А. З. ПЕТРОВ

ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

Петров Алексей Зиновьевич

Пространства Эйнштейна

Редактор *Лапко А. Ф.*
Техн. редактор *Мурашова Н. Я.* Корректор *Булатова К. В.*

Сдано в набор 8/XII 1960 г. Подп. к печати 24/II 1961 г. Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Физ. печ. л. 14,50. Условн. печ. л. 23,78. Уч.-изд. л. 22,76. Тираж 15000 экз.
Т-03106. Цена книги 1 р. 34 к. Заказ № 719.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза
Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена изучению пространств, лежащих в основе общей теории относительности, и их обобщений для любого числа измерений.

Учитывая, что в литературе по релятивистской теории имеется ряд фундаментальных монографий, таких, например, как книга Л. Ландау и Е. Лифшица «Теория поля» и В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения», автор, сознательно избегая повторений, ограничил себя кругом вопросов, которые не освещаются в этих исследованиях и которые должны представлять интерес как для физиков, так и для математиков. Этим же объясняется тот факт, что изложение дается с упором на математическую сторону вопроса, причем четырехмерным пространствам с сигнатурой типа Лоренца уделяется особое внимание.

В настоящее время имеется большая журнальная литература, в которой накопилось много новых результатов, неизвестных математикам и физикам, не занимающимся специально вопросами общей теории относительности. Часть этих результатов получила освещение в книге, те же вопросы, которые по тем или иным соображениям не могли быть изложены, отмечены в ссылках на библиографию (которую автор стремился сделать по возможности полной) и в ряде задач (некоторые из них требуют простого применения результатов, изложенных в книге, а другие заключают в себе значительное расширение теории).

Оставаясь в рамках общей теории относительности, автор не рассматривает в этой книге различные варианты единой теории, сосредоточивая внимание читателя на проблемах, по-видимому, наиболее перспективных в настоящее время; такими являются, например, применение групп Ли к изучению полей гравитации, проблема Коши, методы инвариантного изучения пространств Эйнштейна и тому подобные.

Современное развитие теории относительности, приведшее к изучению таких проблем, как гравитационная радиация, поведение элементарных частиц в гравитационном поле, взаимодействие полей и т. д., необходимо требует тонких методов исследования. При написании настоящей книги автор поставил перед собой цель — помочь читателям приблизиться к таким методам.

Автор с большой признательностью отмечает работу, проделанную редактором книги А. Ф. Лапко, чьи советы и замечания значительно повлияли на качество книги.

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Всякое пространство Эйнштейна представляет собой специальный случай так называемых римановых многообразий, и поэтому необходимо остановиться на определении этого понятия.

§ 1. Римановы многообразия

Рассмотрим совокупность объектов, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие со всеми упорядоченными системами n действительных или комплексных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$|x^\alpha - a^\alpha| < \varepsilon^\alpha, \tag{1.1}$$

где a^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, а ε^α — положительные числа. Такую совокупность будем называть *ограниченной областью n-мерного пространства*, а сами объекты — *точками* этой области. В зависимости от приложений и числа n эти точки могут интерпретироваться различным образом (частоты спектра, события в пространственно-временном континууме, состояние динамической системы, прямые и т. д.).

Всякое взаимно однозначное соответствие между точками и системами чисел $(x^1, \ldots, x^n)$ назовем *системой координат*; числа x^α назовем *координатами* той точки, которой в этой координатной системе отвечает система чисел x^α.

Если в области заданы две системы координат $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$, то существует взаимно однозначное непрерывное соответствие между этими двумя системами; оно может быть записано уравнениями

$$x^\alpha = f^\alpha(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \quad x^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.2}$$

про которые будем говорить, что они определяют *преоб-*

разование координат. Можно также смотреть на (1.2) как на *точечное* преобразование, когда x^α и $x^{\alpha'}$ рассматриваются как координаты различных точек в одной системе координат, однако в дальнейшем точечные преобразования, в отличие от (1.2), будем записывать, изменяя коренную букву или отмечая ее знаком «$*$» при тех же индексах:

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^n), \quad \overset{*}{x}{}^\alpha = \overset{*}{x}{}^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{1.3}$$

Функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$, допускающую непрерывные частные производные порядка r, будем называть *функцией класса* C^r. Если f и φ в (1.2) — класса C^r и якобианы $\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^{\beta'}}\right|$, $\left|\frac{\partial \varphi^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right|$ отличны от нуля для любого преобразования координат в области, то будем говорить, что задано *пространство класса* C^r.

Если $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$ — две координатные системы в области n-мерного пространства, то якобиан $J = \left|\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right|$ в этой области не меняет знака; будем говорить, что эти координатные системы *одинаково ориентированы*, если знак J положительный, и что они *противоположно ориентированы*, если знак J отрицательный.

Теперь можно ввести понятие *геометрического объекта*, в рамки которого укладывается почти весь применяемый далее математический аппарат.

Рассмотрим в n-мерном пространстве некоторую область A, в которой определены две системы координат $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$. Пусть в A задана система N функций от x^α и, кроме того, задается правило (*закон преобразования* объекта), указывающее, каким образом однозначно вычисляется другая система N функций от $x^{\alpha'}$ только через функции первой системы и производные достаточно высокого порядка от $x^{\alpha'}$ по x^α. Тогда будем говорить, что задан *геометрический объект*, а первая и вторая системы N функций являются его компонентами относительно координатных систем $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$ соответственно. Например, величины с одной-единственной компонентой $\varphi(x^\alpha)$ и законом преобразования

$$\varphi(x^{\alpha'}) = J^{-k}\varphi(x^\alpha),$$

где $J = \left| \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \right|$, а k — некоторое число, являются объектами и называются *скалярными плотностями веса* k; в частности, когда $k = 0$, получим объект, называемый *скаляром*, для которого закон преобразования будет иметь вид:

$$\psi(x^{\alpha'}) = \psi(x^{\alpha}).$$

Предположим теперь, что в области A n-мерного вещественного пространства задан скаляр, который получится, если в системе координат $\{x^{\alpha}\}$ задать *неопределенную*, в общем случае, квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} \tag{1.4}$$

и потребовать, чтобы она не зависела от системы координат. Здесь, как и везде далее, по повторяющимся внизу и вверху индексам производится суммирование (*правило Эйнштейна*), а $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}(x^{\alpha})$ — функции заданного класса C^r, подчиненные условию

$$g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0. \tag{1.5}$$

При помощи формы (1.4) можно в области n-мерного пространства определить *метрику*, после чего получаем *риманово многообразие*; теория римановых многообразий называется *римановой геометрией*, основы которой заложены в классической работе Римана [1]. Эти многообразия обозначаются далее символом V_n. Более тщательное определение V_n требует привлечения понятия покрытия топологического пространства или других соображений (П. К. Рашевский [188], стр. 346 — 366; Яно и Бохнер [257], стр. 7 — 9; см. также § 38).

Смысл введения метрики при помощи формы (1.4) состоит в том, что ds интерпретируется как длина вектора с компонентами dx^{α}. В силу неопределенности формы (1.4) длина вектора может быть больше, меньше или равна нулю, и в последнем случае вектор называется *изотропным*.

Если координаты x^{α} заданы как функции вещественного параметра t, то величина

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} \right|}\, dt \tag{1.6}$$

определит длину дуги между точками t_1 и t_2 кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, при этом не исключается возможность того, что длина будет равна нулю. Далее такие *изотропные* кривые интерпретируются в пространственном многообразии релятивистской теории тяготения как *мировые линии света*.

Среди различных возможных объектов особенно важными являются *тензорные поля*, для определения которых нужно задать правило их вычисления при переходе от системы координат $\{x^\alpha\}$ к системе $\{x^{\alpha'}\}$. Чтобы получить представление об этом законе, рассмотрим вторую из формул (1.2) и, имея в виду замечание о классе φ^α, запишем:

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} dx^\beta. \tag{1.7}$$

Рассмотрим точно так же компоненту скалярного поля $\psi(x)$; по определению,

$$\psi(x^{\alpha'}) = \psi(x^\alpha),$$

и следовательно, обозначая оператор $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ через ∂_α, получим частные производные

$$\partial_{\alpha'}\psi = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\beta \psi. \tag{1.8}$$

В формулах (1.7) и (1.8) связь между старыми и новыми компонентами объектов имеет линейный вид, однако выступают две различные системы коэффициентов линейной зависимости. Соответственно этому будем различать два сорта индексов: *ковариантные индексы*, отвечающие (1.8) (будем их всегда писать внизу), и *контравариантные*, отвечающие (1.7) (их помещаем всегда наверху). Обобщая этот факт, будем далее рассматривать величины, обладающие как ковариантными, так и контравариантными индексами. Если число первых равно r, а вторых s, то будем говорить о величинах *валентности* $r + s$. Теперь можно дать следующее общее определение.

Тензорным полем веса N и валентности $r + s$ назовем геометрический объект, имеющий n^{r+s} компонент

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_s}{}_{\beta_1 \ldots \beta_r}(x) \qquad (\alpha_1, \ldots \alpha_s, \ \beta_1, \ldots, \beta_r = 1, \ldots, n),$$

причем при переходе к другой системе координат новые компоненты вычисляются по правилу .

$$T^{\alpha'_1\ldots\alpha'_s}{}_{\beta'_1\ldots\beta'_r}=J^N T^{\gamma_1\ldots\gamma_s}{}_{\delta_1\ldots\delta_r}\frac{\partial x^{\alpha'_1}}{\partial x^{\gamma_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha'_s}}{\partial x^{\gamma_s}}\frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x^{\beta'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\delta_r}}{\partial x^{\beta'_r}}. \qquad (1.9)$$

Это поле называют *ковариантным валентности* r *и контравариантным валентности* s. Если $N \neq 0$, поле называется *относительным*, при $N = 0$ будем говорить просто *тензорное поле*, иногда опуская указание веса.

Таким образом, *скалярное поле* или *скаляр*, определенные выше, дают пример тензорного поля валентности $0+0$ и веса $N=0$. Скалярная плотность имеет валентность $0+0$ и вес N.

Следующим примером тензорных полей будут *векторные поля*: *ковариантные*

$$v_{\alpha'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} v_\beta \qquad (1.10)$$

и *контравариантные*

$$u^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} u^\beta, \qquad (1.11)$$

имеющие оба вес, равный нулю. В частности, (1.7) определяет контравариантное поле векторов, а (1.8) — ковариантное, и притом *градиентное*.

Для римановых многообразий по определению $ds' = ds$ и, следовательно,

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = g_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'},$$

откуда в силу (1.7) получим

$$\left(g_{\alpha'\beta'} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}\right) dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'} = 0$$

и в силу полного произвола в выборе вектора $dx^{\alpha'}$

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}},$$

т. е. $g_{\alpha\beta}$ определяет поле ковариантного тензора валентности 2. Так как

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\gamma}}=\delta^{\alpha}_{\gamma},\qquad \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma'}}=\delta^{\alpha'}_{\gamma'},\tag{1.12}$$

то матрица $\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)$ будет транспонированной, обратной матрицей относительно $\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)$; здесь δ^{α}_{β} — *символ Кронекера*, равный 1 при $\alpha=\beta$ и нулю при $\alpha\neq\beta$.

Рассмотрим некоторую точку P риманова многообразия и обозначим:

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)_P=A^{\alpha'}_{\beta},\qquad \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)_P=A^{\alpha}_{\beta'}.\tag{1.13}$$

Тогда в P компоненты контравариантного вектора преобразуются по закону

$$\eta^{\alpha'}=A^{\alpha'}_{\alpha}\eta^{\alpha},\quad \eta^{\alpha}=A^{\alpha}_{\alpha'}\eta^{\alpha'},\quad |A^{\alpha'}_{\alpha}|\neq 0,\quad A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\alpha'}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta},\tag{1.14}$$

определяющему группу линейных однородных преобразований — *центроаффинную группу*, которой отвечает *геометрия Клейна*, обобщающая для n измерений обычную аффинную геометрию. Следовательно, каждая точка P получает свое собственное *локальное* центроаффинное пространство, которое обозначим символом E_n. Поля геометрических объектов риманова многообразия, если отождествить начало E_n с той точкой V_n, которой оно отвечает, определяют в E_n объекты с постоянными компонентами. Аксиоматике и изучению аффинных пространств посвящен ряд статей и монографий (П. А. Широков [91], А. П. Норден [170], стр. 11—58, П. К. Рашевский [188], 82—144).

Задачи

1. Показать, что если символы Кронекера принять в качестве компонент смешанного тензора валентности $1+1$ в некоторой координатной системе, то компоненты этого тензора в другой системе также будут символами Кронекера.

2. Если компоненты тензора в некоторой точке равны нулю в системе $\{x\}$, то в этой же точке они равны нулю

и в любой системе $\{x'\}$; если компоненты тензора равны нулю для одной системы, то они равны нулю и в любой системе координат.

3. Для любого векторного поля $u^{\alpha}(x)$ можно определить такую систему координат $\{x'\}$, что

$$u^{\alpha'}=0, \quad u^{n'}=1 \qquad (\alpha<n). \tag{1.15}$$

§ 2. Алгебра тензоров

Будем говорить, что *тензор* при любом весе *равен нулю*, если все его компоненты равны нулю хотя бы в одной системе координат; в этом случае он равен нулю в любой системе (задача 2, § 1). Алгебра тензоров вводит операции, позволяющие данным тензорам ставить в соответствие новые тензоры.

Сложение и вычитание тензоров. Если сложить соответствующие компоненты двух тензоров одинакового веса, с одинаковым числом r ковариантных и s контравариантных индексов, то получаемая таким образом система величин определит тензор того же типа. Так, если

$$M^{\alpha'}_{\beta'}=J^N A^{\alpha'}_{\gamma} A^{\delta}_{\beta'} M^{\gamma}_{\delta}, \qquad N^{\alpha'}_{\beta'}=J^N A^{\alpha'}_{\gamma} A^{\delta}_{\beta'} N^{\gamma}_{\delta},$$

то

$$M^{\alpha'}_{\beta'}+N^{\alpha'}_{\beta'}=J^N A^{\alpha'}_{\gamma} A^{\delta}_{\beta'}\left(M^{\gamma}_{\delta}+N^{\gamma}_{\delta}\right).$$

Доказательство очевидным образом проводится при любой валентности.

Внешнее произведение тензоров. Умножая каждую компоненту тензора веса N валентности $k+m$ на каждую компоненту другого тензора веса N' валентности $r+s$, получим систему величин, которые будут компонентами тензора веса $N+N'$ и валентности $p+q$, где $p=k+r$, $q=m+s$. Доказательство сводится к перемножению левых и правых частей соотношений, определяющих закон преобразования для компонент этих двух тензоров.

Например, произведение скалярной плотности и ковариантного вектора определяет относительный ковариантный вектор. Точно так же произведение ковариантного и контравариантного векторов дает тензор валентности $1+1$ и веса 0.

Свертывание тензоров — операция, применимая к любому тензору валентности $r+k$, где r и k больше нуля, и заключающаяся в том, что некоторый ковариантный индекс полагают равным некоторому контравариантному и берется сумма по этому индексу суммирования. Это приводит к компонентам тензора валентности $(r-1)+(k-1)$. Так как при доказательстве этого утверждения вес тензора и значения r и k не играют роли, то достаточно рассмотреть тензор

$$M^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}{}_{\beta\gamma};$$

свертывая его по индексам α' и β', получим:

$$M^{\alpha'}{}_{\alpha'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\alpha'} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = M^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} A^{\gamma}_{\gamma'},$$

т. е. $M^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} = M_{\gamma}$ — тензор, если $M^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ — тензор.

Операция *внутреннего умножения тензоров* получается как комбинация внешнего умножения и свертывания и поэтому, как легко убедиться, приводит к тензору.

Пользуясь этими действиями, можно получить так называемое *правило частного* для тензоров, часто применяемое при исследовании тензорных уравнений. Оно заключается в следующем: пусть в каждой системе координат задана система n^{r+s} чисел $M_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s}$ таких, что система чисел

$$N_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = M_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s} v^{\beta_1} \ldots v^{\beta_s}$$

при *любом* выборе s контравариантных векторов v определяет тензор валентности $r+0$; тогда $M_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s}$ определяет тензор валентности $(r+s)+0$. Достаточно провести доказательство для случая $s=1$. Имеем:

$$M_{\alpha'_1\ldots\alpha'_r\beta'} v^{\beta'} = v^{\beta'} A^{\beta}_{\beta'} M_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta} A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \ldots A^{\alpha_r}_{\alpha'_r}.$$

Так как выбор v совершенно произволен, то

$$M_{\alpha'_1\ldots\alpha'_r\beta'} = M_{\alpha_1\ldots\alpha_r\beta} A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \ldots A^{\alpha_r}_{\alpha'_r} A^{\beta}_{\beta'},$$

что и доказывает утверждение. Это правило, конечно, обобщается на случай, когда числа M имеют контравариантные индексы, а также на случай, когда v — ковариантные векторы; оно часто применяется и в некотором смысле определяет действие, обратное операции умножения тензоров.

Если компоненты некоторого тензора не меняются от перестановки двух или нескольких индексов одинаковой природы, то тензор называется *симметрическим* относительно этих индексов. Если же перестановка индексов ведет только к изменению знака компоненты, то тензор называется *кососимметрическим* по этим индексам. Ясно, что симметрия и косая симметрия инвариантны при преобразовании координат. Эти два часто встречающиеся свойства тензоров означают прежде всего, что тензор, обладающий одним из этих свойств, определяется меньшим числом компонент, чем это было бы в общем случае.

Так, ковариантный тензор второй валентности в общем случае имеет n^2 компонент; если же он симметрический, то его определяют $\frac{n(n+1)}{2}$ компонент, а в случае косой симметрии $\frac{n(n-1)}{2}$ компонент.

Симметрирование и альтернирование тензоров. Если некоторый тензор имеет несколько индексов одного и того же рода, то из него можно образовать новый тензор, симметричный или кососимметричный по этим индексам или по некоторым из этих индексов.

Пусть, например, дан тензор валентности $m+0$: $B_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$. Взяв $m!$ компонент, которые получаются при перестановке индексов $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ всеми возможными способами, и сложив их, получим компоненту симметрического тензора, которая обозначается так:

$$B_{(\alpha_1\ldots\alpha_m)} = \frac{1}{m!}\left(B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} + B_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m} + \ldots\right).$$

Эта *операция симметрирования* может применяться только к индексам одного и того же рода.

Аналогично вводится *операция альтернирования*, приводящая к кососимметрическому тензору; взяв $m!$ компонент, как и ранее, образуем сумму, в которой каждую компоненту берем со знаком плюс или минус, соответственно тому, будет ли подстановка $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_{r_1} & \alpha_{r_2} & \ldots & \alpha_{r_m}\end{pmatrix}$ четная или нечетная. Это приводит к кососимметрическому тензору, который обозначается символом

$$B_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]}=\frac{1}{m!}\left(B_{\alpha_1\ldots\alpha_m}-B_{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_m}+\ldots\right).$$

Деление на $m!$ необязательно, но удобно. Если надо показать, что знак симметрирования или альтернирования не распространяется на какой-нибудь индекс, который оказался внутри скобок ( ) или [ ], то этот индекс будем выделять чертами | |. Например,

$$B_{(\alpha|\beta|\gamma)}=\frac{1}{2}\left(B_{\alpha\beta\gamma}+B_{\gamma\beta\alpha}\right).$$

Легко показать из определения, что операции симметрирования и альтернирования — операции тензорные.

Все операции, рассмотренные выше, никак не связаны с *метрическим тензором* $g_{\alpha\beta}$, наличие которого характеризует римановы пространства; они имеют место в любом локальном аффинном пространстве. Метризуя пространство при помощи тензорного поля $g_{\alpha\beta}$, мы тем самым привносим ряд новых операций, характерных для римановых многообразий.

Так как по определению $g=|g_{\alpha\beta}|\neq 0$, то, обозначая через $g^{\alpha\beta}=g^{\beta\alpha}$ алгебраическое дополнение элемента $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ в определителе $|g_{\alpha\beta}|$, разделенное на g, получим, что система чисел $g^{\alpha\beta}$ в каждой точке пространства V_n удовлетворяет уравнениям

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}. \qquad (2.1)$$

Покажем, что $g^{\alpha\beta}$ *представляют собой компоненты симметрического контравариантного тензора*. Пусть u^{α} — компоненты *произвольного* вектора. Тогда

$$v_{\beta}=g_{\beta\gamma}u^{\gamma}$$

также определят вектор. Из (2.1) следует:

$$g^{\alpha\beta}v_{\beta}=g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}u^{\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}u^{\gamma}=u^{\alpha};$$

так как v_{β} — произвольный вектор, то, используя правило частного, получаем требуемый результат.

Из (2.1), свертывая по α и β, получим:

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = n. \tag{2.2}$$

Обозначая определитель $|g^{\alpha\beta}|$ через $\tilde{g}$, получим:

$$g\tilde{g} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{2.3}$$

откуда следует, что алгебраическое дополнение $g^{\alpha\beta}$ в определителе $\tilde{g}$, деленное на $\tilde{g}$, равняется $g_{\alpha\beta}$.

Операция поднятия и опускания индексов. Используя тензор $g_{\alpha\beta}$, каждому тензору можно сопоставить другой тензор с тем же числом индексов, но другого вида. Так, если $B_{\alpha\beta\gamma}$ — компонента тензора, то ему можно сопоставить тензоры с компонентами

$$B^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\lambda}B_{\lambda\beta\gamma}, \quad B_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = g^{\beta\lambda}B_{\alpha\lambda\gamma}, \quad B_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g^{\gamma\lambda}B_{\alpha\beta\lambda}.$$

Для каждого из этих тензоров процесс обратим, например:

$$B^{\alpha}{}_{\beta\gamma}g_{\alpha\nu} = g_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda}B_{\lambda\beta\gamma} = \delta^{\lambda}_{\nu}B_{\lambda\beta\gamma} = B_{\nu\beta\gamma},$$

т. е. снова приходим к исходному тензору. Это позволяет утверждать, что тензор $g_{\alpha\beta}$ в известной мере уничтожает дуализм между ковариантными и контравариантными индексами. С этой точки зрения естественно говорить об одном и том же тензоре, допускающем задание при помощи компонент различного сорта. Удобно, подчеркивая этот факт, сохранять коренную букву для всех возможных компонент тензора.

Отметим, что для опускания и поднятия индексов можно было бы использовать некоторый другой тензор, например кососимметрический, и для некоторых вопросов это является более эффективным ([170], стр. 310), но, во всяком случае на протяжении всего исследования, такой тензор не должен меняться.

Метрический тензор служит также для определения *нормы* любого вектора:

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = u_{\alpha}u^{\alpha} = g^{\alpha\beta}u_{\alpha}u_{\beta}.$$

Так как $g_{\alpha\beta}$ — неопределенный тензор, то в каждой точке пространства возникает *конус изотропных направлений*

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0,$$

который отделяет $+$-*область* (*область вещественных векторов с положительной нормой*) от $-$-*области* (*область вещественных векторов с отрицательной нормой*). Норма всякого изотропного вектора равна нулю. Векторы с нормой, равной ± 1, называются *единичными векторами*. *Длиной вектора* назовем положительный квадратный корень из абсолютной величины нормы. Впрочем, в теории относительности только для векторов из $-$-области говорят о *длине*, а для векторов из $+$-области принято говорить о *длительности*.

Пользуясь тензором, можно также определить *угол между двумя вещественными векторами* u^{α} и v^{α}, если они оба лежат в $\pm$-области. Он определяется формулой

$$\cos(u, v)=\frac{\pm u_{\alpha}v^{\alpha}}{\left|\sqrt{u_{\sigma}u^{\sigma}\cdot v_{\tau}v^{\tau}}\right|}. \qquad (2.4)$$

Но угол будет вещественным только в том случае, если среди векторов

$$au^{\alpha}+bv^{\alpha},$$

определяющих линейную оболочку векторов u^{α} и v^{α}, нет изотропных, так как тогда $|\cos(u, v)|\leqslant 1$. В противном случае придем или к мнимым углам, или к выражению, которое теряет смысл. Однако во всех этих случаях будем называть векторы u^{α} и v^{α} *ортогональными*, если

$$u_{\alpha}v^{\alpha}=0. \qquad (2.5)$$

Изотропные векторы и только они сами себе ортогональны.

Отметим, что из закона преобразования для метрического тензора

$$g_{\alpha'\beta'}=A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}g_{\alpha\beta}$$

следует:

$$g'=gJ^{2}, \qquad (2.6)$$

т. е. g — скалярная плотность веса 2.

Задачи

1. Если тензор симметричен по индексам α_k и α_l и кососимметричен по индексам α_l и α_m, то он равен нулю.

2. Показать, что для любого тензора справедливы соотношения

$$S_{\alpha\beta} = S_{(\alpha\beta)} + S_{[\alpha\beta]},$$

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \Omega_{(\alpha\beta\gamma)} + \Omega_{[\alpha\beta\gamma]} + \frac{2}{3}\left(\Omega_{[\alpha\beta]\gamma} + \Omega_{[\gamma\beta]\alpha}\right) + \\ + \frac{2}{3}\left(\Omega_{(\alpha\beta)\gamma} - \Omega_{\gamma(\alpha\beta)}\right).$$

3. Если $\varphi = S_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ — скаляр при любых u^α, то $S_{\alpha\beta}$ — тензор. Если $\varphi = 0$, то $S_{(\alpha\beta)} = 0$.

4. Если тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяет соотношению (при любых u^α) $A_{\alpha\beta\gamma}u^\alpha u^\beta u^\gamma = 0$ и $A_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, то $A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} = 0$.

5. Если тензор $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет соотношению $T_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta = 0$ при любом выборе векторов u^α и v^α, то

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\gamma\beta\alpha\delta} + T_{\alpha\delta\gamma\beta} + T_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0. \tag{2.7}$$

Если, кроме того, тензор T удовлетворяет условиям

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\alpha\gamma\delta} = 0, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\alpha\beta\delta\gamma} = 0,$$
$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\gamma\alpha\delta} + T_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0,$$

то он равен нулю.

6. Если $A_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, то

$$A_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3}\left(A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta}\right). \tag{2.8}$$

Если $B_{(\alpha\beta)\gamma} = 0$, то

$$B_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3}\left(B_{\alpha\beta\gamma} + B_{\beta\gamma\alpha} + B_{\gamma\alpha\beta}\right). \tag{2.9}$$

7. Если для тензора $T_{\alpha\beta}$ имеет место равенство

$$aT_{\alpha\beta} + bT_{\beta\alpha} = 0$$

относительно какой-либо одной системы координат, то оно имеет место всегда. Если $T_{\alpha\beta} \neq 0$, то $a = \pm b$ ([77], стр. 16).

8. Если для тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ хотя бы в одной системе координат выполняется равенство

$$aT_{\alpha\beta\gamma} + bT_{\beta\gamma\alpha} + cT_{\gamma\alpha\beta} = 0,$$

то оно имеет место всегда. Если $T_{\alpha\beta\gamma} \neq 0$, то $a + b + c = 0$ или $a = b = c$.

9. Показать, что

$$A_{[\alpha\beta \dots \gamma]}B^{\alpha\beta \dots \gamma} = A_{\alpha\beta \dots \gamma}B^{[\alpha\beta \dots \gamma]} = A_{[\alpha\beta \dots \gamma]}B^{[\alpha\beta \dots \gamma]}.$$

10. Доказать, что

$$\underset{1}{v}^{[\alpha_1} \dots \underset{k}{v}^{\alpha_k]} = \underset{[1}{v}^{[\alpha_1} \dots \underset{k]}{v}^{\alpha_k]} = \underset{[1}{v}^{\alpha_1} \dots \underset{k]}{v}^{\alpha_k}.$$

11. Ранг матрицы, составленной из компонент тензора $u_\alpha v_\beta$, равен 1, а для тензора $u_{(\alpha}v_{\beta)}$ равен 2, если $u_\alpha \neq \lambda v_\alpha$.

12. Доказать, что

$$T_{\alpha[[\beta\gamma]\delta]} = T_{\alpha[\beta\gamma\delta]}.$$

§ 3. Ковариантное дифференцирование

Преимущества тензорного исчисления там, где они имеют место, связаны прежде всего с возможностью записывать тензорные уравнения в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Приступая к построению тензорного анализа, необходимо прежде всего связать с дифференцированием тензоров операцию тензорного характера. Будем предполагать в этом параграфе, что класс функций соответствует порядку дифференцирования. Формула (1.8) дает пример того, когда производные тензора валентности $0+0$ и веса 0 определяют тензор валентности $1+0$ и веса 0. Этот факт является исключительным. Так, например, частные производные вектора не определяют тензора. Операция тензорного характера, обобщающая обычное дифференцирование, может быть введена неоднозначно.

Ковариантное дифференцирование, вводимое в этом параграфе, тензорный характер которого впервые замечен Кристоффелем ([2], стр. 56), будет определено здесь формально; его геометрический смысл выясняется в § 5.

Совокупности частных производных от компонент метрического тензора $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\left(\equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$ *взаимно однозначно отвечает система функций*

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}\right), \tag{3.1}$$

которые принято называть символами Кристоффеля первого рода. В самом деле,

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\alpha\gamma} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \tag{3.2}$$

т. е. соответствие взаимно однозначное. Метрический тензор и символы Кристоффеля первого рода позволяют ввести *символы Кристоффеля второго рода*:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\beta\gamma}, \tag{3.3}$$

причем из определения следует:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha,\gamma\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}. \tag{3.4}$$

Символы Кристоффеля первого и второго рода не являются тензорами, так как, например, для трехмерного евклидова пространства относительно прямоугольной декартовой системы координат они равны нулю, а в цилиндрических координатах некоторые из них отличны от нуля.

Символы Кристоффеля второго рода образуют объект; символы Кристоффеля первого рода вместе с метрическим тензором также образуют объект.

Рассмотрим закон преобразования метрического тензора

$$g_{\alpha'\beta'} = A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}g_{\sigma\tau}. \tag{3.5}$$

Так как $g_{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau}(x)$, то $\partial_{\gamma'}g_{\sigma\tau} = A^\varrho_{\gamma'}\partial_\varrho g_{\sigma\tau}$ и

$$\partial_{\gamma'}g_{\alpha'\beta'} = A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}A^\varrho_{\gamma'}\partial_\varrho g_{\sigma\tau} + g_{\sigma\tau}(\partial_{\gamma'}A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'} + A^\sigma_{\alpha'}\partial_{\gamma'}A^\tau_{\beta'}).$$

Прибавляя и отнимая выражения, получаемые из написанного соответственно при подстановках $\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \gamma'\alpha'\beta'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \beta'\gamma'\alpha'\end{pmatrix}$, и учитывая, что

$$\partial_{\beta'}A^\sigma_{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}} = \partial_{\alpha'}A^\sigma_{\beta'},$$

получим:

$$\Gamma_{\alpha',\beta'\gamma'} = A^{\sigma}_{\alpha'} A^{\tau}_{\beta'} A^{\varrho}_{\gamma'} \Gamma_{\sigma,\varrho\tau} + g_{\sigma\tau} A^{\tau}_{\alpha'} \partial_{\beta'} A^{\sigma}_{\gamma'}, \tag{3.6}$$

что доказывает вторую часть теоремы. Свертывая (3.6) с $g^{\alpha'\delta'}$ и имея в виду (1.14), получим:

$$\Gamma^{\delta'}_{\beta'\gamma'} = A^{\delta'}_{\omega} A^{\tau}_{\beta'} A^{\varrho}_{\gamma'} \Gamma^{\omega}_{\varrho\tau} + A^{\delta'}_{\omega} \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'}, \tag{3.7}$$

откуда следует первое утверждение.

Введем понятие *ковариантной производной вектора*. Частные производные от ковариантных компонент вектора не определяют тензора, так как

$$\partial_{\gamma'}\lambda_{\alpha'} = \partial_{\gamma'}(A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma}) = \partial_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma} + A^{\sigma}_{\alpha'}\partial_{\gamma'}\lambda_{\sigma} =$$
$$= \partial_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma} + A^{\sigma}_{\alpha'}A^{\tau}_{\gamma'}\partial_{\tau}\lambda_{\sigma},$$

но если взять разность этого равенства и

$$\Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\lambda_{\sigma'} = (A^{\sigma'}_{\tau}\partial_{\alpha'}A^{\tau}_{\gamma'} + A^{\mu}_{\alpha'}A^{\nu}_{\gamma'}A^{\sigma'}_{\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu})\,A^{\varrho}_{\sigma'}\lambda_{\varrho},$$

то получим, что величина

$$\partial_{\gamma'}\lambda_{\alpha'} - \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\lambda_{\sigma'} = A^{\tau}_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\,(\partial_{\tau}\lambda_{\sigma} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\tau}\lambda_{\nu})$$

является тензором. Выражение в скобке, которое зависит линейно от частной производной компоненты вектора и самой компоненты так, что коэффициенты этой линейной зависимости определяются метрикой пространства V_n, назовем *ковариантной производной вектора* λ_{α} и обозначим:

$$\lambda_{\alpha,\gamma} \equiv \partial_{\gamma}\lambda_{\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}\lambda_{\sigma}. \tag{3.8}$$

Аналогичная операция для контравариантных компонент вектора приводит к определению ковариантной производной, и в этом случае

$$\lambda^{\alpha}{}_{,\gamma} \equiv \partial_{\gamma}\lambda^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\lambda^{\sigma}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) естественным образом следует определение ковариантной производной тензора любой валентности $p+q$, веса 0:

$$T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q,\gamma} = \partial_\gamma T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} + \\ + \sum_{\sigma=1}^{p} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{\sigma-1}\tau\alpha_{\sigma+1} \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \Gamma^{\alpha_\sigma}_{\tau\gamma} - \\ - \sum_{\sigma=1}^{q} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{\sigma-1}\tau\beta_{\sigma+1} \ldots \beta_q} \Gamma^{\tau}_{\beta_\sigma \gamma}. \qquad (3.10)$$

Таким образом, по сравнению с дифференцируемым тензором его ковариантная производная является тензором, ковариантная валентность которого на единицу больше. Так как каждому невырожденному симметрическому тензору валентности $0+2$ можно сопоставить дифференцирование, то в случае, если приходится рассматривать более чем одно дифференцирование, необходимо отличать их разными обозначениями, например, обозначая одно дифференцирование запятой, а другое — точкой с запятой и т. д. Употребителен также знак ∇ («набла»): $\lambda_{\alpha,\gamma} \equiv \nabla_\gamma \lambda_\alpha$. Термин «ковариантная производная» введен Риччи ([3], стр. 1 — 11), тогда как сама операция для римановых пространств встречается уже у Кристоффеля [2].

Для ковариантных производных сумм, внешних произведений, внутренних произведений действительны обычные правила, если дифференцировать один раз. Так,

$$(\lambda_\alpha \pm \nu_\alpha)_{,\beta} = \lambda_{\alpha,\beta} \pm \nu_{\alpha,\beta}, \qquad (3.11)$$

$$(\lambda_\alpha \nu_\beta)_{,\gamma} = \lambda_{\alpha,\gamma} \nu_\beta + \lambda_\alpha \nu_{\beta,\gamma}, \qquad (3.12)$$

$$(T_\alpha{}^\beta{}_\gamma \nu_\beta \omega^\gamma)_{,\delta} = T_\alpha{}^\beta{}_{\gamma,\delta} \nu_\beta \omega^\gamma + T_\alpha{}^\beta{}_\gamma \nu_{\beta,\delta} \omega^\gamma + T_\alpha{}^\beta{}_\gamma \nu_\beta \omega^\gamma{}_{,\delta}. \qquad (3.13)$$

Доказательство этих формул следует очевидным образом из (3.10). Для скаляра ковариантная производная совпадает с частной производной:

$$\varphi_{,\alpha} = \partial_\alpha \varphi. \qquad (3.14)$$

Формулы (3.10) — (3.14) легко распространить на относительные тензоры веса, не равного нулю, если потребовать, чтобы *вес при ковариантном дифференцировании не менялся*. Так, например, для скалярной плотности веса k получим:

$$\theta_{,\alpha} = \partial_\alpha \theta - k\theta \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma}; \qquad (3.15)$$

для тензора $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$ валентности $1+2$ и веса p ковариантная производная будет иметь вид:

$$\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} = \partial_{\delta}\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Pi^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Pi^{\alpha}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\sigma}\Pi^{\alpha}_{\beta\sigma} - p\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}\Gamma_{\delta}, \quad (3.16)$$

где

$$\Gamma_{\delta} = \Gamma^{\sigma}_{\delta\sigma}.$$

Так как, по определению, ковариантная производная конструируется, если известны лишь компоненты объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x)$, называемые *коэффициентами связности*, безотносительно к тому, связан этот объект с метрическим тензором или нет, то имеется возможность ввести ковариантное дифференцирование для любого объекта вида $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, что приводит к теории *пространств аффинной связности*, частным случаем которых являются многообразия V_n (Ш. Томас [92], А. П. Норден [170], П. К. Рашевский [188]). При этом, естественно, нет необходимости требовать, чтобы имела место симметрия объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ по нижним индексам, что приводит к пространствам с *кручением*.

Будем далее говорить, что тензор *ковариантно постоянен*, если его ковариантная производная равна нулю. Существование такого рода тензоров в V_n подтверждается теоремой: *тензоры* $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, δ^{α}_{β} *ковариантно постоянны*. Это утверждение следует из (2.1), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4). Вследствие этого *операции свертывания и ковариантного дифференцирования коммутируют*, например:

$$g^{\alpha\beta}\;(u_{\alpha}v_{\beta})_{,\gamma} = g^{\alpha\beta}(u_{\alpha,\gamma}v_{\beta} + u_{\alpha}v_{\beta,\gamma}) = u^{\beta}_{,\gamma}v_{\beta} + u^{\beta}v_{\beta,\gamma} =$$
$$= (u^{\beta}v_{\beta})_{,\gamma} = (g^{\alpha\beta}u_{\alpha}v_{\beta})_{,\gamma}.$$

Ковариантное дифференцирование допускает введение *ротации* вектора

$$\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i} \equiv \partial_j\lambda_i - \partial_i\lambda_j \qquad \left(\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}\right); \quad (3.17)$$

дивергенции вектора или тензора относительно $g_{\alpha\beta}$, определяемых соответственно выражениями

$$\lambda^{\alpha}_{\ ,\alpha}, \quad a^{\alpha\beta}{}_{,\beta}, \quad b\ {}^{\beta}{}_{,\beta},$$

и *скалярных операторов*

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\varphi &= g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi; \\ \Delta_1(f,\ \varphi) &= g^{\alpha\beta}f_{,\alpha}\varphi_{,\beta}; \\ \Delta_2\varphi &= g^{\alpha\beta}f_{,\alpha\beta}, \end{aligned}\right| \qquad (3.18)$$

называемых *дифференциальными параметрами Бельтрами первого и второго рода.*

Задачи

1. Для того чтобы ковариантный вектор λ_α был градиентом, необходимо и достаточно, чтобы первая ковариантная производная этого вектора была симметрична: $\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\beta,\alpha}$.

2. Если λ_{ij} — ротация вектора, то $\lambda_{ij,k} + \lambda_{jk,i} + \lambda_{ki,j} = \partial_k\lambda_{ij} + \partial_i\lambda_{jk} + \partial_j\lambda_{ki} = 0$ (Эйзенхарт [77], стр. 44).

3. Показать, что $\partial_\gamma\Delta_1\varphi = 2g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta\gamma}$ и $\lambda^\alpha_{,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha(\sqrt{g}\,\lambda^\alpha)$.

4. Показать, что дивергенция тензора $a^{\alpha\beta}$ относительно $g_{\alpha\beta}$, т. е. тензор $a^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$, имеет выражение $a^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\sqrt{g}) + a^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$; если $a^{\alpha\beta}$ — кососимметрический тензор, то второе слагаемое исчезает.

5. Показать, что $\Gamma_\alpha \equiv \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \partial_\alpha \ln\sqrt{g}$.

6. Показать, что если $\lambda^{[\alpha\beta]} = 0$, то $\lambda_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\beta(\lambda_\alpha{}^\beta\sqrt{g}) + \frac{1}{2}\lambda_{\sigma\tau}\partial_\alpha g^{\sigma\tau}$ (Эйнштейн [36], стр. 769).

§ 4. Параллельное перенесение в пространстве V_n

Будем говорить, что пространство V_n *плоское*, и обозначать его символом R_n, если в нем можно определить такую систему координат, относительно которой компоненты метрического тензора будут постоянными: $g_{\alpha\beta} = \text{const}$. Инвариантная характеристика плоских пространств будет дана в следующем параграфе. Если, кроме того, форма $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ определенно-положительная, то такое R_n принято называть *обыкновенным* пространством; примером обыкновенного пространства R_n может служить трехмерное евклидово пространство. V_n является обобщением R_n в том смысле, что возможность для некоторой системы координат в области, не являющейся точкой приведения g_{ij} к постоянным, не предполагается.

Одним из основных понятий евклидовой геометрии является понятие *параллелизма*. При построении геометрии V_n естественно поставить вопрос о параллелизме в таких многообразиях. Всякий параллелизм связан с необходимостью сравнивать векторы в различных точках данной области пространства. Если эти точки соединить некоторой кривой, то можно говорить о сравнении векторов в различных точках кривой. Мы убедимся далее в том, что понятие параллелизма в V_n нельзя отделить от кривой, вдоль которой изучаются векторы, и ввиду этого поставим вопрос о *параллельном перенесении векторов вдоль данной кривой в* V_n.

Это понятие должно быть определено, и если не наложить некоторых дополнительных требований, то такое определение не будет однозначным. Чтобы приводимое ниже определение параллельного переноса векторов в V_n выглядело естественным, приведем некоторые соображения, необязательные, впрочем, с формальной точки зрения. Рассмотрим с этой целью параллелизм в обыкновенном R_3 с тем, чтобы некоторые из свойств взять за образец при определении параллелизма в V_n.

Если R_3 отнесено к криволинейным координатам, то в каждой точке пространства существуют координатные векторы $\underset{\alpha}{\widetilde{l}}$, а ковариантные координаты любого вектора $v_\alpha = \widetilde{v}\cdot\underset{\alpha}{\widetilde{l}}$, где $\widetilde{v}$, $\underset{\alpha}{\widetilde{l}}$ — безындексные обозначения векторов. Легко убедиться, что v_α является действительно компонентой вектора, проверив для этого закон преобразования этих величин и $\underset{\alpha}{\widetilde{l}}$ при преобразовании координат. Если некоторый вектор $\widetilde{u}$ переносится параллельно в R_3 вдоль кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, то $\frac{d\widetilde{u}}{dt} = 0$. Тогда и компоненты этого вектора равны нулю:

$$\frac{d\tilde u}{dt}\underset{\alpha}{\tilde l} = \frac{d}{dt}(\tilde u\underset{\alpha}{\tilde l}) - \tilde u\,\frac{d\underset{\alpha}{\tilde l}}{dt} = \frac{du_\alpha}{dt} - u_\sigma\overset{\sigma}{\tilde l}\,\frac{d\underset{\alpha}{\tilde l}}{dt} =$$

$$= \frac{du_\alpha}{dt} - u_\sigma\overset{\sigma}{\tilde l}\,\partial_\beta\underset{\alpha}{\tilde l}\,\frac{dx^\beta}{dt} = \frac{du_\alpha}{dt} - P^\sigma_{\alpha\beta}u_\sigma\,\frac{dx^\beta}{dt} = 0,$$

т. е. имеет место следующее свойство:

(α) $\frac{du_\alpha}{dt}$ *линейно зависит от* u_σ *и* $\frac{dx^\beta}{dt}$.

Здесь $\overset{\sigma}{\tilde l}$ — система векторов, *взаимных* относительно $\underset{\alpha}{\tilde l}$, определяемых условием

$$\overset{\sigma}{\tilde l}\underset{\tau}{\tilde l} = \delta^\sigma_\tau.$$

Взаимная система, как известно, всегда существует, если векторы $\underset{\alpha}{\tilde l}$ независимы. Естественно потребовать, чтобы свойство (α) сохранялось и в V_n. Повторяя рассуждение для контравариантной компоненты, мы придем, очевидно, к тому же результату.

Предполагая, что (α) имеет место при параллельном перенесении в V_n вдоль кривой $x^\alpha(t)$, получим:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = -A^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt}. \tag{4.1}$$

Потребуем также, чтобы, как и в R_3, выполнялось свойство

(β) *норма вектора при параллельном перенесении в* V_n *сохраняется*:

$$\frac{d}{dt}(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta) = 0.$$

Тогда, пользуясь (4.1), получим:

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt} + g_{\alpha\beta}\left(\frac{du^\alpha}{dt}u^\beta + u^\alpha\frac{du^\beta}{dt}\right) =$$

$$= (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - A_{\alpha,\beta\gamma} - A_{\beta,\alpha\gamma})\,u^\alpha u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

где $A_{\alpha,\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma}A^{\sigma}_{\beta\gamma}$. Если это имеет место для любых векторов u^{α} любой кривой, то выражение в скобке, просимметрированное по α и β, должно равняться нулю. Так как это выражение уже симметрично по α, β, то

$$\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} = A_{\alpha,\beta\gamma} + A_{\beta,\alpha\gamma} = g_{\alpha\tau}A^{\tau}_{\beta\gamma} + g_{\beta\tau}A^{\tau}_{\alpha\gamma}. \qquad (4.2)$$

Потребуем, наконец, чтобы имело место

$$(\gamma) \qquad A^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = A_{\alpha,[\beta\gamma]} = 0.$$

Геометрический смысл требования (γ) состоит в следующем. Рассмотрим некоторую точку пространства V_n и две кривые, проходящие через нее; пусть касательные векторы определяются векторами dx^{α} и δx^{α}. Перенесем вектор δx^{α} вдоль кривой, определяемой вектором dx^{α}, и наоборот. Тогда, если пренебречь бесконечно малыми порядка более чем второго, то при первом перенесении конец смещенного вектора будет находиться в точке $x^{\alpha} + dx^{\alpha} + \delta x^{\alpha} - A^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\beta}\, \delta x^{\gamma}$; а при втором перенесении конец смещенного вектора придет в точку $x^{\alpha} + \delta x^{\alpha} + dx^{\alpha} - A^{\alpha}_{\beta\gamma}\delta x^{\beta}\, dx^{\gamma}$. Следовательно, «зазор» между этими точками выражается величиной $A^{\alpha}_{[\beta\gamma]}\, dx^{\beta}\, \delta x^{\gamma}$. Условие ($\gamma$) сводится, таким образом, к требованию, чтобы *в каждом двумерном направлении существовали бесконечно малые параллелограммы* (с точностью до бесконечно малых третьего порядка). Другое истолкование условия (γ) дано Картаном ([59], стр. 593—595, [83]). 168

При условии (γ) из (4.2) следует: $A^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Таким образом, при условиях (α), (β), (γ) получаем, что при параллельном перенесении вдоль данной кривой вектора u^{α}

$$\frac{du^{\alpha}}{dt} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}u^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt}. \qquad (4.3)$$

Уравнения (4.3) совпадают по форме с законом параллельного перенесения в R_3, но, в то время как в R_3 параллелизм инвариантен (по смыслу этого понятия), для V_n инвариантность (4.3) необходимо доказать, и такое доказательство должно основываться на законе преобразования объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Так как $u^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\sigma u^\sigma$, то в силу (4.3)

$$du^{\alpha'} = \partial_\beta A^{\alpha'}_\sigma u^\sigma \, dx^\beta + A^{\alpha'}_\sigma \, du^\sigma = (\partial_\sigma A^{\alpha'}_\tau - A^{\alpha'}_\lambda \Gamma^\lambda_{\tau\sigma}) \, u^\tau \, dx^\sigma,$$

где в силу преобразования объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ (см. (3.7)) выражение в скобках можно выразить через $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, и тогда будем иметь:

$$du^{\alpha'} = -A^{\lambda'}_\tau A^{\nu'}_\sigma \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\nu'} u^\tau \, dx^\sigma = -\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\nu'} u^{\lambda'} \, dx^{\nu'},$$

что и доказывает *инвариантность* (4.3) *при преобразовании координат.*

Если задана кривая $x^\alpha = x^\alpha(t)$, где x^α непрерывно зависит от t, то $\Gamma^\tau_{\beta\gamma} = \Gamma^\tau_{\beta\gamma}(x^\alpha(t))$ и уравнения (4.3) определят нормальную систему n линейных обыкновенных уравнений с непрерывными в некотором интервале коэффициентами; в силу теоремы существования и единственности для каждой системы начальных условий

$$t = t_0, \quad u^\alpha = \overset{0}{u}{}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

получим единственное решение системы.

Пусть через две точки A и B в V_n проходят две кривые, определяемые уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(t)$ и $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(t)$ с такой параметризацией, чтобы значению t_0 на обеих кривых отвечала точка A, а значению t_1 — точка B. Предположим также, что A и B вместе с кривыми, их соединяющими, принадлежат такой области V_n, где условия теоремы существования и единственности системы (4.3) выполняются. Тогда, задавая в A один и тот же вектор $\overset{0}{u}{}^\alpha$, получим две различные системы уравнений (4.3), отвечающие этим двум кривым, и в B в качестве параллельно перенесенных $\overset{0}{u}{}^\alpha$ будут отвечать два различных вектора. Таким образом, *параллельное перенесение по закону* (4.3) *совершается при заданном пути однозначно*; *перенесение зависит от пути.* Разумеется, эти утверждения носят локальный характер, так как имеют место только в области, определяемой интервалом, в котором справедлива теорема существования и единственности системы (4.3).

Умножая (4.3) на dt, перенося все члены налево и обозначая полученное выражение через δu^α, получим:

$$\delta u^\alpha = (\partial_\gamma u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta)\, dx^\gamma = u^\alpha_{,\gamma}\, dx^\gamma = 0.$$

Выражение δu^α называют *абсолютным дифференциалом* поля u^α. Абсолютный дифференциал имеет смысл только при определенном направлении, задаваемом дифференциалами dx^α, и следовательно, *поле* u^α *переносится параллельно вдоль кривой* $x^\alpha = x^\alpha(t)$, *если абсолютный дифференциал* u^α *при бесконечно малом смещении вдоль этой кривой равен нулю.*

Обобщая этот факт для любого тензора и вводя абсолютный дифференциал тензора

$$\delta T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q, \gamma}\, dx^\gamma \tag{4.4}$$

вдоль некоторой кривой, будем говорить, что тензор *переносится параллельно вдоль кривой* $x^\alpha = x^\alpha(t)$, *если его абсолютный дифференциал вдоль этой кривой равен нулю.*

Параллельное переносение тензоров непосредственно связано с ковариантным дифференцированием: оно носит название *параллельного перенесения в смысле Леви-Чивита*, который ввел и обосновал это понятие ([39], стр. 173—205), обобщенное в настоящее время в различных направлениях. Можно дать другие определения параллельного перенесения в V_n, эквивалентные данному выше (И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк [110], стр. 75—91, П. К. Рашевский [188], стр. 429—450).

Задачи

1. В евклидовом пространстве даны сфера и касающийся ее по малой окружности (l) круглый конус. Показать, что всякая совокупность векторов, параллельных вдоль (l) относительно сферы, будет также определять векторы, параллельные вдоль (l) относительно конуса; если конус развернуь на плоскость, то эти векторы перейдут в векторы, параллельные в евклидовом смысле.

2. Для того чтобы касательные к кривым $x^2 = \text{const}$ в пространстве V_2 были параллельны вдоль некоторой

кривой (l), необходимо и достаточно, чтобы эта кривая (l) была интегральной кривой уравнения $\Gamma^2_{1\alpha}\, dx^\alpha = 0$.

3. При параллельном перенесении векторов $\underset{1}{u}^\alpha, \ \ldots, \ \underset{n}{u}^\alpha$ вдоль некоторой кривой линейные зависимости между ними сохраняются.

§ 5. Тензор кривизны пространства V_n

Обычные частные производные и ковариантные производные первого порядка подчинены одинаковым правилам, но уже для производных второго порядка возникает неустранимое различие. Это различие проще всего установить, решая основной вопрос, возникающий при исследовании уравнений в ковариантных производных, — вопрос об условиях интегрируемости. В то время как для обычных частных производных имеет место перестановочность порядка дифференцирования, для ковариантных производных это свойство не выполняется. Пусть задано векторное поле $u_\alpha(x)$. Ковариантная производная

$$u_{\alpha,\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u_\sigma. \tag{5.1}$$

Дифференцируя еще раз, получим, имея в виду (5.1),

$$u_{\alpha,\beta\gamma} = \partial_\gamma u_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} u_{\lambda,\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} u_{\alpha,\lambda}.$$

Так как риманова связность не имеет кручения (см. § 3): $\Gamma^\sigma_{[\alpha\beta]} = 0$, то альтернируя это уравнение по β и γ, получим:

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]} = (\partial_{[\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma]\,\alpha} + \Gamma^\tau_{\alpha\,[\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta]\,\tau})\, u_\sigma.$$

Слева находится тензор, u_σ — вектор, и следовательно, согласно правилу частного для тензоров выражение в скобках представляет собой также тензор валентности $1+3$ и веса 0. Вводя обозначение

$$\frac{1}{2} R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{[\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma]\,\alpha} + \Gamma^\tau_{\alpha\,[\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta]\,\tau}, \tag{5.2}$$

получим, таким образом, равенство

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} u_\sigma, \tag{5.3}$$

в котором и сказывается различие между частными и ковариантными производными.

Тензор $R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma}$ называется *тензором кривизны* пространства V_n и играет основную роль для его характеристики.

Умножая (5.3) на $g^{\alpha\tau}$ и пользуясь тем, что метрический тензор ковариантно постоянен, получаем:

$$u^\tau{}_{,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} u_\sigma = \frac{1}{2} R_\sigma{}^\tau{}_{\beta\gamma} u^\sigma = -\frac{1}{2} R^\tau{}_{\sigma\beta\gamma} u^\sigma. \qquad (5.4)$$

Вообще для тензора любой валентности получим:

$$S^{\alpha_1\dots\alpha_p}{}_{\beta_1\dots\beta_q,[\gamma\delta]} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} S^{\alpha_1\dots\alpha_p}{}_{\beta_1\dots\beta_{k-1}\sigma\beta_{k+1}\dots\beta_q} R^\sigma{}_{\beta_k\gamma\delta} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{p} S^{\alpha_1\dots\alpha_{r-1}\sigma\alpha_{r+1}\dots\alpha_p}{}_{\beta_1\dots\beta_q} R^{\alpha_r}{}_{\sigma\gamma\delta}. \qquad (5.5)$$

Это соотношение получено Риччи и носит название *тождества Риччи* ([13], стр. 143). В том случае, когда вместо обычных частных производных применяются ковариантные, это тождество используется как условие интегрируемости. Так как тензор кривизны целиком определяется, если задан объект $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, то он может быть определен и в пространствах аффинной связности с кручением (§ 3), где также будет иметь место (5.5). Смысл этого тождества заключается в том, что в пространствах V_n (пространствах аффинной связности) тензорное поле с компонентами класса $C^r\,(r \geqslant 2)$ не может быть задано произвольно, так как при помощи (5.5) оно связано с метрикой пространства (с коэффициентами связности).

В V_n тензор кривизны можно определить ковариантными компонентами

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_{\beta\gamma\delta}, \qquad (5.6)$$

и в такой форме удобно исследовать его свойства.

Запишем ковариантные компоненты тензора кривизны в явном виде. Так как

$$g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau,\,\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma},$$

а $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ выражаются через символы Кристоффеля пр помощи (3.2), то

$$g_{\alpha\sigma}\partial_\beta\Gamma^\sigma_{\gamma\delta} = \partial_\beta(g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\gamma\delta}) - \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}\partial_\beta g_{\alpha\sigma} =$$
$$= \partial_\beta\Gamma_{\alpha,\,\gamma\delta} - \Gamma^\sigma_{\gamma\delta}(\Gamma_{\alpha.\,\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta})$$

и, следовательно,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma\Gamma_{\alpha,\,\beta\delta} - \partial_\delta\Gamma_{\alpha.\,\beta\gamma} + \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma_{\sigma,\,\alpha\delta} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma_{\sigma,\,\alpha\gamma} =$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + \partial_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - \partial_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - \partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) +$$
$$+ g^{\sigma\tau}(\Gamma_{\sigma,\,\alpha\delta}\Gamma_{\tau,\,\beta\gamma} - \Gamma_{\sigma,\,\alpha\gamma}\Gamma_{\tau,\,\beta\delta}). \qquad (5.7)$$

Из этого выражения для ковариантной компоненты тензора кривизны непосредственно следуют тождества:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha) \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \\ &(\beta) \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \\ &(\gamma) \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Назовем *полным рядом тождеств* для некоторого тензора совокупность тождеств, определяющих все алгебраические условия для компонент этого тензора; следовательно, каждое тождество, которому удовлетворяют компоненты тензора, может быть получено из полного ряда. Можно показать (Томас [92], § 49), что для компонент тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ полный ряд тождеств определяется тождествами (α) и (γ); нетрудно непосредственно убедиться, что (β) есть следствие (α) и (γ).

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны. Среди компонент $R_{\alpha\beta\alpha\beta}$, имеющих только два различных индекса, в силу (α) получим только C_n^2 различных компонент, где C_n^2 — число сочетаний из n по 2. Среди компонент с тремя различными индексами в силу (α) и (γ) получим $3C_n^3$ различных компонент, и, наконец, среди компонент с четырьмя различными индексами найдется $2C_n^4$ независимых. Следовательно, общее число независимых компонент будет определяться числом

$$N = C_n^2 + 3C_n^3 + 2C_n^4 = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \qquad (5.9)$$

В частности V_2 отвечает $N = 1$, для V_3 число $N = 6$ и для V_4 число $N = 20$.

Ввиду важности тензора кривизны пространства V_n, определяемого метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, полезно выяснить, какие тензоры могут возникнуть в результате свертывания этих двух тензоров. Первое свертывание, с точностью до знака, определяет только один тензор

$$R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta} \ln \sqrt{g} = \\ = \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma \ln \sqrt{g}, \qquad (5.10)$$

как это следует из (5.2) и задачи 5 § 3; свертывание по индексам кососимметрической пары дает, конечно, нуль. Тензор $R_{\alpha\beta}$ (симметрический в силу (5.10)) называется *тензором Риччи*, который впервые ввел его, и играет основную роль для пространств Эйнштейна вообще и для теории относительности в частности.

Второе свертывание определяет скаляр

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha},$$

называемый *скалярной кривизной пространства* V_n.

Как первый пример приложения тензора кривизны покажем, что имеет место теорема: *для того чтобы пространство было плоским, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны был равен нулю*. Пусть имеем плоское пространство, т. е. в некоторой системе координат компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta} = \text{const}$. Тогда $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ в этой системе координат, а следовательно, и в любой. Предположим, наоборот, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ для некоторого V_n. Рассмотрим метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и покажем, что существует такое невырожденное преобразование координат $x^\alpha = x^\alpha(x^{\beta'})$, что в системе $\{x^{\alpha'}\}$ компоненты $g_{\alpha'\beta'} = \text{const}$. Это эквивалентно требованию, чтобы

$$\Gamma_{\alpha',\,\beta'\gamma'} = \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = 0,$$

или в силу уравнений (3.7), определяющих преобразование объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} + \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'} A^{\alpha'}_{\omega} = 0.$$

Свертывая это уравнение с $A^\lambda_{\alpha'}$, приведем его в силу (1.14) к эквивалентной форме:

$$\partial_{\beta'} A^\lambda_{\gamma'} = -\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} A^\beta_{\beta'} A^\gamma_{\gamma'}, \qquad \partial_{\sigma'} x^\alpha = A^\alpha_{\sigma'}. \qquad (5.11)$$

Таким образом, вопрос свелся к совместности системы уравнений (5.11) при условиях

$$g_{\alpha\beta}A^{\alpha}_{\alpha'}A^{\beta}_{\beta'}=g_{\alpha'\beta'}=\mathrm{const} \qquad (5.12)$$

с неизвестными функциями $A^{\alpha}_{\alpha'}$ и x^{α} от независимых переменных $x^{\alpha'}$. Теория интегрируемости (Гурса [53], стр. 103) приводит к следующему результату. Если условия интегрируемости (5.11) выполняются тождественно, т. е. для всех значений $A^{\alpha}_{\alpha'}$ и x^{α}, и если $A^{\alpha}_{\alpha'}$ регулярны в некоторой окрестности $\overset{0}{x}{}^{\alpha}$, $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$, то существует одна и только одна система решений, регулярных в этой окрестности и принимающих значения $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$ при $x^{\alpha}=\overset{0}{x}{}^{\alpha}$. Условия (5.12) потребуются, при тождественном выполнении условий интегрируемости, только для выбора начальных условий $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$. Записывая условия интегрируемости для второй группы уравнений (5.11), получим:

$$\partial_{[\sigma'\tau']}x^{\alpha}=\partial_{[\tau'}A^{\alpha}_{\sigma']},$$

но в силу первой группы уравнений (5.11) (см. задачу 9 § 2)

$$\partial_{[\tau'}A^{\alpha}_{\sigma']}=-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}A^{\beta}_{[\tau'}A^{\gamma}_{\sigma']}=-\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]}A^{\beta}_{\tau'}A^{\gamma}_{\sigma'}\equiv 0.$$

Условия интегрируемости для первой группы уравнений в силу уравнений (5.11) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\partial_{[\beta'\tau']}A^{\lambda}_{\gamma'}&=\\ &=-\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\,(\partial_{[\tau'}A^{\beta}_{\beta']}A^{\gamma}_{\gamma'}+A^{\beta}_{[\beta'}\partial_{\tau']}A^{\gamma}_{\gamma'})-A^{\gamma}_{\gamma'}A^{\beta}_{[\beta'}A^{\nu}_{\tau']}\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}=\\ &=-A^{\gamma}_{\gamma'}A^{\beta}_{\beta'}A^{\nu}_{\tau'}\,(\partial_{[\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta]\,\gamma}+\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta})=\\ &=-A^{\gamma}_{\gamma'}A_{\beta'}^{\beta}A^{\nu}_{\tau'}R^{\lambda}{}_{\gamma\nu\beta}\end{aligned}$$

и в силу основной предпосылки также обращаются в тождества. Начальные условия (5.11) потребуют задания $n+n^2$ произвольных постоянных, определяющих начальные значения x^{α} и $A^{\alpha}_{\beta'}$ при условии (5.12). Это налагает $\frac{n\,(n+1)}{2}$ условий и следовательно, искомое преобразование координат в данном случае содержит $\frac{n\,(n-1)}{2}$ произвольных постоянных. Используя этот произвол, можно соотношение $g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{const}$ еще упростить, приведя на вещественном пути ds^2 к виду $\sum\limits_{a=1}^{n} l_a\, dx^{a^2}$, где $l_\alpha = \pm 1$ и определяют сигнатуру метрики плоского пространства.

Исследования в V_n приводят к необходимости рассматривать не только тензор кривизны, но и тензор, определяемый ковариантной производной от тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}$. Является важным выяснить алгебраические тождества, связывающие компоненты этого тензора. Выведем так называемые *тождеств Бианки*, частично отвечающие на этот вопрос.

Рассмотрим произвольное векторное поле u_α и поле $u_{\alpha,\,\beta}$. Применяя к ним тождество Риччи (5.5), получим:

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_\sigma, \tag{5.13}$$

$$u_{\alpha,\,\beta\,[\gamma\delta]} = \frac{1}{2} \left(R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\delta} u_{\sigma,\,\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta\gamma\delta} u_{\alpha,\,\sigma}\right). \tag{5.14}$$

Дифференцируя (5.13) еще раз, придем к уравнениям

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]\,\delta} = \frac{1}{2} \left(R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\,\delta} u_\sigma + R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_{\sigma,\,\delta}\right). \tag{5.15}$$

Альтернируя (5.14) и (5.15) по индексам $\beta\gamma\delta$, можно опустить внутренние скобки (см. задачу 12 § 2), и следовательно, приравнивая левые части, получим:

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\,[\gamma\delta} u_{|\sigma|,\,\beta]} + R^{\sigma}{}_{[\beta\gamma\delta]} u_{\alpha,\,\sigma} - R^{\sigma}{}_{\alpha\,[\beta\gamma,\,\delta]} u_\sigma - R^{\sigma}{}_{\alpha\,[\beta\gamma} u_{|\sigma|,\,\delta]} = 0;$$

первое и последнее слагаемые отличаются только знаком, второе слагаемое равно нулю в силу (5.8), и следовательно,

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\,[\beta\gamma,\,\delta]} u_\sigma = 0,$$

что в силу произвольности поля u_α приводит к выводу:

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\,[\beta\gamma,\,\delta]} = R_{\sigma\alpha\,[\beta\gamma,\,\delta]} = 0$$

или, в развернутом виде (см. задачу 6 § 2),

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma,\,\delta} + R_{\sigma\alpha\gamma\delta,\,\beta} + R_{\sigma\alpha\delta\beta,\,\gamma} = 0. \tag{5.16}$$

Это соотношение называется *тождеством Бианки* ([14], стр. 361).

Дифференцируя тождества (α) и (γ) из (5.8), получим также:

$$\left.\begin{aligned} &R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta,\,\lambda} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma,\,\lambda},\\ &R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} + R_{\alpha\gamma\delta\beta,\,\lambda} + R_{\alpha\delta\beta\gamma,\,\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Можно доказать, что (5.16) и (5.17) определяют полный ряд алгебраических тождеств для $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}$ (Томас [92], § 49). Из этих тождеств, свертывая, получим следствия

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\,\sigma} + 2R_{\alpha\,[\beta,\,\gamma]} = 0, \qquad (5.18)$$

$$R^{\sigma}{}_{\beta,\,\sigma} - \frac{1}{2}R_{,\,\beta} = 0. \qquad (5.19)$$

В случае, если $n = 4$, (5.19) представляет собой уравнение закона сохранения импульса-энергии для релятивистских полей тяготения.

Тензор кривизны пространства играет исключительную роль при построении теории римановых пространств и в физических приложениях, где он допускает физическую интерпретацию (см. [229], [253], [285], [293], [297] [247]).

Задачи

1. В формулах (5.8) из (α) и (γ) получить (β).

2. Показать, что если $g_{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ — компоненты двух симметрических невырожденных тензоров, а $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля, отвечающие им, то $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор; тензоры кривизны, отвечающие римановым связностям Γ и $\overset{*}{\Gamma}$, удовлетворяют соотношению

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + 2\Omega^{\sigma}{}_{\beta\,[\delta,\,\gamma]} + 2\Omega^{\sigma}{}_{\beta\,[\delta}\Omega^{\alpha}{}_{|\sigma|\gamma]},$$

где дифференцирование производится относительно метрики $g_{\alpha\beta}$.

3. Показать, что в V_3

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\gamma\delta}R_{\alpha\beta} + \\ + \frac{R}{2}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}).$$

4. Доказать, что пространство V_3 определенной метрики, отнесенной к триортогональной системе координат,

имеет скалярную кривизну $R=0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{g_{ii}} \Big[{\sum_j}' \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \partial_{ii} \sqrt{g_{jj}} - \partial_i \ln \sqrt{g_{ii}} {\sum_j}' \partial_i \ln \sqrt{g_{jj}} + \\ + \partial_i \ln \sqrt{g_{jj}} \partial_i \ln \sqrt{g_{hk}} \Big] = 0,$$

где ${\sum\limits_j}'$ означает суммирование по $j \neq i$ и $i, j, k \neq$ (Эйзенхарт [292]).

5. Показать, что, приняв $\sqrt{g_{11}} = x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1}$, $\sqrt{g_{22}} = x_2^{a_2} x_3^{b_2} x_1^{c_2}$, $\sqrt{g_{33}} = x_3^{a_3} x_1^{b_3} x_2^{c_3}$, где a, b, c — постоянные, условиям задачи 4 можно удовлетворить, полагая:

1) $a_i = c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $b_i = 1$ при $g_{11} = x_2^2$, $g_{22} = x_3^2$, $g_{33} = x_1^2$;

2) $a_i = 0$, $c_2 = b_3$, $c_3 = b_1$, $c_1 = b_2$, $c_i = \frac{2}{3}$ $b_i = \frac{2}{3}$ при $g_{11} = (x_2 x_3)^{4/3}$, $g_{22} = (x_1 x_3)^{4/3}$, $g_{33} = (x_1 x_2)^{4/3}$.

§ 6. Геодезические линии

Прямую в евклидовом пространстве можно определить или 1) как кривую, касательные векторы к которой параллельны, или 2) как кратчайший путь между точками, или 3) как линию нулевой кривизны.

В V_n можно определить кривые, обладающие соответственным образом обобщенными, но аналогичными свойствами. Такие кривые называют *геодезическими линиями* V_n.

Геодезической линией в V_n назовем такую линию, касательный вектор которой переносится вдоль нее параллельно в смысле Леви-Чивита. Пусть $x^\alpha(t)$, функции класса C^r $(r \geqslant 2)$. определяют уравнения геодезической: $x^\alpha = x^\alpha(t)$. Касательный к кривой вектор $\frac{dx^\alpha}{dt}$ при непрерывно дифференцируемом и обратимом преобразовании параметра $t = t(\tau)$ умножается на $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau},$$

т. е. в каждой точке определяется с точностью до численного множителя. Пусть вектор, переносимый параллельно вдоль геодезической, есть λ^{α}, тогда

$$\frac{dx^{\alpha}}{dt} = \sigma\lambda^{\alpha}.$$

Абсолютный дифференциал $\delta\lambda^{\alpha}$ вдоль геодезической равен нулю, и следовательно,

$$\frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right) = \frac{d\sigma}{dt}\lambda^{\alpha} = \nu\frac{dx^{\alpha}}{dt}, \tag{6.1}$$

так как $\frac{dx^{\alpha}}{dt} \neq 0$. Всегда можно ввести новый параметр τ так, чтобы вектор $\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$ переносился параллельно вдоль геодезической, т. е. чтобы правая часть этого равенства обращалась в нуль, а левая имела тот же вид. Пусть $\tau = \tau(t)$. Тогда (6.1) запишется в виде:

$$\frac{\delta}{d\tau}\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt} = \left(\nu - \frac{d^2\tau}{dt^2}\Big/\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dx^{\alpha}}{dt},$$

и, выбирая за $\tau(t)$ интеграл уравнения

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = \nu\frac{d\tau}{dt},$$

получим для *канонического параметра* τ уравнение геодезической в виде:

$$\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0 \tag{6.2}$$

или в развернутом виде:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0. \tag{6.3}$$

В той области V_n, где для системы (6.3) выполняются условия теоремы существования и единственности, каждой заданной точке и начальному значению $\left(\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\right)_0$ отвечает единственное решение системы и, следовательно, *через каждую точку в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая.*

Если метрика V_n неопределенная, то геодезические могут быть как изотропными, так и неизотропными кривыми.

Вдоль любой геодезической с канонической параметризацией

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=\varepsilon=\text{const}, \qquad (6.4)$$

так как вдоль кривой (6.2)

$$\partial_\gamma\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)\frac{dx^\gamma}{d\tau}=\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=$$
$$=2g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0.$$

Другими словами, *норма касательного вектора* $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ *геодезической не меняется вдоль нее*; в частности, *геодезическая, изотропная в точке, изотропна всюду*. Очевидно, что не всякая изотропная кривая будет геодезической.

В случае обыкновенного R_3, когда кривые не могут быть изотропными в декартовых координатах, вектор $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=\mu^\alpha$ является *вектором главной нормали кривой*. Если же в R_3 введены криволинейные координаты, то μ^α равняется левой части (6.3), если там τ выразить через длину дуги s. Как обобщение назовем

$$\mu^\alpha=\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \qquad (6.5)$$

с каноническим параметром τ *вектором главной нормали кривой в* V_n; то, что μ^α — вектор, следует из (6.2). Тогда естественно

$$\frac{1}{\varrho}=\sqrt{|g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta|}$$

назвать *первой кривизной кривой пространства* V_n и поставить вопрос об определении в V_n кривых нулевой первой кривизны, когда

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta=0.$$

В случае определенной метрики пространства V_n *только геодезические имеют нулевую первую кривизну*;

если метрика V_n неопределенна, то эти кривые будут или геодезическими, или кривыми с изотропным вектором главной нормали. Этот результат обобщает свойство 3) для прямых в обыкновенном V_n.

Если в (6.4) $\varepsilon \neq 0$, то геодезическая кривая неизотропная и в качестве одного из возможных канонических параметров можно взять длину дуги этой кривой, что будет означать $\varepsilon = \pm 1$; другие канонические параметры определяются затем с точностью до двух произвольных параметров.

Неизотропную геодезическую можно определить также как линию кратчайшего расстояния между двумя точками A и B в V_n. Это приводит к следующей задаче вариационного исчисления: требуется определить экстремаль, на которой интеграл

$$\int_A^B ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}}\, dt$$

имеет стационарное значение. Обозначая подынтегральное выражение через φ, имеем:

$$\sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} = \varphi = \frac{ds}{dt} \equiv \dot{s},$$

и φ должна удовлетворять уравнениям Эйлера (М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник [95], стр. 30):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta}{\dot{s}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial_\alpha g_{\sigma\beta} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\beta}{2\dot{s}},$$

то уравнение Эйлера запишется в виде:

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta - g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} + \Gamma_{\alpha,\,\sigma\beta}\, \dot{x}^\sigma \dot{x}^\beta = 0.$$

Отсюда, свертывая с $g^{\alpha\gamma}$, получим:

$$\ddot{x}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\sigma\beta} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\beta = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^\gamma.$$

Вводя канонический параметр $\tau = s$, придем к (6.3). Решение этой задачи, как видим, существенным образом зависит от предположения о неизотропности геодезической. Этот результат обобщает свойство 2) прямых в евклидовом пространстве.

Так как понятие параллелизма имеет место и в пространствах аффинной связности, то геодезические совершенно так же могут быть определены в этих многообразиях ([170], стр. 148—149); это непосредственно видно из уравнений (6.3), зависящих только от коэффициентов связности.

Задачи

1. Показать, что объект связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ определяет те же геодезические, что и объект $\Gamma^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$.

2. Показать, что в *пространстве Минковского*, определяемом метрикой $ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{4^2}$, всякая изотропная кривая имеет вид:

$$x^1 = \int \varrho \cos\varphi \cos\psi \, ds, \qquad x^2 = \int \varrho \cos\varphi \sin\psi \, ds,$$

$$x^3 = \int \varrho \sin\varphi \, ds, \qquad x^4 = \int \varrho \, ds,$$

где ϱ, φ, ψ — функции от s. Когда эти кривые будут геодезическими?

§ 7. Специальные системы координат в V_n

Далее, при определении различных пространств Эйнштейна, возникает необходимость в специализации системы координат. В этом параграфе рассматриваются некоторые из систем координат, которые могут быть введены в любом V_n. Такая возможность является следствием теоремы, высказанной еще Риманом ([1]) и утверждающей, что *за счет преобразования координат n компонент метрического тензора можно записать в виде наперед заданных функций*. Так как метрика V_n не вырожденная, так же как и допускаемые преобразования, то выбор этих произвольных функций не должен приводить к вырождению метрики. Рассматриваемые ниже системы координат являются различными возможными реализациями этой теоремы.

Координаты, геодезические в точке. Так как вообще тензор кривизны в V_n отличен от нуля, то нельзя объект римановой связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ за счет преобразования координат в области обратить в нуль, но всегда можно специализировать систему координат так, чтобы в наперед заданной точке P этот объект обращался в нуль: $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_P = 0$. Такая система координат называется *геодезической в точке* P.

Пусть V_n отнесено к системе координат x^α и точка P определяется координатами $\overset{0}{x}{}^\alpha$. Введем новые координаты посредством формул

$$x^{\alpha'} = C^{\alpha'}_{\beta}(x^\beta - \overset{0}{x}{}^\beta) + \frac{1}{2} C^{\alpha'}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\overset{0}{x})(x^\beta - \overset{0}{x}{}^\beta)(x^\gamma - \overset{0}{x}{}^\gamma), \qquad (7.1)$$

где $C^{\alpha'}_{\beta}$ — постоянные, удовлетворяющие условию $|C^{\alpha'}_{\beta}| \neq 0$, а в остальном произвольные; можно, в частности, положить $C^{\alpha'}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Дифференцируя (7.1) последовательно по x^α и вычисляя эти производные в точке P, получим:

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right)_P = C^{\alpha'}_{\beta}, \qquad \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta\, \partial x^\gamma}\right)_P = C^{\alpha'}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\overset{0}{x}{}^\alpha). \qquad (7.2)$$

Для того чтобы $(\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'})_P = 0$, при таком преобразовании необходимо и достаточно, чтобы согласно (3.7)

$$(A^{\alpha'}_{\omega} A^{\tau}_{\beta'} A^{\varrho}_{\gamma'} \Gamma^{\omega}_{\varrho\tau} + A^{\alpha'}_{\omega} \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'})_P = 0.$$

Свертывая с $A^{\beta'}_{\lambda} A^{\gamma'}_{\nu}$ и имея в виду, что

$$A^{\sigma'}_{\beta} A^{\lambda}_{\sigma'} = \delta^{\lambda}_{\beta}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\gamma'}}\right)\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\omega} = -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\omega}\right)\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\gamma'}},$$

получим равносильное соотношение

$$(A^{\alpha'}_{\omega} \Gamma^{\omega}_{\lambda\nu}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda\, \partial x^\nu}\right)_P,$$

которое обращается в тождество в силу (7.2). Вместо (7.1) можно было бы взять многочлен любого порядка, в котором коэффициенты членов с третьими, четвертыми и т. д.

степенями совершенно произвольны. Следовательно, геодезическую в P систему можно ввести бесконечным числом способов. Этот произвол можно использовать для дальнейшей специализации координат.

Например, можно ввести систему координат, *геодезическую вдоль наперед заданной кривой* (Ферми [60], стр. 21—23). Из (7.2) следует, что если рассматривать пространство аффинной связности *без кручения* (см. § 3), то все приведенное выше построение повторяется буквально. Для таких пространств можно также ввести систему координат, геодезическую вдоль наперед заданной кривой (Л. Эйзенхарт [80], стр. 64; П. К. Рашевский [188], стр. 410). Смысл геодезических в точке координат состоит в том, что в достаточно малой окрестности точки P эти координаты приближаются к аффинным координатам R_n, так как формула параллельного переноса в P в этих координатах будет иметь вид: $d\xi^\alpha = 0$, т. е. координаты параллельно переносимого вектора в этой точке стационарны и, следовательно, при смещении из точки P они получают приращения $\Delta\xi^\alpha$ — бесконечно малые высшего порядка. Линейные преобразования таких координат оставляют их геодезическими в данной точке, так как *при таких преобразованиях объекты связности ведут себя, как тензоры* (см. (3.7)).

Римановы и нормальные координаты. Отмеченная выше возможность специализации координат, геодезических в точке, может быть реализована в виде так называемых *римановых координат* в V_n, введенных Риманом [1]. Отличительным свойством этой системы координат является то, что относительно них уравнения геодезических, проходящих через начало координат, имеют такой же вид, какой имеют уравнения прямых, проходящих через начало декартовой системы координат, в евклидовой геометрии.

Рассмотрим пространство V_n, отнесенное к произвольной системе координат, фиксируем некоторую точку P в качестве начала координат и будем проводить через P геодезические по всем возможным направлениям. Уравнение каждой геодезической отнесем к каноническому параметру и, пользуясь тем, что любые два канонических параметра связаны линейной зависимостью $\overset{*}{\tau} = a\tau + b$, выберем параметр τ так, чтобы на каждой геодезической точке P отвечало значение параметра $\tau=0$, чем параметр фиксируется с точностью до постоянного множителя.

Любая из геодезических, проходящих через P, вполне определяется заданием касательного к ней вектора $\xi^\alpha=\left\{\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right\}_\tau=0$, а некоторая точка A на ней будет определена значением параметра τ.

Разумеется, эти утверждения имеют место только в той области около P, где выполняются условия теоремы существования и единственности системы дифференциальных уравнений, определяющих геодезическую, и только в такой области можно говорить о построении римановых координат. Если точка A имела координаты в исходной системе координат $x^\alpha\,(\alpha=1,\ldots,n)$, то теперь этой же точке можно сопоставить n чисел

$$y^\alpha=\xi^\alpha\tau \tag{7.3}$$

— *римановых координат* точки A. Следовательно,

$$x^\alpha=x^\alpha(y^1,\ldots,y^n). \tag{7.4}$$

В исходной системе координат функции x^α на геодезической зависят от начальных условий и параметра τ: $x^\alpha=x^\alpha(\tau,\overset{0}{x}{}^\alpha,\xi^\alpha)$, но, как известно из теории дифференциальных уравнений (В. В. Степанов [101], стр. 275), x^α будут здесь непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов такое же число раз, как и компоненты объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — римановой связности. Следовательно, x^α — непрерывно дифференцируемые функции y^α. Чтобы выяснить взаимно однозначное соответствие x^α и y^α в некоторой области около начала, заметим, что в точке P

$$\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_P=\xi^\alpha=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial\tau}\right)_P=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_P\xi^\beta,$$

следовательно,

$$\left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right\}_P=\delta^\alpha_\beta,$$

и якобиан $\left|\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right|_P\neq0$, т. е. он отличен от нуля в некоторой окрестности начала координат, и в этой окрестности соответствие между x^α и y^α взаимно однозначное; геометрически это будет означать, что в такой окрестности из P в A можно провести только одну геодезическую.

Когда исходная система координат будет заменена некоторой другой, то отвечающие им римановы координаты преобразуются одна в другую при помощи линейного однородного преобразования, так как при этом векторы ξ^α в соприкасающемся к V_n в точке P плоском пространстве преобразуется по такому закону.

Можно указать несколько необходимых и достаточных критериев того, чтобы система координат в V_n была римановой, различных по форме, но эквивалентных между собой, например

α) *уравнения геодезических имеют вид* (7.3), *если считать* $\xi^\alpha = \text{const}$;

β) *компоненты объекта римановой связности удовлетворяют соотношению*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = 0. \tag{7.5}$$

Необходимость α) следует из определения римановых координат. Достаточность α) вытекает из того, что вдоль геодезических $\frac{dy^\alpha}{d\tau} = \xi^\alpha = \text{const}$, т. е. и в P

$$\left(\frac{dy^\alpha}{d\tau}\right)_0 = \xi^\alpha \tag{7.6}$$

и ξ^α — касательный вектор в начале. Тогда эти координаты римановы. Предположим, что α) имеет место, тогда (7.3) при постоянных ξ^α определяет интегральные кривые уравнений (6.3), что приводит к соотношениям

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \xi^\beta \xi^\gamma = 0,$$

которые после умножения на τ совпадают с (7.5). Это показывает необходимость β). Наоборот, если (7.5) имеют место, то кривые $y^\alpha = \xi^\alpha t$ при $\xi^\alpha = \text{const}$ удовлетворяют уравнению (6.3), и следовательно, являются геодезическими с каноническим параметром t и проходят через начало координат, т. е. имеет место α).

Если в качестве канонического параметра для неизотропных геодезических взять длину дуги, а для изотропных какой-либо из канонических параметров, то

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = \varepsilon, \tag{7.7}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ для неизотропных геодезических и 0 для изотропных, а $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ — метрический тензор в начале нормальной системы координат. Умножая (7.7) на s^2, получим:

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta} = \varepsilon s^2, \tag{7.8}$$

что выражает квадрат геодезического расстояния от начала координат при любом ε. Полагая здесь $s = \mathrm{const}$, получим при $\varepsilon \neq 0$ уравнения *концентрических геодезических гиперсфер мнимого или действительного радиуса*. $\varepsilon = 0$ отвечает гиперконус, образованный изотропными геодезическими. При $\varepsilon \neq 0$ можно дать критерий римановых координат, отличный от α) и β) ([188]), стр. 540).

Римановы координаты являются геодезическими относительно своего начала.

В самом деле, поделив (7.5) на s^2 и относя полученное уравнение к началу координат, получим:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}\xi^{\gamma} = 0.$$

Так как ξ^{α} — произвольный вектор, то $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, что и доказывает утверждение.

Компоненты метрического тензора $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ в начале римановой системы координат будут некоторыми постоянными, удовлетворяющими условию $|\overset{0}{g}_{\alpha\beta}| \neq 0$, и следовательно, всегда можно найти такое невырожденное вещественное линейное однородное преобразование с постоянными коэффициентами $y^{\alpha'} = C^{\alpha'}_{\beta}y^{\beta}$, в результате которого форма $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\,dy^{\alpha}\,dy^{\beta}$ перейдет в форму

$$\sum_{\sigma=1}^{n} l_{\sigma}\,dy^{\sigma^2}, \tag{7.9}$$

где $l_{\sigma} = \pm 1$ в соответствии с *сигнатурой* квадратичной формы $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\,dy^{\alpha}\,dy^{\beta}$. В результате такого преобразования риманова система координат перейдет снова в риманову систему координат с началом в той же точке, так как это преобразование оставляет α) в силе. Таким образом, специализированные римановы координаты называются *нормальными координатами* с началом в данной точке. Они были впервые введены Вебленом ([61], стр. 192—197), применены в теории относительности и теории пространств V_n, а затем обобщены для пространств аффинной связности рядом авторов ([66]; [67], стр. 551—560; [78], стр. 44—62; [93], стр. 1—72).

Если предположить, что в некоторой окрестности начала нормальной системы координат компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(y)$ суть аналитические функции, то можно определить $g_{\alpha\beta}$ в виде разложения по степеням y^α, причем коэффициенты этого ряда определяются тензором кривизны и его ковариантными производными, отнесенными к началу. Рассмотрим предварительно тензорное поле $W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)$, компоненты которого — аналитические функции в окрестности начала нормальной системы координат. Тогда

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \\ + \left(\frac{\partial W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^\nu}\right)_0 y^\nu + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^\mu\,\partial y^\nu}\right)_0 y^\mu y^\nu + \ldots \qquad (7.10)$$

Можно выбрать такую систему координат, относительно которой коэффициенты этого ряда выражаются через ковариантные производные $\overset{0}{W}$ и компоненты тензора кривизны и его ковариантные производные, вычисленные в начале координат. Определив такую систему, мы покажем затем, что она нормальная.

Формула преобразования объекта связности и ее следствия, полученные последовательным дифференцированием, дают серию соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^\nu_{\alpha'} &= A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_{\mu'}\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'}A^\nu_{\mu'}, \\ \partial_{\omega'}\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^\nu_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}\partial_{\omega'}A^\nu_{\alpha'} &= \partial_{\omega'}A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_{\mu'}\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + \\ &+ A^\sigma_{\lambda'}\partial_{\omega'}A^\tau_{\mu'}\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_{\mu'}A^\gamma_{\omega'}\partial_\gamma\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'\omega'}A^\nu_{\mu'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Рассмотрим преобразование координат, определяемое формулами

$$x^{\nu}=\overset{0}{x}{}^{\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^{k}x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\ldots\partial y^{\lambda_k}}\right)_0 y^{\lambda_1}\ldots y^{\lambda_k}, \qquad (7.12)$$

и выберем коэффициенты разложения (7.12) следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}}\right)_0=\delta^{\nu}_{\lambda_1},\quad \left(\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\,\partial y^{\lambda_2}}\right)_0=-\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda_1\lambda_2},\quad \left(\frac{\partial^3 x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\,\partial y^{\lambda_2}\,\partial y^{\lambda_3}}\right)_0=$$
$$=2\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\alpha(\lambda_2}\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda_1\lambda_3)}-\partial_{(\lambda_3}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda_1\lambda_2)},\ \ldots; \qquad (7.13)$$

тогда в силу (7.11)

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2}=0,\quad \partial_{(\lambda'_3}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)}=0,\quad \ldots,\quad \partial_{(\lambda'_3\ldots\lambda'_r}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)}=0. \qquad (7.14)$$

Поставив себе задачей выражение коэффициентов ряда (7.10) до r-го порядка, можно в (7.14) ограничиться написанными условиями. Теперь, в новой системе координат, принимая во внимание (7.14), имеем из выражения для тензора кривизны (5.2) и его следствий, получаемых последовательным дифференцированием:

$$\left.\begin{aligned}
&\{\partial_{(\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0=\frac{1}{3}\overset{0}{R}{}^{\nu}_{(\alpha\beta)\mu},\\
&\{\partial_{(\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0=-\frac{1}{2}\overset{0}{R}_{\mu(\gamma}{}^{\nu}{}_{\beta,\,\alpha)},\\
&\{\partial_{(\delta\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0=-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{9}\overset{0}{R}_{(\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta}{}^{\nu}\overset{0}{R}_{\delta}{}^{\omega}{}_{\gamma)\mu}\overset{0}{g}_{,\,\omega}+\overset{0}{R}_{\mu(\delta}{}^{\nu}{}_{\gamma,\,\alpha\beta)}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad(7.15)$$

так как введенная таким образом система координат геодезическая относительно начала, то, последовательно дифференцируя ковариантным образом тензор $W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, выражая частные производные через ковариантные и относя результат к началу, можно пренебречь теми слагаемыми, которые содержат объект $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Если же в выражении для некоторой производной появятся слагаемые, содержащие $\partial_{(\gamma\ldots\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta)\delta}$, то их заменим по формулам (7.15).

Подставляя эти выражения в (7.10), получим для тензора W разложение в виде:

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}+\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\mu}y^\mu+$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\mu\omega}-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p}\overset{0}{R}{}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega}W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\ldots\alpha_p}\right\}y^\mu y^\omega+$$
$$+\frac{1}{3!}\left\{\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p,\,\mu\omega\sigma}-\sum_{k=1}^{p}\overset{0}{R}{}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega}\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\ldots\alpha_p,\,\sigma}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\overset{0}{R}{}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega,\,\sigma}\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\ldots\alpha_p}\right\}y^\mu y^\omega y^\sigma+\ldots,\qquad(7.16)$$

и коэффициенты этого разложения могут быть вычислены как угодно далеко. Эта формула, интересная сама по себе, может быть приложена к любому тензору, заданному ковариантными компонентами.

Применяя ее, в частности, к метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$ и принимая во внимание, что все его ковариантные производные равны нулю, получим из (7.16):

$$g_{\alpha\beta}=\overset{0}{g}_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\mu\beta\lambda}y^\mu y^\lambda-\frac{1}{3!}\overset{0}{R}_{\alpha\gamma\beta\lambda,\,\mu}y^\lambda y^\mu y^\gamma+$$
$$+\frac{1}{5!}\left\{-6\overset{0}{R}_{\alpha\delta\beta\gamma,\,\lambda\mu}+\frac{16}{3}\overset{0}{R}_{\lambda\beta\mu}{}^{\varrho}\overset{0}{R}_{\gamma\alpha\delta\varrho}\right\}y^\lambda y^\mu y^\gamma y^\delta+\ldots\qquad(7.17)$$

Покажем, что эта система координат нормальная. Ясно, что $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ можно считать равными $\delta^\alpha_\beta l_\alpha$, т. е. имеем форму вида (7.9), так как до введения этой системы можно предварительно произвести в V_n такое невырожденное линейное преобразование, которое в точке, предназначенной быть началом нормальной системы, приведет $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ к компонентам метрического тензора, определяющего форму (7.9). Свертывая (7.17) с y^β, получим:

$$g_{\alpha\beta}y^\beta=\overset{0}{g}_{\alpha\beta}y^\beta,\qquad(7.18)$$

так как во всех остальных слагаемых, как нетрудно видеть, индекс β кососимметричен относительно хотя бы одного индекса суммирования λ, μ, ν, … Дифференцируя (7.18) по y^γ, получим:

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\beta + g_{\gamma\alpha} = \overset{0}{g}_{\gamma\alpha};$$

отсюда получим два равенства, если свернуть с y^α и y^γ и учесть наличие (7.18):

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\gamma y^\beta = 0. \tag{7.19}$$

Взяв первое уравнение с минусом и прибавив к нему два уравнения, получаемые из второго заменой индексов, получим: $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = 0$, что приводит к условию β), определяющему нормальную систему координат.

Формула (7.17) принимает особенно простой вид для того частного случая, когда ковариантная производная тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = 0$. Такие пространства V_n называются *симметрическими*, и для них имеет место теорема: *для симметрического V_n в нормальной системе координат*

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^m\, 2^{2n+2}}{(2m+2)!}\, m_\alpha^{\sigma_1} m_{\sigma_1}^{\sigma_2} \,\ldots\, m_{\sigma_{m-1}\beta}, \tag{7.20}$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \overset{0}{R}_{\alpha\lambda\beta\mu} y^\lambda y^\mu, \tag{7.21}$$

а

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \pm 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

и $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора кривизны в начале нормальной системы координат.

Доказательство (7.20) получается следующим образом. Структура формулы следует непосредственно из (7.17). Численные коэффициенты при m также совпадают для выписанных членов (7.17). Теперь нетрудно проверить, что полная индукция приводит к (7.20) при условии (7.21).

Нормальные координаты допускают физическое истолкование в общей теории относительности (Пирани [258]) и являются удобными во многих вопросах геометрии и физики.

Полугеодезические координаты. Такие координаты (их также иногда называют *координатами Гаусса*) являются обобщением полугеодезических координат на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Они определяются сетью однопараметрического семейства геодезических и семейства ортогональных траекторий ([155], стр. 185). В V_n эти координаты определяются семейством геодезических и семейством гиперповерхностей, ортогональных к этим геодезическим, но при неопределенной сигнатуре ds^2 возможен случай изотропных геодезических линий, что не имеет аналога в евклидовой геометрии.

Дадим предварительно определение поверхности в V_n; *m-мерной поверхностью* в V_n назовем множество точек, заданных уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i) \qquad (\alpha = 1, \ \ldots, \ n; \ i = 1, \ \ldots, \ m),$$

где u^i — *независимые* параметры, причем ранг матрицы $\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$ равен m. Очевидно, что это условие инвариантно относительно любых невырожденных преобразований координат x^α в V_n. Условие о ранге предотвращает появление особых точек на поверхности и вырождение поверхности в геометрический образ меньшего числа измерений. Такое определение m-поверхности по существу *локально*; это определение «куска» поверхности. При $m = 1$ получим *кривую* пространства V_n, при $m = n - 1$ — *гиперповерхность* пространства V_n. Задавая на m-поверхности функции $u^i(t)$ некоторого класса C^r, будем говорить *о кривой соответствующего класса на этой m-поверхности.* Так как тем самым получается кривая пространства V_n, то ее касательный вектор

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} . \tag{7.22}$$

Будем говорить о *пространственном векторе* $\frac{dx^\alpha}{dt}$ и векторе $\frac{du^i}{dt}$, *принадлежащем поверхности*, связанных соотношениями (7.22). Будем исследовать только такие точки кривой, в которых $\frac{du^i}{dt}$ не все одновременно равны нулю, когда понятие касательного вектора становится неопределенным. Тогда $\frac{dx^\alpha}{dt}$ также не все равны нулю в силу условия о ранге для m-поверхности. Для произвольных кривых на m-поверхности при произвольной параметризации получим, что векторы $\xi^i = \frac{du^i}{dt}$ произвольны. Тогда векторы

$$\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \xi^i \tag{7.23}$$

определят *линейную оболочку m линейно независимых векторов* $\underset{k}{u}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Векторы ξ^α в совокупности определят *касательное* m-мерное пространство A_m в данной точке к m-поверхности.

Называя *координатной линией* m-поверхности линию, вдоль которой меняется только один из параметров u^i, получим, что m линейно независимых векторов $\underset{k}{u}^\alpha$ являются касательными векторами к координатным линиям m-поверхности. Таким образом, в каждой точке m-поверхности возникает свой *локальный m-репер*.

Рассмотрим дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении кривой на m-поверхности: $dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} du^i = \underset{i}{u}^\alpha du^i$. Тогда квадрат элемента длины этой кривой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \overset{*}{g}_{ij}\, du^i\, du^j, \tag{7.24}$$

где

$$\overset{*}{g}_{ij}(u) = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} = g_{\alpha\beta} \underset{i}{u}^\alpha \underset{j}{u}^\beta, \quad \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{g}_{ji} \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

— скалярные произведения координатных векторов поверхности — определяют дифференциальную квадратичную форму на m-поверхности.

Если $|\overset{*}{g}_{ij}| \neq 0$, то m-поверхность *метризована* и на ней возникает риманово пространство V_m, в этом случае поверхность называется *неизотропной*. Если же $|\overset{*}{g}_{ij}| = 0$, то получаем *изотропные m-поверхности*, которые в теории относительности ($n = 4$, $m = 3$) получают важную физическую интерпретацию при изучении волновых процессов; такие поверхности могут иметь место только для V_n с неопределенной метрикой.

Вектор n^α пространства V_n назовем *нормальным* к m-поверхности, если он ортогонален ко всем m координатным векторам $\underset{k}{u}^\alpha$ ($k = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$):

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha \underset{k}{u}^\beta = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m); \tag{7.25}$$

так как ранги матриц $(g_{\alpha\beta})$ и $(\underset{k}{u}^\beta)$ равны соответственно n и m, то ранг матрицы $(g_{\alpha\beta}\underset{k}{u}^\beta)$ равен m и система однородных, относительно неизвестных n^α, уравнений (7.25) имеет $n - m$ линейно независимых решений: *в каждой точке V_n существует $n - m$ независимых векторов, нормальных к V_m.*

Рассмотрим случай *изотропных гиперповерхностей*, для характеристики которых основное значение имеет следующая теорема: *нормаль к гиперповерхности изотропна тогда и только тогда, когда гиперповерхность изотропна.*

Из (7.24) видно, что, как это следует из теории определителей (Ковалевский [21], стр. 77),

$$\overset{*}{g} = |\overset{*}{g}_{ij}| = \sum_n \underset{n}{\Delta}\,\underset{n}{\omega},$$

где $\underset{n}{\Delta}$ и $\underset{n}{\omega}$ — соответствующие определители m-го порядка двух матриц $\left(g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\right)$. С другой стороны, (7.25) и уравнение $n_\beta \underset{k}{u}^\beta = 0$, которое следует из (7.25), показывают, что $\underset{n}{\Delta}$ и $\underset{n}{\omega}$ пропорциональны n^α и n_α, и следовательно, обозначая через k_1, k_2 множители пропорциональности, отличные от нуля, получим:

$$\overset{*}{g} = k_1 k_2 n_\alpha n^\alpha.$$

Если поверхность изотропна, то $\overset{*}{g} = 0$ и вектор нормали изотропен; обратное утверждение также имеет место.

Введем теперь *полугеодезическую систему координат*, положив в основу такой конструкции *неизотропную* гиперповерхность $\varphi(x^\alpha) = 0$, которой отвечает в каждой точке, в некоторой области, неизотропная нормаль:

$$\Delta_1\varphi = g^{\alpha\beta}\varphi,_\alpha\varphi,_\beta = n_\alpha n^\alpha \neq 0.$$

Проведя через каждую точку гиперповерхности в направлении нормали геодезическую, которая также будет неизотропной в силу (6.4), определим новую систему координат следующим образом. Потребуем, чтобы уравнение гиперповерхности имело вид $x^1 = 0$, геодезические были бы координатными линиями x^1, причем x^1 равно длине дуги, отсчитываемой в заданном направлении от гиперповерхности $x^1 = 0$, если нормаль имеет норму > 0, и $x^1 = is$, если норма нормали < 0. Тогда, вычисляя выражение линейного элемента для бесконечно малого смещения вдоль геодезической линии x^1, получим $ds^2 = g_{11}\, dx^{1^2}$ и, следовательно, $g_{11} = l = \pm 1$ в зависимости от знака нормы нормального вектора.

Полагая в уравнениях геодезических (6.3) $\tau = x^1 = s$ или is, получим: $\partial_1 g_{1\alpha} = 0$, т. е. $g_{1\alpha}$ не зависит от x^1. Но $g_{1\alpha} = 0$ при $x^1 = 0$, следовательно, это имеет место при любом x^1. Вследствие этого *метрика в полугеодезической* системе координат запишется в виде:

$$ds^2 = l\, dx^{1^2} + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i,\ j = 2,\ \ldots,\ n) \quad l = \pm 1. \tag{7.26}$$

Отсюда следует, что, полагая $x^1 = c$, мы получим гиперповерхности, опять-таки ортогональные к геодезическим x^1; эти поверхности называются *геодезически параллельными* гиперповерхности $x^1 = 0$.

Полугеодезические координаты допускают физическую интерпретацию в теории относительности (Ландау и Лифшиц [156], стр. 301; Керес [259], стр. 12—25) и применяются при различных исследованиях. Эту систему координат можно сконструировать даже в том случае, если гиперповерхность вырождается в m-поверхность, $m < n - 1$. Тогда в каждой точке m-поверхности геодезические проводятся в направлении $n - m - 1$ нормалей к m-поверхности и, следовательно, опять-таки будут зависеть от $n - 1$ параметров как и выше; откладывая на них отрезки равной длины, получим гиперповерхности, геодезически параллельные m-поверхности. В частности, полагая $m = 0$, полугеодезическую систему координат можно построить, отправляясь от точки; геодезически параллельными гиперповерхностями здесь будут геодезические гиперсферы с центром в данной точке; эта конструкция определит полугеодезическую систему координат в области, заключенной в некотором гиперконусе и не включающей данную точку.

