Д. Я. ПЕТРИНА
С. С. ИВАНОВ
А. Л. РЕБЕНКО

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Д. Я. ПЕТРИНА, С. С. ИВАНОВ, А. Л. РЕБЕНКО

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.31
П 30
УДК 530.145

Уравнения для коэффициентных функций матриц рассеяния. Д. Я. Петрина, С. С. Иванов, А. Л. Ребенко — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы.

В монографии выведены и исследованы уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. Разработан метод решения уравнений в евклидовой области с импульсными и пространственными обрезаниями. Для моделей бозонного поля в двумерном пространстве и для неполиномиальной нелокальной модели получены решения без импульсных обрезаний при бесконечном объеме. Показано, что модели квантовой теории поля в евклидовой области можно рассматривать как гиббсовские системы классической статистической физики.

Рис. 52, библ. 208 назв.

П $\frac{20402\text{-}021}{053(02)\text{-}79}$ 111-78 1704020000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография посвящена исследованию матрицы рассеяния моделей квантовой теории поля. Направление в современной теоретической физике, которое ставит себе целью исследовать модели квантовой теории поля методами современной математики, получило название конструктивной квантовой теории. Поэтому можно сказать, что предмет данной монографии — конструктивная теория евклидовой матрицы рассеяния, а сама монография является книгой по современной математической физике.

Авторы пытались изложить материал так, чтобы он был доступен для читателей, владеющих аппаратом квантовой теории поля и знакомых с методами функционального анализа, и чтобы книга была внутренне замкнутой. Поэтому в ней много места уделено выводу уравнений, переходу в евклидову область; приводятся все (иногда сложные) выкладки; большинство сформулированных утверждений доказываются.

Авторы благодарят Н. Н. Боголюбова, В. С. Владимирова и Д. В. Ширкова за критические замечания и поддержку. Авторы благодарны М. К. Поливанову, О. И. Завьялову и В. Н. Сушко, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд критических замечаний и предложений, способствовавших ее улучшению.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Элементами d-мерного псевдоевклидова пространства являются векторы $x = (x^0, x^1, x^2, \ldots, x^s)$, $d = s + 1$. Метрика определена с помощью тензора $g^{\mu\nu} : g^{\mu\nu} = 0$ при $\nu \neq \mu$, $g^{00} = -g^{11} = \ldots = -g^{ss} = 1$.

Для производных по x^μ введены следующие сокращения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu, \quad \Box_x = -\sum_{\mu=0}^{3} g^{\mu\mu} \partial_\mu \partial_\mu.$$

Спиноры, сопряженные по Дираку, обозначаются следующим образом: $\bar{\psi}(x) = (-i)\overset{*}{\psi}(x)\gamma^0$ для модели Юкавы и $\bar{\psi}(x) = \overset{*}{\psi}(x)\gamma^0$ для квантовой электродинамики в зависимости от того, какое представление выбрано для γ-матриц.

Для известных функциональных пространств выбраны следующие обозначения:

R^d (R^s) — евклидово d-мерное (s-мерное) пространство;

$\mathscr{L}_2(R^d)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций, заданных на R^d;

$\mathscr{L}_{2,\rho}$ — пространство квадратично-интегрируемых функций с весом ρ;

$\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций на множестве Σ по мере $d\mu$, заданной на Σ;

$\mathscr{L}_p(\Sigma, d\mu)$ — пространство интегрируемых в степени p функций по мере $d\mu$, заданной на Σ;

$\mathscr{L}_\infty(\Sigma, d\mu)$ — множество интегрируемых функций с любой степенью;

$\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел;

C_0 — множество ограниченных функций;

C_0^∞ — множество ограниченных бесконечно дифференцируемых функций.

Остальные пространства будут вводиться по ходу изложения.

Значком $\otimes$ будем обозначать прямое произведение

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы решены уравнения для коэффициентных функций в евклидовой области моделей скалярного поля в двумерном пространстве-времени и нелокальных неполиноминальных моделей, т. е. для моделей, в которых ультрафиолетовые расходимости не возникают. Решены также уравнения для коэффициентных функций моделей взаимодействующего скалярного и фермионного полей и квантовой электродинамики с пространственными и импульсными обрезаниями. В монографии сделана попытка математически строго и последовательно изложить эти результаты. Таких строгих результатов, полученных методами функционального анализа и с помощью аналогий между квантовой теорией поля и статистической физикой, накопилось довольно много в периодической литературе, и возникла настоятельная необходимость привести их в порядок.

Матрица рассеяния полностью задается своими коэффициентными функциями, и проблему ее построения можно свести к задаче решения уравнений для коэффициентных функций.

Основным методом исследования матрицы рассеяния в квантовой теории поля до недавнего времени был метод теории возмущений. Начатые в пионерских работах Фейнмана — Швингера — Дайсона исследования матрицы рассеяния по теории возмущений получили свое завершение в работах Боголюбова и его школы. В итоге в рамках теории возмущений была построена ковариантная, причинная, унитарная, конечная в любом порядке по теории возмущений матрица рассеяния.

В работах Боголюбова — Ширкова — Медведева — Поливанова были сформулированы аксиомы теории матрицы рассеяния и дана их реализация по теории возмущений. Если бы к этому еще доказать сходимость рядов теории возмущений для матрицы рассеяния (конкретных моделей) или просуммировать их, то была бы построена полная теория матрицы рассеяния с общей системой аксиом и их нетривиальной реализацией.

В связи с этим в последнее десятилетие повысился интерес к проблеме существования матрицы рассеяния, первоначально заданной формальным рядом теории возмущений, к задаче сходимости или суммируемости рядов теории возмущений.

Для решения этой задачи был предложен новый метод исследования матрицы рассеяния с помощью уравнений для коэффициентных функций, которые полностью определяют матрицу рассеяния и играют основополагающую роль в теории матрицы рассеяния Боголюбова — Ширкова — Медведева — Поливанова.

Для вывода уравнений был использован прием, многократно применявшийся как в квантовой теории поля, так и в статистической физике. А именно, из формальных рядов теории возмущений можно вывести некоторые тождественные соотношения между коэффициентными функциями. Эти соотношения объявляются уравнениями для коэффициентных функций, и задача о сходимости или суммируемости рядов теории возмущений сводится к доказательству существования решения уравнений для коэффициентных функций.

Были получены два типа линейных уравнений для коэффициентных функций — эволюционного и резольвентного типов. Итерации уравнений эволюционного типа воспроизводят весь ряд теории возмущений для коэффициентных функций, итерации уравнений резольвентного типа — ряд теории возмущений без вакуумных петель. Первыми удобно пользоваться для исследования матрицы рассеяния моделей с импульсными и пространственными обрезаниями, вторыми — при доказательстве существования предела для коэффициентных функций при снятии обрезаний.

Для решения этих уравнений оказалось удобным перейти в область с чисто мнимой энергией или временем — в евклидову область.

Был разработан метод решения уравнений, основанный на евклидовом пространстве Фока и операторах рождения и уничтожения внешних линий диаграмм или евклидовых полевых операторов. В основе метода лежит то обстоятельство, что производящие операторы уравнений являются аналогами обычных гамильтонианов взаимодействия, а операторы рождения и уничтожения внешних линий сохраняют статистику.

Вначале доказывалось существование решений уравнений для моделей с формфактором или пространственным и импульсным обрезанием, причем выяснилось, что для бозонного поля ряды теории возмущений являются расходящимися, но асимптотическими, а для взаимодействующих фермионных и бозонных полей ряды теории возмущений просто сходятся.

Последующей задачей было снятие обрезаний в решениях. Эта задача оказалась весьма близкой к задаче о существовании термодинамического предела для функций распределения или корреляционных функций в равновесной классической статистической физике и для моделей с неполиномиальным взаимодействием решалась с помощью методов, развитых Боголюбовым в статистической физике.

В результате для ряда моделей получено решение уравнений для коэффициентных функций без обрезаний в евклидовой области. Так как по решениям в евклидовой области можно воспроизвести теорию в псевдоевклидовой области, то на этом пути можно построить решения нетривиальных моделей квантовой теории поля.

Параллельно этому подходу, который можно математически охарактеризовать как операторный или функциональный, развивался вероятностный подход, в котором основные величины квантовой теории поля связываются с математическим ожиданием случайных процессов. Такой подход изложен в монографии Саймона [146].

Настоящая монография ставит себе целью подытожить результаты, полученные в первом (функциональном) подходе и является попыткой последовательно изложить исследования уравнений для коэффициентных функций операторным методом.

Монография состоит из восьми глав.

В первой главе монографии выведены уравнения для функций Грина и уравнения в вариационных производных для производящего функционала. Построены формальные решения для производящего функционала.

Во второй главе выведены уравнения эволюционного и резольвентного типов для коэффициентных функций и показана их эквивалентность уравнениям для функций Грина.

В третьей главе с помощью голоморфного продолжения получены уравнения для коэффициентных функций в евклидовой области. Введены операторы рождения и уничтожения внешних линий диаграмм и уравнения записаны в операторной форме.

В четвертой главе построены решения для моделей скалярного поля и модели Юкавы с пространственным и импульсным обрезанием. Решения строятся на основе изучения производящих операторов в евклидовом пространстве Фока.

В пятой главе построены решения без импульсных обрезаний; показывается, что в слабом смысле можно снять объемные обрезания; для бозонного поля изучаются вопросы термодинамического перехода к пределу.

В шестой главе уравнения для коэффициентных функций рассматриваются непосредственно при бесконечном объеме в специфических гильбертовых пространствах трансляционно-инвариантных функций. Решены определенные аппроксимированные уравнения. Показано, что в таких пространствах можно определить гамильтонианы квантовой теории поля как операторы.

В седьмой главе неполиномиальная нелокальная модель скалярного поля изучается методами классической статистической физики. Вводятся S-корреляционные функции для матрицы рассеяния и уравнения Кирквуда — Зальцбурга и доказывается, что S-корреляционные функции, и вместе с ними и коэффициентные функции, существуют при бесконечном объеме и являются голоморфными функциями по константе связи в некоторой окрестности нуля. Изучаются аналогии между моделями квантовой теории поля и равновесной статистической механикой.

В восьмой главе изучаются уравнения для коэффициентных функций квантовой электродинамики. Показано, что после введения надлежащих обрезаний решения являются целыми функциями по константе связи.

Глава I

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Функции Грина были введены в квантовую теорию поля Боголюбовым [13], Швингером [199, 200], Гелл-Манном и Лоу [36]. Они определяются как средние по вакууму от произведения упорядоченных во времени квантованных полей. В отличие от нелинейных уравнений для взаимодействующих квантованных полей, уравнения для функций Грина линейны. Благодаря этому удобно исследовать модели квантовой теории поля с помощью уравнений для функций Грина. В настоящей главе будут выведены уравнения для функций Грина [86, 89, 132, 155, 162, 173, 199] для двух моделей взаимодействующих скалярных и спинорных полей.

§ 1. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Напомним основные положения, которые лежат в основе теории матрицы рассеяния (S-матрицы). S-матрицу обычно определяют как оператор в пространстве состояний, связывающий начальное состояние $\Phi(-\infty)$ с конечным состоянием $\Phi(+\infty)$ соотношением

$$\Phi(+\infty) = S\Phi(-\infty).$$

Квадраты модулей соответствующих матричных элементов оператора S определяют вероятности переходов процессов рассеяния элементарных частиц.

В работах Томонаги, Швингера, Фейнмана и Дайсона [62, 165, 168, 198] оператор S был построен методом теории возмущений в виде разложения по степеням взаимодействия:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n T(\mathcal{L}_I(x_1) \ldots \mathcal{L}_I(x_n)) = T\exp\left[i\int \mathcal{L}_I(x)\,dx\right], \tag{1.1a}$$

где $\mathcal{L}_I(x)$ — лагранжиан взаимодействия.

Особую наглядность S-матрице придал Фейнман, который первым использовал графическое изображение для ее матричных элементов. Матричные элементы изображались в виде диаграмм и были даны правила вычисления вкладов от этих диаграмм.

В работах Боголюбова и Ширкова [24, 25] было дано аксиоматическое построение S-матрицы. Было показано, что на основании таких общих физических требований, как лоренц-инвариантность, причинность, локальность и унитарность, можно развить теорию возмущений для матрицы рассеяния и построить ее в виде разложения (1.1а).

Вместе с тем при построении рядов теории возмущений обнаружились серьезные трудности, связанные с расходимостью отдельных членов ряда и со сходимостью ряда в целом.

Наличие расходимостей в отдельных членах ряда теории возмущений для матрицы рассеяния и сомнения относительно сходимости всего ряда, а также принципиальная непригодность рядов теории возмущений при больших константах взаимодействия вызвали к жизни новое направление — аксиоматический подход в теории S-матрицы. В аксиоматическом подходе [14, 15] считается, что S-матрица существует и на теорию налагаются такие разумные и с точки зрения физики необходимые требования, как лоренц-инвариантность, причинность, локальность, спектральность и некоторые требования математического характера. Используя эту информацию, изучают свойства основных величин теории — матричных элементов S-матрицы.

Это направление позволяет установить фундаментальные и общие факты и некоторые важные соотношения между наблюдаемыми величинами [15]. Однако оно лишь извлекает следствия из основных постулатов теории и не дает метода определения основных ее величин.

Для детального динамического описания теории нужно знать характер взаимодействия системы, т. е. задать лагранжиан взаимодействия и по нему найти S-матрицу, которая удовлетворяет всем требованиям общей теории.

Рассмотрим более детально структуру матрицы рассеяния для тех моделей, которые исследуются в настоящей монографии.

1.1. Матрица рассеяния для моделей скалярного поля

Рассмотрим пример самовзаимодействующего скалярного поля с лагранжианом:

$$\mathcal{L}_I(x) = -\lambda : \varphi_0^4(x) :$$

в представлении взаимодействия. Здесь $\varphi_0(x)$ — свободное скалярное поле Если подставить это выражение в разложение (1.1а), раскрыть T-произведение по теореме Вика и собрать члены при одинаковых нормальных произведениях свободных полей $\varphi_0(x)$, то мы получим представление S-матрицы в виде разложения по нормальным произведениям свободных полей:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n) : \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x) :. \quad (1.1б)$$

Коэффициенты $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ при нормальных произведениях $:\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_n):$ называются коэффициентными функциями матрицы рассеяния [14, 15]. Они являются симметричными функциями по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и выражаются формальными степенными рядами по константе взаимодействия λ:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k F_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.2}$$

где $F_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ есть сумма вкладов всех диаграмм Фейнмана с k вершинами и n внешними линиями

В аксиоматической теории матрицы рассеяния [14, 15] разложение (1.1б) кладут в основу общей теории, налагая на функции $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ определенные требования, которые обеспечивают выполнение аксиом теории.

Целью настоящей книги является построение уравнений для коэффициентных функций в конкретных моделях взаимодействия и нахождение их решений вне рамок теории возмущений.

1.2. Матрица рассеяния для модели Юкавы

Модель Юкавы описывает взаимодействие фермионного и скалярного полей. Лагранжиан взаимодействия этой модели имеет вид

$$\mathcal{L}_I(x) = -\lambda \sum_{\alpha=1}^{d} :\bar{\psi}_{0,\alpha}(x)\,\psi_{0,\alpha}(x)\,\varphi_0(x):. \tag{1.3}$$

Разложение S-матрицы по нормальным произведениям свободных полей будет иметь более сложную алгебраическую структуру, во-первых, из-за того, что спинорное поле имеет d компонент, а во-вторых, из-за того, что S-матрица должна описывать взаимодействие как частиц, так и античастиц. Это разложение имеет вид

$$S = \sum_{m,n=0} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \\ \beta_1,\ldots,\beta_m}} \int dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_m dz_1 \ldots dz_m F_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m;$$

$$\beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m;\, x_1, \ldots, x_n) :\bar{\psi}_{0,\alpha_1}(y_1) \ldots \bar{\psi}_{0,\alpha_m}(y_m)\,\psi_{0,\beta_1}(z_1) \ldots$$

$$\ldots \psi_{0,\beta_m}(z_m)\,\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n):. \tag{1.4}$$

Коэффициентные функции $F_{m,n}(\ldots)$ симметричны по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и антисимметричны по переменным $\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m$ и $\beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m$.

1.3. Матрица рассеяния в квантовой электродинамике

Лагранжиан взаимодействия в квантовой электродинамике имеет вид

$$\mathcal{L}_I(x) = -e \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \sum_{\mu=0}^{3} :\bar{\psi}_{0,\alpha}(x)\,\gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\psi_{0,\beta}(x)\,A_{0,\mu}(x):, \tag{1.5}$$

где $\bar{\psi}_{0,\alpha}(x)$ и $\psi_{0,\beta}(x)$ — свободные электронно-позитронные поля, а $A_{0,\mu}(x)$ — свободное электромагнитное поле. Из-за векторного характера электромагнитного поля $A_{0,\mu}(x)$ выражение для матрицы рассеяния будет иметь еще более сложную алгебраическую структуру, чем в случае взаимодействия Юкавы:

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!\sqrt{n!}} \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m \\ \beta_1,\dots,\beta_m}} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_n} \int dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m dz_1 \dots$$

$$\dots dz_m F_{m,n}(\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_m y_m;\ \beta_1 z_1, \dots, \beta_m z_m;\ \mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n) \times$$

$$\times :\psi_{0,\alpha_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{0,\alpha_m}(y_m)\,\psi_{0,\beta_1}(z_1) \dots \psi_{0,\beta_m}(z_m)\,A_{0,\mu_1}(x_1) \dots A_{0,\mu_n}(x_n):.$$

Как и в случае взаимодействия Юкавы, функции $F_{m,n}(\dots)$ симметричны по переменным $\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n$ и антисимметричны по переменным $\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_m y_m$ и $\beta_1 z_1, \dots, \beta_m z_m$.

В заключение настоящего параграфа отметим, что матрица рассеяния (а значит, и коэффициентные функции) тесно связана с другим важным объектом теории квантованных полей — функциями Грина. Функции Грина и матрица рассеяния обладают взаимно дополняющими свойствами.

Модели квантовой теории поля раньше обычно исследовались с помощью уравнений для функций Грина, поэтому в первой главе будет сделано небольшое отступление от основной темы книги. В ней будут выведены уравнения для функций Грина и построены их формальные решения.

Однако нам представляется целесообразным исследовать модели квантовой теории поля с помощью эквивалентных уравнений для коэффициентных функций, которые, на наш взгляд, менее сингулярны, чем уравнения для функций Грина, обладают высокой симметрией и более удобны для строгого математического исследования.

Во всех остальных главах книги будут исследоваться уравнения для коэффициентных функций.

§ 2. ФУНКЦИИ ГРИНА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

2.1. Уравнения Гейзенберга для взаимодействующих полей

Рассмотрим модель нелинейного вещественного скалярного поля с массой μ и константой взаимодействия λ, описываемую лагранжианом

$$\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_I(x), \tag{2.1}$$

где

$$\mathscr{L}_0(x) = \frac{1}{2} :\partial_n\varphi(x)\,\partial^n\varphi(x): - \frac{1}{2}\mu^2 :\varphi^2(x):,$$

$$\mathscr{L}_I(x) = -\lambda :\varphi^4(x):, \qquad \lambda > 0.$$

Символом : ... : *) обозначен результат вычитания из произведения операторов $\varphi(x)$ всевозможных вакуумных средних (как будет видно из дальнейшего, это нужно для сокращения в решениях уравнений для функций Грина сингулярностей при совпадающих аргументах).

В общем случае такое произведение определяется рекуррентной формулой

$$:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n): =$$

$$= \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) - \sum_{r=2}^{n}\sum_{P'}(\Phi_0, \varphi(x_{i_1})\ldots\varphi(x_{i_r})\Phi_0) : \varphi(x_{j_1})\ldots\varphi(x_{j_{n-r}}):, \tag{2.2}$$

где сумма $\sum\limits_{P'}$ берется по всем разбиениям индексов $1, \ldots, n$ на различные группы $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_{n-r}$, причем $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-r}$ и $2 \leqslant r \leqslant n$, а Φ_0 — вакуумный вектор, который мы определим ниже. Если поля $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ свободные, то $:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n):$ означает нормальное произведение этих полей, а формула (2.2) выражает обычную теорему Вика ([25], § 16).

Вариационный принцип стационарного действия $\delta A = 0$ **), где $A = \int \mathscr{L}(x)\,dx$ — действие системы, приводит к уравнению Клейна — Гордона с нелинейным членом:

$$-\partial_n\partial^n\varphi(x) - \mu^2\varphi(x) \equiv (\Box - \mu^2)\varphi(x) = 4\lambda :\varphi^3(x):. \tag{2.3}$$

Поле $\varphi(x)$ является операторнозначной обобщенной функцией. Операторная структура этой функции определяется одновременными коммутационными соотношениями

$$[\varphi(x), \varphi(x')]_- = [\partial_0\varphi(x), \partial_0'\varphi(x')]_- = 0,$$

$$[\varphi(x), \partial_0'\varphi(x')]_- = i\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'), \quad x^0 = x'^0, \tag{2.4}$$

*) См., например, [30], § 4.
**) См., например, [25], § 2.

которые являются обобщением коммутационных соотношений между координатой и импульсом в квантовой механике.

Приступим к решению уравнения (2.3), т. е. к определению оператора $\varphi(x)$, удовлетворяющего (2.3) и (2.4). Рассмотрим вначале уравнение (2.3) при $\lambda = 0$:

$$(\Box - \mu^2)\,\varphi(x) = 0. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) описывает свободное, невзаимодействующее поле $\varphi_0(x)$; его решение имеет вид ([25], § 11)

$$\varphi_0(x) = \varphi_0^+(x) + \varphi_0^-(x),$$

где

$$\varphi_0^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int dk \frac{\exp\{\pm i\,|x^0\mu(k) - kx|\}}{(2\mu(k))^{1/2}}\, a^\pm(k). \tag{2.6}$$

Здесь

$$\mu(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2}, \quad [a^-(k), a^+(k')]_- = \delta(k - k').$$

Используя (2.6), нетрудно проверить, что поле $\varphi_0(x)$ удовлетворяет коммутационным соотношениям (2.4). Чтобы получить решение уравнения (2.3), введем полный гамильтониан системы

$$H_\lambda = H_0 + \lambda H_I, \tag{2.7}$$

где H_0 — свободный гамильтониан:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{x_0=0} \left[\sum_{n=0} :(\partial_n \varphi_0(x))^2: + \mu^2 :\varphi_0^2(x): \right] dx =$$

$$= \int \mu(k)\, a^+(k)\, a^-(k)\, dk, \tag{2.8}$$

а H_I — гамильтониан взаимодействия:

$$H_I = \int\limits_{x^0=0} :\varphi_0^4(x):\, dx. \tag{2.9}$$

Покажем теперь, что решение уравнения (2.3) можно представить формулой

$$\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda} \varphi_0(0, x)\, e^{-ix^0 H_\lambda}. \tag{2.10}$$

Легко получить из (2.10), что

$$\Delta\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda} \Delta\varphi_0(0, x)\, e^{-ix^0 H_\lambda} \tag{2.11}$$

и

$$\partial_0 \varphi(x) = i e^{ix^0 H_\lambda} [H_\lambda, \varphi_0(0, x)]_- e^{-ix^0 H_\lambda}. \tag{2.12}$$

Используя (2.7)—(2.9) и коммутационные соотношения (2.4), находим, что

$$[H_\lambda, \varphi_0(0, x)]_- = -i\partial_0 \varphi(x)\,|_{x^0=0}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12) и дифференцируя (2.12) по x^0, получим

$$\partial_0^2 \varphi(x) = ie^{ix^0 H_\lambda} [H_\lambda, \partial_0 \varphi(x)|_{x^0=0}]_- e^{-ix^0 H_\lambda}. \tag{2.14}$$

Аналогично (2.13) находим

$$[H_\lambda, \partial_0\varphi(x)|_{x^0=0}]_- = -i\Delta\varphi_0(0, \boldsymbol{x}) + i\mu^2\varphi_0(0, \boldsymbol{x}) + i4\lambda : \varphi_0^3(0, \boldsymbol{x}):.$$

Тогда (2.14) примет вид

$$\partial_0^2\varphi(x) = e^{ix^0 H_\lambda} [\Delta\varphi_0(0, \boldsymbol{x}) - \mu^2\varphi_0(0, \boldsymbol{x}) - 4\lambda : \varphi_0^3(0, \boldsymbol{x}) :] e^{-ix^0 H_\lambda} =$$
$$= \Delta\varphi(x) - \mu^2\varphi(x) - 4\lambda : \varphi^3(x) :, \tag{2.15}$$

откуда следует, что решение (2.10) удовлетворяет уравнению (2.3).

Разумеется, решение (2.10) носит чисто формальный характер. Чтобы придать строгий математический смысл выражению (2.10), необходимо построить самосопряженный оператор H_λ, действующий в определенном гильбертовом пространстве. При решении этой задачи обычно сталкиваются с рядом серьезных математических трудностей. Прежде всего, это объемные и ультрафиолетовые расходимости, а также проблема существования вакуумного состояния, т. е. такого собственного вектора Φ_0, для которого

$$H_\lambda \Phi_0 = 0. \tag{2.16}$$

Преодоление этих трудностей составляет основную задачу конструктивной теории поля. Обычно сначала рассматривается модель в конечном объеме V или, что то же самое, неполностью включенное взаимодействие с интенсивностью $0 \leqslant g(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$, сосредоточенной в V. Ультрафиолетовые расходимости устраняются понижением размерности пространства-времени или же введением обрезания при больших импульсах. Для такой модели с обрезаниями строятся решения. Дальнейшей задачей является нахождение подходящего способа снять введенные обрезания. Такая программа была частично реализована для двумерных моделей в серии работ [44, 46, 47, 141].

Существует другой подход к описанию взаимодействий квантованных полей. Он заключается в том, что вместо нелинейного операторного уравнения (2.3) рассматривают систему линейных уравнений для функций Грина. К выводу таких уравнений мы приступим в следующем параграфе.

2.2. Определение функций Грина

Для скалярного поля n-точечная функция Грина определяется следующим выражением:

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi_0, T(\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)) \Phi_0), \tag{2.17}$$

где

$$T(\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)) = \sum_P \theta(x^0_{i_1} - x^0_{i_2})\dots\theta(x^0_{i_{n-1}} - x^0_{i_n})\,\varphi(x_{i_1})\dots\varphi(x_{i_n}) \tag{2.18}$$

— хронологическое произведение операторов $\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)$, символ $\sum_P$ означает суммирование по всем перестановкам $i_1, \dots, i_n$ индексов $1, \dots, n$, а $\theta(x_0) = 1$ для $x^0 > 0$ и $\theta(x^0) = 0$ для $x^0 < 0$.

Для свободного скалярного поля функции Грина вычисляются явно с помощью теоремы Вика для T-произведения (см. [25], § 19):

$$G^0_n(x_1, \dots, x_n) = (\Omega_b, T(\varphi_0(x_1)\dots\varphi_0(x_n))\,\Omega_b) =$$

$$= \sum_{P'} \frac{1}{i} D^c(x_{i_1} - x_{i_2})\dots\frac{1}{i} D^c(x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) \quad \text{для } n \text{ четного}, \tag{2.19}$$

$$G^0_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{для } n \text{ нечетного.}$$

В формуле (2.19) Ω_b обозначает вакуумное состояние для свободного бозе-поля, а P' означает, что $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} < i_n$. Функция $D^c(x-y)$ является функцией Грина уравнения Клейна — Гордона и представляется в виде

$$\frac{1}{i} D^c(x-y) = (\Omega_b, T(\varphi_0(x)\,\varphi_0(y))\,\Omega_b) =$$

$$= \overbrace{\varphi_0(x)\,\varphi_0(y)} = \frac{1}{i(2\pi)^{s+1}} \int dp \frac{e^{ip(x-y)}}{\mu^2 - p^2 - i\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Она является обобщенной функцией, при $x = y$ интеграл (2.20) расходится. Получим из (2.19) одно важное соотношение, которое понадобится нам в дальнейшем. Разобьем для этого сумму $\sum_{P'}$ в правой части выражения (2.19) на $n-1$ сумм так, чтобы в каждом члене 1-й суммы присутствовала функция $\frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2)$, в каждом члене 2-й суммы — функция $\frac{1}{i} D^c(x_1 - x_3)$ и т. д., и наконец, каждый член $(n-1)$-й суммы содержал $\frac{1}{i} D^c(x_1 - x_n)$. Если вынести в каждой сумме эти функции за скобки, то оставшиеся части в силу определения (2.19) будут функциями Грина от $n-2$ переменных. Следовательно, мы получим формулу

$$G^0_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=2} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r)\, G^0_{n-2}(x_2, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n). \tag{2.21}$$

Функции Грина введены, согласно формулам (2.17) и (2.18), чисто формально через произведения функций Хейвисайда $\theta(x^0)$ на операторнозначные обобщенные функции $\varphi(x)$, структура которых пока неизвестна. Мы используем выражения (2.17) и (2.18) для вывода уравнений для функций Грина. Будем для этого формально дифференцировать (2.17), используя уравнение (2.3) и коммутационные соотношения (2.4). Как определить уравнения для функций Грина, чтобы они имели смысл, мы покажем позже, после попытки решить их по теории возмущений.

Приступим теперь к выводу уравнений для функций G_n.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

3.1. Вывод уравнений для функций Грина с помощью уравнений Гейзенберга

Подействуем на выражение (2.18) оператором

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^1} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_1^s}.$$

Так как пространственные переменные $x_1^1, \ldots, x_1^s$ входят только в операторы поля, то из (2.18) следует, что

$$\Delta_1 T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = T(\Delta_1\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)). \tag{3.1}$$

Продифференцируем выражение (2.18) по переменной x_1^0. Для этого разобьем сумму в (2.18) на n сумм, в каждой из которых переменная x_1^0 стоит на фиксированном месте. Учитывая, что $\partial_0\delta(x^0) = \theta(x^0)$, получим

$$\begin{aligned}
&\partial_{01} T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = T(\partial_{01}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)) + \\
&+ \sum_P \delta(x_1^0 - x_{i_2}^0)\,\theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0)\ldots\theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\,\varphi(x_1)\varphi(x_{i_2})\ldots\varphi(x_{i_n}) + \\
&+ \sum_{r=2}^{n-1}\sum_P \theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0)\ldots[\theta(x_{i_r}^0 - x_1^0)\,\delta(x_1^0 - x_{i_{r+1}}^0) - \delta(x_{i_r}^0 - x_1^0)\times \\
&\times\theta(x_1^0 - x_{i_{r+1}}^0)]\ldots\theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\,\varphi(x_{i_2})\ldots\varphi(x_{i_r})\varphi(x_1)\varphi(x_{i_{r+1}})\ldots \\
&\ldots\varphi(x_{i_n}) - \sum_P \theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0)\ldots\theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\,\delta(x_{i_n}^0 - x_1^0)\,\varphi(x_{i_2})\ldots \\
&\ldots\varphi(x_{i_n})\varphi(x_1) = T(\partial_{01}\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) + \sum_{r=2}^{n}\sum_P \theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0)\ldots \\
&\ldots\theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\,\varphi(x_{i_2})\ldots\varphi(x_{i_{r-1}})\,\delta(x_1^0 - x_{i_r}^0)\,[\varphi(x_1), \varphi(x_{i_r})]_-\times \\
&\times\varphi(x_{i_{r+1}})\ldots\varphi(x_{i_n}).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В силу коммутационных соотношений (2.4) второй член в (3.2) обращается в нуль, и поэтому

$$\partial_{01}T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = T(\partial_{01}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)). \qquad (3.3)$$

Дифференцируя (3.3) по x_1^0 и выполняя те же операции, что и в (3.2), получим

$$\partial_{01}^2 T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = T(\partial_{01}^2\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)) +$$
$$+\sum_{r=2}^{n}\sum_{P}\theta(x_{i_2}^0 - x_{i_3}^0)\ldots\theta(x_{i_{n-1}}^0 - x_{i_n}^0)\times$$
$$\times\varphi(x_{i_2})\ldots\varphi(x_{i_{r-1}})\,\delta(x_1^0 - x_{i_r}^0)\,[\partial_{01}\varphi(x_1), \varphi(x_{i_r})]_-\varphi(x_{i_{r+1}})\ldots\varphi(x_{i_n}).$$

Используя снова (2.4), имеем

$$\partial_{01}^2 T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = T(\partial_{01}^2\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)) -$$
$$-\sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_2)\,T(\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_{r-1})\varphi(x_{r+1})\ldots\varphi(x_n)). \qquad (3.4)$$

Уравнение Гейзенберга (2.3) вместе с формулами (3.1) и (3.4) приводит к соотношению

$$(\Box_1 - \mu^2)\,T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)) = 4\lambda T(:\varphi^3(x_1):\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)) +$$
$$+\sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_r)\,T(\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_{r-1})\varphi(x_{r+1})\ldots\varphi(x_n)). \qquad (3.5)$$

Учитывая (2.2), выразим $:\varphi^3(x):$ через обычное произведение:

$$:\varphi^3(x_1): = \varphi^3(x_1) - 3(\Phi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_1)\Phi_0)\,\varphi(x_1).$$

Функция $(\Phi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Phi_0)$ есть двухточечная функция Вайтмана, которая при $x = y$ совпадает со свободной *), т. е.

$$(\Phi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_1)\Phi_0) = W_2(0) = \frac{1}{i}D^-(0) = C.$$

Тогда

$$:\varphi^3(x_1): = \varphi^3(x_1) - 3C\varphi(x_1). \qquad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), усредняя по физическому вакууму и используя определение функций Грина (2.17), получим уравнения для функций $G_n(x_1, \ldots, x_n)$:

$$(\Box_1 - \mu^2)\,G_n(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= 4\lambda G_{n+2}(x_1, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) - 12\lambda C G_n(x_1, \ldots, x_n) +$$
$$+\sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_r)\,G_{n-2}(x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \qquad (3.7)$$

---

*) См., например [197], гл. 17, § 2.

Уравнения (3.7) содержат слагаемое с бесконечной константой C. Как будет видно из дальнейшего изложения, при решении уравнений (3.7) по теории возмущений возникают расходящиеся выражения, часть которых и компенсируется этим слагаемым (сингулярности при совпадающих аргументах). Эти уравнения очень часто называют уравнениями Швингера [199, 201].

Преобразуем (3.7) в интегральное уравнение, обращая оператор $\Box_1 - \mu^2$. Для этого будем считать, что правая часть в уравнении (3.7) известна, и разрешим его относительно функции $G_n(x_1, \ldots, x_n)$. Эта процедура неоднозначна, так как к определенному решению всегда можно прибавить функцию, которая обращается в нуль под действием оператора $\Box_1 - \mu^2$. Чтобы избавиться от этой неоднозначности, потребуем, чтобы при $\lambda = 0$ интегральное уравнение, соответствующее (3.7), совпадало с (2.21).

При $\lambda = 0$ уравнения (3.7) примут вид

$$(\Box_1 - \mu^2) G_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_r) G_{n-2}(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \quad (3.8)$$

Для $n = 2$

$$(\Box_1 - \mu^2) G_2(x_1, x_2) = i\delta(x_1 - x_2), \quad (3.9)$$

и вышеуказанное требование приводит к тому, что

$$G_2(x_1, x_2) = G_2^0(x_1, x_2) = \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2)$$

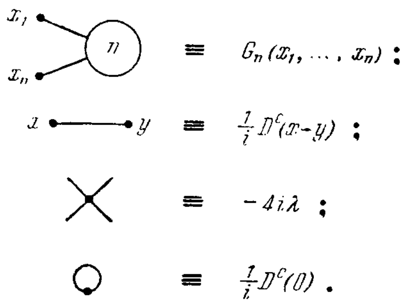
и

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = G_n^0(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r) G_{n-2}^0(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \quad (3.10)$$

Теперь, учитывая (3.9), (3.10), (3.7) можно переписать в виде

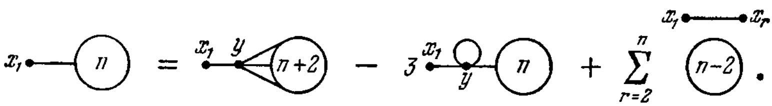
$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = -4i\lambda \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1 - y) G_{n+2}(y, y, y, x_2, \ldots, x_n) + \\ + 12i\lambda C \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1 - y) G_n(y, x_2, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r) G_{n-2}(x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \quad (3.11)$$

Полагая в (3.11) $\lambda = 0$, действительно получаем (2.21), (3.10). Удобно ввести следующие графические обозначения:



(3.12)

Уравнение (3.11) в обозначениях (3.12) примет вид



(3.13)

Заметим, что, в силу инвариантности лагранжиана (2.1) относительно замены $\varphi(x) \to -\varphi(x)$, функции Грина также должны обладать такой инвариантностью. Тогда, в силу определения (2.17), для $n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = -G_n(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{3.14}$$

а уравнение (3.11) справедливо для $n = 2k$.

3.2. Связь функций Грина с S-матрицей

Свяжем функции Грина с матрицей рассеяния. Для этого выразим их через операторы полей в представлении взаимодействия. В таком представлении функции G_n будут иметь вид

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = S_0^{-1}(\Omega_b, T(\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n) S)\Omega_b), \tag{3.15}$$

где $S_0 = (\Omega_b, S\Omega_b)$ — сумма вкладов от всевозможных вакуумных диаграмм Фейнмана. Выражение (3.15) эквивалентно выражению (2.17). Чтобы установить это, покажем, что функции (3.15), как и функции (2.17), удовлетворяют уравнениям (3.11). При доказательстве этого утверждения будем следовать работе [132]. Сформулируем утверждение, которое принято называть «обобщенной теоремой Вика» [132] (см. также [25], § 34).

Обобщенная теорема Вика утверждает, что вакуумное ожидание от хронологического произведения $n+1$ линейных (свободных) операторов $AB_1 \ldots B_n$ равно сумме n вакуумных ожиданий хронологических произведений тех же операторов со спариваниями одного из этих операторов со всеми остальными, т. е.

$$(\Omega_b, T(AB_1 \ldots B_n)\,\Omega_b) = \sum_{i=1}^{n} (\Omega_b, T(\overline{AB_1 \ldots B_i} \ldots B_n)\,\Omega_b). \quad (3.16)$$

Справедливость формулы (3.16) непосредственно вытекает из обычной теоремы Вика для T-произведений ([25], § 19) и того факта, что вакуумные ожидания нормального произведения любого отличного от нуля числа неспаренных операторов равны нулю. Действительно, применяя теорему Вика к T-произведению левой части выражения (3.16), получим сумму, каждый член которой содержит определенным образом спаренные операторы A, B_1, ..., B_n. Если теперь объединить все члены, содержащие спаривание оператора A с B_1, то получим выражение

$$(\Omega_b, T(\overline{AB_1}B_2 \ldots B_n)\,\Omega_b). \quad (3.17)$$

Далее, объединяя все члены, содержащие $\overline{AB_2}$, получим $(\Omega_b, T(\overline{AB_1B_2} \ldots B_n)\Omega_b)$ и т. д. Сумма членов типа (3.17) является правой частью выражения (3.16), что и доказывает теорему. (Для случая, когда все операторы являются свободными скалярными полями, обобщенная теорема Вика фактически доказана нами в § 2.2.)

Чтобы применить эту теорему к выражению (3.15), нужно обобщить понятие хронологического спаривания на случай, когда один из операторов не является линейным по полю $\varphi_0(x)$ (см. [25], § 34). Введем сначала операцию спаривания оператора $\varphi_0(x)$ с лагранжианом $\mathcal{L}_I(y)$. Выражение $\overline{\varphi_0\mathcal{L}_I}$ естественно определить как сумму нормальных произведений со всеми возможными спариваниями оператора φ_0 с операторами, входящими в $\mathcal{L}_I$. Например, для $\mathcal{L}_I(y) = -\lambda : \varphi_0^4(y) :$ получим по определению

$$\overline{\varphi_0(x)\,\mathcal{L}_I(y)} = -4\lambda\overline{\varphi_0(x)\,\varphi_0(y)} : \varphi_0^3(y) :. \quad (3.18)$$

Для определения хронологического спаривания оператора $\varphi_0(x)$ с S-матрицей воспользуемся разложением матрицы рассеяния в ряд теории возмущений (1.1). Тогда

$$\overline{\varphi_0(x)\,S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \sum_{j=1}^{n} \int T(\overline{\varphi_0(x)\,\mathcal{L}_I(x_1) \ldots \mathcal{L}_I(x_j)} \ldots \mathcal{L}_I(x_n))\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Из-за симметрии по переменным интегрирования это выражение можно представить в виде

$$\overline{\varphi_0(x) S} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \int d\tau \int dx_1 \ldots dx_{n-1} T\,(\overline{\varphi_0(x)\, \mathscr{L}_I}(\tau) \mathscr{L}_I(x_1) \ldots \mathscr{L}_I(x_{n-1})) =$$

$$= i \int d\tau\, T\,(\overline{\varphi_0(x)\, \mathscr{L}_I}(\tau)\, S). \qquad (3.19)$$

3.3. Вывод уравнений для функций Грина с помощью обобщенной теоремы Вика

Применим обобщенную теорему Вика к выражению (3.15):

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = S_0^{-1}(\Omega_b, T\,(\varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n)\, \overline{\varphi_0(x_1)\, S})\, \Omega_b) +$$

$$+ \sum_{r=2}^{n} S_0^{-1}(\Omega_b, T\,(\overline{\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0}(x_r) \ldots \varphi_0(x_n)\, S)\, \Omega_b). \qquad (3.20)$$

Используя формулы (3.18) и (3.19), получим

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= -4i\lambda \int d\tau \frac{1}{i} D^c(x_1 - \tau)\, S_0^{-1}(\Omega_b, T\,(\varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n) : \varphi_0^3(x_1) : S)\Omega_b) +$$

$$+ \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r)\, S_0^{-1}(\Omega_b, T\,(\varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_{r-1})\, \varphi_0(x_{r+1}) \ldots \varphi_0(x_n) S)\Omega_b).$$

С учетом (2.2) и определения (3.15) имеем

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = -4i\lambda \int dx \frac{1}{i} D^c(x_1 - x)\, G_{n+2}(x, x, x, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ 12i\lambda C \int dx \frac{1}{i} D^c(x_1 - x)\, G_n(x, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r)\, G_{n-2}(x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \qquad (3.21)$$

Уравнения (3.21) совпадают с уравнениями (3.11).

Перепишем цепочку уравнений (3.21) в виде одного операторного уравнения для всей последовательности функций Грина. Введем для этого оператор B, действующий на последовательность $f = \{f_n\}$

по формуле

$$(Bf)_n(x_1, \ldots, x_n) = -4i\lambda \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1 - y) f_{n+2}(y, y, y, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ 12i\lambda C \int dy \frac{1}{i} D^c(x_1 - y) f_n(y, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{r=2}^{n} \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_r) f_{n-2}(x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n). \quad (3.22)$$

При $n < 2$ последний член обращается в нуль. Тогда для последовательности функций Грина $G = \{G_n\}_{n=2}^{\infty}$ имеем уравнение

$$G = BG + G_2^0, \quad (3.23)$$

где

$$G_2^0 = \left(0, \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2), 0, \ldots\right).$$

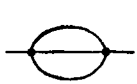
Формальное решение уравнения (3.23) имеет вид

$$G = (1 - B)^{-1} G_2^0 = \sum_{n=0}^{\infty} B^n G_2^0. \quad (3.24)$$

Правая часть (3.24) является разложением в ряд теории возмущений для всей последовательности функций Грина и может быть выражена вкладами от диаграмм Фейнмана.

3.4. Уравнения для перенормированных функций Грина

Для того чтобы выражение (3.24) было решением уравнения (3.23), необходимо, чтобы степени оператора B были определены на G_2^0 и чтобы весь ряд (3.24) в каком-то смысле сходился. Отложим исследование второй задачи до четвертой главы, а сейчас покажем, что в общем случае степени оператора B не определены на G_2^0. Действительно, выражение $B^4 G_2^0$ содержит член, соответствующий вкладу от диаграммы

 :

$$(4i\lambda)^2 \int dy\, dz \frac{1}{i} D^c(x_1 - y) \left[\frac{1}{i} D^c(y - z)\right]^3 \frac{1}{i} D(z - x_2). \quad (3.25)$$

Используя представление (2.20), преобразуем выражение (3.25) к виду

$$- \frac{16\lambda^2}{(2\pi)^d i} \int dp \frac{e^{ip(x_1 - x_2)}}{(\mu^2 - p^2 - i\varepsilon)^2} \times$$

$$\times \int dq_1 dq_2 \frac{1}{(\mu^2 - q_1^2 - i\varepsilon)(\mu^2 - q_2^2 - i\varepsilon)[\mu^2 - (p - q_1 - q_2)^2 - i\varepsilon]}. \quad (3.26)$$

Если размерность пространства-времени $d > 2$, то внутренний интеграл расходится при больших q_1 и q_2 и, следовательно, оператор B^4 не определен на G_2^0. Такие же рассуждения можно провести и для высших степеней B. Другими словами, вклады от диаграмм Фейнмана при $d > 2$ расходятся.

При $d \leqslant 2$ интеграл (3.26) конечен, а расходимости при совпадающих аргументах компенсируются.

Действительно, применяя оператор, соответствующий первому слагаемому в (3.11), к третьему слагаемому, получаем расходящееся выражение вида

$$- 12iC \int dy \frac{1}{i} D^c (x_1 - y) G_n (y, x_2, \ldots, x_n),$$

которое компенсируется вторым слагаемым в (3.11).

Таким образом, выражения $B^n G^0$ в общем случае содержат расходящиеся интегралы. Боголюбовым и Парасюком [16, 17, 122] была развита общая теория, позволяющая выделить из этих расходящихся интегралов сходящиеся части,— так называемая теория R-операций. Дальнейшее развитие теория R-операции получила в работах Хеппа [185], Циммерманна [193—195], Аникина, Завьялова, Поливанова, Степанова [3—6, 161] и Щербины [207].

Согласно этой теории, применив R-операцию к каждому члену ряда (3.24), мы получим конечные выражения или перенормированный ряд теории возмущений для функций Грина. Уравнения для перенормированных функций Грина можно получить, если ввести перенормированный лагранжиан, т. е. к лагранжиану (2.1) добавить некоторые добавочные слагаемые — контрчлены, по перенормированному лагранжиану написать уравнения для перенормированного поля и дальше воспользоваться тем же приемом, что и при выводе уравнений (3.11) для неперенормированных функций Грина. Такие уравнения рассматривались в работах Фрадкина [177], Джонсона [65], Циммерманна [192], Пю [133], Щербины [206] и Завьялова [72]. Опишем вкратце эти уравнения на примере скалярного поля. В рассматриваемой модели перенормированный лагранжиан имеет вид

$$\mathscr{L}_{\text{ren}}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_{I,\text{ren}}(x), \quad (3.27)$$

где

$$\mathcal{L}_{I,\mathrm{ren}}(x) = -\lambda z_\lambda z : \varphi^4(x) : + \delta\mu^2 : \varphi^2(x) :.$$

Уравнение Гейзенберга для перенормированного поля выглядит так:

$$(\Box + \mu^2)\varphi(x) = -4\lambda z_\lambda z^{-1} : \varphi^3(x) : + \delta\mu^2 : \varphi^2(x) :. \tag{3.28}$$

Здесь z_λ и z отвечают за перенормировку константы взаимодействия λ и поля $\varphi(x)$, $\delta\mu^2$ — константа перенормировки массы. Величины $\varphi(x)$, λ и μ являются перенормированными. Поле $\varphi(x)$ удовлетворяет новым коммутационным соотношениям

$$[\varphi(x), \partial_0\varphi(y)]_-|_{x^0=y^0} = iz^{-1}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{3.29}$$

Перенормированные функции Грина определяются через поля $\varphi(x)$ теми же соотношениями (2.17), и из (3.28), (2.17) и (3.29) получим

$$(\Box_1 + \mu^2) G_n(x_1, \ldots, x_n) = -4\lambda z_\lambda z^{-1} G_{n+2}(x_1, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ 12\lambda z_\lambda z^{-1} \frac{1}{i} D^c(0) G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \delta\mu^2 G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$$
$$- iz^{-1} \sum_{j=2}^{n} \delta(x_1 - x_j) G_{n-2}(x_2, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n). \tag{3.30}$$

Константы z, z_λ и $\delta\mu^2$ можно подобрать так, что при итерации уравнения (3.30) возникает только перенормированный ряд теории возмущений. Далее, константы перенормировки z, z_λ и $\delta\mu^2$ можно выразить непосредственно через интегралы от перенормированных функций Грина и тем самым исключить из уравнений как независимые величины. Мы не будем приводить здесь получаемые при этом уравнения, так как для этого потребовалось бы вводить много дополнительных обозначений. Укажем лишь, что в наиболее изящном виде они были выведены в работе Завьялова [72] с помощью техники, развитой в [3, 4].

Так как в настоящей монографии в основном исследуются модели, в которых расходимости не возникают, то в дальнейшем мы не будем прибегать к перенормированным уравнениям (3.30) и будем рассматривать проблему перенормировок как следующий этап в построении нетривиальных моделей взаимодействия.

При решении уравнений для функций Грина мы будем придерживаться следующей стратегии. Вначале мы их максимально сгладим или регуляризуем, вводя в уравнения вместо сингулярных функций гладкие, достаточно быстро убывающие на бесконечности функции, решим регуляризованные уравнения, а потом будем снимать регуляризацию в решениях, вводя, где нужно и контрчлены. Эту программу начнем реализовывать с четвертой главы, а пока приведем нужные для дальнейшего формальные соотношения для функций Грина.

§ 4. УРАВНЕНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Цепочку уравнений (3.7) (или (3.11)) можно записать в виде одного уравнения в вариационных производных [31, 38, 155, 156, 173, 179, 202] для порождающего функционала функций Грина $G_n(x_1, \ldots, x_n)$. В настоящем параграфе будет выведено такое уравнение и получено его решение. Кроме того, используя связь между порождающими функционалами функций Грина и их связных частей, мы получим функциональное уравнение, которое восстанавливает ряд теории возмущений для связных частей функций Грина, состоящий из вкладов от связных диаграмм.

4.1. Порождающие функционалы

Введем вспомогательную гладкую действительную функцию $j(x)$, убывающую достаточно быстро на бесконечности. Построим с помощью этой функции функционал

$$G\{j\} = \left(\Phi_0, T\exp\left[i\int dx\, j(x)\,\varphi(x)\right]\Phi_0\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\int dx_1 \ldots dx_n\, j(x_1)\ldots j(x_n)\, G_n(x_1, \ldots, x_n), \qquad (4.1)$$

который является порождающим функционалом для функций Грина, т. е.

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\ldots\delta j(x_n)} G\{j\}\big|_{j=0} =$$

$$= (-i)^n G_{x_1\ldots x_n}\{j\}\big|_{j=0}. \qquad (4.2)$$

Связные части функций Грина определяются рекуррентными соотношениями

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\ \sum_{n_1+\ldots+n_k=n}\ \sum_{\sigma_k} G^T_{n_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}})\ldots G^T_{n_k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}), \qquad (4.3)$$

где символ $\sum\limits_{\sigma_k}$ означает суммирование по всем перестановкам индексов между группами $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$. Например, для $n = 4$ разложение (4.3) будет иметь вид *)

$$G_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = G^T_4(x_1, x_2, x_3, x_4) +$$

$$+ G^T_3(x_1, x_2, x_3)\, G^T_1(x_4) + G^T_3(x_1, x_2, x_4)\, G^T_1(x_3) +$$

*) Здесь приводятся определения связных частей для общего случая, не учитывающего тип взаимодействия. Для взаимодействия (2.1) разложение (4.4) будет иметь более простой вид в силу (3.14).

$$+G_3^T(x_1, x_3, x_4)\,G_1^T(x_2)+G_3^T(x_2, x_3, x_4)\,G_1^T(x_1)+$$
$$+G_2^T(x_1, x_2)\,G_2^T(x_3, x_4)+G_2^T(x_1, x_3)\,G_2^T(x_2, x_4)+$$
$$+G_2^T(x_1, x_4)\,G_2^T(x_2, x_3)+G_2^T(x_1, x_2)\,G_1^T(x_3)\,G_1^T(x_4)+$$
$$+G_2^T(x_1, x_3)\,G_1^T(x_2)\,G_1^T(x_4)+G_2^T(x_1, x_4)\,G_1^T(x_2)\,G_1^T(x_3)+$$
$$+G_2^T(x_2, x_3)\,G_1^T(x_1)\,G_1^T(x_4)+G_2^T(x_2, x_4)\,G_1^T(x_1)\,G_1^T(x_3)+$$
$$+G_2^T(x_3, x_4)\,G_1^T(x_1)\,G_1^T(x_2)+G_1^T(x_1)\,G_1^T(x_2)\,G_1^T(x_3)\,G_1^T(x_4). \qquad (4.4)$$

Порождающий функционал для связных частей вводится согласно формуле

$$G^T\{j\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}G_n^T\{j\}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n\,j(x_1)\dots j(x_n)\,G_n^T(x_1,\dots,x_n).$$

Установим теперь связь между функционалами $G\{j\}$ и $G^T\{j\}$. Подставляя разложение (4.3) в (4.1), получим

$$G\{j\}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\dots dx_n\,j(x_1)\dots j(x_n)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\sum_{n_1+\dots+n_k=n}\sum_{\sigma_k}G_{n_1}^T(x_{i_1},\dots,x_{i_{n_1}})\dots G_{n_k}^T(x_{j_1},\dots,x_{j_{n_k}})=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{n_1+\dots+n_k=n}\sum_{\sigma_k}\frac{i^n}{n!}G_{n_1}^T\{j\}\dots G_{n_k}^T\{j\}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]}\sum_{\substack{m_1<\dots<m_l\\ m_1\nu_1+\dots+m_l\nu_l=n}}\frac{i^n}{n!}\frac{n!}{(m_1!)^{\nu_1}\dots(m_l!)^{\nu_l}}\frac{1}{\nu_1!\dots\nu_l!}\times$$
$$\times\,G_{m_1}^T\{j\}^{\nu_1}\dots G_{m_l}^T\{j\}^{\nu_l}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]}\sum_{\substack{m_1<\dots<m_l\\ m_1\nu_1+\dots+m_l\nu_l=n}}\frac{1}{\nu_1!\dots\nu_l!}\left(\frac{i^{m_1}}{m_1!}G_{m_1}^T\right)^{\nu_1}\dots$$

$$\ldots\left(\frac{i^{m_l}}{m_l!}G^T_{m_l}\right)^{\nu_l}=1+\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\frac{i^{\nu_1}}{\nu_1!}G_1^{\nu_1}\{j\}+\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\frac{i^{\nu_2}}{\nu_2!}G_2^T\{j\}^{\nu_2}+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{\nu,\nu_2=1}^{\infty}\frac{i^{\nu_1+\nu_2}}{\nu_1!\,\nu_2!}[G_1^T\{j\}]^{\nu_1}[G_2^T\{j\}]^{\nu_2}+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_k=1}^{\infty}\frac{i^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\nu_1!\ldots\nu_k!}[G_1^T\{j\}]^{\nu_1}\ldots[G_k^T\{j\}]^{\nu_k}+\ldots=$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{i^n}{n!}G_n^T\{j\}\right)^{\nu}=\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}G_n^T\{j\}\right]=\exp[G^T\{j\}].\right.$$

Итак, связь между порождающим функционалом $G\{j\}$ и порождающим функционалом для связных частей функций Грина $G^T\{j\}$ выражается формулой

$$G\{j\}=\exp[G^T\{j\}]. \tag{4.5}$$

4.2. Уравнение для $G\{j\}$

Чтобы получить уравнение для функционала $G\{j\}$, выполним вариационное дифференцирование выражения (4.1) по $j(x)$:

$$G_x\{j\}=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\int dx_1\ldots dx_{n-1}j(x_1)\ldots j(x_{n-1})G_n(x,x_1,\ldots,x_{n-1}). \tag{4.6}$$

Действуя на выражение (4.6) оператором $\Box_x-\mu^2$ и используя уравнение (3.7), получим

$$(\Box_x-\mu^2)G_x\{j\}=$$

$$=4i\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n j(x_1)\ldots j(x_n)G_{n+3}(x,x,x,x_1,\ldots,x_n)-$$

$$-12i\lambda C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n j(x_1)\ldots j(x_n)G_{n+1}(x,x_1,\ldots,x_n)-$$

$$-ij(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}\int dx_1\ldots dx_{n-1}j(x_1)\ldots j(x_{n-1})G_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Используя определение (4.1), имеем

$$(\Box_x - \mu^2) G_x\{j\} = -4\lambda G_{x,x,x}\{j\} - 12\lambda C G\{j\} - ij(x) G\{j\}. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) представляет собой дифференциальное уравнение в функциональных производных. Мы запишем его в таком виде:

$$(\Box_x - \mu^2)\frac{\delta}{\delta j(x)} G\{j\} + 4\lambda \frac{\delta^3}{\delta j^3(x)} G\{j\} + 12\lambda C \frac{\delta}{\delta j(x)} G\{j\} = -ij(x) G\{j\}. \quad (4.7')$$

Приступим к решению уравнения (4.7'). Рассмотрим его для этого при $\lambda = 0$:

$$(\Box_x - \mu^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} G^0\{j\} = -ij(x) G^0\{j\}. \quad (4.8)$$

Легко проверить непосредственно, что уравнению (4.8) удовлетворяет функционал

$$G^0\{j\} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, dy\, j(x) \frac{1}{i} D^c(x-y) j(y)\right]. \quad (4.9)$$

При $\lambda \neq 0$ решение будем искать в виде [38, 173, 177]

$$G\{j\} = AG^0\{j\}, \quad (4.10)$$

где A — оператор, $A = A(\delta/\delta j)$. Тогда, с одной стороны, из (4.7) следует, что

$$(\Box_x - \mu^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} AG^0\{j\} + 4\lambda \frac{\delta^3}{\delta j^3(x)} AG^0\{j\} + \\ + 12\lambda C \frac{\delta}{\delta j(x)} AG^0\{j\} = -ij(x) AG^0\{j\}, \quad (4.11)$$

а с другой стороны, действуя оператором A на равенство (4.8) и учитывая, что A коммутирует с $\delta/\delta j(x)$, получим

$$(\Box_x - \mu^2)\frac{\delta}{\delta j(x)} AG^0\{j\} = -iAj(x) G^0\{j\}. \quad (4.12)$$

Вычитая (4.12) из (4.11), получим следующее соотношение:

$$[j(x), A]_- G^0\{j\} = 4i\lambda \frac{\delta^3}{\delta j^3(x)} AG^0\{j\} + 12i\lambda C \frac{\delta}{\delta j(x)} AG^0\{j\}. \quad (4.13)$$

Следовательно, оператор A можно искать из уравнения

$$[A, j(x)]_- = -4i\lambda A \frac{\delta^3}{\delta j^3(x)} - 12i\lambda CA \frac{\delta}{\delta j(x)}. \quad (4.14)$$

Учитывая, что A зависит только от $\frac{\delta}{\delta j(x)}$, получаем решение уравнения (4.14) в следующем виде:

$$A = C_* \exp\left[-i\lambda \int dx \frac{\delta^4}{\delta j^4(x)} - 6i\lambda C \int dx \frac{\delta^2}{\delta j^2(x)}\right]. \quad (4.15)$$

(Формально можно использовать аналогию с функциями одной переменной, для которых $\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = 1$ и $\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), x\right] = f'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Тогда, если принять $f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv A$, $\frac{\partial}{\partial x} = y$, то уравнение (4.14) на языке функций одной переменной есть дифференциальное уравнение вида $\frac{dA}{dy} = k_1 A y^3 + k_2 A y$. Его решение есть функция $A = C \exp\left[\frac{k_1 y^4}{4} + \frac{k_2 y^2}{2}\right]$.) Решение уравнения (4.7′) можно теперь записать в виде

$$G\{j\} = C_* \exp\left[-i\lambda \int dx \left(\frac{\delta^4}{\delta j^4(x)} + 6C\frac{\delta^2}{\delta j^2(x)}\right)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\int dx\, dy\, j(x) D^c(x-y) j(y)\right]. \qquad (4.16)$$

Константа C_* выбирается из условия $G(0) = 1$.

Если разложить в ряд обе экспоненты и выполнить вариационное дифференцирование, то получим ряд теории возмущений для функций Грина, сглаженных функциями j *). Чтобы получить ряд теории возмущений для функции Грина $G_n(x_1, \ldots, x_n)$, нужно продифференцировать этот ряд по $j(x_1) \ldots j(x_n)$, согласно определению (4.2), и положить $j = 0$.

4.3. Функциональное представление матрицы рассеяния

В настоящем пункте мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с функциональным представлением S-матрицы для лагранжиана взаимодействия произвольного вида $\mathscr{L}_I(\varphi) = \lambda \int \mathscr{L}(\varphi(x))\, dx$. Выведем вначале несколько вспомогательных формул для операторнозначных функционалов вида

$$\Phi(\varphi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n), \qquad (4.17)$$

где $\varphi_0(x)$ — свободное скалярное поле с массой μ.

Покажем, что для функционала (4.17) справедлива формула [189] **)

$$T\Phi(\varphi_0) = :e^{\Delta}\Phi(\varphi_0):, \qquad (4.18)$$

где

$$\Delta = \Delta\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_0}\right) = \frac{1}{2}\int dx\, dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y) \frac{\delta}{\delta\varphi_0(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi_0(y)}. \qquad (4.19)$$

---

*) Функцией Грина $G_n(x_1, \ldots, x_n)$, сглаженной функциями $j(x_1) \ldots j(x_n)$, называется выражение $\int dx_1 \ldots dx_n\, G_n(x_1, \ldots, x_n)\, j(x_1) \ldots j(x_n)$.

**) См. также [8], § 16.

Напомним, что функциональные производные по квантованным полям определяются (см. [25], § 47) как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам $\nu(x)$ к полям $\varphi_0(x)$ при $\nu(x) = 0$.

Чтобы доказать формулу (4.18), покажем, что $\Delta\Phi(\varphi_0)$ получается из $\Phi(\varphi_0)$, если в каждом члене разложения (4.17) произвести всеми возможными способами одно хронологическое спаривание между операторами $\varphi_0(x)$. Для этого достаточно проверить соотношение

$$\Delta(\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)) = \overbrace{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)},$$

которое легко следует из определений (4.19) и (2.20). Действительно, применяя оператор Δ к произведению полей $\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)$, получим

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_0}\right)(\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)) &= \\ = \frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\frac{1}{i}D^c(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi_0(x)}\frac{\delta}{\delta\varphi_0(y)}(\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)) &= \\ = \frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\frac{1}{i}D^c(x-y)[\delta(x_1-x)\delta(x_2-y) &+ \\ +\delta(x_1-y)\delta(x_2-x)] = \frac{1}{i}D^c(x_1-x_2) &= \overbrace{\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно проверить, что функционал $\frac{\Delta^k}{k!}\Phi(\varphi_0)$ можно получить из $\Phi(\varphi_0)$, если в каждом члене разложения (4.17) произвести k спариваний между операторами $\varphi_0(x)$. Отсюда вытекает, что теорему Вика для T-произведения можно записать в виде

$$T\Phi(\varphi_0) = \sum_{k=0}^{\infty} : \left(\frac{\Delta^k}{k!}\Phi(\varphi_0)\right):,$$

откуда и следует формула (4.18).

Из определения функционала (4.17) и операции нормального произведения (2.2) теперь легко получить две следующие формулы:

$$(\Omega_b, :\Phi(\varphi_0 + j): \Omega_b) = \Phi(j) \tag{4.20}$$

и

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_0(x)}\Phi(\varphi_0 + j) = \frac{\delta}{\delta j(x)}\Phi(\varphi_0 + j). \tag{4.21}$$

Введем порождающий функционал для коэффициентных функций матрицы рассеяния:

$$F\{j\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int dx_1\ldots dx_n F_n(x_1,\ldots,x_n)\,j(x_1)\ldots j(x_n). \tag{4.22}$$

Используя формулу (4.20) и представление S-матрицы в нормальной форме (1.1), можно записать

$$F\{j\} = (\Omega_b, S(\varphi_0 + j)\,\Omega_b) = S(j). \tag{4.22'}$$

Используя выражение S-матрицы в виде T-экспоненты (1.1) и формулы (4.18), (4.20) и (4.21), получим

$$\begin{aligned} F\{j\} &= (\Omega_b, T\exp[i\mathscr{L}_I(\varphi_0 + j)]\,\Omega_b) = \\ &= \left(\Omega_b, :\exp\left[\Delta\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_0}\right)\right]\exp[i\mathscr{L}_I(\varphi_0 + j)] : \Omega_b\right) = \\ &= \left(\Omega_b, :\exp\left[\Delta\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)\right]\exp[i\mathscr{L}_I(\varphi_0 + j)] : \Omega_b\right) = \\ &= \exp\left[\Delta\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)\right](\Omega_b, :\exp[i\mathscr{L}_I(\varphi_0 + j)] : \Omega_b) = \\ &= \exp\left[\Delta\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)\right]\exp[i\mathscr{L}_I(j)] = \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}\int dx\,dy\,\frac{1}{i}D^c(x-y)\frac{\delta^2}{\delta j(x)\,\delta j(y)}\right]\exp\left[i\lambda\int \mathscr{L}_I(j(z))\,dz\right]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Для взаимодействия (2.1) формула (4.23) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} F\{j\} &= \exp\left[\frac{1}{2}\int dx\,dy\,\frac{1}{i}D^c(x-y)\frac{\delta^2}{\delta j(x)\,\delta j(y)}\right]\times \\ &\times\exp\left[-i\lambda\int dz\,(j^4(z) - 6Cj^2(z) + 3C)\right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Получим еще одно важное представление для функционала $F\{j\}$ в виде ряда по константе взаимодействия λ. Разложим для этого вторую экспоненту в формуле (4.23) в ряд. Тогда

$$\begin{aligned} F\{j\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^n}{n!}\exp\left[\frac{1}{2}\int dx\,dy\,\frac{1}{i}D^c(x-y)\frac{\delta^2}{\delta j(x)\,\delta j(y)}\right]\times \\ &\times\int dx_1\ldots dx_n\mathscr{L}_I(x_1)\ldots\mathscr{L}_I(x_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n\exp\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{i}D^c(x_i - x_j)\times\right. \\ &\left.\times\frac{\partial^2}{\partial j(x_i)\,\partial j(x_j)}\right]\prod_{k=1}^{n}\mathscr{L}_I(x_k). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Если $\mathscr{L}_I(\varphi)$ представляется в виде нормального произведения, то сумма в экспоненте не будет включать членов $i=j$.

Представим лагранжиан $\mathscr{L}_I(x)$ в виде преобразования Фурье некоторой функции $\mathscr{A}(\alpha)$:

$$\mathscr{L}_I(x)=\mathscr{L}_I(\varphi(x))=\int \mathscr{A}(\alpha)\,e^{i\alpha\varphi(x)}d\alpha. \tag{4.26}$$

Формально мы можем считать, что выражение (4.26) задает лагранжиан в наиболее общем виде, так как, задав подходящим образом функцию $\mathscr{A}(\alpha)$, мы получим любой из известных лагранжианов. Например, чтобы получить $\mathscr{L}_I(\varphi(x))=\varphi^4(x)$, нужно положить

$$\mathscr{A}(\alpha)=\frac{d^4}{d\alpha^4}\,\delta(\alpha).$$

Заметим, что дифференцирование выражения (4.26) по переменной $\varphi(x)$ эквивалентно умножению на величину $i\alpha$ под знаком интеграла. Это обстоятельство позволяет выполнить дифференцирование в формуле (4.25). Подставляя (4.26) в (4.25), получим

$$F\{j\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\lambda)^n}{n!}\int dx_1\ldots dx_n\int \mathscr{A}(\alpha_1)\ldots\mathscr{A}(\alpha_n)\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n\times$$
$$\times\exp\left[-\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\frac{1}{i}D^c(x_i-x_j)\,\alpha_j\right]\exp\left[i\sum_{l=1}^{n}\alpha_l j(x_l)\right]. \tag{4.27}$$

4.4. Уравнения для связных частей функций Грина

Чтобы получить уравнения для связных частей функций Грина, выведем уравнение в вариационных производных для $G^T\{j\}$. Используя (4.5), получим

$$\begin{aligned}
G_x\{j\}&=G_x^T\{j\}\,G\{j\},\\
G_{xx}\{j\}&=G_{xx}^T\{j\}\,G\{j\}+G_x^T\{j\}^2\,G\{j\},\\
G_{xxx}\{j\}&=G_{xxx}^T\{j\}\,G\{j\}+3G_{xx}^T\{j\}\,G_x^T\{j\}\,G\{j\}+G_x^T\{j\}^3\,G\{j\}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

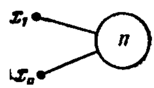
Подставляя формулы (4.28) в уравнение (4.7), получим уравнение

$$(\Box_x-\mu^2)\,G_x^T\{j\}=-4\lambda G_{xxx}^T\{j\}-12\lambda C G_x^T\{j\}-$$
$$-12\lambda G_{xx}^T\{j\}\,G_x^T\{j\}-4\lambda G_x^T\{j\}^3-ij(x). \tag{4.29}$$

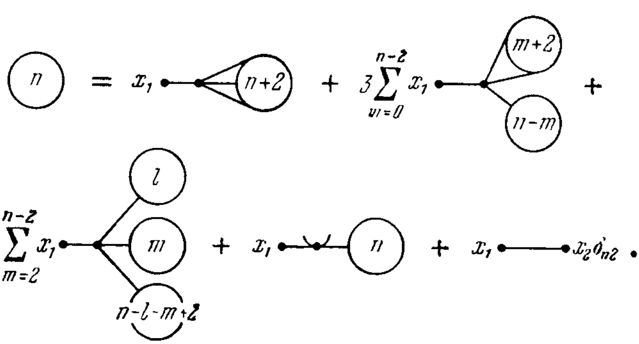
Решение этого уравнения можно получить методом теории возмущений. В результате получим ряд для связных частей функций Грина, сглаженных функциями $j(x)$.

Выполним в уравнении (4.29) вариационное дифференцирование по $j(x_2), \ldots, j(x_n)$ и положим $j = 0$. Тогда для $n = 2, 3, \ldots$ получим цепочку нелинейных уравнений для связных частей функций Грина ($x = x_1$):

$$(\Box_{x_1} - \mu^2)\, G_n^T(x_1, \ldots, x_n) = 4\lambda G_{n+2}^T(x_1, x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n) -$$
$$- 12\lambda C G_n^T(x_1, \ldots, x_n) + 12\lambda \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{\text{perm}}{}' G_{m+2}^T(x_1, x_1, x_{i_2}, \ldots x_{i_{m+1}}) \times$$
$$\times G_{n-m}^T(x_1, x_{i_{m+2}}, \ldots, x_{i_n}) + 4\lambda \sum_{l,m=2}^{n-2} \sum_{\text{perm}}{}' G_l^T(x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_l}) \times$$
$$\times G_m^T(x_1, x_{i_{l+1}}, \ldots, x_{i_{l+m-1}})\, G_{n-l-m+2}^T(x_1, x_{i_{l+m}}, \ldots, x_{i_n}) +$$
$$+ i\delta(x_1 - x_2)\,\delta_{n2}. \qquad (4.30)$$

$\sum\limits_{\text{perm}}{}'$ означает перестановку аргументов $x_1, \ldots, x_n$ только между функциями G_{m+2}^T и G_{n-m}^T в третьем слагаемом, между G_l^T, G_m^T и $G_{n-l-m+2}^T$ в четвертом слагаемом правой части уравнения (4.30). Обращая оператор $\Box_{x_1} - \mu^2$, получим цепочку интегральных уравнений, которые мы перепишем в графическом виде, используя обозначения (3.12), с той лишь разницей, что 

будет обозначать связную функцию Грина:



(4.31)

§ 5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА (ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЮКАВЫ)

Рассмотрим взаимодействие скалярного поля $\varphi(x)$ массы μ со спинорным полем $\psi(x)$ массы m. Полный лагранжиан системы взаимодействующих полей будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}(:\bar{\psi}\gamma^n\partial_n\psi: - :\partial_n\bar{\psi}\gamma^n\psi:) +$$
$$+\frac{1}{2}:\partial_n\varphi\partial^n\varphi: - m:\bar{\psi}\psi: - \frac{1}{2}\mu^2:\varphi^2: - \lambda:\bar{\psi}\psi\varphi:. \qquad (5.1)$$

Лагранжиан (5.1) приводит к следующей системе уравнений для взаимодействующих полей $\psi(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\begin{gathered}(\Box - \mu^2)\varphi(x) = \lambda:\bar{\psi}(x)\psi(x):,\\ (\gamma^n\partial_n + m)\psi(x) = -\lambda\psi(x)\varphi(x),\\ \partial_n\bar{\psi}(x)\gamma^n - m\bar{\psi}(x) = \lambda\bar{\psi}(x)\varphi(x),\end{gathered} \qquad (5.2)$$

где γ^n — матрицы Дирака, удовлетворяющие условию

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2g^{\mu\nu}. \qquad (5.3)$$

Одновременные коммутационные соотношения для полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут иметь вид

$$\begin{gathered}[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+|_{x^0=x'^0} = i\gamma^0\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ [\psi(x), \psi(x')]_+|_{x'^0=x^0} = [\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')]_+|_{x'^0=x^0} = 0,\\ [\psi(x), \varphi(x')]_- = [\bar{\psi}(x), \varphi(x')]_- = 0,\end{gathered} \qquad (5.4)$$

а поле $\varphi(x)$ удовлетворяет обычным коммутационным соотношениям (2.4). Совершенно аналогично определению (2.17) вводятся функции Грина взаимодействующих фермионных и бозонных полей:

$$G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= (\Phi_0, T(\psi_{\alpha_1}(y_1)\ldots\psi_{\alpha_m}(y_m)\bar{\psi}_{\beta_1}(z_1)\ldots\bar{\psi}_{\beta_m}(z_m)\varphi(x_1)\ldots$$
$$\ldots\varphi(x_n))\Phi_0). \qquad (5.5)$$

Здесь Φ_0 — вакуумное состояние для взаимодействующих бозонных и фермионных полей. Чтобы получить уравнения для функций $G_{m,n}$, мы воспользуемся уравнениями (5.2) и коммутационными соотношениями (2.4) и (5.4). Тогда, повторяя выкладки § 3, получим следующие формулы:

$$(\square_{x_1} - \mu^2) T(\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_m}(y_m) \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) =$$
$$= \lambda T(\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m) \sum_\alpha : \bar{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\alpha(x_1) : \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)) +$$
$$+ \sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_r) T(\psi_{\alpha_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m) \varphi(x_2) \dots$$
$$\dots \varphi(x_{r-1}) \varphi(x_{r+1}) \dots \varphi(x_n)), \quad (5.6)$$

$$\sum_\alpha (\gamma^n_{\alpha_1\alpha} \partial_{ny_1} + \delta_{\alpha_1\alpha} m) T(\psi_{\alpha_1}(y_1) \psi_{\alpha}(y_2) \dots \varphi(x_n)) =$$
$$= -\lambda T(\psi_{\alpha_1}(y_1) \varphi(y_1) \psi_{\alpha_2}(y_2) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m+r} \delta_{\alpha_1\beta_r} i\delta(y_1 - z_r) T(\psi_{\alpha_2}(y_2) \dots \psi_{\alpha_n}(y_m) \times$$
$$\times \bar{\psi}_{\beta_1}(z_1) \dots \psi_{\beta_{r-1}}(z_{r-1}) \psi_{\beta_{r+1}}(z_{r+1}) \dots \bar{\psi}_{\beta_m}(z_m) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)). \quad (5.7)$$

Используя (2.2), получим

$$\sum_\alpha : \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) := \sum_\alpha \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) - C', \quad (5.8)$$

где

$$C' = \sum_\alpha (\Phi_0, \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) \Phi_0) = \mathrm{Sp}\, \frac{1}{i} S^-(0) = \mathrm{Sp}\, \frac{1}{i} S^c(0),$$

а $S^c(x)$ — причинная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{\alpha'} (\gamma^n_{\alpha\alpha'} \partial_{n,x} + m\delta_{\alpha\alpha'}) S^c_{\alpha'\beta}(x - y) = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - y). \quad (5.9)$$

Подставляя (5.8) в (5.6), усредняя по вакууму формулы (5.6) и (5.7) и используя определение (5.5), получим следующие уравнения:

$$(\square_{x_1} - \mu^2) G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \dots, \beta_m z_m; x_1, \dots, x_n) =$$
$$= (-1)^{m+1} \sum_\alpha \lambda G_{m+1,n-1}(\alpha x_1, \alpha_1 y_1, \dots, \alpha_m y_m;$$
$$\alpha x_1, \beta_1 z_1, \dots, \beta_m z_m; x_2, \dots, x_n) - \lambda C' G_{m,n-1}(\alpha_1 y_1, \dots, \beta_m z_m; x_2, \dots, x_n) +$$
$$+ \sum_{r=2}^{n} i\delta(x_1 - x_r) G_{m,n-2}(\alpha_1 y_1, \dots, \beta_m z_m; x_2, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n), \quad (5.10)$$

$$\sum_\alpha (\gamma^n_{\alpha_1\alpha} \partial_{ny_1} + m\delta_{\alpha_1\alpha}) G_{m,n}(\alpha y_1, \alpha_2 y_2, \dots, \beta_m z_m; x_1, \dots, x_n) =$$
$$= -\lambda G_{m,n+1}(\alpha_1 y_1, \dots, \beta_m z_m; y_1, x_1, \dots, x_n) +$$

$$+\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m+r}\delta_{\alpha_1\beta_r}(-i)\,\delta(y_1-z_r)\,G_{m-1,n}(\alpha_2 y_2,\ldots,\alpha_m y_m;$$

$$\beta_1 z_1,\ldots,\beta_{r-1}z_{r-1},\beta_{r+1}z_{r+1},\ldots,\beta_m z_m;x_1,\ldots,x_n). \qquad (5.11)$$

Повторяя рассуждения § 3 с учетом (5.9), получим уравнения (5.10) и (5.11) в интегральной форме. Мы запишем их в матричном виде:

$$G_{m,n}(y_1,\ldots,x_n)=(-1)^{m+1}\,\mathrm{Sp}_1\Big[(-i\lambda)\int dx\,\frac{1}{i}D^c(x_1-x)\times$$

$$\times G_{m+1,n-1}(x,y_1,\ldots,y_m;\;x,z_1,\ldots,z_m;x_2,\ldots,x_n)\Big]+$$

$$+i\lambda C'\int G_{m,n-1}(y_1,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_m;x_2,\ldots,x_n)\frac{1}{i}D^c(x_1-x)\,dx+$$

$$+\sum_{r=2}^{n}\frac{1}{i}D^c(x_1-x_r)\,G_{m,n-2}(\alpha_1 y_1,\ldots,\beta_m z_m;\;x_2,\ldots,x_{r-1},\;x_{r+1},\ldots,x_n) \qquad (5.12\text{а})$$

и

$$G_{m,n}(y_1,\ldots,x_n)=$$

$$=(-i\lambda)\int dy\,\frac{1}{i}S^c(y_1-y)\,G_{m,n+1}(y,y_2,\ldots,z_m;y,x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m+r}\frac{1}{i}S^c(y_1-z_r)\otimes$$

$$\otimes G_{m-1,n}(y_2,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_{r-1},z_{r+1},\ldots,z_m;x_1,\ldots,x_n). \qquad (5.12\text{б})$$

Здесь Sp_1 обозначает операцию следа по индексам, стоящим при первых переменных функции $G_{m,n}$, т. е. при x. Уравнения (5.12) можно также переписать в операторной форме, если ввести операторы B_1 и B_2, определяемые правой частью уравнений (5.12):

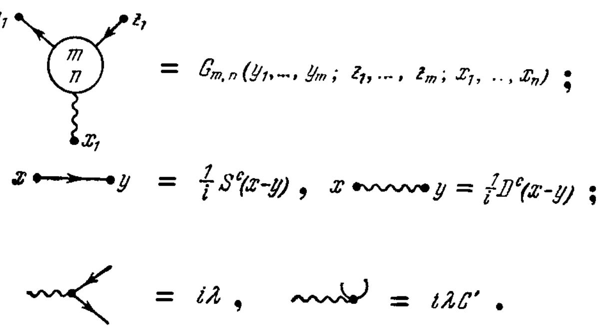
$$G=B_1G+G_0, \qquad (5.12')$$

$$G=B_2G+G_0. \qquad (5.12'')$$

Уравнение (5.12′), соответствующее первому уравнению (5.12), содержит слагаемое с бесконечной константой C'; это слагаемое нужно для сокращения сингулярностей, возникающих при совпадении аргументов двух фермионных групп. В уравнении (5.12″) константа C' отсутствует, так как при совпадении спинорной и скалярной переменной функция Грина не является сингулярной.

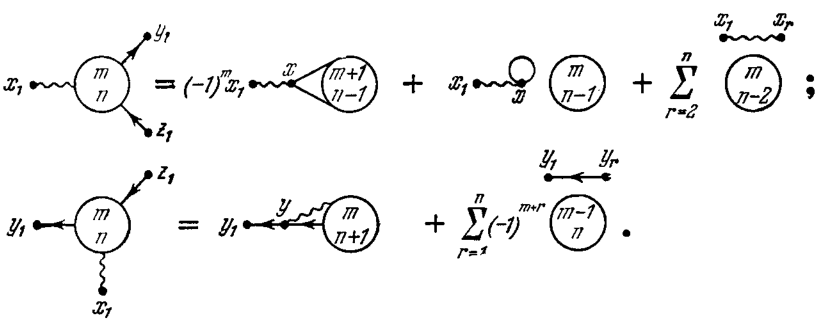
Так же как и в случае уравнений (3.23), в уравнениях (5.12′) и (5.12″) при итерации возникают расходящиеся при больших импульсах выражения. Как и прежде, эти расходимости можно исключить введением в лагранжиан дополнительных контрчленов. Нужно отметить, что для взаимодействия Юкавы (5.1) введение контрчленов необходимо даже в двумерной теории, хотя число контрчленов для $d = 2$ уменьшается до одного. В гл. IV, где будут проводиться исследования решения уравнений для функций Грина взаимодействия Юкавы, мы выпишем явный вид этих контрчленов и покажем, как с их помощью устранить ультрафиолетовые расходимости.

Введем графические обозначения:



(5.13)

По замкнутым фермионным циклам берется шнур. Уравнения (5.12) в обозначениях (5.13) будут иметь вид



(5.14)

Как и в скалярном случае, из уравнения (5.12) легко получить функциональные уравнения для порождающего функционала. В случае спинорного поля обычно вводятся [201, 202] антикоммутирующие источники внешнего поля $\bar{\eta}(x)$ и $\eta(x)$, для которых

$$
\begin{gathered}
[\eta(x),\eta(y)]_+ = [\bar{\eta}(x),\bar{\eta}(y)]_+ = [\eta(x),\bar{\eta}(y)]_+ = 0,\\
\left[\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\right]_+ = 0,\\
\left[\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\bar{\eta}(y)\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)},\eta(y)\right]_+ = 0, \qquad (5.15)\\
\left[\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\eta(y)\right]_+ = \left[\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)},\bar{\eta}(y)\right]_+ = \delta(x-y),\\
[\eta(x),\psi(y)]_+ = [\eta(x),\bar{\psi}(y)]_+ = [\bar{\eta}(x),\psi(y)]_+ = [\bar{\eta}(x),\bar{\psi}(y)]_+ = 0.
\end{gathered}
$$

Порождающий функционал для функций Грина (5.5) определяется выражением

$$
\begin{aligned}
G\{\bar{\eta},\eta,j\} &=\\
&= \left(\Phi_0, T\exp\left[i\int dx\,(\bar{\eta}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\eta(x)+j(x)\varphi(x))\right]\Phi_0\right) =\\
&= \sum_{l,m,n=0}^{\infty}\frac{i^{n+l+m}}{l!m!n!}\int dy_1\ldots dy_l\,dz_1\ldots dz_l\,dx_1\ldots dx_n\times\\
&\times\bar{\eta}(y_l)\ldots\bar{\eta}(y_1)\,G_{l,m,n}(y_1,\ldots,y_l;z_1,\ldots,z_m;x_1,\ldots,x_n)\times\\
&\times\eta(z_m)\ldots\eta(z_1)\,j(x_1)\ldots j(x_n). \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Из определения (5.16) с учетом соотношений (5.15) будем иметь выражение функций Грина через порождающий функционал:

$$
\begin{aligned}
G_{l,m,n}&(y_1,\ldots,y_l;z_1,\ldots,z_m;x_1,\ldots,x_n) =\\
&= (-i)^{l+m+n}\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\delta}{\delta\eta(z_i)}\right]\prod_{j=1}^{l}\left[\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y_j)}\right]\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\delta}{\delta j(x_k)}\right]\times\\
&\times G\{\bar{\eta},\eta,j\}\,|_{\bar{\eta}=\eta=j=0}. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Выражение (5.17) определяет функции $G_{l,m,n}$ при произвольных l и m, однако требование инвариантности функций Грина относительно зарядового сопряжения приводит к равенству $l=m$.

Мы предоставляем возможность читателю провести нетрудный, но довольно громоздкий вывод уравнений для функционала (5.16). В случае квантовой электродинамики такие уравнения будут получены в гл. VIII.

§ 6. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

В этом параграфе мы получим другой тип уравнений для функций Грина. Эти уравнения будут описывать эволюцию функций Грина по константе взаимодействия. Такие уравнения были получены в работах [74, 79, 80, 89, 96]. Простоты ради будем исследовать только скалярное взаимодействие с лагранжианом (2.1). Рассмотрим производную по константе взаимодействия от матрицы рассеяния. Дифференцируя выражение (1.1) по λ, получим известную формулу [97, 160].

$$\frac{d}{d\lambda} S = iT\left(\int :\varphi^4(x): S\,dx\right). \tag{6.1}$$

Используя теперь определение (3.15), легко получить соотношение

$$\frac{d}{d\lambda}\left(S_0 G_n(x_1, \ldots, x_n)\right) = \left(\Omega_0, T\left(\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \frac{d}{d\lambda} S\right)\Omega_0\right). \tag{6.2}$$

Подставляя сюда вместо $\frac{dS}{d\lambda}$ выражение (6.1), получим

$$\frac{d}{d\lambda}\left(S_0 G_n(x_1, \ldots, x_n)\right) = i\int dx\,(\Omega_0, T(:\varphi^4(x):\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,S)\,\Omega_0) =$$

$$= i\int dx\,(S_0 G_{n+4}(x, x, x, x, x_1, \ldots, x_n)) -$$

$$- 6iC\int dx\,(S_0 G_{n+2}(x, x, x_1, \ldots, x_n)) + 3iC^2\int dx\,(S_0 G_n(x_1, \ldots, x_n)). \tag{6.3}$$

Начальное условие для такого уравнения будет выглядеть так:

$$G_n\big|_{\lambda=0} = G_n^0,$$

где G_n^0 — свободная n-частичная функция Грина.

Ввиду того, что S_0 зависит от λ, в уравнениях (6.3) нельзя выделить вакуумные вклады, и поэтому итерации этих уравнений будут содержать члены, соответствующие вакуумным диаграммам. Чтобы решить уравнение (6.3), введем последовательность $G = \{S_0 G_n(x_1, \ldots, x_n)\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда цепочку уравнений (6.3) легко переписать в виде одного абстрактного уравнения для всей последовательности G:

$$\frac{d}{d\lambda} G = KG, \quad G\big|_{\lambda=0} = G^0 = \{G_n^0\}_{n=0}^{\infty}. \tag{6.4}$$

Оператор K действует на последовательность $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$(Kf)_n(x_1, \ldots, x_n) = i\int dx\, f_{n+4}(x, x, x, x, x_1 \ldots, x_n) -$$

$$-6iC\int dx\, f_{n+2}(x, x, x_1, \ldots, x_n) + 3iC^2\int dx\, f_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{6.5}$$

Решение уравнения (6.4) можно формально записать в виде

$$G = e^{\lambda K} G^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} K^n G^0. \qquad (6.6)$$

Ряд (6.6) является полным неперенормированным рядом теории возмущений для всех функций Грина, включая вклады от вакуумных диаграмм.

Заканчивая рассмотрение алгебраической структуры функций Грина и уравнений для них, нужно отметить, что этим не исчерпываются возможные уравнения для функций Грина. Мы рассмотрели в этой главе лишь известные в настоящее время уравнения, которые получены из динамических принципов.

В последние годы в теории наметился «кинематический» подход к нахождению или качественному описанию функций Грина. В таком подходе показано, что функции Грина удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям в частных производных (уравнения Гелл-Манна — Лоу [37], Боголюбова — Ширкова [20—23, 204], Овсянникова [117], Келлена—Симанзика [95, 158], Вайнберга [29]). Решения таких уравнений имеют функциональный произвол, но позволяют качественно получить некоторые результаты.

