постоянная, зависящая от степени дифференциального уравнения, его порядка и от числа ν.

Доказательство. Докажем сначала теорему 4.3.1 для случая $a = 0$. По условию теоремы $P(z, 0, 0, \ldots, 0) = a_0(z) \not\equiv 0$. Подставляя в уравнение (4.3.2) его решение $w(z)$, получаем

$$a_0(z) = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} a_{k_0,\ldots,k_p}(z)\, w^{k_0}(z)\, (w'(z))^{k_1} \ldots (w^{(p)}(z))^{k_p},$$

т. е.

$$a_0(z)\, w^{-n}(z) =$$

$$= -\sum_{j=1} w^{j-n}(z) \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} a_{k_0,\ldots,k_p}(z) \left(\frac{w'(z)}{w(z)}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{w^{(p)}(z)}{w(z)}\right)^{k_p}. \tag{4.3.5}$$

Из выражения (4.3.5) следует, что

$$\frac{1}{|w(z)|^n} \leqslant |a_0(z)|^{-1} \sum_{j=1}^{n} |w(z)|^{j-n} \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} |a_{k_0,\ldots,k_p}(z)| \left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right|^{k_1} \ldots$$

$$\ldots \left|\frac{w^{(p)}(z)}{w(z)}\right|^{k_p} \leqslant |a_0(z)|^{-1} \prod_{\nu=1}^{p} \left(1 + \left|\frac{w^{(\nu)}(z)}{w(z)}\right|\right)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j(z)}{|w(z)|^{n-j}}, \tag{4.3.6}$$

где

$$\sigma_j(z) = \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} |a_{k_0,\ldots,k_p}(z)|.$$

Пусть

$$|\widehat{w}(z)| = \begin{cases} |w(z)|, & \text{если } |w(z)| < 1; \\ 1, & \text{если } |w(z)| \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда для $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$|w(z)|^{j-n} \leqslant |\widehat{w}(z)|^{j-n} \leqslant |\widehat{w}(z)|^{1-n}. \tag{4.3.7}$$

Из неравенств (4.3.6) и (4.3.7) находим

$$\frac{1}{|w(z)|^n} \leqslant \prod_{\nu=1}^{p} \left(1 + \left|\frac{w^{(\nu)}(z)}{w(z)}\right|\right)^n \frac{1}{|\widehat{w}(z)|^{n-1}\,|a_0(z)|} \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(z);$$

$$n \ln^+ |w(z)|^{-1} \leqslant (n-1) \ln^+ |w(z)|^{-1} +$$

$$+ \ln^+ |a_0(z)|^{-1} + C + \sum_{j=1}^{n} \ln^+ \sigma_j(z) +$$

$$+ n \sum_{\nu=1}^{p} \ln^+ \left|\frac{w^{(\nu)}(z)}{w(z)}\right|, \tag{4.3.8}$$

поэтому

$$m(r, 0, w) \leqslant m(r, 0, a_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_0+\ldots+k_p=j} m(r, a_{k_0,\ldots,k_p}) + C + n \sum_{\nu=1}^{p} m\left(r, \frac{w^\nu}{w}\right) \leqslant$$

$$\leqslant n \sum_{\nu=1}^{p} m\left(r, \frac{w^\nu}{w}\right) + C(n)\{1 + Q(r, P)\}.$$

Из этой оценки и из соотношений (4.3.3), (4.1.17) получаем, что для каждого $r \geqslant r_0$ и k, $1 < k < 2$,

$$m(r, 0, w) \leqslant$$

$$\leqslant C(n, p)\{AT(r, w) \ln^{-\tau} T(r, w) + \ln T(kr, w) + \ln C(k-1)^{-1}\}, \tag{4.3.9}$$

где $C(n, p)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от степени n и порядка p дифференциального уравнения (4.3.2). Используя выражение (4.3.9) и рассуждая так же, как и при доказательстве теорем 4.1.1, 3.3.2 [см. неравенства 3.3.17, 4.1.26], мы приходим к оценке (4.3.4) для случая $a = 0$.

Пусть теперь a — любое число ($a \neq 0, \infty$). Положим в уравнении (4.3.2) $w = \zeta + a$, тогда

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(p)}) = P(z, \zeta + a, \zeta', \ldots, \zeta^{(p)}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k_0 + \ldots + k_p = j} = a_{k_0, k_1, \ldots, k_p}(z)(\zeta + a)^{k_0}(\zeta')^{k_1} \ldots (\zeta^{(p)})^{k_p} =$$

$$= P_1(z, \zeta, \ldots, \zeta^{(p)}) = 0. \qquad (4.3.10)$$

В силу условия теоремы 4.3.1 $P_1(z, 0, \ldots, 0) = P(z, a, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$, а согласно равенству (4.3.3) ($r \geqslant r_0$)

$$Q(r, P_1) \leqslant A_1 T(r, w) \ln^{-\tau} T(r, w).$$

Мероморфные решения дифференциальных уравнений (4.3.10) и (4.3.2) — соответственно $\zeta(z)$ и $w(z)$ — связаны соотношением $\zeta(z) = w(z) - a$, поэтому $L(r, 0, \zeta) = L(r, a, w)$; $|T(r, \zeta) - T(r, w)| \leqslant C$.

Таким образом, теорема 4.3.1 справедлива для любого $a \neq \infty$.

Следствие. *Если для мероморфного решения дифференциального уравнения* (4.3.2) $w(z)$ *оценка* (4.3.3) *выполняется с некоторым* $\tau > 2$, *то для такого решения*

$$\Omega(w) \setminus \{\infty\} \subseteq \{a : P(z, a, 0, \ldots, 0) \equiv 0\}. \qquad (4.3.11)$$

Это следствие непосредственно вытекает из утверждения теоремы 4.3.1. Соотношение (4.3.11) можно охарактеризовать так: Для каждого решения дифференциального уравнения (4.3.2), удовлетворяющего условию (4.3.3) с $\tau > 2$, множество положительных отклонений $\Omega(w) \setminus \{\infty\}$ содержится во множестве всех положений равновесия дифференциального уравнения (4.3.2).

Когда условие (4.3.3) выполняется при $\tau = 0{,}5$, включение (4.3.11) может нарушаться. Пусть $E_0(z) = E'(z)$ — целая функция, где $E(z)$ определена соотношением (3.1.1). Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка

$$w' E_0(z) - \{E_0'(z) - (1 + e^z) E_0(z)\} w = 0. \qquad (4.3.12)$$

Функция $\psi(z) = aE_0(z) \exp(-z - e^z)$, где a ($a \neq 0, \infty$) — фиксированное число, является решением уравнения (4.3.12). В силу выражений (3.3.2), (3.3.6), (3.3.7), (3.3.8) $\beta(a, \psi) = \infty$;

$$m(r, E_0') \leqslant m(r, E_0) + m\left(r, \frac{E_0'}{E_0}\right) \leqslant 2r^{-1}e^r + Cr,$$

поэтому характеристика роста коэффициентов дифференциального уравнения (4.3.12) удовлетворяет условию [см. неравенство (3.3.7)]

$$Q(r, P) \leqslant K(r + 1)^{-1}e^r \leqslant K(r + 1)^{-0,5}T(r, \psi) \leqslant$$
$$\leqslant AT(r, \psi) \ln^{-0,5} T(r\, \psi).$$

Кроме того, из равенства (4.3.12) и определения функции $E_0(z)$ имеем $P(z, a, 0) = -\{E_0'(z) - (1 + e^z) E_0(z)\} a \not\equiv 0$.

4. Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами

Если в линейном дифференциальном уравнении (4.1.1) все коэффициенты $\{a_k(z)\}_{k=0}^{n-1}$ — полиномы, каждое его решение $w(z)$ имеет конечный порядок ρ [см. 2, с. 219]. Поэтому характеристика роста линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами удовлетворяет оценке $\ln T(r) \leqslant$

$$\leqslant C \ln (r+2). \qquad (4.4.1)$$

Из неравенств (4.1.23) и (4.4.1) следует, что для каждого трансцендентного решения $w(z)$ уравнения (4.1.1) с полиномиальными коэффициентами $m(r, a, w) \leqslant C(n)\{\ln T(kr, w) + \ln(r+2) +$

$$+ \ln(C(k-1)^{-1})\}, \qquad (4.4.2)$$

где $a \neq 0, \infty$ — любое комплексное число и $1 < k < 2$. Таким образом, для каждого $a \neq 0, \infty$ $\Delta(a, w) = 0$, а значит, и $\beta(a, w) = 0$. Невыясненным остается лишь вопрос о возможных значениях величин $\delta(0, w)$, $\Delta(0, w)$, $\beta(0, w)$, где $w(z)$ — трансцендентное решение линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами. Предыдущий метод исследования не дает возможности получить определенный ответ на данный вопрос. Применяя метод асимптотического интегрирования Э. Хилла [49, с. 330], найдем асимптотику для фундаментальной системы решений дифференциального уравнения вида

$$w'' + q(z) w = 0, \qquad (4.4.3)$$

где $q(z)$ — полином. Используя эту асимптотику, мы придем к такому утверждению:

Теорема 4.4.1. *Для каждого трансцендентного решения дифференциального уравнения* (4.4.3) *либо* $\beta(0, w) = 0$, *либо* $\beta(0, w) > \pi/4$. *Если* $\beta(0, w) \neq 0$, *нуль является асимптотическим значением* для решения* $w(z)$.

Доказательство. Пусть $q(z)$ — полином степени m $(m \geqslant 1)$. Тогда для $|z| = r \geqslant r_0$

$$q(z) = az^m \{1 + \omega(z)\} = |a| e^{i\alpha} z^m \{1 + \omega(z)\}, \qquad (4.4.4)$$

где $\omega(z) \leqslant C|z|^{-1} < 1$. Зафиксируем ε, $0 < \varepsilon < 1$, и рассмотрим систему секторов $(k = 1, 2, 3, \ldots, m+2)$

$$S_k = \left\{z : \left|\arg z - \frac{2k\pi - \alpha}{m+2}\right| < \frac{\pi(2-\varepsilon)}{m+2},\ |z| > r_0\right\},$$

где α определено в формуле (4.4.4) $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ (рис. 5).

* Существует непрерывная кривая Γ, уходящая на бесконечность и такая, что $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Gamma}} w(z) = 0$.

Для каждого k $S_k \cap S_{k+1}$ представляет собой сектор, раствор которого $2\pi(1-\varepsilon)(m+2)^{-1}$. Положим для каждого $z \in S_k$ $\arg z = \varphi + (2k\pi - \alpha)(m+2)^{-1}$, где $|\varphi| < \pi(2-\varepsilon)(m+2)^{-1}$. Тем самым мы выделили однозначную ветвь для $\arg z$ в каждом секторе S_k. Значит, при $|z| \geqslant r_0$ в каждом секторе S_k функция $\{q(z)\}^{0,5}$ является однозначной и аналитической. Положим для каждого $z \in S_k$ $(|z| \geqslant r_0)$

$$\zeta = \zeta(z) = \int_{z_k}^{z} \{q(t)\}^{0,5} dt, \qquad (4.4.5)$$

где $z_k = r_0 \exp\{i(2k\pi - \alpha)(m+2)^{-1}\}$. В силу равенства (4.4.4) $\zeta(z) = \sqrt{|a|} \times e^{0,5i\alpha} 2(m+2)^{-1} z^{0,5m+1} \{1 + \theta(z)\}$, **(4.4.6)**

где $|\theta(z)| \leqslant C|z|^{-1} < 1$. Функция $\zeta(z)$ однолистная в S_k и отображает область S_k на область Ω_k, содержащую сектор (рис. 6).

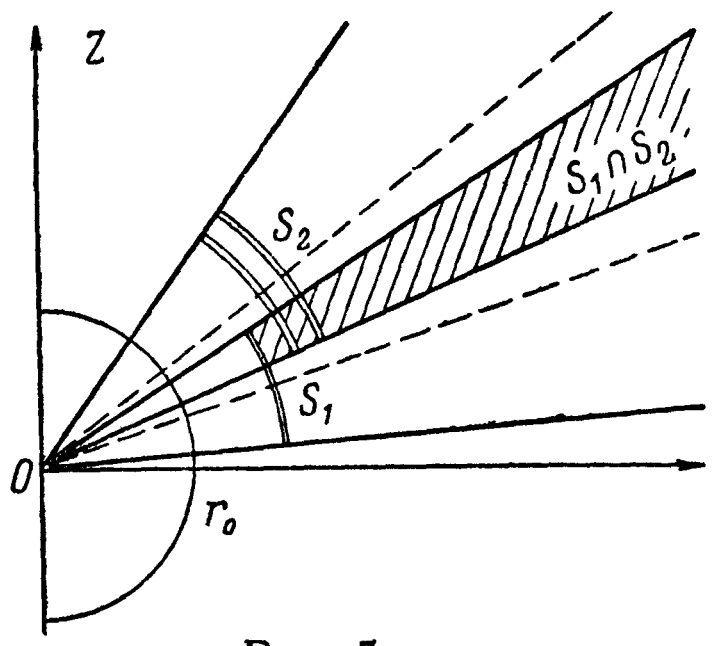

Рис. 5.

$$D_k = \{\zeta : |\arg\zeta - k\pi| < \pi(1-\varepsilon),\ |\zeta| > 4\sqrt{|a|}(m+2)^{-1} r_0^{0,5m+1}\}.$$

Пусть $w(z)$ — произвольное решение дифференциального уравнения (4.4.3). Для каждого $z \in S_k$ положим $v(\zeta) = w(z) q^{1/4}(z)$ **(4.4.7)**, где переменные ζ и z связаны соотношением (4.4.5). Имеем [см. равенство (4.4.3)]

$$v'(\zeta) = \frac{dv}{d\zeta} = 0,25\ q^{-5/4}(z) q'(z) w(z) + q^{-1/4}(z) w'(z); \quad v''(\zeta) = \frac{d^2 v}{d\zeta^2} =$$
$$= -0,3125\, q^{-11/4}(z)(q'(z))^2 w(z) + 0,25\ q^{-7/4}(z) q''(z) w(z) +$$
$$+ w(z) q^{1/4}(z). \qquad (4.4.8)$$

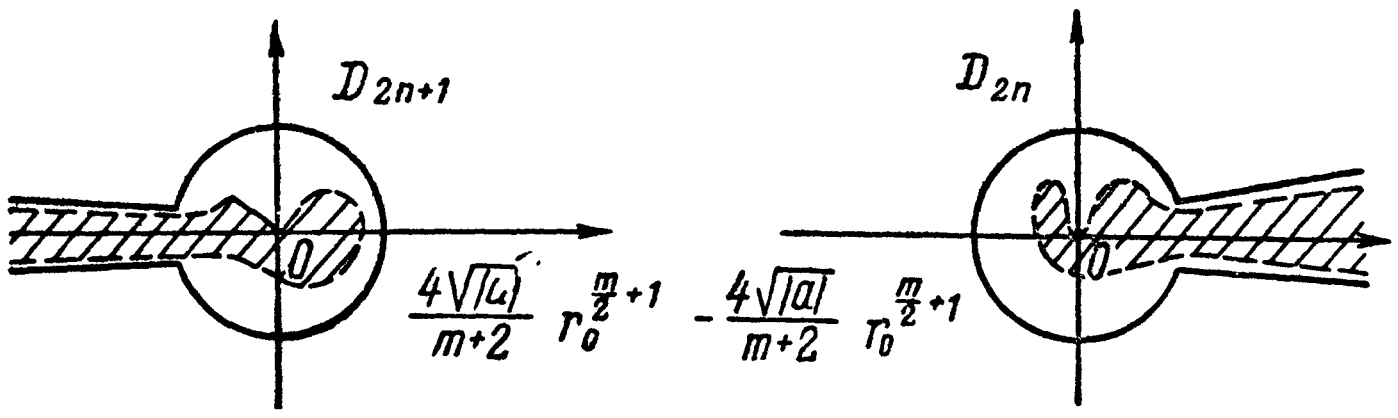

Рис. 6.