Предположим теперь, что исходная гиперповерхность $f(x^\alpha) = 0$ *изотропная* и, следовательно, нормали к ней также изотропны. Тогда $\Delta_1 f = 0$ и, следовательно, гиперповерхности $f(x^\alpha) = \text{const}$ также будут изотропными, как и их нормали. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\Delta_1(f, \varphi) = g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} \varphi_{,\beta} = 0$. Эта система имеет $n - 1$ независимых решений (Степанов [101], стр. 295), которые обозначим $\varphi^i(x^\alpha)$ $(i = 2, \ldots, n)$. Введем новую систему координат при помощи формул преобразования

$$x^{1'} = \psi(x^\alpha), \quad x^{2'} = \varphi^2(x^\alpha), \quad \ldots, \quad x^{n'} = \varphi^n(x^\alpha) \equiv f(x^\alpha),$$

где ψ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $\dfrac{D(\psi, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} \neq 0$. В этой системе координат

$$g^{2'n'} = g^{3'n'} = \ldots = g^{n'n'} = 0, \quad g^{1'n'} = g^{\alpha\beta} \psi_{,\alpha} f_{,\beta},$$

причем $g^{1'n'} \neq 0$, так как ψ функционально независимо от f и φ^k $(k < n)$ и не может быть решением уравнения $\Delta_1(f, \psi) = 0$. Всегда можно подобрать $\psi(x^\alpha)$ так, чтобы $g^{1'n'} = 1$. Отсюда следует, что $g_{1'i'} = 0$ $(i = 1, \ldots, n - 1)$, $g_{1'n'} = 1$, и метрика пространства может быть представлена в виде:

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^n + g_{ij}(x^\alpha)\,dx^i\,dx^j \tag{7.27}$$

$$(i, j = 2, \ldots, n; \ \alpha = 1, \ldots, n).$$

Геометрическое истолкование этой системы также может быть связано с геодезическими линиями: оно не является таким простым, как для неизотропных гиперповерхностей. Эту систему назовем *изотропной полугеодезической системой координат*, и она может быть введена только для V_n с неопределенной метрикой.

Такого рода система координат особенно удобна при исследовании V_n, допускающих группу движений, действующую на изотропных трехмерных многообразиях (см. гл. IV, V), и она допускает также физическую интерпретацию в общей теории относительности.

Гармонические координаты. Эта система координат реализует теорему Римана при помощи координатных условий

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\beta'}\left(\sqrt{-g'}\,g^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}\right)x^{\sigma'} \equiv \Box\, x^{\sigma'} = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, n), \tag{7.28}$$

где $\Box$ — *обобщенный оператор Даламбера*. Таким образом, для определения гармонических координат x^α необходимо в данной системе рассмотреть уравнение

$$\Box\, \varphi = 0,$$

и если n его независимых решений обозначить $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, то искомое преобразование будет иметь вид:

$$x^{\alpha'} = \varphi^\alpha(x^\sigma).$$

Выбор n функций φ^α можно еще уточнить некоторыми условиями типа неравенств, и тогда система координат определяется с точностью до линейных преобразований Лоренца. Эта система координат, введенная в работах Дондера [54] и Ланцоса [68], получила физическую интерпретацию и приложение в теории относительности, в работах Фока и его сотрудников (см. В. А. Фок [111], [225], Н. М. Петрова [164]). Дискуссия о физической значимости этой системы координат, как системы привилегированной, отражена в работах [189], [195], [201], [226], [253], [254], [259], [306]. Примером гармонической системы может служить декартова система в плоских пространствах. Ее основное преимущество выражается в том, что уравнения поля тяготения в этой системе отнесения принимают удобную для исследования форму (см. гл. II).

Неголономные координаты. Рассмотрим некоторую систему координат в V_n, например одну из введенных выше. В любой точке пространства V_n определим *координатные гиперповерхности* с уравнениями $x^\alpha = \mathrm{const}$ *и координатные линии*, как линии, вдоль которых все координаты x^α, кроме одной, постоянны. Рассмотрим координатную линию, вдоль которой меняется x^α, где α — фиксированный индекс. Можно считать, что вдоль этой кривой x^α является параметром, и поэтому касательный к координатной линии вектор с контравариантными компонентами $\underset{\alpha}{l}{}^\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ (α — номер вектора) определится в виде:

$$\underset{\alpha}{l}{}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} = \delta^\sigma_\alpha. \tag{7.29}$$

Таким образом в каждой точке определяется *n независимых координатных* векторов $\underset{\alpha}{l}{}^\sigma$. Для всякой системы n независимых векторов можно поставить *однозначно* систему независимых *взаимных* векторов $\overset{\alpha}{l}_\sigma$ (α — номер, σ $(= 1, \ldots, n)$ — ковариантный индекс), и в данном случае в силу (7.29) взаимная система будет иметь вид:

$$\overset{\alpha}{l}_\sigma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$

и следовательно,

$$\partial_{[\gamma}\overset{\alpha}{l}_{\sigma]} = 0,$$

т. е. *система взаимных к координатным векторов будет системой градиентных векторов.*

Наоборот, если мы выделим систему функционально независимых скалярных полей $\overset{\sigma}{\varphi}$, то им отвечают n градиентных векторных полей $\overset{\sigma}{\varphi}_{,\alpha}$, которые можно рассматривать как поля координатных векторов, заданные своими ковариантными составляющими в новой системе координат, которая определяется преобразованием координат

$$x^{\alpha'} = \overset{\alpha}{\varphi}(x^\sigma). \tag{7.30}$$

Если поле u_α не градиентное $(\partial_{[\gamma}u_{\alpha]} \neq 0)$, но *градиентное с точностью до скалярного множителя*: $u_\alpha = \omega(x^\alpha)\,v_\alpha$, где $\partial_{(\gamma}v_{\alpha)} = 0$, то такому полю также отвечает возможность быть выбранным, после деления на скаляр, в качестве координатного. Как известно ([110], стр. 74), для существования такого поля необходимо и достаточно, чтобы

$$u_{[\alpha}\partial_\beta u_{\gamma]} = 0. \tag{7.31}$$

В том случае, когда координатными векторами являются поля градиентных векторов, будем говорить, что система координат *голономная*. Все рассмотренные выше системы координат являются голономными.

Однако очень часто представляется желательным ввести в каждой точке пространства V_n в качестве координатных векторы $\overset{\sigma}{v}_\alpha$, которые от точки к точке образуют векторные поля с компонентами некоторого класса C^r, но *неградиентные*: $\partial_{[\gamma}\overset{\sigma}{v}_{\alpha]} \neq 0$. Эти векторы в каждой точке V_n образуют *неголономный репер* из n независимых векторов и, следовательно, определяют систему координат, но, однако, для *области, не сводящейся к точке*, исходя из заданных полей $\overset{\sigma}{v}_\alpha$, нельзя определить преобразование (7.30). Такую систему координат назовем *неголономной*. Примером введения неголономной системы отнесения может служить следующая задача: исследуется симметрический тензор $h_{\alpha\beta}$, собственные векторы которого взаимно ортогональны; если эти векторы выбрать за координатные, то $h_{\alpha\beta}$ принимает особенно простой вид, но система координат от точки к точке будет неголономной. Здесь мы имеем пример *неголономной ортогональной системы координат* в V_n, тогда как *голономной* ортогональной системы координат в V_n (при $n > 3$) вообще не существует.

Предположим, что дана некоторая голономная система координат $\{x^\alpha\}$. Рассмотрим величины

$$\Omega^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^\sigma_{\beta'}A^\tau_{\gamma'}\partial_{[\sigma}\overset{\alpha'}{l}_{\tau]}. \tag{7.32}$$

Тогда *система координат*, образованная векторными полями $\overset{\alpha'}{l}_\tau$, *будет голономной в том и только в том случае*, *если все компоненты* $\Omega^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=0$. Легко убедиться, проверяя закон преобразования для Ω, что это — объект. Его принято называть *объектом неголономности* (Схоутен и Ван Данциг [87], стр. 646). Каждая неголономная система координат определяется на базе некоторой голономной системы. В то время как для геометрического объекта, отличного от нуля, возможно обращение в нуль в некоторой системе отнесения, для тензоров этого быть не может, и ввиду этого при пользовании неголономными координатами является основным следующий очевидный факт: если тензор равен нулю относительно некоторого неголономного репера, построенного в каждой точке области V_n, то он равен нулю в любой системе координат в этой области; обратное утверждение также имеет место.

Задачи

1. Если в некоторой системе координат метрика пространства V_n имеет вид

$$ds^2 = l\, dx^{1^2} + g_{ij}(x^\alpha)\, dx^i\, dx^j$$

$$(l = \pm 1;\ i, j = 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, n),$$

то линии x^1 — геодезические, ортогонально пересекающие гиперповерхности $x^1 = c$, которые геодезически параллельны $x^1 = 0$.

2. Как связаны между собой римановы координаты с началом в точке P и полугеодезические координаты с геодезическими параллельными концентрическими гиперсферами с центром в той же точке?

3. Показать, что в нормальной системе координат

$$g = |g_{\alpha\beta}| = \pm 1 + \frac{1}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + \frac{1}{3!}\overset{0}{R}_{\alpha\beta,\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(\frac{4}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\beta}\overset{0}{R}_{\gamma\delta} + \frac{4}{15}\overset{0}{R}_{\alpha\varrho\beta}{}^{\lambda}\overset{0}{R}_{\gamma\lambda_\delta}{}^{\varrho} + \frac{6}{5}\overset{0}{R}_{\gamma\delta,\alpha\beta}\right) y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \ldots$$

и, следовательно, если тензор Риччи $R_{\alpha\beta} = 0$, то

$$g = \pm 1 - \frac{1}{90}\overset{0}{R}_{\alpha\lambda\beta}{}^{\mu}\overset{0}{R}_{\gamma\mu\delta}{}^{\lambda} y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \ldots,$$

т. е. в этом случае в окрестности начала нормальной системы координат, с точностью до бесконечно малых четвертого порядка,

$$g = \pm 1.$$

4. Нормальная система координат с фиксированным началом определяется с точностью до линейных преобразований с постоянными коэффициентами, оставляющих инвариантной форму $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ (преобразования Лоренца при $n = 4$ и сигнатуре типа $- - - +$).

5. Показать, что в V_3 всегда можно ввести *триортогональную* систему координат, относительно которой $ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha\alpha} (dx^\alpha)^2$, где $g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}(x^1, x^2, x^3)$ (Коттон [10], стр. 385—438).

6. Показать, что в V_n можно определить такую систему координат, относительно которой $g = \pm 1$ в некоторой области, не сводящейся к точке. В этой системе дивергенция вектора записывается так же, как и в векторном анализе обыкновенного R_3.

7. Для триортогональной системы в V_3

$$R_{ij} = \frac{1}{g_{kk}} R_{ikjk}, \quad R_{ii} = \frac{1}{g_{jj}} R_{ijij} + \frac{1}{g_{kk}} l_{ikik} \quad (ij, k \neq),$$

$$R = \sum_{ij} \frac{1}{g_{ii} g_{jj}} R_{ijij}.$$

8. Тензор кривизны всякого V_3 (см. задачу 3 § 5)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta} L_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma} L_{\alpha\delta},$$

где $L_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}$.

9. Если $R_{\alpha\beta} = 0$ в V_4 и существует такое подпространство V_3, нормаль к которому неизотропна, и

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$$

на V_3, то $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ в V_4 [296].

§ 8. Риманова кривизна V_n. Пространства постоянной кривизны

Простейшее истолкование тензора кривизны в пространстве V_n получается в случае *обыкновенного* V_2 — поверхности, погруженной в евклидово трехмерное пространство.

Если $n=2$, то тензор кривизны имеет только одну существенную компоненту, поэтому можно положить:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K\,(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})=K\varphi_1.$$

Внутренняя геометрия поверхности определяет V_2 с определенно-положительной метрикой. Если задать эту поверхность уравнением $z=f(x,\,y)$, поместить начало пространственных координат в касательной плоскости к этой поверхности, полагая $x=x^1$, $y=x^2$, то

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^{1^2}+2pq\,dx^1\,dx^2+(1+q^2)\,dx^{2^2}$$

и $p_0=q_0=0$. Следовательно, символы Кристоффеля в начале все равны нулю и $\overset{0}{R}_{1212}=rt-s^2=\varphi_2$. Отсюда следует, что $K=\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$ — *гауссова кривизна поверхности*, а φ_1, φ_2 — *первая и вторая формы поверхности* ([155], стр. 148).

В случае $n>2$ такого рода интерпретация возможна, если ее связать с некоторым двумерным направлением в V_n. Введем в V_n нормальную систему координат. Возьмем в начале координат два вектора $\underset{1}{i}^\alpha$ и $\underset{2}{i}^\alpha$, образуем линейную оболочку, натянутую на эти векторы, и проведем в направлении каждого вектора этой двумерной плоскости геодезические; их совокупность определит двумерную *поверхность, геодезическую в начале координат*.

Уравнение этой поверхности будет:

$$y^\alpha=u^1\underset{1}{i}^\alpha+u^2\underset{2}{i}^\alpha, \tag{8.1}$$

где $u^a=\underset{a}{k}\tau$, а τ — канонический параметр, который в случае неизотропной геодезической можно выбрать равным дуге. Из (8.1) следует, что

$$dy^\alpha=\underset{a}{i}^\alpha\,du^a \qquad (a=1,\,2),$$

$$ds^2=g_{\alpha\beta}\,dy^\alpha\,dy^\beta=\overset{*}{g}_{ab}\,du^a\,du^b, \qquad \overset{*}{g}_{ab}=g_{\alpha\beta}\underset{a}{i}^\alpha\underset{b}{i}^\beta, \tag{8.2}$$

где, таким образом, $\overset{*}{g}_{ab}$ — метрический тензор поверхности, геодезической в точке. Рассмотрим тот случай, когда двумерная поверхность неизотропная ($|\overset{*}{g}_{ab}|\neq 0$) и следовательно, образует V_2. Так как система координат нормальная, т. е.

$$(\partial_c \overset{*}{g}_{ab})_0 = \left(\partial_\gamma g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial u^c} \underset{a}{i}^{\alpha} \underset{b}{i}^{\beta}\right)_0 = 0,$$

то $(\overset{*}{\Gamma}_{a,\,bc})_0 = 0$ и единственная существенная компонента тензора кривизны V_2

$$(\overset{*}{R}_{1212})_0 = \{\partial_1 \overset{*}{\Gamma}_{1,22} - \partial_2 \overset{*}{\Gamma}_{1,12}\}_0.$$

Символы Кристоффеля в пространстве V_2: $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} \underset{a}{i}^{\alpha} \underset{b}{i}^{\beta} \underset{c}{i}^{\gamma} = \overset{*}{\Gamma}_{a,bc}$, и поэтому тензор кривизны

$$(\overset{*}{R}_{1212})_0 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} \underset{1}{i}^{\gamma} \underset{2}{i}^{\delta}$$

и, как для всякого V_2, равняется, с другой стороны,

$$K\overset{*}{g} = K(\overset{*}{g}_{11}\overset{*}{g}_{22} - \overset{*}{g}{}^{2}_{12}) = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} \underset{1}{i}^{\gamma} \underset{2}{i}^{\delta}.$$

Таким образом,

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} \underset{1}{i}^{\gamma} \underset{2}{i}^{\delta}}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} \underset{1}{i}^{\gamma} \underset{2}{i}^{\delta}}, \tag{8.3}$$

где $\underset{1}{i}^{\alpha}, \underset{2}{i}^{\alpha}$ — любые два вектора, определяющие двумерную плоскость.

Величину K называют *римановой кривизной пространства* V_n *в двумерном направлении* $\{\underset{1}{i}^{\alpha}\underset{2}{i}^{\alpha}\}$; если V_2 обыкновенное, то K *будет гауссовой кривизной геодезической в данной точке поверхности пространства* V_n. Если двумерная поверхность изотропна, то знаменатель в (8.3) обращается в нуль, и такое истолкование теряет смысл. Однако и в этом случае (см. гл. III) можно, предполагая, что $K(x^\alpha)$ — непрерывная функция, дать истолкование K.

Для обыкновенных V_n формула (8.3) всегда имеет смысл.

K в (8.3) является однородной функцией нулевого измерения от *бивектора* $\underset{[1}{\xi}{}^{\alpha}\underset{2]}{\xi}{}^{\beta}$, определяющего двумерную плоскость, и меняется при изменении этого бивектора. V_n называется *пространством постоянной кривизны*, если K не зависит от выбора двумерной плоскости. Обозначим:

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - K \begin{vmatrix} g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\delta} \\ g_{\beta\gamma} g_{\beta\delta} \end{vmatrix}.$$

Из (8.3) получим:

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{1}{i}^{\alpha} \underset{2}{i}^{\beta} \underset{1}{i}^{\gamma} \underset{2}{i}^{\delta} = 0$$

при любом выборе векторов $\underset{1}{i}^{\alpha}, \underset{2}{i}^{\alpha}$. Это означает, что

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} + S_{\gamma\beta\alpha\delta} + S_{\alpha\delta\gamma\beta} + S_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0.$$

Так как, кроме того, для тензора S имеют место свойства (α), (β), (γ) тензора кривизны, то $S_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (см. задачу 5 § 2) *и необходимое и достаточное условие того, чтобы* $V_n (n > 2)$ *было пространством постоянной кривизны, имеет вид*:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K \begin{vmatrix} g_{\alpha\gamma} & g_{\alpha\delta} \\ g_{\beta\gamma} & g_{\beta\delta} \end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Это условие оказывается настолько жестким, что оно определяет K как функцию точки, а не направления бивектора, как это делалось только что: *риманова кривизна пространства постоянной кривизны постоянна* (*при* $n > 2$) (Шур [4], стр. 563). В самом деле, из (8.4) следует, что

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = K_{,\,\lambda} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}),$$

и, применяя тождество Бианки, свернутое по индексам β и γ, получим:

$$(n-2)(g_{\alpha\lambda} K_{,\,\delta} - g_{\alpha\delta} K_{,\,\lambda}) = 0.$$

Если $n > 2$, то, свертывая по индексам α и λ, получаем $(n-1) K_{,\,\delta} = 0$, т. е. $K = \text{const}$. Если же $n = 2$, то V_2 только тогда будет пространством постоянной кривизны, когда $K = \text{const}$, условие же (8.4) всегда выполняется в этом случае. Из (8.4) следует, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и K обращаются в нуль одновременно, и поэтому всякое плоское пространство представляет собой пространство нулевой римановой кривизны. При $K < 0$ приходим к геометрии, обобщающей геометрию Лобачевского — Бояи, а $K > 0$ отвечает геометрии, аналогичной геометрии сферы. *Пространства постоянной кривизны* будем обозначать символом S_n при любой сигнатуре метрической формы.

Будем говорить, что два n-мерных римановых пространства *изометричны*, если существует такое невырожденное вещественное преобразование, которое преобразует метрику одного V_n в метрику другого. Для S_n имеет место теорема: *два S_n с равными римановыми кривизнами и одинаковыми сигнатурами метрик изометричны.* Всякое S_n есть симметрическое V_n, следовательно, если в таком S_n задать нормальную систему координат, то согласно (7.20) его метрика полностью определяется значениями компонент тензора кривизны в начале координат: $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Но из (8.4) следует, что для орторепера тензор кривизны $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет зависеть только от K и сигнатуры метрики. Следовательно, при совпадении сигнатур и кривизны K пространства S_n изометричны.

Отсюда как следствие получаем, что если нам удастся найти хотя бы одну метрику, удовлетворяющую (8.4), с произвольной сигнатурой и кривизной K, то это будет общее выражение метрики любого S_n в специальной системе координат. Попытаемся определить такую метрику, предположив, что она лишь скалярным множителем отличается от метрики плоского пространства (*конформно-плоские* V_n):

$$ds^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^{n} l_\alpha dx^{\alpha^2}, \quad \sigma = \sigma(x^\alpha), \quad l_\alpha = \pm 1, \quad n > 2, \tag{8.5}$$

и, таким образом, $g_{\alpha\alpha} = \frac{l_\alpha}{\sigma^2}$, $g_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$. Вычисляя компоненты тензора кривизны по формулам (5.7) и записывая условия (8.4), получим систему уравнений

$$\partial_{\alpha\beta}\sigma = 0, \quad \sigma\{l_\alpha \partial_{\beta\beta}\sigma + l_\beta \partial_{\alpha\alpha}\sigma\} = l_\alpha l_\beta \{K + \sum_\tau l_\tau (\partial_\tau \sigma)^2\}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Этой системе удовлетворяет

$$\sigma = 1 + \frac{K}{4} \sum_\sigma l_\sigma x^{\sigma^2}; \tag{8.6}$$

так как сигнатура (8.5) при условии (8.6) произвольна так же, как и кривизна K, то (8.5) *при условии* (8.6) — *метрика произвольного* S_n. Из (8.5) следует, что *всякое* S_n — *конформно-плоское пространство* V_n.

Задачи

1. Если V_n допускает векторное поле φ_α, удовлетворяющее условию

$$\varphi_{\alpha,\,\beta}=\varrho g_{\alpha\beta}$$

и $\varrho \neq 0$, то оно допускает такую систему координат, в которой

$$ds^2=g_{11}\,dx^{1^2}+\frac{1}{g_{11}}\,\tilde{g}_{pq}(x^2,\;\ldots,\;x^n)\,dx^p\,dx^q,$$

где

$$g_{11}=\frac{1}{2\int\varrho\,(x^1)\,dx^1+C}\,,$$

а ϱ, $\tilde{g}_{pq}$ $(p,\,q \neq 1)$ — произвольные функции своих аргументов (Н. С. Синюков [274]).

2. Если пространство задачи 1 (при $n>2$) симметрическое ($R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0$), то оно является пространством постоянной кривизны.

3. Если риманово пространство V_n с символом Кристоффеля Γ^k_{ij} допускает точечное отображение на V_n с символом Кристоффеля $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, при котором геодезические отобразятся в геодезические, то в общих по отображению координатах

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+\delta^k_i\psi_j+\delta^k_j\psi_i,$$

$$\tilde{R}^p{}_{ijk}=R^p{}_{ijk}+\delta^p_k\psi_{ij}-\delta^p_j\psi_{ik},$$

где ψ_i — градиент, $\psi_{ij}=\psi_{i,\,j}-\psi_i\psi_j$.

4. Если V_n (при $n>2$ и $\psi_i \neq 0$) допускает геодезическое отображение на симметрические $\tilde{V}_n$, то оно является пространством постоянной кривизны (Н. С. Синюков [274]).

§ 9. Теорема о главных осях тензора

Нам потребуется в дальнейшем решение вопроса о приведении пары квадратичных форм с произвольными сигнатурами к каноническому виду *над полем вещественных чисел* в предположении, что одна из этих форм не вырождается. В книгах по линейной алгебре этот вопрос, как правило, обходится; авторы ограничиваются изложением приведения к каноническому виду одной формы и пары форм в случае, если невырожденная форма определенно-положительная, или же занимаются приведением пар форм *над полем комплексных чисел*, когда вопрос значительно упрощается. Общее решение поставленного вопроса дано впервые Диксоном ([27], 357—358). Относительно этого решения можно заметить, что применяемый им метод является довольно громоздким, а получаемые в результате канонические формы не являются простейшими: можно указать для них более симметричный вид при любом n — числе измерений пространств. Так как, кроме того, можно дать решение вопроса на чисто геометрическом пути и для дальнейшего будут полезны именно геометрические факты, то в этом параграфе будет дано решение этого вопроса (А. З. Петров [165], 37—51).

Если в R_n с *определенным* метрическим тензором g_{ij} задан *вещественный* тензор a_{ij}, то *теорема о главных осях тензора* утверждает ([110], 27), как известно, что можно определить r взаимно ортогональных векторов $\underset{\sigma}{\lambda}^i$ $(\sigma = 1, \ldots, r)$, которые будут главными осями тензора a_{ij}, причем $a_{ij} = \sum_{\sigma=1}^{r} \underset{\sigma}{\alpha} \underset{\sigma}{\lambda}_i \underset{\sigma}{\lambda}_j$, где $\underset{\sigma}{\alpha}$ — инварианты и r — ранг a_{ij}. Эта теорема является следствием теории элементарных делителей (П. Мут [9], 118—125; Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн [126], 48—50), из которой следует также, что главные оси определяются однозначно в том и только в том случае, если отличные от нуля корни характеристического уравнения $|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ будут простыми. Корню кратности p отвечает p-мерная плоскость, в которой любые p взаимно ортогональных векторов определяют систему p главных осей тензора a_{ij}. Таким образом, матрицы тензоров g_{ij}, a_{ij} ($|g_{ij}|\neq 0$) одновременно приводятся к диагональному виду.

При *неопределенном* g_{ij} такая теорема не имеет места. Причина этого кроется в том, что элементарные делители λ-матрицы $A=(a_{ij}-\lambda g_{ij})$ могут быть не простыми, а корни соответствующего характеристического уравнения — комплексными. Если задачу поставить над полем комплексных чисел, то две пары тензоров $\{a_{ij}, g_{ij}\}$ и $\{\overset{*}{a}_{ij}, \overset{*}{g}_{ij}\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда элементарные делители матриц одинаковы (М. Бохер [90], 274—275), и, основываясь на результатах Вейерштрасса по теории элементарных делителей, канонические формы g_{ij} и a_{ij} всегда можно определить, и притом неоднозначно. Если же ограничиваться вещественными составляющими g_{ij} и a_{ij} и коэффициентами допустимых линейных преобразований, то эти пары матриц могут быть не эквивалентными, хотя бы они и имели одинаковые элементарные делители. В дальнейшем нам понадобится приведение пары тензоров к каноническому виду именно *на вещественном пути*.

Рассмотрим в R_n две формы: $\varphi=g_{ij}x^ix^j$ и $\psi=a_{ij}x^ix^j$ с постоянными вещественными коэффициентами и $|g_{ij}|\neq 0$. Для определения *собственных* векторов a_{ij} (главные оси a_{ij}), определяемых уравнениями $(a_{ij}-\lambda g_{ij})\lambda^j=0$, необходимо исследовать корни уравнения $|a_{ij}-\lambda g_{ij}|=0$ и элементарные делители матрицы $(a_{ij}-\lambda g_{ij})$. Для неопределенного g_{ij} корни могут быть комплексными, а элементарные делители *не простыми* (П. А. Широков [91], 43—54).

Если вещественное линейное преобразование $A=g^{-1}T=(T^i_j)$, где $G=(g_{ij})$ и $T=(a_{kj})$, то на основании теоремы Гамильтона—Кели (П. А. Широков [91], 174—179; Ф. Клейн [112], 378—387), пользуясь только вещественными преобразованиями, можно ввести новые координаты $\overset{*}{x}{}^i$ так, что каждая из форм φ и ψ распадается на сумму k форм: $\varphi=\sum\limits_1^k\varphi_i$, $\psi=\sum\limits_1^k\psi_i$, где φ_i и ψ_i содержат только переменные $\overset{*}{x}{}^j$ $(j=j_1, \ldots, j_i)$, и если обозначить через $\overset{*}{G}_s$ и $\overset{*}{T}_s$ матрицы форм φ_s и ψ_s соответственно, то характеристическое уравнение линейного преобразования $\overset{*}{A}_s = \overset{*}{G}{}_s^{-1}\,\overset{*}{T}_s$ будет иметь вид $(\lambda - \underset{s}{\lambda})^{n_s} = 0$.

Иными словами, можно выбрать новые координатные векторы $\underset{p}{\overset{*}{\lambda}}{}^i = c_p^q \underset{q}{\lambda}{}^i$ так, что

$$\overset{*}{G} = \begin{pmatrix} \overset{*}{G}_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overset{*}{G}_{nk} \end{pmatrix}, \quad \overset{*}{T} = \begin{pmatrix} \overset{*}{T}_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overset{*}{T}_{nk} \end{pmatrix},$$

$$\overset{*}{A} = \begin{pmatrix} \overset{*}{A}_{n1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overset{*}{A}_{nk} \end{pmatrix},$$

где $\overset{*}{G}_{ni}$, $\overset{*}{T}_{ni}$, $\overset{*}{A}_{ni}$ — квадратные матрицы, имеющие n строк. Таким образом,

$$\overset{*}{a}_{ij} = \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{a}{}^i_j = 0, \tag{9.1}$$

если индексы i, j отвечают двум различным матрицам, стоящим по главной диагонали, а координатные векторы разбиваются на k *взаимно ортогональных пучков*. Преобразования векторов *внутри* пучка назовем *внутренними*. Тогда при любом внутреннем преобразовании условия (9.1) имеют место.

Рассмотрим случай *вещественных корней*. Пользуясь только вещественными внутренними преобразованиями, приведем матрицы $\overset{*}{A}_{ni}$ к жордановой форме (П. А. Широков [91], 180—185):

$$\overset{*}{A}_{ni} = \begin{pmatrix} B_{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{s_i} \end{pmatrix}, \quad \sum_{l=1}^{i} s_l = n_i, \quad B_{s_l} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}; \tag{9.2}$$

далее везде знак «*» опускаем.

Теперь можно определить матрицы G_{ni} и T_{ni}. Не уменьшая общности, можно предположить, что A_{ni} находится в левом верхнем углу матрицы A и содержит только две подматрицы вида B_{s_l}. Это означает, что характеристическому уравнению $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}=0$ отвечают два инвариантных пучка числа измерений m_1 и m_2, где $m_1+m_2=n_1$, $m_1<m_2$.

Для матрицы A_n получим:

$$a^i_j\underset{h}{\lambda}{}^j=\lambda_1\underset{h}{\lambda}{}^i+\underset{h}{\Delta}\,\underset{h-1}{\lambda}{}^i \qquad (h=1,\ \ldots,\ h_i;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n), \tag{9.3}$$

где $\underset{h}{\Delta}=0$ для $h=1$, m_1+1 и $\underset{h}{\Delta}=1$ в противном случае. Так как $\underset{h}{\lambda}{}^i=\delta^i_h$, то $a_{ij}=\lambda_1 g_{ij}+\underset{j}{\Delta}g_{i,\,j-1}$. Используя симметрию тензоров g_{ij} и a_{ij}, получим $\underset{i}{\Delta}g_{j,\,i-1}=\underset{j}{\Delta}g_{i,\,j-1}$. Следовательно,

$$G_{n_i}=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & \alpha_1 & & & & & \gamma_1\\
 & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot\\
 & & \cdot & & \cdot & & & \cdot & & \cdot\\
 & \cdot & & & \cdot & & \cdot & & & \cdot\\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\alpha_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{m_1} & \gamma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{m_1}\\
\hline
 & & & & & & & & & \beta_1\\
 & & & & \gamma_1 & & & & \cdot & \cdot\\
 & & & \cdot & \cdot & & & \cdot & & \cdot\\
 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & & \cdot\\
 & \cdot & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\
\gamma_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{m_1} & \beta_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{m_2}
\end{array}\right).$$

В каждом элементарном пучке, отвечающем элементарной ячейке Жордана, можно производить любые преобразования, оставляющие инвариантными соотношения (9.3). Среди этих преобразований существуют такие неособенные вещественные преобразования, которые позволяют обратить в нуль коэффициенты α_i, β_i для $i>1$ и γ_i $(i=1,\ \ldots,\ m)$ (А. З. Петров [165], 41—42). Так как $(a_{ij})=(g_{ik})\,(a^k_j)$, *то для вещественных корней на вещественном пути матрицы форм* $g_{ij}x^ix^j$ *и* $a_{ij}x^ix^j$ *можно* *привести к виду*:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} G_{m_1} & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & G_{m_k} \end{pmatrix}, \qquad (a_{ij})=\begin{pmatrix} T_{m_1} & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & T_{m_k} \end{pmatrix},$$

$$G_{m_i}=\begin{pmatrix} & & & & & & l_i \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ l_i & & & & & & \end{pmatrix}, \qquad T_{m_i}=\begin{pmatrix} & & & & & l_i\lambda_i \\ & & & & \cdot & l_i \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ l_i\lambda_i & l_i & & & & \end{pmatrix}, \qquad l=\pm 1, \tag{9.4}$$

где $\Sigma m_i = n$, λ_{m_i} — корни характеристического полинома, k — число инвариантных пучков, равное числу элементарных делителей матрицы. Приведение к матрицам (9.4) не нуждается в понятии элементарных делителей, но они вполне определяются этими матрицами. Из (9.4) следует, что *простому элементарному делителю отвечает неизотропное собственное направление* a_{ij}; *не простому — изотропное*.

Переходим к случаю *комплексных корней*. Если корни уравнения $|a_{ij}-\lambda g_{ij}|=0$ будут все или некоторые комплексными, то, применяя процесс, изложенный выше (без приведения α, β к ± 1), придем к матрицам (9.2) с той разницей, что их элементы будут, вообще говоря, комплексными числами. Но и в этом случае можно выбрать такую вещественную систему отнесения, что для g_{ij} и a_{ij} получим вещественные матрицы, которые назовем *каноническими*.

Так как a_{ij} и g_{ij} — вещественные числа, то каждому комплексному корню будет отвечать комплексно-сопряженный. Если выделить систему комплексных векторов, определяющих жорданову форму матрицы (a^i_j) и, следовательно, удовлетворяющих условиям (9.3), то в сопряженном пучке, соответствующем сопряженному корню, найдется система векторов, комплексно-сопряженных по отношению к данным, также удовлетворяющих (9.3) и определяющих поэтому жорданову ячейку такого же вида и числа измерений.

Иными словами, если p-кратному корню вида $\alpha+\beta i$ соответствует элементарный делитель вида $(\lambda-\alpha-i\beta)^q$ $(q\leqslant p)$, то имеется корень $\alpha-\beta i$, также кратности p, которому отвечает элементарный делитель $(\lambda-\alpha+\beta i)^q$. Меняя нумерацию векторов, всегда можно добиться того, чтобы две такие подматрицы стояли непосредственно одна за другой. Достаточно рассмотреть две такие подматрицы G_s и $\overline{G}_s$, которые можно считать находящимися в верхнем углу (g_{ij}). Их совокупность обозначим через G_{2s} и предположим, что G_{2s} отвечает элементарному делителю $(\lambda-\alpha\pm\beta i)^s$. Тогда

$$G_{2s}=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \overline{B} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} & & k \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ k & & \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Пусть векторы, образующие инвариантный пучок, отвечающий матрице G_s, имеют вид:

$$\underset{1}{\lambda}^j=\underset{1}{u}^j+iv^j, \quad \ldots, \quad \underset{s}{\lambda}^j=\underset{s}{u}^j+i\underset{s}{v}^j.$$

Тогда матрице G_s соответствуют векторы

$$\underset{s+1}{\lambda}^j=\underset{1}{u}^j-i\underset{1}{v}^j, \quad \ldots, \quad \underset{is}{\lambda}^j=u^j-i\underset{s}{v}^j,$$

откуда следует, что $K=2(p+iq)$, $\overline{K}=2(p-iq)$, где p и q — некоторые вещественные числа, а g_{kj} равняется $2(p+q)$, если $K+j=s+1$, $(p-iq)$, если $K+j=3s+1$, или 0 в остальных случаях.

Принимая за координатные векторы $2s$ вещественных векторов $\underset{1}{u}^j, \ldots, \underset{s}{u}^j, \underset{1}{v}^j, \ldots, \underset{s}{v}^j$, перенумеруем их заново, относя векторам u нечетные номера, а векторам v — четные. Тогда матрицы G_{2s} и B_{2s} будут выражаться следующим образом:

$$G_{2s}=\begin{pmatrix} & & & & p & q \\ & & & & q & -p \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ p & q & & & & \\ q & -p & & & & \end{pmatrix}, \quad B_{2s}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & \alpha & \beta \\ & & & & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь, пользуясь преобразованиями

$$x^1=c_1\overset{*}{x}{}^1-c_2\overset{*}{x}{}^2, \quad x^3=c_1\overset{*}{x}{}^3-c_2\overset{*}{x}{}^4, \quad \ldots,$$

$$x^2=c_2\overset{*}{x}{}^1+c_1\overset{*}{x}{}^2, \quad x^4=c_2\overset{*}{x}{}^3+c_1\overset{*}{x}{}^4, \quad \ldots,$$

числа p и q можно обратить в 1, так что можно определить матрицу $T_{2s}=G_{2s}\cdot B_{2s}$ в виде:

$$G_{2s}=\begin{pmatrix} & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \end{pmatrix},$$

$$T_{2s}=\begin{pmatrix} & & & & & & \alpha-\beta & \alpha+\beta \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & & \alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ & & & \cdot & & \cdot & 1 & 1 \\ & & \cdot & & \cdot & \cdot & 1 & -1 \\ & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta & 1 & 1 & \cdot & & & \\ \alpha+\beta & -\alpha+\beta & 1 & -1 & & & & \end{pmatrix}, \qquad (9.6)$$

где α и β имеют, вообще, различные значения для каждого s.

Таким образом, общее решение вопроса о приведении пары форм на вещественном пути дает теорема: *матрицы* *вещественных симметрических тензоров* g_{ij} *и* a_{ij} *при условии* $|g_{ij}| \neq 0$ *вещественным неособенным линейным преобразованием координат можно привести к виду:*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_r \end{pmatrix}, \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}, \tag{9.7}$$

где G_i *и* T_i *определяются формулами* (9.4) *для вещественных корней и* (9.6) — *для каждой пары комплексно-сопряженных корней.*

Здесь r — число инвариантных пучков тензора a_{ij} и равно числу элементарных делителей λ-матрицы $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$, если считать пару комплексно-сопряженных делителей за один.

Числа l_i, λ_i, α, β в формулах (9.4) и (9.6) зависят, вообще говоря, от номера пучка и могут, в частности, быть одинаковыми для некоторых матриц T_i, когда два или более соответствующих элементарных делителя имеют одинаковые базисы.

В книгах по линейной алгебре ограничиваются изложением случая, когда элементарные делители простые, т. е. все ячейки Жордана одномерные, или же делают приведение над полем комплексных чисел, когда результат укладывается в рамки формул (9.4).

Задачи

1. Доказать, что матрица всякого *ковариантно постоянного* смешанного тензора S^α_β может быть в некоторой голономной системе координат приведена к каноническому виду Жордана; иными словами, существует такая голономная система координат, относительно которой все компоненты S^α_β будут постоянными (А. П. Широков [235]).

2. В каждой точке V_4 бивектор $v_{\alpha\beta}$ и невырожденный тензор $g_{\alpha\beta}$ ($|g_{\alpha\beta}| \neq 0$), пользуясь *комплексными* линейными однородными преобразованиями координат, можно одновременно привести к каноническому виду. Если ξ^α_p — ковариантные составляющие координатных векторов, то в этом

каноническом представлении

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma}\underset{\sigma}{\xi_\alpha}\underset{\sigma}{\xi_\beta},$$

а бивектор $v_{\alpha\beta}$ с точностью до скалярного множителя будет иметь одну из следующих форм приведения:

I. $\frac{1}{2}v_{\alpha\beta}=\sqrt{-\underset{1}{\lambda}}\,\underset{[1}{\xi_\alpha}\underset{2]}{\xi_\beta}\pm\sqrt{-\underset{2}{\lambda}}\,\underset{[3}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}$

(бивектор будет изотропным тогда и только тогда, когда $\underset{1}{\lambda}+\underset{2}{\lambda}=0$);

II. $\frac{1}{2}v_{\alpha\beta}=a\,(\underset{[1}{\xi_\alpha}\underset{2]}{\xi_\beta}\pm\underset{[3}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta})+b\,(\underset{[1}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}\pm\underset{[2}{\xi_\alpha}\underset{3]}{\xi_\beta})+c\,(\underset{[2}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}\pm\underset{[3}{\xi_\alpha}\underset{1]}{\xi_\beta})$

(бивектор будет изотропным тогда и только тогда, когда $a^2+b^2+c^2=0$, и в этом случае он будет также однолистным);

III. $\frac{1}{2}v_{\alpha\beta}=\underset{[1}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}\pm i\,\underset{[3}{\xi_\alpha}\underset{2]}{\xi_\beta}$

(бивектор однолистный, изотропный);

IV. $\frac{1}{2}v_{\alpha\beta}=i\,(\underset{[1}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}+\underset{[2}{\xi_\alpha}\underset{3]}{\xi_\beta})+\underset{[2}{\xi_\alpha}\underset{4]}{\xi_\beta}-\underset{[3}{\xi_\alpha}\underset{1]}{\xi_\beta}$

(неизотропный бивектор) (А. З. Петров [171]).

§ 10. Группы Ли в V_n

Далее, при классификации пространств V_n, определяемых полями тяготения, по группам движений, ими допускаемым, необходимы сведения из теории непрерывных групп преобразований (групп Ли). В этом параграфе даются основные определения и факты групп Ли и некоторые теоремы, необходимые для дальнейшего.

Если через X_n обозначить n-мерное пространство, отнесенное к координатам $\{x^\alpha\}$ $(\alpha=1,\ldots,n)$, а через G_r r-мерное пространство параметров $\{a^k\}$ $(k=1,\ldots,r)$, то уравнения

$$\overset{*}{x}{}^\alpha=f^\alpha(x^1,\ldots,x^n;\;a^1,\ldots,a^r)\equiv f^\alpha(x,\;a) \qquad (10.1)$$

при фиксированных значениях a^k определяет преобразование точки $M(x)$ пространства X_n в точку $\overset{*}{M}(\overset{*}{x})$. Здесь предполагается, что f^α — функции некоторого класса C^s, а a^k — *существенные* параметры, т. е. они не могут быть выражены через меньшее число независимых параметров; для этого, как известно (Эйзенхарт [147], стр. 17), необходимо и достаточно, чтобы функции f^α не удовлетворяли никаким уравнениям вида

$$\sum_s \varphi_s \frac{\partial f^\alpha}{\partial a^s} = 0.$$

G_r становится группой, если существует r достаточное число раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi^i(a^s, b^t)$ $(i, s, t = 1, \ldots, r)$ таких, что

$$f^\alpha(f(x, a)\, b) = f^\alpha(x, \varphi(a, b), c),$$

и существует в G_r *точка* e^s $(s = 1, \ldots, r)$, для которой

$$f^\alpha(x, e) = x^\alpha,$$

при этом предполагается, что функции φ определены в окрестности точки e^s и удовлетворяют следующим аксиомам группы:

1) $\varphi^i(a, \varphi(b, c)) = \varphi^i(\varphi(a, b), c)$,

2) $\varphi^s(a, e) = e^s$,

3) $\varphi^s(a, a^{-1}) = \varphi^s(a^{-1}; a) = e^s$.

Независимость этих трех аксиом исследовалась рядом авторов с различных точек зрения (Диксон [22], стр. 198 — 204; Н. Г. Чеботарёв [120], стр. 46; Г. Вейль [148], стр. 258; Л. С. Понтрягин [205], стр. 285).

При выполнении только аксиом 1) и 2) имеем так называемую *полугруппу*. Аксиома 1) определяет *ассоциативный закон*, аксиома 2) обеспечивает существование *единицы группы* e^s, и аксиома 3) означает существование для каждого элемента a группы *обратного* элемента.

Одномерной подгруппой G_1 группы G_r назовем такую кривую $a^s = a^s(t)$ пространства параметров, проходящую через единицу группы e^s, для любых точек которой

$$\varphi^s(a(t_1),\ a(t_2)) = a^s(t_3).$$

Всякой точке этой кривой, бесконечно близкой к e^s, в пространстве X_n отвечает бесконечно малое преобразование

$$\overset{*}{x}{}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x)\,\delta t, \tag{10.2}$$

которому можно, таким образом, сопоставить оператор

$$X = \xi^\alpha(x)\,\partial_\alpha \qquad \left(\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right). \tag{10.3}$$

Из (10.2) следует, что траектория одномерной подгруппы в пространстве X_n, проходящая через данную точку $P(\overset{0}{x}{}^\alpha)$, определяется как интегральная кривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \xi^\alpha(x) \qquad (\alpha = 1,\ \ldots,\ n) \tag{10.4}$$

с начальными данными $x^\alpha(0) = \overset{0}{x}{}^\alpha$, $a^s = e^s$ ($\alpha = 1,\ \ldots,\ n$; $s = 1,\ \ldots,\ r$). Каждой одномерной подгруппе группы G_r можно взаимно однозначно сопоставить оператор с точностью до *постоянного* множителя. Среди всех операторов группы найдется ровно r линейно независимых операторов $X_1,\ \ldots,\ X_r$ (*базис* группы); любой оператор группы является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов базиса.

Для того чтобы r операторов группы определяли базис группы, необходимо и достаточно, чтобы операторы

$$[X_iX_j] \equiv (\underset{i}{\xi}{}^\sigma\,\partial_\sigma\underset{j}{\xi}{}^\beta - \underset{j}{\xi}{}^\sigma\,\partial_\sigma\underset{i}{\xi}{}^\beta)\,\partial_\beta, \tag{10.5}$$

которые называются *коммутаторами*, были операторами G_r, если X_i, X_j — базисные операторы, как это следует из теории совместности систем дифференциальных уравнений. Следовательно, коммутаторы должны иметь вид:

$$[X_iX_j] = C^s_{ij}X_s, \tag{10.6}$$

где C^s_{ij} — так называемые *структурные константы* группы G_r; это составляет содержание так называемой *второй основной теоремы Ли* ([147], стр. 67—69).

В частности, если все константы C_{ij}^s равны нулю, то все коммутаторы равны нулю, а группа называется *абелевой*.

Совокупность преобразований группы G_r, оставляющих неподвижной точку $P(\overset{0}{x}{}^\alpha)$, образует подгруппу H_m группы G_r, называемую *стационарной подгруппой* ([147], стр. 81); по определению, для любого оператора H_m имеет место равенство

$$\xi^\alpha(\overset{0}{x}) = 0. \tag{10.7}$$

Если любые две точки X_n могут быть переведены друг в друга некоторым преобразованием группы G_r, то она называется *транзитивной*. В противном случае группа *нетранзитивна* и расслаивает X_n на совокупность *поверхностей транзитивности*, на каждой из которых группа транзитивна. Так, например, группа вращений обыкновенного R_3 нетранзитивна, а группа переносов транзитивна.

Среди транзитивных групп встречаются такие, для которых можно найти семейство многообразий (содержащих, все вместе, любую точку) такое, что при преобразованиях этой группы одна точка одного многообразия переходит в точку другого и все точки первого многообразия переходят в некоторые точки второго. Так будет, например, для транзитивной группы переносов трехмерного евклидова пространства. Такие транзитивные группы называются *импримитивными*, а многообразия указанных семейств — *семействами импримитивности*. В противном случае группы *примитивны*. Так, группа движений евклидовой плоскости очевидно примитивна.

Группа транзитивна в том и только в том случае, если $r \geqslant n$ и ранг матрицы $(\underset{s}{\xi^\alpha})$ равен n ($\alpha = 1, \ldots, n$; $s = 1, \ldots, r$) ([147], стр. 88). Если $r = n$, то группа называется *просто-транзитивной*, при $r > n$ — *кратно-транзитивной*.

Две группы G_r и $\overset{*}{G}_r$, определяемые конечными уравнениями

$$(\alpha) \quad \overset{*}{x}{}^\alpha = f^\alpha(x^\sigma, a^s), \qquad (\beta) \quad \tilde{x}^\alpha = \tilde{f}^\alpha(\tilde{x}^\sigma, \tilde{a}^s)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, r),$$

называются *подобными*, если существует такая система r независимых функций $\omega^\alpha(a^s)$, что можно указать невырожденное преобразование координат, переводящее (β) в (α), если положить, что $\widetilde{a}^\alpha = \omega^\alpha(a^s)$. Вопрос о подобии групп решает следующая теорема, доказанная Ли (Ли и Энгель [5], стр. 354): две r-параметрические группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных, для которых общие ранги матриц $(\underset{s}{\xi}{}^a)$ и $(\underset{s}{\overset{*}{\xi}}{}^a)$ меньше r, подобны тогда и только тогда, когда эти ранги равны q; любая пара соответствующих миноров порядка q имеет одинаковые ранги, и если

$$\underset{p}{\overset{*}{\xi}}{}^a = \overset{*}{\varphi}{}^h_p \underset{h}{\overset{*}{\xi}}{}^a \qquad (p = q+1, \ldots, n),$$

то система уравнений

$$\overset{*}{\varphi}{}^h_p(\overset{*}{x}) = \varphi^h_p(x)$$

должна быть совместной и не приводить к соотношениям между переменными какой-нибудь группы.

Если же матрицы $(\underset{s}{\xi}{}^a)$ и $(\underset{s}{\overset{*}{\xi}}{}^a)$ имеют ранги, равные r, то две *нетранзитивные* группы от одного числа переменных будут подобны, если их структуры совпадают. Две просто-транзитивные группы одинаковой структуры от одного числа переменных подобны.

Всевозможные линейные комбинации коммутаторов группы (*линейная оболочка коммутаторов*) отвечают подгруппе G_{r_1}, которую назовем *коммутантом* группы G_r. В свою очередь линейная оболочка коммутантов определит коммутант $G_{r_2} \subset G_{r_1}$ и т. д. Продолжая этот процесс, получим:

$$G_r \supset G_{r_1} \supset G_{r_2} \supset \ldots$$

При этом возникает альтернатива: 1) $r > r_1 > r_2 > \ldots$ $\ldots > r_k = 0$, и в этом случае группа называется *разрешимой*; 2) $r > r_1 > \ldots > r_k = r_{k+1} = \ldots > 0$, и тогда получим *неразрешимую* группу.

Далее потребуется рассмотрение непрерывных групп преобразований в римановых пространствах V_n, и притом специального вида — *групп движений, которые оставляют неизменной метрику* V_n; в результате преобразований группы движений составляющие метрического тензора будут теми же функциями от новых независимых переменных:

$$g_{\alpha\beta}(\overset{*}{x}{}^1, \ldots, \overset{*}{x}{}^n)\, d\overset{*}{x}{}^\alpha\, d\overset{*}{x}{}^\beta = g_{\alpha\beta}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^\alpha\, dx^\beta. \quad (10.8)$$

Для того чтобы G_r была группой движения V_n, необходимо и достаточно, чтобы для *каждого* оператора группы выполнялись так называемые *уравнения Киллинга* ([6], стр. 167), для вывода которых удобно воспользоваться понятием *производной Ли*. Пусть задан некоторый объект $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ (валентность индексов в этом вопросе не играет роли, и поэтому они обозначены одной буквой в скобках). Рассмотрим некоторую точку $P(x^\alpha)$ в V_n и значение объекта $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}(x^\alpha)$ в этой точке.

Увлечем теперь систему координат на $v^\alpha\, dt$, т. е. преобразуем систему координат так, чтобы точка

$$x^\alpha + v^\alpha\, dt$$

получила координаты x^α. Тогда точка ξ^α получит координаты

$$\xi^\alpha - v^\alpha\, dt.$$

После этого мы возвратимся к первоначальной системе координат. Если первоначальное значение объекта в точке x^α было $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$, то значение в той же точке в результате увлечения будет

$$\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} - \underset{L}{\delta}\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}.$$

Объект $\underset{L}{\delta}\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ называется, по предложению Ван Данцига, *дифференциалом Ли*. Из определения следует, что дифференциал Ли не зависит от коэффициентов связности пространства и в голономной системе координат в *направлении векторного поля* ξ^α для ковариантных и контравариантных компонент вектора *u* будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \underset{L}{\delta}u^\alpha &= (\xi^\sigma \partial_\sigma u^\alpha - u^\sigma\, \partial_\sigma \xi^\alpha)\, dt, \\ \underset{L}{\delta}u_\alpha &= (\xi^\sigma\, \partial_\sigma u_\alpha + u_\sigma\, \partial_\alpha \xi^\sigma)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (10.9)$$

Отбрасывая множитель dt, получим так называемые *производные Ли*.

Дифференциал Ли для тензоров более высокой валентности вычисляется по тому же правилу для каждого индекса в отдельности, в зависимости от того, будет ли этот индекс ковариантным или контравариантным.

Уравнения Киллинга представляют собой выражение необходимого и достаточного условия того, чтобы сдвиг $\xi^\alpha dt$ в V_n представлял собой движение, т. е. смещение V_n в самом себе, при котором имеет место (10.8). Это означает, что *увлеченное* значение поля $g_{\alpha\beta}$ в точке

$$x^\alpha + \xi^\alpha dt$$

равняется там естественному значению поля тензора $g_{\alpha\beta}(x)$; другими словами, дифференциал Ли от $g_{\alpha\beta}$ при таком сдвиге $\xi^\alpha dt$ равен нулю.

Следовательно, *для того чтобы вектор* ξ^α *определял движение в* V_n, *необходимо и достаточно, чтобы в направлении* ξ^α

$$\underset{L}{\delta} g_{\alpha\beta} = 0, \tag{10.10}$$

что в развернутом виде запишется вследствие (10.9) *так:*

$$\xi^\sigma \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\sigma} \partial_\beta \xi^\sigma + g_{\beta\sigma} \partial_\alpha \xi^\sigma \equiv \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0, \tag{10.11}$$

в этом случае ξ^α *называют вектором Киллинга.*

По смыслу движения и понятия производной Ли заключаем, что при движениях в V_n должна сохраняться и риманова связность:

$$\underset{L}{\delta} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \tag{10.12}$$

что означает

$$\xi^\alpha_{,\beta\gamma} + \xi^\sigma R_{\sigma\gamma}{}^\alpha{}_\beta = 0. \tag{10.13}$$

Так как метрический тензор пространства полностью определяется, если известны компоненты тензора кривизны и его ковариантных производных, то при движениях, определяемых оператором ξ^α, должны иметь место также условия в направлении ξ^α:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0,\\ \underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda_1\,\ldots\,\lambda_p}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \qquad (10.14)$$

Эти уравнения представляют собой условия интегрируемости уравнений Киллинга и дифференциальные следствия из них, получаемые последовательным ковариантным дифференцированием при использовании условий (10.11) и (10.13). Они, конечно, могут быть получены и непосредственно, как серия условий совместности уравнений (10.11) (см., например, [147], стр. 257—259).

Исследование уравнений (10.14) играет решающую роль при определении порядка r группы G_r, допускаемой V_n. Именно как следствие общих теорем о совместности системы дифференциальных уравнений получаем ([147], § 6):

Для того чтобы в V_n *имела место группа движений* G_r, *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы однородных алгебраических уравнений* (10.14) *до номера* k *относительно неизвестных* ξ_α *и* $\xi_{\alpha,\beta}$ *при условии* (10.11) *был равен*

$$\frac{n(n+1)}{2}-r,$$

а добавление новых уравнений из числа (10.14) *с номером* $k+1$ *не меняло этого ранга.*

Всякая классификация V_n по группам движения необходимо связывается со структурами исследуемых групп, т. е., иными словами, со структурными константами для некоторого канонического базиса группы. Зная структуру группы, можно определить наиболее простую голономную систему координат, связанную с этой структурой, и операторы группы относительно этой системы отнесения. После этого определение V_n с данной группой сводится к интегрированию уравнений Киллинга с неизвестными функциями $g_{\alpha\beta}$.

В приложении к пространствам, определяемым полями тяготения, нас будут интересовать только вещественные группы движений и вещественные структуры. Для $r=2$, 3 классификация по вещественным неизоморфным структурам дана Бианки [44], для $r=4$ (за исключением случая G_4, включающей абелеву подгруппу G_3) — Кручковичем ([203], стр. 9; [260], стр. 209), исходившим из классификации неизоморфных структур групп G_4 в комплексной области, данной Ли ([7], § 137). Эта классификация приводит к следующим возможным структурам:

$$r=2$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & [X_1X_2]=0 \text{ — абелева } G_2,\\
\text{II.} & [X_1X_2]=X_1 \text{ — неабелева } G_2.
\end{array}\right\} \tag{10.15}$$

$$r=3$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\text{Разрешимые группы}}\\
\text{I.} & [X_iX_j]=0 & \multicolumn{2}{l}{(i,\ j=1,\ 2,\ 3) \text{ — абелева } G_3,}\\
\text{II.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=0,\\
\text{III.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=0, & [X_3X_1]=-X_1,\\
\text{IV.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1+X_2, & \\
 & & & [X_3X_1]=-X_1,\\
\text{V.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_2, & [X_3X_1]=-X_1,\\
\text{VI.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=qX_2, & [X_3X_1]=-X_1\\
 & & & (q\neq 0 \text{ и } 1),\\
\text{VII.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=-X_1+qX_2, & \\
 & & [X_3X_1]=-X_2 & (q^2<4).\\
\multicolumn{4}{l}{\text{Неразрешимые группы}}\\
\text{VIII.} & [X_1X_2]=X_1, & [X_2X_3]=X_3, & \\
 & & & [X_3X_1]=-2X_2,\\
\text{IX.} & [X_1X_2]=X_3, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=X_2.
\end{array}\right\} \tag{10.16}$$

Число неизоморфных структур над полем комплексных чисел будет меньше (типы VI и VII совпадают так же, как VIII и IX).

$$r = 4$$

Разрешимые G_4, не содержащие абелевой подгруппы G_3

$$\begin{aligned}
&\text{I. } [X_1X_2]=0, \quad [X_2X_3]=X_1, \quad [X_3X_1]=0,\\
&\quad [X_1X_4]=cX_1, \quad [X_2X_4]=X_2, \quad [X_3X_4]=(c-1)\,X_3\\
&\quad (c \text{ — любое вещественное число}),\\
&\text{II. } [X_1X_2]=0, \quad [X_2X_3]=X_1, \quad [X_3X_1]=0,\\
&\quad [X_1X_4]=2X_1, \quad [X_2X_4]=X_2, \quad [X_3X_4]=\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =X_2+X_3,\\
&\text{III. } [X_1X_2]=0, \quad [X_2X_3]=X_1, \quad [X_3X_1]=0,\\
&\quad [X_1X_4]=qX_1, \quad [X_2X_4]=X_3, \quad [X_3X_4]=\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = -X_2+qX_3 \quad (q^2<4),\\
&\text{IV. } [X_1X_2]=0, \quad [X_2X_3]=X_2, \quad [X_3X_1]=0,\\
&\quad [X_1X_4]=X_1, \quad [X_2X_4]=0, \quad [X_3X_4]=0,\\
&\text{V. } [X_1X_2]=0, \quad [X_2X_3]=X_2, \quad [X_3X_1]=-X_1,\\
&\quad [X_1X_4]=X_2, \quad [X_2X_4]=-X_1, \quad [X_3X_4]=0.
\end{aligned} \tag{10.17}$$

Разрешимые группы G_4 с абелевой подгруппой G_3

$$\begin{aligned}
&\text{VI. } [X_iX_j]=0, \quad [X_iX_4]=C_i^kX_k\\
&\qquad\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).
\end{aligned}$$

Неразрешимые группы G_4

$$\begin{aligned}
&\text{VII. } [X_1X_2]=X_1, \quad [X_2X_3]=X_3, \quad [X_3X_1]=-2X_2,\\
&\qquad\qquad [X_iX_4]=0 \qquad (i=1,2,3),\\
&\text{VIII. } [X_1X_2]=X_3, \quad [X_2X_3]=X_1, \quad [X_3X_1]=X_2,\\
&\qquad\qquad [X_iX_4]=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}$$

В комплексной области совпадают следующие структуры: I с III, IV с VIII.

Исследуем структуру VI, не рассмотренную в этой классификации. Применим к операторам абелевой подгруппы G_3 невырожденую вещественную линейную подстановку

$$Y_i = A_i^j X_j, \quad Y_4 = X_4, \quad |A_i^j| \neq 0,$$

тогда $[Y_i Y_j] = 0$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, а

$$[Y_i Y_4] = A_i^j [X_j X_4] = A_i^j C_j^s X_s + C_i^4 X_4 = \overset{*}{C}{}_i^s Y_s + C_i^4 X_4,$$

где $\overset{*}{C}{}_i^k = A_i^j C_j^s \overset{*}{A}{}_s^k$, а $\overset{*}{A}{}_j^k$ — обратное по отношению к A_j^k преобразование. Таким образом,

$$\overset{*}{C} = ACA^{-1}, \quad |A| \neq 0.$$

Рассматривая C_j^i как линейную функцию в трехмерном аффинном пространстве, приходим к задаче приведения C к каноническому виду невырожденным *вещественным* преобразованием. Но для этого случая имеем четыре и только четыре неизоморфных типа (П. А. Широков [91], стр. 187, 201):

$$(1)\ C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2)\ C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$(3)\ C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4)\ C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,$$

где λ_i, α, β — вещественные числа.

Для того чтобы C_j^i, определяемые этими матрицами, и C_i^4 являлись структурными константами, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям Якоби ([147], стр. 35):

$$\left.\begin{aligned} &C_{ab}^l = -C_{ba}^l, \\ &C_{ab}^l C_{lc}^f + C_{bc}^l C_{la}^f + C_{ca}^l C_{lb}^f = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.18)$$

Подчиняя C_j^i этим условиям, получим: *если G_4 содержит абелеву подгруппу G_3, то она имеет одну из следующих* *неизоморфных вещественных структур:*

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{VI}_1.\ [X_iX_j]=0\ (i,\ j=1,\,2,\,3),\ [X_1X_4]=aX_1+bX_4,\\
\qquad [X_2X_4]=cX_2+dX_4,\qquad [X_3X_4]=eX_3+fX_4,\\
\qquad \text{где существенны лишь случаи:}\\
\qquad 1)\ a=b=c=d=e=f=0,\quad 2)\ a=c=e=f=0,\\
\qquad b=d=1,\quad 3)\ a=c=e=0,\quad b=d=f=1,\\
\quad 4)\ c=d=e=f=0,\, a=b=1,\, 5)\ b=d=f=0,\, a=1;\\
\mathrm{VI}_2.\ [X_iX_j]=0\ (i,\,j=1,2,3),\quad [X_1X_4]=kX_1+X_2,\\
\qquad [X_2X_4]=kX_2,\quad [X_3X_4]=\varepsilon X_3,\\
\mathrm{VI}_3.\ [X_iX_j]=0\ (i,\ j=1,2,3),\quad [X_1X_4]=kX_1+X_2,\\
\qquad [X_2X_4]=kX_2+X_3,\quad [X_3X_4]=\varepsilon X_3,\\
\mathrm{VI}_4.\ [X_iX_j]=0\ (i,\ j=1,2,3),\quad [X_1X_4]=kX_1+X_2,\\
\qquad [X_2X_4]=-X_1+kX_2,\quad [X_3X_4]=\varepsilon X_3.
\end{array}\right\}\ (10.19)$$

Здесь ε равно 0 или 1, а k—некоторое вещественное число. Это рассуждение очевидным образом обобщается для любого r.

Задачи

1. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы V_n допускало бесконечно малое движение, состоит в том, чтобы существовала координатная система, в которой все коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ не содержат одной из координат x^γ; в этом случае координатные кривые x^γ представляют собой траектории движения ([147], стр. 252).

2. При движении V_n геодезические переходят в геодезические.

3. Если $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ — векторы Киллинга, то $c^s\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ $(c^s=\mathrm{const})$ также вектор Киллинга.

4. Если V_n допускает нетранзитивную группу G_r движений и некоторая неизотропная гиперповерхность V_{n-1} является гиперповерхностью транзитивности, то тем же свойством обладают гиперповерхности, геодезически параллельные V_{n-1}.

5. Если неизотропные поверхности транзитивности группы движений G_r имеют размерность $n-1$, то они геодезически параллельны.

6. Движения, траектории которых являются геодезическими, называются *параллельным переносом* или *транс-*

ляциями. Необходимое и достаточное условие того, чтобы вектор Киллинга $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ определял параллельный перенос, записывается так: $g_{\alpha\beta}\underset{s}{\xi}^{\alpha}\underset{s}{\xi}^{\beta} = \mathrm{const}$; в этом случае все точки сдвигаются на равные расстояния. Доказать.

7. Векторы группы G_1 движений образуют постоянные углы с любой неизотропной геодезической. Доказать.

8. Бианки сформулировал теорему: траектории двух групп G_1 параллельных переносов пересекаются под постоянным углом ([44], стр. 167). Показать, что это утверждение справедливо только тогда, когда наименьшая содержащая их группа транзитивна (П. А. Широков [105]).

9. Пространство V_n постоянной кривизны допускает G_r с $r = \frac{n(n+1)}{2}$. Всякое V_n с группой движения такого порядка имеет постоянную кривизну.

10. V_2 допускает параллельный перенос тогда и только тогда, когда его кривизна равна нулю.

11. Однородное риманово пространство V_n $(ds^2 > 0)$ не допускает группы подобий более широкой, чем группа движений, за исключением того случая, когда V_n евклидово (Гу Чао-хао [307]).

12. Рассмотрим величины $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, которые, по определению, равны нулю, если содержат два или большее число одинаковых индексов, и равны 1 или -1, в зависимости от того, получается последовательность индексов $i_1 i_2 \ldots i_n$ из натурального ряда $1\ 2 \ldots n$ с помощью четного или нечетного числа транспозиций. Показать: 1) любой определитель $A = |a_j^i|$ (индекс i указывает номер столбца, а j — номер строки; $i, j = 1, \ldots, n$) может быть записан в одном из двух видов $a = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \ldots a_{i_n}^n$; 2) величины $\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ определяют компоненты ковариантного тензора (*дискриминантный тензор*), если $g = |g_{\alpha\beta}|$ — определитель, отвечающий метрическому тензору; контравариантные компоненты этого тензора будут $\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$; 3) дискриминантный тензор ковариантно постоянен.

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

В этой главе будут рассмотрены основные факты, связанные со специальной и общей теорией относительности, приводящие к четырехмерным пространствам Эйнштейна и их обобщениям для любого числа измерений пространства.

§ 11. Основания специальной теории относительности. Преобразования Лоренца

Оставаясь в рамках, определяемых характером этой книги, основы специальной теории относительности дадим здесь в кратком изложении, с упором на математическую сторону вопроса.

Классическая механика, основы которой были заложены в работах Галилея и Ньютона, получившая всеобщее признание, с течением времени, по мере развития физики, перестала удовлетворительным образом объяснять новые факты; прежде всего это относилось к теории света и электромагнетизма.

Из двух теорий света, базирующихся на классической механике, корпускулярной теории Ньютона и волновой — Гюйгенса, зародившихся почти одновременно, в течение почти целого столетия отдавалось предпочтение первой из них.

Затем под давлением экспериментальных фактов (дифракция света) большинство физиков стало склоняться к волновой гипотезе, рассматривавшей свет как *состояние* среды; *носителем* этого состояния было предложено принять особую среду — эфир, наделенную многими необычайными свойствами, остававшимися загадочными.

С другой стороны, теория электромагнитных явлений, описываемая уравнениями Максвелла, подтверждаемая громадным экспериментальным материалом, не была инвариантной с точки зрения классической механики. Для того чтобы построить теорию, отвечающую в большей мере, чем классическая механика, действительному положению вещей, необходимо было исходить из экспериментально установленных фактов. Такими фактами, доведенными экспериментальной проверкой почти до степени очевидности, являются следующие два положения: 1) принципиальная независимость любых явлений в движущейся системе от поступательного движения системы в целом и 2) *скорость света не зависит от движения источника* (и равняется $c \approx 300\,000$ *км/сек*). Положение 1) более точно означает, что существует ∞^3 *равномерно* и *прямолинейно* движущихся друг относительно друга систем отсчета, в которых явления протекают одинаковым образом. Такие системы отсчета будем называть *инерциальными*. Если ограничиваться механическими явлениями, рассматриваемыми в классической механике, то положение 1) совпадает с *принципом относительности Галилея*. Положение 2) можно теперь сформулировать так: *скорость света в пустоте постоянна и равна c в любой инерциальной системе*. Конечно, для *не инерциальных* систем отсчета предположение 2) не имеет места.

В классической механике принцип относительности Галилея выражается в том факте, что формулировка ее законов не меняется при замене одной инерциальной системы другой инерциальной. Эта замена координат для того простейшего случая, когда координаты y и z не меняются, как известно, может быть записана формулами

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{11.1}$$

причем, кроме того, требуется *независимость промежутка времени от системы отсчета*

$$t' = t. \tag{11.2}$$

Преобразования (11.1) и (11.2) называются *галилеевыми*. Для выяснения существа вопроса достаточно рассмотреть этот частный случай движения инерциальных систем друг относительно друга. Если потребовать, чтобы принцип 1) имел место и для электродинамики, то галилеевы преобразования приводят к противоречию.

Таким образом, возникает вопрос о том, как связаны между собой две инерциальные системы при соблюдении предположений 1) и 2). К этому же вопросу можно подойти, потребовав, чтобы уравнения Максвелла при искомых преобразованиях одной инерциальной системы в другую были инвариантными. Однако гипотез 1) и 2) еще недостаточно для однозначного решения вопроса, и требуются некоторые дополнительные предположения для того, чтобы получить эти преобразования, называемые *преобразованиями Лоренца.*

История вопроса такова. Впервые эти формулы были получены Лармором ([12], стр. 167—177), пришедшим к ним при решении вопроса о продольном сокращении тел при движении и изменении масштаба времени. Эта работа осталась незамеченной. Далее следуют две работы Лоренца ([15], §§ 64, 65; [19], стр. 809, 986), в первой из которых он хотя и предполагал еще существование эфира, но сделал ряд ценных замечаний, а во второй получил искомые преобразования как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны, если рассматривать пространство без зарядов. Сокращение тел и здесь понимается как причинно обусловленное явление. В появившихся затем двух работах Пуанкаре ([23], стр. 1504; [25], стр. 129) зополнены формальные пробелы, имевшиеся в работах Лоренца. Названия «преобразования Лоренца» и «группа Лоренца» фигурируют впервые именно в этих работах Пуанкаре. Здесь впервые высказан принцип относительности в качестве всеобщего принципа. Предположение о неизменности перпендикулярных относительно направления движения размеров тел выводится из гипотезы о том, что искомая группа преобразований содержит в качестве подгруппы обычную группу вращений. Пуанкаре сумел построить инвариантную относительно данной группы теорию электрона.

Одновременно с этим появились работы Эйнштейна, содержащие по существу все существенные результаты, полученные в указанных выше исследованиях (см. [24], стр. 89), и глубокий подход к проблеме с новых точек зрения. Он получил эти результаты из 1) и 2), используя, впрочем, и другие предположения («однородность» пространства и т. д.). В работах Эйнштейна специальная теория относительности получила в известной мере завершенную форму. Гипотезы 1) и 2) вводятся как экспериментально обоснованные, что в дальнейшем блестяще оправдалось (С. И. Вавилов [84]).

Что же касается формальной аксиоматики, то этот вопрос продолжает занимать внимание. Так, если положить в основу аксиомы (Игнатовский [29], стр. 972; [31], стр. 779; Франк и Рут [32], стр. 825; Ми [33], стр. 750): 1) искомые преобразования образуют однопараметрическую однородную линейную группу; 2) скорость системы отсчета S относительно S' равна с обратным знаком скорости S' относительно S; 3) сокращения масштаба в S' в смысле S и масштаба S в смысле S' равны, то формулы преобразования получаются с точностью до знака и физического истолкования постоянных.

Каттанео [290] рассматривает систему аксиом, общую для классической и релятивистской кинематики, пользуясь которой, при некоторых дополнительных требованиях, получает или преобразования Галилея, или преобразования Лоренца. Вместо аксиом Каттанео можно выставить другие требования (В. А. Фок [225], стр. 31; А. Д. Александров [190], стр. 103; А. Д. Александров, В. В. Овчинников [191], стр. 95; Мацумото [227], стр. 55—58).

Постановка вопроса о строгом построении специальной теории относительности, развиваемая в работах А. Д. Александрова ([317], стр. 80—83), основывается на следующих основных положениях: 1) пространство-время есть многообразие всех событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, определенной системой отношений предшествования, в отвлечении от всех иных свойств; 2) пространство-время есть четырехмерное многообразие; 3) пространство-время максимально однородно, т. е. группа его преобразований, сохраняющих отношение следования, максимальная из всех возможных; 4) как само многообразие, которое представляет пространство-время, так и преобразования, указанные в 3), являются дифференцируемыми. Получим преобразования Лоренца при следующих предположениях: пусть имеют место гипотезы 1) и 2) и, кроме того, 3) преобразования должны быть линейными, 4) — масштабы в плоскости, перпендикулярной к направлению движения, не меняются, 5) показания двух часов, находящихся в плоскости $O'y'z'$, совпадают относительно системы S.

Пусть система отсчета (состоящая из осей координат с масштабом и часов) фиксирует место и время некоторого события набором чисел $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и $x^4 = t$, а система S соответственно четверкой чисел $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$. Тогда, предполагая, что при $x^4 = t = 0$ системы S и S' совпадают, в силу 3) искомое преобразование можно записать в виде:

$$x^{\alpha'} = c^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Пусть инерциальная система S' движется относительно S с *постоянной* скоростью v так, что оси Ox, $O'x'$ совпадают. Тогда в силу 4)

$$x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3.$$

Из 5) следует, что $x^{1'}$ и $x^{4'}$ не должны зависеть от x^2 и x^3. Таким образом, преобразования должны иметь вид:

$$x^{1'} = \alpha x^1 + \beta x^4, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = \gamma x' + \delta x^4. \qquad (11.3)$$

Предположим, что при $t = x^4 = 0$, когда S и S' совпадают, из общего в этот момент начала излучается световой сигнал, распространяющийся со скоростью c. В силу 2) для такого сигнала за некоторый промежуток времени t в системе отсчета S будем иметь:

$$\sum_1^3 x^{i^2} - c^2 x^{4^2} = 0, \qquad (11.4)$$

а применяя еще и гипотезу 2), получим:

$$\sum_1^3 x^{i'^2} - c^2 x^{4'^2} = 0. \qquad (11.5)$$

Заменяя в (11.5) x^{α} по формулам (11.3), мы должны получить уравнения, эквивалентные (11.4), т. е. в данном случае, может быть, с точностью до множителя. Но так как $x^{2'} = x^2$, $x^{3'} = x^3$, то этот множитель должен быть равен единице. Отсюда следует:

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad \alpha\beta - c^2\gamma\delta = 0, \quad \delta^2 - \frac{\beta^2}{c^2} = 1,$$

т. е.

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi, \quad \beta = c \operatorname{sh}\varphi, \quad \gamma = \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi, \quad \delta = \operatorname{ch}\varphi.$$

Относительно S' описание движения начала координат системы S получим, полагая $x=0$, $y=0$, $z=0$. Это дает

$$x^{1'} = c\,\mathrm{sh}\,\varphi t, \qquad x^{2'} = x^{3'} = 0, \qquad x^{4'} = \mathrm{ch}\,\varphi\, t,$$

и следовательно,

$$\frac{x^{1'}}{x^{4'}} = \frac{x'}{t'} = -v = c\,\mathrm{th}\,\varphi, \qquad \mathrm{th}\varphi = -\frac{v}{c}\,.$$

Ввиду этого (11.3) записываются в виде:

$$x^{1'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x^1 - vx^4), \qquad x^{2'} = x^2,$$

$$x^{3'} = x^3, \qquad x^{4'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{v^2}{c^2}x^1 + x^4\right). \qquad (11.6)$$

Если встать на формальную точку зрения, подготовленную введенными выше обозначениями, то можно говорить о четырехмерном пространстве с координатами x^α $(\alpha = 1, \ldots, 4)$, геометрия которого должна отвечать группе преобразований типа (11.6); отметим, что форма

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{4^2} \qquad (x^4 = ct) \quad (11.7)$$

инвариантна относительно этих преобразований. Если, наоборот, среди (11.3) искать преобразования, оставляющие инвариантной (11.7), то придем к (11.6). Форма (11.7) определяет метрику плоского пространства с сигнатурой типа $(-\,-\,-\,+)$, которое называют *пространством Минковского*, указавшего на удобство такой интерпретации [26].

Пусть даны два плоских пространства R_n и $\overset{*}{R}_n$ одного и того же числа измерений и одинаковой сигнатуры; будем говорить, что эти пространства *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное вещественное отображение точек R_n на точки $\overset{*}{R}_n$, что: 1) если точкам A, B пространства R_n отвечают точки $\overset{*}{A}$, $\overset{*}{B}$ в пространстве $\overset{*}{R}_n$, то вектору AB в R_n отвечает вектор $\overset{*}{A}\overset{*}{B}$ в $\overset{*}{R}_n$; 2) если вектору X^α в R_n отвечает вектор $\overset{*}{X}{}^\alpha$ в $\overset{*}{R}_n$, то вектору

aX^α в R_n отвечает вектор $a\overset{*}{X}{}^\alpha$ в $\overset{*}{R}_n$ (a — число);
3) $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta}\overset{*}{u}{}^\alpha\overset{*}{u}{}^\beta$, если $\overset{*}{u}{}^\alpha$ отвечает u^α.

Если изоморфные R_n и $\overset{*}{R}_n$ совпадают, то будем говорить об *автоморфизме* или *движении* в плоском пространстве. Если вместо 3) потребовать инвариантности (11.7) при отображении, то получим, очевидно, автоморфизм. *Геометрия пространства Минковского есть геометрия группы лоренцевых автоморфизмов.*

Преобразование (11.6) в силу равноправности координат x^1, x^2, x^3 допускает еще два аналога. Кроме того, очевидно, что обычные вращения и переносы (при $x^4 = x^{4'}$) не меняют формы (11.7), как и *сдвиг во времени* $x^{4'} = x^4 + \overset{0}{x}{}^4$. Следовательно, существует группа линейных вещественных преобразований, являющаяся группой автоморфизмов пространства Минковского, зависящая от 10 произвольных параметров; она включает 3 лоренцевых вращения, 3 пространственных вращения и 4 сдвига по осям. Хорошо известно (см. задачу 9 § 10), что число независимых параметров при движениях, 10, является максимальным для любого V_4. При этом мы отвлекаемся от зеркальных отображений вида $x^{\alpha'} = -x^\alpha$, которые также оставляют (11.7) инвариантной и увеличивают число различных преобразований ([188], стр. 208).

Сущность специальной теории относительности заключается в установлении взаимосвязи пространства и времени, формальными выражениями которой будут как формулы (11.6), так и введение четырехмерного пространства Минковского.

Процесс движения некоторой материальной точки можно описать, если для каждого момента времени задать положение этой точки, т. е. задать

$$x^i = x^i(x^4) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{11.8}$$

что в пространстве Минковского определит кривую. В частности, для равномерного и прямолинейного движения функции $x^i(x^4)$ будут *линейными* и, следовательно, определят в четырехмерном пространстве прямые. Если к тому же точка движется со скоростью света c, то форма (11.7) будет тождественно обращаться в нуль и, следовательно, четырехмерной траекторией такой точки будет *изотропная* прямая.

Если представлять себе распространение света в пустом пространстве, как это делается в геометрической оптике, в виде движения частиц, то получим в пространстве Минковского опять-таки изотропные прямые. Световой сигнал в данной точке распространяется по полуобразующим изотропного гиперконуса, имеющего вершиной данную точку. Из (11.6) следует, что скорость материальной частицы не может превышать c и, следовательно, в случае скорости $< c$ четырехмерные траектории материальных частиц будут кривыми, касательные к которым в каждой точке пространства направлены внутрь этого конуса.

§ 12. Уравнения поля релятивистской теории гравитации

Специальная теория относительности установила взаимную связь между пространством и временем — этими формами существования материи, но в ней не рассматривается зависимость геометрии пространства-времени от распределения и движения материи; пространственно-временной континуум предполагается однородным. Такая зависимость, возможность которой предвидел еще Лобачевский (см. [199], стр. 10—18), устанавливается в релятивистской теории тяготения. В этой теории предполагается, что только *локально*, когда можно пренебречь полем тяготения, имеет место геометрия специальной теории относительности, а в области, где этого сделать нельзя, метрика пространства-времени зависит от распределения и движения материи.

Общая теория относительности есть теория зависимости пространства-времени от движения и распределения материи в широком смысле этого слова.

В релятивистской теории тяготения геометрические свойства пространственно-временного континуума не укладываются в рамки геометрии плоского пространства и требуют для своего описания римановой геометрии. Если метрика такого V_4 определяется линейным элементом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \qquad (12.1)$$

то компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x^1, \ldots, x^4)$ зависят от распределения и движения материи.

Ввиду этого $g_{\alpha\beta}(x)$ называют иногда *потенциалами* гравитационного поля.

Основная задача теории поля — определение поля в зависимости от распределения и движения материи — приводит к необходимости получения уравнений поля. Они были получены Эйнштейном в 1915 г. (Эйнштейн [35], стр. 778) в виде:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda T_{\alpha\beta}. \tag{12.2}$$

К этим уравнениям Эйнштейн пришел после длительных поисков, исследуя различные гипотезы. Так, например, еще в 1914 г. он исходил из предположения $R_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}$ ([34], стр. 1030). Одновременно (1915 г.) и независимо от Эйнштейна к уравнениям (12.2) пришел Гильберт ([41], стр. 395), получивший эти уравнения из вариационного принципа. Он, однако, вывел эти уравнения не для произвольной материальной системы, а исходя из теории материи Ми ([33], стр. 512). Этот метод получения основных уравнений поля был затем усовершенствован Клейном ([40], стр. 469; [45], стр. 235), пользовавшимся такими вариациями координат, которые не исчезают на границе интегрирования (со времен Лагранжа это часто делается в классической механике), при этом многие соотношения приобретают более простой вид (Паули [149], стр. 104—107, 285; Ландау и Лифшиц [156], стр. 309—313; Фок [225], стр. 273, 278; Вейль [69], стр. 205—206; Бель [299]).

Кроме уравнений (12.2), метрический тензор для поля тяготения, отвечающего реальному распределению материи, необходимо должен удовлетворять условию, чтобы в каждой точке области пространства-времени невырожденными вещественными линейными преобразованиями он приводился к виду:

$$(g_{\alpha\beta})_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

т. е. чтобы в каждой точке P в касательном пространстве R_4 имела место геометрия Минковского. Левая часть (12.2) целиком определяется геометрией пространства-времени; правая часть содержит постоянную λ и тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, определяемый распределением и движением материи. Таким образом, (12.2) означает, что материя определяет геометрию пространства-времени и, наоборот, движение этих масс определяется метрическим тензором пространства, которое не будет плоским. Условие (12.3) записывает физическое утверждение, согласно которому в бесконечно малой области пространства в течение бесконечно малого промежутка времени имеет место геометрия специальной теории относительности.

Согласие выведенных из уравнений (12.2) следствий с опытом (Т. А. Тихов [102], стр. 7; А. Ф. Богородский [121], стр. 3; С. И. Вавилов [84]) в рамках доступной точности и отсутствие фактов, противоречащих им, говорят о правильности этих уравнений для известных экспериментов и наблюдений.

Основные предположения, из которых исходил Эйнштейн при получении уравнений поля (12.2), можно сформулировать следующим образом: 1) При наличии гравитации геометрия пространства-времени — геометрия V_4. 2) Распределение и движение энергии и импульса описываются симметрическим тензором $T_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, удовлетворяющим *закону сохранения*

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} \equiv 0. \tag{12.4}$$

3) Уравнения поля должны иметь тензорный характер. 4) Они должны быть линейными относительно вторых частных производных от потенциалов $g_{\alpha\beta}(x)$. 5) Тензор энергии-импульса должен определяться геометрией пространства V_4. При соблюдении некоторых граничных условий отсюда однозначно следуют уравнения (12.2). Наоборот, при наличии гипотезы, что уравнения поля тяготения имеют вид (12.2), получим как следствие все эти предпосылки.

Получение (12.2) из вариационного принципа основано на следующих гипотезах: 1) Уравнения поля тяготения должны получаться как результат варьирования суммы действий поля и материи. 2) Варьирование действия поля должно приводить к уравнениям, являющимся уравнениями Эйлера — Лагранжа принципа Гамильтона; таким образом, решается вариационная задача для интеграла, распространенного по четырехмерному объему A:

$$I = \int_A R \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4, \qquad \delta I = 0,$$

где R — скалярная кривизна пространства V_4. 3) Если Ω — некоторая функция от величин q, определяющих систему и их производные по координатам и времени, то действие выражается интегралом

$$S = \int \Omega \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^\alpha} \right) dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \Omega g_{\alpha\beta} - q_{,\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial q^\beta}$$

при условии (12.4). Кроме того, необходимы некоторые другие предположения о граничных условиях.

Гипотеза (12.2) эквивалентна серии таких гипотез, и получение (12.2) из них имеет большое эвристическое значение. Во всяком случае, в большинстве имеющихся в настоящее время вариантов единой теории поля уравнения поля получаются из вариационного принципа.

Что же касается физической значимости (12.2), то она может быть подтверждена только экспериментальным путем.

§ 13. Пространства Эйнштейна

Для свободного пространства там, где тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ обращается в нуль (например, если материя представлена точечными массами, то вне точечных масс), уравнения (12.2) будут иметь вид:

$$R_{\alpha\beta} = 0, \tag{13.1}$$

так как при таком предположении, свертывая по $\alpha\beta$, найдем, что скалярная кривизна пространства $R = 0$. Решения уравнений поля (13.1) являются в известном смысле аналогом решений уравнения Лапласа в классической теории поля: они определяют геометрию пространства-времени в областях, свободных от масс. Этим пространствам посвящено большое количество исследований. Наряду с уравнениями (13.1) можно рассматривать уравнения поля

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}, \tag{13.2}$$

где $\varkappa$ (при $n>2$), как это следует непосредственно из (13.2) и (8.19), будет постоянной величиной. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения поля (12.2) для того случая, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ лишь постоянным множителем отличается от метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Физической моделью такого поля может служить пространство, которое на всем своем протяжении однородно, причем плотность материи постоянна во всем пространстве ([156], стр. 345; [225], стр. 447). Для «островного» распределения материи можно говорить о «внутренней» и «внешней» задачах при интегрировании уравнений поля, и в этом случае (13.1) определяет решения «внешней» задачи.

Независимо от теории тяготения пространства V_n, удовлетворяющие уравнениям (13.2), встречаются во многих вопросах геометрии. В теории групп Ли возникает риманова связность типа (13.2). Почти во всех имеющихся в настоящее время вариантах единых теорий, как правило, возникают пространства V_n такого типа. Ввиду этого *римановы многообразия при условии* (13.2), *при любом* n (*размерность пространства*) *и любой сигнатуре метрики назовем пространствами Эйнштейна* и будем обозначать символом G_n. В том случае, когда $n=4$ и сигнатура G_4 имеет вид $(---+)$, мы будем употреблять символ $\overset{*}{T}$, и, если, кроме того, $\varkappa=0$, т. е. имеют место (13.1), будем употреблять символ T. Таким образом, поле тяготения в свободном пространстве описывается геометрией T.

Вместо (13.2) пространство G_n можно определить иначе. Рассмотрим в V_n некоторую точку P и совокупность направлений, исходящих из P, удовлетворяющих соотношению

$$R_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}=0;$$

главные направления этого конуса второго порядка Риччи предложил называть *главными направлениями* пространства V_n в данной точке. Если, кроме того, в пространстве, касательном к V_n в данной точке, взять поверхность второго порядка с центром в этой точке, уравнение которой имеет вид:

$$(R_{\alpha\beta} - \varkappa g_{\alpha\beta})\,\xi^\alpha \xi^\beta = 1,$$

то главные направления этой поверхности, называемой иногда *индикатрисой Эйнштейна*, будут и главными направлениями Риччи. Тогда уравнения (13.2) эквивалентны требованию, чтобы эти направления были неопределенны, т. е. в каждой точке *индикатриса Эйнштейна должна быть гиперсферой.*

Иную характеристику G_n для случая *определенно-положительной метрики*, интересную тем, что она получается, если приравнять нулю некоторый скаляр, дал Томас ([107], стр. 331—340), который называет этот скаляр «квадратичной» кривизной пространства V_n. Он показал, что *V_n с определенно-положительной метрикой будет G_n^3 тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$nR_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2 = 0. \tag{13.3}$$

Требование определенности метрики здесь существенно и возможность замены $\frac{n(n+1)}{2}$ условий (13.2) одним уравнением объясняется тем, что уравнение вида $\sum a_i^2 = 0$ при вещественных a_i эквивалентно системе $a_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots)$.

Существуют также определения пространств G_n, основанные на понятии кривизны пространства V_n, взятые не в двумерном направлении, а в m-мерном направлении (Картан [98], стр. 199—200; Врона [150], стр. 234).

В случае $n = 4$ имеет место теорема: *если для V_4 имеет место одно из условий:*

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta},\\ &\beta)\ 3g_{[\alpha[\nu}R_{\beta\gamma]\,\lambda\mu]} = 2\varkappa g_{[\lambda[\alpha}\,g_{\mu\beta}\,g_{\nu]\gamma]}, \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

то выполняется и другое.

В условии β) подразумевается двойное альтернирование: одно по $\alpha\beta\gamma$ и другое по $\lambda\mu\nu$. Для доказательства в каждой точке пространства V_4 введем, может быть мнимый, неголономный ортореперер, для которого

$$g^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Для каждого из этих ортореперов α) и β) запишутся двумя эквивалентными, с точностью до линейных комбинаций, системами уравнений относительно компонент тензора кривизны, что и доказывает теорему.

Так как тензор кривизны всякого V_3 полностью определяется через тензор Риччи и метрический тензор (см. задачу 8 § 7):

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta} L_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma} L_{\alpha\delta}, \\ L_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \quad (13.5)$$

то, если к тому же имеет место (13.2), получим для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражение (3.4); таким образом, *если V_3 — пространство Эйнштейна, то оно является пространством постоянной кривизны.*

Для любого n, свертывая (8.4), придем к (13.2), и следовательно, *всякое риманово пространство постоянной кривизны есть пространство Эйнштейна.*

Отметим, что геометрия четырехмерного пространства-времени общей теории относительности допускает интересную интерпретацию в неголономной геометрии Лагерра, что позволяет подойти к исследованию этого многообразия с новой точки зрения [216].

Задачи

1. Всякое V_2 есть G_2.

2. G_n, конформное плоскому пространству, есть S_n (Схоутен и Стройк [55], стр. 214).

3. Проверить, что V_n с определенно-положительной метрикой является G_n тогда и только тогда, когда имеет место (13.3).

4. Для того чтобы в V_n все геодезические гиперсферы были G_{n-1}, необходимо и достаточно, чтобы V_n было S_n (П. А. Широков [72], стр. 53).

5. Назовем инвариант

$$H=\frac{g_{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\lambda}R^{\alpha_1}{}_{\gamma_1\delta_1\lambda_1}u^{\beta\gamma}u^{\delta\lambda}u^{\beta_1\gamma_1}u^{\delta_1\lambda_1}}{(g_{\alpha\gamma\delta\lambda}u^{\alpha\gamma}u^{\delta\lambda})^2}$$

квадратичной кривизной пространства V_n. Здесь $g_{\alpha\gamma\delta\lambda}\equiv\equiv g_{\alpha[\delta}g_{\lambda]\gamma}$ и $u^{\alpha\beta}=\xi^{[\alpha}\eta^{\beta]}$ — *однолистный* бивектор. Если H не зависит от выбора $u^{\alpha\beta}$, то V_n назовем *пространством постоянной квадратичной кривизны*. Показать: 1) величина бивектора $u^{\alpha\beta}$, обнесенного параллельно вдоль границы неособенного элемента поверхности $u^{\alpha\beta}\Delta\sigma$, характеризуется инвариантом H, если ограничиться величинами, не превышающими четвертого порядка малости ($\Delta\sigma=O(\delta^2)$); 2) любое S_n есть пространство постоянной квадратичной кривизны; 3) любое V_3 постоянной квадратичной кривизны есть S_3; 4) любое V_4 постоянной квадратичной кривизны есть G_4 (А. З. Петров [157], стр. 211—214).

6. Пользуясь тождеством Риччи (5.5), показать, что постоянная $\varkappa$ в (13.2) может быть выражена через любое неизотропное векторное поле a^{α}:

$$\varkappa=a^{\sigma}(a^{\tau}_{,\tau\sigma}-a^{\tau}_{,\sigma\tau})/a^{\nu}a_{\nu};$$

при $\varkappa=0$ любое векторное поле с компонентами класса C^2 удовлетворяет уравнению $a^{\tau}_{,\tau\sigma}-a^{\tau}_{,\sigma\tau}=0$ (Нарликар [245], стр. 1138).

§ 14. Некоторые решения уравнений поля тяготения

Изучение полей тяготения T (или $\overset{*}{T}$) приводится к исследованию системы 10 дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с 10 неизвестными функциями $g_{\alpha\beta}(x)$ от четырех независимых переменных x^{α} ($\alpha=1, 2, 3, 4$). Уравнения будут линейными относительно старших производных, коэффициенты при которых будут переменными. За счет специализации системы координат (см. § 7) для любого V_n всегда можно n компонент метрического тензора обратить в наперед заданные функции. Следовательно, систему уравнений поля можно привести к 10 уравнениям от шести неизвестных функций — случай переопределенной системы.

Ввиду сложности вопроса и физических требований к теории тяготения, задача решалась при тех или иных дополнительных ограничениях, позволяющих получить решение в замкнутом виде. Например, исследовались *постоянные* гравитационные поля. Для постоянного поля существует такая система отнесения, относительно которой все величины, в частности метрический тензор, не зависят от *временной* координаты x^4. Примером таких полей могут служить так называемые *статические* поля, для них в системе отсчета, относительно которой $g_{\alpha\beta}$ не зависит от времени (x^4), все тела неподвижны. Тогда, очевидно, оба направления времени равноценны, т. е. все составляющие метрического тензора $g_{\alpha 4} = 0$ $(\alpha \neq 4)$. Все такого рода поля характеризуются тем, что в некоторой системе координат $\partial_4 g_{\alpha\beta} = 0$. Отсюда следует, что постоянные поля определяют геометрию, допускающую ту или иную группу движений порядка $r \geqslant 1$, так как метрика допускает оператор $X = \delta_4^\alpha \partial_\alpha$.

По времени первыми были исследованы *центрально-симметрические* поля тяготения, у которых выражение линейного элемента ds^2 одинаково для всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от центра.

Такое поле может создаваться центрально-симметрическим распределением вещества, причем скорость движения материи в каждой точке направлена по радиусу (центрально-симметрические пульсации). Рассматривались также поля, обладающие *осевой* симметрией.

С момента появления в 1915 г. основной работы Эйнштейна было предложено много частных решений проблемы; некоторые из них обобщали или повторяли результаты, полученные ранее. Последнее объясняется или незнанием литературы, или же тем, что, хотя проблема эквивалентности квадратичных дифференциальных форм давно решена (Кристоффель [2], стр. 60), в конкретных случаях она приводит иногда к громоздким вычислениям.

Рассмотрим в хронологическом порядке известные в литературе многообразия T и $\overset{*}{T}$.

1. Пространство T, найденное Шварцшильдом ([37], стр. 195), исходившим из физических соображений:

$$\left.\begin{aligned} g_{44} = -g_{11}^{-1} = 1 + \frac{c}{x^1}, &\quad g_{22} = -x^{1^2}, \\ g_{33} = -x^{1^2}\sin^2 x^2, &\quad g_{ij} = 0\ (i \neq j), \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

где c — произвольная постоянная. Квадратичная форма в полярной системе координат допускает приведение к ортогональному виду. Такое T соответствует, как это было строго доказано Гильбертом [41] и Биркхоффом [66], наиболее общему центрально-симметрическому распределению масс.

Иными словами, при условии шаровой симметрии членов метрики, не зависящих от времени, всегда, интегрируя (13.1), получим (14.1).

2. Пространство $\overset{*}{T}$, являющееся обобщением решения Шварцшильда, предложенное Коттлером ([46], стр. 401 — 162). В полярной системе координат метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$\left.\begin{aligned} g_{44} = -g_{11}^{-1} = 1 + \frac{a}{3}x^{1^2} + \frac{c}{x^1}, &\quad g_{22} = -x^{1^2}, \\ g_{33} = -x^{1^2}\sin^2 x^2, \quad g_{ij} = 0 &\quad (i \neq j), \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

где a, c — произвольные постоянные. При $a = 0$ получим решение (14.1), при $c = 0$ придем к пространству постоянной кривизны S_4. И (14.1) и (14.2) принадлежат к числу тех V_4, метрика которых в некоторой системе координат имеет вид:

$$ds^2 = g_{11}(x^1)\,dx^{1^2} - x^{1^2}\,dx^{2^2} - x^{1^2}\sin^2 x^2\,dx^{3^2} + g_{44}(x^1)\,dx^{4^2},$$

и непосредственным подсчетом можно убедиться, что уравнения (13.2) для метрики такого вида приводят к (14.2).

3. Вейлю ([42], стр. 117; [56], стр. 112) и Леви-Чивита ([47], стр. 177 — 183, 220 — 230) удалось найти статическое решение, обладающее только осевой симметрией, но не сферической. Это решение, удовлетворяющее уравнениям поля (13.1), определяется следующими компонентами метрического тензора:

$$g_{44} = -g_{11}^{-1} = -g_{22}^{-1} = e^{\mu}, \quad g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \pm j), \tag{14.3}$$

где функции μ и ν зависят только от двух переменных: x^3 и $\varrho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$ — и удовлетворяют системе уравнений поля:

$$f_1 \equiv \frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \mu}{\partial \varrho} + \partial_{33}\mu = 0,$$

$$f_2 \equiv \frac{\partial \nu}{\partial \varrho} - \frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \varrho}\right)^2 - (\partial_3 \mu)^2\right] = 0,$$

$$f_3 \equiv \partial_3 \nu - \varrho \frac{\partial \mu}{\partial \varrho} \partial_3 \mu = 0,$$

$$\partial_3 f_2 - \frac{\partial f_3}{\partial \varrho} = \varrho f_1 \partial_3 \mu.$$

Непосредственно можно убедиться, что первые два из этих уравнений представляют собой результат свертывания тождеств Бианки; задача решалась в предположении, что μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности.

4. Пространство $\overset{*}{T}$, полученное Бахом ([62], стр. 119—134), который исходил из предположения, что метрический тензор определяется матрицей

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \omega & 0 & 0 \\ \omega & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

где функции α, β, γ, δ, ω зависят только от переменных x^3, x^4. Эти решения не являются точными, а, при некоторых дополнительных условиях, ищутся по приближению с ошибками наперед заданного порядка малости. Бах получает, таким образом, три решения в виде полиномов от x^4 и x^3. Это одна из первых попыток искать приближенные решения уравнений поля, получившая развитие в работах Эйнштейна, Инфельда и Фока.

5. Бринкман ([73], стр. 126) в работе о пространствах, конформно-отображаемых на пространства Эйнштейна, доказал теорему: пространство Эйнштейна может быть конформно отображено на другое пространство Эйнштейна

$$g^{\alpha\beta} = e^{2\sigma} \overset{*}{g}{}^{\alpha\beta}$$

при

$$\Delta_1\sigma \equiv g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma \neq 0$$

тогда и только тогда, когда метрика допускает приведение к виду:

$$ds^2 = fg_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta + f^{-1}\,dx^{n^2} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ n-1), \quad (14.4)$$

причем

$$f = \frac{1}{n(n-1)}\,(Rx^{n^2} + 2ax^n + b),$$

где a и b — постоянные, $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^n и метрика $\varphi = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ — метрика $(n-1)$-мерного пространства Эйнштейна. Таким образом, этот результат определяет особый тип n-мерного пространства Эйнштейна. Заметим, что если $n=4$, то форма φ определит S_3, так как каждое трехмерное пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны. Ввиду этого, полагая, что T имеет риманову форму, получим:

$$ds^2 = \frac{f}{\psi^2}\sum_1^3 dx^{i^2} + \frac{1}{f}\,dx^{4^2},$$

где

$$\psi = 1 + \frac{K}{4}\sum_1^3 x^{i^2}, \qquad f = -\varkappa x^{4^2} + ax^4 + b.$$

После этого нетрудно будет убедиться, что T будет S_4.

6. Казнер отыскивал пространства T ([57], стр. 219), исходя из предположения, что метрика допускает приведение к ортогональному виду, а пространство допускает погружение в плоское $(n+k)$-мерное пространство и, кроме того,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i\,dx^{i^2},$$

где f_i зависят от одной переменной или же от двух, но являются многочленами. На этом пути им определены метрики

$$ds^2 = x^{1^{2a_1}}\,dx^{1^2} + x^{1^{2a_2}}\,dx^{2^2} + x^{1^{2a_3}}\,dx^{3^2} + x^{1^{2a_4}}\,dx^{4^2},$$

где постоянные a_i связаны соотношениями

$$-a_1+a_2+a_3+a_4=1, \quad -(a_1+1)^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=0$$

и

$$ds^2=\mathrm{I}(x^1,\ x^2)+\mathrm{II}(x^3,\ x^4),$$

где I и II — *бинарные* дифференциальные формы, т. е. пространство *приводимо*.

7. *Симметрические* римановы многообразия с ковариантно постоянным тензором кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\ \lambda}=0$. Исследование таких пространств приводит к изучению *неприводимых* V_p $(p<n)$, которые играют существенную роль при изучении так называемых *полупростых* групп ([81], стр. 133 — 141). Изучением таких пространств занимались: П. А. Широков ([108], стр. 9 — 27; [72], стр. 111; [204], стр. 71 — 82), Э. Картан ([166], стр. 118 — 149), Б. А. Розенфельд ([169], [158]) и многие другие авторы. Среди таких пространств естественным образом выделяются пространства Эйнштейна. Классификация и определение всех симметрических пространств T будут даны в главе VIII.

8. Миттер ([86], стр. 110 — 114), пользуясь цилиндрическими координатами z, r, θ, t, изучал V_4 при условии (13.1) с метрикой

$$ds^2=-e^{\lambda}\,dz^2-e^{\mu}\,dr^2-r^2\,d\theta^2+e^{\nu}\,dt^2,$$

где λ, μ, ν — некоторые функции от r. Это приводит к отысканию статического решения с симметрией около оси z. Исследованию аналогичных решений (13.1) посвящена также работе [88]. Эти исследования приводят к результатам Вейля и Леви-Чивита.