Уравнения для функций Грина обладают, на наш взгляд, одним существенным недостатком — операторы B и K, их определяющие, не симметричны. Так, из чисто формальных соображений ясно, что оператор K не может быть симметричным, ибо, согласно (6.5), он определяется операторнозначной матрицей, в которой отличны от нуля только элементы над диагональю. В следующей главе мы получим уравнения для величин, тесно связанных с функциями Грина,— коэффициентных функций S-матрицы, которые будут определяться симметричными операторами.

Глава II

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Матрица рассеяния единственным образом определяется последовательностью своих коэффициентных функций. Коэффициентные функции были введены в квантовую теорию поля в работах Боголюбова — Ширкова — Медведева — Поливанова [14, 15, 24, 25]. Коэффициентные функции тесно связаны с функциями Грина, и для них также можно вывести два типа уравнений — уравнения эволюционного типа, образованные дифференцированием матрицы рассеяния по константе связи, и уравнения резольвентного типа, образованные варьированием по свободному полю. Уравнения первого типа восстанавливают полностью структуру матрицы рассеяния, т. е. все возможные диаграммы, содержащиеся в виковском функционале Te^{iL_I}, уравнения второго типа продуцируют диаграммы, лишенные вакуумных петель.

§ 7. УРАВНЕНИЯ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ F_n

Линейные уравнения для коэффициентных функций F_n были выведены в работах [78—80, 124, 126] и в дальнейшем применялись для исследования матрицы рассеяния в различных моделях квантовой теории поля [74—77, 81—84, 127—129, 134—138, 206]. Следует отметить, что ряд авторов [99, 103, 104, 167] рассматривали нелинейные уравнения для коэффициентных функций, которые следовали из аксиом теории и при выводе которых не использовался вид лагранжиана. В настоящей работе мы не рассматриваем таких уравнений.

Для вывода уравнений резольвентного типа мы воспользуемся известной формулой ([25], § 47), которую легко получить вариационным дифференцированием выражения (1.1) для матрицы рассеяния:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(x)} = iT\left(\frac{\partial \mathscr{L}_I}{\partial \varphi_0(x)} \exp\left[i\int \mathscr{L}_I(y)\,dy\right]\right). \tag{7.1}$$

7.1. Взаимодействие скалярных полей с лагранжианом (2.1)

В этом случае выражение (7.1) примет вид

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(x)} = -4i\lambda T\left(:\varphi_0^3(x):S\right). \tag{7.2}$$

Подставляя в это выражение разложение (1.1) и используя теорему Вика для T-произведения ([25], § 19), приведем правую часть (7.2) к нормальному виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}} \int dx_2 \ldots dx_n F_n(x, x_2, \ldots, x_n) :\varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n): =$$

$$= -4\lambda i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times T(:\varphi_0^3(x): :\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n):) =$$

$$= -4\lambda i \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{6\binom{n}{3}}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n) \times \right.$$

$$\times \overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_1)}\,\overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_2)}\,\overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_3)} :\varphi_0(x_4) \ldots \varphi_0(x_n): +$$

$$+ \frac{6\binom{n}{2}}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_1)}\,\overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_2)} :\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_3) \ldots \varphi_0(x_n): +$$

$$+ \frac{3\binom{n}{1}}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n)\, \overbracket{\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_1)} :\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_2) \ldots$$

$$\ldots \varphi_0(x_n): + \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dx_1 \ldots dx_n :\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x_1) \ldots$$

$$\left. \ldots \varphi_0(x_n): F_n(x_1, \ldots, x_n) \right\}. \tag{7.3}$$

Выполняя в (7.3) очевидные элементарные преобразования в интегралах и суммах, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}} \int dx_2 \ldots dx_n F_n(x, x_2, \ldots, x_n) :\varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n): =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}} \int dx_2 \ldots dx_n (-4\lambda i) \left\{ \sqrt{(n+2)(n+1)} \int dx_1' dx_2' dx_3' \times \right.$$

$$\times \frac{1}{i} D^c(x - x_1') \frac{1}{i} D^c(x - x_2') \frac{1}{i} D^c(x - x_3') \times$$

$$\times F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+3\sum_{i_1\neq 1}^{n}\delta(x-x_{i_1})\int dx_1'dx_2'\frac{1}{i}D^c(x-x_1')\frac{1}{i}D^c(x-x_2')\times$$

$$\times F_n(x_1', x_2', x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, x_n)+$$

$$+3\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq 1}^{n}\delta(x-x_{i_1})\delta(x-x_{i_2})\times$$

$$\times\int dx_1'\frac{1}{i}D^c(x-x_1')F_{n-2}(x_1', x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, x_n)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3\neq 1}^{n}\delta(x-x_{i_1})\delta(x-x_{i_2})\delta(x-x_{i_3})\times$$

$$\times F_{n-4}(x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, \hat{x}_{i_3}, \dots, x_n)\}:\varphi_0(x_2)\dots\varphi_0(x_n):. \quad (7.4)$$

На основании работы [102] равенство (7.4) справедливо, если равны коэффициенты при одинаковых степенях полей $\varphi_0(x_1)\dots\varphi_0(x_n)$. Приведем простые рассуждения. Введем функции

$$\Phi_n(x, x_2, \dots, x_n)=\frac{n}{\sqrt{n!}}(F_n(x, x_2, \dots, x_n)-4i\lambda\{\dots\}), \quad n=1, 2, \dots,$$

где фигурные скобки $\{\dots\}$ обозначают коэффициент при $:\varphi_0(x_1)\dots$ $\dots\varphi_0(x_n):$ в правой части уравнения (7.4). Тогда это уравнение примет вид

$$\Phi_x=\sum_{n=1}^{\infty}\int dx_2\dots dx_n\Phi_n(x, x_2, \dots, x_n):\varphi_0(x_2)\dots\varphi_0(x_n):=0.$$

Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда все $\Phi_n(x, x_2, \dots, x_n)=0$. Действительно, из равенства $(\Omega_b, \Phi_x\Omega_b)=0$ следует, что $\Phi_1(x)=0$. Дальше из равенства

$$(\Omega_b, T(\varphi(y_1)\Phi_x)\Omega_b)=0$$

имеем

$$\int dx_2\frac{1}{i}D^c(y_1-x_2)\Phi_2(x, x_2)=0,$$

и, следовательно, $\Phi_2(x, x_2)=0$. Совершенно аналогично из условия

$$(\Omega_b, T(\varphi(y_1)\varphi(y_2)\Phi_x)\Omega_b)=0$$

легко получить, что

$$2\int \frac{1}{i} D^c(y_1 - x_2) \frac{1}{i} D^c(y_2 - x_3) \Phi_3(x, x_2, x_3)\, dx_2 dx_3 + \\ + \frac{1}{i} D^c(y_1 - y_2) \Phi_1(x) = 0.$$

Учитывая, что $\Phi_1(x)=0$, заключаем, что $\Phi_3(x, x_2, x_3)=0$. Теперь по индукции из $(\Omega_b, T(\varphi(y_1)\dots\varphi(y_n)\Phi_x)\Omega_b) = 0$ и $\Phi_i(x, x_2, \dots, x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ следует равенство

$$\int dx_2 \dots dx_{n+1} \frac{1}{i} D^c(y_1 - x_2) \dots \frac{1}{i} D^c(y_n - x_{n+1}) \times \\ \times \Phi_{n+1}(x, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0,$$

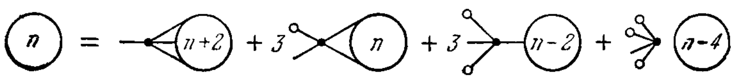
что эквивалентно $\Phi_{n+1}(x, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$.

Приведенные рассуждения позволяют получить из равенства (7.4) цепочку уравнений для коэффициентных функций $(x \to x_1)$:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 4\lambda i \Big\{\sqrt{(n+2)(n+1)} \int dx_1' dx_2' dx_3' \times \\ \times \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_1') \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2') \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_3') \times \\ \times F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_2, \dots, x_n) + 3 \sum_{i_1 \neq 1}^{n} \delta(x_1 - x_{i_1}) \int dx_1' dx_2' \times \\ \times \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_1') \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_2') F_n(x_1', x_2', x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, x_n) + \\ + \frac{3}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq 1}^{n} \delta(x_1 - x_{i_1}) \delta(x_1 - x_{i_2}) \times \\ \times \int dx_1' \frac{1}{i} D^c(x_1 - x_1') F_{n-2}(x_1', x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, x_n) + \\ + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq 1}^{n} \delta(x_1 - x_{i_1}) \delta(x_1 - x_{i_2}) \delta(x_1 - x_{i_3}) \times \\ \times F_{n-4}(x_2, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, \hat{x}_{i_3}, \dots, x_n)\Big\}. \quad (7.5)$$

Уравнения для коэффициентных функций F_n имеют одно очевидное преимущество по сравнению с уравнениями Швингера (3.11). Они не содержат бесконечной константы C, что облегчает математическое исследование их решений. В дальнейшем нам понадобятся уравнения (7.5) в графической форме. Введем для этого следующие обозначения: кружок  будет обозначать функцию $\sqrt{n!}\,F_n(\ldots)$), внутренней вершине  соответствует множитель $(-4\lambda i)$, внутренней линии x •——• y — функция $\frac{1}{i} D^c(x-y)$, внешней линии x •——• y — функция $\delta(x-y)$, а ○——• y — сумма $\sum\limits_{i=2}^{n} \delta(x_i - y)$.

По внутренним вершинам выполняется интегрирование. В этих обозначениях уравнение (7.5) будет иметь следующий вид:



Если формально ввести оператор A, определяемый правой частью уравнения (7.5), то в пространстве последовательностей $F = \{F_n\}_1^\infty$ уравнение для F приобретает вид абстрактного уравнения резольвентного типа:

$$F = \lambda A F + F^{(0)}, \quad F^{(0)} = (0, 0, 0, f_0, 0, \ldots), \tag{7.5''}$$

где f_0 — вклад от вершины, умноженный на $F_0 = (\Omega_0, S\Omega_0)$. Решение уравнения (7.5) имеет вид

$$F = (1 - \lambda A)^{-1} F^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n F^{(0)}. \tag{7.6}$$

Так как $F^{(0)} = F_0 \cdot F^{(0)\prime}$, где $F^{(0)\prime} = \Big(0, 0, 0,$ $, 0, \ldots\Big)$, то для решения уравнения (7.5) имеем

$$F = F_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n F^{(0)\prime}. \tag{7.7}$$

Выражение (7.7) показывает, что вакуумные вклады выделяются в виде множителя, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n F^{(0)\prime}$ является рядом теории возмущений для матрицы рассеяния без вакуумных петель. Следовательно, в уравнении (7.5″) можно исключить вакуумные вклады и рассматривать уравнение

$$F' = \lambda A F' + F^{(0)\prime}, \tag{7.8}$$

где $F' = F/F_0$.

7.2. Взаимодействие Юкавы

В случае взаимодействия (5.1) вместо формулы (7.1) будем иметь три формулы:

$$\frac{\delta S}{\delta\psi_0(x)} = \lambda i T(:\bar{\psi}_0(x)\varphi_0(x): S), \tag{7.9}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\bar{\psi}_0(x)} = -\lambda i T(:\psi_0(x)\varphi_0(x): S), \tag{7.10}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi_0(x)} = -\lambda i T(:\bar{\psi}_0(x)\psi_0(x): S). \tag{7.11}$$

Разложение S-матрицы по свободным полям $\bar{\psi}_0(x), \psi_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ будет иметь более сложную структуру, чем выражение (1.1). Опуская спиновые индексы, запишем его в виде

$$S = \sum_{m,n} \frac{1}{m!\sqrt{n!}} \int dy_1 \dots dy_m\, dz_1 \dots dz_m\, dx_1 \dots dx_n \times$$
$$\times :\bar{\psi}_0(y_1) \dots \bar{\psi}_0(y_m) F_{m,n}(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_m; x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\times \psi_0(z_1) \dots \psi_0(z_m)\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n):. \tag{7.12}$$

Здесь $F_{m,n} \equiv F_{m,n}(\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \dots, \beta_m z_m; x_1, \dots, x_n)$, $\psi_0(z) \equiv \equiv \{\psi_{0,\alpha}(z)\}_{\alpha=1}^{\alpha=d}$. Подставляя разложение (7.12) в уравнение (7.9), получим

$$\sum_{m,n} \frac{(-1)^m m}{m!\sqrt{n!}} \int dy_1 \dots dy_m\, dz_2 \dots dz_m\, dx_1 \dots dx_n \times$$
$$\times :\bar{\psi}_0(y_1) \dots \bar{\psi}_0(y_m) F_{m,n}(y_1, \dots, y_m; x, z_2, \dots, z_m; x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\times \psi_0(z_2) \dots \psi_0(z_m)\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n): =$$
$$= \lambda i \sum_{m,n} \frac{1}{m!\sqrt{n!}} \int dy_1 \dots dy_m\, dz_1 \dots dz_m\, dx_1 \dots dx_n \times$$
$$\times T(:\bar{\psi}_0(x)\varphi_0(x): :\bar{\psi}_0(y_1) \dots \bar{\psi}_0(y_m) \times$$
$$\times F_{m,n}(y_1, \dots, y_m; z_1, \dots, z_m; x_1, \dots, x_n) \times$$
$$\times \psi_0(z_1) \dots \psi_0(z_m)\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n):) =$$
$$= \lambda i \sum_{m,n} \frac{1}{m!\sqrt{n!}} \int dy_1 \dots dy_m\, dz_1 \dots dz_m\, dx_1 \dots dx_n \times$$
$$\times \{-(-1)^m nm :\bar{\psi}_0(y_1) \dots \bar{\psi}_0(y_m) \times$$

$$\times F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n)\, \psi_0(z_2) \ldots \psi_0(z_m) \times$$

$$\times \varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n) : \psi_0(z_1)\, \bar{\psi}_0(x)\, \varphi_0(x)\, \varphi_0(x_1) -$$

$$-(-1)^m m : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_m) \times$$

$$\times F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \psi_0(z_2) \ldots \psi_0(z_m)\, \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n)\, \varphi_0(x) : \psi_0(z_1)\, \bar{\psi}_0(x) +$$

$$+ n : \bar{\psi}_0(x)\, \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_m) \times$$

$$\times F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1. \ldots, x_n) \times$$

$$\times \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m)\, \varphi_0(x_2) \ldots \varphi_0(x_n) : \varphi_0(x)\, \varphi_0(x_2) +$$

$$+ : \bar{\psi}_0(x)\, \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_m)\, F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m)\, \varphi_0(x)\, \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n) : \}. \qquad (7.13)$$

Выполняя в (7.13) преобразования в интегралах и суммах и приравнивая коэффициенты при одинаковых нормальных произведениях полей (одновременно заменяя $x \to z_1, z_1 \to z, x_1 \to x$), получим цепочку уравнений

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (-i\lambda)\sqrt{n+1} \int dz\, dx\, F_{m,n+1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_2, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots x_n) \times$$

$$\times \frac{1}{i} S^c(z - z_1) \frac{1}{i} D^c(x - z_1) +$$

$$+ (-i\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i_1=1}^{n} \int dz\, F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_2, \ldots, z_m;$$

$$x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, x_n) \frac{1}{i} S^c(z - z_1)\, \delta(z_1 - x_{i_1}) +$$

$$+ (-i\lambda)\sqrt{n+1}\,(-1)^{m-1} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} I\delta(z_1 - y_j) \otimes$$

$$\otimes \int dx \frac{1}{i} D^c(z_1 - x)\, F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m;$$

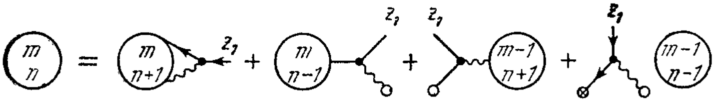
$$z_2, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+(-i\lambda)(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} I\delta(z_1-y_j)\,\delta(z_1-x_i)\otimes$$

$$\otimes F_{m-1,n-1}(y_1,\dots,\hat{y}_j,\dots,y_m;\,z_2,\dots,z_m;\,x_1,\dots\hat{x}_i,\dots,x_n), \qquad (7.14)$$

где I — единичная матрица, $I=((\delta_{\alpha\beta}))$.

Графическое представление уравнения (7.14) имеет вид



(7.14′)

Как и раньше, $\begin{smallmatrix} m\\ n\end{smallmatrix}$ обозначает функцию $\sqrt{n!\,(m!)^2}\,F_{m,n}(\dots)$, внешним скалярным линиям $x \bullet\!\sim\!\sim\!\sim\!\bullet y$ соответствуют функции $\delta(x-y)$, внешним спинорным линиям $\alpha y\bullet\!\!-\!\!\leftarrow\!\!-\!\!\bullet\beta z$ соответствует величина $\delta_{\alpha\beta}\delta(y-z)$, а $\otimes\!\!-\!\!\leftarrow\!\!-\!\!\bullet\beta$ — сумма $\sum\limits_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\delta_{\alpha_j\beta}\delta(y_j-z)$.

Соответственно для внутренних линий $x\bullet\!\sim\!\sim\!\sim\!\bullet y \equiv \frac{1}{i}D^c(x-y)$, $\alpha_1 y\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet\beta_1 z \equiv \frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(y-z)$, а внутренней вершине соответствует числовой множитель $(-i\lambda)$. Во внутренних вершинах выполняется интегрирование по координатным переменным и суммирование по дискретным индексам α и β. Вывод двух других уравнений, которые соответствуют выражениям (7.10) и (7.11), мы предоставляем читателю и запишем лишь их окончательный вид. Подставляя (7.12) в (7.10), находим

$$F_{m,n}(y_1,\dots,y_m;\,z_1,\dots,z_m;\,x_1,\dots,x_n)=$$

$$=(-i\lambda)\sqrt{n+1}\int dy\,dx\,\frac{1}{i}S^c(y_1-y)\times$$

$$\times\frac{1}{i}D^c(y_1-x)\,F_{m,n+1}(y,y_2,\dots,y_m;\,z_1,\dots,z_m;\,x,x_1,\dots,x_n)+$$

$$+(-i\lambda)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\delta(y_1-x_i)\int dy\,\frac{1}{i}S^c(y_1-y)\times$$

$$\times F_{m,n-1}(y,y_2,\dots,y_m;\,z_1,\dots,z_m;\,x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)+$$

$$+(-i\lambda)\sqrt{n+1}\,(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}I\delta(y_1-z_j)\otimes$$

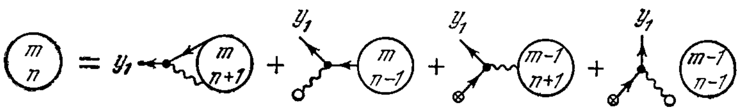
$$\otimes \int dx \frac{1}{i} D^c (y_1 - x) \times$$

$$\times F_{m-1,n+1}(y_2, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ (-i\lambda)(-1)^{m-1} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} I\delta(y_1 - z_j)\,\delta(y_1 - x_i) \otimes$$

$$\otimes F_{m-1,n-1}(y_2, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n). \quad (7.15)$$

В графических обозначениях



(7.15′)

И, наконец, из (7.11) следует уравнение

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (-i\lambda)(m+1)(-1)^{m+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Sp}_1 \int dy\, dz \frac{1}{i} S^c(x_1 - y) \times$$

$$\times F_{m+1,n-1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m; x_2, \ldots, x_n) \frac{1}{i} S^c(z - x_1) +$$

$$+ (-i\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \delta(x_1 - y_j) \times$$

$$\times \int dy \frac{1}{i} S^c(x_1 - y) F_{m,n-1}(y, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ (-i\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \delta(x_1 - z_j) \times$$

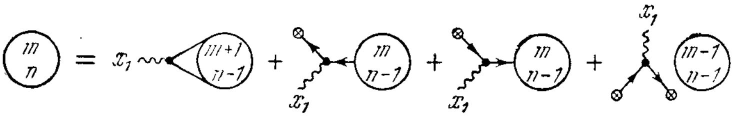
$$\times \int dz\, F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m; x_2, \ldots, x_n) \frac{1}{i} S^c(z - x_1) +$$

$$+ (i\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{m-1} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \delta(x_1 - y_{j_1}) \times$$

$$\times \delta(x_1 - z_{j_2})\, I \otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, y_j, \ldots y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_{j_2}, \ldots, z_m;$$

$$x_2, \ldots, x_n),\ I = ((\delta_{\alpha_j, \beta_j})) \quad (7.16)$$

или



(7.16′)

Систему уравнений (7.14)—(7.16) можно также записать в операторной форме. Итерации этих уравнений восстанавливают всю совокупность вкладов (без вакуумных петель) диаграмм Фейнмана для лагранжиана (5.1). Подчеркнем, что уравнения для коэффициентных функций получены совершенно формально, как и уравнения для функций Грина. В следующих главах им будет придан четкий математический смысл после введения сглаживаний сингулярных функций.

§ 8. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ ГРИНА

В этом параграфе будет показано, что из уравнений Швингера для функций Грина (3.11) могут быть получены уравнения для коэффициентных функций S-матрицы (7.5) и наоборот. Ради простоты изложения будем рассматривать только скалярное взаимодействие. Вначале введем некоторые сокращенные обозначения для сумм, которые будут фигурировать в наших рассуждениях.

1. Символом $(1, \ldots, n)$ мы обозначим обычную последовательность чисел от 1 до n.

2. В сумме $\sum\limits_{(i_1, \ldots, i_{2k})}^{(1, \ldots, n)}$ суммирование выполняется по всем возможным неповторяющимся k-парам из $(1, \ldots, n)$.

3. $\sum\limits_{(i_1, \ldots, i_l)}^{(1, \ldots, n)}$ — сумма по всем возможным неповторяющимся l-индексам $i_1, \ldots, i_l$ из $(1, \ldots, n)$.

8.1. Связь функций Грина с коэффициентными функциями S-матрицы

Чтобы установить связь между функциями Грина и коэффициентными функциями матрицы рассеяния, введем сначала вспомогательные «одетые» коэффициентные функции

$$\tilde{F}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{n!} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{i} D^c(x_j - x'_j)\, dx'_j F_n(x'_1, \ldots, x'_n). \quad (8.1)$$

Подставляя теперь разложение (1.1) в формулу (5.15) и применяя теорему Вика для T-произведения, получим формулу, связывающую функции G_n и $\widetilde{F}_n$. Для $n=2k$ имеем

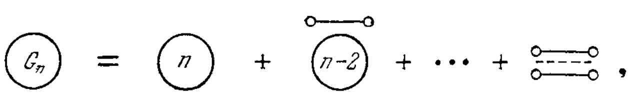
$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \widetilde{F}_n(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{[j_1, j_2]}^{(1, \ldots, n)} \frac{1}{i} D^c(x_{j_1} - x_{j_2}) \widetilde{F}_{n-2}(x_1, \ldots, \widehat{x}_{j_1}, \ldots \\ \ldots, \widehat{x}_{j_2}, \ldots, x_n) + \ldots + \sum_{[j_1, \ldots, j_{2k}]}^{(1, \ldots, n)} \frac{1}{i} D^c(x_{j_1} - x_{j_2}) \ldots \\ \ldots \frac{1}{i} D^c(x_{j_{2k-1}} - x_{j_{2k}}). \quad (8.2а)$$

Для $n=2k+1$

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \widetilde{F}_n(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{[j_1, j_2]}^{(1, \ldots, n)} \frac{1}{i} D^c(x_{j_1} - x_{j_2}) \widetilde{F}_{n-2}(x_1, \ldots, \widehat{x}_{j_1}, \ldots \\ \ldots, \widehat{x}_{j_2}, \ldots, x_n) + \ldots + \sum_{[j_1, \ldots, j_{2k}]\,\{i_1\}}^{(1, \ldots, n)} \frac{1}{i} D^c(x_{j_1} - x_{j_2}) \ldots \\ \ldots \frac{1}{i} D^c(x_{j_{2k-1}} - x_{j_{2k}}) \widetilde{F}_1(x_{i_1}). \quad (8.2б)$$

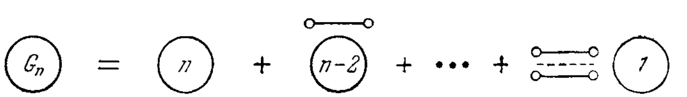
Формулы (8.2а) и (8.2б) становятся более понятными, если их записать в диаграммном виде:

для $n=2k$



(8.2а′)

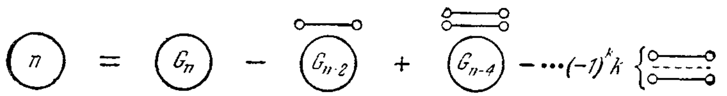
для $n=2k+1$



(8.2б′)

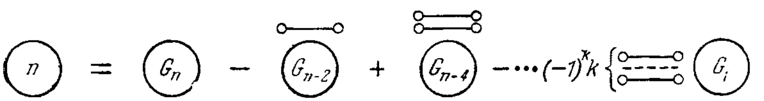
Легко доказать, например, методом математической индукции, что формулы (8.2а) и (8.2б) обратимы. Мы предоставляем читателю выполнить это нетрудное упражнение. Обратная связь будет иметь вид:

для $n = 2k$



(8.3)

для $n = 2k + 1$



(8.4)

Вывод выражений (8.3) и (8.4) нужно проводить аналитическим методом, так как на диаграммах не видно кратности повторения аналитических выражений.

Пользуясь формулами (8.2)—(8.4), можно непосредственной подстановкой убедиться в эквивалентности уравнений (3.11) и (7.5). Такое доказательство содержится, например, в [79, 80], однако оно требует громоздких вычислений. Вместо этого мы получим уравнение для производящего функционала $F\{j\}$ коэффициентных функций F_n и докажем его эквивалентность уравнению Швингера в вариационных производных (4.7).

8.2. Уравнение для производящего функционала коэффициентных функций F_n

Вопрос алгебраической эквивалентности может быть разрешен с помощью уравнений в функциональных производных [139]. В этом пункте будет получено уравнение для функционала $F\{j\} = S\{j\}$ (4.22) и показано, что это уравнение эквивалентно вариационному уравнению Швингера для функционала $G(j)$. Используя (7.2) и формулы (4.20) — (4.22), получим

$$\frac{\delta F\{j\}}{\delta j(x)} = -4i\lambda\,(\Omega_0, T\,(:[\varphi_0(x) + j(x)]^3 : S(\varphi_0 + j))\,\Omega_0). \qquad (8.5)$$

Раскрывая T-произведение и используя формулы (4.20), (4.21) и формулы (см. п. 3.2)

$$\overbrace{\varphi_0(x)\,S}(\varphi_0) = \int dy\,\frac{1}{i}\,D^c(x-y)\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_0(y)},$$

$$\varphi_0(x)\varphi_0(x)S = \int dy_1 dy_2 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_0(y_1)\delta\varphi_0(y_2)}, \quad (8.6)$$

$$\varphi_0(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)S =$$

$$= \int dy_1 dy_2 dy_3 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{1}{i} D^c(x-y_3) \times$$

$$\times \frac{\delta^3 S}{\delta\varphi_0(y_1)\delta\varphi_0(y_2)\delta\varphi_0(y_3)},$$

получим уравнение для функционала $F\{j\}$ [139]:

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} F\{j\} =$$

$$= -4i\lambda \int dy_1 dy_2 dy_3 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{1}{i} D^c(x-y_3) \times$$

$$\times \frac{\delta^3 F\{j\}}{\delta j(y_1)\delta j(y_2)\delta j(y_3)} - 12i\lambda j(x) \int dy_1 dy_2 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \times$$

$$\times \frac{\delta^2 F\{j\}}{\delta j(y_1)\delta j(y_2)} - 12i\lambda j^2(x) \int dy_1 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{\delta F\{j\}}{\delta j(y_1)} -$$

$$- 4i\lambda j^3(x) F\{j\}. \quad (8.7)$$

Варьируя уравнение (8.7) по $j(x_2) \ldots j(x_n)$ и полагая $j \equiv 0$, получим уравнение (7.5). Покажем, что уравнение (8.7) эквивалентно уравнению (4.7′). Воспользуемся связью (8.2) между функциями Грина $G_n(\ldots)$ и функциями $\tilde{F}_n(\ldots)$. Легко видеть, что связь между порождающими функционалами этих функций определяется формулой

$$G\{j\} = \tilde{F}\{j\} e^{-1/2 j\cdot D\cdot j}, \quad (8.8)$$

где

$$j\cdot D\cdot j = \int dx dy j(x) \frac{1}{i} D^c(x-y) j(y).$$

Перепишем уравнение (4.7) в таком виде:

$$G_x\{j\} = 4i\lambda \int dy \frac{1}{i} D^c(x-y) G_{yyy}\{j\} +$$

$$+ 12i\lambda \frac{1}{i} D^c(0) \int dy D^c(x-y) G_y\{j\} - \int dy \frac{1}{i} D^c(x-y) j(y) G\{j\}. \quad (8.9)$$

Используя (8.8), находим

$$G_x\{j\} = \tilde{F}_x\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j} - \int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, j(y)\, \tilde{F}\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j}, \quad (8.10)$$

$$G_{xxx}\{j\} =$$

$$= \tilde{F}_{xxx}\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j} - 3\int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, j(y)\, \tilde{F}_{xx}\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j} +$$

$$+ 3\,\frac{1}{i} D^c(0) \int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, j(y)\, \tilde{F}\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j} -$$

$$- \left(\int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, j(y)\right)^3 F\{j\}\, e^{-1/2 j\cdot D\cdot j}. \quad (8.11)$$

Подставляя выражения (8.8), (8.10), (8.11) в уравнение (8.9) и сокращая на $e^{-1/2 j\cdot D\cdot j}$, получим уравнение для $\tilde{F}\{j\}$:

$$\tilde{F}_x\{j\} = 4i\lambda \int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, \tilde{F}_{yyy}\{j\} -$$

$$- 12i\lambda \int dy\, dy_1\, \frac{1}{i} D^c(x-y_1)\, j(y_1)\, \frac{1}{i} D^c(y_1-y)\, \tilde{F}_{yy}\{j\} +$$

$$+ 12i\lambda \int dy\, dy_1\, dy_2\, \frac{1}{i} D^c(x-y_1)\, \frac{1}{i} D^c(x-y_2)\, j(y_1)\, j(y_2)\, \frac{1}{i} D^c(x-$$

$$- y)\, \tilde{F}_y\{j\} + 4i\lambda \int dy\, dy_1\, dy_2\, dy_3\, \frac{1}{i} D^c(x-y_1)\, \frac{1}{i} D^c(x-y_2)\, \frac{1}{i} D^c(x-$$

$$- y_3)\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, j(y_1)\, j(y_2)\, j(y_3)\, \tilde{F}\{j\}. \quad (8.12)$$

Из определения (8.1) непосредственно следует, что

$$\tilde{F}\{j\} = S_0^{-1} F\{D^c * j\}, \quad (8.13)$$

где

$$(D^c * j)(x) = \int D^c(x-y)\, j(y)\, dy.$$

Используя (8.13), легко увидеть, что уравнения (8.7) и (8.12) следуют друг из друга.

Рассмотрим кратко вопрос о формальном решении уравнения (8.7). Перепишем его для этого в виде

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} F\{j\} = -4i\lambda : \left[j(x) + \int dy\, \frac{1}{i} D^c(x-y)\, \frac{\delta}{\delta j(y)} \right]^3 : F\{j\}, \quad (8.14)$$

где $:\ldots:$ означает, что в произведениях операторов $j(x)$ и $\frac{\delta}{\delta j(y)}$

справа стоят операторы вариационного дифференцирования, а потом операторы умножения на $j(x)$. Кроме того, под знаком $:\ldots:$ операторы $j(x)$ и $\frac{\delta}{\delta j(y)}$ коммутируют.

Так как операторы $j(x)+\int dy \frac{1}{i} D^c(x-y) \frac{\delta}{\delta j(y)}$ коммутируют между собой при разных x, то из уравнения (8.14) следует, что ему удовлетворяет функционал

$$F\{j\}=\exp\left\{-i\lambda\int dx : \left[j(x)+\frac{1}{i} D^c(x-y)\frac{\delta}{\delta j(y)}\right]^4 :\right\} 1. \quad (8.15)$$

Совершенно аналогично, используя формулу (6.1) и формулы (4.20), (4.21) и (8.6), можно получить эволюционное уравнение для $F\{j\}$:

$$\frac{d}{d\lambda} F\{j\}=-i\lambda\int dx : \left[j(x)+\int dy \frac{1}{i} D^c(x-y)\frac{\delta}{\delta j(y)}\right]^4 : F\{j\}. \quad (8.16)$$

Так как $F\{j\}|_{j=0}=1$, то функционал (8.15) будет одновременно и решением уравнения (8.16).

8.3. Уравнения для связных частей коэффициентных функций

В заключение настоящего параграфа получим уравнения для связных частей коэффициентных функций S-матрицы.

По аналогии с функциями Грина введем производящий функционал для связных частей коэффициентных функций:

$$F^T(j)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int dx_1\ldots dx_n F_n^T(x_1,\ldots,x_n)\, j(x_1)\ldots j(x_n). \quad (8.17)$$

Связные части коэффициентных функций $\{F_n^T\}$ связаны с коэффициентными функциями $\{F_n\}$ теми же формулами, что и связные части функций Грина $\{G_n^T\}$ с функциями Грина $\{G_n\}$:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{n_1+\ldots+n_k=n}\sum_{\sigma_k} F_{n_1}^T(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})\ldots F_{n_k}^T(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n_k}}). \quad (8.18)$$

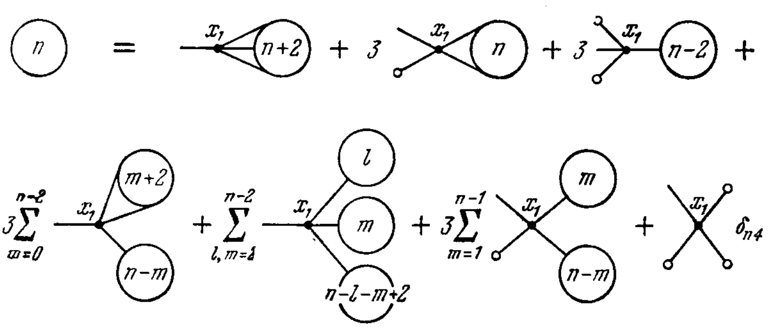
Легко видеть, что производящий функционал $F(j)$ связан с производящим функционалом $F^T(j)$ формулой

$$F(j)=\exp F^T(j). \quad (8.19)$$

Подставляя (8.19) в (8.7), получаем уравнение для $F^T(j)$:

$$
\begin{aligned}
F_x^T\{j\} = &\\
= -4i\lambda \int & dy_1 dy_2 dy_3 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{1}{i} D^c(x-y_3) F^T_{y_1y_2y_3}\{j\} - \\
& - 12i\lambda j(x) \int dy_1 dy_2 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) F^T_{y_1y_2}\{j\} - \\
& - 12i\lambda j^2(x) \int dy_1 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) F^T_{y_1}\{j\} - \\
- 12i\lambda \int & dy_1 dy_2 dy_3 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{1}{i} D^c(x-y_3) F^T_{y_1y_2}\{j\} \times \\
\times F^T_{y_3}\{j\} & - 4i\lambda \int dy_1 dy_2 dy_3 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \frac{1}{i} D^c(x-y_3) \times \\
\times F^T_{y_1}\{j\} & F^T_{y_2}\{j\} F^T_{y_3}\{j\} - 12i\lambda j(x) \int dy_1 dy_2 \frac{1}{i} D^c(x-y_1) \frac{1}{i} D^c(x-y_2) \times \\
& \times F^T_{y_1}\{j\} F^T_{y_2}\{j\} - 4i\lambda j^3(x). \qquad (8.20)
\end{aligned}
$$

Выполняя вариационное дифференцирование по $j(x_2), \ldots, j(x_n)$, получим уравнения для связных частей коэффициентных функций, которые мы изобразим графически:



§ 9. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ F_n

Уравнения эволюционного типа для коэффициентных функций можно получить из формулы (6.1), если подставить туда разложение (1.1) и повторить все операции § 7. Мы, однако, предложим в этом параграфе другой метод, который позволит обойти довольно громоздкую процедуру § 7 [83, 84].

9.1. Скалярное взаимодействие

Рассмотрим операторнозначный функционал от свободных скалярных вещественных полей, заданный выражением (1.1). Задание такого функционала, в частности обычной S-матрицы, эквивалентно заданию последовательности коэффициентных функций

$$F = \{F_n(x_1, \ldots, x_n)\}_{n=0}^{\infty}, \quad F_0 = (\Omega_0, S\Omega_0).$$

Рассмотрим функционал $S' = :\varphi_0(x) S:$ и вычислим его коэффициентные функции. Нетрудно подсчитать, что

$$:\varphi_0(x) S: =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int F_n(x_1, \ldots, x_n) :\varphi_0(x) \varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n): dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \delta(x - x_i) F_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \times \right.$$

$$\left. \times :\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_{n+1}): \right\} dx_1 \ldots dx_{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int F'_n(x_1, \ldots, x_n) :\varphi_0(x_1) \ldots \varphi_0(x_n): dx_1 \ldots dx_n.$$

Таким образом, на множестве последовательностей коэффициентных функций F операция $:\varphi_0(x) S:$ представима некоторым линейным оператором $a^+(x)$, действующим по формуле

$$\begin{gathered} F' = a^+(x) F, \\ F'_n(x_1, \ldots, x_n) = (a^+(x) F)_n (x_1, \ldots, x_n) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(x - x_i) F_{n-1}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n). \end{gathered} \tag{9.1}$$

Рассмотрим теперь функционал

$$:\overline{\varphi_0(x) S}: =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{i=1}^{n} \int F_n(x_1, \ldots, x_n) \overline{\varphi_0(x) \varphi_0}(x_i) \times$$

$$\times :\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_{i-1})\,\varphi_0(x_{i+1})\ldots\varphi_0(x_n): dx_1\ldots dx_n =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)!}}\int dx'\,\frac{1}{i}\,D^c(x-x')\,F_n(x',x_1,\ldots,x_{n-1})\times$$

$$\times :\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_{n-1}): dx_1\ldots dx_{n-1} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\int F''_n(x_1,\ldots,x_n):\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_n): dx_1\ldots dx_n,$$

где

$$F''_n(x_1,\ldots,x_n)=(a^-(x)\,F)_n(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\sqrt{n+1}\int\frac{1}{i}\,D^c(x-x')\,F_{n+1}(x',x_1,\ldots,x_n)\,dx'. \qquad (9.2)$$

Операторы $a^{\pm}(x)$, заданные выражениями (9.1) и (9.2), являются формальными алгебраическими операциями. Они подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[a^-(x), a^+(x)]_- = \frac{1}{i}\,D^c(x-x'). \qquad (9.3)$$

Перепишем формулу (6.1), раскрывая в правой части T-произведение:

$$\frac{d}{d\lambda}S = -i\int dx\,\{:\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,S:+$$

$$+4:\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,S:+6:\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,S:+$$

$$+4:\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,S:+:\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,\varphi_0(x)\,S:\}. \qquad (9.4)$$

Используя введенные операции (9.1) и (9.2), уравнение (9.4) в пространстве последовательностей коэффициентных функций перепишется в следующем виде:

$$\frac{d}{d\lambda}F = -i\int dx\,\{a^+(x)\,a^+(x)\,a^+(x)\,a^+(x)+$$

$$+4a^+(x)\,a^+(x)\,a^+(x)\,a^-(x)+6a^+(x)\,a^+(x)\,a^-(x)\,a^-(x)+$$

$$+4a^+(x)\,a^-(x)\,a^-(x)\,a^-(x)+a^-(x)\,a^-(x)\,a^-(x)\,a^-(x)\}\,F \qquad (9.5)$$

или

$$\frac{d}{d\lambda}F = -i\int dx:a^4(x):F, \qquad (9.6)$$

где

$$a(x)=a^{+}(x)+a^{-}(x), \quad [a(x), a(y)]_{-}=0. \tag{9.7}$$

Учитывая (9.1) и (9.2), перепишем уравнение (9.5) для компонент вектора F:

$$-\frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda}F_n(x_1, \ldots, x_n)=\sqrt{(n+4)\ldots(n+1)}\int dx\,dx_1'dx_2'dx_3'dx_4' \times$$

$$\times \frac{1}{i}D^c(x-x_1')\ldots\frac{1}{i}D^c(x-x_4')F_{n+4}(x_1', \ldots, x_4', x_1, \ldots, x_n)+$$

$$+4\sqrt{(n+2)(n+1)}\sum_{i_1=1}^{n}\int dx_1'dx_2'dx_3' \times$$

$$\times \frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_1')\ldots\frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_3')F_{n+2}(x_1', \ldots, x_3', x_1, \ldots$$

$$\ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, x_n)+6\sum_{i_1\neq i_2=1}^{n}\delta(x_{i_1}-x_{i_2})\int dx_1'dx_2' \times$$

$$\times \frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_1')\frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_2')F_n(x_1', x_2', x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_2}, \ldots, x_n)+$$

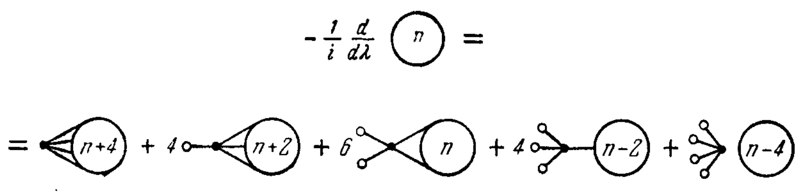
$$+\frac{4}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3=1}^{n}\delta(x_{i_1}-x_{i_2})\,\delta(x_{i_1}-x_{i_3}) \times$$

$$\times \int dx_1'\frac{1}{i}D^c(x_{i_1}-x_1')F_{n-2}(x_1', x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_3}, \ldots, x_n)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_4}^{n}\delta(x_{i_1}-x_{i_2})\,\delta(x_{i_1}-x_{i_3})\,\delta(x_{i_1}-x_{i_4}) \times$$

$$\times F_{n-4}(x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_4}, \ldots, x_n) \tag{9.8}$$

или



(9.8′)

Так как при $\lambda = 0$ $F|_{\lambda=0} = \Omega_0 = (1, 0, 0, \ldots)$, то формальное решение уравнения (9.6) имеет вид

$$F = \exp\left(-i\lambda \int : a^4(x) : dx\right) \Omega_0. \tag{9.9}$$

Раскладывая экспоненту в ряд и действуя операторами на вектор Ω_0, получим полный ряд теории возмущений для матрицы рассеяния, включающий вакуумные вклады. Уравнения (9.8) можно было бы также получить из (9.4), подставляя туда разложение (1.1), выполняя все операции § 7 и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полей $\varphi_0(x)$.

9.2 Взаимодействие Юкавы

В этом случае рассмотрим функционал

$$S = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l!\,m!}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m \times$$
$$\times : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_l) F_{l,m}(y_1 \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m)\, \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m) : . \tag{9.10}$$

Образуем четыре новых функционала:

$$: \psi_0(x) S : , \quad : \overbrace{\psi_0(x) S} : , \quad : \bar{\psi}_0(x) S : , \quad : \overbrace{\bar{\psi}_0(x) S} : . \tag{9.11}$$

Используя разложение (9.10), получим

$$: \psi_0(x) S := \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\sqrt{l!\,m!}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m \times$$
$$\times : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_l) F_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m)\, \psi_0(x)\, \psi_0(z_1) \ldots$$
$$\ldots \psi_0(z_m) := \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{\sqrt{l!\,m!}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_{m+1} : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots$$
$$\ldots \bar{\psi}_0(y_l) : \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} \delta(x - z_j)\, I \otimes F_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\right.$$
$$\left. z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_{m+1} \right\} : \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_{m+1}) :=$$
$$= \sum_{\substack{l=0 \\ m=1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l!\,m!}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m \times$$
$$\times : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_l) F'_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m)\, \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m) :,$$

где функция $F'_{l,m}$ вводится как результат действия некоторой линейной операции на $F_{l,m}$ по формуле

$$F'_{l,m}(y_1, \ldots, y; z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= (\Phi^+(x) F)_{l,m}(y_1, \ldots, y_l; z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= \frac{(-1)^l}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} I\delta(x - z_j) \otimes F_{l,m-1}(y_1, \ldots, y_l;$$
$$z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m). \qquad (9.12)$$

Здесь $I = ((\delta_{\alpha\beta_j}))$, $\Phi^+(x) = \{\Phi_d^+\}_{\alpha=1}^{d}$.

Аналогично для функционала $:\overline{\psi_0(x) S}:$ имеем

$$:\overline{\psi_0(x) S}: = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l!m!}} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \int :\bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_{j-1}) \times$$
$$\times \bar{\psi}_0(y_{j+1}) \ldots \bar{\psi}_0(y_l) \frac{1}{i} S^c(x - y_j) F_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m) \times$$
$$\times \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m) : dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m =$$
$$= \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l!m!}} \int dy_1 \ldots dy_{l-1} dz_1 \ldots dz_m : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_{l-1}) \times$$
$$\times \int dy' \frac{1}{i} S^c(x - y') F_{l,m}(y', y_1, \ldots, y_{l-1};\ z_1, \ldots, z_m) \psi_0(z_1) \ldots$$
$$\ldots \psi_0(z_m) : = \sum_{\substack{l=1\\ m=0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{l!m!}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m \times$$
$$\times : \bar{\psi}_0(y_1) \ldots \bar{\psi}_0(y_l) F'_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m) \psi_0(z_1) \ldots \psi_0(z_m) :,$$

где

$$F'_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= (\Phi^-(x) F)_{l,m}(y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m) =$$
$$= \sqrt{l+1} \int dy' \frac{1}{i} S^c(x - y') F_{l+1,m}(y', y_1, \ldots, y_l;\ z_1, \ldots, z_m). \qquad (9.13)$$

Совершенно аналогично подсчитываются коэффициентные функции функционалов $:\overline{\psi}_0(x)S:$ и $:\overline{\psi}_0(x)S:$. Для них соответственно имеем

$$F'_{l,m}(y_1,\ldots,y_l;\ z_1,\ldots,z_m)=$$
$$=(\overline{\Phi}^+(x)F)_{l,m}(y_1,\ldots,y_l;\ z_1,\ldots,z_m)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}I\delta(x-y_j)\otimes$$
$$\otimes F_{l-1,m}(y_1,\ldots,\widehat{y_j},\ldots,y_l;\ z_1,\ldots,z_m),\qquad I=((\delta_{\alpha\alpha_l})),\quad (9.14)$$

и

$$F'_{l,m}(y_1,\ldots,y_l;\ z_1,\ldots,z_m)=-(\overline{\Phi}^-(x)F)_{l,m}(y_1,\ldots,y_l;$$
$$z_1,\ldots,z_m)=-(-1)^l\sqrt{m+1}\int dz' F_{l,m+1}(y_1,\ldots,y_l;$$
$$z',z_1,\ldots,z_m)\frac{1}{i}S^c(z'-x).\quad (9.15)$$

Чтобы получить уравнение эволюционного типа для функций $F_{l,m}$, перепишем формулу (6.1) для случая взаимодействия Юкавы:

$$\frac{d}{d\lambda}S=-iT\left(\int:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x):S\,dx\right).\quad (9.16)$$

Раскрывая T-произведение, получим

$$\frac{d}{d\lambda}S=-i\int dx\,\{:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x):S+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+$$
$$+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+$$
$$+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+$$
$$+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:+:\overline{\psi}_0(x)\psi_0(x)\varphi_0(x)S:\}.\quad (9.17)$$

Подставляя в (9.17) разложение (7.12) и используя определение операций $a^{\pm}(x)$ ((8.1)—(8.2)), $\Phi^{\pm}(x)$ ((9.12)—(9.13)) и $\overline{\Phi}^{\pm}(x)$ ((9.14)—(9.15)), получим уравнение для последовательности коэффициентных функций $F = \{F_{l,m}\}_0^\infty$:

$$\frac{d}{d\lambda} F = -i \int dx \{ \bar{\Phi}^+(x) \Phi^+(x) a^+(x) + \bar{\Phi}^+(x) \Phi^+(x) a^-(x) +$$
$$+ \bar{\Phi}^+(x) a^+(x) \Phi^-(x) + \Phi^+(x) a^+(x) \bar{\Phi}^-(x) + \bar{\Phi}^+(x) \Phi^-(x) a^-(x) +$$
$$+ \Phi^+(x) a^-(x) \bar{\Phi}^-(x) - a^+(x) \bar{\Phi}^-(x) \Phi^-(x) - a^-(x) \bar{\Phi}^-(x) \Phi^-(x)\} F. \tag{9.18}$$

Если теперь ввести операторы

$$\Phi(x) = \Phi^+(x) + \Phi^-(x), \quad \bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}^+(x) - \bar{\Phi}^-(x), \tag{9.19}$$

причем

$$[\Phi(x), \bar{\Phi}(y)]_+ = 0,$$

$$[\Phi^-(x), \bar{\Phi}^+(y)]_+ = [\Phi^+(x) \bar{\Phi}^-(y)]_+ = \frac{1}{i} S^c(x-y),$$

то уравнение (9.18) перепишется в виде

$$\frac{d}{d\lambda} F = -i \int dx : \bar{\Phi}(x) \Phi(x) a(x) : F. \tag{9.20}$$

Под знаком нормального произведения операторы $\Phi^\pm$, $\bar{\Phi}^\pm$ антикоммутируют.

Чтобы получить теперь уравнения для компонент вектора F, используем определение операций $\Phi^\pm$, $\bar{\Phi}^\pm$ и $a^\pm$:

$$-\frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j'=1}^m (-1)^{j'-1} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n I\delta(y_j - z_{j'}) \delta(y_j - x_i) \otimes$$
$$\otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_{j'}, \ldots, z_m; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j'=1}^m (-1)^{j'-1} I\delta(y_j - z_{j'}) \otimes \sqrt{n+1} \times$$
$$\times \int dx \frac{1}{i} D^c(y_j - x) \times$$
$$\times F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_{j'}, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \delta(y_j - x_i) \times$$

$$\times \int dy \frac{1}{i} S^c (y_j - y) \times$$

$$\times F_{m,n-1}(y, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(z_j - x_i) \times$$

$$\times \int dz F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n;$$

$$x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \frac{1}{i} S^c (z - z_j) +$$

$$+ \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dy\, dx \frac{1}{i} S^c (y_j - y) \frac{1}{i} D^c (y_j - x) \times$$

$$\times F_{m,n+1}(y, y_1, \ldots, \widehat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dz\, dx \times$$

$$\times F_{m,n+1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \widehat{z}_j, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \frac{1}{i} S^c (z - z_j) \frac{1}{i} D^c (z_j - x) +$$

$$+ (-1)^{m+1} (m+1) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}_1 \Big[\int dy\, dz \frac{1}{i} S^c (x_i - y) \times$$

$$\times F_{m+1,n-1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m;$$

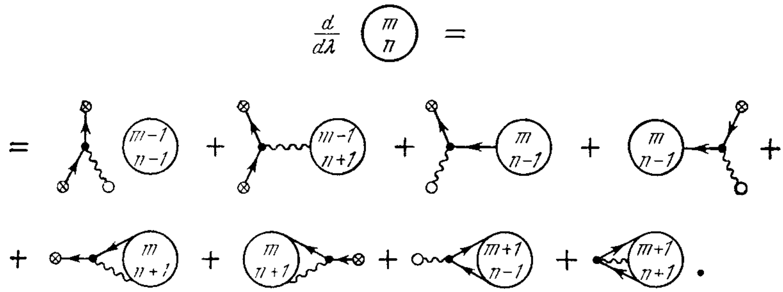
$$x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \frac{1}{i} S^c (z - x_i) \Big] +$$

$$+ (-1)^{m+1} (m+1) \sqrt{n+1}\, \mathrm{Sp}_1 \Big[\int dy\, dz\, dx\, dx' \frac{1}{i} S^c (x' - y) \times$$

$$\times F_{m+1,n+1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) \times$$

$$\times \frac{1}{i} S^c (z - x') \frac{1}{i} D^c (x' - x) \Big]. \qquad (9.21)$$

В диаграммной записи



(9.21′)

Так же как и для функций Грина, в уравнениях для коэффициентных функций при итерации возникают расходящиеся при больших импульсах выражения. Чтобы вывести перенормированные уравнения, нужно исходить из лагранжиана взаимодействия (3.27), содержащего константы перенормировки. Тогда в уравнениях для коэффициентных функций возникнут дополнительные члены, соответствующие необходимым вычитаниям.

В последующих главах мы будем исследовать уравнения для коэффициентных функций в двумерном пространстве-времени, что избавит нас от необходимости введения контрчленов (по крайней мере в скалярной теории). В случае взаимодействия Юкавы мы укажем, как нужно изменить производящий оператор, чтобы он соответствовал перенормированной теории.

Глава III

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕВКЛИДОВОЙ ОБЛАСТИ

Функции Грина и коэффициентные функции матрицы рассеяния являются граничными значениями голоморфных функций. Используя голоморфное продолжение, можно получить уравнения для функций Грина и коэффициентных функций при чисто мнимых временны́х (энергетических) переменных. Эти функции в области с чисто мнимыми временами (энергиями) принято называть евклидовыми, а саму область изменения аргументов — евклидовой областью.

В настоящей главе мы выполним переход к евклидовой области в уравнениях для коэффициентных функций, основываясь на разложении их в ряд по теории возмущений. В евклидовой области производящие операторы уравнений можно представить через операторы рождения и уничтожения линий диаграмм Фейнмана [74—76, 124, 128, 134—138] (операторов евклидова поля [113—116, 120]). В таком представлении они имеют вид обычных гамильтонианов взаимодействия, что значительно облегчит математическое исследование рассматриваемых уравнений.

§ 10. ПЕРЕХОД В ЕВКЛИДОВУ ОБЛАСТЬ В УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Еще в 1951 г. Швингер [199], Дайсон [62] и Наканиши [108] указали на возможность установить соответствие между квантовой теорией поля в пространстве Минковского и евклидовой теорией поля. Последовательное описание квантовой теории поля с помощью евклидовых функций Грина было предложено Швингером [201, 202], Фрадкиным [175—177], Накано [109], Симанзиком [156, 157]. В работах Ефимова и сотрудников [1, 69, 105] методы евклидовой теории поля применялись при построении нелокальной теории.

В последнее время Нельсон [113—116] завершил аксиоматическую формулировку евклидовой теории поля на языке евклидовых случайных полей. В работах Остервальдера, Шрадера, Глазера [40, 121] была доказана эквивалентность аксиом евклидовой теории поля и аксиом теории Вайтмана.

10.1 Взаимодействие $\lambda(:\varphi^4:)$

Перепишем уравнение (7.5) в пространстве импульсных переменных, используя формулы преобразований Фурье функций $D^c(x-y)$ и $F_n(x_1, \ldots, x_n)$:

$$D^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int dp\, \frac{e^{ip(x-y)}}{\mu^2 - p^2 - i\varepsilon},$$
$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{nd}}\int dp_1 \ldots dp_n \exp\left(i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n), \tag{10.1}$$
$$dp = d^d p, \quad p_j x_j = p_j^0 x_j^0 - \boldsymbol{p}_j \boldsymbol{x}_j.$$

С учетом (10.1) имеем

$$\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n) = -4\lambda i\left\{\sqrt{(n+2)(n+1)}\int dk_1 dk_2 dk_3 \times\right.$$
$$\times\frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i(\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i(\mu^2 - k_3^2 - i\varepsilon)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_{n+2}(k_1, k_2, k_3, p_2, \ldots, p_n) +$$
$$+3\sum_{i_1=2}^{n}\int dk_1 dk_2\, \frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1 + p_{i_1} - k_1 - k_2)}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i(\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_n(k_1, k_2, p_2, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) +$$
$$+\frac{3}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i_1 \neq i_2 \neq 1}^{n}\int dk_1\frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2} - k_1)}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_{n-2}(k_1, p_2, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}\sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq 1}^{n}(2\pi)^d\,\delta(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3})\times$$
$$\times\mathcal{F}_{n-4}(p_2, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_2}, \ldots, \hat{p}_{i_3}, \ldots, p_n). \tag{10.2}$$

Коэффициентные функции F_n, так же как и функции Грина, представляются через свои связные части (8.18). Нам понадобится представление (8.33) в импульсном пространстве. Так как связные части $F_{n_i}^T(x_1, \ldots, x_{n_i})$ являются трансляционно-инвариантными функциями, то их преобразования Фурье будут иметь вид

$$\mathcal{F}^T_{n_l}(p_1, \ldots, p_{n_l}) = \delta(p_1 + \ldots + p_{n_l}) F^T_{n_l}(p_1, \ldots, p_{n_l}), \tag{10.3}$$

где

$$F^T_{n_l}(p_1, \ldots, p_{n_l}) = (2\pi)^d \tilde{F}^T_{n_l}(p_1, \ldots, p_{n_l-1})$$

при $p_1 + \ldots + p_{n_l} = 0$, а $\tilde{F}^T_{n_l}$ — преобразование Фурье функции $F_{n_l}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_l-1})$ $(\xi_1 = x_1 - x_{n_l}, \ldots, \xi_{n_l-1} = x_{n_l-1} - x_{n_l})$ по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{n_l-1}$. Учитывая (10.3), запишем представление функций $\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n)$ через их связные части:

$$\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma_k \\ n_1+\ldots+n_k=n}} \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{n_1}}) F^T_{n_1}(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{n_1}}) \ldots$$

$$\ldots \delta(p_{j_1} + \ldots + p_{j_{n_k}}) F^T_{n_k}(p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n_k}}). \tag{10.4}$$

Под голоморфным *) продолжением функций $\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n)$ в евклидову область будем понимать голоморфное продолжение связных частей $F^T_{n_1}, \ldots, F^T_{n_k}$ и одновременную замену

$$(-i) F^T_{n_l}(p_{l_1}, \ldots, p_{l_{n_l}}) \to F^T_{n_l}(p_{l_1}, \ldots, p_{l_{n_l}}). \tag{10.5}$$

Запишем уравнение для связных частей F^T_n $(n=2, 3, \ldots)$. Такое уравнение можно получить непосредственной подстановкой представления (10.4) в уравнение (10.2). Можно также воспользоваться уравнением (18.12) для производящего функционала (8.17), чтобы получить из него уравнения для функций $F^T_n(x_1, \ldots, x_n)$. Переходя после этого по формулам (10.1) к уравнениям для функций $F^T_n(p_1, \ldots$ $\ldots, p_n)$, получим уравнения в импульсном представлении

$$F^T_n(p_1, \ldots, p_n) = -4\lambda i \left\{ \sqrt{(n+2)(n+1)} \int dk_1 dk_2 \times \right.$$

$$\times \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1 - i\varepsilon)(2\pi)^d i(\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i[\mu^2 - (p_1 - k_1 - k_2)^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_{n+2}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_n) + 3\sqrt{(n+2)(n+1)} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{\text{perm}}' \int dk_1 \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i[\mu^2 - (k_1 + p_{l_2} + \ldots + p_{l_{m+1}})^2 - i\varepsilon]} \times$$

*) Относительно основных положений из теории голоморфных функций см. монографию В. С. Владимирова [33].

$$\times \frac{1}{(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_{i_{m+2}} + \ldots + p_{i_n})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_{m+2}(k_1, -k_1 - p_{i_1} - \ldots - p_{i_{m+1}}, p_{i_2}, \ldots, p_{m+1}) \times$$

$$\times F^T_{n-m}(-p_{i_{m+2}} - \ldots - p_{i_n}, p_{i_{m+2}}, \ldots, p_{i_n}) +$$

$$+ \sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{l,m=2}^{n-2} \sum_{\text{perm}}{}' \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i[\mu^2 - (p_{i_2} + \ldots + p_{i_l})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_{i_{l+1}} + \ldots + p_{i_{l+m-1}})^2 - i\varepsilon]\,(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_{i_{l+m}} + \ldots + p_{i_n})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_l(-p_{i_1} - \ldots - p_{i_l}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l}) \times$$

$$\times F^T_m(-p_{i_{l+1}} - \ldots - p_{i_{l+m-1}}, p_{i_{l+1}}, \ldots, p_{i_{l+m-1}}) \times$$

$$\times F_{n-l-m+2}(-p_{i_{l+m}} - \ldots - p_{i_n}, p_{i_{l+m}}, \ldots, p_{i_n}) +$$

$$+ 3 \sum_{i_1=2}^{n} \int dk \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i\,(\mu^2 - k^2 - i\varepsilon)\,(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_1 + p_{i_1} - k)^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_n(k, p_1 + p_{i_1} - k, p_2, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) +$$

$$+ 3 \sum_{i_1=2}^{n} \sum_{m=2}^{n-2} \sum_{\text{perm}}{}' \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_{i_2} + \ldots + p_{i_{m(i_{m+1})}})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_{i_{m+1(i_{m+2})}} + \ldots + p_{i_n})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_m(-p_{i_2} - \ldots - p_{i_{m(i_{m+1})}}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{m(i_{m+1})}}) \times$$

$$\times F^T_{n-m}(-p_{i_{m+1(i_{m+2})}} - \ldots - p_{i_n}, p_{i_{m+1(i_{m+2})}}, \ldots, p_{i_n})\big|_{\widehat{p}_{i_1}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq 1}^{n} \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i\,[\mu^2 - (p_1 + p_{i_1} + p_{i_2})^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F^T_{n-2}(p_1 + p_{i_1} + p_{i_2}, p_2, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) +$$

$$+ \delta_{n4}(2\pi)^d\} \quad (p_1 + \ldots + p_n = 0). \quad (10.6)$$

Здесь, как и в (4.30), $\sum\limits_{\text{perm}}'$ означает перестановку аргументов $p_2, \ldots$ $\ldots, p_n$ только между функциями F^T_{m+2} и F^T_{n-m} во втором слагаемом правой части, между F^T_l, F^T_m и $F^T_{n-l-m+2}$ в третьем и между F^T_m и F^T_{n-m} в пятом слагаемом. Кроме того, в пятом слагаемом индекс $i_m(i_{m+1})$ означает, что последний аргумент функции $F^T_m(\ldots)$ есть p_{i_m}, если импульс p_{j_0} отсутствует в $F^T_{n-m}(\ldots)$, и $p_{i_{m+1}}$, если p_{j_1} отсутствует в $F^T_m(\ldots)$.

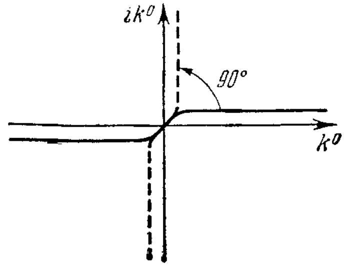


Рис. 1.

Переход в евклидову область осуществляется голоморфным продолжением функций F^T_n в область $p^0_j \to ip^d_j$. При этом лоренц-инвариантный квадрат вектора $-p^2_j = -p^{02} + \mathbf{p}^2_j$ переходит в евклидово-инвариантный квадрат $p^2_j = \mathbf{p}^2_j + (p^d_j)^2$. Чтобы осуществить такой переход под знаком интеграла в уравнении (10.6), нужно повернуть контур интегрирования в плоскости k^0 на 90° (виковский поворот контура [32]; рис. 1) и сделать замену переменной $k^0 = ik^d$.

Выполнить такой поворот можно в том случае, если функция $F^T_n(p_1, \ldots, p_n)$ обладает нужными голоморфными свойствами, т. е. не имеет сингулярностей в первом и третьем квадрантах комплексной плоскости k^0_i. Мы покажем, что функции $F^T_n(p_1, \ldots, p_n)$ обладают такими свойствами в каждом порядке теории возмущений. Следуя Тейлору [163], сформулируем следующую теорему.

Теорема 10.1. *В каждом порядке теории возмущений функции $F^T_n(p_1, \ldots, p_n)$ являются голоморфными функциями переменных $p^0_1, \ldots, p^0_n$ при любых комплексных p^0_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, за исключением точек*

$$\text{а) } \operatorname{Im} p^0_I = 0, \quad \text{б) } \operatorname{Re} |p^0_I| \geqslant (\mathbf{p}^2_I + 4\mu^2)^{1/2}, \quad \text{в) } p^2_I = \mu^2, \tag{10.7}$$

где $p^0_I = \sum\limits_{i \in I} p^0_i$, $p_I = \sum\limits_{i \in I} p_i$, *$I$ — любой поднабор индексов из* $(1, \ldots, n)$.

Приведем идею доказательства. Запишем уравнение (10.6) в k-м порядке по константе взаимодействия λ. Тогда в правой части выражения (10.6) будут стоять члены, зависящие от низших порядков. Чтобы не выписывать громоздких выражений, запишем результат в таком виде:

$$F_n^{T(k)}(p_1, \ldots, p_n) = M_1(F_{n+2}^{T(k-1)}) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-2} M_2(F_{m+2}^{T(k-1)}, F_{m+2}^{T(k-2)}, \ldots; F_{n-m}^{T(k-1)}, F_{n-m}^{T(k-2)}, \ldots) +$$

$$+ \sum_{l,m=2}^{n-2} M_3(F_l^{T(k-1)} \ldots; F_m^{T(k-1)}, \ldots; F_{n-l-m+2}^{T(k-1)}, \ldots) +$$

$$+ M_4(F_n^{T(k-1)}) + \sum_{m=2}^{n-2} M_5(F_m^{T(k-1)}, \ldots; F_{n-m}^{T(k-1)}, \ldots) +$$

$$+ M_6(F_{n-2}^{T(k-1)}) + (-4i)(2\pi)^d \delta_{n4}\delta_{k1}, \quad (10.8)$$

где через M_i обозначены соответственно 1-й, 2-й и т. д. члены уравнения (10.6).

Докажем теорему методом математической индукции. Для $k=1$ $F_n^{T(1)}(p_1, \ldots, p_n) = -4i(2\pi)^d \delta_{n4} = \text{const}$, и теорема автоматически выполняется. Предположим, что во всех порядках, меньших k-го, теорема также справедлива. Следовательно, остается показать, что операторы, стоящие в правой части (10.6) или (10.8), не нарушают свойства голоморфности (10.7) функций $F^{T(k-1)}, \ldots$ Те операторы, которые соответствуют членам M_3, M_5 и M_6, не содержат интегрирований и являются операторами умножения на соответствующее число фейнмановских пропагаторов, которые имеют полюсы типа (10.7в). Очевидно, что они сохраняют свойства голоморфности (10.7) функций $F^{T(k-1)}$. Рассмотрим члены M_1, M_2 и M_4. Так как операторы, соответствующие этим членам, аналогичны по своему действию, то мы рассмотрим наиболее трудный из них — M_1, содержащий две переменные интегрирования:

$$M_1 = -4i\sqrt{(n+2)(n+1)} \int dk_1 dk_2 \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i(\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i[\mu^2 - (p_1 - k_1 - k_2)^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F_{n+2}^{T(k-1)}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_n). \quad (10.9)$$

Отметим, что при $d>2$ интегралы в (10.9) могут расходиться при больших значениях импульсов k_1 и k_2. Поэтому в случае $d>2$ мы будем рассматривать только сходящиеся выражения. Мнимая добавка $i\varepsilon$ определяет правило обхода полюсов. Контур интегрирования проходит таким образом, что в области положительных k_1^0 и k_2^0 полюсы лежат ниже контура, а в области отрицательных энергий — выше контура (см. рис. 1). После выполнения интегрирований ε нужно устремить к нулю.

Рассмотрим сначала функцию

$$\varphi_n(k_2, p_1, \ldots, p_n) = -4i\sqrt{(n+2)(n+1)} \int dk_1 \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d i(\mu^2 - k_1^2 - i\varepsilon)(2\pi)^d i[\mu^2 - (p_1 - k_1 - k_2)^2 - i\varepsilon]} \times$$

$$\times F_{n+2}^{T(k-1)}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_n). \quad (10.10)$$

Учитывая предполагаемые свойства голоморфности функции $F_{n+2}^{T(k-1)}(\ldots)$, легко определить, что сингулярности подынтеграль-

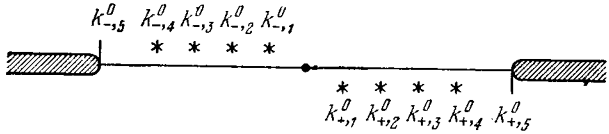


Рис. 2.

ного выражения по переменной k_1^0 расположены, как показано на рис. 2. Имеем полюсы $k_{\pm,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned} k^0_{\pm,1} &= \pm(\boldsymbol{k}_1^2 + \mu^2)^{1/2} \mp i\varepsilon, \\ k^0_{\pm,2} &= p_1^0 - k_2^0 \pm [(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{p}_1)^2 + \mu^2]^{1/2} \mp i\varepsilon, \\ k^0_{\pm,3} &= -p_I^0 \pm [(-\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{p}_I)^2 + \mu^2]^{1/2} \mp i\varepsilon, \\ k^0_{\pm,4} &= p_I^0 - k_2^0 \pm [(\boldsymbol{p}_I - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_1)^2 + \mu^2]^{1/2} \mp i\varepsilon \end{aligned} \quad (10.11а)$$

и разрезы ($k^0_{\pm,5}$ — начала разрезов):

$$k^0_{\pm,5} = -p_I^0 \pm [(\boldsymbol{p}_I - \boldsymbol{k}_1)^2 + 4\mu^2]^{1/2} \mp i\varepsilon. \quad (10.11б)$$

Учитывая (10.11), легко установить непосредственно из (10.10), что функция $\varphi_n(k_2, p_1, \ldots, p_n)$ будет голоморфной функцией по переменным $k_2^0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ при любых комплексных k_2^0, p_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$, за исключением точек

$$\operatorname{Im} p^0_{I'} = 0, \quad p^0_{I'} = \sum_{i \in I} p_i^0,$$

где I' — любой поднабор индексов из $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, $p_{n+1} = -k_2$. Если же $\operatorname{Im} p^0_{I'} = 0$, то для определения особенностей функции

$\varphi_n(\ldots)$ будем деформировать контур интегрирования в плоскости k_1^0. При этом в интеграле могут появиться особенности в результате того, что при изменении $k_2^0, p_1^0, \ldots, p_n^0$ сингулярности могут двигаться и зажать контур интегрирования между какими-либо двумя сингулярностями k_+ и k_- («pinch»-сингулярности). Такая ситуация может возникнуть при выполнении следующих равенств:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2) &= p_1^0-k_2^0-[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= -p_I^0-[(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_I)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= p_I^0-k_2^0-[(\boldsymbol{p}_I-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&\leqslant -p_I^0-[(\boldsymbol{p}_I-\boldsymbol{k}_1)^2+4\mu^2]^{1/2};\\
p_1^0-k_2^0+[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_1)^2+\mu^2]^{1/2} &= -(\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2)^{1/2},\\
&= -p_I^0-[(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_I)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= p_I^0-k_2^0-[(\boldsymbol{p}_I-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&\leqslant -p_I^0-[(\boldsymbol{p}_I-\boldsymbol{k}_1)^2+4\mu^2]^{1/2};
\end{aligned}
\tag{10.12}
$$

$$
\begin{aligned}
-p_I^0+[(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_I)^2+\mu^2]^{1/2} &= -(\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2)^{1/2},\\
&= p_1^0-k_2^0-[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= -p_J^0-[(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_J)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= p_J^0-k_2^0-[(\boldsymbol{p}_J-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&\leqslant -p_J^0-[(\boldsymbol{p}_J-\boldsymbol{k}_1)^2+4\mu^2]^{1/2};\\
p_I^0-k_2^0+[(\boldsymbol{p}_I-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)^2+\mu^2]^{1/2} &= -(\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2)^{1/2},\\
&= p_1^0-k_2^0-[(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= -p_J^0-[(-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_J)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&= p_J^0-k_2^0-[(\boldsymbol{p}_J-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)^2+\mu^2]^{1/2},\\
&\leqslant -p_J^0-[(\boldsymbol{p}_J-\boldsymbol{k}_1)^2+4\mu^2]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Уравнения (10.12) будут справедливы при условии, что $p_{I'}^0 = \sum\limits_{i\in I'} p_i^0$, где $p_i^0 \in (-k_2^0, p_1^0, \ldots, p_n^0)$ является действительным, и $|p_{I'}^0| \geqslant (\boldsymbol{p}_{I'}+4\mu^2)^{1/2}$, т. е. в области (10.7).

Следовательно, можно выполнить голоморфное продолжение в нужную нам область. Продолжая внешние переменные $-k_2^0 \to ik_2^d$, $p_j^0 \to ip_j^d$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) в направлении против часовой стрелки, мы одновременно повернем в том же направлении контур интегрирования в плоскости k_1^0 на 90°. Так как контур лежит вне (10.7), он не пересечет никаких сингулярностей, что и доказывает голоморфность функции $\varphi_n(k_2, p_1, \ldots, p_n)$ в указанной области.

Теперь, так как

$$M_1 = \int dk_2 \frac{1}{(2\pi)^d i\,(\mu^2 - k_2^2 - i\varepsilon)} \varphi_n(k_2, p_1, \ldots, p_n),$$

то, повторяя предыдущие рассуждения, такой же поворот можно выполнить и в плоскости k_2^0. В результате получим после замены $k_1^0 = ik_1^d$, $k_2^0 = ik_2^d$ в евклидовой области

$$M_1 = -4\sqrt{(n+2)(n+1)} \int dk_1 dk_2 \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^d}{(2\pi)^d(\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d(\mu^2 + k_2^2)[\mu^2 + (p_1 - k_1 - k_2)^2]} \times$$
$$\times F_{n+2}^{T(k-1)}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_n). \quad (10.13)$$

Здесь $dk = dk^1 \ldots dk^d$, $k^2 = (k^1)^2 + \ldots + (k^d)^2$. В (10.13) выполнен предельный переход $\varepsilon \to 0$. Это можно сделать, так как после поворота контур не пересекает сингулярностей подынтегральных функций. Теорема доказана.

Просуммируем уравнение (10.13) по всем порядкам теории возмущений, считая, что область голоморфности полной функции $\mathcal{F}_n(\ldots) = \sum_k \lambda^k \mathcal{F}_n^{(k)}$ останется той же. Перепишем уравнение (10.6) для функции $\mathcal{F}_n^T(p_1, \ldots, p_n)$ (10.3) в евклидовой области, учитывая замену (10.5):

$$\mathcal{F}_n^T(p_1, \ldots, p_n) = -4\lambda \Big\{ \sqrt{(n+2)(n+1)} \int dk_1 dk_2 dk_3 \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^d \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^d(\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d(\mu^2 + k_2^2)(2\pi)^d(\mu^2 + k_3^2)} \times$$
$$\times \mathcal{F}_{n+2}^T(k_1, k_2, k_3, p_2, \ldots, p_n) +$$
$$+ 3\sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{m=0}^{n-2} \sideset{}{'}\sum_{\text{perm}} \int dk_1 dk_2 dk_3 \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_2^2 (2\pi)^d (\mu^2 + k_3^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_{m+2}(k_1, k_2, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{m+1}}) \mathcal{F}^T_{n-m}(k_3, p_{i_{m+2}}, \ldots, p_{i_n}) +$$

$$+ \sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{l,m=2}^{n-2} \sum_{\text{perm}}' \times$$

$$\times \int \frac{dk_1 dk_2 dk_3 (2\pi)^d \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_2^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_3^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_l (k_1, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l}) \mathcal{F}^T_m (k_2, p_{i_{l+1}}, \ldots, p_{i_{l+m-1}}) \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_{n-l-m+2}(k_3, p_{i_{l+m}}, \ldots, p_{i_n}) +$$

$$+ 3 \sum_{i_1=2}^{n} \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^d \delta(p_1 + p_{j_1} - k_1 - k_2)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_2^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_n (k_1, k_2, p_2, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) +$$

$$+ 3 \sum_{j=2}^{n} \sum_{m=2}^{n-2} \sum_{\text{perm}}' \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^d \delta(p_1 + p_j - k_1 - k_2)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_2^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_m (k_1, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m(i_{m+1})}) \mathcal{F}^T_{n-m}(k_2, p_{i_{m+1}(i_{m+2})}, \ldots, p_{i_n}) |_{\hat{p}_j} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq j_2}^{n} \int dk \frac{(2\pi)^d \delta(p_1 + p_{j_1} + p_{j_2} - k)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}^T_{n-2}(k, p_2, \ldots, \hat{p}_{j_1}, \ldots, \hat{p}_{j_2}, \ldots, p_n) +$$

$$\left. + \delta_{n4} (2\pi)^d \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right\}. \tag{10.14}$$

Определим разложение полной евклидовой коэффициентной функции через ее связные части выражением (10.4), т. е. таким же выражением, как и в псевдоевклидовой области. Тогда уравнение (10.14) для евклидовых коэффициентных функций $\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n)$ можно получить следующим образом. Сначала нужно переписать уравнение (10.14) в координатном пространстве, используя формулы (10.1), которые для евклидовой области будут иметь вид

$$G_0(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int dp\,\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2+\mu^2},$$

$$F_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{nd}}\int dp_1\ldots dp_n\exp\left(-i\sum_{j=1}^{n}p_jx_j\right)\mathcal{F}_n(p_1,\ldots,p_n), \tag{10.15}$$

$$p^2=(p^1)^2+\ldots+(p^d)^2,\quad px=p^1x^1+\ldots+p^dx^d,$$
$$dp=dp^1\ldots dp^d.$$

Затем по формуле (8.18) надо перейти к уравнению для функционала связных частей F^T и, используя (8.19), записать уравнение для функционала $F\{j\}$, из которого непосредственно будут следовать уравнения для функций $\mathcal{F}_n(p_1,\ldots,p_n)$ (см. § 8):

$$\mathcal{F}_n(p_1,\ldots,p_n)=-4\lambda\left\{\sqrt{(n+2)(n+1)}\int dk_1dk_2dk_3\times\right.$$
$$\times\frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)^d(\mu^2+k_1^2)(2\pi)^d(\mu^2+k_2^2)(2\pi)^d(\mu^2+k_3^2)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_{n+2}(k_1,k_2,k_3,p_2,\ldots,p_n)+$$
$$+3\sum_{i_1=2}^{n}\int dk_1dk_2\,\frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1+p_{i_1}-k_1-k_2)}{(2\pi)^d(\mu^2+k_1^2)(2\pi)^d(\mu^2+k_2^2)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_n(k_1,k_2,p_2,\ldots,\widehat{p}_{i_1},\ldots,p_n)+$$
$$+\frac{3}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq 1}^{n}\int dk_1\,\frac{(2\pi)^d\,\delta(p_1+p_{i_1}+p_{i_2}-k_1)}{(2\pi)^d(\mu^2+k_1^2)}\times$$
$$\times\mathcal{F}_{n-2}(k_1,p_2,\ldots,\widehat{p}_{i_1},\ldots,\widehat{p}_{i_2},\ldots,p_n)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3\neq 1}(2\pi)^d\,\delta(p_1+p_{i_1}+p_{i_2}+p_{i_3})\times$$
$$\left.\times\mathcal{F}_{n-4}(p_2,\ldots,\widehat{p}_{i_1},\ldots,\widehat{p}_{i_3},\ldots,p_{i_n})\right\},\qquad n=1,2,\ldots \tag{10.16}$$

Отметим, что уравнения (10.14) получаются из (10.16) непосредственной подстановкой (10.4)—(10.3). Воспользовавшись формулами (10.15), запишем уравнения (10.16) в координатном пространстве:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = -4\lambda \Big\{ \sqrt{(n+2)(n+1)} \int dx_1' dx_2' dx_3' \times$$

$$\times G_0(x_1 - x_1') G_0(x_1 - x_2') G_0(x_1 - x_3') F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+ 3 \sum_{i_1=2}^{n} \int dx_1' dx_2' \delta(x_1 - x_{i_1}) G_0(x - x_1') G_0(x - x_2') \times$$

$$\times F_n(x_1', x_2', x_2, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int dx_1' \delta(x_1 - x_{i_1}) \delta(x_1 - x_{i_2}) G_0(x_1 - x_1') \times$$

$$\times F_{n-2}(x_1', x_2, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_2}, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq 1}^{n} \delta(x_1 - x_{i_1}) \delta(x_1 - x_{i_2}) \delta(x_1 - x_{i_3}) \times$$

$$\times F_{n-4}(x_2, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_3}, \ldots, x_n) \Big\}. \quad (10.17)$$

До сих пор мы выполняли переход в евклидову область в уравнениях резольвентного типа, в которых вклады от вакуумных диаграмм выделяются в виде множителя. Этот множитель можно сократить во всех членах уравнения (10.17). В уравнениях эволюционного типа вакуумные вклады связаны операторным соотношением с коэффициентной функцией $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Поэтому при переходе в евклидову область нужно установить, как изменится F_0. Так как связная часть вакуумного вклада F_0^T пропорциональна $\delta(0)$, т. е. объему системы V, то при переходе в евклидову область ($t \to it$) V изменится на iV, а следовательно, $F_0^T \to i F_0^T$, что соответствует (10.5). Мы не будем приводить здесь подробных выкладок для уравнений эволюционного типа. Приведем их окончательный вид:

в евклидовой области

$$-\frac{d}{d\lambda} \mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n) =$$

$$= \sqrt{(n+4)\ldots(n+1)} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \frac{(2\pi)^d \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2) \ldots (2\pi)^d (\mu^2 + k_4^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{n+4}(k_1, k_2, k_3, k_4, p_1, \ldots, p_n) +$$

$$+ 4\sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{i_1=1}^{n} \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^d \, \delta(p_{i_1} - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2) \ldots (2\pi)^d (\mu^2 + k_3^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{n+2}(k_1, k_2, k_3, \quad p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) +$$

$$+ 6 \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^d \, \delta(p_{i_1} + p_{i_2} - k_1 - k_2)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)(2\pi)^d (\mu^2 + k_2^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_n(k_1, k_2, p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n} \int dk_1 \frac{(2\pi)^d \, \delta(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} - k_1)}{(2\pi)^d (\mu^2 + k_1^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{n-2}(k_1, p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_3}, \ldots, p_n) + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \times$$

$$\times \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_4 = 1}^{n} (2\pi)^d \, \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_4}) \, \mathcal{F}_{n-4}(p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_4}, \ldots, p_n); \tag{10.18}$$

в координатном пространстве

$$-\frac{d}{d\lambda} F_n(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{(n+4)\ldots(n+1)} \int dx\, dx_1' \ldots dx_4' \times$$

$$\times G_0(x - x_1') \ldots G_0(x - x_4') F_{n+4}(x_1', \ldots, x_4', x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ 4\sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{i_1=1}^{n} \int dx_1' dx_2' dx_3' G_0(x_{i_1} - x_1') \, G_0(x_{i_1} - x_2') \times$$

$$\times G_0(x_{i_1} - x_3') \, F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_1, \ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \delta(x_{i_1} - x_{i_2}) \int dx_1' dx_2' G_0(x_{i_1} - x_1') \, G_0(x_{i_1} - x_2') \times$$

$$\times F_n(x_1', x_2', x_1, \ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_2}, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3}^{n} \delta(x_{i_1} - x_{i_2}) \, \delta(x_{i_1} - x_{i_3}) \times$$

$$\times \int dx_1' G_0(x_{i_1} - x_1') F_{n-2}(x_1', x_1, \ldots, \check{x}_{i_1}, \ldots, \check{x}_{i_2}, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4}^{n} \delta(x_{i_1} - x_{i_2}) \delta(x_{i_1} - x_{i_3}) \delta(x_{i_1} - x_{i_4}) \times$$

$$\times F_{n-4}(x_1, \ldots, \check{x}_{i_1}, \ldots, \check{x}_{i_4}, \ldots, x_n). \qquad (10.19)$$

10.2. Взаимодействие Юкавы

В этом случае структура функций Грина в пространстве Минковского определяется не только зависимостью от квадрата импульса $p^2 = p^{02} - \mathbf{p}^2$, но и свойствами матриц Дирака γ^μ (5.3), которые определяются метрическим тензором $g^{\mu\nu}$. В евклидовом пространстве метрика задается тензором $\delta_{\mu\nu}$, с которым, очевидно, должны быть связаны некоторые новые эрмитовы матрицы α_μ. Для них

$$[\alpha_\mu, \alpha_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}. \qquad (10.20)$$

В случае 4-мерного евклидова пространства выберем [202]

$$\alpha_k = \gamma_0\gamma_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \alpha_4 = \gamma_0\gamma_5 l_3, \quad l_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = -i\gamma_0; \qquad (10.21)$$

в двумерном пространстве времени можно выбрать [126]

$$\alpha_1 = \gamma_0\gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_1, \quad \alpha_3 = -i\gamma_0.$$

Совершим сначала переход в евклидову область в уравнении (7.15). Перепишем для этого (7.15) в импульсном пространстве, используя формулы перехода

$$S^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp e^{-ip(x-y)} \frac{\hat{p} - m}{m^2 - p^2 - i\varepsilon},$$

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d(2m+n)}} \int \exp\left[i \left(\sum_{j=1}^{m} y_j p_j - \sum_{j=1}^{m} z_j p_j' + \sum_{j=1}^{n} x_j k_j \right) \right] \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m; p_1', \ldots, p_m'; k_1, \ldots, k_n)\, dp_1 \ldots dp_m\, dp_1' \ldots dp_m'\, dk_1 \ldots dk_n. \qquad (10.22)$$

Тогда получим

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m; p_1', \ldots, p_m'; k_1, \ldots, k_n) =$$

$$= (-i\lambda)\sqrt{n+1} \int dq\, dt \frac{(2\pi)^d \delta(q + t - p_1)}{(2\pi)^d i(\mu^2 - t^2 - i\varepsilon)} \frac{\hat{q} - m}{(2\pi)^d i(m^2 - q^2 - i\varepsilon)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_2, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ t, k_1, \ldots, k_n) +$$

$$+(-i\lambda)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\int dq\,(2\pi)^d\delta(q-k_i-p_1)\frac{\hat{q}-m}{(2\pi)^d i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}\times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n-1}(q, p_2, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) +$$

$$+(-i\lambda)\sqrt{n+1}\,(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int dt\,I\cdot(2\pi)^d\delta(p_j'-p_1+t)\otimes$$

$$\otimes\frac{1}{(2\pi)^d i\,(\mu^2-t^2-i\varepsilon)}\mathcal{F}_{m-1,n+1}(p_2, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, \hat{p}_j', \ldots, p_m';$$

$$t, k_1, \ldots, k_n) + (-i\lambda)(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} I\cdot(2\pi)^d\delta(p_j'-p_1-k_i)\otimes\mathcal{F}_{m-1,n-1}(p_2, \ldots, p_m;$$

$$p_1', \ldots, \hat{p}_j', \ldots, p_m';\ k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n). \qquad (10.23)$$

Рассмотрим первый член уравнения (10.23)

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ k_1, \ldots, k_n) =$$

$$=(-i\lambda)\sqrt{n+1}\int dq\,dt\,\frac{(2\pi)^d\delta(q+t-p_1)}{(2\pi)^d i\,(\mu^2-t^2-i\varepsilon)}\,\frac{(-i\gamma^0q^0+i\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}-m)}{(2\pi)^d i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}\times$$

$$\times\mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_2, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ t, k_1, \ldots, k_n) + \ldots \qquad (10.24)$$

В уравнениях (10.24) структура сингулярностей имеет такой же характер, как и в уравнениях (10.2). Поэтому мы можем повторить все рассуждения предыдущего пункта. В результате получим следующее уравнение:

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ k_1, \ldots, k_n) =$$

$$=(-\lambda)\sqrt{n+1}\int dq\,dt\,\frac{(2\pi)^d\delta(q+t-p_1)}{(2\pi)^d(\mu^2+t^2)}\,\frac{\gamma^0q^d+i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}-m}{(2\pi)^d(m^2+q^2)}\times$$

$$\times\mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_2, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ t, k_1, \ldots, k_n) + \ldots,$$

$$q^2 = (q^1)^2 + \ldots + (q^d)^2. \qquad (10.25)$$

Проделаем теперь в (10.25) замену [134—138, 202]

$$\mathcal{F}'_{m,n}(\ldots) =$$
$$= \bigotimes_1^m \left(\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\alpha_d\right](-\alpha_{d+1})\mathcal{F}_{m,n}(\ldots)\bigotimes_1^m\left(\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\alpha_d\right]\right)\right). \quad (10.26)$$

Как мы уже указывали, $\alpha_k = \gamma^0\gamma^k$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$,

$$\alpha_d = \begin{cases}\gamma^0\gamma^5 l_3, & d = 4,\\ \gamma_1, & d = 2,\end{cases} \text{ и } \alpha_{d+1} = -i\gamma^0.$$

Учитывая свойства матрицы $\exp\left[-i\frac{\pi}{4}\alpha_d\right]$,

$$\left(\exp\left[\pm i\frac{\pi}{4}\alpha_d\right]\right)^2 = \pm i\alpha_d; \quad (10.27)$$

$$\exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\alpha_j = \alpha_j \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\alpha_d\right], \quad j \neq d, \quad (10.28)$$

приходим к выражению

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m; p'_1, \ldots, p'_m; k_1, \ldots, k_n) =$$
$$= \sqrt{n+1}\int dq\, dt\, (2\pi)^d\, \delta(q+t-p_1)\, \lambda\alpha_{d+1}\frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d(m^2+q^2)} \times$$
$$\times \frac{1}{(2\pi)^d(\mu^2+t^2)}\mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_2, \ldots, p_m; p'_1, \ldots, p'_m; t, k_1, \ldots, k_n) + \ldots,$$
$$q^2 = (q^1)^2 + \ldots + (q^d)^2, \quad \alpha q = \alpha_1 q^1 + \ldots + \alpha_d q^d.$$

Выполняя подобные преобразования во всех членах уравнения (10.23), приходим к уравнению для $\mathcal{F}_{m,n}$ в евклидовой области:

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m; p'_1, \ldots, p'_m; k_1, \ldots, k_n) =$$
$$= \sqrt{n+1}\int dq\, dt\, \lambda\alpha_{d+1}(2\pi)^d\,\delta(q+t-p_1)\frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d(m^2+q^2)} \times$$
$$\times \frac{1}{(2\pi)^d(\mu^2+t^2)}\mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_2, \ldots, p_m; p'_1, \ldots, p'_m; t, k_1, \ldots, k_n) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\int dq\,\lambda\alpha_{d+1}(2\pi)^d\delta(q-p_1-k_i)\frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d(m^2+q^2)} \times$$
$$\times \mathcal{F}_{m,n-1}(q, p_2, \ldots, p_n; p'_1, \ldots, p'_m; k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) +$$

$$+\sqrt{n+1}\,(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int dt\,\lambda\alpha_{d+1}(2\pi)^d\delta(p'_j-p_1+t)\otimes$$

$$\otimes\frac{1}{(2\pi)^d(\mu^2+t^2)}\mathcal{F}_{m-1,n+1}(p_2,\ldots,p_m;\,p'_1,\ldots,p'_j,\ldots,p'_m;$$

$$t,k_1,\ldots,k_n)+(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_{d+1}(2\pi)^d\delta(p'_j-p_1-k_i)\otimes\mathcal{F}_{m-1,n-1}(p_2,\ldots,p_m;$$

$$p'_1,\ldots,\hat{p}'_j,\ldots,p'_m;\,k_1,\ldots,\hat{k}_i,\ldots,k_n). \qquad (10.29)$$

Аналогичные уравнения следуют из (7.14) и (7.16).