Из соотношений (4.4.7), (4.4.8) следует, что $v''(\zeta) = v(\zeta)\{1 - 0,3125(q'(z))^2 q^{-3}(z) + 0,25 q''(z) q^2(z)\} = v(\zeta)\{1 - h(\zeta)\}$, **(4.4.9)** где при $\zeta \to \infty$ и $\zeta \in D_k$

$$h(\zeta) = 0,25(m^2+4)(m+2)^{-2}\zeta^{-2}\{1 + O(\zeta^{-2(m+2)^{-1}})\}.$$

В связи с этим в секторе D_k уравнение (4.4.9) имеет такую фундаментальную систему решений [48, с. 330]: $v_1(\zeta) = e^{i\zeta}\{1 + \alpha_1(\zeta)\}$; $v_2(\zeta) = e^{-i}\{1 + \alpha_2(\zeta)\}$, где $\alpha_1(\zeta)$ и $\alpha_2(\zeta)$ — аналитические функции в D_k, которые равномерно относительно $\arg\zeta$ стремятся к нулю при $|\zeta| \to \infty$. Следовательно, в S_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, m+2)$ дифференциальное уравнение (4.4.3) имеет фундаментальную систему решений [см. равенство (4.4.6)] $w_1(z)$ и $w_2(z)$, для которой при $z \to \infty$ и $z \in S_k$

$$w_1(z) = q^{-1/4}(z)\,[1 + o(1)]\exp\{i2\sqrt{|a|} \times (m+2)^{-1}e^{0,5i\alpha}z^{0,5(m+2)} \times \times (1 + O(z^{-1}))\};\ w_2(z) = q^{-1/4}(z)\,[1 + o(1)[\exp\{-i2\sqrt{|a|}\,(m + + 2)^{-1}e^{0,5i\alpha}z^{0,5(m+2)}(1 + O(z)^{-1}))\}.$$

Если $w(z)$ — произвольное решение дифференциального уравнения (4.4.3), то в каждом секторе S_k найдутся постоянные a_k и b_k такие, что при $z \to \infty$ и $z \in S_k$

$$w(z) = q^{-1/4}(z)\,a_k\,[1 + o(1)]\exp\{(-1)^k 2i\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)} \times \times e^{0,5i\varphi(m+2)}(1 + O(z^{-1}))\} + q^{-1/4}(z)\,b_k\,[1 + o(1)]\exp\{(-1)^{k+1} \times \times 2i\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)}e^{0,5i\varphi(m+2)}(1 + O(z^{-1}))\}, \qquad (4.4.10)$$

где для фиксированного ε, $0 < \tau < 1$, $|\varphi| < \pi(2 - \varepsilon)(m+2)^{-1}$. Поэтому при $z \to \infty$ и $z \in S_k$

$$\ln^+|w(re^{i[\varphi + (2k\pi - \alpha)(m+2)^{-1}]})| \leqslant 2\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,\,5(m+2)} \times \times \{[(-1)^{k+1}\sin 0{,}5\varphi\,(m+2)]^+ + [(-1)^k \sin 0{,}5\varphi\,(m+2)]^+\} \times \times (1 + o(1)) = 2\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)}\sin|\varphi|0{,}5\,(m+2)\,[1 + o(1)].$$

Следовательно $(r \to \infty)$,

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi(2-\varepsilon)(m+2)^{-1}}^{\pi(2-\varepsilon)(m+2)^{-1}} \ln^+|w(re^{i[\varphi + (2k\pi - \alpha)(m+2)^{-1}]})|d\varphi \leqslant 2\pi^{-1}\sqrt{|a|} \times \times (m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)}2\,(m+2)^{-1}\,[1 + \cos 0{,}5\pi\varepsilon]\,[1 + o(1)].$$

Если $z \in S_k \cap S_{k+1}$, то $\pi\varepsilon(m+2)^{-1} \leqslant \varphi \leqslant \pi(2 - \varepsilon)(m+2)^{-1}$.

Пусть

$$\theta_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi\varepsilon(m+2)^{-1}}^{\pi(2-\varepsilon)(m+2)^{-1}} \ln^+|w(re^{i[\varphi + (2k\pi - \alpha)(m+2)^{-1}]})|d\varphi.$$

Имеем $(r \to \infty)$ $\theta_k \leqslant 2\pi^{-1}\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)}2\,(m+2)^{-1}\,[1 + + o(1)]\cos 0{,}5\pi\varepsilon$, значит, $\sigma_k - \theta_k \leqslant 4\pi^{-1}\sqrt{|a|}\,(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)} \times \times (m+2)^{-1}\,[1 + o(1)]$.

Поэтому

$$T(r, w) \leqslant \sum_{k=1}^{m+2} (\sigma_k - \theta_k) \leqslant 4\pi^{-1} \sqrt{|a|}(m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)]. \tag{4.4.11}$$

Пусть $w(z)$ — любое решение дифференциального уравнения (4.4.3). Если в формуле (4.4.10) для каждого k $a_k \neq 0$ и $b_k \neq 0$, то корни $w(z)$, попавшие в сектор S_k, асимптотически при $r \to \infty$ удовлетворяют условию

$$-b_k a_k^{-1} = \exp \left\{(-1)^k 4i \sqrt{|a|} (m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} e^{0,5i\varphi(m+2)} [1 + o(1)]\right\}.$$

Другими словами, корни $w(z)$ асимптотически приближаются к биссектрисе сектора S_k, следовательно, они различны при различных значениях k. Подсчет показывает, что число корней $n_k(r, 0, w)$ функции $w(z)$, попавших в S_k, удовлетворяет такой асимптотике ($r \to \infty$):

$$n_k(r, 0, w) = 2\pi^{-1} \sqrt{|a|} (m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)].$$

Поэтому ($r \to \infty$)

$$n(r, o, w) = \sum_{k=1}^{m+2} n_k(r, 0, w) = 2\pi^{-1} \sqrt{|a|} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)],$$

значит,

$$N(r, o, w) = 4\pi^{-1} \sqrt{|a|}(m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)]. \tag{4.4.12}$$

Из соотношений (4.4.11) и (4.4.12) находим, что для рассматриваемого решения при $r \to \infty$

$$m(r, 0, w) \leqslant T(r, w) - N(r, o, w) + C = o(T(r, w)),$$

т. е. $\Delta(0, w) = 0$, следовательно, $\beta(0, w) = 0$.

Пусть для рассматриваемого решения $w(z)$ найдется значение k_0 такое, что в выражении (4.4.10) $a_{k_0} = 0$ либо $b_{k_0} = 0$ (например, $a_{k_0} = 0$). Положим в неравенстве (4.4.10) $\varphi_0 = (-1)^{k_0+1}\pi \times \times (m+2)^{-1}$. Тогда при $r \to \infty$

$$|w(re^{i\varphi_0})| \leqslant |q^{-1/4}(re^{i\varphi_0})| [(1 + o(1)] |b_{k_0}| \exp \left\{-2\sqrt{|a|} \times \times (m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)]\right\},$$

т. е.

$$L(r, o, w) \geqslant 2\sqrt{|a|}(m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)]. \tag{4.4.13}$$

Из определения σ_k ясно, что для каждого решения дифференциального уравнения (4.4.3) при $r \to \infty$

$$T(r, w) \leqslant \sum_{k=1}^{m+2} \sigma_k \leqslant 8\pi^{-1} \sqrt{|a|}(m+2)^{-1} r^{0,5(m+2)} [1 + o(1)].$$

Оценки (4.4.13), (4.4.14) показывают, что $\beta(0, w) \geqslant 0{,}25\pi$. Кроме того, ноль является асимптотическим значением для такого решения $w(z)$. В случае $b_{k_0} = 0$ аналогично убеждаемся в том, что $\beta(0, w) \geqslant 0{,}25\pi$ и что ноль является асимптотическим значением $w(z)$. Таким образом, теорема 4.4.1 доказана.