9. Дельсарт [94] рассматривал пространство T с линейным элементом вида

$$ds^2=\varphi^2\overset{*}{d}s^2+f^2\,d\sigma^2,$$

называя такие пространства «бинарными». Здесь

$$\overset{*}{d}s^2=\overset{*}{d}s^2(u^1,\ \ldots,\ u^p), \quad d\sigma^2=d\sigma^2(v^1,\ \ldots,\ v^q),$$

$$f=f(u^1,\ \ldots,\ u^p), \quad \varphi=\varphi(v^1,\ \ldots,\ v^q), \quad p+q=4,$$

т. е. это *неприводимые*, вообще, пространства. Взяв в качестве точки отправления предположение, что пространство имеет ось симметрии и четырежды ортогональную систему координат, он получает решение в виде

$$ds^2 = \frac{1}{\{\wp(u) - \wp(v)\}^2}\{du^2 - d\gamma^2 + \wp'^2(u)\,dy^2 + \wp'^2(v)\,dz^2\}, \quad (14.5)$$

где $\wp$ — вейерштрассовы эллиптические функции от криволинейных координат. К этому же результату приходит Юнг [143], который, кроме того, исследует вопрос о том, когда дифференциальная форма T_4 допускает приведение к виду:

$$ds^2 = \{p(x^k,\ t)\}^2\,dt^2 + g_{ij}(x^k)\,dx^i\,dx^j, \quad \partial_t p \neq 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

или

$$ds^2 = \{\sigma(x^k,\ t)\}^2\,dt^2 + \{p(x^k,\ t)\}^2\,g_{ij}(x^k)\,dx^i\,dx^j,$$

где предполагается, что форма $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ определенно-отрицательная. Если для первого из этих элементов предположить $\partial_t p = 0$, то придем к решению Дельсарта. Необходимые и достаточные условия возможности приведения линейного элемента к такому виду выражаются автором в виде дифференциальных условий.

10. Шоу ([103], стр. 754—763) исследовал решение (13.1) для *статического* и *изотропного* V_4 в предположении, что

$$ds^2 = u^2\,dt^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

где u и g_{ij} не зависят от t,

$$\partial_{ij}u = \frac{64}{ct^{42}}\left(\partial_i u\,\partial_j u - \frac{1}{3}\Delta_1 u g_{ij}\right), \quad \Delta_1 u = g^{ij}\,\partial_i u\,\partial_j u$$

и $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — метрика трехмерного конформно-евклидова пространства (условия «*изотропности*» пространства по терминологии автора); если $c = 0$, то получается решение Казнера, при $c < 0$ — решение Шварцшильда, а при $c > 0$

$$ds^2 = \mathrm{ctg}^2\left(\frac{x^1}{2}\right)dt^2 - \frac{\sin^4\left(\frac{x^1}{2}\right)}{4K^2 x^{22}}\,[x^{22}\,dx^{12} + dx^{22} + dx^{32}]. \quad (14.6)$$

11. Если T — *приводимое* пространство, т. е. его метрика может быть представлена в виде двух или более квадратичных форм, не имеющих общих переменных и дифференциалов, то эти квадратичные формы, как легко видеть, также определяют пространства G_q $(q < 4)$. Ввиду

этого, оставляя в стороне тривиальный случай S_4, получим только два типа:

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \cos^2\frac{x^1}{a}\,dx^{2^2} - \cos^2\frac{x^4}{a}\,dx^{3^2} + dx^{4^2}, \qquad (14.7)$$

если $K = \frac{1}{a^2} > 0$, где K — гауссова кривизна поверхностей постоянной кривизны, на которые расслаивается V_4, и

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \mathrm{ch}^2\frac{x^1}{a}\,dx^{2^2} - \mathrm{ch}^2\frac{x^4}{a}\,dx^{3^2} + dx^{4^2}, \qquad (14.8)$$

если гауссова кривизна $K = -\frac{1}{a^2} < 0$.

12. Такено показал ([127], стр. 125—136), что симметрично-сферические решения уравнений $R_{\alpha\beta,\,\gamma} = 0$ приводят к решению Шварцшильда или Коттлера.

13. Имеет место также следующая теорема (А. З. Петров [146], стр. 8—12): метрика

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_i(x^n)\,dx^{i^2} + dx^{n^2}$$

определяет пространство Эйнштейна с сигнатурой $(- - \cdots - +)$ при следующем выборе функций g_i: если в (13.2) $\varkappa > 0$, то

$$g_i = -\sin^{\frac{2}{n-1}}(\alpha x^4)\,\mathrm{tg}^{\frac{2\alpha i}{\alpha}}\left(\frac{\alpha x^4}{2}\right), \quad g_n = 1 \quad (i = 1, \ldots, n-1); \qquad (14.9)$$

если $\varkappa < 0$, то

$$g_i = -\sin^{\frac{2}{n-1}}(\beta x^n)\,\mathrm{th}^{\frac{2\beta i}{\beta}}\left(\frac{\beta x^n}{2}\right), \quad g_n = 1; \qquad (14.10)$$

при $\varkappa = 0$ получим или S_n, или

$$g_i = -(x^n)^{c_i}, \quad g_n = 1, \quad \sum c_i = \sum c_i^2 = 1. \qquad (14.11)$$

Если в решениях (14.9), (14.10) $\varkappa = 0$, то постоянные α_i и β_i также обращаются в нуль, а само $\overset{*}{T}_n$ вырождается в плоское пространство. Как особое решение при этом получается при $\varkappa < 0$ пространство Лобачевского. Для этих $\overset{*}{T}_n$ вопрос о группе движений решается теоремой: если $g_i \neq g_j$, пространство допускает лишь тривиальную систему операторов $\xi^i = \text{const}$, $\xi^\mu = 0$, $x_i f = p_i$ $(i < n)$; если же $g_i = g_j$, то для каждой такой пары получаем оператор вращения.

14. Решения (14.11) в иной системе координат получены Нарликаром и Кармаркаром ([144], стр. 69) в виде:

$$ds^2 = dt^2 - \nu^p\,dx^2 - \nu^q\,dy^2 - \nu^r\,dz^2, \qquad \nu = 1 + kt, \tag{14.12}$$

где $k = \text{const}$, а p, q, r — постоянные, связанные соотношениями $p + q + r = 2$, $pq + qr + rp = 0$.

15. При изучении вопроса о погружении пространств Эйнштейна в плоские пространства и пространства постоянной кривизны (Фиалков [109], стр. 30—34) появляются приводимые пространства (см. гл. V).

16. Эйнштейн и Розен ([104], стр. 43—54), отыскивая решение (13.1) для цилиндрических волн, пришли к элементу, допускающему ортогональную систему координат:

$$\left.\begin{aligned} -g_{11} = g_{44} = A, \quad -g_{22} = B, \quad -g_{23} = C, \\ g_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \neq \beta), \quad A,\ B,\ C\ (x^1,\ x^4), \end{aligned}\right\} \tag{14.13}$$

где A, B и C определяются системой дифференциальных уравнений, которая после замены $\alpha = \ln A$, $\beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{B}{C}\right)$, $\gamma = \frac{1}{2}\ln(BC)$ может быть записана в виде:

$$\begin{gathered}
2\partial_{44}\wp + \frac{1}{2}\left[(\partial_4\beta)^2 + 3\,(\partial_4\gamma)^2 + (\delta_1\beta)^2 - (\partial_1\gamma)^2 - \right. \\
\left. - \partial_1\alpha\,\partial_1\gamma - 2\partial_4\alpha\,\partial_1\gamma\right] = 0, \\
2\,(\partial_{11}\alpha - \partial_{44}\gamma) + 2\,(\partial_{11}\gamma - \partial_{44}\alpha) + \left[(\partial_1\beta)^2 + (\partial_1\gamma)^2 - \right. \\
\left. - (\partial_4\beta)^2 - (\partial_4\gamma)^2\right] = 0, \\
\partial_{11}\beta - \partial_{44}\beta + \partial_1\beta\partial_1\gamma - \partial_4\beta\partial_4\gamma = 0, \\
2\partial_{11}\gamma + \frac{1}{2}\left[(\partial_1\beta)^2 + 3\,(\partial_1\gamma)^2 + (\partial_4\beta)^2 - \right. \\
\left. - (\partial_4\gamma)^2 + 2\,(\partial_1\alpha\,\partial_1\gamma - \partial_4\alpha\,\partial_4\gamma)\right] = 0, \\
2\partial_{14}\gamma + \partial_1\beta\partial_4\beta + \partial_1\gamma\,\partial_4\gamma - 2\,(\partial_1\alpha\,\partial_4\gamma + \partial_4\alpha\,\partial_1\gamma) = 0;
\end{gathered}$$

этот результат, полученный из формальных соображений, допускает физическое истолкование.

Гравитационные волны переносят энергию, плотность которой становится источником гравитационного поля; это поле деформирует метрику, благодаря чему гравитационные волны должны рассматриваться в пространстве своеобразной метрики. В 1954 г. Розен рассматривал тот случай, когда

$$A = e^{2(\gamma-\psi)}, \quad B = e^{-2\psi}\varrho^2, \quad C = e^{2\psi},$$

где

$$\psi = \psi(p, t), \quad \gamma = \gamma(\varrho, t)$$

при независимых переменных ϱ, Φ, z, t ([206], стр. 328). К вопросу об определении волновых решений обращается также Такено ([242], стр. 15 — 25), использовавший идею Эйнштейна получения плоских волн, но отбросивший предположение о слабости поля. В полученных при этом решениях для неустранимых преобразованиями координат волн выписанные решения не могут быть вещественными.

17. Изучая статические решения уравнений (13.1), Букдал вводит понятие *взаимных* решений для данного статического. Так, решение, взаимное решению Шварцшильда, имеет вид:

$$ds^2 = -\gamma^2(\gamma^{-1}\,dz^2 + r^2\,dt^2 + r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2) + p^{-1}\,dt^2, \quad (14.14)$$

где $p = 1 - \frac{2m}{r}$. В данном случае можно убедиться (см. гл. IV), что (14.14) лишь тривиальным образом отличается от (14.1).

18. В разное время автором исследовались решения (13.1) различной природы ([157], стр. 87 — 94; [176], стр. 179 — 186; [178], стр. 149 — 152; [181], стр. 27 — 32; [182], стр. 35 — 47; [228]; [243]; [244]; [261]), которые будут приведены ниже.

19. Верма и Рой ([246], стр. 129 — 137) указали следующее решение уравнений (13.2):

$$ds^2 = -A(dx^2 + dy^2 + dr^2) + dt^2, \quad (14.15)$$

где

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{F(t)}{c_1(x^2+y^2+z^2) + p_2x + p_3y + c_4z + c_5},$$

$$c_i = \text{const}, \quad \frac{d}{dz}(F^2) = \frac{1}{3\lambda F^2} + \alpha, \quad \alpha = -4c_1c_5 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2.$$

До сих пор речь шла о решениях в замкнутом виде уравнений поля в свободном пространстве или уравнений (13.2). Если же рассматривать общие уравнения поля, то, кроме неизвестных потенциалов $g_{\alpha\beta}$, необходимо определить еще компоненты тензора энергии-импульса. Система становится *недоопределенной*. Она, как уже отмечалось, нелинейна относительно $g_{\alpha\beta}$. Так как, с другой стороны, существует линейная теория Ньютона, которая с большой степенью точности описывает некоторые гравитационные процессы (например, в небесной механике), то естественно предположить, во-первых, что такая линейная теория должна получаться из теории Эйнштейна как первое, но хорошее приближение и, во-вторых, что *по крайней мере для тех задач, где ньютонова теория дает хорошие результаты* в смысле совпадения с экспериментальной проверкой, гравитационные поля в своем нелинейном уточнении приводят к эффектам второго порядка. Эти соображения являются исходными для метода «линеаризации» уравнений поля, который действительно позволяет получить ньютонову теорию тяготения как приближение уравнений (12.2).

Этот метод развивался в работах Эйнштейна с сотрудниками, с одной стороны [167], и Фоком [111] и Папапетру [238], с другой.

Мы не будем касаться этого круга вопросов, исследованию которых посвящены, например, работы [225], [238].

ГЛАВА III

ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ

Приведенная в § 14 историческая справка приводит к мысли о необходимости общей классификации пространств Эйнштейна. Такая классификация должна иметь *инвариантный* характер. В этой главе применяется метод классификации полей тяготения, основанный на изучении алгебраической структуры тензора кривизны и тензора энергии-импульса.

§ 15. Бивекторные пространства

Классификацию пространств Эйнштейна свяжем с изучением алгебраической структуры тензора кривизны пространства; так как компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождествам (5.8):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \qquad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \qquad (15.1)$$

определяющим *полный* ряд алгебраических тождеств для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то классификация должна основываться на (15.1). *Алгебраическое* изучение тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно проводить в данной точке пространства V_n; в этой точке нас будут интересовать только тензоры специальной природы. Покажем, что совокупность всех таких тензоров допускает отображение на множество всех тензоров некоторого другого пространства, и будем проводить исследование в этом последнем пространстве.

Выделим все тензоры, которые удовлетворяют следующим двум условиям: 1) ковариантная и контравариантная валентности — четные; 2) ковариантные и контравариантные индексы разбиваются на отдельные *пары*, для каждой из которых тензор *кососимметричен*. Примером такого рода тензоров могут служить *бивекторы* (кососимметрические тензоры второго порядка), заданные компонентами $V^{\alpha\beta}$ или $V_{\alpha\beta}$, или же тензор кривизны, если он определен компонентами $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, или $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$, или $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Будем далее такие тензоры называть *битензорами*.

Множество всех такого рода тензорных полей в V_n назовем *бивекторным*, а его представление в данной точке — *локальным бивекторным* множеством. Рассмотрим некоторый тензор, принадлежащий локальному бивекторному множеству, и примем каждую кососимметрическую пару индексов $\alpha\beta$ за один *собирательный* индекс. При этом из двух возможных пар $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ фиксируем одну, например $\alpha\beta$, а компоненты, несущие на себе $\beta\alpha$, отличающиеся от соответствующей компоненты только знаком, не будем принимать во внимание. Все собирательные индексы перенумеруем, и выбор такой нумерации произволен, но число собирательных индексов будет равно $N = \frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим преобразование компоненты $\Pi^{\alpha\beta}$ некоторого бивектора пространства V_n. Оно будет иметь вид:

$$\Pi^{\alpha'\beta'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta'}_{\beta} \Pi^{\alpha\beta} = A^{\alpha'}_{[\alpha} A^{\beta'}_{\beta]} \Pi^{\alpha\beta}$$

или в собирательных индексах

$$\Pi^{a'} = A^{a'}_{a} \Pi^{a}, \tag{15.2}$$

где $a = 1, \ldots, N$,

$$A^{a'}_{a} \longrightarrow A^{\alpha'}_{[\alpha} A^{\beta'}_{\beta]}. \tag{15.3}$$

Таким образом, преобразование бивекторов в V_n имеет вид преобразования векторов в E_N, но при этом допустимы не любые линейные неособенные преобразования, а некоторая подгруппа центроаффинной группы, определяемая условиями (15.3); это является реализацией теоремы, доказанной Гуревичем ([172], стр. 463 — 469).

Совокупность бивекторов пространства V_n в данной точке с контравариантными компонентами определит в собирательных индексах совокупность векторов с контравариантными компонентами, каждый из которых имеет N компонент. Отождествляя эти векторы с точками N-мерного многообразия, можно утверждать, что оно будет *аффинным многообразием* E_N в том и только в том случае, когда в нем имеет место геометрия Клейна с группой:

$$\left.\begin{aligned} \eta^{a'} = A^{a'}_a \eta^a, \quad & \eta^a = A^a_{a'} \eta^{a'}, \\ |A^{a'}_a| \neq 0, \quad & A^a_{b'} A^{b'}_c = \delta^a_c, \end{aligned}\right\} \qquad (15.4)$$

где $A^a_{a'}$ имеют специфический вид, отвечающий (15.3), и, следовательно, E_N, если оно имеется, будет специального вида.

Первые два условия (15.4) следуют непосредственно из (15.2). Третье условие следует из того, что определитель

$$S = |A^{\alpha'}_\beta \cdot A^{\gamma'}_\delta| = |A^{\alpha'}_\alpha|^{2n} \qquad (\alpha,\ \alpha' = 1,\ \ldots,\ n)$$

(В. Ф. Каган [64], стр. 410) и, с другой стороны, за счет перестановки и линейной комбинации строк и столбцов C его можно представить в виде:

$$C = p\,|A^{a'}_a| \qquad (a,\ a' = 1,\ \ldots,\ N),$$

т. е. $|A^{a'}_a| \neq 0$, если $|A^{\alpha'}_\alpha| \neq 0$. Четвертое из условий (15.4) нетрудно проверить, исходя из первых двух. Таким образом, (15.4) имеют место и E_N существует: *всякое локальное бивекторное множество V_n может быть отображено на центроаффинное E_N* $\left(N = \frac{n(n-1)}{2}\right)$. Из определения этого отображения следует, что оно дает *изоморфизм* относительно операций сложения, вычитания, умножения (без свертывания) тензоров. Операция умножения со свертыванием должна быть исключена, так как она может привести к тензорам, не допускающим такого отображения.

Следовательно, с каждой точкой V_n можно связать локальное E_N с группой (15.4); такое E_N будем называть *бивекторным пространством*. Тензор в V_n в данной точке, с указанными выше свойствами, определит в E_N тензор вдвое меньшей валентности.

Теперь можно *метризовать* бивекторное пространство. Пусть в V_n существует поле тензора $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ такого, что

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha\gamma\delta} = -T_{\alpha\beta\delta\gamma};$$

тогда в каждом из пространств E_N, отвечающих той или иной точке той области в V_n, где определено поле этого тензора, можно ввести метрический тензор

$$T_{ab} \longrightarrow T_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

если только $|T_{ab}| \neq 0$. В остальном выбор такого тензора произволен, но представляется наиболее естественным связать метрику, введенную в E_N, с метрикой V_n. Ввиду этого введем метрический тензор

$$g_{ab} \longrightarrow g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}, \qquad (15.5)$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор V_n, а собирательными индексами являются кососимметрические пары

$$\alpha\beta \longrightarrow a, \quad \gamma\delta \longrightarrow b.$$

Тензор g_{ab} $(a,\ b = 1,\ \ldots,\ N)$ *симметрический* и *невырожденный*: $|g_{ab}| \neq 0$; чтобы убедиться в этом, достаточно в данной точке пространства V_n привести $g_{\alpha\beta}$ к диагональному виду и вычислить g_{ab} по формуле (15.5). Если $g_{\alpha\beta}$ — определенно-положительный или определенно-отрицательный тензор, то g_{ab} также будет *определенным*. Для неопределенного $g_{\alpha\beta}$ метрика g_{ab} может быть неопределенной с некоторой сигнатурой, зависящей от сигнатуры $g_{\alpha\beta}$. Вместо знака $\longrightarrow$ в (15.5), обозначающего отображение, можно было бы воспользоваться *связывающими* величинами:

$$g_{ab} = B_a^{\alpha\beta} B_b^{\gamma\delta} (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

где B — связывающие величины, представляющие ковариантный вектор в E_N и контравариантный бивектор в R_n, отвечающий данной точке V_n.

Отметим, что матрица (g_{ab}) по отношению к $(g_{\alpha\beta})$ является так называемой *производной* матрицей. Именно, если встать на ту точку зрения, что в аффинном пространстве операция свертывания $g_{\alpha\beta}V^{\alpha}$ определяет линейную вектор-функцию, которая относит точке V^{α} гиперплоскость, полярно сопряженную относительно гиперквадрики $g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 1$, то некоторый *однолистный* поливектор

$$V^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \equiv V^{\alpha_1}_{[1} \cdots V^{\alpha_p}_{p]},$$

после того как к каждому из векторов V_k, альтернированным произведением которых он является, применим эту вектор-функцию, преобразуется в поливектор

$$V_{\beta_1 \dots \beta_p} = g_{\beta_1 \dots \beta_p \alpha_1 \dots \alpha_p} V^{\alpha_1 \dots \alpha_p},$$

где тензор

$$g_{\beta_1 \dots \beta_p \alpha_1 \dots \alpha_p} = p! g_{[\alpha_1 [\beta_1} g_{\alpha_2 \beta_2} \dots g_{\alpha_p] \beta_p]}$$

определяет *производную* форму. Для $p = 2$ этот тензор совпадает с g_{ab}. После введения тензора g_{ab} в бивекторное аффинное пространство E_N становится *метрическим* пространством R_N.

§ 16. Классификация пространств Эйнштейна

Введенные в § 15 понятия позволяют исследовать алгебраическую структуру тензора кривизны любого риманова пространства (А. З. Петров [171], [207]). Отображая тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства V_n на бивекторное метризованное пространство R_N, получим, имея в виду (15.1), в R_N симметрический тензор R_{ab} ($a, b = 1, \dots, N$), которому можно сопоставить λ-матрицу

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}). \tag{16.1}$$

Приведя эту λ-матрицу к каноническому виду *на вещественном пути* (см. § 9), можно тем самым установить классификацию V_n при заданном n. *Тип* пространства будет определяться *характеристикой* λ-матрицы, и тип пространства сохраняется в той области, где эта характеристика не меняется.

Пусть точке P пространства V_n отвечает λ-матрица (16.1) с системой элементарных делителей

$$\begin{array}{llll} (\lambda - \lambda_1)^{m_1}, & (\lambda - \lambda_2)^{m'_1}, & (\lambda - \lambda_3)^{m''_1}, & \dots, \\ (\lambda - \lambda_1)^{m_2}, & (\lambda - \lambda_2)^{m'_2}, & (\lambda - \lambda_3)^{m''_2}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

тогда этой λ-матрице отвечает *характеристика*

$$[(m_1, m_2, \dots)(m'_1, m'_2, \dots)(m''_1, m''_2, \dots) \dots], \tag{16.2}$$

определяющая тип пространства в той области A, где она не меняется. Инварианты λ_i, *базисы* элементарных делителей, будут в то же время корнями характеристического уравнения

$$|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0. \qquad (16.3)$$

Однако в области A возможно совпадение на некоторых k-мерных многообразиях базисов $\lambda_i(x)$ элементарных делителей. Эти многообразия *k-поверхности* будут записываться уравнениями вида

$$\lambda_i(x) - \lambda_j(x) = 0.$$

Так, если взять гиперповерхность, определяемую уравнением

$$\lambda_1(x) - \lambda_2(x) = 0,$$

и предположить, что она принадлежит области A, где вообще $\lambda_1 \not\equiv \lambda_2$ и элементарные делители имеют вид $(\lambda - \lambda_1)^p$, $(\lambda - \lambda_2)^q$, то характеристика в A будет иметь вид $[p, q, \ldots]$, а на указанной гиперповерхности $[(p, q) \ldots]$; будем говорить, что такое совпадение *не меняет типа* V_n в данной области. При определении типа λ-матрицы пространства V_n тензор R_{ab} ограничен условиями (15.1) и только ими.

Предположим, что V_n является пространством Эйнштейна; тогда, кроме (15.1), необходимо еще учесть соотношения

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}. \qquad (16.4)$$

Введем в данной точке пространства V_n ортогональный неголономный репер $\underset{\sigma}{\xi}{}^{\alpha}$ (σ, $\alpha = 1, 2, 3, 4$) такой, что

$$(g_{\alpha\alpha})_P = e_\alpha = \pm 1, \quad (g_{\alpha\beta})_P = 0 \qquad (\alpha \neq \beta), \qquad (16.5)$$

где e_α определяется сигнатурой формы $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$. Тогда

$$g_{aa} = e_\alpha e_\beta, \quad g_{ab} = 0 \qquad (a, b = 1, \ldots, N;\ a \neq b), \qquad (16.6)$$

а тензор кривизны отобразится на симметрический тензор R_{ab}, которому в точке P пространства G_n отвечает тензор кривизны, *ортогональные* компоненты которого будут связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0, \\ &\sum_\sigma e_\sigma R_{\sigma\alpha\sigma\alpha} = \varkappa e_\alpha, \quad \sum_\sigma e_\sigma R_{\sigma\alpha\sigma\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (16.7)$$

Записывая (16.7) в собирательных индексах, получим *полный ряд* алгебраических условий, накладываемых на R_{ab} в R_N, после чего тип пространства будет определен характеристикой λ-матрицы (16.3). Число возможных типов V_n с возрастанием n быстро возрастает и зависит от возможных сигнатур метрики, т. е. от выбора e_α. Далее будет дана подробная классификация для $n = 4$ — случай, наиболее интересный в физических приложениях.

Проиллюстрируем введенные выше понятия на простом примере пространств постоянной кривизны S_n. Если V_n есть S_n, то

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \qquad (16.8)$$

и, следовательно, λ-матрица будет иметь вид:

$$((K - \lambda)\, g_{ab}).$$

Вводя в точке P орторепер (16.5), приведем эту матрицу к диагональному виду, и поэтому все элементарные делители будут *простыми* (в первой степени) с базисами, равными K, и характеристикой $[(1, \ldots, 1)]$. Наоборот, если характеристика имеет такой вид, то (см. § 9)

$$g_{ab} = \sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_a \underset{\sigma}{\xi}_b, \quad R_{ab} = \sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\lambda} \underset{\sigma}{\xi}_a \underset{\sigma}{\xi}_b = K g_{ab} \qquad (\underset{\sigma}{\lambda} = K),$$

т. е. имеет место (16.8) и (при $n > 2$) пространство имеет постоянную риманову кривизну. Таким образом, *V_n при $n > 2$ будет S_n тогда и только тогда, когда характеристика λ-матрицы* (16.1) *имеет вид* $[(1, \ldots, 1)]$. В частности, V_n — плоское пространство, если базисы элементарных делителей равны нулю.

Задача

1. Если число элементарных делителей λ-матрицы равно p, а ранг матрицы (R_{ab}) равен r, то $r \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - p$ [261].

§ 17. Стационарные кривизны

Базисы элементарных делителей λ_i λ-матрицы для любого V_n допускают простое геометрическое истолкование ([261], стр. 36—40).

Рассмотрим риманову кривизну пространства V_n в двумерном направлении, определяемом простым (однолистным) бивектором $V^{\alpha\beta} = \underset{[1}{V^{\alpha}}\underset{2]}{V^{\beta}}$:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}V^{\alpha\beta}V^{\gamma\delta}}{g_{\alpha\beta\gamma\delta}V^{\alpha\beta}V^{\gamma\delta}}, \tag{17.1}$$

где $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет вид (15.5). Будем понимать инвариант K в (17.1) в обобщенном смысле, именно предположим, что требование *простоты бивектора* $V^{\alpha\beta}$ *снимается*. Инвариант K, определяемый (17.1), при таком предположении назовем *бивекторной кривизной* V_n *в направлении данного бивектора*. Отображая на бивекторное пространство R_N, получим:

$$K = \frac{R_{ab}V^{a}V^{b}}{g_{ab}V^{a}V^{b}} \qquad (a,\ b = 1,\ \ldots,\ N). \tag{17.2}$$

Поставим себе задачей определить критические значения K, если рассматривать этот инвариант как однородную функцию нулевого измерения от V^a, что равносильно нахождению тех векторов V^a, для которых K принимает критические значения. Условимся критические значения K называть *стационарными кривизнами* пространства V^n в данной точке, а векторы V^a, отвечающие критическим значениям K, — *стационарными векторами* R_N (или *стационарными непростыми бивекторами* в V_n в данной точке). Если, в частности, некоторой стационарной кривизне отвечает вектор V^a, определяющий в V_n простой бивектор $V^{\alpha\beta}$, то эта стационарная кривизна совпадает с римановой кривизной V_n в двумерном направлении $V^{\alpha\beta}$.

В зависимости от того, будем ли мы требовать простоты бивектора или нет, получим две различные задачи. Если понимать K в смысле Римана, то придем к задаче определения *условно-стационарных направлений*. Если же иметь в виду *бивекторную* кривизну, то вопрос приводится к определению *безусловно-стационарных* V^a, и в этом случае необходимые и достаточные условия стационарности V^a выражаются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial V^a} K = 0. \tag{17.3}$$

Таким образом, предполагается, что K — *непрерывно дифференцируемая* функция V^a. Необходимо иметь в виду, что при *неопределенной* метрике пространства V_n возможно появление *изотропных* стационарных направлений

$$g_{ab} V^a V^b = 0. \tag{17.4}$$

Мы исключим сначала этот случай из рассмотрения с тем, чтобы вернуться к нему ниже. Выполняя в (17.3) дифференцирование для K, определенного выражением (17.2), получим:

$$(R_{ab} - K g_{ab}) V^b = 0, \tag{17.5}$$

т. е. приходим к уравнениям, определяющим собственные направления тензора R_{ab} в R_N. Стационарные кривизны при этом совпадают с характеристическими числами уравнения (16.3), т. е. λ суть *стационарные кривизны* V_n. Если $n > 3$, то стационарному направлению в V_n будет отвечать, вообще, непростой бивектор.

Предположим теперь, что имеет место (17.4). Нас интересуют только те направления V^a, для которых K меняется непрерывно, и следовательно, если имеет место (17.4), необходимо, чтобы

$$R_{ab} V^a V^b = 0 \tag{17.6}$$

для *изотропного* стационарного V^a.

Тогда, имея в виду непрерывную дифференцируемость K по V^a, значение K для изотропного стационарного направления можно вычислить, исходя из соотношения

$$K(V^a) = \lim_{dV^a \to 0} K(V^a + dV^a).$$

Обозначая

$$\varphi = g_{ab} V^a V^b, \quad \psi = R_{ab} V^a V^b,$$

получим:

$$K(V^a)=\lim_{dV^a\to 0}\frac{\psi(V^a+dV^a)-\psi(V^a)}{\varphi(V^a+dV^a)-\varphi(V^a)}=\lim\frac{\left(\sum\frac{\partial}{\partial V^c}\psi\right)dV^c+\ldots}{\left(\sum\frac{\partial}{\partial V^c}\varphi\right)dV^c+\ldots}.$$

Так как этот предел не может зависеть от способа изменения dV^c, то

$$K(V^a)=\frac{\frac{\partial}{\partial V^c}\psi}{\frac{\partial}{\partial V^c}\varphi}=\frac{R_{cb}V^b}{g_{cb}V^b}\qquad (b,\ c=1,\ \ldots,\ N),$$

т. е. снова приходим к (17.5): изотропный стационарный бивектор также определяет направление R_{ab}, а соответствующая стационарная кривизна совпадает с базисом *непростого* элементарного делителя (см. § 9). Таким образом, *стационарные направления V_n совпадают с главными направлениями R_{ab} в R_N, а стационарные кривизны — с базисами элементарных делителей, и следовательно, число их $\leqslant N=\frac{n(n-1)}{2}$*. При неопределенной метрике V_n стационарные кривизны будут, вообще говоря, *комплексными*, так же как и отвечающие им стационарные бивекторы в V_n.

§ 18. Классификация пространств Эйнштейна в случае $n=4$

Для четырехмерных пространств Эйнштейна над полем вещественных чисел могут иметь место три принципиально различных типа сигнатур (с точностью до умножения ds^2 на -1):

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha) & ++++,\\ (\beta) & ---+,\\ (\gamma) & --++.\end{array}\right\}\qquad (18.1)$$

Рассмотрим каждую из этих трех возможностей. Если имеет место случай (α) — *определенно-положительной метрики*, то можно в данной точке ввести такой неголономный ортогональный репер, относительно которого $g_{\alpha\alpha}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ и, следовательно,

$$g_{aa}=1,\quad g_{ab}=0\qquad (a,\ b\neq).$$

Тогда (см. § 9) λ-матрица имеет только простые элементарные делители с вещественными стационарными кривизнами; характеристика должна иметь вид $[1\,1\,1,\ 1\,1\,1]$. Таким образом, *в случае сигнатуры* $(+ + + +)$ *существует один тип пространств Эйнштейна.*

Переходим к рассмотрению (β) — сигнатуры *пространства Минковского.* В этом случае в каждой точке пространства T (или $\overset{*}{T}$), определяемого полем тяготения, можно ввести *вещественный* неголономный орторепер, относительно которого

$$(g_{\alpha\beta})_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (18.2)$$

Тогда относительно орторепера (18.2) в бивекторном пространстве R_6 получим в силу (15.5)

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (18.3)$$

т. е. g_{ab} определяет неопределенную метрику. Мы раз и навсегда для $n=4$ вводим следующую *нумерацию собирательных индексов* в R_6:

$$14 \to 1,\ 24 \to 2,\ 34 \to 3,\ 23 \to 4,\ 31 \to 5,\ 12 \to 6. \quad (18.4)$$

Покажем, что имеет место теорема: *матрица* (R_{ab}) *для орторепера* (18.2) *будет симметрично-сдвоенной.*

Так как для орторепера (18.2) контравариантные компоненты метрического тензора совпадают с ковариантными, то, записывая уравнения поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, получаем две группы уравнений:

$$\text{(I)} \quad \sum_\sigma e_\sigma R_{\alpha\sigma\beta\sigma} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$\text{(II)} \quad \sum_\sigma e_\sigma R_{\alpha\sigma\alpha\sigma} = \varkappa e_\alpha, \qquad e_\alpha = \pm 1.$$

Полагая для уравнений (I) $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ и записывая в собирательных индексах (18.4), получим:

$$R_{12} + R_{45} = R_{13} + R_{46} = R_{23} + R_{56} = R_{15} - R_{24} = \\ = R_{16} - R_{34} = R_{26} - R_{35} = 0. \quad (18.5)$$

Система (II) *в собирательных индексах* запишется:

$$R_{11} + R_{44} = R_{22} + R_{55} = R_{33} + R_{66} = 0, \\ R_{11} + R_{22} + R_{33} = -\varkappa. \quad (18.6)$$

Кроме того, нужно учесть тождество $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$, которым завершаются *все ограничения*, накладываемые на тензор R_{ab}; это дает еще в *собирательных индексах*

$$R_{14} + R_{25} + R_{36} = 0. \quad (18.7)$$

Поэтому, если ввести обозначения:

$$R_{ab} = m_{ab}, \quad R_{a,\,b+3} = n_{ab}, \quad a,\ b \leqslant 3, \quad (18.8)$$

то из (18.5) и (18.7) следует:

$$(R_{ab}) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline N & -M \end{array}\right), \quad (18.9)$$

где M и N — две *симметрические* квадратные матрицы третьего порядка :

$$M = (m_{ab}), \quad N = (n_{ab}), \quad m_{ab} = m_{ba}, \quad n_{ab} = n_{ba} \quad (18.10) \\ (a,\ b = 1,\ 2,\ 3).$$

При этом имеют место соотношения

$$\sum_{s=1}^{3} m_{ss} = -\varkappa, \qquad \sum_{s=1}^{3} n_{ss} = 0; \quad (18.11)$$

это доказывает теорему. Заметим, что к симметрично-сдвоенным матрицам, при *дополнительном*, однако, *условии их ортогональности*, пришел Каган ([79], стр. 1—24) при изучении группы лоренцевых преобразований. Изучением такого рода матриц, при том же предположении об ортогональности, занимались также Дубнов ([82], стр. 33—54) и Лопшиц ([85], стр. 186—187).

Дифференцируя уравнения (13.2) k раз ковариантно получим:

$$R_{\alpha\beta,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}=0.$$

После этого, вводя, как и выше, собирательные индексы в орторепере (18.2) (для кососимметрических пар, стоящих *до запятой*), можно повторить все рассуждения с той лишь разницей, что $\varkappa$ нужно положить равной нулю, а компоненты m_{ab} и n_{ab} придется снабдить сложными указателями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Следовательно, *матрица* $(R_{ab,\ \lambda_1\ldots\lambda_k})$ *для любой фиксированной комбинации индексов* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 1, 2, 3, 4)$ *относительно орторепера* (18.2) *будет симметрично-сдвоенной:*

$$(R_{ab,\ \lambda_1\ldots\lambda_k})=\left(\begin{array}{c|c} M_{,\lambda_1\ldots\lambda_k} & N_{,\lambda_1\ldots\lambda_k}\\ \hline N_{,\lambda_1\ldots\lambda_k} & -M_{,\lambda_1\ldots\lambda_k}\end{array}\right), \tag{18.12}$$

где

$$\sum_{a=1}^{3} m_{aa,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}=\sum_{a=1}^{3} n_{aa,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}=0 \tag{18.13}$$

и

$$m_{ab,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}=m_{ba,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}, \qquad n_{ab,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}=n_{ba,\ \lambda_1\ldots\lambda_k}$$

$$(a,\ b=1,\ldots,6;\ \lambda_i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i=1,\ 2,\ldots).$$

Теперь можно доказать основную теорему, решающую вопрос об общей классификации четырехмерных пространств Эйнштейна с сигнатурой $(---+)$ в смысле алгебраической структуры тензора кривизны.

Теорема. *Существует три и только три типа пространств, определяемых полями тяготения* $(R_{\alpha\beta}=$ $=\varkappa g_{\alpha\beta})$ *с сигнатурой* $(---+)$.

Так как для (18.2) (g_{ab}) можно записать

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix},$$

где ε — трехмерная единичная матрица, то λ-матрицу можно записать в виде:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=\left(\begin{array}{c|c} M+\lambda\varepsilon & N \\ \hline N & -M-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Воспользуемся так называемыми *элементарными преобразованиями*, не меняющими элементарных делителей и характеристики λ-матриц ([91], стр. 34). Прибавляя к матрицам, принадлежащим к первому столбцу, матрицы второго столбца, умноженные на i, получим:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & N \\ \hline -i\,(M+iN+\lambda\varepsilon) & -M-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Прибавляя к матрицам второй строки соответственные матрицы первой строки, также умноженные на i, приведем матрицу к виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & N \\ \hline 0 & -M+iN-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Умножая матрицы первого столбца на $i/2$ и прибавляя к соответствующим матрицам второго столбца и затем проделывая то же самое со строками, получим следующую матрицу, эквивалентную с точностью до элементарных преобразований исходной λ-матрице:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & 0 \\ \hline 0 & M-iN+\lambda\varepsilon \end{array}\right)\equiv\begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{Q}(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (18.14)$$

Задача свелась к исследованию двух трехмерных λ-матриц $Q(\lambda)$ и $\overline{Q}(\lambda)$, соответствующие элементы которых комплексно сопряжены. Отсюда следует, что и элементарные делители этих матриц также комплексно сопряжены, и, следовательно, их характеристики имеют одинаковый вид. Таким образом, характеристика нашей λ-матрицы распадается на две *повторяющие друг друга части*.

Трехмерная матрица $Q(\lambda)$ может иметь только один из трех возможных типов характеристик: 1°. [1 1 1], 2°. [2 1], 3°. [3]; мы при этом оставляем в стороне случаи, когда некоторые из элементарных делителей имеют одинаковый базис и, следовательно, некоторые из чисел, стоящих в квадратных скобках, придется заключить в круглые скобки (например, [(1 1) 1], [(2 1)] и т. д.), так как это будут возможные частные случаи. Матрица $\overline{Q}(\lambda)$ имеет соответственно те же характеристики. Тогда исходная λ-матрица может иметь только одну из следующих характеристик:

$$1^\circ.\ [1\,1\,1,\ \overline{1\,1\,1}],\qquad 2^\circ.\ [2\,1,\ \overline{2\,1}],\qquad 3^\circ.\ [3,\ 3].$$

Черта над второй половиной характеристики означает, что тут имеют место элементарные делители с базисами, комплексно-сопряженными базисам элементарных делителей, отвечающих первой половине характеристики. Для третьего типа черта отсутствует, так как в этом случае элементарные делители всегда имеют вещественные базисы, как это будет показано в следующем параграфе. В следующей главе будут даны примеры пространств каждого из этих трех типов, так что ни один из этих типов не является пустым множеством. Это доказывает теорему, полученную автором в 1949 г., с предварительной публикацией в 1950 г. [171], [176], [178]. В 1954 г. автором был дан второй вариант доказательства, воспроизведенный выше [207], и одновременно третий — Норденом [208], исходившим из исследуемых им бипланарных пространств. В 1957 г. четвертый вариант доказательства (при $\varkappa = 0$) был дан Жеэньо ([262], стр. 723 — 724). Физические применения этой теоремы даны Пирани [258] и другими авторами [308], [321], [322], [324].

Будем везде далее пространства T (когда $R_{\alpha\beta} = 0$) и $\overset{*}{T}$ (когда $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$) снабжать индексом, обозначающим тип этого пространства: $\overset{*}{T}_i$, T_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Переходим к рассмотрению случая (γ) — с сигнатурой метрики типа $(-\,-\,+\,+)$.

Для метрики с такой сигнатурой матрицу $(g_{\alpha\beta})$ в точке можно задать в виде:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (g^{\alpha\beta}). \tag{18.15}$$

и, следовательно,

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (18.16)$$

Записывая для метрики (18.15) относительного этого неголономного орторепера уравнения $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, получим для матрицы (R_{ab}), при обозначениях (18.8), выражение

$$(R_{ab})=\left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & n_{21} & n_{22} & n_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -n_{31} & -n_{32} & n_{33}\\ \hline n_{11} & n_{12} & -n_{13} & m_{11} & m_{12} & -m_{13}\\ n_{21} & n_{22} & -n_{23} & m_{21} & m_{22} & -m_{23}\\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & -m_{31} & -m_{32} & m_{33} \end{array}\right), \qquad (18.17)$$

где

$$m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}, \quad n_{\alpha\beta}=n_{\beta\alpha},$$

причем

$$\left.\begin{aligned} -m_{11}-m_{22}+m_{33}&=\varkappa,\\ n_{11}+n_{22}+n_{33}&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.18)$$

Следовательно, λ-матрица, определяющая структуру пространства, в силу (18.16) запишется:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} m_{11}+\lambda & m_{12} & m_{13} & n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ m_{21} & m_{22}+\lambda & m_{23} & n_{21} & n_{22} & n_{23}\\ m_{31} & m_{32} & m_{33}-\lambda & -n_{31} & -n_{32} & n_{33}\\ \hline n_{11} & n_{12} & -n_{13} & m_{11}+\lambda & m_{12} & -m_{13}\\ n_{21} & n_{22} & -n_{23} & m_{21} & m_{22}+\lambda & -m_{23}\\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & -m_{31} & -m_{32} & m_{23}-\lambda \end{array}\right). \qquad (18.19)$$

Проделаем над этой λ-матрицей *последовательно* следующие операции: 1) умножим первые три столбца на число e и прибавим к соответствующим трем последним столбцам, 2) умножим первые три строки на число e и прибавим к трем последним соответствующим строкам, 3) прибавим три последние строки, умноженные на $\frac{e}{2}$, к трем соответствующим первым строкам, 4) прибавим три первые столбца, умноженные на $-\frac{e}{2}$, к трем последним, 5) разделим строки и столбцы на численные множители, по величине отличные от нуля. Тогда, *если потребовать, чтобы*

$$e^2 = 1,$$

и рассматривать так называемые *двойные* числа $a + eb$ (Б. А. Розенфельд [229], стр. 441—444), где a и b — вещественные числа, то

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}) \approx \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{P}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} m_{11} + en_{11} + \lambda & m_{12} + en_{12} & m_{13} - en_{13} \\ m_{21} + en_{21} & m_{22} + en_{22} + \lambda & m_{23} - en_{23} \\ m_{31} - en_{31} & m_{32} - en_{32} & m_{33} - en_{33} - \lambda \end{pmatrix},$$

причем

$$m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}, \quad n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha},$$

а $\overline{P}(\lambda)$ — *двойственно-сопряженная* матрица, т. е. получающаяся от замены во всех элементах $P(x)$ e на $-e$. Особенностью алгебры двойных чисел является то, что в ней имеются элементы, отличные от нуля, «модуль» которых $z\overline{z} = 0$; они не имеют обратных элементов и являются *делителями нуля*. Двойные числа впервые рассматривались Клиффордом ([65], стр. 203—221) и систематически применялись в геометрии А. П. Котельниковым [8], [11].

Алгебра двойных чисел, за исключением (18.19), строится аналогично алгебре комплексных чисел. В частности, если имеется рациональная функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то $f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k) = \bar{f}(z_1, z_2, \ldots, z_k)$. Следовательно, элементарные делители (скалярные кривизны) $P(\lambda)$ и $\bar{P}(\lambda)$ двойственно сопряжены, а их характеристики в силу этого совпадают. Таким образом, имеет место теорема: *существует, в смысле структуры тензора кривизны, три и только три типа пространств Эйнштейна с сигнатурой формы* $(-\,-\,+\,+)$, *которые определяются характеристиками* λ-*матрицы* $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$:

$$1^\circ.\ [1\,1\,1,\ \overline{1\,1\,1}],\quad 2^\circ.\ [2\,1,\ \overline{2\,1}],\quad 3^\circ.\ [3,\ 3].$$

Для четырехмерных пространств Эйнштейна с сигнатурами $(-\,-\,-\,+)$ и $(-\,-\,+\,+)$ имеем аналогию в смысле числа различных типов, но, в то время как для сигнатуры Минковского λ-матрица отображается с помощью (18.14) на *трехмерное метрическое комплексное пространство*, для второй сигнатуры имеем отображение на *трехмерное метрическое пространство двойных чисел*.

Над полем комплексных чисел матрица (18.19) не будет симметрично-сдвоенной.

§ 19. Канонический вид матриц (R_{ab}) для пространств T_i и $\overset{*}{T}_i$

Так как число независимых компонент тензора кривизны пространства V_n равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, то для $n = 4$ получим 20 существенных компонент. Десять уравнений поля для пространств $\overset{*}{T}_i$ снижают это число до 10. Однако в нашем распоряжении остаются еще шесть произвольных параметров, определяющих шесть степеней свободы в выборе ортореперов. Геометрически эти параметры могут быть истолкованы как три пространственных и три лоренцевых вращения, допустимых при выборе ортореперa. Таким образом, *в каждой точке пространства* $\overset{*}{T}$ *тензор кривизны полностью определяется заданием не более чем четырех параметров* (не считая параметра $\varkappa$ для пространств $\overset{*}{T}$). Зависимость компонент от этих параметров нужно поставить в связь с типом пространства. Будем исследовать пространства $\overset{*}{T}_i$, так как для T_i результат получим, полагая $\varkappa = 0$.

1. *Пространства* $\overset{*}{T}_1$ *с характеристикой* $[1\,1\,1,\ \overline{1\,1\,1}]$. Так как в этом случае характеристика простого типа, то тензор R_{ab} $(a,\ b = 1,\ \ldots,\ 6)$ в бивекторном пространстве имеет шесть неизотропных взаимно ортогональных направлений (см. § 9). Эти направления R_6 в данной точке $\overset{*}{T}_1$ определяют бивекторы специфического строения.

Обозначим компоненты вещественного орторепера в точке $\overset{*}{T}_1$ через $\underset{\alpha}{\xi^\sigma}$ $(\alpha,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, а *простые* бивекторы $\underset{[\alpha}{\xi^\sigma}\underset{\beta]}{\xi^i}$, определяющие двумерные плоскости, образуемые координатными векторами этого неголономного орторепера, будем обозначать $\underset{\alpha\beta}{\xi^{\sigma\tau}}$. В R_6 эти *простые* бивекторы определят шесть независимых вещественных неизотропных взаимно ортогональных координатных векторов $\underset{c}{\xi^a} = \delta^a_c$, и любой вектор R_6 (в частности, и собственные векторы R_{ab}) может быть разложен по векторам $\underset{c}{\xi^a}$. Покажем, что в качестве собственных векторов (они определяются однозначно только в том случае, если корни уравнения $|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0$ различны) можно взять векторы вида

$$w^a = \sigma(\underset{1}{\xi^a} \pm i\underset{4}{\xi^a}) + \mu(\underset{2}{\xi^a} \pm i\underset{5}{\xi^a}) + \nu(\underset{3}{\xi^a} \pm i\underset{6}{\xi^a}) \qquad (a = 1, \ldots, 6). \tag{19.1}$$

В самом деле, условие того, что w^a является собственным вектором R_{ab}, запишется так:

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab})\, w^b = 0. \tag{19.2}$$

Но эта система шести уравнений в силу симметричной сдвоенности λ-матрицы сводится к трем уравнениям, как это следует из (18.8) и (18.9):

$$\sigma(m_{a1} \pm in_{a1} + \lambda\delta_{a1}) + \mu(m_{a2} \pm in_{a2} + \lambda\delta_{a2}) + \\ + \nu(m_{a3} \pm in_{a3} + \lambda\delta_{a3}) = 0 \qquad (a = 1,\ 2,\ 3).$$

Для того чтобы σ, μ, ν были ненулевыми решениями *этой* системы, необходимо и достаточно, чтобы число λ было корнем одного из уравнений $Q(\lambda)=0$ или $\overline{Q}(\lambda)=0$, т. е. корнем характеристического уравнения, что доказывает утверждение.

Вектору W^a в данной точке $\overset{*}{T}_1$ будет соответствовать бивектор полного ранга

$$W^{\alpha\beta}=\sigma\,(\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta})+\mu\,(\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta})+\nu\,(\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}). \quad (19.3)$$

Нетрудно убедиться, что при любом ортогональном преобразовании $W^{\alpha\beta}$ преобразуется в бивектор той же структуры, а σ, μ, ν переходят соответственно в $\overset{*}{\sigma}$, $\overset{*}{\mu}$, $\overset{*}{\nu}$, так что норма бивектора остается инвариантной:

$$\sigma^2+\mu^2+\nu^2=\overset{*}{\sigma}{}^2+\overset{*}{\mu}{}^2+\overset{*}{\nu}{}^2.$$

Пусть корням $\underset{s}{\lambda}\,(s=1,\ 2,\ 3)$ уравнения $(R_{ab}-\lambda g_{ab})=0$ отвечают собственные векторы $\underset{s}{W}{}^a$; тогда корням $\underset{s+3}{\lambda}$ должны отвечать собственные векторы с комплексно-сопряженными компонентами $\underset{s}{\overline{W}}{}^a$.

Представим бивектор $\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}$ в виде комбинации двух вещественных бивекторов

$$\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}=\underset{1}{V}{}^{\alpha\beta}+i\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta},$$

тогда

$$\underset{4}{W}{}^{\alpha\beta}=\underset{1}{V}{}^{\alpha\beta}-i\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}.$$

Полагая $\sigma=\underset{1}{a}+i\underset{1}{b}$, $\mu=\underset{2}{a}+i\underset{2}{b}$, $\nu=\underset{3}{a}+i\underset{3}{b}$, где $\underset{s}{a}$ и $\underset{s}{b}$ — вещественные числа $(s=1,\ 2,\ 3)$, найдем:

$$\underset{1}{V}{}^{\alpha\beta}=\underset{1}{a}\,\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{2}{a}\,\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{3}{a}\,\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}-\underset{1}{b}\,\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}-\underset{2}{b}\,\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}-\underset{3}{b}\,\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta},$$

$$\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}=\underset{1}{b}\,\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{2}{b}\,\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{3}{b}\,\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{1}{a}\,\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{2}{a}\,\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{3}{a}\,\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Так как $\underset{1}{W}{}^a$ — неизотропный вектор R_6 (см. § 9), то всегда можно считать, что это единичный вектор: $g_{ab}\underset{1}{W}{}^a\underset{1}{W}{}^b = 1$ $(a,\ b = 1, \ldots, 6)$; отсюда следует, что

$$\sum_{s=1}^{3} \underset{s}{a}\,\underset{s}{b} = 0, \qquad \sum_{s=1}^{3} (\underset{s}{b}{}^2 - \underset{s}{a}{}^2) > 0. \tag{19.4}$$

Введем понятия *степени параллелизма и степени ортогональности* бивекторов и соответствующие обозначения. Пусть даны два, вообще говоря *непростых*, бивектора и поэтому (при $n = 4$) принадлежащих плоским пучкам размерности $\leqslant 4$. Если пучки, в которых лежат бивекторы, имеют k общих направлений, то будем говорить, что степень параллелизма этих бивекторов равна $\frac{k}{s}$, где s — размерность того из двух пучков, которая меньше. Точно так же, если эти бивекторы лежат в плоских пучках ε_p и ε_q $(p \leqslant q)$ и если в ε_p существует s независимых направлений, ортогональных к ε_q (т. е. ко всем направлениям ε_q), то будем говорить, что эти бивекторы $\frac{s}{p}$*-ортогональны*.

Покажем, во-первых, что бивекторы $\underset{1}{V}{}^{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^{\alpha\beta}$ *простые*, т. е. лежат в двумерных плоских пучках. Для того чтобы кососимметрический тензор $u^{\alpha\beta}$ (бивектор) был *простым*, т. е. равнялся бы альтернированному произведению двух векторов $\eta^{[\alpha}\gamma^{\beta]}$, необходимо и достаточно (для $n = 4$), чтобы выполнялось условие

$$u^{14}u^{23} + u^{24}u^{31} + u^{34}u^{12} = 0. \tag{19.5}$$

Разлагая определитель

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{u}{}^1 & \underset{1}{u}{}^2 & \underset{1}{u}{}^3 & \underset{1}{u}{}^4 \\ \underset{2}{u}{}^1 & \underset{2}{u}{}^2 & \underset{2}{u}{}^3 & \underset{2}{u}{}^4 \\ \underset{1}{u}{}^1 & \underset{1}{u}{}^2 & \underset{1}{u}{}^3 & \underset{1}{u}{}^4 \\ \underset{2}{u}{}^1 & \underset{2}{u}{}^2 & \underset{2}{u}{}^3 & \underset{2}{u}{}^4 \end{vmatrix} \equiv 0$$

по минорам первых двух строк, получим (19.5). Наоборот, если (19.5) имеет место, то всегда можно найти два вектора η^α и ν^α такие, что $u^{\alpha\beta} = \eta^{[\alpha}\gamma^{\beta]}$; для $n=4$ это проверяется непосредственно. Записывая (19.5) для $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^{\alpha\beta}$, убедимся, что оно удовлетворяется в силу первого из условий (19.4): каждый из бивекторов $\underset{1}{V}^{\alpha\beta'}$ и $\overset{+}{\underset{1}{V}}{}^{\alpha\beta}$ лежит в двумерном плоском пучке.

Покажем, что эти бивекторы $\frac{0}{2}$-*параллельны*. Они не могут быть $\frac{2}{2}$-параллельными, так как тогда их компоненты были бы пропорциональными и в силу этого обращались бы в нуль. Они не могут быть также и $\frac{1}{2}$-параллельными, так как тогда $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ был бы простым бивектором, но в этом случае условие (19.5) противоречило бы (19.4). Следовательно, остается только возможность $\frac{0}{2}$-параллелизма.

Эти бивекторы $\frac{2}{2}$-ортогональны, т. е. любой вектор, лежащий в плоскости $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$, ортогонален любому вектору, лежащему в плоскости бивектора $\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^{\alpha\beta}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы при любых α и β имело место равенство (см. задачу 6 § 19)

$$\underset{1}{V}_{\alpha\beta}\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^{\beta\delta} = 0.$$

Легко убедиться, что это условие является следствием (19.4).

Рассмотрим простой бивектор $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$. Его норма вследствие (19.4)

$$g_{ab}\underset{1}{V}^a\underset{1}{V}^b = \sum_{1}^{3}(b_s^2 - a_s^2) > 0.$$

В плоскости этого вещественного бивектора всегда можно выбрать два вещественных, ортогональных и неизотропных вектора η^α, γ^α. Тогда норма этого бивектора может быть также выражена в виде $2\eta_\sigma\eta^\sigma\gamma_\tau\gamma^\tau$. Следовательно, эти два вектора имеют нормы одного знака. Имея в виду сигнатуру формы $(- - - +)$ и *закон инерции* при вещественных преобразованиях, можно утверждать, что нормы этих двух векторов меньше нуля. Перенормировав эти два вектора, их можно принять за векторы $\underset{2}{\xi}^\alpha$ и $\underset{3}{\xi}^\alpha$ ортореперa.

Точно так же в плоскости $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$ определим два ортогональных вектора, вещественных и неизотропных, но уже с нормами противоположного знака, так как $g_{ab}\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^a\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^b<0$; эти векторы назовем $\underset{1}{\xi}^\alpha$ и $\underset{4}{\xi}^\alpha$. В этой неголономной системе отнесения

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta},\qquad \underset{4}{W}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}-i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что ортореper $\{\underset{\sigma}{\xi}^\alpha\}$ выбран лишь с точностью до вращения в плоскости $\{\underset{2}{\xi}\underset{3}{\xi}\}$ и лоренцева вращения в плоскости $\{\underset{1}{\xi}\underset{4}{\xi}\}$. Так как $\underset{2}{W}^{\alpha\beta}$ должен быть ортогональным к $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ (см. § 9), то

$$\underset{2}{W}^{\alpha\beta}=\mu_2\,(\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta})+\nu_2\,(\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}).$$

Пользуясь указанным выше произволом, не меняющим вида $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ и, следовательно, $\underset{2}{W}^{\alpha\beta}$, всегда можно обратить ν_2 в нуль, а μ_2 в 1 (см. задачу 1 в этом параграфе). Тогда, учитывая еще и ортогональность $\underset{3}{W}^{\alpha\beta}$ к двум первым бивекторам (в R_6), получим:

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta},\qquad \underset{2}{W}^{\alpha\beta}=\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta},\qquad \underset{3}{W}^{\alpha\beta}=\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}$$

и, вследствие комплексной сопряженности,

$$\underset{4}{W}^{\alpha\beta}=\underset{1}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta},\qquad \underset{5}{W}^{\alpha\beta}=\underset{2}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta},\qquad \underset{6}{W}^{\alpha\beta}=\underset{3}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta}.$$

Теперь, записывая условия (19.2) для каждого из этих бивекторов и учитывая, что $\underset{p}{\xi}{}^a = \delta^a_p$ $(a,\ p = 1, \ldots, 6)$, без труда найдем, что

$$m_{ss} = \alpha_s, \quad m_{st} = n_{st} = 0 \quad (s,\ t \neq), \quad n_{ss} = \beta_s, \quad (s = 1,\ 2,\ 3),$$

где α_s и β_s — вещественные и мнимые части стационарных кривизн $\overset{*}{T}_1$ (корней характеристического уравнения). Следовательно, *для пространств типа* $\overset{*}{T}_1$ *матрица* (R_{ab}) $(a,\ b = 1, \ldots, 6)$ *в некотором неголономном ортореперe имеет следующую каноническую форму*:

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{19.6}$$

где

$$\sum_1^3 \alpha_s = -\varkappa, \qquad \sum_1^3 \beta_s = 0. \tag{19.7}$$

В этом случае имеется четыре независимых параметра, определяющих *инвариантным образом* структуру пространства; это максимальное число, так как для $\overset{*}{T}_2$ и $\overset{*}{T}_3$ оно будет меньше.

2. *Пространства* $\overset{*}{T}_2$; *характеристика* λ*-матрицы* [21, $\overline{21}$]. Как было показано выше, за собственные векторы и инвариантные пучки λ-матрицы можно взять собственные векторы и инвариантные пучки матриц $Q(\lambda)$ и $\overline{Q}(\lambda)$. Отсюда следует, что достаточно изучить, например, λ-матрицу $Q(\lambda)$, имеющую элементами комплексные числа, и характеристику [21]. При такой характеристике тензор

$$p_{ij} = m_{ij} + in_{ij}$$

трехмерного пространства (см. § 9) имеет одно собственное *неизотропное* направление

$$(p_{ij} - \lambda g_{ij}) \underset{1}{W}{}^j = 0, \tag{19.8}$$

одно *ортогональное* к $\underset{1}{W}^j$ *изотропное* собственное направление $\underset{2}{W}^i$

$$(p_{ij} - \underset{2}{\lambda} g_{ij})\, \underset{2}{W}^j = 0 \qquad (19.9)$$

и, кроме того, существует *изотропный* вектор $\underset{3}{W}^j$, ортогональный к $\underset{1}{W}^j$ и не ортогональный к $\underset{2}{W}^j$, который вместе с $\underset{2}{W}^j$ образует *инвариантный* пучок $\{\underset{2}{W}, \underset{3}{W}\}$ тензора p_{ij}, что выражается соотношением

$$(p_{ij} - \underset{2}{\lambda} g_{ij})\, \underset{3}{W}^j = \varrho \underset{2}{W}_i, \qquad (19.10)$$

где ϱ — некоторый скаляр, *отличный от нуля* (иначе $\underset{3}{W}$ также определял бы собственное направление); его выбор в остальном произволен. Произвол этот является следствием того, что $\underset{2}{W}^i$ и $\underset{3}{W}^i$, будучи изотропными, могут быть умножены на любое число, отличное от нуля, без изменения нормы.

Всякое собственное направление или пучок тензора p_{ij} будут определять собственное направление и инвариантные пучки R_{ab} в R_6; все эти векторы будут иметь структуры (19.3), как показано в начале этого параграфа.

Пусть корню $\underset{1}{\lambda}$ отвечает простой элементарный делитель $(\lambda - \underset{1}{\lambda})$ λ-матрицы и собственное направление, определяемое бивектором $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$. Так как этот бивектор *неизотропный*, то к нему применимы все рассуждения, проведенные выше для $\underset{1}{W}$ в случае пространств $\overset{*}{T}_1$. Следовательно, можно выбрать такой вещественный ортореper, определяемый с точностью до вращения в двумерной плоскости $\{\underset{2}{\xi}\,\underset{3}{\xi}\}$ и лоренцева вращения в $\{\underset{1}{\xi}\,\underset{4}{\xi}\}$, относительно которого

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta} = \underset{14}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Тогда вследствие ортогональности $\underset{1}{W}$ к $\underset{2}{W}$ и $\underset{3}{W}$ получим:

$$\underset{s}{W}^{\alpha\beta} = \mu_s\,(\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}) + \nu_s\,(\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}) \qquad (s = 2,\ 3).$$

Условия изотропности этих бивекторов приводят к соотношениям

$$\nu_2 = e_2 i \mu_2, \qquad \nu_3 = e_3 i \mu_3,$$

где e_2 и e_3 равны ± 1. Записывая также тот факт, что $\underset{2}{W}$ и $\underset{3}{W}$ не ортогональны, получим $e_1 = -e_2$. Следовательно, можно, например, положить:

$$\underset{2}{W}^{\alpha\beta} = \underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta} - \underset{12}{\xi}^{\alpha\beta},$$

$$\underset{3}{W}^{\alpha\beta} = \sigma\,\{\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta} - i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}\},$$

где σ — произвольный скалярный множитель $\neq 0$. Записывая условия, аналогичные (19.8), (19.9) и (19.10), но уже для тензора R_{ab} в R_6, получим:

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ab} - \underset{1}{\lambda} g_{ab})\,\underset{1}{W}^b = 0, \quad (R_{ab} - \underset{2}{\lambda} g_{ab})\,\underset{2}{W}^b = 0, \\ &\qquad (R_{ab} - \underset{2}{\lambda} g_{ab})\,\underset{3}{W}^b = \sigma g_{ab} \underset{2}{W}^b. \end{aligned}\right\} \qquad (19.11)$$

Чтобы завершить нормировку изотропных векторов, можно, например, положить $\sigma = 1$, после чего *канонический* ортореппер будет определен без какой-либо степени свободы. Так как $\underset{pq}{\xi}^{\alpha\beta} \longrightarrow \underset{\varrho}{\xi}^a = \delta^a_\varrho$, а тензор g_{ab} имеет вид (18.3), то, полагая в (19.11) $a = 1, \ldots, 6$, получим систему уравнений, из которой без труда определим все компоненты R_{ab}. Они будут выражаться через вещественные и мнимые части стационарных кривизн:

$$\underset{1}{\lambda} = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad \underset{2}{\lambda} = \alpha_2 + i\beta_2 \qquad (\underset{2}{\lambda} \equiv \underset{3}{\lambda}).$$

Таким образом, получаем, что *для пространств* $\overset{*}{T}_2$ *канонический вид матрицы* (R_{ab}) *может быть предста-*

влен в виде:

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ &M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2-1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

где

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varkappa, \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 0. \tag{19.13}$$

3. *Пространства* $\overset{*}{T}_3$; *характеристика* [3, 3]. Для такой характеристики тензор p_{ij} имеет одно собственное направление $\underset{1}{W}^j$ и, кроме того, трехмерный *инвариантный* пучок, определяемый векторами $\{\underset{1}{W}, \underset{2}{W}, \underset{3}{W}\}$; эти векторы должны удовлетворять условиям (см. § 9)

$$\left.\begin{aligned} &(p_{ij} - \underset{1}{\lambda} g_{ij}) \underset{1}{W}^j = 0, \quad (p_{ij} - \underset{1}{\lambda} g_{ij}) \underset{2}{W}^j = \sigma g_{ij} \underset{1}{W}^j, \\ &\qquad (p_{ij} - \underset{1}{\lambda} g_{ij}) \underset{3}{W}^j = \tau g_{ij} \underset{2}{W}^j, \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

где σ и τ — произвольные числа, отличные от нуля, и i, $j = 1, 2, 3$. При этом вектор $\underset{2}{W}^j$ неизотропный, а $\underset{3}{W}^i$ изотропный. Кроме того, $\underset{1}{W}^j$ ортогонален к $\underset{2}{W}^j$ и не ортогонален к $\underset{3}{W}^j$, а $\underset{2}{W}^j$ ортогонален к $\underset{3}{W}^j$.

Так как $\underset{2}{W}^{\alpha\beta}$ — неизотропный бивектор, то, как и в двух предшествующих случаях, выбирая соответствующим образом репер с двумя степенями свободы, можно этот бивектор записать в виде:

$$\underset{2}{W}^{\alpha\beta} = \underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Тогда для бивекторов $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ и $\underset{3}{W}^{\alpha\beta}$, записывая указанные выше условия ортогональности и изотропности, получим выражения

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}-\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta},\quad \underset{3}{W}^{\alpha\beta}=\varrho\,\{\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}-i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}\},$$

где ϱ — любое число, отличное от нуля. Далее исследование ведется по той же схеме, что и для предшествующих типов пространств $\overset{*}{T}_1$ и $\overset{*}{T}_2$. Записываем условия, аналогичные (19.14), но уже в вещественном пространстве R_6, фиксирующие тот факт, что $\underset{1}{W}^a$ — собственный вектор R_{ab}, а векторы $\underset{2}{W}^a$ и $\underset{3}{W}^a$ вместе с $\underset{1}{W}^a$ определяют *инвариантный пучок* тензора R_{ab}. Эти условия суть:

$$\left.\begin{array}{c}(R_{ab}-\underset{1}{\lambda}g_{ab})\underset{1}{W}^b=0,\quad (R_{ab}-\underset{1}{\lambda}g_{ab})\underset{2}{W}^b=\sigma g_{ab}\underset{1}{W}^b,\\ (R_{ab}-\underset{1}{\lambda}g_{ab})\underset{3}{W}^b=\tau g_{ab}\underset{2}{W}^b,\end{array}\right\}\quad(19.15)$$

где σ и τ — числа, отличные от нуля.

Так как бивектору $\underset{\sigma\tau}{W}^{\alpha\beta}$ в данной точке $\overset{*}{T}_s$ отвечает в R_6 вектор $\underset{p}{W}^a$, а для координатного ортореперa в R_6 $\underset{r\lambda}{\xi}^{a\beta}\longleftrightarrow\underset{p}{\xi}^a=\delta_p^a$, то, записывая (19.15) при $a, b=1, \ldots, 6$, получим систему, состоящую только из девяти независимых уравнений, которые, если R_{ab} выразить через m_{ij} и n_{ij}, имеют вид:

$$\left.\begin{array}{c}m_{11}+in_{11}+im_{13}-n_{13}=-\lambda,\\ m_{12}+in_{12}+im_{23}-n_{23}=0,\\ m_{13}+in_{13}+im_{33}-n_{33}=-i\lambda,\\ m_{12}+in_{12}=-\sigma,\\ m_{22}+in_{22}=-\lambda,\\ m_{23}+in_{23}=-i\sigma,\\ m_{11}+in_{11}-im_{13}+n_{13}=-\lambda,\\ m_{12}+in_{12}-im_{23}+n_{23}=-\tau,\\ m_{13}+im_{13}-im_{33}+n_{33}=i\lambda,\end{array}\right\}\quad(19.16)$$

где $\lambda=\alpha+i\beta$ — один из двух возможных комплексно-сопряженных корней уравнения $|R_{ab}-\lambda g_{ab}|=0$, а числа σ

и τ отличны от нуля, а в остальном произвольны. Этот произвол возникает в силу произвольности числа ϱ и является следствием изотропности векторов $\underset{1}{W^a}$ и $\underset{3}{W^a}$. Для того чтобы определить орторепер однозначно, положим, например, $\sigma = \pm 1$.

Решая после этого систему (19.16) и имея в виду, что $\sum\limits_{s=1}^{3} m_{ss} = -\varkappa$, $\sum\limits_{1}^{3} n_{ss} = 0$, получим:

$$\tau = 2, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \frac{\varkappa}{3},$$

а *канонический вид матрицы* (R_{ab}) *для пространств* $\overset{*}{T}_3$ *выражается соотношениями*

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ &M = \begin{pmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (19.17)$$

Единственный *всегда вещественный* корень уравнения $|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0$ равен $-\frac{\varkappa}{3}$, откуда и следует сделанное в предыдущем параграфе замечание о вещественности корней и базисов элементарных делителей для пространств T_3.

Подытоживая результаты, получим, что имеет место теорема: *для каждого из трех возможных типов пространств* $\overset{*}{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *существует вещественный орторепер, относительно которого ортогональные составляющие тензора кривизны определяются каноническими формами матриц* (R_{ab}), *которые для* $\overset{*}{T}_1$ *имеют вид* (19.6) *при условиях* (19.7), *для* $\overset{*}{T}_2$ *имеют вид* (19.12) *при* *условиях* (19.13) *и для* $\overset{*}{T}_3$ — (19.17); *орторепер во всех трех случаях определяется однозначно.*

Этот результат получен методом, который нигде не опирается на предположение $\varkappa \neq 0$. Следовательно, полагая $\varkappa = 0$, автоматически получим аналогичный результат для пространств, определяемых уравнением $R_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, имеет место также теорема: *канонический вид матрицы* (R_{ab}), *определяющей ортогональные компоненты тензора кривизны для* T_i, *определяемых полями тяготения в свободном пространстве, будет*

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix},$$

где для T_1

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{19.18}$$

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 0;$$

для T_2

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{19.19}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + 2\beta_2 = 0;$$

для T_3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19.20}$$

Полученные здесь канонические формы определяют конкретное содержание основной теоремы, доказанной в § 18, и играют основную роль при *инвариантной* характеристике пространств Эйнштейна в случае $n = 4$ и сигнатуры $(- - - +)$. Три указанных типа T_i допускают, очевидно, более детальную классификацию: случай кратных корней или случай вещественных и чисто мнимых корней и т. д. Это будет сделано далее по мере надобности.

Относительно метода доказательства можно сделать следующее замечание. На первый взгляд, поскольку известна характеристика $\overset{*}{T}_i$, казалось бы возможным сразу выписать канонический вид матриц (R_{ab}), применяя общую теорему § 9. Однако этого сделать нельзя, так как в качестве допустимых линейных преобразований можно брать лишь те, которые определяются матрицами

$$(A_{\alpha}^{\alpha'}) \longrightarrow 2\,(A_{[\alpha}^{\alpha'} A_{\beta]}^{\beta'}),$$

где $A_{\alpha}^{\alpha'}$ — коэффициенты некоторого вещественного ортогонального преобразования в данной точке P пространства $\overset{*}{T}_i$. Следовательно, можно пользоваться преобразованиями некоторой подгруппы всей группы ортогональных вещественных преобразований шестимерного пространства, оставляющих инвариантной метрику с сигнатурой $(---+++)$.

Анализ известных примеров пространств Эйнштейна (см. гл. IV) показывает, что подавляющее число их принадлежит к типу T_1. Только в последнее время главным образом при изучении T_i, допускающих ту или иную группу движений (гл. IV), были определены пространства T_2 и T_3. Необходимо отметить, что с этими пространствами связаны интересные физические теории, как, например, проблема гравитационной радиации и некоторые другие (см. [177], [263], [265], [271], [291], [323], [293], [294], [296], [297], [300], [321], [324], [342], [343], [344], [353], [354], [362]).

Задачи

1. Доказать, что в случае T_2 $(R_{a\beta}=0)$ существует такое векторное поле l^{α}, что

$$l^{\alpha}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0, \qquad l_{\alpha}R_{\beta\gamma\lambda\mu}+l_{\beta}R_{\gamma\alpha\lambda\mu}+l_{\gamma}R_{\alpha\beta\lambda\mu}=0$$

(Бель [291]).

2. Доказать, что для пространств T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$ существует векторное поле l^{α}, удовлетворяющее условиям

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^{\beta}l^{\delta}=e_{\alpha\beta\sigma\tau}R^{\sigma\tau}_{\gamma\delta}l^{\beta}l^{\delta}=0$$

где $e_{\alpha\beta\sigma\tau}$ — дискриминантный тензор пространства; поле l^α определяет изотропные геодезические линии пространства

$$l^\alpha_{,\sigma} l^\sigma = \varphi l^\alpha$$

(Бель [299]).

3. Доказать, что для пространств T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$, кроме поля l^α, определяемого в задаче 2, существуют еще векторные поля h^α, k^α и r^α, образующие вместе с l^α систему независимых векторов и связанные условиями

$$l^\alpha l_\alpha = r^\alpha r_\alpha = l^\alpha h_\alpha = l^\alpha k_\alpha = h^\alpha k_\alpha = h^\alpha r_\alpha = k^\alpha r_\alpha = 0,$$
$$h^\alpha h_\alpha = k^\alpha k_\alpha = -l^\alpha r_\alpha = -1.$$

Эти поля удовлетворяют условиям:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta h^\delta = l_\alpha l_\gamma, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta k^\delta = 0, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^\beta r^\delta = l_\alpha h_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^\beta h^\delta = 0, \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^\beta k^\delta = -k_\alpha l_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} h^\beta r^\delta = -(l_\alpha r_\gamma + k_\alpha k_\gamma), \quad R_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta k^\delta = l_\alpha h_\gamma + h_\alpha l_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta r^\delta = h_\alpha k_\gamma, \; R_{\alpha\beta\gamma\delta} r^\beta r^\delta = -(h_\alpha r_\gamma + h_\gamma r_\alpha).$$

4. Показать, что в случае T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$ для ортoрепера, определяющего формулы (19.20), векторы $\overline{l}$, $\overline{h}$, $\overline{k}$, $\overline{r}$ имеют компоненты

$$l^\alpha(0,\ 1,\ 0,\ 1), \quad h^\alpha(1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad k^\alpha(0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$r^\alpha\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

и, как следствие этого, получить выражение

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4\,(l_{[\alpha}h_{\beta]}l_{[\gamma}r_{\delta]} + l_{[\alpha}r_{\beta]}l_{[\gamma}h_{\delta]} + l_{[\alpha}k_{\beta]}k_{[\gamma}h_{\delta]} +$$
$$+ k_{[\alpha}h_{\beta]}l_{[\gamma}k_{\delta]}).$$

5. При выполнении условий задач 3 и 4 дивергенция изотропно-геодезического векторного поля l^α равна нулю:

$$l^\sigma_{,\sigma} = 0.$$

6. Доказать, что простые бивекторы тогда и только тогда $\frac{2}{2}$-ортогональны, когда

$$\underset{1}{V}_{\alpha\beta}\underset{2}{V}^{\beta\delta} = 0$$

([91], стр. 391).

§ 20. Классификация полей тяготения общего вида

Теорема о существовании трех типов пространств Эйнштейна с сигнатурой $(-\ -\ -\ +)$ и канонические формы компонент тензора кривизны для некоторого неголономного ортореперa, определяемого в каждом из трех возможных случаев однозначно, были получены в 1949 г. Этот результат, нашедший физические приложения [258], [263], [299], [265] главным образом при исследовании *свободных* пространств, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}=0$, оставлял открытым вопрос о том, что можно сказать в общем случае, когда $T_{\alpha\beta}\neq\sigma g_{\alpha\beta}$. Рассмотрим теперь этот общий случай [287]. Естественно предположить, что такая классификация в общем случае должна, во-первых, при $T_{\alpha\beta}\longrightarrow\sigma g_{\alpha\beta}$ приводить к результатам §§ 18, 19 и, во-вторых, должна учитывать алгебраическую структуру не только тензора кривизны пространства, но и тензора энергии-импульса. Будем далее пространства, отвечающие полям тяготения общего вида, обозначать символом $\widetilde{T}$.

Рассмотрим геометрию пространства $\widetilde{T}$, определяемого некоторым распределением и движением материи, с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющим уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta}, \tag{20.1}$$

где λ — постоянная и $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса материи. Свертывание формулы (20.1) устанавливает зависимость между R и T:

$$\lambda T=-R. \tag{20.2}$$

Сконструируем четырехвалентный тензор

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{\text{def}}{=}\frac{\lambda}{2}\left(g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma}+g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma}-g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}\right), \tag{20.3}$$

который, как это следует из определения, обладает свойствами

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}=-S_{\beta\alpha\gamma\delta}=-S_{\alpha\beta\delta\gamma}=S_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{20.4}$$

и

$$S_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0, \tag{20.5}$$

совпадающими с известными свойствами тензора кривизны пространства V_n. Свертывая (20.3) по индексам β, δ, получим:

$$S_{\alpha\gamma} = \lambda T_{\alpha\gamma} + \frac{\lambda}{2} T g_{\alpha\gamma} = \lambda T_{\alpha\gamma} - \frac{R}{2} g_{\alpha\gamma}. \qquad (20.6)$$

Определим теперь новый четырехвалентный тензор:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - S_{\alpha\beta\gamma\delta} + \sigma\,(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}), \qquad (20.7)$$

который назовем *тензором пространства-материи*. Он обладает следующими свойствами:

1) Из свойств (20.4) и (20.5), которым удовлетворяет и тензор кривизны, следует:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\beta\alpha\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\delta\gamma} = P_{\gamma\delta\alpha\beta} \qquad (20.8)$$

и

$$P_{\alpha\,[\beta\gamma\delta]} = 0. \qquad (20.9)$$

2) Его свертывание по индексам β, δ приводит вследствие (20.6) к соотношению

$$P_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma} - \lambda T_{\alpha\gamma} + \frac{R}{2} g_{\alpha\gamma} + 3\sigma g_{\alpha\gamma},$$

т. е. в силу уравнений поля (20.1)

$$P_{\alpha\gamma} = (R + 3\sigma)\, g_{\alpha\gamma}. \qquad (20.10)$$

3) Если задано распределение и движение материи, т. е. тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ и тензор пространства-материи $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то с точностью до задания скаляра σ определяется кривизна пространства.

4) Задавая метрический тензор, скаляр σ и тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, можно однозначно определить тензор энергии-импульса.

5) Если тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\sigma = 0$, то $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяет кривизну свободного пространства-времени.

6) Тензор $P_{\alpha\gamma}$ удовлетворяет уравнениям, аналогичным уравнениям поля тяготения для пространств Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), и в этом смысле является аналогом тензора Риччи.

Тензор пространства-материи (20.7) представляет своим первым слагаемым кривизну пространства, а второе слагаемое отражает распределение и движение материи. Мы свяжем классификацию полей тяготения с классификацией алгебраической структуры тензора пространства-материи.

Тот факт, что $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обладает свойствами (20.8), (20.9) и (20.10), позволяет решить задачу, если воспользоваться методом, применяемым при классификации пространств Эйнштейна в §§ 18, 19. В самом деле, так как в §§ 18, 19 речь шла об *алгебраической* классификации, то вопрос о дифференциальных свойствах тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не играет в данном вопросе никакой роли. Всеми же алгебраическими свойствами тензора кривизны тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обладает так же, как его комитант $P_{\alpha\gamma}$ обладает свойствами тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$. Следовательно результаты, полученные в этих параграфах, автоматически могут быть распространены на любой *битензор*, обладающий свойствами (20.8), (20.9) и (20.10), и, в частности, на тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Для этого достаточно в формулах (19.6), (19.7), (19.12), (19.13), (19.17) заменить $\varkappa$ через $\omega = R + 3\sigma$.

Таким образом, пользуясь результатами, полученными в §§ 18 и 19, получаем следующие теоремы, решающие вопрос о классификации полей тяготения общего вида в смысле алгебраической структуры тензора пространства-материи [287].

Теорема 1. *Для любого орторепера в точке пространства $\tilde{T}$, определяемого полем тяготения, матрица (P_{ab}) в бивекторном пространстве симметрично-сдвоенная*:

$$\left.\begin{aligned} (P_{ab}) &= \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ M = (m_{ij}), \quad N &= (n_{ij}) \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}\right\} \tag{20.11}$$

причем трехмерные матрицы M и N симметрические:

$$m_{[ij]} = n_{[ij]} = 0 \tag{20.12}$$

и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{3} m_{ii} = -\omega, \qquad \sum_{i=1}^{3} n_{ii} = 0. \tag{20.13}$$

Используя три лоренцевых и три пространственных вращения, покажем далее, как и в § 19, что имеют место еще следующие две теоремы.

Теорема 2. *Существует три и только три типа полей тяготения общего вида в смысле алгебраической структуры тензора пространства-материи. Эти типы отвечают соответственно трем возможным типам характеристик λ-матрицы $(P_{ab} - \lambda g_{ab})$ в бивекторном пространстве*:

$$(1)\ \widetilde{T}_1[1\,1\,1, \overline{1\,1\,1}], \quad (2)\ \widetilde{T}_2[2\,1, \overline{2\,1}], \quad (3)\ \widetilde{T}_3[(3, 3)].$$

Для полей тяготения T_1 является характерным существование *простых* элементарных делителей и отвечающих им шести *неизотропных бивекторов* $\underset{s}{W}{}^{\alpha\beta} \longleftrightarrow \underset{s}{W}{}^{a}$ (две комплексно-сопряженные тройки), *взаимно ортогональных* между собой и являющихся *собственными* векторами P_{ab} в R_6:

$$P_{ab}\underset{s}{W}{}^{b} = \underset{s}{\lambda}\underset{s}{W}{}_{a}, \quad \underset{s}{\lambda} = \alpha_s \pm i\beta_s \quad (s = 1, \ldots, 6).$$

В случае полей типа $\widetilde{T}_2$ имеем два *непростых* элементарных делителя λ-матрицы $(P_{ab} - \lambda g_{ab})$ с комплексно-сопряженными элементарными делителями $(\lambda - \lambda_s)^2$, $(\lambda - \overline{\lambda}_s)^2$, которым отвечают комплексно-сопряженные, ортогональные между собой, *изотропные* $(\underset{s}{W}{}_{a}\underset{s}{W}{}^{a} = 0)$ собственные векторы $\underset{1}{W}{}^{a}$, $\underset{4}{W}{}^{a}$ и два *неизотропных*, комплексно-сопряженных, ортогональных между собой и к векторам $\underset{1}{W}{}^{a}$, $\underset{4}{W}{}^{a}$ вектора $\underset{2}{W}{}^{a}$, $\underset{5}{W}{}^{a}$, так что

$$P_{ab}\underset{s}{W}{}^{b} = \underset{s}{\lambda}\underset{s}{W}{}_{a} \quad (s = 1, 2, 4, 5)$$

и

$$\underset{s}{\lambda} = \alpha_s \pm i\beta_s, \quad \underset{i}{\lambda} = \overline{\underset{i+3}{\lambda}} \quad (i = 1, 2).$$

Наконец, в случае полей $\widetilde{T}_3$ имеется только два непростых элементарных делителя $(\lambda - \underset{1}{\lambda})^3$, $(\lambda - \underset{1}{\lambda})^3$ с одним и тем же *вещественным* базисом $\lambda_1 = -\frac{\omega}{3}$. Этим делителям отвечают два взаимно ортогональных *изотропных* собственных вектора $\underset{1}{W}{}^{a}$, $\underset{4}{W}{}^{a}$.

Теорема 3. *Для полей тяготения $\widetilde{T}_1$ матрица (P_{ab}) для некоторого неголономного ортореперa, определяемого однозначно, имеет вид*:

$$\left.\begin{aligned} &(P_{ab})=\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ &M=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{20.14}$$

где

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -\omega, \quad \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 0; \tag{20.15}$$

для полей $\widetilde{T}_2$:

$$M=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2-1 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{20.16}$$

где

$$\alpha_1+2\alpha_2=-\omega, \quad \beta_1+2\beta_2=0, \tag{20.17}$$

и для полей $\widetilde{T}_3$:

$$M=\begin{pmatrix} -\frac{\omega}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\omega}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega}{3} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.18}$$

Канонический вид для компонент тензора кривизны пространств Эйнштейна (19.6), (19.7), (19.12), (19.13), (19.17) получается соответственно из (20.14), (20.15), (20.16), (20.17), (20.18), когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}=\sigma g_{\alpha\beta}$, и в этом смысле, эти компоненты можно рассматривать как некоторый *предельный случай*. В частности, когда $T_{\alpha\beta}=0$, $\sigma=0$, получим соответствующую классификацию для полей тяготения *свободного* пространства, для чего в (20.14), (20.16), (20.18) достаточно положить $\omega=0$.

Полученные здесь канонические формы определяют конкретное содержание теоремы 2 и должны, по-видимому, сыграть роль при *инвариантной* характеристике полей тяготения реального мира.

Три указанных типа полей тяготения $\widetilde{T}_i$ допускают, очевидно, более детальную классификацию; можно, например, выделить случаи *кратных* или *вещественных* λ_s, можно также дополнить эту классификацию классификацией $(T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$ и искать логическое пересечение двух классификаций; такая классификация может быть осуществлена, если воспользоваться результатами § 9.

Относительно полученной выше классификации необходимо сделать следующее замечание.

Конструкция тензора пространства-материи $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ такова, что σ — *произвольный* скаляр, очевидно, что его выбор следует уточнять, исходя из физических соображений. В частности, если выбрать

$$\sigma=-\frac{1}{3}R,$$

то в (20.14) нужно произвести замену $\omega\rightarrow 0$, и мы придем к формам, аналогичным (19.18), (19.19), (19.20), полученным для *свободного* пространства.

Так как для *несвободных* пространств $(T_{\alpha\beta}\neq 0)$ основную роль играет тензор энергии-импульса, то кажется естественным и необходимым классифицировать поля, изучая тензор, включающий тензор кривизны пространства, и тензор, определяемый тензором $T_{\alpha\beta}$, каким является тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Задачи

1. Определить тип пространства, которое получается внутри несжимаемого жидкого шара, когда метрика имеет вид:

$$ds^2=-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}-$$
$$-\frac{(x^1\,dx^1+x^2\,dx^2+x^3\,dx^3)^2}{a^2-r^2}+\left(\frac{3h-h_0}{2hh_0}\right)^2 dx^{4^2},$$

где $a=r_0\sqrt{\frac{r_0}{2m}}$, h_0 — значение h на поверхности шара,

$h^2 = 1 - \frac{2m}{r-2m}$. Тензор энергии-импульса задается в виде:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}.$$

2. Рассмотреть случай внешней проблемы при условиях предыдущей задачи.

§ 21. О комплексном представлении тензоров пространства Минковского

Канонические формы для ортогональных компонент тензора кривизны и тензора пространства-материи были получены в §§ 19 и 20 при помощи отображения бивекторного пространства на трехмерное метрическое комплексное плоское многообразие. Такое отображение имеет самостоятельный интерес, так как позволяет подойти к исследованию более широкого круга вопросов.

На этом пути можно, например, ставить вопрос об алгебраической классификации любых битензоров в бивекторном пространстве и пытаться подойти к решению других проблем.

Такого рода вопросы рассматривались в работах [208] и [316], в которых обследовались так называемые *бипланарные* пространства, совпадающие по существу с бивекторными многообразиями, как это будет показано ниже. Таким образом, в этих работах при несколько иной терминологии исследования проходят так же, как и выше; получаемые при этом результаты даются в этом параграфе в кратком изложении.

Назовем векторное пространство B_{2n} четного числа измерений *бипланарным*, если в нем задан тензор ε_a^b, определяющий так называемую *абсолютную инволюцию*, удовлетворяющий условиям

$$\varepsilon_a^c \varepsilon_c^b = -\delta_a^b \tag{21.1}$$

и характеристическому уравнению вида

$$\varepsilon^2 + 1 = 0, \quad \varepsilon_a^a = 0$$

с корнями i, $-i$ кратности n. Этот тензор позволяет всякому тензору сопоставить *сопряженный* тензор, который будем отличать от данного, надчеркивая его:

$$\overline{x}^b = \varepsilon^b_a x^a, \quad \overline{\xi}_b = \varepsilon^a_b \xi_a, \quad \overline{a}_{ab} = \varepsilon^c_a \varepsilon^d_b a_{cd}.$$

Всегда можно выбрать векторы a_a так, чтобы они вместе со своими сопряженными образовывали базис независимых векторов, который далее будем называть *каноническим* базисом. Введем в рассмотрение следующие комплексные комбинации:

$$\Delta^b_a = \frac{1}{2}(\delta^b_a + i\varepsilon^b_a), \quad \overline{\Delta}^b_a = \frac{1}{2}(\delta^b_a - i\varepsilon^b_a),$$

которые, как легко видеть, удовлетворяют соотношениям

$$\Delta^b_a \varepsilon^c_b = -i\Delta^c_a, \quad \overline{\Delta}^b_a \varepsilon^c_b = i\overline{\Delta}^c_a,$$
$$\Delta^b_a \Delta^c_b = \Delta^c_a, \quad \overline{\Delta}^b_a \overline{\Delta}^c_b = \overline{\Delta}^c_a.$$

Эти комплексные конструкции можно использовать в качестве связующих величин при отображении битензоров пространства B_{2n} на комплексное пространство n измерений. Именно для этой цели такого рода конструкция была применена в работе [261] (стр. 247), где в бивекторном пространстве R_6 вводится тензор $p^{ab} = g^{ab} \pm i\varepsilon^{ab}$, совпадающий в R_6 с $\Delta^{ab} = g^{bc}\Delta^a_c$. Это отображение осуществляется по схеме

$$A^a = \Delta^a_b a^b, \quad \overline{A}^a = -iA^a.$$

Для того чтобы убедиться, что комплексное пространство, на которое отображается B_{2n}, будет иметь n измерений, достаточно заметить, что линейная зависимость между векторами в B_{2n}:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda^k \underset{k}{a}^c + \sum_{k=1}^{m} \mu^k \underset{k}{\overline{a}}^c = 0$$

приводится после отображения к соотношению

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda^k - i\mu^k) \underset{k}{A}^c = 0.$$

Если $\underset{k}{a}$, $\underset{k}{\overline{a}}$ — векторы канонического базиса, то они независимы, так же как и отвечающие им векторы $\underset{k}{A}$. Отсюда следует, что всякие $n+1$ комплексных векторов $\underset{k}{A}$ зависимы и, следовательно, отображение происходит на n-мерное комплексное пространство, которое назовем A_n.

Пользуясь Δ^a_b, всякому тензору $t^{c\ldots}_{ab\ldots}$ пространства B_{2n} можно сопоставить тензор $T^{c\ldots}_{ab\ldots}$ в A_n, где

$$T^{c\ldots}_{ab\ldots} = \Delta^h_a \Delta^f_b \ldots \Delta^c_g \ldots t^{g\ldots}_{hf\ldots}.$$

Если же в этой формуле одну или несколько связующих величин Δ^a_b заменить через $\overline{\Delta}^a_b$, то тензору $t^{a\ldots}_{bc\ldots}$ будет сопоставлена некоторая величина, которую можно рассматривать как связующую величину, принадлежащую пространствам A_n и $\overline{A}_n$, которые сопряжены друг другу. Эти величины далее называются *эрмитианами* в силу их сходства с эрмитовыми формами в смысле закона преобразования.

Следовательно, каждому тензору из B_{2n} можно сопоставить тензор и набор эрмитианов из A_n. В частности, для тензора второй валентности получим *тензорный образ* в A_n

$$A_{ab} = \frac{1}{2} \Delta^c_a (a_{cb} - \overline{a}_{cb})$$

и *эрмитов образ*

$$A_{a\overline{b}} = \frac{1}{2} \Delta^c_a (a_{cb} + \overline{a}_{cb}),$$

где

$$\overline{a}_{cb} = \varepsilon^l_c \varepsilon^f_b a_{lf}.$$

Будем называть тензор *протензором*, если его эрмитов образ при отображении равен нулю; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ab} = -\overline{a}_{ab}.$$

В случае же, если равен нулю тензорный образ, то будем говорить о *проэрмитиане* с необходимым и достаточным условием

$$a_{ab} = \overline{a}_{ab}.$$

Перейдем к пространству Минковского, сигнатура которого $(+++-)$ или $(---+)$ вполне характеризуется также условием

$$e_{ijkl}e_{pqrs}=-\begin{vmatrix} g_{ip} & g_{jp} & g_{kp} & g_{lp} \\ g_{iq} & g_{jq} & g_{kq} & g_{lq} \\ g_{ir} & g_{jr} & g_{kr} & g_{lr} \\ g_{is} & g_{js} & g_{ks} & g_{ls} \end{vmatrix} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

связывающим компоненты дискриминантного кососимметрического тензора e_{ijkl} с единственной существенной компонентой $e_{1234}=\sqrt{|g|}$.

Установление в § 18 отображения любой бивекторной величины пространства Минковского на битензоры локального бивекторного пространства ε_6, как уже отмечалось там, может быть записано при помощи связующих величин:

$$u^a=\eta^a_{ij}u^{ij}\ (a=1,\ \ldots,\ i;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n),\qquad \eta^a_{ij}=-\eta^a_{ji}.$$

Так как это отображение однозначно, то

$$u^{ij}=\eta^{ij}_a u^a,$$

где

$$\eta^{ij}_a\eta^b_{ij}=\delta^b_a,\qquad \eta^{ij}_a\eta^a_{kl}=\delta^{ij}_{kl}=\delta^i_{[k}\delta^j_{l]}.$$

Метризованное бивекторное пространство R_6 получится введением тензора (см. § 18)

$$g_{ab}=\eta^{ij}_a\eta^{kl}_b g_{ijkl},\qquad g_{ijkl}=g_{[i[kgl]j]},$$

а e_{ij} отвечает битензор

$$2\varepsilon_{ab}=2\varepsilon_{ba}=\eta^{ij}_a\eta^{hl}_b e_{ijkl}.$$

Так как

$$\varepsilon^b_a\varepsilon^c_b=-\delta^c_a,$$

то ε^a_b можно считать тензором абсолютной инволюции в R_6. Теперь ясно, что такое B_{2n} совпадает с введенным выше *бивекторным* пространством, причем

$$\varepsilon^c_a\varepsilon^d_b g_{cd}=-g_{ab},\qquad \overline{g}_{ac}=-g_{ac},$$

т. е. метрический тензор является протензором. Тензорный образ g_{ab}, определяемый формулой

$$G_{ab}=\Delta^c_a\Delta^d_b g_{cd},$$

будем считать метрическим тензором пространства A_3, которое, таким образом, становится комплексным R_3.

Для всякого битензора пространства Минковского a_{ijkl} можно построить сопряженный и показать, что для них имеет место тождество

$$a_{pqij} + \bar{a}_{ijpq} = 4\overset{0}{a}_{[p[i}g_{j]q]}, \tag{21.2}$$

где

$$\overset{0}{a}_{pi} = a_{pi} - \frac{1}{4} g_{pi}a^{q}{}_{q}, \quad a_{pi} = a^{q}{}_{pqi}, \quad \overset{0}{a}{}^{r}{}_{r} = 0. \tag{21.3}$$

Если $\overset{0}{a}_{jp} = 0$, то вследствие (21.2)

$$\bar{a}_{ijpq} = -a_{pqij};$$

каждое из этих условий характеризует битензоры, которые называются далее *изотропными*. Битензор, удовлетворяющий условиям

$$a_{pqij} = -\bar{a}_{ijpq},$$

называется *простым*, а условия

$$a_{ijkl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} = -a_{klij}$$

будут определять соответственно *симметрический* и *кососимметрический* битензоры.

При отображении на бивекторное пространство условия симметрии, косой симметрии, изотропности, простоты и условия, характеризующие протензор и проэрмитиан, запишутся соответственно следующими равенствами:

$$a_{ab} = a_{ba}, \quad a_{ab} = -a_{ba}, \quad a_{ab} = -\bar{a}_{ba},$$

$$a_{ab} = \bar{a}_{ba}, \quad a_{ab} = -\bar{a}_{ab}, \quad a_{ab} = \bar{a}_{ab}.$$

Это позволяет установить связь между этими свойствами при помощи следующей элегантной формулировки: *если битензор удовлетворяет условиям, указанным в двух строках столбца таблицы*

симметрический		*кососимметрический*	
простой	*изотропный*	*простой*	*изотропный*
проэрмитиан	*протензор*	*протензор*	*проэрмитиан*

(21.4)

то он удовлетворяет и третьему условию, указанному в том же столбце.

Рассматривая тензор кривизны риманова пространства с локальной метрикой Минковского, видим, что он будет симметрическим битензором. Если же, кроме того, V_4 является пространством Эйнштейна, то его тензор Риччи $R_{ij}=\frac{1}{4}R^k{}_k g_{ij}$, т. е. в силу (21.3) битензор R_{ijkl} изотропный. Тогда из (21.4) при помощи указанного правила приходим к выводу: *для того чтобы V_4, с метрикой Минковского в точке, было пространством Эйнштейна, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был протензором*, т. е. отображался в двухвалентный симметрический тензор комплексного R_3.

Отсюда вопрос о приведении тензора кривизны пространства Эйнштейна к каноническому виду, кроме указанной в § 19, допускает следующую интерпретацию. В комплексном R_3 приводится к каноническому виду пара симметрических тензоров R_{ab} и G_{ab}, являющихся соответственно тензорными образами такого отображения для тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тензора $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$. Для R_3 при этом можно воспользоваться хорошо известной классификацией ([90], стр. 280), согласно которой две формы

$$\psi=G_{ab}x^a x^b, \quad \varphi=R_{ab}x^a x^b,$$

из которых первая неособенная, приводятся к одному из трех видов:

$$\text{I. } \psi=x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}, \quad \varphi=ax^{1^2}+bx^{2^2}+cx^{3^2},$$

$$\text{II. } \psi=2x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}, \quad \varphi=2ax^1x^2+bx^{2^2}+cx^{3^2},$$

$$\text{III. } \psi=2x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}, \quad \varphi=2ax^1x^2+x^{3^2}+2ax^1x^3.$$

После этого необходимо совершить обратное отображение из R_3 в R_6, которое и приведем к каноническим формам § 19 с точностью, впрочем, до некоторых преобразований Лоренца и трехмерных вращений, которые в R_6 индуцируют некоторые линейные преобразования.

Задачи

1. Показать, что группа преобразований A_n, отвечающая группе преобразований B_{2n}, является общей аффинной группой n-мерного комплексного пространства.

2. Показать, что вследствие (21.1) единичный тензор δ_a^b является протензором, а в пространстве A_n ему отвечает величина Δ_a^b, которая также является единичным тензором A_n [316].

3. Показать, пользуясь определением сопряженного тензора, справедливость тождества (21.2).

§ 22. Базис полной системы инвариантов второго порядка пространства V_4

При исследовании полей тяготения общего вида является интересным вопрос об инвариантной характеристике поля при помощи некоторой системы инвариантов, которые представляли бы собой рациональные функции компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и его производных $\partial_{\gamma_1} g_{\alpha\beta}, \ldots, \partial_{\gamma_1 \ldots \gamma_k} g_{\alpha\beta}$, которые мы будем называть *инвариантами k-го порядка*. В такой постановке проблема до сих пор не получила решения. Первым этапом решения этой задачи является задача определения базиса полной системы инвариантов второго порядка; последние, естественно, предполагают, что компоненты метрического тензора и допускаемые преобразования принадлежат к классу C^2 функций. Эта задача решена в совместной работе Жеэньо и Дебеве ([250], стр. 114—123) и независимо от них П. И. Петровым [270]. Методическое улучшение, внесенное в работе [318], учитывается в приводимом ниже изложении вопроса, где предполагается, что сигнатура метрики имеет вид $(- - - +)$.