При переходе в евклидову область в уравнениях эволюционного типа нужно учесть, что для связных частей вакуумных вкладов осуществляется замена

$$F^{\eta}_{0,0}\to iF^{\eta}_{0,0}. \qquad (10.30)$$

Так как в дальнейшем для модели Юкавы мы будем исследовать лишь уравнения эволюционного типа, то приведем их окончательный вид после перехода в евклидову область:

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}_{m,n}(p_1,\ldots,p_m;\,p'_1,\ldots,p'_m;\,k_1,\ldots,k_n)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j_1=1}^{m}(-1)^{j_1-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j_2=1}^{m}(-1)^{j_2-1}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{d+1}(2\pi)^d\delta(p'_{j_2}-p_{j_1}-k_i)\otimes$$

$$\otimes\mathcal{F}_{m-1,n-1}(p_1,\ldots,\hat{p}_{j_1},\ldots,p_m;\,p'_1,\ldots,\hat{p}'_{j_2},\ldots,p'_m;\,k_1,\ldots,\hat{k}_i,\ldots,k_n)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j_1=1}^{m}(-1)^{j_1-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\sum_{j_2=1}^{m}(-1)^{j_2-1}\int dt\alpha_{d+1}\delta(p'_{j_2}-p_{j_1}+t)\otimes$$

$$\otimes\frac{1}{(2\pi)^d(t^2+\mu^2)}\mathcal{F}_{m-1,n+1}(p_1,\ldots,\hat{p}_{j_1},\ldots,p_m;\,p'_1,\ldots,\hat{p}'_{j_2},\ldots,p_m;$$

$$t,\ k_1, \ldots, k_n) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int dq\, \alpha_{d+1} (2\pi)^d \delta(q - p_j - k_i) \times$$

$$\times \frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (m^2 + q^2)} \mathcal{F}_{m,n-1}(q,\ p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;$$

$$k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int dq' \mathcal{F}_{m,n-1}(p_1, \ldots, p_m;$$

$$q',\ p'_1, \ldots, \hat{p}'_j, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) \frac{\alpha q' + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q'^2 + m^2)} \times$$

$$\times \alpha_{d+1} (2\pi)^d \delta(p'_j - q' - k_i) + \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dq\, dt\, \alpha_{d+1} \times$$

$$\times (2\pi)^d \delta(q - p_j + t) \frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (m^2 + q^2)} \frac{1}{(2\pi)^d (\mu^2 + t^2)} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n+1}(q,\ p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ t,\ k_1, \ldots, k_n) +$$

$$+ \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int dq'\, dt\, \mathcal{F}_{m,n+1}(p_1, \ldots, p_m;\ q',\ p'_1, \ldots, \hat{p}'_j, \ldots, p'_m;$$

$$t,\ k_1, \ldots, k_n) \frac{1}{(2\pi)^d (t^2 + \mu^2)} \frac{\alpha q' + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q'^2 + m^2)} \alpha_{d+1} (2\pi)^d \delta(p'_j - q' + t) +$$

$$+ (-1)^{m+1} (m+1) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}_1 \left[\int\!\!\int dq\, dq'\, \alpha_{d+1} (2\pi)^d \delta(q - q' - k_i) \times \right.$$

$$\times \frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q^2 + m^2)} \mathcal{F}_{m+1,n-1}(q,\ p_1, \ldots, p_m;\ q',\ p'_1, \ldots, p'_m;$$

$$\left. k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) \frac{\alpha q' + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q'^2 + m^2)} \right] + (-1)^{m+1} (m+1) \sqrt{n+1} \times$$

$$\times \mathrm{Sp}_1 \left[\int\!\!\int dq\, dq'\, dt\, \alpha_{d+1} (2\pi)^d \delta(q - q' + t) \frac{\alpha q + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q^2 + m^2)} \times \right.$$

$$\times \mathcal{F}_{m+1,n+1}(q,\ p_1, \ldots, p_m;\ q',\ p'_1, \ldots, p'_m;\ t,\ k_1, \ldots, k_n) \times$$

$$\left. \times \frac{\alpha q' + m\alpha_{d+1}}{(2\pi)^d (q'^2 + m^2)} \frac{1}{(2\pi)^d (\mu^2 + t^2)} \right]. \qquad (10.31)$$

Введем теперь свободную евклидову функцию Грина для фермионных полей.

Согласно формулам (10.26) и (10.27) получим

$$\frac{1}{i} S^c(x-y) \to S^E(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int dp e^{-ip(x-y)} \frac{\alpha p + m\alpha_{d+1}}{p^2 + m^2}, \quad (10.32)$$

$$px = p^1x^1 + \ldots + p^d x^d.$$

Формула перехода (10.22) в евклидовой области примет вид

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_m;\ x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d(2m+n)}} \int \exp\left[-i\left(\sum_{j=1}^{n} y_j p_j - \sum_{j=1}^{m} z_j p'_j + \sum_{j=1}^{n} x_j k_j\right)\right] \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, k_n)\, dp_1 \ldots dk_n. \quad (10.33)$$

Перепишем уравнение (10.31) в координатном представлении, используя (10.15) и (10.32)—(10.33):

$$\frac{d}{d\lambda} F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_m;\ x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j'_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{d+1} \delta(y_{j_1} - z_{j_2})\, \delta(y_{j_1} - x_i) \otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, \hat{y}_{j_1}, \ldots, y_m;$$

$$z_1, \ldots, \hat{z}_{j_2}, \ldots, z_m;\ x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \alpha_{d+1} \delta(y_{j_1} - z_{j_2}) \otimes$$

$$\otimes \sqrt{n+1} \int dx\, G_0(y_{j_1} - x)\, F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \hat{y}_{j_1}, \ldots, y_m;$$

$$z_1, \ldots, \hat{z}_{j_2}, \ldots, z_m;\ x, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(y_j - x_i) \times$$

$$\times \int dy\, \alpha_{d+1} S^E(y_j - y)\, F_{m,n-1}(y, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m;$$

$$z_1, \ldots, z_m;\ x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int dz \times$$

$$\times F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) S^E(z-z_j) \times$$
$$\times \alpha_{d+1}\delta(z_j - x_i) + \sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int dy\, dx\, \alpha_{d+1} S^E(y_j - y) \times$$
$$\times G_0(y_j - x) F_{m,n+1}(y, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int dz\, dx\, F_{m,n+1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m;$$
$$x, x_1, \ldots, x_n) S^E(z - z_j) G_0(z_j - x)\alpha_{d+1} + (-1)^{m+1}(m+1) \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}_1\left[\int dy\, dz\, \alpha_{d+1} S^E(x_i - y) F_{m+1,n-1}(y, y_1, \ldots, y_m;\right.$$
$$\left. z, z_1, \ldots, z_n; x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) S^E(z - x_i)\right] + (-1)^{m+1} \times$$
$$\times (m+1)\sqrt{n+1}\,\mathrm{Sp}_1\left[\int dy\, dz\, dx\, dx'\, \alpha_{d+1} S^E(x' - y) \times\right.$$
$$\times F_{m+1,n+1}(y, y_1, \ldots, y_n; z, z_1, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$\left.\times S^E(z - x') G_0(x' - x)\right]. \qquad (10.34)$$

§ 11. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ ВНЕШНИХ ЛИНИЙ (ЕВКЛИДОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ПОЛЯ)

Исследование уравнений (10.16)—(10.19), (10.29), (10.31) осложняется тем, что они имеют довольно сложную алгебраическую структуру. Как мы покажем в настоящем параграфе, можно ввести некоторые операторы, которые очень напоминают операторы свободных полей. С помощью этих операторов уравнения переписываются в довольно простом виде, пригодном для математического исследования.

11.1. Скалярное взаимодействие

Выполним в уравнении (10.16) и (10.18) замену

$$\mathcal{F}'_n(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_i^2 + \mu^2}} \mathcal{F}_n(k_1, \ldots, k_n). \qquad (11.1)$$

Для уравнений (10.17) и (10.19) эквивалентная замена имеет вид

$$F'_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}\int dx'_i G_0^{1/2}(x_i - x'_i) F_n(x'_1, \ldots, x'_n), \qquad (11.2)$$

где

$$
\begin{aligned}
G_0^{1/2}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int dk \frac{e^{ik(x-y)}}{\sqrt{k^2+\mu^2}}, \\
G_0(x-y) &= \int dz G_0^{1/2}(x-z)\, G_0^{1/2}(z-y).
\end{aligned} \tag{11.3}
$$

После замены (11.1) или (11.2) в уравнениях резольвентного типа (10.16) и (10.17) выполним симметризацию по переменным p_1 и x_1 соответственно. Это означает следующее. В процессе самого вывода уравнений (10.16) или (10.17) первая переменная была выделена среди остальных. Совершенно аналогично мы можем записать уравнения резольвентного типа с выделенными переменными p_2, p_3, ..., p_n $(x_2, \ldots, x_n)$. Если теперь сложить все эти n уравнений, разделить обе части на n и учесть симметричность коэффициентных функций по своим аргументам, то получим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(p_1, \ldots, p_n) = &-\frac{4\lambda}{n} \Big\{ \sqrt{(n+2)(n+1)}\, \times \\
&\times \sum_{i_1=1}^{n} \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} - k_1 - k_2 - k_3)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{k_3^2+\mu^2}} \times \\
&\times \mathcal{F}_{n+2}(k_1, k_2, k_3, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) + \\
&+ 3 \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} + p_{i_2} - k_1 - k_2)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{k_2^2+\mu^2}} \times \\
&\times \mathcal{F}_n(k_1, k_2, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) + \\
&+ 3 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n} \int dk_1 \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} - k_1)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{k_1^2+\mu^2}} \times \\
&\times \mathcal{F}_{n-2}(k_1, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_3}, \ldots, p_n) + \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \times \\
&\times \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n} \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} + p_{i_4})}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_4}^2+\mu^2}} \times \\
&\times \mathcal{F}_{n-4}(p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_4}, \ldots, p_n) \Big\}.
\end{aligned} \tag{11.4}
$$

В координатном пространстве это соответствует выражению

$$F_n(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= -\frac{4\lambda}{n}\Big\{\sqrt{(n+2)(n+1)}\sum_{i_1=1}^{n}\int dx'dx_1'dx_2'dx_3'G_0^{1/2}(x_{i_1}-x')\times$$

$$\times G_0^{1/2}(x'-x_1')G_0^{1/2}(x'-x_2')G_0^{1/2}(x'-x_3')F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, x_n) +$$

$$+3\sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n}\int dx'dx_1'dx_2'G_0^{1/2}(x_{i_1}-x')G_0^{1/2}(x_{i_2}-x')G_0^{1/2}(x'-x_1')\times$$

$$\times G_0^{1/2}(x'-x_2')F_n(x_1', x_2', x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, x_n) +$$

$$+\frac{3}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n}\int dx'dx_1'G_0^{1/2}(x_{i_1}-x')G_0^{1/2}(x_{i_2}-x')\times$$

$$\times G_0^{1/2}(x_{i_3}-x')G_0^{1/2}(x'-x_1')\ F_{n-2}(x_1', x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_3}, \dots, x_n) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}}\sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n}\int dx'G_0^{1/2}(x_{i_1}-x')\times$$

$$\times G_0^{1/2}(x_{i_2}-x')G_0^{1/2}(x_{i_3}-x')G_0^{1/2}(x_{i_4}-x')\times$$

$$\times F_{n-4}(x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_4}, \dots, x_n)\Big\}. \quad (11.5)$$

Совершенно аналогично для уравнений эволюционного типа

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}_n(p_1, \dots, p_n) =$$

$$= -\sqrt{(n+4)\dots(n+1)}\int dk_1 \dots dk_4 \frac{(2\pi)^d\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_1^2+\mu^2}\dots(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_4^2+\mu^2}}\times$$

$$\times\mathcal{F}_{n+4}(k_1, \dots, k_4;\ p_1, \dots, p_n) -$$

$$-4\sqrt{(n+2)(n+1)}\sum_{i_1=1}^{n}\int dk_1dk_2dk_3\frac{(2\pi)^d\delta(p_{i_1}-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2}\dots(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_3^2+\mu^2}}\times$$

$$\times\mathcal{F}_{n+2}(k_1, k_2, k_3, p_1, \dots, \hat{p}_{i_1}, \dots, p_n) -$$

$$-6\sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n}\int dk_1dk_2\frac{(2\pi)^d\delta(p_{i_1}+p_{i_2}-k_1-k_2)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{p_{i_1}^2+\mu^2}\cdots(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_1^2+\mu^2}}\times$$

$$\times \mathcal{F}_n(k_1, k_2, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1} \int dk_1 \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} - k_1)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2} \sqrt{k_1^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{n-2}(k_1, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_3}, \ldots, p_n) - \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \times$$

$$\times \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n} \frac{(2\pi)^d \delta(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} + p_{i_4})}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2} \sqrt{p_{i_4}^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{n-4}(p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_4}, \ldots, p_n), \quad (11.6)$$

и в координатном пространстве

$$\frac{d}{d\lambda} F_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= -\sqrt{(n+4)\ldots(n+1)} \int dx\, dx_1' \ldots dx_4' G_0^{1/2}(x - x_1') \ldots G_0^{1/2}(x - x_4') \times$$

$$\times F_{n+4}(x_1', \ldots, x_4'; x_1, \ldots, x_n) -$$

$$-4\sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{i_1=1}^{n} \int dx\, dx_1' dx_2' dx_3' G_0^{1/2}(x_{i_1} - x) G_0^{1/2}(x - x_1') \times$$

$$\times G_0^{1/2}(x - x_2') G_0^{1/2}(x - x_3') F_{n+2}(x_1', x_2', x_3', x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, x_n) -$$

$$-6 \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int dx\, dx_1' dx_2' G_0^{1/2}(x_{i_1} - x) G_0^{1/2}(x_{i_2} - x) G_0^{1/2}(x - x_1') G_0^{1/2}(x - x_2') \times$$

$$\times F_n(x_1', x_2', x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_2}, \ldots, x_n) -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{n(n-1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n} \int dx\, dx_1' G_0^{1/2}(x_{i_1} - x) G_0^{1/2}(x_{i_2} - x) \times$$

$$\times G_0^{1/2}(x_{i_3} - x) G_0^{1/2}(x - x_1') F_{n-2}(x_1', x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_3}, \ldots, x_n) -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n} \int dx\, G_0^{1/2}(x_{i_1} - x) \times$$

$$\times G_0^{1/2}(x_{i_2} - x) G_0^{1/2}(x_{i_3} - x) G_0^{1/2}(x_{i_4} - x) \times$$

$$\times F_{n-4}(x_1, \ldots, \hat{x}_{i_1}, \ldots, \hat{x}_{i_4}, \ldots, x_n). \quad (11.7)$$

Введем теперь операторы, действующие по следующему правилу:

$$(a^+(k)f)_n(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(k - k_i) f_{n-1}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n),$$
$$(a^-(k)f)_n(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1}\, f_{n+1}(k, k_1, \dots, k_n), \tag{11.8}$$

а также операторы, действующие в координатном пространстве:

$$(a^+(x)f)_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} G_0^{1/2}(x - x_i) f_{n-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n),$$
$$(a^-(x)f)_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1} \int dx' G_0^{1/2}(x - x') f_{n+1}(x', x_1, \dots, x_n). \tag{11.9}$$

Операторы (11.8) и (11.9) связаны соотношением

$$a(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \frac{e^{ik\lambda}}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} a(k)\, dk = a^+(x) + a^-(x), \tag{11.10}$$

где $a(k) = a^+(k) + a^-(-k)$, $dk = dk^1 \dots dk^d$, $k^2 = (k^1)^2 + \dots + (k^d)^2$. Легко проверить, что они удовлетворяют следующим выражениям:

$$[a^-(k), a^+(k')]_- = \delta(k - k'),$$
$$[a^-(x), a^+(y)]_- = G_0(x - y), \tag{11.11}$$
$$[a(x), a(y)]_- = 0.$$

Мы называем операторы $a^{\pm}(x)$ (или $a^{\pm}(k)$) операторами рождения и уничтожения линий фейнмановских диаграмм в евклидовой области переменных x (или k). Эти операторы в неявном виде фигурировали в работе [124], их явный вид был выписан в работе [74]. Позже они были введены Нельсоном в работах [113—116] при аксиоматической формулировке евклидовой теории поля.

Составим из операторов (11.8) евклидов оператор числа частиц

$$N_b = \int a^+(k) a^-(k)\, dk. \tag{11.12}$$

Ясно, что

$$(\hat{N}_b f)_n(k_1, \dots, k_n) = n f_n(k_1, \dots, k_n),$$
$$(\varphi(\hat{N}_b) f)_n(k_1, \dots, k_n) = \varphi(n) f_n(k_1, \dots, k_n). \tag{11.13}$$

Используя операции (11.8), (11.9), (11.13), можно уравнения (11.4)—(11.7) записать в пространстве последовательностей $F = \{F_n\}_1^\infty$ в операторном виде:

$$F = -4\lambda A F + F^0, \tag{11.14}$$

где

$$A = \hat{N}_b^{-1} \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{(2\pi)^d \delta(k_1 + \ldots + k_4)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2} \sqrt{k_4^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times a^+(k_1) {:} a(k_2) \ldots a(k_4){:} = \hat{N}_b^{-1} \int dx\, a^+(x) {:} a^3(x){:}, \tag{11.15}$$

$$F^0 = \left(0,\ 0,\ 0,\ \lambda \frac{4!\,(2\pi)^d \delta(k_1 + \ldots + k_4)}{\sqrt{4!}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2} \sqrt{k_4^2 + \mu^2}},\ 0, \ldots\right). \tag{11.16}$$

Оператор A называется производящим оператором уравнений резольвентного типа. Степени оператора на векторе A полностью восстанавливают ряд теории возмущений без вакуумных диаграмм для матрицы рассеяния в евклидовой области.

Совершенно аналогично получим уравнение эволюционного типа

$$\frac{dF}{d\lambda} = -HF. \tag{11.17}$$

Здесь

$$H = \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{(2\pi)^d \delta(k_1 + \ldots + k_4)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2} \sqrt{k_4^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times {:}a(k_1) \ldots a(k_4){:} = \int dx {:} a^4(x){:}. \tag{11.18}$$

При $\lambda = 0$ S-матрица равна единице, т. е. коэффициентные функции $F_n = \delta_{n0}$ или $F|_{\lambda=0} = \Omega_0 = (1, 0, 0, \ldots)$.

Оператор H называется производящим оператором уравнений эволюционного типа. Его степени на Ω_0 восстанавливают полный ряд (включая вакуумные вклады) теории возмущений для матрицы рассеяния:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} H^n \Omega_0. \tag{11.19}$$

11.2. Взаимодействие Юкавы

Чтобы выполнить в уравнениях (10.28)—(10.31) замену, подобную замене (11.1), введем следующую матрицу-функцию:

$$S(k) = -\left(\frac{i}{2m}\right) \alpha_{d+1} \boldsymbol{\alpha k} \frac{m}{|k|} \operatorname{arctg} \frac{|k|}{m}.$$

Используя свойства (10.27), (10.28) и раскладывая в ряд $\exp\{iS(k)\}$, легко получить следующее тождество:

$$e^{iS(k)}(\alpha k + m\alpha_{d+1})e^{-iS(k)} = e^{2iS(k)}(\alpha k + m\alpha_{d+1}) = \alpha_{d+1}\sqrt{k^2+m^2}, \tag{11.20}$$

откуда получим

$$\frac{\alpha k + m\alpha_{d+1}}{k^2+m^2} = \frac{e^{-iS(k)}\alpha_{d+1}e^{iS(k)}}{\sqrt{k^2+m^2}}. \tag{11.21}$$

Теперь замена (11.1) для уравнения (10.22) будет иметь вид

$$\mathcal{F}'_{m,n}(p_1, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_n) =$$

$$= \bigotimes_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{\alpha_{d+1}}\, e^{iS(p_j)}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{p_j^2+m^2}}\, \mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_n) \times$$

$$\times \bigotimes_{j=1}^{m} \frac{e^{-iS(p'_j)}\sqrt{\alpha_{d+1}}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{p'^2_j+m^2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_i^2+\mu^2}}. \tag{11.22}$$

Антисимметризируя *) уравнение (10.29) по импульсу p_1 и выполняя замену (11.22), получим

$$\mathcal{F}_{m,n}(p_1, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_n) =$$

$$= \lambda \frac{1}{m}\sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dq\, dt\, \sqrt{\alpha_{d+1}}\, e^{iS(p_j)}\alpha_{d+1}e^{-iS(q)}\sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d\, \delta(q+t-p_j)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{p_j^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{q^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt{t^2+\mu^2}} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m,n+1}(q, p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_m;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ t, k_1, \ldots, k_n) +$$

$$+ \lambda \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int dq\, \sqrt{\alpha_{d+1}}\, e^{iS(p_j)}\alpha_{d+1}e^{-iS(q)}\sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d\, \delta(q-p_j-k_i)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{p_j^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{q^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_i^2+\mu^2}} \times$$

*) Под антисимметризацией понимается операция, при которой складываются и делятся на m уравнения, получающиеся из (10.22) перестановкой $p_1, \ldots, p_m$ с учетом антисимметричности функции $F_{m,n}$ по аргументам $p_1, \ldots, p_m$.

$$\times \mathcal{F}_{m,n-1}(q, p_1, \ldots, \widehat{p}_j, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, p_m';\ k_1, \ldots, \widehat{k}_i, \ldots, k_n) +$$

$$+ \lambda \frac{1}{m} \sqrt{n+1} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j'=1}^{m} (-1)^{j'-1} \int dt \sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times e^{iS(p_j)} \alpha_{d+1} e^{i-S(p'_{j'})} \sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d \, \delta(p'_{j'} - p_j + t)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p_j^2 + m^2} \, (2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p'^2_{j'} + m^2} \, (2\pi)^{d/2} \sqrt{t^2 + \mu^2}} \otimes$$

$$\otimes \mathcal{F}_{m-1,n+1}(p_1, \ldots, \widehat{p}_j, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, \widehat{p}'_{j'}, \ldots, p_m;\ t, k_1, \ldots, k_n) +$$

$$+ \frac{\lambda}{m} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j'=1}^{m} (-1)^{j'-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times e^{iS(p_j)} \alpha_{d+1} e^{-iS(p'_{j'})} \sqrt{\alpha_{d+1}} \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^d \, \delta(p'_{j'} - p_j - k_i)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p_j^2 + m^2} \, (2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p'^2_{j'} + m^2} \, (2\pi)^{d/2} \sqrt{k_i^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{m-1,n-1}(p_1, \ldots, \widehat{p}_j, \ldots, p_m;\ p_1', \ldots, \widehat{p}'_{j'}, \ldots, p_m;$$

$$k_1, \ldots, \widehat{k}_i, \ldots, k_n). \qquad (11.23)$$

Введем новые функции

$$S_E^{1/2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int dk \frac{e^{-ikx} e^{-iS(k)} \sqrt{\alpha_{d+1}}}{\sqrt[4]{k^2 + m^2}},$$

$$\overline{S}_E^{1/2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int dk \frac{e^{-ikx} \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(k)}}{\sqrt[4]{k^2 + m^2}}, \qquad (11.24)$$

$$S^E(x - y) = \int dz S_E^{1/2}(x - z) \overline{S}_E^{1/2}(z - y).$$

С помощью этих функций уравнение (11.23) в координатном пространстве будет иметь вид

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{\lambda}{m} \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dx \, dy_1' dx_1' \overline{S}_E^{1/2}(y_j - x) \, \alpha_{d+1} S_E^{1/2}(x - y_1') \times$$

$$\times G_0^{1/2}(x-x_1')\,F_{m,n+1}(y_1', y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; x_1', x_1, \ldots, x_n)+$$

$$+\lambda\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\int dx\,dy_1'\bar{S}_E^{1/2}(y_j-x)\,G_0^{1/2}(x_i-x)\times$$

$$\times\alpha_{d+1}S_E^{1/2}(x-y_1')\,F_{m,n-1}(y_1', y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m;$$

$$x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)+\lambda\frac{1}{m}\sqrt{n+1}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\times$$

$$\times\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\int dx\,dx_1'\bar{S}_E^{1/2}(y_j-x)\,\alpha_{d+1}S_E^{1/2}(x-z_{j'})\otimes$$

$$\otimes G_0^{1/2}(x-x_1')\,F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \widehat{z_{j'}}, \ldots, z_m;$$

$$x_1', x_1, \ldots, x_n)+\lambda\frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\sum_{i=1}^{n}\int dx\times$$

$$\times S_E^{1/2}(y_j-x)\,\alpha_{d+1}S_E^{1/2}(x-z_{j'})\,G_0^{1/2}(x-x_i)\otimes$$

$$\otimes F_{m-1,n-1}(y_1\ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_m; x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n). \tag{11.25}$$

Введем операторы

$$(\Phi_\alpha^+(k)f)_{lm}(\alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l; \beta_1p_1', \ldots, \beta_mp_m')=$$

$$=\frac{(-1)^l}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\delta_{\alpha\beta_j}\delta(k-p_j')\,f_{l,m-1}(\alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l;$$

$$\beta_1p_1', \ldots, \widehat{\beta_jp_j}, \ldots, \beta_mp_m), \tag{11.26}$$

$$(\Phi_\alpha^-(k)f)_{lm}(\alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l; \beta_1p_1', \ldots, \beta_mp_m')=$$

$$=\sqrt{l+1}\,f_{l+1,m}(\alpha k, \alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l; \beta_1p_1', \ldots, \beta_mp_m')$$

и формально сопряженные им

$$(\overset{*}{\Phi}{}_\beta^-(k)f)_{lm}(\alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l; \beta_1p_1', \ldots, \beta_mp_m')=$$

$$=(-1)^l\sqrt{m+1}\,f_{l,m+1}(\alpha_1p_1, \ldots, \alpha_lp_l; \beta k, \beta_1p_1', \ldots, \beta_mp_m'), \tag{11.27}$$

$$(\overset{*}{\Phi}{}_{\beta}^{+}(k)f)_{lm}(\alpha_1p_1,\ldots,\alpha_lp_l;\beta_1p'_1,\ldots,\beta_mp'_m)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\delta_{\beta\alpha_j}\delta(k-p_j)\times$$
$$\times f_{l-1,m}(\alpha_1p_1,\ldots,\widehat{\alpha_jp_j},\ldots,\alpha_lp_l;\beta_1p'_1,\ldots,\beta_mp'_m).$$

Соответствующие операторы в координатном пространстве будут иметь вид

$$(\Phi_{\alpha}^{+}(x)f)_{lm}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m)=$$
$$=\frac{(-1)^l}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}S_E^{1/2}(x-z_j)_{\alpha\beta_j}\times$$
$$\times f_{l,m-1}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\widehat{\beta_jz_j},\ldots,\beta_mz_m),$$
$$(\Phi_{\alpha}^{-}(x)f)_{lm}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m)=$$
$$=\sqrt{l+1}\sum_{\delta}\int dy'_1S_E^{1/2}(x-y'_1)_{\alpha\delta}\times$$
$$\times f_{l+1,m}(\delta y'_1,\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m),$$
$$(11.28)$$
$$(\overline{\Phi}_{\beta}^{-}(x)f)_{lm}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m)=$$
$$=(-1)^l\sqrt{m+1}\sum_{\delta}\int dz'_1\times$$
$$\times f_{l,m+1}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\delta z'_1,\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m)\overline{S}_E^{1/2}(z'_1-x)_{\delta\beta},$$
$$(\overline{\Phi}_{\beta}^{+}(x)f)_{lm}(\alpha_1y_1,\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{l}}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\overline{S}_E^{1/2}(y_j-x)_{\alpha_j\beta}\times$$
$$\times f_{l-1,m}(\alpha_1y_1,\ldots,\widehat{\alpha_jy_j},\ldots,\alpha_ly_l;\beta_1z_1,\ldots,\beta_mz_m).$$

Операторы $\Phi^{\pm}(x)$ и $\overline{\Phi}^{\mp}(x)$ уже не будут сопряжены друг другу, так как матрица $\sqrt{\alpha_{d+1}}$ не эрмитова.

Определим теперь полные операторы таким образом:

$$\Phi_{\alpha}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{\delta}\int dk\,\frac{e^{-ikx}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}}\left(e^{-iS(k)}\sqrt{\alpha_{d+1}}\right)_{\alpha\delta}\times$$
$$\times(\Phi_{\delta}^{+}(k)+\Phi_{\delta}^{-}(k))=\Phi_{\alpha}^{+}(x)+\Phi_{\alpha}^{-}(x),$$
$$(11.29)$$

$$\bar{\Phi}_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_\delta \int dk \frac{e^{ikx}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}} \times$$
$$\times (\overset{*}{\Phi}{}^+_\alpha(k) - \overset{*}{\Phi}{}^-_\delta(k))(\sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(k)})_{\delta\alpha} = \bar{\Phi}^+_\alpha(x) - \bar{\Phi}^-_\alpha(x).$$

Введенные операторы подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}[\Phi^\pm_\alpha(k), \overset{*}{\Phi}{}^\mp_\beta(k')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(k-k'),\\ [\Phi^\pm_\alpha(x), \bar{\Phi}^\mp_\beta(y)]_+ = S^E(x-y)_{\alpha\beta},\end{gathered} \tag{11.30}$$

$$\begin{gathered}[\Phi_\alpha(x), \overset{*}{\Phi}_\beta(y)]_+ = [\bar{\Phi}_\alpha(x), \overset{*}{\bar{\Phi}}_\beta(y)]_+ = \\ = 2\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{\sqrt{k^2+m^2}} dk,\\ [\Phi(x), \Phi(y)]_+ = [\bar{\Phi}(x), \bar{\Phi}(y)]_+ = [\Phi(x), \bar{\Phi}(y)]_+ = 0.\end{gathered} \tag{11.31}$$

Операторы (11.28), (11.29) были впервые введены в работах [134—138] при исследовании уравнений квантовой электродинамики. Мы называем их операторами рождения и уничтожения линий фейнмановских диаграмм в евклидовой области переменных. В несколько другом виде такие операторы были получены в [120].

Введенные операторы $\Phi^\pm(x)$ и $\bar{\Phi}^\mp(x)$ позволяют переписать уравнения (11.23) и (11.25) в операторной форме:

$$F = \lambda A_1 F + F^0, \tag{11.32}$$

где

$$\begin{gathered}A_1 = \hat{N}_f^{-1} \int dq_1 dq_2 dt \times \\ \times \frac{(2\pi)^d \delta(q_1 - q_2 + t)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_1^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_2^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{t^2+\mu^2}} \times \\ \times :\bar{\Phi}^+(q_2) \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(q_2)} \alpha_{d+1} e^{-iS(q_1)} \sqrt{\alpha_{d+1}} \Phi(q_1) a(t): = \\ = \hat{N}_f^{-1} \int dx :\bar{\Phi}^+(x) \alpha_{d+1} \Phi(x) a(x):,\end{gathered} \tag{11.33}$$

$$F^0 = \left(0, 0, \frac{(2\pi)^{d/2} \delta(p - p' + k)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{p'^2+m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{k^2+\mu^2}} \times \right.$$
$$\left. \times \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(p)} \alpha_{d+1} e^{-iS(p')} \sqrt{\alpha_{d+1}}, 0, \ldots \right).$$

Здесь $\hat{N}_f$ — оператор числа фермионных линий одного сорта.

Совершенно аналогичные операции мы могли бы проделать и для уравнений, соответствующих (7.14) и (7.16). Они примут вид

$$F = \lambda A_2 F + F^0, \tag{11.34}$$

где

$$A_2 = \widehat{N}_f^{-1} \int dq_1 dq_2 dt \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^d \delta(q_1 - q_2 + t)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_1^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_2^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{t^2 + \mu^2}} \times$$
$$\times : \overline{\Phi}(q_2) \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(q_2)} \alpha_{d+1} e^{-iS(q_1)} \sqrt{\alpha_{d+1}} \Phi^+(q_1)\, a(t) : =$$
$$= \widehat{N}_f^{-1} \int dx : \overline{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi^+(x)\, a(x):. \tag{11.35}$$

Соответственно, для уравнения (7.16)

$$F = \lambda A_3 F + F^0, \tag{11.36}$$

где

$$A_3 = N_b^{-1} \int dq_1 dq_2 dt \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^d \delta(q_1 - q_2 + t)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_1^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_2^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{t^2 + \mu^2}} \times$$
$$\times : \overline{\Phi}(q_2) \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(q_2)} \alpha_{d+1} e^{-iS(q_1)} \sqrt{\alpha_{d+1}} \Phi(q_1)\, a^+(t) : =$$
$$= N_b^{-1} \int dx : \overline{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi(x)\, a^+(x):, \tag{11.37}$$

и, наконец, для уравнения (10.31)

$$\frac{dF}{d\lambda} = HF, \tag{11.38}$$

где

$$H = \int dq_1 dq_2 dt \times \frac{(2\pi)^d \delta(q_1 - q_2 + t)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_1^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt[4]{q_2^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2} \sqrt{t^2 + \mu^2}} \times$$
$$\times : \overline{\Phi}(q_2) \sqrt{\alpha_{d+1}} e^{iS(q_2)} \alpha_{d+1} e^{-iS(q_1)} \sqrt{\alpha_{d+1}} \Phi(q_1)\, a(t): =$$
$$= \int dx : \overline{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi(x)\, a(x):. \tag{11.39}$$

Итерации уравнений (11.32), (11.34) и (11 36) восстанавливают ряд теории возмущений для матрицы рассеяния, не содержащей вкладов от вакуумных диаграмм:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_1^n F^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_2^n F^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_3^n F^0. \tag{11.40}$$

Итерации уравнения (11.38) восстанавливают полный ряд теории возмущений для S-матрицы:

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}H^n\Omega_0,$$

где

$$\Omega_0=F|_{\lambda=0}.$$

Оператор H называется производящим оператором уравнений эволюционного типа для взаимодействия Юкавы [134, 138]. В работе [120] он фигурировал под названием евклидова действия.

§ 12. ВВЕДЕНИЕ ОБЪЕМНОГО И УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ОБРЕЗАНИЙ

В последующих главах мы приступим к исследованию уравнений (11.14), (11.17), (11.32), (11 34), (11.36) и (11.38). Задача состоит в том, чтобы подобрать некоторое функциональное пространство, в котором производящий оператор был бы хорошо определен, а соответствующее уравнение имело решение, принадлежащее данному пространству. Однако, например, для уравнений (11 17) и (11.38) такого пространства подобрать нельзя, так как степени оператора H порождают вклады от вакуумных диаграмм Фейнмана, которые пропорциональны множителю $\delta(0)=\infty$. Кроме того, при $d>2$ для скалярной теории и $d>1$ для взаимодействия Юкавы ядра производящих операторов перестают быть квадратично интегрируемыми, что приводит к появлению расходящихся при больших импульсах интегралов (ультрафиолетовые расходимости [30, § 7]). Указанные трудности приводят к тому, что возникает необходимость ввести объемные и ультрафиолетовые обрезания.

12.1 Объемные обрезания

Так как в евклидовом пространстве все координаты равноправны, то под объемом V будем понимать объем d-мерного куба:

$$V=V\times T;$$

если $x\in V$, то $x=(x^1,\ldots,x^s)\in V$, а $x^d\in T$. Объемное обрезание в операторы A, H, A_1, A_2, A_3 вводится с помощью некоторой функции $h(x)\in C_0^\infty(R_d)$, $0\leqslant h(x)\leqslant 1$, для которой $\operatorname{supp} h\subset V$. В импульсном пространстве это эквивалентно замене

$$(2\pi)^d\delta(k)\to\tilde{h}(k),\tag{12.1}$$

где $\tilde{h}(k)$ — преобразование Фурье функции $h(x)$. Кроме того, в уравнениях (11.14), (11.32), (11.34) и (11.36) указанную замену нужно выполнить и для вектора F^0. После замены (12.1) операторы A, H, A_1, A_2, A_3 будут иметь следующий вид:

$$A(h) = \widehat{N}^{-1} \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\widetilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_1^2+\mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{k_4^2+\mu^2}} \times$$

$$\times a^+(k_1) :a(k_2) \ldots a(k_4): = \widehat{N}^{-1} \int dx\, h(x)\, a^+(x) :a^3(x):, \quad (12.2)$$

$$H(h) = \int dx\, h(x) :a^4(x):, \quad (12.3)$$

$$A_1(h) = \widehat{N}_f^{-1} \int dx\, h(x) :\bar{\Phi}^+(x)\, \alpha_{d+1} \Phi(x)\, a(x):, \quad (12.4)$$

$$A_2(h) = \widehat{N}_f^{-1} \int dx\, h(x) :\bar{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi^+(x)\, a(x):, \quad (12.5)$$

$$A_3(h) = \widehat{N}_b^{-1} \int dx\, h(x) :\bar{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi(x)\, a^+(x):, \quad (12.6)$$

при этом

$$H(h) = \int dx\, h(x) :\bar{\Phi}(x)\, \alpha_{d+1} \Phi(x)\, a(x):. \quad (12.7)$$

В дальнейшем будет рассматриваться частный случай функции $h(x)$:

$$h(x) = g(\boldsymbol{x})\, \chi(x^d). \quad (12.8)$$

Рассмотрим теперь другой вид конечно-объемной аппроксимации, отвечающей дискретному импульсному представлению. Если наша система погружена в d-мерный куб V с ребром l, то поле должно быть периодической функцией по каждой пространственной координате с периодом l. Тогда импульсное пространство нужно разбить на непересекающиеся кубы $I_{k,V}$ с длиной ребра $2\pi/l$, в каждом из которых импульс принимает конкретное постоянное значение. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &N = \{n \mid n = (n_1, \ldots, n_d),\ n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, d\}, \\ &\Gamma_V = \left\{k \mid k = \frac{2\pi}{l} n,\ n \in N\right\}, \\ &I_{k,V} = \otimes [k - \pi/l, k + \pi/l]^d, \qquad k \in \Gamma_V, \\ &V_{k,V} = \otimes [-l/2, l/2]^d, \quad |V| = l^d. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Из условия периодичности некоторой функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ ее фурье-преобразование в таком представлении имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{l^{d/2}} \sum_{n \in N} \varphi_n e^{\frac{2\pi i}{l} nx}, \quad (12.10)$$

где $nx = n^1x^1 + \ldots + n^dx^d$. Устремляя l к бесконечности, можно в пределе перейти к непрерывному представлению. При таком переходе

$$(2\pi/l)^d \to dk, \tag{12.11}$$

а

$$(l/2\pi)^{d/2}\varphi_n \to \tilde{\varphi}(k). \tag{12.12}$$

Используя (12.11) и (12.12), перепишем в представлении (12.9) оператор N. Пусть χ_V^k — характеристическая функция куба $I_{k,V}$. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} a_V^{\pm}(k) &= (l/2\pi)^{d/2} a^{\pm}(\chi_V^k), \\ \Phi_V^{\pm}(k) &= (l/2\pi)^{d/2} \Phi^{\pm}(\chi_V^k), \\ \overline{\Phi}_V^{\pm}(k) &= (l/2\pi)^{d/2} \overline{\Phi}^{\pm}(\chi_V^k), \end{aligned} \tag{12.13}$$

где $k \in \Gamma_V$, $C^{\pm}(\chi_V^k) = \int C^{\pm}(k')\chi_V^k(k')\,dk'$ (C — один из операторов $a, \Phi, \overline{\Phi}$). Для операторов (12.13) выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered} [a_V^-(k), a_V^+(k')]_- = \delta_{kk'}, \\ [\Phi_{\alpha,V}^{\pm}(k), \overline{\Phi}_{\beta,V}^{\mp}(k')]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta_{kk'}, \end{gathered} \tag{12.14}$$

где $\delta_{kk'}$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера.

Теперь, в соответствии с (12.10) — (12.12), для операторов $\Phi(x)$ и $\overline{\Phi}(x)$ получим следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} a_V^{\pm}(k) &= \frac{1}{|V|^{1/2}} \sum_{k\in\Gamma} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{k^2+\mu^2}} a_V^{\pm}(\pm k), \\ \Phi_{\alpha,V}^{\pm}(x) &= \frac{1}{|V|^{1/2}} \sum_{k\in\Gamma_V} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}} \sum_{\delta=1}^{d} \left(e^{-iS(k)}\sqrt{\alpha_{d+1}}\right)_{\alpha\delta} \overset{*}{\Phi}{}_{\delta,V}^{\pm}(k), \\ \overline{\Phi}_{\alpha,V}^{\pm}(x) &= \frac{1}{|V|^{1/2}} \sum_{k\in\Gamma_V} \frac{e^{ikx}}{\sqrt[4]{k^2+m^2}} \sum_{\delta=1}^{d} \overset{*}{\Phi}{}_{\delta,V}^{\pm}(k) \left(\sqrt{\alpha_{d+1}}e^{iS(k)}\right)_{\delta\alpha}. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Из (12.15) или же непосредственно из (10.15) и (10.22) получим аппроксимации для $G_0(x-y)$ и $S_E(x-y)$:

$$\underbrace{a_V(x)\,a_V}(y) = [a_V^-(x), a_V^+(y)]_- = \frac{1}{|V|} \sum_{k\in\Gamma_V} e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2+\mu^2} = G_{0,V}(x-y), \tag{12.16}$$

$$\underbrace{\Phi_V(x)\Phi_V(y)} = \{\Phi_V^{\mp}(x), \bar{\Phi}_V^{\mp}(y)\} =$$

$$= \frac{1}{|V|}\sum_{k\in\Gamma_V} e^{-ik(x-y)}\frac{\alpha k + m\alpha_{d+1}}{k^2+m^2} = S_V^E(x-y).$$

И, наконец, для оператора H получим представление

$$H_V = \frac{1}{V^{3/2}}\sum_{k_1,k_2,p\in\Gamma_V}\frac{|V|\,\delta_{0,k_1+k_2+p}}{\sqrt[4]{k_1^2+m^2}\,\sqrt[4]{k_2+m^2}\,\sqrt{p^2+\mu^2}}\times$$

$$\times :\bar{\Phi}_V(k_1)\sqrt{\alpha_{d+1}}e^{iS(k_1)}\alpha_{d+1}e^{-iS(k_2)}\sqrt{\alpha_{d+1}}\Phi_V(k_2)\,a_V(p): =$$

$$= \int_V dx : \bar{\Phi}_V(x)\,\alpha_{d+1}\Phi_V(x)\,a_V(x):. \qquad (12.17)$$

12.2. Ультрафиолетовые обрезания

Введение ультрафиолетового обрезания сводится к тому, что интегрирование по импульсным переменным будет проходить не по всему пространству, а по некоторому ограниченному множеству. Мы будем рассматривать два вида обрезаний. В первом случае ограничение будет наложено на переменные $\boldsymbol{k} = (k^1, \ldots, k^s)$:

$$|\boldsymbol{k}| \leqslant \varkappa, \qquad (12.18)$$

а во втором случае — на все d переменных импульса k:

$$|k^i| \leqslant \varkappa, \qquad i = 1, 2, \ldots, d. \qquad (12.19)$$

Эти обрезания вводятся в операторы C (a, Φ или $\bar{\Phi}$) по следующему правилу:

$$C_\varkappa(x) = \int \delta_\varkappa(x-y)\,C(y)\,dy,$$

$$C_\varkappa(x) = \int \delta_\varkappa(x-y)\,C(y)\,dy, \qquad (12.20)$$

где

$$\delta_{\varkappa_i}(z_i) = \frac{1}{(2\pi)^{i+2}}\int e^{iq_iz_i}\chi(q_i, \varkappa_i)\,dq_i. \qquad (12.21)$$

Здесь

$$\chi(q_i, \varkappa_i) \in C_0^\infty, \quad 0 \leqslant \varkappa(q, \varkappa_i) \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}\chi(q_i, \varkappa_i) \subset [-\varkappa_i, \varkappa_i],$$

$$\chi(q_i, \varkappa_i) = \begin{cases} 1, & |q_i| < \varkappa_i - \delta, \\ 0, & |q_i| \geqslant \varkappa_i; \end{cases}$$

$$i = 1,\ 2, \quad \varkappa_1 = \boldsymbol{\varkappa}, \quad \varkappa_2 = \varkappa = (\boldsymbol{\varkappa}, \varkappa_0), \quad x_1 = \boldsymbol{x}, \quad x_2 = x,$$

$$q_1 = \boldsymbol{k}, \quad q_2 = (\boldsymbol{k}, k^d), \quad \chi(q_1, \varkappa_1) = \chi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\varkappa}), \quad \chi(q_2, \varkappa_2) = \chi(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\varkappa})\,\chi(q^d, \varkappa^0).$$

Подставляя (12.20) в (12.3) и (12.7), получим для скалярного взаимодействия

$$H(h, \varkappa_i) = \int dx h(x) : a^4_{\varkappa_i}(x) : =$$

$$= \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)\,\chi(k_1, \varkappa_i) \ldots \chi(k_4, \varkappa_i)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots (2\pi)^{d/2}\sqrt{k_4^2 + \mu^2}} : a(k_1) \ldots a(k_4) : \tag{12.22}$$

и для взаимодействия Юкавы

$$H(h, \varkappa_i) =$$

$$= \int dq_1 dq_2 dt \frac{\tilde{h}(q_1 - q_2 + t)\,\chi(q_1, \varkappa_i)\,\chi(q_2, \varkappa_i)\,\chi(t, \varkappa_i)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{q_1^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt[4]{q_2^2 + m^2}\,(2\pi)^{d/2}\sqrt{t^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times : \bar{\Phi}(q_2)\sqrt{\alpha_{d+1}}\,e^{iS(q_2)}\alpha_{d+1}e^{-iS(q_1)}\sqrt{\alpha_{d+1}}\,\Phi(q_1)\,a(t) : . \tag{12.23}$$

Обрезание в оператор H_V и в функции $G_{0,V}$ и S_V^t вводится таким образом, что суммирование в формулах (12.16) и (12.17) распространяется только до $|k| \leqslant \varkappa$. Соответствующие конечные суммы обозначим через $H_{V,\varkappa_i}$, $G_{0,V,\varkappa_i}$ и $S^t_{V,\varkappa_i}$.

Глава IV

СВЯЗЬ ЕВКЛИДОВОЙ И КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИЙ ПОЛЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В настоящей главе мы приступаем к математически строгому исследованию уравнений для коэффициентных функций S-матрицы в двумерном евклидовом пространстве. Будет установлено, что при наличии пространственных и импульсных обрезаний уравнения для коэффициентных функций модели скалярного поля и модели Юкавы обладают единственным решением. Будет доказана формула Фейнмана — Каца — Нельсона, позволяющая выразить функции Грина в евклидовой области как через производящий оператор уравнений для коэффициентных функций и операторы рождения и уничтожения внешних линий (операторы евклидова поля), так и через гамильтониан и свободные полевые операторы при мнимых временах. В связи с этим § 14 будет посвящен изучению гамильтонианов конструктивной квантовой теории поля.

§ 13. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введенные в § 12 обрезания позволяют определить производящие операторы уравнений для коэффициентных функций в соответствующих функциональных пространствах. В настоящем параграфе мы введем все необходимые пространства для гамильтонианов и производящих операторов рассматриваемых моделей.

13.1. Пространства Фока

Введем традиционные для квантовой теории поля пространства состояний — пространства Фока $\mathcal{F}$.

а) *Пространство Фока $\mathcal{F}_b$ для скалярного бозе-поля.* По определению $\mathcal{F}_b = \mathbf{C} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_b^{(n)}$, где «$n$-частичные» пространства $\mathcal{F}_b^{(n)}$ образованы как симметричные тензорные произведения

$$\mathcal{F}_b^{(n)} = \underbrace{\mathcal{F}_b^{(1)} \otimes_s \ldots \otimes_s \mathcal{F}_b^{(1)}}_{n}, \tag{13.1}$$

причем $\mathcal{F}_b^{(1)} = \mathcal{L}_2(R^s)$, а R^s — евклидово пространство переменных $x^1, \ldots, x^s$ $(p^1, \ldots, p^s)$. Скалярное произведение функций $f = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$

и $g=\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, принадлежащих пространству $\mathcal{F}_b$, определяется обычным образом:

$$(f, g)=\sum_{n=0}^{\infty}(f_n, g_n), \tag{13.2}$$

где

$$(f_n, g_n)=\int dx_1 \ldots dx_n f_n(x_1, \ldots, x_n)\, \overline{g_n(x_1, \ldots, x_n)} =$$
$$=(2\pi)^{-sn}\int dp_1 \ldots dp_n \tilde{\bar{f}}(p_1, \ldots, p_n)\, \tilde{g}(p_1, \ldots, p_n),$$
$$(f_0, g_0)=\bar{f}_0 g_0, \; f(x_1, \ldots, x_n)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{sn}}\int \exp(ip_1x_1+\ldots+ip_nx_n)\tilde{f}(p_1, \ldots, p_n)\, dp_1 \ldots dp_n,$$
$$x=(x^1, \ldots, x^s), \quad dx=dx^1 \ldots dx^s,$$

а норма

$$\|f\|=(f, f)^{1/2}.$$

Состояние без частиц описывается вакуумным вектором $\Omega_b=\{1, 0, 0, \ldots\}$, который является нижайшим собственным вектором свободного гамильтониана $H_{0,b}$:

$$H_{0,b}=\int a^*(k)\, a(k)\, \mu(k)\, dk. \tag{13.3}$$

Оператор числа частиц $N_b=\int a^*(k)\, a(k)\, dk$.

Операторы $H_{0,b}$, N_b являются положительными самосопряженными операторами в $\mathcal{F}_b$.

б) *Пространство Фока $\mathcal{F}_f$ для ферми-поля спина* 1/2. Фермионное поле спина 1/2 описывается уравнением Дирака

$$\left(\sum_n \gamma_n \frac{\partial}{\partial x^n}+m\right)\psi(x)=0, \tag{13.4}$$

а матрицы γ^n подчиняются соотношению (5.3).

Решение уравнения (13.4) в двумерном пространстве-времени ($s=1$) можно представить через операторы рождения и уничтожения фермионов $b^*(p)$, $b(p)$ и через операторы рождения и уничтожения антифермионов $b'^*(p)$ и $b'(p)$:

$$\psi_0(x)=\frac{1}{(2\pi)^{s/2}}\int dp e^{-ipx}\left(e^{i\omega(p)x^0}v^+(p)\, b'^*(p)+e^{-i\omega(p)x^0}v^-(-p)\, b(-p)\right), \tag{13.5}$$

где

$$v^{\pm}(\pm p)=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\begin{pmatrix} \nu(\mp p) \\ \pm\nu(\pm p)\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\nu(\pm p)=(\omega(p)\pm p)^{1/2}, \quad \omega(p)=\sqrt{p^2+m_f^2}, \quad p=|p|.$$

Отметим, что в случае $s=3$ существует по два оператора рождения и уничтожения для частицы и античастицы, отличающиеся проекцией спина на ось z $\pm 1/2$.

Введем одночастичное пространство для ферми-частицы следующим образом:

$$\mathcal{F}_f^{(1)} = R^d \otimes \mathcal{L}_2(R^s).$$

Так как l-частичное пространство для одного сорта частиц должно описываться антисимметричными функциями координат (импульсов), то оно вводится как антисимметричное тензорное произведение вида

$$\mathcal{F}_f^{(l)} = \underbrace{\mathcal{F}_f^{(1)} \otimes_a \dots \otimes_a \mathcal{F}_f^{(1)}}_{l}.$$

Фоковское пространство для частиц двух сортов (фермионов и антифермионов) определяется по формуле

$$\mathcal{F}_f = \mathbf{C} \bigoplus_{l,m=1}^{\infty} \mathcal{F}_f^{(l)} \otimes \mathcal{F}_f^{(m)}. \tag{13.6}$$

Вакуумный вектор Ω_f описывает состояние без частиц и является нижайшим собственным вектором оператора энергии

$$H_{0,f} = \int d\boldsymbol{p}\, \omega(\boldsymbol{p}) [b^*(\boldsymbol{p}) b(\boldsymbol{p}) + b'^*(\boldsymbol{p}) b'(\boldsymbol{p})] \tag{13.7}$$

и оператора числа частиц

$$N_f = \int d\boldsymbol{p} [b^*(\boldsymbol{p}) b(\boldsymbol{p}) + b'^*(\boldsymbol{p}) b'(\boldsymbol{p})].$$

в) *Полное фоковское пространство* $\mathcal{F}$. При рассмотрении взаимодействия между бозонами и фермионами возникает необходимость ввести полное фоковское пространство как тензорное произведение пространств $\mathcal{F}_b$ и $\mathcal{F}_f$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_b \otimes \mathcal{F}_b. \tag{13.8}$$

Вакуумный вектор для полного гамильтониана свободной энергии

$$H_0 = H_{0,b} + H_{0,f} \tag{13.9}$$

и оператора числа частиц

$$N = N_b + N_f$$

также является прямым произведением векторов Ω_b и Ω_f:

$$\Omega = \Omega_b \otimes \Omega_f. \tag{13.10}$$

Скалярное произведение двух векторов $f\{f_{l,m,n}\}_0^\infty$ и $g = \{g_{l,m,n}\}_0^\infty$, принадлежащих $\mathcal{F}$, определяется формулой

$$(f, g) = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (f_{l,m,n}, g_{l,m,n}), \tag{13.11}$$

где

$$(f_{l,m,n}, g_{l,m,n}) = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_l \\ \beta_1,\ldots,\beta_m}} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m dx_1 \ldots dx_n \times$$

$$\times \overline{f_{l,m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_l y_l; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; x_1, \ldots, x_n)} \times$$

$$\times g_{l,m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_l y_l; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; x_1, \ldots, x_n),$$

$$\alpha_i, \beta_i = 1, 2, \ldots, d.$$

Функции $f(\ldots)$ и $g(\ldots)$ симметричны по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и антисимметричны по $\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_l y_l$ и $\beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m$.

13.2. Евклидово пространство $\mathcal{H}$

Евклидово пространство $\mathcal{H}_b$ бозе-поля [74, 114, 124] вводится по аналогии с пространством $\mathcal{F}_b$:

$$\mathcal{H}_b = \mathbf{C} \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_b^{(n)}, \qquad (13.12)$$

где

$$\mathcal{H}_b^{(n)} = \underbrace{\mathcal{H}_b^{(1)} \otimes_s \ldots \otimes_s \mathcal{H}_b^{(1)}}_{n},$$

$$\mathcal{H}_b^{(1)} = \mathcal{L}_2(R^d), \qquad d = s + 1.$$

Вакуумный вектор обозначим через $\Omega_{0,b}$.

Скалярное произведение в таком пространстве определяется формулой

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\, g_n(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (2\pi)^{-dn} \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_1 \ldots dp_n \overline{\tilde{f}_n(p_1, \ldots, p_n)}\, \tilde{g}_n(p_1, \ldots, p_n), \qquad (13.13)$$

$$dx = dx^1 \ldots dx^d, \quad dp = dp^1 \ldots dp^d.$$

Функции $f(\ldots)$ и $g(\ldots)$ симметричны по своим аргументам.

Для евклидовых ферми-полей [120, 134—136, 138]

$$\mathcal{H}_f = \mathbf{C} \bigoplus_{l,m=1}^{\infty} \mathcal{H}_f^{(l)} \otimes \mathcal{H}_f^{(m)}, \qquad (13.14)$$

причем

$$\mathcal{H}_f^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H}_f^{(1)} \otimes_a \ldots \otimes_a \mathcal{H}_f^{(1)}}_{l},$$

$$\mathcal{H}_f^{(1)} = R^d \otimes \mathcal{L}_2(R^d), \qquad d = s + 1.$$

Вакуумный вектор обозначим через $\Omega_{0,f}$. Полное евклидово пространство определяется соотношением

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_f, \tag{13.15}$$

а вакуум —

$$\Omega_0 = \Omega_{0,b} \otimes \Omega_{0,f}. \tag{13.16}$$

13.3. Пространство $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$

Определим сглаженное евклидово поле следующим образом:

$$a(f) = \int a(x) f(x)\, dx = \int dk \frac{\check{f}(k)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k^2+\mu^2}} a(k) = a^+(f) + a^-(f), \tag{13.17}$$

где функции $f(k) \in \mathcal{L}_{2,\rho}(R^d)$, а $\mathcal{L}_{2,\rho}(R^d)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций с весом $\rho(k) = \frac{1}{(2\pi)^d(k^2+\mu^2)}$.
Сглаженные операторы $a^+(f)$ и $a^-(f)$ действуют в $\mathcal{H}_b$ согласно формуле

$$(a^+(f)\Psi)_n(k_1, \ldots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{f}(k_i)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k_i^2+\mu^2}} \Psi_{n-1}(k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n), \tag{13.18}$$

$$(a^-(f)\Psi)_n(k_1, \ldots, k_n) = \sqrt{n+1} \int dk \frac{\tilde{f}(k)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{k^2+\mu^2}} \Psi_{n+1}(k, k_1, \ldots, k_n).$$

В свою очередь из (13.17) и (13.18) следует условие коммутативности операторов $a(f)$:

$$[a(f), a(g)]_- = 0. \tag{13.19}$$

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ множество конечных последовательностей в $\mathcal{H}_b$ вида $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n, 0, 0, \ldots)$, где n — произвольное натуральное число. Для всех действительных f, для которых $\tilde{f}(k) \in \mathcal{L}_{2,\rho}(R^d)$, на множестве $\mathcal{D}_0$ операторы $a(f)$ симметричны и, более того, самосопряжены в существенном, т. е. $\overline{a(f)|_{\mathcal{D}_0}} = a^*(f)$ [12, 26, 110]; последнее означает, что замыкание оператора $a(f)$, взятое по области $\mathcal{D}_0$, совпадает с сопряженным оператором [30].

Рассмотрим теперь линейную оболочку $C_0 = [e^{ia(f)}]$, т. е. множество всевозможных линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^{n} c_i e^{i\alpha_i a(f_i)}$. Равномерное замыкание такой линейной оболочки, т. е. замыкание по операторной норме, порождает некоторую максимальную коммутативную банахову алгебру $\mathfrak{M}$ ограниченных линейных операторов в

$\mathcal{H}_b$ с элементами m и циклическим вектором $\Omega_{0,b}$. Вектор $\Omega_{0,b}$ называется циклическим, если множество $C_0\Omega_{0,b}$ плотно в $\mathcal{H}_b$, т. е. $\overline{C_0\Omega_{0,b}} = \mathfrak{M}\Omega_0 = \mathcal{H}_b$. Множество $C_0\Omega_{0,b}$ является множеством линейных комбинаций экспоненциальных векторов в $\mathcal{H}_b$, которое всюду плотно в $\mathcal{H}_b$ [184].

Для коммутативных алгебр с циклическим вектором справедлива следующая теорема [39, 107].

Теорема 13.1 (Гельфанд — Наймарк). *Если коммутативная алгебра ограниченных операторов $\mathfrak{M}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_b$ обладает циклическим вектором $\Omega_{0,b}$, т. е. $\mathfrak{M}\Omega_{0,b} = \mathcal{H}_b$, то существуют такая положительная нормированная мера $d\mu$, определенная на компактном хаусдорфовом множестве Σ максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{M}$, и такое унитарное преобразование $\mathcal{U}$ пространства $\mathcal{H}$ на пространство $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, которые диагонализируют алгебру $\mathfrak{M}$, т. е. если*

$$m \in \mathfrak{M}, \quad f \in \mathcal{H}_b \text{ и } \mathcal{U}f = f(\sigma) \in \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu),$$

то

$$(\mathcal{U}mf)(\sigma) = m(\sigma) f(\sigma), \quad m(\sigma) \in C^0(\Sigma), \tag{13.20}$$

или

$$\mathcal{U}m\mathcal{U}^{-1} f(\sigma) = m(\sigma) f(\sigma),$$

где $C^0(\Sigma)$ множество ограниченных функций в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$.

Если $m \in C$, $f \in \mathcal{H}_b$, то

$$(\mathcal{U}mf)(\sigma) = m(\sigma) f(\sigma) \text{ и } m(\sigma) \in C(\Sigma).$$

Множество $C(\Sigma)$ является плотным подмножеством $C^0(\Sigma)$ в топологии равномерной сходимости, которая эквивалентна в пространстве $\mathcal{H}_b$ сильной операторной топологии, т. е. сходимости по норме.

Иными словами, при изоморфизме $\mathcal{U}$ операторы алгебры $\mathfrak{M}$ переходят в ограниченные функции $C^0(\Sigma)$ на множестве Σ. Действие этих операторов в пространстве $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ является просто умножением.

Доказательство теоремы приведено полностью в [106, гл. VIII].

Приведенная теорема весьма удобна для изучения виковских мономов $W = \int dk_1 \ldots dk_n w(k_1, \ldots, k_n) \colon a(k_1) \ldots a(k_n) \colon$ с эрмитово-симметричными ядрами w, т. е. $w(k_1, \ldots, k_n) = w(-k_1, \ldots, -k_n) \in \mathcal{L}_2(R^{2n})$. Такие виковские мономы являются присоединенными элементами к банаховой алгебре $\mathfrak{M}$ и под действием изоморфизма $\mathcal{U}$ переходят в операторы умножения на некоторые квадратично суммируемые по мере $d\mu$ функции [44, 74 — 76, 150]. Отсюда автоматически следует самосопряженность в существенном операторов W на множестве $\mathfrak{M}\Omega_{0,b}$.

Совершенно аналогично мы можем построить унитарный образ $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ обычного пространства Фока $\mathcal{F}_b$; последнее отличается от $\mathcal{H}_b$ только размерностью импульсных переменных k_i на единицу ниже [44, 56, 57, 182].

Следуя работе [98], опишем явно изоморфизм $\mathcal{U}: \mathcal{F}_b \to \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu(\sigma)) \equiv \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$. Для этого введем в одночастичном пространстве Фока $\mathcal{F}_b^{(1)}$ действительный ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. По этому базису построим базис в n-частичном пространстве Фока $\mathcal{F}_b^{(n)}$ согласно формуле

$$e^n_{i_1\ldots i_k\ldots} = \frac{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_k!}\ldots}{\sqrt{(i_1+\ldots+i_k+\ldots)!}} S(\underbrace{e_1\otimes\ldots\otimes e_1}_{i_1}\ldots\underbrace{e_k\otimes\ldots\otimes e_k}_{i_k}), \tag{13.21}$$

где через S обозначен символ симметризации. Здесь $n, k = 1, 2, \ldots$; $i_1, \ldots, i_k, \ldots = 0, 1, \ldots, n$; $i_1 + \ldots + i_k + \ldots = n$.

Введем сглаженные поля $\varphi_k = (\varphi_0, e_k) = \varphi_0(e_k) = \varphi_0^+(e_k) + \varphi_0^-(e_k)$. В силу ортонормированности базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ поля φ_{k_1} и φ_{k_2} при $k_1 \neq k_2$ коммутируют. Поэтому последовательность самосопряженных операторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет общую систему собственных векторов $p(\sigma) = (p_0(\sigma), p_1(\sigma), \ldots, p_n(\sigma), \ldots)$, $p_n \in \mathcal{F}_b^{(n)}$, т. е.

$$\varphi_k p(\sigma) = \lambda_k p(\sigma). \tag{13.22}$$

Для компонент $p_n(\sigma)$ уравнение (13.22) принимает следующий вид:

$$\sigma_k p_n(\sigma) = \varphi^+(e_k)\, p_{n-1}(\sigma) + \varphi^-(e_k)\, p_{n+1}(\sigma). \tag{13.23}$$

Разложим $p_n(\sigma)$ по базису (13.21):

$$p_n(\sigma) = \sum_{i_1,\ldots,i_k,\ldots} \mathcal{P}^n_{i_1\ldots i_k\ldots}(\sigma)\, e^n_{i_1\ldots i_k\ldots}. \tag{13.24}$$

Подставляя (13.24) в (13.23), получим

$$\sigma_k \mathcal{P}^n_{i_1\ldots i_k\ldots}(\sigma)\, e^n_{i_1\ldots i_k\ldots} = \\ = \varphi_0^+(e_k)\, \mathcal{P}^{n-1}_{i_1\ldots i_k-1\ldots}(\sigma)\, e^{n-1}_{i_1\ldots i_k-1\ldots} + \varphi_0^-(e_k)\, \mathcal{P}^{n+1}_{i_1\ldots i_k+1\ldots}(\sigma)\, e^{n+1}_{i_1\ldots i_k-1\ldots}. \tag{13.25}$$

Отсюда уже следуют уравнения для $\mathcal{P}^n_{i_1\ldots i_k\ldots}(\sigma)$:

$$\sigma_k \mathcal{P}^n_{i_1\ldots i_k\ldots}(\sigma) \frac{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{i_k!}\ldots}{\sqrt{(i_1+\ldots+i_k+\ldots)!}} = \\ = \frac{i_k}{\sqrt{n}} \mathcal{P}^{n-1}_{i_1\ldots i_k-1\ldots}(\sigma) \frac{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{(i_k-1)!}\ldots}{\sqrt{(i_1+\ldots+(i_k-1)+\ldots)!}} + \\ + \sqrt{n+1}\, \mathcal{P}^{n+1}_{i_1\ldots i_k+1\ldots}(\sigma) \frac{\sqrt{i_1!}\ldots\sqrt{(i_k+1)!}\ldots}{\sqrt{(i_1+\ldots+(i_k+1)+\ldots)!}},$$

которые после элементарных преобразований приводятся к виду

$$\sigma_k \mathcal{P}^n_{i_1 \dots i_k \dots}(\sigma) = \sqrt{i_k}\,\mathcal{P}^{n-1}_{i_1 \dots i_k - 1 \dots}(\sigma) + \sqrt{i_k + 1}\,\mathcal{P}^{n+1}_{i_1 \dots i_k + 1 \dots}(\sigma). \qquad (13.26)$$

Решением уравнения (13.26) является функция

$$\mathcal{P}^n_{i_1 \dots i_k \dots}(\sigma) = \prod_{i_k} H_{i_k}(\sigma_k), \qquad (13.27)$$

где $H_{i_k}(\sigma_k)$ — полином Эрмита i_k-го порядка, нормированный по мере $d\mu(\sigma_k) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\sigma_k^2}{2}} d\sigma_k$. Таким образом, установлен явный вид $p_n(\sigma)$ и $p(\sigma)$.

Поставим теперь в соответствие каждому элементу f из пространства Фока функцию $\tilde{f}(\sigma)$ («преобразование Фурье») от бесконечного числа переменных согласно формуле

$$\tilde{f}(\sigma) = (f, p(\sigma))_{\mathcal{F}_b}, \qquad (13.28)$$

где скалярное произведение берется в пространстве Фока. Согласно (13.28) каждому элементу базиса $e^n_{i_1 \dots i_k \dots}$ ставится в соответствие функция

$$\tilde{e}^n_{i_1 \dots i_k \dots}(\sigma) = H_{i_1}(\sigma_1) \dots H_{i_k}(\sigma_k) \dots$$

Через $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, где $\Sigma = R^\infty$, обозначим гильбертово пространство функций от бесконечного числа переменных $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \dots$, интегрируемых по модулю в квадрате по мере

$$d\mu(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2}{2}\right) \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma_k^2}{2}\right) \dots \qquad (13.29)$$

Ортонормированным базисом в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ являются произведения $H_{i_1}(\sigma_1) \dots H_{i_k}(\sigma_k) \dots$ полиномов Эрмита.

Соответствие (13.28) обозначим через $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}f = \tilde{f}(\sigma)$; очевидно, что

$$(\tilde{f}(\sigma), \tilde{g}(\sigma))_{\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)} = (f, g)_{\mathcal{F}_b},$$

поэтому $\mathcal{U}$ является унитарным изоморфизмом. Покажем, что гамильтониан взаимодействия модели $\lambda(\varphi_2^4)$ переходит при этом в оператор умножения на функцию $\mathfrak{h}(\sigma) \in \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$. Действительно, имеем

$$H_I = \sum c_{k_1 k_2 k_3 k_4} \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_4}, \qquad \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} |c_{k_1 k_2 k_3 k_4}|^2 < \infty,$$

ибо функция $\dfrac{g(k_1+\ldots+k_4)}{2\pi\sqrt[4]{k_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt[4]{k_4^2+\mu^2}}\in\mathcal{F}_b^{(4)}$ (это будет установлено в § 14).

Дальше

$$\widetilde{H_I f}(\sigma)=(H_I f, p(\sigma))_{\mathcal{F}_b}=\Bigl(f, \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} c_{k_1k_2k_3k_4}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\sigma_{k_3}\sigma_{k_4}p(\sigma)\Bigr)=$$

$$=\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} c_{k_1k_2k_3k_4}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\sigma_{k_3}\sigma_{k_4}(f, p(\sigma))=$$

$$=\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} c_{k_1k_2k_3k_4}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\sigma_{k_3}\sigma_{k_4}\tilde{f}(\sigma)=\mathfrak{h}(\sigma)\tilde{f}(\sigma), \tag{13.30}$$

где

$$\mathfrak{h}(\sigma)=\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} c_{k_1k_2k_3k_4}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\sigma_{k_3}\sigma_{k_4}. \tag{13.31}$$

Очевидно, что

$$(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})_{\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)}=\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4}|c_{k_1k_2k_3k_4}|^2<\infty,$$

поэтому $\mathfrak{h}(\sigma)\in\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$.

Совершенно аналогичные построения можно выполнить и для пространства $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, соответствующего пространству $\mathcal{H}_b$.

§ 14. ГАМИЛЬТОНИАНЫ КОНСТРУКТИВНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этом параграфе мы приведем в основном без доказательств основные результаты, полученные Глиммом и Джафе [41—49] для гамильтонианов $\lambda(:\varphi^4:)_2$ и $\lambda(\bar{\psi}\psi\varphi)_2$. Подробный обзор этих результатов содержится в работе [50].

14.1. О перенормировке гамильтонианов в конструктивной теории поля

Как мы уже отмечали в первой главе, построение динамики взаимодействующих квантованных полей с помощью обычных квантовомеханических правил приводит к значительным трудностям. Уже для трансляционно-инвариантных взаимодействий (2.1) и (5.1) полный гамильтониан H_λ не задает в пространстве Фока $\mathcal{F}$ никакого оператора, а определяет в нем лишь билинейную форму, степени сингулярности которой зависят от конкретного вида взаимодействия. Трансляционная инвариантность системы и бесконечность пространственного объема, в котором заключена система, приводят к объемным расходимостям, которые не зависят от вида взаимодействия. С другой стороны, представление полевых операторов в виде фурье-компонент с как угодно большими импульсами и энергиями приводит к ультрафиолетовым расходимостям, степень которых зависит от конкретного вида гамильтониана.

Для того чтобы с самого начала избежать появления расходимостей и определить H_λ самосопряженным оператором в $\mathcal{F}$, в конструктивной теории поля в первоначальный затравочный гамильтониан вводят сглаживающие функции $g_V(x)$ и $\chi_\varkappa(k)$. Далее, требование разумной физической интерпретации теории приводит к тому, что при снятии обрезаний (V, $\varkappa \to \infty$) физические величины должны быть конечными и не должны зависеть от способа регуляризации. Согласно общей формальной схеме это достигается перенормировкой полного гамильтониана системы $H_\lambda(V, \varkappa)$ введением в него контрчленов $K_\lambda(V, \varkappa)$, которые должны компенсировать расходимости, возникающие при устремлении V и $\varkappa$ к бесконечности.

Задачей конструктивного подхода является определение этих контрчленов так, чтобы обрезанный перенормированный гамильтониан

$$H_\lambda^R(V, \varkappa) = H_\lambda(V, \varkappa) + K_\lambda(V, \varkappa)$$

после снятия ультрафиолетового обрезания ($\varkappa \to \infty$) порождал самосопряженный, ограниченный снизу оператор энергии. В следующем параграфе мы приведем ряд конкретных результатов (лемма 14.2, теоремы 14.1, 14.2 и 14.6), показывающих, что для моделей $(:\varphi^4:)_2$ и $(:\bar{\psi}\psi\varphi:)_2$ существуют операторы $K_\lambda(V, \varkappa)$, с помощью которых строится самосопряженный, положительный в $\mathcal{F}$ оператор энергии $H_\lambda^R(V, \infty)$.

Однако в других, более сингулярных моделях подобрать такие контрчлены пока не удается (имеется в виду не формальный подход). Поэтому для снятия ультрафиолетовых расходимостей здесь применяют несколько иную идеологию. Вместе с последовательностью контрчленов $K_\lambda(V, \varkappa)$ строят такую последовательность преобразований $T(V, \varkappa)$, для которой существует предельное преобразование $T(V, \infty)$, действующее из $\mathcal{F}$ в новое пространство $\mathcal{F}_{\text{ren}}$, и такую последовательность чисел $Z(V, \varkappa)$, что положительно определенный оператор энергии $H_\lambda^{\text{ren}}(V, \infty)$ можно задать в $\mathcal{F}_{\text{ren}}$ с помощью соотношения

$$\langle H_\lambda^{\text{ren}}(V, \infty)\, T(V, \infty)\Phi, T(V, \infty)\Psi\rangle =$$
$$= \lim_{\varkappa\to\infty} Z(V, \varkappa)\,(H_\lambda^R(V, \varkappa)\, T(V, \varkappa)\Phi, T(V, \varkappa)\Psi),$$

где $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$, а $\langle\ldots\rangle$ представляет собой новое скалярное произведение в пространстве $\mathcal{F}_{\text{ren}}$ и определяется соотношением

$$\langle T(V, \infty)\Phi, T(V, \infty)\Psi\rangle = \lim_{\varkappa\to\infty} Z(V, \varkappa)(T(V, \varkappa)\Phi, T(V, \varkappa)\Psi). \quad (14.1)$$

Для моделей $(\varphi^4)_3$, $(\varphi^3)_4$ и $(\varphi^2)_{n>4}$ оператор H_λ^{ren} был построен в работах Глимма [42], Остервальдера [119], Хеппа [186] с помощью усеченных уравнений Фридрихса [183]. Однако получаемые при этом операторы $T(V, \varkappa)$ являются неунитарными, что создает дополнительные трудности в определении скалярного произведения (14.1). Процедура отыскания унитарных операторов $T(V, \varkappa)$ и построения H_λ^{ren} была предложена Фаддеевым [166]. В работах Воловича, Погребкова и Сушко [34, 131] на примере двумерной модели Тирринга в явном виде были построены пространство физических частиц $\mathcal{F}_{\text{ren}}$, преобразование $T(V, \infty)$ и константы $Z(V, \varkappa)$, с помощью которых определялись предельные ($\varkappa \to \infty$, $V \to \infty$) перенормированные гамильтониан H_λ^{ren}, поле ψ^{ren} и функции Вайтмана W_n^{ren}.

Теперь мы перейдем к построению гамильтонианов конструктивной теории поля для моделей $(:\varphi^4:)_2$ и $(\bar\psi\psi\varphi)_2$. Так как в нашу задачу не входит изложение методов конструктивной теории поля, хотя очень часто мы и пользуемся такими методами, то основные теоремы мы приведем без доказательств, отсылая читателя за более подробным изложением к оригинальным работам.

14.2. Взаимодействие $\lambda\,(:\varphi^4:)_2$

В конечном объеме V гамильтониан взаимодействия для модели (2.1) имеет вид

$$H_I(g) = \int\limits_{x^0=0} g(x) : \varphi_0^4(x) : dx, \tag{14.2}$$

где $g(x) \in C_0^\infty(R^1)$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} g(x) \subset V$. Для гамильтониана (14.2) справедлива следующая лемма.

Лемма 14.1. *Оператор $H_I(g)$ задан в $\mathcal{F}_b$ на всюду плотном множестве финитных векторов $\mathcal{D}_0$ и удовлетворяет оценке*

$$\| H_I(g)(N_b + 1)^{-2} \| \leqslant K(g), \tag{14.3}$$

где $K(g)$ — константа, зависящая от функции $g(x)$.

Доказательство. Перепишем выражение (14.2) в импульсном пространстве:

$$H_I(g) = \int dk_1 \dots dk_4 \frac{\tilde g(k_1 + \dots + k_4)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_1^2 + \mu^2}\dots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_4^2+\mu^2}} \times$$
$$\times : a(k_1) \dots a(k_4) : .$$

Оператор $H_I(g)$ действует на вектор $\Psi \in \mathcal{F}_b$ по следующему правилу:

$$
\begin{aligned}
&(H_I(g)\Psi)_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = \\
&= \sqrt{(n+4)\ldots(n+1)} \int d\boldsymbol{k}_1 \ldots d\boldsymbol{k}_4 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{k}_1+\ldots+\boldsymbol{k}_4)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_4^2+\mu^2}} \times \\
&\qquad \times \Psi_{n+4}(\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_4, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) + \\
&+ 4\sqrt{(n+2)(n+1)} \sum_{i_1=1}^{n} \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 d\boldsymbol{k}_3 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{p}_{i_1}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{p}_{i_1}^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_3^2+\mu^2}} \times \\
&\qquad \times \Psi_{n+2}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n) + \\
&+ 6 \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{p}_{i_1}+\boldsymbol{p}_{i_2}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{p}_{i_1}^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_2^2+\mu^2}} \times \\
&\qquad \times \Psi_n(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_1}, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{p}_n) + \\
&+ \frac{4}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n} \int d\boldsymbol{k}_1 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{p}_{i_1}+\boldsymbol{p}_{i_2}+\boldsymbol{p}_{i_3}-\boldsymbol{k}_1)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{p}_{i_1}^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2}} \times \\
&\qquad \times \Psi_{n-2}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_1}, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_3}, \ldots, \boldsymbol{p}_n) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n} \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{p}_{i_1}+\ldots+\boldsymbol{p}_{i_4})}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{p}_{i_1}^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{p}_{i_4}^2+\mu^2}} \times \\
&\qquad \times \Psi_{n-4}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_1}, \ldots, \hat{\boldsymbol{p}}_{i_4}, \ldots, \boldsymbol{p}_n).
\end{aligned}
$$

Пользуясь определением нормы (13.2), симметричностью функций $\Psi_n(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ по переменным $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ и применяя неравенство Буняковского — Шварца для сумм и интегралов, получим

$$\| H_I(g)(N_b+1)^{-2}\Psi \|^2 \leqslant K^2(g) \| \Psi \|^2,$$

где

$$K^2(g) = \mathrm{const} \cdot \int d\boldsymbol{k}_1 \ldots d\boldsymbol{k}_4 \frac{|\tilde{g}(\boldsymbol{k}_1+\ldots+\boldsymbol{k}_4)|^2}{4\pi\sqrt{\boldsymbol{k}_1^2+\mu^2}\ldots 4\pi\sqrt{\boldsymbol{k}_4^2+\mu^2}}. \quad (14.4)$$

Чтобы завершить доказательство леммы, нужно показать, что $K(g) < \infty$ [147].

Действительно, используя неравенство*)

$$\prod_{i=1}^{n}(4\pi\sqrt{k_i^2+\mu^2})^{-1}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}(4\pi\sqrt{k_i^2+\mu^2})^{-\frac{n}{n-1}},$$

получим

$$K^2(g)\leqslant$$

$$\leqslant 4\cdot\mathrm{const}\cdot\int dk_1\ldots dk_4\,\frac{|g(k_1+\ldots+k_4)|^2}{\{4\pi\sqrt{k_1^2+\mu^2}\,4\pi\sqrt{k_2^2+\mu^2}\,4\pi\sqrt{k_3^2+\mu^2}\}^{4/3}}=$$

$$=\mathrm{const}\cdot\left(\int\frac{dk}{(k^2+\mu^2)^{2/3}}\right)^3\int|\tilde{g}(k)|^2\,dk<\infty.$$

Лемма доказана.

При действительных $g(x)$ оператор $H_I(g)$ является существенно самосопряженным [44] на области $\mathcal{D}_1=\{P(\varphi_0(0,f))\,\Omega_0\}$, где $P(x)$ — полином, а

$$\varphi_0(0,f)=\int dx\varphi_0(0,x)\,f(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int dka(k)\,\frac{\tilde{f}(k)}{\sqrt[4]{k^2+\mu^2}},$$

$$f(x)\in\mathcal{L}_2(R^1).\qquad(14.5)$$

$\mathcal{D}_1$ является всюду плотной областью векторов в $\mathcal{F}_b$. Доказательство существенной самосопряженности оператора $H_I(g)$ основано на изоморфизме Гельфанда-Наймарка (см. § 13) между пространством $\mathcal{F}_b$ и $\mathcal{L}_2(\sum, d\mu)$, где $H_I(g)$ является оператором умножения на действительную функцию из $\mathcal{L}_2(\sum, d\mu)$.

Введем в оператор $H_I(g)$ ультрафиолетовое обрезание:

$$H_I(g,\varkappa)=\int g(x):\varphi_{0,\varkappa}(0,x)^4:dx=$$

$$=\int dk_1\ldots dk_4\,\frac{\tilde{g}(k_1+\ldots+k_4)\,\chi(k_1,\varkappa)\ldots\chi(k_4,\varkappa)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_4^2+\mu^2}}:a(k_1)\ldots a(k_4):.\qquad(14.6)$$

Для операторов $H_I(g,\varkappa)$ и $H_I(g)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 14.2. *На области $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{F}_b$ оператор $H_I(g)$ является сильным пределом последовательности операторов $H_I(g,\varkappa)$:*

$$\operatorname*{s-lim}_{\varkappa\to\infty}H_I(g,\varkappa)=H_I(g).\qquad(14.7)$$

---

*) $\prod_{i=1}^{n}a_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}a_i^{\frac{n}{n-1}}$.

Доказательство. Оператор $H_I(g) - H_I(g, \varkappa)$ имеет такой же вид, как и операторы (14.1), (14.6), однако с ядром

$$\frac{\tilde{g}(k_1 + \ldots + k_4)\,[1 - \chi(k_1, \varkappa)\ldots\chi(k_4, \varkappa)]}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_1^2 + \mu^2}\ldots\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{k_4^2 + \mu^2}}.$$

Следовательно, для оператора $H_I(g) - H_I(g, \varkappa)$ справедлива лемма 14.1, т. е. для любого $\Psi \in \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{F}_b$

$$\|(H_I(g) - H_I(g, \varkappa))\Psi\| \leqslant K_1(g, \varkappa)\,\|(N_b + 1)^2\Psi\|, \tag{14.8}$$

где

$$K_1^2(g, \varkappa) =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\int dk_1\ldots dk_4 \frac{|\tilde{g}(k_1 + \ldots + k_4)|^2}{4\pi\sqrt{k_1^2 + \mu^2}\ldots 4\pi\sqrt{k_4^2 + \mu^2}}\,|1 - \chi(k_1, \varkappa)\ldots\chi(k_4, \varkappa)|^2. \tag{14.9}$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что при $\varkappa \to \infty$

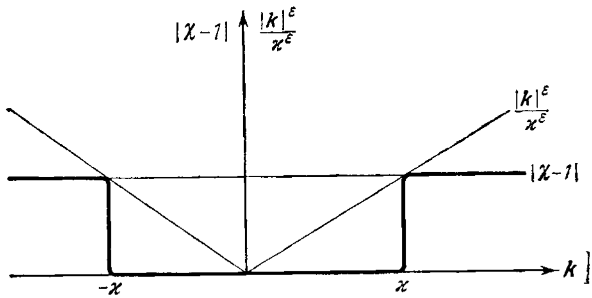


Рис. 3.

$K_1(g, \varkappa) \to 0$. Воспользуемся неравенством

$$|1 - \chi(k_1, \varkappa)\ldots\chi(k_4, \varkappa)| \leqslant |1 - \chi(k_1, \varkappa)| + \ldots + |1 - \chi(k_4, \varkappa)|, \tag{14.10}$$

$$0 \leqslant \chi(k, \varkappa) \leqslant 1.$$

Для каждого слагаемого имеем неравенство

$$|1 - \chi(k, \varkappa)| \leqslant \frac{|k|^\varepsilon}{\varkappa^\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{14.11}$$

справедливость которого очевидна, если изобразить функции $|1 - \chi(k, \varkappa)|$ и $|k|^\varepsilon/\varkappa^\varepsilon$ графически (рис. 3).

Используя неравенство (14.11), получим из (14.10), что

$$|1-\chi(k_1\varkappa)\ldots\chi(k_4\varkappa)|\leqslant\varkappa^{-\varepsilon}(|k_1|^\varepsilon+\ldots+|k_4|^\varepsilon\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa^{-\varepsilon}(1+|k_1|^\varepsilon)\ldots(1+|k_4|^\varepsilon). \qquad (14.12)$$

Подставляя (14.12) в выражение (14.9) для $K_1(g, \varkappa)$ и используя неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} a_i\leqslant\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}^{n} a_i^{\frac{n}{n-1}},$$

получим

$$K_1^2(g, \varkappa)\leqslant\text{const}\cdot\varkappa^{-2\varepsilon}\times$$
$$\times\int dk_1\ldots dk_4\left[\frac{(1+|k_1|^\varepsilon)^2\ldots(1+|k_3|^\varepsilon)^2}{\sqrt{k_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{k_3^2+\mu^2}}\right]^{4/3}|\tilde g(k_1+\ldots+k_4)|^2=$$
$$=\text{const}\cdot\varkappa^{-2\varepsilon}\left\{\int dk\,\frac{(1+|k|^\varepsilon)^{8/3}}{(k^2+\mu^2)^{2/3}}\right\}^3\int dk_4\,|\tilde g(k_4)|^2.$$

Выбирая ε достаточно малым, получим, что

$$K_1(g, \varkappa)\leqslant\frac{\text{const}}{\varkappa^\varepsilon}, \qquad (14.13)$$

т.е. при $\varkappa\to\infty$ $K_1(g, \varkappa)\to 0$, что и доказывает лемму 14.2.

Согласно (2.7) полный гамильтониан имеет вид

$$H_\lambda(g)=H_{0,b}+\lambda H_I(g).$$

Приведем без доказательства три важные теоремы.

Теорема 14.1. *Оператор $H_\lambda(g)$ является существенно самосопряженным оператором на области $\mathcal{D}_1$.*

Доказательство этой теоремы впервые выполнено в работах [44, 141] (см. также [61, 147, 151]).

Теорема 14.2. *Пусть $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, $g(x)\in\mathcal{L}_1(R^1)\cap\mathcal{L}_2(R^1)$ и $\lambda>0$. Тогда оператор $H_\lambda(g)$ ограничен снизу константой, зависящей от g.*

Доказательство теоремы 14.2 можно найти в работах [43, 46, 147].

Теорема 14.3. *Нижняя граница спектра оператора $H_\lambda(g)$ есть изолированное собственное значение кратности один, т. е. существует единственный вектор $\Phi_g\in\mathcal{F}_b$ такой, что*

$$H_\lambda(g)\Phi_g=E_g\Phi_g, \qquad \|\Phi_g\|=1, \qquad (14.14)$$

где

$$E_g=\inf\{\text{spectrum}(H_\lambda(g))\}, \qquad (\Phi_g, \Omega_b)\neq 0. \qquad (14.15)$$

Доказательство см. в работах [47, 58, 145].