Теорему 4.4.1 дополняет

Теорема 4.4.2. *Для каждого трансцендентного решения $w(z)$ дифференциального уравнения* (4.4.3) *либо* $\beta(0, w) = \delta(0, w) = 0$, *либо* $\delta(0, w) \geqslant 0{,}5(m+2)^{-1}$, *где m — степень полинома $q(z)$, причем если* $\delta(0, w) \neq 0$, ноль — *асимптотическое значение для такого решения $w(z)$.*

Действительно, пусть для данного решения $w(z)$ найдется значение k_0 такое, что в равенстве (4.4.10) $a_{k_0} = 0$ либо $b_{k_0} = 0$. Пусть, например, $a_{k_0} = 0$. Положим в выражении (4.4.10) $\varphi = \varphi_0 + \theta$, где $\varphi_0 = (-1)^{k_0+1}\pi(m+2)^{-1}$ и $|\theta| < \pi(1-\varepsilon)(m+2)^{-1}$. Тогда при $r \to \infty$

$$|w(re^{i(\varphi_0+\theta)})| \leqslant |q^{-1/4}(re^{i(\varphi_0+\theta)})|\,|b_{k_0}|[1+o(1)]\exp\{-2\sqrt{|a|}\times$$
$$\times(m+2)^{-1}r^{0,5(m+2)}\cos 0{,}5\theta(m+2)\}[1+o(1)].$$

Поэтому ноль является асимптотическим значением для $w(z)$ и, кроме этого,

$$m(r, 0, w) \geqslant \frac{r^{0,5(m+2)}}{\pi(m+2)}\sqrt{|a|}(1+o(1))\times$$
$$\times\int\limits_{-\pi(1-\varepsilon)(m+2)^{-1}}^{\pi(1-\varepsilon)(m+2)^{-1}}\cos\frac{m+2}{2}\theta d\theta = \pi^{-1}(m+2)^{-2}[1+o(1)]\,4r^{0,5(m+2)}\times$$
$$\times\sqrt{|a|}\sin 0{,}5\pi(1-\varepsilon). \qquad \textbf{(4.4.14)}$$

В силу неравенства (4.4.14) и произвольности ε, $0 < \varepsilon < 1$, $\delta(0, w) \geqslant 0{,}5(m+2)^{-1}$, **(4.4.15)** откуда следует теорема 4.4.2 (см. также доказательство теоремы 4.4.1).

Как показал Э. Хилл [48, с. 619], для уравнения Е. Титчмарша $w'' + (\lambda - z^{2n})w = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ существует решение $w_0(z)$, для которого $\delta(0, w_0) = 2(n+1)^{-1} = 4(m+2)^{-1}$. Это в известной степени характеризует точность оценки (4.4.15).

5. Рост мероморфных решений разностных алгебраических уравнений

Пусть $P(z, w, w_1, \ldots, w_p)$ — полином по совокупности всех переменных, $w(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция. Для каждого фиксированного комплексного числа h конечная разность k-го порядка мероморфной функции $w(z)$ определяется так:

$$\Delta^k w(z) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^\nu w(z+h\nu).$$

Соотношение $P(z, w, \Delta w, \ldots, \Delta^p w) = 0$ **(4.5.1)** называется разностным алгебраическим уравнением порядка p.

Мероморфные решения разностного уравнения 4.5.1 во многих отношениях подобны мероморфным решениям алгебраического дифференциального уравнения (4.3.2). Установим такое утверждение:

Теорема 4.5.1. *Пусть $w(z)$ — трансцендентное мероморфное решение разностного алгебраического уравнения* (4.5.1). *Если $w(z)$ имеет конечный нижний порядок, то*

$$\Omega(w) \setminus \{\infty\} \subseteq \{a : P(z, a, 0, \ldots, 0) \equiv 0. \qquad (4.5.2)$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится

Лемма 4.5.1. *Если $w(z)$ — меромофная при $z \neq \infty$ функция, то для каждого фиксированного k, $1 < k < 2$, и комплексного числа h при $r \geqslant r_0$*

$$m\left(r, \frac{w(z+h)}{w(z)}\right) + m\left(r, \frac{w(z)}{w(z+h)}\right) \leqslant K\sigma \ln \frac{1}{\sigma} \times$$
$$\times (k-1)^{-4} [T(kr, w) + C]^*, \qquad (4.5.3)$$

где $\sigma(r) = \sigma = |h| r^{-1}$.

Доказательство Пусть $z + h = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z = re^{i\varphi}$. Из формулы Пуассона — Иенсена имеем

$$\left|\ln\left|\frac{w(z+h)}{w(z)}\right|\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\ln|w(Re^{i\theta})|| \{|P(R, r_1, (\theta - \varphi_1)) -$$
$$- P(R, r, (\theta - \varphi))|\} d\theta + \sum_{|c_k| < R} \left|\ln\left|\frac{z - \bar{c}_k}{z + h - c_k}\right|\right| +$$
$$+ \sum_{|c_k| < R} \left|\ln\left|\frac{R^2 - \bar{z}c_k}{R^2 - (z+h)\bar{c}_k}\right|\right|, \qquad (4.5.4)$$

где c_k — объединенная последовательность нулей и полюсов $w(z)$

$$P(r, \tau, \psi) = (R^2 - \tau^2)(R^2 + \tau^2 - 2R\tau\cos\psi)^{-1}.$$

Элементарные вычисления дают

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|\frac{re^{i\varphi} - c_k}{re^{i\varphi} + h - c_k}\right| d\varphi \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + \frac{|h|}{r|\sin 0{,}5\omega|}\right) d\omega =$$
$$= 2\int_0^{\pi} \ln\left(1 + \frac{\sigma}{\sin 0{,}5\omega}\right) d\omega = 4\int_0^{0{,}5\pi} \ln\left(1 + \frac{\sigma}{\sin s}\right) ds \leqslant$$
$$\leqslant 4\pi\sigma \ln^+ \sigma^{-1}; \qquad (4.5.5)$$

---

* Эту оценку можно рассматривать как аналог оценки для логарифмической производной мероморфной функции. Неравенство, аналогичное оценке (4.5.3), получено в работе *Edrei A.*, *Fuchs H. J.* Asymptotic behaviour of meromorphic functions with extremal spread, I. — Ann. Acad. Scien. Fennf. Ser. A I, Math., 1976, v. 2, p. 67-111.

$$|(R^2 - zc_k)(R^2 - (z+h)\bar{c}_k)^{-1}| \leqslant 1 + |h||c_k|(R^2 - |z+h||c_k|)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + |h|(R - |z+h|)^{-1}. \qquad (4.5.6)$$

Пусть для фиксированного k, $1 < k < 2$, $r_0 \leqslant |z| \leqslant Rk^{-1}$. Тогда

$$R - |z+h| \geqslant R[1 - (1 + |h| r^{-1}) k^{-1}] = Rk^{-1}(k - 1 - \sigma) \geqslant$$
$$\geqslant 0{,}5Rk^{-1}(k-1),$$

поэтому

$$1 + |h|(R - |z+h|)^{-1} \leqslant 1 + 2kr\sigma R^{-1}(k-1)^{-1}. \qquad (4.5.7)$$

Из оценок (4.5.6) и (4.5.7) следует, что для $r_0 \leqslant |z| \leqslant Rk^{-1}$ $(1 < k < 2)$

$$\ln|(R^2 - z\bar{c}_k)(R^2 - (z+h)\bar{c}_k)^{-1}| \leqslant \sigma 8rR^{-1}(k-1)^{-1}. \qquad (4.5.8)$$

Далее, при тех же предположениях относительно $z = re^{i\varphi}$ $(z + h = r_1 e^{i\varphi_1})$

$$|P(R, r_1, \theta - \varphi_1) - P(R, r, \theta - \varphi)| \leqslant 32R^{-4}(k-1)^{-4} \times$$
$$\times \{R^2(r^2 - r_1^2) + 2R^3[r_1\cos(\theta - \varphi_1) - r\cos(\theta - \varphi)]\} \leqslant$$
$$\leqslant KR^{-2}(k-1)^{-4}\{r^2\sigma + Rr\sigma\} \leqslant Kr\sigma R^{-1}(k-1)^{-4}. \qquad (4.5.9)$$

Теперь уже нетрудно завершить доказательство соотношения (4.5.3). Интегрируя неравенство (4.5.4) по φ от $-\pi$ до π и учитывая оценки (4.5.5), (4.5.8), (4.5.9), получаем

$$m(r, w(z+h)w^{-1}(z)) + m(r, w(z)w^{-1}(z+h)) \leqslant$$
$$\leqslant Kr\sigma R^{-1}(k-1)^{-4}[T(R, w) + C] + [4\pi\sigma \ln^+\sigma^{-1} +$$
$$+ 8r\sigma R^{-1}(k-1)^{-1}][(n(R, 0, w) + n(R, \infty, w)] \leqslant$$
$$\leqslant Kr\sigma \ln^+\sigma^{-1}R^{-1}(k-1)^{-2}[T(kR, w) + C] + KrR^{-1}\sigma(k-1)^{-4} \times$$
$$\times [T(R, w) + C]. \qquad (4.5.10)$$

Оценка (4.5.3) непосредственно следует из неравенства (4.5.10).