Рассмотрим некоторую точку пространства V_4 и отвечающее ей бивекторное пространство R_6 и сопоставим тензорам $g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пространстве R_6 тензоры g_{ab}, R_{ab} и e_{ab}; здесь $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор пространства V_4. Этим величинам пространства R_6 в свою очередь могут быть сопоставлены величины трехмерного комплексного пространства R_3. Это отображение может быть осуществлено двояким образом и особенно просто получается, если воспользоваться тензором пространства V_4 ([261], стр. 247—250):

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma\delta}=g^{\alpha[\gamma}g^{\beta]\delta}\pm ie^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

которому в R_6, если взять его смешанные компоненты, отвечают тензоры

$$\Delta_a^c\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(\delta_a^c+ie_a^c),\quad \overline{\Delta}_a^c\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(\delta_a^c-ie_a^c). \tag{22.1}$$

Пользуясь тензором Δ_a^c, всякому тензору a_{ab} $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$ сопоставим его *тензорный* образ

$$A_{ab}\overset{\text{def}}{=}\Delta_a^c\Delta_b^d a_{cd}=\frac{1}{2}\Delta_a^c(a_{cb}-\overline{a}_{cb}) \tag{22.2}$$

и *эрмитов* образ

$$A_{a\overline{b}}\overset{\text{def}}{=}\Delta_a^c\overline{\Delta}_b^d a_{cd}=\frac{1}{2}\Delta_a^c(a_{cb}+\overline{a}_{cb}), \tag{22.3}$$

где

$$\overline{a}_{cb}=e_c^d e_b^l a_{dl}. \tag{22.4}$$

Тензор Δ_a^c является единичным тензором комплексного пространства R_3. Напомним также, что (см. § 21) битензор называется *изотропным* (или *протензором*), если он удовлетворяет условию

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta}=a_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{22.5}$$

и его эрмитов образ $A_{a\overline{b}}=0$. Битензор назовем *простым*, если наряду с (22.4) выполняется условие $A_{ab}=0$. Произвольный битензор можно разложить на инвариантные части, представив его в виде суммы

$$a_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\overset{*}{a}_{\alpha\beta,\gamma\delta}+\overset{0}{a}_{\alpha\beta,\gamma\delta} \tag{22.6}$$

соответственно простого и изотропного битензоров. Здесь каждое из слагаемых вполне характеризуется условиями

$$\overset{*}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma}=\frac{R}{4}g_{\beta\gamma} \tag{22.7}$$

или

$$\overset{*}{A}_{ab}=\Delta_a^c a_{cb} \tag{22.8}$$

и

$$\overset{0}{a}_{\alpha\beta,\gamma\delta}=2\overset{0}{a}_{[\alpha[\beta}g_{\gamma]\delta]}, \tag{22.9}$$

где $\overset{0}{a}{}^c_c = 0$, вследствие чего $\overset{0}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma} = \overset{0}{a}{}_{\beta\gamma}$ и

$$\overset{0}{A}{}_{ab} = \Delta^c_a a_{cb}. \tag{22.10}$$

Искомый базис должен состоять из инвариантов, каждый из которых может быть получен в результате полного свертывания некоторого тензора с метрическим и дискриминантным тензорами пространства V_4. Рассмотрим сначала такие величины бивекторного пространства a_{ab} и b_{ab}, которые являются симметрическими изотропными или простыми тензорами. В R_3 им соответственно будут отвечать тензоры A_{ab}, B_{ab} или эрмитовы образы $A_{\bar{a}b}$, $B_{a\bar{b}}$. Вследствие (22.8) будем иметь:

$$A_{ab}B^f_c = \Delta^e_a \Delta^h_c a_{eb} b^f_h,$$

а, следовательно, битензор

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = a_{\alpha\beta,\,\sigma\tau} b_{\gamma\delta}{}^{\sigma\tau},$$

если a и b — изотропные битензоры, изображается в R_3 тензором

$$C_{ab} = A_{ac} B^c_b. \tag{22.11}$$

Совершенно так же в случае, если a и b — простые тензоры и, следовательно, изображаются эрмитианами в R_3, получим, что тензорный образ $C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ в R_3 будет

$$C_{ab} = A_{a\bar{c}} B^{\bar{c}}_b. \tag{22.12}$$

Если воспользоваться формулой (22.9), то можно записать:

$$C_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 2a_{\sigma[\alpha}\, g_{\beta]\tau}\, b^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} = 2a_{\sigma[\alpha}\, b^{\sigma}{}_{\beta]\gamma\delta}. \tag{22.13}$$

Но так как

$$b^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = 2\delta^{[\sigma}{}_{[\beta}\, b^{\tau]}{}_{\gamma]}\, g_{\tau\alpha},$$

то

$$C_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 4a^{\sigma}_{\alpha}\, b_{[\gamma[\sigma}\, g_{\beta]\delta]} \qquad [\alpha\beta], \tag{22.14}$$

где символ $[\alpha\beta]$ означает, что окончательный результат альтернируется по индексам α, β.

Если предположить, кроме того, что $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$, то

$$C_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 2\left(a_{[\alpha|\sigma|}\, a^{\sigma}{}_{[\gamma}\, g_{\delta]\beta]} + a_{\alpha[\gamma}\, a_{\delta]\beta}\right). \tag{22.15}$$

Рассмотрим теперь (см. задачу 1) эрмитиан

$$\overset{2}{A}_{c\bar{a}} \overset{\text{def}}{=} \varepsilon_{abc}\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}A^{a\bar{a}}A^{b\bar{b}}, \tag{22.16}$$

который получается в результате свертывания тривектора $\varepsilon_{abc} \overset{\text{def}}{=} \Delta_a^f l_{fbc}$ пространства R_3 и комплексно-сопряженного ему тривектора $\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ с эрмитианом. На основании задачи 1 и формулы (22.10) получим, что прообраз $\overset{2}{A}_{c\bar{a}}$ в V_4 будет иметь вид:

$$\overset{2}{a}_{\alpha\beta,\, \bar{\alpha}\bar{\beta}} = g_{\alpha\beta,\, \gamma\delta,\, \sigma\tau}\, \bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\, \bar{\gamma}\bar{\delta},\, \bar{\sigma}\bar{\tau}}\, a^{\gamma\delta,\, \bar{\gamma}\bar{\delta}}\, a^{\sigma\tau,\, \bar{\sigma}\bar{\tau}}$$

или

$$\overset{2}{a}_{\alpha\beta,\, \bar{\alpha}\bar{\beta}} = a_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\sigma}}{}_{\nu[\alpha}a_{\beta]}{}^{\nu}{}_{\bar{\sigma}\bar{\beta}}. \tag{22.17}$$

Так как полученный битензор является прообразом эрмитиана, то он простой, и для его вычисления по формуле (22.9) достаточно знать, чему равняется тензор:

$$\overset{2}{a}_{\beta\bar{\beta}} = \overset{2}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta,\, \alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\left(a^{\alpha\bar{\tau}}{}_{\sigma\alpha}\, a^{\sigma}{}_{\beta\bar{\tau}\bar{\beta}} - a^{\alpha\bar{\tau}}{}_{\sigma\beta}\, a^{\sigma}{}_{\alpha,\, \bar{\tau}\bar{\beta}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(a_{\sigma\bar{\tau}}\, a^{\sigma\bar{\tau}}{}_{\beta\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}}\, a^{\alpha}{}_{\beta}\right).$$

Если заметить, что

$$a_{\sigma\alpha}\, b^{\sigma}{}_{\beta,\, \gamma\delta} = \frac{1}{2}\, a_{\sigma\alpha}\left(b^{\sigma}{}_{\gamma}\, g_{\delta\beta} - b^{\sigma}{}_{\delta}\, g_{\gamma\beta} - b_{\beta\gamma}\, \delta_{\delta}^{\sigma} + b_{\delta\beta}\, \delta_{\gamma}^{\sigma}\right), \tag{22.18}$$

то нетрудно убедиться, что

$$a_{\sigma\bar{\alpha}}a^{\sigma}{}_{\beta}{}^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\beta}} = a_{\alpha\bar{\beta}}a^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\beta\bar{\beta}}a_{\sigma\tau}a^{\sigma\tau},$$

и поэтому окончательно

$$a^{2}_{\beta\bar{\beta}} = -\frac{1}{2}\left(a_{\beta\sigma}\, a^{\sigma}{}_{\bar{\beta}} - \frac{1}{4}\, a_{\sigma\tau}\, a^{\sigma\tau}\, b_{\beta\bar{\beta}}\right). \tag{22.19}$$

Пользуясь формулой (22.19), можно теперь построить систему инвариантов, определяющую искомый базис.

Рассмотрим тензор кривизны пространства и разложим его на изотропную и простую части:

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \overset{0}{R}_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \tag{22.20}$$

В бивекторном пространстве тензору кривизны отвечает симметрический тензор R_{ab}, с помощью которого по формулам (22.2) и (22.3) можно получить в комплексном R_3 тензорный образ B_{ab} и эрмитов образ $S_{a\bar{b}}$. Метрический тензор g_{ab} в R_6 является изотропным, в R_3 определяет только тензорный образ G_{ab}. Рассмотрим теперь величины B_{ab}, $S_{a\bar{b}}$, G^{ab} и ε_{abc} и образуем при помощи полного свертывания этих величин систему инвариантов:

$$\left.\begin{array}{lll} B_1 = B^a_a, & B_2 = \overset{2}{B}{}^a_a, & B_3 = \overset{2}{B}{}^a_b \overset{2}{B}{}^b_a, \\ S_2 = \overset{2}{S}{}^a_a, & S_3 = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} S^{a\bar{a}} S^{b\bar{b}} S^{c\bar{c}}, & S_4 = \overset{2}{S}{}^a_b \overset{2}{S}{}^b_a, \\ T_1 = B^a_b \overset{2}{S}{}^b_a, & T_2 = \overset{2}{B}{}^a_b \overset{2}{S}{}^b_a, & T_3 = B^a_b \overset{2}{S}{}^b_c \overset{2}{S}{}^c_a, \end{array}\right\} \quad (22.21)$$

где

$$\overset{2}{B}{}^a_b = B^a_c B^c_b, \qquad \overset{2}{S}{}^a_b = S^a_{\bar{c}} S^{\bar{c}}_b$$

и поднятие индексов производилось с помощью тензора G^{ab} или комплексно-сопряженного ему тензора $G^{\bar{a}\bar{b}}$. В системе инвариантов (22.21), как легко видеть, инварианты S_2, S_3, S_4 вещественны, так как при надчеркивании индексов, осуществляющем переход к комплексно-сопряженным величинам, они переходят в себя; инвариант B_1 также веществен, как это будет видно дальше. Остальные инварианты комплексны, и следовательно, если рассмотреть еще и комплексно-сопряженные инварианты, получим систему 14 инвариантов.

Для того чтобы доказать полноту системы (22.21), необходимо показать независимость этих инвариантов. Здесь необходимо сделать следующую оговорку: число независимых инвариантов пространства V_4 всегда можно связать с базисами элементарных делителей λ-матрицы $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ бивекторного пространства, которая уже не будет вообще симметрично-сдвоенной. Легко видеть, что, положив возможные характеристики λ-матрицы в основу классификации V_4, получим наряду со случаем [1 1 1, 1 1 1], *которому отвечает максимальное число независимых инвариантов*, и характеристики, соответствующие *непростым* элементарным делителям, например [2 1 1 1 1] и т. д., которые *нельзя рассматривать как частные случаи* V_4, отвечающих характеристике простого типа; мы имеем здесь по существу различные типы пространств. Это рассуждение становится особенно прозрачным для случая пространств Эйнштейна, когда имеют место три различных типа пространств T_i $(i=1, 2, 3)$. Ясно, однако, что V_4 с характеристикой *непростого типа* имеет заведомо число независимых инвариантов второго порядка меньше 14. Поэтому далее вопрос о полноте будет рассматриваться только для V_4, допускающих *максимальное* число независимых инвариантов.

Величины (22.21) являются алгебраическими функциями 20 существенных компонент тензоров B_{ab}, $\overline{B}_{ab}$, $S_{a\bar{b}}$. Для доказательства их независимости в случае максимального числа независимых параметров достаточно исследовать матрицу Якоби этих функций в пространстве, в котором координаты точки определяются значениями компонент тензоров B_{ab}, $\overline{B}_{ab}$, $S_{a\bar{b}}$. Если найдется такая точка, в которой определитель 14-го порядка будет отличен от нуля, то в окрестности такой точки всегда найдется точка, в которой он также отличен от нуля. Следовательно, независимость будет доказана, если подтвердится, что один из таких определителей 14-го порядка в одной такой точке не равен нулю. Нетрудно построить фактически такой определитель (см. задачу 2). Таким образом, (22.21) составляет искомый базис.

Для того чтобы записать инварианты в пространстве V_4, воспользуемся следующими формулами, в справедливости которых нетрудно убедиться (см. задачу 3):

$$\left.\begin{aligned} B^a_b &\sim \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ \overset{2}{B}{}^a_b &\sim \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}, \\ \overset{2}{S}{}^a_b &\sim \overset{0}{R}{}_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\overset{0}{R}{}_{\sigma}{}^{\gamma\delta} = 4\overset{0}{R}{}^{\sigma}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{[\gamma}_{[\sigma}\delta^{\delta]}_{\beta]}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.22)$$

где «$\sim$» — знак соответствия между величинами из R_3 и величинами в точке пространства V_4. Далее, инварианту C^a_a в R_3 будут отвечать два инварианта в точке пространства V_4:

$$C^a_a \sim C^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} + i\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{kl}C^{kl}_{\alpha\beta}. \qquad (22.23)$$

Вещественная и мнимая части этого выражения различаются тем, что в первом случае свертывание производится с помощью метрического битензора, а во втором — с помощью квадривектора. Применяя формулу (22.23) к комбинации величин (22.22), получим базис системы инвариантов в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = \overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\sigma\tau}, \quad B_2 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}, \quad B_3 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\beta},\\
&B_2^1 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\beta}, \quad B_3^1 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\lambda\nu}\overset{*}{R}{}^{\lambda\nu}{}_{\alpha\beta},
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

$$S_2 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\alpha}, \quad S_3 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\gamma}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\alpha}, \quad S_4 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\gamma}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\delta}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\alpha}, \quad (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\beta}, \quad T_2 = \overset{*}{R}{}^{\alpha[\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\sigma]}{}_{\alpha}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta},\\
&T_1^1 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}, \quad T_2^1 = e^{\alpha[\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\nu]}{}_{\alpha}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau}{}_{\nu\lambda}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\beta},\\
&T_3^1 = e^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}A^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta},
\end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

где

$$A^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} 4\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\sigma}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\beta} + 3\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\sigma}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}.$$

В этой схеме отсутствует инвариант $B_1^1 = e^{\sigma\tau}{}_{\lambda\nu}\overset{*}{R}{}^{\lambda\nu}{}_{\sigma\tau}$, так как он равен нулю в силу тождества Риччи. У инвариантов T_1^1 и T_3^1 имеются еще слагаемые вида $e^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\lambda}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\delta}$ и $e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\alpha\sigma}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\nu}{}_{\lambda}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\nu}$, которые также, вследствие того же тождества, обращаются в нуль. Инварианты T_1 и T_3 также упрощаются, так как они имеют слагаемые, в которых содержится тензор $\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}$, выражающийся вследствие (22.7) через $R\delta_\beta^\alpha$, где R — скалярная кривизна, и следовательно, эти члены выразятся через инварианты низших степеней. Таким образом, искомый базис определяется 14-ю инвариантами (α) (β) (γ).

Задачи

1. Показать, что метрический *тритензор*

$$g_{\alpha\beta,\,\gamma\delta,\,\lambda\nu} \overset{\text{def}}{=} g_{[\alpha[\gamma}g_{\delta]\lambda}g_{\nu]\beta}$$

изображается в R_6 тривектором l_{abc}, а в R_3 — тривектором

$$\varepsilon_{abc} = \Delta_a^f l_{fbc}.$$

2. Доказать независимость системы (22.21), исследуя определитель 14-го порядка, строки которого принимают значения S_2, S_3, S_4, B_1, B_2, B_3, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$. T_1, T_2, T_3, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$, а столбцы $\overline{B}_{12}$, $\overline{B}_{13}$, $\overline{B}_{23}$, R_{12}, R_{13}, R_{23}, $\overline{B}_{11}$, $\overline{B}_{22}$, B_{11}, B_{22}, B_{33}, $S_{1\overline{1}}$, $S_{2\overline{2}}$, $S_{3\overline{3}}$ при условии $B_{12}=B_{13}=B_{23}=0$ ([318], стр. 181).

3. Доказать формулы (22.22) и (22.23) ([318], стр. 181).

4. Показать, что в случае пространств Эйнштейна простейший базис составляет система инвариантов B_2, B^1_2, B_3, B^1_3. Сравнить с результатами § 19.

5. Показать, что для конформно-евклидовых пространств базис определяется инвариантами B_1, S_2, S_3, S_4. Если имеем пространство постоянной кривизны, то базис сводится к одному постоянному инварианту, например R.

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЯ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе проводится классификация полей тяготения в *свободном* пространстве, когда уравнения поля имеют вид $R_{\alpha\beta}=0$ по группам движений. Теория групп Ли позволяет подойти к инвариантному изучению этого важного частного случая.

§ 23. Классификация T_i по группам движений

Рассмотрим некоторое гравитационное поле в свободном пространстве, т. е. в такой области, где тензор энергии-импульса обращается в нуль. Геометрия такого поля определяется компонентами метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, заданного относительно некоторой системы координат. Но при этом $g_{\alpha\beta}(x)$ описывают не только физические, «чисто гравитационные» свойства пространства-времени, но и отражают особенности выбора системы отнесения. Различные попытки введения «инерциальных» систем координат, в которых по замыслу авторов можно было бы выделить эффект выбора системы координат ([225], стр. 441; [259]), не получили пока общего признания.

Ввиду этого естественно изучение полей гравитации связать с инвариантными свойствами метрики, определяемой полем, не зависящими от системы отнесения.

Пусть метрика пространства, определенная в некоторой системе координат, допускает группу Ли G_r непрерывных преобразований, сохраняющих метрику. Тогда этот же факт будет иметь место для метрики, заданной в любой другой системе отнесения. Преобразования этой группы отображают пространство на себя. Такое отображение пространства назовем *автоморфизмом*; преобразования, сохраняющие метрику, будут *движениями* в V_n. В этом смысле каждому полю тяготения отвечает свой автоморфизм. Очевидно, что $0 \leqslant r \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$ ($\leqslant 10$ при $n=4$), G_0 понимается как группа, состоящая из единицы (тождественное преобразование); при максимальном r получим пространство постоянной кривизны (пространство Минковского в случае $n=4$, сигнатуры $(-\ -\ -\ +)$ и нулевой скалярной кривизны).

Эта идея сопоставления полю геометрии заданного автоморфизма высказывалась несколькими авторами, и вопрос сводился к фактическому определению возможных групп движения и отвечающих им метрик пространства-времени; очевидно, эти соображения относятся не только к случаю свободного пространства, но и к полям тяготения общего вида (см. гл. V). В этой главе исследуются V_4 с сигнатурой $(-\ -\ -\ +)$ и уравнениями поля $R_{\alpha\beta}=0$ ([261], гл. II; [180]).

Наряду с изучением пространства-времени с точки зрения допускаемых им групп движений, имеются исследования, в которых рассматривается вопрос о конформных бесконечно малых преобразованиях, допускаемых этим многообразием [233], [236], или группах голономии [325], [328].

Пусть пространство T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ допускает движение с оператором $X=\xi^\alpha\partial_\alpha$. Для этого (см. § 10) необходимо и достаточно, чтобы ξ^α удовлетворял уравнениям Киллинга:

$$\underset{L}{\delta} g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0. \tag{23.1}$$

Для того чтобы V_n допускало группу G_r движений, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы однородных алгебраических уравнений (10.14) до номера k, относительно неизвестных ξ_α и $\xi_{\alpha,\beta}$ при условии (23.1), был равен $\frac{n(n+1)}{2}-r$, а добавление уравнений (10.14) с номером $k+1$ не меняло бы его (§ 10).

При классификации T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ по группам движений прежде всего возникают два вопроса: 1) Пусть T_i допускает группу движений G_r. Какие значения может принимать r при заданном i? 2) Какова будет структура группы при заданных i и r?

Вопрос о верхней границе для r решается теоремой: *не существует пространств* T_i ($i = 1, 2, 3$), *отличных от пространств постоянной кривизны, допускающих группы движений* G_r *с* $r \geqslant 7$.

V_n не может иметь группой движений G_r с $r > \frac{n(n+1)}{2}$ (при $n = 4$ $r \leqslant 10$). Если $r = 10$, то получим пространство постоянной кривизны, которое в данном случае является плоским пространством Минковского; оно всегда будет пространством T_1 и получится из (19.18), если там положить $\alpha_i = \beta_i = 0$. Этот тривиальный случай опускаем. Случай $r = 9$ исключается на основании общей теоремы Фубини ([16], стр. 270) о том, что V_n при $n > 2$ не допускает полной группы движений порядка $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Порядок полной группы r не может также равняться восьми, как это показано Егоровым ([230], стр. 202) для V_4 с сигнатурой $(- - - +)$. Покажем, что для T_i ($i = 1, 2, 3$) порядок максимальной подвижности может быть снижен еще на единицу.

Для того чтобы имело место равенство $r = 7$, необходимо, чтобы ранг матрицы системы

$$\underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{23.2}$$

или, более подробно,

$$\underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \overset{\sigma\tau}{B}{}_{\gamma\delta\alpha\beta} \xi_{\sigma,\tau} + \overset{\sigma}{A}{}_{\gamma\alpha\beta\delta} \xi_\sigma = 0, \tag{23.3}$$

т. е. системы однородных алгебраических уравнений с неизвестными $\xi_{\alpha,\beta}$ и ξ_α при условии (23.1), был равен 3. Здесь

$$\overset{\sigma}{A}{}_{\gamma\alpha\beta\delta} \equiv \overset{\sigma}{R}{}_{\beta\nu\alpha\delta,}\,, \quad \overset{\sigma\tau}{B}{}_{\gamma\delta\alpha\beta} \equiv 2\overset{\sigma}{\delta}{}_{[\delta} \overset{\tau}{R}{}_{\nu]\alpha\beta} + 2\overset{\sigma}{\delta}{}_{[\beta} \overset{\tau}{R}{}_{\alpha]\gamma\delta}. \tag{23.4}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов A и B в орторепере, для которого компоненты тензора кривизны определяются формулами (19.18), (19.19), (19.20). В случае (19.18), отбрасывая одинаковые в силу симметричной сдвоенности матриц (R_{ab}) и $(R_{ab,\lambda})$ строки, получим матрицу

$$
(T_1)\quad \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1414,\sigma} \\
0 & 0 & \beta_1-\beta_2 & 0 & 0 & \alpha_1-\alpha_2 & R_{1424,\sigma} \\
0 & \beta_3-\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_3-\alpha_1 & 0 & R_{1434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1423,\sigma} \\
0 & 0 & \alpha_2-\alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1-\beta_2 & R_{1431,\sigma} \\
0 & \alpha_1-\alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3-\beta_1 & 0 & R_{1412,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2424,\sigma} \\
\beta_2-\beta_3 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_3 & 0 & 0 & R_{2434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2431,\sigma} \\
\alpha_3-\alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2-\beta_3 & 0 & 0 & R_{2412,\sigma}
\end{pmatrix}; \quad (23.5)
$$

здесь первые шесть столбцов отвечают значениям $\sigma\tau$ в (23.4), равным 14, 24, ..., а последний столбец представляет четыре колонки, которые получаются при $\sigma = 1$, 2, 3, 4. Любой определитель четвертого порядка, составленный из элементов матрицы, должен равняться нулю. Рассматривая, например, определитель, составленный из 2, 3, 5, 6 строк и таких же столбцов, получим:

$$[(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2]\,[(\alpha_1-\alpha_3)^2+(\beta_1-\beta_3)^2]=0$$

или, полагая $\alpha_s + i\beta_s = K_s$ $(s = 1,\ 2,\ 3)$, получим:

$$(K_1-K_2)(\overline{K}_1-\overline{K}_2)(K_1-K_3)(\overline{K}_1-\overline{K}_3)=0.$$

Здесь $\overline{K}_s = \alpha_s - i\beta_s$ и, следовательно,

$$(K_1-K_2)(K_1-K_3)=0.$$

В силу равноправности K_1, K_2, K_3 нет необходимости рассматривать другие определители; достаточно проциклировать по номерам 1, 2, 3 последнее уравнение. Таким образом, получим:

$$(K_3-K_1)(K_1-K_2)=(K_2-K_3)(K_3-K_1)=$$
$$=(K_1-K_2)(K_2-K_3)=0,$$

откуда, если учесть еще условия $\Sigma\alpha_i = \Sigma\beta_i = \Sigma K_i = 0$, найдем, что $K_s = 0$ $(s = 1,\ 2,\ 3)$, т. е. получим пространство Минковского.

В случае T_2 из (19.19) получим матрицу

$$(T_2)\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1414,\sigma} \\
0 & -1 & \beta_2-\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_1+1 & R_{1424,\sigma} \\
0 & \beta_2-\beta_1 & 1 & 0 & \alpha_1-\alpha_2+1 & 0 & R_{1434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1423,\sigma} \\
0 & 0 & \alpha_1-\alpha_2+1 & 0 & -1 & \beta_2-\beta_1 & R_{1431,\sigma} \\
0 & \alpha_2-\alpha_1-1 & 0 & 0 & \beta_1-\beta_2 & 1 & R_{1412,\sigma} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2424,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & R_{2434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & R_{2431,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2412,\sigma} \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{3434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & R_{3412,\sigma}
\end{pmatrix}. \qquad (23.6)$$

Нетрудно убедиться, что, приравнивая определители четвертого порядка нулю, придем к противоречию.

Для T_3 из (19.20) следует матрица:

$$(T_3)\quad\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & R_{1424,\sigma} \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{1424,\sigma} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & R_{1434,\sigma} \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & R_{1423,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{1431,\sigma} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & R_{1412,\sigma} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & R_{2424,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & R_{2434,\sigma} \\
0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & R_{2431,\sigma} \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{2412,\sigma} \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{3434,\sigma} \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & R_{3412,\sigma}
\end{pmatrix}, \qquad (23.7)$$

из рассмотрения которой непосредственно видно наличие определителя шестого порядка, отличного от нуля, т. е. $r < 7$. Теорема имеет место.

Выписанные выше матрицы (23.5), (23.6), (23.7) позволяют уточнить порядок полной группы для каждого из трех типов T_i при помощи теоремы: *если* T_1 *допускает группу движений* C_r *с* $r > 4$, *то оно допускает и группу движений* G_{10} *и будет пространством специальной теории относительности (пространство Минковского); для* T_2 *максимальной подвижности* $r = 6$, *а для* T_3 $r \leqslant 4$.

Введем для краткости индексы бивекторного пространства, записывая $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ через $R_{ab,\sigma}$ (a, $b = 1, \ldots, 6$; $\sigma = 1, 2, 3, 4$), и обозначим:

$$R_{ab,\sigma} + iR_{ab+3,\sigma} = \Pi_{ab,\sigma} \qquad (a,\ b \leqslant 3). \tag{23.8}$$

Тогда тождества Бианки (5.16), если учесть симметричную сдвоенность $R_{ab,\sigma}$, следующую из (5.13), и соотношения (23.8) можно переписать в виде 12 тождеств:

$$\left.\begin{aligned}
&\Pi_{1a,1} + \Pi_{2a,2} + \Pi_{3a,3} = 0,\\
&\Pi_{3a,1} - \Pi_{1a,3} + i\Pi_{2a,4} = 0,\\
&\Pi_{2a,1} - \Pi_{1a,2} - i\Pi_{3a,4} = 0,\\
&\Pi_{3a,2} - \Pi_{2a,3} - i\Pi_{1a,4} = 0,
\end{aligned}\quad (a = 1,\ 2,\ 3).\right\} \tag{23.9}$$

Кроме того, из (5.13) следует:

$$\Pi_{11,\sigma} + \Pi_{22,\sigma} + \Pi_{33,\sigma} = 0. \tag{23.10}$$

Предположим, что T_1 допускает группу движений G_5. Тогда все определители шестого порядка, составленные из элементов матрицы (23.5), должны равняться нулю. Можно утверждать, что среди определителей четвертого порядка, составленных из первых шести столбцов, найдется по крайней мере один, отличный от нуля, так как в противном случае T_1 было бы плоским. Так как α_i и β_i при различных значениях $i = 1, 2, 3$ равноправны между собой, то, не нарушая общности, можно, например, предположить, что отличен от нуля определитель, составленный из 2, 3, 5, 6 строк и столбцов, равный

$$[(\alpha_1 - \alpha_3)^2 + (\beta_1 - \beta_3)^2]\,[(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2].$$

Так как все остальные элементы этих строк и столбцов, принадлежащие первым шести столбцам, равны нулю, то все миноры второго порядка матрицы, составленной из $R_{1414,\sigma}$, $R_{1423,\sigma}$, $R_{2424,\sigma}$, $R_{2431,\sigma}$, $R_{3434,\sigma}$, $R_{3412,\sigma}$ $(\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, и матрицы

$$\begin{pmatrix} \beta_2-\beta_3 & \alpha_2-\alpha_3 & R_{2434,\sigma} \\ \alpha_3-\alpha_2 & \beta_2-\beta_3 & R_{2412,\sigma} \end{pmatrix} \quad (\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (23.11)$$

должны равняться нулю. Комбинируя попарно по правилу (23.8) строки этих матриц, приходим к выводу, что любой минор второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11,\sigma} & 0 \\ \Pi_{22,\sigma} & 0 \\ \Pi_{33,\sigma} & 0 \\ \Pi_{23,\sigma} & K_2-K_3 \end{pmatrix} \quad (\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (23.12)$$

равен нулю. Отсюда и из (23.10) следует, что $\Pi_{aa,\sigma}=0$ $(a=1,\ 2,\ 3)$ независимо от того, равняется или нет K_2-K_3 нулю. Рассмотрим величины $\Pi_{23,\sigma}$. Если $K_2 \neq K_3$, то из (23.11) следует, что $\Pi_{23,\sigma}=0$, а из тождеств Бианки (23.9) получим, что все $\Pi_{ab,\sigma}=0$, т. е. все ковариантные производные компонент тензора кривизны равны нулю: пространство — *симметрическое*.

Если же $K_2=K_3$, то, записывая уравнения $\underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ в орторепере, вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \underset{s}{W}_1 = -i\,(\underset{s}{\xi}_{1,4}+i\underset{s}{\xi}_{2,3}),\quad \underset{s}{W}_2 = -i\,(\underset{s}{\xi}_{2,4}+i\underset{s}{\xi}_{3,1}), \\ \underset{s}{W}_3 = -i\,(\underset{s}{\xi}_{3,4}+i\underset{s}{\xi}_{1,2}) \end{aligned}\right\}(23.13)$$

и комбинируя полученные 12 различных уравнений по правилу (23.8), придем к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{11,\sigma}=0,\quad \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{12,\sigma}=(K_1-K_2)\underset{s}{W}_5, \\ \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{13,\sigma}=(K_3-K_1)\underset{s}{W}_2,\quad \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{22,\sigma}=0, \\ \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{23,\sigma}=(K_2-K_3)\underset{s}{W}_1,\quad \underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{33,\sigma}=0 \\ (\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4). \end{aligned}\right\}(23.14)$$

Следовательно,

$$\underset{s}{\xi}^{\sigma}\Pi_{23,\,\sigma}=0.$$

Предположим сначала, что допускаемая пространством T_1 группа G_5 нетранзитивна. Тогда она расслаивает пространство на гиперповерхности транзитивности. Если бы эти поверхности были *изотропные*, то метрику такого V_4 можно было бы ([260], стр. 219) привести к виду:

$$ds^2=2dx^1\,dx^4+g_{22}(x^4)\,{dx^2}^2+2g_{23}(x^4)\,dx^2\,dx^3+g_{23}(x^4)\,{dx^3}^2,$$

но, вычисляя для этой метрики λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$, легко убедиться, что она имеет непростые элементарные делители и, следовательно, не может определять T_1. Если же гиперповерхности неизотропные, то, допуская G_5, они должны допускать и группу G_6, так как для V_3 группа G_5 не может быть полной. Тогда V_4 допускает систему геодезически параллельных гиперповерхностей транзитивности постоянной кривизны. Принимая их за координатные и записывая уравнения поля, придем, как легко убедиться, к плоскому пространству Минковского.

Если же группа G_5 транзитивная, то среди векторов $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ существуют четыре линейно независимых. Следовательно, в ортореперe можно положить $\underset{s}{\xi}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_{s}$, и тогда из (23.14) опять следует, что $\Pi_{23,\,\sigma}=0$, и мы снова придем к *симметрическим* пространствам T_1.

Исследуем условия интегрируемости для системы уравнений

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0, \tag{23.15}$$

определяющей симметрические V_n. Дифференцируя (23.15) ковариантно и альтернируя, получим:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,[\lambda\,\nu]}=R_{\sigma\lambda\nu\,[\alpha}R^{\sigma}{}_{\beta]\,\gamma\delta}+R_{\sigma\lambda\nu\,[\gamma}R^{\sigma}{}_{\delta]\,\alpha\beta}=0.$$

Записывая это равенство в ортореперe, будем иметь

$$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1=0,\quad \alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3=0$$

и еще четыре уравнения, получаемые из этих циклірованием по номерам 1, 2, 3. Это означает, что

$$K_1(K_2-K_3)=K_2(K_3-K_1)=K_3(K_1-K_2)=0;$$

так как $\Sigma K_s=0$, то $K_s=0$ $(s=1,\ 2,\ 3)$ и исследуемое T_1 плоское, т. е. допускает группу движений G_{10}. Далее будут фактически указаны пространства T_1 с группой G_4, и следовательно, для T_1 имеем *лакуну* (в смысле «прерывности», «выпадания») в распределении порядков *полных* групп G_r между $r=4$ и $r=10$, причем границы этой лакуны точные.

Что касается пространств T_2, то далее будет фактически определено T_2 с G_6. Так как T_i не допускает G_r с $r>6$, то пространство максимальной подвижности T_2 допускает G_6. *Пространства T_2 и T_3 не могут быть пространствами постоянной кривизны.*

Рассмотрим, наконец, пространства T_3. Если $r>4$, то любой определитель порядка $\frac{n(n+1)}{2}-r+1=11-r\leqslant 6$, составленный из элементов матрицы (23.7), должен равняться нулю. Но из (23.7) следует, что существует определитель шестого порядка, отличный от нуля. Следовательно, для T_3 $r\leqslant 4$. На этом доказательство теоремы завершается.

Как следствие получаем, что для T_1 и T_3 следует рассмотреть лишь группы G_r с $r\leqslant 4$, а для T_2 — с $r\leqslant 6$.

Для фактического определения групп движений нужно предварительно выяснить, какие из *неизоморфных* между собой структур допускает пространство T_i. Мы убедимся далее, что только некоторые из приведенных в (10.16), (10.17), (10.19) структур допускаются пространствами T_i. При этом весьма существенным оказывается вопрос о *стационарных* подгруппах групп движений T_i, для решения которого основную роль играет теорема [228]: *если поле тяготения T_1 допускает группу движений со стационарной подгруппой H_p, то:* 1) $p=0$, *если K_1, K_2, K_3 различны между собой;* 2) $p\leqslant 2$, *если* $K_1=K_2\neq K_3$; 3) $p=6$, *если* $K_1=K_2=K_3$; *для T_2 имеем:* 1) $p=0$, *если K_1 и* $K_2\neq 0$; 2) $p\leqslant 2$, *если* $K_1=K_2=0$; *для T_3 всегда* $p=0$.

Здесь $K_s=\alpha_s+i\beta_s$ определяется формулами (19.18), (19.19).

Введем в пространстве T_i *нормальную* систему координат (§ 6), фиксируя некоторую точку в качестве начала. Тогда метрика представится в виде:

$$ds^2 = \left\{ \overset{0}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \overset{0}{R}_{\lambda\alpha\mu\beta} x^\lambda x^\mu + \ldots \right\} dx^\alpha dx^\beta. \qquad (23.16)$$

Из определения движения следует, что при движениях коэффициенты этого ряда должны оставаться инвариантными. Инвариантность первого из этих коэффициентов показывает, что стационарная подгруппа является в то же время подгруппой группы лоренцевых преобразований, оставляющих инвариантной форму $-dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{4^2}$.

Инвариантность второго коэффициента показывает, что всякая H_p оставляет неизменными коэффициенты $\overset{0}{R}_{\alpha(\beta\gamma)\delta}$. Отсюда, пользуясь (5.8), получим, что компоненты этого тензора инвариантны при преобразованиях H_p. Группа лоренцевых преобразований изоморфна группе вращений комплексного трехмерного евклидова пространства (Л. С. Понтрягин [205], стр. 423). Для того чтобы $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ оставались неизменными, необходимо, чтобы Π_{ab} оставались инвариантными относительно некоторого вращения комплексного R_3. Здесь учитывается, что матрица (R_{ab}) симметрично-сдвоенная. Таким образом, приходим к задаче: требуется определить ортогональные комплексные преобразования, переводящие в себя две формы в R_3:

$$\varphi = \sum_1^3 z^{i^2} \quad \text{и} \quad \psi = \sum \Pi_{ij} z^i z^j.$$

Для T_1 из (19.18) следует, что $\psi = \sum_1^3 K_i z^{i^2}$. Если K_i $(i = 1, 2, 3)$ различны между собой, то ясно, что не существует ортогонального невырожденного преобразования, отличного от тождественного, сохраняющего эти две формы. Если $K_1 = K_2 \neq K_3$, то существует такое преобразование, зависящее от одного параметра; так как $\Sigma K_s = 0$, то, полагая $K_1 = K_2 = \lambda$, $K_3 = -2\lambda$, $\lambda \neq 0$, видим, что допустимо вращение в плоскости $\{z^1, z^2\}$. Один комплексный параметр дает два вещественных и, следовательно, $p \leqslant 2$. В случае $K_1 = K_2 = K_3$ получаем тривиальный случай плоского T_1.

Для T_2 из (19.19) имеем: $\psi = K_1 {z^1}^2 + (K_2 + 1){z^2}^2 + (K_2 - 1){z^3}^2 + 2iz^1z^2$, где $K_1 + 2K_2 = 0$. Если K_1 и $K_2 \neq 0$, то H_p сводится к тождественному преобразованию. При $K_1 = K_2 = 0$ получим однопараметрическое преобразование, дающее в вещественной области $p \leqslant 2$.

Для T_3 из (19.20) следует, что $\psi = 2z^2(z^1 - iz^3)$, и легко убедиться, что H_p всегда совпадает с единицей группы.

§ 24. Неизоморфные структуры групп движений, допускаемых свободными пространствами

Две группы *изоморфны*, если при некотором выборе базисов этих групп их структуры одинаковы.

Переходя к вопросу об определении неизоморфных структур групп движений, допускаемых свободными пространствами, заметим, что определение структур непрерывных групп обычно сопряжено с большой вычислительной работой, но для групп движений, допускаемых полями тяготения T_i, можно доказать теорему, значительно упрощающую решение этого вопроса. Она заключается в следующем утверждении: *пространства T_i $(i = 1, 2, 3)$ могут допускать только такие группы движений G_r, которые являются подгруппами полной группы пространств T_i максимальной подвижности с тем же номером i $(i = 1, 2, 3)$.*

Группа G_r состоит в общем случае из стационарных преобразований и некоторых *сдвигов*; она производит *точечное* отображение пространства на себя: $\overset{*}{x}{}^\alpha = f(x^\alpha)$. Каждой точке пространства T_i можно сопоставить канонический орторепер; это сопоставление однозначно в общем случае, но может быть и неоднозначным, если некоторые из стационарных кривизн удовлетворяют дополнительным соотношениям (например, равны нулю). Во всяком случае координатные векторы $\underset{s}{i}{}^\alpha$ орторепера будут некоторыми функциями координат: $\underset{s}{i}{}^\alpha = \underset{s}{i}{}^\alpha(x)$. Конструктивно эти функции могут быть определены при помощи следующего алгорифма. В бивекторном пространстве рассмотрим λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$ и из системы уравнений

$$(R_{ab}-\underset{\sigma}{\lambda} g_{ab})\underset{\sigma}{W}^b=\underset{\sigma}{\varrho} g_{ab}\underset{\sigma-1}{W}^b \tag{24.1}$$

определим при помощи одних рациональных операций векторы $\underset{\sigma}{W}^b$ $(\sigma,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$, которым в пространстве T_i отвечают *непростые* вообще бивекторы $\underset{\alpha\beta}{W}^{\gamma\delta}(x)$ (см. § 19). Эти бивекторы для канонического орторепера совершенно определенным образом зависят от координатных векторов $\underset{s}{i}^{\alpha}$; отсюда при помощи опять-таки только рациональных операций определяются $\underset{s}{i}^{\alpha}$, как рациональные функции компонент тензора кривизны и метрического тензора. Скаляры $\underset{\sigma}{\varrho}$ в уравнениях (24.1) равны нулю или ± 1, в зависимости от номера σ и *типа* пространства. Именно (см. § 19) для T_1

$$\underset{\sigma}{\varrho}=0 \quad (\sigma=1,\ \ldots,\ 6),$$

для T_2

$$\underset{1}{\varrho}=\underset{4}{\varrho}=0,\qquad \underset{2}{\varrho}=\underset{5}{\varrho}=-1,\qquad \underset{3}{\varrho}=\underset{6}{\varrho}=1,$$

для T_3

$$\underset{1}{\varrho}=\underset{4}{\varrho}=0,\quad \underset{2}{\varrho}=\underset{3}{\varrho}=\underset{5}{\varrho}=\underset{6}{\varrho}=\pm 1.$$

Отметим, что компоненты метрического тензора

$$g^{\alpha\beta}=\sum_{\sigma=1}^{4} e_\sigma \underset{\sigma}{i}^{\alpha}\underset{\sigma}{i}^{\beta},\qquad e_\sigma=\pm 1, \tag{24.2}$$

и эта формула имеет место в любой системе координат.

Рассмотрим некоторое пространство T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, допускающее движение G_1, определяемое вектором Киллинга $\xi^\alpha(x)$. Это означает, что производная Ли в направлении поля ξ^α от метрического тензора равна нулю: $\underset{\xi}{\delta} g^{\alpha\beta}=0$. Рассмотрим, кроме того, пространство T_i' с соответствующим номером i максимальной подвижности и покажем, что оно в некоторой системе координат также допускает вектор ξ^{α} в качестве вектора Киллинга. Пусть имеют место пространства T_1 и T_1'. Компоненты $\underset{s}{i}{}^{\alpha}$ будут искаться из уравнений (24.1) как для T_1, так и для T_1', и в обоих случаях $\underset{\sigma}{\varrho}=0$ $(\sigma=1, \ldots, 6)$, но для T_1' $R_{ab}=\underset{\sigma}{\lambda}=0$ и потому орторепер определяется с большим произволом, который, в частности, позволяет в (24.2) выбрать $g^{\alpha\beta}=\mathrm{const}$ или наложить некоторые другие условия. Орторепер для T_1 содержится среди совокупности ортореперов, отвечающих T_1', и получается из нее при наложении некоторых условий на $\underset{s}{i}{}^{\alpha}(x)$, определенных для T_1'; обозначая результат наложения этих условий символом $\overset{*}{\underset{s}{i}}{}^{\alpha}$, имеем: $\underset{\xi}{\delta} g^{\alpha\beta}(\overset{*}{\underset{s}{i}}{}^{\alpha})=0$. Но если снять операцию, обозначенную значком «*», то $g^{\alpha\beta}$ при сохранении всех свойств $g^{\alpha\beta}(\overset{*}{\underset{s}{i}}{}^{\alpha})$ получат некоторый дополнительный произвол и, следовательно, тем более будут иметь место уравнения $\underset{\xi}{\delta} g^{\alpha\beta}=0$ для пространств T_1' максимальной подвижности, т. е. T_1' допускает движение G_1. Разумеется, наличие этих уравнений предопределяет некоторую специализацию системы координат, так как конкретное задание вектора Киллинга $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}$ означает некоторые условия, накладываемые на систему координат. Точно так же для пространств T_2' максимальной подвижности имеем специальный выбор $\underset{\sigma}{\varrho}$, указанный выше, и условия $\underset{\sigma}{\lambda}=0$ $(\sigma=1, \ldots, 6)$ (см. § 23), отвечающие группе G_6, и орторепер, отвечающий некоторому T_2, находится среди ортореперов, отвечающих T_2'. Далее все рассуждения повторяются буквально. Очевидно, что рассуждения повторятся и для пространств T_3, что доказывает справедливость утверждения, высказанного вначале.

Таким образом, для определения неизоморфных структур групп движений, допускаемых T_i, достаточно определить все возможные подгруппы разных порядков, содержащиеся в полной группе движений пространств максимальной подвижности для $i = 1,\ 2,\ 3$.

Пусть некоторое T_i допускает группу движений G_r, причем ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}{}^{\alpha})$, составленной из векторов Киллинга, равен $r < 4$, следовательно, группа нетранзитивная (см. § 10) и действует на r-мерных поверхностях транзитивности.

Рассмотрим в некоторой точке P одной из таких поверхностей касательную r-мерную плоскость; любой ее вектор можно представить как линейную оболочку r независимых векторов Киллинга $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}$. Для канонического орторепера в точке P метрический тензор r-мерной плоскости всегда можно представить в виде ([91], стр. 347):

$$\overset{*}{g}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \underset{k}{\xi}_i \overset{k}{\xi}_j, \qquad \underset{k}{\xi}_i \overset{k}{\xi}{}^j = \delta_i^j,$$

где $\overset{k}{\xi}_j$ — система векторов, *взаимных* по отношению к векторам $\underset{s}{\xi}_i$; $\overset{k}{\xi}_j$ полностью определяются в орторепере, если известны компоненты $\underset{s}{\xi}_i$ и, следовательно, определитель $|\overset{*}{g}_{ij}|$ полностью определяется при задании $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}$. Рассмотрим теперь соответствующее T'_i, максимальной подвижности. Оно может быть получено, если на T_i, кроме векторов $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}$, определяющих группу G_r, воздействовать некоторыми дополнительными векторами Киллинга, определяющими полную группу T'_i, оставляя при этом $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}$ $(s = 1,\ \ldots,\ r)$ неизменными. Следовательно, для T'_i подгруппа G_r будет представлена теми же векторами, как и в T_i. Среди всех орторeперов в точке P, отвечающих T'_i, как выяснено выше, найдется и такой орторепер, какой имеет место для T_i в точке P. Следовательно, определитель $|\overset{*}{g}_{ij}|$ в T_i и T'_i будет один и тот же: *если подгруппе G_r полной группы пространства максимальной подвижности отвечают изотропные или неизотропные поверхности транзитивности,* *то этот же факт будет иметь место и для пространства T_i, допускающего группу G_r.*

Как будет показано в следующем параграфе, пространство максимальной подвижности T_1' будет плоским пространством с десятичленной группой лоренцевых преобразований, включающей три лоренцевых и три обычных вращения и четыре сдвига. T_2' отвечает пространство с метрикой в специальной системе координат

$$ds^2 = -\operatorname{sh}^2 x^4\, dx^{22} - \sin^2 x^4\, dx^{32} + 2dx^1\, dx^4, \quad (24.3)$$

с *транзитивной* группой движений G_6, операторами

$$\left.\begin{aligned} X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = x^2 p_1 - \operatorname{cth} x^4 p_2, \\ X_5 = x^3 p_1 - \operatorname{ctg} x^4 p^3, \quad X_6 = \frac{1}{2}(x^{22} + x^{32})\, p_1 - \\ - x^2 \operatorname{cth} x^4 p_2 - x^3 \operatorname{ctg} x^4 p_4 + p_4 \end{aligned}\right\} \quad (24.4)$$

и структурой

$$\left.\begin{aligned} [X_1 X_k] = 0 \quad (k = 2, \ \ldots, \ 6), \\ [X_2 X_3] = [X_2 X_5] = [X_4 X_5] = [X_3 X_4] = 0, \\ [X_2 X_4] = X_1, \quad [X_2 X_6] = X_4, \quad [X_3 X_5] = X_1, \\ [X_3 X_6] = X_5, \quad [X_4 X_6] = -X_2, \quad [X_5 X_6] = X_3. \end{aligned}\right\} \quad (24.5)$$

Для пространств T_3' необходимо определить предварительно порядок группы в случае максимальной подвижности. Пусть в T_3' действует группа G_r движений, которая осуществляет автоморфизм этого пространства на себя. Каждой точке T_3' отвечает, согласно результатам § 19, однозначно канонический орторепер, для которого матрица $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ $(a, b = 1, \ \ldots, \ 6)$ определяется каноническими формулами (19.20). Координатные векторы каждого орторепера будут функциями координат точек T_3': $\underset{s}{i}^{\alpha} = \underset{s}{i}^{\alpha}(x)$. Из (24.1) следует, что орторепер не изменится, если вместо λ-матриц $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ рассматривать матрицу $\nu(R_{ab} - \lambda g_{ab})$, где ν — постоянная величина, может быть комплексная.

Группа движений T_3' не содержит стационарной подгруппы, и следовательно, каждое движение в T_3' означает отображение некоторой точки этого многообразия в другую точку, которой отвечает другой орторепер. Отображая все эти орторепepы на один из них, взятый в точке P, получим, что каждому движению отвечает некоторый поворот орторепера в точке P. Отображая теперь все такие ортореперы и отвечающие им битензоры на трехмерное комплексное метрическое плоское пространство, приходим к выводу: *группа движений T'_3 изоморфна такой группе линейных однородных преобразований трехмерной комплексной плоскости, при которой формы* (см. § 23)

$$\varphi = \sum_1^3 z^{i2}, \quad \psi = 2z^2(z^1 - iz^3)$$

переходят в себя с точностью до произвольного комплексного множителя ν.

Легко непосредственно убедиться, что такое преобразование содержит не больше одного произвольного комплексного коэффициента (именно коэффициента ν), т. е. двух произвольных вещественных.

Следовательно, *пространство T'_3 не может допускать группу движений более чем двучленную*. Если бы эта группа была абелевой, то преобразования, отвечающие этим двум вещественным параметрам, коммутировали бы, но $\nu \neq i\bar{\nu}$, и следовательно, *группа неабелева*.

Пространства T_1 в случае, если они допускают G_r с $r > 4$, будут плоскими, и следовательно, необходимо определить структуры следующих групп G_r: $r = 1, 2, 3, 4$ для T_1, $r = 1, \ldots, 6$ для T_2, $r = 1, 2$ для T_3.

Определение неизвестных структур производится при помощи следующего алгорифма. Пусть требуется найти подгруппу G_r полной группы пространства T'_i максимальной подвижности с базисом $X_1, \ldots, X_{r_i}$, где $r_1 = 10$, $r_2 = 6$ и $r_3 = 2$. Полагая, что операторы неизвестной подгруппы имеют вид:

$$Y_j = \sum_{k=1}^{r_i} C_j^k X_k, \quad C_j^k = \text{const},$$

учитывая структуру полной группы $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ и записывая все возможные уравнения структуры (10.18), (10.17), (10.19), непосредственно в каждом отдельном случае определим, когда уравнения структуры совместны, и тем самым найдем структурные константы. В каждой полученной таким образом структуре возможны изменения за счет замены базиса группы при помощи невырожденных линейных преобразований. Для групп G_5, когда канонические вещественные структуры не приведены в явном виде, необходимо воспользоваться условиями Якоби (10.18).

Можно указать другой способ решения проблемы. В следующей главе решается вопрос о классификации пространств V_4 с сигнатурой типа Минковского $(---+)$ в каждой данной точке многообразия и приводятся, в специальной системе координат, метрики, отвечающие всем возможным группам движений.

Чтобы отыскать T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ с данным номером i и некоторой группой заданной структуры, достаточно взять соответствующее пространство V_4, потребовать, чтобы метрика удовлетворяла уравнениям поля $(R_{\alpha\beta}=0)$, и затем вычислить в бивекторном пространстве λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$, потребовать, чтобы характеристика ее была того же типа, который отвечает фиксированному номеру i.

Этот простой по идее метод имеет следующие недостатки: 1) он приводит к громоздким выкладкам уже на первом этапе, когда записываются уравнения поля, и 2) условия, определяющие *тип* пространства, записываются дифференциальными уравнениями второго порядка, как и уравнения поля, но уже *нелинейными* относительно старших производных. Эти затруднения становятся особенно ощутимыми в случае малой подвижности пространства (G_r при $r=1,\ 2$). Наложение таких условий неизбежно, так как вообще (и особенно в случае $r=1,\ 2$) пространства различного типа могут допускать группу одной и той же структуры (см. § 52). Ввиду этого является более предпочтительным следующий, третий, метод разыскания возможных структур G_r для данного пространства T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$, при котором условия, определяющие тип пространства, используются непосредственно при нахождении структуры группы.

Этод метод сводится к следующему. Пусть T_i допускает группу G_r $(r \geqslant 2)$. Тогда вследствие (10.6) векторы

Киллинга должны удовлетворять уравнениям структуры

$$\underset{p}{\xi}^{\sigma}\partial_{\sigma}\underset{q}{\xi}^{\alpha}-\underset{q}{\xi}^{\sigma}\partial_{\sigma}\underset{p}{\xi}^{\alpha}=C^{s}_{pq}\underset{s}{\xi}^{\alpha}$$

или, в силу того, что риманова связность (см. § 3) имеет кручение, равное нулю: $\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=0$,

$$\underset{p}{\xi}^{\sigma}\underset{q}{\xi}^{\alpha}{}_{,\sigma}-\underset{q}{\xi}^{\sigma}\underset{p}{\xi}^{\alpha}{}_{,\sigma}=C^{s}_{pq}\underset{s}{\xi}^{\alpha}, \tag{24.6}$$

что дает инвариантную форму записи *уравнениям структуры*. Так как риманова метрика сохраняется при движениях, то должна сохраняться и риманова связность, определяемая этой метрикой. Другими словами, производная Ли коэффициента связности должна обращаться в нуль для любого вектора Киллинга, допускаемого группой G_r:

$$\underset{L}{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\xi^{\alpha}{}_{,\beta\gamma}+\xi^{\sigma}R^{\alpha}{}_{\beta\sigma\gamma}=0. \tag{24.7}$$

Дифференцируя (24.6) ковариантно и заменяя $\xi_{\alpha,\beta\gamma}$ при помощи этой формулы, а также учитывая тождества Риччи (5.8), получим:

$$\underset{p}{\xi}_{\alpha,}{}^{\sigma}\,\underset{q}{\xi}_{\beta,\sigma}-\underset{p}{\xi}_{\beta,}{}^{\sigma}\,\underset{q}{\xi}_{\alpha,\sigma}+\underset{p}{\xi}^{\sigma}\underset{q}{\xi}^{\tau}R_{\sigma\tau\alpha\beta}=C^{s}_{pq}\underset{s}{\xi}_{\alpha,\beta}. \tag{24.8}$$

Дифференцируя (24.8) ковариантно и снова производя ту же самую замену, получим еще одно соотношение:

$$\begin{aligned}R_{\sigma\alpha\tau\gamma}(\underset{q}{\xi}_{\beta,}{}^{\sigma}\,\underset{p}{\xi}^{\tau}-\underset{p}{\xi}_{\beta,}{}^{\sigma}\,\underset{q}{\xi}^{\tau})+R_{\sigma\beta\tau\gamma}(\underset{p}{\xi}_{\alpha,}{}^{\sigma}\,\underset{q}{\xi}^{\tau}-\underset{q}{\xi}_{\alpha,}{}^{\sigma}\,\underset{p}{\xi}^{\tau})&+\\+(R_{\sigma\alpha\tau\beta}-R_{\sigma\beta\tau\alpha})(\underset{p}{\xi}^{\sigma}{}_{,\gamma}\,\underset{q}{\xi}^{\tau}+\underset{q}{\xi}^{\tau}{}_{,\gamma}\,\underset{p}{\xi}^{\sigma})&+\\+\underset{p}{\xi}^{\sigma}\underset{q}{\xi}^{\tau}(R_{\sigma\alpha\tau\beta,\gamma}-R_{\sigma\beta\tau\alpha,\gamma})=-C^{s}_{pq}\underset{s}{\xi}^{\sigma}R_{\sigma\gamma\alpha\beta}&.\end{aligned} \tag{24.9}$$

Формулы (24.6), (24.8), (24.9) имеют место в любой голономной системе координат. В частности, относя пространство T_i к такой нормальной системе координат, для которой в начале координат компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют канонический вид, получим для определения структурных констант систему уравнений, в которой компоненты тензора кривизны можно заменить при помощи (19.18), (19.19), (19.20). После этого остается определить значения $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$, $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ и C^{s}_{pq}; для уравнений (24.9) необходимо, кроме того, или определить $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$, или исключить эти компоненты. Отметим, что если из (24.9) исключить $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$ при помощи уравнений (23.3), записанных для каждого из векторов Киллинга, то придем к тождеству, т. е. вместо (24.9) можно брать уравнения (23.3).

Кроме того, нужно учесть следующие соображения: 1) допустима любая комбинация с постоянными коэффициентами для векторов $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$; поэтому можно заранее r компонент $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ привести к нулю или единице; 2) для любого вектора Киллинга невозможен случай, когда $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}=\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=0$ *одновременно*, так как это означало бы, что $\underset{s}{\xi}{}^{\alpha}=0$ в любой системе координат ([147], стр. 80, 260); 3) если группа допускает стационарную подгруппу H_p, то p векторов $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}=0$ $(s=1,\ \ldots,\ p)$.

Ввиду этого получаем следующий алгорифм: 1) пользуясь указанными замечаниями, заранее обращаем в 0 и 1 некоторые из компонент $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ или $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$; 2) решаем систему уравнений (24.6), (24.8); 3) дополняем, если это потребуется, систему (24.9), исключив предварительно $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$, а также проверяем для полученных констант условия Якоби (10.18).

Заметим, что важна не только структура группы, но и ранг матрицы $(\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha})$ и другие геометрические свойства операторов; в частности, решающим является вопрос о том, будут или нет поверхности транзитивности *изотропными*, о чем можно составить суждение, изучая $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ и $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha,\beta}$ в начале координат. Поэтому определение начальных значений

$\overset{0}{\xi}{}^{\alpha}_{s}$ и $\overset{0}{\xi}{}^{\alpha,\beta}_{s}$ является не менее необходимым, чем нахождение структурных констант.

Из непосредственного рассмотрения возможных вещественных неизоморфных структур групп G_3, G_4, G_5 следует, что каждая G_5 допускает подгруппу G_4 и каждая группа G_4 допускает подгруппу G_3, но среди G_3 имеется группа вращений (неразрешимая G_3 IX типа по классификации (10.17)), не содержащая подгруппы G_2, и других G_3, обладающих таким свойством, не существует. Далее, при фактическом определении структур алгорифм применяется сначала для групп G_3. Затем остается исследовать только такие G_4, которые содержат найденные неизоморфные вещественные структуры G_3, и т. д.

Возможность применения такого алгорифма основывается на существовании канонических форм (19.18), (19.19), (19.20) для трех типов полей тяготения T_i. Чтобы избежать громоздких результатов и учитывая, что, как указано выше, все возможные пространства T_i ($i = 1, 2, 3$) содержатся среди многообразий V_4, указываемых в следующей главе, ограничимся рассмотрением наиболее интересных пространств T_1, приводящих непосредственно к известным в литературе решениям или дающих принципиально новые решения уравнений поля; для T_2 и T_3 классификация будет полной.

Применяя указанный выше алгорифм, получим следующие возможные структуры.

Пространства T_1

$$r = 2$$

Возможны как абелева, так и неабелева группы:

1. $[X_1 X_2] = 0,$ 2. $[X_1 X_2] = X_1.$

$$r = 3$$

В зависимости от того, какова кратность стационарных кривизн K_i ($i = 1, 2, 3$), получаем следующие возможности. Если $K_1 = K_2 = K_3$, то пространство плоское (см. § 19) и допускает 10-членную группу движений. В случае

$K_1 = K_2 \neq K_3$ возможны следующие структуры:

$$1.\ [X_1X_2] = X_3, \quad [X_2X_3] = eX_1, \quad [X_3X_1] = X_2, \quad e = \pm 1, \tag{24.10}$$

т. е. имеем типы VIII и IX *неразрешимых* групп по классификации (10.16). Кроме того, с точностью до нумерации $\overset{0}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha} = 0$, $\overset{0}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}$, а $\overset{0}{\underset{3}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}$ или δ_4^{α}.

Это позволяет определить метрический тензор двумерной плоскости, являющейся линейной оболочкой системы ненулевых векторов $\{\overset{0}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha}, \overset{0}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}\}$, и выяснить, таким образом, сигнатуру метрики поверхности транзитивности. Следовательно, *имеются одночленная стационарная подгруппа* и ввиду этого *двумерные поверхности транзитивности*, про которые можно также утверждать, что они *неизотропные с метрикой сигнатуры* $(-\,-)$ *или* $(-\,+)$.

$$2.\ [X_1X_2] = 0, \quad [X_1X_3] = X_2, \quad [X_2X_3] = -X_1, \tag{24.11}$$

т. е. разрешимая группа типа VII с теми же условиями, что и выше.

3. Абелова группа $[X_iX_j] = 0$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ с начальными значениями

$$\left.\begin{array}{ll}
\overset{0}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}, \quad \overset{0}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha}, \quad \overset{0}{\underset{3}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_4^{\alpha}, & \\
\overset{0}{\underset{1}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta} = \begin{cases} k & \alpha\beta = 12, \\ 0, & \end{cases} & \overset{0}{\underset{2}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta} = \begin{cases} -a & \alpha\beta = 13, \\ -b & \alpha\beta = 13, \\ 0, & \end{cases} \\
\overset{0}{\underset{3}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta} = \begin{cases} a & \alpha\beta = 14, \\ b & \alpha\beta = 14, \\ 0. & \end{cases} &
\end{array}\right\} \tag{24.12}$$

Следовательно, *стационарная подгруппа совпадает с единицей группы*. Группа совпадает со своим центром. Ранг матрицы (ξ^{α}) равен порядку группы, вследствие чего *поверхности транзитивности трехмерные, неизотропные*;

$$K_1,\ K_2,\ K_3 \neq 0. \qquad (24.13)$$

4. Абелева группа с начальными значениями

$$\overset{0}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{1}, \quad \overset{0}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{2} - \delta^{\alpha}_{3}, \quad \overset{0}{\underset{3}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{4}, \qquad (24.14)$$

т. е. имеют место *неизотропные гиперповерхности транзитивности неопределенной метрики*.

5. Группа со структурой типа VII

$$\left.\begin{aligned} &[X_1X_2] = 0, \quad [X_1X_3] = -\frac{K}{2}X_1 - \frac{K\sqrt{3}}{2}X_2, \\ &[X_2X_3] = \frac{K\sqrt{3}}{2}X_1 - \frac{K}{2}X_2 \qquad (K \neq 0), \end{aligned}\right\} \quad (24.15)$$

действующая на гиперповерхности транзитивности типа $(- - +)$.

$$r = 4$$

1.

$$[X_1X_2] = X_3, \quad [X_2X_3] = X_1, \quad [X_3X_1]\, X_2, \quad [X_iX_4] = 0 \quad (24.16)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3),$$

2. $[X_1X_2] = X_3,\ [X_2X_3] = -X_1,\ [X_3X_1] = X_2,\ [X_iX_4] = 0$

$$(i = 1,\ 2,\ 3), \qquad (24.17)$$

3.

$$\left.\begin{aligned} &[X_1X_2] = X_3, \quad [X_1X_3] = X_2, \quad [X_2X_3] = KX_1, \\ &[X_1X_4] = 0, \quad [X_2X_4] = \varepsilon X_2, \quad [X_3X_4] = \varepsilon X_3, \end{aligned}\right\} \quad (24.18)$$

где $\varepsilon = 0$ или 1 и имеют место условия

$$\overset{0}{\underset{4}{\xi}}{}^{\alpha} = p\delta^{\alpha}_{1} + q\delta^{\alpha}_{2}, \quad \overset{0}{\underset{4}{\xi}}{}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 2 & \alpha\beta = 12, \\ 0. \end{cases}$$

4. $[X_iX_j] = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),\ [X_1X_4] = -\frac{K}{2}X_1 - \frac{K\sqrt{3}}{2}X_3,$

$$[X_2X_4] = KX_2, \quad [X_3X_4] = \frac{K\sqrt{3}}{2}X_1 - \frac{K}{2}X_3, \quad K \neq 0,$$

и ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}{}^{\alpha})$ равен 4, т. е. группа *просто-транзитивная*.

Пространства T_2

Для пространств T_2 структуры групп можно искать первым из указанных выше способов, непосредственно изучая все возможные подгруппы различных порядков полной 6-членной группы. К тому же результату приводит довольно быстро и третий метод.

$$r=2$$

Возможны как абелевы, так и неабелевы группы движений:

$$1.\ [X_1X_2]=0, \quad 2.\ [X_1X_2]=X_1.$$

$$r=3$$

1. Абелева группа, действующая на *изотропной* гиперповерхности транзитивности,

$$[X_iX_j]=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \tag{24.19}$$

Так как у этой нетранзитивной группы ранг матрицы совпадает с порядком группы, то в качестве операторов можно взять любые операторы, удовлетворяющие структуре, чем группы определяются с точностью до *подобия*. Операторы можно выбрать следующим образом: $X_i=p_i$. Стационарная подгруппа этой группы G_3 совпадает с единицей группы.

2. Группа G_3 типа II со структурой

$$[X_1X_2]=0, \quad [X_1X_3]=0, \quad [X_2X_3]=X_1, \tag{24.20}$$

действующая на *изотропной* гиперповерхности. В качестве оператора группы можно выбрать следующие:

$$X_1=p_1, \quad X_2=p_2+p_3, \quad X_3=x^2p_1-\operatorname{cth} x^4p_2. \tag{24.21}$$

3. Группа G_3 того же типа II, но уже действующая на *изотропных двумерных* поверхностях транзитивности. Операторы этой группы всегда можно задать в виде:

$$X_1=p_1, \quad X_2=p_2, \quad X_3=x^2p_1-\operatorname{cth} x^4p_2. \tag{24.22}$$

4. Группа G_3 типа III со структурой

$$[X_1X_2]=0, \quad [X_1X_3]=X_1, \quad [X_2X_3]=0, \tag{24.23}$$

действующая на *неизотропной* гиперповерхности V_3 транзитивности; операторы могут быть выбраны, например, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = x^2 p_1 + (1 - \operatorname{cth} x^4)\, p_2, \quad X_2 = p_1, \\ X_3 = \frac{1}{2}\left({x^2}^2 + {x^3}^2\right) p_1 - x^2 \operatorname{cth} x^4 p_2 - x^3 \operatorname{ctg} x^4 p_3 + p_4. \end{aligned}\right\} \qquad (24.24)$$

Этим исчерпываются возможные структуры G_3, допускаемые пространством T_2 для $r \leqslant 3$. Структур G_4 и G_5 приводить здесь не будем, так как их удобнее искать, исходя из других соображений.

Для пространств T_3, как показано выше, возможна лишь неабелева группа движений G_2 II; $[X_1 X_2] = X_1$.

Соображения, изложенные в этом параграфе, приводят к необходимости исследования пространств максимальной подвижности для каждого из трех возможных типов пространств T_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$.

Для T_1 решение вопроса очевидно, для T_2 оно усложняется, что же касается пространств T_3, то задача становится и технически и принципиально сложной; это объясняется малой подвижностью в свободных пространствах третьего типа. Именно поэтому до сих пор в литературе не встречалось ни одного примера полей такого рода, а приведенное в следующем параграфе решение определяет свободные пространства нового типа.

§ 25. Пространства максимальной подвижности T_1, T_2, T_3

Вопрос о пространствах такого рода решает следующая теорема: *пространствами максимальной подвижности будут*: 1) *для* T_1 — *пространство Минковского*; 2) *для* T_2 — *пространство, допускающее 6-членную разрешимую транзитивную группу с метрикой в специальной системе координат*

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 - \operatorname{sh}^2 x^4\,{dx^2}^2 - \sin^2 x^4\,{dx^3}^2;$$

3) *для* T_3 — *пространство, допускающее неабелеву группу движений* G_2 *с метрикой в специальной системе координат*

$$ds^2 = e\left(\alpha\,{dx^1}^2 + {dx^2}^2\right) + 2\,dx^3\,dx^4 + \lambda\,{dx^4}^2,$$

где $e = \pm 1$, *а* α *и* λ — *функции, определяемые условиями* (25.49).

Для доказательства этого утверждения рассмотрим каждый из трех возможных типов пространств в отдельности.

Пространство T_1

Вопрос, как отмечалось выше, является тривиальным, так как среди многообразий T_1 находится плоское пространство Минковского и, наоборот, всякое T_1, допускающее группу движений G_{10}, будет при сигнатуре $(- - - +)$ пространством-временем специальной теории относительности.

Пространство T_2

Пусть T_2 допускает группу движений максимального порядка G_6. Из доказательства, приведенного в § 23, следует, что это возможно только в том случае, если T_2 — *симметрическое* пространство и его стационарные кривизны $K_s = \alpha_s + i\beta_s = 0$.

Введем в таком пространстве T_2 *нормальную* систему координат, относительно которой метрический тензор будет иметь вид (7.20):

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m\, 2^{2m+2}}{(2m+2)\,!}\, m_\alpha{}^{\sigma_1} m_{\sigma_1}{}^{\sigma_2} \dots m_{\sigma_{m-1}}{}_{\beta},$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \overset{0}{R}_{\alpha\lambda\beta\sigma} x^\lambda x^\sigma,$$

а x^σ — нормальные координаты, $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — значения компонент этих тензоров в начале нормальной системы координат. Вычисляя эти коэффициенты для орторепера (19.19), где положено $\alpha_s = \beta_s = 0$, получим:

$$\overset{0}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\delta} = h_{\alpha\beta} h_{\gamma\delta} - p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta},$$

где

$$(h_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (p_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$h_{\alpha\lambda} x^\lambda = y_\alpha, \quad p_{\alpha\lambda} x^\lambda = z_\alpha$$

и используя для поднятия индексов тензор Минковского, получим:

$$m_\alpha{}^{\sigma_1} m_{\sigma_1}{}^{\sigma_2} \ldots m_{\sigma_r \beta} = (-1)^r \nu^{2r} [y_\alpha y_\beta + (-1)^{r+1} z_\alpha z_\beta],$$
$$\nu = i(x^1 - x^4).$$

Следовательно,

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + A y_\alpha y_\beta + B z_\alpha z_\beta,$$

где

$$A = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m+2}}{(2m+2)!} \nu^{2m-2} = -\frac{1}{\nu^4} (\operatorname{sh}^2 \nu - \nu^2),$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+2}}{(2^m+2)!} \nu^{2m-2} = -\frac{1}{\nu^4} (\sin^2 \nu - \nu^2).$$

Отсюда, производя замену $\nu \longrightarrow i\nu$, получим:

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\nu^4} [(\nu^2 - \operatorname{sh}^2 \nu) y_\alpha y_\beta + (\nu^2 - \sin^2 \nu) z_\alpha z_\beta], \tag{25.1}$$
$$\nu = x^1 - x^4.$$

Можно определить невырожденные преобразования, которые переводят метрику (25.1) в одну из следующих метрик:

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \operatorname{sh}^2 \nu\, dx^{2^2} - \sin^2 \nu\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \tag{25.2}$$
$$\nu = x^1 - x^4$$

или же

$$ds^2 = 2dx^1\, dx^4 - \operatorname{sh}^2 x^4\, dx^{2^2} - \sin^2 x^4\, dx^{3^2}. \tag{25.3}$$

Интегрируя для метрики (25.3) уравнения Киллинга, найдем, что пространство допускает группу движений G_6 с операторами

$$\left.\begin{gathered} X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = x^2 p_1 - \operatorname{cth} x^4 p_2, \\ X_5 = x^3 p_1 - \operatorname{ctg} x^4 p_3, \\ X_6 = \frac{1}{2}(x^{2^2} + x^{3^2}) p_1 - x^2 \operatorname{cth} x^4 p_2 - x^3 \operatorname{ctg} x^4 p_3 + p_4. \end{gathered}\right\} \tag{25.4}$$

. Вычисляя коммутаторы этих операторов, получим структуру

$$\left.\begin{gathered}[X_1X_k]=0 \quad (k=2, \ldots, 6),\\ [X_2X_3]=[X_3X_4]=[X_2X_5]=[X_4X_5]=0,\\ [X_2X_4]=X_1, \quad [X_2X_6]=X_4, \quad [X_3X_5]=X_1,\\ [X_3X_6]=X_5,\\ [X_4X_6]=X_2, \quad [X_5X_6]=-X_3.\end{gathered}\right\} \tag{25.5}$$

Эта структура показывает, что G_6 — *разрешимая группа*, а из (25.4) следует, что ранг матрицы равен четырем, т. е. группа *транзитивная*.

Таким образом, для T_2 утверждение имеет место.

Пространство T_3

В этом случае задача значительно усложняется.

Для исследования T_3 является полезной следующая теорема, отмеченная впервые в работе Л. Беля [299]: *во всяком T_3 существует изотропное геодезическое векторное поле $l^\alpha(x)$, удовлетворяющее условиям*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta l^\delta = e_{\alpha\beta\sigma\tau}R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}l^\beta l^\delta = 0, \tag{25.6}$$

$$g_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta = 0, \quad l^\sigma l^\alpha{}_{,\sigma} = al^\alpha. \tag{25.7}$$

Здесь $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *дискриминантный* тензор пространства ([91], стр. 366; см. задачу 12 § 10).

Для доказательства существования такого поля и свойств (25.6), (25.7) достаточно проверить их для того неголономного ортореперa, в котором имеют место канонические матрицы (19.20). В этой системе отнесения $l^\alpha = \nu(\delta^\alpha_2 + \delta^\alpha_4)$ и указанные свойства проверяются непосредственно; последнее соотношение (25.7) требует применения тождеств Бианки (5.16) (см. задачи 2 и 4 § 19).

Имеет место также следующий факт. *Если T_3 допускает группу движений G_r, то производная Ли вектора l^α в направлении любого вектора Киллинга $\underset{s}{\xi}{}^\alpha$ $(s=1, \ldots, r)$ удовлетворяет уравнениям*

$$\underset{s}{\delta} l^\alpha = \underset{s}{\omega} l^\alpha. \tag{25.8}$$

Если учесть, что производная Ли от тензоров $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $E_{\alpha\beta\gamma\delta}$ равна нулю, то, дифференцируя (25.6) в смысле Ли и относя результат к ортореперу (19.20), получим:

$$\delta \underset{s}{l}{}^1 \overset{*}{=} \delta \underset{s}{l}{}^3 \overset{*}{=} \delta \underset{s}{l}{}^2 - \delta \underset{s}{l}{}^4 \overset{*}{=} 0,$$

где знак «$\overset{*}{=}$» означает «равенство в специальной системе координат», и следовательно,

$$\delta \underset{s}{l}{}^\alpha \overset{*}{=} \omega \underset{s}{l}{}^\alpha.$$

Но это тензорное уравнение будет справедливо уже и в любой системе координат, и поэтому (25.8) имеет место.

Так как T_3 может допускать в качестве максимальной группы только неабелеву группу движений G_2, то структуру этой группы можно привести к виду $[X_1X_2]=X_1$.

Так как группа нетранзитивная, то она действует вдоль двумерных поверхностей транзитивности, и всегда можно независимо от того, будут ли поверхности изотропными или нет, выбрать систему координат так, что векторы Киллинга, определяющие операторы группы, будут иметь вид:

$$\underset{1}{\xi}{}^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad \underset{2}{\xi}{}^\alpha = x^1\delta_1^\alpha + \delta_4^\alpha. \tag{25.9}$$

После этого система координат будет определена с точностью до преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 + e^{x^4} f(x^2, x^3),\\ x^{2'} &= \varphi(x^2, x^3),\\ x^{3'} &= \psi(x^2, x^3),\\ x^{4'} &= x^4 + \theta(x^2, x^3), \end{aligned}\right\} \tag{25.10}$$

где f, φ, ψ, θ — аналитические в некоторой области функции, удовлетворяющие условию невырожденности преобразования $\varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2 \neq 0$ $\left(\varphi_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \ \ldots\right)$ и в остальном произвольные. Такие преобразования, не меняющие вида данных операторов X_s, назовем *допустимыми для* X_s;

используя произвол в выборе f, φ, ψ, θ, можно упростить некоторые из компонент метрического тензора.

Вопрос о сигнатуре метрики на поверхностях транзитивности пока несуществен, и ввиду этого x^4 не отождествляется, вообще говоря, с *временной* координатой.

Интегрируя уравнения Киллинга для векторов (25.9), получим метрику искомого пространства в виде:

$$\left.\begin{aligned} &g_{1\alpha} = a_{1\alpha}(x^2, x^3)\, e^{-kx^4}, \quad k = \begin{cases} 2 \text{ при } \alpha = 1, \\ 1 \text{ при } \alpha = 2,\ 3,\ 4, \end{cases} \\ &g_{ij} = a_{ij}(x^2, x^3) \quad (i,\ j \neq 1). \end{aligned}\right\} \qquad (25.11)$$

Определим изотропно-геодезическую конгруэнцию l^α, существование которой отмечено выше. Интегрируя уравнения (25.8) для векторов (25.9), получим:

$$l^\alpha = \nu\,(e^{x^4}\lambda_1\delta^\alpha_1 + \lambda_2\gamma^\alpha_2 + \lambda_3\delta^\alpha_3 + \lambda_4\delta^\alpha_4),$$

где $\nu = \nu(x^1, x^2, x^3, x^4) \neq 0$, а $\lambda_i = \lambda_i(x^2, x^3)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Применяя допустимое преобразование (25.10), получим в новой системе координат для компонент l^α следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} l^{1'} &= \nu e^{-\theta} e^{x^{4'}} (\lambda_1 + f_{2'}\lambda_2 + f_{3'}\lambda_3 + f\lambda_4), \\ l^{2'} &= \nu\,(\varphi_{2'}\lambda_2 + \varphi_{3'}\lambda_3), \\ l^{3'} &= \nu\,(\psi_{2'}\lambda_2 + \psi_{3'}\lambda_3), \\ l^{4'} &= \nu\,(\theta_{2'}\lambda_2 + \theta_{3'}\lambda_3 + \lambda_4). \end{aligned}\right\} \qquad (25.12)$$

Отсюда следует, что возможность использования произвольных функций f, φ, ψ, θ существенно зависит от того, будут или нет λ_2, λ_3, λ_4 тождественно равны нулю при *любом* допустимом преобразовании. Покажем прежде всего, что величина λ_4 не равна нулю тождественно. Если бы $\lambda_4 \equiv 0$, то $\lambda_2 = \lambda_3 \equiv 0$ и $l^\alpha = \sigma\delta^\alpha_1$, т. е. конгруэнция l^α с точностью до скалярного множителя совпадала бы с вектором Киллинга $\underset{1}{\xi}{}^\alpha$. В силу первого уравнения (25.7) получим, ковариантно дифференцируя,

$$\underset{1}{\xi}{}^\sigma \underset{1}{\xi}{}_\sigma = 0, \qquad \underset{1}{\xi}{}^\sigma{}_{,\alpha}\, \underset{1}{\xi}{}_\sigma = 0, \qquad \underset{1}{\xi}{}^\sigma{}_{,\beta}\, \underset{1}{\xi}{}_{\sigma,\alpha} + \underset{1}{\xi}{}^\sigma\, \underset{1}{\xi}{}_{\sigma,\alpha\beta} = 0. \qquad (25.13)$$

Воспользуемся тем, что производная Ли от коэффициентов римановой связности равна нулю:

$$\underset{s}{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \underset{s}{\xi}^{\alpha}{}_{,\,\beta\gamma} + \underset{s}{\xi}^{\sigma} R_{\alpha\gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta} = 0. \tag{25.14}$$

Ввиду этого последнее из уравнений (25.13) может быть представлено в виде:

$$\underset{1}{\xi}^{\sigma}{}_{,\beta}\,\underset{1}{\xi}_{\sigma,\alpha} = \underset{1}{\xi}^{\alpha}\underset{1}{\xi}^{\tau} R_{\sigma\alpha\tau\beta} \equiv 0 \tag{25.15}$$

в силу (25.6), если $\underset{1}{\xi}^{\sigma}$ заменить через l^{σ}.

Для неголономного орторепера, отвечающего формулам (19.20), $l^{\alpha} \overset{*}{=} \nu(\delta^{\alpha}_{2} + \delta^{\alpha}_{4})$ (знак «$\overset{*}{=}$» означает равенство для неголономного орторепера), и поэтому, записывая (25.13) и (25.15) для этого репера, получим $\underset{1}{\xi}_{\alpha,\,\beta} \overset{*}{=} 0$. Но это уравнение имеет тензорный вид и будет справедливо и в любой системе координат, т. е. $\underset{1}{\xi}_{\alpha\beta} = \underset{1}{\xi}_{\alpha,\,\beta\gamma} = 0$, и из (25.14) следует, что $\underset{1}{\xi}^{\sigma} R_{\sigma\gamma\alpha\beta} = 0$. Однако это уравнение для канонического орторепера приводит к противоречию, и следовательно, исходное предположение отпадает: λ_4 не может быть тождественно равна нулю.

Не уменьшая общности, будем предполагать далее, что λ_4 можно при желании считать отличной от нуля.

Покажем, что невозможно также и предположение $\lambda_2 = \lambda_3 \equiv 0$ *при любом* допустимом преобразовании. Предполагая противное, из (25.9) и (25.12) получим, что $l^{2'} = l^{3'} \equiv 0$, и следовательно, l^{α} выразятся линейно (с переменными коэффициентами) через $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$; так как $l^{4'} \neq 0$, то коэффициент при $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ отличен от нуля и

$$l^{\alpha} = \sigma(a\underset{1}{\xi}^{\alpha} + \underset{2}{\xi}^{\alpha}), \tag{25.16}$$

где σ и a — некоторые функции от x^{α} ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Так как конгруэнция $l^{\alpha}(x)$ определена с точностью до скалярного множителя, то выберем $\sigma = 1$. В (25.12) $\lambda_4 \neq 0$ и выбор функции f ничем не ограничен, поэтому можно считать λ_1 равной нулю и

$$\left.\begin{aligned} &l^\alpha = a\delta_4^\alpha, \quad a = -x^1, \quad l^\sigma{}_{\sigma,\alpha} = -\delta_4^1 = 0, \\ &\underset{1}{\xi}{}^\sigma{}_{\alpha,\sigma} = -1, \quad \underset{2}{\xi}{}^\sigma{}_{\alpha,\sigma} = -a. \end{aligned}\right\} \tag{25.17}$$

Кроме того, имеем из первого уравнения (25.7):

$$l^\sigma l_\sigma = 0, \quad l^\sigma l_{\sigma,\alpha} = 0. \tag{25.18}$$

Первое из этих уравнений означает, что $g_{44} = 0$, а второе уравнение (25.18) приводится к виду:

$$\partial_4 g_{\alpha 4} = a g_{4\alpha}, \tag{25.19}$$

т. е. вследствие (25. 11)

$$\partial_4 g_{14} = a g_{14}, \quad a g_{24} = a g_{34} = 0;$$

так как $a \neq 0$, то $g_{24} = g_{34} = 0$ и, следовательно, $a_{14} \neq 0$, иначе метрика была бы вырожденной; тогда из (25.11) следует, что $a = -1$, и поэтому

$$l^\sigma l_{\alpha,\sigma} = -l_\alpha. \tag{25.20}$$

Запишем полученные соотношения для неголономного канонического орторепера, где $l^\alpha \overset{*}{=} \nu(\delta_2^\alpha + \delta_4^\alpha)$. Отметим, что структурное уравнение неабелевой группы $[X_1 X_2] = X_1$ не изменится, если применить подстановку $Y_1 = X_1$, $Y_2 = cX_1 + X_2$, где c — произвольная постоянная. Поэтому, если выбрать в данной точке пространства V_4 $c = a(\overset{0}{x}{}^\alpha)$, то можно положить $l^\alpha \overset{*}{=} \sigma \underset{2}{\xi}{}^\alpha$ и $a \overset{*}{=} 0$. Таким образом, имеем:

$$\underset{1}{\xi}{}^\alpha(0,\ b,\ c,\ d), \quad \underset{2}{\xi}{}^\alpha(0,\ \sigma,\ 0,\ \sigma), \quad \sigma \neq 0, \tag{25.21}$$

и из (25.17), (25.18), (25.20) следует:

$$\left.\begin{aligned} &a_2 + a_4 \overset{*}{=} 0, \quad l_{2,\alpha} + l_{4,\alpha} \overset{*}{=} 0, \\ &l_{\alpha,2} + l_{\alpha,4} \overset{*}{=} \sigma(-\delta_2^\alpha + \delta_4^\alpha). \end{aligned}\right\} \tag{25.22}$$

Так как

$$l_{\alpha,\beta} \overset{*}{=} a_{,\beta} \underset{1}{\xi}_\alpha + \underset{2}{\xi}_{\alpha,\beta}, \tag{25.23}$$

то (25.22) приводит к выводу: 223

$$\left.\begin{aligned} &a_{,1}\overset{*}{=}a_{,3}\overset{*}{=}a_{,2}+a_{,4}\overset{*}{=}0,\quad b-d\neq 0,\quad a_{,2}\overset{*}{=}\frac{1}{b-d},\\ &\underset{2}{\xi}_{2,4}\overset{*}{=}-1,\quad \underset{2}{\xi}_{2,3}\overset{*}{=}\underset{2}{\xi}_{3,4},\quad \underset{2}{\xi}_{1,2}\overset{*}{=}-\underset{2}{\xi}_{1,4}.\end{aligned}\right\}\tag{25.24}$$

Из (25.16) при $\sigma=-1$ получим:

$$l_{\sigma,\alpha\beta}=a_{,\alpha\beta}\underset{1}{\xi}_{\sigma}+a_{,\alpha}\underset{1}{\xi}_{\sigma,\beta}+a_{,\beta}\underset{1}{\xi}_{\sigma,\alpha}+a\underset{1}{\xi}_{\sigma,\alpha\beta}+\underset{2}{\xi}_{\sigma,\alpha\beta}.$$

Заменяя здесь вторые производные векторов Киллинга по формулам (25.14), получим:

$$l_{\sigma,\alpha\beta}=a_{,\alpha\beta}\underset{1}{\xi}_{\sigma}+a_{,\alpha}\underset{1}{\xi}_{\sigma,\beta}+a_{,\beta}\underset{1}{\xi}_{\sigma,\alpha}-a\underset{1}{\xi}{}^{\tau}R_{\tau\beta\sigma\alpha}-\underset{2}{\xi}{}^{\tau}R_{\tau\beta\alpha\sigma}.\tag{25.25}$$

Дифференцируя ковариантно (25.20), придем к соотношению

$$l^{\sigma}l_{\alpha,\sigma\beta}+l^{\sigma}{}_{,\beta}l_{\alpha,\sigma}+l_{\alpha,\beta}=0.\tag{25.26}$$

Из (25.16), в голономной системе координат, как легко убедиться, следует, что $l^{\sigma}{}_{\alpha,\sigma\beta}=0$, поэтому, записывая (25.26) для неголономного ортореперa, получим:

$$l^{\sigma}\underset{1}{\xi}_{\alpha,\sigma\beta}+l^{\sigma}{}_{,\beta}l_{\alpha,\sigma}+l_{\alpha,\beta}\overset{*}{=}0.$$

Придавая α, β все возможные значения, получим систему уравнений, из которых следует, что $\underset{2}{\xi}_{\alpha,\beta}\overset{*}{=}0$, $a_2(b-d)\overset{*}{=}0$, но последнее равенство находится в противоречии с (25.24). Следовательно, можно считать, что λ_2 и λ_3 не равны нулю тождественно при любом допустимом преобразовании.

Таким образом, в (25.12) можно использовать все четыре неопределенные функции f, φ, ψ, θ. Так как l^{α} не может, по доказанному, лежать в касательной плоскости к поверхности транзитивности, то можно потребовать, чтобы все компоненты l^{α}, кроме l^2 или l^3, были отличны от нуля. Отметим, что одновременное обращение l^2 и l^3 в нуль возможно только для вырожденного преобразования.

Накладывая требования $l^{1'}=l^{2'}=l^{4'}=0$, придем для функций f, φ и θ к системе дифференциальных уравнений типа Коши, которая будет совместна в классе аналитических функций и в новой системе координат

$$l^\alpha = \nu\delta^\alpha_3, \tag{25.27}$$

где ν — произвольная функция от x^α.

После этого остаются допустимыми преобразования, не меняющие (25.27), вида:

$$\left.\begin{aligned} x^1 = x^{1'} + e^{x^{4'}} f(x^{2'}),\quad x^2 = \varphi(x^{2'}),\quad x^3 = \psi(x^{2'},\ x^{3'}),\\ x^4 = x^{4'} + \theta(x^{2'}).\quad \varphi'\psi_3 \neq 0.\end{aligned}\right\} \tag{25.28}$$

Так как конгруэнция l^α изотропная, то $a_{33} = 0$. Интегрируя второе из уравнений (25.7), получим:

$$a_{13} = \varrho b_1(x^2)\, e^{-x^1},\quad a_{23} = \varrho b_2(x^2),\quad a_{33} = 0,\ a_{34} = \varrho b_4(x^2)$$

и ϱ — произвольная функция от x^2 и x^3, отличная от нуля, так как в противном случае метрика была бы вырожденной. Применяя преобразование (25.28), получим:

$$\left.\begin{aligned} g_{1'3'} &= \varrho b_1 e^{-\theta}\psi_{3'} e^{-x^{4'}},\\ g_{2'3'} &= \varrho\psi_{3'}(e^{-\theta} b_1 f' + b_2\varphi' + b_4\theta'),\\ g_{3'4'} &= \varrho\psi_{3'}(b_1 e^{-\theta} f + b_4).\end{aligned}\right\} \tag{25.29}$$

Выбирая функции f, φ, ψ, θ, можно упростить $b_i(x^2)$, но при этом возникают следующие три принципиально различные возможности:

$$(1)\ b_1 \neq 0,\quad (2)\ b_1 = 0,\ b_4 \neq 0,\quad (3)\ b_1 = b_4 = 0, \tag{25.30}$$

каждую из которых необходимо рассмотреть отдельно.

Выберем в (25.27) функцию $\nu = 1$, полагая тем самым, что $l^\alpha = \delta^\alpha_3$ и, следовательно, $l_\alpha = g_{3\alpha}$.

Тогда *в любой допустимой системе координат* (25.28)

$$l_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha,3\beta}$$

и

$$l_{\alpha,\beta}\, l^\beta = \partial_2 g_{3\alpha}. \tag{25.31}$$

Предположим, что имеет место случай (1): $b_1 \neq 0$. Тогда из (25.29) следует, что, не уменьшая общности рассуждения, можно предполагать b_1, b_2 и b_4 отличными от нуля в некоторой допустимой системе координат. При этом предположении, полагая в (25.29) $g_{2'3'}=g_{3'4'}=0$ за счет выбора f, θ и ψ, получим в новой системе координат: $b_1=1$, $b_2=b_4=0$, $\varrho=1$ и из (25.31):

$$l_{\alpha,\,\beta}l^{\beta}=0. \tag{25.32}$$

Это тензорное уравнение справедливо в любой системе координат и, в частности, в любой допустимой системе координат, где оно будет иметь вид:

$$\partial_3 g_{3\alpha}=0. \tag{25.33}$$

Найдем среди всех допустимых преобразований те, при которых условия $b_2=b_4=0$ остаются инвариантными. Из (25.29) следует, что такие преобразования получаются из (25.28) при условии $f=0$, в то время как $\varphi(x^{2'})$, $\psi(x^{2'},x^{3'})$, $\theta(x^{2'})$ остаются произвольными функциями, ограниченными лишь неравенством $\varphi'\psi_{,3'}\neq 0$. Совершая такое преобразование по формулам (25.29), в которых старые компоненты метрического тензора $g_{13}=e^{-x^4}$, $g_{23}=$ $=g_{33}=g_{34}=0$, и учитывая, что условие (25.33) будет иметь место и в новой системе координат, получим:

$$\partial_{3'}g_{3'\alpha'}=\frac{\partial}{\partial x^{3'}}(e^{-\theta}\psi_{3'})\,\delta^{1}_{\alpha'}=0,$$

где $\theta=\theta(x^{2'})$, $\psi=\psi(x^{2'},x^{3'})$. Следовательно, при $\alpha=1$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{3'2}}\psi=0.$$

Но при произвольном выборе ψ это условие противоречиво, и таким образом, случай (1) отпадает.

Если предположить, что имеет место случай (3): $b_1=b_4=0$, то в любой допустимой системе координат этот факт был бы инвариантным; выбирая соответствующим образом $\psi_{3'}(x^{2'},\ x^{3'})$, можно g_{23} привести к единице. Тогда условие (25.32) будет справедливо, и притом в любой системе координат. Следовательно, (25.33) будет справедливо в любой допустимой системе координат; при $\alpha=1$, 3, 4 оно обратится в тождество, а при $\alpha=2$ получим в новой по отношению к выбранной выше системе координат: $\frac{\partial}{\partial x^{3'}}(\varphi'\psi_{,3'})=0$, т. е. $\psi_{,3'3'}=0$ — условие, не выполняющееся при произвольном ψ. Случай (3) также невозможен.

Следовательно, возможен только случай (2): $b_1 \equiv 0$, $b_4 \not\equiv 0$. Отсюда и из (25.29) следует, что, полагая $b_2\varphi' + b_4\theta' = 0$, в новой системе координат получим: $g_{1'3'} = g_{2'3'} = g_{3'3'} = 0$, $g_{3'4'} = \varrho b_4 \psi_{3'} e^{-\theta}$. Здесь ϱ и ψ — некоторые функции от $x^{2'}$, $x^{3'}$, а $b_4 = b_4(x^{2'})$. Выбирая функцию ψ, всегда можно обратить компоненту $g_{3'4'}$ в единицу. В этой системе координат (25.32) имеет место, и следовательно, в любой допустимой системе справедливо равенство (25.3). Предполагая, что $b_1 = b_2 = 0$, $\varrho b_4 = 1$, определим допустимые преобразования, для которых эти условия сохраняются. Из (25.29) следует, что это будет иметь место только в том случае, когда $\psi_{,3'} = 1$ и $\psi_{,3'3'} = 0$, вследствие чего противоречие, имеющее место для двух предыдущих случаев, снимается. Если же не требовать, чтобы $g_{3'4'} = 1$, то получим условие

$$\frac{\partial}{\partial x^{3'}}(\varrho\psi_{,3'}) = 0,$$

которое означает, что при $\nu = 1$ множитель ϱ связан вполне определенным образом с координатой $x^3 = \psi$, что не является противоречивым.

Будем далее предполагать, что указанное выше преобразование совершено, но $\nu \neq 1$ и $g_{13} = g_{23} = g_{33} = 0$, $g_{34} = g_{34}(x^{2'}, x^{3'})$.

После этого среди преобразований (25.28) можно выделить такие, которые оставляют эти факты инвариантными. Из (25.29) непосредственно следует, что эти преобразования будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x^{1'} + f(x^{2'})\,e^{x^{4'}}, & x^2 &= \varphi(x^{2'}), \\ x^3 &= \psi(x^{2'}, x^{3'}), & x^4 &= x^{4'} + C, \end{aligned}\right\} \qquad (25.34)$$

где $C = \text{const}$, $\varphi'\psi_{,3'} \neq 0$. Отметим, что после применения такого преобразования новые компоненты метрического тензора будут иметь вид (25.11), а функции $a_{\alpha'\beta'}$ будут выражаться через $a_{\alpha\beta}$ формулами

$$\left.\begin{aligned} a_{1'1'}=a_{11}e^{-2\theta},\quad a_{1'2'}&=e^{-\theta}(a_{11}e^{-\theta}f'+a_{12}\varphi'),\\ a_{1'3'}=0,\quad a_{1'4'}&=e^{-\theta}(a_{11}e^{-\theta}f+a_{14}),\\ a_{2'2'}&=a_{11}e^{-2\theta}f'^2+2a_{12}e^{-\theta}f'\varphi'+a_{22}\varphi'^2,\\ a_{2'3'}=0,\quad a_{2'4'}&=a_{11}e^{-2\theta}ff'+a_{12}e^{-\theta}f\varphi'+\\ &\qquad+a_{14}e^{-\theta}f'+a_{24}\varphi'+a_{34}\psi_{12'},\\ a_{3'3'}=0,\quad a_{3'4'}&=a_{34}\psi_{,3'},\\ a_{4'4'}&=a_{11}e^{-2\theta}f^2+2a_{14}e^{-\theta}f+a_{44}. \end{aligned}\right\} \tag{25.35}$$

Компонента a_{34} не может равняться нулю, так как в противном случае метрика вырождалась бы. Так как ψ ограничена лишь условием $\psi_{,3'} \neq 0$, а в остальном совершенно произвольная функция $x^{2'}$, $x^{3'}$, то в (25.35) компоненту $a_{2'4'}$ можно выбрать равной нулю. Кроме того, $a_{34} = \varrho b_4(x^{2'})$, где ϱ, как это следует из (25.7), выражается через скалярный множитель ν ($l^\alpha = \nu\delta^\alpha_3$), выбор которого ничем не ограничен, кроме неравенства $\nu \neq 0$: $\varrho = \omega(x^2)\nu$. Ввиду этого при любом выборе ψ и $\psi_{,3'} \neq 0$ можно выбрать ν так, чтобы $a_{3'4'} = 1$. Отметим, что остальные неизвестные компоненты $a_{\alpha'\beta'}$ в (25.35) не зависят от ν и ψ, но еще остается произвол в выборе функций $\varphi(x^{2'})$ ($\varphi' \neq 0$), f, который можно будет в дальнейшем использовать в том случае, если некоторые из компонент $a_{\alpha\beta}$ или их отношения не будут зависеть от x^3.

Положим для краткости компоненты в новой системе координат в безындексных обозначениях:

$$a_{11}=\alpha,\quad a_{12}=\beta,\quad a_{14}=\delta,\quad a_{22}=\gamma,\quad a_{44}=\lambda,$$

тогда искомая метрика будет выражаться матрицей

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} \alpha e^{-2x^4} & \beta e^{-x^4} & 0 & \delta e^{-x^4}\\ \beta e^{-x^4} & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \delta e^{-x^4} & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{25.36}$$

$$|g_{\alpha\beta}|=g=-\sigma e^{-2x^4},\quad \sigma=\alpha\gamma-\beta^2>0,\quad \alpha,\ \gamma\neq 0,$$

где штрихи при $x^{\alpha'}$ опущены и α, β, γ, δ — неизвестные функции от x^2 и x^3.

Неизвестные компоненты должны удовлетворять уравнениям (25.6) и уравнениям поля $R_{\alpha\beta} = 0$. Первая группа уравнений (25.6) в силу (25.27) будет иметь вид:

$$R_{\alpha 3 \beta 3} = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4); \tag{25.37}$$

вторая группа запишется соотношениями

$$e_{3\beta\sigma\tau} R^{\sigma\tau}{}_{3\gamma} = 0,$$

которые эквивалентны системе

$$R^{24}{}_{3\gamma} = R^{14}{}_{3\gamma} = R^{12}{}_{3\gamma} = 0, \tag{25.38}$$

так как дискриминантный тензор $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет компоненты, отличные от нуля только при не равных друг другу индексах. Контравариантные компоненты метрического тензора определяются матрицей

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma e^{2x^4}}{\sigma} & \frac{-\beta e^{x^4}}{\sigma} & \frac{-\gamma\delta e^{x^4}}{\sigma} & 0 \\ \frac{-\beta e^{x^4}}{\sigma} & \frac{\alpha}{\sigma} & \frac{\beta\delta}{\sigma} & 0 \\ \frac{-\gamma\delta e^{x^4}}{\sigma} & \frac{\beta\delta}{\sigma} & \frac{\omega}{\sigma} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25.39}$$

$$\omega = \beta^2\lambda - \alpha\gamma\lambda + \gamma\delta^2,$$

и поэтому в силу (25.37)

$$R^{24}{}_{3\gamma} = g^{2\sigma} g^{4\tau} R_{\sigma\tau 3\gamma} \equiv 0.$$

Точно так же обращается в тождество второе уравнение (25.38), а третье приводится к системе уравнений

$$R_{12\,3\gamma} = 0 \qquad (\gamma = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{25.40}$$

Кроме того, записывая уравнения поля $g^{\sigma\tau} R_{\sigma\alpha\tau\beta} = 0$ для метрики (25.39) и учитывая уравнения (25.37) и (25.40), получим:

$$R_{1212} = R_{1431} = R_{1423} = R_{2431} = R_{2423} = 0, \tag{25.41}$$

$$g^{11} R_{1412} + g^{12} R_{2412} = R_{2434},\ g^{12} R_{1412} + g^{22} R_{2412} = R_{1434}, \tag{25.42}$$

$$g^{11} R_{1414} + 2g^{12} R_{1424} + 2g^{13} R_{1434} + g^{22} R_{2424} + \\ + 2g^{23} R_{2434} = 0. \tag{25.43}$$

Уравнения (25.41) получаются из уравнений поля не непосредственно, а как следствие (25.40) и тождества Риччи:

$$R_{1[234]}=0.$$

Прежде чем переходить к интегрированию полученной системы уравнений, необходимо проверить, при каких условиях исследуемое многообразие будет определять пространство T_3.

Записывая матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$ в бивекторном пространстве для метрики (25.36) и компонент тензора кривизны, удовлетворяющих условиям (25.37), (25.40), (25.42), нетрудно убедиться, применяя *элементарные преобразования* (П. А. Широков [91], стр. 34), что *характеристика этой λ-матрицы будет* [3, 3] *в том и только в том случае, если по крайней мере одна из компонент R_{1412} или R_{2412} не равна нулю.* Из (25.42) следует, что это возможно только в том случае, если компоненты R_{1434}, R_{2434} не равны нулю одновременно.

Таким образом, приходим к задаче: *требуется проинтегрировать переопределенную систему* 18 *уравнений* (25.37), (25.40), (25.41), (25.42), (25.43) *с частными производными второго порядка с пятью неизвестными функциями α, β, γ, δ, λ, зависящими от двух аргументов x^2, x^3*; неизвестные функции, при наличии некоторых соотношений между ними, могут быть упрощены за счет произвольных функций согласно формулам (25.35).