Рассмотрим теперь оператор

$$\hat{H}_\lambda(g) = H_\lambda(g) - E_g. \tag{14.16}$$

Для оператора $\hat{H}_\lambda(g)$ вектор Φ_g является собственным вектором с собственным значением $E=0$, т. е.

$$\hat{H}_\lambda(g)\Phi_g = 0. \tag{14.17}$$

Используя аргументы Гуэрры, Розена, Саймона [61], легко вычислить следующий важный предел:

$$\lim_{t\to\infty} \exp[-t\hat{H}_\lambda(g)] = P_0, \tag{14.18}$$

где P_0—проектор на собственное подпространство с $E=0$. Действительно, формула (14.18) аналогична формуле

$$\lim_{t\to\infty} e^{-tx} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0, \quad x \in [0, \infty). \end{cases}$$

14.3. Взаимодействие Юкавы Y_2

Гамильтониан взаимодействия для модели Y_2 в конечном объеме имеет вид

$$H_I(g) = \int :\bar{\psi}_0(0, x)\psi_0(0, x): \varphi_0(0, x)\, g(x)\, dx. \tag{14.19}$$

Используя (2.6) и (13.5), перепишем (14.19) в импульсном пространстве [48, 49]:

$$\begin{aligned} H_I(g) = &-\frac{1}{4\pi}\int dk\, dp_1 dp_2\, [2\mu(k)\,\omega(p_1)\,\omega(p_2)]^{-1/2}\tilde{g}(k+p_1+p_2)\times \\ &\times\{[\nu(p_1)\nu(p_2)+\nu(-p_1)\nu(-p_2)]\, b'^*(-p_1)\, b'(-p_1)\, a(k) + \\ &+[\nu(p_1)\nu(-p_2)-\nu(-p_1)\nu(p_2)]\, b'(-p_1)\, b(-p_2)\, a(k) + \\ &+[\nu(p_1)\nu(-p_2)-\nu(-p_1)\nu(p_2)]\, b^*(p_1)\, b'(p_2)^*\, a(k) + \\ &+[\nu(p_1)\nu(p_2)+\nu(-p_1)\nu(-p_2)]\, b^*(p_1)\, b(-p_2)\, a(k)\}. \end{aligned} \tag{14.20}$$

Представим (14.20) в таком виде:

$$\begin{aligned} H_I(g) = &\int dk_1 dp_1 dp_2 A(k, p_1, p_2)\,[b'^*(p_1)\, b^*(p_2) + \\ &+ b'(-p_1)\, b(-p_2)]\, a(k) + \int dk\, dp_1 dp_2 B(k, p_1, p_2)\times \\ &\times [b^*(p_1)\, b(-p_2) + b'^*(p_2)\, b'(-p_1)]\, a(k), \end{aligned} \tag{14.21}$$

где

$$A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = -\frac{1}{4\pi}[2\mu(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)]^{-1/2}\tilde{g}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\times$$

$$\times[\nu(\boldsymbol{p}_1)\nu(-\boldsymbol{p}_2)-\nu(-\boldsymbol{p}_1)\nu(\boldsymbol{p}_2)] = -\frac{1}{4\pi}[\mu(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)]^{-1/2}\times$$

$$\times\tilde{g}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)[\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)-\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2-m_f^2]^{1/2}\operatorname{sgn}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2), \quad (14.22)$$

$$B(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = -\frac{1}{4\pi}[2\mu(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)]^{-1/2}\tilde{g}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)\times$$

$$\times[\nu(\boldsymbol{p}_1)\nu(\boldsymbol{p}_2)+\nu(-\boldsymbol{p}_1)\nu(-\boldsymbol{p}_2)] = -\frac{1}{4\pi}[\mu(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)]^{-1/2}\times$$

$$\times\tilde{g}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2)[\omega(\boldsymbol{p}_1)\omega(\boldsymbol{p}_2)+\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2+m_f^2]^{1/2}. \quad (14.23)$$

Легко проверить, что ядра (14.22) и (14.23) не являются квадратично интегрируемыми функциями и, следовательно, оператор $H_I(g)$ не определен в $\mathcal{F}$. Чтобы определить оператор (14.19)—(14.21) в пространстве $\mathcal{F}$, необходимо ввести в (14.19) — (14.21) ультрафиолетовое обрезание $\varkappa$. Так же как и в (14.6), имеем

$$H_I(g, \varkappa) = \int :\bar{\psi}_{0,\varkappa}(0, x)\psi_{0,\varkappa}(0, x):\varphi_{0,\varkappa}(0, x)\,g(x)\,dx. \quad (14.24)$$

Область определения оператора $H_I(g, \varkappa)$ в пространстве $\mathcal{F}$ устанавливается следующей леммой.

Лемма 14.3 *Для оператора* $H_I(g, \varkappa)$ *справедливы следующие неравенства* [50]:

$$\begin{aligned} &\| H_I(g, \varkappa)(N_b+1)^{-1/2}\| \leqslant K_2(g, \varkappa), \\ &\| H_I(g, \varkappa)(H_0+1)^{-1/2}\| \leqslant K_3(g, \varkappa), \end{aligned} \quad (14.25)$$

где $K_2(g, \varkappa)$ *и* $K_3(g, \varkappa)$ *— константы, зависящие от обрезаний.*

Доказательство. Представим оператор (14.20) в виде

$$H_I(g, \varkappa) = \sum_{\#} H_I^{\#}(g, \varkappa), \quad (14.26)$$

где

$$H_I^{\#}(g, \varkappa) = \int w^{\#}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2):b^{\#}(\boldsymbol{p}_1)\,b^{\#}(\boldsymbol{p}_2)\,a^{\#}(\boldsymbol{k}):d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{p}_1 d\boldsymbol{p}_2.$$

Здесь

$$b^{\#}(\boldsymbol{p}) = b^*(\boldsymbol{p}) \text{ или } b'^*(\boldsymbol{p}), \text{ или } b(-\boldsymbol{p}), \text{ или } b'(-\boldsymbol{p}),$$

$$a^{\#}(\boldsymbol{k}) = a^+(\boldsymbol{k}) \text{ или } a^-(-\boldsymbol{k}),$$

$$w^{\#}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\chi(\boldsymbol{k}, \varkappa)\chi(\boldsymbol{p}_1, \varkappa)\chi(\boldsymbol{p}_2, \varkappa)$$

$$\text{или } B(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)\chi(\boldsymbol{k}, \varkappa)\chi(\boldsymbol{p}_1\varkappa)\chi(\boldsymbol{p}_2, \varkappa).$$

Так как функция $w^{\#}(k, p_1, p_2) \in C_0^\infty$ с носителем в $[-\varkappa, \varkappa]$ по всем трем переменным, то ее можно разложить в ряд Фурье по тригонометрическому базису пространства $(\otimes \mathscr{L}_2(-\varkappa, \varkappa))^3$:

$$w^{\#}(k, p_1, p_2) = \sum_{i,j,k} c_{ijk}^{\#} \tilde{e}_i(k_1)\, \tilde{e}_j(p_1)\, \tilde{e}_k(p_2), \tag{14.27}$$

причем, в силу бесконечной дифференцируемости ядра $w^{\#}$, коэффициенты $c_{ijk}^{\#} = c_{ijk}(g, \varkappa)$ удовлетворяют условию ([203], §14)

$$\sum_{i,j,k} |c_{ijk}| < \infty. \tag{14.28}$$

Тогда оператор $H^{\#}(g, \varkappa)$ можно представить в виде

$$H_I^{\#}(g, \varkappa) = \sum_{ijk} c_{ijk}^{\#} :a^{\#}(\tilde{e}_i)\, b^{\#}(\tilde{e}_j)\, b^{\#}(\tilde{e}_k):, \tag{14.29}$$

где

$$a^{\#}(\tilde{e}_i) = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} a^{\#}(k)\, \tilde{e}_i(k)\, dk,$$

$$b^{\#}(\tilde{e}_j) = \int_{-\varkappa}^{\varkappa} b^{\#}(p)\, \tilde{e}_j^{\#}(p)\, dp.$$

Так как сглаженные операторы фермионных полей $b^{\#}(\tilde{e}_j)$ ограничены ([12], § 1), а бозе-операторы $a^{\#}(\tilde{e}_i)$ удовлетворяют неравенству

$$\| a^{\#}(\tilde{e}_i)(N_b + 1)^{-1/2} \| \leqslant \| \tilde{e}_i \| = 1,$$

то в силу условия (14.28) первое неравенство (14.25) очевидно. Второе неравенство следует из первого, если учесть, что

$$\| H_I(g, \varkappa)(H_0 + 1)^{-1/2} \| = \| H_I(g, \varkappa)(H_0 + 1)^{-1/2}(N + 1)^{1/2} \times$$
$$\times (N + 1)^{-1/2} \| \leqslant \text{const} \cdot \| H_I(g, \varkappa)(N + 1)^{-1/2} \|.$$

Лемма доказана.

На основании леммы 14.3 легко видеть, что оператор $H_I(g, \varkappa)$ определен на всюду плотном множестве финитных векторов пространства $\mathscr{F}$. Более того, используя лемму Карлемана [11, 12, 93], можно показать, что симметрический оператор $H_I(g, \varkappa)$ имеет нулевые индексы дефекта и, следовательно, является существенно самосопряженным оператором в $\mathscr{F}$. Для оператора $H_I(g, \varkappa)$ справедлива еще одна важная лемма.

Лемма 14.4. *Оператор $H_I(g, \varkappa)$ является ограниченным относительно оператора H_0, т. е. для любого $\Psi \in D(H_0)$ существуют константы $a = a(\varkappa, g)$ и $b = b(\varkappa, g)$ такие, что*

$$\| H_I(g, \varkappa)\Psi \| \leqslant a \| \Psi \| + b \| H_0 \Psi \|, \qquad (14.30)$$

причем $b < 1$.

Доказательство этой леммы читатель может найти в работе [92].

Определим теперь полный гамильтониан системы взаимодействующих полей. Выражение $H_0 + \lambda H_I(g, \varkappa)$ при $\varkappa \to \infty$ не будет сходиться к оператору в пространстве $\mathcal{F}$. Необходимо ввести контрчлены, позволяющие устранить ультрафиолетовые расходимости. Такой гамильтониан будет иметь вид [41, 48, 49]

$$H_\lambda(g, \varkappa) = H_0 + v_\lambda(g, \varkappa), \qquad (14.31)$$

где

$$v_\lambda(g, \varkappa) = \lambda H_I(g, \varkappa) + \Delta m(g, \varkappa) - E(g, \varkappa), \qquad (14.32)$$

причем

$$\Delta m(g, \varkappa) = -\frac{1}{2}\delta m^2(g, \varkappa)\int :\varphi^2_\varkappa(0, x): g^2(x)\,dx, \qquad (14.33)$$

а $\delta m^2(g, \varkappa) < 0$ и $E(g, \varkappa) < 0$. Величины $E(g, \varkappa)$ и $\delta m^2(g, \varkappa)$ выбираются таким образом, чтобы

$$H_\lambda(g, \varkappa) \geqslant 0 \text{ для } \varkappa \leqslant \infty. \qquad (14.34)$$

Для оператора $H(g, \varkappa)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 14.4. *Для $0 \leqslant g(x) < 1$, $g(x) \in C_0^\infty(R^1)$ и $\varkappa < \infty$ оператор $H_\lambda(g, \varkappa)$ является существенно самосопряженным положительным оператором.*

Доказательство этой теоремы читатель может найти в работах [48, 49].

Введем следующий вспомогательный оператор:

$$N_\tau = \int dk \mu^\tau(k) a^*(k) a(k) + \\ + \int dp\, \omega^\tau(p)[b^*(p)\,b(p) + b'^*(p)\,b(p)], \qquad (14.35)$$

где $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. При $\tau = 0$ $N_0 = N$ — оператору полного числа частиц, при $\tau = 1$ $N_1 = H_0$ — оператору свободной энергии.

Сформулируем без доказательства следующие важные теоремы, относящиеся к оператору $H(g, \varkappa)$.

Теорема 14.5 [49]. *Для любого $\tau < 1$ существует константа $M(g)$, не зависящая от $\varkappa$, такая, что*

$$N_\tau \leqslant M(g)(H_\lambda(g, \varkappa) + 1). \qquad (14.36)$$

Теорема 14.6 [48, 49]. *При $\varkappa \to \infty$ оператор $H_\lambda(g, \varkappa)$ имеет предел по графику*

$$H_\lambda(g) = \mathrm{graf} \cdot \lim_{\varkappa \to \infty} H_\lambda(g, \varkappa),$$

который является положительным, существенно самосопряженным оператором. Резольвента $R_\lambda(\varkappa, \zeta) = (H_\lambda(g, \varkappa) - \zeta)^{-1}$ оператора $H_\lambda(g, \varkappa)$ сходится по норме к резольвенте $R_\lambda(\zeta)$ оператора $H_\lambda(g)$ равномерно по λ на любом конечном интервале $(0, \lambda)$.

Примечание 14.1. Предел по графику последовательности операторов $H_\lambda(g, \varkappa)$ определяется следующим образом [45, 48]. Пусть $\{\theta_\varkappa\}$ — последовательность векторов в области $D(H_\lambda(g, \varkappa))$ таких, что существуют пределы

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \theta_\varkappa = \theta, \quad \lim_{\varkappa \to \infty} H_\lambda(g, \varkappa)\, \theta_\varkappa = \Psi. \tag{14.37}$$

Пусть D_*—множество всех векторов θ, удовлетворяющих (14.37). Если D_*—плотное множество в $\mathcal{F}$, то существует симметрический оператор $H_\lambda(g)$ с областью $D_* = D(H_\lambda(g))$ такой, что

$$H_\lambda(g)\, \theta = \Psi.$$

Оператор $H_\lambda(g)$ называется пределом по графику оператора $H_\lambda(g, \varkappa)$.

Теорема 14.7 [48]. *Гамильтониан $H_\lambda(g)$ имеет вакуумный вектор Φ_g, т. е. существует вектор $\Phi_g \in D(H_\lambda(g))$ такой, что*

$$H(g)\, \Phi_g = 0. \tag{14.38}$$

В интервале $[0, \min\{\mu, m\})$ *оператор $H(g)$ имеет чисто дискретный спектр конечной кратности, не содержащий точек сгущения. Пространство вакуумных векторов имеет конечную размерность.*

Примечание 14.2. В отличие от взаимодействия $\lambda(\varphi^4)_2$, вакуумный вектор гамильтониана (14.31) не является единственным при произвольных значениях константы взаимодействия λ. Однако при достаточно малых λ вакуумный вектор Φ_g является единственным, т. е. кратность собственного значения $E = 0$ равна единице [48].

Сформулируем еще одну важную теорему, доказательство которой читатель может найти в монографии [91, гл. IX, § 5].

Теорема 14.8. *Пусть T_n и T — инфинитезимальные генераторы квазиограниченных полугрупп типа β. Тогда из сильной сходимости резольвент*

$$(T_n + \zeta)^{-1} \to (T + \zeta)^{-1}$$

для некоторого ζ, $\operatorname{Re}\zeta > \beta$, *следует сильная сходимость полугрупп*

$$e^{-tT_n} \xrightarrow{s} e^{-tT}$$

равномерно на любом конечном интервале $t \geqslant 0$.

Примечание 14.3. Полугруппа $\mathcal{U}(t)$ называется квазиограниченной типа β [91, гл. IX, § 1], если

$$\|\mathcal{U}(t)\| \leqslant Me^{\beta t}, \quad \mathcal{U}(0) = 1.$$

Если $\beta = 0$, $M = 1$, полугруппа $\mathcal{U}(t)$ называется сжимающей.

14.4. Аппроксимированные гамильтонианы

Введем еще одну аппроксимацию, позволяющую рассматривать свободное сглаженное бозе-поле в виде последовательности ограниченных операторов в $\mathcal{F}$ [138]. Для действительной $f(x) \in \mathcal{L}_2(R^1)$ определим свободное сглаженное бозе-поле по формуле (14.5). Справедлива следующая лемма.

Лемма 14.5. *Последовательность ограниченных операторов*

$$\varphi_{0,\varepsilon}(0, f) = \varphi_0(0, f) \exp[-\varepsilon\varphi_0(0, f)^2], \qquad \varepsilon > 0, \tag{14.39}$$

сильно сходится на области $D_0 \subset \mathcal{F}$ *к оператору* $\varphi_0(0, f)$.

Доказательство ограниченности оператора $\varphi_{0,\varepsilon}(0, f)$ для $\varepsilon > 0$ следует из спектрального представления

$$\varphi_{0,\varepsilon}(f) = \int \lambda e^{-\varepsilon\lambda^2} dE_\lambda, \tag{14.40}$$

где E_λ —разложение единицы, и неравенства

$$|\lambda e^{-\varepsilon\lambda^2}| \leqslant (2e\varepsilon)^{-1/2}.$$

Справедливость представления (14.40) вытекает из существенной самосопряженности полевого оператора $\varphi_0(0, f)$ [12, 26, 110]. Сходимость следует из того, что семейство операторов $\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, f)^2]$, $\varepsilon > 0$, является полугруппой класса C_0 (класс сильно непрерывных полугрупп) [188, гл. X, § 1] и при $\varepsilon \to 0$ сильно сходится к единичному оператору.

Введем теперь аппроксимацию (14.39) в операторы, которые являются полиномами по свободным бозе-полям. Такими операторами являются гамильтониан скалярного взаимодействия (14.1) и контрчлен $\Delta m(g, \varkappa)$ (14.33) в гамильтониане взаимодействия Юкавы. Запишем эти операторы в следующем виде:

$$H_I(g, \varkappa) = \\ = \int d\boldsymbol{k}_1 \ldots d\boldsymbol{k}_4 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{k}_1 + \ldots + \boldsymbol{k}_4)\,\chi(\boldsymbol{k}_1, \varkappa) \ldots \chi(\boldsymbol{k}_4, \varkappa)}{\sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_1^2 + \mu^2} \ldots \sqrt{4\pi}\sqrt[4]{\boldsymbol{k}_4^2 + \mu^2}} :a(\boldsymbol{k}_1) \ldots a(\boldsymbol{k}_4): \tag{14.41}$$

и

$$\Delta m(g, \varkappa) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa)\int dk_1 dk_2 \frac{(\widetilde{g*g})(k_1+k_2)}{\sqrt{4\pi}\sqrt{k_1^2+\mu^2}\,\sqrt{4\pi}\sqrt{k_2^2+\mu^2}} \times$$

$$\times \chi(k_1, \varkappa)\,\chi(k_2, \varkappa){:}\,a(k_1)\,a(k_2){:}. \qquad (14.42)$$

Так же как и для гамильтониана взаимодействия $H_I(g, \varkappa)$ модели Юкавы (лемма 14.3), ядра операторов (14.41) и (14.42) можно представить в виде

$$\tilde{g}(k_1+\ldots+k_4)\,\chi(k_1, \varkappa)\ldots\chi(k_4, \varkappa) =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}\tilde{e}_i(k_1)\,\tilde{e}_j(k_2)\,\tilde{e}_k(k_3)\,\tilde{e}_l(k_4),$$

$$(14.43)$$

$$-\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa)(\widetilde{g*g})(k_1+k_2)\,\chi(k_1, \varkappa)\,\chi(k_2, \varkappa) =$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij}\tilde{e}_i(k_1)\,\tilde{e}_j(k_2),$$

где в качестве базиса $\{\tilde{e}_i\}$ взят, например, тригонометрический базис в $\mathscr{L}_2(-\varkappa, \varkappa)$. В силу бесконечной дифференцируемости функций g и χ коэффициенты $c_{ijkl} = c_{ijkl}(g, \varkappa)$ и $c_{ij} = c_{ij}(g, \varkappa)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i,j,k,l} |c_{ijkl}| < \infty,$$

$$(14.44)$$

$$\sum_{i,j} |c_{ij}| < \infty, \qquad \varkappa < \infty.$$

Подставляя (14.43) в (14.41) и (14.42), получим

$$H_I(g, \varkappa) = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}:\varphi_0(0, e_i)\,\varphi_0(0, e_j)\,\varphi_0(0, e_k)\,\varphi_0(0, e_l): =$$

$$= \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl}\,[\varphi_0(0, e_i)\,\varphi_0(0, e_j)\,\varphi_0(0, e_k)\,\varphi_0(0, e_l) -$$

$$-(i, j)\,\varphi_0(0, e_k)\,\varphi_0(0, e_l) - (i, k)\,\varphi_0(0, e_j)\,\varphi_0(0, e_l) -$$

$$-(i, l)\,\varphi_0(0, e_j)\,\varphi_0(0, e_k) - (j, k)\,\varphi_0(0, e_i)\,\varphi_0(0, e_l) -$$

$$-(j,\ l)\,\varphi_0(0,\ e_i)\,\varphi_0(0,\ e_k)-(k,\ l)\,\varphi_0(0,\ e_i)\,\varphi_0(0,\ e_j)+$$
$$+(i,\ j)(k,\ l)+(i,\ k)(j,\ l)+(i,\ l)(j,\ k)]=$$
$$=H_I(g,\ \varkappa)^+-2\sum_{i,j,k,l}c_{ijkl}[(i,\ j)(k,\ l)+(i,\ k)(j,\ l)+(i,\ l)(j,\ k)], \tag{14.45}$$

$$\Delta m(g,\ \varkappa)=\sum_{i,j}c_{ij}:\varphi_0(0,\ e_i)\,\varphi_0(0,\ e_j):=$$
$$=\sum_{i,j}c_{ij}[\varphi_0(0,\ e_i)\,\varphi_0(0,\ e_j)-(i,\ j)]=\Delta m(g,\ \varkappa)^+-\sum_{i,j}c_{ij}(i,\ j), \tag{14.46}$$

где

$$(i,\ j)=\underbrace{\varphi_0(0,\ e_i)\,\varphi_0}(0,\ e_j)=$$
$$=[\varphi_0^-(0,\ e_i),\ \varphi_0^+(0,\ e_j)]_-=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\widetilde{e_i}(\boldsymbol{k})\,\widetilde{e_j}(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}}\,d\boldsymbol{k}. \tag{14.47}$$

Легко проверить, возвращаясь к (14.6) и (14.33), что операторы $H_I^+(g,\ \varkappa)$ и $\Delta m^+(g,\ \varkappa)$ будут иметь вид

$$H_I^+(g,\varkappa)=\int g(x)[\varphi_{0,\varkappa}^2(0,\ x)-3G_\varkappa(0)]^2\,dx,$$
$$\Delta m^+(g,\ \varkappa)=-\frac{1}{2}\,\delta m^2(g,\ \varkappa)\int g^2(x)\,\varphi_{0,\varkappa}^2(0,\ x)\,dx, \tag{14.48}$$

где

$$G_\varkappa(0)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{|\chi(\boldsymbol{k},\ \varkappa)|^2}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}}\,d\boldsymbol{k}<\infty,$$

и, следовательно, являются положительными операторами в $\mathcal{F}$.

Согласно (14.39) введем последовательности ограниченных операторов

$$H_I(g,\ \varkappa,\varepsilon)=H_I^+(g,\ \varkappa,\ \varepsilon)-$$
$$-2\sum_{i,j,k,l}c_{ijkl}[(i,\ j)(k,\ l)+(i,\ k)(j,\ l)+(i,\ l)(j,\ k)], \tag{14.49}$$
$$\Delta m(g,\ \varkappa,\ \varepsilon)=\Delta m^+(g,\ \varkappa,\ \varepsilon)-\sum_{i,j}c_{ij}(i,\ j), \tag{14.50}$$

$$H_I^+(g,\ \varkappa,\ \varepsilon)=$$
$$=\sum_{i,j,k,l}c_{ijkl}[\varphi_{0,\varepsilon}(0,\ e_i)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0,\ e_j)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0,\ e_k)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0,\ e_l)-$$

$$-(i, j)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_k)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_l)-(i, k)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_j)\,\varphi(0, e_l)-$$
$$-(i, l)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_j)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_k)-(j, k)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_i)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_l)-$$
$$-(j, l)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_i)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_k)-(k, l)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_i)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_j)+$$
$$+3(i, j)(k, l)+3(i, k)(j, l)+3(i, l)(j, k)],$$
$$\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)^+=\sum_{i,j} c_{ij}\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_i)\,\varphi_{0,\varepsilon}(0, e_j).$$

Примечание 14.4. Ограниченность операторов $H_l(g, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)$ следует непосредственно из ограниченности операторов $\varphi_{0,\varepsilon}(0, f)$ и условий (14.44). Самосопряженность этих операторов также очевидна, так как операторы $\varphi_0(0, f)$ коммутируют. Кроме того, операторы $H_l^+(g, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m^+(g, \varkappa, \varepsilon)$ положительны, так как их можно привести к виду (14.48). Покажем это, например, для $\Delta m^+(g, \varkappa, \varepsilon)$. Подставляя в (14.50) вместо c_{ij} выражение

$$c_{ij}=-\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa)\int(\tilde{g}*\tilde{g})(k_1+k_2)\,\chi(k_1, \varkappa)\,\chi(k_2, \varkappa)\times$$
$$\times\, e_i(k_1)\,e_j(k_2)\,dk_1dk_2$$

и переходя в координатное представление, приходим к виду (14.48) с $\varphi^{\varepsilon}_{0,\varkappa}(x)$ вместо $\varphi_{0,\varkappa}(x)$, где

$$\varphi^{\varepsilon}_{0,\varkappa}(0, x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ikx}\chi(k, \varkappa)\times$$
$$\times\sum_i \varphi(0, e_i)\exp[-\varepsilon\varphi(0, e_i)^2]\,e_i(k)\,dk.$$

Лемма 14.6. *На области конечных последовательностей D_0 в $\mathcal{F}$*

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} H_l(g, \varkappa, \varepsilon)=H_l(g, \varkappa), \tag{14.51}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)=\Delta m(g, \varkappa). \tag{14.52}$$

Доказательство. Докажем лемму для оператора $\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)$. Рассмотрим выражение

$$\|(\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)-\Delta m(g, \varkappa))\,\Psi\|, \tag{14.53}$$

где $\Psi\in D_0$ и имеет N_0 компонент. Чтобы доказать (14.52), достаточно показать, что при $\varepsilon\to 0$ выражение (14.53) можно выбрать как угодно малым. Используя (14.46) и (14.50) и коммутативность операторов $\varphi_0(e_i)$, получим

$$\begin{aligned}
&\|(\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon) - \Delta m(g, \varkappa))\Psi\| = \|(\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)^+ - \Delta m(g, \varkappa)^+)\Psi\| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i,j} |c_{ij}| \, \|\{\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2]\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_j)] - 1\} \times \\
&\qquad\times \varphi_0(0, e_i)\varphi_0(0, e_j)\Psi\| = \\
&= \sum_{i+j\leqslant N_0} |c_{ij}| \, \|\{\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2 - \varepsilon\varphi_0(0, e_j)^2] - 1\} \times \\
&\qquad\times \varphi_0(0, e_i)\varphi_0(0, e_j)\Psi\| + \\
&+ \sum_{i+j> N_0} |c_{ij}| \, \|\{\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2 - \varepsilon\varphi_0(0, e_j)^2] - 1\} \times \\
&\qquad\times \varphi_0(0, e_i)\varphi_0(0, e_j)\Psi\|. \qquad (14.54)
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\|\{\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2]\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_j)^2] - 1\}\varphi_0(0, e_i)\varphi_0(0, e_j)\Psi\| \leqslant \\
&\leqslant \|\{\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2]\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_j)^2] - 1\}\| \times \\
&\qquad\times \|\varphi_0(0, e_i)\varphi_0(0, e_j)\Psi\| \leqslant \\
&\qquad\leqslant 2n_0 \|e_i\|_{\mathscr{L}_0} \|e_j\|_{\mathscr{L}_2} \|\Psi\| = 2n_0\|\Psi\|
\end{aligned}$$

и ряд $\sum\limits_{i,j}|c_{ij}|$ сходится, то, выбирая N_0 достаточно большими, сумму $\sum\limits_{i+j>N_0}|c_{ij}|$ можно сделать как угодно малой. Следовательно, вторая сумма в выражении (14.54) может быть как угодно малой. Дальше, так как первая сумма в (14.54) конечна и каждый ее член содержит оператор

$$\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_i)^2]\exp[-\varepsilon\varphi_0(0, e_j)^2] - 1,$$

который сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, то и первая сумма может быть как угодно малой. Это доказывает равенство (14.52). Доказательство (14.51) аналогично, хотя и более громоздко.

Введем аппроксимацию в полный гамильтониан:

$$\begin{aligned}
&H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) = H_0 + V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) = \\
&= \begin{cases} H_{0,b} + \lambda H_I(g, \varkappa, \varepsilon) \text{ для } \lambda(:\varphi^4:)_2, \\ H_0 + \lambda H_I(g, \varkappa) + \Delta m(g, \varkappa, \varepsilon) - E(g, \varkappa) \text{ для } Y_2. \end{cases} \qquad (14.55)
\end{aligned}$$

Для гамильтониана (14.55) справедлива следующая лемма.

Лемма 14.7. *Последовательность* $H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)$ *является последовательностью самосопряженных ограниченных снизу операторов и*

$$\underset{\varepsilon\to 0}{s\text{-}\lim} H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) = H_\lambda(g, \varkappa). \tag{14.56}$$

Доказательство. В скалярном случае $H_{0,b} \geqslant 0$, а оператор $H_I(g, \varkappa, \varepsilon)$ является ограниченным, стремящимся в силу леммы 14.4 при $\varepsilon \to 0$ к полуограниченному снизу оператору

$$H_I(g, \varkappa) = \int g(x){:}\varphi_{0,\varkappa}^4(0, x){:}\,dx =$$
$$= \int g(x)\,[\varphi_{0,\varkappa}^2(x) - 3G_\varkappa(0)]^2\,dx - 6G_\varkappa(0)^2 \int g(x)\,dx,$$

где

$$G_\varkappa(0) = \int \frac{|\chi(k, \varkappa)|^2}{4\pi\sqrt{k^2+\mu^2}}\,dk < \infty.$$

Для взаимодействия Юкавы $H_0 \geqslant 0$, $\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)$ — ограниченный оператор, $-E(g, \varkappa)$ — положительная константа, а оператор $H_I(g, \varkappa)$ является H_0-ограниченным с H_0-гранью, меньшей единицы (лемма 14.4). Тогда в силу теоремы, содержащейся в [91, гл. V, § 4], оператор $H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)$ ограничен снизу. Равенство (14.56) следует из леммы 14.6. Отметим особо, что операторы $H_I(g, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m(g, \varkappa, \varepsilon)$ ограничены снизу равномерно по ε константами $-6G_\varkappa(0)^2 \int g(x)\,dx$ и $\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa)\,G_\varkappa(0) \int g^2(x)\,dx$ соответственно.

Лемма 14.8. *Для любых* $t \in [0, T]$ *и* $\varkappa < \infty$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{s\text{-}\lim} \exp[-tH_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)] = \exp[-tH_\lambda(g, \varkappa)] \tag{14.57}$$

как для взаимодействия $\lambda({:}\varphi^4{:})$, *так и для* Y_2.

Доказательство. Так как оператор $H_\lambda(g, \varkappa)$ является существенно самосопряженным оператором на D_1, то для $\Psi \in D_1$ совокупность векторов $\{\chi = (H_\lambda(g, \varkappa) + \zeta)\,\Psi\}$ образует плотное множество в $\mathcal{F}$. Тогда для любого такого χ и ζ с $\operatorname{Re}\zeta > \beta$ (см. примечание 14.3) или $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ справедливо неравенство

$$[(H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) + \zeta)^{-1} - (H_\lambda(g, \varkappa) + \zeta)^{-1}]\,\chi =$$
$$= (H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) + \zeta)^{-1}\,(H_\lambda(g, \varkappa) - H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon))\,(H_\lambda(g, \varkappa) + \zeta)^{-1}\,\chi. \tag{14.58}$$

Так как оператор $(H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) + \zeta)^{-1}$ ограничен равномерно по ε, то, используя лемму 14.4, легко получить из (14.58), что

$$\underset{\varepsilon\to 0}{s\text{-}\lim} (H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) + \zeta)^{-1} = (H_\lambda(g, \varkappa) + \zeta)^{-1}. \tag{14.59}$$

С учетом (14.59) и равномерной по ε ограниченности снизу операторов $H_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)$ утверждение леммы следует из теоремы 14.8.

Примечание 14.5. Совершенно аналогично, используя (14.7), теоремы 14.1 и 14.2 и равномерную по $\varkappa$ ограниченность снизу операторов $H(g, \varkappa)$ [43] (см. также теорему 14.8), можно доказать справедливость следующего предела для взаимодействия $\lambda(:\varphi^4:)_2$:

$$\operatorname*{s-lim}_{\varkappa\to\infty} \exp[-tH_\lambda(g, \varkappa)] = \exp[-tH_\lambda(g)], \qquad t \in [0, T]. \tag{14.60}$$

В заключение настоящего параграфа сформулируем важную теорему для операторов (14.55).

Теорема 14.9. *Для любых $t \in [0, T]$, $\varkappa < \infty$ и $\varepsilon > 0$ справедливо следующее разложение:*

$$\exp[-t(H_0 + V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon))] =$$
$$= \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^t dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \exp[-t_n H_0] \times$$
$$\times V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t_{n-1} - t_n) H_0] \ldots V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t - t_1) H_0]. \tag{14.61}$$

Доказательство. Справедливость представления (14.61) следует из теоремы о разложении полугрупп в ряд теории возмущений [188, гл. XIII]. Остается доказать лишь сходимость ряда (14.61). Из ограниченности операторов (14.49) и (14.50) и неравенства (14.25) следует оценка

$$\|V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)(H_0 + 1)^{-1/2}\| \leqslant K_3(g, \varkappa, \varepsilon). \tag{14.62}$$

Используя оценку (см. лемму 14.5)

$$\|(H_0 + 1)^{1/2} e^{-tH_0}\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{e^t}{\sqrt{t}}, \qquad t > 0. \tag{14.63}$$

и неравенство (14.62), получим

$$\|V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) e^{-tH_0}\| \leqslant \frac{K_3(g, \varkappa, \varepsilon)}{\sqrt{2e}} \frac{e^t}{\sqrt{t}}. \tag{14.64}$$

Покажем, что неравенство (14.64) обеспечивает сходимость ряда (14.61). Обозначим через B_n n-й член в правой части (14.61). Используя (14.64), получим

$$\|B_n\| \leqslant \left(\frac{K_3(g, \varkappa, \varepsilon)}{\sqrt{2e}}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int^{t_{n-1}} dt_n \frac{e^{t_{n-1}-t_n}}{\sqrt{t_{n-1}-t_n}} \ldots \frac{e^{t-t_1}}{\sqrt{t-t_1}} =$$

$$
= e^t \left(\frac{K_3(g, \varkappa, \varepsilon)}{\sqrt{2e}} \right)^n \int_0^t dt_1' \ldots \int_0^{t_{n-1}} dt_n' \frac{1}{\sqrt{t_n'}} \ldots \frac{1}{\sqrt{t_1'}} =
$$

$$
= \left(\frac{K_3(g, \varkappa, \varepsilon)}{\sqrt{2e}} \right)^n \frac{e^t 2^n t^{n/2}}{n!}, \quad (14.65)
$$

что и завершает доказательство теоремы.

§ 15. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ОПЕРАТОРЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathscr{H}$

15.1. Скалярное взаимодействие

Производящий оператор $H(h)$ (12.3) уравнения (11.17) определен в пространстве $\mathscr{H}_b$ на области $D(\hat{N}_b^2)$. Это утверждение является следствием неравенства

$$
\| H(h)(\hat{N}_b + 1)^{-2} \| \leqslant C(h), \quad (15.1)
$$

где

$$
C(h)^2 = \text{const} \cdot \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{|\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)|^2}{2\pi(k_1^2 + \mu^2) \ldots 2\pi(k_4^2 + \mu^2)} < \infty.
$$

Чтобы доказать неравенство (15.1), воспользуемся формулой (11.6), правая часть которой определяет оператор $H(h)$ на последовательности функций $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$. Выбирая в (11.6) $\mathscr{F} = (\hat{N}_b + 1)^{-2} f$, $f \in \mathscr{H}_b$, заменяя $\delta(\cdot)$ на $h(\cdot)$ и используя определение (13.13), получим

$$
\| (H(h)(\hat{N}_b + 1)^{-2} f)_n \|^2 \leqslant \int dp_1 \ldots dp_n \Bigg| \frac{\sqrt{(n+4)\ldots(n+1)}}{(n+5)^2} \int dk_1 \ldots dk_4 \times
$$

$$
\times \frac{\tilde{h}(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2 + \mu^2}} f_{n+4}(k_1, \ldots, k_4, p_1, \ldots, p_n) +
$$

$$
+ \frac{4\sqrt{(n+2)(n+1)}}{(n+3)^2} \sum_{i_1=1}^{n} \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{\tilde{h}(p_{i_1} - k_1 - k_2 - k_3)}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_3^2 + \mu^2}} \times
$$

$$
\times f_{n+2}(k_1, k_2, k_3, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, p_n) +
$$

$$
+ \frac{6}{(n+1)^2} \sum_{i_1 \neq i_2 = 1}^{n} \int dk_1 dk_2 \frac{\tilde{h}(p_{i_1} + p_{i_2} - k_1 - k_2)}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_2^2 + \mu^2}} \times
$$

$$\times f_n(k_1, k_2, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_2}, \ldots, p_n) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{n(n-1)}(n-1)^2} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{n} \int dk_1 \frac{\tilde{h}(p_{i_1} + p_{i_2} + p_{i_3} - k_1)}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_1^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times f_{n-2}(k_1, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_3}, \ldots, p_n) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}(n-3)^2} \times$$

$$\times \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 = 1}^{n} \frac{\tilde{h}(p_{i_1} + \ldots + p_{i_n})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{p_{i_4}^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times f_{n-4}(p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_4}, \ldots, p_n)\Big|^2. \qquad (15.2)$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца к суммам и интегралам выражения (15.2) и учитывая симметричность функций $f_n(p_1, \ldots, p_n)$ по переменным $p_1, \ldots, p_n$ и определение (13.13) в пространстве $\mathcal{H}_b$, получим неравенство (15.1) Доказательство того, что $C(h) < \infty$, аналогично доказательству конечности константы $K(g)$ (см. лемму 14.1). Таким образом, оператор $H(h)$ определен в $\mathcal{H}_b$ на всюду плотной области векторов. Для него справедлива следующая лемма.

Лемма 15.1 [44, 74, 76]. *Оператор $H(h)$ является существенно самосопряженным оператором на всюду плотной области D_1:*

$$D_1 = \{P(a(f))\,\Omega_{0,b}\}, \qquad (15.3)$$

где $P(x)$ — полином, $a(f) = \int a(x) f(x)\,dx$, $f(x) \in \mathcal{L}_2(R^2)$.

Доказательство. Симметричность оператора $H(h)$ следует из вида (12.3). Далее, так как на области

$$H(h)\,D_1 \subset D(a(f)^n),$$

$$H(h)\,D_1 \subset D(H(h)^*),$$

$$[H(h), a(f)^n]_- D_1 = 0,$$

то симметрический оператор $H(h)$ является присоединенным элементом к банаховой алгебре $\mathfrak{M}$ [44] и под действием изоморфизма U (13.20) переходит в оператор умножения на действительную функцию $\mathfrak{h}(\sigma) \in \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, что и доказывает утверждение леммы.

Если ввести в оператор $H(h)$ ультрафиолетовое обрезание $\varkappa_i$, то оператор $H(h, \varkappa_i)$ будет ограничен снизу. Это утверждение следует из того факта, что

$$H(h, \varkappa_i) = \int h(x) : a^4_{\varkappa_i}(x) : dx =$$
$$= \int h(x)\left[a^2_{\varkappa_i}(x) - 3G_{\varkappa_i}(0)\right]^2 - 6G_{\varkappa_i}(0)^2 \int h(x)\,dx, \quad (15.4)$$

а оператор $\int h(x)\left[a^2_{\varkappa_i}(x) - 3G_{\varkappa_i}(0)\right]^2$ положительный. Для операторов $H(h, \varkappa_i)$ и $H(h)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 15.2. *На области* $D(\widehat{N}^2) \subseteq \mathcal{H}_b$

$$s\text{-}\lim_{\varkappa_i \to \infty} H(h, \varkappa_i) = H(h). \quad (15.5)$$

Доказательство леммы совершенно аналогично доказательству леммы 14.2. При этом нужно лишь учесть, что для $i = 1$ $\chi(k, \varkappa_1) = \chi(k, \varkappa)$, а для $i = 2$ $\chi(k, \varkappa_2) = \chi(k^1, \varkappa)\,\chi(k^2, \varkappa^0)$.

В силу полуограниченности оператора (15.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 15.1. *При действительном* $h(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $\varkappa_i < \infty$, $\lambda > 0$ *решение уравнения*

$$\frac{dF}{d\lambda} = -H(h, \varkappa_i)F, \quad F|_{\lambda=0} = \Omega_{0,b}, \quad (15.6)$$

имеет вид

$$F(h, \varkappa_i) = \exp\left[-\lambda H(h, \varkappa_i)\right]\Omega_{0,b} \in \mathcal{H}_b. \quad (15.7)$$

Примечание 15.1. В следующей главе мы покажем, что при $\varkappa_i = \infty$ вектор (15.7) также принадлежит $\mathcal{H}_b$, а предельный переход $h \to 1$ можно выполнить в слабом смысле.

15.2. Взаимодействие Юкавы Y_2

В отличие от модели $\lambda(\varphi^4)_2$, двумерная модель Юкавы не лишена трудностей, связанных с ультрафиолетовыми расходимостями, в ней лишь понижается индекс расходящихся диаграмм. Это в свою очередь позволяет ограничиться одним контрчленом (если не учитывать перенормировки вакуума) в лагранжиане взаимодействия. Введение контрчленов в лагранжиан не изменяет общей процедуры получения уравнений для коэффициентных функций. Однако производящий оператор будет содержать дополнительные члены, соответствующие введенным контрчленам. Например, уравнение эволюционного типа будет иметь вид

$$\frac{dF}{d\lambda} = \widehat{H}(h, \varkappa)F, \quad F|_{\lambda=0} = \Omega_0, \quad (15.8)$$

где

$$\widehat{H}(h, \varkappa) = H(h, \varkappa) - \Delta m'(h, \varkappa) + E'(h, \varkappa). \quad (15.9)$$

Здесь

$$\Delta m'(h, \varkappa) = \frac{d}{d\lambda}\Delta m(h, \varkappa),\ E'(h, \varkappa) = \frac{d}{d\lambda}E(h, \varkappa), \tag{15.10}$$

причем

$$\Delta m(h, \varkappa) = -\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa)\int : a^2_{\varkappa}(x) : h^2(x)\,dx,$$

$$E(h, \varkappa) = E(g, \varkappa)\cdot \mathrm{mes}\cdot \mathrm{supp}\,\chi,\quad h(x) = g(x^1)\,\chi(x^2).$$

Установим некоторые важные свойства операторов $H(h, \varkappa_i)$ и $\Delta m(h, \varkappa_i)$.

Лемма 15.3. *Операторы* $H(h, \varkappa_i)$ *удовлетворяют следующим неравенствам* [50]:

$$\| H(h, \varkappa_2)(\hat{N}_b + 1)^{-1/2} \| \leqslant C_1(\varkappa_2, h), \tag{15.11}$$

$$\| H(h, \varkappa_1)(\hat{N} + 1)^{-1} \| \leqslant C_2(\varkappa, h), \tag{15.12}$$

$$\| H(h, \varkappa_2) - H(h, \varkappa_1)(\hat{N} + 1)^{-1} \| \leqslant C_3(\varkappa, h) O((\varkappa^0)^{-\varepsilon}), \tag{15.13}$$

$$\varepsilon > 0,\quad O((\varkappa^0)^{-\varepsilon}) \to 0 \ \textit{при}\ \varkappa^0 \to \infty.$$

Доказательство. Чтобы доказать неравенство (15.11), перепишем оператор (12.23) в таком виде:

$$H(h, \varkappa_2) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\int dq_1 dq_2 dt\ \times$$

$$\times :\bar{\Phi}_\alpha(q_2)\frac{(\sqrt{\alpha_3}\,e^{iS(q_2)\alpha_3}\,e^{-iS(q_1)}\sqrt{\alpha_3})_{\alpha\beta}}{(2\pi)^{1/2}\sqrt[4]{q_1^2+m^2}\,(2\pi)^{1/2}\sqrt[4]{q_2^2+m^2}\,(2\pi)^{1/2}\sqrt{t^2+\mu^2}}\,\Phi_\beta(q_1): \times$$

$$\times\ a(t)\tilde{h}(q_1 - q_2 + t)\,\chi(q_2, \varkappa_2)\,\chi(q_1, \varkappa_2)\,\chi(t, \varkappa_2) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\int dq_1 dq_2 dt : \bar{\Phi}_\alpha(q_2)\,w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa_2)\,\Phi_\beta(q_1) : a(t). \tag{15.14}$$

Так как ядро $w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa_2) \in C_0^\infty$ по каждой переменной, то его можно разложить по базису в пространстве $(\otimes\mathscr{L}_2(-\varkappa_2, \varkappa_2))^3$:

$$w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa_2) = \sum_{i,j,k} c_{ijk}(\alpha, \beta;\ \varkappa_2)\,e_i(q_1)\,e_j(q_2)\,e_k(t), \tag{15.15}$$

причем [182]

$$\sum_{i,j,k} |c_{ijk}| < \infty. \tag{15.16}$$

Тогда оператор $H(h, \varkappa_2)$ будет иметь вид

$$H(h, \varkappa_2) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sum_{i,j,k} c_{ijk}(\alpha, \beta;\ \varkappa_2) : \bar{\Phi}_\alpha(e_i)\, \Phi_\beta(e_j)\, a(e_k):. \qquad (15.17)$$

Неравенство (15.11) следует из (15.16) — (15.17), ибо ферми-операторы $\bar{\Phi}_\alpha(e_i)$ и $\Phi_\beta(e_j)$ ограничены [12], а оператор $a(e_k)$ удовлетворяет оценке

$$\| a^{\pm}(e_k)(N_b + 1)^{-1/2} \| \leqslant 1.$$

Докажем теперь неравенство (15.12). Очевидно, что достаточно показать справедливость неравенства (15.12) для оператора

$$H^{\#}_{\alpha\beta}(h, \varkappa) = \\ = \int dq_1 dq_2 dt\, w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa) : \bar{\Phi}^{\#}_\alpha(q_2)\, \Phi^{\#}_\beta(q_1)\, a^{\#}(t):. \qquad (15.18)$$

Заметим, что ядро $w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)$ уже не является компактным, но принадлежит пространству $\mathscr{L}_2(R^2) \otimes \mathscr{L}_2(R^2) \otimes \mathscr{L}_2(R^2)$, так как

$$\int | w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)|^2 dq_1\, dq_2\, dt \leqslant \\ \leqslant \sum_{\alpha,\beta} \int | w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)|^2 dq_1 dq_2\, dt = \\ = 2 \int dq_1 dq_2\, dt \frac{|\tilde{h}(q_1 - q_2 + t)|^2\, |\chi(q_1^1, \varkappa)\, \chi(q_2^1, \varkappa)\, \chi(t^1, \varkappa)|^2}{2\pi \sqrt{q_1^2 + m^2}\, 2\pi \sqrt{q_2^2 + m^2}\, 2\pi (t^2 + \mu^2)}. \qquad (15.19)$$

Доказательство ограниченности правой части (15.19) аналогично доказательству ограниченности константы $K(g)$ в лемме 14.1.

Для доказательства неравенства (15.12) мы не можем применить тот же метод, который применялся для доказательства (15.11), так как условие (15.16) не выполняется.

Пусть для простоты $\bar{\Phi}^{\#}_\alpha(q_2) = \bar{\Phi}^{+}_\alpha(q_2)$, $\Phi^{\#}_\beta(q_1) = \Phi^{+}_\beta(q_1)$ и $a^{\#}(t) = a^{+}(t)$. Следуя Глимму [41], введем оператор

$$V_{\alpha\beta}(q_2, t) = \int dq_1 w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)\, \Phi^{+}_\beta(q_1); \qquad (15.20)$$

ясно, что

$$\| V_{\alpha\beta}(q_2, t) \|^2 \leqslant \int dq_1\, | w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)|^2. \qquad (15.21)$$

Далее,

$$H^{\#}_{\alpha\beta}(h, \varkappa) = \int dq_2 dt\, \Phi^{*+}_\alpha(q_2)\, a^{+}(t)\, V_{\alpha\beta}(q_2, t), \qquad (15.22)$$

и для $f \in \mathcal{H}$ имеем

$$(H^{\#}_{\alpha\beta}(h, \varkappa) f)_{l,m,n}(p_1, \ldots, p_l;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_n) =$$

$$= \int dq_2\, dt\, (\Phi^{+}_{\alpha}(q_2)\, a^{+}(t)\, V_{\alpha\beta}(q_2, t) f)_{l,m,n}(p_1, \ldots, p_l;\ p'_1, \ldots, p'_m;$$

$$k_1, \ldots, k_n) = \int dq_2\, dt \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \delta_{\alpha\alpha_j} \delta(q_2 - p_j) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \delta(t - k_i)\, (V_{\alpha\beta}(q_2, t) f)_{l-1,m,n-1}(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_l;\ p'_1, \ldots, p'_m;$$

$$k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} (V_{\alpha\beta}(p_j, k_i) f)_{l-1,m,n-1}(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_l;\ p'_1, \ldots, p'_m;$$

$$k_1, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_n)$$

и

$$\| (H_{\alpha\beta}(h, \varkappa) f)_{l,m,n} \|^2 \leqslant ln \int dp\, dk\, dp_1 \ldots dp_{l-1}\, dp'_1 \ldots dp'_m\, dk_1 \ldots dk_{n-1} \times$$

$$\times | (V_{\alpha\beta}(p, k) f)_{l-1,m,n-1}(p_1, \ldots, p_{l-1};\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_{n-1}) |^2,$$

$$\| H^{\#}_{\alpha\beta}(h, \varkappa) f \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l,m,n=0}^{\infty} (l+1)(n+1) \int dp\, dk\, dp_1 \ldots dp_l\, dp'_1 \ldots dp'_m;\ dk_1 \ldots dk_n \times$$

$$\times | (V_{\alpha\beta}(p, k) f)_{l,m,n}(p_1, \ldots, p_l;\ p'_1, \ldots, p'_m;\ k_1, \ldots, k_n) |^2 =$$

$$= \int dp\, dk\, \| (N^1_f + 1)^{1/2} (N_b + 1)^{1/2} V_{\alpha\beta}(p, k) f \|^2. \qquad (15.23)$$

Так как операторы N^1_f, N_b и $V_{\alpha\beta}(p, k)$ коммутируют, а оператор $V_{\alpha\beta}(p, k)$ удовлетворяет неравенству (15.21), то будем иметь

$$\| H(h, \varkappa) f \|^2 \leqslant \int dp\, dk\, dq\, | w_{\alpha\beta}(p, k, q, \varkappa) |^2 \times$$

$$\times \| (N^1_f + 1)^{1/2} (N_b + 1)^{1/2} f \|^2 \leqslant C^{\#}_2(\varkappa, h) \| (N + 1) f \|^2,$$

откуда следует (15.12).

Чтобы доказать неравенство (15.13), заметим, что оператор $H(h, \varkappa_2) - H(h, \varkappa_1)$ имеет вид (15.14), но с ядром

$$w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)\,[\chi(q_1^0, \varkappa^0)\,\chi(q_2^2, \varkappa^0)\,\chi(t^2, \varkappa^0) - 1].$$

Следовательно, для оператора $H(h, \varkappa_2) - H(h, \varkappa_1)$ справедливо неравенство (15.12) с

$$C_2'(\varkappa, h) = \text{const}\cdot\int dq_1\, dq_2\, dt\, |w_{\alpha\beta}(q_1, q_2, t;\ \varkappa)|^2 \times \\ \times \left|\chi\left(\frac{q_1^2}{\varkappa^0}\right)\chi\left(\frac{q_2^2}{\varkappa^0}\right)\chi\left(\frac{t^2}{\varkappa^0}\right) - 1\right|^2.$$

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве леммы 14.2, приходим к неравенству

$$C_2'(\varkappa, h) \leqslant \text{const}\cdot C_3(\varkappa, h)\,(\varkappa^0)^{-\varepsilon},$$

что и доказывает неравенство (15.13).

Лемма 15.4. *При* $\varkappa < \infty$ *оператор* $\Delta m(h, \varkappa)$ *является существенно самосопряженным на* D_1 *ограниченным снизу оператором в* $\mathscr{H}$.

Доказательство леммы следует из условия

$$-\frac{1}{2}\,\delta m^2(g, \varkappa) > 0$$

и равенства

$$\int :a_\varkappa^2(x): h^2(x)\,dx = \int a_\varkappa^2(x)\,h^2(x)\,dx - G_\varkappa(0)\int h^2(x)\,dx$$

и тех же аргументов, что и в лемме 15.1.

Рассмотрим теперь уравнение эволюционного типа в отсутствие контрчленов (15.10):

$$\frac{dF}{d\lambda} = {}'H(h, \varkappa_i)\,F, \quad F|_{\lambda=0} = \Omega_0. \tag{15.24}$$

Леммы 15.3 и 15.4 позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 15.2 [120, 136]. *При* $\varkappa < \infty$ *уравнение* (15.24) *имеет единственное решение, которое задается сильно сходящимся рядом во всей комплексной плоскости по константе взаимодействия* λ:

$$F = \exp[\lambda H(h, \varkappa_i)]\,\Omega_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\,[H(h, \varkappa_i)]^n\,\Omega_0. \tag{15.25}$$

Доказательство. Чтобы доказать теорему, необходимо оценить величину $\|[H(h, \varkappa_i)]^n\,\Omega_0\|$. Для $i = 2$, $\varkappa_2 = \varkappa = (\varkappa^0, \varkappa)$, используя неравенство (15.11), получим

$$\|[H(h,\varkappa)]^n\Omega_0\| =$$
$$= \|H(h,\varkappa)(\hat{N}_b+1)^{-1/2}(\hat{N}_b+1)^{1/2}[H(h,\varkappa)]^{n-1}\Omega_0\| \leqslant$$
$$\leqslant C_1(\varkappa,h)(n+1)^{1/2}\|[H(h,\varkappa)]^{n-1}\Omega_0\| \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant (C_1(\varkappa,h))^n[(n+1)!]^{1/2}. \qquad (15.26)$$

Оценка (15.26) обеспечивает сходимость ряда (15.25). При $i=1$, $\varkappa_1=\varkappa$ для доказательства теоремы воспользуемся неравенствами (15.13) и (15.12). Введем обозначение [120]

$$\Delta = H(h,\varkappa_1) - H(h,\varkappa_2).$$

Тогда неравенство (15.13) примет вид

$$\|\Delta(\hat{N}+1)^{-1}\| \leqslant C_3(\varkappa,h)\,O((\varkappa^0)^{-\varepsilon}) = C_3\varepsilon_{\varkappa^0}, \qquad (15.27)$$

где $\varepsilon_{\varkappa^0}\to 0$ при $\varkappa^0\to 0$. Так как операторы $H(h,\varkappa_1)$ и $H(h,\varkappa_2)$ коммутируют, то справедливо равенство

$$[H(h,\varkappa_1)]^n = [\Delta + H(h,\varkappa_2)]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k[H(h,\varkappa)]^{n-k}.$$

Тогда

$$\|(H(h,\varkappa))^n\Omega_0\| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|\Delta^k(H(h,\varkappa))^{n-k}\Omega_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|\Delta(N+1)^{-1}(N+1)\Delta(N+1)^{-1}(N+1)\Delta\ldots$$
$$\ldots\Delta(N+1)^{-1}(N+1)H(h,\varkappa)(N+1)^{-1/2}(N+1)^{1/2}\ldots$$
$$\ldots H(h,\varkappa)(N+1)^{-1/2}(N+1)^{1/2}\Omega_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|\Delta(N+1)^{-1}\|^k\cdot 3n\ldots 3(n-k+1)\times$$
$$\times\|H(h,\varkappa)(N+1)^{-1/2}\|^{n-k}[3(n-k)\ldots 3\cdot 2\cdot 3\cdot 1]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_{\varkappa^0}C_3)^k C_1^{n-k}3^n\binom{n}{k}\frac{n!}{[(n-k)!]^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant 6^n n! \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_{\varkappa^0} C_3)^k C_1^{n-k} \frac{1}{[(n-k)!]^{1/2}} = n! 6^n \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_{\varkappa^0} C_3)^{n-k} C_1^k \frac{1}{(k!)^{1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant n! \, [6\varepsilon_{\varkappa^0} C_3 (1 + C_1)]^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varepsilon_{\varkappa^0} C_3)^{-k}}{(k!)^{1/2}} \leqslant n! \rho (\varkappa^0)^n M (\varkappa^0), \quad (15.28)$$

где

$$M(\varkappa^0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_{\varkappa^0} C_3)^{-k}}{(k!)^{1/2}} < \infty,$$

$$\rho(\varkappa^0) = 6\varepsilon_{\varkappa^0} C_3 (1 + C_1) \to 0 \text{ при } \varkappa^0 \to \infty.$$

Из оценки (15.28) и того факта, что при любом λ можно подобрать $\varkappa^0 < \infty$, при котором

$$|\lambda \rho(\varkappa^0)| < 1,$$

следует сходимость ряда (15.25).

Примечание 15.2. Нетрудно заметить, что ряд (15.25) является сильно сходящимся не только на векторе Ω_0, но и на всюду плотной области векторов $D_0 \subset \mathcal{H}$.

Теорема 15.3. *При $\varkappa < \infty$ уравнение*

$$\frac{dF}{d\lambda} = \widehat{H}(h, \varkappa) F, \quad F|_{\lambda=0} = \Omega_0, \quad (15.29)$$

имеет единственное решение

$$F = \exp[\lambda H(h, \varkappa) - \Delta m(h, \varkappa) + E(h, \varkappa)] \, \Omega_0 \in \mathcal{H}. \quad (15.30)$$

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 15.2, леммы 15.4 и того факта, что операторы $H(h, \varkappa)$ и $\Delta m(h, \varkappa)$ коммутируют. Отметим, что теорема 15.2 доказывает сходимость обрезанного ряда теории возмущений для матрицы рассеяния в евклидовой области. Разложение в ряд выражения (15.30) приводит к перенормированному ряду теории возмущений.

15.3. Производящие операторы $H(h, \chi, \varepsilon)$

Так как функция $h(x)$ имеет вид (12.9), то операторы (12.22) у (15.10) можно переписать в следующем виде:

$$H(h, \varkappa) =$$

$$= \int \chi(t)\, dt \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{\tilde{g}(\boldsymbol{k}_1 + \ldots + \boldsymbol{k}_4)\, \chi(\boldsymbol{k}_1, \varkappa) \ldots \chi(\boldsymbol{k}_4, \varkappa)}{2\pi\sqrt{k_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \exp[i(k_1^{(2)} + \ldots + k_4^{(2)})t] {:}a(k_1) \ldots a(k_4){:},$$

$$k_i^2 = k_i^{(1)^2} + k_i^{(2)^2}, \tag{15.31}$$

$$\Delta m(h, \varkappa) = \int \chi^2(t)\, dt \left(-\frac{1}{2}\right) \delta m^2(g, \varkappa) \int dk_1\, dk_2 \times$$
$$\times \frac{(\tilde{g} \times \tilde{g})(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2)}{2\pi\sqrt{k_1^2+\mu^2}\, 2\pi\sqrt{k_2^2+\mu^2}} \chi(\boldsymbol{k}_1, \varkappa)\, \chi(\boldsymbol{k}_2, \varkappa) \times$$
$$\times \exp\left[i\left(k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)t\right] :a(k_1)\, a(k_2):.$$

Используя разложения (14.43), получим

$$H(h, \varkappa) = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} \int \chi(t)\, dt :a(t, e_i)\, a(t, e_j)\, a(t, e_k)\, a(t, e_l):, \tag{15.32}$$

$$\Delta m(h, \varkappa) = \sum_{i,j} c_{ij} \int \chi^2(t)\, dt : a(t, e_i)\, a(t, e_j):, \tag{15.33}$$

где

$$a(t, e) = \int a(x) e(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik^{(2)}t} \frac{\tilde{e}(k^{(1)})}{\sqrt{k^2+\mu^2}} a(k)\, dk, \quad x^{(2)} = t. \tag{15.34}$$

Так как функция $e^{ik^{(2)}t}\tilde{e}(k^{(1)})(k^2+\mu^2)^{-1/2} \in \mathcal{L}_2(R^2)$, $\tilde{e}(x^{(1)}) \in \mathcal{L}_2(-\varkappa, \varkappa)$, то оператор $a(t, e)$ является хорошо определенным самосопряженным оператором в $\mathcal{H}_b$. Определим последовательность ограниченных самосопряженных операторов, аппроксимирующих оператор $a(t, e)$:

$$a_\varepsilon(t, e) = a(t, e) \exp(-\varepsilon a^2(t, e)), \qquad \varepsilon > 0. \tag{15.35}$$

Такая последовательность сильно сходится на области определения $D(a(t, e))$ к оператору $a(t, e)$ (см. лемму 14.2).

Введем операторы $a_\varepsilon(t, e)$ в выражения (15.32) и (15.33), предварительно раскрывая нормальное произведение и учитывая, что

$$\underbrace{a(t, e_i)\, a(t, e_j)} = [a^-(t, e_i), a^+(t, e_j)] =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\tilde{e}_i(\boldsymbol{k})\, \tilde{e}_j(\boldsymbol{k})}{k^2+\mu^2} d\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\tilde{e}_i(\boldsymbol{k}) \tilde{e}_j(\boldsymbol{k})}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\mu^2}} d\boldsymbol{k} = (i, j). \tag{15.36}$$

Тогда операторы $H(h, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)$ будут иметь вид

$$H(h, \varkappa, \varepsilon) =$$
$$= \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} \int \chi(t)\, dt\, [a_\varepsilon(t, e_i)\, a_\varepsilon(t, e_j)\, a_\varepsilon(t, e_k)\, a_\varepsilon(t, e_l) -$$
$$- (i, j)\, a_\varepsilon(t, e_k)\, a_\varepsilon(t, e_l) - (i, k)\, a_\varepsilon(t, e_j)\, a_\varepsilon(t, e_l) -$$

$$-(i, l)\, a_\varepsilon (t, e_j)\, a_\varepsilon (t, e_k) - (j, k)\, a_\varepsilon (t, e_i)\, a_\varepsilon (t, e_l) -$$
$$-(j, l)\, a_\varepsilon (t, e_i)\, a_\varepsilon (t, e_k) - (k, l)\, a_\varepsilon (t, e_i)\, a_\varepsilon (t, e_j) +$$
$$+(i, j)(k, l) + (i, k)(j, l) + (i, l)(j, k)] = H(h, \varkappa, \varepsilon)^+ -$$
$$-2 \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} [(i, j)(k, l) + (i, k)(j, l) + (i, l)(j, k)] \int \chi(t)\, dt \qquad (15.37)$$

и

$$\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon) = \sum_{i,j} c_{ij} \int \chi^2(t)\, dt\, [a_\varepsilon(t, e_i)\, a_\varepsilon(t, e_j) - (i, j)] =$$
$$= \Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)^+ - \sum_{i,j} c_{ij} (i, j) \int \chi^2(t)\, dt. \qquad (15.38)$$

Для операторов $H(h, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 15.5. *На области конечных последовательностей $D_0 \subseteq \mathcal{H}$ имеют место следующие пределы:*

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} H(h, \varkappa, \varepsilon) = H(h, \varkappa),$$
$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta m(h, \varkappa, \varepsilon) = \Delta m(h, \varkappa).$$

Доказательство леммы 15.5 аналогично доказательству леммы 14.3, если учесть, что

$$\int |\chi(t)|\, dt < \infty, \int |\chi^2(t)|\, dt < \infty.$$

Для производящего оператора уравнений эволюционного типа в случае скалярного взаимодействия справедлива следующая лемма.

Лемма 15.6. *Во всем пространстве $\mathcal{H}$ имеет место*

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \exp[-\lambda H(h, \varkappa, \varepsilon)] = \exp[-\lambda H(h, \varkappa)].$$

Доказательство. Так как последовательность существенно самосопряженных операторов $H(h, \varkappa, \varepsilon)$ согласно (15.37) равномерно по ε ограничена снизу, то доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 14.7.

Совершенно аналогичная лемма справедлива и в случае взаимодействия Y_2.

Лемма 15.7. *На области D_0 имеет место*

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \exp[\lambda H(h, \varkappa) - \Delta m(h, \varkappa, \varepsilon) + E(h, \varkappa)] =$$
$$= \exp[\lambda H(h, \varkappa) - \Delta m(h, \varkappa) + E(h, \varkappa)].$$

Если учесть теорему 15.2 и то, что операторы $\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)$ и $\Delta m(h, \varkappa)$ коммутируют с $H(h, \varkappa)$, то доказательство сводится к доказательству предыдущей леммы.

§ 16. СВЯЗЬ МЕЖДУ ГАМИЛЬТОНОВЫМ И ЕВКЛИДОВЫМ ПОДХОДАМИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Как мы уже упоминали в начале § 10, квантовую теорию поля можно сформулировать на языке евклидовых функций Грина. Эквивалентность аксиоматического подхода Вайтмана и евклидовой аксиоматики, сформулированной в работах Нельсона, Остервальдера, Шрадера, указывает на то, что это два подхода к одной и той же теории. Другим важным доказательством этого является формула Фейнмана — Каца — Нельсона [94, 113, 168].

В настоящем параграфе будет предложен новый вариант вывода этой формулы, основанный на аппроксимации неограниченных бозонных операторов евклидова поля последовательностью ограниченных операторов. Основное преимущество такой аппроксимации состоит в том, что доказательство формулы Фейнмана — Каца — Нельсона не зависит от вида гамильтониана и может быть выполнено как для бозонных, так и для фермионных взаимодействий с помощью теоремы о разложении полугрупп в ряд теории возмущений.

16.1. Равенство средних

Определим для $t > 0$ и действительной функции $f(x) \in \mathcal{L}_2(R^1)$ оператор в пространстве $\mathcal{F}_b$:

$$\widehat{\varphi}(t, f) = \int \widehat{\varphi}(t, x) f(x)\, dx, \tag{16.1}$$

где

$$\widehat{\varphi}(t, x) = e^{-tH_{0,b}} \varphi_0(0, x)\, e^{tH_{0,b}} =$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int dk e^{-ikx} \left[e^{-\mu(k)t} a^*(k) + e^{\mu(k)t} a(-k)\right] \mu(k)^{1/2}. \tag{16.2}$$

Оператор $\widehat{\varphi}(t, f)$ определен в $\mathcal{F}_b$ на области значений оператора $e^{-t'H_{0,b}}$ для $t' > t$. Введем для операторов (16.1) антихронологическое произведение по формуле

$$T^*(\widehat{\varphi}(t, x)\widehat{\varphi}(t', x')) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(t, x)\widehat{\varphi}(t', x), & \text{если } t \leqslant t', \\ \widehat{\varphi}(t', x')\widehat{\varphi}(t, x), & \text{если } t' \leqslant t. \end{cases} \tag{16.3}$$

Используя (16.2) и формулу

$$G_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 + \mu^2} dk = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ikx - \mu(k)|x^2|}}{\mu(k)} dk,$$
$$dk = dk\, dk^{(2)}, \quad k \cdot x = kx + k^{(2)} x^{(2)}, \quad k = k^{(1)}, \tag{16.4}$$

легко проверить, что

$$(\Omega_b, T^*(\hat{\varphi}(t, \boldsymbol{x})\,\varphi(t', \boldsymbol{x}'))\,\Omega_b) = G_0(t-t', \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = G_0(x-x'),$$
$$x^{(2)} = t,\ x^{(2)\prime} = t'. \qquad (16.5)$$

С другой стороны,

$$G_0(x-x') = [a^-(x), a^+(x)]_- = (\Omega_{0,b}, a(x)\,a(x')\,\Omega_{0,b}). \qquad (16.6)$$

Приравнивая (16.5) и (16.6), получим соотношение

$$(\Omega_b, T^*(\varphi(t, \boldsymbol{x})\,\varphi(t', \boldsymbol{x}'))\,\Omega_b) = (\Omega_{0,b}, a(t, \boldsymbol{x})\,a(t', \boldsymbol{x}')\,\Omega_{0,b}) \qquad (16.7)$$

или, в терминах операторов (15.34) и (16.1),

$$(\Omega_b, T^*(\varphi(t, f_1)\,\varphi(t, f_2))\,\Omega_b) = (\Omega_{0,b}, a(t_1, f_1)\,a(t_2, f_2)\,\Omega_{0,b}). \qquad (16.8)$$

Это равенство может быть тривиально обобщено на случай полиномов $P_n(x)$ степени n:

$$(\Omega_b, T^*(P_{n_1}(\varphi(t_1, x_1)) \ldots P_{n_k}(\varphi(t_k, x_k)))\,\Omega_b) =$$
$$= (\Omega_{0,b}, P_{n_1}(a(t_1, f_1)) \ldots P_{n_k}(a(t_k, f_k))\,\Omega_{0,b}). \qquad (16.9)$$

Бозевские операторы поля образуют кольцо [12], слабое замыкание которого содержит все ограниченные функции от операторов поля. В силу этого равенство (16.9) можно обобщить на случай ограниченных функций:

$$(\Omega_b, T^*(F_1(\varphi(t_1, f_1)) \ldots F_k(\varphi(t_k, f_k)))\,\Omega_b) =$$
$$= (\Omega_{0,b}, F_1(a(t_1, f_1)) \ldots F_k(a(t_k, f_k))\,\Omega_{0,b}). \qquad (16.10)$$

Аналогично вводятся ферми-операторы:

$$\psi_\alpha(t, f) = \int d\boldsymbol{x}\,\psi_\alpha(t, \boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x}),$$
$$\bar{\psi}_\alpha(t, f) = \int d\boldsymbol{x}\,\bar{\psi}_\alpha(t, \boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{x}), \qquad (16.11)$$

где

$$\psi_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = e^{-tH_{0,f}}\psi_\alpha e^{tH_{0,f}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\boldsymbol{p}\, e^{-i\mathbf{px}}\,[e^{-\omega(\mathbf{p})t}v_\alpha^+(\boldsymbol{p})\,b'^*(\boldsymbol{p}) + e^{\omega(\mathbf{p})t}v_\alpha^-(-\boldsymbol{p})\,b(-\boldsymbol{p})],$$
$$(16.12)$$
$$\bar{\psi}_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = e^{-tH_{0,f}}\bar{\psi}_\alpha e^{tH_{0,f}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\boldsymbol{p}\, e^{-i\mathbf{px}}\,[e^{-\omega(\mathbf{p})t}\bar{v}_\alpha^+ b^*(\boldsymbol{p}) + e^{\omega(\mathbf{p})t}\bar{v}_\alpha^-(-\boldsymbol{p})\,b'(-\boldsymbol{p})].$$

Здесь величины $v_\alpha^\pm$ и $\bar v_\alpha^\pm$ определяются формулами (13.5). Введем вспомогательные операторы следующим образом:

$$\hat\psi_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = \sum_\beta \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\alpha_2\right)(-\alpha_3)\right]_{\alpha\beta}\psi_\beta(t, \boldsymbol{x}),$$
$$\hat{\bar\psi}_\alpha(t, \boldsymbol{x}) = \sum_\beta \bar\psi_\beta(t, \boldsymbol{x})\left[\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\alpha_2\right)\right]_{\beta\alpha}. \tag{16.13}$$

Легко проверить непосредственным вычислением, используя формулы

$$v_\alpha^-(\boldsymbol{p})\bar v_\beta^+(\boldsymbol{p}) = \frac{(\omega(\boldsymbol{p})(-i)\gamma^0 + i\boldsymbol{p\gamma} - m)_{\alpha\beta}}{2\omega(\boldsymbol{p})},$$
$$v_\alpha^+(\boldsymbol{p})\bar v_\beta^-(\boldsymbol{p}) = \frac{(\omega(\boldsymbol{p})(-i)\gamma^0 + i\boldsymbol{p\gamma} + m)_{\alpha\beta}}{2\omega(\boldsymbol{p})}, \tag{16.14}$$

$$\frac{\omega(\boldsymbol{p})}{2\omega(\boldsymbol{p})}e^{-\omega(\boldsymbol{p})t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp^0\,\frac{(ip^0)\,e^{-ip^0t}}{(p^0)^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2}, \quad t > 0, \tag{16.15}$$

и формулы (10.27), что

$$(\Omega_f, T^*(\bar\psi_\alpha(t, \boldsymbol{x})\psi_\beta(t', \boldsymbol{x}))\Omega_f) = S^E_{\alpha,\beta}(x - x'), \tag{16.16}$$
$$x^2 = t, \quad x'^2 = t'.$$

С другой стороны,

$$S^E_{\alpha,\beta}(x - x') = \{\Phi_\alpha^-(x), \bar\Phi_\beta^+(x')\} = (\Omega_{0,f}, \Phi_\alpha(x)\bar\Phi_\beta(x')\Omega_{0,f}). \tag{16.17}$$

Следовательно, из (16.16) и (16.17) для $t, t_1 \geqslant 0$

$$(\Omega_f, T^*(\hat\psi_{\alpha_1}(t, \boldsymbol{x})\hat{\bar\psi}_\beta(t', \boldsymbol{x}'))\Omega_f) = (\Omega_{0,f}, \Phi_\alpha(x)\Phi_\beta(x')\Omega_{0,f}). \tag{16.18}$$

Равенство (16.18) справедливо для любого числа полей:

$$(\Omega_f, T^*(\hat\psi_{\alpha_1}(t_1, \boldsymbol{x}_1)\dots\psi_{\alpha_n}(t_n, \boldsymbol{x}_n)\hat{\bar\psi}_{\beta_1}(t'_1, \boldsymbol{x}'_1)\dots\hat{\bar\psi}_{\beta_n}(t'_n, \boldsymbol{x}'_n))\Omega_f) =$$
$$= (\Omega_{0,f}, \Phi_{\alpha_1}(x_1)\dots\Phi_{\alpha_n}(x_n)\bar\Phi_{\beta_1}(x'_1)\dots\bar\Phi_{\beta_n}(x'_n)\Omega_{0,f}). \tag{16.19}$$

16.2. Формула Фейнмана — Каца — Нельсона [61, 94, 113, 155, 169]

Введение ε-аппроксимации (14.39) и (15.35) позволяет единым образом получить формулу Фейнмана — Каца — Нельсона для скалярного взаимодействия и взаимодействия Юкавы.

Введем следующие обозначения:

$$V(h, \varkappa, \varepsilon)=\begin{cases}\lambda H(h, \varkappa, \varepsilon) \text{ для } \lambda(:\varphi^4:)_2,\\ -\lambda H(h, \varkappa)+\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)-E(h, \varkappa) \text{ для } Y_2.\end{cases} \tag{16.20}$$

Через $\overset{\frown}{\sigma}(0, x)$ обозначим одно из полей $\varphi_0(0, x)$, $\overset{\frown}{\psi}_0(0, x)$ или $\overset{\frown}{\bar{\psi}}_0(0, x)$; через $Q(x)$ обозначим одно из евклидовых полей $a(x)$, $\Phi(x)$ или $\bar{\Phi}(x)$. Далее, пусть функции $G_i(\cdot)$ будут ограниченными функциями своих аргументов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 16.1. *Для* $\chi(t_1, \ldots, t_n)\in C_0^\infty(R^n)$,

$$\operatorname{supp}\chi\subset(0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_n\leqslant t),\quad f_i(x_i)\in C_0^\infty(R^1)$$

$i=1, 2, \ldots, n$ *и* $h(x)=\chi_{[-t,t]}(x^{(2)})g(x)$ *имеет место формула*

$$\int dt_1\ldots dt_n\chi(t_1, \ldots, t_n)(\Omega, \exp[-(t-t_n)H_\lambda(g, \varkappa)]\times$$
$$\times G_n(\overset{\frown}{\sigma}(0, f_n))\ldots\exp[-(t_2-t_1)H_\lambda(g, \varkappa)]G_1(\overset{\frown}{\sigma}(0, f_1))\times$$
$$\times\exp[-(t_1+t)H_\lambda(g, \varkappa)]\Omega)=\int dt_1\ldots dt_n\chi(t_1, \ldots, t_n)\times$$
$$\times(\Omega_0, G_n(Q(-t_n, f_n))\ldots G_1(Q(-t_1, f_1))e^{-V(h,\varkappa)}\Omega_0). \tag{16.21}$$

(Введение функции $\chi(t_1, \ldots, t_n)$ необходимо в силу того, что евклидовы операторы ферми-полей $\Phi(t, f)$ и $\bar{\Phi}(t, f)$ не являются операторами в пространстве $\mathscr{H}$.)

Доказательство. Имеем

$$\int dt_1\ldots dt_n\chi(t_1, \ldots, t_n)(\Omega, \exp[-(t-t_n)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa))]\times$$
$$\times G_n(\overset{\frown}{\sigma}(0, f_n))\ldots\exp[-(t_2-t_1)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa))]\times$$
$$\times G_1(\overset{\frown}{\sigma}(0, f_1))\exp[-(t_1+t)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa))]\Omega)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int dt_1\ldots dt_n\chi(t_1, \ldots, t_n)(\Omega, \exp[-(t-t_n)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon))]\times$$
$$\times G_n(\overset{\frown}{\sigma}_0(0, f_n))\ldots\exp[-(t_2-t_1)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon))]\times$$
$$\times G_1(\sigma_0, f_1)\exp[-(t_1+t)(H_0+V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon))]\Omega)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \lim_{N_1, \ldots, N_{n+1}\to\infty}\int dt_1\ldots dt_n\chi(t_1, \ldots, t_n)\times$$

$$\times \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1}}^{N_1, \ldots, N_{n+1}} (-1)^{k_1+\ldots+k_{n+1}} \Bigg(\Omega, \int_0^{t-t_n} dt_1^{(1)} \int_0^{t_1^{(1)}} dt_2^{(1)} \ldots \int_0^{t_{k_1-1}^{(1)}} dt_{k_1}^{(1)} \times$$

$$\times \exp[-t_{k_1}^{(1)} H_0] V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t_{k_1-1}^{(1)} - t_{k_1}^{(1)}) H_0] \ldots$$

$$\ldots V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t - t_n - t_1^{(1)}) H_0] G_n(\bar{\sigma}_0(0, f_n)) \ldots$$

$$\ldots \int_0^{t_2-t_1} dt_1^{(n)} \int_0^{t_1^{(n)}} dt_2^{(n)} \ldots \int_0^{t_{k_n-1}^{(n)}} dt_{k_n}^{(n)} \exp[-t_{k_n}^{(n)} \cdot H_0] \times$$

$$\times V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t_{k_n-1}^{(n)} - t_{k_n}^{(n)}) H_0] \ldots$$

$$\ldots V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[(t_2 - t_1 - t_1^{(n)}) H_0] G_1(\hat{\sigma}(0, f_1)) \times$$

$$\times \int_0^{t_1+t} dt_1^{(n+1)} \int_0^{t_1^{(n+1)}} dt_2^{(n+1)} \ldots \int_0^{t_{k_{n+1}-1}^{(n+1)}} dt_{k_n}^{(n+1)} \exp[-(t_{k_{n+1}-1}^{(n+1)} - t_{k_{n+1}}^{(n+1)}) H_0] \ldots$$

$$\ldots V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) \exp[-(t_1 + t - t_1^{(n+1)}) H_0] \Omega \Bigg) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N_1, \ldots, N_{n+1} \to \infty} \int dt_1 \ldots dt_n \chi(t_1, \ldots, t_n) \times$$

$$\times \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1}}^{N_1, \ldots, N_{n+1}} \frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_{n+1}}}{k_1! \ldots k_{n+1}!} \Bigg(\Omega, T^* \Bigg\{ \left(\int_0^{t-t_n} V_\lambda^{\tau_1}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau_1 \right)^{k_1} \times$$

$$\times G_n(\hat{\sigma}(t - t_n, f_n) \ldots G_1(\hat{\sigma}(t - t_n, f_1)) \times$$

$$\times \left(\int_{t-t_1}^{2t} V_\lambda^{\tau_{n+1}}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau_{n+1} \right)^{k_{n+1}} \Bigg\} \Omega \Bigg) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N_1, \ldots, N_{n+1} \to \infty} \int dt_1 \ldots dt_n \chi(t_1, \ldots, t_n) \times$$

$$\times \sum_{k_1, \ldots, k_{n+1}}^{N_1, \ldots, N_{n+1}} \frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_{n+1}}}{k_1! \ldots k_{n+1}!} \Bigg(\Omega_0, \left(\int_0^{t-t_n} V^{\tau_1}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau_1 \right)^{k_1} \times$$

$$\times G_n(Q(t - t_n, f_n)) \ldots G_1(Q(t - t_1, f_1)) \times$$

$$\times\left(\int\limits_{t-t_1}^{2t} V^{\tau_{n+1}}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau_{n+1}\right)^{k_{n+1}} \Omega_0\Bigg) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int dt_1 \ldots dt_n \chi(t_1, \ldots, t_n)\Big(\Omega_0, G_n(Q(t-t_n)) \times$$

$$\times G_1(Q(t-t_1)) \exp\left[-\int\limits_0^{2t} V^{\iota}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau\right]\Omega_0\Big) =$$

$$= \int \chi(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \times$$

$$\times (\Omega_0, G_n(Q(-t_n, f_n)) \ldots G_1(Q(-t_1, f_1))\, e^{-V(h,\varkappa)}\Omega_0). \quad (16.22)$$

Первое равенство (16.22) справедливо в силу лемм 14.6 и 14.7. Второе равенство обеспечивается теоремой 14.9. В третьем равенстве использованы формулы

$$e^{-tH_0}V_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)\, e^{tH_0} = V^t_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon) = V^t_\lambda(\sigma(t)),$$

$$T^*\left(\int\limits_0^t V^{\tau}_\lambda(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau\right)^k = k!\int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{k-1}} V^{t_k}_\lambda(\cdot)\ldots V^{t_1}_\lambda(\cdot).$$

Четвертое равенство является следствием формул (16.10) и (16.19). При доказательстве пятого равенства нужно учесть, что операторы $G_i(Q(t, f))$ коммутируют между собой при различных t, f, а следовательно, и с операторами $V^{\tau}(g, \varkappa, \varepsilon)$. Кроме того, на области D_0

$$s\text{-}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\int\limits_0^t V^{\tau}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau\right)^k = \exp\left[-\int\limits_0^t V^{\tau}(g, \varkappa, \varepsilon)\, d\tau\right]. \quad (16.23)$$

Доказательство равенства (16.23) в свою очередь вытекает из теоремы 15.2, примечания 15.1 и ограниченности операторов $H(h, \varkappa, \varepsilon)$ для скалярного взаимодействия и $\Delta m(h, \varkappa, \varepsilon)$. Шестое равенство является следствием лемм 15.6 и 15.7.

Примечание 16.1. Предельным переходом можно доказать формулу (16.21) и для функции $G(Q) = Q$. Для этого достаточно, например, положить $G(Q) = Q_\varepsilon$ и совершить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Формула Фейнмана — Каца — Нельсона (16.21) была выведена при $\varkappa < \infty$. Однако в следующей главе мы покажем, что она справедлива и при $\varkappa = \infty$.

Формула (16.21), выведенная нами для двух моделей квантованных полей — скалярной модели $\lambda(:\varphi^4:)_2$ и двумерной модели

Юкавы $(:\bar{\psi}\psi\varphi:)_2$, может быть получена для произвольной модели, в которой существует самосопряженный, ограниченный снизу оператор энергии. Особенно полезной она оказалась для скалярных теорий $P(\varphi)_2$, в которых эта формула выводится на языке случайных полей (см. монографию Саймона [146]). С помощью формулы Фейнмана — Каца — Нельсона удается представить функции Грина модели $P(\varphi)_2$ в виде континуального интеграла по гауссовой мере. Такое представление дало возможность Глимму, Спенсеру и Джафе доказать существование функций Грина при бесконечном объеме [53, 54] (см. далее теорему 19.1).

Глава V

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

В предыдущей главе было показано, что уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния имеют единственные решения (15.7) и (15.25) при наличии ультрафиолетового и объемного обрезаний. Наличие обрезаний позволяет получить корректное выражение для S-матрицы вне рамок теории возмущений. Разложение (15.7) в ряд по константе взаимодействия λ приводит к обычному расходящемуся ряду теории возмущений [64, 85, 123, 164]. Следовательно, решение (15.7) уравнения (15.6) определяет некоторую суммирующую процедуру [118, 124, 134] для расходящегося диаграммного ряда. В случае взаимодействия Юкавы ряд (15.25) сходится [27, 83, 84, 87, 88, 136, 143, 178].

В настоящей главе будет показано, что в решениях (15.7) и (15.25) уравнений (15.6) и (15.24) можно снять ультрафиолетовое обрезание $\varkappa$, а в случае скалярного взаимодействия $\lambda\,(:\varphi^4)_2$ и объемное обрезание $h\,(x)$.

§ 17. ЕВКЛИДОВА S-МАТРИЦА В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

17.1. Скалярное взаимодействие

Доказанная в § 15 теорема 15.1 устанавливает существование решения уравнения (15.6) при $\varkappa < \infty$:

$$F(h, \varkappa) = \exp\left[-\lambda H(h, \varkappa)\right]\Omega_{0,b} \in \mathcal{H}_b, \qquad \lambda > 0. \tag{17.1}$$

Выражение (17.1) описывает всю последовательность коэффициентных функций S-матрицы в евклидовой области. Разложение выражения (17.1) по константе взаимодействия λ совпадает с рядом теории возмущений для матрицы рассеяния, однако в каждом порядке вместо δ-функции будет присутствовать функция $\tilde{h}\,(k)$, а пределы интегрирования в импульсном пространстве будут ограничены величиной $\varkappa$. Известно, что в двумерной теории ($d = 2$) в каждом порядке по λ можно перейти к пределу $\varkappa \to \infty$. В настоящем параграфе будет показано, что такой предел можно осуществить и в выражении (17.1), т. е. установить справедливость

$$\operatorname*{s\text{-}lim}_{\varkappa\to\infty} F(h, \varkappa) = F(h). \tag{17.2}$$

Более того,

$$F(h) = \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b} \in \mathcal{H}_b, \qquad \lambda > 0, \ \varkappa = \infty. \qquad (17.3)$$

Доказательство (17.2) и (17.3) выполним в два этапа. Вначале покажем, что вектор $F(h) = \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b} \in \mathcal{H}_b$. Идея доказательства этого утверждения состоит в следующем. Оператор $H(h)$ эквивалентен оператору умножения на некоторую вещественную функцию $\mathfrak{h}(\sigma)$ в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$. Если функция $\exp(-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)) \in \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, то из непрерывности изоморфизма $\mathcal{U}$ (см. § 13) будет следовать, что вектор $F(h) \in \mathcal{H}_b$ и определяется как обратный образ:

$$\mathfrak{U}^{-1} : \exp(-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)) \Leftrightarrow \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}. \qquad (17.4)$$

Затем докажем справедливость (17.2).

17.2. Интегрируемость в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$

Теорема 17.1 [75, 76, 82] *). *Функция $e^{-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)}$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ суммируема по мере $d\mu$, т. е.*

$$\int_\Sigma e^{-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)}\,d\mu(\sigma) < \infty. \qquad (17.5)$$

Для доказательства этой теоремы проведем ряд вспомогательных построений. Выделим из оператора $H(h)$ полуограниченную снизу часть. Для этого представим функцию h в виде

$$h(k_1 + \ldots + k_4) = h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4) + \Delta h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4), \qquad \varkappa > 0,$$

где

$$h_\varkappa(k_1, \ldots, k_4) = \begin{cases} h(k_1 + \ldots + k_4), & |k_i| \leqslant \varkappa, \quad i = 1, \ldots, 4, \\ 0 & |k_i| > \varkappa, \end{cases}$$

$$|k_i| = \sqrt{(k_i^{(1)})^2 + (k_i^{(2)})^2}.$$

В результате этого оператор $H(h)$ распадается на сумму $H(h_\varkappa) + H(\Delta h_\varkappa)$, причем $H(h_\varkappa)$ полуограничен снизу. Действительно,

$$H(h_\varkappa) = \int dx\, h(x) :a_\varkappa^4(x): =$$

$$= \int dx\, h(x)\,(a_\varkappa^2(x) - 3G_0^\varkappa(0))^2 - 9\,(G_0^\varkappa(0))^2 \int h(x)\,dx = B_\varkappa - C_\varkappa,$$

*) Идея доказательства этой теоремы заимствована из работы Нельсона [112] (см. также [61, 147]).