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 4.5.1. Рассмотрим сначала случай $a = 0$. Пусть $a_0(z) = P(z, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$, $w(z)$ — трансцендентное мероморфное решение уравнения (4.5.1). В силу соотношений (4.3.5) и (4.3.8)

$$\ln^+(|w(z)|^{-1}) \leqslant \ln^+(|a_0(z)|^{-1}) + \sum_{i=1}^{n} \ln^+\sigma_i(z) +$$
$$+ n\sum_{k=1}^{p} \ln^+\left|\frac{\Delta^k w(z)}{w(z)}\right|. \qquad (4.5.11)$$

Неравенства (4.5.11) и (4.5.3) приводят нас к такой оценке

$$m(r, 0, w) \leqslant C \ln(2+r) + C \sum_{k=1}^{p} m\left(r, \frac{\Delta^k w}{w}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\sigma \ln^{+}\sigma^{-1} (k-1)^{-4} [T(kr, w) + C] + C \ln(r+2). \qquad (4.5.12)$$

Так как $\lim\limits_{r\to\infty} \sigma(r) = 0$, то оценка (4.5.12) влечет равенство $\beta(0, w) = 0$. Доказательство последнего равенства фактически повторяет доказательство теоремы 4.1.2. Если $a \neq 0$ и $P(z, a, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$, то замена $w = \eta + a$ сводит этот случай к предыдущему. Тем самым доказано включение (4.5.2).

Пример. Г-функция Л. Эйлера удовлетворяет такому разностному уравнению $\Delta w = (z-1)w$.
Следовательно,

$$\Omega(\Gamma) \setminus \{\infty\} \subseteq \{a : (z-1)a \equiv 0\} = \{0\}.$$

Из известных асимптотик для $\Gamma(z)$ следует, что $0 \in \Omega(\Gamma)$. Следует отметить, что по теореме Гельдера Г-функция не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами.

Нерешенные проблемы, связанные с материалом главы IV

1. Будет ли справедливым утверждение теоремы 4.3.1, если в оценке (4.3.4) заменить (см. проблему 2 из гл. III) $0{,}5\tau$ на τ?

2. Пусть

$$w^{(n)} + a_{n-1}(z) w^{(n-1)} + \ldots + a_0(z) w = 0$$

($a_0(z) \not\equiv 0$) — линейное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами порядка $n > 2$, $w(z)$ — его трансцендентное решение. Является ли ноль асимптотическим значением для такого решения, если справедливо $\beta(0, w) > 0$?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рост целых функций двух комплексных переменных, медленно растущих по одной из переменных

Пусть $f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(z) w^k$ — целая функция двух комплексных переменных такая, что для каждого фиксированного w_0 $f(z, w_0) \not\equiv \text{const}$ и для каждого фиксированного z_0 $f(z_0, w) \not\equiv \text{const}$. Введем величины, характеризующие рост и распределение значений * $f(z, w)$. Примем

$$M(z, R, f) = \max_{|w|=R} |f(z, w)|; \quad T(r, R, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln M(re^{i\theta}, R, f)\, d\theta.$$

Для каждого фиксированного w положим

$$m(r, w, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{M(re^{i\theta}, 1+|w|, f)}{|f(re^{i\theta}, w)|} d\theta;$$

$$L(r, w, f) = \max_{|z|=r} \ln \frac{M(z, 1+|w|, f)}{|f(z, w)|}.$$

Определение. *Будем говорить, что $f(z, w) \in M$, если для каждого фиксированного $x \geqslant 1$*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, T^{-1}(r, 1, f)\, T(1, r^x, f) = C(x, f) < \infty.$$

Если функция $f(z, w) \in M$, характеристику ее роста определяем так: $T(r, f) = T(r, 1, f)$. С помощью этой характеристики вводим порядок ρ и нижний порядок λ функции $f(z, w)$.

Покажем, что согласно теории распределения значений и теории роста мероморфные функции входят как весьма частный случай в класс M. Пусть $F(z) = g_1(z) g_2^{-1}(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция **. Рассмотрим следующую целую функцию переменных z и w:
$g_1(z) - wg_2(z) = f(z, w)$. Имеем $M(z, R, f) = \max_{|w|=R} |g_1(z) - wg_2(z)| = |g_1(z)| + R|g_2(z)|$, поэтому при $r \to \infty$

$$m(r, w, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{M(re^{i\theta}, 1+|w|, f)}{|f(re^{i\theta}, w)|} d\theta =$$

* Постановку задачи см. в работе [30].
** Считаем, что $g_1(z)$ и $g_2(z)$ не имеют общих корней.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{|g_1(re^{i\theta})| + (1+|w|)|g_2(re^{i\theta})|}{|g_1(re^{i\theta}) - wg_2(re^{i\theta})|} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{1+|w|+F|(re^{i\theta})|}{|F(re^{i\theta}) - w|} d\theta = m(r, w, F) + O(1).$$

Аналогично этому $L(r, w, f) = L(r, w, F) + O(1)$. Кроме того,

$$T(r, R, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \{|g_1(re^{i\theta})| + R|g_2(re^{i\theta})|\} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |g_2(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln (R + |F(re^{i\theta})|) d\theta =$$

$$= N(r, \infty, F) + C(F) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln (R + |F(re^{i\theta})|) d\theta.$$

Поэтому при $R \geqslant 1 - C + T(r, F) \leqslant T(r, R, f) \leqslant T(r, F) + \ln R + C$. Отсюда следует, что $f(z, w)$ принадлежит классу M и что при $r \to \infty$ $T(r, 1, f) = T(r, f) = T(r, F) + O(1)$.

Представляются естественными такие определения величин дефектов и величин отклонений для функций класса M:

Дефектом $f(z, w) \in M$ в смысле Р. Неванлинны и в смысле Ж. Валирона относительно фиксированной точки w назовем соответственно величины

$$\delta(w, f) = \varliminf_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\, m(r, w, f) \text{ и } \Delta(w, f) = \varlimsup_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\, m(r, w, f),$$

а отклонением $f(z, w) \in M$ относительно фиксированной точки w — величину

$$\beta(w, f) = \varliminf_{r\to\infty} T^{-1}(r, f)\, L(r, w, f).$$

Множества дефектных значений и множество отклонений функции $f(z, w) \in M$ определяем так:

$$D(f) = \{w : \delta(w, f) > 0\};\quad V(f) = \{w : \Delta(w, f) > 0\};\quad \Omega(f) = \{w : \beta(w, f > 0\}.$$

1. Аналог первой основной теоремы для функций класса M

Пусть $f(z, w)$ — произвольная целая функция двух комплексных переменных z и w. Для каждого фиксированного z положим

$$N(z, t, f) = \int_0^t [n(z, s, f) - n(z, 0, f)] \frac{ds}{s} + n(z, 0, f) \ln t,$$