Рассмотрим прежде всего уравнение $R_{3423}=0$. Для метрики (25.36) оно запишется в виде:

$$\delta_3(\gamma\beta_3-\beta\gamma_3)=0. \tag{25.44}$$

Предположим сначала, что $\delta_3\equiv\frac{\partial}{\partial x^3}\delta=0$. Тогда из (25.35) следует, если учесть, что f и θ — произвольные функции от x^2, что $\frac{\partial}{\partial x^3}a_{11}=\frac{\partial}{\partial x^3}a_{14}=0$, т. е. $\alpha_3=0$. Записывая при этом предположении уравнение $R_{3131}=0$, получим, что $\alpha\beta_3=0$. Так как α не может равняться нулю, как это следует из (25.36), то $\beta_3=0$. Тогда и $\frac{\partial}{\partial x^3}a_{12}=0$, а из (25.35) следует, что за счет выбора f всегда можно β

обратить в нуль. Кроме того, выбирая функцию θ, можно в этом случае и δ обратить в нуль. Если же в (25.44) равен нулю второй множитель, то, записывая этот факт при помощи формул (25.35), придем к уравнению

$$e^{-2\theta}f'^2\varphi'\left(a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^3}-a_{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}\right)+$$
$$+e^{-\theta}f'\varphi'^2\left(a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial x^3}-a_{11}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_3}\right)+$$
$$+\varphi'^3\left(a_{22}\frac{\partial a_{12}}{\partial x^3}-a_{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial x^3}\right)=0,$$

в котором f, φ, θ — произвольные функции ($\varphi' \neq 0$) от переменной x^2. Следовательно, каждая скобка равна нулю и, в частности, $\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)=0$. Это означает, что за счет выбора функции f можно обратить β в нуль. Но тогда, записывая уравнение $R_{1423}=0$, придем к соотношению

$$\gamma\alpha_2\delta_3=0.$$

Множитель $\gamma \neq 0$, как это следует из (25.36); точно так же и $\alpha_2 \neq 0$. Так как в противном случае $\frac{\partial}{\partial x^2}(a_{11}e^{-2\theta})=0$ и так как θ — произвольная функция от x^2, то $a_{11}=0$, что исключается опять-таки условием $\sigma > 0$. Следовательно, $\delta_3=0$, и мы снова приходим к рассмотренному выше случаю. Ввиду этого всегда можно β и δ привести к нулю, а метрику пространства искать в виде:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} \alpha e^{-2x^4} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (25.45)$$

$$g=-\alpha\gamma e^{-2x^4},\ \alpha,\ \gamma \neq 0,$$

где α, γ, λ — неизвестные функции от x^2, x^3. Кроме того, из (25.35) следует, что остается еще произвол в выборе функции $\varphi(x^{2'})$ при условии $\varphi' \neq 0$.

Записывая уравнения (25.37), (25.40), (25.41) для метрики (25.45), придем к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_3(\lambda_3+1)=0, \quad \alpha_{33}-\frac{\alpha_3^2}{2\alpha}=0,\\ &\gamma_{33}-\frac{\gamma_3^2}{2\gamma}=0, \quad \lambda_{33}=0, \quad \gamma_3\lambda_3=0,\\ &\alpha_{23}-\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\gamma_3}{\gamma}+\frac{\alpha_3}{\alpha}\right)=0,\\ &\alpha_{22}-\frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)+\frac{\gamma_3}{2}(\alpha-\lambda\alpha_3)=0. \end{aligned}\right\} \quad (25.46)$$

Все остальные уравнения, входящие в указанные системы, обращаются в тождества.

Пятое уравнение этой системы приводит к альтернативе. Если предположить, что $\gamma_3 \neq 0$ и, следовательно, $\lambda_3=0$, то из первого уравнения следовало бы, что $\alpha_3=0$, а из шестого, что $\alpha_2=0$. Вследствие этого последнее уравнение системы (25.46) сводилось бы к соотношению $\alpha\gamma_3=0$, которое противоречиво, так как $\alpha \neq 0$. Следовательно, $\gamma_3=0$. Если в преобразовании (25.35) положить $f=0$, $\theta=0$, $\psi_3=1$, $\psi_2=0$, то оно оставляет метрику (25.45) неизменной по своему виду, но компонента $a_{2'2'}=\gamma\varphi'^2$, где $\varphi' \neq 0$ и φ — произвольная функция от x^2. Ввиду этого всегда можно выбрать φ так, чтобы $a_{2'2'}= =e=\pm 1$. Таким образом, в (25.45) и (25.46) можно положить, не уменьшая общности, $\gamma=e=\pm 1$, после чего система (25.46) интегрируется элементарно и имеет решения

$$\alpha=e(c_1+c_2x^2+c_3x^3)^2; \quad \lambda=a(x^2)x^{3^2}+b(x^2) \quad \gamma=e=\pm 1, \quad (25.47)$$

где a и b — неизвестные функции от x^2 и имеют место условия

$$ac_3=0, \quad c_i=\mathrm{const} \quad (i=1,\ 2,\ 3). \quad (25.48)$$

Как отмечалось выше, из двух компонент тензора кривизны R_{1434} и R_{2434} хотя бы одна должна отличаться от нуля. Первая из них для метрики (25.45) при условии (25.47) равна нулю тождественно, а вторая равняется $-\frac{1}{2}\lambda_{23}$ и, следовательно, $\lambda_3=a\neq 0$; это означает, вследствие первого из условий (25.48), что $c_3 = 0$ и $\alpha = e(c_1 + c_2 x^2)^2$.

Компонента $R_{2412} \equiv 0$, а $R_{1412} = \frac{\alpha_2 e^{-2x^4}}{2}$; так как хотя бы одна из них должна быть отличной от нуля, то $\alpha_2 \neq 0$, т. е. $c_2 \neq 0$.

Уравнения (25.42) и (25.43) запишутся соответственно

$$\lambda_{23} + \frac{\alpha_2}{\alpha} = 0, \quad \lambda_{22} + \frac{\alpha_2 \lambda_2}{2\alpha} + e(\lambda_3 + 2) = 0. \qquad (25.49)$$

Заменяя λ и α их выражениями и приравнивая нулю коэффициенты при x^3, получим для λ выражение

$$\lambda = \ln \frac{c_6}{(c_1 + c_2 x^2)^2} \left[x^3 - \frac{e}{4c_2^2}(c_1 + c_2 x^2)^2 + c_4 \right] - \\ - \frac{e}{c_2^2}(c_1 + c_2 x^2)^2 + c_5, \qquad (25.50)$$

где c_i — постоянные. Полагая

$$x^1 = \frac{1}{c_2} x^{1'}, \quad x^2 = \pm x^{2'} - \frac{c_1}{c_2}, \quad x^3 = -x^{3'} - c_4, \quad x^4 = -x^{4'},$$

постоянные c_1 и c_4 можно обратить в нуль, не меняя структуры матрицы (25.45). Таким образом, получаем искомые компоненты $g_{\alpha\beta}$ в виде следующих функций:

$$\left. \begin{aligned} \alpha = e x^{2^2}, \ \gamma = e, \ \lambda = \left(x^3 + \frac{e}{4} x^{2^2} \right) \ln (p x^{2^2}) - e x^{2^2} + q, \\ e = \pm 1, \end{aligned} \right\} (25.51)$$

где p и q — произвольные постоянные, которые не могут быть исключены при помощи *допустимых* преобразований.

Такое решение в другой системе координат было получено впервые в работе [261] (стр. 201), и пока неизвестно более короткого пути для решения проблемы.

Метрика пространства будет иметь вид:

$$ds^2 = e(\alpha \, dx^{1^2} + dx^{2^2}) + 2dx^3 \, dx^4 + \lambda \, dx^{4^2}, \qquad (25.52)$$

где потенциалы α, λ определяются формулами (25.51).

Следует отметить, что, интегрируя уравнения Киллинга *при любых* p и q, для метрики (25.52) получим как общий интеграл вектор Киллинга в виде:

$$\xi^\alpha = (c_1 + c_2 x^1) \delta_1^\alpha + c_2 \delta_2^\alpha,$$

т. е. имеет место неабелева группа движений G_2, действующая на неизотропных двумерных поверхностях транзитивности, и пространство не допускает повышения подвижности; группа максимальная — факт, доказанный выше при помощи других соображений.

Задачи

1. Найти преобразования координат, переводящие метрику (25.1) в (25.2) и (25.3).

2. Определить, интегрируя уравнения Киллинга, операторы движения для метрик (25.1) и (25.2).

§ 26. Пространства T_1, допускающие движения

Переходя к фактическому определению пространств T_i, допускающих ту или иную группу движений, необходимо сделать следующее замечание.

Случаи, когда T_i допускают только одночленную или двучленную группы движений, не представляют затруднений, так как наличие одночленной группы G_1 просто означает, что существует такая система координат, относительно которой все $g_{\alpha\beta}(x)$ не зависят от какой-либо координаты x^α (см. § 10, задачу 1) и в этой системе координат параметрические кривые x^α будут траекториями движения, после чего могут быть записаны уравнения поля, отличающиеся от общих уравнений только этим фактом.

В случае G_2 не представляет затруднений выбрать такую систему координат, где векторы Киллинга имеют простой вид (см. задачу 1), проинтегрировать уравнения Киллинга и автоматически выписать уравнения поля.

Ввиду этого мы будем в дальнейшем рассматривать случай G_3 с $r \geqslant 3$. Далее тот факт, что пространство T_i допускает группу движений G_r, будем обозначать символом $T_{i,\,r}$.

Общая идея нахождения метрики пространств T_i, допускающих ту или иную группу движений G_r (с $r \geqslant 3$), сводится к следующему: для каждой из полученных в § 24 неизоморфных структур G_3, учитывая ранг $(\underset{s}{\xi^\alpha})$ и изотропность или неизотропность поверхности транзитивности, подбирается голономная система координат, относительно которой векторы Киллинга имели бы по возможности простой вид. Интегрируя после этого уравнения Киллинга и уравнения поля $R_{\alpha\beta}=0$, получим искомые метрики возможных T_i с G_3.

Так как всякая G_4 допускает подгруппу G_3, то все $T_{i,4}$ должны находиться среди $T_{i,3}$. Поэтому, накладывая на $T_{i,3}$ дополнительное требование, чтобы они допускали G_4 допустимой структуры, найдем все $T_{i,4}$. Точно так же дело обстоит с $T_{i,5}$. Что же касается $T_{i,6}$, то, кроме полученного в § 25 $T_{2,6}$, других T_i с такой подвижностью не существует, если не считать плоских пространств.

Среди всех возможных преобразований координат выделим те, которые переводят *компоненты векторов Киллинга* $\underset{s}{\xi}^{\alpha}(x)$ *в те же самые функции от новых переменных*, и будем называть их *допустимыми* для заданной группы движений G_r, так же как это делалось в § 25.

Пространства $T_{1,3}$

1. Рассмотрим структуры (24.6), отвечающие обеим возможным неразрешимым группам G_3 в том случае, когда они содержат стационарные подгруппы G_1 и, ввиду этого, двумерные поверхности транзитивности, *неизотропные* с неопределенными и определенно-отрицательными метриками.

Для всех представляющихся здесь случаев является характерным следующее. Нужно рассмотреть неразрешимую группу G_3, действующую транзитивно на двумерных неизотропных поверхностях транзитивности. Следовательно, каждая такая поверхность допускает группу полной подвижности для пространства V_2 (§ 10, задача 9) и поэтому является поверхностью постоянной кривизны. Необходимо определить систему операторов, индуцирующих на таком V_2 группу G_3 заданной структуры. При этом необходимо иметь в виду следующее. Если ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ равен порядку группы, то при одинаковых структурах группы *подобны*, т. е. переводятся одна в другую некоторым преобразованием координат ([147], стр. 96).

В рассматриваемом случае ранг этой матрицы меньше порядка группы, и поэтому при одинаковой структуре нужно выделить два случая в зависимости от знака кривизны поверхности K; $K \neq 0$, так как G_3 для евклидовой или псевдоевклидовой плоскости содержит абелеву подгруппу G_2 и не может быть неразрешимой. Если $K \neq \pm 1$, то, определяя для такого пространства операторы из уравнений Киллинга, получим те же самые выражения, что и в случае $K = \pm 1$, но входящие в $\underset{s}{\xi}^\alpha(x)$ переменные все будут делиться на $\sqrt{\pm K}$. Так как от такого множителя всегда можно избавиться, то достаточно рассмотреть случай $K = \pm 1$. Это утверждение будет, однако, справедливо лишь в предположении, что операторы поверхностей транзитивности не меняются от поверхности к поверхности. Вообще, если V_4 с неопределенной метрикой допускает нетранзитивную группу движений G_r и общий ранг q матрицы $(\underset{s}{\xi}^\alpha)$ меньше r, то можно так перенумеровать $\underset{s}{\xi}^\alpha$, что

$$\underset{k}{\xi}^\alpha = \varphi^t_k \underset{t}{\xi}^\alpha \qquad (t = 1, \dots, q;\ k = q+1, \dots, r),$$

причем ранг $(\underset{s}{\xi}^\alpha)$ равен q, а φ_k — некоторые функции от x. Пусть среди функций φ имеется p независимых. Тогда может представиться два случая ([147], стр. 272): 1) если в координатной системе, для которой $\underset{s}{\xi}^\nu = 0$, для $\nu = q+1, \dots, n$ ранг матрицы Якоби функций φ по $x^1, \dots, x^q$ равен p, то существуют координатные системы, в каждой из которых компоненты $\underset{s}{\xi}^\alpha$ являются самое большее функциями $x^1, \dots, x^q$; 2) ранг этого якобиана меньше p, и тогда такого утверждения сделать, вообще говоря, нельзя.

Достаточно показать отличие от нуля якобиана для начала нормальной системы координат и в силу непрерывности распространить затем результат на некоторую область. Для рассматриваемого случая $q = 2$ и

$\underset{1}{\xi}^{a} = \overset{2}{\varphi}\underset{2}{\xi}^{\alpha} + \overset{3}{\varphi}\underset{3}{\xi}^{\alpha}$. Опуская индекс α, дифференцируя ковариантно и относя результат к началу, где имеют место начальные условия (24.6), получим:

$$\overset{0}{\underset{1}{\xi}}_{\alpha,\beta} = (\overset{2}{\varphi}_{,\beta}\underset{2}{\xi}_{\alpha})_0 + (\overset{3}{\varphi}_{,\beta}\underset{3}{\xi}_{\alpha})_0.$$

Полагая здесь $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, получим: $\overset{2}{\varphi}_{,1} = \overset{3}{\varphi}_{,2} = \overset{3}{\varphi}_{,1} = 0$, а $\overset{2}{\varphi}_{,2} = 1$, т. е. исследуемый якобиан имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, можно утверждать, что существует такая система координат, относительно которой поверхности транзитивности будут иметь уравнения $x^3 = \mathrm{const}$, $x^4 = \mathrm{const}$, причем $\underset{s}{\xi}^{\alpha} = \underset{s}{\xi}^{\alpha}(x^1, x^2)$.

Рассмотрим операторы на таких поверхностях (при $K = \pm 1$), учитывая, что сигнатура метрики может быть только или вида $(-\,-)$, или $(-\,+)$; достаточно рассмотреть метрики, отнесенные к полугеодезическим координатам:

$$\begin{aligned} &1^\circ. && -dx^{2^2} - \cos^2 x^2\, dx^{3^2}, \\ &2^\circ. && dx^{1^2} - \cos^2 x^1\, dx^{4^2}, \\ &3^\circ. && dx^{4^2} - \mathrm{ch}^2 x^4\, dx^{1^2}, \end{aligned} \qquad (26.1)$$

так как все другие возможности приводятся к этим трем при помощи невырожденных вещественных преобразований. Этим метрикам отвечают операторы, определяемые соответственно векторами Киллинга:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} &\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{3}, \quad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \sin x^3\, \delta^{\alpha}_{2} + \cos x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \delta^{\alpha}_{3}, \\ &\underset{3}{\xi}^{\alpha} = \cos x^3\, \delta^{\alpha}_{2} - \sin x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \delta^{3}_{2}; \quad G_3 \text{ типа IX.} \end{aligned}\right\} \qquad (26.2)$$

$$2)\quad \left.\begin{aligned} &\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{4}, \quad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \mathrm{sh}\, x^4\, \delta^{\alpha}_{1} + \mathrm{ch}\, x^4 \operatorname{tg} x^1\, \delta^{\alpha}_{4}, \\ &\underset{3}{\xi}^{\alpha} = \mathrm{ch}\, x^4\, \delta^{\alpha}_{1} + \mathrm{sh}\, x^4 \operatorname{tg} x^1\, \delta^{\alpha}_{4}; \quad G_3 \text{ типа VIII.} \end{aligned}\right\} \qquad (26.3)$$

$$3)\qquad \left.\begin{aligned} &\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{1}, \quad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{sh} x^4\, \delta^{\alpha}_{1} + \operatorname{ch} x^4 \operatorname{tg} x^1\, \delta^{\alpha}_{4}, \\ &\underset{3}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{ch} x^4\, \delta^{\alpha}_{1} + \operatorname{sh} x^4 \operatorname{tg} x^1\, \delta^{\alpha}_{4}; \quad G_3 \text{ типа VIII.} \end{aligned}\right\} \qquad (26.4)$$

Рассмотрим (26.2). Записывая уравнения Киллинга $\xi_{(\alpha,\,\beta)} = 0$ для $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$, получим, что $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^3, а эти же уравнения для $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{3}{\xi}^{\alpha}$ приводят к выводу, что

$$g_{11} = \alpha, \quad g_{14} = \beta, \quad g_{22} = \gamma, \quad g_{33} = \gamma \sin^2 x^2, \quad g_{44} = \delta, \qquad (26.5)$$

где α, β, γ, δ — некоторые функции от x^1 и x^4, а все остальные компоненты $g_{\alpha\beta}$ равны нулю.

Определим теперь общий вид *допустимого* преобразования для векторов Киллинга (26.2). Если оно имеет вид:

$$x^{\alpha'} = \varphi^{\alpha}\,(x^1, \ldots, x^n),$$

то, по определению,

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha'} \equiv \partial_3 \varphi^{\alpha'} = \delta^{\alpha'}_{3},$$

$$\underset{2}{\xi}^{\alpha'} \equiv \sin x^3\, \partial_2 \varphi^{\alpha'} + \cos x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \partial_3 \varphi^{\alpha'} =$$
$$= \sin \varphi^3\, \delta^{\alpha'}_{2} + \cos \varphi^3 \operatorname{ctg} \varphi^2\, \delta^{\alpha'}_{3},$$

$$\underset{3}{\xi}^{\alpha'} \equiv \cos x^3\, \partial_2 \varphi^{\alpha'} - \sin x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \partial_3 \varphi^{2'} =$$
$$= \cos \varphi^3\, \delta^{\alpha'}_{2} - \sin \varphi^3 \operatorname{ctg} \varphi^2\, \delta^{\alpha'}_{3}.$$

Полагая здесь $\alpha = 1, 2, 3, 4$, получим систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с четырьмя неизвестными функциями. Общий интеграл этой системы имеет следующий вид, определяющий допустимое преобразование:

$$x^{1'} = \overset{*}{f}\,(x^1,\ x^4), \qquad x^{2'} = x^2 + \overset{*}{k}\pi,$$
$$x^{3'} = x^3 + \overset{*}{s}\pi, \qquad x^{4'} = \overset{*}{\theta}\,(x^1,\ x^4),$$

где $\overset{*}{k}$, $\overset{*}{s}$ — целые числа, а $\overset{*}{f}$ и $\overset{*}{\theta}$ — произвольные функции своих аргументов. Очевидно, что это преобразование невырожденное и допускает обращение, которое запишется теми же формулами, если поменять местами x^{α} и $x^{\alpha'}$ и опустить знак «*». Применяя такое преобразование, мы не изменим $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ и уравнений поверхностей транзитивности $x^2 = \mathrm{const}$, $x^3 = \mathrm{const}$, а следовательно, и структуры интегралов (26.5). Вычисляя $g'_{\alpha\beta}$, получим:

$$\begin{aligned} g'_{11} &= \alpha(\partial_1 f)^2 + 2\beta\, \partial_1 f\, \partial_1\theta + \delta(\partial_1\theta)^2, \\ g'_{14} &= \alpha\, \partial_1 f\, \partial_4 f + \beta(\partial_1 f\, \partial_4\theta + \partial_4 f\, \partial_1\theta) + \delta\, \partial_1\theta\, \partial_4\theta, \\ g'_{44} &= \alpha(\partial_4 f)^2 + 2\beta\, \partial_4 f\, \partial_4\theta + \delta(\partial_4\theta)^2. \end{aligned}$$

Пользуясь произволом в выборе функций f и θ, можно потребовать, чтобы

$$g'_{14} = 0, \quad g'_{11} g'_{44} = -1,$$

что приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\partial_1 f = -\frac{(\beta\, \partial_4 f + \delta \partial_4\theta)}{\alpha\, \partial_4 f + \beta\, \partial_4\theta}\, \partial_1\theta, \quad (\partial_1\theta)^2 = -\frac{(\alpha\, \partial_4 f + \beta\, \partial_4\theta)^2}{(\alpha\delta - \beta^2)\, g'^2_{44}},$$

где g'_{44} зависит лишь от производных $\partial_4 f$ и $\partial_4\theta$. Покажем, что здесь записана совместная система уравнений, приводящая к *вещественной* системе координат. Для справедливости последнего необходимо, чтобы правая часть второго уравнения была больше нуля т. е. $\alpha\delta - \beta^2 < 0$. Но для метрики (26.5)

$$g \equiv |g_{\alpha\beta}| = (\alpha\delta - \beta^2)\gamma^2 \sin^2 x^2 < 0,$$

и следовательно, $\alpha\delta - \beta^2 < 0$. Определяя из второго уравнения $\partial_1\theta$, подставляя в первое и опираясь на предположение о *голоморфности* входящих сюда функций в некоторой области, придем к системе уравнений вида Коши — Ковалевской (С. П. Фиников [160], § 1):

$$\partial_1 f = F(x;\ \partial_4 f,\ \partial_4\theta), \quad \partial_1\theta = \Psi(x;\ \partial_4 f,\ \partial_4\theta),$$

и следовательно, система совместна; выбирая в качестве f и θ интегралы этой системы, удовлетворим поставленным выше требованиям, а метрику приведем к виду:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\, \mathrm{sh}^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (26.6)$$

где α, γ — некоторые функции от x^1, x^4. Система координат 4-ортогональная.

Записывая уравнения поля $R_{\alpha\beta}=0$ для этой метрики, найдем, что 6 из 10 уравнений поля удовлетворяются тождественно, а остальные 4 имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{\gamma}\left(\gamma_{11}-\frac{\gamma_1^2}{2\gamma}\right)-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha}+\alpha\alpha_4\gamma_4\right)-\\
&\qquad\qquad -\alpha\left(\alpha_{44}+\frac{\alpha_{11}}{\alpha^2}-\frac{2\alpha_1^2}{\alpha^3}\right)=0,\\
&\frac{2}{\gamma}\left(\gamma_{44}-\frac{\gamma_4^2}{2\gamma}+\frac{\alpha_1\gamma_1}{2\alpha^3}+\frac{\alpha_4\gamma_4}{2\alpha}\right)+\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{\alpha}\left(\alpha_{44}+\frac{\alpha_{11}}{\alpha^2}-\frac{2\alpha_1^2}{\alpha^3}\right)=0,\\
&\gamma_{14}-\frac{\gamma_1\gamma_4}{2\gamma}+\frac{1}{2\alpha}\left(\alpha_1\gamma_4-\alpha_4\gamma_1\right)=\\
&\qquad =\frac{\gamma_{11}}{\alpha}-\alpha\gamma_{44}-\frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha^2}-\alpha_4\gamma_4-2=0,
\end{aligned}\right\}\tag{26.7}$$

где для краткости введено обозначение: $\partial_i f\equiv f_i$ $(i=1,\ 4)$. Система эта совместна, так как далее будут указаны в случае $T_{1,4}$ конкретные ее решения; на вопросе о произволе в решениях этой системы мы здесь не будем останавливаться, хотя эта задача в данном случае может быть известными методами (С. П. Фиников [160], стр. 19—23) решена до конца.

Так как для векторов Киллинга (26.3), (26.4) все рассуждения повторяются буквально, то, не останавливаясь на выкладках (см. задачу 2), укажем, что получаются соответственно еще два решения уравнений поля $T_{1,3}$ *со структурой* VIII:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\beta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\cos^2 x^1\end{pmatrix},\tag{26.8}$$

где α, β зависят от x^2 и x^3 и удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\left(\alpha_{22}-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha}-\frac{\alpha_2\beta_2}{2\beta}+\frac{\beta\alpha_3\beta_3}{2}\right)+\beta\left(\frac{\beta_{33}}{2}-\frac{\beta_{22}}{2\beta^2}+\frac{\beta_2^2}{\beta^3}\right)=0,\\
&\frac{1}{\alpha}\left(\alpha_{33}-\frac{\alpha_3^2}{2\alpha}-\frac{\alpha_2\beta_2}{2\beta^3}+\frac{\alpha_3\beta_3}{2\beta}\right)+\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta_{33}}{2}-\frac{\beta_{22}}{2\beta^2}+\frac{\beta_2^2}{\beta^3}\right)=0,\\
&\alpha_{23}-\frac{\alpha_2\beta_3}{2\alpha}-\frac{\beta_2\beta_3}{2\beta}+\frac{\alpha_3\beta_2}{2\beta}=\alpha_{22}+\beta^2\alpha_{33}-\\
&\qquad\qquad-\frac{\alpha_2\beta_2}{\beta}+\beta\alpha_3\beta_3-2\beta=0,
\end{aligned}\right\}\tag{26.9}$$

и

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta\,\mathrm{ch}^2 x^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha}\end{pmatrix},\tag{26.10}$$

где α, β — функции от x^1, x^4, удовлетворяющие системе уравнений поля

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha^2}+\alpha_{44}-\frac{2\alpha_1^2}{\alpha^3}\right)+\frac{2}{\beta}\left(-\beta_{11}+\frac{\beta_1^2}{2\beta}+\frac{\alpha_1\beta_1}{2\alpha}-\alpha\frac{\alpha_4\beta_4}{2}\right)=0,\\
&\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha^3}+\alpha_{44}-\frac{2\alpha_4^2}{\alpha^3}\right)+\frac{2}{\beta}\left(\beta_{44}-\frac{\beta_4^2}{2\beta}+\frac{\alpha_1\beta_4}{2\alpha^3}-\frac{\alpha_4\beta_4}{2\alpha}\right)=0,\\
&\beta_{14}-\frac{\beta_1\beta_4}{2\beta}+\frac{1}{2\alpha}(\alpha_1\beta_4-\alpha_4\beta_1)=0,\\
&\beta_{11}-\alpha^2\beta_{44}-\frac{1}{\alpha}\alpha_1\beta_1+\alpha\alpha_4\beta_4+2\alpha=0.
\end{aligned}\right\}\tag{26.11}$$

Этими тремя решениями исчерпываются все возможные $T_{1,3}$ с неразрешимыми группами движений G_3, когда эти G_3 *действуют на двумерных поверхностях транзитивности постоянной кривизны.*

2. Рассмотрим структуру (24.7), которой отвечают операторы, действующие на псевдоевклидовых двумерных поверхностях; G_3 имеет одночленную стационарную подгруппу. В качестве вектора Киллинга можно взять

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha}=\delta_1^{\alpha},\quad \underset{2}{\xi}^{\alpha}=\delta_4^{\alpha},\quad \underset{3}{\xi}^{\alpha}=x^4\delta_1^{\alpha}+x^1\delta_4^{\alpha},\tag{26.12}$$

для которых система уравнений Киллинга запишется в виде:

$$\partial_1 g_{\alpha\beta} = \partial_4 g_{\alpha\beta} = 0,$$
$$g_{\alpha\sigma}\,\partial_\beta\,(x^4\delta^\sigma_1 + x^1\delta^\sigma_4) + g_{\beta\sigma}\,\partial_\alpha\,(x^4\delta^\sigma_1 + x^1\delta^\sigma_4) = 0.$$

Следовательно, $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^1 и x^4 и, кроме того,

$$g_{4i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \qquad g_{12} = g_{13} = g_{11} + g_{44} = 0.$$

Таким образом, компоненты метрического тензора имеют вид:

$$g_{11} = \alpha, \quad g_{22} = \beta, \quad g_{23} = \gamma, \quad g_{33} = \delta, \quad g_{44} = -\alpha,$$

где α, β, γ, δ — некоторые функции от x^2 и x^3, а все остальные компоненты равны нулю. Общий вид *допустимого* преобразования для этих операторов будет

$$x^1 = x^{1'}, \quad x^2 = \varphi\,(x^{2'},\ x^{3'}), \quad x^3 = \psi\,(x^{2'},\ x^{3'}), \quad x^4 = x^{4'},$$

и выбирая φ и ψ как интегралы совместной системы

$$\partial_2\varphi = -\frac{\partial_2\psi\,(\partial_3\varphi + \gamma\,\partial_3\psi)}{\beta\,\partial_3\varphi + \gamma\,\partial_3\psi}, \quad (\partial_2\psi)^2 = \frac{(\beta\,\partial_3\varphi + \gamma\,\partial_3\psi)^2}{(\beta\delta - \gamma^2)\,g_3'^2},$$

удовлетворим на вещественном пути требованиям

$$g'_{23} = 0, \quad g'_{22}\,g'_{33} = 1,$$

в силу чего

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \tag{26.13}$$

где α, β — функции от x^2, x^3, которые должны еще удовлетворять уравнениям поля

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{22} - \beta^2\alpha_{33} - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha} + \frac{\beta^2\alpha_3^2}{2\alpha} = 0, \\ &\frac{1}{\alpha}\left(\alpha_{33} - \frac{\alpha_3^2}{2\alpha} - \frac{\alpha_2\beta_2}{2\beta^3} + \frac{\alpha_3\beta_3}{2\beta}\right) + \\ &\qquad + \frac{1}{2\beta}\left(\beta_{33} + \frac{\beta_{22}}{\beta^2} + \frac{4\beta_2^2}{\beta^3}\right) = 0, \\ &\alpha_{33} - \frac{\alpha_3^2}{4\alpha} - \frac{\alpha_2\beta_2}{2\beta^3} + \frac{\alpha_3\beta_3}{2\beta} + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha\beta^2} = 0, \\ &\alpha_{23} - \frac{\alpha_2\alpha_3}{2\alpha} - \frac{\alpha_2\beta_3}{2\beta} + \frac{\alpha_3\beta_2}{2\beta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26.14}$$

3. Пусть имеет место абелева группа G_3, отвечающая условиям (24.8), когда стационарная подгруппа совпадает с единицей группы и группа действует на неизотропных гиперповерхностях транзитивности. Так как эти гиперповерхности неизотропные, то они геодезически параллельны и можно выбрать такую систему координат, в которой их уравнения будут: $x^4 = \text{const}$, а следовательно,

$$g_{i4} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad g_{44} = e_4 = \pm 1.$$

Так как ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ совпадает с порядком группы, то в качестве операторов группы можно выбрать любые определяющие абелеву структуру, имеющие ранг 3 и не зависящие от x^4; этим группа определится с точностью до подобия. Возьмем следующие операторы: $\underset{s}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{s}$ $(s = 1,\ 2,\ 3;\ \alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Тогда уравнения Киллинга дают, что $g_{\alpha\beta}$ — функции только от x^4.

Из начальных условий (24.8) следует, что для любого орторепера

$$\overset{0}{\underset{s}{\xi}}_{[\alpha}\, \overset{0}{\underset{s}{\xi}}_{\beta,\gamma]} = 0, \tag{26.15}$$

т. е. выполняется условие того, что векторы $\underset{s}{\xi}_{\alpha}$ образуют градиентные, с точностью до скалярного множителя, поля. Очевидно, это будет иметь место и для любой голономной системы координат. Вообще, векторы $\overset{0}{\underset{s}{\xi}}_{\alpha}$ орторепера и $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ в выбранной выше голономной системе координат не обязаны совпадать; они совпадают с точностью до линейных комбинаций с постоянными коэффициентами. Но для абелевой структуры, не меняя ее, всегда можно добиться такого совпадения. Следовательно, можно принять векторы $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ за координатные. Записывая (26.15), придем к системе

$$g_{ij}\, g'_{jk} + g_{jk}\, g'_{ij} = 0 \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

где среди i, j, k имеются по крайней мере два неодинаковых.

Отсюда следует, что

$$g'_{ij}=0 \qquad (i\neq j),$$

следовательно, углы между $\underset{s}{\xi}^{a}$ не зависят от выбора поверхности $x^4=\text{const}$ и эти векторы можно выбрать так, что

$$g_{ij}=0 \qquad (i\neq j).$$

Таким образом, пространство допускает 4-ортогональную систему такую, что

$$ds^2=\sum_1^3 g_{ii}\,dx^{i2}+e_4\,dx^{42}, \quad e_4=\pm 1, \tag{26.16}$$

где g_{ii} — функции только от x^4.

Запишем уравнения поля для этой метрики. Положим, что $g_{ii}=\alpha_i(x^4)$, тогда компоненты тензора кривизны

$$R_{ijij}=-\frac{e_4\alpha'_i\alpha'_j}{4},\quad R_{i4i4}=-\frac{1}{2}\alpha''_i+\frac{\alpha'^2_i}{4\alpha_i}\quad (i,\,j=1,\,2,\,3;\,i\neq j),$$

а все остальные равны нулю. Следовательно, тензор Риччи определится в виде:

$$R_{ii}=\frac{1}{\alpha_j}R_{ijij}+\frac{1}{\alpha_k}R_{ikik}+e_4R_{i4i4},$$

$$R_{44}=\sum_1^3 R_{i4i4},\quad R_{ij}=0\quad (i,\ j,\ k\neq),$$

а уравнения поля будут иметь вид:

$$\alpha''_i+\frac{1}{2}\alpha'_i\left(\frac{\alpha'_j}{\alpha_j}+\frac{\alpha'_k}{\alpha_k}-\frac{\alpha'_i}{\alpha_i}\right)=0,\qquad \sum_1^3\left(\alpha''_i-\frac{1}{2}\frac{\alpha_i'^2}{\alpha_i}\right)=0;$$

полагая $\alpha_i=e_ie^{2\tau_i}$, $e_i=\pm 1$, придем к системе

$$\tau''_i+\tau'_i\sum_1^3\tau'_j=0\quad (i=1,\ 2,\ 3),\qquad \sum_1^3\tau''_i+\sum_1^3\tau'^2_i=0. \tag{26.17}$$

Складывая уравнения первой группы для $i=1,\ 2,\ 3$, получим:

$$\sum_{j=1}^3\tau''_j+\Big(\sum_{j=1}^3\tau'_j\Big)^2=0.$$

Следовательно, обозначая $\sum \tau_j = \omega$, получим для определения ω уравнение

$$\omega'' + \omega'^2 = 0,$$

т. е. или

$$\omega = \ln(c_1x^4 + c_2), \quad c_1, \ c_2 = \mathrm{const}, \tag{26.18}$$

или, как *особое* решение, $\omega = \mathrm{const}$.

В случае (26.18) из (26.17) следует:

$$\tau_1 = \ln(c_1x^4 + c_2)^{\beta_i} + \gamma_i, \quad \sum \beta_i = 1, \quad \sum \beta_i^2 = 1, \quad \sum \gamma_i = 0; \tag{26.19}$$

особое решение приводит к плоскому пространству и поэтому исключается из рассмотрения. Полагая $2\beta_i = \lambda_i$, получим:

$$a_i = e_i\, e^{2\gamma_i} (c_1x^4 + c_2)^{\lambda_i}, \quad e_i = \pm 1, \quad \prod_1^3 e_i = -1,$$

где постоянные λ_i и γ_i связаны соотношениями

$$\sum_1^3 \gamma_i = 0, \quad \sum_1^3 \lambda_i = 2, \quad \sum \lambda_i\lambda_j = 0 \qquad (i \neq j). \tag{26.20}$$

4. Случай не равных между собой стационарных кривизн с абелевой структурой и условиями (24.9). Из начальных условий следует, что стационарная подгруппа совпадает с единицей группы, ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}{}^{\alpha})$ равен трем и группа действует на неизотропных гиперповерхностях транзитивности неопределенной метрики с сигнатурой типа $(- - +)$.

Принимая эти геодезически параллельные гиперповерхности за координатные с уравнением $x^1 = \mathrm{const}$, так что $g_{11} = -1$, $g_{i i} = 0$ $(i \neq 1)$, в качестве оператора группы можно выбрать

$$\underset{1}{\xi}{}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}, \quad \underset{2}{\xi}{}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha}, \quad \underset{3}{\xi}{}^{\alpha} = \delta_4^{\alpha}.$$

Отсюда следует: $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1)$, а метрика будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A = (g_{ij}) \qquad (i, \ j = 2, \ 3, \ 4), \tag{26.21}$$

где g_{ij} — некоторые функции от x^1.

Теперь, записывая уравнения поля для (26.21), найдем, что три уравнения обращаются в тождества, а остальные имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} a^{ij}\left(a''_{ij}-\frac{1}{2}a^{pq}a'_{pi}a'_{qj}\right)&=0,\\ a''_{ij}+\frac{1}{2}a^{pq}\left(a'_{pq}a'_{ij}-2a'_{pi}a'_{qj}\right)&=0,\\ a_{ip}a^{pq}=\delta_i^q\,(i,\ j,\ p,\ q=2.\ 3,\ 4)&, \end{aligned}\right\}\qquad(26.22)$$

т. е. получим систему обыкновенных уравнений.

5. Структура (24.10). Стационарная подгруппа совпадает с единицей группы. Группа полного ранга действует как просто транзитивная группа на неизотропных гиперповерхностях транзитивности с метрикой типа $(-\,-\,+)$. Нетрудно убедиться, что невырожденным линейным преобразованием структура (24.10) приводится к структуре G_3 типа VII (при $q=1$):

$$[X_1X_2]=0,\quad [X_1X_3]=X_2,\quad [X_2X_3]=-X_1+X_2.$$

Так как поверхности транзитивности трехмерные, то их можно выбрать за координатные, как и в предыдущем случае, определяемые уравнениями $x^1=\mathrm{const}$, а в качестве операторов группы выбрать

$$X_1=p_3,\quad X_2=p_4,\quad X_3=p_2-x^4p_3+(x^3+x^4)\,p_4.$$

Так как в этой полугеодезической системе координат $g_{11}=-1$, $g_{1i}=0$ $(i=2,\ 3,\ 4)$, то, интегрируя уравнения Киллинга для этих операторов, получим метрику в виде:

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=-1,\quad g_{1i}=0\quad (i=2,\ 3,\ 4),\\ &g_{22}=a_{22},\quad g_{23}=e^{-\frac{x^2}{2}}A\cos\omega,\\ &g_{24}=\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}A\left(\cos\omega+\sqrt{3}\sin\omega\right),\\ &g_{33}=e^{-x^2}\left(C+B\cos\nu\right),\\ &g_{34}=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left[C+B\left(\cos\nu+\sqrt{3}\sin\nu\right)\right],\\ &g_{44}=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left[2C-B\left(\cos\nu-\sqrt{3}\sin\nu\right)\right],\\ &\omega=\frac{\sqrt{3}x^2}{2}+\varphi,\quad \nu=\sqrt{3}x^2+\psi, \end{aligned}\right\}\qquad(26.23)$$

где a_{22}, A, B, C, φ, ψ — некоторые функции от x^1. Вычисляя компоненты тензора Риччи и приравнивая последние нулю, получим систему уравнений поля, которой должны удовлетворять эти неизвестные функции (см. задачу 1 данного параграфа).

Пространства T_1, допускающие G_4

Рассмотрим все T_1, приведенные выше и допускающие группу движений G_3, и среди них найдем те T_1, которые допускают и G_4.

1. Пусть имеет место метрика (24.8) с неразрешимой группой G_4 типа VIII. Существует единственная структура группы G_4 для пространств T_1, включающая эту G_3 как подгруппу, именно (24.11). Следовательно, для операторов (26.3) нужно определить такой оператор X_4, чтобы коммутаторы $[X_i X_4]$ $(i = 1, 2, 3)$ обращались в нуль. Это приводит к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 \underset{4}{\xi}^\alpha &= 0, \\ A \operatorname{ch} x^4 + B \operatorname{sh} x^4 &= 0, \\ A \operatorname{sh} x^4 - B \operatorname{ch} x^4 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (26.24)$$

где

$$A = \operatorname{tg} x^1 \, \partial_4 \underset{4}{\xi}^\alpha - \frac{1}{\cos^2 x^1} \underset{4}{\xi}^1 \delta_4^\alpha - \underset{4}{\xi}^4 \delta_1^\alpha$$

и

$$B = \underset{4}{\xi}^4 \operatorname{tg} x^1 \, \delta_4^\alpha.$$

Следовательно, $A = B = 0$, т. е.

$$\underset{4}{\xi}^4 = 0, \qquad \operatorname{tg} x^1 \, \partial_4 \underset{4}{\xi}^\alpha - \frac{1}{\cos^2 x^1} \underset{4}{\xi}^1 \delta_4^\alpha = 0,$$

но $\underset{4}{\xi}^\alpha$ не зависит от x^1, и следовательно, $\underset{4}{\xi}^1 = 0$, $\partial_4 \underset{4}{\xi}^\alpha = 0$, или

$$\underset{4}{\xi}^\alpha = \underset{4}{\xi}^2 (x^2, x^3) \, \delta_2^\alpha + \underset{4}{\xi}^3 (x^2, x^3) \, \delta_3^\alpha.$$

Пользуясь допустимым преобразованием

$$x^{1\prime} = x^1 + k\pi, \qquad x^{2\prime} = \varphi(x^2, x^3), \qquad x^{3\prime} = \psi(x^2, x^3), \qquad x^{4\prime} = x^4,$$

можно привести $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ к виду:

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha},$$

т. е. $g_{\alpha\beta}$ не зависит от x^3. Теперь допустимое преобразование для всех четырех операторов имеет вид:

$$x^{1'} = x^1 + k\pi, \quad x^{2'} = \varphi(x^2), \quad x^{3'} = \psi(x^3), \quad x^{4'} = x^4,$$

и, пользуясь им, можно снова прийти к метрике (26.8), но при условии $\partial_3\alpha = \partial_3\beta = 0$, в силу чего система уравнений поля (26.9) приводится к уравнениям

$$\alpha_{22} - \frac{1}{2\alpha}\alpha_2^2 = 0, \quad \beta_{22} - \frac{2}{\beta}\beta_2^2 + \frac{1}{\alpha}\alpha_2\beta_2 = 0, \quad \alpha_{22} - \frac{1}{\beta}\alpha_2\beta_2 = 2\beta,$$

которые интегрируются в квадратурах; получаем следующую метрику:

$$ds^2 = -(c_1x^2 + c_2)^2\, dx^{1^2} - \frac{c_1(c_1x^2 + c_2)}{x^2 + c_3}\, dx^{2^2} - \\ - \frac{x^2 + c^3}{c_1(c_1x^2 + c_3)}\, dx^{3^2} + (c_1x^2 + c_2)^2 \cos^2 x^1\, dx^{4^2}, \quad (26.25)$$

где c_i — постоянные. Получено *статическое* решение с неразрешимой G_4.

Дальнейшее повышение подвижности для (26.25) приведет к плоскому пространству.

Точно так же для метрик (26.8) и (26.10), буквально повторяя рассуждение, придем к следующим пространствам:

$$ds^2 = -\frac{c_1(c_1x^1 + c_2)}{x^1 + c_3}\, dx^{1^2} - (c_1x^1 + c_2)^2\, dx^{2^2} - \\ - (c_1x^1 + c_2)^2 \sin^2 x^2\, dx^{3^2} + \frac{x^1 + c_3}{c_1(c_1x^1 + c_2)}\, dx_4^2, \quad (26.26)$$

$$ds^2 = -\frac{c_1(c_1x^1 + c_2)}{c_3 - x^1}\, dx^{1^2} - (c_1x^1 + c_2)^2\, dx^{2^2} - \\ - (c_1x^1 + c_2)^2 \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2} + \frac{c_3 - x^1}{c_1(c_1x^1 + c_2)}\, dx^{4^2}; \quad (26.27)$$

полагая в (26.26) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2a$, получим *решение Шварцшильда*, *а при* $c_1 = 1$, $c_2 = -2a$ — «взаимное» *решение Букдала* (см. § 14). В этих трех решениях число существенных параметров можно привести к единице за счет линейных преобразований переноса и растяжения.

2. Точно так же для метрики (26.15) при наличии структуры (24.13) как единственной, допускающей данную G_3 своей подгруппой, придем к

$$ds^2 = -c_1 \frac{(c_1x^1+c_2)}{c_3-x^1} dx^{1^2} - (c_1x^1+c_2)^2 dx^{2^2} - \\ - (c_1x^1+c_2)^2 \operatorname{ch}^2 x^2 dx^{3^2} + \frac{c_3-x^1}{c_1(c_1x^1+c_2)} dx^{4^2}. \qquad (26.28)$$

3. Пусть имеет место метрика (26.13) с разрешимой структурой. Существует лишь одна структура G_4, включающая такую G_3, именно та, которая имеет три дополнительных коммутатора:

$$[X_1X_4]=0, \quad [X_2X_4]=sX_2, \quad [X_3X_4]=sX_3.$$

Применяя линейную подстановку, можно задачу привести к следующей: требуется определить $\underset{4}{\xi}^\alpha$, если имеет место структура:

$$[X_1X_2]=0, \quad [X_1X_3]=X_2, \quad [X_2X_3]=X_1, \quad [X_1X_4]=\varepsilon X_1,$$
$$[X_2X_4]=\varepsilon X_2, \quad [X_3X_4]=0, \quad \varepsilon=\begin{cases}0\\1\end{cases}$$

и

$$\underset{1}{\xi}^\alpha=\delta_1^\alpha, \quad \underset{2}{\xi}^\alpha=\delta_4^\alpha, \quad \underset{3}{\xi}^\alpha=x^4\delta_1^\alpha+x^1\delta_4^\alpha.$$

Записывая три последних коммутатора, получим:

$$\partial_1\underset{4}{\xi}^\alpha=\varepsilon\delta_1^\alpha, \quad \partial_4\underset{4}{\xi}^\alpha=\varepsilon\delta_4^\alpha, \quad (x^4\varepsilon-\underset{4}{\xi}^4)\,\delta_1^\alpha+(x^1\varepsilon-\underset{4}{\xi}^1)\,\delta_4^\alpha=0,$$

откуда

$$\underset{4}{\xi}^\alpha=\varepsilon\,(x^1\delta_1^\alpha+x^4\delta_4^\alpha)+\underset{4}{\xi}^2(x^2,\ x^3)\,\delta_2^\alpha+\underset{4}{\xi}^3(x^2,\ x^3)\,\delta_3^\alpha.$$

Применяя допустимое преобразование

$$x^{1'}=x^1, \quad x^{2'}=\varphi(x^2,\ x^3), \quad x^{3'}=\psi(x^2,\ x^3), \quad x^{4'}=x^4,$$

являющееся допустимым для трех первых операторов, приведем $\underset{4}{\xi}^\alpha$ к виду:

$$\underset{4}{\xi}^{1'} = \varepsilon x^{1'}, \quad \underset{4}{\xi}^{4'} = \varepsilon x^{4'}, \quad \underset{4}{\xi}^{2'} = \partial_2\varphi\underset{4}{\xi}^2 + \partial_3\varphi\underset{4}{\xi}^3,$$

$$\underset{4}{\xi}^{3'} = \partial_2\psi\underset{4}{\xi}^2 + \partial_3\psi\,\partial_4\underset{4}{\xi}^3.$$

Ввиду этого при условии голоморфности фигурирующих здесь функций четвертый оператор можно привести к виду:

$$\underset{4}{\xi}^\alpha = \varepsilon x^1\delta_1^\alpha + \varepsilon x^4\delta_4^\alpha + \delta_2^\alpha\,\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = 0 \quad \text{или} \quad 1.$$

Для первых трех операторов уравнения Киллинга, как это было показано ранее, дают: $g_{11} = \alpha$, $g_{22} = \beta$, $g_{23} = \gamma$, $g_{33} = \delta$, $g_{44} = -\alpha$, а все остальные компоненты равны нулю. Для четвертого оператора получим:

$$\varepsilon_1\alpha_2 + 2\varepsilon\alpha = 0, \quad \varepsilon_1\beta_2 = 0, \quad \varepsilon_1\gamma_2 = 0, \quad \varepsilon_1\delta_2 = 0.$$

Если $\varepsilon_1 = 0$, то $\varepsilon\alpha = 0$. Но $\alpha \neq 0$, так как это приводило бы к вырождению метрики и, следовательно, $\varepsilon = 0$, но тогда $\underset{4}{\xi}^\alpha = 0$ — факт, не имеющий смысла. Следовательно, $\varepsilon_1 = 1$ и $\partial_2\alpha + 2\varepsilon\alpha = 0$, а β, γ, δ — функции только от переменной x^2. Если $\varepsilon = 1$, то легко убедиться, что это приводит к вырождению пространства. Поэтому, полагая $\varepsilon = 0$, имеем, что α также функция только от x^3.

Для всех четырех операторов имеется следующее допустимое преобразование:

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^2 + \varphi(x^3), \quad x^{3'} = \psi(x^3), \quad x^{4'} = x^4,$$

и при его помощи можно обратить в нуль компоненту g'_{23} и удовлетворить равенству $g'_{22}\,g'_{23} = 1$. Теперь, полагая в уравнениях (26.14) $\partial_2\alpha = \partial_2\beta = 0$, получим систему

$$\alpha_{33} - \frac{\alpha_3^2}{2\alpha} = 0, \quad \beta_{33} + \frac{\alpha_3\beta_3}{\alpha} = 0, \quad \alpha_{33} - \frac{\alpha_3^2}{4\alpha} + \frac{\alpha_3\beta_3}{2\beta} = 0;$$

оставляя в стороне случай плоского пространства, получим отсюда следующую метрику:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -(kx^3+1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{kx^3+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(kx^3+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (kx^3+1)^2 \end{pmatrix}, \tag{26.29}$$

т. е. *статическое* решение.

4. Рассмотрим метрику (26.16) при условиях (26.10) с абелевой группой G_3. Так как в данном случае метрика определена с точностью до постоянных, то можно непосредственно проинтегрировать уравнения Киллинга и определить вектор $\underset{4}{\xi}^a$ искомой группы G_4. Если воспользоваться преобразованием

$$x^{1'} = \sqrt{|c_i^{\lambda_i}|}\, e^{\gamma_i} x^i, \qquad x^{4'} = x^4 + \frac{c_2}{c_1}$$

(c_1 очевидно $\neq 0$), то метрику (26.16) можно привести к виду:

$$g_{ii} = e_i (x^4)^{\lambda_i}, \quad g_{44} = e_4, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \tag{26.30}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\sum \gamma_i = 0, \quad \sum \lambda_i = 2, \quad \sum \lambda_i \lambda_j = 0 \quad (i \neq j), \\ &\prod_1^4 e_i = -1, \quad e_\alpha = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{26.31}$$

Записывая для (26.30) уравнения Киллинга, найдем:

$$\lambda_i \underset{4}{\xi}^4 + 2x^4 \partial_i \underset{4}{\xi}^i = 0,$$

$$e_i x^{4^{\lambda_i}} \partial_j \underset{4}{\xi}^i + e_j x^{4^{\lambda_j}} \partial_i \underset{4}{\xi}^j = 0,$$

$$e_i x^{4^{\lambda_i}} \partial_4 \underset{4}{\xi}^i + e_4 \partial_i \underset{4}{\xi}^4 = 0,$$

$$\partial_4 \underset{1}{\xi}^4 = 0.$$

Четвертая группа уравнений дает

$$\underset{1}{\xi}^4 = \varphi(x^1,\ x^2,\ x^3).$$

Третья группа позволяет определить

$$\underset{1}{\xi}^i = -e_4 e_i\, \partial_i \varphi \int (x^4)^{-\lambda_i}\, dx^4 + c^i(x^1,\ x^2,\ x^4).$$

Первая группа запишется в виде

$$\lambda_i \varphi + 2x^4 \left\{ -e_i e_4 \partial_i \varphi \int (x^4)^{-\lambda_i}\, dx^4 + \partial_i c^i \right\} = 0$$

(по i не суммируется).

Если $\lambda_i = 2$, то $\lambda_j = \lambda_k = 0$ ($j,\ k \neq i$; $j \neq k$). Но тогда пространство будет плоским. Если же $\lambda_i \neq 2$, то в силу того, что φ и c^i не зависят от x^4, получим:

$$\lambda_i \varphi = 0, \qquad -e_i e_4\, \partial_i \varphi \int (x^4)^{-\lambda_i}\, dx^4 + \partial_i c^i = 0.$$

Если хотя бы одна $\lambda_i = 0$, то из (26.31) следует, что непременно еще одна λ равна 0, а третья равна 2, что опять-таки приводит к плоскому пространству. Следовательно, $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1,\ 2,\ 3$), и поэтому

$$\varphi = 0, \quad \partial_i c^i = 0, \quad c^i(x^j,\ x^k) \qquad (j,\ k \neq i;\ i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

Так как $\xi^4 = 0$, то искомая группа *нетранзитивная* и $\xi^{i'} = c^i(x^j,\ x^k)$. Записывая вторую группу уравнений, получим:

$$e_i (x^4)^{\lambda_i}\, \partial_j c^i + e_j (x^4)^{\lambda_j}\, \partial_i c^j = 0 \quad (i \neq j)$$

(по i, j не суммируется).

Если среди λ_i нет ни одной пары одинаковых, то получим решение $c^i = \text{const}$, которое определяет тривиальные операторы $X_i = p_i$, существование которых было предположено, но группы G_4 здесь не будет. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, это противоречит (26.31). Следовательно, нужно положить $\lambda_1 = \lambda_2$, и тогда из (26.31) следует:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{4}{3}, \qquad \lambda_3 = -\frac{2}{3},$$

и $c^1 = c^1(x^2)$, $c^2 = c^2(x^1)$, $c^3 = \mathrm{const}$, причем c^3 можно обратить в нуль за счет комбинации с оператором X_3, не изменяя структуры, а c^1 и c^2 должны быть линейными относительно своих аргументов, так как их производные, совпадая со структурными константами, должны быть постоянными. Легко видеть, что их можно привести к виду:

$$c^1 = kx^2, \quad c^2 = sx^i, \quad e_1k + e_2s = 0.$$

Таким образом, четвертый оператор

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha} = -e_2x^2\delta_1^{\alpha} + e_1x^1\,\delta_2^{\alpha},$$

т. е. это — *оператор евклидова или лоренцева вращения в зависимости от сигнатуры формы* $g_{11}\,dx^{1^2} + g_{22}\,dx^{2^2}$.

Пространство определяется метрикой

$$ds^2 = e_1(x^4)^{\frac{4}{3}}\,dx^{1^2} + e_2(x^4)^{\frac{4}{3}}\,dx^{2^2} + e_3(x^4)^{-\frac{2}{3}}\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2}. \tag{26.32}$$

К этому типу принадлежат решения Казнера и Нарликара и Кармаркара (см. § 14). Метрика (26.32) будет давать *статическое* решение, если индекс 4 приписать некоторому пространственному направлению, и *не статическое*, если x^4 отвечает времени. Метрика (26.32) всегда отвечает структуре

$$[X_iX_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad [X_1X_4] = e_1X_2,$$

$$[X_2X_4] = -e_2X_1, \quad [X_3X_4] = 0,$$

т. е. имеем случай VI_2 по классификации (10.19), когда G_4 имеет абелеву подгруппу G_3.

5. Рассмотрим случай неравных стационарных кривизн, когда имеет место метрика (26.21) при условиях (26.22). Эта метрика возможна только для абелевой структуры и при таких начальных данных, которые допускают единственную структуру группы G_4, включающую абелеву группу G_3 в качестве подгруппы. Структура

такой группы G_4 будет

$$\left.\begin{aligned} &[X_i X_k] = 0 \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3),\\ &[X_1 X_4] = -\frac{k}{2} X_1 - \frac{k\sqrt{3}}{2} X_3,\\ &[X_2 X_4] = k X_2,\quad [X_3 X_4] = \frac{k\sqrt{3}}{2} X_1 - \frac{k}{2} X_3 \quad (k \neq 0), \end{aligned}\right\} \qquad (26.33)$$

причем группа просто-транзитивная, и так как

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, \qquad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta_3^{\alpha}, \qquad \underset{3}{\xi}^{\alpha} = \delta_4^{\alpha},$$

то $\underset{4}{\xi}^{4} \neq 0$. С другой стороны, если взять пространства, отвечающие структуре (24.10), то единственная для T_1 структура группы G_4, включающая эту G_3, будет снова (26.33) (с точностью до нумерации). Таким образом, эти два случая при повышении подвижности приводят к одному и тому же классу пространств. Так как (24.10) сведено выше к метрике (26.23), то достаточно рассмотреть те пространства (26.23), которые допускают просто-транзитивную группу со структурой

$$\left.\begin{aligned} &[X_1 X_2] = 0, \quad [X_1 X_3] = X_2, \quad [X_2 X_3] = -X_1 - X_2,\\ &[X_1 X_4] = X_1, \quad [X_2 X_4] = X_2, \quad [X_3 X_4] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (26.34)$$

При этом первые три оператора можно взять те же, что и для метрики (26.23). Ввиду этого три последних коммутатора (26.34) определяют $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ в виде:

$$\begin{aligned} \underset{4}{\xi}^{\alpha} = \underset{4}{\xi}^{1}(x^1)\,\delta_1^{\alpha} + \underset{4}{\xi}^{2}(x^1)\,\delta_2^{\alpha} &+ \\ + \left[x^3 + e^{\frac{x^2}{2}}\left(p\cos\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} + q\sin\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2}\right)\right]\delta_3^{\alpha} &+ \\ + \left\{x^4 - \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}\left[(p + q\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2} +\right.\right.& \\ \left.\left. + (q - p\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2}\right]\right\}\delta_4^{\alpha}. &\qquad (26.35) \end{aligned}$$

Мы не будем здесь предполагать, что гиперповерхности транзитивности, на которых действуют операторы X_1, X_2, X_3, выбраны в качестве координатных, и поэтому можем воспользоваться допустимыми преобразованиями, не меняющими этих трех операторов. Они будут иметь вид:

$$\begin{gathered}
x^{1'} = f(x^1),\\
x^{3'} = x^3 + e^{\frac{x^2}{2}}\,[M\cos\nu + N\sin\nu],\\
x^{2'} = x^2 + \varphi(x^1),\\
x^{4'} = x^4 - \frac{1}{2}\,e^{\frac{x^2}{2}}\,[(M + N\sqrt{3})\cos\nu + (N - M\sqrt{3})\sin\nu],
\end{gathered}$$

где f, φ, M, N — произвольные функции своих аргументов, а

$$\nu = \frac{\sqrt{3}x^2}{2}.$$

Пользуясь этими преобразованиями, в новой системе координат $\underset{4}{\xi}^\alpha$ можно представить в виде:

$$\underset{4}{\xi}^\alpha = \delta_1^\alpha + x^3\delta_3^\alpha + x^4\delta_4^\alpha; \tag{26.36}$$

после этого остаются еще допустимыми преобразования

$$\left.\begin{gathered}
x^{1'} = x^1 + c_1,\\
x^{3'} = x^3 + e^{x^1 + \frac{1}{2}x^2}\,(c_3\cos\nu + c_4\sin\nu),\\
x^{2'} = x^2 + c_2,\\
x^{4'} = x^4 -\\
-\frac{1}{2}\,e^{x^1 + \frac{1}{2}x^2}\,[(c_3 + c_4\sqrt{3})\cos\nu + (c_4 - c_3\sqrt{3})\sin\nu],\\
c_i = \mathrm{const} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),
\end{gathered}\right\} \tag{26.37}$$

оставляющие неизменными все четыре оператора.

Интегрируя уравнения Киллинга для каждого из этих четырех операторов, получим компоненты метрического тэнзора

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=c_{11},\quad g_{12}=c_{12},\quad g_{13}=c_{13}e^{-x^1}\cos\varrho,\\
&g_{14}=\frac{1}{2}e^{-x^1-\frac{1}{2}x^2}c_{13}(\cos\varrho+\sqrt{3}\sin\varrho),\\
&g_{22}=c_{22},\quad g_{23}=c_{23}\,e^{-x^1-\frac{1}{2}x^2}\cos\omega,\\
&g_{24}=\frac{1}{2}e^{-x^1-\frac{1}{2}x^2}c_{23}(\cos\omega+\sqrt{3}\sin\omega),\\
&g_{33}=e^{-2x^1-x^2}(c_{33}+c_{34}\cos\nu),\\
&g_{34}=\frac{1}{4}e^{-2x^1-x^2}[c_{33}+c_{34}(\cos\nu+\sqrt{3}\sin\nu)],\\
&g_{44}=\frac{1}{2}e^{-2x^1-x^2}[2c_{33}-c_{34}(\cos\nu-\sqrt{3}\sin\nu)],\\
&\varrho=\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2}+c_{14},\quad \omega=\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2}=c_{24},\quad \nu=\sqrt{3}x^2+c_{44},
\end{aligned}\right\}\qquad(26.38)$$

где $c_{ij}=\text{const}$. Имея в своем распоряжении четыре произвольных постоянных, фигурирующих в допустимом преобразовании (26.37), можно упростить эту метрику. Можно выбрать c_3 и c_4 так, чтобы в новой системе координат $c_{1'3'}=c_{2'3'}=0$; полагая $c_2=\frac{c_{44}}{\sqrt{3}}$, обратим $c_{4'4'}$ в нуль, и, наконец, за счет постоянной c_1 можно упростить еще один коэффициент $c_{3'4'}$; $c_{34}\neq 0$, так как это приводило бы к метрике не лоренцевой сигнатуры, и поэтому можно подбором c_2 обратить c_{34} в $\varepsilon=\pm 1$. После этого метрика будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}
\alpha & \beta & 0 & 0\\
\beta & \gamma & 0 & 0\\
0 & 0 & e^{-2x^1-x^2}(\delta+\varepsilon\cos\nu) & \frac{1}{2}e^{-2x^1-x^2}[\delta+\varepsilon(\cos\nu+\sqrt{3}\sin\nu)]\\
0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2x^1-x^2}[\delta+\varepsilon(\cos\nu+\sqrt{3}\sin\nu)] & \frac{1}{4}e^{-2x^1-x^2}[2\delta-\varepsilon(\cos\nu-\sqrt{3}\sin\nu)]
\end{pmatrix}.\qquad(26.39)$$

Записывая для этой метрики уравнения поля и интегрируя их, можно уточнить значение входящих сюда постоянных. Мы не будем приводить здесь эти вычисления (см. задачу 2 § 26). Отметим лишь, что искомая метрика после некоторого преобразования координат (не принадлежащего к числу допустимых) может быть записана в виде:

$$ds^2 = -\alpha(dx^{1^2} + dx^{4^2}) - 2\beta\, dx^1 dx^4 - dx^{2^2} - e^{-2\nu} dx^{3^2}, \quad (26.40)$$

где

$$\alpha = e^{\nu} \cos(\sqrt{3}\nu), \qquad \beta = e^{\nu} \sin(\sqrt{3}\nu), \qquad \nu = kx^2, \qquad k = \mathrm{const}.$$

Это пространство является многообразием T_1, *допускающим просто-транзитивную группу движений* G_4; оно характеризуется также тем, что имеет *постоянные стационарные кривизны* (постоянные базисы элементарных делителей λ-матрицы $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ $(a,\ b = 1, \ldots, 6)$).

Более того, можно показать (см. задачу 3 § 26), что *стационарные кривизны пропорциональны* ε_s, *где* ε_s — *три корня уравнения деления окружности на три равные части*: $\varepsilon_s^3 = 1$.

Так как T_1 не может допускать группу движений G_r с $r > 4$, если оно не пространство постоянной кривизны, то дальнейшее повышение подвижности может привести только к тривиальному случаю плоского пространства.

Задачи

1. Записать уравнения поля $R_{\alpha\beta} = 0$ для метрики (26.23).

2. Проделать то же самое для (26.39). Определить преобразование координат, которое полученную таким образом метрику переводит в метрику (26.40).

3. Для метрики (26.40) определить стационарные кривизны и показать, что они: 1) постоянны, 2) пропорциональны корням ε_s $(s = 1, 2, 3)$ уравнения деления окружности на три равные части: $\varepsilon_s^3 = 1$.

§ 27. Пространства T_2 и T_3, допускающие движения

По тем же соображениям, что и для T_1, классификацию пространств T_2 начнем с групп G_3 (см. задачу 1 настоящего параграфа).

Пространства $T_{2,3}$

Как показано в § 24, существует три типа структур групп движений G_3, отвечающих многообразиям T_2, один из которых приводит к двум различным возможностям. Рассмотрим эти структуры.

1. *Абелева* группа со структурой (24.19) действует на изотропных гиперповерхностях транзитивности. В этом случае, как будет показано в § 31, могут возникнуть три случая, отвечающие метрикам (31.27), (31.28), (31.29).

В случае (31.27), когда

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \gamma & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (27.1)$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^4), \quad X_i = p_i \; (i = 1, 2, 3),$$

записывая систему уравнений поля, получим, что девять уравнений обращаются в тождества и остается лишь одно: $R_{44} = 0$. В развернутом виде оно запишется так:

$$\gamma\alpha'' - 2\beta\beta'' + \alpha\gamma'' + \frac{1}{2g}(\gamma^2\alpha'^2 + \alpha^2\gamma'^2 + 2\alpha\gamma\beta'^2 + \\ + 2\beta^2\alpha'\gamma' + 2\beta^2\beta'^2 - 4\beta\gamma\alpha'\beta' - 4\alpha\beta\beta'\gamma') = 0, \qquad (27.2)$$

где $g = |g_{\alpha\beta}| = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$.

Таким образом, *потенциалы поля зависят в этом случае от двух произвольных функций одного аргумента.*

На каждой гиперповерхности транзитивности $x^4 = \text{const}$ X_1 — особый оператор, а полная группа на гиперповерхности будет $G_{3+\infty}$, что соответствует наличию особого оператора, который можно умножить на *произвольную функцию*. Нетрудно, однако, проверить (см. задачу 3 § 27), что метрика (27.1) допускает и группу G_5 с операторами

$$X_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad X_4 = x^2 p_1 + \omega^s p_s,$$
$$X_5 = x^3 p_1 + \sigma^s p_s \quad (s = 2, 3), \qquad (27.3)$$

где

$$\omega^2 = \int \frac{\gamma\, dx^4}{g}, \quad \omega^3 = -\int \frac{\beta\, dx^4}{g}, \quad \sigma^2 = -\int \frac{\alpha\, dx^4}{g}, \quad \sigma^3 = \int \frac{\beta\, dx^4}{g}, \qquad (27.4)$$

но не допускает группу G_6, так как содержит произвольные функции и не может быть пространством максимальной подвижности для T_2. Таким образом, метрику (27.1) следует отнести по групповой классификации к пространствам T_2, допускающим G_5. Из (27.3) и (27.4) непосредственно следует, что группа G_5 действует на *изотропных* гиперповерхностях транзитивности, а структура группы будет

$$\left.\begin{aligned} &[X_1X_i]=0\,(i=1,\,2,\,3),\ [X_2X_3]=[X_2X_5]=[X_3X_4]=0,\\ &\qquad[X_2X_4]=[X_3X_5]=X_1,\ [X_4X_5]=0. \end{aligned}\right\} \quad (27.5)$$

Что же касается метрик (31.28) и (31.29), то они не могут определять пространств T_2 (задача 4 настоящего параграфа). Если для метрики (27.1) вычислить компоненты тензора кривизны и записать в собирательных индексах бивекторного пространства λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$, то, вычисляя элементарные делители этой матрицы, получим ее характеристику в виде $[2\,1^{\circ},\ 2\,1]$; таким образом метрика (27.1) действительно определяет пространство T_2.

2. Группа G_3 со структурой (24.20) типа II действует на *изотропных* гиперповерхностях транзитивности и имеет один *особый* оператор (см. (24.21)). В этом случае, как будет показано в § 31, метрику можно представить в специальной системе координат матрицей (31.30):

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \beta & -x^3\\ 0 & \beta & \gamma & 0\\ 1 & -x^3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad g=\beta^2-\alpha\gamma<0,\ \ \alpha,\ \gamma\neq 0,\quad (27.6)$$

где α, β, γ — некоторые функции от x^4, а операторы группы G_3 имеют вид:

$$X_1=p_1,\ \ X_2=p_2,\ \ X_3=x^2p_1+p_3. \qquad (27.7)$$

Вычисляя матрицу $(g^{\alpha\beta})$ и компоненты тензора кривизны, придем к выводу, что только три из них R_{2424}, R_{2434}, R_{3434} отличны от нуля, а система уравнений поля дает единственное уравнение

$$\gamma R_{2424}-2\beta R_{2434}+\alpha R_{3434}=0,$$

тогда как все остальные обращаются тождественно в нуль. Кроме того, вычисляя для метрики (27.6) λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a, b=1, \ldots, 6)$, получим, как и выше, ее характеристику в виде $[21\overset{\circ}{,}21]$, т. е. имеем пространство T_2. Однако, непосредственно интегрируя уравнения Киллинга для метрики (27.6), получим общее выражение для неизвестного вектора Киллинга в виде:

$$\xi^{\alpha}=(c_3x^2+x^3u+c_1)\,\delta_1^{\alpha}+(u+c_2)\,\delta_2^{\alpha}+(c_3+v)\,\delta_3^{\alpha},$$

где c_i $(i=1, 2, 3)$ — постоянные, а u и v — функции только переменной x^4, удовлетворяющие нормальной линейной однородной системы двух уравнений

$$u'=-\frac{1}{g}(\beta u+\gamma v),\quad v'=\frac{1}{g}(\alpha u-\beta v). \tag{27.8}$$

Так как коэффициенты этой системы непрерывны, то в области непрерывности она совместна и допускает общее решение

$$u=c_4\underset{1}{u}+c_5\underset{2}{u},\qquad v=c_4\underset{1}{v}+c_5\underset{2}{v},$$

причем *фундаментальная* система $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$, $\underset{1}{v}$, $\underset{2}{v}$ удовлетворяет условию

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{u} & \underset{1}{v} \\ \underset{2}{u} & \underset{2}{v} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{27.9}$$

в указанной области. Таким образом, пространство допускает группу движений G_5 с операторами

$$X_i=p_i\ (i=1, 2),\quad X_3=x^2p_1+p_3,\quad X_4=\underset{1}{u}x^3p_1+\underset{1}{u}p_2+\underset{1}{v}p_3,$$

$$X_5=\underset{2}{u}x^3p_1+\underset{2}{u}p_2+\underset{2}{v}p_3,$$

где $\underset{i}{u}$, $\underset{i}{v}$ $(i=1, 2)$ образуют систему двух независимых решений для линейной системы (27.8). Вычисляя для тих операторов все возможные коммутаторы, получим структуру

$$\left.\begin{array}{c}[X_1X_i]=0\ (i=2,\ 3,\ 4,\ 5),\ [X_2X_3]=X_1,\\ [X_2X_j]=0\ \ (j=4,\ 5),\\ [X_3X_k]=0\,(k=4,\ 5),\ [X_4X_5]=kX_1,\end{array}\right\}\qquad(27.10)$$

где

$$k=\underset{1}{v}\underset{2}{u}-\underset{2}{v}\underset{1}{u}.$$

Здесь k — постоянная, в чем можно убедиться и непосредственно; если продифференцировать правую часть этого равенства и заменить $\underset{i}{u}'$ и $\underset{i}{v}'$ $(i=1,\ 2)$ при помощи системы (27.8), которой она должна по своему смыслу удовлетворять, то получим $k'=0$. Кроме того, из (27.9) следует, что $k\neq 0$, и тогда за счет умножения, например, оператора X_5 на $\frac{1}{k}$ можно обратить k в единицу. Но в этом случае нетрудно убедиться, что структура (27.10) изоморфна структуре (27.5), рассмотренной в случае $T_{2,\,3}$ с абелевой группой G_3, действующей на изотропных гиперповерхностях транзитивности; изменяя нумерацию операторов при помощи подстановки $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$, можно одну из этих структур привести к другой. Абелева подгруппа G_3 группы G_5 (27.10) имеет своим базисом операторы X_1, X_2, X_4, и она действует, как это непосредственно следует из (27.6) и вида операторов, на изотропных гиперповерхностях транзитивности, т. е. метрика (27.6) может быть приведена к метрике (27.1) при помощи невырожденного преобразования, и этот случай не заслуживает специального рассмотрения.

3. Пусть имеет место группа G_3 того же типа II, но уже действующая на *изотропных двумерных* поверхностях транзитивности; операторы группы можно задать, например, в виде (24.22), т. е. среди них имеется один *особый* оператор X_1, так как для пространства максимальной подвижности он также будет особым. В этом случае (см. § 30, случай G_3 II на $\overset{*}{V}_2$) всегда можно выбрать такую систему координат, относительно которой операторы

будут иметь вид (с точностью до нумерации):

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = x^2 p_1 + x^4 p_2, \tag{27.11}$$

а метрика определяется матрицей

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{27.12}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3, x^4), \ g = \alpha\beta^3 < 0, \ \alpha, \beta < 0.$$

Но если для этой метрики записать уравнения поля, то легко убедиться, что β не зависит от x^3 и вследствие этого функции α и β будут подчинены только двум условиям:

$$\beta_3 = 0, \ \frac{1}{\beta}\left(\beta_{44} - \frac{3\beta_4^2}{2\beta}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\alpha_{44} - \frac{\alpha_4^2}{2\alpha} - \frac{\alpha_4\beta_4}{\beta}\right) = 0, \tag{27.13}$$

где $f_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Отсюда следует, что *потенциалы поля* (27.1) *зависят от трех произвольных функций, две из которых зависят от* x^3 *и одна от* x^4.

Нетрудно проверить (см. задачу 2 настоящего параграфа), что характеристика λ-матрицы имеет вид $[21 \overset{\circ}{,} 21]$, и следовательно, если выполняется условие $\beta_{44} - \frac{3\beta_4^2}{2\beta} \neq 0$ при произвольных значениях функций α, β, отсюда нельзя получить пространства T_1 или T_3, которым отвечают характеристики другого типа.

Интегрируя уравнения Киллинга для метрики (27.12) при условии, что на функции α и β не накладывается никаких других условий, кроме (27.13), получим лишь операторы (27.11), т. е. эта метрика, вообще говоря, допускает только трехчленную группу движений.

4. Рассмотрим тот случай, когда имеет место группа G_3 типа III со структурой (24.23), действующей на *неизотропных* гиперповерхностях транзитивности.

Как будет показано в § 32, в этом случае систему координат всегда можно выбрать так, что метрика для любого пространства V_4 с такой группой движения будет определяться матрицей (32.7):

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{x^1} & a_{13} & 0 \\ a_{12}e^{x^1} & a_{22}e^{2x^1} & a_{23}e^{x^1} & 0 \\ a_{13} & a_{23}e^{x^1} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \quad e_4=\pm 1, \qquad (27.14)$$

а операторы группы будут иметь вид:

$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^2p_2. \qquad (27.15)$$

Отметим, что структура (24.23) остается неизменной с точностью до линейной невырожденной подстановки

$$Y_1=AX_1, \quad Y_2=BX_2, \quad Y_3=CX_1+DX_2+X_3 \quad (A,\ B\neq 0),$$

т. е. операторы X_1 и X_2 определяются для этой структуры с точностью до постоянных множителей. Как уже отмечалось в § 24, для этой структуры возможна такая система координат, для которой операторы будут определяться формулами (24.24). При этом в (24.24) оператор $X_2=p_1$; этот оператор допускается и пространством максимальной подвижности в той же системе координат (см. метрику (25.3) и операторы (25.4), с изменением нумерации оператора 1 на 2), причем он отвечает изотропному полю вектора Киллинга; этот факт должен иметь место и для исследуемого пространства. Следовательно, оператор X_2 изотропный и вследствие (27.14) и (27.15) $a_{33}=0$. Кроме того, из (24.24) и (25.3) следует, что операторы $\{X_1, X_2\}$ образуют абелеву подгруппу, действующую на изотропных двумерных поверхностях транзитивности. Этот факт переносится и на метрику (27.14) с оператором (27.15), так как X_1 и X_2 определены для данной структуры однозначно (с точностью до несущественных постоянных множителей). Иными словами, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & 0 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $a_{23}=0$. Полагая $a_{11}=\alpha$, $a_{12}=\beta$, $a_{13}=\gamma$, $a_{22}=\delta$, получим метрику в виде:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta e^{x^1} & \gamma & 0 \\ \beta e^{x^1} & \delta e^{2x^1} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (27.16)$$

$$g = -e_4 \delta \gamma^2 e^{2x^1}, \quad e_4 \delta > 0, \quad e_4 = \pm 1,$$

где α, β, γ, δ — некоторые функции от x^4. Если потребовать, чтобы допустимые преобразования для операторов (27.15) оставляли в то же время неизменной структуру (27.16), то они будут иметь вид

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = x^{1'} + c_1, \quad x^2 = x^{2'} + c_2 e^{-x^{1'}}, \\ x^3 = x^{3'} + c_3, \quad x^4 = \pm x^{4'} + c_4, \quad c_i = \mathrm{const} \end{array} \right\} \qquad (27.17)$$

и, следовательно, не содержат произвольных функций. Интегрируя уравнения поля $R_{\alpha\beta} = 0$ для метрики (27.16), получим:

$$\gamma' = \delta' = \beta'' = 0, \quad \alpha'' - \frac{\beta'^2}{\delta} + 2e_4 = 0,$$

т. е. γ и δ — постоянные, а

$$\beta = px^4 + q, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\delta} - 2e_4\right) x^{4^2} + rx^4 + s,$$

где p, q, r, s — постоянные. Выбирая в преобразовании (27.17) постоянные c_1, c_2 и c_4 определенным образом, можно δ обратить в e_4, а q и r превратить в нули.

Таким образом, метрика будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{e_4}{2}(p^2 - 2)\, x^{4^2} + s & px^4 e^{x^1} & \gamma & 0 \\ px^4 e^{x^1} & e_4 e^{2x^1} & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (27.18)$$

где $e_4 = \pm 1$, а p, s, γ — произвольные постоянные. Записывая для этой метрики λ-матрицу $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ $(a,\ b = 1, \ldots, 6)$ и вычисляя ее элементарные делители, найдем, что характеристика этой матрицы будет иметь вид $[2\,1^{*}\,2\,1]$, если только $p \neq 0$ или $\pm\sqrt{2}$. Следовательно, при этом условии метрика определяет пространство T_2. Однако, интегрируя для метрики (27.18) уравнения Киллинга, получим вектор Киллинга ξ^{α}, зависящий от шести независимых переменных, т. е. пространство максимальной подвижности (25.3), но в иной системе координат.

Пространства T_2, допускающие группы движений G_4 и G_5

Для определения таких пространств достаточно среди T_2, допускающих G_3, выделить те, которые допускают и G_4, так как всякая группа G_4 содержит подгруппу G_3. Так как метрикам (27.1) и (27.6) отвечает группа движений G_5, то для определения пространств T_2, допускающих G_4, остается выяснить, при каких значениях функций α и β метрика (27.12) допускает четырехчленную группу движений.

Если, кроме операторов группы G_3 (27.11), пространство допускает еще оператор X_4, то согласно второй основной теореме Ли (см. § 10, формула (10.18)), вычисляя коммутаторы для X_4, получим:

$$[X_i X_4] = A_i X_1 + B_i X_2 + C_i X_3 + D_i X_4 \qquad (i = 1, 2, 3), \quad (27.19)$$

где A_i, B_i, C_i, D_i — структурные константы. Записывая эти уравнения и исключая частные производные от компонент вектора Киллинга $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$, отвечающего оператору X_4 ($X_4 \equiv \underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_{\alpha}$), получим уравнения

$$\underset{4}{\xi}^{3} Q = \underset{4}{\xi}^{4} Q = 0, \qquad Q = D_1 x^3 + D_2 x^4 - D_3.$$

Если бы величина Q была отлична от нуля, то оператор X_4 действовал бы на тех же изотропных двумерных поверхностях транзитивности, вдоль которых передвигаются точки пространства T_2 под воздействием операторов X_i ($i = 1, 2, 3$); каждая такая поверхность являлась бы *изотропным* многообразием $\overset{*}{V}_2$, допускающим транзитивную на $\overset{*}{V}_2$ группу движений G_4, но легко убедиться, что это невозможно. Следовательно, $Q=0$, и так как $D_i=\mathrm{const}$, то все D_i равны нулю: $D_i=0$. Ввиду этого, интегрируя остальные уравнения (27.19), получим: $A_1=B_2+C_3$, $B_1=C_1=0$, а вектор Киллинга будет иметь вид:

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha}=\left[A_2x^2+\frac{1}{2}C_2x^{2^2}+M(x^3,\,x^4)\right]\delta_1^{\alpha}+ \\ +(B_2x^2+A_2x^4+C_2x^2x^4-A_3)\,\delta_2^{\alpha}+ \\ +N(x^3,\,x^4)\,\delta_3^{\alpha}+[C_2x^{4^2}+(B_2-C_3)\,x^4-B_3]\,\delta_4^{\alpha}, \qquad (27.20)$$

где M и N — некоторые функции своих аргументов. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия Якоби (10.18) для структурных постоянных A_i, B_i, C_i выполняются тождественно. Записывая для оператора $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ (27.20) и метрики (27.12) уравнения Киллинга, получим: $A_2=B_2+C_3=0$, $M=M(x^3)$ и

$$\partial_4(\underset{4}{\xi}^{4}\beta)=0,\quad \alpha N_4+\beta M'=0,\quad \alpha_3N+\frac{k}{\beta}\alpha_4+2\alpha N_3=0. \qquad (27.21)$$

Кроме того, единственное уравнение поля (27.13) приводится к виду:

$$\alpha_{44}-\frac{\alpha_4^2}{2\alpha}-\frac{2C_2x^4\alpha_4}{(C_2x^{4^2}-B_3)}-\frac{2C_2(2C_2x^{4^2}+B_3)\,\alpha}{(C_2x^{4^2}-B_3)^2}=0. \qquad (27.22)$$

Можно еще уточнить значения структурных постоянных, если воспользоваться следующим соображением.

Из классификации возможных вещественных структур групп Ли G_4 (10.17) и (10.19) следует, в чем можно убедиться непосредственно проверкой, что подгруппу G_3 типа II могут содержать только структуры типа I, II, III или же типа VI. Так как структурные константы C_{12}^{i}, C_{13}^{i}, C_{23}^{i} имеют канонический вид, то, не уменьшая общности, можно считать, что найденная выше структура должна и для C_{j4}^{i} $(j=1,\,2,\,3)$ иметь канонический вид.

Если бы имели место структуры I и II классификации (10.17), то в обоих случаях постоянная C_2 была бы равной нулю, т. е. в силу (27.21) $\beta_4=0$. Но в этом случае, как уже отмечалось выше, характеристика λ-матрицы

$(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a, b=1, \ldots, 6)$ в бивекторном пространстве не могла бы иметь вид $[2\ 1^{\circ}\ 2\ 1]$, что является необходимым для пространств T_2. Если бы группа G_4 имела структуру одного из возможных типов VI, то многообразие допускало бы абелеву группу движений G_3. Но, как показано выше, в этом случае T_2 допускало бы и группу движений G_5, как полную группу движений, и поэтому принадлежало бы к числу $T_{2,5}$.

Остается единственная возможность, когда структура G_4 будет иметь тип III. В этом случае получим $q=0$, $A_1 = A_2 = A_3 = B_2 = C_3 = 0$, $C_2 = 1$, $B_3 = -1$. В силу этого из (27.20) и (27.21) следует:

$$\beta = \frac{k}{x^{4^2}+1}, \quad k = \text{const} \neq 0,$$

$$N_4\alpha + M'B = 0, \quad N\alpha_3 + \frac{k}{\beta}\alpha_4 + 2\alpha N_3 = 0, \qquad (27.23)$$

а (27.22) перейдет в уравнение

$$\alpha_{44} - \frac{\alpha_4^2}{2\alpha} + \frac{2x^4\alpha_4}{(x^{4^2}+1)} - \frac{2(2x^{4^2}-1)\alpha}{(x^{4^2}+1)^2} = 0. \qquad (27.24)$$

Метрика (27.12) и операторы (27.11) остаются неизменными по форме при любом преобразовании вида

$$x^{1'} = x^1 + f(x^3), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = \psi(x^3), \quad x^{4'} = x^4.$$

Пользуясь произволом в выборе функций f и ψ, можно за счет выбора f $M(x^3)$ обратить в нуль; так как при $M=0$ из (27.23) следует, что $N = N(x^3)$, то, выбирая соответствующим образом ψ (так, чтобы $\psi_3 \neq 0$, что приводило бы к вырожденному преобразованию), N приведем к единице. Вследствие этого из (27.23) получим уравнение для α:

$$\alpha_3 + (x^{4^2}+1)\alpha_4 = 0,$$

из которого следует, что $\alpha = \alpha(x^3 - \operatorname{arctg} x^4)$. Нетрудно убедиться, что этот вывод вместе с уравнением поля (27.24) приводит к выводу $\alpha = 0$, что означало бы вырождение метрики.

Таким образом, рассматриваемое пространство может допускать лишь группу G_4 типа VI и вследствие этого допускает и группу G_5 движений; *пространства* T_2

в распределении порядков полных групп движений имеют лакуну: всякое T_2, *допускающее группу* G_3, *допускает и группу* G_5.

Так как всякое пространство $T_{2,5}$ находится среди $T_{2,4}$, то приходим к выводу: *если* T_2 *допускает группу движений* G_5, *не будучи пространством* T_2 *максимальной подвижности, то оно определяется метрикой* (27.1) *со структурой* (27.5) *и операторами* (27.3).

Пространства T_3, допускающие движения

Максимальная подвижность T_3, как показано в § 24, определяется группой движений G_2.

Является тривиальной задача определения T_3, допускающего группу G_1; она сводится к написанию системы уравнений поля при условиях, что компоненты $g_{\alpha\beta}(x)$ не зависят от одной переменной, и при условиях алгебраической структуры тензора кривизны (см. задачу 6 § 27).

Задачи

1. Записать уравнения поля для T_2, допускающих группы движений G_1 или G_2 обеих возможных структур (см. § 29).

2. Показать, что характеристика λ-матрицы $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$ для метрики (27.2), (27.3) будет иметь вид $[2\,1\,;\,2\,1]$.

3. Проверить, что метрика (27.4) допускает группу движений G_5 с операторами (27.6).

4. Показать, что метрики (31.28) и (31.29) не могут определять пространств T_2.

5. Показать, что группы G_4 типов IV, V, VII, VIII не могут содержать подгруппы G_3 типа II.

6. Записать уравнения поля и условия структуры для пространств T_3, допускающих группу движений G_1.

7. Показать, что метрика

$$ds^2=-e^{x^2x^4}\left(dx^{1^2}+dx^{2^2}\right)-2dx^3\,dx^4+\\ +\left[x^2x^3+2e^{x^2x^4}\left(\frac{x^{2^2}}{x^{4^2}}-\frac{4x^2}{x^{4^3}}+\frac{6}{x^{4^4}}\right)\right]dx^{4^2}$$

определяет пространство T_3, допускающее одночленную группу движений G_1 с оператором $X=p_1$.

§ 28. Сводка результатов. Обзор известных решений уравнений поля

Естественно думать, что решения уравнений поля ($R_{\alpha\beta}=0$), допускающие некоторую группу движений, являются наиболее интересными с физической точки зрения.

Во всяком случае все известные в литературе точные решения обладают этим свойством.

Особенно интересными являются пространства с большой подвижностью, так как они отвечают наиболее простым и физически важным моделям распределения и движения материи. Можно думать, что они определяют геометрию пространственно-временного континуума в свободном пространстве в наиболее характерных случаях поведения материи.

Так как всякие *точечные* преобразования, входящие в заданную группу движений, определяют автоморфизм в смысле отображения пространства-времени на себя, в результате которого материя и геометрия гравитационного поля будут описываться теми же формулами и уравнениями, что и до автоморфизма, то всякое описание гравитационного поля задается с точностью до автоморфизмов движения. В этом смысле *геометрия любого гравитационного поля является геометрией автоморфизмов движения пространства-времени.* Каждому гравитационному полю отвечает своя группа движений G_r, причем $0 \leqslant r \leqslant 10$. В случае $r=10$ получим пространство постоянной кривизны (при $R_{\alpha\beta}=0$ — пространство Минковского, с точностью до выбора системы координат), а при $r=0$ пространство допускает лишь тождественные преобразования $\overset{*}{x}{}^{\alpha}=x^{\alpha}$ и группа автоморфизмов совпадает с единицей группы.

Все известные в литературе решения можно характеризовать с этой точки зрения, но среди полученных в этой главе пространств имеются и такие, о существовании которых не было никаких предположений. К таким решениям относятся прежде всего пространства T_2 и T_3. Но и среди пространств T_1 имеются неизвестные в литературе и обладающие рядом интересных свойств; стоит, например, отметить пространства T_1, допускающие просто-транзитивную группу движений G_4, с неравными стационарными комплексными кривизнами.

Классификацию полей тяготения в случае свободного пространства удобно изобразить при помощи следующей схемы.

группа \ тип	T_1	T_2	T_3
G_{10}	пр-во Минковского $T_{1,10}$	▩	▩
G_7, G_8, G_9	▨ лакуна	▩	
G_6		пр-во максим. подв. $T_{2,6}$	
G_5		$T_{2,5}$	
G_4	$T_{1,4}$	▨ лакуна	
G_3	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	
G_2	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$	пр-во максим. подв. $T_{3,2}$
G_1	$T_{1,1}$	$T_{2,1}$	$T_{3,1}$
G_0	$T_{1,0}$	$T_{2,0}$	$T_{3,0}$

Здесь одинарная штриховка (лакуны) означает, что такое T_i с группой указанного порядка автоматически допускает и группу на единицу большего порядка (в случае T_1, следовательно, и группу G_{10}, которой отвечает плоское пространство-время; для T_2 — группу G_5). Двойная штриховка означает, что не существует пространств такого типа с группой движения указанного порядка. Других лакун, кроме указанных на схеме, не существует. В каждой клетке указаны тип пространств и порядок возможной полной группы. Из этой схемы непосредственно следует отмеченный выше важный факт: *пространства* T_2 *и* T_3 *не могут быть плоскими* (тензор кривизны всегда отличен от нуля).

Наиболее богатым по числу различных классов пространств, допускающих движения, является первый тип (T_1). Эти пространства имеют наиболее симметрическую структуру тензора кривизны и являются характерными для задач релятивистской космологии — области, где в основном до сих пор и применялась теория релятивистской гравитации. Может быть, именно этим объясняется тот факт, что почти все известные решения относятся к классу пространств $T_{1,r}$ $(r=2, 3, 4)$.

Приведем классификацию основных известных решений уравнений поля

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta},$$

выяснив их тип и порядок допускаемой группы движений (см. § 14).

1. Решение Шварцшильда (14.1) для центрально-симметрического поля. Как показано в § 26, это есть решение, определяемое метрикой (26.26) при значениях постоянных

$$c_1=1,\quad c_2=0,\quad c_3=-2a.$$

Следовательно, имеем здесь пространства $T_{1,4}$ с неразрешимой группой G_4 типа VIII. Наличие неразрешимой группы является естественным, если учесть, что это пространство имеет двумерные неизотропные поверхности транзитивности постоянной кривизны, для которых (в случае, когда кривизна отлична от нуля) группа движений всегда неразрешимая.

2. Решение Коттлера (14.2) является непосредственным обобщением решения Шварцшильда на тот случай, когда уравнения поля имеют вид

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}.$$

Тут имеет место та же группа движений.

3. Решение Вейля и Леви-Чивита (14.3) статическое с осевой симметрией. Так как решение зависит фактически только от двух переменных x^3 и $\varrho=\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}$, то имеют место два оператора, которые в некоторой системе координат могут быть записаны в виде

$$X_1=p_1,\quad X_2=p_2$$

и, следовательно, определяют *абелеву группу* G_2, которая действует на неизотропных поверхностях транзитивности. Кроме того, так как это решение найдено при условии, что μ и ν стремятся к нулю на бесконечности, то это пространство способно вырождаться в плоское.

Но только пространство T_1 может обладать таким свойством. Следовательно, имеем $T_{1,2}$ *с абелевой группой, действующей транзитивно на неизотропных двумерных поверхностях транзитивности.*

4. Решение Бринкмана для $n=4$ определяет $T_{1,10}$.

5. Решение Казнера определяет пространства $T_{1,4}$ с разрешимой G_4 типа VI_4, имеющей абелеву подгруппу G_3. Группа *нетранзитивная.*

6. Решение Миттера является частным случаем решения Леви-Чивита и Вейля без повышения подвижности. Таким образом, имеем здесь $T_{1,2}$ с абелевой группой. Решение Леви сводится к предыдущему.

7. Решение Дельсарта (14.5) представляет собой частный интеграл системы уравнений поля Вейля и Леви-Чивита. Подвижность не повышается. Характеристика λ-матрицы имеет вид $[(1\ 1)\ 1,\ (1\ 1)\ 1]$.

8. Решение (14.6) определяет $T_{1,4}$ с неразрешимой группой G_4 типа VIII.

9. Всякое приводимое пространство (14.7) или (14.8), когда $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ и $\varkappa\neq 0$, имеет, очевидно, 6-членную группу движений; если же $\varkappa=0$, то приходим к плоскому пространству $T_{1,10}$.

10. Решение Нарликара и Кармаркара (14.12) приводится к решению Казнера.

11. Решение Эйнштейна и Розена допускает два очевидных оператора $X_1=p_2$ и $X_2=p_3$, определяющих абелеву группу G_2. Если же записать уравнения Киллинга для заданной метрики и потребовать, чтобы они допускали решение, отличное от

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha}=c_1\delta_2^{\alpha}+c_2\delta_3^{\alpha},\qquad c_1,\ c_2=\mathrm{const},$$

то это возможно только при наложении на метрический тензор некоторых дополнительных условий, не являющихся следствиями уравнений поля. Отметим, что решение Эйнштейна и Розена определяется при следующих дополнительных требованиях: 1) пространство допускает 4-ортогональную систему координат, 2) допускает абелеву группу движений G_2, действующую на неизотропных поверхностях, 3) $g_{11}=-g_{44}$, 4) сигнатура метрики $(-\ -\ -\ +)$. Более подробное исследование этих пространств приведено в § 52.

Очевидно, что любое решение может быть охарактеризовано в указанном смысле, и поэтому, резюмируя, можно утверждать, что в свободном пространстве общая классификация полей тяготения по структурам тензора кривизны и классификация по группам движений при наложении одной из них на другую приводят к *инвариантной характеристике полей гравитации.*

В случае полей тяготения при $T_{\alpha\beta} \neq 0$ вопрос усложняется, но допускает решение, которое рассматривается в следующей главе.

ГЛАВА V

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА ПО ГРУППАМ ДВИЖЕНИЙ

В случае $n = 4$, когда уравнения поля гравитации имеют вид:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta},$$

классификация по группам движения, допускаемым пространством, при произвольном тензоре энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ приводит к задаче классификации произвольных пространств V_4 при единственном ограничении

$$|g_{\alpha\beta}| < 0,$$

которое эквивалентно (с точностью до умножения метрики на -1) утверждению: метрика пространства V_n в точке имеет сигнатуру типа $(- - - +)$.

С физической точки зрения в развитие идеи, высказанной в предыдущей главе, каждое поле гравитации общего вида рассматривается здесь как такой физический феномен, который инвариантен относительно некоторой r-параметрической группы движений G_r $\left(0 \leqslant r \leqslant \frac{n(n+1)}{2} = 10\right)$, а геометрия пространства-времени рассматривается как геометрия автоморфизмов, отвечающих данной группе G_r.

Задача классификации пространств V_4 по группам движений решалась различными авторами (см. § 29) при тех или иных дополнительных предположениях. Общее решение проблемы имеется в совместных работах А. З. Петрова, В. Р. Кайгородова, В. Н. Абдуллина [337], [357], [358], которые содержат систематическое перечисление полученных ранее результатов, заполнение имеющихся пробелов и решение проблемы для случая транзитивных и кратно-транзитивных групп.

Такая классификация позволяет подойти к изучению гравитационного поля с групповой и, следовательно, инвариантной точки зрения [321].

Систематической классификацией пространств V_4 по группам движений занимался Фубини, в предположении *определенно-положительной* метрики, в работе [18], где отыскивались пространства V_4 с группой G_r $(r = 1, 2, 3, 4)$, и работе [20], где рассматривались G_r с $r \geqslant 5$. Но в этой последней работе содержалась неточность. Для установления допустимых структур групп движений Фубини доказал следующую теорему при не совсем, впрочем, точной формулировке: всякая группа G_r $(r \leqslant 8)$ в V_4 допускает подгруппу G_{r-1}. Однако, как показал И. П. Егоров [230], эта формулировка требует уточнения. Фубини показывает сначала, что теорема верна для $r \leqslant 7$, а также и для $r = 8$, но в предположении, что G_8 неизоморфна полной проективной группе, и в этой части теорема верна. Если же для G_8 не делать этой оговорки, то теорема не имеет места. Можно указать пространство V_4 с группой G_8 такого вида, не допускающей подгруппы G_7 [230]. Другая неточность, допущенная Фубини, заключается в том, что он пользовался классификацией структур групп G_r над полем комплексных чисел, полученной С. Ли в работе [7]; *над полем вещественных чисел* число структур увеличивается, и поэтому часть пространств V_4 с транзитивными группами выпадает; кроме того, в этом случае существует вещественная группа G_3, не содержащая подгруппу G_2 (группа вращений).

Другим, оригинальным, методом отыскивал пространства V_4, допускающие кратно-транзитивные группы G_5, G_6, G_7 при определенно-положительной метрике, Врынчану [200].

В случае неопределенной метрики появляется дополнительная возможность существования таких V_4, у которых G_r действует на изотропных поверхностях транзитивности, метрика которых вырождена. Эту возможность впервые отметил И. П. Егоров. Г. И. Кручкович предложил метод отыскания таких V_4 и произвел классификацию их для нетранзитивных G_r $(r = 3, 4)$ [260]. В этой работе по недосмотру, замеченному А. З. Петровым, выпало несколько классов пространств, кроме того, V_4, допускающие G_2, а также транзитивные G_4, не рассматривались. Однако они очень важны для изучения полей тяготения.

Классификация основывается на рассмотрении канонических вещественных структур (§ 10).

Для выделения пространств V_4, определяющих некоторое реальное поле тяготения, необходимо для каждого из полученных классов пространств потребовать выполнения условий $|g_{\alpha\beta}| < 0$. Исследование ведется в классе аналитических функций.

§ 29. Поля тяготения, допускающие группу G_r ($r \leqslant 2$)

Будем всюду далее векторы Киллинга, определяющие операторы $X_s f = \underset{s}{\xi}^{\alpha}(x)\,\partial_\alpha f$, обозначать $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$, а производную $\frac{\partial\varphi'}{\partial x_\alpha} \equiv \partial_\alpha \varphi$ обозначать иногда для краткости φ_α.

Группа G_0

Группа совпадает с единицей группы. Имеем пространство V_4, компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ которого нужно подчинить только условию $|g_{\alpha\beta}| < 0$.

Группа G_1

Возможны два случая: вектор Киллинга ξ^α *изотропный* или *неизотропный*.

Неизотропный ξ^α ($\xi_\alpha \xi^\alpha \neq 0$). Тогда V_4 допускает такую систему координат, для которой $\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta^\alpha_1$ и $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^2, x^3, x^4)$, а координатные кривые с параметром x^1 являются траекториями движения.

Изотропный $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ ($\underset{1}{\xi}_{\alpha} \underset{1}{\xi}^{\alpha} = 0$). По сравнению с предыдущим случаем добавляется еще условие $g_{11} = 0$.

Группа G_2

Будем далее обозначать многообразия с вырожденной метрикой символом $\overset{*}{V}_m$, опуская знак «$*$» в случае невырожденности.