причем, очевидно, $B_\varkappa \geqslant 0$, ибо $h(x) > 0$, а $C_\varkappa < \infty$. Здесь введены следующие обозначения:

$$a_\varkappa(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} \frac{\exp(ikx)}{(k^2 + m^2)^{1/2}} a(k)\, dk,$$

$$G_0^\varkappa(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{|k| \leqslant \varkappa} \frac{dk}{k^2 + m^2} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\varkappa^2 + m^2}{m^2}.$$

Таким образом, $H(h_\varkappa)$ эквивалентен умножению на некоторую полуограниченную снизу функцию $\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma) \geqslant -C_\varkappa$, а оператор $H(\Delta h_\varkappa)$ эквивалентен умножению на функцию $\Delta\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma)$, причем эта функция, по всей вероятности, неограничена на Σ. Для контроля скорости роста функции $\Delta\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma)$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма 17.1. *Пусть $[r]$ — наименьшее целое число, содержащее данное вещественное r. Тогда существует такое $\varkappa_0 > 0$, что для всех $\varkappa > \varkappa_0$ выполняется неравенство*

$$\| (\Delta\mathfrak{h}_\varkappa)^{n(\varkappa)} \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} \leqslant \text{const}(\alpha) \exp(-\varkappa^\alpha),$$

$$\alpha \in [0, 1/8], \quad n(\varkappa) = [\varkappa^\alpha].$$

Доказательство. Так как оператор $H(h)$ является виковским мономом степени 4, то справедлива следующая оценка:

$$\| H(h) f \|_{\mathscr{H}} \leqslant C_1 \| H(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}} \| (N + 1)^2 f \|_{\mathscr{H}}$$

для произвольного $f \in D_0$, N — оператор числа частиц. Отсюда по индукции следует

$$\| H^n(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}} \leqslant C_1 \| H(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}} \| (N + 1)^2 H^{n-1}(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^n \| H(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}}^n [4(n-1) + 1]^2 [4(n-2) + 1]^2 \ldots \leqslant$$

$$\leqslant C^n (n!)^2 \| H(h) \Omega_{0,b} \|_{\mathscr{H}}^n$$

или

$$\| \mathfrak{h}^n \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} \leqslant C^n (n!)^2 \| \mathfrak{h} \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)}^n \leqslant C_2 (C_3 n^2)^n \| \mathfrak{h} \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)}^n \quad (17.6)$$

где C_1, C_2, C_3, C — некоторые постоянные.

Применим неравенство (17.6) к оператору $H(\Delta h_\varkappa)$:

$$\| (\Delta\mathfrak{h}_\varkappa)^n \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} < C_2 (C_3 n^2 \| \Delta\mathfrak{h}_\varkappa \|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)})^n.$$

Далее, по определению функции $\Delta h_\varkappa$ имеем

$$\|(\Delta \mathfrak{h}_\varkappa)\|^2_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} =$$

$$= \|H(\Delta h_\varkappa)\,\Omega_{0,b}\|^2_{\mathscr{H}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dk_1 \dots dk_4 \frac{\Delta h^2_\varkappa(k_1, \dots, k_4)}{(k_1^2+m^2)\dots(k_4^2+m^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|k_1|>\varkappa} dk_1 \dots dk_4 \frac{h^2(k_1+\dots+k_4)}{(k_1^2+m^2)\dots(k_4^2+m^2)} .$$

Без уменьшения общности положим $h(k) = h(k^{(1)})\,h(k^{(2)})$ и заметим, что

$$(k_1^2+m^2)^{-1} = [(k_1^{(1)})^2 + (k_1^{(2)})^2 + m^2]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{(k_1^{(1)})^2+\frac{m^2}{2}}\right)^{-1}\left(\sqrt{(k_1^{(2)})^2+\frac{m^2}{2}}\right)^{-1};$$

теперь ясно, что достаточно оценивать только одномерный интеграл ($k_i^{(1)} \equiv x_i$)

$$\int\limits_{|x_i|>\varkappa} dx_1 \dots dx_4 \frac{h^2(x_1+\dots+x_4)}{\sqrt{x_1^2+\frac{m^2}{2}}\cdots\sqrt{x_4^2+\frac{m^2}{2}}} <$$

$$< C_4 \int\limits_{|x_i|>\varkappa} dx_1 \dots dx_4 \frac{h^2(x_1+\dots+x_4)}{|x_1|^{1-\varepsilon+\nu}|x_2|^{1-\varepsilon}\dots|x_4|^{1-\varepsilon}} <$$

$$< \frac{C_5}{\varkappa^\nu}\int dx_1 \dots dx_4 \frac{h^2(x_1+\dots+x_4)}{|x_1|^{1-\varepsilon}\dots|x_4|^{1-\varepsilon}} =$$

$$= \frac{C_5}{\varkappa^\nu}\int\limits_0^\infty \frac{dx_1}{|x_1|^{1-\varepsilon}}\dots\frac{dx_4}{|x_4|^{1-\varepsilon}}\Big[2h^2(x_1+\dots+x_4) +$$

$$+ 2\binom{4}{1}h^2(x_1+x_2+x_3-x_4) + \binom{4}{2}h^2(x_1+x_2-x_3-x_4)\Big],$$

$$0<\varepsilon<\frac{1}{4}, \quad 0<\nu<\varepsilon.$$

Воспользовавшись известной формулой Лиувилля (см., например, [55], 4.635) поочередно в каждой группе аргументов функции h, имеющих одинаковый знак, получим, что последний интеграл равен

$$\frac{C_5}{\varkappa^\nu}\frac{\Gamma^4(\varepsilon)}{\Gamma(4\varepsilon)}\left(2\int\limits_0^\infty dx\,\frac{h(x)}{x^{1-4\varepsilon}} + 2\binom{4}{1}\int\limits_0^\infty dx\,dy\,\frac{h^2(x-y)}{x^{1-3\varepsilon}y^{1-\varepsilon}} +\right.$$

$$\left. + \binom{4}{2}\int\limits_0^\infty dx\,dy\,\frac{h^2(x-y)}{x^{1-2\varepsilon}y^{1-2\varepsilon}}\right) = \frac{C_6}{\varkappa^\nu},$$

причем константа C_6 конечна благодаря условию $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Итак,

$$\|(\Delta\mathfrak{h}_\varkappa)^{n(\varkappa)}\|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} < C_2 \left(\frac{C_3 n^2(\varkappa) C_7}{\varkappa^\nu}\right)^{n(\varkappa)}.$$

Положим теперь $n(\varkappa) = [\varkappa^\alpha]$. Так как величина в круглых скобках стремится к нулю, если $2\alpha < \nu$, т. е. $\alpha \in \left[0, \frac{1}{8}\right]$, то, начиная с некоторого $\varkappa > \varkappa_0$, получим окончательно

$$\|(\Delta\mathfrak{h}_\varkappa)^{n(\varkappa)}\|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} < \mathrm{const}\cdot e^{-\varkappa^\alpha}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mu\{\cdot\}$ — мера множества $\{\cdot\}$; имеем последовательно

$$\mu\{\sigma;\, \mathfrak{h}(\sigma) \leqslant -(C_\varkappa + 1)\} \leqslant \mu\{\sigma;\, \Delta\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma) \leqslant -1\},$$

так как $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\varkappa + \Delta\mathfrak{h}_\varkappa$ и $\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma) \geqslant -C_\varkappa$. Далее, очевидно,

$$\mu(\varkappa) \equiv \mu\{\sigma;\, \Delta\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma) \leqslant -1\} \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Sigma \Delta\mathfrak{h}_\varkappa(\sigma)^{2n\varkappa} d\mu(\sigma) = \|(\Delta\mathfrak{h}_\varkappa)^{n(\varkappa)}\|^2_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)},$$

где $n(\varkappa)$ — произвольное целое число. Из предыдущей леммы вытекает, что для всех $\varkappa > \varkappa_0$ последняя величина не превышает $\mathrm{const}^2(\alpha)\, e^{-2\varkappa^\alpha}$. Разобьем теперь интеграл

$$\int_\Sigma \exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\, d\mu(\sigma)$$

на два слагаемых:

$$\int_{\{\sigma;\, \mathfrak{h}(\sigma) \leqslant -(C_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\, d\mu(\sigma) + \int_{\{\sigma;\, \mathfrak{h}(\sigma) > -(C_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\, d\mu(\sigma).$$

Воспользуемся определением абстрактного интеграла в смысле Лебега — Стильтьеса и оценим первое слагаемое:

$$\left|\int_{\{\sigma;\, \mathfrak{h}(\sigma) \leqslant -(C_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\, d\mu(\sigma)\right| \equiv$$
$$\equiv \left|\int_{\varkappa_0}^{\infty} \exp[\lambda(C_\varkappa + 1)]\, d\mu(\varkappa)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}^2(\alpha) \int_{\varkappa_0}^{\infty} \exp[\mathrm{Re}\,\lambda(C_\varkappa + 1)]\, d[\exp(-2\varkappa^\alpha)];$$

очевидно, что такая оценка конечна, так как $C_\varkappa \sim \ln \varkappa$. Легко видеть, что второе слагаемое оценивается таким образом:

$$\left| \int\limits_{\{\sigma: \mathfrak{h}(\sigma) > -(C_{\varkappa_0}+1)\}} \exp[-\lambda \mathfrak{h}(\sigma)]\, d\mu(\sigma) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp[\operatorname{Re}\lambda\,(C_{\varkappa_0}+1)] \int\limits_0^{\varkappa_0} d\mu(\varkappa) = \exp[\operatorname{Re}\lambda\,(C_{\varkappa_0}+1)],$$

что и доказывает (17.5).

Таким образом, мы доказали, что функция $\exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]$ лежит в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, а следовательно, ее унитарный образ $\exp[-\lambda H(h)]\Omega_{0,b}$ лежит в $\mathcal{H}$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$.

17.3. Асимптотичность ряда теории возмущений

Рассмотрим теперь важный вопрос о дифференцируемости функции $\exp[-\lambda H(h)]\Omega_{0,b}$ и ее асимптотическом разложении в ряд. Справедлива следующая теорема.

Теорема 17.2. *Функция* $\exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]$ *аналитична по* λ *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *в смысле**) $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$.

Доказательство. Пусть λ_0 — произвольная точка полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Докажем существование предела

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \int \left| \frac{\exp[-(\lambda_0+\lambda)\mathfrak{h}(\sigma)] - \exp[-\lambda_0\mathfrak{h}(\sigma)]}{\lambda} - \right.$$

$$\left. - \mathfrak{h}(\sigma)\exp[-\lambda_0\mathfrak{h}(\sigma)] \right|^2 d\mu(\sigma) = 0. \quad (17.7)$$

Представим хаусдорфов компакт Σ в виде

$$\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_-,$$

где

$$\Sigma_+ = \{\sigma; \mathfrak{h}(\sigma) \geqslant \varepsilon\}, \quad \Sigma_- = \{\sigma; \mathfrak{h}(\sigma) \leqslant -\varepsilon\}.$$

Соответственно такому разбиению разбивается весь интеграл (17.7) На множестве Σ_- преобразуем его следующим образом:

$$\left| \int\limits_{\Sigma_-} \exp[-2\operatorname{Re}(\lambda_0+\lambda)\mathfrak{h}(\sigma)]\,\mathfrak{h}^2(\sigma) \left| \frac{1-\exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]}{\lambda\mathfrak{h}(\sigma)} - \right.\right.$$

$$\left. - \exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)] \right|^2 d\mu(\sigma) \leqslant$$

*) Напомним, что дифференцируемость (аналитичность) в смысле некоторого пространства $\mathcal{H}$ означает, что пределы соответствующих конечно-разностных отношений рассматриваются в смысле топологии, заданной в $\mathcal{H}$.

$$\leqslant \Big[\int_{\Sigma_-} \exp|-4\mathrm{Re}(\lambda_0+\lambda)\mathfrak{h}(\sigma)|\,\mathfrak{h}^4(\sigma)\,d\mu(\sigma)\Big]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\int_{\Sigma_-}\left|\frac{1-\exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]}{\lambda\mathfrak{h}(\sigma)}-\exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\right|^4 d\mu(\sigma)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot f(-\mathrm{Re}(\lambda_0+\lambda))\left[\int_{\Sigma_-}\left|\frac{1-\exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]}{\lambda\mathfrak{h}(\sigma)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\exp[\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]\right|^4 d\mu(\sigma)\right]^{1/2}. \qquad (17.8)$$

В выражении (17.8) величина $\mathrm{const}\cdot f(-\mathrm{Re}(\lambda_0+\lambda))$ конечна в силу основной теоремы об интегрируемости и ограничена при $|\lambda|\to\to 0$; кроме того, величина под знаком интеграла ограничена на Σ_- и стремится к нулю поточечно, тем самым стремится к нулю и все выражение (17.8). Существование предела (17.7) на Σ_- доказано.

При доказательстве аналогичного предела на Σ_+ следует вынести из-под знака модуля в интеграле величину $\exp[-2\mathrm{Re}\,\lambda_0\mathfrak{h}(\sigma)]\,\mathfrak{h}^2(\sigma)$ и воспользоваться аналогичными соображениями. При доказательстве этого предела на Σ_0 подынтегральное выражение вообще не преобразуется, так как оно ограничено само по себе на Σ_0 и стремится к нулю поточечно. Теорема доказана.

Итак, производная $\frac{d}{d\lambda}\exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]=\mathfrak{h}(\sigma)\exp[-\lambda\mathfrak{h}(\sigma)]$ существует и не зависит от направления. Аналогично доказывается существование всех более высоких производных. По непрерывности изоморфизма это утверждение автоматически переносится на функцию $F(\lambda)=\exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}$.

Рассмотрим теперь вопрос об асимптотическом разложении функции $F(\lambda)$. Для этого рассмотрим тождество

$$R_k=\exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}-\sum_{n=0}^{k}\frac{(-\lambda)^n}{n!}H^n(h)\,\Omega_{0,b}=$$

$$=(-1)^{k+1}(\mathscr{R})\int_0^{\lambda}d\lambda_1\ldots\int_0^{\lambda_k}d\lambda_{k+1}\exp[-\lambda_{k+1}H(h)]\,H^{k+1}(h)\,\Omega_{0,b}. \qquad (17.9)$$

Символом $(\mathscr{R})$ мы обозначили абстрактный интеграл в смысле Римана; путь интегрирования проходит вдоль луча $[0,\lambda']$, где λ' — произвольная точка плоскости $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0$.

Тождество (17.9) легко можно проверить, если воспользоваться бесконечной дифференцируемостью функции $\exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}$

и формулой Ньютона — Лейбница для абстрактных интегралов Римана:

$$(\mathscr{R}) \int_0^{\lambda'} \frac{d}{d\lambda} [f(\lambda)]\, d\lambda = f(\lambda') - f(0), \qquad f \in \mathscr{H}.$$

Оценим теперь величину остатка ряда R_k; очевидно, что норма остатка не превосходит величины

$$\left| \int_0^{\lambda} d\lambda \ldots \int_0^{\lambda_k} d\lambda_{k+1} \right| \cdot \max \| \exp[-\lambda' H(h)] H^{k+1}(h) \Omega_{0,b} \|. \qquad (17.10)$$

Очевидна следующая оценка для второго сомножителя в (17.10):

$$\max_{\lambda' \in [0,\lambda]} \| \exp[-\lambda' H(h)] H^{k+1}(h) \Omega_{0,b} \| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\lambda' \in [0,\lambda]} \| \exp[-2\lambda' H(h)] \Omega_{0,b} \|^{1/2} \| H^{2(k+1)}(h) \Omega_{0,b} \|^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C(\lambda) \| H(h) \Omega_{0,b} \|^{k+1} 4^{2(k+1)} [2(k+1)]!. \qquad (17.11)$$

Объединяя (17.10) и (17.11), мы приходим к результирующей оценке

$$\| R_k \| \leqslant C(\lambda) |\lambda|^{k+1} \| H(h) \Omega_{0,b} \|^{k+1} \frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!} 4^{2k+1}. \qquad (17.12)$$

Последняя оценка позволяет трактовать весь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} H^n(h) \Omega_{0,b}$ как асимптотический ряд для функции $\exp[\lambda H(h)] \Omega_{0,b}$ в смысле сильной сходимости в $\mathscr{H}$; точность асимптотического тейлоровского разложения как раз и контролируется формулой (17.12). Заметим, что нам удалось по существу усилить традиционную оценку тейлоровских разложений, даваемую обычно с помощью остаточного члена в форме Лагранжа, и заменить ее более точной оценкой (17.12).

Таким образом, в настоящем параграфе показано, что уравнения эволюционного типа для коэффициентных функций S-матрицы в конечном объеме имеют единственное решение, которое представляется вектором (17.3). Ряд теории возмущений для матрицы рассеяния является расходящимся асимптотическим рядом, остаток которого контролируется формулой (17.12).

17.4. Формула типа Фейнмана — Каца — Нельсона при $\varkappa = \infty$

В настоящем разделе докажем справедливость равенства (17.2), т. е. покажем, что при $\varkappa \to \infty$ вектор $F(h, \varkappa)$ сильно сходится к вектору $F(h)$. Доказательство основывается на применении формулы

Фейнмана — Каца — Нельсона. При $\varkappa < \infty$ такая формула была получена в § 16. Покажем теперь, что формула (16.21) справедлива и при $\varkappa = \infty$. Нам понадобится только случай $n = 0$.

Теорема 17.3. *Для* $\lambda \geqslant 0$ *и* $0 \leqslant h(x) \in C_0^\infty$, $h(x) = \chi_{[-t/2, t/2]} g(x)$, *справедлива формула*

$$(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)]\, \Omega_{0,b}) = (\Omega_b, \exp[-tH_\lambda(g)]\, \Omega_b). \tag{17.13}$$

Прежде чем доказывать формулу (17.13), установим справедливость следующей леммы.

Лемма 17.2. *Для операторов* $H(h, \varkappa)$ *и* $H(h)$ *справедлив следующий аналог формулы Дюамеля:*

$$\exp[-tH(h, \varkappa)]\, \Omega_{0,b} = \exp[-tH(h)]\, \Omega_{0,b} + \\ + \int_0^t \exp[-(t-u)\, H(h, \varkappa)]\, [H(h) - H(h, \varkappa)] \cdot \exp[-uH(h)]\, \Omega_{0,b} du. \tag{17.14}$$

Доказательство [147]. В силу теоремы (15.1) вектор

$$F(t) = \exp[-tH(h, \varkappa)]\, \Omega_{0,b} \tag{17.15}$$

является единственным решением уравнения

$$\frac{dF}{dt} = -H(h, \varkappa)\, F, \quad F(0) = \Omega_{0,b,t} \geqslant 0. \tag{17.16}$$

Пусть теперь

$$G(t) = \exp[-tH(h)]\, \Omega_{0,b} + \\ + \int_0^t du \exp[-(t-u)\, H(h, \varkappa)]\, [H(h) - H(h, \varkappa)] \exp[-uH(h)]\, \Omega_{0,b}.$$

На основании теоремы (17.2) функция $G(t)$ является дифференцируемой при $t \geqslant 0$. Тогда легко проверить непосредственным вычислением, что

$$\frac{dG(t)}{dt} = -H(h, \varkappa)\, G(t), \quad G(0) = \Omega_{0,b}, \quad t \geqslant 0, \tag{17.17}$$

т. е. $G(t)$ удовлетворяет уравнению (17.16). Тогда из единственности решения следует, что $G(t) = F(t)$, что и доказывает справедливость леммы.

Для доказательства теоремы 17.3 воспользуемся формулой (16.21) при $n = 0$:

$$(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h, \varkappa)]\, \Omega_{0,b}) = (\Omega_b, \exp[-tH_\lambda(g, \varkappa)]\, \Omega_b). \tag{17.18}$$

В силу теоремы 14.8 (см. примечание 14.5) правая часть (17.18) имеет предел при $\varkappa \to \infty$, который равен $(\Omega_b, \exp[-tH_\lambda(g)]\, \Omega_b)$.

Следовательно, для доказательства (17.13) достаточно показать, что

$$(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h, \varkappa)]\,\Omega_{0,b}) \to (\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}). \quad (17.19)$$

Положим для этого в формуле (17.14) $t = \lambda$ и домножим скалярно (17.14) на вектор $\Omega_{0,b}$. Тогда, учитывая, что операторы $H(h)$ и $H(h, \varkappa)$ коммутируют, и применяя неравенство Шварца, получим

$$|(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h, \varkappa)]\,\Omega_{0,b}) - (\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b})| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\lambda du \,\|[H(h) - H(h, \varkappa)]\,\Omega_{0,b}\| \times$$
$$\times \|\exp[-(\lambda - u) H(h, \varkappa)]\exp[uH(h)]\,\Omega_{0,b}\|. \quad (17.20)$$

Как видно из доказательства теоремы 17.1, величина

$$\|\exp[-(\lambda - u) H(h, \varkappa)]\exp[-uH(h)]\,\Omega_{0,b}\|$$

равномерно ограничена по $\varkappa$ при $\lambda > 0$ и $0 \leqslant u \leqslant \lambda$. Теперь на основании леммы 15.2 правая часть неравенства (17.20) стремится к нулю, что и доказывает (17.19). Теорема доказана.

Используя (17.13), легко установить справедливость следующей формулы:

$$(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda(H(h, \varkappa) + H(h))]\,\Omega_{0,b}) =$$
$$= (\Omega_b, \exp[-t(H_0 + \lambda H_I(g, \varkappa) + \lambda H_I(g))]\,\Omega_b). \quad (17.21)$$

Докажем теперь равенства (17.2) и (17.3). Пользуясь формулами (17.13), (17.18) и (17.21), запишем следующее равенство:

$$\|F(h, \varkappa) - F(h)\|^2 = \|[\exp(-\lambda H(h, \varkappa)) - \exp(-\lambda H(h))]\,\Omega_{0,b}\|^2 =$$
$$= (\Omega_{0,b}, [\exp(-\lambda H(h, \varkappa) - \exp(-\lambda H(h))]^2\,\Omega_{0,b}) =$$
$$= (\Omega_{0,b}, \exp(-2\lambda H(h, \varkappa))\,\Omega_{0,b}) + (\Omega_{0,b}, \exp(-2\lambda H(h))\,\Omega_{0,b}) -$$
$$- 2(\Omega_{0,b}, \exp\{-\lambda[H(h, \varkappa) + H(h)]\}\,\Omega_{0,b}) =$$
$$= (\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + 2\lambda H_I(h, \varkappa)]\}\,\Omega_b) +$$
$$+ (\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + 2\lambda H_I(h)]\}\,\Omega_b) -$$
$$- 2(\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + \lambda H_I(h, \varkappa) + \lambda H_I(h)]\}\,\Omega_b). \quad (17.22)$$

В силу примечания 14.5 (см. также [147], теорема 2.21)

$$(\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + 2\lambda H_I(h, \varkappa)]\}\,\Omega_b) \to$$
$$\to (\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + 2\lambda H_I(h)]\}\,\Omega_b),$$

$$(\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + \lambda H_I(h, \varkappa) + \lambda H_I(h)]\}\Omega_b) \to$$
$$\to (\Omega_b, \exp\{-t[H_0 + 2\lambda H_I(h)]\}\Omega_b)$$

при $\varkappa \to \infty$.

Следовательно, при $\varkappa \to \infty$ левая часть равенства (17.22) стремится к нулю, что и доказывает (17.2) и (17.3).

17.5. Коэффициентные функции без импульсного обрезания в модели Юкавы Y_2

В теории возмущений коэффициентные функции матрицы рассеяния для взаимодействия Юкавы содержат ультрафиолетовые расходимости даже в двумерном пространстве-времени. Для устранения этих расходимостей в лагранжиан взаимодействия вводятся контрчлены (14.32). В настоящем параграфе мы докажем существование коэффициентных функций матрицы рассеяния при $\varkappa = \infty$. Более точно, покажем, что решение уравнения (15.29) имеет слабый предел в пространстве $\mathcal{H}$ [138]. Выделим в пространстве $\mathcal{H}$ множество векторов вида

$$\Phi = \int dx_1 \dots dx_n \overline{f(x_1, \dots, x_n)}\, Q^*(x_1) \dots Q^*(x_n)\,\Omega_0,$$
$$n = 0, 1, 2, \dots, \qquad (17.23)$$

причем

$$f(x_1, \dots, x_n) \in C_0^\infty(R^{2n}),\ \mathrm{supp}\, f \subset \{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 < t_1 < \dots < t_n < t\}.$$

Здесь $Q^*(x)$ — оператор одного из полей $a^+(x)$, $\hat{\Phi}^+(x)$ или $\hat{\bar{\Phi}}^+(x)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 17.4. *Для множества векторов* (17.23) *и последовательности коэффициентных функций* (15.30) *имеет место следующее равенство*:

$$\lim_{\varkappa \to \infty} (\Phi, F(h, \varkappa)) =$$
$$= \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n)\,(\Omega, \exp[-(t - t_n) H_\lambda(g)] \times$$
$$\times \hat{\sigma}(0, x_n) \dots \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g)]\,\sigma(0, x_1) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g)]\,\Omega). \qquad (17.24)$$

Чтобы доказать существование предела (17.24), сформулируем две простые леммы, доказательство которых читатель может найти в монографии [91].

Лемма 17.3 (лемма 3.6 [91]). *Пусть $\{T_n\}$ — последовательность равномерно ограниченных операторов. Тогда $\{T_n\}$ слабо сходятся к*

T $(T_n \xrightarrow{w} T)$, если $\{(T_n u, g)\}$ сходятся к (Tu, g) для всех u, g из некоторой плотной области векторов в $\mathcal{H}$.

Лемма 17.4 (лемма 3.9 [91]). *Если $T_n \xrightarrow{w} T$ в $\mathcal{H}$, $S_n \xrightarrow{s} S$ в $\mathcal{H}$ и T_n, T, S_n, S — самосопряженные операторы, то $S_n T_n \xrightarrow{w} ST$ в $\mathcal{H}$.*

Для доказательства теоремы 17.4 воспользуемся доказанным в предыдущем параграфе равенством (16.21) и перепишем выражение $(\Phi, F(h, \varkappa))$ в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
(\Phi, F(h, \varkappa)) = \\
&= \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n)(\Omega_0, Q(\theta x_1) \dots Q(\theta x_n) e^{\hat{H}(h,\varkappa)}\Omega_0) = \\
&= \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots x_n)(\Omega, \exp[-(t-t_n) H_\lambda(g, \varkappa)] \times \\
&\quad \times \hat{\sigma}(0, \boldsymbol{x}_n) \dots \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g, \varkappa)] \hat{\sigma}(0, \boldsymbol{x}_1) \times \\
&\quad \times \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g, \varkappa)]\Omega), \qquad \theta x = (-x^0, \boldsymbol{x}). \qquad (17.25)
\end{aligned}
$$

Чтобы воспользоваться леммой 17.3, выберем вначале

$$T_\varkappa = \hat{\sigma}(0, f) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g, \varkappa)]. \qquad (17.26)$$

Последовательность операторов (17.26) равномерно ограничена по $\varkappa$.

Это следует из неравенства [52, 60]

$$\varphi_0(0, f) \leqslant \text{const} \cdot [H_\lambda(g, \varkappa) + 1]. \qquad (17.27)$$

Неравенство (17.27) в свою очередь является следствием теоремы 14.5 и неравенства

$$\varphi_0(0, f) \leqslant \text{const} \cdot (N_0 + 1).$$

Далее, так как

$$\exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g, \varkappa)] \xrightarrow{s} \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g)]$$

(см. примечание 14.5), то $(T_\varkappa u, g) \to (Tug)$ для любого g из области определения оператора $\hat{\sigma}(0, f)$. Тогда по условию леммы 17.3

$$
\begin{aligned}
T_\varkappa = \hat{\sigma}(0, f_1) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g, \varkappa)] \xrightarrow{w} \\
\xrightarrow{w} T = \hat{\sigma}(0, f_1) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g)].
\end{aligned}
$$

Выберем теперь $S_\varkappa$ в виде

$$S_\varkappa = \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g, \varkappa)].$$

Так как $S_\varkappa \xrightarrow{s} S = \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g)]$, то по условию леммы 17.4

$$S_\varkappa T_\varkappa \xrightarrow{w} ST = \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g)] \hat{\sigma}(0, f) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g)].$$

Дальнейшее доказательство выполняется по индукции. Выбираем

$$T_\varkappa = \hat{\sigma}(0, f_2) \exp[-(t_2 - t_1) H_\lambda(g, \varkappa)] \times$$
$$\times \hat{\sigma}(0, f_1) \exp[-(t_1 + t) H_\lambda(g, \varkappa)],$$
$$S_\varkappa = \exp[-(t_3 - t_2) H_\lambda(g, \varkappa)];$$

применяя лемму 17.3, докажем, что $T_\varkappa \xrightarrow{w} T$; применяя к $S_\varkappa T_\varkappa$ лемму 17.4, доказываем, что $S_\varkappa T_\varkappa \xrightarrow{w} ST$ и т. д. Теорема доказана.

Таким образом, мы доказали принципиальную возможность устранения ультрафиолетовых расходимостей в модели Y_2 вне теории возмущений. Однако вид производящего оператора $H(h)$, степени которого порождали бы перенормированный ряд теории возмущений, установить не удается. Эта задача тесно связана с теорией перенормировок, которая не рассматривается в настоящей монографии.

§ 18. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ

Теперь рассмотрим вопрос о поведении функции $\exp[-\lambda H(h)]$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, при $h = h(x) \to 1$, т. е. при устремлении «объема» системы к бесконечности, в нашем случае это устремление происходит весьма условным образом, так как обычно термин «объем» применяется для обозначения евклидовой меры носителя функции $h(x)$. Так как оператор $H(h)$ при $h \to 1$ теряет математический смысл в пространстве $\mathcal{H}$, то и норма решения (17.3), очевидно, будет стремиться к бесконечности при $h \to 1$. Действительно, рассуждения, проводимые на интуитивном уровне, показывают, что разложение в ряд нормы $\|\exp[\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}\|$ будет содержать члены, которые при устремлении объема V, где, скажем, $V = \operatorname{mes}\cdot\operatorname{supp} h(x)$, к бесконечности становятся пропорциональными V^k, где k — связность диаграммы. Поэтому важно установить вне рамок теории возмущений характер расходимости нормы решения (17.3).

18.1. Скалярное взаимодействие

Рассмотрим выражение

$$(\Omega_b, \exp[-l_1(H_0 + 2\lambda H_I(l_2))]\Omega_b), \tag{18.1}$$

где

$$H_I(l_2) = \int_0^{l_2} :\varphi_0^4(x): dx.$$

Воспользуемся теоремой 17.3, из которой следует равенство

$$(\Omega_b, \exp[-l_1(H_0 + 2\lambda H_I(l_2))]\Omega_b) =$$
$$= (\Omega_{0,b}, \exp[-2\lambda H(h)]\Omega_{0,b}), \tag{18.2}$$

где h — характеристическая функция прямоугольника $[0, l_1]\times[0, l_2]$.

Пусть, далее, $E_\lambda(l_2)$ — нижайшее изолированное собственное значение полного гамильтониана $H_0 + \lambda H_I(l_2)$. В работах [46, 47, 51] показано, что $E_\lambda(l_2)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$E_\lambda(l_2) > -cl_2.$$

Опираясь на очевидную симметрию выражения (18.2) относительно замены $l_1 \to l_2$ и результаты [46, 47], Гуэрра в работе [59] установил существование и единственность предела

$$\lim_{l_2\to\infty} \frac{E_\lambda(l_2)}{l_2} = E_\lambda. \tag{18.3}$$

Более того, благодаря наличию щели в спектре полного гамильтониана [46] существует предел

$$\lim_{l_1\to\infty} \frac{1}{l_1} \ln(\Omega_b, \exp[-l_1(H_0 + \lambda H_I(l_2))]\Omega_b) = E_\lambda(l_2). \tag{18.4}$$

Заметим теперь, что в силу самосопряженности оператора $H(h)$ справедливо равенство

$$\|F\| = (\exp[-\lambda H(h)]\Omega_{0,b}\exp[-\lambda H(h)]\Omega_{0,b})^{1/2} =$$
$$= (\Omega_{0,b}, \exp[-2\lambda H(h)]\Omega_{0,b})^{1/2}. \tag{18.5}$$

Комбинируя теперь формулы (18.3) — (18.5), легко установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 18.1. *Для решения уравнения* (11.17) *с оператором* (12.3) *имеет место следующий «термодинамический» предел:*

$$\lim_{l_2\to\infty}\lim_{l_1\to\infty} \frac{1}{l_2 l_1} \ln\|F\| = \frac{1}{2}E_{2\lambda}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

Из теоремы 18.1 следует, что, например, для суммы вакуумных вкладов $F_0 = (\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b})$ справедливо аналогичное соотношение

$$\lim_{l_2\to\infty}\lim_{l_1\to\infty}\frac{1}{l_2 l_1}\ln F_0 = E_\lambda, \qquad \lambda \geqslant 0. \tag{18.6}$$

Формула (18.6) является точным математическим выражением того факта, что плотность энергии физического вакуума единственным образом выражается через связную часть вакуумного вклада $\tilde{F}_0 = \ln F_0$.

Как свидетельствует теорема 18.1, в решении уравнения нельзя перейти непосредственно к бесконечному объему. В этой связи в следующем параграфе нами будут изучены другие уравнения, не эволюционного, а резольвентного типа: являющиеся эквивалентом вариационного принципа (7.1). Мы построим решение таких уравнений и покажем, что оно имеет слабый предел при $h(x) \to 1$, а ряд теории возмущений для них можно трактовать как асимптотический в слабом смысле.

18.2. Взаимодействие Юкавы

Для изучения поведения последовательности коэффициентных функций при устремлении объема V к бесконечности ($h(x) \to 1$) воспользуемся введенной в § 12 аппроксимацией (12.9)—(12.17). Для простоты рассмотрим только выражение для всей совокупности вакуумных вкладов:

$$F_0(V,\varkappa) = (\Omega_0, \exp[-\lambda H(V,\varkappa)]\,\Omega_0) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{2n}}{(2n)!}\int dx_1 \ldots dx_{2n}\,(\Omega_0, :\overline{\Phi}_{V,\varkappa}(x_1)\,\alpha_3\Phi_{V,\varkappa}(x_1)\,a_V(x_1): \ldots$$
$$\ldots :\overline{\Phi}_{V,\varkappa}(x_{2n})\,\alpha_3\Phi_{V,\varkappa}(x_{2n})\,a_V(x_{2n}): \Omega_0). \tag{18.7}$$

Операторы $\overline{\Phi}_{V,\varkappa}(x)$ и $\Phi_{V,\varkappa}(x)$ ограничены, а их нормы удовлетворяют следующим оценкам:

$$\|\overline{\Phi}_{V,\varkappa}(x)\| = \|\Phi_{V,\varkappa}(x)\| \leqslant 2\sqrt{G_{0,V,\varkappa}^{1/2}(0)}. \tag{18.8}$$

Поэтому из (18.7) следует, что

$$|F_0(V,\varkappa)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}}{2^n n!}\left\{\int_{V\otimes V} dx_1\,dx_2\,|G_{0,V}(x_1-x_2)|\right\}^n 4^{2n}\,(G_{0,V,\varkappa}^{1/2})^{2n}.$$

Так как

$$\int_V dx\,|G_{0,}\ (x)| \leqslant \int G_0(x)\,dx = \frac{1}{\mu^2}, \quad G_{0,V,\varkappa}^{1/2}(0) \leqslant G_{0,\varkappa}^{1/2}(0),$$

то

$$|F_0(V, \varkappa)| \leqslant \exp\left(\text{const}\cdot\frac{|V|}{\mu^2}\lambda^2[G_{0,\varkappa}^{1/2}(0)]^2\right). \tag{18.9}$$

Так как в экспоненте стоит строго положительная величина, то

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln|F_0(V, \varkappa)| \leqslant \text{const}\,(\varkappa). \tag{18.10}$$

Оценка (18.10) указывает на естественную для рядов теории возмущений расходимость при стремлении объема к бесконечности [83, 84].

18.3. Формула Гелл-Манна—Лоу для функций Грина в конечном объеме

В гл. I мы показали, что определения (2.17) и (3.15) для функций Грина экривалентны в том смысле, что функции (2.17) и (3.18) удовлетворяют одному и тому же уравнению (3.11). Равенство выражений (2.17) и (3.18) называют формулой Гелл-Манна — Лоу [28, 187]:

$$(\Phi_0, T(\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n))\Phi_0) = \frac{\left(\Omega, T(\varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_n))\exp\left[-\lambda\int dx :\varphi_0^4(x):\right]\Omega\right)}{\left(\Omega, T\left(\exp\left[-\lambda\int dx :\varphi_0^4(x):\right]\right)\Omega\right)}. \tag{18.11}$$

В настоящем параграфе мы покажем, что соотношение (18.11) имеет место для евклидовых функций Грина в конечном объеме.

Евклидовы функции Грина определяются через евклидовы операторы поля следующим выражением:

$$G(x_1, \ldots, x_n\,|\,h) = \frac{\left(\Omega_{0,b}, a(x_1)\ldots a(x_n)\exp\left[-\lambda\int dx :a^4(x): h(x)\right]\Omega_{0,b}\right)}{\left(\Omega_{0,b}, \exp\left[-\lambda\int dx :a^4(x): h(x)\right]\Omega_{0,b}\right)}, \tag{18.12}$$

где $h(x) = \chi|_{[-t/2,t/2]}(x^{(2)})\,g(x^{(1)})$. Чтобы применить методы предыдущей главы, введем сглаженную функцию Грина

$$G(t_1, f_1; \ldots; t_n, f_n\,|\,h) = \int f_1(\boldsymbol{x}_1)\ldots f_n(\boldsymbol{x}_n)\,G(x_1, \ldots, x_n\,|\,h)\,d\boldsymbol{x}_1\ldots d\boldsymbol{x}_n. \tag{18.13}$$

Используя равенство (16.21), получим

$$G(t_1, f_1; \dots ; t_n, f_n \mid h) =$$

$$= \frac{\left(\Omega_{0,b}, a(t\ , f_1) \dots a(t_n, f_n) \exp\left[-\lambda \int dx :a^4(x): h(x)\right] \Omega_{0,b}\right)}{\left(\Omega_{0,b}, \exp\left[-\lambda \int dx :a^4(x): h(x)\right] \Omega_{0,b}\right)} =$$

$$= \frac{(\Omega_b, \exp[-(t-t_n) H_\lambda(g)] \hat{\varphi}(0, f_n) \dots}{(\Omega_b, \exp[-2tH_\lambda(g)] \Omega_b)} \times$$

$$\times \frac{\dots \exp[-(t_2-t_1) H_\lambda(g)] \hat{\varphi}(0, f_1) \exp[-(t_1+t) H_\lambda(g)] \Omega_b)}{(\Omega_b, \exp[-2tH_\lambda(g)] \Omega_b)}. \qquad (18.14)$$

Представление (18.14) позволяет снять временное обрезание, т. е. перейти к пределу $t \to \infty$ в выражении (18.12). Действительно, используя формулу (14.18), легко получить, что

$$\lim_{t\to\infty} \exp[-tH_\lambda(g)] \Omega_b = P_0 \Omega_b = (\Omega_b, \Phi_g) \Phi_g. \qquad (18.15)$$

В силу условия (14.15) и равенства (18 15) в выражении (18.14) можно совершить предельный переход $t \to \infty$, домножая предварительно числитель и знаменатель на $\exp[2tE(g)]$ и представляя числитель выражения (18.14) в виде

$$(\exp[-(t-t_n-1) \hat{H}_\lambda(g)] \Omega_b, \quad A \exp[-(t_1+t) \hat{H}_\lambda(g)] \Omega_b), \qquad (18.16)$$

где

$$A = e^{-H_\lambda(g)} \hat{\varphi}(0, f_n) \dots e^{-(t_2-t_1)H_\lambda(g)} \hat{\varphi}(0, f_1) e^{-H_\lambda(g)}.$$

Тогда в силу неравенства (17.27) [52, 60] оператор A является ограниченным и предел выражения (18.16) существует и равен

$$\lim_{t\to\infty} G(f_1, \dots, f_n \mid h) = G(f_1, \dots, f_n \mid g) =$$

$$= (\Phi_g, \varphi(0, f_n) \exp[-(t_n - t_{n-1}) H_\lambda(g)] \varphi(0, f_{n-1}) \dots$$

$$\dots \exp[-(t_2-t_1) H_\lambda(g)] \varphi(0, f_1) \Phi_g). \qquad (18.17)$$

Впервые такое равенство было получено в работах [54, 61]. Отметим, что для взаимодействия Юкавы равенство (18.17) справедливо при достаточно малых значениях константы взаимодействия λ [138], так как при малых λ вектор Φ_g единственный (см. примечание 14.2).

§ 19. УРАВНЕНИЯ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ТИПА И СЛАБОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЕДЕЛЕ БЕСКОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

19.1. Некоторые предварительные построения

Рассмотрим последовательность

$$F_n^h(f_1, \ldots, f_n) = (a^+(f_1) \ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b}, F^h) = (:a(f_1) \ldots a(f_n):\Omega_{0,b}, F^h), \tag{19.1}$$

где

$$a^+(f) = \int \tilde{f}(k)\, a^+(k)\, dk, \tag{19.2}$$

$F^h = \dfrac{\exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}}{F_0^h}$ — последовательность коэффициентных функций, а $F_0^h = (\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b})$ — сумма вакуумных петель. Так как вектор $a^+(f_1) \ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b} \in \mathcal{H}_n$, то выражение (19.1) описывает коэффициентные функции $F_n^h(k_1, \ldots, k_n)$, усредненные с функциями

$$\tilde{f}_i(k) = \frac{f_i(k)}{2\pi\sqrt{k^2 + m^2}};$$

вакуумный вклад, как очевидно из (19.2), сокращен.

Будем предполагать далее, что $f_i(k)$ является преобразованием Фурье функций $f_i(x) \in C_0^\infty(R^2)$; отсюда автоматически следует, что $f_i(k) \in \mathcal{L}_{2,\rho}$. Можно рассматривать выражение $F_N^h(f_1, \ldots, f_N)$ как непрерывный полилинейный функционал над пространством $C_0^\infty(R^2)$; по теореме о ядре он может быть единственным образом расширен до непрерывного функционала $F_N^h(f_N)$ над пространством $C_0^\infty(R^{2N})$, причем

$$F_n^h(f_n) = (\tilde{f}_n, F^h), \tag{19.3}$$

где

$$\tilde{f}_n(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{k_i^2 + m^2}} f_n(k_1, \ldots, k_n),\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \in C_0^\infty(R^{2n}).$$

Более того, можно обобщить наши предыдущие построения, рассмотрев произвольный вектор $f = (0, f_1, \ldots, f_n, 0, \ldots) \in \mathcal{D}_0^1$ и образовав новый функционал

$$F^h(f) = (\tilde{f}, F^h). \tag{19.4}$$

Используем определение (19.1) для построения уравнений резольвентного типа; эти уравнения помогут нам построить асимптотическое разложение при бесконечном объеме для функционала (19.4).

Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 19.1. *Для любых вещественных* $f_i(x)$, $h(x)\in C_0^\infty(R^2)$ *справедливо следующее равенство:*

$$(a^+(f_1)\ldots a^+(f_n)\Omega_{0,b}, F^h) = -\lambda(W_{f_1}(h)a^+(f_2)\ldots a^+(f_n)\Omega_{0,b}, F^h), \tag{19.5}$$

где виковский полином $W_{f_1}(h)$ *есть*

$$W_{f_1}(h) = [a^-(f_1), H(h)]_- = W^*_{f_1}(h).$$

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в непрерывном продолжении операции коммутации оператора $a^-(f_i)$ с ограниченными элементами линейной оболочки $[e^{ia(f)}] = C_0$ до коммутирования этого оператора с присоединенным элементом $\exp[-\lambda H(h)]$; всюду далее $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Заметим, что такое коммутирование может быть интерпретировано как операция «частного» дифференцирования по «аргументу» f. Смысл последнего замечания проясняется ниже.

Зафиксируем некоторый «элемент» $f_1\in\mathcal{L}_{2,\rho}$, без ограничения общности предположим, что $\|f_1\|=1$. Прежде всего отметим, что $[a^-(f_1), e^{ia(f)}]_- = i\langle f_1, f\rangle e^{ia(f)}$. Действительно, опираясь на замкнутость операторов $a^-(f_1)$ и $a(f)$, можно перейти к пределу в равенстве

$$\left[a^-(f_1), \sum_{n=0}^{k}\frac{i^n}{n!}a^n(f)\right] = i\langle f_1, f\rangle\sum_{n=0}^{k-1}\frac{i^n}{n!}a^n(f)$$

на $D(a(f))\subset\mathcal{H}$. После этого остается продолжить по непрерывности операцию коммутирования на все пространство $\mathcal{H}$.

Представим теперь множество C_0 в виде линейной оболочки $[e^{i\alpha a(f_1)}; e^{ia(g)}]$, где произвольные векторы $g\in\mathcal{H}$ ортогональны к f_1. Легко проверить, что справедливо следующее равенство:

$$\left(\Omega_{0,b}, \sum_{i,j}c_ic_je^{i\alpha_ia(f_1)}e^{ia(g_j)}\Omega_{0,b}\right) = \\ = \left(\Omega_{0,b}, \sum_i c_ie^{i\alpha_ia(f_i)}\Omega_{0,b}\right)\left(\Omega_{0,b}, \sum_j c'_je^{ia(g_j)}\Omega_{0,b}\right) \tag{19.6}$$

(операторы $a(f_1)$ и $a(g)$ «независимы»).

Пусть, далее, $d\mu_1$ и Σ_1 — мера и спектр алгебры $\mathfrak{M}$, генерированной единственным оператором $a(f_1)$, а $d\mu'_1$ и Σ'_1 — мера и спектр алгебры $\mathfrak{M}'$, генерированной произвольными операторами $a(g)$, $g\perp f_1$, причем $\mathfrak{M}_1\otimes\mathfrak{M}'_1=\mathfrak{M}$. Тогда из (19.6) следует, что мера $d\mu$ может быть разложена (см., например, [208], § 7) в тензорное произведение $d\mu = d\mu_1 \otimes d\mu'_1$, причем $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma'_1$ есть область задания такого разложения. После этого все гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ может быть представлено как тензорное произведение пространств $\mathcal{L}_2(\Sigma_1, d\mu_1)$ и $\mathcal{L}_2(\Sigma'_1, d\mu'_1)$:

$$\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu) = \mathcal{L}_2(\Sigma_1, d\mu_1) \otimes \mathcal{L}_2(\Sigma'_1, d\mu'_1). \tag{19.7}$$

Спроектируем оператор $H(h)$ на $\Sigma_1 \times \Sigma'_1$. Для этого выберем произвольный ортонормированный базис $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ в $\mathcal{L}_{2,\rho}$, причем потребуем, чтобы $e_1 \in f_1$. Разложим теперь ядро виковского полинома $H(h)$, т. е. функцию $\dfrac{h(k_1 + \ldots + k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2 + m^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_4^2 + m^2}} = w(k_1, \ldots, k_4)$, по базису $\{e_i\}$:

$$w(k_1, \ldots, k_4) = \sum_{i_1, \ldots, i_4 = 1}^{\infty} c_{i_1, \ldots, i_4} e_{i_1, \ldots, i_4}$$

и выделим все члены, содержащие $e_1 = f_1$. Тогда оператор $H(h)$ представится в виде

$$H(h) = \sum_{i_1, \ldots, i_4} c_{i_1, \ldots, i_4} : a(e_{i_1}) \ldots a(e_{i_4}) : = \sum_{k=0}^{4} : a^k(f_1) : P'_k = \sum_{k=0}^{4} a^k(f_1) P_k. \tag{19.8}$$

Из представления (19.8) вытекает, что в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ оператор $H(h)$ эквивалентен умножению на функцию

$$\mathfrak{h} = \sum_{k=0}^{4} a^k(\sigma) p_k(\sigma'),$$

причем $a^k(\sigma) \in \mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$, а $p_k(\sigma') \in \mathcal{L}_2(\Sigma'_1, d\mu'_1)$. Аналогичное представление получает и оператор $W_{f_1}(h)$, указанный в начале леммы: он эквивалентен

$$\mathfrak{w}_{f_1} = \sum_{k=1}^{4} k a^{k-1}(\sigma) p_k(\sigma'').$$

Введем теперь аппроксимацию функции $\mathfrak{h}$ некоторыми функциями $\mathfrak{m}_{l,n} \in C$:

$$\mathfrak{m}_{l,n} = \sum_{k=0}^{4} c_l^k(\sigma) p_{k,n}(\sigma'), \tag{19.9}$$

причем

$$c_l \in C \cap \mathfrak{M}_1,$$

$$p_{k,n}(\sigma') = \begin{cases} p_k(\sigma'), & \sigma' \in M_n, \\ 0, & \sigma' \in M_n, \end{cases} \qquad M_n = \bigcap_{k=0}^{4} \{\sigma', |p_k(\sigma')| < n\}.$$

Более того, потребуем, чтобы для произвольного p и $f \in \mathscr{L}_p(\Sigma, d\mu)$

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} c_l^k f = a^k f, \tag{19.10}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} [a^-, c_l^k]_- f = k a^{k-1} f, \quad a = a(\sigma). \tag{19.11}$$

Возможность такого выбора будет доказана ниже.

Из определения (19.9) следует, что в тензорном произведении (19.6) имеет место последовательная сходимость:

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} \mathfrak{m}_{l,n} f = \mathfrak{m}_n f, \tag{19.12а}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \mathfrak{m}_n f = \mathfrak{h} f, \tag{19.12б}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} [a^-, \mathfrak{m}_{l,n}]_- f = [a^-, \mathfrak{m}_n]_- f, \tag{19.12в}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} [a^-, \mathfrak{m}_n]_- f = \mathfrak{w}_{l,1} f. \tag{19.12г}$$

Действительно, проверим, например, предел (19.12а):

$$\| \mathfrak{m}_n f - \mathfrak{m}_{l,n} f \| \leqslant \sum_{k=0}^{4} \| c_l^k p_{k,n} f - a^k p_{k,n} f \| =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \left(\int d\mu_1(\sigma) \otimes d\mu_1'(\sigma_1') \, | c_l^k(\sigma) p_{k,n}(\sigma') - a^k(\sigma) p_{k,n}(\sigma) |^2 \, | f(\sigma, \sigma') |^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{4} \max_{\sigma' \in M_n} p_{k,n}(\sigma') \, \| c_l^k f - a^k f \| = n \sum_{k=0}^{4} \| c_l^k f - a^k f \| \to 0;$$

сходимость к нулю следует из (19.10). Остальные пределы (19.12) проверяются аналогичным образом.

Теперь докажем, что $\exp(-\lambda \mathfrak{m}_{l,n})$ аппроксимирует в сильном смысле $\exp(-\lambda \mathfrak{h})$. Для этого прежде всего заметим, что для любого фиксированного n и $\operatorname{Re} \lambda > 0$ функция $\exp(-\lambda \mathfrak{m}_{l,n})$ ограничена на Σ равномерно по l. Это следует из того, что $\mathfrak{m}_{l,n}$ — четные полиномы (степени 4) по c_l и, кроме того, старший коэффициент $p_{4,n}$ постоянен, а остальные ограничены числом n. Отсюда следует, что

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} \exp(-\lambda \mathfrak{m}_{l,n}) = \exp(-\lambda \mathfrak{m}_n).$$

С другой стороны, как следует из определения (19.9), функция $\exp(-\lambda \mathfrak{m}_n)$ стремится поточечно на Σ к $\exp(-\lambda \mathfrak{h})$ и ограничена суммируемой функцией, поэтому

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} \exp(-\lambda \mathfrak{m}_n) = \exp(-\lambda \mathfrak{h}).$$

Завершим теперь доказательство леммы. Рассмотрим случай, когда в (19.5) $n=1$; так как $\mathfrak{m}_{l,n}$ ограничены, по непрерывности скалярного произведения имеем

$$(a^+(f_1)\Omega_{0,b}\exp(-\lambda\mathfrak{m}_{l,n})\Omega_{0,b})=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}(\Omega_{0,b}, k[a^-(f_1), \mathfrak{m}_{l,n}]_-\mathfrak{m}_{l,n}^{k-1}\Omega_{0,b})=$$
$$=-\lambda([a^-(f_1), \mathfrak{m}_{l,n}]_-\Omega_{0,b}, \exp(-\lambda\mathfrak{m}_{l,n})\Omega_{0,b}). \qquad (19.13)$$

Так как сходимость в строгом смысле в $\mathcal{L}_2(\Sigma, d\mu)$ эквивалентна сходимости операторов в $\mathcal{H}$ на векторе $\Omega_{0,b}$, то из равенств (19.12) мы можем сначала достигнуть предела по $l\to\infty$, а затем по $n\to\infty$.

Доказательство при $n>1$ аналогично; здесь следует лишь добавить, что вектор $a^+(f_2)\dots a^+(f_n)\Omega_{0,b}$ эквивалентен некоторому $f\in\mathcal{L}_p(\Sigma, d\mu)$. Лемма доказана.

Обоснуем теперь возможность построения последовательностей (19.10), (19.11).

Лемма 19.2. *Для того чтобы при произвольном $f\in\mathcal{L}_p(\Sigma, d\mu)$ (p — любое)*

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} c_l^k f=a^k f,$$
$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty}[a^-, c_l^k]_- f=ka^{k-1}f, \qquad a=a(\sigma),$$

необходимо выполнение условия

$$\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} c_l(t)=t$$

в смысле пространства Соболева $W_1^{2k+1}(d\sigma, R^1)$, $t\in R^1$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что подалгебра $\mathfrak{M}_1$ генерируема единственным существенно самосопряженным оператором $a(f_1)$, поэтому пространство $\mathcal{L}_2(\Sigma_1, d\mu_1)$ унитарно эквивалентно пространству $\mathcal{L}_2(R_1, d\sigma_1)$, где $d\sigma_1(t)=d(\Omega_{0,b}, E_t\Omega_{0,b})$; E_t — спектральная функция оператора $a(f_1)$.

Далее, заметим, что на линейной оболочке $C_1=[e^{i\alpha a(f)}]$ операция $[a^-(f_1),\cdot]$ унитарно эквивалентна дифференцированию:

$$(\mathfrak{m}_1\Omega_{0,b}, [a^-(f_1), \mathfrak{m}_2]\Omega_{0,b})=\int d\sigma_1(t)\,\mathfrak{m}_1(t)\frac{d}{dt}\mathfrak{m}_2(t).$$

Поэтому условия $\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} c_l=a$ и $\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty}[a^-, c_l]=1$ эквивалентны условиям $\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty} c_l(t)=t$ и $\operatorname*{s-lim}_{l\to\infty}\frac{d}{dt}c_l(t)=1$ в $\mathcal{L}_2(R_1, d\sigma_1)$. Последние два предела есть не что иное, как требование сильной сходимости в пространстве Соболева $W_1^2(R_1, d\sigma_1)$. Итак, случай $k=1$, $f=1$ очевиден.

Рассмотрим случай $k=2$, $f=1$:

$$\|c_l^2 - t^2\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \leqslant \|c_l^2 - c_l t\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} + \|c_l t - t^2\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|c_l\|^{1/2}_{\mathscr{L}_4(R, d\sigma_1)} \|c_l - t\|^{1/2}_{\mathscr{L}_1(R_1, d\sigma_1)} + \|t\|^{1/2}_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \|c_l - t\|^{1/2}_{\mathscr{L}_4(R, d\sigma_1)}, \tag{19.14}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} c_l^2 - 2t \right\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} = \left\| 2c_l \frac{d}{dt} c_l - 2t \right\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| 2c_l \frac{d}{dt} c_l - 2c_l \right\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} + \|2c_l - 2t\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|2c_l\|_{\mathscr{L}_4(R_1, d\sigma_1)} \left\| \frac{d}{dt} c_l - 1 \right\|_{\mathscr{L}_4(R_1, d\sigma_1)} + \|2(c_l - t)\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)}. \tag{19.15}$$

Так как $\|c_l - t\|_{\mathscr{L}_2(R_1, d\sigma_1)} \leqslant \|c_l - t\|^{1/2}_{\mathscr{L}_4(R_1, d\sigma_1)}$ (мера $d\sigma_1$ нормирована), то, чтобы (19.14) и (19.15) стремились одновременно к нулю, необходимо потребовать, чтобы $c_l(t) \to t$ в $W_1^4(R_1, d\sigma_1)$. Рассуждая по индукции, можно доказать, что для выполнения условий (19.10)—(19.11) без вектора f необходимо, чтобы $\operatorname{s-lim}_{l\to\infty} c_l(t) = t$ в $W_1^2(R_1, d\sigma)$.

Присутствие вектора f не вносит дополнительных осложнений. Действительно, так как

$$\|f(c_l^k - a^k)\|_{\mathscr{L}_2(\Sigma, d\mu)} \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|^{1/2}_{\mathscr{L}_4(\Sigma, d\mu)} \|c_l^k - a^k\|_{\mathscr{L}_4(\Sigma, d\mu)} = \text{const} \cdot \|c_l^k - t^k\|^{1/2}_{\mathscr{L}_4(\Sigma, d\mu)},$$

то достаточно потребовать сходимость в $W_1^2(R_1, d\sigma)$. Лемма доказана.

19.2. Уравнения резольвентного типа в слабой форме [77]

Приступим теперь на основании леммы (19.1) к построению уравнений резольвентного типа. Преобразуем правую часть равенства (19.5), фигурирующего в лемме, следующим образом:

$$(a^+(f_1)\ldots a^+(f_n))\,\Omega_{0,b},\ F^h) =$$
$$= -\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}(W_{f_i}(h)\,a^+(f_1)\ldots \widehat{a^+(f_i)}\ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b},\ F^h) =$$
$$= -\frac{4\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\int dk_1\ldots dk_4 \frac{(2\pi)^2 h(k_1+\ldots+k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_4^2+\mu^2}}\times\right.\right.$$

$$\times [a^-(-k_4)\,a^+(f_i)]_- : a(k_1)\ldots a(k_3)\colon \Big| a^+(f_1)\ldots \hat{a}^+(f_i)\ldots$$

$$\ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b},\,F^h\Big) = -\lambda\left(\left[4\int dk_1\ldots dk_4\,\frac{(2\pi)^2 h(k_1+\ldots+k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_4^2+\mu^2}}\times\right.\right.$$

$$\times : a(k_1)\ldots a(k_3) : a^-(-k_4)\,\frac{1}{n}\Big]\,a^+(f_1)\ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b},\,F^h\Big) =$$

$$= -\lambda\,(A^*(h)\,a^+(f_1)\ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b},\,F^h\Big) =$$

$$= -\lambda\,(a^+(f_1)\ldots a^+(f_n)\,\Omega_{0,b},\,A(h)\,F^h). \quad (19.16)$$

Определение оператора $A(h)$ очевидно из последнего равенства:

$$A(h) = 4\hat{N}^{-1}\int dk_1\ldots dk_4\,\frac{(2\pi)^2 h(k_1+\ldots+k_4)}{2\pi\sqrt{k_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_4^2+\mu^2}}\times$$

$$\times\, a^+(k_1) : a(k_2)\ldots a(k_3) : = 4\hat{N}^{-1}\int a^+(x) : a^3(x) : h(x)\,dx,$$

где $\hat{N}$ — оператор числа частиц; оператор $\hat{N}^{-1}$ хорошо определен, так как область значений оператора $A(h)$ ортогональна к $\Omega_{0,b}$. Расширим теперь по непрерывности (19.16) на все пространство $C_0^\infty(R^{2n})$ (оператор $A^*(h)$, очевидно, ограничен в $\mathcal{H}_n$, которое содержит $C_0^\infty(R^{2n})$ в качестве своего плотного подмножества):

$$(\tilde{f}^n,\,F^h) = -\lambda\,(A^*(h)\,\tilde{f}^n,\,F^h), \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (19.17)$$

Представим вектор F^h в виде

$$F^h = F^{h'} \oplus \Omega_{0,b}$$

и опустим штрих. Учитывая, что вектор $\tilde{f}$ ортогонален к $\Omega_{0,b}$, и объединяя все уравнения (19.17), получим

$$(f,\,F^h) = -\lambda\,(A^*(h)\,\tilde{f},\,F^h) + (\tilde{f},\,F^{0h}),$$

где $F^{0h} = -\lambda A(h)\,\Omega_{0,b}$.

Перейдем от оператора $A^*(h)$ к оператору $\tilde{A}^*(h)$ по следующему правилу:

$$A^*(h)\,\tilde{f} = \widetilde{(\tilde{A}^*(h)\,f)},$$

где знаком $\sim$ отмечено преобразование (19.3); окончательно, учитывая определения (19.4), получим*)

$$F^h(f) = -\lambda F^h(\tilde{A}^*(h)f) + F^{0h}(f). \qquad (19.18)$$

Уравнения (19.18) назовем уравнениями резольвентного типа в слабой форме.

Из самого построения этих уравнений следует, что функция $\frac{\exp[-\lambda H(h)]\,\Omega_{0,b}}{F^h_{(}}$, свободная от вакуумных вкладов, является решением уравнения (19.18). В этом решении как раз и следует совершить предельный переход при $h \to 1$, чему мы и посвятим оставшуюся часть параграфа.

19.3. Коэффициентные функции при бесконечном объеме

Рассмотрим вопрос о построении степенного разложения последовательности коэффициентных функций $F^h(f)$ при бесконечном объеме. Для этого построим n-ю итерацию уравнения

$$F^h(f) = \sum_{k=1}^{n} (-\lambda)^k F^{0h}(\tilde{A}^{*k}(h)f) + (-\lambda)^{n+1} F^h(\tilde{A}^{*l+1}(h)f) \qquad (19.19)$$

и исследуем первые n членов разложения.

По определению F^{0h} мы имеем

$$F^{0h}(\tilde{A}^{*k}(h)f) = (A^{*k}(h)\tilde{f}, F^{0h}) = (\tilde{f}, A^{k+1}(h)\Omega_{0,b}). \qquad (19.20)$$

Для простоты выберем последовательность f, которая состоит из единственной компоненты f^N. В этом случае билинейная форма (19.20) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathfrak{w}_h^{(k)}(f^N) = (\tilde{f}^N, A^{k+1}(h)\Omega_{0,b}) =$$
$$= \int dx_1 \ldots dx_N h(x_1) \ldots h(x_N) F_N^{(k+1)}(x_1, \ldots, x_N) \tilde{f}^N(x_1, \ldots, x_N). \qquad (19.21)$$

Напомним, что коэффициентная функция $F_N^{(k+1)}(x_1, \ldots, x_N)$ представляется в виде сумм всех диаграмм Фейнмана с N внешними линиями $(k+1)$-го порядка без вакуумных множителей. Так как евклидов пропагатор $G(x)$, образующий такие диаграммы, строго положителен, а каждая диаграмма входит с одинаковым знаком, то $F_N^{(k+1)}(x_1, \ldots, x_N)$ также строго положительна. Аналогичное свойство мы предположим для сглаживающей функции $f^N(x_1, \ldots, x_N)$,

*) Подобные уравнения были выведены недавно в работе [196] на основе представления коэффициентных функций в виде математического ожидания от гауссовского случайного поля.

в противном случае нам придется рассмотреть отдельно ее положительную и отрицательную части. Далее, так как $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$, $\operatorname{supp} h(x) \subset V$, то билинейные формы (19.21) образуют монотонно возрастающую последовательность, зависящую от h. Рассмотрим предельную форму $\mathfrak{w}_1^{(k)}(f^N)$. Подробный анализ, который будет завершен в следующей главе, приведет нас к тому, что форму $\mathfrak{w}_1^{(k)}$ можно будет представить в следующем виде:

$$\mathfrak{w}_1^k(f^N) = \int \tilde{f}^N(k_1, \ldots, k_N) F_N^{(k)}(k_1, \ldots, k_N)\, dk_1 \ldots dk_N,$$

где $F_N^{(k)}(k_1, \ldots, k_N)$ — преобразование Фурье функции $F_N^k(x_1, \ldots, x_N)$. Оно имеет вид

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=N} \delta(k_{i_1}+\ldots+k_{i_{n_1}}) \ldots \delta(k_{j_1}+\ldots+k_{j_{n_k}}) \times \\ \times f_{n_1}(k_{i_1}, \ldots, k_{i_{n_1}}) \ldots f(k_{j_1}, \ldots, k_{j_{n_k}}),$$

где коэффициенты f_n — связные части фейнмановских диаграмм квадратично интегрируемы на гиперповерхностях $\Omega_n = (k_{i_1} + \ldots + k_{i_n} = 0)$. Легко подсчитать, что (см. следующую главу)

$$|\mathfrak{w}_1^{(k)}(f^N)| \leqslant \sum_{n_1+\ldots+n_k=N} \left(\int\limits_{\Omega_{n_1} \cap \ldots \cap \Omega_{n_k}} dk_1 \ldots dk_N \, | f_{n_1}(k_{i_1}, \ldots, k_{i_{n_1}}) |^2 \times \right. \\ \left. \times | f_{n_k}(k_{j_1}, \ldots, k_{j_{n_k}}) |^2 \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega_{n_1} \cap \ldots \cap \Omega_{n_k}} dk_1 \ldots dk_N \frac{1}{(2\pi)^2 (k_1^2 + \mu^2)} \ldots \right. \\ \left. \ldots \frac{1}{(2\pi)^2 (k_N^2 + \mu^2)} | f^N(k_1, \ldots, k_N) |^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

так как $f^N(k_1, \ldots, k_N)$ является преобразованием Фурье функции из $C_0^\infty(R^{2N})$. Итак, справедлив предел

$$\lim_{h \to 1} \mathfrak{w}_h^{(k)}(f^N) = \mathfrak{w}_1^{(k)}(f^N) < \infty. \tag{19.22}$$

Обратимся теперь к самому функционалу $F^h(f^N)$ и положим $f^N = \bigotimes_{i=1}^{N} f_i$. Следуя работе [53], сформулируем основную теорему сходимости для функций $F^h(f^N) = F^h(f_1, \ldots, f_N)$. Пусть $\Delta(h_1, h_2) = \{x \mid h_1(x) \neq h_2(x)\}$ и $\operatorname{supp}_2 f^N$ — наименьшее замкнутое множество $K \subset R^2$ такое, что $(\otimes K)^N \supset \operatorname{supp} f^N$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 19.1. *Пусть λ/μ^2 достаточно мало и $d = \operatorname{dist}(\Delta(h_1, h_2), \operatorname{supp}_2 f^N)$. Тогда найдется константа $m_1 > 0$, не зависящая от h_1, h_2, f^N, такая, что*

$$|F^{h_1}(f_1, \ldots, f_N) - F^{h_2}(f_1, \ldots, f_N)| = O(e^{-m_1 d}). \tag{19.23}$$

Сходимость равномерна по h_1 и h_2.

Доказательство. Обозначим $\Delta h(x) = h_1(x) - h_2(x)$, тогда

$$F^{h_1}(f_1, \ldots, f_N) - F^{h_2}(f_1, \ldots, f_N) = \int_0^1 d\alpha \frac{d}{d\alpha} F_N^{h_2+\alpha\Delta h}(f_1, \ldots, f_N) =$$

$$= (-\lambda) \int_0^1 d\alpha \left[\frac{(\Omega_{0,b}, :a(f_1)\ldots a(f_N): H(\Delta h) \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})}{(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})} - \right.$$

$$- \frac{(\Omega_{0,b} :a(f_1)\ldots a(f_N): \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})}{(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})} \times$$

$$\left. \times \frac{(\Omega_{0,b}, H(\Delta h) \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})}{(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h_2 + \alpha\Delta h)] \Omega_{0,b})} \right]. \tag{19.24}$$

Используя (19.24), легко видеть, что равенство (19.23) следует из теоремы о кластерном разложении функций Грина [53] (мы приводим ее без доказательства).

Теорема 19.2. *Пусть Q_1 и Q_2 — сглаженные полиномы по евклидовым полям $a(x)$, локализованные соответственно в областях Q_1 и $Q_2 \subset R_2$. Пусть $d = \operatorname{dist}(\operatorname{supp} Q_1, \operatorname{supp} Q_2)$. Тогда найдется константа $m_1 > 0$, не зависящая от Q_1, Q_2, такая, что*

$$\left| \frac{(\Omega_{0,b}, Q_1 Q_2 \exp[-\lambda H(h)] \Omega_{0,b})}{(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)] \Omega_{0,b})} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\Omega_{0,b}, Q_1 \exp[-\lambda H(h)] \Omega_{0,b}) (\Omega_{0,b} Q_2 \exp[-\lambda H(h)] \Omega_{0,b})}{(\Omega_{0,b}, \exp[-\lambda H(h)] \Omega_{0,b})} \right| = O(e^{-m_1 d}). \tag{19.25}$$

Теорема 19.2 утверждает, что последовательность $F^h(f^N)$ фундаментальна и, следовательно, сходится. Отсюда следует, что если последовательность $f = \{f^N\}_1^{n_0}$ конечна, то сходится и весь функционал $F^h(f)$. Теперь перейдем к пределу в

$$F(f) = \sum_{k=0}^{l} \lambda^k F^{01}(\widetilde{A}^{*k}(1) f) + R_l(f; \lambda). \tag{19.26}$$

Так как функция $F(f) = F(f;\lambda)$ бесконечно дифференцируема по λ [63], то, используя теорему о единственности тейлоровского разложения для бесконечно дифференцируемых функций, из (19.26) получаем, что

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}F(f;\lambda)\Big|_{\lambda=+0} = F^0(\widetilde{A}^{*k}(1)f) = (\widetilde{f},\ A^{k+1}(1)\,\Omega_{0,b}),$$

причем остаток ряда контролируется известной формулой Лагранжа

$$|R_l(f;\lambda)| \leqslant \frac{\lambda^{l+1}}{(l+1)!}\sup_{\lambda\in[0,\lambda_0]}\left|\frac{d^{l+1}}{d\lambda^{l+1}}F(f;\lambda)\right|,$$

где $[0,\lambda_0]$ — интервал бесконечной дифференцируемости.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 19.3. *Пусть* $f=\{f^N\}_1^{n_0}$, $f^N=\bigotimes\limits_{i=1}^{N} f_i$ *и* $F^h(f)$ — *функционал, определенный в* (19.4). *Тогда предельный функционал* $F(f)=F(\lambda;f)$ *при* $h\to 1$ *существует и разлагается в слабый асимптотический ряд Тейлора.*

В заключение настоящей главы отметим, что переход к пределу $h\to 1$ в модели со взаимодействием Юкавы выполнить не удается. Эта модель исследовалась в ряде работ [7, 100, 101, 152—154, 205]. В работах [83, 84, 87, 101, 154, 205] были получены оценки, устанавливающие зависимость функций Грина этой модели от объемного обрезания. В работах [7, 10] была доказана сходимость рядов теории возмущений при бесконечном объеме с введенным ультрафиолетовым обрезанием.

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

В предыдущих главах исследовались уравнения для коэффициентных функций при конечном объеме и в полученных решениях объем устремлялся к бесконечности. Возможен и другой подход [81, 129] — сразу иметь дело с уравнениями при бесконечном объеме, придать им математический смысл и затем исследовать вопрос о существовании решений.

В настоящей главе уравнения для коэффициентных функций исследуются при бесконечном объеме в пространствах трансляционно-инвариантных функций. Исследована структура производящего оператора в уравнениях резольвентного и эволюционного типов. Решено одно аппроксимированное уравнение.

§ 20. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

20.1. Пространства $h^T_{N,\sigma}$

Рассмотрим линейное пространство трансляционно-инвариантных функций $f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_n(x_1 + a, \ldots, x_n + a)$, $x_i, a \in R^d$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$. Функции f_n зависят от $(n-1)$-й независимой разностной переменной $\xi_1 = x_{i_1} - x_{i_n}, \ldots, \xi_{n-1} = x_{i_{n-1}} - x_{i_n}$ (мы используем обозначение ξ независимо от выбора разностей переменных x).

Введем скалярное произведение, задаваемое билинейной формой

$$(f_n, g_n) = \int d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} \overline{f_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}\, g_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \qquad (20.1)$$

и соответствующее гильбертово пространство $h_n = \otimes (\mathcal{L}_2(R^d))^{n-1}$ с нормой $\|f_n\| = (f_n, f_n)^{1/2}$, которая определяется скалярным произведением (20.1). Отметим, что на рассматриваемом классе функций скалярное произведение (20.1) может быть задано эквивалентным образом с помощью формулы

$$(f_n, g_n) = \lim_{V \to R^2} \frac{1}{|V|} \int\limits_{\otimes V^n} dx_1 \ldots dx_n \overline{f_n(x_1, \ldots, x_n)}\, g_n(x_1, \ldots, x_n), \qquad (20.2)$$

где V — компакт в R^d и $|V| = \text{mes } V$; мы будем рассматривать определения (20.1) или (20.2) в зависимости от удобства.

Определим скалярное произведение (20.1) унитарно эквивалентным образом. Для этого рассмотрим преобразование Фурье в смысле обобщенных функций, для удобства множитель $(2\pi)^{-nd/2}$ будет фигурировать как в прямом, так и в обратном преобразовании Фурье. Тогда

$$\tilde{f}_n(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^{d/2}\,\delta(p_1 + \ldots + p_n)\,f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}),$$

где $f'_n(\ldots)$ является преобразованием Фурье от $f_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Вместо функции $f'_n(\ldots)$, зависящей от $(n-1)$-й переменной, мы будем рассматривать функции от n переменных $f_n(p_1, \ldots, p_n)$, сосредоточенные на гиперплоскостях

$\Omega_n = \{p_i \mid p_1 + \ldots + p_n = 0\}$ и определяемые формулами

$$f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) = f_n(p_1, \ldots, p_n)\big|_{p_1+\ldots+p_n=0},$$
$$\tilde{f}_n(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^{d/2}\,\delta(p_1 + \ldots + p_n)\,f_n(p_1, \ldots, p_n). \tag{20.3}$$

Тогда в импульсном пространстве скалярное произведение (20.1) запишется следующим образом:

$$(f_n, g_n) = (\tilde{f}_n, \tilde{g}_n) = \int dp_1 \ldots dp_{n-1}\,\overline{f'_n(p_1, \ldots, p_{n-1})}\,g'_n(p_1, \ldots, p_{n-1}) =$$
$$= \int dp_1 \ldots dp_n\,\delta(p_1 + \ldots + p_n)\,\overline{f_n(p_1, \ldots, p_n)}\,g_n(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \int\limits_{\Omega_n} dp_1 \ldots dp_n\,\overline{f_n(p_1, \ldots, p_n)}\,g_n(p_1, \ldots, p_n). \tag{20.4}$$

Следуя работе [125], мы рассмотрим обобщение пространства h_n. Пусть σ_k будет разбиением множества переменных $\{N\} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ (или, эквивалентно, множества $\{p_1, \ldots, p_N\}$) на некоторые k подмножеств $\{n_1\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}\}, \ldots, \{n_k\} = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}\}$. Множества $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$ мы будем называть связными частями разбиения σ_k множества $\{N\}$ и изображать графически эту ситуацию следующим образом:

$$\sigma_k : \; (N) \; = \; (n_1) \; \cdots \; (n_k) \tag{20.5}$$

Сопоставим теперь каждому разбиению σ_k множества $\{N\}$ тензорное произведение гильбертовых пространств h_n, описанных выше:

$$\sigma_k\{N\} \to h^T_{N,\sigma_k} = \bigotimes_{i=1} h_{n_i}$$

(первый индекс указывает число переменных разбиваемого множества второй — специфическую форму разбиения). Элементами пространства h^T_{N,σ_k} являются функции вида

$$f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N) = f_{N;n_1,\ldots,n_k}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}; \ldots; x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}}).$$

Функции $f_{N;n_1,\ldots,n_k}(\ldots)$ являются трансляционно-инвариантными по каждому из наборов переменных $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$. Скалярное произведение двух элементов $f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k} \in h^T_{N,\sigma_k}$ определяется следующей формулой:

$$(f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k}) = \int d\xi_1 \ldots d\xi_{i_{n_1}-1} \ldots d\xi_{j_1} \ldots d\xi_{j_{n_k}-1} \times$$
$$\times \overline{f_{N;n_1,\ldots,n_k}(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n_1}-1}; \ldots; \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_k}-1})} \times$$
$$\times g_{N;n_1,\ldots,n_k}(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{n_1}-1}; \ldots; \xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_{n_k}-1}) =$$
$$= \lim_{V \to R^2} \frac{1}{|V|^k} \int\limits_{\otimes V^N} dx_1 \ldots dx_N \overline{f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N)}\, g_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N). \quad (20.6)$$

В импульсном пространстве функции h^T_{N,σ_k} квадратично интегрируемы на гиперповерхностях $\Omega_{n_1} \cap \ldots \cap \Omega_{n_k}$.

20.2. Ортогональность пространств $h^T_{N,\sigma}$

Покажем, что функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k}, соответствующие двум различным разбиениям множества $\{N\}$ на k подмножеств, линейно независимы; продемонстрируем это на преобразованиях Фурье. Действительно, предположим, что $\tilde{f}_{N,\sigma_k} + \tilde{g}_{N,\sigma'_k} = 0$. Тогда очевидно, что вне пересечения носителей обобщенных функций $\tilde{f}_{N,\sigma_k}$ и $\tilde{g}_{N,\sigma'_k}$ регулярные коэффициенты при них равны нулю. С другой стороны, пересечение носителей является многообразием низшей размерности и поэтому имеет меру нуль по отношению к носителям обоих членов, так что мы можем положить $f_{N,\sigma_k}(\ldots) = g_{N,\sigma'_k}(\ldots) = 0$. Отметим, что линейная независимость имеет весьма простую причину и проистекает из-за того, что функции $f_{N,\sigma_k}(\ldots)$ и $g_{N,\sigma_k}(\ldots)$ зависят в координатном представлении от различных переменных.

Более того, очевидно, что если $f_{N,\sigma_k} \in h^T_{N,\sigma_k}$ и $g_{N,\sigma'_k} \in h^T_{N,\sigma'_k}$, то они ортогональны в смысле скалярного произведения (20.6). Действительно, возьмем функции $f_{N,\sigma_k}(\ldots)$ и $g_{N,\sigma'_k}(\ldots)$ финитными по их разностным переменным и положим, что разбиения $\sigma_k\{N\}$ и $\sigma'_k\{N\}$ различаются по всем их связным компонентам. Тогда очевидно, что функция $f_{N,\sigma_k}\cdot g_{N,\sigma'_k} = e_{N,\sigma_1}$ соответствует тождественному разбиению, т. е. зависит от $(N-1)$-й разностной переменной; таким образом, мы получаем

$$(f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma'_k}) =$$

$$= \lim_{V\to R^d} \frac{1}{|V|^k} \int\limits_{\otimes V^N} dx_1 \ldots dx_N \overline{f_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N)}\, g_{N,\sigma_k}(x_1, \ldots, x_N) =$$

$$= \lim_{V\to R^d} \frac{1}{|V|^{k-1}} \int\limits_{\otimes V^{N-1}} d\xi_1 \ldots d\xi_{N-1} e_{N,\sigma_1}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) = 0. \quad (20.7)$$

Так как предел интеграла в (20.7) существует, все выражение в целом оказывается равным нулю. Более того, используя непрерывность скалярного произведения, мы можем установить ортогональность любых функций из h^T_{N,σ_k} и h^T_{N,σ'_k}. В случае, когда функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k} имеют $p < k-1$ независимых разностных компонент, доказательство их ортогональности аналогично.

20.3. Определение пространств h^T

Рассмотрим теперь линейную оболочку $[f_{N,\sigma_k}]$ для фиксированного k, причем предполагается, что σ_k произвольно. Ортогональность функций, которые соответствуют различным разбиениям, позволяет нам ввести топологию прямой суммы, используя скалярное произведение (20.6). Гильбертово пространство $h^T_{N,k}$, образованное в результате этого, содержит вышеописанные пространства h^T_{N,σ_k} как свои ортогональные подпространства:

$$h^T_{N,k} = \bigotimes_{\sigma_k} h^T_{N,\sigma_k}.$$

Более того, заметим, что функции f_{N,σ_k} и g_{N,σ'_k}, принадлежащие разбиению множества $\{N\}$ на различное число подмножеств, зависят вообще от различного числа переменных ξ. Таким образом, можно сконструировать гильбертово пространство h^T_N, содержащее, как свои ортогональные подпространства, пространства $h^T_{N,k}$, т. е.

$$h^T_N = \bigoplus_{k=1}^{N} h^T_{N,k} = \bigoplus_{k=1}^{N} (\bigoplus_{\sigma_k} h^{\prime}_{N,\sigma_k}) = \bigoplus_{\sigma} h^T_{N,\sigma}.$$

Наконец, следуя конструкции пространства Фока, мы объединим все N-частичные пространства в ортогональную сумму

$$h^T = \bigoplus_{N=1}^{\infty} h^T_N.$$

Элементами пространства h^T являются последовательности $f = \{f_N\}_{N=1}^{\infty}$, $f_N \in h^T_N$; каждый элемент такой последовательности f_N является линейной комбинацией функций $f_{N,\sigma}$, которые соответствуют различным разбиениям множества $\{N\}$. Скалярное произведение в h^T задается формулой

$$(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\sigma_k} (f_{N,\sigma_k}, g_{N,\sigma_k}) \right) \right). \tag{20.8}$$

§ 21. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР УРАВНЕНИЙ РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ h^T

21.1. Постановка задачи

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений резольвентного типа при бесконечном объеме. Выполним прежде всего в уравнениях подстановку, которая сводится к новой нормировке коэффициентных функций:

$$3^{-N/4} \sqrt{N} \mathcal{F}_N \to \mathcal{F}_N, \qquad 3^{-1} \sqrt{4} F^0 \to F^0. \tag{21.1}$$

Для новой последовательности $F = \{\mathcal{F}_N\}_{N=1}^{\infty}$ уравнение (11.14) слегка видоизменяется:

$$F = -4 \sqrt{3\lambda}\, AF + F^0, \tag{21.2}$$

где

$$A = \sum_{s=-1}^{2} 3^{\frac{1}{2}\delta_{0s} - \frac{3}{2}\delta_{2s}} W_{2+s,2-s}, \tag{21.3}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Операторы $W_{2+s,2-s}$ действуют следующим образом:

$$(W_{2+s,2-s}\mathcal{F})_N (p_1, \ldots, p_N) =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N-2s-1)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_{2+s}} \prod_{l=1}^{2-s} \int dk_l \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^2 \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{2+s}} - k_1 - \ldots - k_{2-s})}{2\pi \sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi \sqrt{k_{2-s}^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \mathcal{F}_{N-2s}(k_1, \ldots, k_{2-s}, p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_{2+s}}, \ldots, p_N),$$

$$k = (k^{(1)}, k^{(2)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}), \quad d = 2. \tag{21.4}$$

Рассмотрим уравнения (21.2) в пространстве h^T. В настоящем параграфе мы прежде всего установим, что формальные отображения $W_{2+s,2-s}$ и, следовательно, вся матрица A могут быть интерпретированы как оператор в пространстве h^T с плотной областью определения $\overline{D(A)} = h^T$. Более того, так как $F^0 \in h^T$, то все уравнение (21.2) может рассматриваться как абстрактное уравнение резольвентного типа.

Проследим прежде всего, как действуют отображения $W_{2+s,2-s}$ на элементы пространства h^T. Так, например, для N-й компоненты мы имеем

$$(W_{2+s,2-s}f)_N(p_1, \ldots, p_N) =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N-2s-1)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_{2+s}}^{N} \prod_{l=1}^{2-s} \int dk_l \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^2 \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{2+s}} - k_1 - \ldots - k_{2-s})}{2\pi \sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi \sqrt{k_{2-s}^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{N-2s} \Bigg(\sum_{\sigma_k} \delta(p'_{i'_1} + \ldots + p'_{i'_{n_1}}) \ldots \delta(p'_{j'_1} + \ldots + p'_{j'_{n_k}}) \times$$

$$\times f_{N-2s; n_1, \ldots, n_k}(p'_{i'_1}, \ldots, p'_{i'_{n_1}}; \ldots; p'_{j'_1}, \ldots, p'_{j'_{n_1}}) \Bigg), \tag{21.5}$$

при $p'_1 = k_1, \ldots, p'_{2-s} = k_{2-s}$, $p'_{2-s+1} = p_1, \ldots, p'_{N-2s} = p_N$ $p_{i_1}, \ldots$ $\ldots, p_{i_{2+s}}$ выброшены в сумме $\sum\limits_{\sigma_k}$.

Если в (21.5) устранить интегрирования по имеющимся δ-функциям, то элемент $(W_{2+s,2-s}f)_N$ приобретает алгебраическую структуру, свойственную элементам пространства h^T. Нам лишь только остается доказать, что регулярные коэффициенты, возникшие вновь при соответствующих δ-функциях, имеют требуемое свойство квадратичной интегрируемости, т. е. что $(Af)_N \in h_N^T$. В этом случае оператор окажется заданным во всем пространстве h^T, по крайней мере на множестве конечных последовательностей $f=\{f_N\}_{N=1}^{N_0}$; N_0 произвольно. Более строгое утверждение будет установлено нами ниже.

21.2. Алгебраическая структура оператора A

Рассмотрим теперь алгебраическую структуру оператора A. Обозначим через $W_{2+s,2-s}(N)$ сужение оператора $W_{2+s,2-s}$ на подпространство h_{N-2s}^T, т. е.

$$W_{2+s,2-s}(N): h_{N-2s}^T \to h_N^T.$$

Отсюда можно легко заключить, что

$$W_{2+s,2-s} = \sum_N W_{2+s,2-s}(N). \tag{21.6}$$

Теперь введем более детализированные обозначения. Для этого зафиксируем в каждом из выражений суммы (21.4) первые индексы из тех, по которым распространяется суммирование. Для члена при $s=2$ мы положим $i_1=1, \ldots, i_4=4$, для члена с $s=1$ соответственно зафиксируем индексы суммирования на значениях $i_1=$ $=1, \ldots, i_3=3$ и далее аналогично. Операторы $W_{2+s,2-s}(N)$ с фиксированными значениями индексов мы обозначим малыми буквами $\mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N)$. При этом, очевидно,

$$W_{2+s,2-s}(N) = \underset{(s)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N), \tag{21.7}$$

где знаком (s) обозначается, что симметризация производится по числу индексов $2+s$.

Далее введем оператор $\mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N,\sigma)$, который определяется как сужение оператора $\mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N)$ на подпространство $h_{N-2s,\sigma}^T$ пространства h_{N-2s}^T.

Рассмотрим теперь операторы $\mathfrak{w}$ более подробно.

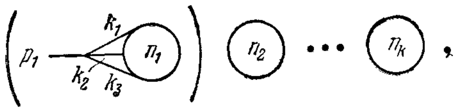
$s=-1$, оператор $\mathfrak{w}_{1,3}(N)$. Так как интегральный оператор, который входит в матрицу $\mathfrak{w}_{1,3}(N)$, имеет три переменных интегрирования k_1, k_2 и k_3, то для его сужений на подпространства $h_{N-2s,\sigma}^T$ можно выделить три характерных случая, т. е. три характерных класса разбиений:

а) все три переменные интегрирования k_1, k_2, k_3 принадлежат одной связной компоненте — этот класс разбиений мы обозначим через $\sigma_{1,3}^3$;

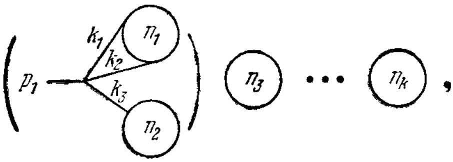
б) две из переменных k_1, k_2, k_3 принадлежат одной связной компоненте, а третья другой — класс разбиений $\sigma_{1,3}^{1,2}$;

в) все переменные k_1, k_2, k_3 принадлежат различным связным компонентам — класс разбиений $\sigma_{1,3}^{1,1,1}$.