где $n(z, s, f)$ — число корней (с учетом кратности) функции $f(z, w)$, попавших в круг $K(0, t) = \{w : |w| \leqslant t\}$; $n(z, 0, f)$ — кратность корня $f(z, w)$ при $w = 0$. Аналогично этому для каждого фиксированного w примем

$$N(r, w, f) = \int_0^r [n(s, w, f) - n(0, w, f)] \frac{ds}{s} + n(0, w, f) \ln r.$$

Пусть для каждого фиксированного z

$$\alpha(z, 0, f) = \begin{cases} -\ln|f(z, 0)|, & \text{если } f(z, 0) \neq 0; \\ -\lim\limits_{w \to 0} \ln \left| \dfrac{f(z, w)}{w^{\nu}} \right|, & \text{если } f(z, w) \text{ при } w = 0 \\ & \text{имеет корень кратности } \nu. \end{cases}$$

Для каждого фиксированного w

$$\alpha(0, w, f) = \begin{cases} -\ln|f(0, w)|, & \text{если } f(0, w) \neq 0; \\ -\lim\limits_{z \to 0} \ln \left| \dfrac{f(z, w)}{z^{\mu}} \right|, & \text{если } f(z, w) \text{ при } z = 0 \\ & \text{имеет корень кратности } \mu. \end{cases} \tag{1.1}$$

Используя эти обозначения и учитывая установленные в гл. I соотношения (1.2.3) и (1.2.4), получаем *

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(re^{i\theta}, 0, f)\, d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta}, 0)|\, d\theta = -N(r, 0, f);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(0, te^{i\varphi}, f)\, df = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(0, te^{i\varphi})| d\varphi = -N(0, t, f).$$

Лемма 1.1. *Для произвольного фиксированного w при $r \geqslant 0$ имеет место соотношение*

$$m(r, w, f) + N(r, w, f) = T(r, 1 + |w|, f) + \alpha(0, w, f), \tag{1.2}$$

где $\alpha(0, w, f)$ определено равенством (1.1).

Действительно, из определения $m(r, w, f)$ имеем [см. формулу (1.2.3)]

$$m(r, w, f) = T(r, 1 + |w|, f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\theta}, w)|\, d\theta =$$

$$= T(r, 1 + |w|, f) + \alpha(0, w, f) - N(r, w, f),$$

что равносильно выражению (1.2).

Теорема 1.1. *Если $f(z, w) \in M$, то для любых фиксированных w, $0 \leqslant |w| < \infty$, и ε, $0 < \varepsilon < 1$, при $r \geqslant r_0(w, \varepsilon, f)$ $T(r, f) + \alpha(0, w, f) \leqslant m(r, w, f) + N(r, w, f) \leqslant T(re^{\varepsilon}, f)\{1 + C(w, \varepsilon, f) \ln^{-1} r\}$.* (1.3)

Доказательство. Прежде всего заметим, что $T(r, R, f)$ логарифмически выпуклая функция [см., например, 33, с. 173], поэтому для любых

$$(t_1, t_2) \in R_+^2;\ (s_1, s_2) \in R_+^2;\ \lambda \in (0, 1);\ \mu = 1 - \lambda\ T(t_1^{\lambda} s_1^{\mu}, t_2^{\lambda} s_2^{\mu}, f) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda T(t_1, t_2, f) + \mu T(s_1, s_2, f). \tag{1.4}$$

---

* Мы считаем, что $f(0,0) = 1$. Это не меняет общности утверждений.

Положим в неравенстве (1.4) $\lambda = 0{,}5\varepsilon \ln^{-1} r$; $t_1 = 1$; $s_2 = 1$; $s_1^{\mu} = r$; $t_2^{\lambda} = R$.

Вычисления дают $s_1 = r^{\mu-1} = r^{\ln r[\ln r - 0{,}5\varepsilon]^{-1}} = r^{1+\varepsilon[2\ln r - \varepsilon]^{-1}} \leqslant re^{2\varepsilon}$; (1.5)

$$t_2 = R^{\lambda-1} = R^{2\varepsilon^{-1}\ln r} = r^{2\varepsilon^{-1}\ln R}. \tag{1.6}$$

Из выражений (1.4), (1.5), (1.6) имеем ($r \geqslant r_0(\varepsilon, R, f)$) $T(r, R, f) \leqslant$

$$\leqslant 0{,}5\varepsilon \ln^{-1} r T(1, r^{2\varepsilon^{-1}\ln R}, f) + T(re^{2\varepsilon}, 1, f) =$$

$$= T(re^{2\varepsilon}, f)\{1 + 0{,}5\varepsilon C(R, \varepsilon, f)\}\ln^{-1} r. \tag{1.7}$$

Левая часть оценки (1.3) непосредственно следует из равенства (1.2), а правая часть — из соотношения (1.7) с $R = 1 + |w|$. Формулу (1.3) можно рассматривать как некоторый аналог первой основной теоремы Р. Неванлинны для функций из класса M.

Следствие. *Если $f(z, w) \in M$ и имеет конечный нижний порядок λ, то для каждого w $0 \leqslant \delta(w, f) \leqslant 1$* (1.8).

Действительно, согласно лемме 1.3.1 существует последовательность $r_k \nearrow \infty$ такая, что $T(r_k e^{2\varepsilon}, f) \leqslant e^{2\varepsilon(\lambda+1)} T(r_k, f)$, поэтому оценка (1.3) дает

$$(r = r_k)\, m(r, w, f) \leqslant {}^{2\varepsilon(\lambda+1)} T(r, f)\{1 + C(w, \varepsilon, f)\ln^{-1} r\},$$

т. е. $\delta(w, f) \leqslant e^{2\varepsilon(\lambda+1)}$.

В силу произвольности ε, $0 < \varepsilon < 1$, отсюда следует оценка (1.8).

2. Примеры функций класса M, характеризующие мощность множеств $D(f)$ и $\Omega(f)$

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$E(z, w) = e^z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w}{e^n}\right) + z.$$

Ясно, что для каждого z_0 $E(z_0, w) \not\equiv \text{const}$ и для каждого w_0 $E(z, w_0) \not\equiv \text{const}$. Далее,

$$\ln M(e^{i\theta}, R, E) \leqslant 1 + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + Re^{-n}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} \ln(1 + Re^{-t})\, dt + K = K + R\int_0^{\infty} \frac{t\,dt}{R + e^t} \leqslant 2\ln^2 R + K.$$

Поэтому $T(1, R, E) \leqslant 2\ln^2 R + K$ (2.1). С другой стороны,

$$M(z, 1, E) \geqslant \left|\prod_{n=1}^{\infty}(1 + e^{-n})e^z + z\right| = \left|Ke^z + z\right| = \left|\alpha(z)\right|,$$

откуда следует, что

$$T(r, 1, E) \geqslant N(r, 0, \alpha) \geqslant r\pi^{-1} - C\ln^2(2 + r). \tag{2.2}$$

Кроме того, $M(z, 1, E) \leqslant Ke^{r\cos\theta} + r$, значит,

$$T(r, 1, E) \leqslant r\pi^{-1} + C\ln(2 + r). \tag{2.3}$$

Принадлежность функции $E(z, w)$ классу M сразу следует из оценок (2.1) и (2.2). Заметим, что для каждого $w = w_k = e^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$m(r, w_k, E) = T(r, 1 + e^k, E) - \ln r \geqslant T(r, 1, E) - \ln r;$$

$$L(r, w_k, E) \geqslant \ln\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + (1 + |w_k|)\, e^{-n}\right] e^r + r\right\} \geqslant r - C.$$

Из этих оценок и из неравенства (2.3) следует, что для каждого $k = 1, 2, 3, \ldots$ $\delta(w_k, E) = 1$; $\beta(w_k, E) \geqslant \pi$.