G_2 I (абелева группа) на V_2. Так как ранг $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ ($s = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$) не может быть < 2, то всегда можно выбрать такую систему координат, в которой векторы Киллинга имеют компоненты $\underset{s}{\xi}^3=0$, $\underset{s}{\xi}^4=0$, а уравнения поверхностей транзитивности будут $x^3=\text{const}$, $x^4=\text{const}$. Пользуясь уравнениями структуры и самым общим преобразованием координат, оставляющим, как легко видеть, эти факты инвариантными:

$$x^{1'}=f(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad x^{2'}=\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4),$$
$$x^{3'}=\psi(x^3, x^4), \qquad x^{4'}=\theta(x^3, x^4),$$

за счет выбора f и φ приведем векторы Киллинга к виду

$$\underset{1}{\xi}^\alpha=\delta_1^\alpha, \quad \underset{2}{\xi}^\alpha=\delta_2^\alpha.$$

После этого наиболее общее преобразование координат, сохраняющее все полученные выше факты, будет иметь вид:

$$x^1=x^{1'}+f(x^{3'}, x^{4'}), \qquad x^2=x^{2'}+\varphi(x^{3'}, x^{4'}),$$
$$x^3=\psi(x^{3'}, x^{4'}), \qquad x^4=\theta(x^{3'}, x^{4'}),$$

где f, φ, ψ, θ — произвольные функции своих аргументов, подчиненные условию невырожденности преобразования: $\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3\neq 0$. Уравнения Киллинга

$$\xi^\sigma\partial_\sigma g_{\alpha\beta}+g_{\alpha\sigma}\partial_\beta\xi^\sigma+g_{\beta\sigma}\partial_\alpha\xi^\sigma=0$$

для $\underset{1}{\xi}^\alpha$ и $\underset{2}{\xi}^\alpha$ приводят к выводу: $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^3, x^4)$. Используем произвол в выборе функций f, φ, ψ, θ для приведения метрики к одной из возможных канонических форм. Выберем эти функции так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$f_4=\sigma(g^{13}\theta_3-g^{14}\psi_3), \qquad \varphi_4=\sigma(g^{23}\theta_3-g^{24}\psi_3),$$
$$\psi_4=\sigma(g^{33}\theta_3-g^{34}\psi_3), \qquad \theta_4=\sigma(g^{34}\theta_3-g^{44}\psi_3),$$

где $\sigma=\frac{e_4}{\sqrt{e_4\omega}}$, $e_4=\pm 1$, $\omega=g^{33}\theta_3^2-2g^{34}\psi_3\theta_3+g^{44}\psi_3^2$ и e_4 выбирается так, чтобы в некоторой области пространства V_4 σ была вещественной. Здесь предполагается, что в $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ переменные x^α заменены через $x^{\alpha'}$, а f, φ, ψ, θ — также функции от $x^{\alpha'}$. При соблюдении этих условий и предположении об аналитичности $g_{\alpha\beta}$ в некоторой области получим систему дифференциальных уравнений типа Коши — Ковалевской (С. П. Фиников [160]), совместную в указанной области в классе аналитических функций. Но эта система уравнений эквивалентна в новой системе координат системе условий

$$g_{i'4'}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad g_{4'4'}=e_4.$$

Следовательно, метрика в специальной голономной системе координат будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta})=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & e_4 \end{array}\right), \qquad (29.1)$$

$$e_4=\pm 1, \quad A=(g_{ij}) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

$$g_{ij}=g_{ij}(x^3,\ x^4), \quad X_1=p_1, \quad X_2=p_2.$$

C_2 I (абелева группа) на $\overset{*}{V}_2$. Так как $\overset{*}{V}_2$ — изотропное многообразие, то на нем метрика вырождается, т. е. если отнести $\overset{*}{V}_2$ к координатам x^1, x^2, то $g_{11}g_{22}-g_{12}^2=0$. Если бы ранг матрицы (g_{ij}) $(i,\ j=1,\ 2)$ был равен нулю, то в некоторой системе координат $g_{11}=g_{12}=g_{22}=0$ и $|g_{\alpha\beta}|>0$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, но этот случай невозможен для реальных полей тяготения. Следовательно, ранг метрики на $\overset{*}{V}_2$ равен единице, и тогда на $\overset{*}{V}_2$ существует единственное семейство *особых* линий, изотропных и ортогональных ко всему $\overset{*}{V}_2$: $g_{ij}\xi^i=0$ $(i,\ j=1,\ 2)$. Если при этом G_2 допускает оператор $X=\xi^i\partial_i$, то она допускает и оператор $Y=\sigma(x)\,\xi^i\partial_i$, где σ — произвольный скаляр, т. е. получим два оператора с общей траекторией, и наоборот, если в $\overset{*}{V}_2$ имеются два оператора с общей траекторией, то эта траектория — особая линия $\overset{*}{V}_2$.

Ясно, что особые линии представляют собой *систему импримитивности* G_2. Возможны два случая: a) среди операторов G_2 есть особый и b) нет особого оператора.

a) $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ — *особый* вектор Киллинга. Так как ранг $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ не может быть <2, то ([142], стр. 269) можно ввести такую систему координат, для которой $\underset{s}{\xi}^3=\underset{s}{\xi}^4=0$ $(s=1,\ 2)$.

а уравнения $\overset{*}{V}_2$ будут иметь вид $x^3=\text{const}$, $x^4=\text{const}$. Эти свойства инвариантны относительно преобразований $x^{1'}=f$, $x^{2'}=\varphi$, $x^{3'}=\psi$, $x^{4'}=\theta$, где f, φ зависят от x^1, x^2, x^3, x^4, а ψ и θ от x^3, x^4, и ограничены только условием невырожденности преобразования $(f_1\varphi_2-f_2\varphi_1)\times$ $\times(\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3)\neq 0$. Всегда можно выбрать f и φ так, чтобы $\underset{1}{\xi}^{\alpha'}=\delta_1^{\alpha'}$, после чего остается допустимым преобразованием преобразование

$$x^{1'}=x^1+f(x^2,\ x^3,\ x^4),\qquad x^{2'}=\varphi(x^2,\ x^3,\ x^4),$$
$$x^{3'}=\psi(x^3,x^4),\qquad x^{4'}=\theta(x^3,\ x^4)$$

при условии $\varphi_2(\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3)\neq 0$, и это будет самый общий вид такого рода преобразований. Так как $\underset{1}{\xi}^\alpha$ — особый оператор, то в этой системе координат $g_{11}=g_{12}=0$ и $\partial_1\underset{2}{\xi}^2=0$. Из уравнений структуры $[X_1,X_2]=0$ следует, что $\underset{2}{\xi}^\alpha=\underset{2}{\xi}^\alpha(x^2,\ x^3\ x^4)$, и, применяя допустимое преобразование, получим:

$$\underset{2}{\xi}^{1'}=\underset{2}{\xi}^1+f_2\underset{2}{\xi}^2,\qquad \underset{2}{\xi}^{2'}=\varphi_2\underset{2}{\xi}^2.$$

В силу условия о ранге метрики пространства $\overset{*}{V}_2$ $\underset{2}{\xi}^2\neq 0$, поэтому невырожденным преобразованием, выбирая φ_2 и f_2, добьемся того, чтобы $\underset{2}{\xi}^{\alpha'}=\delta_2^{\alpha'}$. После этого допустимым преобразованием будет $x^{1'}=x^1+f$, $x^{2'}=x^2+\varphi$, $x^{3'}=\psi$, $x^{4'}=\theta$, где f, φ, ψ, θ — произвольные функции от x^3, x^4, подчиненные условию $\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3\neq 0$. При таком преобразовании $g_{1'4'}=g_{13}\psi+g_{14}\theta_4$, и так как g_{13} и g_{14} не могут быть одновременно равны нулю, то можно, не нарушая общности, принять, что $g_{14}\neq 0$. Компонента g_{22} инвариантна при таком преобразовании и не может равняться нулю, так как в противном случае $|g_{\alpha\beta}|>0$. Ввиду этого можно положить:

$$\psi_4=\frac{\sqrt{-e^4g_{14}^2g_{22}}}{g},\qquad e_4=\pm 1,$$
$$\theta_4=-\frac{g_{13}}{g_{14}}\psi_4,\qquad \varphi_4=-\frac{1}{g_{22}}(g_{13}\psi_{14}+g_{24}\theta_4).$$

$$f_4 = \frac{1}{g_{13}\psi_3 + g_{14}\theta_3}\,[g_{23}\varphi_4\psi_3 + g_{24}\varphi_4\theta_3 + g_{33}\psi_3\psi_4 + \\ + g_{34}(\psi_3\theta_4 + \psi_4\theta_3) + g_{44}\theta_3\theta_4],$$

что приводит к совместной системе уравнений типа Коши — Ковалевской. Взяв в качестве f, φ, ψ, θ интегралы этой системы, получим:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (29.2)$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3, x^4), \quad X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2.$$

b) G_2 *не имеет особых операторов.* Все рассуждения повторяются почти буквально, но с тем ограничением, что если x^1 — особые кривые, то не может быть вектора Киллинга $\xi^\alpha = \delta_1^\alpha$. Это приводит к двум возможностям:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & -x^1 g_{22} + g_{23} & 0 \\ 0 & -x^1 g_{22} + g_{23} & {x^1}^2 g_{22} - 2x^1 g_{23} + g_{33} & 0 \\ g_{14} & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}, \quad (29.3)$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3, x^4), \quad X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1 + x^3 p_2;$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & -x^1 g_{22} + g_{23} & 0 \\ g_{13} & -x^1 g_{22} + g_{23} & {x^1}^2 g_{22} - 2x^1 g_{23} + g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (29.4)$$

$$e_4 = \pm 1, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3, x^1), \quad X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1 + x^3 p_2$$

G_2 II (неабелева группа) на V_2. Повторяя все рассуждения, относящиеся к случаю G_2 I на V_2, с тем лишь исключением, что уравнения структуры будут типа II получим:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} e^{-2x^2} a_{11} & e^{-x^2} a_{12} & e^{-x^2} a_{13} & 0 \\ e^{-x^2} a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ e^{-x^2} a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} \end{pmatrix}, \qquad (29.5)$$

$$e_4 = \pm 1, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x^3, x^4), \quad X_1 = p_1, \quad X_2 = x^1 p_1 + p_2.$$

G_2 II *действует* на $\overset{*}{V}_2$. Здесь также выделяются два случая:

а) G_2 *содержит особый оператор.* Здесь применимы все рассуждения, проведенные в случае а) G_2 I на $\overset{*}{V}_2$, с незначительными отклонениями в силу других уравнений структуры. Вследствие этого получим канонический вид:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-x^2}a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ e^{-x^2}a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (29.6)$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3x^4),\qquad X_1=p_1,\qquad X_2=x^1p_1+p_2.$$

b) G_2 *не содержит особого оператора.* Всегда можно выбрать такую систему координат ([147], стр. 269), относительно которой $\overset{*}{V}_2$ запишутся уравнениями $x^3=\text{const}$, $x^4=\text{const}$, $\underset{s}{\xi}^3=\underset{s}{\xi}^4=0$. Выберем за координатные линии x^1 особые кривые на $\overset{*}{V}_2$. Тогда $g_{11}=g_{12}=0$ и $\partial_1\underset{s}{\xi}^2=0$, как это следует из уравнений Киллинга; наиболее общее преобразование координат, сохраняющее все эти факты, имеет вид:

$$x^{1'}=f(x^1,\,x^2,\,x^3,\,x^4),\qquad x^{2'}=\varphi\,(x^2,\,x^3,\,x^4),$$
$$x^{3'}=\psi(x^3,\,x^4),\qquad x^{4'}=\theta\,(x^3,\,x^4)$$

при условии $f_1\varphi_2(\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3)\neq 0$. Компонента $\underset{1}{\xi}^2\neq 0$, так как случай особого оператора исключен. Поэтому, полагая $f_2=\dfrac{-\underset{1}{\xi}^1}{\underset{1}{\xi}^2}f_1$, $\varphi_2=\dfrac{1}{\underset{1}{\xi}^2}$, придем к совместной системе типа Коши — Ковалевской и приведем вектор Киллинга к следующему виду: $\underset{1}{\xi}^{\alpha'}=\delta_2^{\alpha'}$. После этого допустимые преобразования примут вид:

$$x^{1'}=f(x^1,\,x^3,\,x^4),\qquad x^{2'}=x^2+\varphi\,(x^3,\,x^4),$$
$$x^{3'}=\psi\,(x^3,\,x^4),\qquad x^{4'}=\theta\,(x^3,\,x^4),$$

где $f_1(\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3)\neq 0$. Из уравнений структуры и $\partial_1\underset{2}{\xi}^2=0$ следует, что $\underset{2}{\xi}^\alpha=A(x^1, x^3, x^4)\,\delta_1^\alpha+(x^2+B(x^3, x^4))\,\delta_2^\alpha$, где $A\neq 0$, иначе имели бы случай особого оператора. Поэтому невырожденными допустимыми преобразованиями приведем $\underset{2}{\xi}^{\alpha'}$ к виду $\delta_1^{\alpha'}+x^2\delta_2^{\alpha'}$. После этого допустимо еще преобразование

$$x^1=x^{1'}+f(x^{3'}, x^{4'}),\quad x^2=x^{2'},$$

$$x^3=\psi(x^{3'}, x^{4'}),\quad x^4=\theta(x^{3'}, x^{4'})$$

при условии $\psi_3\theta_4-\psi_4\theta_3\neq 0$.

Записывая уравнения Киллинга для этих операторов получим:

$$g_{11}=g_{12}=0,\quad g_{13}=a_{13},\quad g_{14}=a_{14},$$

$$g_{22}=e^{-2x^1}a_{22},\quad g_{23}=e^{-x^1}a_{23},\quad g_{24}=e^{-x^1}a_{24},$$

$$g_{33}=a_{33},\quad g_{34}=a_{34},\quad g_{44}=a_{44},$$

где $a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3, x^4)$.

Преобразуя допустимым образом, найдем, что $g_{1'4'}=a_{13}\psi_4+a_{14}\theta_4$, и так как a_{13}, a_{14} не могут быть одновременно нулями ($|g_{\alpha\beta}|\neq 0$), то компоненту a_{14} можно считать, не уменьшая общности, отличной от нуля. Тогда

$$g_{2'4'}=e^{-x^{1'}}e^{-f}(a_{23}\psi_4+a_{24}\theta_4),$$

$$g_{3'4'}=f_3g_{1'4'}+f_4g_{1'3'}+\psi_3(a_{33}\psi_4+a_{34}\theta_4)+\theta_3(a_{33}\psi_4+a_{44}\theta_4).$$

Потребуем, чтобы $g_{1'4'}=g_{2'4'}=g_{3'4'}=0$. Это приводит к системе уравнений типа Коши: $f_4=F$, $\psi_4=\Phi$, $\theta_4=\Psi$ Если $g_{1'4'}=0$, то $g_{1'3'}\neq 0$, и следовательно, можно разрешить эти три уравнения явно относительно f_4, φ_4, θ_4 Отметим, что если $a_{14}a_{23}-a_{13}a_{24}=0$, то система сводится к $f_1=F$, $\varphi_4=\Phi$ при произвольном θ_4 и приводит к тем же результатам. Следовательно, имеем канонический вид

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & e^{-2x^1}a_{22} & e^{-x^1}a_{23} & 0 \\ a_{13} & e^{-x^1}a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad (29.7$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x^3, x^4), \qquad X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_1 + x^2 p_2.$$

Этим исчерпываются все поля тяготения, допускающие группу Ли движений G_2.

§ 30. Поля тяготения, допускающие группу движений G_3, действующую на V_2 или $\overset{*}{V}_2$

Если V_4 допускает группу движений G_3 с матрицей $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ $(s = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3, 4)$ ранга 2, то эта нетранзитивная группа действует на двумерных поверхностях транзитивности, которые могут быть *неизотропными* (V_2) или же *изотропными* $(\overset{*}{V}_2)$. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

G_3 действует на V_2. Так как G_3 — максимальная группа на V_2, то каждое такое V_2 должно иметь постоянную кривизну K. При этом возможны случаи: 1) $K = 0$, 2) $K > 0$ и 3) $K < 0$.

В первом случае $(K = 0)$ каждое V_2 представляет собой плоское двумерное пространство с сигнатурой (с точностью до несущественного изменения всех знаков одновременно) одного из двух видов: $(++)$ или $(+-)$. В обоих случаях G_3 допускает абелеву подгруппу G_2, причем $\underset{1}{\xi}^{\alpha} \neq \sigma \underset{2}{\xi}^{\alpha}$, так как это означало бы, что на V_2 действует особый оператор, что исключено. Следовательно, искомые V_4 содержатся среди V_4 типа (29.1). Но удобнее пойти другим путем, не опираясь на метрику (29.1).

Вообще, если V_n с неопределенной метрикой допускает непрерывную группу движений G_r и ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ меньше r, то можно так перенумеровать $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$, что можно будет записать:

$$\underset{h}{\xi}^{\alpha} = \varphi_h^t \underset{t}{\xi}^{\alpha} \qquad (t = 1, \ldots, q;\ h = q + 1, \ldots, r),$$

где ранг матрицы $(\underset{t}{\xi}^{\alpha})$ равен q, а φ_h^t — некоторые функции от x. Пусть среди φ_h^t имеется p независимых. Тогда может представиться два случая ([147], стр. 272):

1) если в координатной системе, для которой $\xi^{\nu} = 0\ (\nu = q + 1, \ldots, n)$, ранг матрицы Якоби функций φ по $x^1, \ldots, x^q$ равен p, то существуют координатные системы, в каждой из которых $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ является самое большее функциями от $x^1, \ldots, x^q$;

2) ранг якобиана $< p$; тогда такого, как в случае 1), утверждения сделать нельзя.

Рассмотрим случай $K = 0$. Нетрудно убедиться, что двум возможным сигнатурам здесь отвечают неизоморфные вещественные структуры G_3: a) $(+\ +) - G_3$ VII при $q = 0$ и b) $(+\ -) - G_3$ VI при $q = -1$. Предположим сначала, что имеет место предположение 1) относительно якобиана и имеет место группа G_3 VII. Тогда существует в V_4 такая система координат, относительно которой V_2 будут записываться уравнениями

$$x^3 = \mathrm{const}, \quad x^4 = \mathrm{const}, \quad \underset{s}{\xi}^3 = \underset{s}{\xi}^4 = 0 \quad (s = 1, 2, 3) \text{ и } \underset{s}{\xi}^{\alpha}(x^1, x^2).$$

Это означает, что искомые операторы можно определить, интегрируя уравнения Киллинга в двумерном пространстве, определяемом метрикой $ds^2 = e_1\, dx^{1^2} + e_2\, dx^{2^2}$. В силу этого получим:

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}, \quad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}, \quad \underset{3}{\xi}^{\alpha} = -x^2\delta_1^{\alpha} + x^1\delta_2^{\alpha}.$$

Эти операторы допускают преобразование $x^1 = x^{1'}$, $x^2 = x^{2'}$, $x^3 = \psi(x^{2'}, x^{4'})$, $x^4 = \theta(x^{3'}, x^{4'})$, сохраняющее их.

Интегрируя уравнения Киллинга для этих операторов и используя функции ψ и θ, получим канонический вид метрики:

$$G_3\,\mathrm{VII}\qquad (g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_4\end{pmatrix} \tag{30.1}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\qquad a_{11}=a_{22},\ e_4=\pm 1,$$

$$X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=-x^2p_1+x^1p_2.$$

Аналогично в случае G_3 VI получим:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0\\ g_{12} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & g_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_4\end{pmatrix}, \tag{30.2}$$

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\ e_4=\pm 1,$$

$$X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=x^1p_1-x^2p_2.$$

Если же предположить, что якобиан удовлетворяет условию 2), т. е. ранг <2, то мы пришли бы к тому случаю, когда два оператора имеют общую траекторию, что исключено.

Если V_2 имеют ненулевую кривизну ($K\neq 0$), то они не могут допускать G_3, содержащую абелеву подгруппу G_2, и следовательно, эти G_3 могут быть только неразрешимыми: G_3 VIII или G_3 IX.

Пусть якобиан имеет ранг, равный 2. Тогда, как и в предыдущем случае, для отыскания операторов достаточно рассмотреть метрику пространства V_2, отнесенного к полугеодезической системе координат:

$$ds^2=e_1dx^{1^2}+e_2\sigma^2\,dx^{2^2},$$

$$e_1=\pm 1,\qquad e_2=\pm 1,\ \sigma=\sigma(x^1,\ x^2).$$

Записывая условие того, что кривизна этого V_2 постоянна (но отлична от нуля), и интегрируя уравнения Киллинга, получим следующие случаи после очевидных упрощений операторов (за счет изменения метрики):

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I. } G_3 \text{ IX} & e_1 = e_2,\ e_1 k > 0,\\
& \underset{1}{\xi}^{\alpha} = \cos x^2 \delta^{\alpha}_1 + \sin x^2 \operatorname{tg} x^1 \delta^{\alpha}_2,\\
& \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_2,\ \ \underset{3}{\xi}^{\alpha} = \sin x^2 \delta^{\alpha}_1 - \cos x^2 \operatorname{tg} x^1 \delta^{\alpha}_2,\\
\text{II. } G_3 \text{ VIII} & e_1 = -e_2,\ e_1 k > 0,\\
& \underset{1}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{ch} x^2 \delta^{\alpha}_1 + \operatorname{sh} x^2 \operatorname{tg} x^1 \delta^{\alpha}_2,\ \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_2,\\
& \underset{3}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{sh} x^2 \delta^{\alpha}_1 + \operatorname{ch} x^2 \operatorname{tg} x^1 \delta^{\alpha}_2,\\
\text{III. } G_3 \text{ VIII} & e_1 = -e_2,\ e_1 k < 0,\\
& \underset{1}{\xi}^{\alpha} = \cos x^2 \delta^{\alpha}_1 - \sin x^2 \operatorname{th} x^1 \delta^{\alpha}_2,\ \ \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_2,\\
& \underset{3}{\xi}^{\alpha} = \sin x^2 \delta^{\alpha}_1 + \cos x^2 \operatorname{th} x^1 \delta^{\alpha}_2,\\
\text{IV. } G_3 \text{ VIII} & e_1 = e_2,\ e_1 k < 0,\\
& \underset{1}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{ch} x^2 \delta^{\alpha}_1 - \operatorname{sh} x^2 \operatorname{th} x^1 \delta^{\alpha}_2,\\
& \underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_2,\ \ \underset{3}{\xi}^{\alpha} = \operatorname{sh} x^2 \delta^{\alpha}_1 - \operatorname{ch} x^2 \operatorname{th} x^1 \delta^{\alpha}_2.
\end{array}\right\} \qquad (30.3)$$

Как известно, две группы G_r и H_r называются *подобными*, если существует такая система r независимых функций $\varphi^s(a)$ $(s = 1, \ldots, r)$, что можно найти невырожденное преобразование координат, при котором конечные уравнения G_r переходят в конечные уравнения группы H_r, если положить $a'^s = \varphi^s(a)$. Нас интересуют группы и их представления в V_4 с точностью до подобия, для которого необходимо совпадение структур (при некотором выборе базисов). Если ранги q матриц $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ меньше r, как это будет иметь место в рассматриваемом случае, то это условие еще недостаточно для подобия групп. Записывая для G_r и H_r уравнения (30.1), можно утверждать ([147], стр. 99), что G_r и H_r подобны тогда и только тогда, когда ранги матриц $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ для обеих групп одинаковы; любая пара соответствующих миноров порядка q имеет одинаковые ранги, и система уравнений вида $\varphi^{h'}_p(x^1) = \varphi^h_p(x^1)(h = 1, \ldots, q;\ p = q + 1, \ldots, r)$ совместна и не приводит к соотношениям между переменными какой-нибудь группы. Необходимо оценить на *вещественном пути*, какие из групп (30.3) типов II, III, IV подобны. Уравнения (30.1) для каждой из этих групп, если выразить $\underset{1}{\xi}^a$ через $\underset{2}{\xi}^a$ и $\underset{3}{\xi}^a$, приводят соответственно к следующим функциям φ^h:

$$\text{II.}\quad \varphi^1 = -\frac{\operatorname{tg} x^1}{\operatorname{sh} x^2}, \qquad \varphi^2 = \operatorname{cth} x^2,$$

$$\text{III.}\quad \varphi^1 = -\frac{\operatorname{th} x^1}{\sin x^2}, \qquad \varphi^2 = \operatorname{ctg} x^2,$$

$$\text{IV.}\quad \varphi^1 = \frac{\operatorname{th} x^1}{\operatorname{sh} x^2}, \qquad \varphi^2 = \operatorname{cth} x^2.$$

Записывая уравнения $\varphi^{h'}(x^1) = \varphi^h(x)$, например, для групп II — III, придем к соотношениям $\operatorname{tg} x^{1'} = \operatorname{th} x^{1'}$, $\sin^2 = \operatorname{sh} x^2$, $\operatorname{tg} x^2 = \operatorname{th} x^{2'}$. Но, исключая отсюда x^2, придем к выводу $x^{2'} = 0$, что даст соотношение между $x^{a'}$. Тот же результат получим для групп III — IV, но группы II — IV на вещественном пути подобны. Следовательно, достаточно рассмотреть отдельно лишь случаи I, II, IV операторов (30.1). После этого так же, как это делалось выше, используя уравнения Киллинга для этих операторов и допустимые преобразования, получим следующие канонические формы метрик:

$$G_3\ \text{VIII}\quad (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11}\cos^2 x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{30.4}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} = (x^3,\ x^4),\quad X_1 = \operatorname{ch} x^2\, p_1 + \operatorname{sh} x^2 \operatorname{tg} x^1\, p_2,\quad X_2 = p_2,$$
$$X_3 = \operatorname{sh} x^2\, p_1 + \operatorname{ch} x^2 \operatorname{tg} x^1\, p_2,\quad e_4 = \pm 1;$$

$$G_3\ \text{VIII}\quad (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11}\operatorname{ch}^2 x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{30.5}$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\quad X_1 = \cos x^2\, p_1 - \sin x^2 \operatorname{th} x^1\, p_2,\quad X_2 = p_2,$$
$$X_3 = \sin x^2\, p_1 + \cos x^2 \operatorname{th} x^1\, p_2,\quad e_4 = \pm 1;$$

$$G_3\ \mathrm{IX}\quad (g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{11}\cos^2 x^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{30.6}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\quad X_1=\cos x^2 p_1+\sin x^2 \operatorname{tg} x^1 p_2,$$
$$X_2=p_2,\ X_3=\sin x^2 p_1-\cos x^2 \operatorname{tg} x^1 p_2,\quad e_4=\pm 1.$$

Эти метрики получены в предположении, что якобиан $\frac{\partial(\varphi^1,\varphi^2)}{\partial(x^1,x^2)}$ имеет ранг p не меньше двух. Если же предположить противное, то, например, в случае (30.6) придем при $p=1$ к соотношению $\underset{3}{\xi}^\alpha=a\underset{1}{\xi}^\alpha+f(a,\ x^3,\ x^4)\underset{2}{\xi}^\alpha$, где a — некоторая функция. Записывая уравнение структуры $[X_2X_3]=X_1$, получим $a=0$ и $f(x^3,\ x^4)$, что означает совпадение траекторий двух операторов на V_2. К такому выводу придем и при $p=0$. Этот результат повторяется для остальных двух типов пространств. Таким образом, приведенные выше случаи исчерпывают все V_4, допускающие G_3, действующие на V_2.

G_3 действует на $\overset{*}{V}_2$. В этом случае, как показал Кручкович ([203], стр. 15), G_3 будет или *разрешимой* группой типов II, III, или *неразрешимой* группой типа VIII.

Пусть имеет место G_3 II. Если бы имело место условие 1) для якобиана, то $\overset{*}{V}_2$ в некоторой системе координат записывалось бы уравнениями $x^3=\mathrm{const}$, $x^4=\mathrm{const}$, а $\underset{s}{\xi}^\alpha=(x^1,\ x^2)$. При этом можно выбрать такую систему координат на $\overset{*}{V}_2$, что $X_1=p_1$, $X_2=p_2$, $X_3=X^2p_1$. Однако, записывая уравнения Киллинга для этих операторов, придем к вырожденной метрике V_4. Следовательно, ранг якобиана для функций φ, определяемых уравнениями (30.6), меньше 2. Тогда можно выбрать систему координат так, что

$$\underset{1}{\xi}^\alpha=\delta^\alpha_1,\quad \underset{2}{\xi}^\alpha=\delta^\alpha_2,\quad \underset{3}{\xi}^\alpha=a\delta^\alpha_1+\lambda(a,\ x^3,\ x^4)\,\delta^\alpha_2,$$

где

$$a=a(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4).$$

Из уравнений структуры получим:

$$a = x^2 + \sigma(x^3,\ x^4), \qquad \lambda = \lambda(x^3,\ x^4).$$

Для операторов X_1, X_2 допустимые преобразования будут иметь вид:

$$x^{1'} = x^1 + f(x^3,\ x^4), \qquad x^{2'} = x^2 + \varphi(x^3,\ x^4),$$
$$x^{3'} = \psi(x^3,\ x^4), \qquad x^{4'} = \theta(x^3,\ x^4).$$

Если заметить, что λ не может быть постоянной, что вело бы к вырождению метрики, то за счет такого преобразования $\underset{3}{\xi}^{\alpha}$ можно привести к виду $\underset{3}{\xi}^{\alpha} = x^2\delta_1^\alpha + x^4\delta_2^\alpha$. После этого остается еще допустимым преобразование

$$x^1 = x^{1'} + f(x^{3'},\ x^{4'}),\ x^2 = x^{2'},\ x^3 = \psi(x^{3'},\ x^{4'}),\ x^4 = x^{4'}. \tag{30.7}$$

Уравнения Киллинга приводят к выводу:

$$g_{11} = g_{12} = g_{13} = g_{24} = g_{23} = 0,\ g_{14} + g_{22} = 0,\ g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4).$$

Используя теперь (30.7), найдем:

$$g_{1'4'} = g_{14},\ g_{3'3'} = g_{33}\psi_{3'}^2,\ g_{3'4'} = g_{14}f_{3'} + g_{33}\psi_{3'}\psi_{4'} + g_{34}\psi_{3'},$$
$$g_{4'4'} = 2g_{14}f_{4'} + g_{33}\psi_{4'}^2 + 2g_{34}\psi_{4'} + g_{44}.$$

Заметим, что из условия $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ следует $g_{33} \neq 0$, $g_{14} \neq 0$.

Потребуем, чтобы $g_{3'4'} = g_{4'4'} = 0$, это приводит к системе Коши — Ковалевской для f_4 и ψ_4. Таким образом,

$$G_3\ \text{II на}\ \overset{*}{V}_2 \qquad (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ g_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30.8}$$

$$g_{14} + g_{22} = 0,\ g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4);$$
$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^2p_1 + x^4p_2.$$

Пусть имеет место G_3 III на $\overset{*}{V}_2$ и условие 1) для якобиана. Тогда ([203], стр. 15) операторы можно привести к виду $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1p_1$, а из уравнений Киллинга следует, что $g_{1\alpha} = 0$ $(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, т. е.

метрика пространства V_4 вырождается. Если же предположить, что для якобиана условие 1) не выполняется, то, так же как и выше, найдем $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1 p_2 + x^4 p_2$. Но уравнения Киллинга приводят к выводу:

$$g_{1\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

что невозможно. Следовательно, не может быть V_4 с G_3 III на $\overset{*}{V}_2$.

Рассмотрим случай G_3 VIII на $\overset{*}{V}_2$ и условие 1) для якобиана. Тогда операторы можно привести к виду:

$$X_1 = e^{-x^2}(p_1 + p_2),\ \ X_2 = p_2,\ \ X_3 = e^{x^2}(-p_1 + p_2),$$

но и в этом случае $|g_{\alpha\beta}| = 0$. Пусть условие 1) не имеет места для якобиана, тогда $\underset{3}{\xi}^{\alpha} = \alpha \underset{1}{\xi}^{\alpha} + \lambda(\alpha,\ x^3,\ x^4)\underset{2}{\xi}^{\alpha}$, где α — некоторая функция. G_3 VIII содержит подгруппу G_2 II, действующую на $\overset{*}{V}_2$ транзитивно. Но всякое $\overset{*}{V}_2$, допускающее неабелеву G_2, ввиду равенства порядка группы и ранга матрицы $(\underset{s}{\xi}^{\alpha})$ $(s = 1,\ 2)$ допускает в некоторой системе координат, относительно которой уравнение $\overset{*}{V}_2$ записывается в виде $x^3 = \mathrm{const}$, $x^4 = \mathrm{const}$, операторы вида

$$X_1 = e^{-x^2}(p_1 + \varepsilon p_2),\qquad X_2 = p_2,\qquad \varepsilon = 0,\ 1.$$

При этом, если взять $\varepsilon = 0$, то такие G_2 не могут быть подгруппами G_3 VIII, как в этом легко убедиться. Следовательно,

$$X_1 = e^{-x^2}(p_1 + p_2),\ \ X_2 = p_2,\ \ X_3 = ae^{-x^2}(p_1 + p_2) + \lambda p_2.$$

Записывая для этих операторов уравнения структуры, получим, что $a = 0$, $\lambda = 2e^{x_2}$, а из уравнений Киллинга находим $g_{2\alpha} = 0$ $(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Следовательно, не существует полей тяготения, отвечающих V_4 с G_3 VIII на $\overset{*}{V}_2$.

Приведенные выше классы пространств исчерпывают все пространства V_4, допускающие G_3 действующей на V_2 или $\overset{*}{V}_2$. Отметим, что эти классы пространств отвечают интересным, с физической точки зрения, полям тяготения.

§ 31. Поля тяготения, допускающие группу движений G_3, действующую на V_3 или $\overset{*}{V}_3$

Рассмотрим тот случай, когда G_3 действует на гиперповерхностях транзитивности V_3 или $\overset{*}{V}_3$ как просто-транзитивная группа.

Ранг матрицы $(\xi^\alpha)_s$ равен 3.

G_3 действует на V_3. Так как G_3 действует на гиперповерхностях транзитивности, то они геодезически параллельны ([147], стр. 254), и естественно ввести полугеодезическую систему координат, относительно которой эти гиперповерхности будут иметь уравнения $x^4 = \text{const}$.

Такие V_4 для определенной метрики исследовал Фубини. В случае неопределенной метрики неизотропные V_3 могут нести на себе неопределенную метрику, и поэтому вычисления, в основном совпадающие с выкладками Фубини, необходимо проделать заново. Так как нетранзитивная G_3 в данном случае осуществляется операторами, для которых ранг матрицы $\underset{s}{(\xi^\alpha)}$ совпадает с порядком группы, то ([147], стр. 269) в V_4 существует координатная система, в которой каждая компонента $\underset{s}{\xi}^\alpha$ векторов Киллинга является самое большее функцией x^1, x^2, x^3 и для которой гиперповерхности транзитивности имеют уравнения $x^4 = \text{const}$. Поэтому достаточно для определения операторов рассмотреть операторы V_3 с неопределенной метрикой, допускающие просто-транзитивные группы G_3. Эта задача решена в работе [203].

Пользуясь изложенными выше соображениями, можно сократить выкладки. Рассмотрим разрешимые G_3 типов I, II, III, IV, V, VI, VII; введем полугеодезическую систему координат, относительно которой уравнения гиперповерхностей V_3 имеют вид $x^4 = \text{const}$, так что x^4 будет длиной дуги неизотропных геодезических, ортогональных к гиперповерхностям $x^4 = \text{const}$. В этой системе координат компоненты метрического тензора: $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$, $g_{44} = e_4 = \pm 1$, в зависимости от нормы вектора, касательного к геодезической x^4. Для всех этих типов структур операторы можно записать в виде:

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3,$$

$$X_3 = -p_1 + (ax^2 + cx^3)\,p_2 + (bx^2 + dx^3)\,p_3, \qquad (31.1)$$

причем значения постоянных a, b, c, d для каждой из этих структур определяются следующим образом:

G_3	a	b	c	d
I	0	0	0	0
II	0	0	1	0
III	1	0	0	0
IV	1	0	1	1
V	1	0	0	1
VI	1	0	0	$q \neq 0$ и 1
VII	0	1	-1	$q\ (q^2 < 4)$

(31.2)

Записывая уравнения Киллинга для операторов (31.1), получим из уравнений для первых двух операторов, что $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^4)$ и (для третьего оператора) систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_1 g_{11} = 0,\\
&\partial_1 g_{12} = a g_{12} + b g_{13},\\
&\partial_1 g_{13} = c g_{12} + d g_{13},\\
&\partial_1 g_{22} = 2a g_{22} + 2b g_{23},\\
&\partial_1 g_{23} = c g_{22} + (a + d)\, g_{23} + b g_{33},\\
&\partial_1 g_{33} = 2c g_{23} + 2d g_{33},\\
&g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0, \quad g_{44} = e_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (31.3)$$

После этого канонический вид метрики находится из этой системы для каждого типа структуры после замены их соответствующими значениями из (31.2). Отметим, что если для трех операторов (31.1), для любой из возможных структур, определить самый общий вид преобразования, оставляющего эти операторы неизменными, то это преобразование будет зависеть от четырех произвольных функций от x^4. Если, кроме того, потребовать, чтобы сохранялись условия $g_{4i}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, $g_{44}=e_4$, то допустимое преобразование будет зависеть только от четырех произвольных постоянных. Но интегралы системы (31.3) определяются в виде произвольных функций от x^4, и следовательно, пользуясь допустимыми преобразованиями, их упростить не удастся. Таким образом, для всех разрешимых G_3 на V_3 получим классификацию

$$(g_{\alpha\beta})=\left(\begin{array}{c|c}(g_{ij}) & 0\\ \hline 0 & e_4\end{array}\right)(i,\ j=1,\ 2,\ 3),\quad e_4=\pm 1,\qquad (31.4)$$

причем (g_{ij}) для различных неизоморфных структур имеет выражение:

G_3 I на V_3

$$(g_{ij})=(a_{ij}),\ a_{ij}=a_{ij}(x^4);\ X_i=p_i\ (i=1,2,3).\qquad (31.5)$$

G_3 II на V_3

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{12}x^1+a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{22}x^1+a_{23}\\ a_{12}x^1+a_{13} & a_{22}x^1+a_{23} & a_{22}{x^1}^2+2a_{23}x^1+a_{33}\end{pmatrix},\qquad (31.6)$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4);$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=-p_1+x^3p_2.$$

G_3 III на V_3

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}e^{x^1} & a_{13}\\ a_{12}e^{x^1} & a_{22}e^{2x^1} & a_{23}e^{x^1}\\ a_{13} & a_{23}e^{x^1} & a_{33}\end{pmatrix},\qquad (31.7)$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4);$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=-p_1+x^2p_2.$$

G_3 IV на V_3

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{x^1} & (a_{12}x^1+a_{13})\,e^{x^1} \\ a_{12}e^{x^1} & a_{22}e^{2x^1} & (a_{22}x^1+a_{23})\,e^{2x^1} \\ (a_{12}x^1+a_{13})\,e^{x^1} & (a_{22}x^1+a_{23})\,e^{2x^1} & (a_{22}{x^1}^2+2a_{23}x^1+a_{33})\,e^{2x^1} \end{pmatrix}; \tag{31.8}$$

$$X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=-p_1+(x^2+x^3)\,p_2+x^3p_3.$$

G_3 V на V_3

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{x^1} & a_{13}e^{x^1} \\ a_{12}e^{x^1} & a_{22}e^{2x^1} & a_{23}e^{2x^1} \\ a_{13}e^{x^1} & a_{23}e^{2x^1} & a_{33}e^{2x^1} \end{pmatrix}, \tag{31.9}$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4);\ \ X_1=p_2,\ \ X_2=p_3,\ \ X_3=-p_1+x^2p_2+x^3p_3.$$

G_3 VI на V_3

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{x^1} & a_{13}e^{qx^1} \\ a_{12}e^{x^1} & a_{22}e^{2x^1} & a_{23}e^{(1+q)x^1} \\ a_{13}e^{qx^1} & a_{23}e^{(1+q)x^1} & a_{33}e^{2qx^1} \end{pmatrix}, \tag{31.10}$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4);$$

$$X_1=p_2,\ \ X_2=p_3,\ \ X_3=-p_1+x^2p_2+qx^3p_3\,(q\neq 0 \text{ и } 1).$$

G_3 VII на V_3

$$\left.\begin{aligned} g_{11}=a_{11},\ \ g_{12}=\frac{1}{2}\,e^{\frac{q}{2}x^1}\Big[(qa_{12}-pa_{13})\cos\frac{px^1}{2}&+\\ +(pa_{12}+qa_{13})\sin\frac{px^1}{2}\Big]&,\\ g_{13}=e^{\frac{q}{2}x^1}\left(a_{12}\cos\frac{px^1}{2}+a_{13}\sin\frac{px^1}{2}\right)&,\\ g_{22}=e^{qx^1}\,[a_{22}+a_{23}\cos px^1+a_{33}\sin px^1]&,\\ g_{23}=\frac{1}{2}\,e^{qx^1}\,[qa_{22}+(qa_{23}+pa_{33})\cos px^1&+\\ +(qa_{33}-pa_{23})\sin px^1]&,\\ g_{33}=e^{qx^1}\left[a_{22}+\left(\frac{q^2-2}{2}\,a_{23}+\frac{pq}{2}\,a_{33}\right)\cos px^1\right.&+\\ \left.+\left(\frac{q^2-2}{2}\,a_{33}-\frac{pq}{2}\,a_{23}\right)\sin px^1\right]&;\end{aligned}\right\} \tag{31.11}$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4);\ \ p=\sqrt{4-q^2},\ \ q^2<4;$$

$$X_1=p_2,\qquad X_2=p_3,\qquad X_3=-p_1-x^3p_2+(qx^3+x^2)\,p_3.$$

Для неразрешимых неизоморфных вещественных структур G_3 VIII и G_3 IX, действующих на V_3, необходимо определить предварительно операторы в некоторой полугеодезической системе координат. Известно, что две нетранзитивные группы G_r и H_r от одного и того же числа переменных с одинаковой сигнатурой, матрицы $(\underset{s}{\xi^{a}})$ которых имеют ранг r, подобны. Следовательно, достаточно рассмотреть некоторые операторы G_3 с матрицей полного ранга, отвечающие структурам VIII и IX; этим группы будут определены с точностью до подобия. Настоящий вывод никак не связан с сигнатурой V_4. Выберем операторы, отвечающие этим условиям, следующим образом:

G_3 VIII

$$\left.\begin{aligned} &X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2 p_2 + p_3, \\ &X^3 = e^{x^3} p_1 + x^{2^2} p_2 + 2x^2 p_3. \end{aligned}\right\} \tag{31.12}$$

G_3 IX

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= p_2, \\ X_2 &= \cos x^2 p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \sin x^2 p_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1} p_3, \\ X_3 &= -\sin x^2 p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \cos x^2 p_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1} p_3. \end{aligned}\right\} \tag{31.13}$$

Интегрируя уравнения Киллинга для операторов (31.12), получим:

G_3 VIII на V_3

$$\left.\begin{aligned} &g_{11} = a_{11}, \\ &g_{12} = e^{-x^3} (a_{11} x^{1^2} - 2a_{13} x^1 + a_{12}), \\ &g_{13} = -a_{11} x^1 + a_{13}, \\ &g_{22} = e^{-2x^3} [a_{11} x^{1^4} - 4a_{13} x^{1^3} + \\ &\qquad\qquad + 2(a_{12} + 2a_{33}) x^{1^2} - 4a_{23} x^1 + a_{22}], \\ &g_{23} = e^{-x^3} [-a_{11} x^{1^3} + 3a_{13} x^{1^2} - \\ &\qquad\qquad - (a_{12} + 2a_{33}) x^1 + a_{23}], \\ &g_{33} = a_{11} x^{1^2} - 2a_{13} x^1 + a_{33}, \\ &g_{i4} = 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3), \\ &g_{44} = e_4 = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{31.14}$$

Аналогично, исходя из (31.13), получим:

G_3 IX на V_3

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = -a_{12}\sin 2x^3 - a_{22}\cos 2x^3 + \frac{1}{2}a_{11},\\
&g_{12} = (a_{13}\cos x^3 - a_{23}\sin x^3)\cos x^1 +\\
&\qquad\qquad + (a_{12}\cos 2x^3 - a_{22}\sin 2x^3)\sin x^1,\\
&g_{13} = a_{13}\cos x^3 - a_{23}\sin x^3,\\
&g_{22} = a_{33}\cos^2 x^1 +\\
&+ 2(a_{23}\cos x^3 + a_{13}\sin x^3)\sin x^1\cos x^1 +\\
&\qquad + \left(a_{12}\sin 2x^3 + a_{22}\cos 2x^3 + \frac{1}{2}a_{11}\right)\sin^2 x^1,\\
&g_{23} = a_{33}\cos x^1 + (a_{23}\cos x^3 + a_{13}\sin x^3)\sin x^1,\\
&g_{33} = a_{33},\\
&g_{4i} = 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3),\\
&g_{44} = e_4 = \pm 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (31.15)$$

Здесь, как и выше, a_{ij} — произвольные функции от x^4. Исследуя самый общий вид преобразований, оставляющих неизменным вид операторов и сохраняющих полугеодезическую систему координат, можно убедиться, что они зависят только от произвольных постоянных; поэтому дальнейшее упрощение (31.14) и (31.15) за счет такого преобразования невозможно.

G_3 действует на $\overset{*}{V}_3$. Если G_3 действует транзитивно на изотропных поверхностях транзитивности $\overset{*}{V}_3$, то в V_4 всегда можно ввести изотропно-полугеодезическую систему координат, для которой такие $\overset{*}{V}_3$ записываются уравнением $x^4 = \text{const}$. Можно также на этих $\overset{*}{V}_3$ уточнить выбор координат так, чтобы параметрические кривые x^1 совпали с семейством особых линий $\overset{*}{V}_3$, касательный вектор к которым должен удовлетворять условиям

$$g_{ij}u^i = 0 \ (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

и следовательно, в такой системе координат

$$g_{11} = g_{12} = g_{13} = 0,\ g_{14} \neq 0,$$

т. е.

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}, \tag{31.16}$$

$$g_{22}g_{33}-g_{23}^2 \neq 0.$$

Как отмечено в работе ([260], стр. 200), формула (31.16) инвариантна относительно преобразования

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} &= \varphi^1(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4),\\ x^{2'} &= \varphi^2(x^2,\ x^3,\ x^4),\\ x^{3'} &= \varphi^3(x^2,\ x^3,\ x^4),\\ x^{4'} &= \varphi^4(x^4), \end{aligned}\right\} \tag{31.17}$$

где φ^α — произвольные функции своих аргументов. Можно, впрочем, показать, что это самый общий вид преобразования, обладающего подобным свойством; для этого достаточно взять систему дифференциальных уравнений, описывающих эти свойства, и проинтегрировать ее.

Так как пути движения, определенного любым оператором группы G_3, по предположению лежат на $\overset{*}{V}_3$, то уравнения Киллинга для любого оператора ξ^α приводят к выводу, что

$$\partial_1\xi^2=\partial_1\xi^3=0, \quad \xi^4=0. \tag{31.18}$$

Очевидно, что (31.18) также инвариантны для любого преобразования (31.17). Идея метода отыскания G_r, действующих на изотропных гиперповерхностях транзитивности, заключается в следующем. Так как каждая группа G_3, кроме G_3 IX, допускает подгруппу G_2 движений, то спачала отыскиваем канонический вид операторов G_2 с G_3, действующих на $\overset{*}{V}_3$, для изотропно-геодезической системы координат (31.16) и затем ищем из уравнений структуры и (31.18) оператор X^3. После этого из уравнений Киллинга определяется метрика V_4. Для G_3 IX рассуждение выпадает из этой схемы.

Как уже указывалось в § 29, семейство особых линий на $\overset{*}{V}_3$ образует систему импримитивности любой не транзитивной группы движений, действующей на $\overset{*}{V}_3$, и следовательно, если группа допускает особый оператор, совершающий сдвиг вдоль особой кривой, то он должен быть оператором одномерного *нормального делителя* группы ([120], стр. 26, 141). Вследствие этого его коммутант с любым другим оператором группы отличается от особого оператора лишь на постоянный множитель, равный, может быть, нулю. Поэтому является существенным особо выделить те G_2, которые содержат особый оператор. Оказывается, достаточно для определения всех G_3 рассмотреть случай абелевой G_2 с особым оператором и без него и неабелевой G_2 без особого оператора.

Если абелева G_2 *допускает особый оператор*, то ([260], стр. 201) она действует на изотропных $\overset{*}{V}_2$ и среди (31.16) можно выбрать такую систему координат, относительно которой операторы G_2 будут иметь вид:

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \tag{31.19}$$

и система координат будет определена с точностью до преобразования

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 + \varphi(x^3,\ x^4), \quad & x^{2'} &= x^2 + \varphi^2(x^3,\ x^4), \\ x^{3'} &= \varphi^3(x^3,\ x^4), \quad & x^{4'} &= \varphi^4(x^4). \end{aligned}\right\} \tag{31.20}$$

Это самый общий вид преобразования такого рода.

При рассмотрении абелевой G_2, не имеющей особых операторов, в работе [260] допущена неточность, которая ведет к выпадению некоторых классов V_4. Рассмотрим этот случай.

Пусть абелева G_2 не содержит особого оператора и $X_1 = \xi^i p_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Совершая преобразование (31.17), получим в новой системе координат

$$\begin{gathered} \underset{1}{\xi}{}^{1'} = \varphi^1_1 \underset{1}{\xi}{}^1 + \varphi^1_2 \underset{1}{\xi}{}^2 + \varphi^1_3 \underset{1}{\xi}{}^3, \\ \underset{1}{\xi}{}^{2'} = \varphi^2_2 \underset{1}{\xi}{}^2 + \varphi^2_3 \underset{1}{\xi}{}^3, \\ \underset{1}{\xi}{}^{3'} = \varphi^3_2 \underset{1}{\xi}{}^2 + \varphi^3_3 \underset{1}{\xi}{}^3, \\ \xi^{4'} = 0 \ (\varphi^i_j \equiv \partial_j \varphi^i); \end{gathered}$$

$\underset{1}{\xi}^{2}$ и $\underset{1}{\xi}^{3}$ не могут одновременно равняться нулю, так как в противном случае $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ был бы особым вектором Киллинга, что исключается постановкой вопроса. Функции φ^i ограничены условием

$$\varphi^2_1=\varphi^3_1=0 \text{ и } \varphi^1_1\varphi^4_4(\varphi^2_2\varphi^3_3-\varphi^2_3\varphi^3_2)\neq 0.$$

Будем искать φ^2 и φ^3 из условия $\varphi^2_2\xi^2_1+\varphi^2_3\xi^3_1=1$, $\varphi^3_2\xi^2_1+\varphi^3_3\xi^3_1=0$. Коэффициенты ξ^2_1 и ξ^3_1 в силу (31.18) зависят так же, как и φ^2, и φ^3 только от x^2, x^3, x^4, и один из коэффициентов ξ^2_1 и $\xi^3_1\neq 0$. Следовательно, система приводится к виду системы Коши — Ковалевской и совместна.

Кроме того, очевидно, что интегралы ее удовлетворяют неравенству $\varphi^2_2\varphi^3_3-\varphi^2_3\varphi^3_2\neq 0$. Функцию $\varphi^1(x)$ определим уравнением $\varphi^1_i\underset{1}{\xi}^{i}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, которое также имеет решение, удовлетворяющее условию $\varphi^1_1\neq 0$. Таким образом, $X_1=p_2$ в новой системе координат.

Нетрудно убедиться, что преобразованием, сохраняющим вид X_1, будет

$$\left.\begin{aligned} x^{1'}&=\varphi'(x^1,\ x^3,\ x^4), \quad x^{2'}=x^2+\varphi^2(x^3,\ x^4),\\ x^{3'}&=\varphi^3(x^3,\ x^4), \quad x^{4'}=\varphi^1(x^4),\end{aligned}\right\} \tag{31.21}$$

где $\varphi^1_1\varphi^3_3\varphi^4_4\neq 0$. Из уравнений структуры $[X_1X_2]=0$ и (31.18) следует, что вектор Киллинга $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ имеет вид:

$$\underset{2}{\xi}^{\alpha}=\underset{2}{\xi}^{1}(x^1,\ x^3,\ x^4)\,\delta^\alpha_1+\underset{2}{\xi}^{2}(x^3,\ x^4)\,\delta^\alpha_2+\underset{2}{\xi}^{3}(x^3,\ x^4)\,\delta^\alpha_3.$$

Применяя (31.21), получим в новой системе координат

$$\underset{2}{\xi}^{1'}=\varphi^1_1\underset{2}{\xi}^{1}+\varphi^1_3\underset{2}{\xi}^{3},\quad \underset{2}{\xi}^{2'}=\underset{2}{\xi}^{2}+\varphi^2_3\underset{2}{\xi}^{3},\quad \underset{2}{\xi}^{3'}=\varphi^3_3\underset{2}{\xi}^{3},\quad \underset{2}{\xi}^{4'}=0.$$

Если $\underset{2}{\xi}^{3}\neq 0$, то функции φ^1, φ^2, φ^3 выберем так, чтобы они были интегралами совместной системы $\varphi^1_1\underset{2}{\xi}^{1}+\varphi^1_3\underset{2}{\xi}^{3}=0$, $\underset{2}{\xi}^{2}+\varphi^2_3\underset{2}{\xi}^{3}=0$, $\varphi^3_3\underset{2}{\xi}^{3}=1$, и следовательно,

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3 \tag{31.22}$$

— случай, полученный в [260]. Если же $\underset{2}{\xi}^{3}=0$, то придем к случаям, выпавшим из рассмотрения в [260]. При этом условии

$$\underset{2}{\xi}^{1'} = \varphi^1_1 \underset{2}{\xi}^1, \quad \underset{2}{\xi}^{2'} = \underset{2}{\xi}^2, \quad \underset{2}{\xi}^{3'} = 0, \quad \underset{2}{\xi}^{4'} = 0.$$

Здесь $\underset{2}{\xi}^2 \neq 0$, $\underset{2}{\xi}^1 \neq 0$, так как случай особого оператора исключен. Пусть $\underset{2}{\xi}^2 = \underset{2}{\xi}^2(x^3, x^4)$, тогда φ^1 и φ^3 определим условиями $\varphi^1_1 \underset{2}{\xi}^1 = 1$, $\varphi^3 = \underset{2}{\xi}^2(x^3, x^4)$, и следовательно,

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1 + x^3 p_2. \tag{31.23}$$

Если же $\underset{2}{\xi}^2 = \underset{2}{\xi}^2(x^1)$, то потребуем, чтобы $\varphi^1_1 \underset{2}{\xi}^1 = 1$, $\varphi^4 = \underset{2}{\xi}^2$, и тогда

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1 + x^4 p_2. \tag{31.24}$$

Предположение $\underset{2}{\xi}^2 = \mathrm{const}$ отпадает, так как тогда при $\varphi^1_1 \underset{2}{\xi}^1 = 1$ мы получили бы систему операторов $X_1 = p_2$, $X_2 = p_1 + cp_2$, эквивалентную системе $X_1 = p_2$, $X_2 = p_1$, что давало бы особый оператор.

Наконец, если имеем *неабелеву G_2, не имеющую особого оператора*, то система (31.16) может быть выбрана так ([260], стр. 202), что

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1 + x^2 p_2 \tag{31.25}$$

или

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2 p_1 + p_3. \tag{31.26}$$

Рассмотрим теперь V_4 с G_3, действующими на $\overset{*}{V}_3$. Пусть имеет место абелева G_3: $[X_i X_j] = 0$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, и пусть она включает G_2 с особым оператором. Любой оператор группы является одномерным нормальным делителем группы, и систему (31.17) можно выбрать так, чтобы для $G_2\{X_1 X_2\}$ операторы имели вид (31.19). Из уравнений структуры для G_3 I следует:

$$\underset{3}{\xi}^\alpha = \underset{3}{\xi}^1(x^3, x^4)\,\delta^\alpha_1 + \underset{3}{\xi}^2(x^3, x^4)\,\delta^\alpha_2 + \underset{3}{\xi}^3(x^3, x^4)\,\delta^\alpha_3.$$

После преобразования (31.20) мы получим:

$$\underset{3}{\xi}^{1'} = \underset{3}{\xi}^1 + \varphi^1_3 \underset{3}{\xi}^3, \quad \underset{3}{\xi}^{2'} = \underset{3}{\xi}^2 + \varphi^2_3 \underset{3}{\xi}^3, \quad \underset{3}{\xi}^{3'} = \varphi^3_3 \underset{3}{\xi}^3, \quad \underset{3}{\xi}^{4'} = 0.$$

Так как $\underset{3}{\xi}^3 \neq 0$ (иначе G_3 действовала бы на $\overset{*}{V}_2$), то за счет выбора φ^1, φ^2 и φ^3 можно привести невырожденным преобразованием $\underset{3}{\xi}^{\alpha'}$ к $\delta_3^{\alpha'}$. Таким образом, $X_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$, а $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^4)$. После этого общий вид допустимых преобразований будет

$$x^{1'} = x^1 + \varphi^1(x^4), \quad x^{2'} = x^2 + \varphi^2(x^4),$$

$$x^{3'} = x^3 + \varphi^3(x^4), \quad x^{4'} = \varphi^4(x^4), \quad \varphi_4^4 \neq 0.$$

Легко убедиться, что, пользуясь такими преобразованиями, можно подобрать φ^α так, чтобы $g_{1'4'} = 1$, $g_{4'i'} = 0$ $(i = 2,\ 3,\ 4)$. Следовательно,

1) G_3 I на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 \\ 0 & g_{23} & g_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31.27}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^4), \quad X_i = p_i, \quad i = 1,2,3.$$

Предположим, что G_2 не содержит особого оператора и имеет место случай, когда операторы могут быть приведены к виду (31.22). Из уравнений структуры G_3 и (31.18) следует, что тогда $\underset{3}{\xi}^\alpha = \underset{3}{\xi}^1(x^1,\ x^4)\,\delta_1^\alpha + \underset{3}{\xi}^2(x^4)\,\delta_2^\alpha + \underset{3}{\xi}^3(x^4)\,\delta_3^\alpha$. Допустимое преобразование для $\underset{1}{\xi}^\alpha$ и $\underset{2}{\xi}^\alpha$ будет иметь вид:

$$x^{1'} = \varphi^1(x^1, x^4), \quad x^{2'} = x^2 + \varphi^2(x^4),$$

$$x^{3'} = x^3 + \varphi^3(x^4), \quad x^{4'} = \varphi^4(x^4).$$

Используя его, можно привести $\underset{3}{\xi}^\alpha$ в новой системе координат к виду:

$$\underset{3}{\xi}^{\alpha'} = \delta_1^{\alpha'} + \lambda(x^{4'})\,\delta_2^\alpha + x^{4'}\delta_3^2.$$

Здесь использован тот факт, что $\underset{3}{\xi}^\alpha \neq \mathrm{const}$, так как в противном случае G_3 допускала бы G_2, действующую на изотропной $\overset{*}{V}_2$, т. е. допускала бы особый оператор.

После этого, записывая уравнения Киллинга и используя допустимые преобразования для всех трех операторов группы, определим метрику в виде:

2) G_3 I на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -(a_{22}\lambda+a_{23})\,x^1 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & -(a_{23}\lambda+a_{33})\,x^1 \\ a_{14} & -(a_{22}\lambda+a_{23})\,x^1 & -(a_{23}\lambda+a_{33})\,x^1 & (a_{22}\lambda^2+2a_{23}\lambda+a_{33})\,x^{1^2} \end{pmatrix}; \tag{31.28}$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=p_1+\sigma p_2+x^4p_3,\quad \text{где}\quad \sigma=\int\lambda\,dx^4.$$

Если же имеют место операторы (31.23), то из уравнений структуры и (31.18) следует, что $\xi_3^3=0$, т. е. мы имеем G_3 на $\overset{*}{V}_2$. В случае же операторов (31.24) получаем:

3) G_3 I на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -a_{22}x^1 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & -a_{23}x^1 \\ a_{14} & -a_{22}x^1 & -a_{23}x^1 & a_{22}x^{1^2} \end{pmatrix}; \tag{31.29}$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^4p_2,\quad X_3=p_3.$$

Конечный вид V_4 с G_3 I на $\overset{*}{V}_3$ в [260] не рассматривался. Приведенная выше схема рассуждения повторяется для каждой из возможных структур G_3. Этим методом классификация G_3 на $\overset{*}{V}_3$ получена в работе [260], кроме нескольких классов, выпавших из рассуждения, отвечающих G_2 с операторами (31.23) и (31.24).

Таким образом, получаем следующую классификацию:

1) G_3 II на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & -x^3 \\ 0 & g_{23} & g_{33} & 0 \\ 1 & -x^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31.30}$$

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^4);\quad X_1=p_1,\quad X_2=p_2,\quad X_3=x^2p_1+p_3.$$

2) G_3 II на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=0,\ \ g_{14}=a_{14},\ \ g_{22}=a_{22},\\
&g_{44}=\varepsilon\left(\frac{1}{4}a_{22}{x^1}^4+a_{23}{x^1}^3+a_{33}{x^1}^2+2a_{34}x^1\right),\\
&g_{23}=a_{22}x^1+a_{23},\quad g_{33}=a_{22}{x^1}^2+2a_{23}x^1+a_{33},\\
&g_{24}=\varepsilon\left(\frac{1}{2}a_{22}{x^1}^2+a_{23}x^1\right),\\
&g_{34}=\varepsilon\left(\frac{1}{2}a_{22}{x^1}^3+\frac{3}{2}a_{23}{x^1}^2+a_{33}x^1\right)+a_{34};\\
&\qquad\qquad a_{ij}=a_{ij}(x^4);
\end{aligned}\right\}\tag{31.31}$$

$$X_1=p_2,\ \ X_2=p_3,\ \ X_3=-p_1+x^3p_2+\varepsilon x^4p_3\ \ (\varepsilon=0 \text{ или } 1).$$

1) G_3 III на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&a_{22}e^{-2x^3}&a_{23}e^{-x^3}&0\\0&a_{23}e^{-x^3}&a_{33}&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\tag{31.32}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4);$$

$$X_1=p_1,\ \ X_2=p_2,\ \ X_3=x^2p_2+p_3.$$

2) G_3 III на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}0&0&0&e^{-x^3}\\0&a_{22}&a_{23}&0\\0&a_{23}&a_{33}&0\\e^{-x^3}&0&0&0\end{pmatrix},\tag{31.33}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4);$$

$$X_1=p_2,\ \ X_2=p_1,\ \ X_3=x^1p_1+p_3.$$

3) G_3 III на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}0&0&0&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}e^{-x^1}&-\varepsilon a_{22}x^1\\0&a_{23}e^{-x^1}&a_{33}e^{-2x^1}&-\varepsilon a_{23}x^1e^{-x^1}\\a_{14}&-\varepsilon a_{22}x^1&-\varepsilon a_{23}x^1e^{-x^1}&\varepsilon a_{22}{x^1}^2+a_{44}\end{pmatrix};\tag{31.34}$$

$$X_1=p_2,\ \ X_2=p_3,\ \ X_3=p_1+\varepsilon x^4p_2+x^3p_3.$$

4) G_3 III на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{22}\,{x^3}^{-2} & (a_{23}-a_{22}x^1)\,{x^3}^{-2} & a_{24}\,{x^3}^{-1} \\ 0 & (a_{23}-a_{22}x^1\,{x^3}^{-2} & (a_{22}{x^1}^2-2a_{23}x^1+a_{33})\,{x^3}^{-2} & (a_{34}-a_{24}x^1)\,{x^3}^{-1} \\ 1 & a_{24}\,{x^3}^{-1} & (a_{34}-a_{24}x^1)\,{x^3}^{-1} & 0 \end{pmatrix}; \tag{31.35}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4);\ \ X_1=p_2,\ \ X_2=p_1+x^3p_2,\ \ X_3=x^2p_2+x^3p_3.$$

Этот класс V_4 выпал из рассмотрения в работе [260]. Для групп движений типов IV, V, VI исследование можно объединить, исходя из одной структуры

$$[X_1X_2]=0,\ \ [X_1X_3]=X_1,\ \ [X_2X_3]=\varepsilon X_1+qX_2,$$

где соответственно

$$\left.\begin{aligned} G_3\ \text{IV}:&\quad \varepsilon=1,\ \ q=1;\\ G_3\ \text{V}:&\quad \varepsilon=0,\ \ q=1;\\ G_3\ \text{VI}:&\quad \varepsilon=0,\ \ q\neq 1. \end{aligned}\right\} \tag{31.36}$$

Пусть имеется особый оператор. В G_3 IV это будет X_1, в G_3 V также можно взять X_1, в G_3 VI после изменения базиса всегда можно прийти к такому же выводу. Ввиду этого тем же методом получим канонический вид метрики для этих структур:

1) G_3 IV, V, VI на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-x^3} \\ 0 & a_{22}e^{-2qx^3} & a_{23}e^{-qx^3} & -\varepsilon x^3e^{-x^3} \\ 0 & a_{23}e^{-qx^3} & a_{33} & 0 \\ e^{-x^3} & -\varepsilon x^3e^{-x^3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{31.37}$$

ε, q определяются по формулам (31.36);

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\,(x^4);$$

$$X_1=p_1,\ \ X_2=p_2,\ \ X_3=(x^1+\varepsilon x^2)\,p_1+qx^2p_2+p_3.$$

Если же предположить, что в группе нет особого оператора, то получим:

2) G_3 IV, V, VI на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0, \quad g_{14}=1,\\ &g_{22}=a_{22}e^{-2x^1}, \quad g_{24}=a_{24}e^{-x^1};\end{aligned}\right\} \tag{31.38}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{23}&=\begin{cases} e^{-2x^1}(a_{23}-a_{22}x^1) \quad \text{IV} \quad (\varepsilon=q=1),\\ a_{23}e^{-(q+1)\,x^1} \quad \text{V, VI} \quad (\varepsilon=0);\end{cases}\\ g_{33}&=\begin{cases} e^{-2x^1}(a_{22}{x^1}^2-2a_{23}x^1+a_{33}) \quad \text{IV},\\ e^{-2qx^1}a_{33} \quad \text{V, VI};\end{cases}\\ g_{34}&=\begin{cases} e^{-x^1}(a_{34}-a_{24}x^1) \quad \text{IV},\\ a_{34}e^{-qx^1} \quad \text{V, VI};\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{31.39}$$

$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4)$; $X_1=p_2$, $X_2=p_3$, $X_3=p_1+(x^2+\varepsilon x^3)\,p_2+qx^3p_3$.

Но, кроме указанных V_4, для этих групп существуют еще классы пространств, отвечающие операторам (31.23) и (31.24), которые определяются тем же методом:

G_3 IV на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{x^3}\\ 0 & a_{22}e^{2x^3} & -a_{22}x^1e^{2x^3}+a_{23}e^{x^3} & 0\\ 0 & -a_{22}x^1e^{2x^3}+a_{23}e^{x^3} & a_{22}{x^1}^2e^{2x^3}-2a_{23}x^1e^{x^3}+a_{33} & a_{34}\\ e^{x^3} & 0 & a_{34} & 0\end{pmatrix}, \tag{31.40}$$

$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4)$; $X_1=p_2$, $X_2=p_1+x^3p_2$, $X_3=x^1p_1+x^2p_2-p_3$.

G_3 V на $\overset{*}{V}_3$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{x^3}\\ 0 & a_{22}e^{2x^3} & a_{23}e^{x^3} & -u_{22}x^1e^{2x^3}\\ 0 & a_{23}e^{x^3} & a_{33} & -a_{23}x^1e^{x^3}+a_{34}\\ e^{x^3} & -a_{22}x^1e^{2x^3} & -a_{23}x^1e^{x^3}+a_{34} & a_{22}{x^1}^2e^{2x^3}\end{pmatrix}; \tag{31.41}$$

$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4)$; $X_1=p_2$, $X_2=p_1+x^4p_2$, $X_3=x^1p_1+x^2p_2-p_3$.

G_3 VI на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{24}=g_{44}=0,\\
&g_{14}=(x^3)^{\frac{q}{q-1}},\quad g_{22}=a_{22}(x^3)^{\frac{2}{q-1}},\\
&g_{23}=-a_{22}x^1(x^3)^{\frac{2}{q-1}}+a_{23}(x^3)^{\frac{2-q}{q-1}},\\
&g_{33}=-a_{22}x^{1^2}(x^3)^{\frac{2}{q-1}}-2a_{23}x^1(x^3)^{\frac{2-q}{q-1}}+a_{33}(x^3)^{-2},\\
&g_{34}=a_{34}(x^3)^{-1};
\end{aligned}\right\}\qquad(31.42)$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4);\ q\neq 1,\ 0;$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^3p_2,\quad X_3=qx^1+x^2p_2+(1-q)x^3p_3.$$

В случае группы G_3 VII не существует особых операторов, так как нет нормальных делителей первого измерения и метрика, полученная в [260], будет иметь вид:

G_3 VII на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0,\quad g_{14}=1,\\
&g_{22}=e^{-qx^1}[a_1+(qa_2+pa_3)\cos px^1+\\
&\qquad\qquad+(qa_3-pa_2)\sin px^1],\\
&g_{23}=e^{-qx^1}\left[\frac{q}{2}a_1+2a_2\cos px^1+2a_3\sin px^1\right],\\
&g_{24}=e^{-\frac{q}{2}x^1}\left[a_4\cos\frac{px^1}{2}+a_5\sin\frac{px^1}{2}\right],\\
&g_{33}=e^{-qx^1}[a_1+(qa_2-pa_3)\cos px^1+\\
&\qquad\qquad+(qa_3+pa_2)\sin px^1],\\
&g_{34}=e^{-\frac{q}{2}x^1}\left[\left(\frac{p}{2}a_5-\frac{q}{2}a_4\right)\cos\frac{px^1}{2}-\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\left(\frac{p}{2}a_4+\frac{q}{2}a_5\right)\sin\frac{px^1}{2}\right];
\end{aligned}\right\}\qquad(31.43)$$

$$a_\alpha=a_\alpha(x^4),\quad p=\sqrt{4-q^2},\quad q^2<4;$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=p_1-x^3p_2+(x^2+qx^3)p_3.$$

Но возможен еще следующий класс V_4:

G_3 VII на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = g_{12} = g_{13} = g_{44} = 0, \quad g_{14} = P\sqrt{R},\\
&g_{22} = a_{22}P^2R^{-1},\\
&g_{23} = -a_{22}P^2R^{-1}x^1 + a_{23}PR^{-\frac{3}{2}},\\
&g_{24} = (a_{24} - x^3)\,PR^{-\frac{1}{2}},\\
&g_{33} = a_{22}P^2R^{-1}x^{1^2} - 2a_{23}PR^{-\frac{3}{2}}x^1 + a_{33}R^{-2},\\
&g_{34} = -(a_{24} - x^3)\,PR^{-1}x^1,
\end{aligned}\right\} \tag{31.44}$$

$$P = e^{-pq\,\mathrm{arctg}\,(2x^3-q)\,p}, \qquad R = x^{3^2} - qx^3 + 1,$$

$$q^2 < 4, \quad p = \frac{1}{\sqrt{4-q^2}}, \quad q = \mathrm{const};$$

$$a_{ij} = a_{ij}(x^4);$$

$$X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_1 + x^3p_2,$$

$$X_3 = [x^2 + x^1(q - x^3)]\,p_1 + x^2x^3p_2 + (x^{3^2} - qx^3 + 1)\,p_3.$$

В случае неразрешимых G_3 VIII и IX, как легко видеть, не может быть особых операторов. Для G_3 VIII имеем неабелеву подгруппу $G_2\{X_1, X_2\}$, для которой можно взять операторы в виде (31.25) и (31.26). Но первое из этих предположений приводит к вырождению метрики, и остается только второе, для которого из уравнений структуры после некоторых упрощений получим:

$$X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_3 + x^2p_2,$$

$$X_3 = -e^{x^3}p_1 + (\varepsilon e^{2x^3} + x^{2^2})\,p_2 + 2x^2p_3, \qquad \varepsilon = 0, \pm 1.$$

В зависимости от того, какое значение примет ε, получаем три класса пространств:

1) G_3 VIII на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=0, \quad g_{14}=1, \quad g_{44}=0,\\
&g_{22}=\left[\frac{1}{2}a_1+a_2e^{4x^1}+a_3e^{-4x^1}\right]e^{-2x^3},\\
&g_{23}=[a_2e^{4x^1}-a_3e^{-4x^1}]\,e^{-x^3},\\
&g_{24}=\left[\frac{1}{2}+a_4e^{2x^1}+a_5e^{-2x^1}\right]e^{-x^3},\\
&g_{33}=-\frac{1}{2}a_1+a_2e^{4x^1}+a_3e^{-4x^1},\\
&g_{34}=a_4e^{2x^1}-a_5e^{-2x^1}; \qquad a_\alpha=a_\alpha(x^4);
\end{aligned}\right\} \tag{31.45}$$

$$X_1=p_2,\ X_2=x^2p_2+p_3,\ X_3=-e^{x^3}p_1+(e^{2x^3}+x^{2^2})\,p_2+2x^2p_3.$$

2) G_3 VIII на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=0, \quad g_{14}=1, \quad g_{44}=0,\\
&g_{22}=\left[-\frac{1}{2}a_1+a_2\cos 4x^1+a_3\sin 4x^1\right]e^{-2x^3},\\
&g_{23}=[a_3\cos 4x^1-a_2\sin 4x^1]\,e^{-x^3},\\
&g_{24}=\left[-\frac{1}{2}+a_4\cos 2x^1+a_5\sin 2x^1\right]e^{-x^3},\\
&g_{33}=\left[-\frac{1}{2}a_1-a_2\cos 4x^1-a_3\sin 4x^1\right],\\
&g_{34}=a_5\cos 2x^1-a_4\sin 2x^1; \quad a_\alpha=a_\alpha(x^4);
\end{aligned}\right\} \tag{31.46}$$

$$X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3,$$
$$X_3=-e^{x^3}p_1+(-e^{2x^3}+x^{2^2})\,p_2+2x^2p_3.$$

3) G_3 VIII на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=0, \quad g_{14}=1, \quad g_{44}=0,\\
&g_{22}=(4a_1x^{1^2}+4a_2x^1+a_3)\,e^{-2x^3},\\
&g_{23}=(2a_1x^1+a_2)\,e^{-x^3},\\
&g_{24}=(-x^{1^2}+2a_4x^1+a_5)\,e^{-x^3},\\
&g_{33}=a_1,\ g_{34}=-x^1+a^4; \quad a_\alpha=a_\alpha(x^4);
\end{aligned}\right\} \tag{31.47}$$

$$X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3, \quad X_3=-e^{x^3}p_1+x^{2^2}p_2+2x^2p_3.$$

Наконец, рассмотрим неразрешимую G_3 IX, которая также не может содержать особых операторов, и потому X_1 можно привести к виду $X_1 = p_2$. Так как G_3 IX является единственной G_3, не содержащей подгруппы G_2, то операторы X_2 и X_3 приходится искать непосредственно из уравнений структуры, используя при этом допустимые преобразования. После этого из уравнений Киллинга определяется метрика, которую за счет допустимых преобразований ([260], стр. 209) можно привести к виду:

G_3 IX на $\overset{*}{V}_3$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = g_{12} = g_{13} = g_{44} = 0, \quad g_{14} = 1,\\
&g_{22} = (a_1 \sin 2x^1 - a_2 \cos 2x^1 + a^3) \cos^2 x^3,\\
&g_{23} = -(a_1 \cos 2x^1 + a_2 \sin 2x^1) \cos x^3,\\
&g_{24} = \sin x^3 + (a_4 \cos x^1 + a_5 \sin x^1) \cos x^3,\\
&g_{33} = a_2 \cos 2x^1 - a_1 \sin 2x^1 + a_3,\\
&g_{34} = a_4 \sin x^1 - a_5 \cos x^1;
\end{aligned}\right\} \qquad (31.48)$$

$$a_i = a_i(x^4);$$

$$X_1 = p_2,$$

$$X_2 = \sec x^3 \cos x^2 p_1 - \operatorname{tg} x^3 \cos x^2 p_2 + \sin x^2 p_3,$$
$$X_3 = -\sec x^3 \sin x^2 p_1 + \operatorname{tg} x^1 \sin x^2 p_2 + \cos x^2 p_3.$$

Этим завершается классификация полей тяготения, допускающих группу движений G_3 $(r \leqslant 3)$.

Отметим, что для реального поля тяготения на все полученные выше метрики необходимо наложить условие $|g_{\alpha\beta}| < 0$, обеспечивающее в данной точке возможность приведения метрики к метрике Минковского.

§ 32. Поля тяготения, допускающие просто-транзитивную или нетранзитивную группу движений G_4

Если порядок полной группы G_r, действующей в V_4, равен $r = 4$ и ранг матрицы $(\underset{s}{\xi^{\alpha}})$ $(s = 1, 2, 3, 4,)$ меньше 4, то G_4 имеет поверхностями транзитивности V_3 или $\overset{*}{V}_3$, так как V_2 и $\overset{*}{V}_2$ не могут допускать группы более высокого порядка, чем 3.

Далее везде тип структуры группы обозначается соответственно классификации, данной в § 10.

G_4 на V_3

Если выбрать такую систему координат, относительно которой гиперповерхность транзитивности V_3 будет записываться уравнением $x^4 = \mathrm{const}$, то в этой системе отнесения для всех операторов группы будет иметь место условие $\underset{s}{\xi}^4 = 0$ $(s = 1, 2, 3, 4)$. Разберем сначала случай, когда имеет место группа G_4 I со структурой

$$[X_1X_2] = [X_2X_3] = 0, \quad [X_1X_4] = cX_1, \quad [X_2X_4] = X_2,$$
$$[X_3X_4] = (c-1)X_3,$$

где c — параметр группы. Эта группа содержит подгруппу G_3 II, действующую на V_3, и следовательно (см. § 31) искомое пространство находится среди пространств, определяемых метрикой (31.6) и операторами G_3 вида

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^3p_2.$$

Если искомый оператор $X_4 = \underset{4}{\xi}^{\alpha} p_\alpha$, то из уравнений структуры следует:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_2 \underset{4}{\xi}^{\alpha} = c\delta_2^\alpha, \quad \partial_3 \underset{4}{\xi}^{\alpha} = \delta_3^\alpha, \\ -\partial_1 \underset{4}{\xi}^{\alpha} + cx^3\delta_2^\alpha - &\underset{4}{\xi}^{3}\delta_2^\alpha = (c-1)(-\delta_1^\alpha + x^3\delta_2^\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{32.1}$$

откуда для вектора Киллинга $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ получаем выражение

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha} = [(c-1)x^1 + \alpha]\,\delta_1^\alpha + (cx^2 - \gamma x^1 + \beta)\,\delta_2^\alpha + (x^3 + \gamma)\,\delta_3^\alpha, \tag{32.2}$$

где α, β, γ — некоторые функции от x^4. Но если записать уравнения Киллинга для $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ и метрики (31.6) для компонент g_{4i} $(i = 1, 2, 3,)$, то получим систему уравнений

$$g_{1i}\alpha' + g_{2i}(-x^1\gamma' + \beta') + g_{3i}\gamma' = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Определитель этой системы отличен от нуля, и, следовательно, α, β, γ — постоянные. Допустимое преобразование, не меняющее операторов X_1, X_2, X_3 и метрики (31.6), имеет вид:

$$x^{1'} = x^1 + c_1, \quad x^{2'} = x^2 + e^{-x^1} c_2, \quad x^{3'} = x^3 + c_3, \quad x^{4'} = x^4 + c_4.$$

Применяя его к оператору (32.2), получим в новой системе координат для параметров α, β, γ выражения

$$\overset{*}{\alpha} = (1-c)\,c_1 + \alpha, \quad \overset{*}{\beta} = -c_1 c_3 - c c_2 + \gamma c_1 + \beta, \quad \overset{*}{\gamma} = c_3 + \gamma,$$

и поэтому в зависимости от того, чему равен параметр группы c, придем к двум возможным случаям: a) $c \neq 1$, когда можно за счет выбора c_i положить $\overset{*}{\alpha} = \overset{*}{\gamma} = 0$; b) $c = 1$, когда можно выбрать c_i так, чтобы $\overset{*}{\alpha} \neq 0$, $\overset{*}{\beta} = \overset{*}{\gamma} = 0$, причем для каждого из этих двух случаев оператор X_4 можно представить соответственно в виде:

a) $X_4 = (c-1)\, x^1 p_1 + c x^2 p_2 + x^3 p_3$,

b) $X_4 = \alpha p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3$.

Интегрируя уравнения Киллинга для метрики (31.6) и оператора X_4 в случае b), придем к противоречию, а предположение a) может иметь место только в случае $c = 0$. Таким образом, получим метрику

G_4 I $(c=0)$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{22}x^1 & 0 \\ a_{13} & a_{22}x^1 & a_{22}{x^1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.3)$$

$$a_{ij} = a_{ij}(x^4), \quad e_4 = \pm 1;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^3 p_2, \quad X_4 = -x^1 p_1 + x^3 p_3.$$

Так как исследование для других структур групп G_4 проводится тем же методом, то, повторяя аналогичные рассуждения для других структур, получим следующие пространства:

G_4 II — не существует полей тяготения, допускающих такую нетранзитивную группу движений G_4.

G_4 III $(q=0)$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{22}x^1 & 0 \\ 0 & a_{22}x^1 & a_{22}{x^1}^2+a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.4)$$

$$a_{ij}=a_{ij}(x^4); \quad X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^3p_2,$$

$$X_4=-x^3p_1+\frac{1}{2}({x^3}^2-{x^1}^2)\,p_2+x^1p_3.$$

G_4 IV

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}e^{x^1} & 0 \\ 0 & a_{23}e^{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.5)$$

$$e_4=\pm 1, \quad a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4);$$

$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^2p_2, \quad X_4=-p_1+x^3p_3.$$

G_4 V

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}e^{2x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}e^{2x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.6)$$

$$e_4=\pm 1, a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4); \quad X_1=p_2, \quad X_2=p_3,$$

$$X_3=-p_1+x^2p_2+x^3p_3, \quad X_4=-x^3p_2+x^2p_3.$$

G_4 VII

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3a_{22}\,\mathrm{sh}^2\,x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.7)$$

$$X_1=\cos x^3p_2+(\mathrm{cth}\,x^2\sin x^3-1)\,p_3,$$

$$X_2=\sin x^3p_2+\mathrm{cth}\,x^2\cos x^3\,p_3,$$

$$X_3=\cos x^3p_2-(\mathrm{cth}\,x^2\sin x^3+1)\,p_3, \quad X_4=p_1.$$

Отметим, что здесь может иметь место V_4, которое получится из (32.7), если все тригонометрические функции, входящие в выражения операторов, заменить гиперболическими.

G_4 VII

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{12}x^2 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & -a_{22}x^2 & 0 \\ -a_{12}x^2 & -a_{22}x^2 & a_{22}x_2^2 - \frac{a_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.8)$$

$$X_1 = e^{-x^3}(p_1 - x^{2^2}p_2 - 2x^2p_3), \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = e^{x^3}p_2, \quad X_4 = p_1.$$

G_4 VIII

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}\sin^2 x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \qquad (32.9)$$

$$X_1 = p_3, \quad X_2 = \sin x^3p_2 + \operatorname{ctg} x^2 \cos x^3p_3,$$
$$X_3 = \cos x^3p_2 - \operatorname{ctg} x^2 \sin x^3p_3, \quad X_4 = p_1.$$

G_4 VIII

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta(1 - \cos 2x^3) & -\beta \sin 2x^3 \sin x^1 & 0 & 0 \\ -\beta \sin 2x^3 \sin x^1 & \alpha + 2\beta \cos^2 x^3 \sin^2 x^1 & \alpha \cos x^1 & 0 \\ 0 & \alpha \cos x^1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}, \qquad (32.10)$$

α, β — функции от x^4. Операторы имеют вид:

$$X_1 = p_2,$$

$$X_2 = \cos x^2p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \sin x^2p_2 + \frac{\sin x^2}{\sin x^1}p_3,$$

$$X_3 = -\sin x^2p_1 - \operatorname{ctg} x^1 \cos x^2p_2 + \frac{\cos x^2}{\sin x^1}p_3,$$

$$X_4 = \sin x^3p_1 - \frac{\cos x^3}{\sin x^1}p_2 + \operatorname{ctg} x^1 \cos x^3p_3.$$

Что же касается разрешимых групп со структурами G_4 VI_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, которые содержат абелевы подгруппы G_3, то тем же методом получим следующие возможные пространства:

$$G_4\ \mathrm{VI}_1 \qquad ds^2 = g_{11}\,dx^{1^2} + 2g_{23}\,dx^2\,dx^3 + e^4\,dx^{4^2}, \tag{32.11}$$

где $g_{ij} = g_{ij}(x^4)$, а операторы имеют вид:

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1, \quad X_4 = x^2p_2 - x^3p_3.$$

Для структуры G_4 VI_2 не существует полей тяготения, допускающих группу движений с такой структурой.

G_4 VI_3

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{32.12}$$

$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^4)$; $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = -p_1$, $X_4 = x^2p_3 - x^3p_1$.

G_4 VI_4

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{32.13}$$

$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^4)$; $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = -p_1$, $X_4 = x^2p_3 - x^3p_2$.

Рассмотрим тот случай, когда нетранзитивная группа движений G_4 действует на изотропном трехмерном многообразии. Эти пространства были изучены в работе [260].

G_4 на $\overset{*}{V}_3$

Рассмотрим группу G_4 типа I, которая содержит подгруппу G_3 II. Ввиду этого систему координат можно выбрать так, чтобы операторы G_3 имели вид (31.25) или другие возможные формы.

В случае (31.25) из уравнений структуры найдем:

$$\underset{4}{\xi}^1 = 2x^1 + A(x^3,\ x^4), \qquad \underset{4}{\xi}^2 = x^2, \qquad \underset{4}{\xi}^3 = c(x^3,\ x^4),$$

а применяя допустимое преобразование

$$x^{1'} = x^1 + f(x^3,\ x^4),\ x^{2'} = x^2,\ x^{4'} = x^4,\ x^{3'} = \begin{cases} \int \frac{dx^3}{c}, & c \neq 0 \\ x^3, & c = 0, \end{cases}$$

приведем оператор X_4 к виду:

$$X_4 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + \varepsilon p_3, \quad \varepsilon = 0 \text{ или } 1.$$

Но из уравнений Киллинга следует, что $\varepsilon = 1$. Поэтому метрика после допустимых преобразований, сохраняющих все четыре оператора, будет иметь вид:

G_4 I

$$ds^2 = \alpha(x^4)\, e^{-2x^3} (2\, dx^1\, dx^4 + dx^{2^2}) + \beta(x^4)\, dx^{2^2}. \quad (32.14)$$

Точно так же в случае (31.26) получим:

G_4 I

$$ds^2 = 2dx^1\, dx^4 - 2\alpha(x^4)\, dx^2\, dx^3 - 2x^3\, dx^2\, dx^4; \quad (32.15)$$

$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^2 p_1 + p_3,\ X_4 = x^2 p_2 - x^3 p_3. \quad (32.16)$$

Исследование для других типов проводится аналогично приведенному выше, и поэтому достаточно привести сводку результатов.

G_4 II не может быть нетранзитивной группой движений с изотропными гиперповерхностями транзитивности.

G_4 III

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= 2dx^1\, dx^4 + \alpha(x^4)(dx^{2^2} + dx^{3^2}) - 2x^3\, dx^2\, dx^3, \\ X_1 &= p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2 p_1 + p_3, \\ X_4 &= \frac{1}{2}(x^{2^2} - x^{3^2}) p_1 - x^3 p_2 + x^2 p_3. \end{aligned}\right\} \quad (32.17)$$

G_4 IV

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= 2dx^1\, dx^4 + 2\alpha(x^4)\, e^{-x^1}\, dx^2\, dx^3, \\ X_1 = p_2,\ X_2 &= p_3,\ X_3 = p_1 + x^3 p_3,\ X_4 = p_1 + x^2 p_2. \end{aligned}\right\} \quad (32.18)$$

G_4 V

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= 2dx^1\, dx^4 + \alpha(x^4)\, e^{-x^1} (dx^{2^2} + dx^{3^2}), \\ X_1 &= p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -x^3 p_2 + x^2 p_3, \\ X_4 &= 2p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3. \end{aligned}\right\} \quad (32.19)$$

$G_4\,\mathrm{VI}$

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + \alpha(x^4)\left(e^{-2x^3}\,dx^{2^2} - e_2\,dx^{3^2}\right),\\ &e_2 = \pm 1;\ X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2p_2 + p_3,\\ &X_3 = \left(x^{2^2} + e_2e^{2x^3}\right)p_2 + 2x^2p_3, \quad X_4 = p_1. \end{aligned}\right\} \tag{32.20}$$

$G_4\,\mathrm{VII}$

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = 2dx^1\,dx^4 +\\ &+ \alpha(x^4)\left(e^{-2x^3}\,dx^{2^2} - e_2\,dx^{3^2}\right) + e_2e^{-x^3}\,dx^2\,dx^4,\\ &e_2 = \pm 1; \quad X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2p_2 + p_3,\\ &X_3 = -e^{x^2}p_1 + \left(x^{2^2} + e_2e^{2x^3}\right)p_2 + 2x^3p_3, \quad X_4 = p_1. \end{aligned}\right\} \tag{32.21}$$

$G_4\,\mathrm{VIII}$

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + \alpha(x^4)\left(\cos^2 x^3\,dx^{2^2} + dx^{3^2}\right) +\\ &\qquad + 2\varepsilon \sin x^3\,dx^2\,dx^4,\\ &\varepsilon = 0 \text{ или } 1; \quad X_1 = p_2,\\ &X_2 = \varepsilon \sec x^3 \cos x^2\,p_1 - \operatorname{tg} x^3 \cos x^2\,p_2 + \sin x^2\,p_3,\\ &X_4 = p_1, \quad X_3 = -\varepsilon \sec x^3 \sin x^2\,p_1 +\\ &\qquad + \operatorname{tg} x^3 \sin x^2\,p_2 + \cos x^2\,p_3. \end{aligned}\right\} \tag{32.22}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда V_4 допускает нетранзитивную G_4, действующую на $\overset{*}{V}_3$ и допускающую абелеву подгруппу G_3. Все такие группы объединены в структурах типа $G_4\,\mathrm{VI}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Рассматривая каждый из этих типов тем же методом, получим только следующие две возможности:

$G_4\,\mathrm{VI}_3$

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + \alpha(x^4)\,dx^{2^2} +\\ &\qquad + 2\beta(x^4)\,dx^2\,dx^3 + \gamma(x^4)\,dx^{3^2},\\ &X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3,\ X_4 = x^2p_1 + \omega p_2 + \lambda p_3, \end{aligned}\right\} \tag{32.23}$$

где $\omega(x^4) = -\int \frac{\gamma\,dx^4}{\sigma}, \quad \lambda(x^4) = \int \frac{\gamma\,dx^4}{\sigma}, \quad \sigma = \alpha\gamma - \beta^2.$

$G_4\,\mathrm{VI}_2$

$$\left.\begin{aligned} &ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + \alpha(x^4)\left(dx^{2^2} + e\,dx^{3^2}\right), \quad e = \pm 1,\\ &X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = ex^3p_2 - x^2p_3. \end{aligned}\right\} \tag{32.24}$$

Структуры групп, отвечающих (32.23) и (32.24), неизоморфны, и поэтому пространства, определяемые этими метриками, существенно различны.

Просто-транзитивные группы движений G_4

Две просто-транзитивные группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных *подобны* ([147], стр. 97), поэтому, если пространство V_4 допускает в качестве группы движений просто-транзитивную группу G_4, то можно взять любые четыре оператора, удовлетворяющие уравнениям структуры.

Ввиду этого является несущественным, будем ли мы определять четвертый оператор, исходя из подгруппы G_3 на V_3 или из G_3 на $\overset{*}{V}_3$.

Мы будем придерживаться первого пути, считая, кроме того, что в V_4 задана полугеодезическая система координат (§ 7), относительно которой

$$ds^2 = e_4\, dx^{4^2} + g_{ij}\, dx^i\, dx^j \quad (i,\ j \neq 4), \quad e_4 = \pm 1.$$

Так как, кроме того, для просто-транзитивной группы $\underset{4}{\xi}^4 \neq 0$, то из уравнений Киллинга следует, что $\partial_4 \underset{4}{\xi}^4 = 0$. Используя эти условия и операторы G_3 на V_3 (§ 31), которая, как подгруппа, содержится в искомой G_4, из уравнений структуры (10.17) и (10.19) найдем четвертый оператор; при этом некоторые из констант интегрирования можно привести к нулю или ± 1 с помощью допустимых преобразований.

Рассмотрим группу G_4 I, которая содержит подгруппу G_3 II.

Из уравнений структуры получим систему (32.1), с тем различием, что α пробегает значения от 1 до 4:

$$\underset{4}{\xi}^\alpha = \underset{4}{\xi}^\alpha (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4), \qquad \partial_4 \underset{4}{\xi}^4 = 0, \qquad \underset{4}{\xi}^4 \neq 0.$$

Интегрируя ее, найдем:

$$\left.\begin{aligned} \underset{4}{\xi}^1 &= (c-1)\, x^1 + A\,(x^4), \\ \underset{4}{\xi}^2 &= cx^2 - C\,(x^4)\, x^1 + B\,(x^4), \\ \underset{4}{\xi}^3 = x^3 + C\,(x^4), \quad \underset{4}{\xi}^4 &= D \neq 0, \quad D = \mathrm{const}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.25)$$

Записывая уравнения Киллинга, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} g_{11}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^1 + g_{12}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^2 + g_{13}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^3 = 0, \\ g_{12}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^1 + g_{22}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^2 + g_{23}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^3 = 0, \\ g_{13}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^1 + g_{23}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^2 + g_{33}\,\partial_4\underset{4}{\xi}^3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (32.26)$$

Определитель этой системы $|g_{ij}| \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$, иначе $V_3(x^1, x^2, x^3)$ было бы изотропным многообразием, поэтому

$$\partial_4\underset{4}{\xi}^i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

т. е. A, B, C — постоянные.

Три оператора C_3 II и пространство V_4, которое допускает эту группу движений, остаются инвариантными при преобразованиях

$$\left.\begin{aligned} & x^{1'} = x^1 + \alpha, \quad x^{2'} = x^2 - \gamma x^1 + \beta, \\ & x^{3'} = x^3 + \gamma, \quad\ \ x^{4'} = \varepsilon x^4 + \delta, \\ & \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta - \mathrm{const}, \quad\ \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}\right\} \qquad (32.27)$$

Применяя их, приведем четвертый оператор к виду:

$$X_4 = (c-1)\,x^1 p_1 + c x^2 p_2 + x^3 p_3 + D p_4, \qquad (32.28)$$

если $c \neq 1$, и к виду:

$$X_4 = A p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + D p_4, \quad A,\ D - \mathrm{const}, \qquad (32.29)$$

если $c = 1$.

Произведем преобразование $x^{1'} = x^1$, $x^{2'} = x^2$, $x^{3'} = x^3$, $x^{4'} = \frac{x^4}{D}$ применительно к оператору (32.28). В этом случае константа D приводится к единице. Но это преобразование наносит отпечаток на метрику исследуемого V_4; мы получаем:

$$g_{4'4'} = D^2 g_{44} = e_4 D^2 = \pm D^2. \qquad (32.30)$$

Остальные компоненты $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \neq 4)$ не изменяют своего вида; следовательно, метрика будет определяться матрицей

G_4 I, $c \neq 1$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} k_{11}e^{-2(c-1)x^4} & k_{12}e^{-(2c-1)x^4} & \begin{array}{r} k_{12}x^1e^{-(2c-1)x^4}+ \\ +k_{13}e^{-cx^4} \end{array} & 0 \\ k_{12}e^{-(2c-1)x^4} & k_{22}e^{-2cx^4} & \begin{array}{r} k_{22}x^1e^{-2cx^4}+ \\ +k_{23}e^{-(c+1)x^4} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{r} k_{12}x^1e^{-(2c-1)x^4}+ \\ +k_{13}e^{-cx^4} \end{array} & \begin{array}{r} k_{22}x^1e^{-2cx^4}+ \\ +k_{23}e^{-(c+1)x^4} \end{array} & \begin{array}{r} k_{22}x^{1^2}e^{-2cx^4}+ \\ +2k_{23}x^1e^{-(c+1)x^4}+ \\ +k_{33}e^{-2x^4} \end{array} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm D^2 \end{pmatrix}, \tag{32.31}$$

где D и k_{ij} — постоянные;

$$X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_3, \qquad X_3 = -p_1 + x^3p_2,$$
$$X_4 = (c-1)x^1p_1 + cx^2p_2 + x^3p_3 + p_4.$$

Для оператора (32.29) аналогичные рассуждения приводят к метрике

G_4 I, $c = 1$

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = k_{11}, \quad g_{12} = k_{12}e^{-x^4}, \\ g_{13} = e^{-x^4}[k_{12}(x^1-\alpha x^4)+k_{13}], \\ g_{23} = e^{-2x^4}[k_{22}(x^1-\alpha x^4)+k_{23}], \quad g_{22} = k_{22}e^{-2x^4}, \\ g_{33} = e^{-2x^4}[k_{22}(x^1-\alpha x^4)^2+2k_{23}(x^1-\alpha x^4)+k_{33}], \\ g_{i4} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad g_{44} = \pm D^2; \\ k_{ij},\ \alpha,\ D \text{ — const}; \end{array}\right\} \tag{32.32}$$

$$X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_3, \qquad X_3 = -p_1 + x^3p_2,$$
$$X_4 = \alpha p_1 + x^2p_2 + x^3p_3 + p_4.$$

Группы G_4 II и G_4 III также содержат подгруппу G_3 II. Повторяя рассуждения буквально, получим следующие пространства:

G_4 II

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = e^{-2x^4}(k_{11} + 2k_{13}x^4 + k_{33}x^{4^2}),\\
&g_{12} = e^{-3x^4}(k_{12} + k_{23}x^4),\\
&g_{13} = e^{-3x^4}x^1(k_{12} + k_{23}x^4) + e^{-2x^4}(k_{13} + k_{33}x^4),\\
&g_{22} = k_{22}e^{-4x^4}, \quad g_{23} = x^1e^{-4x^4}k_{22} + k_{23}e^{-3x^4},\\
&g_{33} = x^{1^2}k_{22}e^{-4x^4} + 2x^1k_{23}e^{-3x^4} + k_{33}e^{-2x^4},\\
&g_{i4} = 0 \ (i = 1, 2, 3), \ g_{44} = \pm D^2; \quad k_{ij}, D - \mathrm{const};
\end{aligned}\right\} \quad (32.33)$$

$$X_1 = p_2, \ X_2 = p_3, \ X_3 = -p_1 + x^3p_2,$$
$$X_4 = x^1p_1 + \frac{1}{2}(4x^2 + x^{1^2})p_2 + (x^3 - x^1)p_3 + p_4.$$

G_4 III

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = e^{-qx^4}[c_1 + c_2(q\cos\omega x^4 + \omega\sin\omega x^4) +\\
&\qquad\qquad + c_3(q\sin\omega x^4 - \omega\cos\omega x^4)],\\
&g_{12} = e^{-\frac{3}{2}qx^4}\left[-c_4\sin\frac{\omega}{2}x^4 + c_5\cos\frac{\omega}{2}x^4\right]\frac{\omega}{2} - \frac{3}{2}qP,\\
&g_{13} = x^1g_{12} + e^{-qx^4}\Big(-\frac{q}{2}c_1 -\\
&\qquad\qquad - 2c_2\cos\omega x^4 - 2c_3\sin\omega x^4\Big),\\
&g_{22} = c_6e^{-2qx^4}, \quad g_{23} = x^1c_6e^{-2qx^4} + P,\\
&g_{33} = x^{1^2}c_6e^{-2qx^4} + 2Px^1 + e^{-qx^4}[c_1 + c_2(q\cos\omega x^4 -\\
&\qquad\qquad - \omega\sin\omega x^4) + c_3(q\sin\omega x^4 + \omega\cos\omega x^4)],\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2;\\
&\qquad\qquad D, \ c_\nu \ (\nu = 1_1, \ldots, 6) - \mathrm{const},
\end{aligned}\right\} \quad (32.34)$$

где $\omega = \sqrt{4 - q^2}$, $q^2 < 4$, q — структурная константа, а

$$P = e^{-\frac{3}{2}qx^4}\left(c_4\cos\frac{\omega}{2}x^4 + c_5\sin\frac{\omega}{2}x^4\right);$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^3p_2,$$
$$X_4 = (qx^1 - x^3)p_1 + \left[qx^2 + \frac{1}{2}(x^{3^2} - x^{12})\right]p_2 + x^1p_3 + p_4.$$

G_4 IV содержит подгруппу G_3 III. Здесь, как и для G_4 I, выделяются два случая:

1) G_4 IV, $\alpha \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = k_{11}, \quad g_{12} = k_{12} e^{x^1 - \alpha x^4}, \quad g_{13} = k_{13} e^{-x^4}, \\ g_{22} = k_{22} e^{2x^1 - 2\alpha x^4}, \quad g_{23} = k_{23} e^{-(1+\alpha) x^4 + x^1}, \\ g_{33} = k_{33} e^{-2x^4}, \quad g_{i4} = 0 \ (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2, \\ D, \ \alpha, \ k_{ij} - \text{const}; \end{array}\right\} \qquad (32.35)$$

$$X_1 = p_3, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = -p_1 + x^2 p_2,$$
$$X_4 = \alpha p_1 + x^3 p_3 + p_4.$$

2) G_4 IV

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = k_{11} + 2k_{12} x^4 + k_{22} {x^4}^2, \\ g_{12} = e^{x^1} (k_{12} + k_{22} x^4), \quad g_{22} = k_{22} e^{2x^1}, \\ g_{13} = e^{-x^4} (k_{13} + k_{23} x^4), \quad g_{23} = k_{23} e^{x^1 - x^4}, \\ g_{33} = k_{33} \, e^{-2x^4}, \\ g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2, \quad D, \ k_{ij} - \text{const}; \end{array}\right\} \qquad (32.36)$$

$$X_1 = p_3, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = -p_1 + x^2 p_2,$$
$$X_4 = e^{-x^1} p_2 + x^3 p_3 + p_4.$$

Однако, эти группы подобны, так как имеют одну и ту же структуру.