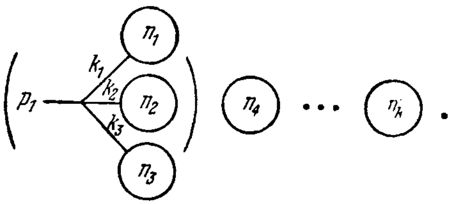
Графически эти ситуации можно изобразить следующим образом:



(21.8а)



(21.8б)



(21.8в)

Обозначим теперь через $\omega^3_{1,3}$, $\omega^{1,2}_{1,3}$, $\omega^{1,1,1}_{1,3}$ интегральные операторы, которые содержатся в круглых скобках (21.8); они действуют по следующему правилу:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \omega^3_{1,3}\colon h_1 \to h_{n_1-2}; \\ &\text{б)}\ \ \omega^{1,2}_{1,3}\colon h_{n_1}\otimes h_{n_2} \to h_{n_1+n_2-2}; \qquad (21.9) \\ &\text{в)}\ \ \omega^{1,1,1}_{1,3}\colon h_{n_1}\otimes h_{n_2}\otimes h_{n_3} \to h_{n_1+n_2+n_3-2}. \end{aligned}$$

Для ясности мы выпишем явный аналитический вид перечисленных операторов:

$$\widetilde{(\omega^3_{1,3} f_{n_1})}_{n_1-2}(p_1, \ldots, p_{n_1-2}) =$$
$$= \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_3^2+\mu^2}} \tilde{f}_{n_1}(k_1, k_2, k_3, p_2, \ldots, p_{n_1-2}), \tag{21.10а}$$

$$\widetilde{(\omega^{1,2}_{1,3} f_{n_1 n_2})}_{n_1+n_2-2}(p_1, \ldots, p_{n_1+n_2-2}) =$$
$$= \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k_3^2+\mu^2}} \times$$
$$\times \tilde{f}_{n_1, n_2}(k_1, k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-1}; k_3, p_{n_1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2}), \tag{21.10б}$$

$$\widetilde{(\omega^{1,1,1}_{1,3}\tilde f_{n_1,n_2,n_3})_{n_1+n_2+n_3-2}}(p_1,\ldots,p_{n_1+n_2+n_3-2}) =$$
$$= \int dk_1dk_2dk_3 \frac{(2\pi)^2\delta(p_1-k_1-k_2-k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots2\pi\sqrt{k_3^2+\mu^2}} \times$$
$$\times \tilde f_{n_1,n_2,n_3}(k_1,p_2,\ldots,p_{n_1};k_2,p_{n_1+1},\ldots,p_{n_1+n_2-1};k_3,p_{n_1+n_2},\ldots,p_{n_1+n_2+n_3-2}). \tag{21.10в}$$

Объединяя все три случая вместе, мы приходим к следующему представлению для оператора $\mathfrak{w}_{1,3}(N)$:

$$\mathfrak{w}_{1,3}(N) = \mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma^3_{1,3}) + \mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma^{1,2}_{1,3}) + \mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma^{1,1,1}_{1,3}), \tag{21.11}$$

причем

$$\mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma^\alpha_{1,3}) = \frac{1}{N}\frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\sum_{\sigma^\alpha_{1,3}}(1\otimes\ldots\otimes\omega^\alpha_{1,3}\otimes\ldots\otimes1), \tag{21.12}$$
$$\alpha = 3;\ 1,2;\ 1,1,1.$$

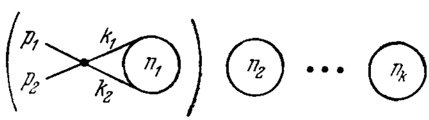
Рассмотрим теперь оператор $\mathfrak{w}_{2,2}$.

$s = 0$, **оператор** $\mathfrak{w}_{2,2}(N)$. Здесь могут представиться только два характерных случая:

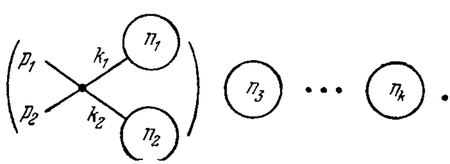
а) обе переменные интегрирования k_1 и k_2 лежат в одной связной компоненте — класс разбиений $\sigma^2_{2,2}$;

б) переменные интегрирования k_1 и k_2 лежат в различных связных компонентах — класс разбиений $\sigma^{1,1}_{2,2}$.

Графически эта ситуация выглядит так:



, (21.13а)



. (21.13б)

Интегральные операторы $\omega^2_{2,2}$ и $\omega^{1,1}_{2,2}$ определяются как отображения:

а) $\omega^2_{2,2}: h_{n_1} \to h_{n_1}$;

б) $\omega^{1,1}_{2,2}: h_{n_1}\otimes h_{n_2} \to h_{n_1+n_2}$.

Аналитическая форма этих операторов имеет следующий вид:

$$\widetilde{(\omega^2_{2,2}\tilde{f}_{n_1})}_{n_1}(p_1, \ldots, p_{n_1}) =$$

$$= \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{2\pi\sqrt{p_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_3^2 + \mu^2}} \tilde{f}_{n_1}(k_1, k_2, p_3, \ldots, p_{n_1}), \quad (21.14а)$$

$$\widetilde{(\omega^{1,1}_{2,2}\tilde{f}_{n_1,n_2})}_{n_1+n_2} = \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{2\pi\sqrt{p_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_2^2 + \mu^2}} \times$$

$$\times \tilde{f}_{n_1,n_2}(k_1, p_3, \ldots, p_{n_1}; k_2, p_{n_1+1}, \ldots, p_{n_1+n_2}). \quad (21.14б)$$

Итак, для оператора $\mathfrak{w}_{2,2}(N)$ мы можем написать представление

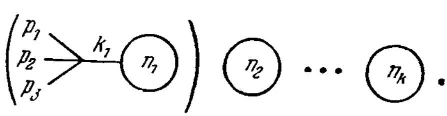
$$\mathfrak{w}_{2,2}(N) = \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}) + \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^{1,1}_{2,2}), \quad (21.15)$$

причем

$$\mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^\alpha_{2,2}) = \frac{1}{N} \sum_{\sigma^\alpha_{2,2}} (1 \otimes \ldots \otimes \omega^\alpha_{2,2} \otimes \ldots \otimes 1), \quad (21.16)$$

$$\alpha = 2;\ 1,1.$$

$s = 1$, оператор $\mathfrak{w}_{3,1}(N)$. В этом случае единственная переменная интегрирования k_1 может принадлежать единственной связной компоненте — класс разбиений $\sigma^1_{3,1} \equiv \sigma$; графически:



(21.17)

Этому случаю соответствует интегральный оператор $\omega_{3,1}$, действующий так:

$$\omega_{3,1}\colon h_{n_1} \to h_{n_1+2};$$

его аналитическая форма имеет вид

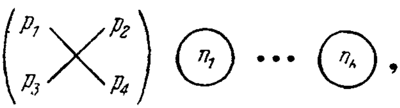
$$\widetilde{(\omega_{3,1}\tilde{f}_{n_1})}(p_1, \ldots, p_{n_1+2}) =$$

$$= \int dk_1 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 + p_2 + p_3 - k_1)}{2\pi\sqrt{p_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_1^2 + \mu^2}} \tilde{f}_{n_1}(k_1, p_4, \ldots, p_{n_1+2}),$$

и

$$\mathfrak{w}_{3,1}(N) = \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N-3)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \sum_\sigma (1 \otimes \ldots \otimes \omega_{3,1} \otimes \ldots \otimes 1). \quad (21.18)$$

$s=2$, **оператор** $\mathfrak{w}_{4,0}(N)$. В этом случае интегрирования вообще отсутствуют и возможна единственная ситуация



(21.19)

которой соответствует оператор

$$\omega_{4,0}\colon h_{n_1} \to h_4 \otimes h_{n_1}.$$

Он действует по формуле

$$\widetilde{(\omega_{4,0} f_{n_1})}_{n_1,4}(p_1, \ldots, p_4; p_5, \ldots, p_{n_1+4}) =$$

$$= \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 + \ldots + p_4)}{2\pi \sqrt{p_1^2+\mu^2} \ldots 2\pi \sqrt{p_4^2+\mu^2}} \widetilde{f}_{n_1}(p_5, \ldots, p_{n_1+4}), \tag{21.20}$$

причем

$$\mathfrak{w}_{4,0}(N) = \frac{1}{N} \frac{\sqrt{(N-5)!}}{\sqrt{(N-1)!}} \omega_{4,0}. \tag{21.21}$$

На этом мы заканчиваем классификацию всех возможных сужений оператора $W_{2+s,2-s}(N)$. Если объединить формулы (21.3), (21.6), (21.7), (21.11), (21.15), (21.18), (21.21), то мы придем к заключению, что алгебраическая структура оператора A в пространстве h^T такова:

$$A = \sum_N \underset{(-1)}{\mathrm{symm}} (\mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^3) + \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,2}) +$$

$$+ \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,1,1})) + 3^{1/2} \sum_N \underset{(0)}{\mathrm{symm}} (\mathfrak{w}_{2,2}(N\sigma_{2,2}^2) + \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma_{2,2}^{1,1})) +$$

$$+ \sum_N \underset{(1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{3,1}(N) + 3^{-3/2} \sum_N \underset{(2)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{4,0}(N). \tag{21.22}$$

21.3. Область определения оператора A

Приступим теперь к изучению области определения оператора A. Справедлива следующая предварительная лемма.

Лемма 21.1. *Операторы* $\omega_{2+s,2-s}$ *ограничены как отображения из* h_{n-2s} *в* h_n.

Доказательство будет проведено нами для типичных случаев: 1) $\omega_{1,3}^3$; 2) $\omega_{1,3}^{1,2}$; 3) $\omega_{4,0}$.

1) Вспомним определение (20.3), связывающее функции $\tilde{f}_n(\ldots)$ и $f_n(\ldots)$, и преобразуем (21.10a) следующим образом:

$$\widetilde{(\omega_{1,3}^3 \tilde{f}_{n_1})}_{n_1-2}(p_1, \ldots, p_{n_1-2}) =$$

$$= \int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2+\mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_3^2+\mu^2}} \times$$

$$\times (2\pi)\,\delta(k_1 + \ldots + p_{n_1-2}) f_{n_1}(k_1, k_2, k_3, p_2, \ldots, p_{n_1-2}) =$$

$$= (2\pi)\,\delta(p_1 + \ldots + p_{n_1-2}) \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2} \ldots \sqrt{(p-k-k_2)^2+\mu^2}} \times$$

$$\times f_{n_1}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-2}).$$

Согласно определению нормы в пространстве $h_{n_1} - 2$ находим

$$\| \widetilde{(\omega_{1,3}^3 \tilde{f}_{n_1})}_{n_1-2} \|^2 = \int\limits_{\Omega_{n_1-2}} dp_1 \ldots dp_{n_1-2} \times$$

$$\times \left| \int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2} \ldots \sqrt{(p_1-k_1-k_2)^2+\mu^2}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{n_1}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-2}) \right|^2. \quad (21.23)$$

Применяя в (21.23) неравенство Шварца по переменным k_1, k_2, получаем

$$\| \widetilde{(\omega_{1,3}^3 \tilde{f}_{n_1})}_{n_1-2} \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{n_1-2}} dp_1 \ldots dp_{n_1-2} \left(\int dk_1' dk_2' \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+\mu^2) \ldots [(p_1-k_1'-k_2')^2+\mu^2]} \right) \times$$

$$\times \int dk_1 dk_2 \, |f_{n_1}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-2})|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{p_1} \left(\int dk_1' dk_2' \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+\mu^2) \ldots [(p_1-k_1'-k_2')^2+\mu^2]} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{n_1-2}} dp_1 \ldots dp_{n_1-2} \int dk_1 dk_2 \, |f_{n_1}(k_1, k_2, p_1 - k_1 - k_2, p_2, \ldots, p_{n_1-2})|^2. \quad (21.24)$$

Заменим теперь в (21.24) переменные следующим образом: $k_1 = q_1$, $k_2 = q_2$, $p_1 - k_1 - k_2 = q_3$, $p_2 = q_4, \ldots, p_{n_1-2} = q_{n_1}$; в этом случае область интегрирования будет просто заменена на Ω_{n_1}. Принимая во внимание, что $\max\limits_{p_1}$ достигается в точке $p_1 = 0$, окончательно получим

$$\|\widetilde{(\omega^3_{1,3}\tilde{f}_{n_1})_{n_1-2}}\| \leqslant C^3_{1,3}\|\tilde{f}_{n_1}\|, \tag{21.25}$$

где

$$C^3_{1,3} = \frac{(2\pi)^2}{\mu}\left(\int dk_1 dk_2 \frac{1}{(k_1^2+\mu^2)(k_2^2+\mu^2)[(k_1+k_2)^2+\mu^2]}\right)^{1/2}.$$

2) По аналогии с предыдущим пунктом вынесем δ-функцию из-под знака интеграла в (21.10б) и используем определение нормы в $h_{n_1+n_2-2}$; тогда получим

$$\|(\omega^{1,2}_{1,3}\tilde{f}_{n_1,n_2})_{n_1+n_2-2}\|^2 = \int\limits_{\Omega_{n_1+n_2-2}} dp_1 \ldots dp_{n_1+n_2-2} \times$$

$$\times\left|\int dk_1 \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2}\sqrt{k_1^2+\mu^2}\sqrt{(k_1+p_2+\ldots+p_{n_1-1})^2+\mu^2}} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{f_{n_1,n_2}(k_1, -k_1-p_2-\ldots-p_{n_1-1}, p_2, \ldots, p_{n_1-1}; -p_{n_1}-\ldots-p_{n_1+n_2-2}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2})}{\sqrt{(p_{n_1}+\ldots+p_{n_1+n_2-2})^2+\mu^2}}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_p\left(\frac{1}{\mu^4}\int dk_1' \frac{(2\pi)^{-4}}{(k_1^2+\mu^2)[(k+p)^2+\mu^2]}\right)\int\limits_{\Omega_{n_1+n_2-2}} dp_1\ldots$$

$$\ldots dp_{n_1+n_2-2}\int dk_1 |f_{n_1,n_2}(k_1, -k_1-p_2-\ldots-p_{n_1-1}, p_2, \ldots, p_{n_1-1};$$

$$-p_{n_1}-\ldots-p_{n_1+n_2-2}, p_{n_1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2})|^2. \tag{21.26}$$

Так как подынтегральное выражение в (21.26) не зависит от p_1, интегрирование по p_1 может быть снято. После этого произведем следующую замену переменных: $k_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_{n_1-1} = q_{n_1-1}$, $p_{n_1} = q_1', \ldots$, и заметим, что интеграция в (21.26) происходит по переменным двух типов q и q' вдоль гиперплоскости $\Omega_{n_1} \cap \Omega_{n_2}$. Окончательно получим

$$\|(\omega^{1,2}_{1,3}\tilde{f}_{n_1,n_2})_{n_1+n_2-2}\| \leqslant C^{1,2}_{1,3}\|\tilde{f}_{n_1,n_2}\|,$$

где

$$C^{1,2}_{1,3} = \frac{(2\pi)^{-2}}{\mu}\left(\int dk \frac{1}{(k^2+\mu^2)^2}\right)^{1/2}.$$

3) Непосредственно из определений (21.20) и нормы в $h_4 \otimes h_n$ легко получить, что

$$\| \widetilde{(\omega_{4,0} \tilde{f}_n)_{4,n}} \|^2 = \left(\int\limits_{\Omega_1} dp_1 \dots dp_4 \frac{(2\pi)^{-4}}{(p_1^2+\mu^2)\dots(p_4^2+\mu^2)} \right) \int\limits_{\Omega_n} dp_5 \dots dp_{n+4} \times$$
$$\times |f_n(p_5, \dots, p_{n+4})|^2 = (C_{4,0})^2 \| \tilde{f}_n \|^2.$$

Аналогичным образом можем подсчитать и нормы других интегральных операторов ω:

$$\begin{aligned} &\| \omega_{1,3}^{1,1,1} \| \leqslant C_{1,3}^{1,1,1} = \frac{(2\pi)^2}{\mu^4}, \\ &\| \omega_{3,1}^{1} \| \leqslant C_{3,1}^{1} = C_{1,3}^{3}, \\ &\| \omega_{2,2}^{2} \| \leqslant C_{2,2}^{2} = \left(\int dk_1 dk_2 \frac{(2\pi)^{-4}}{(k_1^2+\mu^2)^2 (k_2^2+\mu^2)^2} \right)^{1/2}, \\ &\| \omega_{2,2}^{1,1} \| \leqslant C_{2,2}^{1,1} = C_{1,3}^{1,2}. \end{aligned} \tag{21.27}$$

Оценки типа тех, которые сделаны в § 17, показывают, что вышеприведенные константы конечны. Лемма доказана.

Лемма 21.2. *Операторы $W_{2+s,2-s}(N)\hat{N}^{-1}$ равномерно ограничены по N.*

Доказательство будет продемонстрировано нами на примере оператора $W_{1,3}(N)$. Принимая во внимание (21.7) и (21.11), получим

$$\| W_{1,3}(N) \hat{N}^{-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname*{symm}_{(-1)} \| \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^3) \hat{N}^{-1} + \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,2}) \hat{N}^{-1} + \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,1,1}) \hat{N}^{-1} \|.$$

Прокоммутируем оператор $\hat{N}^{-1}$ с оператором $\mathfrak{w}_{1,3}$ и примем во внимание, что симметризация операторов $\mathfrak{w}_{1,3}$ распространяется по индексу i_1 от 1 до N; поэтому очевидно, что

$$\| W_{1,3}(N) \hat{N}^{-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant N \| (\hat{N}+2)^{-1} \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^3) + (\hat{N}+2)^{-1} \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,2}) +$$
$$+ (\hat{N}+2)^{-1} \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,1,1}) \|. \tag{21.28}$$

Принимая во внимание представление (21.12), может продолжить неравенство (21.28):

$$\| W_{1,3}(N)\widehat{N}^{-1}\| \leqslant \frac{\sqrt{(N+1)!}}{\sqrt{(N-1)!}}\,\frac{1}{N+2}\left(\Big\|\sum_{\sigma^3_{1,3}}(1\otimes\ldots\otimes\omega^3_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1)\Big\| + \right.$$

$$+\Big\|\sum_{\sigma^{1,2}_{1,3}}(1\otimes\ldots\otimes\omega^{1,2}_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1)\Big\| +$$

$$\left. +\Big\|\sum_{\sigma^{1,1,1}_{1,3}}(1\otimes\ldots\otimes\omega^{1,1,1}_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1)\Big\|\right). \quad (21.29)$$

Более того, так как суммирования в (21.29) происходят по операторам, заданным на ортогональных подпространствах, то

$$\| W_{1,3}(N)\widehat{N}^{-1}\| \leqslant \frac{\sqrt{N(N+1)}}{N+2}\,(\max_{\sigma^3_{1,3}}\| 1\otimes\ldots\otimes\omega^3_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1\| +$$

$$+\max_{\sigma^{1,2}_{1,3}}\| 1\otimes\ldots\otimes\omega^{1,2}_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1\| + \max_{\sigma^{1,1,1}_{1,3}}\| 1\otimes\ldots\otimes\omega^{1,1,1}_{1,3}\otimes\ldots\otimes 1\|) \leqslant$$

$$\leqslant \|\omega^3_{1,3}\| + \|\omega^{1,2}_{1,3}\| + \|\omega^{1,1,1}_{1,3}\|.$$

Доказательство остальных случаев аналогично. Лемма доказана. Из этой леммы и представления (21.22) мгновенно вытекает следующая теорема, дающая достаточно полный ответ на вопрос об области определения оператора A.

Теорема 21.1. *Оператор* $A\widehat{N}^{-1}$ *ограничен в* h^T.

Отсюда мгновенно следует, что область определения оператора A плотна в h^T и что $D(A)\subset D(N)$. Более того, теорема, в частности, показывает, что $\|A^nF^0\|\leqslant(\mathrm{const})^n n!$. Поэтому ряд теории возмущений, образованный итерациями уравнения (21.2), $F=(1+4\sqrt{3}\lambda A+\ldots+(4\sqrt{3}\lambda A)^n+\ldots)F^0$, расходится не быстрее, чем ряд $1+c\lambda+\ldots+(c\lambda)^n n!+\ldots$, т. е. с той же самой скоростью, что и в конечном объеме.

§ 22. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА A. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АППРОКСИМИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

22.1. Свойства оператора A

Приступим к изучению свойств оператора A. Прежде всего заметим, что он оставляет инвариантным подпространство h^T_s симметрических функций пространства h^T. Поэтому представляется возможным рассматривать его как оператор в h_s^T; подчеркнем, кроме того, что так как $F_0 \in h_s^T$, то естественно предполагать, что формальное решение уравнения (21.2),

$$F = (1 - 4\sqrt{3}\lambda A)^{-1} F^0,$$

также окажется в h_s^T.

Представим теперь оператор A в виде

$$A = S + P + C, \tag{22.1}$$

где

$$S = \sum_N (\underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^3) + 3^{1/2} \underset{(0)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma_{2,2}^2) + \underset{(1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{3,1}(N)),$$

$$P = \sum_N (\underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,2}) + \underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^{1,1,1}) +$$

$$+ 3^{1/2} \underset{(0)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma_{2,2}^{1,1})), \tag{22.2}$$

$$C = 3^{-3/2} \sum_N \underset{(2)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{4,0}(N).$$

Оператор S в h^T является операторнозначной якобиевой матрицей, имеющей следующее представление:

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{1,3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & S_{2,2} & 0 & S_{2,4} & 0 & \dots \\ S_{3,1} & 0 & S_{3,3} & 0 & S_{3,5} & \dots \\ 0 & S_{4,2} & 0 & S_{4,4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & S_{5,3} & 0 & S_{5,5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{22.3}$$

Операторы $S_{N,N+2}$ и $S_{N+2,N}$ действуют из h_{N+2}^T в h_N^T и соответственно из h_N^T в h_{N+2}^T, диагональный элемент $S_{N,N}$ является оператором в h_N^T. Алгебраическая структура этих операторов такова:

$$S_{N,N+2} = (\underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma_{1,3}^3))_{N,N+2} =$$

$$= \frac{1}{N} \underset{(-1)}{\mathrm{symm}} \sqrt{N(N+1)} \sum_{\sigma_{1,3}^3} (1 \otimes \dots \otimes \omega_{1,3}^3 \otimes \dots \otimes 1)_{N,N+2}, \tag{22.4}$$

$$S_{N+2,N} = (\underset{(1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{3,1}(N))_{N+2,N} =$$

$$= \frac{1}{N(N+1)(N+2)} \underset{(1)}{\mathrm{symm}} \sqrt{N(N+1)} \sum_{\sigma_{3,1}} (1 \otimes \dots \otimes \omega_{3,1} \otimes \dots \otimes 1)_{N+2,N}, \tag{22.5}$$

$$S_{N,N} = (3^{1/2} \operatorname*{symm}_{(0)} \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}))_{N,N} =$$

$$= 3^{1/2} \frac{1}{N(N-1)} \operatorname*{symm}_{(0)}(N-1) \sum_{\sigma^2_{2,2}} (1 \otimes \ldots \otimes \omega^2_{2,2} \otimes \ldots \otimes 1)_{N,N}. \quad (22.6)$$

В полной аналогии с предыдущим параграфом легко получить оценки на нормы операторов $S_{N,N+2}$, $S_{N+2,N}$, $S_{N,N}$:

$$\begin{aligned} \| S_{N,N+2} \| &\leqslant \sqrt{N(N+1)}\, C^3_{1,3}, \\ \| S_{N+2,N} \| &\leqslant \sqrt{N(N+1)}\, C^1_{3,1}, \\ \| S_{N,N} \| &\leqslant 3^{1/2}(N+1)\, C^2_{2,2}. \end{aligned} \quad (22.7)$$

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 22.1 [137]. *Оператор S является симметрическим оператором в h^T_s.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любых $f, g \in D(S) \subset h^T_s$ выполняется равенство

$$(Sf, g) = (f, Sg).$$

Благодаря оценкам (22.7) область определения $D(S)$ включает по крайней мере множество финитных последовательностей из h^T_s. Поэтому для доказательства симметричности, принимая во внимание структуру матрицы (22.3), достаточно показать, что

$$(S_{N,N+2} f_{N+2}, g_N) = (f_{N+2}, S_{N+2,N} g_N) \quad (22.8)$$

и

$$(S_{N,N} f_N, g_N) = (f_N, S_{N,N} g_N) \quad (22.9)$$

для любых $f_{N+2} \in h^T_{s,N+2}$, $g_N, f_N \in h^T_{s,N}$.

Докажем (22.8). Для этого выберем f_{N+2} и g_N в следующей форме:

$$\tilde{f}_{N+2;n_1,\ldots,n_k}(p_1, \ldots, p_{N+2}) = \sum_{\sigma\{j\}_1^{N+2}} \tilde{f}_{n_1,\ldots,n_k}(p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n_1}}; \ldots; \ldots, p_{j_{N+2}}), \quad (22.10)$$

$$\tilde{g}_{N;n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1, \ldots, p_N) =$$

$$= \sum_{\sigma\{j\}_1^N} \tilde{g}_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{j_N}), \quad (22.11)$$

где символ $\sigma\{j\}_1^M$ ($M = N$ или $M = N+2$) означает суммирование по различным разбиениям индексов $1, \ldots, M$ на k групп, причем само число переменных в группах фиксировано.

В данном случае функции $f_{n_1, \ldots, n_k}(\ldots)$ и $g_{n_1-2, n_2, \ldots, n_k}(\ldots)$ симметричны по переменным $p_1, \ldots, p_M$; сверх того, выберем такие разбиения, для которых

$$n_1, n_1 - 2 \neq n_2, \ldots, n_k. \tag{22.12}$$

Представим теперь операторы $S_{N+2,N}$ и $S_{N,N+2}$ в форме

$$S_{N,N+2} = \sum_{i=1}^{k} S^{n_i}_{N,N+2}, \quad S_{N+2,N} = \sum_{i=1}^{k} S^{n_i}_{N+2,N},$$

где операторы S^{n_i} действуют так, что переменные интегрирования этих операторов действуют на группы переменных $\{n_i\}$. Теперь для специально выбранных функций (22.10) и (22.11) удовлетворяются следующие равенства:

$$(S_{N,N+2} f_{N+2}, g_N) = (S^{n_1}_{N,N+2} f_{N+2}, g_N), \tag{22.13}$$

$$(f_{N+2}, S_{N+2,N} g_N) = (f_{N+2}, S^{n_1}_{N+2,N} g_N). \tag{22.14}$$

Равенства (22.13) являются следствием условий (22.12), благодаря которым $S^{n_i}_{N,N+2} f_{N+2} \perp g_N$ и $S^{n_i}_{N+2,N} \perp f_{N+2}$ для $i = 2, \ldots, k$. Следовательно, для доказательства леммы в этом специфическом случае достаточно показать, что

$$(S^{n_1}_{N,N+2} f_{N+2}, g_N) = (f_{N+2}, S^{n_1}_{N+2,N} g_N). \tag{22.14'}$$

Для доказательства этого факта мы представим операторы $S^{n_1}_{N,N+2}$ и $S^{n_1}_{N+2,N}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} S^{n_1}_{N,N+2} &= \sqrt{N(N+1)} \frac{1}{N} \sum_{i_1=1}^{N} S^{n_1; i_1}_{N,N+2}, \\ S^{n_1}_{N+2,N} &= \sqrt{N(N+1)} \frac{1}{N(N+1)(N+2)} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq i_3 = 1}^{N+2} S^{n_1; i_1, i_2, i_3}_{N+2,N}. \end{aligned} \tag{22.15}$$

Положим сначала $i_1 = 1$; тогда

$$\widetilde{(S^{n_1;1}_{N,N+2} f_{N+2})}(p_1, \ldots, p_N) = \sum_{\sigma\{j\}_2^N} \int dk_1 dk_2 dk_3 \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^2 \delta(p_1 - k_1 - k_2 - k_3)}{2\pi\sqrt{p_1^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{k_3^2 + \mu^2}} f_{n_1, \ldots, n_k}(k_1, k_2, k_3, p_{j_2}, \ldots$$
$$\ldots, p_{j_{n_1 - 2}}; \ldots; \ldots, p_{j_N}).$$

Используя (22.10), получим

$$\widetilde{(S^{n_1;1}_{N,N+2}f_{N+2}, g_N)} = \sum_{\sigma\{j\}_2^N} \int_{\Omega_{n_1-2}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1 dp_{j_2}\ldots dp_{j_N}\int dk_1 dk_2 \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{(p_1-k_1-k_2)^2+\mu^2}} \times$$
$$\times \overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(k_1, k_2, p_1-k_1-k_2, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N})} \times$$
$$\times g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N}) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_2^N} \int_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1 dp_{j_2}\ldots dp_{j_N}\ldots dp_{N+1}dp_{N+2} \times$$
$$\times \overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p_1, p_{N+1}, p_{N+2}; p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N})} \times$$
$$\times g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N}) \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+\mu^2}}. \quad (22.16)$$

Мы совершили в (22.16) следующую замену переменных: $p_1-k_1-k_2=p_1$, $k_1=p_{N+1}$, $k_2=p_{N+2}$. Произведя подобные преобразования для $i_1=2,\ldots,N$, мы получим (заменяя в каждом интеграле p_{i_1} на p_1 и суммируя все эти равенства)

$$(S^{n_1}_{N,N+2}f_{N+2}, g_N) = \sqrt{N(N+1)}\sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int dp_1 dp_{j_2}\ldots dp_{j_N}dp_{N+1}dp_{N+2} \times$$
$$\times \overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p_1, p_{N+1}, p_{N+2}, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N})} \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+\mu^2}} \times$$
$$\times g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N}). \quad (22.17)$$

Положим теперь в (22.15) $i_1=1$, $i_2=N+1$, $i_3=N+2$; тогда

$$\widetilde{(S^{n_1;1,N+1,N+2}_{N+2,N}\tilde g_N)}(p_1,\ldots,p_{n+2}) =$$
$$= \sum_{\sigma\{j\}_2^N}\int dk\,\frac{(2\pi)^2\delta(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}-k)}{2\pi\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots 2\pi\sqrt{k^2+\mu^2}} \times$$
$$\times \tilde g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(k, p_{j_2},\ldots, p_{j_{n_1-2}};\ldots;\ldots, p_{j_N}). \quad (22.18)$$

Вводя в (22.18) представление (22.11), получим

$$(f_{N+2}, S_{N+2,N}^{n_1;1,N+1,N+2} g_N) = \sum_{\sigma\{i\}_2^N} \int_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1 dp_{i_2} \ldots dp_{i_N} dp_{N+1} dp_{N+2} \times$$
$$\times \overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p_1, p_{N+1}, p_{N+2}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{i_N})} \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p^2+\mu^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+\mu^2}} \times$$
$$\times g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{i_N}).$$

Производя аналогичные вычисления для всех i_1, i_2, i_3, будем иметь

$$(f_{N+2}, S_{N+2,N}^{n_1} g_N) = \sqrt{N(N+1)} \sum_{\sigma\{i\}_2^N} \int_{\Omega_{n_1}\cap\ldots\cap\Omega_{n_k}} dp_1 dp_{i_2} \ldots$$
$$\ldots dp_{i_N} dp_{N+1} dp_{N+2} \overline{f_{n_1,\ldots,n_k}(p, p_{N+1}, p_{N+2}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{i_N})} \times$$
$$\times \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{p_1^2+\mu^2}\ldots\sqrt{(p_1+p_{N+1}+p_{N+2})^2+\mu^2}} \times$$
$$\times g_{n_1-2,n_2,\ldots,n_k}(p_1+p_{N+1}+p_{N+2}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{n_1-2}}; \ldots; \ldots, p_{i_N}). \tag{22.19}$$

Из (22.17) и (22.19) следует (22.14). Положим теперь $n_2 = n_1 - 2$ и $n_3, \ldots, n_k \neq n_1 - 2$ и n_1; тогда $(S_{N,N+2}^{n_1} f_{N+2}, g_N) = (f_{N+2}, (S_{N+2,N}^{n_1} + S_{N+2,N}^{n_2}) g_N)$, $(S_{N,N+2}^{n_2} f_{N+2}, g_N) = 0$ и, следовательно, равенство (22.8) также удовлетворяется. Для случая произвольных $n_1, \ldots, n_k$ мы производим аналогичные вычисления. Если функции $f_{N+2}(\ldots)$ и $g_N(\ldots)$ имеют различные слагаемые, принадлежащие различным разбиениям, то левая и правая части равенства (22.8) будут представлены определенным числом выражений, отвечающих конкретным $n_1, \ldots, n_k$. В этом случае симметричность, т. е. равенства типа (22.8), в целом явится следствием выполнения их на каждом конкретном разбиении. Равенство (22.9) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 22.2 [11, 12, 93]. *Для того чтобы симметрический оператор S, заданный якобиевой симметрической матрицей S' (22.3), имел нулевые индексы дефекта, необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} \frac{1}{\max(\|S_{N,N+2}\|, \|S_{N,N}\|, \|S_{N+2,N}\|)} = \infty \tag{22.20}$$

для любого N_0.

С помощью лемм 22.1 и 22.2 доказывается справедливость следующей теоремы.

Теорема 22.1. *Оператор S существенно самосопряжен в h^T.*

Доказательство. Легко проверить, что благодаря неравенствам (22.7) выполняется критерий (22.20) и, следовательно, симметрический оператор S имеет нулевые индексы дефекта, а следовательно, он существенно самосопряжен [9].

Рассмотрим кратко оператор P. Он имеет в h^T всюду плотную область определения $D(P)$, причем легко проверить выполнение оценки

$$\|Pf\| \leqslant \text{const} \cdot \|(\widehat{N}+1)f\|; \tag{22.21}$$

последняя легко следует из определений (22.2), (21.12) и (21.16) и оценки типа (21.29). Отметим попутно важное свойство оператора P. Если $f \in D(P)$ и все f_N $(N = 1, 2, \ldots)$ имеют только одну связную компоненту, то по определению $Pf = 0$. Более того, если все f_N имеют, скажем, только по L связных компонент, то $P^L f = 0$. Это есть следствие того, что оператор P уменьшает число связных компонент на 1.

Рассмотрим теперь оператор C. Справедлива следующая теорема.

Теорема 22.2 [137]. *Оператор C ограничен, и для любого $f \in h^T$ выполняется следующая оценка:*

$$\|Cf\| \leqslant \frac{8\sqrt{2}}{9} C_{4,0} \|\widehat{N}^{-1/2} f\|. \tag{22.22}$$

Доказательство. Оператор C действует на вектор $f \in h^T$ таким образом:

$$(Cf)_N(p_1, \ldots, p_N) = \frac{3^{-3/2}}{N\sqrt{(N-1)\ldots(N-4)}} \times$$
$$\times \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}^{N} \frac{(2\pi)^2 \delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_4})}{2\pi\sqrt{p_{i_1}^2 + \mu^2} \ldots 2\pi\sqrt{p_{i_4}^2 + \mu^2}} \times$$
$$\times \tilde{f}_{N-4}(p_1, \ldots, \widehat{p}_{i_1}, \ldots, \widehat{p}_{i_4}, \ldots, p_N).$$

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $\tilde{f}_{N-4}$ не имеет связных компонент с $n_i = 4$. Тогда легко видеть, что в сумме $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ общее число $\binom{N}{4}$ членов ортогональны друг другу, так как все они принадлежат различным разбиениям импульсов $p_1, \ldots, p_N$.

В этом случае

$$\|(\widetilde{Cf})_N\|^2 = \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \frac{27^{-1}(4!)^2}{N^2(N-1)\ldots(N-4)} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_4} \frac{(2\pi)^{-4}dp_{i_1}\ldots dp_{i_4}}{(p_{i_1}^2+\mu^2)\ldots(p_{i_4}^2+\mu^2)} \|\tilde{f}_{N-4}\|^2 = \frac{C_{4,0}^2 4!}{27N(N-4)} \|\tilde{f}_{N-4}\|^2,$$

откуда немедленно следует (22.22). Пусть теперь $\tilde{f}_{N-4}$ имеет r_{N-4} связных компонент с $n_i = 4$ $(i = 1, 2, \ldots, r_{N-4})$. Тогда (i_1, i_2, i_3, i_4)-й член суммы $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ не будет ортогонален к тем слагаемым, в которых переменные $p_{i_1}, \ldots, p_{i_4}$ поменялись местами с переменными из какой-либо компоненты $n_1, \ldots n_{r_{N-4}}$ или между собой. Таким образом, для каждого набора индексов в сумме $\sum\limits_{i_1 \neq \ldots \neq i_4}$ имеется $4!(1 + r_{N-4})$ неортогональных членов, так как они принадлежат одному и тому же разбиению. В сумме останется только $\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!(1+r_{N-4})}$ ортогональных слагаемых; поэтому

$$\|(\widetilde{Cf})_N\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{27^{-1}}{N^2(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4!(1+r_{N-4})} \times$$

$$\times (4!)^2(1+r_{N-4})^2 C_{4,0}^2 \|f_{N-4}\|^2 = \frac{27^{-1}4!(1+r_{N-4})}{N(N-4)} C_{4,0}^2 \|f_{N-4}\|^2.$$

Так как $1+r_{N-4} \leqslant N/4$, то неравенство (22.22) выполняется, что и завершает доказательство теоремы.

22.2. О решении уравнения резольвентного типа в h^1

Теперь приступим к рассмотрению вопроса о существовании решений уравнения (21.2). Заметим прежде всего, что формальные итерации уравнения (21.2) полностью восстанавливают ряд теории возмущений

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (4\sqrt{3}\,\lambda)^n A^n F^0 \tag{22.23}$$

для коэффициентных функций S-матрицы, который не содержит вкладов от вакуумных диаграмм. Однако такой ряд расходится как в конечном, так и в бесконечном объеме [64, 164] и не может быть рассмотрен в качестве решения уравнения (21.2). В § 19 было показано, что ряд (22.23) является асимптотическим в слабом смысле. Подчеркнем, что каждый член этого ряда является вместе с тем элементом пространства h^T. Все это позволяет надеяться, что весь ряд (22.23) окажется асимптотическим в смысле пространства h^T, т. е. в смысле сильной сходимости по норме. Сейчас мы докажем несколько строгих результатов, которые следуют из свойств операторов S, P и C.

Прежде всего заметим, что в силу существенной самосопряженности оператора S можно построить ограниченный оператор $(1+\lambda\bar{S})^{-1} = -\frac{1}{\lambda'} R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right)$ для констант λ' таких, что $\operatorname{Im}\lambda' \neq 0$; здесь $\lambda' = 4\sqrt{3}\,\lambda$ и $\bar{S}$ — замыкание оператора S. Рассмотрим сначала уравнение

$$F = \lambda' SF + F^0. \tag{22.24}$$

Справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 22.3. *Решение уравнения* (22.24) *существует для* $\operatorname{Im}\lambda' \neq 0$ *и задается выражением*

$$F = -(\lambda')^{-1} R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right) F^0. \tag{22.25}$$

Доказательство этой леммы следует из существования ограниченного оператора $(1+\lambda'\bar{S})^{-1}$.

Рассмотрим теперь более сложное уравнение

$$F = -\lambda'(S+P)F + F^0. \tag{22.26}$$

Лемма 22.4. *Решение уравнения* (22.26) *существует при* $\operatorname{Im}\lambda' \neq 0$ *и задается выражением* (22.25).

Доказательство этого факта следует из того, что оператор S и соответственно оператор $R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right)$ не изменяют числа связных компонент. В этом случае последовательность $R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right)F^0$ имеет только одну связную компоненту в каждой строчке $N = 1, 2, \ldots$ и, следовательно, по определению оператора P

$$PR_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right)F^0 = 0. \tag{22.27}$$

Поэтому благодаря (22.27) выражение (22.25) удовлетворяет уравнению (22.26). Лемма доказана

И, наконец, обратимся к еще одному возможному уравнению, аппроксимирующему основное уравнение (21.2).

Теорема 22.3. *Решение уравнения*

$$F = \lambda' (S + C) + F^0 \tag{22.28}$$

задается рядом

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \left(- R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right) C \right)^n f^0, \tag{22.29}$$

где

$$f^0 = -\frac{1}{\lambda'} R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right) F^0,$$

причем радиус сходимости ряда определяется из соотношения

$$\|C\| \frac{|\lambda'|^2}{|\operatorname{Im} \lambda'|} < 1. \tag{22.30}$$

Доказательство теоремы следует тривиально из разложения Неймана для резольвенты оператора $(S + C)$. Оценка (21.30) является следствием того, что

$$\left\| R_s\left(\frac{1}{\lambda'}\right) \right\| \leqslant \frac{|\lambda'|^2}{|\operatorname{Im} \lambda'|}.$$

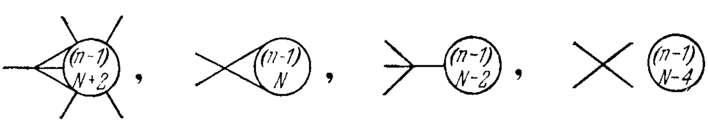
Теорема доказана.

Интересно отметить, что уравнение (22.28) аппроксимирует основное уравнение (21.2) не только в аналитическом, но и в более глубоком, диаграммном смысле. А именно, можно показать, что ряд теории возмущений (22.29) содержит все возможные диаграммы, только с несколько меньшей кратностью.

Действительно, рассмотрим прежде всего оператор A. В терминах диаграмм он присоединяет вершину

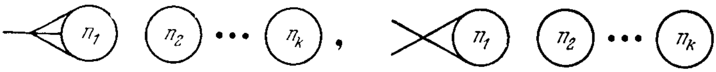
$$(\,\bullet \equiv -\lambda'\,) \tag{22.31}$$

к диаграммам $(n - 1)$-го порядка четырьмя различными способами:



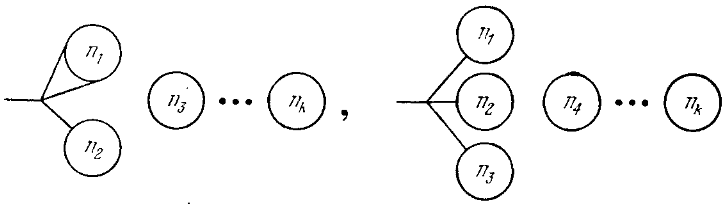
а) , б) , в) , г) (22.32)

и образует диаграммы порядка n. В случаях а) и б) эта вершина присоединяется либо к одной связной компоненте (эти операции мы отнесли ранее к оператору S)

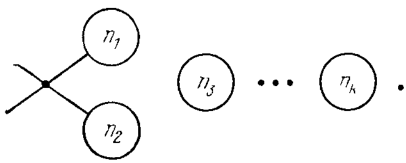


а$_1$) б$_1$) (22.33)

либо к различным связным компонентам (это уже оператор P)

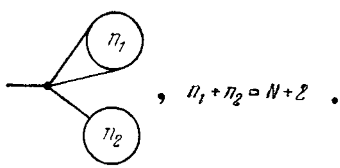


а$_2$) а$_3$) (22.34)



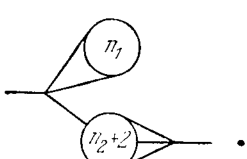
б$_2$) (22.35)

Покажем теперь, что любая диаграмма n-го порядка может быть получена из диаграмм ($n-1$)-го порядка, исключая операции а$_2$), а$_3$) и б$_2$). Для примера рассмотрим простейший случай, когда операция а$_2$) связывает только два блока (две компоненты):



$$, \quad n_1 + n_2 = N + 2 \quad . \tag{22.36}$$

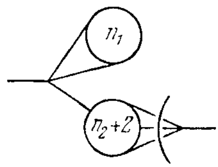
Так как $n_2 \geqslant 2$ и $\{n_2\}$ является связной компонентой, то одна из его внешних линий может являться результатом (или «следом») действия операций а$_1$) или б$_1$); например,



(22.37)

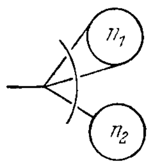
Таким образом, сравнивая (22.36) и (22.37), мы приходим к выводу, что одна и та же диаграмма может быть образована двумя различными способами:

1) действием оператора S



, (22.38)

2) действием оператора P



. (22.39)

Следовательно, некоторая итерация уравнения (22.28) может содержать вклады от всех топологически неэквивалентных диаграмм S-матрицы, однако их кратности, естественно, будут меньше, чем при итерации точного уравнения (21.2).

§ 23. ИССЛЕДОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ N ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ h_N^T

В настоящем параграфе мы рассмотрим квантовомеханическую систему N частиц. С методологической точки зрения ее описание значительно проще и приводит к уравнениям, которые служат поучительным примером использования пространства трансляционно-инвариантных функций.

23.1. Постановка задачи

В квантовой теории поля принято рассматривать гамильтонианы как операторы, действующие в пространстве $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_b$. Идея такого рассмотрения восходит к работам В. А. Фока [171 172], который показал, что совокупность гамильтонианов H_N, описывающих потенциальное квантовомеханическое взаимодействие неопределенного числа частиц,

$$H_N = H_{0,N} + V_N = -\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i - \lambda \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} v(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|), \quad (23.1)$$

можно редуцировать к единственному операторному выражению

$$H = -\frac{1}{2\mu}\int \overset{*}{\psi}(x)\,\Delta\psi(x)\,dx - \frac{\lambda}{2}\int \overset{*}{\psi}(x)\,\overset{*}{\psi}(y)\,\mathfrak{v}(|x-y|)\times \\ \times\,\psi(x)\psi(y)\,dx\,dy, \qquad (23.2)$$

причем предполагается, что операторы рождения $\overset{*}{\psi}(x)$ и уничтожения $\psi(x)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\psi(x),\ \overset{*}{\psi}(x)] = \delta(x - x').$$

Благодаря этому операторное выражение (23.2) действует на вектор

$$f = (f_0, f_1(x_1), \ldots, f_N(x_1, \ldots, x_N), \ldots) = \\ = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N!}} \int dx_1 \ldots dx_N f_N(x_1, \ldots, x_N)\,\overset{*}{\psi}(x_1)\ldots\overset{*}{\psi}(x_N)\,\Omega_0, \qquad (23.3)$$

$$\Omega_0 = (1, 0, \ldots),$$

следующим образом (функции f_N предполагаются симметричными) *):

$$(Hf)_N(x_1, \ldots, x_N) = \\ = -\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i - \lambda \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathfrak{v}(|x_i - x_j|)\,f_N(x_1, \ldots, x_N). \qquad (23.4)$$

Таким образом, гамильтониан H (23.2) описывает систему бозонов, взаимодействующих посредством парного потенциала $\mathfrak{v}(|x-y|)$. При определенных ограничениях на этот потенциал гамильтониан (23.2) определен на всюду плотном в $\mathcal{F}$ множестве векторов и является существенно самосопряженным оператором.

Отметим одно важное обстоятельство. Выражение (23.2), рассматриваемое как одно целое, не может быть оператором в прямом смысле, так как бессмысленны с математической точки зрения величины $\overset{*}{\psi}$ и ψ. Они становятся операторами лишь после усреднения с гладкими функциями f:

$$\psi(f) = \int \psi(x) f(x)\,dx, \quad \overset{*}{\psi}(f) = \int \overset{*}{\psi}(x) f(x)\,dx.$$

Поэтому все представление (23.2) следует рассматривать лишь как весьма удобное средство для различных алгебраических построений, а под гамильтонианом H следует понимать оператор, который в каж-

*) В случае фермионов соответствующие функции антисимметричны.

дом N-частичном подпространстве представляется формулой (23.1) независимо от топологии, которой снабжено пространство функций $f_N(x_1, \ldots, x_N)$.

Специфическая особенность гамильтонианов H_N и H проявляется при рассмотрении трансляционно-инвариантных систем. Общеизвестно, что центр масс системы N частиц, описываемой уравнением

$$H_N f_N = E f_N,$$

движется свободно; соответствующую ему волновую функцию можно отделить и рассматривать оставшуюся трансляционно-инвариантную часть $f'_N(x_1 - x_N, \ldots, x_{N-1} - x_N)$ как волновую функцию относительного движения. Поэтому гамильтонианы H_N и H следует рассматривать в этом случае в пространствах функций, учитывающих такую трансляционно-инвариантную структуру. Более того, исследование модельных гамильтонианов типа Бардина — Купера — Шриффера (БКШ) требует дальнейшей детализации трансляционно-инвариантной структуры. Оказывается (см., например, [125]), что взаимодействие типа БКШ вообще аннулируется в обычном пространстве Фока $\mathcal{F}$, а отлично от нуля и приводит к физически фундаментальному эффекту образования связных пар частиц лишь в обобщенном пространстве трансляционно-инвариантных функций.

Таким образом, при исследовании систем нерелятивистской квантовой теории поля с трансляционно-инвариантным взаимодействием необходимо привлекать аппарат пространств трансляционно-инвариантных функций.

23.2. Система бозонов с потенциальным взаимодействием в пространстве h^T

Рассмотрим уравнение Шредингера в h^T:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad \Psi|_{t=0} = \Psi^0 \in h^T, \tag{23.5}$$

где оператор H определяется согласно (23.2). Подчеркнем, что традиционные определения операторов рождения и уничтожения в алгебраическом смысле сохраняются. Выберем $\Psi^0_N \in h^T_N$; тогда автоматически (благодаря «диагональности» H по N) уравнение (23.5) можно переписать в каждом из подпространств h^T_N:

$$i\frac{\partial\Psi_N}{\partial t} = H_N\Psi_N = (H_{0,N} + V_N)\,\Psi_N, \tag{23.6}$$

$$\Psi_N|_{t=0} = \Psi^0_N \in h^T_N.$$

К решению задачи Коши этого уравнения мы и приступим в настоящем параграфе.

Рассмотрим оператор H_0 в пространстве h_{σ_1} (напомним, что σ_1 — тождественное разбиение множества $\{N\}$). Для этого дифференциальный оператор $\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_{x_i}}{2}$ преобразуем к разностным переменным $\xi_1 = x_1 - x_N, \ldots, \xi_{N-1} = x_{N-1} - x_N$; в результате этого мы получим

$$H_{0,N} \to H_{0,\sigma_1} = -\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{N-1} \Delta_{\xi_i} - \frac{1}{2\mu}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\xi_i}\right)^2. \tag{23.7}$$

Как следствие общей теории (см., например, [91]), получаем, что оператор H_{0,σ_1} является существенно самосопряженным на классе бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем $C_0^\infty(R^{s(N-1)}) \in h^T_{N,\sigma_1} \equiv h^T_{\sigma_1}$.

Пусть, далее, разбиение σ_k произвольно; так как

$$h^T_\sigma = \bigotimes_{i=1}^{k} h^T_{n_i}, \tag{23.8}$$

то для оператора H_0 получим следующее представление:

$$H_0 \to H_{0,\sigma_k} = \sum_{\{n\} \in \sigma_k\{N\}} 1 \otimes \ldots \otimes H_0\{n\} \otimes \ldots \otimes 1. \tag{23.9}$$

Символом $H_0\{n\}$ мы обозначаем действие оператора H_0 по переменным связной компоненты $\{n\} \in \sigma_k\{N\}$, т. е. в полном соответствии с (23.7):

$$H_0\{n\} = -\frac{1}{2\mu}\sum_{\xi_i \in \{n\}} \Delta_{\xi_i} - \frac{1}{2\mu}\left(\sum_{\xi_i \in \{n\}} \nabla_{\xi_i}\right)^2 \tag{23.10}$$

(обозначение $\xi_i \in \{n\}$ подразумевает, что разностная переменная образована из переменных, входящих в множество ξ_i).

Общая теория [11, 140] показывает, что оператор H_{0,σ_k} существенно самосопряжен на области $D(H_{0,\sigma_k}) = \bigotimes_{i=1}^{k} D(H_0\{n\})$, причем, как и в случае оператора H_{0,σ_1}, область определения $D(H_0\{n\}) = C_0^\infty(R^{s(n-1)}) \cap h^T$. И, наконец, во всем пространстве h^T_N оператор H_0 распадается в ортогональную сумму

$$H_0 \to H_0^T = \bigoplus_{\sigma} H_{0,\sigma} \tag{23.11}$$

и, очевидно, $D(H_0^T) = \bigoplus_{\sigma} D(H_{0,\sigma})$.

Рассмотрим теперь оператор V в h_σ^T. Исходя из непосредственного представления h_σ^T как тензорного произведения (23.8), легко проверить, что

$$V \to V_\sigma = V_{0,\sigma} + V_{1,\sigma},$$

где

$$V_{0,\sigma} = \sum_{\{n\}\in\sigma\{N\}} 1 \otimes \ldots \otimes V_{\{n\}} \otimes \ldots \otimes 1 \tag{23.12}$$

и

$$V_{1,\sigma} = \sum_{\{n\},\{m\}\in\sigma\{N\}} 1 \otimes \ldots \otimes V_{\{n\},\{m\}} \otimes \ldots \otimes. \tag{23.13}$$

Оператор $V_{0,\sigma}$ представляет ту часть оператора умножения на функцию $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N} \mathfrak{v}(x_i - x_j)$, в которой суммирование распространяется по переменным каждой из связных компонент в отдельности, т. е.

$$V_{\{n\}} = \sum_{(x_i,x_j)\in\{n\}} \mathfrak{v}(|x_i - x_j|). \tag{23.14}$$

Наоборот, в операторе $V_{1,\sigma}$ выделены такие члены суммы, в которых в каждом слагаемом присутствуют переменные из двух различных компонент:

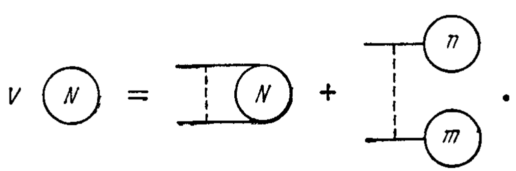
$$V_{\{n\},\{m\}} = \sum_{\substack{x_i\in\{n\}\\ x_j\in\{m\}}} \mathfrak{v}(|x_i - x_j|); \tag{23.15}$$

при этом суммирование в (23.15) распространяется по всем возможным парам подмножеств из разбиения $\sigma\{N\}$. Отметим, что часть $V_{1,\sigma}$ отделяется лишь в том случае, если σ — не тождественное разбиение; если же $\sigma = \sigma_1 = 1$, то мы полагаем $V_{1,\sigma_1} \equiv 0$.

Распространяя действие оператора V на все пространство h^T, получаем представление

$$V \to V^T = \bigoplus_\sigma V_{0,\sigma} + \sum_\sigma V_{1,\sigma} = V_0^T + V_1^T.$$

Легко понять, что с диаграммной точки зрения такое разделение эквивалентно следующему:



(23.16)

Теперь легко построить в пространстве h^T действие всего оператора H_0+V; естественно при этом объединить дифференциальные операторы $H_{0,\sigma}$ и операторы умножения $V_{0,\sigma}$. Итак,

$$H = H_0^T + V^T = H_0^T + V_0^T + V_1^T = H_1^T + V_1^T, \tag{23.17}$$

причем, как следует из (23.9) и (23.12),

$$H_1^T = \sum_{\{n\}\in\sigma\{N\}} 1 \otimes \ldots \otimes H_1\{n\} \otimes \ldots \otimes 1, \tag{23.18}$$

где

$$H_1\{n\} = H_0\{n\} + V_{\{n\}}.$$

Таким образом, формула (23.17) описывает выделение из оператора H симметрической «диагональной» части H_1^T. Как и оператор H_0^T, оператор H_1^T существенно самосопряжен в h^T на области $D(H_1^T) = \underset{\sigma}{\oplus}\big(\underset{\{n\}\in\sigma}{\otimes} D(H_1\{n\})\big)$. Заметим, что вопрос о существенной самосопряженности операторов $H_1\{n\}$ легко следует из критерия Като—Нельсона [90, 111]. А именно, следует потребовать, чтобы $\mathfrak{v}(|\boldsymbol{x}|)$ равнялся сумме $\mathfrak{v}^p(|\boldsymbol{x}|)+\mathfrak{v}^\infty(|\boldsymbol{x}|)$, где $\mathfrak{v}^p(|\boldsymbol{x}|)\in\mathcal{L}_p(R^s)$ и $\mathfrak{v}^\infty(|\boldsymbol{x}|)\in\mathcal{L}^\infty(R^s)$, $p\geqslant 2$; в этом случае $V_{\{n\}}=V^p_{\{n\}}+V^\infty_{\{n\}}$, $V^p_{\{n\}}\in \mathcal{L}_p(R^{s(n-1)})$, $V^\infty_{\{n\}}\in\mathcal{L}_\infty(R^{s(n-1)})$. Чтобы не отягощать себя выбором сложных условий на потенциал $\mathfrak{v}(|\boldsymbol{x}|)$, в качестве минимального условия выберем его принадлежность к $\mathcal{L}_\infty(R^{s(n-1)})$; в этом случае общее условие самосопряженности заведомо выполнится. Итак справедлива следующая теорема.

Теорема 23.1. *Пусть* $\mathfrak{v}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{L}_\infty(R^{s(n-1)})$. *Тогда оператор существенно самосопряжен в* h_1^T *на области* $D\ (H_0^T) = \underset{\sigma}{\oplus}\big(\underset{\{n\}\in\sigma\{N\}}{\otimes} D(H_0\{n\})\big)$.

Рассмотрим теперь более подробно оператор V_1.

Лемма 23.1 [125]. *Оператор* V_1^T *определен и ограничен в* h^T *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{v}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{L}_2(R^{s(n-1)})$.

Доказательство. Рассмотрим для простоты разбиение $\sigma_2\{N\}=(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n_1})(\boldsymbol{x}_{n_1+1},\ldots,\boldsymbol{x}_N)$. Тогда V_{1,σ_2} (сужение оператора V_1^T) действует следующим образом:

$$(V_{1,\sigma_2}f_{\sigma_2})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N) =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_1\\ n_1+1\leqslant j\leqslant N}} \mathfrak{v}(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|)\, f_{\sigma_2}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{n_1};\ \boldsymbol{x}_{n_1+1},\ldots,\boldsymbol{x}_N). \tag{23.19}$$

Рассмотрим один из членов суммы (23.19) и вычислим его норму с учетом того, что $V_{1,\sigma_2}\colon h^T_{\sigma_2} \to h^T_{\sigma_1}$:

$$\|V^{i,j}_{1,\sigma_2} f_{\sigma_2}\| = \lim_{V\to R} s(n-1)\frac{1}{|V|}\int\limits_{\otimes V^N} dx_1 \ldots dx_N\,|\mathfrak{v}(|x_i - x_j|) f_{\sigma_2}(x_1, \ldots$$

$$\ldots, x_{n_1};\ x_{n_1+1}, \ldots, x_N)|^2 = \int d\xi\,|\mathfrak{v}(\xi)|^2 \int d\xi_1 \ldots d\xi_{N-2}\,|f_{\sigma_2}(\xi_1, \ldots$$

$$\ldots, \xi_{n_1-1};\ \xi_{n_2}, \ldots, \xi_{N-2})|^2 = \|\mathfrak{v}\|_{\mathcal{L}_2(R^{s(n-1)})} \|f_{\sigma_2}\| = C\,\|f_{\sigma_2}\|. \quad (23.20)$$

Формула (23.20) является следствием того факта, что разностная переменная $\xi = x_i - x_j$ не выражается через разностные переменные связных компонент $\{n_1\}$ и $\{N\}\setminus\{n_1\}$. Далее, та же формула показывает, что оператор V_{1,σ_2} является суммой ограниченных операторов, поэтому он определен и ограничен только в том случае, если константа C конечна. Несомненно, то же самое касается и всего оператора $V_1^T = \sum\limits_{\sigma} V_{1,\sigma}$. Лемма доказана.

Приведенная лемма, впрочем, далеко не полно характеризует свойства оператора V_1^T. Оказывается, что оператор V_1^T является нильпотентным в очень широком смысле.

Лемма 23.2. *Пусть ограниченные операторы A_i диагональны по σ, т. е. $A_i\colon h^T_\sigma \to h^T_\sigma$; тогда*

$$\prod_{i=1}^{n} (A_i V_1^T) = 0, \qquad n \geqslant N.$$

Доказательство. Представим оператор V_1^T в следующем виде:

$$V_1^T = \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{\sigma_k} V_{1,\sigma_k}\Big) \equiv \sum_{k=1}^{N} V_{1,k}. \quad (23.21)$$

Согласно определению (23.13) очевидно, что $V_{1,k}\colon h^T_k \to h^T_{k-1}$ (напомним, что $h^T_k = \bigoplus\limits_{\sigma_k} h_{\sigma_k}$, $k = \mathrm{const}$), причем $V_{1,1} \equiv 0$. Положим ради простоты $A_i = 1$ и рассмотрим степень $(V_1^T)^n$. Нетрудно понять, что $(V_1^T)^n$ представляется в виде суммы слагаемых вида

$$V_{1,k_1} \ldots V_{1,k_n},\ k_1 < \ldots < k_n;$$

вторые степени операторов V_{1,k_i} отсутствуют по самому определению (23.13). Положим $n = N$; в этом случае возможно единственное слагаемое $V_{1,1} \ldots V_{1,N}$, но $V_{1,1} = V_{1,\sigma_1} \equiv 0$ и, следовательно, равно нулю и само слагаемое. Нетрудно видеть, что подобные рассуждения легко переносятся на случай, указанный в формулировке леммы. Лемма доказана.

Теперь обратимся к обсуждению эволюционного уравнения (23.5). В этом случае удобно ввести «картину взаимодействия кластеров» [190, 191]. Сделаем это стандартным образом; представим вектор Ψ в виде

$$\Psi = \exp(itH_1^T)\,\Psi',$$

причем, очевидно,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = V_1^T(t)\,\Psi', \qquad \Psi'|_{t=0} = \Psi^0 \in h_N^T,$$

где

$$V_1^T(t) = \exp(itH_1^T)\,V_1^T\,\exp(itH_1^T).$$

Заметим, что в силу представления (23.18) формальное выражение $\exp(itH_1)$ приобретает строгий математический смысл:

$$\exp(itH_1) = \exp\left(it \bigoplus_{\sigma\{N\}}\left(\sum_{\{n\}\in\sigma\{N\}} 1\otimes\ldots H_1\{n\}\ldots\otimes 1\right)\right) =$$

$$= \bigoplus_{\sigma\{N\}}\left(\bigotimes_{\{n\}\in\sigma\{N\}} \exp[itH_1\{n\}]\right),$$

причем в силу самосопряженности операторов $H_1\{n\}$ оператор $\exp(itH_1^T)$ унитарен. Более того, такое представление показывает, что оператор $\exp(itH_1^T)$ сохраняет структуру кластеров и, следовательно, удовлетворяет условиям предыдущей леммы. Теперь очевидно, что итерации уравнения (23.6)

$$\Psi_N(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^t\ldots\int_0^{t_{n-1}} dt_1\ldots dt_n V_1^T(t_1)\ldots V_1^T(t_n)\right)\Psi_N^0$$

примут следующий вид:

$$\Psi_N(t) = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{(-i)^n}{n!}\int_0^t\ldots\int_0^{t_{n-1}} dt_1\ldots dt_n \exp(it_1H_1^T)\,V_1^T\,\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-it_1H_1^T)\ldots\exp(it_nH_1^T)\,V_1^T\exp(-it_nH_1^T)\,\Psi_{N,k}^0\right), \qquad (23.22)$$

так как $\Psi_N^0 = \bigoplus_k \Psi_{N,k}^0$, $\Psi_{N,k}^0 \in h_{N,k}^T$. Выражение (23.22) имеет смысл, так как операторы $\exp(itH_1)$ унитарны, а V_1 ограниченно действует из $h_{N,k}^T$ в $h_{N,k-1}^T$.

Обращаясь к исходному уравнению (23.5), мы можем заключить, что справедлива

Теорема 23.2. *Решение уравнения*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi, \quad \Psi^0 \in D_0 \subset h^T$$

существует, единственно и определяется группой неунитарных операторов $\exp(itH)$; D_0 *—множество финитных последовательностей из* h^T.

§ 24. ГАМИЛЬТОНИАН ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОДЕЛИ $\lambda(:\varphi^4:)_2$ В ПРОСТРАНСТВЕ h^T

Рассмотрим теперь гамильтониан (2.9) в пространстве трансляционно-инвариантных функций. В предыдущих главах вместо оператора H_I рассматривался оператор $H_I(g) = \int :\varphi_0^4(0, x): g(x)\,dx$, $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, $\operatorname{supp} g(x) \subset V$. Оператор $H_I(g)$ является существенно самосопряженным в обычном пространстве Фока. В настоящем параграфе мы попытаемся определить выражение (2.9), не вводя дополнительных обрезаний. Перепишем для этого оператор H_I в виде

$$H_I = \int dk_1 \ldots dk_4 \frac{2\pi\delta(k_1 + \ldots + k_4)}{\sqrt{2\pi\omega(k_1)} \ldots \sqrt{2\pi\omega(k_4)}} :a(k_1) \ldots a(k_4): =$$

$$= \sum_{s=-2}^{2} \binom{4}{2+s} W_{2+s,2-s}, \quad k \in R^1, \quad \omega(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2}. \tag{24.1}$$

Здесь $W_{2+s,2-s}$ есть моном по операторам рождения $a^+(k)$ и уничтожения $a^-(k)$ свободного поля $a(k) = a^+(k) + a^-(-k)$, действующий на столбец функций из h^T по следующему правилу:

$$(W_{2+s,2-s}f)_N(p_1, \ldots, p_N) = \frac{\sqrt{(N-2s)!}}{\sqrt{N!}} \times$$

$$\times \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_{2+s}} \prod_{l=1}^{2-s} \int dk_l \frac{2\pi\delta(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{2+s}} - k_1 - \ldots - k_{2-s})}{\sqrt{2\pi}\omega(p_{i_1})^{1/2} \ldots \sqrt{2\pi}\omega(k_{2-s})^{1/2}} \times$$

$$\times f_{N-2s}(k_1, \ldots, k_{2-s}, p_1, \ldots, \hat{p}_{i_1}, \ldots, \hat{p}_{i_{2+s}}, \ldots, p_N). \tag{24.2}$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что функции $W_{2+s,2-s}f \in h^T$, если f принадлежит некоторому множеству из h^T. Для мономов с $s \neq -2$ этот факт был доказан в § 21 для производящего оператора уравнений для коэффициентных функций матрицы рассеяния. Для гамильтониана (24.1) отличие состоит лишь в размерности импульсных переменных. Поэтому мы не будем здесь приводить подробных оценок, отсылая читателя к § 21, а лишь опишем алгебраическую структуру операторов $W_{2+s,2-s}$. Случай $s = -2$ будет рассмотрен подробно.

Операторы $W_{2+s,2-s}$ представим в виде суммы:

$$W_{2+s,2-s} = \sum_N W_{2+s,2-s}(N), \tag{24.3}$$

где $W_{2+s,2-s}(N) = W_{2+s,2-s} \upharpoonright h^T_{N-2s}$, т. е. $W_{2+s,2-s}(N) f_{N-2s} = (W_{2+s,2-s}f)_N$, а $(W_{2+s,2-s}f)_N$ определяется согласно (24.2).

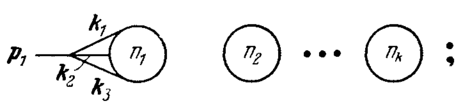
Обозначим теперь через $\mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N)$ оператор с фиксированными индексами $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \ldots, i_{2+s} = 2+s$ в сумме (24.3) и запишем оператор $W_{2+s,2-s}(N)$ в виде

$$W_{2+s,2-s}(N) = \underset{(s)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2+s,2-s}(N). \tag{24.4}$$

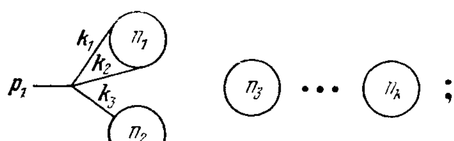
В случае $s = -2$ $W_{0,4}(N) = \mathfrak{w}_{0,4}(N)$.

Действие операторов $\mathfrak{w}_{2+s,2-s}$ зависит от того, в каких разбиениях функции f находятся переменные интегрирования $k_1, \ldots, k_{2-s}$.

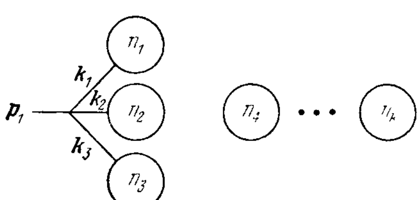
Для случая $s = -1$ возможны три случая (подробнее см. [129]), которые мы изобразим графически:



(24.5а)



(24.5б)



(24.5в)

Здесь n_1, n_2, ..., n_k обозначает $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$-ю компоненту функции $f \in h^T$, внутренней линии $\overset{k}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet}$ соответствует множитель $[2\pi\omega(\boldsymbol{k})]^{1/2}$, а вершине—фактор $2\pi\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)$, отвечающий за закон сохранения импульса (по внутренним импульсам производится интегрирование). В соответствии с этим оператор $\mathfrak{w}_{1,3}(N)$ разбивается на три слагаемых:

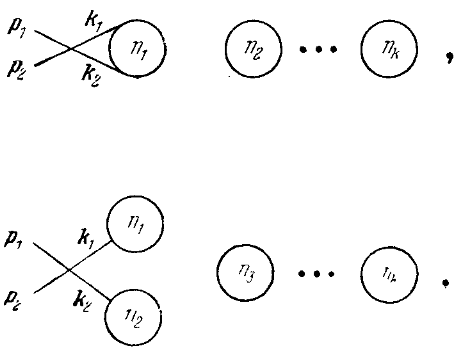
$$\mathfrak{w}_{1,3}(N)=\mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma_{1,3}^{3})+\mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma_{1,3}^{2,1})+\mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma_{1,3}^{1,1,1}), \tag{24.6}$$

где

$$\mathfrak{w}_{1,3}(N,\sigma_{1,3}^{\alpha})=\sqrt{(N+1)(N+2)}\sum_{\sigma_{1,3}^{\alpha}}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{1,3}^{\alpha}\otimes\ldots\otimes 1), \tag{24.7}$$

$\alpha=3;\ 2,1;\ 1,1,1$, а $\omega_{1,3}^{\alpha}$ — интегральные операторы, действие которых изображено (см. (24.5)) для $\alpha=3$ — случай а), для $\alpha=2,1$ — случай б) и для $\alpha=1,1,1$ — случай в).

Совершенно аналогично для $s=0$ имеем два случая:



(24.8)

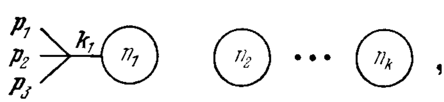
т. е.

$$\mathfrak{w}_{2,2}(N)=\mathfrak{w}_{2,2}(N,\sigma_{2,2}^{2})+\mathfrak{w}_{2,2}(N,\sigma_{2,2}^{1,1}), \tag{24.9}$$

где

$$\mathfrak{w}_{2,2}(N,\sigma_{2,2}^{\alpha})=\sum_{\sigma_{2,2}^{\alpha}}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{2,2}^{\alpha}\otimes\ldots\otimes 1),\qquad \alpha=2;\ 1,1;$$

для $s=1$

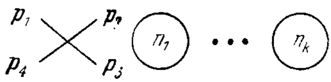


(24.10)

т. е.

$$\mathfrak{w}_{3,1}(N)=\frac{1}{\sqrt{N(N-1)}}\sum_{\sigma}(1\otimes\ldots\otimes\omega_{3,1}\otimes\ldots\otimes 1), \tag{24.11}$$

для $s=2$



, (24.12)

т. е.

$$\mathfrak{w}_{4,0}(N)=\frac{1}{\sqrt{N(N-1)(N-2)(N-3)}}\,\omega_{4,0}. \tag{24.13}$$

Операторы $\omega^{\alpha_s}_{2+s,2-s}$, $s=-1, 0, 1, 2$, являются ограниченными, и их нормы удовлетворяют оценкам

$$\|\omega^{\alpha_s}_{2+s,2-s}\|\leqslant C^{\alpha_s}_{2+s,2-s}, \tag{24.14}$$

где

$$C^3_{1,3}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mu}}\left(\int\frac{dk_1dk_2}{\omega(k_1)\,\omega(k_2)\,\omega(k_1+k_2)}\right)^{1/2},$$

$$C^{1,2}_{1,3}=C^{1,1}_{2,2}=\frac{1}{2\pi\mu}\left(\int\frac{dk}{\omega(k)^2}\right)^{1/2},$$

$$C^{1,1,1}_{1,3}=C_{3,1}=\frac{1}{2\pi\mu^2},$$

$$C^2_{2,2}=\frac{1}{2\pi}\left(\int\frac{dk_1dk_2}{\omega(k_1)^2\,\omega(k_2)^2}\right)^{1/2}.$$

Эти оценки могут быть получены точно так же, как и в § 21.

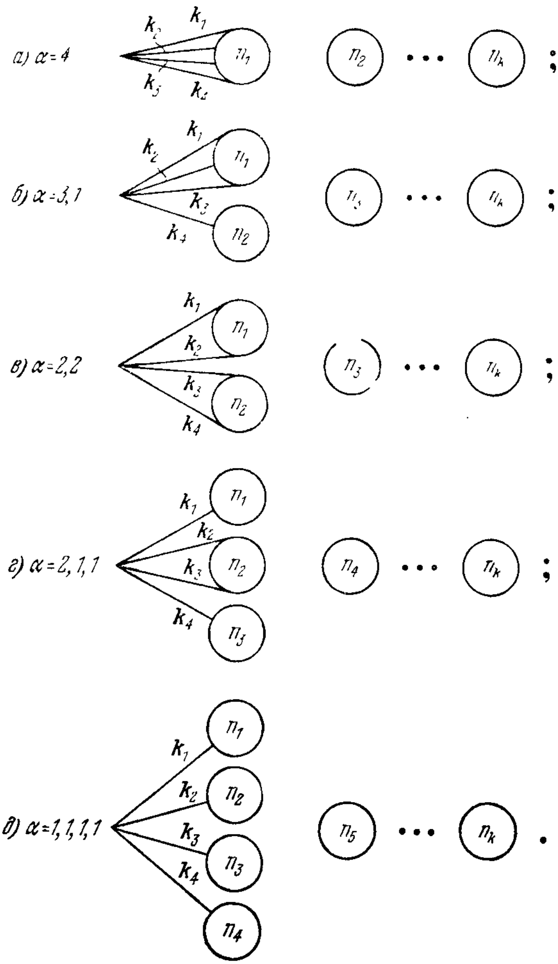
Рассмотрим теперь случай $s=-2$. В этом случае оператор $W_{0,4}(N)$ состоит из пяти слагаемых:

$$W_{0,4}(N)=\sum_{\alpha}\mathfrak{w}_{0,4}(N,\sigma^{\alpha}_{0,4}),\qquad \alpha=4;\ 3,1;\ 2,2;\ 2,1,1;\ 1,1,1,1, \tag{24.15}$$

где

$$\mathfrak{w}_{0,4}(N,\sigma^{\alpha}_{0,4})=\sqrt{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\ \times$$
$$\times\sum_{\sigma^{\alpha}_{0,4}}(1\otimes\ldots\otimes\omega^{\alpha}_{0,4}\otimes\ldots\otimes 1),$$

а действие интегральных операторов $\omega^4_{0,4}$ графически изображается следующим образом:



$$(24.16)$$

При определении оператора $W_{0,4}$ в h^T мы наталкиваемся на существенные трудности, связанные с появлением объемных расходимостей (вакуумные вклады). Действительно, например, в случае а) при $n_1 = 4$ имеем

$$(\omega^4_{0,4}\bar{f}_4) = \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \frac{2\pi\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)}{[2\pi\omega(k_1)\ldots 2\pi\omega(k_4)]^{1/2}} \bar{f}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) =$$

$$= \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \frac{2\pi\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)}{[2\pi\omega(k_1)\ldots 2\pi\omega(k_4)]^{1/2}} \times$$

$$\times (2\pi)^{1/2}\delta(k_1+k_2+k_3+k_4) f_4(k_1, k_2, k_3, k_4) =$$

$$= (2\pi)^{1/2}\delta(0) \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \frac{2\pi\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)}{[2\pi\omega(k_1)\ldots 2\pi\omega(k_4)]^{1/2}} \times$$

$$\times f_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \infty. \qquad (24.17)$$

Аналогичный результат будем иметь и в случае в) при $n_1 = n_2 = 2$, и в случае б) при $n_1 = 3$, и в случае г) при $n_1 = 2$. Следовательно, оператор $W_{0,4}$ требует дополнительной регуляризации. Выполним эту регуляризацию следующим образом. Обозначим через π_N оператор ортогонального проектирования функций из h_N^T на множество функций $f_N \equiv f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, в которых переменные $k_1, \ldots, k_4$ принадлежат либо одной из компонент с $n_i = 4$, $n_i = 3$, либо каким-либо двум компонентам с $n_i = n_k = 2$. Если через π обозначить оператор

$$\pi = \bigoplus_{N=4}^{\infty} \pi_N, \qquad (24.18)$$

то оператор $W_{0,4}(1-\pi)$ на множестве функций из $\{\pi h^T\}$ будет обращаться в нуль и ситуации (24.17) не возникает. Будем говорить, что функции из $\{\pi h^T\}$ отвечает разбиение σ^π. Теперь мы можем доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 24.1. *Оператор* $W_{0,4}(1-\pi)$ *плотно задан в* h^T

Чтобы показать это, рассмотрим операторы $\omega_{0,4}^{\alpha}$ *для двух типичных случаев* $\omega_{0,4}^{4}$ *и* $\omega_{0,4}^{2,1,1}$:

$$\|\widetilde{\omega_{0,4}^4 f_{n_1}}\|^2 = \int\limits_{\Omega_{n_1-4}} dp_1 \ldots dp_{n_1-4} \Big| \int dk_1 \ldots dk_3 \times$$

$$\times \frac{(2\pi)^{-1}}{[\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)\omega(k_1+k_2+k_3)]^{1/2}} f_{n_1}(k_1, k_2, k_3, -k_1, -k_2, -k_3,$$

$$p_1, \ldots, p_{n_1-4})\Big|^2 \leqslant \left(\int dk_1 dk_2 dk_3 \frac{(2\pi)^{-2}}{\omega(k_1)\omega(k_2)\omega(k_3)\omega(k_1+k_2+k_3)}\right) \times$$

$$\times \int dp_1 \ldots dp_{n_1-4} dk_1 \ldots dk_4 \delta(p_1 + \ldots + p_{n_1-4}) \delta(k_1 + \ldots + k_4) \times$$

$$\times |f_{n_1}(k_1, \ldots, k_4, p_1, \ldots, p_{n_1-4})|^2 = (C_{0,4}^4)^2 \int dp_1 \ldots dp_{n_1-4} dk_1 \ldots$$

$$\ldots dk_4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\delta(k_1+k_2+k_3+k_4+p_1+$$

$$\ldots + p_{n_1-4}) |f_{n_1}(k_1, \ldots, k_4, p_1, \ldots, p_{n_1-4})|^2. \qquad (24.19)$$

Константа $C^4_{0,4} = C_{4,0}$, как показывают прямые вычисления, конечна (см., например, § 17), а интеграл в последнем равенстве (24.19) определен для функций, интегрируемых по модулю в квадрате на пересечении $\Omega_{n_1} \cap \Omega_4 = \Omega_{n_1-4} \cup \Omega_4$.

Совершенно аналогично для оператора $\omega^{2,1,1}_{0,4}$ имеем

$$\|\omega^{2,1,1}_{0,4} f_{n_1,n_2,n_3}\|^2 = \int\limits_{\Omega_{n_1+n_2+n_3-4}} dp_1 \ldots dp_{n_1+n_2+n_3-4} \times$$
$$\times \left| \int dk_1 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[\omega(k_1)\,\omega(k_1+p_1+\ldots+p_{n_1-2})]^{1/2}} \times \right.$$
$$\times \frac{1}{[\omega(p_{n_1-1}+\ldots+p_{n_1+n_2-3})]^{1/2}} \times$$
$$\times \frac{1}{[\omega(p_{n_1+n_2-2}+\ldots+p_{n_1+n_2+n_3-4})]^{1/2}} f_{n_1,n_2,n_3}(k_1, -k_1-p_1-\ldots$$
$$\ldots - p_{n_1-2}, p_1, \ldots, p_{n_1-2}; -p_{n_1-1}-\ldots-p_{n_1+n_2-3}, p_{n_1-1}, \ldots$$
$$\ldots, p_{n_1+n_2-3}; -p_{n_1+n_2-2}-\ldots-p_{n_1+n_2+n_3-4}; p_{n_1+n_2-2}, \ldots$$
$$\left.\ldots, p_{n_1+n_2+n_3-4})\right|^2 \leqslant (C^{2,1,1}_{0,4})^2 \int dp_1 \ldots dp_{n_1+n_2+n_3-4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \times$$
$$\times \delta(k_2+k_1+p_1+\ldots+p_{n_1-2})\,\delta(k_3+p_{n_1-1}+\ldots+p_{n_1+n_2-3}) \times$$
$$\times \delta(k_4+p_{n_1+n_2-2}+\ldots+p_{n_1+n_2+n_3-4})\,|f_{n_1,n_2,n_3}(k_1, k_2, p_1, \ldots, p_{n_1-2};$$
$$k_3, p_{n_1-1}, \ldots, p_{n_1+n_2-2}; k_4, p_{n_1+n_2-2}, \ldots, p_{n_1+n_2+n_3-4})|^2 =$$
$$= (C^{2,1,1}_{0,4})^2 \int dp_1 \ldots dp_{n_1+n_2+n_3-4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \times$$
$$\times \delta(k_1+k_2+p_1+\ldots+p_{n_1-2})\,\delta(k_3+p_{n_1-1}+\ldots+p_{n_1+n_2-3}) \times$$
$$\times \delta(k_1+p_{n_1+n_2-2}+\ldots+p_{n_1+n_2+n_2-4}) \times$$
$$\times |f_{n_1,n_2,n_3}(k_1, k_2, p_1, \ldots, p_{n_1-2};$$
$$k_3, p_{n_1-1}, \ldots, p_{n_1+n_2-1}, \ldots, p_{n_1+n_2+n_3-4})|^2. \quad (24.20)$$

Константа $C^{2,1,1}_{0,4} = C^{1,2}_{1,3} = C^{1,1}_{2,2}$, а интеграл в последнем равенстве (24. 20) определен для функций, интегрируемых по модулю в квадрате на гиперповерхности $\Omega_4 \cap \Omega_{n_1} \cap \Omega_{n_2} \cap \Omega_{n_3}$.

Оценки (24. 19) и (24. 20) показывают, что операторы $\omega^4_{0,4}$ и $\omega^{2,1,1}_{0,4}$ можно определить, например, на множестве $C^\infty_0(Q)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем и, следовательно, оператор $W_{0,4}(1-\pi)$ можно определить на всюду плотном в h^T множестве конечных последовательностей, каждый член которой принадлежит $C^\infty_0(Q)$. Это и доказывает утверждение леммы.

Таким образом, мы определили оператор $W_{0,4}$, удалив из него оператор $W_{0,4}\pi$, который вносит вклад в состояние вакуума. Однако при этом мы как бы нарушили симметрическую структуру оператора H_I. Действительно, если мы будем определять оператор, сопряженный к оператору $W_{4,0}$,

$$\widetilde{(W_{4,0}f)}\,(p_1,\ldots,p_N)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{N(N-1)(N-2)(N-3)}}\sum_{i_1\neq i_2\neq i_3\neq i_4}\frac{2\pi\delta(p_{i_1}+\ldots+p_{i_4})}{\sqrt{2\pi}\,\omega(p_{i_1})^{1/2}\ldots\sqrt{2\pi}\,\omega(p_{i_4})^{1/2}}\times$$

$$\times\tilde f_{N-4}(p_1,\ldots,\hat p_{i_1},\ldots,\hat p_{i_4},\ldots,p_N),$$

то заметим, что в область определения оператора $W^*_{4,0}$ будут входить функции из $\{\pi h^T\}$ и

$$W^*_{4,0}=\sum_N W^*_{4,0}(N), \tag{24.21}$$

$$W^*_{4,0}(N)=$$

$$=\sqrt{(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\sum_{\sigma^\pi}(1\otimes\ldots\otimes\operatorname{reg}\omega_{0,4}\otimes\ldots\otimes 1), \tag{24.22}$$

где

$$(\operatorname{reg}\omega^1_{0,4}\check f_4)=$$

$$=\int dk_1dk_2dk_3dk_4\,\frac{1}{[2\pi\omega(k_1)\ldots2\pi\omega(k_4)]^{1/2}}\,\tilde f_4(k_1,\ldots,k_4)<\infty.$$

Таким образом, оператор $W^*_{4,0}$ уже определен в h^T, и формально

$$W_{0,4}\pi f=2\pi\delta(0)\,W^*_{4,0}f.$$

Следовательно, мы можем, не изменяя формально-симметрической структуры оператора H_I, определить его в h^T, заменив действие оператора $W_{0,4}\pi$ действием хорошо определенного оператора $W^*_{4,0}$. Тогда

$$H_I=\sum_{s=-1}^{2}\binom{4}{2+s}W_{2+s,2-s}+W_{0,4}(1-\pi)+W^*_{4,0} \tag{24.23}$$

определен в h^T на всюду плотном множестве векторов.

Хотя мы и сохранили формальную симметричность оператора H_I, однако наличие в нем операторов, уменьшающих связность, приводит к тому, что в топологии пространства h^I он оказывается не симметрическим. Однако в нем можно выделить некоторую симметрическую часть H_s и оператор, уменьшающий число связных компонент, т. е.

$$H_I = H_s + P, \tag{24.24}$$

где

$$H_s = \sum_N \Big[4 \underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma^3_{1,3}) + 6 \underset{(0)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^2_{2,2}) + {}$$
$$+ 4 \underset{(1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{3,1}(N)\Big] + W_{4,0} + W^*_{4,0},$$

$$P = \sum_N \Big[4 \underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma^{2,1}_{1,3}) + 4 \underset{(-1)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{1,3}(N, \sigma^{1,1,1}_{1,3}) + {}$$
$$+ 6 \underset{(0)}{\mathrm{symm}}\, \mathfrak{w}_{2,2}(N, \sigma^{1,1}_{2,2}) + W_{0,4}(1 - \pi)\Big].$$

Доказательство симметричности оператора H_s аналогично доказательству симметричности оператора S в уравнениях для коэффициентных функций, приведенному в § 22. Разбиение (24.24) может оказаться существенным при изучении спектра оператора H_I в пространстве h^T.

В заключение настоящей главы отметим, что аналогичные исследования мы могли бы провести и для производящего оператора уравнений эволюционного типа, так как по своей алгебраической структуре он полностью напоминает оператор H_I. При определении этих операторов в пространстве h^T мы прибегаем к некоторой перенормировочной процедуре, которая обусловлена наличием в H_I слагаемого, содержащего все операторы уничтожения. По-видимому, от этого слагаемого можно было бы избавиться с помощью известной процедуры Фаддеева [166], однако этот вопрос здесь не обсуждается.

Глава VII

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ МЕТОДАМИ РАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Модели скалярного поля с неполиномиальным лагранжианом в евклидовой области рассматриваются как обобщенные системы равновесной классической статистической физики. Вводятся S-корреляционные функции, уравнения Кирквуда — Зальцбурга и доказывается, что коэффициентные функции и функции Грина существуют при бесконечном объеме и являются голоморфными функциями по константе связи в некоторой окрестности нуля.

§ 25. СВЕДЕНИЯ ИЗ РАВНОВЕСНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

25.1. Об аналогии между моделями евклидовой квантовой теории поля и классической статистической механикой

В последнее время были обнаружены интересные аналогии между квантовой теорией поля и статистической физикой. Так, еще в монографии Боголюбова и Ширкова [25] отмечалось, что производящий функционал для матрицы рассеяния играет ту же роль в квантовой теории поля, что и производящий функционал для функций распределения в классической статистической механике. В работах Фрадкина [175, 176] о моделях с неполиномиальным взаимодействием уже прямо указывалось на то, что функции Грина в евклидовой области являются аналогом функций распределения равновесной классической статистической механики. Симанзик [156] установил, что уравнения для винеровских функционалов евклидовых функций Грина модели комплексного скалярного поля с лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}(x) = \lambda\,[\varphi^*(x)\,\varphi(x)]^2$ могут быть приведены к уравнениям типа Кирквуда — Зальцбурга или Майера — Монтроля квантовой статистики, исследованных Жинибром [71].

Глубокие аналогии между квантовой теорией поля и равновесной классической статистической механикой были обнаружены при исследовании неполиномиальной модели скалярного поля, введенной Фрадкиным [176] и Ефимовым [70]. В работах Фивела [170], Петрины и Скрипника [130] было показано, что в евклидовой области эту модель можно рассматривать как обобщенную модель равновесной классической статистической механики, в которой свободный пропагатор играет роль парного потенциала, константа взаимодействия — роль активности и, кроме того, частицы имеют еще одну дополнительную степень свободы — свою «температуру» или заряд.

В проблеме математического описания бесконечных систем равновесной статистической механики достигнуты значительные успехи: в работах Боголюбова и сотрудников [18, 19], в работах Рюеля [142] доказаны теоремы существования решений уравнений для корреляционных функций или функций распределений.

Обнаруженные аналогии между статистической физикой и квантовой теорией поля наводят на мысль, что математические методы, развитые для обоснования равновесной статистической механики, после существенного обобщения могут быть применены к задачам квантовой теории поля. В настоящей главе методами статистической физики будут исследованы коэффициентные функции и функции Грина неполиномиальных моделей скалярного поля. В основном мы будем следовать работе [130]. В ней были введены S-корреляционные функции, выведены уравнения Кирквуда — Зальцбурга и впервые доказано существование термодинамического предела для моделей квантовой теории поля. Для удобства начнем изложение напоминанием основных сведений из равновесной классической статистической механики [142].