Пример 2. Построим целую функцию первого порядка класса M, для которой множество $D(f)$, а значит и множество $\Omega(f)$, имеет мощность континуума. Рассмотрим последовательности $\{\theta(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множество C, имеющее мощность континуума, определены выше [см. соотношения (3.1.30) (3.1.32)]. Положим ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$P_n(w) = \prod_{k=0}^{n-1}(w - b_k) = \sum_{\nu=0}^{n} C_{\nu}^{(n)} w^{n-\nu} \tag{2.4}$$

и рассмотрим целую функцию

$$G(z, w) = 1 + z + w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{P_{\sigma(k)}(w)}{C_{\sigma(k)}^{(\sigma(k))}}, \tag{2.5}$$

где $\sigma(k) = [\ln k] + 1$, а C_{ν}^{n} имеет то же значение, что и в равенстве (2.4)*. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ обозначим через k_n наименьшее целое число, такое что $\sigma(k_n) = n$. (2.6) Согласно равенству (2.5)

$$G(z, w) = e^z + z + w + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\left\{\frac{P_{\sigma(k)}(w)}{C_{\sigma(k)}^{(\sigma(k))}} - 1\right\} =$$

$$= e^z + z + w + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=k_n}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{C_{\sigma(k)-n}^{(\sigma(k))}}{C_{\sigma(k)}^{(\sigma(k))}}\right\} w^n.$$

Отсюда следует, что $M(z, 1, G) \geqslant |G(z, 0)| = |e^z + z|$, поэтому [см. формулу (2.2)]

$$T(r, 1, G) \geqslant r\pi^{-1} - C \ln^2(r + 2). \tag{2.7}$$

В силу равенств (2.4) и (2.5)

$$M(e^{i\theta}, R, G) \leqslant 2 + R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(2 + R)^{\sigma(k)} \leqslant 2 + R +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(2 + R)^{1+\ln k} = 2 + R + \sum_{k=1}^{[\ln(2+R)]} \frac{1}{k!}(2+R)^{1+\ln k} +$$

$$+ \sum_{k=[\ln(2+R)]+1}^{\infty} \frac{1}{k!}(2 + R)^{k[\ln\ln(2+R)]^{-1}+1} \leqslant$$

---

* Ясно, что для каждого $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, $|C_{\nu}^{(n)}| > 1$.

$$\leqslant (2+R)\left\{1+e\,(2+R)^{\ln\ln(2+R)}+\exp\,(2+R)^{\ln^{-1}\ln(2+R)}\right\}.$$

Таким образом,

$$\ln M\,(e^{i\theta}, R, G) \leqslant 3\ln\,(2+R)\,\ln\,\ln\,(2+R)+(R+2)^{[\ln\ln(2+R)]^{-1}}, \text{ т. е.}$$

$$T\,(1, R, G) \leqslant K\,(2+R)^{\{\ln\ln(2+R)\}^{-1}}. \tag{2.8}$$

Из неравенств (2,7), (2.8) находим для каждого фиксированного $x \geqslant 1$ и $r \geqslant 2$

$$\frac{T\,(1, r^x, G)}{T\,(r, 1, G)} \leqslant Kr^{-1}\,(2r)^{x\ln^{-1}\ln 2r^x} =$$

$$= K2^{x\ln^{-1}\ln 2r^x}\,r^{(x\ln^{-1}\ln 2r^x-1)},$$

значит, $G \in M$. Сверху характеристика $T\,(r, G) = T\,(r, 1, G)$ оценивается так. Из равенства (2.5) получаем

$$M\,(z, 1, G) \leqslant 2+r+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\,3^{\sigma(k)} \leqslant$$

$$\leqslant 2+r+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\,3^{\ln k} < 2+r+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k k^2}{k!} \leqslant$$

$$\leqslant 2+r+3\sum_{k=3}^{\infty}\frac{r^k}{(k-2)!}\,\frac{k}{k-1}+7r^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2+7r^2+5r^2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{r^{k-2}}{(k-2)!} < 7r^2\,(1+e^r),$$

поэтому $T\,(r, G) \leqslant r+\ln r$. (2.9)

Из выражений (2.7), (2.9) следует, что $G\,(z, w)$ имеет первый порядок. Рассмотрим теперь произвольное фиксированное число из континуального множества C [см. соотношение (3.1.30)]. Представление (3.1.30) для числа a порождает последовательность целых неотрицательных чисел

$$n_m\,(a) = \sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,(a)\,2^{k-1}. \tag{2.10}$$

Выберем произвольное фиксированное $r \geqslant r_0$ и будем производить соответствующие оценки в зависимости от возможных случаев расположения членов последовательности $\{n_m\,(a)\}_{m=1}^{\infty}$. Рассуждая аналогично тому, как это сделано на с. 85, 86, получаем для каждого фиксированного $a \in C$ при любом $r \geqslant r_0$ (a) $m\,(r, a, G) \geqslant T(rG) - C\ln^2 r$.

Отсюда следует, что для каждого $a \in C$ $\beta\,(a, G) \geqslant \delta\,(a, G) = 1$, т. е. множества $D\,(G)$ и $\Omega\,(G)$ имеют мощность континуума.

3. Исключительность множества $D(f)$ для функций класса M

Покажем, что для каждой функции $f\,(z, w) \in M$ конечного нижнего порядка множество $D\,(f)$ имеет нулевую логарифмическую емкость.

Лемма 2.1 [см., например, 11, с. 263]. *Пусть $g\,(w)$, $g\,(0) = 1$ — целая функция с нулями $\{a_k\}$. Для любого $R > 0$ справедливо соотношение*

$$g\,(w) = \alpha_R\,(w)\,\omega_R\,(w), \quad (3.1) \quad \text{где } \alpha_R\,(w) = \prod_{|a_k|\leqslant R}\left(1-\frac{w}{a_k}\right) \text{ и при}$$

$$|w| = r \leqslant 0{,}5R\ (\ln\omega_R\,(0) = 0)\ \ |\ln\omega_R\,(w)| \leqslant 20rR^{-1}\,T\,(2R, g).$$

Для каждого фиксированного z такого, что $f(z, 0) \neq 0$, рассмотрим целую функцию относительно переменной w

$$g(w) = g_z(w) = \frac{f(z, w)}{f(z, 0)} \quad (g(0) = 1).$$

Тогда $M(1 + |w|, g) = M(z, 1 + |w|, f) \, |f(z, 0)|^{-1}$, поэтому

$$T(R, g) \leqslant \ln M(R, g) = \ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)|. \tag{3.2}$$

В силу равенств (3.1) и (3.2) для каждого фиксированного значения z

$$\ln M(z, 1 + |w|, f) \, |f(z, w)|^{-1} = \ln M(1 + |w|, g) - \ln |g(w)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|a_k| \leqslant R} \ln\left(1 + \frac{1 + |w|}{|a_k|}\right) + \sum_{|a_k| \leqslant R} \ln \frac{|a_k|}{|a_k - w|} +$$
$$+ 40(1 + |w|) R^{-1} \{\ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)|\}, \tag{3.3}$$

где $1 + |w| \leqslant 0{,}5R$; $a_k = a_k(z)$ — корни $g_z(w)$.

Пусть K — произвольный компакт из w — плоскости, имеющей положительную логарифмическую емкость и содержащийся в круге $K(0, \sqrt{R}) = \{w : |w| < \sqrt{R}\}$, а $\mu_0(w)$ — равновесная мера Робена компакта K. Из оценки (3.3) находим

$$\int_K \ln \frac{M(z, 1 + |w|, f)}{|f(z, w)|} d\mu_0(w) \leqslant \sum_{|a_k| < R} \ln(|a_k| + 1 + R) + n(R, 0, g) +$$
$$+ 40(1 + |w|) R^{-1} \{\ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)|\} \leqslant 2\ln(1 + 2R) \, n(R, 0, g) +$$
$$+ 80R^{-0{,}5} \{\ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)|\} \leqslant 2(R - 1)^{-1} \ln^{-1} R \ln(1 +$$
$$+ 2R) \, N(R^R, 0, g) + 80R^{-0{,}5} \{\ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)| \leqslant$$
$$\leqslant KR^{-0{,}5} [\ln M(z, R^R, f) - \ln |f(z, 0)| + \ln M(z, R, f) - \ln |f(z, 0)|\}.$$

Поэтому * [см. формулу (1.7)]

$$\int_K m(r, w, f) \, d\mu_0(w) \leqslant KR^{-0{,}5} T(r, R^R, f) \leqslant KR^{-0{,}5} \{T(re^{2\varepsilon}, 1, f) +$$
$$+ 0{,}5\varepsilon \ln^{-1} r \, T(1, r^{2\varepsilon - 1 R \ln R}, f)\} \leqslant KR^{-0{,}5} \{1 + C(R, \varepsilon) \ln^{-1} r\} \, T(re^{2\varepsilon}, 1, f). \tag{3.4}$$

Так как $T(r, 1, f) = T(r, f)$ имеет конечный нижний порядок λ, существует последовательность $r_k \nearrow \infty$ такая, что при

$$r = r_k \quad T(re^{2\varepsilon}, f) \leqslant e^{2\varepsilon(\lambda + 1)} T(r, f). \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.4) и (3.5) следует, что

$$\int_K \delta(w, f) \, d\mu_0(w) \leqslant KR^{-0{,}5} e^{2\varepsilon(\lambda + 1)}, \tag{3.6}$$

а так как R можно выбрать как угодно большим, то для каждого компакта K положительной емкости

$$\int_K \delta(w, f) \, d\mu_0(w) = 0,$$

поэтому множество $D(f)$ имеет нулевую емкость.