Для G_4 V, исходя из подгруппы G_3 V, аналогично придем к следующей метрике:

G_4 V

$$\left.\begin{array}{l} g_{11} = k_{11}, \quad g_{12} = e^{x^1 - \alpha x^4} (k_{12} \cos x^4 + k_{13} \sin x^4), \\ g_{13} = e^{x^1 - \alpha x^4} (k_{12} \sin x^4 - k_{13} \cos x^4), \\ g_{22} = e^{2x^1 - 2\alpha x^4} (k_{33} - k_{22} \sin 2x^4 + k_{23} \cos 2x^4), \\ g_{23} = e^{2x^1 - 2\alpha x^4} (k_2 \cos 2x^4 + k_{23} \sin 2x^4), \\ g_{33} = e^{2x^1 - 2\alpha x^4} (k_{33} + k_{22} \sin 2x^4 - k_{23} \cos 2x^4), \\ g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2, \ k_{ij}, D - \text{const}; \end{array}\right\} \qquad (32.37)$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3,$$
$$X_4 = \alpha p_1 - x^3 p_2 + x^2 p_3 + p_4, \quad \alpha = \text{const}.$$

При определении G_4, содержащих абелеву подгруппу G_3, исследование упрощается, так как первые три оператора можно взять ввиду этого во всех возможных случаях:

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1,$$

а для $X_4 = \underset{4}{\xi}^{\alpha} \partial_\alpha$ получим:

$$\partial_\beta \underset{4}{\xi}^4 = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3, 4).$$

В силу этого классификация таких V_4 тем же методом приводит к следующим пространствам:

$G_4\,\mathrm{VI}_1$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = k_{11}e^{-2lx^4}, \quad g_{12} = k_{12}e^{-(l+\varepsilon)x^4},\\
&g_{13} = k_{13}e^{-(k+l)\,x^4},\\
&g_{22} = k_{22}e^{-2\varepsilon x^4}, \ g_{23} = k_{23}e^{-(k+\varepsilon)\,x^4}, \quad g_{33} = k_{33}e^{-2kx^4},\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2, \quad k_{ij}, D - \mathrm{const},
\end{aligned}\right\} \quad (32.38)$$

где k, l — константы уравнений структуры, $\varepsilon = 0$ или 1;

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1,$$
$$X_4 = lx^1p_1 + \varepsilon x^2p_2 + kx^3p_3 + p_4.$$

$G_4\,\mathrm{VI}_2$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = k_{11}e^{-2lx^4},\\
&g_{12} = e^{-(k+l)\,x^4}\,(k_{13}\cos x^4 - k_{12}\sin x^4),\\
&g_{13} = e^{-(k+l)\,x^4}\,(k_{12}\cos x^4 + k_{13}\sin x^4),\\
&g_{22} = e^{-2kx^4}\,(k_{22} - k_{23}\cos 2x^4 - k_{33}\sin 2x^4),\\
&g_{23} = e^{-2kx^4}\,(-k_{23}\sin 2x^4 + k_{33}\cos 2x^4),\\
&g_{33} = e^{-2kx^4}\,(k_{22} + k_{23}\cos 2x^4 + k_{33}\sin 2x^4),\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2; \quad k_{ij}, D - \mathrm{const},
\end{aligned}\right\} \quad (32.39)$$

где k, l — константы уравнений структуры;

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1,$$
$$X_4 = lx^1p_1 + (kx^2 - x^3)\,p_2 + (kx^3 + x^2)\,p_3 + p_4.$$

$G_4\,\mathrm{VI}_3$ $\varepsilon = 0$ или 1, k — любое вещественное

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = k_{11} e^{-2\varepsilon x^4}, \quad g_{12} = (k_{12} - k_{13} x^4)\, e^{-(\varepsilon + k)\, x^4},\\
&g_{13} = k_{13} e^{-(\varepsilon + k)\, x^4},\\
&g_{22} = (k_{22} - 2k_{23} x^4 + k_{33} x^{4^2})\, e^{-2kx^4},\\
&g_{23} = (k_{23} - k_{33} x^4)\, e^{-2kx^4}, \quad g_{33} = k_{33} e^{-2kx^4},\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2, \quad k_{ij}, D \text{ — const};
\end{aligned}\right\}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1,$$
$$X_4 = \varepsilon x^1 p_1 + k x^2 p_2 + (k x^3 + x^2)\, p_3 + p_4.$$

Для группы $G_4\,\mathrm{VI}_4$ выделяются два случая:

1) $G_4\,\mathrm{VI}_4$, $k \neq \varepsilon$ $(\varepsilon = 0$ или $1)$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = k_{11} e^{-2\varepsilon x^4}, \quad g_{13} = k_{13} e^{-(k+\varepsilon)\, x^4} + \frac{k_{11}}{(k-\varepsilon)}\, e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{12} = (k_{12} - k_{13} x^4)\, e^{-(k+\varepsilon)\, x^4} - \frac{k_{11}}{(k-\varepsilon)^2}\, e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{22} = \frac{2\,(k_{13} x^4 - k_{12})}{(k-\varepsilon)^2}\, e^{-(k+\varepsilon)\, x^4} + \frac{k_{11}}{(k-\varepsilon)^4}\, e^{-2\varepsilon x^4} +\\
&\qquad\qquad + (k_{23} - k_{33} x^4)\, e^{-2kx^4},\\
&g_{23} = \left(\frac{k_{12}}{k-\varepsilon} - \frac{k_{13}}{(k-\varepsilon)^2} - \frac{k_{13} x^4}{k-\varepsilon}\right) e^{-(k+\varepsilon)\, x^4} -\\
&\qquad\qquad - \frac{k_{11}}{(k-\varepsilon)^3}\, e^{-2\varepsilon x^4} + (k_{23} - k_{33} x^4)\, e^{-2kx^4},\\
&g_{33} = k_{33}\, e^{-2kx^4} + \frac{k_{11}}{(k-\varepsilon)^2}\, e^{-2\varepsilon x^4} + \frac{2k_{13}}{k-\varepsilon}\, e^{-(k+\varepsilon)\, x^4},\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D_2, \quad k_{ij}, D \text{ — const};
\end{aligned}\right\}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1,$$
$$X_4 = (\varepsilon x^1 - x^3)\, p_1 + k x^2 p_2 + (k x^3 + x^2)\, p_3 + p_4.$$

2) $G_4\,\mathrm{VI}_4$, $k = \varepsilon = 0$ или 1

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = k_{11}e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{12} = \left(k_{12} - k_{13}x^4 - \frac{1}{2}k_{11}x^{4^2}\right)e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{13} = (k_{13} + k_{11}x^4)\,e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{22} = \Big[k_{22} - 2k_{23}x^4 + (k_{33} - k_{12})\,x^{4^2} +\\
&\qquad\qquad + k_{13}x^{4^3} + \frac{1}{4}k_{11}x^{4^4}\Big]\,e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{23} = \Big[k_{23} + (k_{12} - k_{33})\,x^4 -\\
&\qquad\qquad - \frac{3}{2}k_{13}x^{4^2} - \frac{1}{2}k_{11}x^{4^3}\Big]\,e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{33} = (k_{33} + 2k_{13}x^4 + k_{11}x^{4^2})\,e^{-2\varepsilon x^4},\\
&g_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2; \quad k_{ij},\ D - \mathrm{const};
\end{aligned}\right\} \qquad (32.42)$$

$$X_1 = p_2, \qquad X_2 = p_3, \qquad X_3 = -p_1,$$
$$X_4 = (\varepsilon x^1 - x^3)\,p_1 + \varepsilon x^2 p_2 + (\varepsilon x^3 + x^2)\,p_3 + p_4.$$

Наконец, рассматривая неразрешимые $G_4\,\mathrm{VII}$, VIII, которые содержат соответственно неразрешимые $G_3\,\mathrm{VIII}$, IX, получим два возможных пространства:

$G_4\,\mathrm{VII}$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11} = b_{11}, \quad g_{12} = P,\\
&g_{13} = -Px^2 + b_{11}x^1 + b_{13}, \quad g_{22} = Q,\\
&g_{23} = -Qx^2 + R,\\
&g_{33} = Qx^{2^2} - 2Rx^2 + P,\\
&g_{i4} = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad g_{44} = \pm D^2,\\
&\quad P = b_{11}x^{1^2} + 2b_{13}x^1 + b_{33},\\
&\quad Q = b_{11}x^{1^4} + 4b_{13}x^{1^3} +\\
&\qquad\qquad + 2\,(b_{12} + 2b_{33})\,x^{1^2} + 4b_{23}x^1 + b_{22},\\
&\quad R = b_{11}x^{1^3} + 3b_{13}x^{1^2} + (b_{12} + 2b_{33})\,x^1 + b_{23},
\end{aligned}\right\} \qquad (32.43)$$

где

$$b_{11}=k_{11}, \quad b_{12}=k_{11}x^{4^2}-2\varepsilon k_{13}x^4+k_{12}, \quad b_{13}=-\varepsilon k_{11}x^4+k_{13},$$
$$b_{22}=k_{11}x^{4^4}-4\varepsilon k_{12}x^{4^3}+2(k_{12}+2k_{33})x^{4^2}-4\varepsilon k_{23}x^4+k_{22},$$
$$b_{23}=-\varepsilon k_{11}x^{4^3}+3k_{13}x^{4^2}-\varepsilon(k_{12}+2k_{33})x^4+k_{23},$$
$$b_{33}=k_{11}x^{4^2}-2\varepsilon k_{13}x^4+k_{33}, \quad k_{ij},\ D-\text{const}, \quad \varepsilon=\pm 1;$$

$$X_1=e^{-x^3}(p_1-x^{2^2}p_2-2x^2p_3), \qquad X_2=p_3,$$
$$X_3=e^{x^3}p_2, \ X_4=p_1+\varepsilon p_4.$$

G_4 VIII

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=\frac{1}{2}k_{11}-k_{12}\sin 2x^3-k_{22}\cos 2x^3,\\
&g_{13}=k_{13}\cos x^3-k_{23}\sin x^3,\\
&g_{12}=\cos x^1(k_{13}\cos x^3-k_{23}\sin x^3)+\\
&\qquad\qquad +\sin x^1(k_{12}\cos 2x^3-k_{22}\sin 2x^3),\\
&g_{22}=k_{33}\cos^2 x^1+\sin 2x^1(k_{23}\cos x^3+k_{13}\sin x^3)+\\
&\qquad +\sin^2 x^1\left(k_{22}\sin 2x^3+k_{22}\cos 2x^3+\frac{1}{2}k_{11}\right),\\
&g_{23}=k_{33}\cos x^1+\sin x^1(k_{23}\cos x^3+k_{13}\sin x^3),\\
&g_{33}=k_{33},\\
&g_{i4}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3), \quad g_{44}=\pm D^2,\ k_{ij},\ D-\text{const};
\end{aligned}\right\} \qquad (32.44)$$

$$X_1=p_2, \ X_2=\cos x^2\, p_1-\operatorname{ctg} x^1\sin x^2 p_2+\frac{\sin x^2}{\sin x^1}p_3,$$
$$X_3=\partial_2X_2, \ X_4=p_4.$$

Этим заканчивается классификация полей тяготения общего вида, допускающих *нетранзитивные* и *транзитивные* четырехчленные группы движений.

§ 33. Поля тяготения, допускающие группу движений G_5

По теореме Фубини, исправленной И. П. Егоровым ([230], стр. 187—189), всякая группа движений G_r $(3 \leqslant r \leqslant 5)$ в V_4 допускает подгруппу G_{r-1}, поэтому V_4 с группой движений G_5 содержится среди V_4, допускающих G_4 (§ 32).

Для дальнейшего исследования является полезным рассмотреть следующие два случая:

1) G_5 содержит в качестве подгруппы нетранзитивную группу G_4,

2) G_5 содержит в качестве подгруппы транзитивную группу G_4.

Разберем эти две возможности отдельно.

Пусть имеет место случай 1), и предположим, что пятый оператор $X_5 = \underset{5}{\xi^{\alpha}}\partial_{\alpha}$. Относительно этого оператора могут иметь место три возможности: A) $\underset{5}{\xi^4} = 0$, B) $\underset{5}{\xi^4} = \lambda = \mathrm{const}$, C) $\underset{5}{\xi^4} = \underset{5}{\xi^4}(x)$. Рассмотрим каждое из этих предположений.

G_5 A. Если имеем $\underset{5}{\xi^4} = 0$, то матрица $(\underset{i}{\xi^{\alpha}})$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4;$ $i = 1, \ldots, 5)$ имеет ранг 3, следовательно, группа G_5 *нетранзитивная* и действует на трехмерном многообразии V_3 или $\overset{*}{V}_3$. В случае V_3, группа G_5, по теореме Фубини ([147], стр. 276), не будет полной группой движений на этом V_3, и оно допускает еще и шестой оператор; приходим к пространствам V_4, допускающим группу движений G_6. В случае, когда группа действует на $\overset{*}{V}_3$ (изотропном), указанная теорема неприменима; следовательно, имеются возможности отыскания таких V_4, которые допускают G_5 на $\overset{*}{V}_3$, и группа является полной на этом многообразии.

G_5 B. Для $\underset{5}{\xi^4} = \lambda = \mathrm{const}$ получаем, что матрица $(\underset{i}{\xi^{\alpha}})$ имеет ранг 4, группа G_5 *транзитивная*. В этом случае приходим к альтернативе: или группа G_5 содержит только одну подгруппу $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, а в случае G_3, действующей на V_2 или $\overset{*}{V}_2$, также и группу $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$, которые являются *нетранзитивными*, или пятый оператор X_5 с тремя первыми операторами также дает G_4, но уже *транзитивную* (так как $\underset{4}{\xi^4} = \lambda \neq 0$).

Вторая возможность приводит, очевидно, к случаю 2).

G_5 C. Этот тип G_5 может возникнуть при рассмотрении нетранзитивной группы G_4 в том случае, если $\underset{4}{\xi^4}$ — функция от координат x^1, x^2, x^3, x^4.

Исследуем случай 2), причем для оператора $X_5 = \underset{5}{\xi}^{\alpha} p_{\alpha}$ опять рассматриваем указанные три возможности.

G_5 D. Имеем G_4 транзитивную и $\underset{4}{\xi}^{4} = 0$; ранг матрицы $(\underset{i}{\xi}^{\alpha})$ равен 4, группа G_5 *транзитивная*. Покажем, что в этом случае G_5 обязательно содержит также и G_4 нетранзитивную. Действительно, возьмем операторы X_1, X_2, X_3, X_5. Их коммутаторы необходимо должны выражаться линейной комбинацией этих же операторов, так как все они имеют компоненту $\underset{i}{\xi}^{4} = 0$.

К этому же типу относятся и G_5 B второго вида, так как они тоже содержат и G_4 транзитивную, и G_4 нетранзитивную. Легко видеть, что сочетание G_4 транзитивной и $\underset{5}{\xi}^{4} = \lambda = \mathrm{const}$ дает этот же тип G_5, так как, взяв за пятый оператор $Y_5 = X_5 - \lambda X_4 \equiv \eta^{\alpha} p_{\alpha}$ (из § 32, когда $\underset{4}{\xi}^{4} = 1$), получаем, что $\eta^4 = 0$, и имеем уже рассмотренный случай.

G_5 E. Этот тип G_5 выделяется при рассмотрении G_4 транзитивной и $\underset{5}{\xi}^{4} = \underset{5}{\xi}^{4}(x)$. Ввиду этого исследуем пространства V_4, допускающие группу движений G_5 типов A, B, C, D, E.

Пусть имеем группу G_5 A. Как уже отмечалось выше, имеет смысл рассматривать только случай G_5 на $\overset{*}{V}_3$. В работе ([260], стр. 215—220) показано, что имеется только один класс V_4, допускающий полную группу G_5 на $\overset{*}{V}_3$, причем метрика такого V_4 в специальной системе координат будет иметь вид:

$$ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + a_{22}\,dx^{2^2} + 2a_{23}\,dx^2\,dx^3 + a_{33}\,dx^{3^2}, \quad (33.1)$$

$$a_{ij} = a_{ij}(x^4); \qquad X_i = p_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

$$X_4 = x^2 p_1 + \varphi p_2 + \psi p_3, \qquad X_5 = x^3 p_1 + \psi p_2 + \nu p_3,$$

где

$$\varphi = -\int \frac{a_{33}}{\Delta}\,dx^4, \qquad \psi = \int \frac{a_{23}}{\Delta}\,dx^4, \qquad \nu = -\int \frac{a_{22}}{\Delta}\,dx^4,$$

$$\Delta = a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2.$$

Группа G_5 B. По определению, такая группа содержит в качестве подгруппы только $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ нетранзитивную, а если $G_3\{X_1, X_2, X_3\}$ действует на V_2, $\overset{*}{V}_2$, также и $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$ нетранзитивную, и для пятого оператора имеем соотношение $\underset{5}{\xi}^4 = \lambda = \mathrm{const}$. Для определения V_4, допускающих G_5 B, можно исходить из результатов § 32. Условие того, что $\underset{5}{\xi}^4 = \mathrm{const} = 0$, позволяет непосредственным интегрированием уравнений Киллинга для указанных пространств определить группу G_5 и искомое V_4.

Начнем определение V_4, допускающих G_5 B, с G_4, действующих на V_3. Так как в пространстве V_4 выбрана полугеодезическая система координат, то из уравнений Киллинга (для $\underset{5}{\xi}^4 = \lambda = \mathrm{const}$) имеем $\partial_4 \underset{5}{\xi}^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Далее в силу того же условия $\underset{5}{\xi}^4 = \mathrm{const}$ и условия, что $\partial_4 \underset{\alpha}{\xi}^i = 0$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ (§ 32), получаем, что коммутатор $[X_i X_5]$ должен быть линейной комбинацией первых четырех операторов, т. е.

$$[X_i X_5] = a_i X_1 + b_i X_2 + c_i X_3 + d_i X_4. \qquad (33.2)$$

Давая в (33.2) i все возможные значения $(i = 1, 2, 3)$, получим выражение для $\partial_2 \underset{5}{\xi}^\alpha$, $\partial_3 \underset{5}{\xi}^\alpha$ и $\partial_1 \underset{5}{\xi}^\alpha$, а зная их, можно проинтегрировать уравнения Киллинга для данного V_4.

Применим эту схему рассуждений к случаю, когда структура группы будет типа G_4 I. Уравнения Киллинга для этого пространства дают (см. § 32):

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_1 \underset{5}{\xi}^3 = 0, \quad a_{13}\partial_2 \underset{5}{\xi}^3 + a_{22}\partial_1 \underset{5}{\xi}^2 = 0,\\
&\lambda\partial_4 a_{13} + a_{13}\partial_3 \underset{5}{\xi}^3 + a_{13}\partial_1 \underset{5}{\xi}^1 + x^1 a_{22}\partial_1 \underset{5}{\xi}^2 = 0,\\
&\lambda\partial_4 a_{22} + 2a_{22}\left(\partial_2 \underset{5}{\xi}^2 + x^1\partial_2 \underset{5}{\xi}^3\right) = 0,\\
&\underset{5}{\xi}^1 a_{22} + \lambda x^1\partial_4 a_{22} + a_{22}\left(\partial_3 \underset{5}{\xi}^2 + x^1\partial_3 \underset{5}{\xi}^3 + x^1\partial_2 \underset{5}{\xi}^2 + {x^1}^2\partial_2 \underset{5}{\xi}^3\right) +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{13}\partial_2 \underset{5}{\xi}^1 = 0,\\
&2x^1 a_{22}\underset{5}{\xi}^1 + \lambda {x^1}^2\partial_4 a_{22} + 2a_{22}\left(x^1\partial_3 \underset{5}{\xi}^2 + {x^1}^2\partial_3 \underset{5}{\xi}^3\right) +\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 2a_{13}\partial_3 \underset{5}{\xi}^1 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (33.3)$$

Но из (33.2) для $i=1,\ 2,\ 3$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_2\underset{5}{\xi}^1=-c_1-d_1x^1,\quad \partial_2\underset{5}{\xi}^2=a_1+c_1x^3,\\
&\partial_2\underset{5}{\xi}^3=b_1+d_1x^3,\quad \partial_3\underset{5}{\xi}^1=-c_2-d_2x^1,\\
&\partial_3\underset{5}{\xi}^2=a_2+c_2x^3,\quad \partial_3\underset{5}{\xi}^3=b_2+d_2x^3,\\
&-\partial_1\underset{5}{\xi}^1+x^3\partial_2\underset{5}{\xi}^1=-c_3-d_3x^1,\\
&-\partial_1\underset{5}{\xi}^2+x^3\partial_2\underset{5}{\xi}^2=a_3+c_3x^3+\underset{5}{\xi}^3,\\
&-\partial_1\underset{5}{\xi}^3+x^3\partial_2\underset{5}{\xi}^3=b_3+d_3x^3.
\end{aligned}\right\}\qquad(33.4)$$

Соотношения (33.3) и (33.4) приводят к выводу, что $d_1=d_2=d_3=0$, т. е. операторы $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_5$ составляют группу и искомая G_5 относится к типу G_5 D, так как она содержит G_4 транзитивную и G_4 нетранзитивную.

Такие пространства будут рассмотрены ниже.

На том же пути аналогичный результат получается и для всех других пространств § 32, за исключением тех случаев, когда группа G_3 $\{X_1,\ X_2,\ X_3\}$ действует на V_2 или $\overset{*}{V}_2$; здесь выделяются две нетранзитивные подгруппы G_4 $\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\}$ и $G_4\{X_1,\ X_2\ X_3,\ X_5\}$, которые, по определению, отвечают случаю G_5 B. Нахождение пятого оператора проводится по указанной схеме. Имеем следующие V_4, допускающие G_5 B из § 32:

$$1)\quad ds^2=\left(\frac{-2\varepsilon kk_{12}}{\alpha\,(k+1)+\beta\,(k-1)}\,e^{-[\alpha\,(k+1)+\beta\,(1-k)]\,x^4}+k_{11}\right)dx^{1^2}+$$
$$+k_{12}\,e^{-[\alpha\,(k+1)+\beta\,(1-k)]\,x^4+kx^1}\,(2dx^1\,dx^2+e^{-x^1}\,dx^{3^2})+k_{44}\,dx^{4^2};\qquad(33.5)$$

$k_{ij},\ k,\ \alpha,\ \beta$ — const; $\varepsilon=0,\pm 1$; $\alpha\,(k+1)+\beta\,(1-k)\neq 0$; $k\neq 1$;

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=x^3p_2-e^{x^1}p_3,$$

$$X_4=\frac{2}{1-k}\,p_1+\frac{2k}{k-1}\,x^2p_2+x^3p_3,$$

$$X_5=(\alpha-\beta)\,p_1+[x^2\,(\alpha+\beta)+\varepsilon e^{-kx^1}]\,p_2+\alpha x^3p_3+p_4.$$

2) $$ds^2 = (2\varepsilon k k_{12} x^4 + k_{11})\, dx^{1^2} + k_{12} e^{kx^1} (2dx^1\, dx^2 + e^{-x^1} dx^{3^2}) + k_{44}\, dx^{4^2}, \tag{33.6}$$

$$k_{ij},\ k - \text{const};\ \varepsilon = 0,\ \pm 1;$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = x^3 p_2 - e^{x^1} p_3,$$

$$X_4 = \frac{2}{1-k}\, p_1 + \frac{2k}{k-1}\, x^2 p_2 + x^3 p_3,\quad X_5 = \varepsilon e^{-kx^1} p_2 + p_4.$$

3) $$ds^2 = (-2\varepsilon k_{12} e^{2x^4} + k_{11})\, dx^{1^2} + k_{12} e^{2x^4 - 2x^1} (2dx^1\, dx^2 + dx^{3^2}) + k_{44}\, dx^{4^2}, \tag{33.7}$$

$$\varepsilon = 0,\ \pm 1;$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = x^3 p_2 - x^1 p_3,$$

$$X_4 = p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3,\quad X_5 = p_1 + \varepsilon e^{2x^1} p_2 + p_4.$$

4) $$ds^2 = (-4k_{12} \varepsilon x^4 + k_{11})\, dx^{1^2} + k_{12} e^{-2x^1} (2dx^1\, dx^2 + dx^{3^2}) + k_{44}\, dx^{4^2}, \tag{33.8}$$

$$\varepsilon = 0,\ \pm 1;$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = x^3 p_2 - x^1 p_3,$$

$$X_4 = p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3,\quad X_5 = \varepsilon e^{2x^1} p_2 + p_4.$$

5) $$ds^2 = (-q\varepsilon k_{12} e^{-2x^4} + k_{11})\, dx^{1^2} + k_{12} e^{qx^1 - 2x^4} \left(2dx^1 dx^2 + \frac{4}{\omega^2} \cos^2 \frac{\omega x^1}{2}\, dx^{3^2} \right) + k_{44}\, dx^{4^2}, \tag{33.9}$$

$$k_{ij},\ q - \text{const},\ \omega = \sqrt{4 - q^2},\ q^2 < 4,\ \varepsilon = 0,\ \pm 1;$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = x^3 p_2 - \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega x^1}{2}\, p_3,$$

$$X_4 = -p_1 + \left(qx^2 + \frac{x^{3^2}}{2} \right) p_2 - \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega x^1}{2} - \frac{q}{2} \right) x^3 p_3,$$

$$X_5 = (2x^2 + \varepsilon e^{-qx^1})\, p_2 + x^3 p_3 + p_4.$$

6) $$ds^2 = (2k_{12} \varepsilon x^4 + k_{11})\, dx^{1^2} + k_{12} e^{qx^1} \left(2dx^1\, dx^2 + \frac{4}{\omega^2} \cos^2 \frac{\omega x^1}{2}\, dx^{3^2} \right) + k_{44}\, dx^{4^2}; \tag{33.10}$$

$$\varepsilon = 0, \pm 1;\ k_{ij},\ q - \text{const},\ \omega = \sqrt{4 - q^2},\ q^2 < 4.$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = x^3 p_2 - \frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega x^1}{2}\, p_3,$$

$$X_4 = -p_1 + \left(qx^2 + \frac{x^{3^2}}{2} \right) p_2 - \left(\frac{\omega}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega x^1}{2} - \frac{q}{2} \right) x^3 p_3,$$

$$X_5 = \varepsilon e^{-qx^1} p_2 + p_4.$$

$$7)\quad ds^2 = k_{33}\,dx^{3^2} + a_{22}(x^4)\,e^{-2x^3}(2dx^1\,dx^4 + dx^{2^2}), \qquad (33.11)$$

$$k_{33} = \text{const};\quad X_1 = p_1,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = x^2p_1 - x^4p_2,$$

$$X_4 = 2x^1p_1 + x^2p_2 + p_3,\quad X_5 = C(x^4)\,e^{2x^3}p_1 + D(x^4)\,p_3 + p_4,$$

где функции C и D подчинены условиям

$$2D = \partial_4 \ln a_{22},\qquad -2a_{22}C = k_{33}\,\partial_4 D.$$

Для пространств (32.7) и (32.8) получим $X_5 = p_4$, но тогда метрика искомых V_4 будет иметь вид

$$ds^2 = ds_0^2\,(x^1,\ x^4) + ds_1^2\,(x^2,\ x^3),$$

где $ds_0^2(x^1,\ x^4)$ — плоская метрика R_2, а $ds_1^2(x^2,\ x^3)$ есть V_2 постоянной кривизны.

В этом случае допускается еще и шестой оператор, кроме $X_5 = p_4$, действующий в R_2, т. е. получаем V_4, допускающие группу движений G_6.

Случаи, когда исходная группа G_4 действует на $\overset{*}{V}_3$, разобраны в работе [260], и они приводят к пространствам с группой G_6.

Отметим также, что пространства, допускающие транзитивную G_5, найденные Г. И. Кручковичем («О движениях в римановых пространствах», Диссертация, гл. IV, МГУ, 1957) и допускающие G_4 I, II, III, у которых G_3 II действует на $\overset{*}{V}_2$, есть частный случай пространств (33.5) ($\varepsilon = 0,\ \alpha = \beta$), (33.7) ($\varepsilon = 0$) и (33.9) ($\varepsilon = 0$).

Перейдем к рассмотрению случая G_5 C. По второй теореме Ли имеем:

$$[X_iX_5] = \lambda_i^k X_k\ (i = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, \ldots, 5),\ \lambda_i^k - \text{const}. \qquad (33.12)$$

Рассмотрим сначала V_4, допускающие G_4 на V_3. Принимая во внимание то, что

$$\underset{i}{\xi}{}^4 = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

из (33.12) имеем

$$\underset{5}{\xi}{}^\alpha\,\partial_\alpha \underset{5}{\xi}{}^4 = \lambda_i^5 \underset{5}{\xi}{}^4 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \qquad (33.13)$$

Кроме того, для полугеодезической системы координат $\partial_4 \underset{5}{\xi}^4 = 0$. Если рассматриваемая группа G_4 имеет подгруппу $G_3\{X_1, X_2, X_3\}$, действующую на V_3, т. е. $|\underset{i}{\xi}^j| \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ и $\lambda_1^5 = \lambda_2^5 = \lambda_3^5 = 0$, то из (33.13) для $i = 1, 2, 3$ и $\partial_4 \underset{5}{\xi}^4 = 0$ получаем, что $\underset{5}{\xi}^4 = \mathrm{const}$, т. е. приходим к рассмотренному выше случаю G_5 B. Из этого можно сделать вывод, что V_4, допускающие группу G_5 C, возможны только в том случае, когда подгруппа G_3 группы G_5 C действует на V_2, $\overset{*}{V}_2$ или же когда по крайней мере одна из постоянных λ_1^5, λ_2^5, λ_3^5 отлична от нуля. Легко заметить, что пространства (32.3), (32.4), (32.8), (32.9) не допускают группу G_5 C, так как из соотношений Якоби (10.18) получаем $\lambda_1^5 = \lambda_2^5 = \lambda_3^5 = 0$, а подгруппы G_3 группы G_5 C имеют $|\underset{i}{\xi}^j| \neq 0$. Остальные пространства из § 32 могут допускать G_5 C. Для определения таких V_4 мы применим ту же схему, что и в случае G_5 B, учитывая, кроме того, еще и соотношения Якоби.

Так, например, для G_4 V (§ 32, (32.5)) из соотношений Якоби следует, что $\lambda_1^3 = \lambda_1^4 = \lambda_1^5 = \lambda_2^3 = \lambda_2^4 = \lambda_2^5 = 0$, и из (33.12) паходим: 159

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{5}{\xi}^1 = A(x^4)\, e^{-\lambda_3^5 (\lambda_1^1 + 1)\, x^1}, \quad \underset{5}{\xi}^2 = \lambda_2^2 x^2 - \lambda_1^2 x^3 - \lambda_4^2, \\
&\underset{5}{\xi}^3 = \lambda_4^1 + \lambda_1^1 x^3 - \lambda_2^1 x^2, \qquad \underset{5}{\xi}^4 = D e^{-\lambda_3^5 x^1}, \quad D = \mathrm{const}.
\end{aligned}\right\} \quad (33.14)$$

Легко видеть, что операторы $\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$ образуют просто-транзитивную группу G_4. Следовательно, существует невырожденное преобразование координат, которое приведет эту G_4 к одному из видов G_4, определенных в § 32. При этом преобразовании координат группа $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ останется или нетранзитивной, тогда получаем случай $G_5 D$, или транзитивной, тогда имеем случай G_5 E, который будет разобран ниже. Точно такой же результат получим и для G_4 IV, VI.

Для пространств (32.7) и других случаев, где подгруппы $G_3\{X_1, X_2, X_3\}$ действуют на V_2 и $\overset{*}{V}_2$, указанное сведение к G_5 D и G_5 E не имеет места, но здесь можно действовать по схеме, разобранной в начале для случая G_5 С.

Для пространств (32.7) и (32.8), как и для G_5 С, получаем G_6, для других пространств получим следующие возможности:

1) $$ds^2 = \left[k_{44}\left(\frac{1-k}{k+1}\right) - 2k_2k_{12}\,e^{-(k+1)\,x^4} + k_{11}\,e^{-2x^4}\right] dx^{1^2} + \\ + k_{12}\,e^{kx^1-(k+1)\,x^4}\,(2dx^1\,dx^2 + e^{-x^1}\,dx^{3^2}) + k_{44}\,dx^{4^2}, \quad (33.15)$$

$$k_{ij},\ k,\ k_2 - \text{const}, \quad k \neq \pm 1;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3p_2 - e^{x^1}p_3,$$

$$X_4 = -\frac{2}{k+1}\,p_1 + \frac{2k}{k-1}\,x^2p_2 + x^3p_3,$$

$$X_5 = e^{x^1}\,(p_1 + x^3p_3 + p_4) + \\ + \left[-\frac{x^{3^2}}{2} + e^{-(k-1)\,x^1}\left(-\frac{k_{44}}{k_{12}\,(k+1)}\,e^{(k+1)\,x^4} + k_2\right)\right] p_2.$$

2) $$ds^2 = \left[k_{44}\left(\frac{k+1}{1-k}\right) - 2k_{12}k_2e^{-(k-1)\,x^4} + k_{11}e^{2x^4}\right] dx^{1^2} + \\ + k_{12}e^{kx^1-(k-1)\,x^4}\,(2dx^1\,dx^2 + e^{-x^1}\,dx^{3^2}) + k_{44}\,dx^{4^2}, \quad (33.16)$$

$$k_{ij},\ k,\ k_2 - \text{const}, \quad k \neq \pm 1; \quad X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3,$$

$$X_3 = x^3p_2 - e^{x^1}\,p_3, \quad X_4 = -\frac{2}{k-1}\,p_1 + \frac{2k}{k-1}\,x^2p_2 + x^3p_3,$$

$$X_5 = e^{-x^1}\,(p_1 + p_4) + e^{-(k+1)\,x^1}\left[\frac{k_{14}}{k_{12}\,(k-1)}\,e^{(k-1)\,x^4} + k_2\right] p_2.$$

3) $$ds^2 = \left[\alpha k_{12}k_{44}p\,(k-1)\,\frac{x^{4^2}}{2} + 2k_{12}\,\alpha k_2\,x^4 + k_{11}\right] dx^{1^2} + \\ + k_{12}e^{kx^1}\,(2dx^1\,dx^2 + e^{-x^1}\,dx^{3^2}) + k_{44}\,dx^{4^2}, \quad (33.17)$$

$$k_{ij},\ p,\ k,\ \alpha,\ k_2 - \text{const}, \quad \alpha = k + \frac{p\,(k-1)}{2} \neq 0, \quad k \neq \pm 1,\ 0;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3p_2 - e^{x^1}p_3,$$

$$X_4 = -\frac{2}{k-1}\,p_1 + \frac{2k}{k-1}\,x^2p_2 + x^3p_3,$$

$$X_5 = e^{-\left[k+\frac{p\,(k-1)}{2}\right]x^1}\left[\frac{k_{44}p\,(k-1)}{2}\,x^4 + k_2\right] p_2 + e^{-\frac{p\,(k-1)}{2}\,x^1}\,p_4.$$

В том же пространстве при $k=-1$ содержится V_4, допускающее G_5C с метрикой

$$ds^2=(-2k_{12}k_2x^4+k_{11})\,e^{2x^4}dx^{1^2}+k_{12}e^{-x^1+2x^4}(2dx^1\,dx^2+\\+e^{-x^1}dx^{3^2})+k_{44}\,dx^{4^2}, \quad (33.18)$$

$$k_{ij},\ k_2 - \mathrm{const};\ X_1=p_2,\quad X_2=p_3,$$

$$X_3=x^3p_2-e^{x^1}p_3,\ X_4=p_1+x^2p_2+x^3p_3,$$

$$X_5=e^{-x^1}(p_1+p_4)+\left(k_2x^1-\frac{k_{44}}{2k_{12}}e^{-2x^4}\right)p_2.$$

Аналогично для других пространств имеем:

1) $$ds^2=[p(p+2)k_{44}x^{4^2}-2k_{12}(p+2)k_2x^4+k_{11}]\,dx^{1^2}+\\+k_{12}e^{-2x^1}(2dx^1\,dx^2+dx^{3^2})+k_{44}\,dx^{4^2}; \quad (33.19)$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=x^3p_2-x^1p_3,$$

$$X_4=p_1+2x^2p_2+x^3p_3,$$

$$X_5=\left(-\frac{k_{44}p}{k_{12}}x^4+k_2\right)e^{(p+2)x^1}p_2+e^{px^1}p_4,\quad p\neq-2;$$

$$k_{ij},\ p-\mathrm{const}.$$

2) $$ds^2=(2ak_{12}x^4+k_{11})\,dx^{1^2}+\\+k_{12}e^{-2x^1}(2dx^1\,dx^2+dx^{3^2})+k_{44}\,dx^{4^2}; \quad (33.20)$$

$$X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=x^3p_2-x^1p_3,$$

$$X_4=p_1+2x^2p_2+x^3p_3,$$

$$X_5=\left(ax^1+\frac{2k_{44}}{k_{12}}x^4\right)p_2+e^{-2x^1}p_4,\quad k_{ij},\ a-\mathrm{const},\quad k_{12}\neq 0.$$

3) $$ds^2=[(p+q)\,pk_{44}x^{4^2}+2k_{12}(p+q)\,k_2x^4+k_{11}]\,dx^{1^2}+\\+k_{12}e^{qx^1}\left(2dx^1\,dx^2+\frac{4}{\omega^2}\cos^2\frac{\omega x^1}{2}dx^{3^2}\right)+k_{44}\,dx^{4^2}; \quad (33.21)$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=x^3p_2-\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2}p_3,$$

$$X_4=-p_1+\left(qx^2+\frac{x^{3^2}}{2}\right)p_2-x^3\left(\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2}-\frac{q}{2}\right)p_3,$$

$$X_5=\left(\frac{pk_{44}}{k_{12}}x^4+k_2\right)e^{-(p+q)x^1}p_2+e^{-px^1}p_4,$$

где k_{ij}, k_2, p, q — const, $p \neq -q$, $\omega = \sqrt{4-q^2}$, $q^2 < 4$.

4) $$ds^2 = (2k_{12}ax^4 + k_{11})\,dx^{1^2} + \\ + k_{12}e^{qx^1}\left(2dx^1\,dx^2 + \frac{4}{\omega^2}\cos^2\frac{\omega x^1}{2}\,dx^{3^2}\right) + k_{44}\,dx^{4^2}; \quad (33.22)$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3p_2 - \frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2}\,p_3,$$

$$X_4 = -p_1 + \left(qx^2 + \frac{x^{3^2}}{2}\right)p_2 - x^3\left(\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega x^1}{2} - \frac{q}{2}\right)p_3,$$

$$X_5 = \left(-\frac{qk_{44}}{k_{12}}x^4 - ax^1\right)p_2 + e^{qx^1}p_4,$$

где k_{ij}, a, k_2, q — const, $q \neq 0$, $\omega = \sqrt{4-q^2}$.

5) $$ds^2 = (-2k_{12}\beta x^4 + k_{11})\,dx^{1^2} + \\ + k_{12}e^{kx^1}(2dx^1\,dx^2 + e^{-x^1}\,dx^{3^2}) + k_{44}\,dx^{4^2}; \quad (33.23)$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3p_2 - e^{x^1}p_3,$$

$$X_4 = -\frac{2}{k-1}\,p_1 + \frac{2k}{k-1}\,x^2p_2 + x^3p_3,$$

$$X_5 = \left(-\frac{kk_{44}}{k_{12}}x^4 + \beta x^1\right)p_2 + e^{kx^1}p_4; \quad k_{ij},\ \beta,\ k \text{ — const},\ k \neq 0.$$

6) $$ds^2 = k_{33}\,dx^{3^2} + a_{22}(x^4)\,e^{-2x^3}(2dx^1\,dx^4 + dx^{2^2}), \quad k_{33} = \text{const}; \quad (33.24)$$

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2p_1 - x^4p_2, \quad X_4 = 2x^1p_1 + x^2p_2 + p_3,$$

$$X_5 = \left(\alpha x^1 + \gamma\frac{x^{2^2}}{2} + A(x^4)\,e^{2x^3}\right)p_1 + (\beta x^2 - \gamma x^2x^4)\,p_2 + \\ + B(x^4)\,p_3 + [(1-2\beta)\,x^4 - \gamma x^{4^2} + \delta]\,p_4, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ — const},$$

$$\partial_4 B = -\frac{2a_{22}A}{k_{33}}, \quad \partial_4 \ln a_{22} = \frac{2(B + \gamma x^4 - \beta)}{(2\beta - 1)\,x^4 - \gamma x^{4^2} + \delta}.$$

Если же подгруппа G_4 действует на $\overset{*}{V}_3$, то, как это показано в работе [260], группа G_5 С не допускается такими пространствами.

Переходим к четвертому возможному типу.

Группа G_5 D, по определению, содержит в качестве подгрупп G_4 $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ транзитивную и $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_5\}$ нетранзитивную. Обе эти группы имеют *одну и ту же* подгруппу $G_3\{X_1, X_2, X_3\}$. Отсюда легко получить алгорифм для нахождения V_4, допускающих G_5 D.

Берем $G_4\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ транзитивную и присоединяем к ней четвертый оператор нетранзитивной группы G_4, имеющей ту же подгруппу G_3, что и исходная G_4 транзитивная. Затем интегрируем уравнения Киллинга для присоединенного оператора и исходного V_4.

Рассмотрим при помощи этого алгорифма случай, когда имеют место неразрешимые группы G_4 VII, VIII.

G_4 VII транзитивная группа содержит подгруппу G_3 VIII $\{X_1, X_2, X_3\}$ и имеет операторы:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = e^{-x^3}(p_1 - x^{2^2} p_2 - 2x^2 p_3), \quad X_2 = p_3, \\ X_3 = e^{x^3} p_2, \ X_4 = p_1 + \varepsilon p_4, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}\right\} \qquad (33.25)$$

Из нетранзитивных G_4 ту же подгруппу G_3 VIII имеет только G_4 VII с операторами:

a) $$X_1 = e^{-x^3}(p_1 x^{2^2} p_2 - 2x^2 p_3), \ X_2 = p_3,$$
$$X_3 = e^{x^3} p_2, \quad X_4 = p_1 \quad (\text{действует на } V_3);$$

b) $$X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2 p_2 + p_3,$$
$$X_3 = (x^{2^2} + \varepsilon e^{\varepsilon x^3})\, p_2 + 2x^2 p_3 - e^{x^3} p_1, \ X_4 = p_1 \ (\text{действует на } \overset{*}{V}_3).$$

Следовательно, здесь нужно присоединить оператор $X = p_1$, который с операторами (33.25) составляет группу.

Таким образом, имеем два пространства:

1) $$ds^2 = 2k_{12}(dx^1\,dx^2 - x^2\,dx^1\,dx^3) + k_{22}(dx^2 - x^2\,dx^3)^2 - \\ - \frac{1}{2} k_{12}\, dx^{3^2} + k_{44}\, dx^{4^2}, \quad k_{ij} = \text{const}; \qquad (33.26)$$

$$X_1 = e^{-x^3}(p_1 - x^{2^2} p_2 - 2x^2 p_3), \quad X_2 = p_3,$$
$$X_3 = e^{x^3} p_2, \quad X_4 = p_1, \quad X_5 = p_4.$$

2) $$ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + k_{22}(e^{-2x^3}\,dx^{2^2} - \varepsilon\,dx^{3^2}) + \\ + 2\varepsilon e^{-x^3}\,dx^2\,dx^4, \quad k_{22} = \text{const}, \ \varepsilon = \pm 1; \qquad (33.27)$$

$$X_1 = p_2, \ X_2 = x^2 p_2 + p_3,$$
$$X_3 = (x^{2^2} + \varepsilon e^{2x^3})\, p_2 + 2x^2 p_3 - e^{x^3} p_1, \ X_4 = p_1, \ X_5 = p_4.$$

Аналогично, проводя это рассуждение для G_4 I — VIII, получаем следующие пространства V_4, допускающие G_5 D:

1) $$ds^2=k_{11}x^4e^{-2\varepsilon x^4}\,dx^{1^2}+ \\ +k_{12}e^{-2\varepsilon x^4}\,(2dx^1\,dx^2+dx^{3^2})+k_{44}\,dx^{4^2}, \quad (33.28)$$
$$k_{ij}=\text{const}, \quad \varepsilon=0,1;$$
$$X_i=p_i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \quad X_4=-x^3p_2+x^1p_3,$$
$$X_5=\varepsilon x^3p_3+\varepsilon x^1p_1+(\varepsilon x^2+x^1)\,p_2+p_4.$$

2) $$ds^2=k_{11}\,(dx^{1^2}+\sin^2x^1\,dx^{2^2})+ \\ +k_{33}\,(\cos x^1\,dx^2+dx^3)^2+k_{44}\,dx^{4^2}, \quad k_{ij}=\text{const}; \quad (33.29)$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=\cos x^2\,p_1-\operatorname{ctg} x^1\,\sin x^2\,p_2+\frac{\sin x^2}{\sin x^1}\,p_3,$$
$$X_3=\partial_2X_2, \quad X_4=p_3, \quad X_5=p_4.$$

3) $$ds^2=2dx^1\,dx^4+k_{22}\,(\cos^2x^3\,dx^{2^2}+dx^{3^2})+ \\ +2\sin x^3\,dx^2\,dx^4, \quad k_{22}=\text{const}; \quad (33.30)$$
$$X_1=p_2,\ X_2=\sec x^3\cos x^2\,p_1-\operatorname{tg} x^3\cos x^2\,p_2+\sin x^2\,p_3,$$
$$X_3=\partial_2X_2,\ X_4=p_1,\ X_5=p_4.$$

4) $$ds^2=2k_{13}e^{-cx^4}\,dx^1\,dx^3+k_{22}e^{-2cx^4}\,(dx^2+x^1\,dx^3)^2+ \\ +k_{44}\,dx^{4\,2};\ c,\ k_{ij}-\text{const}; \quad (33.31)$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^3p_2,$$
$$X_4=-x^1p_1+x^3p_3, \quad X_5=c\,(x^1p_1+x^2p_2)+p_4.$$

5) $$ds^2=k_{11}\,e^{-2x^4}(dx^{1^2}+dx^{3^2})+k_{22}e^{-4x^4}\,(dx^2+x^1\,dx^3)^2+ \\ +k_{44}\,dx^{4^2}, \quad k_{ij}=\text{const}; \quad (33.32)$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^3p_2,$$
$$X_4=-x^3p_1+\frac{x^{3^2}-x^{1^2}}{2}\,p_2+x^1p_3, \quad X_5=x^1p_1+2x^2p_2+x^3p_3+p_4.$$

6) $$ds^2=k_{11}(dx^{1^2}+dx^{3^2})+k_{22}\,(dx^2+x^1\,dx^3)^2+ \\ +k_{44}\,dx^{4^2}, \quad k_{ij}=\text{const}; \quad (33.33)$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1+x^3p_2,$$
$$X_4=-x^3p_1+\frac{x^{3^2}-x^{1^2}}{2}\,p_2+x^1p_3, \quad X_5=p_4.$$

7) $$ds^2 = k_{11}\,dx^{1^2} + 2k_{23}e^{-(1+\alpha)\,x^4+x^1}\,dx^2\,dx^3 + k_{44}\,dx^{4^2}, \tag{33.34}$$

$$k_{ij},\ \alpha - \text{const},\ \alpha \neq 0;$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = -p_1 + x^2p_2,$$
$$X_4 = -p_1 + x^3p_3,\ X_5 = (\alpha+1)\,p_1 + p_4.$$

8) $$ds^2 = k_{11}\,dx^{1^2} + k_{22}e^{-2\alpha x^4+2x^1}\,(dx^{2^2} + dx^{3^2}) + {} + k_{44}\,dx^{4^2},\ \alpha,\ k_{ij} - \text{const}; \tag{33.35}$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = -p_1 + x^2p_2 + x^3p_3,$$
$$X_4 = -x^3p_2 + x^2p_3,\ X_5 = \alpha p_1 + p_4.$$

9) $$ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + k_{22}e^{-x^1+\alpha x^4}(dx^{2^2} + dx^{3^2}),\ k_{22} = \text{const}; \tag{33.36}$$

$$X_1 = p_2,\quad X_2 = p_3,\quad X_3 = 2p_1 + x^2p_2 + x^3p_3,$$
$$X_4 = -x^3p_2 + x^2p_3,\ X_5 = \alpha p_1 + p_4.$$

10) $$ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + k_{23}e^{-x^1+\alpha x^4}\,dx^2\,dx^3,\ k_{23} = \text{const}; \tag{33.37}$$

$$X_1 = p_2,\ X_2 = p_3,\ X_3 = p_1 + x^3p_3,$$
$$X_4 = p_1 + x^2p_2,\ X_5 = \alpha p_1 + p_4.$$

11) $$ds^2 = k_{11}e^{-2bx^4}\,dx^{1^2} + 2k_{23}e^{-(k+\varepsilon)\,x^1}\,dx^2\,dx^3 + k_{44}\,dx^{4^2}, \tag{33.38}$$

$$k_{ij},\ k,\ b - \text{const},\ \varepsilon = 0,\ 1;$$
$$X_i = p_i\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ X_4 = x^2p_2 - x^3p_3,$$
$$X_5 = bx^1p_1 + \varepsilon x^2p_2 + kx^3p_3 + p_4.$$

12) $$ds^2 = k_{12}e^{-2k\,x^4}\,(2dx^1\,dx^2 + dx^{3^2}) + {} + k_{22}e^{-2\varepsilon x^4}\,dx^{2^2} + k_{44}\,dx^{4^2}, \tag{33.39}$$

$$2k = b + \varepsilon,\ \ \varepsilon = 0,\ 1,\ k_{ij},\ k,\ b - \text{const};$$
$$X_i = p_i\ (i = 1,\ \ 2,\ \ 3),\qquad X_4 = -x^3p_1 + x^2p_3,$$
$$X_5 = bx^1p_1 + \varepsilon x^2p_2 + kx^3p_3 + p_4.$$

13) $$ds^2 = k_{11}e^{-x^4}\,dx^{1^2} + k_{12}e^{-2x^4}\,(2dx^1\,dx^2 + dx^{3^2}) + {} + k_{44}\,dx^{4^2},\ k_{ij} = \text{const}; \tag{33.40}$$

$$X_i = p_i\ (i = 1,\ \ 2,\ \ 3),\qquad X_4 = -x^1p_3 + x^3p_2,$$
$$X_5 = x^1p_1 + 3x^2p_2 + 2x^3p_3 + p_4.$$

$$14)\ ds^2 = k_{11}e^{-2bx^4}\,dx^{1^2} + k_{22}e^{-2kx^4}\,(dx^{2^2} + dx^{3^2}) + \\ + k_{44}\,dx^{4^2}, \quad k_{ij},\ b,\ k - \mathrm{const}; \qquad (33.41)$$

$$X_i = p_i\ (i = 1,\ 2,\ 3), \quad X_4 = -x^3p_2 + x^2p_3, \\ X_5 = bx^1p_1 + k\,(x^2p_2 + x^3p_3) + p_4.$$

Переходим к рассмотрению последнего возможного случая.

Если V_4 допускает группу G_5 E, то, по определению, V_4 допускает и просто-транзитивную группу $G_4\ \{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\}$; поэтому искомые V_4 находятся среди V_4, указанных в § 32. Пусть $X_5 = \underset{5}{\xi}^\alpha p_\alpha\ (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — пятый оператор G_5 E. По второй теореме Ли имеем:

$$[X_\alpha X_5] = \lambda^a_\beta X_a \quad (a = 1,\ \ldots,\ 5;\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad \lambda^a_\beta = \mathrm{const}. \qquad (33.42)$$

Пятый оператор можно определять по следующей схеме:

1) записываем тождества Якоби: $[[X_iX_k]\,X_5] + [[X_kX_5]\,X_i] + [[X_5X_i]\,X_k] = 0$ и, сравнивая коэффициенты при X_i, определяем все возможные константы λ^a_β;

2) по полученным уравнениям структуры, которые линейными подстановками сводятся к наиболее простому виду, определяем $\underset{5}{\xi}^\alpha$ и интегрируем для данного V_4 уравнения Киллинга; отсюда находим вид операторов и искомой метрики. Так, например, для G_4 V (§ 33) из соотношений Якоби следует: $\lambda^3_1 = \lambda^4_1 = \lambda^5_1 = \lambda^3_2 = \lambda^4_2 = \lambda^5_2 = 0$.

Далее из (33.42) при $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ для $\underset{5}{\xi}^4$ получаем:

$$\partial_2\underset{5}{\xi}^4 = \partial_3\underset{5}{\xi}^4 = 0, \quad -\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \lambda^4_3 + \lambda^5_3\underset{5}{\xi}^4, \quad a\partial_1\underset{5}{\xi}^4 = \lambda^4_4 + \lambda^5_4\underset{5}{\xi}^4. \qquad (33.43)$$

Дальнейшее рассмотрение разобьем на четыре случая:

1) $\lambda^5_3 = \lambda^5_4 = 0$, 2) $\lambda^5_3 = 0$, $\lambda^5_4 \neq 0$,

3) $\lambda^5_3 \neq 0$, $\lambda^5_4 \neq 0$, 4) $\lambda^5_3 \neq 0$, $\lambda^5_4 = 0$.

Если мы имеем случаи 1) и 2), то, используя соотношения Якоби, получаем $\lambda^4_3 = \lambda^4_4 = 0$, т. е. $\underset{5}{\xi}^4 = \mathrm{const}$ (так как для полугеодезической системы координат $\partial_4\underset{5}{\xi}^4 = 0$); такие группы были рассмотрены выше.

Если мы имеем случаи 3) и 4), то получаем $\lambda_4^5 = -\alpha\lambda_3^5$. Далее линейной подстановкой (имея в виду тождества Якоби)

$$\left.\begin{aligned}
&Y_1 = \lambda_4^1 X_1 + \lambda_4^2 X_2, \quad Y_2 = -\lambda_4^2 X_1 + \lambda_4^1 X_2, \\
&\qquad\qquad Y_3 = X_3, \quad Y_4 = X_4, \\
&Y_5 = -\frac{1}{(\alpha\lambda_3^5)^2+1}(-\lambda_4^2 X_1 + \lambda_4^1 X_2) - \\
&\quad -\frac{\alpha\lambda_3^5}{1+(\alpha\lambda_3^5)^2}(\lambda_4^1 X_1 + \lambda_4^2 X_2) - \lambda_1^1 X_3 - \lambda_1^2 X_4 + X_5
\end{aligned}\right\} \tag{33.44}$$

приводим структуру (33.42) к виду

$$[Y_1 Y_5] = [Y_2 Y_5] = 0, \qquad [Y_3 Y_5] = \lambda_3^5 Y_5, \qquad [Y_4 Y_5] = -\alpha\lambda_3^5 Y_5.$$

Однако для пятого оператора, определенного отсюда, и из уравнений Киллинга получаем вырожденные метрики.

Для других пространств (§ 32), рассуждая аналогично, имеем следующие V_4, допускающие G_5 типа E:

$$1)\ ds^2 = k_{11} e^{x^4} dx^{1^2} + 2k_{13} e^{-\frac{x^4}{2}} dx^1 dx^3 +$$
$$+ k_{22} e^{-x^4} (dx^2 + x^1 dx^3)^2 + k_{33} e^{-2x^4} dx^{3^2} + k_{44} dx^{4^2}, \tag{33.45}$$

$$k_{ij} - \text{const}, \quad k_{13} - k_1 k_{22} = 0, \quad k_{11} + k_3 k_{22} = 0,$$
$$k_1 k_{11} + 4k_3 k_{13} = 0, \ k_1 k_{13} + 4k_3 k_{33} + 4k_{44} = 0;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^3 p_2,$$
$$X_4 = -\frac{1}{2} x^1 p_1 + \frac{1}{2} x^2 p_2 + x^3 p_3 + p_4,$$

$$X_5 = (-x^2 - x^1 x^3 + k_1 e^{\frac{1}{2} x^4}) p_1 +$$
$$+ (x^2 x^3 - x^1 e^{2x^4} k_3) p_2 + (x^{3^2} + k_3 e^{2x^4}) p_3 + 2x^3 p_4.$$

$$2)\ ds^2 = k_{11} e^{4x^4} dx^{1^2} + 2k_{13} e^{x^4} dx^1 dx^3 + k_{22} e^{2x^4} (dx^2 +$$
$$+ x^1 dx^3)^2 + k_{33} e^{-2x^4} dx^{3^2} + k_{44} dx^{4^2}, \tag{33.46}$$

$$k_{ij}, k_1, k_3 - \text{const}, \ 4k_1 k_{11} + k_3 k_{13} + k_{44} = 0, \ 4k_1 k_{13} + k_3 k_{33} = 0,$$
$$k_{33} + k_1 k_{22} = 0, \ k_{13} - k_3 k_{22} = 0;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^3 p_2,$$
$$X_4 = -2x p_1 - x^2 p_2 + x^3 p_3 + p_4,$$
$$X_5 = (x^{1^2} + k_1 e^{-4x^4}) p_1 - x^1 e^{-x^4} k_3 p_2 + (x^2 + k_3 e^{-x^4}) p_3 - x^1 p_4.$$

$$3)\ ds^2 = k_{11}\, dx^{1^2} + 2k_{13}e^{-x^4}\, dx^1\, dx^3 + \\ + k_{22}e^{-2\alpha x^4+2x^1}\, dx^{2^2} + k_{44}\, dx^{4^2}, \qquad (33.47)$$

$$k_{ij}, k_1 - \text{const}, \quad \alpha k_{11} + k_3k_{13} = 0, \quad k_3k_{13} - qk_{44} = \alpha q + 1 = 0, \\ k_3 = \pm 1, \ q \neq 0;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1 + x^2p_2, \\ X_4 = \alpha p_1 + x^3p_3 + p_4, \quad X_5 = e^{-qx^1}(\alpha p_1 + k_3e^{x^4}p_3 + p_4).$$

$$4)\ ds^2 = k_{11}\, dx^{1^2} + 2k_{12}e^{-x^4}\, dx^1\, dx^2 + 2k_{13}\, dx^1\, dx^3 + \\ + k_{33}\, dx^{3^2} + k_{44}\, dx^{4^2}, \qquad (33.48)$$

$$k_{ij} - \text{const}, \ k_1k_{13} + k_3k_{33} = k_1k_{11} + k_{12} + k_3k_{13} = k_{11}k_{12} + \\ + k_1k_{12} = k_{44} - k_2k_{12} = 0, \ k_2 = \pm 1;$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = -p_1, \\ X_4 = x^2p_2 + p_4, \quad X_5 = e^{-x^1}(k_1p_1 + k_2e^{x^4}p_2 + k_3p_3 + p_4).$$

$$5)\ ds^2 = 2k_{12}\, dx^1\, dx^2 + [k_{22} - 2k_{23}x^4 + (k_{33} - k_{12})\, x^{4^2}]\, dx^{2^2} + \\ + 2\,[k_{23} + (k_{12} - k_{33})\, x^4]\, dx^2\, dx^3 + k_{33}\, dx^{3^2} + k_{44}\, dx^{4^2}, \\ k_{ij}, \ q, \ k_i - \text{const}; \quad (33.49)$$

$$X_i = p_i \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 = x^2p_3 - x^3p_1 + p_4, \\ X_5 = e^{qx^2}[(k_1 - k_3x^4)\, p_1 + k_3p_3 + p_4];$$

$$k_3k_{12} - qk_{44} = qk_3k_{33} - k_{33} + k_{12} = \\ = k_{23} - q\,(k_1k_{12} + k_3k_{23}) = 0, \ k_{12} \neq k_{33}, \ q \neq 0.$$

$$6)\ ds^2 = k_{11}dx^{1^2} + 2k_{13}\,(-x^4dx^1dx^2 + dx^1dx^3) + k_{22}dx^{2^2} + \\ + k_{44}dx^{4^2}, \quad (33.50)$$

$$k_{22} = \pm k_{13}, \quad k_{13} = \pm k_{44};$$

$$X_i = p_i\ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 = x^2p_3 + p_4, \\ X_5 = e^{-x^1}[p_4 \pm (p_2 + x^4p_3)].$$

Этим завершается классификация многообразий V_4, допускающих в качестве своей *полной* группы группу движений G_5. Для реального поля тяготения необходимо для каждой из полученных метрик потребовать выполнение условия $|g_{\alpha\beta}| < 0$.

Классификация V_4, допускающих группы движений G_6 и G_7, может быть проведена тем же методом, а число возникающих типов такого рода пространств V_4 невелико. Что же касается V_4, допускающих группы движения G_8 в качестве полной группы, то они не могут в точке допускать сигнатуру метрики вида $(- - - +)$ и, следовательно, не могут отвечать какому-либо реальному полю тяготения.

Задачи

1. Пространство, определенное метрикой

$$ds^2 = 2dx^1\,dx^4 + e^{-x^1}(dx^{2^2} \pm dx^{3^2}),$$

является *субпроективным* пространством. Только оно допускает группу G_6 на V_3 ([260], стр. 219).

2. Пространство, определенное метрикой

$$ds^2 = 2dx^1 dx^4 + x^{4^2}\,dx^{2^2} + 2dx^2\,dx^3,$$

допускает транзитивную группу движений G_8. Это V_4 — симметрическое, эйнштейново ($R_{\alpha\beta} = 0$), двукратно-проективное пространство, вполне гармоническое с двумя абсолютно параллельными векторными полями. Оно не может отвечать никакому реальному полю тяготения, так как имеет в точке сигнатуру метрики вида $(- - + +)$.

ГЛАВА VI

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

§ 34. Конформное отображение римановых пространств

Если заданы два римановых пространства V_n с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$ и $\overset{*}{V}_n$ с тензором $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x)$, причем

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x) = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}(x), \quad \sigma = \sigma(x), \tag{34.1}$$

то будем говорить, что между V_n и $\overset{*}{V}_n$ имеется *конформное соответствие* и что эти два многообразия *конформны*; соотношение (34.1) является необходимым и достаточным условием конформности V_n и $\overset{*}{V}_n$. Геометрический смысл этого определения заключается в том, что если имеет место (34.1), то в точках V_n и $\overset{*}{V}_n$, имеющих одинаковые координаты, длины векторов с компонентами dx^α различаются множителем, зависящим только от выбора точки, а из формулы (2.4) следует, что углы между двумя соответствующими направлениями в соответствующих точках равны — *отображение* V_n на $\overset{*}{V}_n$ *конформное*.

Пользуясь (34.1), легко установить зависимость между контравариантными компонентами метрических тензоров, коэффициентами римановых связностей, тензорами кривизны и т. д.

Непосредственно из определения $g^{\alpha\beta}$ и формулы (34.1) получаем:

$$\overset{*}{g}^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma} g^{\alpha\beta}. \tag{34.2}$$

Из формул (3.1) и (3.2), определяющих символы Кристоффеля первого и второго рода, и формул (34.1), (34.2) следуют соотношения

$$\overset{*}{\Gamma}_{\alpha,\,\beta\gamma} = e^{2\sigma}(\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} + g_{\alpha\beta}\,\sigma_{,\gamma} + g_{\alpha\gamma}\,\sigma_{,\beta} - g_{\beta\gamma}\,\sigma_{,\alpha}), \qquad (34.3)$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\sigma_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\sigma_{,\beta} - g_{\beta\gamma}g^{\alpha\tau}\,\sigma_{,\tau}, \qquad (34.4)$$

где $\sigma_\alpha \equiv \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha} \equiv \sigma_{,\alpha}$ ([77], стр. 112). Для того чтобы установить зависимость между тензорами кривизны пространств V_n и $\overset{*}{V}_n$, достаточно в формуле (5.7) заменить $g_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}$ через $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\Gamma}_{\sigma,\alpha\beta}$, пользуясь выражениями (34.1), (34.2) и (34.3), и выразить правую часть через σ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Эти несложные выкладки приводят к выражению

$$e^{-2\sigma}\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} - \\ - g_{\beta\delta}\sigma_{\alpha\gamma} + \Delta_1\sigma\,(g_{\alpha\delta}\,g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}\,g_{\beta\delta}), \qquad (34.5)$$

где для краткости введено обозначение

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{,\alpha\beta} - \sigma_{,\alpha}\,\sigma_{,\beta} \qquad (\sigma_\alpha = \sigma_{,\alpha}),$$

а $\Delta_1\sigma$ — первый оператор Бельтрами, определяемый формулой (3.18). Отсюда, производя свертывание в (34.5) по индексам α, δ с тензором $\overset{*}{g}{}^{\alpha\delta}$, определяемым (34.2), получим соотношение, связывающее тензоры Риччи отображаемых пространств:

$$\overset{*}{R}_{\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{g}{}^{\alpha\delta}\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\gamma} + (n-2)\,\sigma_{\beta\gamma} + [\Delta_2\sigma + (n-2)\,\Delta_1\sigma]\,g_{\beta\gamma}, \qquad (34.6)$$

где $\Delta_2\sigma$ — второй оператор Бельтрами (см. (3.18)). Производя еще одно свертывание, получим, наконец, формулу, устанавливающую зависимость между скалярными кривизнами V_n и $\overset{*}{V}_n$:

$$\overset{*}{R} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{g}{}^{\beta\gamma}\overset{*}{R}_{\beta\gamma} = e^{-2\sigma}\,[R + 2(n-1)\,\Delta_2\sigma + (n-1)(n-2)\,\Delta_1\sigma]. \qquad (34.7)$$

Наличие в правой части этого равенства целочисленных коэффициентов приводит к необходимости специального рассмотрения случаев $n = 1$ и $n = 2$, но оба эти предположения приводят к тривиальным выводам. Случай

$n=1$, очевидно, не представляет интереса, а $n=2$ также исключается из рассмотрения, так как любые бинарные квадратичные формы при любой сигнатуре приводятся к виду $\lambda(e_1\,dx^{1^2}+e_2\,dx^{2^2})$, $e_1, e_2=\pm 1$, и, следовательно, любые два V_2 конформны друг другу ([147], стр. 477), если их сигнатура одинакова. Конформное соответствие устанавливается, конечно, на вещественном пути. Ввиду этого будем предполагать, что $n>2$.

Для изучения конформных римановых пространств полезно ввести специальный *тензор конформной кривизны*, введенной в рассмотрение Вейлем ([149], стр. 384—411).

Для определения этого тензора заметим, что в силу (34.1) равенство (34.7) можно также записать в виде:

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{R}=[R+2(n-1)\Delta_2\sigma+(n-1)(n-2)\Delta_1\sigma]\,g_{\alpha\beta}. \qquad (34.8)$$

Исключая из (34.6) и (34.8) второй оператор Бельтрами $\Delta_2\sigma$, найдем:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{n-2}(\overset{*}{R}_{\alpha\beta}-R_{\alpha\beta})-$$
$$-\frac{1}{2(n-1)(n-2)}(\overset{*}{R}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}-Rg_{\alpha\beta})-\frac{1}{2}\Delta_1\sigma g_{\alpha\beta}. \qquad (34.9)$$

Если, пользуясь (34.2), поднять в (34.5) один индекс, то зависимость между смешанными компонентами тензоров кривизны будет выражаться соотношением

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}+\delta^{\alpha}_{\delta}\sigma_{\beta\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}\sigma_{\beta\delta}+g^{\alpha\nu}(g_{\beta\gamma}\sigma_{\nu\delta}-g_{\beta\delta}\sigma_{\nu\gamma})+$$
$$+\Delta_1\sigma(\delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}). \qquad (34.10)$$

Введем теперь в рассмотрение геометрический объект

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\overset{\text{def}}{=}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}+\frac{1}{n-2}(\delta^{\alpha}_{\gamma}R_{\beta\delta}-\delta^{\alpha}_{\delta}R_{\beta\gamma}+R^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}-R^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma})+$$
$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}-\delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}), \qquad (34.11)$$

который в силу своей конструкции является тензором; назовем его тензором *конформной кривизны*. Нетрудно убедиться, что (см. задачу 3 § 5) *в любом V_3 тензор конформной кривизны равен нулю.*

Теперь из (34.10), если исключить тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ при помощи (34.9), приходим к соотношению, характерному для римановых многообразий, находящихся в конформном соответствии:

$$\overset{*}{C}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}. \tag{34.12}$$

Задачи

1. Показать, что если обозначить

$$R_{\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} R_{\beta\gamma,\delta} - R_{\beta\delta,\gamma} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{\beta\delta}R_{,\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{,\delta}),$$

$$R^{\sigma}{}_{\gamma\delta} = g^{\sigma\alpha}R_{\alpha\gamma\delta},$$

то для ковариантной производной тензора конформной кривизны имеют место соотношения

$$C^{\alpha}{}_{\beta\,(\gamma\delta,\sigma)} = \frac{1}{n-2}(R_{\beta\,[\delta\sigma}\delta^{\alpha}_{\gamma]} + g_{\alpha\,[\delta}R^{\alpha}{}_{\gamma\sigma]}). \tag{34.13}$$

2. Показать также, что

$$R^{\sigma}{}_{\sigma\alpha} = 0, \quad C^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\sigma} = \frac{n-3}{n-2}R_{\alpha\beta\gamma}. \tag{34.14}$$

3. Для того чтобы V_3 можно было конформно отобразить на S_3, необходимо и достаточно, чтобы тензор

$$R_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{([58], стр. 80).} \tag{34.15}$$

4. Для того чтобы V_n $(n > 3)$ было конформно S_n, необходимо и достаточно, чтобы

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad \text{([58], стр. 80).} \tag{34.16}$$

5. Показать при $n > 2$, что наиболее общее конформное отображение евклидова пространства на самого себя может быть представлено как произведение инверсий относительно гиперсферы, движений и преобразований подобия ([14], стр. 375, 376).

§ 35. Конформное отображение римановых пространств на пространства Эйнштейна

Вопрос о конформном отображении римановых пространств на пространства Эйнштейна является естественным обобщением вопроса о конформно-плоских римановых многообразиях.

Он был поставлен и в основном решен Бринкманом [70], [71], [73] и рассматривался затем рядом других авторов [113], [114], [129]–[133], [161], [174], [179].

Будем далее предполагать, что $\overset{*}{V}_n$ является пространством Эйнштейна и $n > 3$. Следовательно,

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = \frac{\overset{*}{R}}{n} \overset{*}{g}_{\alpha\beta}, \qquad \overset{*}{R} = \text{const}. \tag{35.1}$$

Предварительно перепишем соотношения (34.6) и (34.7) в той форме, которая получится, если ввести в рассмотрение тензор

$$\omega_{\alpha\beta} = \sigma_{,\alpha\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \frac{1}{2}\Delta_1\sigma g_{\alpha\beta} \tag{35.2}$$

и скаляр

$$\omega = g^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}.$$

Тогда из (34.6) следует, что

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + (n-2)\,\omega_{\alpha\beta} + \omega g_{\alpha\beta} \tag{35.3}$$

и, следовательно,

$$e^{2\sigma}\overset{*}{R} = R + 2(n-1)\,\omega. \tag{35.3'}$$

Так как тензор Риччи пространства Эйнштейна удовлетворяет условию (35.1), то из (35.3) получим соотношение

$$\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2(n-1)} g_{\alpha\beta}\right) = \frac{\overset{*}{R}e^{2\sigma}}{2n(n-1)} g_{\alpha\beta}. \tag{35.4}$$

Чтобы получить искомые дифференциальные уравнения в более удобной форме, обозначим второе слагаемое левой части (35.4) через $\tau_{\alpha\beta}$ так, что при этом тензор

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2(n-1)} g_{\alpha\beta}\right).$$

Тогда (35.4) вследствие (35.2) можно записать при помощи уравнений

$$\sigma_{,\alpha\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \nu g_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}, \tag{35.5}$$

где

$$\nu = \frac{1}{2}\Delta_1\sigma - \frac{\overset{*}{R}}{2n(n-1)} e^{2\sigma}, \qquad \overset{*}{R} = \text{const}. \tag{35.6}$$

Эту систему можно представить в более удобной форме, если записать при помощи (35.5) и (35.6) производную скаляра ν в виде:

$$\nu_{,\alpha} = \nu\sigma_{,\alpha} + \sigma_{,\varrho}\tau^{\varrho}_{\alpha}. \qquad (35.7)$$

Если скаляры σ и ν будут удовлетворять уравнениям (35.5) и (35.7), то и (35.6) будет удовлетворено такими σ и ν при некотором постоянном $\overset{*}{R}$. В (35.5) и (35.6) $\sigma_{,\alpha}$, по определению, *градиентный* вектор. Можно, однако, вместо системы уравнений (35.5), (35.7) рассматривать систему

$$\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_\alpha\sigma_\beta + \nu g_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}, \qquad (35.8)$$

$$\nu_\alpha = \nu\sigma_\alpha + \sigma_\beta\tau^{\beta}_{\alpha}, \qquad (35.9)$$

где σ_α уже необязательно градиентное векторное поле, а скаляр ν произвольный. В самом деле, если из (35.8) найдем вектор σ_α, то он, очевидно, должен удовлетворять условию

$$\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_{\beta,\alpha} = 0,$$

т. е. будет выполняться условие градиентности, и поэтому можно будет положить $\sigma_\alpha = \sigma_{,\alpha}$.

После этого ν и σ будут удовлетворять (35.5) и (35.7). Функция σ определяется при заданных компонентах $\sigma_{,\alpha}$ с точностью до *несущественной* постоянной. Для того чтобы конформное отображение V_n на $\overset{*}{V}_n$ было возможно, необходимо, чтобы система уравнений (35.8), (35.9) была совместна. Наложим условия интегрируемости на уравнения (35.8) и для этого продифференцируем их еще раз ковариантно, проальтернируем по индексам дифференцирования и применим тождества Риччи (5.13). Тогда, используя (35.8) и (35.9), получим:

$$\sigma^{\varrho}C_{\varrho\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma}, \qquad (35.10)$$

где $C_{\varrho\alpha\beta\gamma}$ — тензор конформной кривизны, определяемый формулой (34.11), который можно записать также в виде:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha\delta}\tau_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}\tau_{\beta\delta} + g_{\beta\gamma}\tau_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}\tau_{\alpha\gamma}, \qquad (35.11)$$

а

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \tau_{\alpha\beta,\gamma} - \tau_{\alpha\gamma,\beta}, \qquad \sigma^\alpha = g^{\alpha\varrho}\sigma_\varrho. \qquad (35.12)$$

Система будет совместна, с максимальным произволом в решении, в том случае, если условие интегрируемости (35.10) удовлетворяется тождественно при любых σ^ϱ. Но это означало бы, что коэффициенты при σ^ϱ тождественно равны нулю: $C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$, и следовательно, $S_{\alpha\beta\gamma}=0$, что приводит к *конформно-плоским* $\overset{*}{V}_n$ (см. задачи 3, 4 § 34). Отбрасывая этот тривиальный случай, необходимо предположить, что (35.10) выполняется не тождественно и, следовательно, кроме этих уравнений, необходимо рассматривать еще систему условий, которые получатся, если (35.10) дифференцировать ковариантно. Этот процесс последовательного дифференцирования получаемых условий совместности нужно продолжать до тех пор, пока он или приведет к противоречию, или оборвется, так как последующие условия обращаются в тождества в силу предыдущих.

Как второй шаг в процессе нахождения полного ряда условий совместности, продифференцируем ковариантно условия совместности (35.10) и упростим полученные выражения при помощи уравнений исходной системы (35.8), (35.9). Тогда вторая серия условий совместности будет иметь вид:

$$\sigma^\varrho (C_{\varrho\alpha\beta\gamma,\delta}+g_{\varrho\delta}S_{\alpha\beta\gamma})-\nu C_{\delta\alpha\beta\gamma}=S_{\alpha\beta\gamma,\delta}-\tau_{\varrho\delta}C^\varrho{}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{35.13}$$

Если заметить, что $\tau_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не зависят от неизвестных σ_α и ν, то легко видеть, что при последующих дифференцированиях (35.13), продолженных как угодно далеко, и при использовании той же замены $\sigma_{\alpha,\,\beta}$ и $\nu_{,\alpha}$ через их выражения из уравнений основной системы получим, что все последующие серии условий совместности также будут иметь структуру

$$\sigma^\varrho A_\varrho-\nu B=T, \tag{35.14}$$

где A_ϱ, B, T — тензоры валентности $q+4$, $q+3$, $q+3$ соответственно. Так, полагая $q=0$, 1, получим или (35.10), или (35.13). Нетрудно установить рекуррентные формулы, позволяющие по q-м условиям совместности получать $(q+1)$-е. Их можно получить, если еще раз продифференцировать (35.14). Если искомую $(q+1)$-ю серию снабдить коэффициентами $\widetilde{A}^\varrho$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{T}$, то

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{A}^\varrho &= A^\varrho{}_{,\pi} + \delta^\varrho_\pi T - B\tau^\varrho_\pi, \\ \widetilde{B} &= B_{,\pi} + A_\pi, \\ \widetilde{T} &= T_{,\pi} - A^\varrho \tau_{\varrho\pi}. \end{aligned}\right\} \tag{35.15}$$

Таким образом, приходим к выводу: *для того чтобы V_n конформно отображалось на пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$, совокупность всех серий условий совместности* (35.14) *должна образовывать систему уравнений, совместных относительно σ_α и ν.*

В общем случае V_n не конформно к пространству Эйнштейна; только что доказанная теорема дает необходимые условия для существования конформного соответствия. Для того чтобы получить систему необходимых и достаточных условий, обозначим q-ю серию условий совместности (35.14) через S_q и рассмотрим всю систему условий совместности

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_p,\ \ldots \tag{35.16}$$

Если, начиная с некоторого номера, эта система становится несовместной относительно неизвестных σ_α и ν, то соответствующие V_n не допускают конформного отображения на пространство Эйнштейна. Таким образом, V_n, допускающим такое отображение, отвечает тот случай, когда, начиная с некоторого номера p, любое решение для $S_0, \ldots, S_p$ будет также решением S_{p+1}. Покажем предварительно, что имеет место утверждение: *если система* (35.16) *до номера p имеет только r линейно независимых решений и все они удовлетворяют условиям S_{p+1}, то система дифференциальных уравнений* (35.8), (35.9) *совместна и ее решение содержит* $(r-1)$ *произвольных постоянных.*

Предположим, что σ_α и ν удовлетворяют уравнениям S_q и S_{q+1}. Тогда, учитывая вид коэффициентов (35.15) и тот факт, что дифференцирование S_q приводит к S_{q+1} при помощи соотношения

$$A^\varrho(\sigma_{\varrho,\alpha} - \sigma_\varrho\sigma_\alpha + \nu g_{\varrho\alpha} - \tau_{\varrho\alpha}) + B(\nu_{,\alpha} - \nu\sigma_\alpha - \sigma_\varrho\tau^\varrho_\alpha) + \\ + (\sigma_\varrho\widetilde{A}^\varrho - \nu\widetilde{B} - \widetilde{T}) = 0,$$

получим:

$$A^{\varrho}(\sigma_{\varrho,\,\alpha}-\sigma_{\varrho}\sigma_{\alpha}+\nu g_{\varrho\alpha}-\tau_{\varrho\alpha})-B(\nu_{,\alpha}-\nu\sigma_{\alpha}-\sigma_{\varrho}\tau^{\varrho}_{\alpha})=0. \tag{35.17}$$

Обозначая через $\widetilde{S}_q$ однородное уравнение, соответствующее S_q,

$$A^{\varrho}\sigma_{\varrho}-\nu B=0,$$

видим, что

$$\sigma_{\varrho\alpha}-\sigma_{\varrho}\sigma_{\alpha}+\nu g_{\varrho\alpha}-\tau_{\varrho\alpha},\quad \nu_{,\alpha}-\nu\sigma_{\alpha}-\sigma_{\varrho}\tau^{\varrho}_{\alpha}$$

определяют решение $\widetilde{S}_q$ при любом α.

Предположим сначала, что существует единственное решение системы (35.11), т. е. $r=1$. Если это решение будет σ_α, ν, то оно также должно удовлетворять S_{p+1}.

Тогда однородная система уравнений $\widetilde{S}_0$, $\widetilde{S}_1$, ..., $\widetilde{S}_p$ несовместна, а сделанный выше вывод показывает, что σ_α и ν удовлетворяют (35.8) и (35.9), т. е. теорема имеет место.

Пусть теперь $r>2$, полная система линейно независимых решений однородной системы $\widetilde{S}_0$, ..., $\widetilde{S}_p$ имеет вид $\sigma^{(\varrho)}_{\alpha}$, $\nu^{(\varrho)}$ $(\varrho=1, \ldots, r-1)$. Пусть $\overset{*}{\sigma}_{\alpha}$, $\overset{*}{\nu}$ — любое частное решение неоднородной системы (35.11). Тогда из (35.17) следует:

$$\overset{*}{\sigma}_{\alpha,\beta}-\overset{*}{\sigma}_{\alpha}\overset{*}{\sigma}_{\beta}+\overset{*}{\nu}g_{\alpha\beta}-\tau_{\alpha\beta}=\sum_{\varrho}\mu^{(\varrho)}_{\beta}\sigma_{\alpha}, \tag{35.18}$$

$$\overset{*}{\nu}_{,\beta}-\overset{*}{\nu}\overset{*}{\sigma}_{\beta}-\overset{*}{\sigma}_{\lambda}\tau^{\lambda}_{\beta}=\sum_{\varrho}\mu^{(\varrho)}_{\beta}\nu^{(\varrho)}. \tag{35.19}$$

Если в эти уравнения подставить вместо $\overset{*}{\sigma}_{\alpha}$, $\overset{*}{\nu}$ выражения $\overset{*}{\sigma}_{\alpha}+\lambda^{(\varrho)}_{\alpha}$, $\overset{*}{\nu}+\nu^{(\varrho)}$ и из полученных таким образом уравнений вычесть соответственно (35.18) и (35.19), то придем к уравнениям

$$\sigma^{(\varrho)}_{\alpha,\,\beta}-\overset{*}{\sigma}_{\alpha}\sigma^{(\varrho)}_{\beta}+\nu^{(\varrho)}g_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma}\chi^{(\sigma\varrho)}_{\beta}\sigma^{(\sigma)}_{\alpha}, \tag{35.20}$$

$$\overset{*}{\nu}{}^{(\varrho)}_{,\beta}-\sigma^{(\varrho)}_{\beta}\overset{*}{\nu}-\sigma^{(\varrho)}_{\lambda}\tau^{\lambda}_{\beta}=\sum_{\sigma}\chi^{(\sigma\varrho)}_{\beta}\nu^{(\sigma)}, \tag{35.21}$$

где $\sigma_{,\varrho}=1, \ldots, r-1$. Используя метод вариации, положим, что

$$\sigma_\alpha=\overset{*}{\sigma}_\alpha+\sum_\varrho b^{(\varrho)}\sigma_\alpha^{(\varrho)}, \quad \nu=\overset{*}{\nu}+\sum_\varrho b^{(\varrho)}\nu^{(\varrho)} \quad (\varrho=1, \ldots, r-1), \tag{35.22}$$

и поставим задачей определить функции $b^{(\varrho)}$ так, чтобы σ_α и ν, определяемые таким образом, удовлетворяли уравнениям (35.8) и (35.9). Подставляя (35.22) в (35.8) и (35.9), придем к выводу, что искомые функции $b^{(\varrho)}$ должны удовлетворять системе

$$b_{,\alpha}^{(\varrho)}+\mu_\alpha^{(\varrho)}+\sum_\sigma b^{(\sigma)}\chi_\alpha^{(\sigma\varrho)}-b^{(\varrho)}\sigma_\alpha=0, \tag{35.23}$$

где σ_α берется из (35.22). Остается убедиться, что система (35.23) вполне интегрируема. Доказательство этого факта основывается на использовании уравнений (35.18) и (35.21) (см. задачу 1 § 35). Этим завершается доказательство теоремы. Таким образом, имеем следующий основной результат [71]: *для того чтобы V_n конформно отображалось на пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$ и такое отображение осуществлялось с помощью σ, ν, зависящих от $r-1$ произвольного параметра, необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число $p>0$, для которого система* (35.16) *имела бы r линейно независимых решений и все эти решения удовлетворяли бы S_{p+1} из серии условий совместности.*

Как уже отмечалось выше, при получении уравнений (35.8), (35.9) скаляр σ определяется с точностью до произвольной постоянной. За счет этого можно попытаться уточнить выбор $\overset{*}{R}$ скалярной кривизны пространства Эйнштейна. Когда $r=1$, то, согласно доказанной выше теореме, $\overset{*}{R}$ придется взять такой, какой она получается. Если же $r>1$, то, имея $\overset{*}{R}\neq 0$, полученное одним из возможных способов отображения, и имея произвольные параметры, можно поставить вопрос о приведении $\overset{*}{R}$ к наперед заданному *ненулевому* значению. Можно также поставить вопрос о возможности приведения $\overset{*}{R}$ к нулю.

Ответом на эти вопросы является утверждение: *если* $r > 1$, *то всегда можно определить такое отображение, при котором* $\overset{*}{R} = 0$; *для определения отображения, при котором* $\overset{*}{R} \neq 0$, *достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие*

$$g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta \not\equiv 0,$$

где ξ_α, $\overset{1}{\nu}$ *и* η_α, $\overset{*}{\nu}$ — *некоторые два решения* (*может быть, одинаковые*) *однородной системы* $\widetilde{S}_0$, $\widetilde{S}_1$, ..., $\widetilde{S}_p$.

В самом деле, $\overset{*}{\sigma}_\alpha = \overset{*}{\sigma}_{,\alpha}$, $\overset{*}{\nu}$ и $\overset{*}{\sigma}{}^{(\varrho)}_{,\alpha} = \overset{*}{\sigma}_{,\alpha} + \sigma^{(\varrho)}_\alpha$, $\overset{*}{\nu}{}^{(\varrho)} = \overset{*}{\nu} + \nu^{(\varrho)}$ удовлетворяют уравнениям (35.8), (35.9), так что $\overset{*}{\sigma}$ и $\overset{*}{\sigma}{}^{(\varrho)}$ определяют конформные отображения, которым отвечают скалярные кривизны $\widetilde{R}$ и $R^{(\varrho)}$. Положим:

$$\sigma^{(\varrho)} = \overset{*}{\sigma}{}^{(\varrho)} - \overset{*}{\sigma}.$$

Теперь определяем $b^{(\varrho)}$ в уравнениях вида (35.22) так, чтобы σ_α и ν удовлетворяли уравнениям (35.8), (35.9). Если через $\overset{*}{R}$ обозначить соответствующую скалярную кривизну, то нетрудно убедиться, что будет иметь место соотношение

$$\sum_{\sigma,\varrho} b^{(\sigma)}b^{(\varrho)}\Delta(\sigma^{(\varrho)}, \sigma^{(\sigma)}) + \sum_{\sigma} D^{(\sigma)}b^{(\sigma)} + \frac{\widetilde{R}}{n(n-1)}e^{2\overset{*}{\sigma}} = \frac{\overset{*}{R}}{n(n-1)}e^{2\sigma},$$

где

$$\Delta(\sigma^{(\varrho)}, \sigma^{(\sigma)}) = g^{\alpha\beta}\sigma^{(\varrho)}_{,\alpha}\sigma^{(\sigma)}_{,\beta},$$

$$D^{(\sigma)} = -\Delta_1\sigma^{(\sigma)} + \frac{e^{2\overset{*}{\sigma}}}{n(n-1)}\left[\widetilde{R} - R^{(\sigma)}e^{2\sigma^{(\sigma)}}\right].$$

Отсюда непосредственно следует, что, выбирая подходящим образом начальные значения $b^{(\varrho)}$, можно в качестве $\overset{*}{R}$ выбрать наперед заданную величину, но только в том случае, если

$$\Delta(\sigma^{(\varrho)}, \sigma^{(\sigma)}) \neq 0 \quad (\sigma, \varrho = 1, \ldots, r-1),$$

$$\widetilde{R} = \widetilde{R}^{(\varrho)} \neq 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r-1),$$

откуда следует справедливость доказываемого утверждения.

В частном случае, когда $n=4$, существенной является следующая лемма: *при $n=4$ из уравнения*

$$\sigma^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0 \tag{35.24}$$

следует, что или

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0, \tag{35.25}$$

или

$$g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta=0. \tag{35.26}$$

Для доказательства можно применить следующее рассуждение, предложенное Схоутеном. Уравнение (35.24) эквивалентно утверждению, что тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принадлежит трехмерному пространству, ортогональному к вектору σ^α. Предполагая, что этот вектор неизотропный и, следовательно, (35.26) не имеет места, получим, что гиперповерхность, в которой определен тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, неизотропная (см. § 7), т. е. она несет на себе риманову геометрию V_3 с невырожденным метрическим тензором.

В V_3 любой тензор P_{ijkl}, обладающий алгебраическими свойствами тензора кривизны, всегда может быть представлен (см. задачу 3 § 8) в виде:

$$P_{ijkl}=g_{ik}Q_{jl}-g_{il}Q_{jk}+g_{jl}Q_{ik}-g_{jk}Q_{il},$$

где Q_{ij} — симметрический тензор. Если, кроме того, известно, что $g^{il}P_{ijkl}=0$, то тензор $P_{ijkl}=0$. В применении к рассматриваемому случаю замечаем, что тензор конформной кривизны обладает всеми перечисленными для P_{ijkl} свойствами и, следовательно, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$.

Поэтому при $n=4$ существенным становится вопрос о том, будет ли градиентное поле σ_α изотропным или нет. В соответствии с этим можно различать два случая:

$$\alpha)\quad \Delta_1\sigma \overset{\text{def}}{=\!=} g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}\not\equiv 0,$$

когда мы будем говорить, что отображение *неизотропное*, и случай

$$\beta)\quad \Delta_1\sigma\equiv 0,$$

отвечающий *изотропному* отображению.

Если метрика V_n определенная и отображение осуществляется при помощи вещественных функций, то случай β) становится невозможным. При неопределенной метрике оба эти случая возможны и требуют специального рассмотрения.

Задачи

1. Показать, что система (35.23) вполне интегрируема.

2. Для того чтобы не конформно-плоское V_4 можно было конформно отобразить неизотропным образом на пространство Эйнштейна, необходимо и достаточно, чтобы уравнение S_0 имело решение (необходимо единственное), которое с некоторым скаляром ν (также необходимо единственным) удовлетворяло бы S_1 и S_2. Доказать. (Бринкман [71], стр. 278.)

3. Не конформно-плоское V_4, не являющееся пространством Эйнштейна, для которого (см. (35.10) и (35.12)) $S_{\alpha\beta\gamma}=0$, не может быть отображено неизотропным образом на пространство Эйнштейна. Доказать. ([71], стр. 278.)

§ 36. Отображение пространств Эйнштейна на пространства Эйнштейна. Неизотропный случай

Если не только $\overset{*}{V}_n$, но и V_n является пространством Эйнштейна, то

$$R_{\alpha\beta}=\frac{R}{n}g_{\alpha\beta},\qquad R=\mathrm{const}. \tag{36.1}$$

Простейшим случаем, когда возможно такое отображение, является тот случай, когда

$$\sigma_{,\alpha}=0,\qquad \nu=-\frac{R}{2n(n-1)}e^{2\sigma}, \tag{36.2}$$

так как ясно, что (36.2) удовлетворяет уравнению S_q. Геометрически это отображение означает просто изменение масштабов вдоль параметрических кривых и поэтому будет далее называться *тривиальным*.

Как уже показано в § 35, в случае нетривиального отображения возможны также случаи, когда пространство с ненулевой скалярной кривизной отображается на пространство с нулевой кривизной, и наоборот. Обозначая пространства с ненулевой скалярной кривизной через G_n

и с нулевой через $\overset{0}{G}_n$ и применяя теоремы, доказанные в § 35, без труда получим, что если $G_n(\overset{0}{G}_n)$ можно отобразить на $\overset{0}{G}_n(G_n)$ существенно более чем одним способом, то его можно отобразить нетривиально на $G_n(\overset{0}{G}_n)$. Кроме того, если G_n можно нетривиально отобразить на G_n, то его можно также отобразить на $\overset{0}{G}_n$. Наконец, если $\overset{0}{G}_n$ допускает нетривиальное отображение на $\overset{0}{G}_n$, то его можно отобразить и на G_n, хотя при этом возможно исключение, возникающее в том случае, когда для любых двух функций σ, $\tilde{\sigma}$, определяющих два нетривиальных отображения, имеет место соотношение

$$g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\tilde{\sigma}_{,\beta}=0.$$

Произведем замену неизвестных функций, удобную для дальнейшего, полагая

$$\sigma=-\ln\psi,\qquad \nu\psi=N-\frac{1}{2}K\psi,\qquad K=\frac{R}{n(n-1)}.\tag{36.3}$$

Так как

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta}=\frac{1}{n}\overset{*}{R}\overset{*}{g}_{\alpha\beta},\tag{36.4}$$

то, пользуясь тем, что

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}=\frac{1}{\psi^2}g_{\alpha\beta},\tag{36.5}$$

и заменяя в (36.4) все тензоры из $\overset{*}{V}_n$ через тензоры пространства V_n и ψ, придем к выводу, что $\overset{*}{V}_n$ будет пространством Эйнштейна тогда и только тогда, когда

$$\psi_{,\alpha\beta}=Ng_{\alpha\beta},\tag{36.6}$$

$$2N\psi=K\psi^2+\Delta_1\psi-\overset{*}{K},\tag{36.7}$$

где

$$\Delta_1\psi=g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta},\qquad \overset{*}{K}=\frac{\overset{*}{R}}{n(n-1)}.$$

Заметим, что N выражается через ψ линейным образом. Дифференцируя ковариантно (36.7), получим:

$$N_{,\alpha}\psi+N\psi_{,\alpha}=K\psi\psi_{,\alpha}+g^{\sigma\tau}\psi_{,\sigma}\psi_{,\tau\alpha}$$

и, используя (36.6), найдем: $N_{,\alpha}=K\psi_{,\alpha}$. Таким образом,

$$N=K\psi+D, \quad D=\mathrm{const}.$$

Заменяя в (36.6), (36.7) N через ψ, придем к системе уравнений

$$\psi_{,\alpha\beta}=(K\psi+D)\,g_{\alpha\beta}, \tag{36.8}$$

$$\Delta_1\psi=K\psi^2+2D\psi+\overset{*}{K}, \tag{36.9}$$

где, впрочем, (36.9) является простым следствием (36.8), так как из (36.8) следует:

$$[\Delta_1\psi-(K\psi^2+2D\psi)]_{,\alpha}=2g^{\sigma\tau}\psi_{,\sigma}\psi_{,\tau\alpha}-2K\psi\psi_{,\alpha}-2D\psi_{,\alpha}=0,$$

так что при постоянном $\overset{*}{K}$ (36.9) должно иметь место.

Данное в предыдущем параграфе определение *изотропного* отображения, если β выразить через ψ, будет иметь вид:

$$\Delta_1\psi\equiv 0.$$

Из (36.9) следует, таким образом, что, для того чтобы нетривиальное отображение было изотропным, необходимо и достаточно, чтобы

$$K=\overset{*}{K}=D=0. \tag{36.10}$$

Следовательно, *изотропное отображение пространств Эйнштейна друг на друга может быть осуществлено только тогда, когда их скалярные кривизны равны нулю.*

Если $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — некоторые два решения системы (36.8), которым соответственно отвечают постоянные $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$, то, полагая

$$\psi=a\psi^{(1)}+b\psi^{(2)}+c,$$

где a, b, c — постоянные, найдем:

$$\psi_{\alpha\beta}=(K\psi+D)\,g_{\alpha\beta},$$

где

$$D=aD^{(1)}+bD^{(2)}-Kc,$$

т. е. система (36.8) ведет себя, как линейная. В соответствии с этим о последовательности решений $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \ldots, \psi^{(p)}$ будем говорить, что она является *независимой*, если не существует соотношений вида

$$\sum_{r=1}^{p} c_r\psi^{(r)} = d, \quad c_r, \ d = \mathrm{const} \neq 0.$$

Конформные отображения, отвечающие независимым решениям, будем называть также *независимыми*. Таким образом, самый общий вид пространства Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$, конформного к пространству Эйнштейна V_n с метрикой ds^2, будет

$$d\overset{*}{s}{}^2 = \frac{1}{(c_1\psi^{(1)} + \ldots + c_r\psi^{(r)} + d)^2}\, ds^2.$$

В этом параграфе ниже рассмотрен случай неизотропного отображения, когда

$$\Delta_1\psi \neq 0. \qquad (36.11)$$

Это означает, что гиперповерхность $\psi = \mathrm{const}$ неизотропная и поэтому может быть использована в качестве координатной. Введем систему координат неизотропную, *почти-полугеодезическую*, которая отличается от полугеодезической тем, что в качестве параметра вдоль координатной кривой выбирается не длина дуги, а некоторая произвольная функция от дуги. Очевидно, что, если (36.11) имеет место, такая система координат всегда может быть сконструирована, причем $x^{n'} = \psi(x^1, \ \ldots, \ x^n)$. В такой системе отнесения (см. § 7) компоненты метрического тензора

$$g_{i'n'} = g^{i'n'} = 0, \quad \partial_i g_{nn} = 0 \quad (i \neq n). \qquad (36.12)$$

Далее, если обозначить

$$g^{n'n'} = \frac{1}{g_{n'n'}} \overset{\mathrm{def}}{=} f,$$

то, записывая уравнение (36.8) в новой системе координат, найдем (см. задачу 1 § 36), что

$$f = Kx^{n^2} + 2Dx^n + B, \quad B = \mathrm{const}, \qquad (36.13)$$

$$g_{ij} = f\overset{*}{g}_{ij}, \quad \check{g}_{ij} = \check{g}_{ij}(x^1, \ x^2, \ \ldots, \ x^{n-1}) \quad (i, \ j \neq n). \qquad (36.14)$$

Таким образом, в этой системе координат метрика V_n будет иметь вид:

$$ds^2 = \frac{1}{f}\, dx^{n^2} + f\, d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \check{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j, \qquad (36.15)$$

где, следовательно, $d\sigma^2$ определяет метрику неизотропного $\overset{*}{V}_{n-1}$.

Для того чтобы убедиться в том, что ds^2, определяемое соотношением (36.15), задает пространство Эйнштейна, достаточно убедиться, что выполняются условия

$$R_{\alpha\beta} = (n-1) K g_{\alpha\beta}. \tag{36.16}$$

Вычисляя компоненты тензора Риччи для метрики (36.15), получим:

$$R_{ij} = \check{R}_{ij} + \left[\frac{1}{2} ff'' + \frac{1}{4}(n-2) f'^2\right] \check{g}_{ij},$$

$$R_{in} = 0, \quad R_{nn} = \frac{1}{2}(n-1)\frac{f''}{f},$$

где штрих «′» означает дифференцирование по x^n. Поэтому (36.16) будут иметь место только в том случае, когда

$$\check{R}_{ij} = \left[(n-1) K f - \frac{1}{2} ff'' - \frac{1}{4}(n-2) f'^2\right] \check{g}_{ij}, \quad f'' = 2K. \tag{36.17}$$

Заменяя здесь f при помощи (36.13), получим:

$$R_{ij} = (n-2)\check{K}\check{g}_{ij} = \frac{\check{R}}{n-1}\check{g}_{ij}, \tag{36.18}$$

где

$$\check{K} = \frac{\check{R}}{(n-1)(n-2)} = BK - A^2. \tag{36.19}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема ([73], стр. 125): *пространство Эйнштейна может быть отображено конформно на другое пространство Эйнштейна неизотропным образом в том и только в том случае, когда в специальной системе координат его линейный элемент имеет вид* (36.15), *где* f *определяется формулой* (36.13); $d\sigma^2$ *определяет пространство Эйнштейна* V_{n-1} *со скалярной кривизной* (36.19).

Если $n > 3$ и $\check{V}_{n-1}$ является пространством постоянной кривизны, то V_n также будет пространством постоянной кривизны. В самом деле, если $\check{V}_{n-1}$ есть S_{n-1} и f — некоторая функция от x^4, то, вычисляя тензор конформной кривизны (§ 34), получим:

$$C_{ijkl}=f\check{C}_{ijkl} \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$C_{nijn}=0, \quad C_{nijk}=0,$$

т. е. $C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$. Но для $n>3$ это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы V_n было конформно-плоским (см. задачу 4 § 34). Всякое конформно-плоское пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны. В частности, когда $n=4$, замечаем, что метрика $d\sigma^2$ определяет S_3, так как всякое трехмерное пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны (см. § 13). Поэтому *пространство Эйнштейна V_4, которое можно отобразить на другое пространство Эйнштейна при помощи неизотропного отображения, есть пространство постоянной кривизны S_4.*

Задачи

1. Если два пространства Эйнштейна с ненулевыми скалярными кривизнами допускают неизотропное конформное отображение друг на друга, то они изометричны. Доказать.

2. Доказать теорему, аналогичную сформулированной в задаче 1, в случае, когда обе скалярные кривизны равны нулю.

3. Показать, что при условиях задачи 1 или 2, но в предположении, что из двух скалярных кривизн *только одна* равна нулю, отображаемые пространства могут не быть изометричными ([73], стр. 126).

4. Метрика (36.15) допускает замену $x^n \longrightarrow x'^n + a$. Показать, что при этом $K'=Ka^2+2Aa+B$ ([73], стр. 126).

5. Доказать, что пространство Эйнштейна, допускающее конформное неизотропное отображение на другое пространство Эйнштейна, может допускать и изотропное отображение на некоторое пространство Эйнштейна только в том случае, если пространство $\check{V}_{n-1}$ допускает нетривиальное отображение на $(n-1)$-мерное пространство Эйнштейна ([73], стр. 130).