25.2. Корреляционные функции

Рассмотрим в рамках большого канонического ансамбля систему тождественных частиц с массой μ, взаимодействующих посредством парного потенциала $\Phi(x) = \Phi(|x|)$, $x \in R^d$, и находящихся в состоянии статистического равновесия с температурой T (или с обратной температурой $\beta = 1/kT$, k — постоянная Больцмана) и активностью z в сосуде Λ. Будем считать, что вне сосуда имеется бесконечное отталкивающее поле.

Такая система описывается бесконечной последовательностью корреляционных функций

$$\rho_\Lambda = (\rho_\Lambda(x_1), \ldots, \rho_\Lambda(x_1, \ldots, x_m), \ldots) = (\rho_\Lambda((x)_1), \ldots, \rho_\Lambda((x)_m), \ldots),$$
$$(x_1, \ldots, x_m) = (x)_m, \tag{25.1}$$

которые определяются согласно формулам

$$\rho_\Lambda((x)_m) = \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda((x)_m) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_{m+1} \ldots dx_{m+n} \exp[-\beta U((x)_{m+n})] =$$
$$= \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n!} \int d(x)_{m+n}^{m+1} \chi_\Lambda((x)_{m+n}) \exp[-\beta U((x)_{m+n})], \tag{25.2}$$

где

$$U((x)_n) = U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<j=1}^{n} \Phi(x_i - x_j) \tag{25.3}$$

— потенциальная энергия взаимодействия n частиц,

$$\Xi(\Lambda, z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_1 \ldots dx_n \exp[-\beta U((x)_n)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int d(x)_n^1 \chi_\Lambda((x)_n) \exp[-\beta U((x)_n)] \tag{25.4}$$

— большая статистическая сумма,

$$\chi_\Lambda((x)_n) = \prod_{i=1}^{n} \chi_\Lambda(x_i),$$

а $\chi_\Lambda(x_i)$ — характеристическая функция множества Λ,

$$d(x)_{m+n}^{m+1} = dx_{m+1} \ldots dx_{m+n}.$$

Корреляционная m-частичная функция $\rho((x)_m)$ определяется как плотность вероятности нахождения m различных частиц в точках $x_1, \ldots, x_m \in \Lambda$, вне Λ они полагаются равными нулю.

На потенциал $\Phi(x)$ наложим два условия:

1) стабильности

$$U((x)_n) = \sum_{i<j=1}^{n} \Phi(x_i - x_j) \geqslant -Bn, \tag{25.5}$$

где B — конечное неотрицательное число;

2) интегрируемости

$$\int |e^{-\beta\Phi(x)} - 1| \, dx = C(\beta) < \infty. \tag{25.6}$$

Из условия стабильности следует, что большая статистическая сумма $\Xi(\Lambda, z, \beta)$ существует при конечном объеме $V(\Lambda)$ сосуда Λ, является целой функцией активности z и допускает оценку

$$|\Xi(\Lambda, z, \beta)| < e^{zB_1V(\Lambda)}, \tag{25.7}$$

где $B_1 = e^{\beta B}$. Из оценки вытекает, что при $V(\Lambda) \to \infty$ $\Xi(\Lambda, z, \beta)$ экспоненциально расходится.

Числитель выражения (25 2), определяющего корреляционную функцию $\rho((x)_m)$, также является целой функцией z при конечном объеме $V(\Lambda)$ и допускает оценку

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n!} \int_{\Lambda^n} dx_{m+1} \dots dx_{m+n} \exp\left[-\beta U((x)_{m+n})\right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant z^m \exp(\beta B m) \exp\left[z\beta B_1 V(\Lambda)\right], \qquad (25.8)$$

из которой вытекает, что он экспоненциально расходится при стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности.

При $z > 0$ большая статистическая сумма $\Xi(\Lambda, z, \beta)$ отлична от нуля как степенной ряд с положительными коэффициентами. Так как $\Xi(\Lambda, 0, \beta) = 1$, то $\Xi(\Lambda, 0, \beta)$ отлична от нуля и в некоторой окрестности нуля (размеры которой зависят от $V(\Lambda)$).

Таким образом, при конечном объеме $V(\Lambda)$ корреляционные функции $\rho_\Lambda((x)_m)$ определены как частное двух целых функций и являются мероморфными функциями с полюсами вне некоторой окрестности нуля и действительной положительной оси. Если же объем $V(\Lambda)$ устремить к бесконечности, то числитель и знаменатель в (25.2) экспоненциально расходятся и теряют смысл. Чтобы определить $\rho_\Lambda(x)$ при $V(\Lambda) \to \infty$, нужно доказать, что расходящиеся при $V(\Lambda) \to \infty$ выражения в числителе и знаменателе (25.2) сокращаются, а «остаток» имеет смысл при некоторых z и при бесконечном объеме. Наиболее удобным аппаратом для доказательства этого являются уравнения для корреляционных функций.

25.3. Уравнения Кирквуда — Зальцбурга для корреляционных функций

Чтобы получить уравнения для корреляционных функций, поступим следующим образом. Выделим в $U((x)_{n+m})$ в формуле (25.2) энергию взаимодействия первой частицы со всеми остальными:

$$U((x)_{n+m}) = \sum_{i=2}^{n+m} \Phi(x_1 - x_i) + U((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}), \qquad (25.9)$$

где $x)^{\hat{1}}_{m+n-1} = (x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$, и обозначим

$$K(x_1, (y)_n) = \prod_{i=1}^{n} (\exp[-\beta\Phi(x_1 - y_i)] - 1). \qquad (25.10)$$

Для $\rho_\Lambda((x)_m)$ получим выражение

$$\rho_\Lambda((x)_m) = \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda((x)_m)\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{n!}\int dx_{m+1}\ldots dx_{m+n}\chi\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-\beta\sum_{i=m+1}^{m+n}\Phi(x_1-x_i)\right]\exp\left[-\beta U\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\right]=$$

$$=\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda((x)_m)\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{n!}\int dy_1\ldots dy_n\chi_\Lambda\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left[-\beta\sum_{i=m+1}^{m+n}\Phi(x_1-y_i)\right]-1+1\right)\exp\left[-\beta U\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\right]=$$

$$=\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda(x)_m\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+m}}{n!}\int dy_1\ldots dy_n\chi_\Lambda\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!\,(n-s)!}K(x_1, (y)_s)\exp\left[-\beta U\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\right]=$$

$$=\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda((x)_m)\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{z^{n+m}}{s!\,(n-s)!}\int dy_1\ldots dy_s\chi_\Lambda\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)K(x_1, (y)_s)\times$$

$$\times\int dy_{s+1}\ldots dy_n\exp\left[-\beta U\left((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}\right)\right]=$$

$$=z\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)\,\chi_\Lambda((x)_m)\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m-1}}{n!} \int dy_1 \ldots dy_n \chi_\Lambda ((x)_{m+n-1}^{\hat{1}}) \exp [-\beta U ((x)_{m+n-1}^{\hat{1}})] +$$

$$+ z\Xi^{-1} (\Lambda, z, \beta) \chi_\Lambda ((x)_m) \exp \left[-\beta \sum_{i=2}^{m} \Phi (x_1 - x_i) \right] \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int dy_1 \ldots dy_s K (x_1, (y)_s) \sum_{n=s}^{\infty} \frac{z^{n+m-1}}{(n-s)!} \int dy_{s+1} \ldots dy_n \times$$

$$\times \chi_\Lambda ((x)_{m+n-1}^{\hat{1}}) \exp [-\beta U ((x)_{m+n-1}^{\hat{1}})]. \qquad (25.11)$$

Здесь $x_{m+1} = y_1, \ldots, x_{m+n} = y_n$.

Если в (25.11) воспользоваться определением (25.2) функций $\rho_\Lambda ((x)_m)$, то после очевидных переобозначений окончательно получим

$$\rho_\Lambda ((x)_m) = \chi_\Lambda ((x)_m) z \exp \left[-\beta \sum_{i=2}^{m} \Phi (x_1 - x_i) \right] \times$$

$$\times \left[\rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\hat{1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dy_n^1 K (x_1, (y)_n) \rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) \right] =$$

$$= \chi_\Lambda (x)_m z \exp \left[-\beta \sum_{i=2}^{m} \Phi (x_1 - x_i) \right] \times$$

$$\times \left[\rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\hat{1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d (y)_n^1 K (x_1, (y)_n) \rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) \right], \qquad m > 1;$$

$$(25.12)$$

$$\rho_\Lambda (x_1) = \chi_\Lambda (x_1) z \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dy_1 \ldots dy_n K (x_1, (y)_n) \rho_\Lambda (y_{(n)}) \right] =$$

$$= \chi_\Lambda (x_1) z \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d (y)_n^1 K (x_1, (y)_n) \rho_\Lambda (y_{(n)}) \right], \qquad m = 1.$$

Уравнения (25.12) называются уравнениями Кирквуда — Зальцбурга. Они обладают одним весьма примечательным свойством: в них нигде не фигурирует расходящаяся при $V(\Lambda) \to \infty$ большая статистическая сумма. Она сократилась с соответствующим расходящимся выражением в числителе формулы (25.2). Само сокращение особенно наглядно видно в последнем равенстве (25.11) при $m = 1$, где в первом слагаемом множитель при $\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)$ в точности равен $\Xi(\Lambda, z, \beta)$.

Если бы в определение (25.2) корреляционных функций не вводился нормирующий множитель $\Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)$, то уравнения для таких корреляционных функций при $m > 1$ имели бы вид (25.12), а уравнение при $m = 1$ выглядело бы таким образом:

$$\rho_\Lambda(x_1) = \chi_\Lambda(x_1) z \left[\Xi(\Lambda, z, \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n^1 K(x_1, (y)_n) \rho_\Lambda((y)_n) \right] \tag{25.13}$$

и содержало бы явно $\Xi(\Lambda, z, \beta)$. Очевидно, что, совершив переход к новым корреляционным функциям по формуле $\rho_\Lambda((x)_m) \to \rho_\Lambda((x)_m) \Xi^{-1}(\Lambda, z, \beta)$, получим для новой $\rho_\Lambda(x_1)$ уравнение (25.12). Уравнения для $\rho_\Lambda((x)_m)$ при $m > 1$ однородны и после перехода к новым корреляционным функциям не изменят своего вида.

25.4. Решение уравнений Кирквуда — Зальцбурга

Уравнения Кирквуда — Зальцбурга (25.12) представляют собой бесконечную цепочку зацепляющихся интегральных уравнений. Будем их решать в банаховом пространстве E_ξ, элементами которого являются последовательности измеримых функций, заданных на R^{nd}:

$$\varphi = (\varphi(x_1), \varphi(x_1, x_2), \ldots, \varphi(x_1, \ldots, x_m), \ldots) = \\ = (\varphi((x)_1), \varphi((x)_2), \ldots, \varphi((x)_m), \ldots)$$

с нормой

$$\|\varphi\|_\xi = \sup_n \xi^{-n} \operatorname{ess} \sup_{(x)_n \in R^{nd}} |\varphi((x)_n)|, \tag{25.14}$$

где ξ — некоторое положительное число, которое зафиксируем позже. В пространстве E_ξ зададим оператор K, который действует на последовательность φ по формуле

$$(K\varphi)((x)_m) = \exp\left[-\beta \sum_{i=2}^{m} \Phi(x_1 - x_i) \right] \times \\ \times \left[\varphi((x)_{m-1}^{\hat{1}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int K(x_1 (y)_n) \varphi((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) d(y)_n^1 \right], \quad m > 1, \tag{25.15}$$

$$(K\varphi)(x)_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int K(x_1, (y)_n) \varphi((y)_n) d(y)_n^1, \qquad m = 1.$$

Определим еще в E_ξ оператор χ_Λ, который действует на последовательность φ по формуле

$$(\chi_\Lambda \varphi)((x)_m) = \chi_\Lambda((x)_m)\,\varphi((x)_m). \tag{25.16}$$

С помощью операторов K и χ_Λ уравнения Кирквуда — Зальцбурга (25.12) можно компактно записать как одно операторное уравнение для последовательности ρ_Λ корреляционных функций:

$$\rho_\Lambda = z\chi_\Lambda K \rho_\Lambda + z\chi_\Lambda \alpha \tag{25.17}$$

где $\alpha = (1, 0, \ldots)$.

Наряду с уравнением (25.17) рассмотрим еще уравнение

$$\rho = zK\rho + z\alpha. \tag{25.18}$$

Как мы увидим позже, последовательность ρ, определенная из уравнения (25.18), является пределом (в определенном смысле) последовательности ρ_Λ при $V(\Lambda) \to \infty$.

Оценим норму оператора K. Учтем, что из условия стабильности (25.5) следует неравенство $\Phi(x) \geqslant -2B$. С учетом этого неравенства из (25.15) получаем

$$|(K\varphi)(x)_m| \leqslant (e^{2\beta B}\xi)^{m-1}\, e^{\xi C(\beta)}\, \|\varphi\|_\xi, \tag{25.19}$$

и поэтому оператор K отображает пространство E_ξ в пространство $E_{\xi\cdot\exp(2\beta B)}$. Оператор χ_Λ имеет норму $\|\chi_\Lambda\| = 1$. Для того чтобы решать уравнения (25.17), (25.18), нужно, чтобы оператор $\chi_\Lambda K$ отображал пространство E_ξ в себя при определенном ξ. Из оценки (25.19) видно, что это будет только при $B = 0$, т. е. для положительного потенциала. Попытаемся преобразовать уравнения (25.17), (25.18) таким образом, чтобы определяющий их оператор отображал пространство E_ξ в себя и в общем случае.

Для этого воспользуемся следующим обстоятельством. В уравнениях Кирквуда — Зальцбурга (25.17) переменная x_1 играет выделенную роль. Можно было бы вывести уравнения Кирквуда — Зальцбурга, выделив в $U((x)_{n+m})$ энергию взаимодействия второй, третьей или m-й частицы. Они имели бы точно такой же вид, как и уравнения (25.12), только переменные x_1, x_2, x_3 или x_m поменялись бы местами.

Из условия стабильности, записанного в виде

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \Phi(x_i - x_j) \geqslant -2Bn,$$

вытекает, что в каждой точке $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ найдется такой индекс j, что будет иметь место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_j - x_i) \geqslant -2B, \qquad i \neq j. \tag{25.20}$$

Обозначим характеристическую функцию области, в которой выполняется неравенство (25.20), через $\theta_j((x)_n)$, а через $\nu_j((x)_n)$ обозначим функцию

$$\nu_j((x)_n) = \frac{\theta_j((x)_n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j((x)_n)}. \tag{25.21}$$

Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j((x)_n) = 1$.

Уравнения Кирквуда — Зальцбурга для $\rho_\Lambda((x)_m)$, в которых выделенную роль играют поочередно переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, умножим на $\nu_1((x)_m), \nu_2((x)_m), \ldots, \nu_m((x)_m)$ соответственно и сложим. Учитывая симметричность функций $\rho_\Lambda((x)_m)$, получим уравнение

$$\rho_\Lambda((x)_m) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j((x)_m) \chi_\Lambda((x)_m) z \exp\Big[-\beta \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \Phi(x_j - x_i)\Big] \times$$
$$\times \Big[\rho_\Lambda((x)_{m-1}^{\hat{j}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d(y)_n^1 K(x_j (y)_n) \rho_\Lambda((x)_{m-1}^{\hat{j}}, (y)_n)\Big], \quad m > 1, \tag{25.22}$$

$$(x)_{m-1}^{\hat{j}} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)$$

(уравнение для $\rho_\Lambda((x_1))$ остается без изменений).

Обозначим через Π оператор, который переводит последовательность $\varphi = (\varphi(x_1), \ldots, \varphi((x))_m, \ldots)$ в последовательность

$$\Pi\varphi = \varphi(x_1), \ldots, \sum_{j=1}^{m} \nu_j((x)_m) \varphi(x_j, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \ldots, x_m).$$

С помощью оператора Π система уравнений (25.22) запишется как одно операторное уравнение вида

$$\rho_\Lambda = z\chi_\Lambda \Pi K \rho_\Lambda + z\chi_\Lambda \alpha. \tag{25.23}$$

Заодно напишем и уравнение для ρ:

$$\rho = z\Pi K\rho + z\alpha. \tag{25.24}$$

При оценке нормы оператора ΠK воспользуемся тем обстоятельством, что согласно (25.20) и определению $\nu_j((x)_m)$ имеет место неравенство

$$\nu_j((x)_m)\exp\left[-\beta\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\Phi(x_i-x_j)\right]\leqslant e^{2\beta B}. \tag{25.25}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$|(\Pi K\varphi)((x)_m)|\leqslant e^{2\beta B}e^{\xi C(\beta)}\xi^{m-1}\,\|\varphi\|_\xi, \tag{25.26}$$

из которого следует, что оператор ΠK отображает E_ξ в себя и для его нормы справедлива оценка

$$\|\Pi K\|\leqslant e^{2\beta B}e^{\xi C(\beta)}\xi^{-1}, \tag{25.27}$$

являющаяся наилучшей при $\xi=C^{-1}(\beta)$. Отметим, что $z\chi_\Lambda\alpha$ и $z\alpha$ принадлежат E_ξ.

Уравнения (25.23) и (25.24) будут обладать единственными решениями

$$\rho_\Lambda=(I-z\chi_\Lambda\Pi K)^{-1}z\chi_\Lambda\alpha, \tag{25.28}$$

$$\rho=(I-z\Pi K)^{-1}z\alpha, \tag{25.29}$$

если операторы $z\chi_\Lambda\Pi K$ и $z\Pi K$, фигурирующие в их правых частях, имеют норму меньше единицы.

Из (25.27) следует, что $\|z\chi_\Lambda\Pi K\|<1$, $\|z\Pi K\|<1$, если

$$|z|<e^{-2\beta B-1}C(\beta). \tag{25.30}$$

При таких z решения (25.28) и (25.29) представляются рядами, сходящимися по норме пространства $E_{C^{-1}(\beta)}$:

$$\rho_\Lambda=\sum_{n=0}^{\infty}(z\chi_\Lambda\Pi K)^n z\chi_\Lambda\alpha=(I-z\chi_\Lambda\Pi K)^{-1}z\chi_\Lambda\alpha, \tag{25.31}$$

$$\rho=\sum_{n=0}^{\infty}(z\Pi K)^n z\alpha=(I-z\Pi K)^{-1}z\alpha, \tag{25.32}$$

и являются голоморфными функциями z.

Последовательность ρ при $V(\Lambda)\to\infty$ стремится к ρ в следующем смысле:

$$|\chi_\Lambda((x)_m)(\rho_\Lambda((x)_m)-\rho((x)_m))|\leqslant\xi^m\varepsilon(\Lambda^*),$$

где $\lim\limits_{\Lambda^*\to\infty}\varepsilon(\Lambda^*)=0$, а Λ^* означает наименьшее расстояние точек $x_1, \dots, x_m\subset\Lambda$ до границы Λ.

Доказательство последнего утверждения довольно громоздко, и мы приведем его в дальнейшем для более общей ситуации.

Состояние бесконечной системы описывается последовательностью ρ корреляционных функций, которые существуют и являются голоморфными функциями активности z из круга (25.30). Сама процедура стремления объема $V(\Lambda)$ к бесконечности называется термодинамическим переходом к пределу.

25.5. Описание бесконечных систем равновесной статистической механики в рамках формализма канонического ансамбля [18]

Выше была приведена схема математического описания бесконечных систем равновесной статистической механики в рамках формализма большого канонического ансамбля Число частиц при таком описании не фиксировано, определено лишь среднее число частиц, система характеризуется тремя параметрами: объемом $V(\Lambda)$, активностью z и обратной температурой β.

Часто удобнее использовать формализм канонического ансамбля. В отличие от большого канонического ансамбля, число частиц при таком описании фиксировано, система характеризуется объемом $V(\Lambda)$, числом частиц N в Λ или плотностью $1/v$ (v — удельный объем) и обратной температурой β. Плотность вероятности расположения N частиц в Λ задается выражением

$$D((x)_N) = \frac{\exp[-\beta U((x)_N)]}{Q(N,\Lambda)}, \tag{25.33}$$

где $Q(N,\Lambda)$ — конфигурационный интеграл:

$$Q(N,\Lambda) = \int\limits_{\Lambda^N} \exp[-\beta U((x)_N)]\, d(x)_N^1, \tag{25.34}$$

и полагается равной нулю вне Λ. В качестве Λ можем взять шар с центром в начале координат с обьемом $V(\Lambda) = V$. Введем последовательность функций распределения

$$F_m^{(N)}(x_1, \dots, x_m; \Lambda) =$$
$$= V^m \int\limits_{\Lambda^{N-m}} D(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_N)\, dx_{m+1} \dots dx_N =$$
$$= F_m^N((x)_m; \Lambda). \tag{25.35}$$

Функции распределения, деленные на V^m, дают плотность вероятности расположения m частиц при произвольном расположении остальных $N-m$. Устремим обьем V и число частиц N к бесконечности таким образом, чтобы отношение N/V оставалось постоянным и равным $1/\mathfrak{v}$. Такой предельный переход называется термодинамическим.

При математическом описании бесконечных равновесных систем статистической механики основным является вопрос о существовании функций распределения при термодинамическом переходе к пределу и характер зависимости от плотности. Решается эта проблема, как и в рамках большого кононического ансамбля, с помощью уравнений Кирквуда — Зальцбурга.

Опишем вкратце полученные результаты.

Введем в рассмотрение наряду с функциями $F_m^{(N)}$ еще функции распределения

$$F_m^{(N-l)}(x_1, \ldots, x_m; \Lambda) = F_m^{(N-l)}((x)_m; \Lambda) =$$

$$= V^m(\Lambda) \int\limits_{\Lambda^{N-l-m}} D(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_{N-l})\, dx_{m+1} \ldots dx_{N-l}, \qquad (25.36)$$

где

$$D((x)_{N-l}) = \frac{\exp[-\beta U((x)_{N-l})]}{Q(N-l, \Lambda)},$$

$$Q(N-l, \Lambda) = \int\limits_{\Lambda^{N-l}} \exp[-\beta U((x)_{N-l})]\, d(x)_{N-l}^{1}. \qquad (25.37)$$

Функция $D((x)_{N-l})$ задает плотность вероятности расположения $N-l$ (l — положительное целое число) частиц в сосуде Λ, вне Λ она полагается равной нулю.

Функции $F_m^{(N-l)}((x)_m; \Lambda)$ связаны соотношениями

$$F_m^{(N-l)}((x)_m; \Lambda) = \frac{N}{N-l} a_{N-l}(\Lambda) \exp\left[-\beta \sum_{i=2}^{m} \Phi(x_1 - x_i)\right] \times$$

$$\times \left[F_{m-1}^{(N-l-1)}((x)_m^{\hat{1}}; \Lambda) + \sum_{n=1}^{N-l-m} \frac{\left(1 - \frac{l+m}{N}\right) \ldots \left(1 - \frac{l+m+n-1}{N}\right)}{n!\, \mathfrak{v}^n} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\Lambda^n} K(x_1, (y)_n)\, F_{m+n-1}^{(N-l-1)}((x)_n^{\hat{1}}, (y)_n; \Lambda)\, d(y)_n^1 \right], \qquad 1 < m < N-l,$$

$$a_{N-l}(\Lambda) = \mathfrak{v}(N-l) \frac{Q(N-l-1, \Lambda)}{Q(N-l, \Lambda)},$$

$$F_1^{(N-l)}(x_1;\Lambda)=\frac{N}{N-l}a_{N-l}(\Lambda)\Bigg[1+\sum_{n=1}^{N-l-1}\frac{\left(1-\frac{l+1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{l+n}{N}\right)}{n!\,\mathfrak{v}^n}\times$$

$$\times\int_{\Lambda^n}K(x_1,(y)_n)\,F_n^{(N-l-1)}((x)_n^{\hat{1}},(y)_n)\,d(y)_n^1\Bigg],$$

$$F_{N-l}^{(N-l)}((x)_{N-l};\Lambda)= \tag{25.38}$$

$$=\frac{N}{N-l}a_{N-l}(\Lambda)\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{N-l}\Phi(x_1-x_i)\right]F_{N-l-1}^{(N-l-1)}((x)_{N-l}^{\hat{1}};\Lambda),$$

которые следуют из определения (25.36), если в $D((x)_{N-l})$ выделить в экспоненте энергию взаимодействия первой частицы со всеми остальными и проделать те же выкладки, что и при выводе уравнений Кирквуда — Зальцбурга в большом каноническом ансамбле.

Если в соотношениях (25.38) формально совершить переход к термодинамическому пределу и обозначить

$$\lim_{\substack{N\to\infty,\\ V(\Lambda)\to\infty,\\ N/V(\Lambda)=1/\mathfrak{v}}} F_m^{(N-l)}((x)_m;\Lambda)=F((x)_m),$$

$$\lim_{\substack{N\to\infty,\\ V\to\infty,\\ N/V=1/\mathfrak{v}}}\frac{N}{N-l}a_{N-l}(\Lambda)=a(\mathfrak{v}), \tag{25.39}$$

то получим уравнения Кирквуда — Зальцбурга вида

$$F((x)_m)=a(\mathfrak{v})\left\{\exp\left[-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1-x_i)\right]\left[F((x)_{m-1}^{\hat{1}})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,\mathfrak{v}^n}\int K(x_1,(y)_n)\,F((x)_m^{\hat{1}},(y)_n)\,d(y)_n^1\right]\right\},\quad m>1, \tag{25.40}$$

$$F((x)_1)=a(\mathfrak{v})\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,\mathfrak{v}^n}\int K(x_1(y)_n)\,F((y)_n)\,d(y)_n^1\right],\quad m=1.$$

Для стабильного и интегрируемого потенциала уравнения Кирквуда — Зальцбурга обладают единственным решением, являющимся голоморфной функцией плотности в некоторой окрестности нуля. Функция $a(\mathfrak{v})$ также является голоморфной функцией плотности в этой окрестности.

Доказательство существования и единственности решения основано на том, что уравнения (25.40) можно записать как одно операторное уравнение

$$F = a(\mathfrak{v}) KF + a(\mathfrak{v}) \alpha^0, \tag{25.41}$$

где оператор K определен в пространстве E_ξ ($\xi = 2e^{2\beta B+1}$) согласно формуле

$$(K\varphi)((x)_m) = \exp\left|-\beta\sum_{i=2}^{m}\Phi(x_1 - x_i)\right| \times$$

$$\times\left[\varphi((x)_{m-1}^{\hat{1}}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,\mathfrak{v}^n}\int K(x_1, (y)_n)\,\varphi((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n)\,d(y)_n^1\right], \tag{25.42}$$

$$(K\varphi)((x)_1) = \sum_{n=1}\frac{1}{n!\,\mathfrak{v}^n}\int K(x_1, (y)_n)\,\varphi((y)_n)\,d(y)_n^1,$$

а

$$F = (F(x_1), F((x_2)), \ldots, F((x)_m), \ldots).$$

Используя симметричность функций распределения, можно, как и в случае большого канонического ансамбля, показать, что последовательность функций распределения удовлетворяет уравнению

$$F = a(\mathfrak{v})\,\Pi KF + a(\mathfrak{v})\,\alpha^0, \tag{25.41$'$}$$

где Π — оператор симметризации, введенный в п. 25.4.

Оператор ΠK ограничен в E_ξ и для его нормы справедлива оценка

$$\|a(\mathfrak{v})\,\Pi K\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(\mathfrak{v})|}{2e^{\beta B+1}}\exp\left[2\beta B + \frac{2\exp(2\beta B+1)}{\mathfrak{v}}C(\beta)\right] \leqslant k < 1, \quad |a(\mathfrak{v})| < 2, \tag{25.42$'$}$$

если плотность удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\mathfrak{v}} < \frac{1}{2e^{2\beta B+1}C(\beta)}\,. \tag{25.43}$$

Так как $a(\mathfrak{v})\,\alpha^0 \in E_\xi$, то уравнение (25.41) обладает единственным решением, которое можно представить сходящимся по норме пространства E_ξ рядом

$$F = \sum_{n=0}^{\infty}(a(\mathfrak{v})\,\Pi K)^n\,a(\mathfrak{v})\,\alpha^0. \tag{25.44}$$

Функции $F((x)_m)$ являются пределом последовательностей $F^{(N-l)}((x)_m; \Lambda)$ в следующем смысле:

$$\lim_{\substack{N\to\infty,\\ V(\Lambda)\to\infty,\\ N/V(\Lambda)=1/\mathfrak{v}}} \chi_{\Lambda'}((x)_m)\,|F^{(N-l)}((x)_m;\Lambda) - F((x)_m)| = 0, \qquad (25.45)$$

если только радиусы r' и r шаров Λ' и Λ $(\Lambda' \subset \Lambda)$ удовлетворяют при этом соотношению

$$\lim_{V\to\infty} \frac{r'}{r} = 0.$$

Покажем эквивалентность большого канонического и канонического ансамблей после совершения термодинамического перехода к пределу. Для этого заметим, что если в уравнениях (25.41) перейти от последовательности функций F к последовательности функций ρ по формуле

$$\rho((x)_m) = \frac{1}{\mathfrak{v}^m} F((x)_m), \qquad (25.46)$$

а функцию $\frac{1}{\mathfrak{v}} a(\mathfrak{v})$ принять за активность z, то мы придем к уравнению (25.24) для корреляционных функций большого канонического ансамбля.

§ 26. УРАВНЕНИЯ КИРКВУДА—ЗАЛЬЦБУРГА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

26.1. Производящий функционал для матрицы рассеяния и S-корреляционные функции

Рассмотрим модель самовзаимодействующего скалярного поля с лагранжианом взаимодействия $\lambda\mathscr{L}(\varphi)$. Представим $\mathscr{L}(\varphi)$ через преобразование Фурье:

$$\mathscr{L}(\varphi) = \int \mathscr{A}(\alpha) :e^{i\alpha\varphi}: d\alpha. \qquad (26.1)$$

Так как $\mathscr{L}$ — действительная функция, то преобразование Фурье $\mathscr{A}(\alpha)$ удовлетворяет соотношению $\mathscr{A}(-\alpha) = \mathscr{A}^*(\alpha)$.

Ниже мы приведем различные формальные, чисто алгебраические выкладки, справедливые для произвольного $\mathscr{A}(\alpha)$, поэтому пока никаких ограничений на $\mathscr{A}(\alpha)$ накладывать не будем. Функция $\mathscr{A}(\alpha)$ может быть и обобщенной; так, в теории с лагранжианом взаимодействия $\mathscr{L}(\varphi) = \lambda :\varphi^4:$ функция $\mathscr{A}(\alpha) = \delta^{(4)}(\alpha)$.

Производящий функционал S-матрицы в евклидовой d-мерной конечной области Λ (за Λ примем шар с центром в начале координат) выглядит следующим образом (см. гл. I, § 4):

$$S_\Lambda(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int d(x)_n^1\, d(\alpha)_n^1\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}(\alpha_j)\exp[i\alpha_j\varphi(x_j)]\times$$
$$\times\chi_\Lambda(x_j)\exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j G_0(x_i-x_j)\Big] \quad (26.2)$$

(напомним, что здесь $\varphi(x)$ уже не оператор, а функциональный аргумент).

Производящий функционал (26.2) при $\varphi=0$ очень напоминает выражение для большой статистической суммы (25.4) при активности λ и парном потенциале $G_0(x)$. В самом деле, большую статистическую сумму (25.4)

$$\Xi(\Lambda,\lambda,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int d(x)_n^1\exp\Big[-\beta\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}G_0(x_i-x_j)\Big]$$

можно представить в виде

$$\Xi(\Lambda,\lambda,\beta)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int d(x)_n^1\, d(\alpha)_n^1\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}(\alpha_j)\exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j G_0(x_i-x_j)\Big], \quad (26.3)$$

выражение (26.3) совпадает с производящим функционалом (26.2) при $\varphi=0$ и $\mathcal{A}(\alpha)=\delta(\alpha-\sqrt{\beta})$.

Таким образом, $S_\Lambda(0)$ является как бы статистической суммой системы частиц с активностью λ, парным потенциалом $G_0(x)$, причем i-я частица имеет свою «обратную температуру» α_i^2 с некоторой плотностью вероятности $\mathcal{A}(\alpha)$. В случае статистической механики $\mathcal{A}(\alpha)=\delta(\alpha-\sqrt{\beta})$ и каждая частица имеет с вероятностью единица обратную температуру β.

Эти аналогии между моделями квантовой теории поля в евклидовой области и классической статистической механикой можно продолжить. Для этой цели введем S-корреляционные функции следующим образом:

$$\rho_\Lambda((x)_m,(\alpha)_m)=\frac{1}{S_\Lambda(0)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+n}}{n!}\int d(x)_{m+n}^{n+1}\, d(\alpha)_{m+n}^{n+1}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n+m}\mathcal{A}(\alpha_j)\chi_\Lambda(x_j)\exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+m}\alpha_i\alpha_j G_0(x_i-x_j)\Big],$$

$$d(x)_{m+n}^{n+1} = dx_{m+1} \dots dx_{m+n}, \quad d(\alpha)_{m+n}^{n+1} = d\alpha_{m+1} \dots d\alpha_{m+n}. \qquad (26.4)$$

S-корреляционные функции переходят в корреляционные функции (25.2), если в (26.4) положить $\lambda = z$, $\mathcal{A}(\alpha) = \delta(\alpha - \sqrt{\beta})$, $G_0(x) = \Phi(x)$.

Выясним связь S-корреляционных функций с коэффициентными функциями. Как известно (см. § 4), коэффициентная функция $F_m((x)_m)$ определяется через производящий функционал с помощью формулы

$$F_m((x)_m) = \frac{1}{S_\Lambda(0)} \left. \frac{\delta^m S_\Lambda(\varphi)}{\delta\varphi(x_m) \dots \delta\varphi(x_1)} \right|_{\varphi=0}. \qquad (26.5)$$

Выразим правую часть (26.5) через S-корреляционные функции. Для этого нам понадобятся следующие обозначения: пусть $\{m\}$ — последовательность целых чисел от 1 до m. Разобьем это множество на k непересекающихся подмножеств $\{n_1\} = \{i_1, \dots, i_{n_1}\}, \dots$ $\dots, \{n_k\} = \{j_1, \dots, j_{n_k}\}$ с числом элементов $n_1, \dots, n_k$. Обозначим такие разбиения через σ_k. Обозначим также через $X_{n_1}, \dots, X_{n_k}$ последовательности $\{x_{i_k}, \dots, x_{i_{n_1}}\}, \dots, \{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n_k}}\}$, а через $\delta(X_{n_1}) \dots$ $\dots \delta(X_{n_k})$ — произведение $\delta(x_{i_2} - x_{i_1}) \dots \delta(x_{i_{n_1}} - x_{i_1}) \dots \delta(x_{j_2} - x_{j_1}) \dots$ $\dots \delta(x_{j_{n_k}} - x_{j_1})$. Тогда

$$\frac{1}{S_\Lambda(0)} \left. \frac{\delta^m S_\Lambda(\varphi)}{\delta\varphi(x_m) \dots \delta\varphi(x_1)} \right|_{\varphi=0} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma_k} \frac{\delta(X_{n_1})}{n_1!} \dots \frac{\delta(X_{n_k})}{n_k!} \times$$
$$\times \int \rho_\Lambda(x_1, \dots, x_k; \alpha_1, \dots, \alpha_k)\, \alpha_1^{n_1} \dots \alpha_k^{n_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_k, \qquad (26.6)$$
$$x_1 \in \{n_1\}, \dots, x_k \in \{n_k\},$$

где вторая сумма в правой части равенства берется по всевозможным разбиениям σ_k множества $\{m\}$ на k непересекающихся подмножеств. Формула (26.6) проверяется непосредственным вычислением. При $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_m$ из (26.6) имеем

$$F_m(x_1, \dots, x_m) =$$
$$= (i)^m \int \dots \int d\alpha_1 \dots d\alpha_m \alpha_1 \dots \alpha_m \rho(x_1, \dots, x_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Из формул (26.5), (26.6) видим, что S-корреляционные функции полностью определяют коэффициентные функции, а следовательно, и функции Грина. Поэтому изучение коэффициентных функций и функций Грина можно свести к изучению S-корреляционных функций.

26.2. S-корреляционные функции при конечном объеме для неполиномиальных моделей со сглаженным пропагатором [70]

В этом пункте и в дальнейшем будем предполагать, что $\mathcal{A}(\alpha)$ — финитная ограниченная функция, сосредоточенная на отрезке $[-R, R]$, $\sup|\mathcal{A}(\alpha)| = \mathcal{A} < \infty$, поэтому $\mathcal{L}(\varphi)$ не может быть полиномом конечной степени. Модели, лагранжиан взаимодействия которых не является полиномом, называются неполиномиальными. Относительно пропагатора $G_0(x)$ будем предполагать, что он положительно определен, конечен в нуле и в определенном смысле интегрируем. Из положительной определенности $G_0(x)$ вытекает справедливость неравенств

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j G_0(x_i - x_j) \geqslant 0,$$
$$\sum_{i\neq j} \alpha_i\alpha_j G_0(x_i - x_j) \geqslant -G_0(0)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, \tag{26.7}$$

которые являются аналогом условия стабильности (25.5). Эти условия выполняются, например, если вслед за Г. В. Ефимовым [70] положить, что пропагатор $G_0(x)$ имеет представление

$$G_0(x) = \int \frac{\tilde{D}(p^2)}{p^2+\mu^2} e^{-ipx} dp,$$

где $\tilde{D}(p^2)$ — некоторая положительная, основная, быстро убывающая на бесконечности функция такая, что интеграл от $\dfrac{\tilde{D}(p^2)}{p^2+\mu^2}$ абсолютно сходится и конечен следующий интеграл:

$$\int_{-R}^{R} d\beta \int |\exp[-\beta G_0(y)\alpha] - 1|\, dy = C(\alpha), \quad \sup_{\alpha\in[-R,R]} C(\alpha) = C < \infty. \tag{26.8}$$

Условие (26.8) является аналогом условия интегрируемости (25.6).

Покажем, что при этих предположениях $S_\Lambda(\varphi)$ существует и является целой функцией λ при конечном объеме $V(\Lambda)$.

Действительно, из (26.2) и (26.7) вытекает оценка

$$\|S_\Lambda(\varphi)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} \int d(x)_n^1 d(\alpha)_n^1 \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{n} |\mathcal{A}(\alpha_j)|\,\chi_\Lambda(x_j) \exp\Big[-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha_i\alpha_j G_0(x_i - x_j)\Big] \leqslant$$

$$
\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} \mathscr{A}^n (2R)^n V(\Lambda)^n \exp[nR^2 G_0(0)] =
$$

$$
= \exp\{2|\lambda| \mathscr{A} R V(\Lambda) \exp[R^2 G_0(0)]\}, \quad \mathscr{A} = \sup_{\alpha} |\mathscr{A}(\alpha)|, \tag{26.9}
$$

из которой следует, что при конечном объеме $V(\Lambda)$ производящий функционал $S_\Lambda(\varphi)$ существует и является целой функцией λ, ибо ряд (26.2) сходится абсолютно и равномерно по λ. Этот результат был впервые установлен Г. В. Ефимовым [70]. При стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности производящий функционал экспоненциально расходится. Очевидно, что это справедливо и для $S_\Lambda(0)$. Аналогично можно оценить и числитель выражения (26.4), определяющего S-корреляционные функции.

Имеем

$$
\Bigg| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+m}}{n!} \int d(x)_{m+n}^{m+1} d(\alpha)_{m+n}^{m+1} \times
$$

$$
\times \prod_{j=1}^{n+m} \mathscr{A}(\alpha_j) \chi_\Lambda(x_j) \exp\Bigg[- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+m} \alpha_i \alpha_j G_0(x_i - x_j)\Bigg] \Bigg| \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{n+m}}{n!} \int d(x)_{m+n}^{m+1} d(\alpha)_{m+n}^{m+1} \times
$$

$$
\times \prod_{j=1}^{n+m} |\mathscr{A}(\alpha_j)| \chi_\Lambda(x_j) \exp\Bigg[- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+m} \alpha_i \alpha_j G_0(x_i - x_j)\Bigg] \leqslant
$$

$$
\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{n+m}}{n!} \mathscr{A}^{n+m} (2R)^n V(\Lambda)^n \exp[(n+m) R^2 G_0(0)] =
$$

$$
= |\lambda|^m \mathscr{A}^m \exp[mR^2 G_0(0)] \exp\{|\lambda| \mathscr{A} V(\Lambda) \exp[R^2 G_0(0)]\}. \tag{26.10}
$$

Из (26.10) видим, что числитель выражения (26.4) является целой функцией λ при конечном объеме $V(\Lambda)$ и экспоненциально расходится при стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности. S-корреляционные функции при конечном объеме $V(\Lambda)$ определяются, согласно (26.4), как частное двух целых функций от λ и являются поэтому мероморфными функциями. Функция $S_\Lambda(0)$ отлична от нуля на положительной оси как степенной ряд с положительными коэффициентами. Кроме того, $S_\Lambda(0) = 1$ при $\lambda = 0$, поэтому $S_\Lambda(0) \neq 0$ и в некоторой окрестности нуля, размеры которой зависят от $V(\Lambda)$. Вследствие этого S-корреляционные функции не имеют полюсов в некоторой окрестности нуля и на положительной оси.

При стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности числитель и знаменатель в (26.4) экспоненциально стремятся к бесконечности. Чтобы придать смысл S-корреляционным функциям, нужно показать, что эти расходящиеся при $V(\Lambda) \to \infty$ выражения сокращаются, а «остаток» существует при определенных λ.

Из всего сказанного видно, что S-корреляционные функции не только с виду напоминают корреляционные функции классической статистической механики, но и проблемы, возникающие в связи с обоснованием существования их предела при стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности, совершенно аналогичны проблеме существования соответствующего предела для корреляционных функций.

Естественно, что и решать эту проблему для S-корреляционных функций мы будем также с помощью уравнений типа Кирквуда — Зальцбурга.

26.3. Уравнения типа Кирквуда—Зальцбурга для S-корреляционных функций

Покажем, что S-корреляционные функции удовлетворяют неоднородной бесконечной цепочке линейных интегральных уравнений типа Кирквуда — Зальцбурга. Для этого поступим так же, как и при выводе уравнений Кирквуда — Зальцбурга для корреляционных функций. Выделим из суммы

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m+n} \alpha_i \alpha_j G_0(x_i - x_j) = U((x)_{m+n}, (\alpha)_{m+n})$$

слагаемые, содержащие α_1, x_1,

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m+n} \alpha_i \alpha_j G_0(x_i - x_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_1 \alpha_j G_0(x_1 - x_j) + \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant m+n} \alpha_i \alpha_j G_0(x_i - x_j) +$$
$$+ \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_1 \alpha_j G_0(x_1 - x_j) = U^1((x)_m, (\alpha)_m) +$$
$$+ U((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m+n-1}) + U^1((x)^{m+1}_{m+n}, (\alpha)^{m+1}_{m+n}) \qquad (26.11)$$

и подставим в (26.4). Выполнив тождественное преобразование

$$\exp\{-U((x)_{m+n}, (\alpha)_{m+n})\} =$$
$$= \exp\{-U^1((x)_m, (\alpha)_m)\} \exp\{-U((x)^{\hat{1}}_{n+m-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{n+m-1})\} \times$$
$$\times \prod_{j=m+1}^{m+n} \{1 + [\exp(-\alpha_1 \alpha_j G_0(x_j - x_1)) - 1]\}$$

и переобозначив $x_{m+j}=y_j$, $\alpha_{m+j}=\beta_j$,

$$\prod_{j=1}^{n}\{\exp[-\beta_j G_0(y_j-x_1)\alpha_1]-1\}=K_1((y)_m,\ (\beta)_m),$$

получим

$$\rho_\Lambda((x)_m,\ (\alpha)_m)=$$

$$=\lambda\frac{\exp\{-U^1((x)_m,\ (\alpha)_m)\}}{S_\Lambda^l(0)}\prod_{j=1}^{m}\mathcal{A}(\alpha_j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+n-1}}{n!}\int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1\times$$

$$\times\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{s!\,(n-s)!}K_1((y)_s,\ (\beta)_s)\,\chi_\Lambda((x)_m)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}(\beta_j)\exp\{-U((x)_{m+n-1}^{\hat{1}},\ (\alpha)_{m+n-1}^{\hat{1}})\}=$$

$$=\lambda\prod_{j=1}^{m}\mathcal{A}(\alpha_j)\frac{\exp\{-U^1((x)_m,\ (\alpha)_m)\}}{S_\Lambda^l(0)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda^{m+n-1}}{s!\,(n-s)!}\int d(y)_s^1 d(\beta)_s^1 K_1((y)_s(\beta)_s)\times$$

$$\times\int d(y)_n^{s+1}d(\beta)_n^{s+1}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}(\beta_j)\,\chi_\Lambda((x)_{m+n})\times$$

$$\times\exp\{-U((x)_{m+n-1}^{\hat{1}},\ (\alpha)_{m+n-1}^{\hat{1}})\}=$$

$$=\lambda\prod_{j=1}^{m}\mathcal{A}(\alpha_j)\frac{\exp\{-U^1((x)_m,\ (\alpha)_m)\}}{S_\Lambda(0)}\times$$

$$\times\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+n-1}}{n!}\int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1\chi_\Lambda((x)_{m+n})\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\mathcal{A}(\beta_j)\exp\{-U((x)_{n+m-1}^{\hat{1}},\ (\alpha)_{n+m-1}^{\hat{1}})\}+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\int d(y)_s d(\beta)_s K_1((y)_s,\ (\beta)_s)\times$$

$$\times \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^{m+n-1}}{(n-s)!} \int d(y)_n^{s+1} d(\beta)_n^{s+1} \chi_\Lambda((x)_{m+n}) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \mathcal{A}(\beta_j) \exp\{-U((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m+n})\}\Bigg] =$$

$$= \lambda \mathcal{A}(\alpha_1) \chi_\Lambda(x_1) \exp\{-U^1((x)_m, (\alpha)_m)\} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{S_\Lambda(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+n-1}}{n!} \int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1 \chi_\Lambda((\chi)_{m+n-1}) \times\right.$$

$$\times \prod_{k=2}^{m} \mathcal{A}(\alpha_k) \prod_{j=1}^{n} \mathcal{A}(\beta_j) \exp\{-U((x)^{\hat{1}}_{m+n-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m+n-1})\} +$$

$$+ \frac{1}{S_\Lambda(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1 K_1((y)_n, (\beta)_n) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+n+p-1}}{p!} \int d(y)_{n+p}^{n+1} d(\beta)_{n+p}^{n+1} \times$$

$$\times \prod_{k=2}^{m} \mathcal{A}(\alpha_k) \prod_{j=1}^{n+p} \mathcal{A}(\beta_j) \chi_\Lambda((x)_{n+m+p-1}) \exp\{-U((x)^{\hat{1}}_{m+n+p-1},$$

$$\left.(\alpha)^{\hat{1}}_{m+n+p-1})\}\right] = \lambda \chi_\Lambda(x_1) \mathcal{A}(\alpha_1) \exp\left\{-\sum_{i=2}^{m} \alpha_i G_0(x_i - x_1)\, \alpha_1\right\} \times$$

$$\times \left[\rho_\Lambda((x)^{\hat{1}}_{m-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1 K_1((y)_n, (\beta)_n) \times\right.$$

$$\left.\times \rho_\Lambda((x)^{\hat{1}}_{m-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m-1}, (y)_n, (\beta)_n)\right].$$

Отсюда получаем уравнения

$$\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m) =$$

$$= \lambda \chi_\Lambda(x_1) \mathcal{A}(\alpha_1) \exp\left\{-\sum_{i=2}^{n} \alpha_1 G_0(x_1 - x_i)\, \alpha_i\right\} \times \left[\rho_\Lambda((x)^{\hat{1}}_{m-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{m-1}) +\right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1 K_1((y)_n (\beta)_n) \times$$

$$\left.\times \rho_\Lambda((x)^{\hat{1}}_{n-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{n-1}, (y)_n, (\beta)_n)\right], \quad m > 1. \quad (26.12)$$

Для $m=1$ получим отдельное уравнение

$$\rho_\Lambda(x_1, \alpha_1) = \\ = \lambda\chi_\Lambda(x_1)\mathcal{A}(\alpha_1)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d(y)_n^1 d(\beta)_n^1 K_1((y)_n, (\beta)_n)\rho_\Lambda((y)_n, (\beta)_n)\right]. \tag{26.13}$$

Мы получили уравнения (26.12), (26.13), которые естественно назвать уравнениями Кирквуда—Зальцбурга для S-корреляционных функций. В них не содержится расходящегося при $V(\Lambda)\to\infty$ выражения $S_\Lambda(0)$; фактически при выводе уравнения Кирквуда — Зальцбурга оно сократилось с выражением $S_\Lambda(0)$, которое выделилось из числителя дроби (26.4). Если бы в определении S-корреляционных функций (26.4) отсутствовал нормирующий множитель $1/S_\Lambda(0)$, то уравнения для $\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m)$ имели бы по-прежнему вид (26.13), а уравнение для $\rho_\Lambda(x_1, \alpha_1)$ выглядело бы следующим образом:

$$\rho_\Lambda(x_1, \alpha_1) = \lambda\chi_\Lambda(x_1)\mathcal{A}(\alpha_1)[S_\Lambda(0) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d(y)_n d(\beta)_n K_1((y)_n, (\beta)_n)\rho_\Lambda((y)_n, (\beta)_n)] \tag{26.14}$$

и явно содержало бы $S_\Lambda(0)$.

Если в уравнениях (26.12) и (26.14) перейти от последовательности $\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m)$ к последовательности $\frac{1}{S_\Lambda(0)}\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m)$, то мы придем к уравнениям (26.12), (26.13), которые не содержат $S_\Lambda(0)$.

При выводе уравнений Кирквуда — Зальцбурга (26.12), (26.13) переменные (x_1, α_1) играли выделенную роль. В силу симметричности функций $\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m)$ по переменным $(x_1, \alpha_1), \ldots, (x_m, \alpha_m)$, т. е.

$$\rho(x_1, \alpha_1, x_2, \alpha_2, \ldots, x_m, \alpha_m) = \rho(x_{i_1}, \alpha_{i_1}, x_{i_2}, \alpha_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, \alpha_{i_m})$$

($i_1, i_2, \ldots, i_m$ — какой-то набор из чисел $1, 2, \ldots, m$), S-корреляционная функция $\rho_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m)$ будет также удовлетворять уравнению (26.12), в котором роль переменных (x_1, α_1) играют любые из переменных $(x_2, \alpha_2), \ldots, (x_m, \alpha_m)$.

Используем это обстоятельство для симметризации уравнений (26.12). Из условия положительной определенности функций $G_0(x)$, записанного при $-R<\alpha_i<R$, $i=1, 2, \ldots, m$ в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j\neq i}^{m}\alpha_i G_0(x_i-x_j)\alpha_j\right\} \geqslant -G_0(0)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2 \geqslant -G_0(0)R^2, \tag{26.15}$$

следует, что в каждой точке $((x)_m, (\alpha)_m)$ найдется такой индекс j, что

$$\sum_{i \neq j}^{m} \alpha_j G_0 (x_j - x_i) \alpha_i \geqslant - G_0 (0) R^2. \tag{26.16}$$

Обозначим через $\theta_j ((x)_m, (\alpha)_m)$ характеристическую функцию множества тех точек $((x)_m, (\alpha)_m)$, в которых осуществляется неравенство (26.16). Видоизменим эту функцию так:

$$\nu_j ((x)_m, (\alpha)_m) = \frac{\theta_j ((x)_m, (\alpha)_m)}{\sum\limits_{j=1}^{m} \theta_j ((x)_m, (\alpha)_m)}. \tag{26.17}$$

Если π_j — оператор перестановки (x_1, α_1) с (x_j, α_j), то

$$\nu_j ((x)_m, (\alpha)_m) = \pi_j \nu_1 ((x)_m, (\alpha)_m).$$

Выпишем, кроме уравнений (26.12), и все те уравнения, в которых роль переменных (x_1, α_1) играют (x_j, α_j) $(j = 2, \ldots, m)$, умножим их на функцию $\nu_j ((x)_m, \ldots, (\alpha)_m)$ и просуммируем от 1 до m. В результате получим симметризованные уравнения Кирквуда — Зальцбурга:

$$\rho_\Lambda ((x)_m, (\alpha)_m) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j ((x)_m, (\alpha)_m) \lambda \chi_\Lambda ((x)_m) \mathcal{A} (\alpha_j) \times$$

$$\times \exp \Bigl[- \sum_{i \neq j = 1}^{m} \alpha_i G_0 (x_i - x_j) \alpha_j \Bigr] \Bigl[\rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\widehat{j}}, (\alpha)_{m-1}^{\widehat{j}}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d (y)_n^1 \, d (\beta)_n^1 \, K (x_j, \alpha_j, (y)_n, (\beta)_n) \, \rho_\Lambda ((x)_{m-1}^{\widehat{j}},$$

$$(\alpha)_{m-1}^{\widehat{j}}, (y)_n, (\beta)_n) \Bigr], \qquad m > 1, \tag{26.18}$$

$$\rho_\Lambda (x_1, \alpha_1) = \lambda \chi_\Lambda (x_1) \mathcal{A} (\alpha_1) \times$$

$$\times \Bigl[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d (y)_n^1 d (\beta)_n^1 K (x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) \, \rho_\Lambda ((y)_n, (\beta)_n) \Bigr], \qquad m = 1.$$

При выводе (26.18) было учтено, что

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j ((x)_m, (\alpha)_m) = 1.$$

26.4. Решение уравнений Кирквуда—Зальцбурга

Уравнения (26.18) представляют собой линейную неоднородную систему интегральных уравнений. Как и в случае классической статистической механики, будем решать их в банаховом пространстве E_ξ, элементами которого являются последовательности измеримых функций

$$\varphi = (\varphi(x_1, \alpha_1), \varphi((x)_n, (\alpha)_n, \dots, \varphi((x)_m, (\alpha)_m), \dots), \tag{26.19}$$

сосредоточенных по α на отрезке $[-R, R]$, с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_m [\xi^{-m} \sup_{(x,\alpha)} |\varphi((x)_m, (\alpha)_m)|, \tag{26.20}$$

где ξ — некоторая константа, которую определим позже.

Определим пока формально операторы K, χ и Π в этом пространстве:

$$(K\varphi)((x)_m, (\alpha)_m) = \mathcal{A}(\alpha_1) \exp\left[-\sum_{i=2}^{m} \alpha_i G_0(x_i - x_1)\alpha_1\right] \times$$

$$\times \left[\varphi((x)^1_{m-1}, (\alpha)^1_{m-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)^1_n d(\beta)^1_n K(x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) \times\right.$$

$$\left. \times \varphi((x)^{\hat{1}}_{n-1}, (\alpha)^{\hat{1}}_{n-1}, (y)_n, (\beta)_n)\right], \quad m > 1, \tag{26.21}$$

$$(K\varphi)(x_1, \alpha_1) =$$

$$= \mathcal{A}(\alpha_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n d(\beta)_n K(x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) \varphi((y)_n, (\beta)_n), \quad m = 1,$$

$$(\chi_\Lambda \varphi)((x)_m, (\alpha)_m) = \chi_\Lambda((x)_m, (\alpha)_m) \varphi((x)_m, (\alpha)_m), \quad m \geqslant 1, \tag{26.22}$$

$$(\Pi\varphi)((x)_m, (\alpha)_m) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j((x)_m, (\alpha)_m) \widehat{\pi}_j \varphi((x)_m, (\alpha)_m) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \widehat{\pi}_j [\nu_j((x)_m, (\alpha)_m) \varphi((x)_m, (\alpha)_m)]. \tag{26.23}$$

С помощью этих операторов уравнения (26.18) запишутся компактно, как одно операторное уравнение в банаховом пространстве E_ξ:

$$\rho_\Lambda = \lambda \chi_\Lambda \Pi K \rho_\Lambda + \lambda \chi_\Lambda \Omega, \tag{26.24}$$

где $\Omega = (\mathcal{A}(\alpha), 0, \dots, 0)$.

Наряду с уравнением (26.24) введем уравнение при бесконечном объеме:

$$\rho = \lambda \Pi K \rho + \lambda \Omega. \tag{26.25}$$

Поставим себе целью решить уравнения (26.24) и (26.25) при определенных λ и показать, что решение ρ уравнения (26.25) является в определенном смысле пределом для ρ_Λ, когда $V(\Lambda) \to \infty$. Сделаем это в несколько этапов. Докажем вначале вспомогательную лемму.

Лемма 26.1. *Оператор* ΠK *определен и ограничен в* E_ξ, *и для его нормы справедлива оценка*

$$\| \Pi K \| \leqslant \mathcal{A} \xi^{-1} e^{R^2 G_0(0)} e^{\xi C}. \tag{26.26}$$

Доказательство. Из определения функций $\nu_j((x)_m, (\alpha)_m)$ имеем

$$\nu_j((x)_m, (\alpha)_m) \exp\left[- \sum_{i \neq j = 1}^{m} \alpha_i G_0(x_i - x_j) \alpha_j \right] < \exp[G_0(0) R^2]. \tag{26.27}$$

В силу условия интегрируемости справедлива оценка

$$\int d(y)_n^1 \int_{-R}^{R} d(\beta)_n \, | K(x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) | \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} \int_{-R}^{R} d\beta \int dy \, | \exp[-\beta G_0(y) \alpha] - 1 | = C^n(\alpha) \leqslant C^n. \tag{26.28}$$

Используя (26.27) и (26.28), легко получить оценку

$$\sup_{x, \alpha \in [-R, R]} | (\Pi K \varphi)((x)_m, (\alpha)_m) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \pi_j \nu_j ((x)_n, (\alpha)_n) \exp\left[- \sum_{i \neq j = 2}^{m} \alpha_i G_0(x_i - x_j) \alpha_1 \right] \times$$

$$\times \left| \xi^m \sup_{x, \alpha} \frac{| \varphi((x)_{m-1}^{\widehat{1}}, (\alpha)_{m-1}^{\widehat{1}}) |}{\xi^{m-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d(y)_n^1 \int_{-R}^{R} d(\beta)_n^1 \times \right.$$

$$\times | K(x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) | \sup_{x, \alpha} \frac{| \varphi((x)_{n-1}^{\widehat{1}}, (\alpha)_{n-1}^{\widehat{1}}, (y)_n, (\beta)_n) |}{\xi^{m+n-1}} \, \xi^{n+m-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{A} \xi^{m-1} \exp[G_0(0) R^2] \, e^{\xi C} \, \| \varphi \|. \tag{26.29}$$

Для $\|\Pi K\varphi\|$ отсюда получаем

$$\|\Pi K\varphi\| = \sup_m \xi^{-m} \sup_{x,\alpha} |(K\varphi)((x)_m, (\alpha)_m)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_m \xi^{-m}\mathcal{A}\xi^{m-1} \exp[G_0(0) R^2] e^{\xi C} \|\varphi\| = \mathcal{A}\xi^{-1} \exp[G_0(0) R^2] e^{\xi C} \|\varphi\|. \tag{26.30}$$

Из этой оценки следует, что

$$\|\Pi K\| \leqslant \mathcal{A}\xi^{-1} \exp[G_0(0) R^2] e^{\xi C}.$$

Легко понять, что минимум в правой части неравенства (26.26) достигается при $\xi = C^{-1}$. В дальнейшем будем рассматривать только E_ξ с таким ξ. Для нормы $\|\Pi K\|$ будем окончательно иметь оценку

$$\|\Pi K\| \leqslant \mathcal{A}C \exp[G_0(0) R^2 + 1]. \tag{26.31}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 26.1. *Уравнение* (26.24) *при*

$$|\lambda| < (\mathcal{A}C)^{-1} \exp[-G_0(0) R^2 - 1] \tag{26.32}$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Так как оператор χ_Λ имеет норму, равную единице, то

$$\|\chi_\Lambda \Pi K\| \leqslant \mathcal{A}C \exp[G_0(0) + 1].$$

Последовательность $\lambda\chi_\Lambda\Omega$ принадлежит E_ξ, а норма оператора $\lambda\chi_\Lambda\Pi K$ при λ из круга (26.32) меньше единицы:

$$\|\lambda\chi_\Lambda\Pi K\| \leqslant |\lambda| \mathcal{A}C \exp[G_0(0) R^2 + 1] < k < 1.$$

Решение уравнения (26.24) поэтому существует, единственно и представляется сходящимся по норме E_ξ рядом:

$$\rho_\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\chi_\Lambda\Pi K)^n \lambda\chi_\Lambda\Omega = (I - \lambda\chi_\Lambda\Pi K)^{-1}\lambda\chi_\Lambda\Omega, \tag{26.33}$$

причем

$$\|\rho_\Lambda\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\chi_\Lambda\Pi K\|^n \|\lambda\chi_\Lambda\Omega\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} k^n |\lambda| \mathcal{A}C \leqslant \frac{1}{1-k} \exp[-G_0(0) R^2 - 1].$$

Решение ρ_Λ является голоморфной по λ функцией в круге (26.32), ибо ряд (26.33) в нем абсолютно и равномерно сходится.

Следствие. Решение уравнения (26.25) существует, единственно и является голоморфной функцией λ в круге (26.32), в котором его можно представить рядом, сходящимся по норме пространства E_ξ:

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \Pi K)^n \lambda \Omega = (I - \lambda \Pi K)^{-1} \lambda \Omega, \tag{26.34}$$

причем

$$\|\rho\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda \Pi K\|^n \|\lambda \Omega\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} k^n |\lambda| \mathcal{A} C \leqslant \frac{1}{1-k} \exp[-G_0(0) R^2 - 1].$$

Из теоремы и следствия вытекает, что при достаточно малых λ (из круга (26.32)) решения уравнений Кирквуда—Зальцбурга как при конечном, так и при бесконечном объеме представляются сходящимся рядом теории возмущений.

26.5. Предел последовательности ρ_Λ при стремлении объема к бесконечности

Исследуем предел последовательности S-корреляционных функций ρ_Λ при стремлении объема $V(\Lambda)$ к бесконечности. Приведем ради полноты изложения следующую теорему.

Теорема 26.2. *Для всех λ из круга* (26.32) *функции ρ_Λ имеют своим пределом при $V(\Lambda) \to \infty$ функции $\rho((x)_m)$ в том смысле, что*

$$|\rho_\Lambda((x)_m) - \rho((x)_m)| < \xi^m \varepsilon(\lambda'), \tag{26.35}$$

где функция $\lim\limits_{\lambda' \to \infty} \varepsilon(\lambda') \to 0$, а λ' обозначает наименьшее расстояние точек $x_1, \ldots, x_m \in \Lambda$ до границы сосуда Λ.

Доказательство. Для $\Lambda' \subset \Lambda''$ имеем

$$0 \leqslant \chi_{\Lambda''}((y)_m) - \chi_{\Lambda'}((y)_m) \leqslant \sum_{j=1}^{m} (1 - \chi_{\Lambda'}(y)_j). \tag{26.36}$$

Обозначим через $\Lambda (\Lambda \subset \Lambda')$ множество тех точек области Λ', которые отстоят от ее границы больше чем на δ. Используя (26.28) и (26.36), докажем оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(x)_m, (\alpha)_m} |\chi_\Lambda(x)_m \int_{-R}^{R} d(\beta)_n^1 \int d(y)_n^1 K(x, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) \times$$

$$\times [\chi_{\Lambda''}((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) - \chi_{\Lambda'}((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n)] \varphi((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (\alpha)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n, (\beta)_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi \|_\xi \xi^{m+n-1} \chi_\Lambda ((x)_m) \int_{-R}^{R} d(y)_n \int d(\beta)_n \times$$

$$\times | K(x_1, \alpha_1, (y)_n, (\beta)_n) \| \chi_{\Lambda''} ((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) - \chi_{\Lambda'} ((x)_{m-1}^{\hat{1}}, (y)_n) | \leqslant$$

$$\leqslant n \| \varphi \|_\xi \xi^{m+n-1} C^{n+1} \int_{-R}^{R} d\beta \int (\exp[-\beta\Phi(y - x_1)\alpha] - 1) | \chi_\Lambda ((x)_m) | \times$$

$$\times [1 - \chi_{\Lambda'}(y)]\, dy \leqslant n \| \varphi \|_\xi \xi^{m+n-1} C^{n-1} C_\delta, \quad (26.37)$$

где

$$C_\delta = \sup_\alpha \int_{-R}^{R} d\beta \int_{|x|>\delta} dx\, | \exp[-\beta\Phi(x)\alpha] - 1 |. \quad (26.38)$$

Дальше справедлива оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(x)_m, (\alpha)_m} \| [(\chi_{\Lambda'} \Pi K \chi_{\Lambda''} - \chi_\Lambda \Pi K \chi_{\Lambda'}) \varphi] ((x)_m) \| \leqslant$$

$$\leqslant \exp[G_0(0) R^2] \| \varphi \|_\xi \xi^m e^{\xi C} C_\delta,$$

из которой получаем

$$\| \chi_\Lambda \Pi K \chi_{\Lambda''} - \chi_\Lambda \Pi K \chi_{\Lambda'} \| \leqslant \eta(\delta), \quad (26.39)$$

где

$$\eta(\delta) = \exp[G_0(0) R^2] e^{\xi C} C_\delta. \quad (26.40)$$

Рассмотрим множество $\Lambda(\delta)$ тех точек сосуда Λ, которые отстоят от его границы больше чем на δ; из оценки (26.39) следуют неравенства

$$\| \chi_{\Lambda(j\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda(k\delta)} - \chi_{\Lambda(i\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda((j-1)\delta)} \| \leqslant \eta(\delta) \text{ при } k \leqslant j - 1$$

и

$$\| \chi_{\Lambda(j\delta)} \Pi K - \chi_{\Lambda(j\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda((j-1)\delta)} \| \leqslant \eta(\delta).$$

Из них следует, что

$$\| \chi_{\Lambda(k\delta)} (\Pi K \chi_\Lambda)^k - \chi_{\Lambda(k\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda((k-1)\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda((k-2)\delta)} \ldots \chi_{\Lambda(\delta)} \Pi K \chi_\Lambda \| \leqslant$$

$$\leqslant k\eta(\delta) (\| \Pi K \|)^{k-1},$$

$$\| \chi_{\Lambda(k\delta)} \Pi K \chi_{\Lambda((k-1)\delta)} \Pi K \ldots \chi_{\Lambda(\delta)} \Pi K \chi_\Lambda - \chi_{\Lambda(k\delta)} (\Pi K)^k \| \leqslant k\eta(\delta) \| \Pi K \|. \quad (26.41)$$

Поэтому будем иметь неравенство

$$\| \chi_{\Lambda(l\delta)} (\chi_\Lambda \Pi K)^k \chi_\Lambda - \chi_{\Lambda(l\delta)} (\Pi K)^k \| \leqslant 2k\eta(\delta) \| \Pi K \|^{k-1}, \quad (26.42)$$

справедливое при $k = 1, \ldots, l$.

Кроме того, имеем

$$\| \chi_{\Lambda(l\delta)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\chi_\Lambda \Pi K)^n - \sum_{n=0}^{l} (\lambda\chi_\Lambda \Pi K)^n \right] \chi_\Lambda \| \leqslant \frac{\| \lambda \Pi K \|^{l+1}}{1 - \| \lambda \Pi K \|}, \tag{26.43}$$

$$\left\| \chi_{\Lambda(l\delta)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \Pi K)^n - \sum_{n=0}^{l} (\lambda \Pi K)^n \right] \right\| \leqslant \frac{(\| \lambda \Pi K \|)^{l+1}}{1 - \| \lambda \Pi K \|}. \tag{26.44}$$

Из (26.42), (26.43) и (26.44) следует

$$\| \chi_{\Lambda(l\delta)} (1 - \lambda\chi_\Lambda \Pi K)^{-1} \chi_\Lambda - \chi_{\Lambda(l\delta)} (1 - \lambda \Pi K)^{-1} \| \leqslant \frac{2 \| \lambda \Pi K \|^{l+1}}{1 - \| \Pi K \|} +$$

$$+ 2\eta(\delta) |\lambda| \sum_{k=1}^{l} k (\| \lambda \Pi K \|)^{k-1} \leqslant \frac{2 \| \lambda \Pi K \|^{l+1}}{1 - \| \lambda \Pi K \|} + \frac{2 |\lambda| \eta(\delta)}{1 - \| \lambda \Pi K \|}. \tag{26.45}$$

Если l и δ устремить к бесконечности, то правая часть неравенства (26.45) стремится к нулю. Если положим $\lambda' = l\delta$, то получим, что существует положительная убывающая и независящая от области Λ функция $\varepsilon(\lambda')$ такая, что

$$\lim_{\lambda' \to \infty} \varepsilon(\lambda') = 0 \tag{26.46}$$

и

$$\| \chi_{\Lambda(\lambda)} (1 - \lambda\chi_\Lambda \Pi K)^{-1} \chi_\Lambda - \chi_{\Lambda(\lambda)} (1 - \lambda \Pi K)^{-1} \| \leqslant \frac{\varepsilon(\lambda)}{\|\lambda\Omega\|}. \tag{26.47}$$

Отсюда уже следует

$$\| \chi_{\Lambda(\lambda')} \rho_\Lambda - \chi_{\Lambda(\lambda')} \rho \| \leqslant \varepsilon(\lambda'), \tag{26.48}$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, S-корреляционные функции существуют при бесконечном объеме и являются голоморфными функциями λ в некоторой окрестности нуля. Согласно (26.6) существуют при бесконечном объеме и коэффициентные функции F_m и также являются голоморфными функциями λ в некоторой окрестности нуля.

26.6. Модели с нефинитным $\mathcal{A}(\alpha)$ *)

Рассмотрим случай, когда носитель $\mathcal{A}(\alpha)$ — вся прямая R^1. Очевидно, что тогда оператор Кирквуда — Зальцбурга не определен в банаховом пространстве последовательностей функций с компактным носителем.

*) Этот пункт написан В. И. Скрипником.

Покажем теперь, что если функция $\mathcal{A}(\alpha)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то можно найти банахово пространство последовательностей функций, в котором оператор ΠK не только плотно определен, но и ограничен [159].

Теорема 26.3. *Пусть $\mathcal{B}^\nu$ — банахово пространство последовательностей измеримых функций $\{\psi(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\} \geqslant 1$ с нормой*

$$\|\psi\|_\nu = \sup_N \sup_{(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \left| \prod_{j=1}^n \exp(-e^{|\alpha|^\nu} \mathcal{A}(\alpha_j) \psi(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \right|,$$

где $\nu > 1$.

Тогда, если существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int |\mathcal{A}(\alpha)| \exp[(1+\delta) e^{|\alpha|^\nu}] d\alpha < \infty, \tag{26.49}$$

справедлива оценка

$$\|\Pi K\|_\nu = \sup_{\psi \in \mathcal{B}^\nu} \frac{\|\Pi K \psi\|_\nu}{\|\psi\|_\nu} \leqslant \sup_\alpha e^{\varphi_\nu(\alpha)} < \infty,$$

где

$$\varphi_\nu(\alpha) = [-e^{|\alpha|^\nu} + \alpha^2 G_0(0) + \\ + \int |\mathcal{A}(\beta)| \exp(e^{|\beta|^\nu}) |\exp[-\beta\alpha G_0(x)] - 1| \, dx d\beta].$$

Доказательство. Так как вывод оценки $\|\Pi K\|_\nu \leqslant \sup e^{\varphi_\nu(\alpha)}$ ничем по существу не отличается от вывода оценки нормы оператора ΠK в пространство последовательностей функций с компактным носителем (т. е. когда $\operatorname{supp} \mathcal{A} \subset [-R, R]$), то мы приступим сразу к оценке $\varphi_\nu(\alpha)$.

Нетрудно видеть, что [159]

$$\int d\beta \, dx \, |\mathcal{A}(\beta)| \exp(e^{|\beta|^\nu}) |\exp[-\alpha\beta G_0(x)] - 1| \leqslant \\ \leqslant \int |\mathcal{A}(\beta)| \exp(1+\delta) e^{|\beta|^\nu}] d\beta \sup_\beta \exp(-\delta e^{|\beta|^\nu}) \times \\ \times \int dx \, |\exp[-\alpha\beta G_0(x)] - 1| \leqslant \frac{1}{G_0(0)} \int G_0(x) \, dx \sup_\beta \exp[-\delta e^{|\beta|^\nu} + \\ + |\alpha\beta G_0(0)|] \int |\mathcal{A}(\beta)| \exp[(1+\delta) e^{|\beta|^\nu}] d\beta \leqslant \\ \leqslant C_{\delta,\nu}(\mathcal{A}) \sup_\beta \exp[-\delta e^{|\beta|^\nu} + |\alpha\beta^\nu G_0(0)|] = \\ = C_{\delta,\nu}(\mathcal{A}) \exp\left\{-|\alpha G_0(0)| + |\alpha G_0(0)| \left[\ln \frac{G_0(0)}{\delta} |\alpha|\right]\right\}.$$

Таким образом,

$$\varphi_\nu(\alpha) \leqslant -\exp(|\alpha|^\nu) + \alpha^2 G_0(0) + C_{\delta,\nu}(\mathcal{A})\exp\left\{|\alpha G_0(0)|\ln\frac{G_0(0)}{\delta}|\alpha|\right\}.$$

Последнее неравенство означает, что $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty}\exp(\varphi_\nu(\alpha)) = 0$, т. е.

$$\|\Pi K\|_\nu < \infty.$$

Таким образом, справедлив следующий вывод: решение уравнения (26.25) существует в банаховом пространстве $\mathcal{B}^\nu$ тогда, когда $\mathcal{A}(\alpha)$ удовлетворяет условию (26.49). Это решение единственно и представляется в виде ряда

$$\Sigma(-\lambda)^n(\Pi K)^n\lambda\Omega,$$

сходящегося по норме пространства $\mathcal{B}^\nu$ при $|\lambda| < \|\Pi K\|_\nu$.

26.7. S-корреляционные функции в рамках канонического ансамбля

В этом разделе мы введем S-корреляционные функции, которые будут аналогичны функциям распределения канонического ансамбля [18].

Для этого воспользуемся следующими функциями:

$$D_N((x)_N, (\alpha)_N, \Lambda) = Q_N^{-1}(\Lambda)\prod_{i=1}^{N}\mathcal{A}(\alpha_i)\exp\{-U((x)_N, (\alpha)_N)\}, \quad (26.50)$$

где

$$Q_N(\Lambda) = \int d(x)_N\, d(\alpha)_N\, \chi_\Lambda((x)_N)\exp\{-U((x)_N, (\alpha)_N)\}\prod_{i=1}^{N}\mathcal{A}(\alpha_i).$$

Функции $D_N((x)_N, (\alpha)_N, \Lambda)$ назовем S-каноническим распределением, а $Q_N(\Lambda)$ — S-конфигурационным интегралом.

Функции распределения образуем так:

$$F_s^N((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda) =$$
$$= V^s\int d(x)_N^{s+1}d(\alpha)_N^{s+1}\chi_\Lambda((x)_N)\,D_N((x)_N, (\alpha)_N, \Lambda), \quad (26.51)$$

$$F_s^{N-k}((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda) =$$
$$= V^s\int d(x)_{N-k}^{s+1}\,d(\alpha)_{N-k}^{s+1}\,\chi_\Lambda((x)_{N-k})\,D_{N-k}((x)_{N-k}, (\alpha)_{N-k}, \Lambda),$$

$$V = V(\Lambda).$$

Чтобы получить уравнения для функций (26.51), вспомним известное уже тождество

$$\exp\{-U((x)_N, (\alpha)_N)\} =$$
$$= \exp\{-U^1((x)_s, (\alpha)_s)\}\exp\{-U((x)^{\widehat{1}}_{N-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{N-1})\} \times$$
$$\times \prod_{j=s+1}^{N} \{1 + [\exp(-\alpha_j G_0(x_j - x_1)\alpha_1) - 1]\}. \quad (26.52)$$

Подставив (26.52) в (26.51), получим

$$F_s^N((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda) =$$
$$= V^{-s}\frac{Q_{N-1}(\Lambda)}{Q_N(\Lambda)}\mathcal{A}(\alpha_1)\chi_\Lambda(x_1)\exp\{-U^1((x)_s, (\alpha)_s)\} \times$$
$$\times \int d(y)_{N-s} d(\beta)_{N-s}\chi_\Lambda((x)^{\widehat{1}}_{N-1}) D_{N-1}((x)^{\widehat{1}}_{N-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{N-1}, \Lambda) \times$$
$$\times \left\{1 + \sum_{m=1}^{N-s} C^m_{N-s} K_1((y)_m, (\beta)_m)\right\} =$$
$$= a_N(\Lambda)\mathcal{A}(\alpha_1)\chi_\Lambda(x_1)\exp\{-U^1((x)_s, (\alpha)_s)\}\{F^{N-1}_{s-1}((x)^{\widehat{1}}_{s-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{s-1}, \Lambda) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{N-s}\frac{\left(1 - \frac{s}{N}\right)\dots\left(1 - \frac{s+m-1}{N}\right)}{m!\mathfrak{v}^m}\int d(y)_m d(\beta)_m K_1((y)_m, (\beta)_m) \times$$
$$\times F^{N-1}_{s+m-1}((x)^{\widehat{1}}_{s-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{s-1}, (y)_m, (\beta)_m, \Lambda)\}, \quad (26.53)$$

где

$$a_N(\Lambda) = \mathfrak{v}N\frac{Q_{N-1}(\Lambda)}{Q_N(\Lambda)}, \qquad V = \mathfrak{v}N.$$

Параметр $1/\mathfrak{v}$ имеет смысл плотности частиц в четырехмерном объеме. Для $s = N$ получим

$$F_N^N((x)_N, (\alpha)_N, \Lambda) =$$
$$= a_N(\Lambda)\mathcal{A}(\alpha_1)\chi_\Lambda(x_1)\exp\{-U^1((x)_N, (\alpha_N)\} F^{N-1}_{N-1}((x)^{\widehat{1}}_{N-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{N-1}, \Lambda).$$

Подобным образом найдем уравнение для $F_s^{N-k}((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda)$:

$$F_s^{N-k}((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda) = \frac{N}{N-k}a_{N-k}(\Lambda)\mathcal{A}(\alpha_1)\chi_\Lambda(x_1) \times$$
$$\times \exp\{-U^1((x)_s, (\alpha)_s)\}\{F^{N-k+1}_{s-1}((x)^{\widehat{1}}_{s-1}, (\alpha)^{\widehat{1}}_{s-1}, \Lambda) +$$

$$+\sum_{m=1}^{N-k-s}\frac{\left(1-\frac{k+s}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{k+s+m-1}{N}\right)}{m!\mathfrak{v}^m}\int d(y)_m\,d(\beta)_m\times$$

$$\times K_1((y)_m,\ (\beta)_m)\,F_{s+m-1}^{N-k+1}((x)_{s-1}^{\widehat{1}},\ (\alpha)_{s-1}^{\widehat{1}},\ (y)_m,\ (\beta)_m,\ \Lambda)\},$$

$$F_{N-k}^{N-k}((x)_{N-k},\ (\alpha)_{N-k},\ \Lambda)=$$

$$=\frac{N}{N-k}a_{N-k}(\Lambda)\mathcal{A}(\alpha_1)\chi_\Lambda(x_1)\exp\{-U^1((x)_{N-k},\ (\alpha)_{N-k})\}\times$$

$$\times F_{N-k+1}^{N-k-1}((x)_{N-k-1}^{\widehat{1}},\ (\alpha)_{N-k-1}^{1}).$$

Устремим V и N к бесконечности, но так, чтобы плотность оставалась постоянной ($1/\mathfrak{v}=\mathrm{const}$), и определим пределы всех величин:

$$F_s((x)_s,\ (\alpha)_s)=\lim_{V,N\to\infty}F_s^N((x_s),\ (\alpha)_s,\ \Lambda),$$

$$a(\mathfrak{v})=\lim_{V,N\to\infty}a_N(\Lambda),$$

$$F_s^k((x)_s,\ (\alpha)_s)=\lim_{V,N\to\infty}F_s^{N-k}((x)_s,\ (\alpha)_s,\ \Lambda),$$

$$a_k(\mathfrak{v})=\lim_{V,N\to\infty}a_{N-k}(\Lambda).$$

Если потребовать, чтобы $F_s^k((x)_s,\ (\alpha)_s)=F_s((x)_s,\ (\alpha)_s)$, то получим уравнение

$$F_s((x)_s,\ (\alpha)_s)=a(\mathfrak{v})\mathcal{A}(\alpha_1)\exp\left\{-\sum_{i=2}^{s}\alpha_i G_0(x_i-x_1)\alpha_1\right\}\times$$

$$\times\{F_{s-1}((x)_{s-1}^1,\ (\alpha)_{s-1}^1)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{\mathfrak{v}^m}\int d(y)_m\,d(\beta)_m K_1((y)_m,\ (\beta)_m)\times$$

$$\times F_{s+m-1}((x)_{s-1}^1,\ (\alpha)_{s-1}^1,\ (y)_m,\ (\beta)_m)\}.\quad(26.54)$$

Если положить $\rho_s((x)_s^1,\ (\alpha)_s)=F_s((x)_s,\ (\alpha)_s)/\mathfrak{v}^s$ и $a(\mathfrak{v})=\lambda\mathfrak{v}$, то уравнение (26.54) для F_s переходит в уравнение (26.12) для ρ_s и наоборот.

Условие существования решения симметризованного уравнения (26.54) в E_ξ таково [130]:

$$\left|\frac{a(\mathfrak{v})}{\mathfrak{v}}\right|<(\mathcal{A}C)^{-1}\exp[-G_0(0)R^2-1].\quad(26.55)$$

До сих пор мы лишь формально определили предельный переход, а также равенства между $F_s((x)_s, (\alpha)_s)$ и $F_s^k((x)_s, (\alpha)_s)$, $a(\mathfrak{v})$ и $a_k(\mathfrak{v})$. Используя результаты работ [18, 19], можно показать, что в области (26.55) $F_s^N((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda)$ стремятся к $F_s((x)_s, (\alpha)_s)$ в смысле (26.35) и что $F_s^k((x)_s, (\alpha)_s) = F_s((x)_s, (\alpha)_s)$, $a_k(\mathfrak{v}) = a(\mathfrak{v})$. Более того, функция $a(\mathfrak{v})$ оказывается голоморфной функцией $\mathfrak{v}$ в некоторой окрестности нуля.

По-видимому, справедлива следующая физическая интерпретация полученных выше результатов. Функцию $D_N((x)_N, (\alpha)_N, \Lambda)$ можно рассматривать как функцию распределения вероятностей того, что N виртуальных частиц имеют «обратную температуру» $(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_N^2)$ и находятся в точках $x_1, \ldots, x_N$. В свою очередь $(V^s)^{-1} F_s^N((x)_s, (\alpha)_s, \Lambda)$ являются функциями распределения вероятностей положения и «обратной температуры» s виртуальных частиц (при произвольном расположении и «обратной температуре» остальных $N-s$ частиц).

Важно подчеркнуть, что «плотность» $1/\mathfrak{v}$ может быть фактически получена, ибо уравнение $\mathfrak{v}^1 a(\mathfrak{v}) = \lambda$ разрешимо относительно $1/\mathfrak{v}$ [18, 142].

В заключение отметим, что идеи статистической механики широко используются при исследовании моделей квантовой теории поля. Так, в работе Скрипника [159] доказано существование решения уравнений Кирквуда — Зальцбурга для моделей, у которых функция $\mathcal{A}(\alpha)$ имеет неограниченный носитель. Используя результаты работы [130], Альбеверио и Хе-Крон [2] доказали единственность вакуума для неполиномиальных моделей, Фрёлих [181] установил существование матрицы рассеяния для модели синус-Гордон. В работе Ганчковяка [35] уравнения Кирквуда — Зальцбурга были получены функциональными методами. В работе Гуэрры, Розена и Саймона [61] исследовалась модель $\lambda(:\varphi^4:)_2$ с помощью модели Изинга (за ссылками можно отослать читателя к книге Саймона [146]. И, наконец, в работе Добрушина и Минлоса [68] метод гиббсовских случайных полей [66, 67] был использован при исследовании функций Грина модели $\lambda(:\varphi^4:)_2$.

Глава VIII

УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Релятивистская квантовая электродинамика является одним из важнейших и наиболее развитых разделов квантовой теории поля. Это объясняется прежде всего реальностью электромагнитного взаимодействия и замечательным согласием между экспериментальными данными и вычислениями для большинства атомных явлений. Блестящие результаты по вычислению лэмбовского сдвига, сверхтонкой структуры атома водорода, аномального магнитного момента электрона продемонстрировали высокую эффективность нового математического аппарата, развитого в пионерских работах Томонаги [165], Швингера [198], Фейнмана [168] и Дайсона [62].

Вместе с тем основным методом исследований в квантовой электродинамике является теория возмущений, которая содержит значительное число трудностей. Кроме тех трудностей, которые присущи всей квантовой теории поля, существуют специфические, связанные с нулевой массой покоя фотона, векторным характером электромагнитного поля. Поэтому исследование квантовой электродинамики — чрезвычайно трудная, но вместе с тем и очень важная задача. Если вопросы, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями, достаточно полно изложены во многих известных учебниках и монографиях [8, 25, 197] по квантовой теории поля, то поведение полного ряда теории возмущений обсуждалось только в отдельных работах [85, 87, 134—136].

В настоящей главе мы рассмотрим основные уравнения квантовой электродинамики — уравнения для функций Грина и коэффициентных функций S-матрицы. Очень важным является вопрос о решении таких уравнений как в рамках теории возмущений, так и вне ее.

§ 27. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Впервые замкнутая система уравнений для функций Грина была получена Швингером [202]. Более удобной, как для развития функциональных методов решения, так и для обобщения на квантовую статистику, оказалась система функциональных уравнений, учитывающих взаимодействие с внешними источниками бозе- и ферми-полей. Последние очень детально исследованы в работах Е. С. Фрадкина [173—177].

27.1. Уравнения Швингера

Рассмотрим полный лагранжиан системы взаимодействующих полей, описывающий процессы квантовой электродинамики:

$$\mathcal{L}(x)=\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{3}:\left(\bar{\psi}(x)\gamma^n\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^n}-\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^n}\gamma^n\psi(x)\right):-$$
$$-m:\bar{\psi}(x)\psi(x):-\frac{1}{2}\sum_{m,n=0}^{3}g^{mm}g^{nn}:\frac{\partial\mathcal{A}_m}{\partial x^n}\frac{\partial\mathcal{A}_m}{\partial x^n}:-$$
$$-e\sum_{n=0}^{3}:\bar{\psi}(x)\gamma^n\psi(x)\mathcal{A}_n(x):. \quad (27.1)$$

Используя вариационный принцип, получим следующие уравнения движения:

$$(\overrightarrow{\partial}_x-m)\psi(x)=\sum_{n=0}^{3}e\gamma^n\mathcal{A}_n(x)\psi(x),$$
$$\bar{\psi}(x)(\overleftarrow{\partial}_x+m)=-\sum_{n=0}^{3}e\bar{\psi}(x)\gamma^n\mathcal{A}_n(x), \quad (27.2)$$
$$\Box_x\mathcal{A}_n(x)=-e:\bar{\psi}(x)\gamma^n g^{nn}\psi(x):.$$

В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений книги Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [25]. Напомним, что

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\partial}_x=\sum_{n=0}^{3}i\gamma^n\frac{\partial}{\partial x^n},\quad \overleftarrow{\partial}_x=\sum_{n=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x^n}i\gamma^n,\quad \Box_x=-\sum_{n=0}^{3}g^{nn}\frac{\partial^2}{\partial x^n\partial x^n},$$

$\bar{\psi}=\overset{*}{\psi}\gamma^0$, а γ^μ $(\mu=0,1,2,3)$ — матрицы Дирака, удовлетворяющие условию

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu},\quad (\gamma^\mu)^*=g^{\mu\mu}\gamma^\mu. \quad (27.3)$$

Ищутся решения системы дифференциальных уравнений (27.2), которые удовлетворяют одновременным коммутационным соотношениям для операторов ψ, $\bar{\psi}$ и $\mathcal{A}$:

$$[\mathcal{A}_\mu(x),\mathcal{A}_\nu(y)]=[\mathcal{A}_\mu(x),\psi_\alpha(y)]=[\mathcal{A}_\mu(x),\bar{\psi}_\alpha(y)]_-=0,$$

$$[\partial_0 \mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(y)]_- = ig_{\mu\nu}\delta^3(x-y),$$

$$[\psi(x), \psi(y)]_+ = [\bar\psi(x), \psi(y)]_+ = 0, \tag{27.4}$$

$$[\psi(x), \bar\psi(y)]_+ = \gamma^0\delta^3(x-y), \quad x^0 = y^0.$$

Определим функции Грина следующим образом:

$$G_{m,n}(y, z; x) =$$

$$= G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) =$$

$$= (\Phi_0, T(\psi_{\alpha_1}(y_1)\ldots\psi_{\alpha_m}(y_m)\bar\psi_{\beta_1}(z_1)\ldots\bar\psi_{\beta_m}(z_m)\mathcal{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots\mathcal{A}_{\mu_n}(x_n)\Phi_0). \tag{27.5}$$

Здесь $\psi(y)$, $\bar\psi(z)$, $\mathcal{A}(x)$ — гейзенберговы операторы спинорного и электромагнитного полей; Φ_0 — физический вакуумный вектор; $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$—векторные индексы, $\mu_i = 0, 1, 2, 3$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — спинорные индексы, α_i, $\beta_j = 1, 2, 3, 4$.