Для функций $f(z, w) \in M$ конечного нижнего порядка λ множество $\Omega(f)$ также имеет нулевую логарифмическую емкость [о методе доказательства см. работу 30]. В настоящее время остается открытым вопрос о структуре множеств $D(f)$ и $\Omega(f)$ для функций $f(z, w) \in M$, имеющих бесконечный нижний порядок.

---

* Об этом приеме, упрощающем первоначальное доказательство исключительности множества $D(f)$, автору сообщил С. Ю. Фаворов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойко С. С., Петренко В. Н.* Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных уравнений с целыми коэффициентами.— Докл. АН УССР. Серия А, 1977, № 2, с. 99—102. 2. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М., Гостехиздат, 1957. 235 с. 3. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960. 319 с. 4. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., Наука, 1973. 350 с. 5. *Говоров Н. В.* О проблеме Пейли.— Функцион. анализ и его приложения, 1969, т. 3, вып. 2, с. 38—43. 6. *Гольдберг А. А.* О дефектах мероморфных функций.— Докл. АН СССР, 1954, т. 98, с. 893—895. 7. *Гольдберг А. А.* Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка.— Укр. мат. журн., 1956, т. 8, № 3, с. 254—261. 8. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений.— В кн.: *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз., 1960, с. 263—300. 9. *Гольдберг А. А.* К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1978, вып. 29, с. 31—35. 10. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Некоторые теоремы о росте мероморфных функций.— Зап. мат. отд. Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Серия 4, 1961, т. 27, с. 3—37. 11. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., Наука, 1970. 591 с. 12. *Гришин А. Ф.* О сравнении дефектов $\delta_p(a)$.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1976, вып. 25, с. 56—66. 13. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М., Мир, 1971. 125 с. 14. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с. 15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973. 736 с. 16. *Ламзина Т. Б.* О величинах отклонений мероморфных функций.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Харьков, 1971, вып. 14, с. 169—185. 17. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М., Наука, 1966. 515 с. 18. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. В 2-х т. М., Наука, 1967—1968. 19. *Мохонько А. З., Мохонько В. Д.* Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям.— Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 6, с. 1305—1322. 20. *Мохонько В. Д.* Обобщения и приложения леммы о логарифмической производной. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1977. 21. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.— Л., ОГИЗ, 1941. 388 с. 22. *Островский И. В.* О дефектах мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы.— Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 1, с. 32—35. 23. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка.— Изв. АН СССР. Серия мат., 1969, № 2, с. 414—454. 24. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций по лучу.— Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 2, с. 281—282. 25. *Петренко В. П.* О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка и величинах их дефектов.— Сиб. мат. журн., 1967, т. 8, № 5, с. 1156—1189. 26. *Петренко В. П.*

Величины отклонений мероморфных функций нижнего порядка меньше единицы.— Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 1, с. 40—42. 27. *Петренко В. П.* Некоторые оценки для величин дефектов мероморфных функций.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 6, с. 1319—1336. 28. *Петренко В. П.* О структуре исключительных множеств целых кривых.— Изв. АН СССР. Серия мат., 1977, т. 41, № 2, с. 352—368. 29. *Петренко В. П.* Некоторые оценки логарифмической производной мероморфной функции.— Изв. АН АрмССР. Математика, 1964, т. 17, № 1, с. 23—37. 30. *Петренко В. П.* Рост целых функций двух комплексных переменных, медленно растущих по одной из переменных.— Изв. АН СССР. Серия мат., 1976, т. 40, № 1, с. 65—95. 31. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, ч. 1. М., Гостехиздат, 1956. 396 с. 32. *Проскурня И. П.* О росте мероморфных функций бесконечного нижнего порядка.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 3, с. 558—561. 33. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М., Наука, 1971. 430. с. 34. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс, Минтис, 1972. 473 с. 35. *Фаворов С. Ю.* Об одном свойстве целых кривых.— Функцион. анализ и его приложения. 1975, т. 9, вып. 1, с. 87—88. 36. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, М., Физматгиз, 1960. 656 с. 37. *Хейман У.* Мероморфные функции. М., Мир, 1966. 287 с. 38. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., Наука, 1969. 576 с. 39. *Шеремета М. Н.* Асимптотическое поведение функций типа Миттаг-Леффлера и их приложение. — Изв. АН АрмССР. Математика, 1969, т. 4, № 2, с. 144—148. 40. *Ahlfors L.* Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen.— Soc. sci. Fenn. Comment. Phys. Math., 1931, Bd 5, Nr 16, S. 1—19. 41. *Cartan H.* Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1929, v. 189, p. 521-523. 42. *Choquet G.* Capacitabilité en potentiel logarithmique.— Bull. classe scient. Bruxelles, 1958, v. 44, p. 321-326. 43. *Edrei A.* Sums of deficiencies of meromorphic functions.— J. Analyse Math., 1965, v. 14, p. 79-107. 44. *Frei M.* Über die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten.— Comment. math. Helv., 1961, Bd 35, S. 201—222. 45. *Frostman O.* Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions.— Meddel. Lunds. Univ. Math. Sem., 1935, v. 3, p. 1-115. 46. *Fuchs W. H. J.* Topics in Nevanlinna theory.— Proceedings of the Naval Research Laboratory conference on classical function theory. Washington, 1970, p. 1-32. 47. *Fuchs W. H. J.* A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order.— Ann. of math., 1958, v. 68, No 2, p. 203-209. 48. *Hille E.* Lectures on ordinary differential equations. London, Addison-Wesley, 1969. 723 p. 49. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. N. Y., Wiley-Interscience, 1976. 657 p. 50. *Nevanlinna R.* Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, 1929. 343 p. 51. *Paley R. E. C.* A note on integral function.— Proc. Cambridge Philos. Soc. 1932, v. 28, p. 262-265. 52. *Valiron G.* Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.— Acta math., 1926, v. 47, p. 117-142. 53. *Valiron G.* Sur le minimum du module des fonctions entieres d'ordre inférieur a un.— Mathematica, 1935, v. 11, p. 254-269. 54. *Valiron G.* Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul.— C R. Acad. Sci., 1950, v. 230, p. 40-42. 55. *Wahlund A.* Über einen Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage der ganzen Funktion und seiner unteren Grenze nach dem Jensen'schen Theoreme.— Arkiv för Math., 1929, Bd 21, A, Nr 23, S. 1—34. 56. *Weyl H.* Meromorphic functions and analytic curves. Princeton, 1943. 531 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВИКТОР ПАВЛОВИЧ ПЕТРЕНКО

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Редактор *В. Н. Забелин*
Переплет художника *А. С. Романовой*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *Л. А. Федоренко, А. В. Евлахова*

Информ. бланк № 3949

Сдано в набор 25.07.78. Подп. в печать 03. 11. 78. БЦ 09310. Формат 60×84 1/16. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печать. 7,9 усл. печ. л. 10 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 645. Зак 8-296. Цена 1 р. 60 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа». 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики «Коммунист» республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11 в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков, Университетская, 16. Зак. 2102.