Используя определение (27.5), уравнения (27.2) и одновременные коммутационные соотношения (27.4), получим следующую цепочку уравнений для функций Грина:

$$(\vec{\hat\partial}_{y_1} - m)G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3} e\gamma^\mu G_{m,n+1}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu y_1, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ (-1)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1} i\delta(y_1 - z_j)\delta_{\alpha_1\beta_j} \times$$

$$\times G_{m-2,n}(\alpha_2 y_2, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \widehat{\beta_j z_j}, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n),$$

$$G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n)(\overleftarrow{\hat\partial}_{z_1} + m) =$$

$$= -\sum_{\mu=0}^{3} eG_{m,n+1}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu z_1, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n)\gamma^\mu -$$

$$- (-1)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1} i\delta(y_j - z_1)\delta_{\alpha_j\beta_1} \times$$

$$\times G_{m-2,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \widehat{\alpha_j y_j}, \ldots, \alpha_n y_n; \beta_2 z_2, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n), \tag{27.6}$$

$$\Box_{x_1} G_{m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) =$$

$$= e(-1)^{m+1} g^{\mu_1\mu_1} \times$$

$$\times \sum_{\alpha,\beta} \gamma^{\mu_1}_{\beta\alpha} G_{m+1,n-1}(\alpha x_1, \alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta x_1, \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n) -$$

$$- \sum_{j=2}^{n} i g^{\mu_1 \mu_j} \delta(x_1 - x_j) G_{m,n-2}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_m y_m; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m;$$

$$\mu_2 x_2, \ldots, \widehat{\mu_j x_j}, \ldots, \mu_n x_n).$$

Решение системы (27.6) удается получить, если свести эту бесконечную систему к замкнутой системе трех функциональных уравнений. Мы изложим здесь метод получения такого решения, следуя работе Е. С. Фрадкина [173].

27.2. Функциональные уравнения

Как и в § 4, введем порождающий функционал для функций Грина следующим образом:

$$Z(\eta, \bar{\eta}, j) =$$

$$= \left(\Phi_0, T \exp\left[i \int dx \left(\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \mathcal{A}(x) j(x)\right)\right] \Phi_0\right) =$$

$$= \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_l \\ \beta_1,\ldots,\beta_m \\ \mu_1,\ldots,\mu_n}} \frac{i^{l+m+n}}{l!\,m!\,n!} \int dy_1 \ldots dy_l dz_1 \ldots dz_m dx_1 \ldots dx_n \times$$

$$\times \bar{\eta}_{\alpha_l}(y_l) \ldots \bar{\eta}_{\alpha_1}(y_1) G_{l,m,n}(\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_l y_l; \beta_1 z_1, \ldots, \beta_m z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) \times$$

$$\times \eta_{\beta_m}(z_m) \ldots \eta_{\beta_1}(z_1) j^{\mu_1}(x_1) \ldots j^{\mu_n}(x_n). \quad (27.7)$$

Варьируя (27.7) по $\bar{\eta}, \eta$ и j, получим

$$\frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(y_1)} = i \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{i^{l+m+n}}{l!\,m!\,n!} (-1)^l \int dy'_1 \ldots dy'_l dz'_1 \ldots dz'_m dx'_1 \ldots dx'_n \times$$

$$\times \bar{\eta}(y'_1) \ldots \bar{\eta}(y'_l) G_{l+1,m,n}(y_1, y'_1, \ldots, y'_l; z'_1, \ldots, z'_m; x'_1, \ldots, x'_n) \times$$

$$\times \eta(z'_1) \ldots \eta(z'_m) j(x'_1) \ldots j(x'_n), \quad (27.8)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta(z_1)} = i \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{i^{l+m+n}}{l!\,m!\,n!} (-1)^{l+m} \int dy'_1 \ldots dy'_l dz'_1 \ldots dz'_m dx'_1 \ldots dx'_n \times$$

$$\times \bar{\eta}(y'_1) \ldots \bar{\eta}(y'_l) G_{l,m+1,n}(y'_1, \ldots, y'_l; z_1, z'_1 \ldots, z'_m; x'_1, \ldots, x'_n) \times$$

$$\times \eta(z'_1) \ldots \eta(z'_m) j(x'_1) \ldots j(x'_n), \quad (27.9)$$

$$\frac{\delta Z}{\delta j(x_1)} = i \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{i^{l+m+n}}{l!\,m!\,n!} \int dy'_1 \ldots dy'_l dz'_1 \ldots dz'_m dx'_1 \ldots dx'_n \times$$
$$\times \bar{\eta}(y'_1) \ldots \bar{\eta}(y'_l) G_{l,m,n+1}(y'_1, \ldots, y'_l; z'_1, \ldots, z'_m, x_1, x'_1, \ldots, x'_n) \times$$
$$\times \eta(z'_1) \ldots \eta(z'_m) j(x'_1) \ldots j(x'_n). \quad (27.10)$$

В формулах (27.8) — (27.10) мы опустили спиновые и векторные индексы. Действуя операторами $(\hat{\partial}_{y_1} - m)$, $(\hat{\partial}_{z_1} + m)$ и $\Box_{x_1}$ на выражения (27.8), (27.9) и (27.10) соответственно и используя уравнения (27.6), мы получим следующую систему функциональных уравнений:

$$(\vec{\hat{\partial}}_{y_1} - m) \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(y_1)} = -ie \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\delta^2 Z}{\delta j^\mu(y_1)\, \delta \bar{\eta}(y_1)} - iZ\eta(y_1),$$
$$\frac{\delta Z}{\delta \eta(z_1)} (\overleftarrow{\hat{\partial}}_{z_1} + m) = ie \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\delta^2 Z}{\delta j^\mu(z_1)\, \delta \eta(z_1)} \gamma^\mu - i\bar{\eta}(z_1) Z, \quad (27.11)$$
$$\Box_{x_1} \frac{\delta Z}{\delta j^{\mu_1}(x_1)} = ie\, \mathrm{Sp} \left(\gamma_{\mu_1} \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}(x_1)\, \delta \eta(x_1)} \right) + ij_{\mu_1}(x_1) Z.$$

Граничными условиями для этой системы являются

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta} = \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} = \frac{\delta Z}{\delta j} = 0 \text{ при } j = \eta = \bar{\eta} = 0,$$
$$Z|_{\eta=\bar{\eta}=j=0} = 1. \quad (27.11')$$

Рассмотрим сначала систему (27.11) для случая свободных полей, т. е. при $e = 0$:

$$(\vec{\hat{\partial}}_{y_1} - m) \frac{\delta Z_0}{\delta \bar{\eta}(y_1)} = -iZ_0 \eta(y_1),$$
$$\frac{\delta Z_0}{\delta \eta(z_1)} (\overleftarrow{\hat{\partial}}_{z_1} + m^2) = -i\bar{\eta}(z_1) Z_0, \quad (27.12)$$
$$\Box_{x_1} \frac{\delta Z_0}{\delta j^{\mu_1}(x_1)} = ij_{\mu_1}(x_1) Z_0.$$

Легко проверить, что решение системы (27.12) имеет вид

$$Z_0 = \exp \Big[- \int dx\, dy \Big\{ \bar{\eta}(x) \frac{1}{i} S^c(x-y) \eta(y) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} j^\mu(x)\, i g^{\mu\mu} D_0^c(x-y)\, j^\mu(y) \Big\} \Big], \quad (27.13)$$

где

$$S^c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(x-y)}\frac{m+\hat{p}}{m^2-p^2-i\varepsilon}\,dp,$$

$$D_0^c(x-y)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\frac{dk}{k^2+i\varepsilon}, \tag{27.14}$$

$$\hat{p}=p^0\gamma^0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma}.$$

Решение (27.13) удовлетворяет системе (27.12) в силу соотношений

$$(\overrightarrow{\hat{\partial}}_x-m)\,S^c(x-y)=-\delta(x-y),$$

$$S^c(y-x)(\overleftarrow{\hat{\partial}}_x+m)=\delta(x-y), \tag{27.15}$$

$$\Box_x D_0^c(x-y)=-\delta(x-y).$$

Для $e\neq 0$ будем искать решение (27.11) в виде

$$Z=AZ_0, \tag{27.16}$$

где оператор A не зависит от η, $\bar{\eta}$ и j^μ. Как и в скалярном случае (см. § 4), уравнения (27.11) приводят к следующим соотношениям для оператора A:

$$[A,\eta(x)]=e\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu A\frac{\delta^2}{\delta j^\mu(x)\,\delta\bar{\eta}(x)},$$

$$[A,\bar{\eta}(x)]=-e\sum_{\mu=0}^{3}A\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\,\delta j^\mu(x)}\gamma^\mu, \tag{27.17}$$

$$[A,j^\mu(x)]=e\,\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu A\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\,\delta\bar{\eta}(x)}.$$

Система (27.17) дает следующее выражение для оператора A:

$$A=\exp\left[-e\int dx\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(x)}\frac{\delta}{\delta j^\mu(x)}\right]. \tag{27.18}$$

Окончательное решение уравнений (27.11) запишется следующим образом:

$$Z=C\exp\left[-e\int dx\,\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(x)}\frac{\delta}{\delta j^\mu(x)}\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\int dx\,dy\left\{\bar{\eta}(x)\frac{1}{i}S^c(x-y)\,\eta(y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}j^\mu(x)\,ig^{\mu\mu}D_0^c(x-y)\,j^\mu(y)\right\}\right]. \tag{27.19}$$

Константа C выбирается в соответствии с начальными условиями (27.11).

Раскладывая первую экспоненту в выражении (27.19) в ряд по константе e и проводя вариационное дифференцирование, получим ряд теории возмущений для S-матрицы. Однако выражение (27.19) полезно тем, что его можно пытаться осмыслить и вне теории возмущений. Для некоторых моделей это может привести к желаемому результату при введении некоторых обрезаний.

§ 28. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Линейные уравнения для коэффициентных функций квантовой электродинамики были впервые получены в работе [126]. Решения этих уравнений в виде рядов совпадают с рядами теории возмущений для матрицы рассеяния. Если это решение уравнений резольвентного типа, то ряд не содержит вкладов от вакуумных диаграмм S-матрицы, а если решение эволюционного уравнения, то оно соответствует полному ряду теории возмущений для матрицы рассеяния.

28.1. Уравнения резольвентного типа

При выводе этих уравнений мы поступим так же, как и в случае взаимодействия Юкавы. Используя представление матрицы рассеяния в виде T-экспоненты

$$S = T \exp \left| i \int \mathcal{L}_I(x)\, dx \right|, \tag{28.1}$$

где

$$\mathcal{L}_I(x) = -e :\bar{\psi}_\alpha(x)\, \gamma^k_{\alpha\beta} \psi_\beta(x)\, \mathcal{A}_k(x):,$$

получим следующие три формулы:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1)} = -ie\gamma^k_{\alpha_1\alpha} T\,(:\mathcal{A}_k(z_1)\,\psi_\alpha(z_1): S), \tag{28.2}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \psi_{\beta_1}(y_1)} = ieT\,(:\bar{\psi}_\beta(y_1)\,\mathcal{A}_k(y_1): S)\,\gamma^k_{\beta\beta_1}, \tag{28.3}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \mathcal{A}_{\mu_1}(x_1)} = -ieT\,(:\bar{\psi}_\alpha(x_1)\,\gamma^{\mu_1}_{\alpha\beta}\psi_\beta(x_1): S) \tag{28.4}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование). Подставим теперь сюда разложение S-матрицы по свободным полям:

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\sqrt{n!}} \int dy_1 \ldots dy_m dz_1 \ldots dz_m dx_1 \ldots dx_n \times$$

$$\times :\bar{\psi}_{\alpha_1}(y_1)\ldots\bar{\psi}_{\alpha_m}(y_m)\,F_{m,n}(\alpha_1 y_1,\ldots,\alpha_m y_m;\beta_1 z_1,\ldots,\beta_m z_m;$$

$$\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)\,\psi_{\beta_1}(z_1)\ldots\psi_{\beta_m}(z_m)\,\mathcal{A}_{\mu_1}(x_1)\ldots\mathcal{A}_{\mu_n}(x_n):. \quad (28.5)$$

Выполняя необходимые преобразования (см. § 6), получим следующую систему уравнений:

$$F_{m,n}(y_1,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_m;\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)=$$

$$=(-ie)\sqrt{n+1}\int dy\,dx\,\gamma^{\mu}\frac{1}{i}S^c(y_1-y)\,ig^{\mu\mu}D_0^c(y_1-x)\times$$

$$\times F_{m,n+1}(y,y_2,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_m;\mu x,\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)+$$

$$+(-ie)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\delta(y_1-x_i)\int dy\,\gamma^{\mu_i}\frac{1}{i}S^c(y_1-y)\times$$

$$\times F_{m,n-1}(y,y_2,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_m;\mu_1 x_1,\ldots,\widehat{\mu_i x_i},\ldots,\mu_n x_n)+$$

$$+(-ie)\sqrt{n+1}\,\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\delta(y_1-z_j)\,\gamma^{\mu}\otimes$$

$$\otimes\int dx\,ig^{\mu\mu}D_0^c(y_1-x)\,F_{m-1,m+1}(y_2,\ldots,y_m;z_1,\ldots,\hat{z}_j,\ldots,z_m;$$

$$\mu x,\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)+(-ie)\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\delta(y_1-z_j)\,\delta\times$$

$$\times(y_1-x_i)\,\gamma^{\mu_i}\otimes F_{m-1,n-1}(y_2,\ldots y_m;z_1,\ldots,\hat{z}_j,\ldots,z_m;$$

$$\mu_1 x_1,\ldots,\widehat{\mu_i x_i},\ldots,\mu_n x_n), \quad (28.6)$$

$$F_{m,n}(y_1,\ldots,y_m;z_1,\ldots,z_m;\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)=$$

$$=(-ie)\sqrt{n+1}\int dz\,dx\,F_{m,n+1}(y_1,\ldots,y_m;z,z_2,\ldots,z_m;\mu x,\mu_1 x_1,\ldots,\mu_n x_n)\times$$

$$\times ig^{\mu\mu}D_0^c(x-z_1)\,\frac{1}{i}S^c(z-z_1)\,\gamma^{\mu}+$$

$$+(-ie)\sum_{i=1}^{n}\int dz\,F_{m,n-1}(y_1,\ldots,y_m;z,z_2,\ldots,z_m;\mu_1 x_1,\ldots,\widehat{\mu_i x_i},\ldots,\mu_n x_n)\times$$

$$\times\frac{1}{i}S^c(z-z_1)\,\gamma^{\mu_i}\delta(z_1-x_i)+$$

$$+(-ie)\sqrt{n+1}\,\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\delta(z_1-y_j)\,\gamma^{\mu}\otimes$$

$$\otimes \int dx\, ig^{\mu\mu} D_0^c(z_1 - x)\, F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_2, \ldots, z_m;$$

$$\mu x, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) + (-ie)\frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(z_1 - y_j) \times$$

$$\times\, \delta(z_1 - x_i)\, \gamma^{\mu_i} \otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_2, \ldots, z_m;$$

$$\mu_1 x_1, \ldots, \widehat{\mu_i x_i}, \ldots, \mu_n x_n), \qquad (28.7)$$

$$F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) =$$

$$= (-ie)(m+1)(-1)^{m+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\, \mathrm{Sp}_1 \iint dy\, dz\, \gamma^{\mu_1} \frac{1}{i} S^c(x_1 - y) \times$$

$$\times\, F_{m+1,n-1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m; \mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n) \frac{1}{i} S^c(z - x_1) +$$

$$+ (-ie)\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dz\, F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_m;$$

$$\mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n) \frac{1}{i} S^c(z - x_1)\, \gamma^{\mu_1} \delta(z_j - x_1) +$$

$$+ (-ie)\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \delta(x_1 - y_j)\, \gamma^{\mu_1} \int dy\, \frac{1}{i} S^c(x_1 - y) \times$$

$$\times\, F_{m,n-1}(y, y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; \mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ (-ie)\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \delta(x_1 - y_{j_1}) \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \times$$

$$\times\, \delta(x_1 - z_{j_2})\, \gamma^{\mu_1} \otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \widehat{z_{j_2}}, \ldots, z_m;$$

$$\mu_2 x_2, \ldots, \mu_n x_n). \qquad (28.8)$$

28.2. Уравнения эволюционного типа

Чтобы получить уравнения эволюционного типа, мы запишем формулу, которая легко следует из (28.1):

$$\frac{dS}{de} = -iT\left(\int dx :\bar{\psi}(x)\, \gamma^{\mu} \psi(x)\, \mathcal{A}_{\mu}(x):\right). \qquad (28.9)$$

Такая формула использовалась в ряде работ [97, 160]. Подставляя в (28.9) разложение (28.5), получим, как и в предыдущем случае,

$$\frac{d}{de} F_{m,n}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) =$$

$$= \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} (-i) \gamma^{\mu} \int dy\, dx \frac{1}{i} S^c (y_i - y)\, i g^{\mu\mu} D_0^c (y_j - x) \times$$

$$\times F_{m,n+1}(y, y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; \mu x, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(y_j - x_i)(-i) \gamma^{\mu_i} \int dy \frac{1}{i} S^c (y_j - y) \times$$

$$\times F_{m,n-1}(y, y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \widehat{\mu_i x_i}, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int dz\, dx\, F_{m,n+1}(y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m;$$

$$\mu x, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) \frac{1}{i} S^c (z - z_j)\, i g^{\mu\mu} D_0^c (x - z_j)(-i) \gamma^{\mu} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \int dz\, F_{m,n-1}(y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_m;$$

$$\mu_1 x_1, \ldots, \widehat{\mu_i x_i}, \ldots, \mu_n x_n) \frac{1}{i} S^c (z - z_j)(-i) \gamma^{\mu_i} \delta(z_j - x_i) +$$

$$+ \sqrt{n+1} \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \delta(y_{j_1} - z_{j_2}) \times$$

$$\times (-i) \gamma^{\mu} \otimes \int dx\, i g^{\mu\mu} D_0^c (y_{j_1} - x) F_{m-1,n+1}(y_1, \ldots, \hat{y}_{j_1}, \ldots, y_m;$$

$$z_1, \ldots, z_{j_2}, \ldots, z_m, \mu x, \mu_1 x_1, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sp}_1 \Big[(-i) \gamma^{\mu_i} \int dy\, dz \frac{1}{i} S^c (x_i - y) \times$$

$$\times F_{m+1,n-1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \widehat{\mu_i x_i}, \ldots, \mu_n x_n) \times$$

$$\times \frac{1}{i} S^c (z - x_i) \Big] + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j_1=1}^{m} (-1)^{j_1-1} \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}} \sum_{j_2=1}^{m} (-1)^{j_2-1} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \delta(y_{j_1} - z_{j_2})\, \delta(z_{j_2} - x_i)(-i) \gamma^{\mu_i} \otimes$$

$$\otimes F_{m-1,n-1}(y_1, \ldots, \widehat{y_j}, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_{j_2}, \ldots, z_m; \mu_1 x_1, \ldots, \widehat{\mu_i x_i}, \ldots, \mu_n x_n) +$$

$$+ (-1)^{m+1}(m+1)\sqrt{n+1}\,\mathrm{Sp}_1\Big[(-i)\gamma^{\mu}\int dy\,dz\,dx\,\frac{1}{i}S^c(x-y)\times$$

$$\times F_{m+1,n+1}(y, y_1, \ldots, y_m; z, z_1, \ldots, z_m; x, x_1, \ldots, x_n)\times$$

$$\times\frac{1}{i}S^c(z-x)\,ig^{\mu\mu}D_0^c(y-x)\Big]. \quad (28.10)$$

Так как в дальнейшем мы будем исследовать лишь уравнение (28.10), перепишем его в импульсном представлении:

$$\frac{d}{de}F_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$

$$= \sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{\mu=0}^{3}\int dq\,dt\,(2\pi)^4\delta(q-p_j+t)(-i)\gamma^{\mu}\times$$

$$\times\frac{m+\hat{q}}{(2\pi)^4 i(m^2-q^2-i\varepsilon)}\,\frac{g^{\mu\mu}}{(2\pi)^4 i(t^2+i\varepsilon)}\times$$

$$\times F_{m,n+1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu t) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int dq\,(2\pi)^4\delta(q-p_j-k_l)(-i)\gamma^{\mu_l}\times$$

$$\times\frac{m+\hat{q}}{(2\pi)^4 i(m^2-q^2-i\varepsilon)}F_{m,n-1}(q, p_{1-\hat{j}-n}; p'_{1-n}; \mu_{1-\hat{l}-n}, k_{1-\hat{l}-n}) +$$

$$+\sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{\mu=0}^{3}\int dq\,dt\,F_{m,n+1}(p_{1-m}; q, p'_{1-\hat{j}-m};$$

$$\mu_{1-n}k_{1-n}, \mu, t)\,\frac{g^{\mu\mu}}{(2\pi)^4 i(t^2+i\varepsilon)}\,\frac{m+\hat{q}}{(2\pi)^4 i(m^2-q^2-i\varepsilon)}\times$$

$$\times(2\pi)^4\delta(p'_j-q+t)(-i)\gamma^{\mu}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\times$$

$$\times\int dq\,F_{m,n-1}(p_{1-m}; q, p'_{1-\hat{j}-m}; \mu_{1-\hat{l}-n}, k_{1-\hat{l}-n})\times$$

$$\times\frac{m+\hat{q}}{(2\pi)^4 i(m^2-q^2-i\varepsilon)}(2\pi)^4\delta(p'_j-q-k_l)(-i)\gamma^{\mu_l} +$$

$$+\sqrt{n+1}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\sum_{\mu=0}^{3}\int dt\,(2\pi)^4\times$$
$$\times\,\delta(p'_{j'}-p_j+t)(-i)\gamma^{\mu}\otimes\frac{g^{\mu\mu}}{(2\pi)^4 i\,(t^2+i\varepsilon)}\times$$
$$\times\,F_{m-1,n+1}(p_{1-\widehat{j}-m};\,p'_{1-\widehat{j'}-m};\,\mu_{1-n},\,k_{1-n},\,\mu,\,t)+$$
$$+(m+1)(-1)^{m+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\mathrm{Sp}\Big[\int dq\,dq'\,(2\pi)^4\delta(q'-q-k_l)(-i)\gamma^{\mu_l}\times$$
$$\times\,\frac{m+\widehat{q}}{(2\pi)^4 i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}F_{m+1,n-1}(q,\,p_{1-m};\,q',\,p'_{1-m};\,\mu_{1-\widehat{l}-n},\,k_{1-\widehat{l}-n})\times$$
$$\times\,\frac{m+\widehat{q'}}{(2\pi)^4 i\,(m^2-q'^2-i\varepsilon)}\Big]+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{m}}\sum_{j'=1}^{n}(-1)^{j'-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}(2\pi)^4\delta(p'_{j'}-p_j-k_l)\times$$
$$\times\,(-i)\,\gamma^{\mu_l}\otimes F_{m-1,n-1}(p_{1-\widehat{j}-m};\,p'_{1-\widehat{j'}-m};\,\mu_{1-\widehat{l}-n},\,k_{1-\widehat{l}-n})+$$
$$+(m+1)(-1)^{m+1}\sqrt{n+1}\sum_{\mu=0}^{3}\mathrm{Sp}\Big[\int dq\,dq'dt(2\pi)^4\delta(q'-q+t)(-i)\gamma^{\mu}\times$$
$$\times\,\frac{m+\widehat{q}}{(2\pi)^4 i\,(m^2+q^2-i\varepsilon)}F_{m+1,n+1}(q,\,p_{1-n};\,q',\,p'_{1-n};\,\mu_{1-n},\,k_{1-n},\,\mu,\,t)\times$$
$$\times\,\frac{m+\widehat{q'}}{(2\pi)^4 i\,(m^2+q'^2-i\varepsilon)}\,\frac{g^{\mu\mu}}{(2\pi)^4 i\,(t^2+i\varepsilon)}\Big].\qquad(28.11)$$

28.3. Уравнения евклидовой квантовой электродинамики

В этом разделе мы осуществим переход в евклидову область переменных в уравнении (28.11).

Чтобы перейти к уравнениям для евклидовых функций, необходимо осуществить целый ряд преобразований. Мы проделаем этот переход в выражении для $F_{m,n+1}$. В остальных членах уравнения (28.11) все будет аналогично. Перепишем (28.11) в виде

$$\frac{d}{de}F_{m,n}(p_{1-m};\,p'_{1-m};\,\mu_{1-n},\,k_{1-n})=$$
$$=\sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{\mu=0}^{3}\iint dq\,dt\,(2\pi)^4\delta(q-p_j+t)\,\gamma^{\mu}(-i)\times$$

$$\times \frac{m+q}{(2\pi)^4 i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}\,\frac{g^{\mu\mu}}{(2\pi)^4 i\,(t^2+i\varepsilon)}\times$$

$$\times F_{m,n+1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \mu, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) + \ldots \quad (28.12)$$

Здесь $p_{1-n} = p_1, \ldots, p_n$; $p_{1-\hat{j}-n} = p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_n$; $\mu_{1-\nu}$, $k_{1-\nu} = \mu_1, k_1, \ldots, \mu_\nu, k_\nu$. Чтобы перейти в евклидову область, в уравнении (28.12) нужно осуществить ряд замен.

Замена I: $F'_{m,n} = (\otimes\gamma^0)^n F_{m,n}$. Так как функция $F_{m,n}$ зависит от $2m$ спиновых переменных, то каждая матрица γ^0 умножается по своим индексам. Умножая (28.12) слева на матрицы γ^0 и вставляя $1 = \gamma^0\gamma^0$ между $m+\hat{q}$ и $F_{m,n+1}$, получим для $F'_{m,n}$ выражение (при этом распишем сумму по μ и выражение $m+\hat{q}$):

$$\frac{d}{de}F'_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$

$$= \sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\iint dq\,dt\,(-i)\,(2\pi)^4\delta(q-p_j+t)\,\gamma^0\times$$

$$\times \frac{m+q^0\gamma^0-\boldsymbol{q\gamma}}{(2\pi)^4 i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}\,\gamma^0\,\frac{1}{(2\pi)^4 i\,(t^2+i\varepsilon)}\times$$

$$\times F'_{m,n+1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; 0, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\iint dq\,dt\,(2\pi)^4\delta(q-p_j+t)\,(-i)\,\gamma^0\gamma^{\boldsymbol{\mu}}\times$$

$$\times \frac{m+q^0\gamma^0-\boldsymbol{q\gamma}}{(2\pi)^4 i\,(m^2-q^2-i\varepsilon)}\,\gamma^0\,\frac{-1}{(2\pi)^4 i\,(t^2+i\varepsilon)}\times$$

$$\times F'_{m,n+1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \boldsymbol{\mu}, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) + \ldots \quad (28.13)$$

Замена II: переход к евклидовым импульсам. Произведем в (28.13) замену

$$q^0 = iq^4,\quad t^0 = it^4,\quad p_j^0 = ip_j^4,\quad p_j'^0 = ip_j'^4,\quad k_l^0 = ik_l^4,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m;\quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

$$F'_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_1, k_1, \ldots, 0, k_{i_1}, \ldots, 0, k_{i_m}, \ldots, \mu_n, k_n) =$$

$$= (i)^m F''_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_1, k_1, \ldots, 4, k_{i_1}, \ldots, 4, k_{i_m}, \ldots, \mu_n k_n).$$

Сделаем после этого поворот контура интегрирования в плоскостях q^0, t^0. Тогда уравнения для новых функций примут вид

$$\frac{d}{de} F''_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$

$$= \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \iint d^4q d^4t (2\pi)^4 \delta^4 (q - p_j + t) \frac{mi\gamma^0 - q^4 + iq\gamma^0\gamma}{(2\pi)^4 (m^2 + q^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^4 t^2} F''_{m,n+1} (q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}: 4, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \iint d^4q d^4t (2\pi)^4 \delta^4 (q - p_j + t) \gamma^0\gamma^\mu \frac{1}{(2\pi)^4 t^2} \times$$

$$\times \frac{-m\gamma^0 - iq^4 - q\gamma^0\gamma}{(2\pi)^4 (m^2 + q^2)} F''_{m,n+1} (q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-n}; \mu, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) + \ldots; \tag{28.14}$$

здесь $q^2 = (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 + (q^4)^2$, $d^4q = dq^1dq^2dq^3dq^4$.

Замена III: переход к матрицам α. Проделаем замену [202]

$$F''_{m,n}(\ldots) = \left(\otimes \exp\left[\frac{1}{4}\pi i \gamma^0\gamma_5 l_3\right]\right)^m F''_{m,n}(\ldots) \left(\otimes \exp\left[\frac{1}{4}\pi i \gamma^0 \gamma_5 l_3\right]\right)^m,$$

где $\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $l_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$, σ_3 — матрица Паули. Эта замена подобна замене I. Роль матрицы γ^0 выполняет матрица $\exp\left(\frac{1}{4}\pi i \gamma^0 \gamma^5 l_3\right)$, а умножение производится не только слева, но и справа. Введем новые матрицы $\alpha^4 = \gamma^0\gamma_5 l_3$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\alpha^5 = \gamma^0$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$(\alpha^\mu)^* = \alpha^\mu, \quad \alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 2\delta^{\mu\nu}, \quad \left(\exp\left[\pm\frac{1}{4}\pi i \alpha^4\right]\right)^2 = \pm i\alpha^4. \tag{28.15}$$

Учитывая (28.15), получим для F''':

$$\frac{d}{de} F'''_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$

$$= \sqrt{n+1} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \sum_{\mu=1}^{4} \iint dq\, dt\, (-1) (2\pi)^4 \delta^4 (q - p_j + t) \alpha^\mu \times$$

$$\times \frac{\alpha \cdot q + m\alpha^5}{(2\pi)^4 (m^2 + q^2)} \frac{1}{(2\pi)^4 t^2} F''_{m,n+1} (q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t) + \ldots; \tag{28.16}$$

здесь $\alpha \cdot q + m\alpha^5 = \alpha^1 q^1 + \alpha^2 q^2 + \alpha^3 q^3 + \alpha^4 q^4 + m\alpha^5$.

Замена IV: преобразование типа Фолди — Вотхойзена. Рассмотрим оператор $\exp[iS(q)]$, где

$$S(q) = -\frac{i}{2m}\alpha^5\alpha\cdot q\frac{m}{|q|}\operatorname{arctg}\frac{|q|}{m},$$

$$|q| = \sqrt{(q^1)^2+(q^2)^2+(q^3)^2+(q^4)^2}.$$

Используя (28.15), легко получить следующее равенство:

$$\exp[iS(q)](\alpha\cdot q + m\alpha^5)\exp[-iS(q)] = \\ = \exp[2iS(q)](\alpha\cdot q+m\alpha^5) = \alpha^5\sqrt{m^2+q^2}. \quad (28.17)$$

Перепишем уравнение (28.16) для функций F^W, которые определим соотношением

$$F^W_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) = \\ = \bigotimes_{\alpha=1}^{m}\exp[iS(p_\alpha)]F''_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n})\bigotimes_{\alpha=1}^{m}\exp[-iS(p'_\alpha)].$$

Учитывая (28.17), получим для $F^W_{m,n}(\ldots)$:

$$\frac{d}{de}F^W_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) = \\ = \sqrt{n+1}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\sum_{\mu=1}^{4}\iint \overline{dq}\widetilde{dt}(-1)(2\pi)^4\delta^4(q-p_j+t)\times \\ \times\exp[iS(p_j)]\alpha^\mu\exp[-iS(q)]\alpha^5\times \\ \times F^W_{m,n+1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int\overline{dq}(-1)(2\pi)^4\delta^4(q-p_j-k_l)\exp iS(p_j)\alpha^{\mu_l}\times \\ \times\exp[-iS(q)]\alpha^5F^W_{m,n-1}(q, p_{1-\hat{j}-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-\hat{l}-n}, k_{1-\hat{l}-n}) + \\ + \sqrt{n+1}\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\sum_{\mu=1}^{4}\iint\overline{dq'}\widetilde{dt}\times \\ \times F^W_{m,n+1}(p_{1-m}; q', p'_{1-\hat{j}'-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t)\alpha^5(-1)(2\pi)^4\times \\ \times\delta^4(p'_{j'}-q+t)\exp[iS(q')]\alpha^\mu\exp[-iS(p'_{j'})] + \\ + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int\overline{dq'}\times$$

$$\times F^{W}_{m,n-1}(p_{1-m}; q', p'_{1-\widehat{j'}-m}; \mu_{1-\widehat{l}-n}, k_{1-\widehat{l}-n})\alpha^5 \times$$

$$\times \exp[iS(q')]\alpha^{\mu_l}\exp[-iS(p'_{j'})](-1)(2\pi)^4\delta^4(p'_{j'}-q-k_l)+$$

$$+(m+1)(-1)^{m+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}\iint \overline{dq}\,\overline{dq'}\,\mathrm{Sp}[(-1)(2\pi)^4\delta^4(q-q'-k_l)\times$$

$$\times \exp[iS(q')]\alpha^{\mu_l}\exp[-iS(q)]\alpha^5\times$$

$$\times F^{W}_{m+1,n-1}(q, p_{1-m}; q', p'_{1-m}; \mu_{1-\widehat{l}-n}, k_{1-\widehat{l}-n})\alpha^5]+$$

$$+\sqrt{n+1}(-1)^{m-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\sum_{\mu=1}^{4}\int\widetilde{dt}(-1)\times$$

$$\times(2\pi)^4\delta(p_j-p'_{j'}+t)\exp[iS(p_j)]\alpha^{\mu}\exp[-iS(p'_{j'})]\otimes$$

$$\otimes F^{W}_{m-1,n+1}(p_{1-\widehat{j}-m}; p'_{1-\widehat{j'}-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu t)+$$

$$+(m+1)(-1)^{m+1}\sqrt{n+1}\sum_{\mu=1}^{4}\iiint\overline{dq}\,\overline{dq'}\,\widetilde{dt}\,\mathrm{Sp}[(-1)(2\pi)^4\times$$

$$\times\delta^4(q-q'+t)\exp[iS(q')]\alpha^{\mu}\exp[-\ S(q)]\alpha^5\times$$

$$\times F^{W}_{m+1,n+1}(q, p_{1-m}; q', p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu t)\alpha^5]+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n}(-1)(2\pi)^4\times$$

$$\times\delta^4(p_j-p'_{j'}-k_l)\exp[iS(p_j)]\alpha^{\mu_l}\exp[-iS(p'_{j'})]\otimes$$

$$\otimes F^{W}_{m-1,n-1}(p_{1-\widehat{j}-m}; p'_{1-\widehat{j'}-m}; \mu_{1-\widehat{l}-n}, k_{1-\widehat{l}-n}); \qquad (28.18)$$

здесь $\overline{dq}=d^4q/(2\pi)^4\sqrt{m^2+q^2}$, $\widetilde{dt}=d^4t/(2\pi)^4t^2$

§ 29. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

29.1. Уравнения для функций $F_{m,n}$ с формфактором

Чтобы придать строгий математический смысл уравнениям (28.18), введем в них вместо δ-функций гладкие функции $f(p+p'+k)=f(-p-p'-k)$ и формфактор $\mathcal{F}(p, p', k)$, который обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{F}(p, p'; k) = \mathcal{F}(p', p; -k); \quad \mathcal{F}(p, p'; 0) = 0. \tag{29.1}$$

Тогда уравнения для функций F^W с формфактором будут иметь вид (индекс W опустим)

$$\frac{d}{de} F_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$
$$= m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p_1}}{m}\sum_{\mu=1}^{4}\iint \overline{dq}\widetilde{dt}\,\Gamma(p_1, q; \mu, t)\,\alpha^5 \times$$
$$\times F_{m,n+1}(q, p_{2-m}; p'_{1-m}; \mu, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) +$$
$$+ m\sqrt{n}\,\frac{A_{p_1}}{m}\,\frac{P_{k_1}}{n}\int \overline{dq}\,\Gamma(p_1, q; \mu_1, -k_1)\,\alpha^5 \times$$
$$\times F_{m,n-1}(q, p_{2-m}; p'_{1-m}; \mu_{2-n}, k_{2-n}) +$$
$$+ m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p'_1}}{m}\sum_{\mu=1}\iint \overline{dq}\,\widetilde{dt}\,F_{m,n+1}(p_{1-m}; q, p'_{2-m}; \mu, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) \times$$
$$\times \alpha^5\Gamma(q, p'_1; \mu, t) + m\sqrt{n}\frac{A_{p'_1}}{m}\,\frac{P_{k_1}}{n}\int\overline{dq}\,F_{m,n-1}(p_{1-m}; q, p'_{2-m}; \mu_{2-n}, k_{2-n}) \times$$
$$\times \alpha^5\Gamma(q, p'_1; \mu_1, -k_1) + (m+1)(-1)^{m+1}\sqrt{n}\,\frac{P_{k_1}}{n}\iint\overline{dq}\,\overline{dq'} \times$$
$$\times \mathrm{Sp}\,[\Gamma(q', q; \mu_1, -k_1)\,\alpha^5 F_{m+1,n-1}(q, p_{1-m}; q', p'_{1-m}; \mu_{2-n}, k_{2-n})\,\alpha^5] +$$
$$+ m(-1)^{m-1}\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p'_1}}{n}\,\frac{A_{p_1}}{m}\sum_{\mu=1}^{4}\int \widetilde{dt}\,\Gamma(p_1, p'_1; \mu, t) \otimes$$
$$\otimes F_{m-1,n+1}(p_{2-m}; p'_{2-m}; \mu, t, \mu_{1-n}, k_{1-n}) +$$
$$+ (m+1)(-1)^{m+1}\sqrt{n+1}\sum_{\mu=1}^{4}\iiint \overline{dq}\,\overline{dq'}\widetilde{dt}\,\mathrm{Sp}\,[\Gamma(q', q; \mu, t) \times$$
$$\times \alpha^5 F_{m+1,n+1}(q, p_{1-m}; q', p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t)\,\alpha^5] +$$
$$+ m(-1)^{m-1}\sqrt{n}\,\frac{A_{p_1}}{m_1}\,\frac{A_{p'_1}}{m}\,\frac{P_{k_1}}{n}\,\Gamma(p_1, p'_1; \mu_1, -k_1) \otimes$$
$$\otimes F_{m-1,n-1}(p_{2-m}, p'_{2-m}; \mu_{2-n}, k_{2-n}). \tag{29.2}$$

Здесь введены операторы антисимметризации A_{p_2} и $A_{p'_1}$ вместо $\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}$ и $\sum_{j'=1}^{m}(-1)^{j'-1}$ и симметризации P_{k_1} вместо $\sum_{i=1}^{n}$, а

$$\Gamma(p, p'; \mu, k) =$$
$$= (-1)(2\pi)^4 \exp[iS(p)]\,\alpha^\mu \exp[-iS(p')]\,f(p'-p+k)\,\mathcal{F}(p, p'; k).$$

Уравнения (29.2) можно переписать в операторной форме:

$$dF/de = \eta AF, \tag{29.3}$$

где F — столбец функции $F_{m,n}$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ F_N \\ \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad F_N = (F_{m,n})_0^N, \qquad n + 2m = N; \tag{29.4}$$

(n, m)-я строчка зависит от непрерывных переменных $p_1, \ldots, p_m$; $p'_1, \ldots, p'_m$; $k_1, \ldots, k_n$ и является тензором n-го ранга и спинором $2m$-го ранга. Оператор A может быт представлен в виде матрицы

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{03} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & A_{23} & 0 & A_{25} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{30} & 0 & A_{32} & 0 & A_{34} & 0 & A_{36} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_{41} & 0 & A_{43} & 0 & A_{45} & 0 & A_{47} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & A_{52} & 0 & A_{54} & 0 & A_{56} & 0 & A_{58} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & A_{63} & 0 & A_{65} & 0 & A_{65} & 0 & A_{69} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \tag{29.5}$$

$$A_{k,k+1} = \left\{A_{\substack{n,n+1\\m,m}} + A'_{\substack{n,n+1\\m,m}},\ A_{\substack{n,n-1\\m,m+1}}\right\}_0^k, \tag{29.6}$$

$$A_{k,k-1} = \left\{A_{\substack{n,n-1\\m,m}} + A'_{\substack{m,n-1\\m,m}},\ A_{\substack{n,n+1\\m,m-1}}\right\}_0^k, \tag{29.7}$$

$$A_{k,k-3} = \left\{A_{\substack{n,n-1\\m,n-1}}\right\}_0^k, \quad A_{k,k+3} = \left\{A_{\substack{n,n+1\\m,m+1}}\right\}_0^k, \qquad n + 2m = k, \tag{29.8}$$

$$A_{\substack{n,n+1\\m,m}} F_{m,n+1} =$$
$$= (-1)^m m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p_1}}{m} \sum_{\mu=1}^{4} \iint \overline{dq}\,\widetilde{dt}\,(\alpha^5\Gamma(p_1, q; \mu, t)\,\alpha^5)_1\,(\otimes\,\alpha^5)_{2-m} \times$$

$$\times F_{m,n+1}(q,\,p_{2-m};\,p'_{1-m};\,\mu,\,t,\,\mu_{1-n},\,k_{1-n})\,(\otimes\,\alpha^5)_{1-m}, \tag{29.9}$$

$$A'_{\substack{n,n+1\\ m,m}}F_{m,n+1}=(-1)^m m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p'_1}}{m}\sum_{\mu=1}^{4}\iint\overline{dq}\,\widetilde{dt}\,(\otimes\,\alpha^5)_{1-m}\times$$
$$\times F_{m,n+1}(p_{1-m};\,q,\,p'_{2-m};\,\mu,\,t,\,\mu_{1-n}k_{1-n})\,(\otimes\alpha^5)_{2-m}\,(\alpha^5\Gamma(q,\,p'_1;\,t)\,\alpha^5)_1, \tag{29.10}$$

$$A_{\substack{n,n-1\\ m,m+1}}F_{m+1,n-1}=$$
$$=-(m+1)\sqrt{n}\,\frac{P_{k_1}}{n}\iint\overline{dq}\,\overline{dq'}\,(\otimes\alpha^5)_{1-m}\,\mathrm{Sp}\,[\alpha^5\Gamma(q',\,q;\,\mu_1,\,-k_1)\,\alpha^5\times$$
$$\times F_{m+1,n-1}(q,\,p_{1-m};\,q',\,p'_{1-n};\,\mu_{2-n},\,k_{2-n})]\,(\otimes\alpha^5)_{1-m}, \tag{29.11}$$

$$A_{\substack{n,n-1\\ m,m}}F_{m,n-1}=$$
$$=(-1)^m m\sqrt{n}\,\frac{A_{p_1}}{m}\,\frac{P_{k_1}}{n}\int\overline{dq}\,(\alpha^5\Gamma(p_1,\,q,\,\mu_1,\,-k_1)\,\alpha^5)_1\times$$
$$\times(\otimes\alpha^5)_{2-m}F_{m,n-1}(q,\,p_{2-m};\,p'_{1-m};\,\mu_{2-n},\,k_{2-n})\,(\otimes\,\alpha^5)_{1-n}, \tag{29.12}$$

$$A'_{\substack{n,n-1\\ m,m}}F_{m,n-1}=(-1)^m m\sqrt{n}\,\frac{A_{p'_1}}{m}\,\frac{P_{k_1}}{n}\int\overline{dq}\,(\otimes\,\alpha^5)_{1-m}\times$$
$$\times F_{m,n-1}(p_{1-m};\,q,\,p_{2-m};\,\mu_{2-n},\,k_{2-n})\,(\otimes\,\alpha^5)_{2-m}\times$$
$$\times\,(\alpha^5\Gamma(q,\,p'_1;\,\mu_1,\,-k_1)\,\alpha^5)_1, \tag{29.13}$$

$$A_{\substack{n,n+1\\ m,m-1}}F_{m-1,n+1}=$$
$$=-m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p_1}}{m}\,\frac{A_{p'_1}}{m}\sum_{\mu=1}^{4}\int\widetilde{dt}\,(\otimes\alpha^5)_{2-m}(\alpha^5\Gamma(p_1,\,p'_1;\,\mu,\,t)\,\alpha^5)_{11}\otimes$$
$$\otimes F_{m-1,n+1}(p_{2-m};\,p'_{2-m};\,\mu_{2-n};\,k_{2-n};\,\mu,\,t)\,(\otimes\,\alpha^5)_{2-m}, \tag{29.14}$$

$$A_{\substack{n,n-1\\ m,m-1}}F_{m-1,n-1}=-m\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p_1}}{m}\,\frac{A_{p'_1}}{n}\,\frac{P_{k_1}}{n}(\alpha^5\Gamma(p_1,p'_1;\,\mu_1,\,-k_1)\,\alpha^5)_{11}\otimes$$
$$\otimes\,(\otimes\,\alpha^5)_{2-m}F_{m-1,n-1}(p_{2-m};\,p'_{2-m};\,\mu_{2-n},\,k_{2-n})\,(\otimes\,\alpha^5)_{2-n}, \tag{29.15}$$

$$A_{\substack{n,n+1\\ m,m+1}}F_{m+1,n+1}=$$
$$=-(m+1)\sqrt{n+1}\sum_{\mu=1}^{4}\iiint\overline{dq}\,\overline{dq'}\,\widetilde{dt}\,(\otimes\alpha^5)_{1-m}\,\mathrm{Sp}\,[\alpha^5\Gamma(q',\,q;\,\mu,t)\,\alpha^5\times$$
$$\times F_{m+1,n+1}(q,\,p_{1-m};\,q',\,p'_{1-m};\,\mu_{1-n},\,k_{1-n},\,\mu,\,t)]\,(\otimes\,\alpha^5)_{1-m}. \tag{29.16}$$

В этих формулах $(\otimes\alpha^5)_{1-n}$ — произведение n матриц α^5, каждая из которых умножается по своей группе индексов. Оператор η (см. (29.30)) определяется соотношением

$$(\eta F)_{m,n}(\ldots) = (-1)^m (\otimes\alpha^5)_{1-m} F_{m,n}(\ldots)(\otimes\alpha^5)_{1-m}. \tag{29.17}$$

В следующем пункте мы введем пространство, в котором действуют операторы (29.6)—(29.8), и установим их свойства.

29.2. Пространство, в котором определен оператор A

Рассмотрим функции $\Psi_{m,n}(p_{1-m};\ p'_{1-m};\ k_{1-n})$, симметричные по $k_1, \ldots, k_n$ и антисимметричные по $p_1, \ldots, p_m$ и $p'_1, \ldots, p'_m$. Построим из таких функций столбцы вида (29.4). Тогда пространство $\mathcal{H}$, в котором каждой паре элементов Ψ и Φ сопоставляется число

$$(\Psi, \Phi) = \sum_{n,m=0} (\Psi_{m,n}, \Phi_{m,n}) =$$

$$= \sum_{m,n=0} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \int\ldots\int \overline{dp}_{1-m}\overline{dp}'_{1-m}\widetilde{dk}_{1-n} \times$$

$$\times \operatorname{Sp}_{1-m}\{[\Psi_{m,n}(p_{1-m};\ p'_{1-m};\ \mu_{1-n}, k_{1-n})]^* \times$$

$$\times \Phi_{m,n}(p_{1-m};\ p'_{1-m};\ \mu_{1-n}, k_{1-n})\} < \infty$$

где

$$\overline{dp}_{1-m} = \overline{dp}_1\ldots\overline{dp}_m \widetilde{dk}_{1-n} = \widetilde{dk}_1\ldots\widetilde{dk}_n,$$

$$\operatorname{Sp}_{1-m}(\Psi^*_{m,n}(\ldots)\Phi_{m,n}(\ldots)) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \\ \beta_1,\ldots,\beta_m}} \Psi_{m,n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\ \beta_1,\ldots,\beta_m)\Phi_{m,n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_m;\ \beta_1,\ldots,\beta_m),$$

является гильбертовым пространством, если его пополнить относительно нормы

$$\|\Phi\| = \sqrt{(\Phi, \Phi)}.$$

Пространство $\mathcal{H}$ представляет собой прямую сумму гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{m,n}$.

Рассмотрим теперь оператор A, заданный матрицей (29.5) в пространстве $\mathcal{H}$. Докажем следующую лемму.

Лемма 29.1. *Для оператора* $A_{\substack{n,n+1\\ m,m}}$, *который задан выражени-*

ем (29.10), и для $\Phi_{m,n+1} \in \mathcal{H}_{m,n+1}$ справедливо следующее неравенство

$$\| \underset{m,m}{A_{n,n+1}} \Phi_{m,n+1} \| \leqslant cm \sqrt{n+1} \, \| \Phi_{m,n+1} \|, \tag{29.18}$$

где

$$c = \left\{ \sum_{\mu=1}^{4} \iiint \overline{dp}\, \overline{dq}\, \widetilde{dt} \; \mathrm{Sp} \, | \Gamma(p; q; \mu, t) |^2 \right\}^{1/2}.$$

Доказательство. Перепишем левую часть неравенства (29.18) в следующем виде:

$$\| \underset{m,m}{A_{n,n+1}} \Phi_{m,n+1} \|^2 = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \int \ldots \int \overline{dp}_{1-m} \overline{dp}'_{1-m} \widetilde{dk}_{1-n} \times$$
$$\times \mathrm{Sp}_{1-m} \left| \sum_{\mu=1}^{4} \iint \overline{dq}\, \widetilde{dt} \, (\otimes \alpha^5)_{2-m} (\alpha^5 \Gamma(p_1, q; \mu, t) \alpha^5) \times \right.$$
$$\left. \times \Phi_{m,n+1}(q, p_{2-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t) (\otimes \alpha^5)_{1-m} \right|^2.$$

Теперь легко получить (29.18), если в каждом члене суммы A_{p_1} сделать замену $p_j \to p_1$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), воспользоваться антисимметричностью функции Φ и применить неравенство Шварца по переменным q и t. Лемма доказана.

Заметим, что для операторов (29.10)—(29.16) можно доказать аналогичные неравенства. Используя все эти неравенства, легко получить следующую оценку для оператора A:

$$\| (A\Phi)_{m,n} \| \leqslant 2cm \sqrt{n+1} \, \| \Phi_{m,n+1} \| + 2cm \sqrt{n} \, \| \Phi_{m,n-1} \| +$$
$$+ c(m+1) \sqrt{n} \, \| \Phi_{m+1,n-1} \| + cm \sqrt{n+1} \, \| \Phi_{m-1,n+1} \| +$$
$$+ c(m+1) \sqrt{n+1} \, \| \Phi_{m+1,n+1} \| + cm \sqrt{n} \, \| \Phi_{m-1,n-1} \| \tag{29.19}$$

для любого $\Phi \in \mathcal{H}$.

Из (29.19) следует, что оператор A неограничен в $\mathcal{H}$. Однако его можно определить на всюду плотном множестве G финитных столбцов $\Phi \in \mathcal{H}$, которые, начиная с некоторого $N_0 = \{m_0, n_0\}$, для всех $N > N_0$ имеют $\Phi_N = 0$. Действительно, используя неравенство (29.19) для такого Φ, имеем

$$\| A\Phi \| \leqslant K \| \Phi \|,$$

где

$$K = c \left(3m_0 \sqrt{n_0 + 1} + 3m_0 \sqrt{n_0} + (m_0 + 1) \sqrt{n_0} + \right.$$
$$\left. + (m_0 + 1) \sqrt{n_0 + 1} \right),$$

Это доказывает наше утверждение.

29.3. Свойства производящего оператора

Как видно из уравнения (29.2), производящий оператор не является симметрическим во введенном пространстве H. Более того, из-за неположительности матрицы α^5 нельзя подобрать пространство, в котором он был бы симметрическим, а следовательно, методы, развитые в работах [124, 198], неприменимы для решения уравнения (29.3). Можно, однако, сохранить свойство симметричности производящего оператора, но уже в пространстве с индефинитной метрикой, которая вводится с помощью оператора η.

В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые свойства производящего оператора, а вопрос существования решений уравнения (29.3) будет исследован в следующем разделе.

Лемма 29.2. *Для операторов* $A_{k,k\pm1}$, $A_{k,k\pm3}$, *определяемых соотношениями* (29.6) — (29.7), *справедливы следующие свойства симметрии:*

$$\begin{aligned}(A_{k,k\pm1}\Phi_{k\pm1}, \Psi_k) &= (\Phi_{k\pm1}, A_{k\pm1,k}\Psi_k),\\ (A_{k,k\pm3}\Phi_{k\pm3}, \Psi_k) &= (\Phi_{k\pm3}, A_{k\pm3,k}, \Psi_k)\end{aligned} \tag{29.20}$$

для любых $\Psi_k\in\mathcal{H}_k$, $\Phi_{k\pm1}\in\mathcal{H}_{k\pm1}$, $\Phi_{k\pm3}\in\mathcal{H}_{k\pm3}$.

Доказательство. Чтобы доказать лемму, очевидно, достаточно показать справедливость (29.21), например, для $A_{k,k+3}$ или, что то же самое, для $A_{\substack{n,n+1\\m,m+1}}$:

$$(A_{\substack{n,n+1\\m,m+1}}\Phi_{m+1,n+2}, \Psi_{m,n}) =$$

$$= \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_n} \int\ldots\int \overline{dp}_{1-m}\overline{dp}'_{1-m}\widetilde{dk}_{1-n}\,\mathrm{Sp}_{1-m}\Bigg|\Bigg[(-1)(m+1)\sqrt{n+1}\,\times$$

$$\times\sum_{\mu=1}^{4}\iiint \overline{dq}\,\overline{dq'}\,\widetilde{dt}\,(\otimes\alpha^5)_{1-m}\,\mathrm{Sp}_1(\alpha^5\Gamma(q'q;\,\mu,t)_1\alpha^5\,\times$$

$$\times\,\Phi_{m+1,n+1}(q, p_{1-m};\, q', p'_{1-n};\, \mu_{1-n}, k_{1-n}, \mu, t))(\otimes\alpha^5)_{1-m}]^*\,\times$$

$$\times\,\Psi_{m,n}(p_{1-m};\, p'_{1-m};\, \mu_{1-n}, k_{1-n})\Bigg| =$$

$$= \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_{n+1}} \int\ldots\int \overline{dp}_{1-(m+1)}\overline{dp}'_{1-(m+1)}\widetilde{dk}_{1-(n+1)}\,\times$$

$$\times\,\mathrm{Sp}_{1-(m+1)}\Big\{[\Phi_{n+1,m+1}(p_{1-(m+1)};\, p_{1-(m+1)};\, \mu_{1-(n+1)})]^*\,\times$$

$$\times(-1)(m+1)\sqrt{n+1}\,\frac{A_{p_1}}{m+1}\,\frac{\underset{p_1}{A}}{m+1}\,\frac{P_{k_1}}{n+1}\,(\alpha^5\Gamma(p_1, p_1'; \mu_1, -k_1)\alpha^5)_1\otimes$$

$$\left.(\otimes\alpha^5)_{2-(m+1)}\Psi_{m,n}(p_{2-(m+1)}; p'_{2-(m+1)}; \mu_{2-(n+1)})(\otimes\alpha^5)_{2-(m+1)}\right\} =$$

$$=(\Phi_{m+1,n+1}, A_{\substack{n+1,n\\m+1,m}}\Psi_{m,n}). \qquad (29.21)$$

Лемма доказана. При ее доказательстве были использованы лишь свойства симметричности функций Φ и Ψ.

Рассмотрим теперь билинейную форму $(A\Phi, \Psi)$, $\Phi\Psi \in G$. Используя представление (29.5) для оператора A, представление Φ и Ψ в виде столбцов (29.4) и лемму 29.2, получим

$$(A\Phi, \Psi) = \sum_{k=0}^{\infty}[(A_{k,k-3}\Phi_{k-3}, \Psi_k) + (A_{k,k-1}\Phi_{k-1}, \Psi_k) +$$

$$+ (A_{k,k+1}\Phi_{k+1}, \Psi_k) + (A_{k,k+3}\Phi_{k+3}, \Psi_k)] =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty}(\Phi_{k-3}, A_{k-3,k}\Psi_k) + \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_{k-1}, A_{k-1,k}\Psi_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}(\Phi_{k+1}, A_{k+1,k}\Psi_k) + \sum_{k=0}^{\infty}(\Phi_{k+3}, A_{k+3,k}\Psi_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\Phi_k, A_{k,k+3}\Psi_{k+3}) + \sum_{k=0}^{\infty}(\Phi_k, A_{k,k+1}\Psi_{k+1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_k, A_{k,k-1}\Psi_{k-1}) + \sum_{k=3}^{\infty}(\Phi_k, A_{k,k-3}\Psi_{k-3}) = (\Phi, A\Psi). \qquad (29.22)$$

Итак, оператор A определен на всюду плотном в $\mathcal{H}$ множестве G финитных столбцов, удовлетворяет равенству (28.22) и, следовательно, симметричен.

Следуя работам [11, 12], рассмотрим следующий аналог леммы Карлемана [93].

Лемма 29.3. *Для того чтобы оператор A, задаваемый на финитных векторах матрицей* (29.5), *имел индексы дефекта* (0, 0), *достаточно, чтобы*

$$\sum_{N=N_0}^{\infty}\frac{1}{\max(\|A_{N+1,N}\|, \|A_{N,N+1}\|, \|A_{N+3,N}\|, \|A_{N,N+3}\|)} = \infty. \qquad (29.23)$$

Доказательство леммы не представляет значительных трудностей и может быть выполнено, например, методом, который предложен в работе [12], с некоторыми изменениями, касающимися двойственности индекса N. Кроме того, оно приведено в [134].

Используя теперь представление операторов (29.6)—(29.16) и неравенство (29.19), легко получить, что

$$\max\left(\| A_{N+1,N} \|, \| A_{N,N+1} \|, \| A_{N+3,N} \|, \| A_{N,N+3} \| \right) \approx$$
$$\approx 3c\,(m+1)\sqrt{n+1}\,.$$

Следовательно, условие (29.23) выполнено, а значит, симметрический оператор A имеет индексы дефекта (0, 0) и является существенно сопряженным оператором [5].

Формально решение уравнения (29.3) можно записать в виде $F = \exp(e\eta A) F_0$, $F_0 = (1, 0, 0)$. Если понимать под $\exp(e\eta A) F_0$ ряд

$$F = \sum \frac{e^n}{n!} (\eta A)^n F_0, \tag{29.24}$$

то n-й член ряда будет соответствовать всем диаграммам Фейнмана n-го порядка в разложении евклидовой S-матрицы в ряд теории возмущений. При этом в каждой вершине диаграмм надо поставить формфактор $\mathcal{F}(p, p'; k)$, а δ-функцию заменить на гладкую функцию $f(p + p' + k)$.

29.4. Существование решения уравнений (29.3)

Оценка (29.19) для оператора A (а следовательно, и для оператора ηA) показывает, что решение (29.24) уравнения (29.3) методами теории возмущений приводит к расходящемуся ряду. Однако, как мы покажем ниже, эта оценка является грубой и не может служить критерием расходимости ряда. Для доказательства сходимости или расходимости итерационной процедуры необходимы более тонкие сведения об операторе ηA.

В настоящем пункте мы покажем, что производящий оператор представляется через операторы типа рождения и уничтожения, и для формфакторов менее общего типа можно доказать сходимость ряда теории возмущений, а следовательно, существование решения уравнения (29.3). Сделаем для этого в (29.2) замену (при этом уравнение (29.2) запишем без формфактора)

$$F_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) =$$
$$= \prod_{j=1}^{m} \frac{(\otimes \sqrt{\alpha^5})_j}{(2\pi)^2 \sqrt{p_j^2 + m^2}} F_{m,n}(p_{1-m}; p'_{1-m}; \mu_{1-n}, k_{1-n}) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{m} \frac{(\otimes \sqrt{\alpha^5})_j}{(2\pi)^2 \sqrt{p_j'^2 + m^2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^2 |k_i|}. \tag{29.25}$$

Тогда для столбца F получим следующее уравнение:

$$dF/de = HF, \tag{29.26}$$

где оператор H можно представить в виде

$$H = \sum_{i=1} \int d^4k_1 d^4k_2 d^4t \, \frac{(2\pi)^4 \, \delta(k_1 - k_2 + t)}{\mu(k_1)\,\mu(k_2)\,\mu(t)} \times$$

$$\times :\overline{\Phi}(k_1)\,\Lambda^\mu(k_1;\, k_2)\,\Phi(k_2)^\mu A(t):; \tag{29.27}$$

здесь

$$\mu(p) = (2\pi)^2 \sqrt[4]{p^2 + m^2}, \quad \mu(t) = (2\pi)^2 |t|,$$

$$\Lambda^\mu(k_1;\, k_2) = \sqrt{\alpha^5} \exp[iS(k_1)]\,\alpha^\mu \exp[-iS(k_2)]\sqrt{\alpha^5},$$

$$\overline{\Phi}_\alpha(k) = \overset{*}{\Phi}{}_\alpha^+(k) - \overset{*}{\Phi}{}_\alpha^-(k), \tag{29.28}$$

$$\Phi_\alpha(k) = \Phi_\alpha^+(k) + \Phi_\alpha^-(k),$$

$$A^\mu(t) = A^{\mu+}(t) + A^{\mu-}(-t).$$

Операторы $\Psi_\alpha^\pm(k)$, $\Psi_\beta^\pm(k)$ и $A^{\mu\pm}(t)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[\Phi_\alpha^\pm(k)^*, \Phi_\beta^\mp(k')]_+ = \delta(k - k')\,\delta_{\alpha\beta}, \quad [\Phi_\alpha^\pm(k)]^* = \overset{*}{\Phi}{}_\alpha^\pm(k),$$

$$[A^\mu(k), A^{\nu+}(k')]_- = \delta(k - k')\,\delta_{\mu\nu}, \quad [A^{\mu\pm}(k)]^* = A^{\mu\pm}(k).$$

Введем операторы

$$A^\mu(f) = \int A^\mu(k) f(k)\, d\tilde{\mu}(k), \quad d\tilde{\mu}(k) = d^4k/\tilde{\mu}(k),$$
$$f(k) \in \mathscr{L}_{2,\tilde{\mu}^2},$$
$$\Phi_\alpha(f) = \int \Phi_\alpha(k) f(k)\, d\overline{\mu}(k), \quad d\overline{\mu}(k) = d^4k/\overline{\mu}(k),$$
$$f(k) \in \mathscr{L}_{2,\overline{\mu}^2}. \tag{29.29}$$

Тогда «сглаженные» операторы (29.29) удовлетворяют в обычном фоковском пространстве следующим коммутационным соотношениям:

$$[\Phi_\alpha^\pm(f_1)\,\overset{*}{\Phi}{}_\beta^\pm(f_2)]_+ = (f_1, f_2)_{\overline{\mu}^2}\,\delta_{\alpha\beta},$$
$$[A^{\mu-}(f_1), A^{\nu+}(f_2)]_- = (f_1, f_2)_{\tilde{\mu}^2}\,\delta_{\mu\nu}. \tag{29.30}$$

Из соотношений (29.30) следует, что операторы $\overset{*}{\Phi}{}^{\pm}(f)$ и $\Phi^{\pm}(f)$ ограничены:

$$\| \Phi_{\alpha}^{\pm}(f) \| = \| \Phi_{\alpha}(f) \| \leqslant \| f \|_{\mu^2}. \tag{29.31}$$

Введем в оператор (29.27) формфактор вида

$$\delta(k_1 + k_2 + t) \to \varphi_1(k_1)\, \varphi_2(k_2)\, \varphi(t), \tag{29.32}$$

где $\varphi_1(k_1)$, $\varphi_2(k_2) \in \mathcal{L}_{2,\mu^2}$, а $\varphi(t) \in \mathcal{L}_{2,\mu^2}$.

Более точно, δ-функцию можно приблизить линейными комбинациями произведений указанного вида. Возможность такой аппроксимации следует из того, что $\delta(k_1 + k_2 + t)$ есть слабый предел последовательности функций $g_n = h_n(k_1 + k_2 + t)\, \theta_n(k_1, k_2, t) \times \times (h_n \xrightarrow{\text{сл}} \delta,\ \theta_n \xrightarrow{\text{равн}} 1,\ \theta_n \in \mathcal{L}_{2,\bar{\mu}^2,\bar{\mu}^2,\tilde{\mu}^2})$, каждую из которых в свою очередь можно приблизить линейными комбинациями формфакторов из $\mathcal{L}_{2,\bar{\mu}^2} \otimes \mathcal{L}_{2,\bar{\mu}^2} \otimes \mathcal{L}_{2,\tilde{\mu}^2}$. Тогда уравнение (29.26) примет вид

$$\frac{d\tilde{F}}{de} = H(\varphi)\, \tilde{F}, \quad F_0 = \tilde{F}|_{l=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}. \tag{29.33}$$

Используя (29.32), можно представить $H(\varphi)$ в виде

$$H(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{4} B^{\mu}(\bar{\varphi}_1;\ \bar{\varphi}_2)\, A^{\mu}(\tilde{\varphi}), \tag{29.34}$$

где

$$B^{\mu}(\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_2) =$$
$$= \iint d\bar{\mu}(k_1)\, d\bar{\mu}(k_2)\, \varphi_1(k_1) : \overset{*}{\Phi}(k_1)\, \Lambda^{\mu}(k_1 k_2)\, \Phi(k_2) : \varphi(-k_2) \tag{29.35}$$

представляет собой билинейную комбинацию ограниченных операторов $\overset{*}{\Phi}{}_{\alpha}^{\pm}(\bar{\varphi})$, $\Phi_{\alpha}^{\pm}(\bar{\varphi})$ и, следовательно, является ограниченным. Обозначим $\| B^{\mu}(\bar{\varphi}_1; \varphi_2) \| = b_{\mu}$. Для оператора $A^{\mu}(\tilde{\varphi})$ и для любого вектора с конечным числом компонент N_0 справедлива оценка

$$\| A^n(\tilde{\varphi}) f^{(N_0)} \| \leqslant \text{const} \cdot \| \tilde{\varphi} \| \left[\frac{(n + N_0)!}{N_0!} \right]^{1/2} \| f^{(N_0)} \|. \tag{29.36}$$

Формально решение уравнения (29.33) можно записать в виде

$$\tilde{F} = \exp[eH(\varphi)]\, F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} H^n(\varphi)\, F_0. \tag{29.37}$$

Чтобы показать, что вектор $\widetilde{F}$ существует и представим рядом (29.37), рассмотрим норму вектора $H^n(\varphi)F_0$. Учитывая (29.31) и (29.36), легко получить следующую оценку:

$$\|H^n(\varphi)F_0\| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sum_{\mu=1}^{4}\|b_\mu\|\,\|A^\mu(\widetilde{\varphi})H^{n-1}(\varphi)F_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot n^{1/2}\sum_{\mu=1}^{4} b_\mu \|H^{n-1}(\varphi)F_0\| \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant (n!)^{1/2}\left[\mathrm{const}\cdot\sum_{\mu=1}^{4} b_\mu\right]^n \|F_0\| = c^n (n!)^{1/2}. \quad (29.38)$$

Из (29.38) следует, что

$$\|F\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n c^n}{\sqrt{n!}} < \infty$$

во всей комплексной плоскости e.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей монографии развит метод решения уравнений для коэффициентных функций матрицы рассеяния в евклидовой области с импульсным и пространственным обрезанием. Для модели $\lambda(\varphi^4)_2$ и неполиномиальной нелокальной модели бозонного поля построены решения при бесконечном объеме и без импульсных обрезаний. В этих моделях единственные расходимости — это объемные расходимости вакуумных петель, которые можно эффективно выделить.

Мы почти не касались вопроса о решении уравнений, которые, кроме объемных, содержат и ультрафиолетовые расходимости. Естественно, что при исследовании таких моделей необходимо привлекать теорию перенормировок.

Мы не рассматривали также вопрос о реконструкции коэффициентных функций в псевдоевклидовой области по коэффициентным функциям в евклидовой области. На языке функций Грина этот вопрос решен в работах Остервальдера — Шрадера и Глазера. Было бы интересно разработать аналогичные процедуры и для коэффициентных функций и сформулировать такие аксиомы для матрицы рассеяния в евклидовой области, которые бы обеспечивали справедливость аксиом Боголюбова — Медведева — Поливанова для матрицы рассеяния в псевдоевклидовой области.

Это — предмет для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алебастров В. А., Ефимов Г. В.*— Comm. Math. Phys. 1973, v. 31, p. 1.
2. *Альбеверио, Хе-Крон*: Albeverio S., Hegh-Krohn R.— Comm. Math. Phys., 1973, v. 30, p. 171.
3. *Аникин С. А., Завьялов О. И.*— ТМФ, 1976, т. 26, с. 162.
4. *Аникин С. А., Завьялов О. И.*— ТМФ, 1976, т. 27, с. 425.
5. *Аникин С. А., Завьялов О. И., Поливанов М. К.*— ТМФ, 1973, т. 17, с. 189.
6. *Аникин С. А., Поливанов М. К.*— ТМФ, 1974, т. 21, с. 175.
7. *Арефьева И. Я.*— ТМФ, 1973, т. 14, с. 3; т. 15, с. 207.
8. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1960.
9. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.*— М.: Наука, 1969.
10. *Басуев А. Г.*— ТМФ, 1975, т. 22, с. 203.
11. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1965.
12. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
13. *Боголюбов Н. Н.*— ДАН СССР, 1954, т. 99, с. 225.
14. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М.: Наука, 1969.
15. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958.
16. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.*— Изв. АН СССР, 1956, т. 20, с. 585.
17. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.*— Acta Math., 1957, v. 97, p. 227.
18. *Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И.*— ТМФ, 1969, т. 1, с. 251.
19. *Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И.* (1949).— ДАН СССР, 1949, т. 66, с. 3217.
20. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.*— ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 203.
21. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.*— ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 391.
22. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.*— ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 77.
23. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.*— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 845.
24. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.*— УФН, 1955, т. 55, с. 149.
25. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1973.
26. *Борхерс, Циммерман*: Borchers H. J., Zimmermann W.— Nuovo Cimento, 1964, v. 31, p. 1047.
27. *Букафури, Кайаниело*: Buccafuri A., Caianiello E. D.— Nuovo Cimento, 1958, v. 8, p. 170.
28. *Бьёркен, Дрелл*: Bjorken T., Drell S.— Relativistic quantum mechanics, Relativistic quantum fields./ McGraw Hill, New York, 1965.
29. *Вайнберг*: Weinberg S.— Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 3497.
30. *Вайтман А.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей / (перев. с англ.— М.:, Мир, 1968).
31. *Васильев А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л.: ЛГУ, 1976.
32. *Вик*: Wick G. C.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1124.
33. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных.— М.: Наука, 1964.
34. *Волович И. В., Сушко В. Н.*— ТМФ, 1971, т. 9, с. 211.

35. *Ганчковяк*: Hanckowiak J.— Functional derivation of the Kirkwood—Salsburg equation and its application to quantum field theory.— Wroclaw, Preprint, 1975.
36. *Гелл-Манн, Лоу*: Gell-Mann M., Low F. E.— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 350.
37. *Гелл-Манн, Лоу*: Gell-Mann M., Low F. E.— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
38. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А*.— ДАН СССР, 1954, т. 97, с. 209.
39. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А*.— Матем. сб., 1943, т. 12(54), с. 197.
40. *Глазер*: Glaser V.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 37, p. 257.
41. *Глимм*: Glimm J.— Comm. Math. Phys., 1967, v. 5, p. 343; v. 6, p. 61.
42. *Глимм*: Glimm J.— Comm. Math. Phys., 1968, v. 10, p. 1.
43. *Глимм*: Glimm J.— Comm. Math. Phys., 1968, v. 8, p. 12.
44. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 1945.
45. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Comm. Pure Appl. Math., 1969, v. 22, p. 401.
46. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Ann. Math., 1970, v. 91, p. 362.
47. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Acta Math., 1970, v. 125, p. 203.
48. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Ann. Phys., N. Y., 1970, v. 60, p. 321.
49. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— J. Funct. Anal., 1971, v. 7, p. 323.
50. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— In: Statistical Mechanics and Quantum Theory. Ed. by De With an Stora.— New York, Gordon and Breach, 1971.
51. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— Comm. Math. Phys., 1971, v. 22, p. 1.
52. *Глимм, Джафе*: Glimm J., Jaffe A.— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1668.
53. *Глимм, Джафе, Спенсер*: Glimm J., Jaffe A., Spencer T.— Ann. Math., 1974, v. 100, p. 585.
54. *Глимм, Спенсер*: Glimm J., Spencer T.— The Wightman axioms and the mass gap for the $P(\varphi)_2$ quantum field theory.— N. Y., Preprint, 1972.
55. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
56. *Гросс*: Gross L.— Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v. 105, p. 372.
57. *Гросс*: Gross L.— In: Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability.— Univ. Calif. Press, Berkeley, 1968.
58. *Гросс*: Gross L.— J. Funct. Anal., 1972, v. 10, p. 52.
59. *Гуэрра*: Guerra F.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 1213.
60. *Гуэрра, Розен, Саймон*: Guerra F., Rosen L., Simon B.— Comm. Math. Phys., 1972, v. 27, p. 10.
61. *Гуэрра, Розен, Саймон*: Guerra F., Rosen L., Simon B.— Ann. Math., 1975, v. 101, p. 111.
62. *Дайсон*: Dyson F. J.— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1736. (Имеется перевод в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1954.)
63. *Димок*: Dimock J.— Comm. Math. Phys., 1974, v. 35, p. 347.
64. *Джафе*: Jaffe A.— Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 127.
65. *Джонсон*: Johnson R. W.— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 2161.
66. *Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его приложения, 1968, т. 2, вып. 4, с. 31.
67. *Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его приложения, 1969, т. 3, вып. 1, с. 27.
68. *Добрушин Р. Л., Минлос Р. А*.— Функц. анализ и его приложения, 1973, т. 7, вып. 4, с. 81.
69. *Ефимов Г. В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей.— М.: Наука, 1977.
70. *Ефимов Г. В.*— ТМФ, 1970, т. 2, с. 302.
71. *Жинибр*: Ginibre.— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 238.
(Имеется перевод: Математика, 1965, т. 12, с. 238.)
72. *Завьялов О. И.*— ТМФ, 1976, т. 28, с. 27.
72. *Завьялов О. И., Степанов Б. М.*— ЯФ, 1965, т. 1, с. 922.

74. *Иванов С. С*: Ivanov S. S.— On the generating operator for Green's functions equations.— Киев: Препринт ИТФ-70-27, 1970.
75. *Иванов С. С.* Equations for the *S*-matrix elements in g $(\varphi^4)_2$ theory.— Киев: Препринт ИТФ-72-15Е, 1972.
76. *Иванов С. С.* Исследование рядов теории возмущений для матрицы рассеяния методом уравнений для коэффициентных функций.— Киев: Канд. диссертация, 1972.
77. *Иванов С. С.* Weak asymptotic expansion of coefficient functions at infinite volume.— Киев: Препринт ИТФ-74-42Е, 1974.
78. *Иванов С. С., Петрина Д. Я.*— ДАН СССР, 1969, т. 188, с. 776.
79. *Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.* On the equations for the *S*-matrix coefficients functions in quantum field theory. — Киев: Препринт ИТФ-73-92Е, 1973.
80. *Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.*— ТМФ, 1974, т. 19, с. 37.
81. *Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.*— ТМФ, 1975, т. 23, с. 160.
82. *Иванов С. С., Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.*— В сб. Проблемы физики ЭЧАЯ, Атомиздат, 1976, т. 7, вып. 3.
83. *Иванов С. С., Ребенко А. Л.* On convergence of the perturbation series in the field theory models containing fermions.— Киев: Препринт ИТФ-71-38Е, 1971.
84. *Иванов С. С., Ребенко А. Л.*— ТМФ, 1972, т. 11, с. 190.
85. *Иоффе Б. Л.*— ДАН СССР, 1954, т. 94, с. 437.
86. *Иоффе Б. Л.*— ДАН СССР, 1954, т. 95, с. 761.
87. *Йенни, Гартенхауз*: Yennie D. R., Gartenhaus S.— Nuovo Cimento, 1958, v. 9, p. 59.
88. *Кайаниело*: Caianiello E. R.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 223.
89. *Кайаниело*: Caianiello E. R. Combinatorics and Renormalization in Quantum Field Theory. W. A. Benjamin, Inc., 1973.
90. *Като*: Kato T.— Trans. Amer. Math. Soc., 1951, v. 70, p. 195.
91. *Като*: Kato T.— Progr. Theor. Phys., 1961, v. 26, p. 99.
92. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
93. *Карлеман*: Carleman T.— Ark. Mat. Ast. Fys., 1934, v. 24B, №11.
94. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике.— М.: Мир, 1972.
95. *Келлен*: Collan C. G., Jr.— Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 1541.
96. *Кершоу*: Kershaw D. S.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 798.
97. *Киржниц Д. А.*— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 551.
98. *Кошманенко В. Д., Самойленко Ю. С.*— УМЖ, 1975, т. 5, с. 667.
99. *Леман, Симанзик, Циммерман*: Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W. — Nuovo Cimento, 1955, v. 1, p. 205.
100. *Ленфорд*: Lanford O. E.— Construction of quantum fields interacting by a cutoff Yukawa coupling. / Princeton Univ., Thesis, 1966.
101. *Мак Брайан*: McBryan O.— Comm. Math., Phys., 1975, v. 45, p. 279.
102. *Медведев Б. В., Павлов В. П., Поливанов М. К., Суханов А. Д.*— ТМФ, 1972, т. 13, с. 3.
103. *Медведев Б. В., Поливанов М. К.*— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1130.
104. *Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований.— Дубна: ОИЯИ, 1964, т. 1, с. 77.
105. *Могилевский О. А.* Некоторые вопросы нелокальной квантовой электродинамики частиц произвольного спина.— Канд. диссертация, Дубна.
106. *Морен К.* Методы гильбертова пространства.— М.: Мир, 1965.
107. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М.: Гостехиздат, 1956.
108. *Наканиши*: Nakanishi N.— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1957, v. 17, p. 401.
109. *Накано*: Nakano T.— Progr. Theor. Phys., 1959, v. 21, p. 241.
110. *Нельсон*: Nelson E.— Ann. Math., 1959, v. 70, p. 572.
111. *Нельсон*: Nelson E.— Math. Phys., 1964, v. 5, p. 332.

112. *Нельсон*: Nelson E. / In: Mathematical theory of elementary particles. Ed. by R. Goodman and I. Segal.— MIT Press, 1966, pp. 69—73.
113. *Нельсон*: Nelson E.— In: Proceedings of Summer Institute of Partial Differential Equations.— Berkeley, 1971.
114. *Нельсон*: Nelson E.— J. Funct. Anal., 1973, v. 12, p. 97.
115. *Нельсон*: Nelson E.— J. Funct. Anal., 1973, v. 12, p. 211.
116. *Нельсон*: Nelson E. / In: Constructive quantum field theory. Ed. G. Velo, A. Wightman. Lecture notes in physica—Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, v. 25, 1973.
117. *Овсянников Л. В.*— ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 1112.
118. *Огиевецкий В. И.*— ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 919.
119. *Остервальдер*: Osterwalder K.— Thesis, ETH, Zürich, 1970.
120. *Остервальдер, Шрадер*: Osterwalder K., Schrader R.— Helv. Phys. Acta, 1973, v. 46, p. 277.
121. *Остервальдер, Шрадер*: Osterwalder K., Schrader R.— Comm. Math. Phys., 1973, v. 31, p. 83; 1975, v. 42, p. 281.
122. *Парасюк О. С.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1956, т. 20, с. 843.
123. *Петерман*: Peterman A.— Helv. Phys. Acta., 1953, v. 26, p. 291.
124. *Петрина Д. Я.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1968, т. 32, с. 1052.
125. *Петрина Д. Я.*— ТМФ, 1970, т. 4, с. 389.
126. *Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.* Green function equations in quantum Electrodynamics — Киев: Препринт ИТФ-68-59, 1968.
127. *Петрина Д. Я. Иванов С. С.*— ДАН СССР, 1973, т. 210, с. 59.
128. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Тезисы Международного семинара по функциональным методам в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: ФИАН СССР, 1971, т. XII с. 7.
129. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Generating operators and Hamiltonian in the model $g(\varphi^4)_2$ at infinite volume.— Киев: Препринт ИТФ-72-163Е, 1972.
130. *Петрина Д. Я., Скрипник В. И.*— ТМФ, 1971, т. 8, с. 000.
131. *Погребков А. К., Сушко В. Н.*— ТМФ, 1975, т. 22, с. 159.
132. *Поливанов М. К.*— ДАН СССР, 1955, т. 100, с. 1061.
133. *Пю*: Pugh R. E.— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 740.
134. *Ребенко А. Л.* On the equations for the matrix elements of the Euclidean quantum Electrodynamics.— Киев: Препринт ИТФ-71-37Е, 1971.
135. *Ребенко А. Л.*— ТМФ, 1972, т. 11, с. 301.
136. *Ребенко А. Л.* Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния в квантовой электродинамике.— Киев; Канд. диссертация, 1972.
137. *Ребенко А. Л.* Equations for coefficient functions of S-matrix in $g(\varphi^4)_2$ theory at infinite volume.— Киев: Препринт ИТФ-74-41Е, 1974.
138. *Ребенко А. Л.* Euclidean Fermi fields and Green function without momentum cutoff in the Yukawa_2 field theory.— Киев: Препринт ИТФ-74-54Е, 1974.
139. *Ребенко А. Л.* The Equations in Functional Derivatives for the Coefficient Functions of S-matrix.— Киев: Препринт ИТФ-76-73Е, 1976.
140. *Рид*: Reed M.— J. Funct. Anal. 1970, v. 5, p. 94.
141. *Розен*: Rosen L.— Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 157.
142. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.
143. *Саймон*: Simon B.— Nuovo Cimento, 1969, v. 59A, p. 199.
144. *Саймон*: Simon B.— Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 1583.
145. *Саймон*: Simon B.— J. Funct. Anal., 1973, v. 12, p. 335.
146. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.
147. *Саймон, Хе-Крон*: Simon B. H., Hegh-Krohn R.— J. Funct. Anal., 1972, v. 9, n. 121.
148. *Сигал*: Segal I.— Trans. Amer. Math. Soc., 1956, v. 81, p. 106.
149. *Сигал*: Segal I.— Ann. Math., 1956, v. 53, p. 160.
150. *Сигал*: Segal I.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1967, v. 57, p. 1178.

151. *Сигал*: Segal I.— Ann. Math., 1970, v. 92, p. 462.
152. *Сейлер*: Seiler E.— Comm. Math. Phys., 1975, v. 42, p. 163.
153. *Сейлер*, *Саймон*: Seiler F., Simon B.— J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 2289.
154. *Сейлер*, *Саймон*: Seiler E., Simon B.— Bounds in the Yukawa$_2$ quantum field theory. Upper Bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound.— Princeton, Preprint, 1975.
155. *Симанзик*: Symanzik K.— Lectures at a Summer school for high energy physics.— Yougoslawia, 1961.
156. *Симанзик*: Symanzik K.— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 510.
157. *Симанзик*: Symanzik K. / In: Proceeding of the International school of physics «Enrico Fermi» Ed. R. Tost.— Varena, Acad. Press, 1969.
158. *Симанзик*: Symanzik K.— Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
159. *Скрипник В. И.* On the convergence of perturbation series for the S-matrix correlation functions in nonpolynomial models at an infinite Euclidean volume.— Киев: Препринт ИТФ-72-175Е, 1972.
160. *Софер*, *Висконти*: Soffer T. C., Visconti A.— Phys.'Rev., 1967, v. 162, p. 1386.
161. *Степанов Б. М.*— Изв. АН СССР, сер. матем., 1963, т. 27, с. 819.
162. *Тейлор*: Taylor J. G.— Suppl. Nouvo Cimento, 1963, v. 1, p. 859.
163. *Тейлор*: Taylor J. G.— J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 1720.
164. *Тирринг*: Thirring W. E.— Helv. Phys. Acta, 1953, v. 26, p. є3.
165. *Томонага*: Tomonaga S.— Progr. Theor. Phys., 1946, v. 1, p. 27. (Имеется перевод в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1954, с. 1).
166. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР, 1963, т. 152, с. 573.
167. *Файнберг В. Я.* Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований.— Дубна: ОИЯИ, 1964.
168. *Фейнман*: Feynman R. P.— Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, p. 367: Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 749; Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 769. (Имеется перевод в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1954, с. 138).
169. *Фельдман*: Feldman J.— Nucl. Phys., 1973, v. B52, p. 608.
170. *Фивел*: Fivel D.— Phys. Rev., 1971, v. D4, p. 1653.
171. *Фок В. А.* Zs. F. Phys., 1932, v. 75, p. 622.
172. *Фок В. А.*— В сб. Работы по квантовой теории поля.— Л.: ЛГУ, 1957.
173. *Фрадкин Е. С.*— ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 47.
174. *Фрадкин Е. С.*— ДАН СССР, 1955, т. 100, с. 897.
175. *Фрадкин Е. С.*— ДАН СССР, 1959, т. 125, с. 311.
176. *Фрадкин Е. С.*— Nucl. Phys., 1963, v. 49, p. 624.
177. *Фрадкин Е. С.*— Труды ФИАН, 1965, т. 29, с. 7.
178. *Франк*: Frank W. H.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 363.
179. *Фрёлих*: Fröhlich J.— Helv. Phys. Acta, 1974, v. 47, p. 265.
180. *Фрёлих*: Fröhlich J.— Adv. Math., 1977, v.23, p. 119.
181. *Фрёлих*: Fröhlich J.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 833.
182. *Фридрихс*, *Шапиро*: Friedrichs K., Shapiro H. N.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1937, v. 43, p. 336.
183. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1969.
184. *Хе-Крон*: Hegh-Krohn R.— Comm. Math. Phys., 1971, v. 21, p. 244.
185. *Хепп*: Hepp K.— Comm. Math. Phys., 1967, v. 6, p. 161.
186. *Хепп*: Hepp K.— Systems a un nombre infini de defres de liberte.— Springer-Verlag; 1970.
187. *Хепп К.* Теория перенормировок.— М.: Наука; 1974.
188. *Хилле Э. Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М.: ИЛ, 1962.
189. *Хори*: Hori S.— Progr. Theor. Phys.; 1952; v. 7; p. 578.
190. *Хунцикер*: Hunziker W.— J. Math. Phys.; 1965; v. 6; p. 6.
191. *Хунцикер*: Hunziker W.— In Lectures in theorytical physics.— New York Gordon and Breach v. X-A 1968.

192. *Циммерманн*: Zimmermann W.— Comm. Math. Phys., 1967, v. 6, p. 161.
193. *Циммерманн*: Zimmermann W.— Comm. Math. Phys., 1969, v. 11, p. 1.
194. *Циммерманн*: Zimmermann W.— Ann. Phys. 1973, v. 77, p. 536.
195. *Циммерманн*: Zimmermann W.— Ann. Phys., 1973, v. 77, p. 570.
196. *Чуешов И. Д.* Об уравнениях для S-матрицы в евклидовой теории.— Киев: Препринт ИТФ-76-68Р, 1976.
197. *Швебер С.* Введение в релятивистскую теорию поля.— М.: ИЛ, 1963.
198. *Швингер*: Schwinger J.— Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 1439; Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 651; Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 79.
(Имеется перевод в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: ИЛ, 1954, с. 12).
199. *Швингер*: Schwinger J.— Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 1951, v. 37, p. 452, 455. (Имеется перевод: ПСФ, 1955, т. 3).
200. *Швингер*: Schwinger J.— Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 664.
201. *Швингер*: Schwinger J.— Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 1958, v. 44, p. 956.
202. *Швингер*: Schwinger J.— Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 721.
203. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (второй специальный курс).— М.: Наука, 1965.
204. *Ширков Д. В.*— ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 972.
205. *Шрадер*: Schrader R.— Ann. Phys., 1972, v. 70, p. 412.
206. *Щербина В. А.*— ТМФ, 1973, т. 14, с. 342.
207. *Щербина В. А.* Некоторые свойства R-операции для полей с локальным взаимодействием.— М.: Докт. диссертация, 1975.
208. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1969.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Дмитрий Яковлевич Петрина,
Станислав Станиславович Иванов,
Алексей Лукич Ребенко

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

М., 1979 г., 296 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Г. В. Подвольская, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11120

Сдано в набор 11.10.78. Подписано к печати 17.01.79. Т-01857. Бумага $60 \times 90^1/_{16}$. тип. № 1. Высокая печать. Литературная гарнитура. Условн. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 21,31. Тираж 4000 экз. Цена книги 2 р. 40 к. Заказ № 8-1077.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Киевская книжная типография научной книги республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР. 252004, г. Киев, ул. Репина, 4.