§ 37. Отображение пространств Эйнштейна. Изотропный случай

Исследуем пространства Эйнштейна, которые допускают изотропное конформное отображение на некоторое другое пространство Эйнштейна. Как это следует из (36.8), (36.9), (36.10), такое отображение возможно только в том случае, когда функция ψ удовлетворяет системе уравнений

$$\psi_{,\alpha\beta}=0, \tag{37.1}$$

$$\Delta_1\psi=0. \tag{37.2}$$

Уравнение (37.2) имеет тот геометрический смысл, что поверхности $\psi=\mathrm{const}$ являются изотропными. Ввиду этого, хотя уже нельзя, как в предыдущем параграфе, ввести аналог неизотропной полугеодезической системы координат и использовать для такой конструкции гиперповерхности $\psi=\mathrm{const}$, но можно ввести изотропную полугеодезическую координатную систему (см. § 7). Выберем ее так, чтобы

$$g^{i(n-1)}=0\quad (i=1,\ \ldots,\ n-2),\quad g^{nn}=0,\quad g^{(n-1)n}=1 \tag{37.3}$$

и, следовательно,

$$g_{i(n-1)}=0,\quad g_{(n-1)(n-1)}=0,\quad g_{n(n-1)}=1.$$

Матрицы $(g_{\alpha\beta})$ и $(g^{\alpha\beta})$ будут иметь соответственно вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \omega_1\\ & & & \cdot & \cdot\\ & g_{ij} & & \cdot & \cdot\\ & & & \cdot & \cdot\\ & & & 0 & \omega_{n-2}\\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 1\\ \omega_1 & \ldots & \omega_{n-2} & 1 & \omega_n \end{array}\right),\qquad \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & -m^1 & 0\\ & & & \cdot & \cdot\\ & g^{ij} & & \cdot & \cdot\\ & & & \cdot & \cdot\\ & & & -m^{n-2} & 0\\ \hline -m^1 & \ldots & -m^{n-2} & \Omega & 1\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(i,\ j=1,\ \ldots,\ n-2), \tag{37.4}$$

где

$$m^i=g^{ij}m_j,\qquad \Omega=-\omega_n+\omega^i\omega_i. \tag{37.5}$$

Метрика V_n в этой системе координат будет, таким образом, записываться в виде:

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j+(2dx^{n-1}+2\omega_i\,dx^i+\omega_n\,dx^n)\,dx^n. \tag{37.6}$$

Как показано в § 7, такая координация возможна для любого V_n с неопределенной метрикой; для изучаемого изотропного отображения, как уже отмечалось в § 35, неопределенность метрики должна иметь место. Но в рассматриваемой задаче из (37.1) следует, что градиентный вектор $\psi_{,\alpha}$ является к тому же и ковариантно постоянным. Так как

$$\psi_{,\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha\beta}\psi - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_{,\sigma} = 0, \tag{37.7}$$

а ψ в новой системе координат играет роль $x^{n'}$, то это уравнение дает:

$$\Gamma^{n}_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_{n-1} g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n), \tag{37.8}$$

т. е. в новой координации $g_{\alpha\beta}$ являются функциями только от $x^1, \ldots, x^{n-2}, x^n$.

Необходимо проверить, когда и при каких условиях пространство с метрикой (37.6) является пространством Эйнштейна.

Рассмотрим пространство $\check{V}_{n-2}$, метрика которого определяется формой

$$d\sigma^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{37.9}$$

так, что метрика V_n может быть записана в виде:

$$ds^2 = d\sigma^2 + (2dx^{n-1} + 2\omega_i\, dx^i + \omega_n\, dx^n)\, dx^n, \tag{37.10}$$

и условимся все величины, принадлежащие $\check{V}_{n-2}$, отмечать знаком «ˇ». Тогда, если воспользоваться обозначениями

$$G_{ij} = \partial_n g_{ij}, \quad G^i_j = g^{ik} G_{hj}, \quad G^{ij} = g^{ik} G^j_k, \quad G = G^i_i, \tag{37.11}$$

$$F_{ij} = G_{ij} + \omega_{i,j} - \omega_{j,i}, \quad F^i_j = g^{ik} G_{hj}, \tag{37.12}$$

$$M_i = \partial_n \omega_i, \quad M^i = g^{ik} M_k, \quad M = \partial_n \omega_n, \tag{37.13}$$

то компоненты тензора Риччи будут иметь вид:

$$R_{ij} = \check{R}_{ji}, \tag{37.14}$$

$$R_{in} = \frac{1}{2}(G_{,i} - F^k_{i,k}), \tag{37.15}$$

$$R_{nn} = \frac{1}{2}\left(\check{\Delta}_2 \omega_n + \partial_n G + \frac{1}{2} F^k_i F^i_k - 2M^i_{,i}\right), \tag{37.16}$$

а все остальные компоненты тождественно равны нулю; здесь

$$\check{\Delta}_2\omega_n \overset{\text{def}}{=} g^{ik}\omega_{n,\,ik}.$$

Так как $R_{(n-1)\,n}=0$, а $g_{(n-1)\,n}=1$, то является очевидным, что *искомое V_n может быть только пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны*. Но тогда из (37.14) следует, *что и $\check{V}_{n-2}$ должно быть пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны.*

Кроме того, из (37.15) и (37.16) получаем:

$$G_{,i}-F^k_{i,k}=0, \tag{37.17}$$

$$\check{\Delta}_2\omega_n+\partial_n G+\frac{1}{2}F^k_i F^i_k-2M^i_{,i}=0. \tag{37.18}$$

Пусть $\check{V}_{n-2}$ задано и является пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны. Покажем, что в этом случае всегда можно определить ω_i и ω_n как функции от $x^1, \ldots, x^{n-2}, x^n$, так что искомое V_n будет пространством Эйнштейна. Обозначим в (37.17) все члены, не зависящие от ω_n, через f_i, тогда (37.17) запишется в виде:

$$g^{kl}(\omega_{i,\,kl}-\omega_{l,\,ik})=f_i, \tag{37.19}$$

где

$$f_i=G^k_{i,\,k}-G_{,i},$$

или, поднимая индекс вверх, запишем (37.19) в виде:

$$[g^{ji}g^{kl}(\partial_l\omega_i-\partial_i\omega_l)]_{,k}=f^j.$$

Так как в квадратной скобке стоит кососимметрический тензор, то, пользуясь выражением для дивергенции такого тензора (см. задачу 4 § 3), можно переписать это выражение в виде:

$$\partial_k[g^{ji}g^{kl}(\partial_l\omega_i-\partial_i\omega_l)]=\sqrt{g}\,f^j, \tag{37.20}$$

где

$$f^j=g^{jk}f_k.$$

Найдем необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений (37.20). Дифференцируя (37.20) по x^i нековариантным образом и свертывая по индексам i и j, получим:

$$\partial_j(\sqrt{g}\,f^j)=0. \tag{37.21}$$

Покажем, что (37.21) является и достаточным условием интегрируемости уравнений (37.20). Так как (см. задачу 3 § 3)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}f^i) = f^i_{,i} = G^{ij}{}_{,ij} - g^{ij}G_{,ij} = \partial_n R,$$

а $R = 0$ и $\sqrt{g} \neq 0$, то

$$\partial_i(\sqrt{g}f^i) = 0,$$

т. е. если (37.21) имеет место, то условия интегрируемости (37.20) выполняются. Следовательно, можно определить ω_i так, чтобы (37.20) удовлетворялись. Подставляя найденные значения ω_i в (37.18), определим ω_n. После этого V_n будет пространством Эйнштейна. Если, в частности, метрика имеет вид:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j + 2dx^{n-1}\,dx^n \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n-2),$$

то уравнения (37.17), (37.18) запишутся:

$$G_{,i} - G^k{}_{i,k} = 0, \quad \partial_n G + \frac{1}{2}G^i{}_k G^k{}_i = 0. \tag{37.22}$$

Так как, кроме того, подсчитывая компоненты тензора кривизны, можно убедиться, что среди них имеются следующие, отличные от нуля:

$$\left.\begin{aligned}
&R^i{}_{kjl} = \check{R}^i{}_{kjl}, \quad R^i{}_{njk} = \frac{1}{2}(G^i{}_{k,j} - G^i{}_{j,k}),\\
&R^{n-1}{}_{jkl} = \frac{1}{2}(G_{jk,l} - G_{jl,k}),\\
&R^i{}_{nnj} = \frac{1}{2}\left(G^i{}_j + \frac{1}{2}G^i{}_k G^k{}_j\right),\\
&R^{n-1}{}_{ijn} = \frac{1}{2}\left(\partial_n G_{ij} - \frac{1}{2}G^k{}_i G_{kj}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{37.23}$$

то становится очевидным, что в общем случае, *если даже* $\hat{V}_{n-2}$ — *плоское пространство, пространство* V_n *может и не быть плоским* (см. задачу 2 § 37).

Рассмотрим, в частности, случай $n = 4$, представляющий особый интерес. Так как было показано, что $\check{V}_{n-2}$ при рассматриваемом отображении обязано быть пространством Эйнштейна с нулевой скалярной кривизной, а всякое V_2, тензор Риччи которого $R_{\alpha\beta}=0$, является плоским пространством, то линейный элемент искомого V_n можно привести к виду:

$$ds^2=g_{11}\,dx^{1^2}+2g_{12}\,dx^1\,dx^2+g_{22}\,dx^{2^2}+$$
$$+(2dx^3+2a\,dx^1+2b\,dx^2+m\,dx^4)\,dx^4, \qquad (37.24)$$

где форма

$$d\sigma^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (i,\ j=1,\ 2)$$

при любом значении переменной x^4 определяет плоское пространство с метрикой одной из двух возможных сигнатур: $(+\ +)$ $(+\ -)$; несущественное умножение метрики на -1 здесь не учитывается. Здесь a, b, m — некоторые функции от x^1, x^2, x^4. Задавая метрику $d\sigma^2$ так, чтобы при любых x^4 она определяла плоское пространство, и интегрируя уравнения (37.17) и (38.18), получим общий вид четырехмерных пространств Эйнштейна, допускающих изотропное конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна.

Задачи

1. Показать, что преобразование координат вида

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,\ \ldots,\ x^{n-2},\ x^n) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n-2),$$
$$x^{n-1'}=x^{n-1}+z\,(x^1,\ x^{n-2},\ x^n), \qquad x^{n'}=x^n$$

не меняет метрики (37.6). Пользуясь произволом функций $x^{i'}$ $(i=1,\ \ldots,\ n-2)$, z, упростить метрику (37.6).

2. Показать, что метрика

$$ds^2=2dx^{n-1}\,dx^n+(ax^n+b)^2\,g_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (i,\,j=1,\ldots,n-2),$$

где a, b — постоянные и $g_{ij}=g_{ij}\,(x^1,\ \ldots,\ x^{n-2})$—определяющее $(n-2)$-мерное пространство Эйнштейна, допускает изотропное конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$. Найти метрику $\overset{*}{V}_n$. Исследовать частные случаи, которые возникают при $a=0$ и $b=0$ ([71], стр. 136).

3. Когда метрика V_n

$$ds^2=2dx^1\,dx^2+2dx^3\,dx^4+2f\,(x^1,\ x^4)\,dx^1\,dx^4+$$
$$+2g\,(x^2,\ x^4)\,dx^2\,dx^4$$

определяет пространство Эйнштейна и допускает изотропное конформное отображение на другое пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_4$? Определить метрику $\overset{*}{V}_n$.

4. Показать, что если V_4, пространство Эйнштейна, не являющееся пространством постоянной кривизны, допускает конформное отображение, не зависящее от $x^4 \equiv \psi$, на другое пространство Эйнштейна, то это отображение обязательно изотропное.

5. Когда V_4 с метрикой

$$ds^2 = 2dx^1\,dx^2 + 2dx^3\,dx^4 + 2f(x^1, x^4)\,dx^1\,dx^4$$

удовлетворяет условиям задачи 4?

6. V_n, фигурирующее в задаче 5, может быть вложено в пятимерное пространство Евклида как гиперповерхность [76].

7. V_n с метрикой, указанной в задаче 3, может быть вложено как пятимерная поверхность в семимерное евклидово пространство.

8. Показать, что V_n, определяемое метрикой

$$ds^2 = 4\left[dx^1\,dx^2 + dx^3\,dx^4 + (x^1\,dx^1 + x^3\,dx^3)^2\right],$$

является пространством Эйнштейна и допускает погружения в пятимерное евклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = dy^{1^2} - dy^{2^2} + dy^{3^2} - dy^{4^2} + dy^{5^2}$$

при помощи уравнений

$$y^1 = x^1 + x^2, \quad y^2 = x^1 - x^2, \quad y^3 = x^3 + x^4,$$
$$y^4 = x^3 - x^4, \quad y^5 = x^{1^2} + x^{3^2}$$

[76].

9. Показать, что метрика

$$ds^2 = \frac{e_1\,dx^{1^2} + \ldots + e_p\,dx^{p^2}}{\left[1 + \frac{n-2}{p-1}\frac{K_0}{4}(e_1 x^{1^2} + e_p\,dx^{p^2})\right]^2} +$$
$$+ \frac{e_{p+1}\,dx^{p+1^2} + \ldots + e_n\,dx^{n^2}}{\left[1 + \frac{n-2}{n-p-1}\frac{K_0}{4}(e_{p+1}x^{p+1^2} + \ldots + e_n x^{n^2})\right]^2}, \quad e_k = \pm 1,$$

определяет пространство Эйнштейна, которое может быть вложено в S_{n+1}. Вложение может быть осуществлено при помощи формул

$$e_1 z^{1^2} + \ldots + e_{p+1} z^{p+1^2} = \frac{p-1}{n-2} \frac{1}{K_0},$$

$$e_{p+2} z^{p+2^2} + \ldots + e_{n+2} z^{n+2^2} = \frac{n-p-1}{n-2} \frac{1}{K_0},$$

где $e = \pm 1$, а S_{n+1} определяется уравнением

$$e_1 z^{1^2} + \ldots + e_{n+2} z^{n+2^2} = \frac{1}{K_0}$$

[76].

10. Рассмотреть частный случай задачи 9, когда

$$ds^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2}}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^{1^2} + x^{2^2})\right]^2} + \frac{dx^{3^2} + dx^{4^2}}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^{3^2} + x^{4^2})\right]^2}$$

([76], стр. 103 — 104).

ГЛАВА VII

ПРОБЛЕМА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

В релятивистской механике, отвечающей общей теории относительности и уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta}-\frac{R}{2}g_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha)$$

возможна постановка различных задач, аналогичных задачам классической механики [194], [209], [247], [232], [266], [267], но в этом направлении сделаны только первые шаги. Исключение составляет задача определения интегралов поля по начальным данным (задача Коши), для которой имеется четкая математическая постановка и определенные результаты. По этой причине в настоящей главе излагается проблема Коши для системы (α), нашедшая наиболее полное решение в работах Лихнеровича [231], [159], [247]. Необходимо отметить основной результат для проблемы Коши в приложении к системам уравнений с частными производными, полученный И. Г. Петровским [106], [194]. Вопрос о корректности постановки задачи Коши для уравнений (α) и дискуссия по этому поводу отражены в работах [189], [226], [209], [247].

Решение задачи Коши, как правило [194], существенным образом зависит от класса функций, в которых ищутся решения, и от условий, накладываемых на поверхность, для которой ставится задача. Для системы (α), таким образом, вопрос будет зависеть от условий, накладываемых на компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ и тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(x)$ и их производные.

§ 38. Уравнения поля Эйнштейна

Придерживаясь терминологии, введенной в § 1, будем говорить о функции φ, что она класса C^r, если допускает непрерывные частные производные вплоть до порядка r;

обозначим бесконечно дифференцируемые функции и аналитические функции соответственно символами C^{∞} и C^{a}.

Введем также понятие *функции класса* C^2 *на куске поверхности* S. Рассмотрим для этого функцию φ, непрерывную в окрестности гиперповерхности S. Пусть система координат в V_n выбрана так, что эта гиперповерхность записывается уравнением $x^n = 0$. Предположим, что φ удовлетворяет условиям:

1) она класса C^2 в каждой из окрестностей, принадлежащих областям $x^n > 0$ и $x^n < 0$;

2) $\partial_{\alpha}\varphi$ и $\partial_{\alpha\beta}\varphi$ равномерно стремятся к определенным пределам, когда $x^n \to 0$, не меняя знака, но в зависимости от того, будет ли при этом $x^n > 0$ или $x^n < 0$, эти пределы будут различными.

Прерывность φ на S принято обозначать символом $[\varphi]$. Тогда, согласно классическим результатам Адамара ([17], стр. 83—87), прерывности производных функции φ на S будут иметь вид:

$$[\partial_i\varphi] = 0, \quad [\partial_n\varphi] = A, \tag{38.1}$$

$$[\partial_{ij}\varphi] = 0, \quad [\partial_{in}\varphi] = \partial_i A, \quad [\partial_{nn}\varphi] = B \quad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{38.2}$$

где A и B — некоторые функции, определяемые на S.

Если в V_n произведено преобразование координат класса C^2, то в новой системе отнесения получим функцию φ и гиперповерхность S, определяемую уравнением $f(x) = 0$, для которых: 1) φ имеет класс C^2 для каждой из окрестностей S, удовлетворяющих условиям $f > 0$ и $f < 0$, и 2) первые и вторые производные φ равномерно стремятся к определенным пределам (при $f = +0$ и $f = -0$), не совпадающим вообще между собой. Теперь, по определению, функцию φ, определенную в некоторой области V_n, назовем *кусочно-гладкой* класса C^2, если в этой области φ имеет класс C^2, за исключением окрестностей конечного числа поверхностей разрыва $S_1, S_2, \ldots, S_k$, для каждой из которых имеют место условия 1) и 2).

Отметим, что эти условия аналогичны тем, которые появляются в теории гидродинамических волн.

Уравнения поля (α) действуют в пространстве-времени V_4, определяемом метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}, \tag{38.3}$$

и здесь V_4 определяется как *дифференцируемое многообразие.* Для дальнейшего является существенным уточнение понятия V_4. Пусть дано некоторое n-мерное, топологическое, связное ([205], стр. 96) пространство V_n, каждая точка которого обладает окрестностью, *гомеоморфной* евклидовой сфере (см. § 1). Рассмотрим некоторую *открытую* область D в V_n ([205], стр. 91) и совершим отражение этой области D на евклидово n-мерное пространство H_n; это определит *локальную систему координат* D, при помощи которой каждой точке x из D сопоставляется точка ξ из R_n, определяемая n вещественными числами x^α. *Дифференцируемое многообразие заданного класса* C^r определим как такое V_n, с которым можно связать множество A локальных систем координат, удовлетворяющих условиям:

α) Области, отвечающие A, целиком покрывают V_n.

β) Пусть D_1 и D_2 — две такие области; рассмотрим их пересечение $D_1 \cap D_2$. Тогда если $x \subset D_1 \cap D_2$, то координаты точки x в одной локальной системе координат, отвечающей D_1, суть функции класса C^r (с якобианом, отличным от нуля) от координат этой точки в другой локальной системе, отвечающей D_2.

Аксиомы α) и β) позволяют ввести такие понятия, как *эквивалентность* покрытий области, *рефлексивность* (эквивалентность самому себе), *транзитивность* и т. д. Тщательное изложение этих вопросов содержится, например, в книге Л. С. Понтрягина [205].

В качестве пространственно-временного многообразия V_4, для которого исследуются уравнения поля (α), возьмем такое V_4, которое будет дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям α) и β) и, кроме того, условию

γ) Требуем, чтобы на пересечении областей двух локальных систем координат вторые производные функций, определяющих замену координат, были функциями *кусочно-гладкими класса* C^r.

В дальнейшем будет конкретно подразумеваться, что на пересечении областей двух систем координат координаты точки в одной из систем суть четырежды дифференцируемые функции (с ненулевым якобианом) координат точек в другой системе; при этом первые и вторые производные непрерывны, а третьи и четвертые могут допускать разрывы типа Адамара.

Компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ и их производные $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(x)$ будут предполагаться соответственно класса C^1 и класса C^2 кусочно-гладких.

Рассматривая некоторую гиперповерхность S в V_4, проходящую через точку x^α, можно построить касательное к S в данной точке плоское пространство R_{n-1}. Если направление некоторого вектора, принадлежащего R_{n-1}, определяется вектором $\overrightarrow{dx}$ с компонентами dx^α, то это касательное плоское пространство можно определить уравнением $v_\alpha dx^\alpha = 0$, где v_α — ковариантные составляющие вектора нормали к R_{n-1}. В зависимости от того, какую норму имеет этот вектор, будем касательной к S гиперплоскости приписывать ту или иную ориентацию в пространстве-времени, именно: если

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta > 0,$$

то будем говорить, что гиперповерхность *ориентирована в пространстве* (при сигнатуре метрики пространства типа $(- - - +)$), и если

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta < 0,$$

будем говорить *об ориентации гиперповерхности во времени*. Эти понятия позволяют далее уточнить выбор гиперповерхности S, на которой задаются начальные данные Коши.

Уравнения поля (α) Эйнштейна, как уже отмечалось в § 12, были получены последним в предположении, что они должны, с одной стороны, обобщать уравнения Лапласа — Пуассона, локально определяющие ньютоновский потенциал, и, с другой стороны, удовлетворять закону *сохранения*. Если обозначить левую часть (α) через $S_{\alpha\beta}$, то уравнения поля запишутся в виде:

$$S_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}, \tag{38.4}$$

где тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ целиком определяется распределением и движением материи, а $S_{\alpha\beta}$ — метрикой пространства-времени. Если $T_{\alpha\beta} \neq 0$, то будем далее говорить о *внутренней задаче*, и в противном случае, когда

$T_{\alpha\beta}=0$ и речь идет о свободных областях пространства-времени, не возмущенных энергетически, — *о внешней задаче*. Не уточняя пока вопрос о строении $T_{\alpha\beta}$ в зависимости от природы поля, отметим лишь, что этот тензор, по существу, обобщает правую часть уравнения Пуассона.

Что же касается *тензора Эйнштейна* $S_{\alpha\beta}$, имеющего чисто геометрическое происхождение, то он удовлетворяет двум условиям:

1°. $S_{\alpha\beta}$ — комитант (т. е. рациональная функция) от $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ и $\partial_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta}$, причем от вторых производных зависит линейно.

2°. Он удовлетворяет закону сохранения

$$S^{\alpha}{}_{\beta,\,\alpha}=0. \tag{38.5}$$

Условия 1° и 2° являются гипотезами, которые, однако, мотивируются физически. Так как, с другой стороны, уравнения (α) могут быть получены из вариационного принципа и тогда 1° и 2° будут следствиями, то тем самым устанавливается согласованность этих условий с вариационными принципами. Эйнштейн вывел уравнения поля из условий 1° и 2°, опираясь при этом на интуицию. Строгий анализ этих условий, произведенный Картаном ([63], стр. 141—203), привел его к теореме: *если $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяет 1° и 2°, то*

$$S_{\alpha\beta}=h\left\{R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}\right\}, \tag{38.6}$$

где $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи, R — скалярная кривизна пространства, а h, k — произвольные постоянные. Относя постоянную h к правой части, можно прийти к уравнениям поля

$$S_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta}. \tag{38.7}$$

Так называемая *космологическая константа* k, к которой обращался в свое время и Эйнштейн ([43], стр. 142), приводящая к гипотезе о конечности вселенной в космологических проблемах, была исключена из физических соображений, после чего (38.7) приведется к (38.4). Отметим, что для многих вопросов присутствие постоянной k не отражается на методе и результатах, которые получаются автоматической заменой $R\longrightarrow R+k$.

Если считать, что тензор $S_{\alpha\beta}$ определяется формулой (38.6), то закон сохранения (38.5) является непосредственным следствием тождества Бианки (5.16). Свертывая его по σ, γ, получим:

$$-R_{\alpha\beta,\,\delta}+R_{\alpha\delta,\,\beta}+R^{\sigma}{}_{\alpha\delta\beta,\,\sigma}=0,$$

откуда, производя еще одно свертывание по α, β, найдем:

$$R_{,\,\beta}-2R^{\sigma}{}_{\delta,\,\sigma}=0.$$

Если k — постоянное число, то ввиду этого тождества получим, что для $S_{\alpha\beta}$ имеет место закон сохранения независимо от того, будет ли $S_{\alpha\beta}$ тензором Эйнштейна или же имеет место формула (38.7).

§ 39. Внешняя задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для такой области V_4, в которой тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ можно пренебречь и, если исходить из (38.7), уравнения имеют вид:

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta},\qquad \varkappa=\frac{1}{2}(R+k). \tag{39.1}$$

Если в этом равенстве произвести свертывание по α и β, то зависимость между постоянной k и скалярной кривизной пространства определится в виде:

$$R=-2k. \tag{39.2}$$

В частности, для уравнения поля (α), когда космологическая постоянная k предполагается равной нулю, получим, что $R=0$ и уравнения поля для *свободного пространства* будут иметь вид:

$$R_{\alpha\beta}=0. \tag{39.3}$$

Решение задачи Коши для уравнений (39.1) или (39.3), которые не отличаются существенно, представляя самостоятельный интерес, в то же время будет полезно при рассмотрении внутренней задачи Коши.

Пусть задана некоторая гиперповерхность S пространства-времени V_4, определяемого компонентами метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, тогда задача Коши формулируется следующим образом: *требуется определить компоненты* *тензора* $g_{\alpha\beta}(x)$ *так, чтобы на* S *они и их первые производные были данными функциями, если на* S *и вне* S *искомые потенциалы* $g_{\alpha\beta}$ *удовлетворяют уравнениям поля* (39.1) *или* (39.3). Строго говоря, случай (39.1) более естественно отнести к внутренней задаче, когда $\lambda T_{\alpha\beta} = -\frac{k}{2} g_{\alpha\beta}$, но в смысле метода решения задачи Коши условия $k = 0$ или $k \neq 0$ не приводят к существенному различию.

Для задачи Коши прежде всего требуется определить *данные Коши*. Для этого удобно ввести сначала в V_4 такую специальную систему координат, где гиперповерхность S задается уравнением $x^4 = 0$, по крайней мере локально. В этой системе координат $g_{44} > 0$. Назовем для этой системы координат *индексом* производной потенциала $g_{\alpha\beta}(x)$ число, показывающее, сколько раз эта компонента дифференцируется по x^4. Тогда *данные Коши* состоят из значений $g_{\alpha\beta}$ на S и первых частных производных от $g_{\alpha\beta}$ индекса 1, т. е. $\partial_4 g_{\alpha\beta}$. Здесь предполагается, что эти данные соответственно трижды и дважды дифференцируемы по крайней мере.

Для дальнейшего необходимо прежде всего выяснить, привлекая для этой цели систему уравнений поля, вопрос о поведении вторых производных от потенциалов на S. Что касается вторых производных от $g_{\alpha\beta}$ индекса $\leqslant 1$ ($\partial_{4i} g_{\alpha\beta}$, $\partial_{ij} g_{\alpha\beta}$; $i, j = 1, 2, 3$), то они могут быть определены по данным Коши непосредственным дифференцированием и они непрерывны. Производные же индекса 2 ($\partial_{44} g_{\alpha\beta}$) определяются системой уравнений поля и должны быть определены из этой системы. Они вообще могут претерпевать разрыв на S.

Так как на основании (5.2)

$$\frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{[\beta} \Gamma^{\sigma}{}_{\gamma]\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\alpha[\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\beta]\tau},$$

то

$$R_{\alpha\beta} = g^{\lambda\nu} (\partial_\alpha \Gamma_{\nu,\lambda\beta} - \partial_\lambda \Gamma_{\nu,\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta} =$$
$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (\partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha\nu} g_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda\nu} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\nu}) + \omega_{\alpha\beta}; \quad (39.4)$$

здесь $\omega_{\alpha\beta}$ — рациональная функция от символов Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, и следовательно, $\omega_{\alpha\beta}$ *полностью определяются данными Коши*. Отсюда получаем, что если брать уравнения поля в виде (39.1), то, поскольку $R = -2k = \text{const}$, правую часть можно включить в $\omega_{\alpha\beta}$, и эта группа членов уравнения не перестает от этого определяться данными Коши.

Рассматриваемую нами специальную систему координат можно было бы, в частности, выбрать как полугеодезическую, но мы не требуем этого, ограничивая ее выбор тем, что в ней гиперповерхность S *ориентирована в пространстве* и записывается уравнением $x^4 = 0$. Ввиду особой роли, которую играет индекс 4, для этой системы координат запишем систему (39.4) в виде:

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{44}\, \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{ij} = 0, \tag{39.5}$$

$$R_{i4} \equiv \frac{1}{2} g^{4j}\, \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{i4} = 0, \tag{39.6}$$

$$R_{44} \equiv -\frac{1}{2} g^{ij}\, \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{44} = 0, \tag{39.7}$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ составляется из $\omega_{\alpha\beta}$ и тех вторых производных, которые могут быть определены дифференцированием на гиперповерхности S данных Коши и, следовательно, также определяются данными Коши. Так как гиперповерхность ориентирована в пространстве, то $g^{44} \neq 0$ и из уравнений (39.5) можно определить все производные вида $\partial_{44} g_{ij}$. Что же касается производных вида $\partial_{44} g_{4\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, то они вообще в уравнениях (39.5) — (39.7) не встречаются, так как все компоненты тензора кривизны вида $R_{44\alpha4} \equiv 0$. Тем не менее существенно показать, что *прерывность производных* $\partial_{44} g_{4\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$, *если она имеет место, не может иметь физического смысла и потому является несущественной*. Это будет ясно, если удастся показать, что при некотором преобразовании координат производные $\partial_{44} g_{ij}$ не меняют своего значения, а $\partial_{44} g_{4\alpha}$ можно привести к любому наперед заданному значению.

Рассмотрим в окрестности гиперповерхности S преобразование координат, обладающее тем свойством, что на S оно сохраняет численное значение координат каждой точки (напомним, что S записывается уравнением $x^4 = 0$):

$$x^{\lambda\prime} = x^\lambda + \frac{x^{4^3}}{6} (\varphi^\lambda (x^i) + \varepsilon^\lambda), \tag{39.8}$$

где предполагается, что $\varepsilon^\lambda \to 0$, когда $x^4 \to 0$. Ясно, что

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right)_s = \delta_\beta^\alpha \tag{39.9}$$

и

$$(\partial_\mu A_4^{\alpha'})_s = (\partial_4 A_\beta^{\alpha'})_s = (\partial_{i4} A_4^{\alpha'})_s = (\partial_{44} A_i^{\alpha'})_s = 0, \quad A_\beta^{\alpha'} \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}, \tag{39.10}$$

а

$$(\partial_{44} A_4^{\alpha'})_s = \varphi^\alpha. \tag{39.11}$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\beta} g_{\sigma'\tau'},$$

то непосредственно получим:

$$\partial_4 g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} A_4^{\lambda'} \partial_{\lambda'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_4 A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_4 A_\beta^{\tau'} A_\alpha^{\sigma'} g_{\sigma'\tau'}, \tag{39.12}$$

и следовательно, вследствие (39.10) имеем, что данные Коши на гиперповерхности S после такой замены координат определяются соотношениями

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'}, \quad \partial_4 g_{\alpha\beta} = \partial_{4'} g_{\alpha'\beta'}. \tag{39.13}$$

Если, кроме того, вычислить вторые производные, то придем к выражению

$$\partial_{44} g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} A_4^{\lambda'} A_4^{\nu'} \partial_{\lambda'\nu'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_{44} A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} g_{\sigma'\tau'} + \\ + \partial_{44} A_\beta^{\tau'} A_\alpha^{\sigma'} g_{\sigma'\tau'} + u_{\alpha\beta}, \tag{39.14}$$

где через $u_{\alpha\beta}$ обозначена группа членов, содержащих множителями первые производные от A_β^α, которые в силу (39.10) на S обращаются в нуль. Следовательно, из (39.14) имеем:

$$\partial_{44} g_{ij} = \partial_{4'4'} g_{i'j'},$$
$$\partial_{44} g_{4\alpha} = \partial_{4'4'} g_{4'\alpha'} + g_{\alpha\sigma}\varphi^\sigma + g_{4\sigma}\delta_\alpha^4 \varphi^\sigma.$$

Таким образом, в то время как производные $\partial_{44} g_{ij}$ не меняются, относительно вторых производных вида $\partial_{44} g_{4\alpha}$ можно сказать, что в зависимости от выбора функций φ^{σ}, которые пока произвольны, их можно привести к наперед заданным функциям ([231], § 14). Можно, в частности, выбрать $\varphi^{(\alpha)}$ так, чтобы $\partial_{44}g_{\alpha 4}$ были непрерывными на S.

Следовательно, с точностью до этой оговорки вторые производные *непрерывны на* S. Если же, кроме того, предположить дифференцируемость данных Коши более высокого порядка, то, дифференцируя (39.10) последовательно достаточное число раз, этот вывод можно распространить на производные более высокого порядка.

Для решения задачи Коши необходимо еще рассмотреть группу уравнений (39.6) и (39.7).

Для простоты предположим далее, что $k=0$, хотя, как мы видели, это несущественно и все выводы без труда распространяются и на случай $k \neq 0$. Уравнения (39.6) и (39.7) при этом предположении записываются в виде $R_{4\alpha}=0$ $(\alpha=1, 2, 3, 4)$. Так как

$$S^4{}_i = g^{4j}R_{ij} + g^{44}R_{4i}, \qquad S^4{}_4 = R^4{}_4 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}(g^{44}R_{44} - g^{ij}R_{ij}),$$

то эта система эквивалентна системе

$$S^4{}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \tag{39.15}$$

которая не содержит производных индекса 2 и, следовательно, определяет систему условий, накладываемых на данные Коши.

Докажем, что *система уравнений поля Эйнштейна находится в инволюции, т. е. если потенциалы* $g_{\alpha\beta}(x)$ *удовлетворяют системе* (39.5) *и на гиперповерхности* S *условиям* (39.15) (*или, что то же самое,* (39.6) *и* (39.7)), *то они удовлетворяют* (39.15) *и в окрестности* S.

Пусть данные Коши удовлетворяют условиям

$$(S^4{}_\alpha)_S = 0$$

и потенциалы $g_{\alpha\beta}(x)$, отвечающие этим данным Коши, удовлетворяют уравнениям (39.5). В силу закона сохранения (39.5)

$$S^\alpha{}_{\beta,\alpha} = 0,$$

или, выделяя индекс 4, можно записать:

$$S^4{}_{\beta,4} + \sum_{i=1}^{3} S^i{}_{\beta,i} = 0. \tag{39.16}$$

С другой стороны, имеем из (39.5):

$$S^i{}_j = g^{4i}R_{4j} - \frac{1}{2}(g^{44}R_{44} + 2g^{4i}R_{4i}),$$

$$S^i{}_4 = g^{i\sigma}R_{\sigma 4},$$

$$S^4{}_i = g^{44}R_{4i},$$

$$S^4{}_4 = \frac{1}{2}g^{44}R_{44}.$$

Отсюда следует, что систему (39.16) можно представить в виде:

$$g^{44}\partial_4 S^4{}_\beta = M^{i\sigma}{}_\beta \partial_i S_\sigma{}^4 + N^\sigma{}_\beta S^4{}_\sigma, \tag{39.17}$$

где M и N будут класса C^0.

Подытоживая, получим следующий вывод: для любого решения (39.5) $S^4{}_\beta$ удовлетворяет системе четырех уравнений (39.17) с частными производными, линейных, однородных, разрешимых относительно производных $\partial_4 S^4{}_\beta$. Но такая система для нулевых данных Коши на S, $(S^0_\beta)_S = 0$, имеет только нулевые решения; это доказывает утверждение.

Следовательно, если данные Коши удовлетворяют (39.6) и (39.7), то они удовлетворяют им и в окрестности S и эти уравнения служат только для определения данных Коши, в то время как первая группа уравнений поля (39.5) служит для определения изменения потенциалов во времени.

Следовательно, проблема Коши для уравнений поля Эйнштейна приводится к двум задачам ([231], § 15):

1) *Задача определения начальных условий*, которая состоит в отыскании данных Коши, удовлетворяющих на гиперповерхности S условиям $S^4{}_\alpha = 0$.

2) *Задача интегрирования по времени* x^4, которая состоит в интегрировании уравнений $R_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ (или уравнений $R_{ij} = \frac{1}{2}(R + k)g_{ij}$, если $k \neq 0$) для данных Коши, удовлетворяющих условиям первой задачи.

Основную трудность представляет решение первой задачи, которая зависит от характера гиперповерхности S и которую только при некоторых частных предположениях можно считать решенной в замкнутой форме. Вторая задача в предположении, что первая задача решена, была решена Фурье при сравнительно простых предположениях о дифференцируемости [159], [247].

Если предположить, что решение ищется в классе аналитических функций (т. е. все функции, появляющиеся при решении второй задачи, аналитические и вещественные), то, основываясь на теореме Коши — Ковалевской ([160], § 1; [151], стр. 294) о системе уравнений с частными производными, можно утверждать, что с точностью до замены координат, сохраняющей координаты гиперповерхности S и данные Коши на S неизменными, вторая задача допускает единственное и вещественное решение в классе C^a. Нужно отметить, что в релятивистской теории поля аналитичность $g_{\alpha\beta}(x)$ может иметь место только для некоторых пространственно-временных областей и в общем случае, при наличии, например, тяготеющих масс неизбежно должны появиться прерывности потенциалов. Именно при прохождениии гиперповерхностей, ориентированных во времени, отделяя движущуюся материю от областей, «заметаемых» ею во времени, нужно неизбежно ожидать появления прерывностей, по крайней мере вторых производных от $g_{\alpha\beta}(x)$. Учитывая это, Лихнерович ([231], гл. I) при постановке задачи Коши для внешней и внутренней задач исходил из *постулированной им прерывности* $\partial_{\sigma\tau}g_{\alpha\beta}$ на S. Ему удалось определить данные Коши в замкнутом виде лишь в том случае, если гиперповерхность S *минимальная*, когда задача значительно упрощается. Основное затруднение заключается здесь в том, что требуется определить *решения на многообразиях, топология которых может быть сложной.*

В случае, если гиперповерхность S ориентирована всюду во времени ($g_{44} < 0$), предыдущее рассуждение можно провести с соответствующими изменениями, и задача Коши опять-таки будет приводиться к двум задачам, аналогичным указанным выше.

Полученные выше результаты существенным образом опираются на возможность явным образом разрешить систему уравнений поля (39.5) относительно производных $\partial_{44}\partial_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), которая в данном случае вытекает из условия $g^{44} \neq 0$.

Если гиперповерхность S выбрана так в локальной системе координат, что это условие не имеет места, то мы придем к принципиально другим результатам, связанным с понятием *характеристического многообразия*, как это следует из теории дифференциальных уравнений.

§ 40. Оценка произвола в задании потенциалов поля пространств Эйнштейна

Требование аналитичности функций при решении задачи Коши значительно упрощает вопрос и позволяет воспользоваться классическими теоремами существования и единственности. Хотя такое требование, на первый взгляд, носит несколько формальный характер, тем не менее оно заслуживает рассмотрения. Это объясняется тем, что, например, для свободного пространства (см. гл. II) все известные конкретные решения уравнений поля в некоторых областях пространства-времени определяются потенциалами, принадлежащими классу C^a. Кроме того, с решением задачи Коши тесно связан вопрос об определении произвола, с которым можно задать потенциалы поля; если при этом удастся максимально упростить систему координат, то для этой системы отнесения (в классе аналитических функций) определится, выражаясь условно, *«физический» функциональный произвол*, с которым можно задать поле. Такая качественная оценка во всяком случае представляет интерес. При этом такая оценка, произведенная для свободных пространств или пространств Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), является полезной и для изучения полей тяготения общего вида, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta} \neq \sigma g_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим пространство Эйнштейна V_4, для которого

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta},$$

и введем в нем полугеодезическую систему координат (координаты Гаусса), в которой координатные линии x^4 будут геодезическими (вдоль которых x^4 служит длиной дуги), ортогонально пересекающими координатные гиперповерхности $x^4 = \text{const}$. Таким образом, нормали к этим гиперповерхностям временни подобны. Такую систему координат можно, по крайней мере локально, ввести в любом V_4 с сигнатурой в точке вида $(- - - +)$.

В этой системе координат метрика пространства будет иметь вид:

$$ds^2 = \overset{*}{ds}{}^2 + dx^{4^2}, \qquad (40.1)$$

где $\overset{*}{ds}{}^2$ — определенно-отрицательная форма, причем

$$\overset{*}{ds}{}^2 = g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)\,dx^i\,dx^j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (40.2)$$

и таким образом,

$$g_{i4} = 0, \quad g_{44} = g^{44} = 1, \qquad (40.3)$$

а дискриминант тензора

$$g \equiv |g_{\alpha\beta}| = \overset{*}{g} \equiv |g_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \qquad (40.4)$$

Следовательно, ds^2 определяет пространство, являющееся обобщением топологического произведения трехмерного пространства V_3 и одномерного, а на каждой гиперповерхности $x^4 = \text{const}$ форма $\overset{*}{ds}{}^2$ определяет, в силу условия об определенности, многообразие, гомеоморфное трехмерному евклидову пространству.

В такой системе координат гиперповерхности $x^4 = \text{const}$ геодезически параллельны, а *второй* тензор на $x^4 = \text{const}$ будет выражаться формулами

$$h_{ij} = -\frac{1}{2}\partial_4 g_{ij}, \quad h^{ij} = \frac{1}{2}\partial_4 g^{ij}. \qquad (40.5)$$

Впрочем, удобнее взять этот тензор с обратным знаком, положив

$$\omega_{ij} = -h_{ij}, \qquad (40.6)$$

после чего, пользуясь трехмерным тензором $\overset{*}{g}{}^{ij}$, где

$$(\overset{*}{g}_{ij}) = (g_{ij})_{x^4=c}, \qquad (40.7)$$

естественно вводятся тензоры

$$\omega^{ij} = \overset{*}{g}{}^{ih}\overset{*}{g}{}^{jk}\omega_{hk} \qquad (40.8)$$

и

$$\omega_i^j = \overset{*}{g}{}^{jk}\omega_{ki}. \qquad (40.9)$$

Пользуясь этими тензорами, введем трехмерный инвариант

$$H=\omega_i^i,$$

определяющий *среднюю* кривизну гиперповерхности, и инвариант

$$T^2=\omega_i^j\omega_j^i. \qquad (40.10)$$

Поставим вопрос о решении внешней задачи Коши в этой системе координат и, как это делалось в предыдущем параграфе, запишем уравнения поля в виде двух групп уравнений:

$$R_{ij}=\varkappa g_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \qquad (40.11)$$

$$R_{\alpha 4}=\varkappa g_{\alpha 4} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4). \qquad (40.12)$$

Употребление термина «внешняя задача» тут формально не совсем правильно, но предположение $\varkappa=0$ ничего не меняет в последующем рассуждении. Как показано в предыдущем параграфе, уравнения (40.11), (40.12) определяют систему в инволюции, и задача Коши разбивается на две задачи: 1) задачу определения данных Коши, состоящую в том, чтобы найти наиболее общие данные Коши, удовлетворяющие на $x^4=c$ уравнениям (40.12), и 2) задачу интегрирования по времени x^4, т. е. интегрирования уравнений (40.11). В данном случае гиперповерхность S не будет характеристическим многообразием.

Задача 1) может быть теперь сформулирована следующим образом: требуется определить функции g_{ij} и ω_{ij} от независимых переменных x^1, x^2, x^3, удовлетворяющие системе (40.12). Эту систему можно также представить в виде двух групп уравнений, соответственно тому, будет ли индекс α равен 4 или нет. Если $\alpha=4$, то, пользуясь введенными выше обозначениями, получим уравнение

$$H^2-T^2-\overset{*}{R}=\varkappa, \qquad (40.13)$$

где $\overset{*}{R}$ — скалярная кривизна для трехмерного многообразия, определяемого тензором $\overset{*}{g}_{ij}$.

Три других уравнения могут быть записаны в виде:

$$(\omega^{ij}-H\overset{*}{g}{}^{ij})_{;j}=0, \qquad (40.14)$$

где символом «;» обозначено ковариантное дифференцирование относительно метрики $\overset{*}{ds^2}$.

Нас интересует максимальный произвол, с которым определяются g_{ij} и ω_{ij} из этих четырех уравнений. Для выяснения этого запишем эти уравнения подробно и покажем, что они эквивалентны системе уравнений типа Коши — Ковалевской относительно четырех неизвестных функций.

Рассмотрим уравнение (40.13) и разрешим его относительно старшей производной одной из неизвестных функций по некоторому аргументу. Выберем в качестве аргумента, например, x^3. T не содержит производных по x^i $(i=1, 2, 3)$ от неизвестных функций, но $\overset{*}{R}$ содержит, а именно:

$$\overset{*}{R}=\overset{*}{g}{}^{pq}\overset{*}{g}{}^{st}\left\{\frac{1}{2}\left(\partial_{pt}\overset{*}{g}_{sq}+\partial_{sq}\overset{*}{g}_{pt}-\partial_{st}\overset{*}{g}_{pq}\right)+\right.$$
$$\left.+\overset{*}{g}{}^{lm}\left(\overset{*}{\Gamma}_{m,pt}\overset{*}{F}_{l,sq}-\overset{*}{\Gamma}_{m,pq}\overset{*}{\Gamma}_{l,st}\right)\right\}. \qquad (40.15)$$

Вторая скобка содержит только первые производные от $\overset{*}{g}_{ij}$, входящие в символы Кристоффеля $\overset{*}{\Gamma}_{p,qr}$ — трехмерного пространства Римана, а первая скобка содержит вторые производные. Нас будет интересовать вторая производная $\partial_{33}g_{ij}$. Непосредственно убеждаемся, что в правую часть не входят производные вида $\partial_{33}g_{3j}$ $(j=1, 2, 3)$, и поэтому остановимся, например, на производной $\partial_{33}g_{22}$ и разрешим уравнение относительно нее. Коэффициент при такой производной равен

$$\overset{*}{g}{}^{23^2}-\overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33},$$

и поэтому уравнение (40.15) можно представить в виде:

$$\left(\overset{*}{g}{}^{23^2}-\overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33}\right)\partial_{33}\overset{*}{g}_{22}=M, \qquad (40.16)$$

где

$$M=H^2-T^2+\varkappa-\overset{*}{\widetilde{K}},$$

$\overset{*}{\widetilde{K}}$ означает разность между $\overset{*}{R}$ и левой частью написанного выше уравнения.

Переходим к рассмотрению системы (40.14). Опустив предварительно индекс i вниз, получим:

$$\omega^j{}_{k,\,j} - H_{,\,k} \equiv \partial_j \omega^j{}_k - \overset{*}{\Gamma}{}^p_{kj}\omega^j{}_p + \overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p{}_k - \partial_k H = 0.$$

Положим сначала индекс k равным единице и рассмотрим среднюю кривизну H. После уничтожения подобных членов придем к уравнению

$$\partial_2\omega^2{}_1 + \partial_3\omega^3{}_1 - \partial_1\omega^2{}_3 - \partial_1\omega^3{}_3 - \overset{*}{\Gamma}{}^p_{1j}\omega^j{}_p + \overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p{}_1 = 0.$$

Точно так же, полагая k равным 2 и 3, получим еще два уравнения:

$$\partial_1\omega^1{}_2 + \partial_3\omega^3{}_2 - \partial_2\omega^1{}_1 - \partial_2\omega^2{}_3 - \overset{*}{\Gamma}{}^p_{2j}\omega^j{}_p + \overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p{}_2 = 0,$$

$$\partial_1\omega^1{}_3 + \partial_2\omega^2{}_3 - \partial_3\omega^1{}_1 - \partial_3\omega^2{}_2 - \overset{*}{\Gamma}{}^p_{3j}\omega^j{}_p + \overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p{}_3 = 0.$$

Таким образом, в эту систему входят только первые частные производные от $\overset{*}{g}_{ij}$ и $\omega^i{}_j$. Разрешим ее относительно производных по x^3 от трех неизвестных функций ω_{ij}. Для этого необходимо сначала заменить $\omega^i{}_j$ через ω_{ij}, пользуясь тем, что

$$\omega^i{}_j = \overset{*}{g}{}^{ki}\omega_{kj}.$$

Перепишем первое из этих уравнений в виде:

$$\partial_3\omega^3{}_1 = P_1,$$

где

$$P_1 = P_1(\partial_k\omega^p{}_q,\ \partial_s\overset{*}{g}{}^{pr},\ \partial_s\overset{*}{g}_{pr},\ \overset{*}{g}_{pr},\ \omega_{pq}), \quad k < 3.$$

Так как

$$\partial_3\omega^3{}_1 = \partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{s1}),$$

то первое уравнение может быть записано в виде:

$$\overset{*}{g}{}^{33}\partial_3\omega_{13} = P_1 - \omega_{13}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}_{33}\omega_{s1}).$$

Совершенно так же второе и третье уравнения запишутся при тех же обозначениях:

$$\overset{*}{g}^{33}\partial_3\omega_{23} = P_2 - \omega_{23}\partial_3\overset{*}{g}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{3s}\omega_{s2}),$$

$$\overset{*}{g}^{22}\partial_3\omega_{22} = P_3 - \omega_{22}\partial_3\overset{*}{g}^{22} - \sum_{s\neq 2}(\overset{*}{g}^{2s}\omega_{2s}) - \sum_{s\neq 1}\partial_3(\overset{*}{g}^{1s}\omega_{1s}).$$

Так как в правой части последнего уравнения встречаются производные, стоящие в левых частях двух первых уравнений, то эти производные можно заменить их выражениями. При этом необходимо потребовать, чтобы коэффициенты при этих производных были отличны от нуля. Очевидно, не нарушая общности, всегда можно предположить, что на гиперповерхности $x^4 = 0$ компоненты

$$\overset{*}{g}^{22}, \quad \overset{*}{g}^{33}, \quad \overset{*}{g}^{23^2} - \overset{*}{g}^{22}\overset{*}{g}^{33}$$

отличны от нуля. После этого получим следующую систему уравнений, эквивалентную (40.12):

$$\partial_{33}\overset{*}{g}_{22} = \frac{1}{\Delta}M, \quad \Delta \equiv \overset{*}{g}^{23^2} - \overset{*}{g}^{22}\overset{*}{g}^{33},$$

$$\partial_3\omega_{13} = \frac{1}{\overset{*}{g}^{33}}\left\{P_1 - \omega_{13}\,\partial_3\overset{*}{g}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{3s}\omega_{13})\right\},$$

$$\partial_3\omega_{23} = \frac{1}{\overset{*}{g}^{33}}\left\{P_2 - \omega_{23}\,\partial_3\overset{*}{g}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{3s}\omega_{2s})\right\},$$

$$\partial_3\omega_{22} = \frac{1}{\overset{*}{g}^{22}}\Bigg\{P_3 - \omega_{22}\,\partial_3\overset{*}{g}^{22} - \partial_3(\overset{*}{g}^{21}\omega_{21}) -$$

$$- \omega_{23}\,\partial_3\overset{*}{g}^{23} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{s1}\omega_{s1}) - \omega_{13}\,\partial_3\,\overset{*}{g}^{13} -$$

$$- \frac{\overset{*}{g}^{13}}{\overset{*}{g}^{33}}\left[P_1 - \omega_{13}\,\partial_3\overset{*}{g}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{3s}\omega_{1s})\right] -$$

$$- \omega_{23}\,\partial_3\overset{*}{g}^{23} - \frac{\overset{*}{g}^{23}}{\overset{*}{g}^{33}}\left[P_2 - \omega_{23}\,\partial_3\overset{*}{g}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}^{3s}\omega_{2s})\right]\Bigg\}.$$

Если задать совершенно *произвольным образом функции от* x^1, x^2, x^3:

$$\overset{*}{g}_{11},\ \overset{*}{g}_{12},\ \overset{*}{g}_{13},\ \overset{*}{g}_{23},\ \overset{*}{g}_{33},\ \omega_{11},\ \omega_{12},\ \omega_{33},$$

то для остальных неизвестных функций

$$\overset{*}{g}_{22},\ \omega_{13},\ \omega_{23},\ \omega_{22}$$

получим систему четырех уравнений, разрешенную относительно старших производных по x^3 от этих неизвестных функций и такую, что эти старшие производные не встречаются в правых частях, т. е. систему типа Коши — Ковалевской. Предположение об аналитичности функций позволяет применить, при определении произвола в решениях этой системы, теорему Коши — Ковалевской.

Разумеется, эти выводы имеют место *с точностью до перенумерации индексов*. Следовательно, эти четыре функции определены с произволом

$$\begin{gathered}\omega_{13}(x^1,\ x^2),\quad \omega_{23}(x^1,\ x^3),\quad \omega_{22}(x^1,\ x^2),\\ g_{22}(x^1,\ x^2),\quad \partial_3 g_{22}=f(x^1,\ x^2)\end{gathered}\tag{40.17}$$

для $x^3=\overset{0}{x}{}^3$, где эти функции произвольные, аналитические в области точки $x^i=\overset{0}{x}{}^i$ и в этой точке принимающие вместе со своими производными заданные значения. Этим определяется произвол в определении данных Коши при решении задачи 1).

Перейдем теперь к решению задачи 2). Она, как указывалось выше, заключается в интегрировании уравнений поля для начальных данных Коши. Система (40.11) записывается в виде:

$$\partial_{44}g_{ij}=F_{ij}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

где F_{ij} полностью определяется данными Коши. Это — система шести уравнений от шести неизвестных функций g_{ij} типа Коши — Ковалевской, и следовательно, в качестве аналитических функций она допускает единственное решение с произволом

$$\begin{gathered}g_{ij}=g_{ij}(x^1,\ x^2,\ x^3),\\ \partial_4 g_{ij}=\varphi_{ij}(x^1,\ x^2,\ x^3)\equiv\omega_{ij}\end{gathered}$$

для $x^4=0$. Здесь, однако, эти функции не вполне произвольны, а такие, которые на гиперповерхности $x^4=0$ удовлетворяют (40.12), т. е. являются данными Коши, определенными при решении задачи 1).

Теперь можно записать искомые потенциалы в полугеодезической системе координат, выделив *явным образом произвольные функции*, от которых они зависят (*параметрическая часть*), и определенные компоненты (*главная часть*).

Рассмотрим разложение потенциала поля $g_{ij}(x)$ в степенной ряд:

$$g_{ij}=\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}(x^1-\overset{0}{x}{}^1)^{k_1}(x^2-\overset{0}{x}{}^2)^{k_2}(x^3-\overset{0}{x}{}^3)^{k_3}(x^4-\overset{0}{x}{}^4)^{k_4},\qquad(40.18)$$

где коэффициенты $C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}$ определяются соответствующими производными g_{ij}, вычисленными в точке $x^\alpha=\overset{0}{x}{}^\alpha$:

$$C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}=\frac{1}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+k_4}}{\partial {x^1}^{k_1}\,\partial {x^2}^{k_2}\,\partial {x^3}^{k_3}\,\partial {x^4}^{k_4}}\,g_{ij}\right)_{x^\alpha=\overset{0}{x}{}^\alpha}.$$

Для того чтобы выделить *параметрическую* часть в этом разложении, нужно удалить из этого разложения все члены с теми производными, которые стояли в левых частях системы (40.11), (40.12), и члены с любыми производными от этих производных (так называемые *главные производные* системы уравнений поля).

Рассмотрим, например, потенциал $g_{22}(x)$. В левые части (40.11) и (40.12) входят следующие главные производные этой неизвестной функции: $\partial_{33}g_{22}$, $\partial_3\omega_{22}=\partial_{34}g_{22}$, $\partial_{44}g_{22}$. Для первой из этих двух производных в разложении нужно вычеркнуть члены, делящиеся на $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)^2$. После такого вычеркивания останется параметрическая, относительно такой производной, часть разложения. Она должна состоять: 1) из членов, которые не делятся на $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$, и поэтому эта группа получится, если в (40.18) положить $x^3=\overset{0}{x}{}^3$; следовательно, это будет произвольная функция от x^1, x^2, x^4; 2) из членов, содержащих $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$ в первой степени; эта группа получится, если разложение (40.18) продифференцировать по x^3 и затем положить $x^3=\overset{0}{x}{}^3$. Это снова определит некоторую функцию от x^1, x^2, x^4. Таким образом, для главной производной $\partial_3 g_{22}$ параметрическая часть имеет вид:

$$A(x^1,\ x^2,\ x^4)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\,B(x^1,\ x^2,\ x^4). \qquad (40.19)$$

Вторая главная производная $\partial_{34} g_{22}$ показывает, что нужно вычеркнуть в разложении (40.18) члены, делящиеся на произведение $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)(x^4-\overset{0}{x}{}^4)$. Это будут те члены разложения, которые: 1) не делятся на $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$, т. е. $A(x^1, x^2, x^4)$, и 2) члены, содержащие $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$, но не содержащие $x^4-\overset{0}{x}{}^4$; они получаются, если (40.19) продифференцировать по x^3 и положить затем $x^4=\overset{0}{x}{}^4$. Это приводит к функции от переменных x^1, x^2, и потому разложение для g_{22} будет иметь вид:

$$A(x^1,\ x^2,\ x^4)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\,B(x^1,\ x^2). \qquad (40.20)$$

Наконец, для третьей главной производной $\partial_{44} g_{22}$ нужно вычеркнуть в (40.20) члены, делящиеся на $(x^4-\overset{0}{x}{}^4)^2$. После этого останутся члены, которые: 1) не делятся на $x^4-\overset{0}{x}{}^4$; они найдутся, если в (40.20) $x^4=\overset{0}{x}{}^4$, т. е. имеют вид:

$$A(x^1,\ x^2)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\,B(x^1,\ x^2),$$

и 2) члены, содержащие $x^4-\overset{0}{x}{}^4$, но не содержащие $(x^4-\overset{0}{x}{}^4)^2$; они найдутся, если разложение продифференцировать по x^4 и затем положить $x^4=\overset{0}{x}{}^4$. Это дает некоторую функцию от x^1, x^2. Следовательно, параметрическая часть будет иметь вид:

$$A(x^1,\ x^2)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\,B(x^1,\ x^2)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\,C(x^1,\ x^2).$$

Это полностью определяет произвол в задании $g_{22}(x)$;

кроме того, в разложение этого потенциала войдет еще *главная часть*, не содержащая произвола, которая, вообще говоря, будет зависеть от всех четырех независимых переменных x^α $(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Ясно, что A, B, C представляют собой данные Коши на $x^4=\text{const}$: $g_{22}(x^1,\ x^2)$, $\partial_3 g_{22}(x^1,\ x^2)$, $\omega_{22}(x^1,\ x^2)$. Таким образом,

$$g_{22}=A(x^1,\ x^2)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)B(x^1,\ x^2)+\\ +(x^4-\overset{0}{x}{}^4)C(x^1,\ x^2)+\psi_{22}(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4),$$

где ψ_{22} — главная часть потенциала, целиком определяющаяся при помощи уравнений поля, если определены данные Коши.

Повторяя эти рассуждения для каждого из потенциалов и несколько изменяя обозначения произвольных функций, получим для потенциалов следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
g_{11}&=f_{11}(x^1, x^2, x^3)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{11}(x^1, x^2, x^3)+\psi_{11},\\
g_{12}&=f_{12}(x^1, x^2, x^3)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{12}(x^1, x^2, x^3)+\psi_{12},\\
g_{13}&=f_{13}(x^1, x^2, x^3)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{13}(x^1, x^2)+\psi_{13},\\
g_{22}&=f_{22}(x^1, x^2)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{22}(x^1, x^2)+\\
&\qquad\qquad+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\theta_{22}(x^1, x^2)+\psi_{22},\\
g_{23}&=f_{23}(x^1, x^2, x^3)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{23}(x^1, x^2)+\psi_{23},\\
g_{33}&=f_{33}(x^1, x^2, x^3)+(x^4-\overset{0}{x}{}^4)\varphi_{33}(x^1, x^2, x^3)+\psi_{33},\\
g_{i4}&=0\quad(i=1,\ 2,\ 3),\qquad g_{44}=1,
\end{aligned}\right\}\tag{40.21}$$

где функции ψ_{ij} определяют главные части потенциалов, вполне определяемые параметрическими частями и уравнениями поля. Функции f_{ij}, φ_{ij}, θ_{ij} определяют искомый произвол в общем решении для полугеодезической системы координат.

Нужно учесть, что выбор поверхности S, для которой решается задача Коши, является произвольным, что дает одну произвольную функцию $x^4=\Phi(x^1,\ x^2,\ x^3)$.

Нас интересует *произвол в построении самого пространства, безотносительно к выбору начальной гиперповерхности*. Поэтому произвол уменьшается на одну функцию, и в окончательном подсчете произвольных функций нужно учесть этот факт. Тогда остается все же некоторый произвол в выборе системы координат. Именно система координат во всем пространстве определена, но остается еще возможность, не меняя выбранную в V_4 систему гиперповерхности $x^4 = \mathrm{const}$, производить преобразования вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

на гиперповерхностях $x^4 = \mathrm{const}$. Пользуясь такими преобразованиями на гиперповерхности Коши $x^4 = 0$, три из потенциалов $g_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ можно обратить в наперед заданные функции, согласно известной теореме Римана. Для этого на $x^4 = 0$ можно специализировать некоторым образом систему координат: можно, например, в V_3 ввести полугеодезическую систему или наложить иные требования; последнее автоматически снижает полученный выше произвол на *три функции от трех аргументов каждая*.

После этого остается еще произвол в выборе координат на $x^4 = \mathrm{const}$, который *с точностью до перенумерации* можно записать в виде:

$$x^{s'} = x^{s'}(x^1, x^2) \qquad (s' = 1, 2),$$

за счет которого можно уменьшить произвол в задании потенциалов на $x^4 = 0$ *на две функции от двух переменных*.

Таким образом, *произвол, с которым в полугеодезической системе координат можно определить потенциалы поля, определяется в четыре функции от трех аргументов и три функции от двух аргументов* (*данные Коши*).

Этот произвол в такой максимально упрощенной полугеодезической системе координат, так сказать, отражает тот неустранимый остаток, который в общем случае выражает *чисто гравитационный эффект*, и в этом смысле его можно условно назвать *физическим произволом*.

Задачи

1. Получить формулы (40.21) для всех потенциалов так же, как это было сделано для $g_{22}(x)$.

2. Показать, что произвол для пространств T_1 не меньше, чем для пространств T_2 и T_3, и, следовательно, определяется в четыре функции от трех аргументов и три функции от двух аргументов.

3. Показать, что «физический» произвол для пространств T_2 в полугеодезической системе координат определяется в две функции от трех аргументов и семь функций от двух аргументов ([261], стр. 237).

4. Показать, что для T_3 «физический» произвол будет равен девяти функциям от двух независимых переменных ([261], стр. 237).

§ 41. Характеристические и бихарактеристические многообразия

В каждой точке пространства V_4 (см. § 2), в силу неопределенности метрики, существует конус изотропных направлений

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0,$$

который отделяет область вещественных векторов с положительной нормой от области вещественных векторов с отрицательной нормой. Каждый вектор, лежащий на этом конусе, будет изотропным. Если гиперповерхность S такова, что в каждой из своих точек она касается изотропного конуса, отвечающего этой точке, то касательная плоскость в этой точке к S будет изотропной, а метрика — вырожденной (§ 7), и следовательно, нормаль к гиперповерхности будет изотропной. Если уравнение S имеет вид $f(x^{\alpha})=0$, то

$$\Delta_1 f=g^{\alpha\beta}f_{,\alpha}f_{,\beta}=0. \qquad (41.1)$$

Уравнение (41.1) определяет *изотропную* гиперповерхность пространства V_4, которую будем обозначать, как и ранее, $\overset{*}{V}_3$ и назовем *характеристическим многообразием* относительно уравнений поля. В специальной системе координат, когда S задается уравнением $x^4=0$, уравнение (41.1) принимает вид:

$$\Delta_1(x^4)=g^{44}=0.$$

Это условие приводит к тому, что из уравнений (39.5) не определяется явно $\partial_{44}g_{ij}$, что, как известно (И. Г. Петровский [106], гл. I), может привести к тому, что $\partial_{44}g_{ij}$ будут прерывными на S, а число решений уравнений поля при одних и тех же данных Коши может быть бесконечным: *изотропные конусы будут характеристическими для уравнений поля Эйнштейна. Изотропные гиперповерхности* $\overset{*}{V}_3$, *касательные к изотропным конусам, будут характеристическими многообразиями уравнений поля.* Если интерпретировать этот факт в терминах геометрической оптики, то изотропную нормаль к $\overset{*}{V}_3$ можно понимать как *волновой вектор*, касательный к световому лучу, f — как *эйконал*, а уравнение (41.1) — как *уравнение эйконала* (П. Ландау и Е. Лифшиц [156], стр. 283).

Покажем, что характеристические многообразия $\overset{*}{V}_3$ можно получить, если заданы некоторые кривые C_0, называемые *бихарактеристиками уравнений поля*, и 1-параметрическое семейство гиперплоскостей, определенных в каждой точке бихарактеристики.

Рассмотрим билинейную форму

$$H(x^\alpha,\ y_\sigma)=\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$$

и неоднородное уравнение с частными производными

$$2H(x^\alpha,\ \partial_\sigma f)=C,$$

где C — произвольная постоянная. Этому уравнению отвечает система обыкновенных уравнений

$$\frac{dx^1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}=\frac{dx^2}{\frac{\partial H}{\partial y_2}}=\frac{dx^3}{\frac{\partial H}{\partial y_3}}=\frac{dx^4}{\frac{\partial H}{\partial y_4}}=-\frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial x^1}}=$$

$$=-\frac{dy_2}{\frac{\partial H}{\partial x^2}}=-\frac{dy_3}{\frac{\partial H}{\partial x^3}}=\frac{dt}{2H}\cdot$$

относительно переменных x^α, y_σ, допускающих первый интеграл

$$2H(x^\alpha,\ y_\sigma)=C,$$

когда $C=\mathrm{const}$. Вводя вспомогательный параметр u, можно переменные x^α, y_σ задать как функции этого параметра при помощи канонических систем

$$\frac{dx^\alpha}{du}=\frac{\partial H}{\partial y_\alpha},\quad \frac{\partial y_\alpha}{\partial u}=-\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \tag{41.2}$$

в которых правые части выражаются, если задана функция Гамильтона $H(x^\alpha,\ y_\sigma)$. Обозначая $\frac{dx^\alpha}{du}=\dot{x}^\alpha$, первую группу уравнений (41.2) можно записать в виде:

$$\dot{x}^\alpha=g^{\alpha\beta}y_\beta \tag{41.3}$$

и, следовательно, наоборот:

$$y_\beta=g_{\beta\sigma}\dot{x}^\sigma.$$

Это приводит к выводу, что x^α и (41.2) определяют экстремали функции Лагранжа

$$2L=g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta,$$

так как, переходя от переменных $(x^\alpha,\ \dot{x}^\beta)$ к переменным $(x^\alpha,\ y_\sigma)$, которые связаны между собой при помощи соотношений (41.3), придем к классическому соотношению между L и H:

$$H=\dot{x}^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}-L.$$

Решения этого уравнения являются экстремалями, удовлетворяющими первому интегралу

$$2L=C,\quad C=\mathrm{const}. \tag{41.4}$$

Это означает, что полученные экстремали будут экстремалями и для

$$\sqrt{2L}=\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta},$$

если имеют место (41.3). Но это означает, что кривые x^α определяют геодезические линии пространства V_4 (§ 6).

Если, в частности, $C=0$, то система уравнений эйконала (41.1) допускает первый интеграл $f=\text{const}$ и многообразия $\overset{*}{V}_3$ могут быть найдены при помощи геодезических нулевой длины, т. е. изотропных геодезических, если брать изотропные гиперплоскости, касательные к изотропному конусу, вдоль касательной к изотропной кривой.

Можно заранее утверждать, что бихарактеристики — изотропные кривые, так как из теории уравнений с частными производными известно, что, если дано множество многообразий $\overset{*}{V}_3$, касающихся элементарного конуса в X_n, вдоль образующей g, касательная к кривой C_0, связанной с $\overset{*}{V}_3$ в X_n, есть g. Но не всякая изотропная кривая является геодезической. Предыдущее рассуждение приводит к выводу, что *бихарактеристики уравнений Эйнштейна являются изотропными геодезическими.*

Отсюда на основе аналогии с теорией Адамара распространения волн были построены некоторые теории о природе гравитационных волн, основанные на представлении фронта волны как поверхности прерывности вторых производных потенциалов поля $g_{\alpha\beta}(x)$ ([231], § 16; [258]; [288]; [289]).

Прежде чем перейти к постановке внутренней задачи Коши, необходимо остановиться на изучении тензора энергии-импульса, от физических свойств которого существенно должны зависеть метрика пространства V_4 и характер потенциалов поля $g_{\alpha\beta}(x)$.

§ 42. Тензор энергии-импульса

Рассмотрим в некотором V_n точку P и совокупность направлений, исходящих из P, удовлетворяющих соотношению

$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta=0,$$

где $R_{\alpha\beta}$ — тензор Риччи. Мы получим, таким образом, конус второго порядка (конус Риччи), инвариантно связанный с точкой P. Риччи предложил назвать главные направления этого конуса *главными направлениями пространства V_n в данной точке.* Если, кроме того, в плоском пространстве, касательном к V_n в данной точке (§ 1), взять поверхность второго порядка с центром в этой точке, уравнение которой имеет вид (для случая, когда $T_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$):

$$(R_{\alpha\beta} - \varkappa g_{\alpha\beta}) \xi^\alpha \xi^\beta = 0,$$

то главные направления этой поверхности, называемой иногда *индикатрисой Эйнштейна*, будут и главными направлениями Риччи, если они изотропны. Тогда система уравнений поля в случае свободного пространства или в случае, когда $T_{\alpha\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}$, определяется требованием, чтобы эти направления были неопределенными, т. е. *в каждой точке индикатриса Эйнштейна должна быть гиперсферой.*

Можно дать другие определения пространств Эйнштейна, основанные на других понятиях ([107]; [98], стр. 199—200; [261], стр. 4; [150]).

Таким образом, главные направления пространства V_4 удовлетворяют условиям

$$R_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0, \qquad (42.1)$$

и тогда из уравнений поля (α) следует, что главные направления будут *сопряженными* также относительно тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0.$$

Если мы найдем собственный вектор тензора $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{\alpha\beta}\xi^\beta = \lambda\xi_\alpha$$

и он окажется изотропным или же имеет собственное число λ, равное нулю, то такой вектор в обоих случаях будет и главным вектором пространства V_4 и отвечает уравнениям поля (с дополнительным требованием изотропности во втором случае). Следовательно, определение главных направлений пространства V_4 связано с определением собственных векторов $T_{\alpha\beta}$, которые должны удовлетворять уравнениям

$$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})\xi^\beta = 0, \qquad (42.2)$$

а собственнные числа, отвечающие ξ^β, будут в то же время *базисами элементарных делителей* λ-матрицы

$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$ (§ 9) и одновременно корнями характеристического уравнения

$$|\, T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta} \,| = 0. \tag{42.3}$$

Если известны $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, то всегда можно определить собственные числа и собственные векторы (с некоторым произволом в случае кратных корней (42.3)). Наоборот, если известны собственные числа $\underset{\sigma}{\lambda}$, собственные векторы $\underset{\sigma}{\xi}_\alpha$ тензора $T_{\alpha\beta}$ и *элементарные делители* λ-*матрицы* $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$, то можно выразить $g_{\alpha\beta}$ и $T_{\alpha\beta}$ в любой системе (голономной или неголономной) координат через $\underset{\sigma}{\lambda}$ и $\underset{\sigma}{\xi}_\alpha$. Подчеркнем, что в отличие от задач классической механики, где один из тензоров $T_{\alpha\beta}$ или $g_{\alpha\beta}$ был определенным и поэтому λ-матрица $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$ была всегда простого типа, в V_4, определяющем пространство-время, $g_{\alpha\beta}$, по существу, *неопределенный* и поэтому на первый план при общем изучении выдвигается вопрос об элементарных делителях λ-матрицы

$$(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}), \tag{42.4}$$

о ее характеристике (§ 9); при этом собственные числа могут быть, вообще говоря, *комплексными*, собственные векторы, все или некоторые, — изотропными, а элементарные делители — *не простыми*.

Такая классификация всех возможных структур тензора энергии-импульса очевидным образом получается из результатов § 9 и исчерпывается следующими случаями характеристик:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I.}\ \ [1\,1\,1\,1],\ \ [(1\,1)\,1\,1],\ \ [(1\,1)\,(1\,1)],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [(1\,1\,1)\,1],\ \ [(1111)],\\
&\text{II.}\ \ [2\,1\,1],\ \ [(2\,1)\,1],\ \ [2\,(1\,1)],\ \ [(2\,1\,1)],\\
&\text{III.}\ \ [3\,1],\ \ [(3\,1)],\\
&\text{IV.}\ \ [4].
\end{aligned}\right\} \tag{42.5}$$

Здесь круглыми скобками отмечены те частные случаи, которые возникают, если некоторые базисы элементарных делителей одинаковы; так, характеристике [(2 1) 1] отвечают элементарные делители λ-матрицы (42.4) вида

$(\lambda-\underset{1}{\lambda})^2$, $(\lambda-\underset{1}{\lambda})$, $(\lambda-\underset{2}{\lambda})$ и т. д. Так как существенным является решение вопроса на *вещественном* пути, то при наличии комплексных $\underset{\sigma}{\lambda}$ и, следовательно, комплексных $\underset{\sigma}{\xi}^{\alpha}$ собственных векторов такую классификацию необходимо было дать, пользуясь только вещественными преобразованиями.

Вводя в каждой точке пространства V_4 неголономный *вещественный* орторепер, определяющий метрику Минковского, или некоторый квазиорторепер, можно для каждой из характеристик (42.5) записать в этом локальном орторепере канонический вид тензора $T_{\alpha\beta}$. Этот результат записывается формулами (9.4) в случае вещественных собственных чисел $T_{\alpha\beta}$ и (9.6) для комплексных $\underset{\sigma}{\lambda}$ или в общем случае формулами (9.7). После этого не представляет затруднений показать, что метрический тензор $g_{\alpha\beta}(x)$ и тензор $T_{\alpha\beta}(x)$ можно выразить через собственные векторы и собственные числа:

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{r}\underset{k}{g}_{\alpha\beta},\qquad T_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{r}\underset{k}{T}_{\alpha\beta},\qquad\qquad(42.6)$$

где r — число элементарных делителей, а $\underset{k}{g}_{\alpha\beta}$ и $\underset{k}{T}_{\alpha\beta}$ имеют структуру, отвечающую некоторому данному элементарному делителю. Конкретные формулы приведены в [165] (стр. 47 — 51). Формулы (42.6), полученные в силу канонического вида матриц (9.7) в неголономном орторепере, *имеют место, конечно, в любой системе координат.* Этим решается общая формальная задача изучения тензора энергии-импульса. Что же касается физической интерпретации различных типов (42.5), то она получена только для некоторых специальных случаев характеристик (42.5) λ-матрицы (42.4), которые приведены далее.

Тензор энергии-импульса «чистой материи» или, как иногда называют, *тензор энергии-импульса потока масс* ([188], стр. 304) отвечает тому случаю, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ имеет единственный собственный вектор с ненулевым собственным числом, ориентированным во времени, и интерпретируется физически как касательный вектор τ^{α} к четырехмерной траектории потока масс;

его собственное число $\lambda_4 \equiv M_0(x^\alpha)$, где $M_0(x)$ — *плотность покоя*. Все остальные собственные числа $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Вектор τ^α можно дополнить в этом случае до ортoрепера неоднозначно при помощи трех векторов $\underset{i}{\xi}^\alpha$ $(i = 1, 2, 3)$. Таким образом, имеем:

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma=1}^{4} e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta, \quad e_4 = -e_1 = -e_2 = -e_3 = 1, \quad \underset{4}{\xi}_\alpha = \tau_\alpha \tag{42.7}$$

и

$$T_{\alpha\beta} = \mu_0 \tau_\alpha \tau_\beta. \tag{42.8}$$

При этом, как известно ([188], стр. 305), в ортoрепере компоненты $T^{\alpha\beta}$ имеют следующий физический смысл: T^{44} определяют *плотность энергии в потоке*; T^{4i} $(i = 1, 2, 3)$ — *плотность проекций импульса на оси Ox, Oy, Oz, умноженную на с или деленную на с, плотность потока энергии в направлении i-й оси*; T^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — *плотность потока импульса на i-ю ось в направлении j-й оси.*

По схеме (42.5) мы имеем здесь случай характеристики простого типа I, когда она имеет вид $[1\ \overset{0}{(1\ 1\ 1)}]$, где «0» над круглой скобкой означает, что три базиса элементарных делителей (собственные числа) равны нулю.

Тензор энергии-импульса макроскопических тел, который, например, имеет место для «идеальной жидкости». Так как поток импульса через элемент $d\sigma$ поверхности тела является силой, действующей на $d\sigma$, то $T_{\alpha\beta}\,d\sigma^\beta$ представляет собой α-ю компоненту силы. Так как для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях исчезающие малы по сравнению с давлениями, существенными в теории относительности, то с большим приближением можно считать, что картина будет аналогична той, которая имеет место для «идеальной жидкости». Введем в данном элементе объема собственную систему отсчета. В такой системе давление, которое оказывает данный участок тела, перпендикулярно к площадке, на которую оно производится одинаково во всех направлениях (закон Паскаля). Следовательно,

$$T_{\alpha\beta}\,d\sigma^\beta = p\,d\sigma_\alpha,$$

иными словами,

$$T_{ij}=pg_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

Компоненты T_{i4} определяют плотность импульса, они равны нулю, а компоненты T_{44} определяют плотность энергии ε тела; следовательно, $\frac{\varepsilon}{C^2}$ определит плотность массы тела, т. е. массу единицы «собственного» объема. Следовательно, в собственной системе отсчета для элемента объема

$$(T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{42.9}$$

Пусть скорость макроскопического движения элемента объема будет u_α. Для собственной системы отсчета, где объем покоится, $u_i=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, $u_4=1$. Следовательно, для матрицы (42.9) имеет место соотношение, справедливое, в силу тензорного характера, уже не только в собственной системе, а в любой системе координат:

$$T_{\alpha\beta}=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta+pg_{\alpha\beta}. \tag{42.10}$$

Из (42.9) следует, что элементарные делители λ-матрицы (42.4) будут все первой степени, т. е. имеет место, опять-таки по схеме (42.5), тип I с характеристикой $[(1\ 1\ 1)\ 1]$. Полагая давление $p=0$, получим тензор энергии-импульса (42.8), где $\varepsilon=\mu_0$. Тензоры (42.8) и (42.10) широко применяются в различных вопросах релятивистской гидродинамики ([210] – [212]).

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. В специальной теории относительности показывается, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля может быть сконструирован из кососимметрического тензора $F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$, называемого *тензором электромагнитного поля* ([173], стр. 191 — 202; [156], § 32; [272]; [273], [304]; [218]; [237]). Именно, при помощи $F_{\alpha\beta}$ тензор энергии-импульса электромагнитного поля выражается в виде:

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\alpha\beta}-F_{\alpha\sigma}F^{\sigma}_{\beta}, \tag{42.11}$$

откуда следует, что *«след» тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю*:

$$T^{\sigma}_{\sigma}=g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}=0. \tag{42.12}$$

Для того чтобы оценить тензор $T_{\alpha\beta}$ (42.11) в смысле его алгебраической структуры, можно, например, поступить следующим образом. В локальном неголономном ортореперe, как известно из специальной теории относительности, компоненты F_{i4} определяют составляющие электрического поля относительно этого репера, а F_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ — составляющие магнитного поля. Именно если вектор электрического поля имеет пространственные компоненты $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, а вектор магнитного поля $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1&=F_{14}=-F^{14}, & \beta_1&=F_{23}=F^{23},\\
\alpha_2&=F_{24}=-F^{24}, & \beta_2&=F_{31}=F^{31},\\
\alpha_3&=F_{34}=-F^{34}, & \beta_3&=F_{12}=F^{12},
\end{aligned}\right\} \tag{42.13}$$

где поднятие и опускание индексов осуществляются при помощи метрического тензора Минковского в данном ортореперe. Поэтому из (42.11) и (42.13) непосредственно имеем:

$$(T_{\alpha\beta})=$$
$$=\begin{pmatrix}
\nu & \alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\\
\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3 & \nu-\alpha_1^2-\beta_1^2 & -\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 & -\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_3\\
\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1 & -\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 & \nu-\alpha_2^2-\beta_2^2 & -\alpha_2\alpha_3-\beta_2\beta_3\\
\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2 & -\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_3 & -\alpha_2\alpha_3-\beta_2\beta_3 & \nu-\alpha_3^2-\beta_3^2
\end{pmatrix}, \tag{42.14}$$

где

$$\nu=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i^2+\beta_i^2). \tag{42.15}$$

Полная группа лоренцевых вращений состоит из трех пространственных вращений и трех лоренцевых. Если фиксировать вектор $\underset{4}{\bar{e}}$ и тем самым ортогональную к нему неизотропную гиперплоскость, то на этой гиперплоскости за счет трех чисто пространственных вращений можно так специализировать систему координат (на гиперплоскости с определенно-отрицательной метрикой), чтобы выполнялись некоторые три условия. Например, как в этом легко непосредственно убедиться, на *вещественном пути* совместны требования в новой системе координат:

$$\alpha_3' = \beta_3' = \alpha_1'\alpha_2' + \beta_1'\beta_2' = 0. \tag{42.16}$$

Так как вообще имеем тождество для любого орторепера

$$(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2), \tag{42.17}$$

то, полагая

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = a^2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = b^2,$$

получим из (42.14), (42.16) и (42.17) в новой системе координат (штрихи опускаем):

$$(T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{2} & 0 & 0 & \pm ab \\ 0 & \frac{-a^2+b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{2} & 0 \\ \pm ab & 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{42.18}$$

Отсюда следует, что корни характеристического уравнения (42.3) будут $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4 = \lambda = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$.

Следовательно, *тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет четыре вещественных собственных числа, попарно равных и попарно противоположных по знаку* (Синг [96]; Рузе [99], стр. 302—322). Но можно, определяя при помощи матрицы (42.18) элементарные делители λ-матрицы $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$ (§ 9), непосредственно показать несколько больше.

Можно различать два случая: 1) $\lambda \neq 0$ и 2) $\lambda = 0$. В первом случае, ввиду наличия простых элементарных делителей и равенств, по абсолютной величине собственных чисел $T_{\alpha\beta}$, пользуясь формулой (9.4), получим следующие канонические формы для матриц $(g_{\alpha\beta})$ и $(T_{\alpha\beta})$:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$(T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}+\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

и следовательно, здесь имеет место характеристика простого типа [(1 1) (1 1)]. Из этих матриц можно непосредственно выразить $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ через собственные векторы и собственные числа $T_{\alpha\beta}$ по формулам

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma} e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta,\qquad T_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma} e_\sigma \underset{\sigma}{\lambda}\underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta,$$

которые справедливы, впрочем, только для характеристик простого типа, как в данном случае.

Следовательно, получим:

$$T_{\alpha\beta}=\lambda\,(-\underset{1}{\xi}_\alpha\underset{1}{\xi}_\beta+\underset{2}{\xi}_\alpha\underset{2}{\xi}_\beta+\underset{3}{\xi}_\alpha\underset{3}{\xi}_\beta+\underset{4}{\xi}_\alpha\underset{4}{\xi}_\beta),$$

$$g_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma} e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta, \tag{42.19}$$

где единичные ортогональные векторы $\underset{2}{\xi}^\alpha$ и $\underset{3}{\xi}^\alpha$ оба пространственные, выбранные в площадке $\{\underset{2}{\xi}, \underset{3}{\xi}\}$ с точностью до вращения, а векторы $\underset{1}{\xi}^\alpha$ и $\underset{4}{\xi}^\alpha$ единичные, ортогональные, определяемые в площадке $\{\underset{1}{\xi}, \underset{4}{\xi}\}$ с точностью до лоренцева вращения, так что $\underset{1}{\xi}$ пространственный, а $\underset{4}{\xi}$ временной.

В случае 2), который называют *особым случаем*, $\lambda=\frac{a^2-b^2}{2}=0$ и, следовательно, $b=\varepsilon a$, $\varepsilon=\pm 1$. Вычисляя в этом предположении для тензора $T_{\alpha\beta}$, определенного матрицей (42.18) и $(g_{\alpha\beta})$, взятыми в форме Минковского, элементарные делители λ-матрицы $(T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$ (см. § 9), убедимся, что тут имеет место характеристика *непростого типа* $[(2\overset{0}{1}1)]$. Для такой характеристики характерен один *изотропный собственный вектор* тензора $T_{\alpha\beta}$, а канонический вид $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ принимает особенно простой вид, если вместо ортoрепера ввести квазиортoрепер, для которого этот изотропный вектор использован в качестве координатного. Общий вид канонических матриц для такой характеристики для этого квазиортoрепера по формуле (9.11) будет

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} e_1\underset{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_2\underset{2}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{\lambda}\\ 0 & 0 & \underset{3}{\lambda} & 1\end{pmatrix}.$$

Но в данном случае, когда $\underset{1}{\lambda}=\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}=0,\ e_1=e_2=-1$, получим:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{42.20}$$

откуда следует:

$$T_{\alpha\beta}=\underset{4}{e}_\alpha\underset{4}{e}_\beta, \tag{42.21}$$

где вектор $\underset{4}{e}_\alpha$ изотропный, как это непосредственно видно из (42.20) при рассмотрении матрицы $(g_{\alpha\beta})$. Разумеется, формула (42.21) имеет место уже в любой системе координат.

В силу изотропности вектора $\underset{4}{e}_\alpha$ его можно умножать на любое число, *не изменяя его нормы*, и поэтому в (42.21) справа можно при желании вставить множителем квадрат любого скаляра. Не представляет труда от квазирепера (42.20) перейти к ортoреперу при помощи подстановки типа

$$x_3\longrightarrow x_3+x_4,\qquad x_4\longrightarrow x_3-x_4.$$

Особый случай электромагнитного поля дает первый пример тензора энергии-импульса с характеристикой по схеме (42.5) непростого типа.

Кроме этих тензоров, рассматривают также тензор энергии-импульса для поля, образованного наложением двух или нескольких полей. Например, *тензор энергии-импульса, отвечающий идеальной жидкости и электромагнитному полю* ([173], стр. 18), *будет иметь вид*:

$$T_{\alpha\beta}=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta-pg_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}\,(F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau})\,g_{\alpha\beta}-F_{\alpha\sigma}F^{\sigma}_{\beta},\qquad(42.22)$$

где u_α есть u-скорость движения частиц — неизотропный вектор.

Отметим также *тензор энергии-импульса диссипативных процессов*, появляющийся тогда, когда требуется установить релятивистские уравнения гидродинамики с учетом *вязкости и теплопроводности* ([193], стр. 606).

Искомый тензор энергии-импульса получится, если к правой части (42.10) прибавить некоторый тензор $\tau_{\alpha\beta}$, и для вектора плотности вещества h_i также придется найти некоторую дополнительную компоненту ν_α. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}T_{\alpha\beta}&=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta+pg_{\alpha\beta}+\tau_{\alpha\beta},\\ h_\alpha&=hu_\alpha+\nu_\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(42.23)$$

Скорость u^α определяется так, чтобы в *собственной системе отсчета* каждого данного элемента жидкости его импульс был равен нулю, а его энергия выражалась бы через другие термодинамические величины теми же функциями, как и при отсутствии диссипативных процессов. В собственной системе отсчета $\tau_{44}=\tau_{4i}=0$ и $u^i=0$, а следовательно,

$$\tau_{\alpha\beta}u^\beta=0,\qquad(42.24)$$

соотношение справедливое, в силу своего тензорного характера, уже и в любой системе координат. Так как в собственной системе компонента h^4 *4-вектора потока частиц* должна совпадать с плотностью числа частиц h, то

$$\nu_\alpha h^\alpha=0,\qquad(42.25)$$

Уравнения движения жидкости должны следовать из уравнений

$$\partial_\sigma T^\sigma_\alpha = 0, \quad \partial_\alpha h^\alpha = 0, \tag{42.26}$$

из которых следует соотношение

$$u^\alpha \partial_k T^k_\alpha = -T\partial_\alpha(\sigma u^\alpha) + \mu\,\partial_\alpha \nu^\alpha + u^\alpha\,\partial_\sigma \tau^\sigma_\alpha,$$

где $\mu = \frac{w-\tau_\sigma}{h}$ — релятивистский химический потенциал вещества. Используя (42.24), получим:

$$\partial_\alpha\left(\sigma u^\alpha - \frac{\mu}{T}\nu^\alpha\right) = -\nu^\alpha\,\partial_\alpha\left(\frac{\mu}{T}\right) - \frac{1}{T}\tau^\sigma_\alpha\,\partial_\sigma u^\alpha.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой 4-дивергенцию потока энтропии и поэтому справа будем иметь величину, характеризующую возрастание энтропии в результате диссипативных процессов. Следовательно, вектор плотности потока энтропии равен

$$\sigma^\alpha = \sigma u^\alpha - \frac{\mu}{T}\nu^\alpha. \tag{42.27}$$

Тензор $\tau_{\alpha\beta}$ и вектор ν^α должны выражаться линейно через градиенты скорости и термодинамических величин так, чтобы соблюдалось требование: правая часть (42.19) положительна. Это требование вместе с (42.24) и (42.25) позволяет определить $\tau_{\alpha\beta}$ и ν^α однозначно в виде:

$$\tau_{\alpha\beta} = \eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} + u_\beta u^\sigma\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\sigma} + u_\alpha u^\sigma\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\sigma}\right) - \\ - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u_\sigma}{\partial x^\sigma}(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta),$$

$$\nu_\alpha = -\frac{\chi}{c}\left(\frac{h\tau}{p+\varepsilon}\right)^2\left[\partial_\alpha\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_\alpha u^\sigma\,\partial_\sigma\left(\frac{\mu}{T}\right)\right].$$

Отсюда, переходя к инвариантной форме, можно написать:

$$\tau^{\alpha\beta} = \eta\left[(g^{\alpha\sigma} - u^\alpha u^\sigma)u^\beta_{,\sigma} + (g^{\beta\sigma} - u^\beta u^\sigma)u^\alpha_{,\sigma}\right] - \\ - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)(u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta})u^\sigma_{,\sigma}. \tag{42.28}$$

Здесь η и ζ — коэффициенты вязкости.

Возможны и другие комбинации полей. Отметим, что все приведенные тензоры $T_{\alpha\beta}$, кроме (42.28), относятся к простейшему виду характеристик типа схемы (42.5).

Исследование тензора $T_{\alpha\beta}$, определяющего распределение и движение и свойства материи, имеет основное значение и приводит к ряду интересных физических выводов (см., например, [273]).

§ 43. Закон сохранения тензора энергии-импульса

Если уравнения поля записать в виде:

$$S_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta} \tag{43.1}$$

и учесть, что тензор Эйнштейна $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяет тождеству $S^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}=0$, $\lambda=\mathrm{const}$, то тензор $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет закону сохранения

$$T^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}=0. \tag{43.2}$$

Посмотрим, какие физические следствия можно получить из (43.2) для некоторого заданного тензора $T_{\alpha\beta}$. Рассмотрим прежде всего тензор $T_{\alpha\beta}$, определяемый формулами (42.8) и (42.10) соответственно для потока масс и идеальной жидкости. Чтобы сблизить эти два случая, запишем тензор энергии-импульса в виде:

$$T_{\alpha\beta}=ru_{\alpha}u_{\beta}-\theta_{\alpha\beta}, \tag{43.3}$$

где u_{α} — единичный вектор скорости, ориентированный во времени, r — скалярная плотность и $\theta_{\alpha\beta}$ — некоторый относительный симметрический тензор. Таким образом,

$$g_{\alpha\beta}\,u^{\alpha}u^{\beta}=1 \tag{43.4}$$

и

$$u^{\alpha}{}_{,\beta}\,u_{\alpha}=0. \tag{43.5}$$

Если обозначить

$$\theta^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}=r\sigma_{\beta}, \tag{43.6}$$

то закон сохранения (43.2) запишется в виде:

$$(ru^{\alpha}\,u_{\beta})_{,\alpha}=r\sigma_{\beta},$$

т. е. скаляр r и вектор u_α, кроме (43.4) и (43.5), удовлетворяют еще соотношению

$$(ru^\alpha)_{,\alpha} u_\beta + ru^\alpha u_{\beta,\,\alpha} = r\sigma_\beta; \tag{43.7}$$

свертывая с u^β это соотношение и используя (43.4) и (43.5), придем к выводу, что

$$(ru^\alpha)_{,\alpha} = r\sigma_\alpha u^\alpha. \tag{43.8}$$

Так как $r \neq 0$, то отсюда получим:

$$u^\alpha u_{\beta,\,\alpha} = (g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)\,\sigma^\alpha. \tag{43.9}$$

Теперь уравнения (43.8) и (43.9) получают следующее предварительное истолкование. Во-первых, отметим, что левая часть (43.8) напоминает хорошо известное выражение, входящее в уравнение непрерывности. Кроме того, если $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$, то уравнения (43.9) можно истолковать как систему дифференциальных уравнений, определяющих *линии тока*, если считать заданным вектор σ^α.

Закон сохранения для тензора потока масс. В этом случае из (43.8) следует:

$$r = \mu_0, \quad \theta_{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma_\beta = 0,$$

и уравнения (43.8) и (43.9) соответственно запишутся:

$$(\mu_0 u^\alpha)_{,\alpha} = 0, \tag{43.10}$$

$$u^\alpha u_{\beta,\,\alpha} = 0. \tag{43.11}$$

Условие (43.10) будет *уравнением непрерывности* изучаемой среды, выражающим тот факт, что *дивергенция вектора, выражающего произведение плотности покоя среды на единичный вектор скорости, равна нулю*, а уравнения (43.11) просто записывают тот факт, что *линии тока являются неизотропными геодезическими линиями* V_4.

Если положить

$$r = p + \varepsilon, \quad \theta_{\alpha\beta} = pg_{\alpha\beta}, \quad \sigma_\beta = \frac{1}{p+\varepsilon}(p\delta^\alpha_\beta)_{,\,\alpha} = \frac{1}{p+\varepsilon}\partial_\beta p,$$

то придем к тензору энергии-импульса (42.10). Предположим, кроме того, что при помощи некоторых соображений, например термодинамического характера, удалось установить уравнение состояния, связывающее собственную плотность и давление

$$\varepsilon = \varphi(p).$$

Тогда, как можно видеть,

$$\sigma = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varphi(p)+p},$$

и можно было бы показать, что в этом случае линии тока являются также неизотропными геодезическими, но уже не пространства V_4, а некоторого другого риманова пространства $\tilde{V}_4$, конформного к данному, метрика которого

$$\widetilde{ds}^2 = \omega^2 \, ds^2,$$

где в данном случае

$$\omega = e \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p+\varepsilon}.$$

Аналогичное утверждение будет иметь место вообще в том случае, если σ_β — градиентное поле ([231], § 17).

Мы не будем здесь рассматривать закон сохранения для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, так как это далее не понадобится (см. [231], гл. II, раздел II).

При исследовании внутренней задачи Коши, существенным образом зависящей от физического смысла и структуры тензора энергии-импульса, мы ограничимся рассмотрением тензора энергии-импульса в случае потока масс (43.8) и идеальной жидкости (43.10).

§ 44. Внутренняя задача Коши для потока масс

Рассмотрим внутреннюю задачу Коши для случая, отвечающего тензору энергии-импульса (42.18).

Если на гиперповерхности S задано гравитационное поле при помощи данных Коши, введенных в § 40, то требуется определить это поле вне S, если оно удовлетворяет уравнению

$$S^\alpha_\beta = \chi \varrho u^\alpha u_\beta, \qquad (44.1)$$

где $\varrho > 0$, а вектор u_α единичный. Мы предположим также, что S не касается изотропного конуса. Если локально система координат выбрана так, что S записывается уравнием $x^4 = 0$, то $g^{44} \neq 0$. Аналогично тому, как это делалось в случае решения внешней задачи, можно в данном случае ($g^{44} \neq 0$) систему (44.1) заменить двумя системами уравнений. Первая система состоит из шести уравнений:

$$R_{ij} = \chi\varrho\left(u_i u_j - \frac{1}{2} g_{ij}\right) \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{44.2}$$

вторая:

$$S^0_\alpha = \chi\varrho n^0 u_\alpha, \tag{44.3}$$

причем еще должны выполняться условия

$$g^{\sigma\tau} u_\sigma u_\tau = 1 \tag{44.4}$$

и

$$\varrho > 0. \tag{44.5}$$

В силу закона сохранения всякая система решений $\{g_{\alpha\beta},\ u_{\alpha,\,\varrho}\}$ этих уравнений удовлетворяет и уравнениям вида (43.10) (43.11), которые в данном случае можно записать в виде:

$$u^\alpha u_{\beta,\,\alpha} \equiv u^4\, \partial_4 u_\beta + \Psi_\beta = 0, \tag{44.6}$$

$$(\varrho u^\alpha)_{,\alpha} \equiv u^4\, \partial_4 \varrho + \varrho\ \partial_4 u^4 + F = 0, \tag{44.7}$$

где Ψ_β зависит от u_α, $\partial_i u_\alpha$ и данных Коши на S, а F определена как функция от u_α, $\partial_i u_\alpha$, ϱ, $\partial_i \varrho$ и опять-таки от данных Коши. Потребуем, чтобы $g_{\alpha\beta}$ и $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ были соответственно два и три раза непрерывно дифференцируемы на S. Имея в своем распоряжении данные Коши, однозначно на S определим компоненты $S^4{}_\alpha$. Кроме того, теперь можно определить на S ϱ и u_α. Для этого воспользуемся соотношением

$$(\chi\varrho u^4)^2 = g^{\sigma\tau} S^4{}_\sigma S^4{}_\tau.$$

Правая часть по смыслу больше нуля, т. е. $S^4{}_\alpha$ можно рассматривать как временииподобный вектор. Обозначая его норму

$$g^{\sigma\tau} S^4{}_\sigma S^4{}_\tau = \Omega^2,$$

найдем:

$$\chi\varrho u^4 = \Omega.$$

Вследствие этого, используя вторую группу уравнений поля (44.3), получим:

$$u_\alpha = \frac{1}{\Omega} S^4{}_\alpha, \quad u^4 = \frac{1}{\Omega} S^{44}, \quad \chi\varrho = \frac{\Omega^2}{S^{44}}.$$

Учитывая, что имеет место (44.5)

$$\varrho > 0,$$

получим, что и

$$S^{44} > 0. \tag{44.8}$$

Так как знак Ω является неопределенным, то для того, чтобы определить с помощью данных Коши u_α однозначно, необходимо знак Ω фиксировать определенным образом.

Теперь, учитывая результат, полученный при решении внешней задачи, можно утверждать, что первая группа уравнений поля (44.2) определяет на гиперповерхности S значения производных $\partial_{44} g_{ij}$. Кроме того, из (44.8) следует, что $u^4 \neq 0$, и следовательно, из уравнений (44.6) и (44.7) на гиперповерхности S можно определить $\partial_4 u_\alpha$ и $\partial_4 \varrho$.

Таким образом, если выполняются все предположения, упомянутые выше, то *на гиперповерхности S величины u_α, ϱ, $\partial_{44} g_{ij}$, $\partial_4 u_\alpha$, $\partial_4 \varrho$ непрерывны и имеют вполне определенное значение.*

Легко видеть, что если, в частности, данные Коши локально дифференцируемы большее число раз, то тот же вывод может быть отнесен к более высоким производным системы функций $\{g_{\alpha\beta}, u_\alpha, \varrho\}$: для этого достаточно продифференцировать по x^4 (44.2), (44.6), (44.7).

Чтобы завершить исследование, рассмотрим систему функций $\{g_{\alpha\beta}, u_\alpha, \varrho\}$, удовлетворяющую на гиперповерхности S условиям (44.3) (44.5). Выясним, что можно сказать о ней в окрестности S. Из (44.6) и (44.7) следует:

$$(S^\alpha{}_\beta - \lambda T^\alpha{}_\beta)_{,\alpha} = 0.$$

Записывая эту систему уравнений для решений (44.2), получим:

$$g^{44} \partial_4 (S^4{}_\alpha - \lambda T^4{}_\alpha) = A^{i\sigma}_\alpha \partial_i (S^4{}_\sigma - \lambda T^4{}_\sigma) + B^\sigma{}_\alpha (S^4{}_\sigma - \lambda T^4{}_\sigma)$$

и, применяя рассуждение, приведенное для случая внешней задачи, к уравнениям (39.17), получим, что (44.3) выполняется в окрестности S, если оно имеет место на S. Получаем систему в инволюции.

Этим решается задача определения данных Коши, и дело приводится к задаче *интегрирования «во времени» системы уравнений* (44.2), (44.6), (44.7), для которой имеется указанный в § 39 метод, при довольно слабых требованиях относительно класса функций.

В частности, в классе функций C^{a}, пользуясь классической теоремой существования Коши — Ковалевской, будем иметь единственное принадлежащее классу C^{α} решение с точностью до такой замены координат (см. § 39), которая сохраняет гиперповерхность *точечно* и данные Коши в предположении, что они удовлетворяют условиям

$$g^{44} \neq 0, \quad \Omega^2 = g^{\sigma\tau} S^4{}_\sigma S^4{}_\tau > 0, \quad S^{44} > 0.$$

Если для внутренней задачи Коши поставить вопрос о характеристическом многообразии, то по сравнению с внешней задачей получим еще многообразия, которые во внешнем случае не имеют места. Именно для внутренней задачи Коши возможны два типа гиперповерхностей S, на которых возможна прерывность данных Коши: 1) гиперповерхность S касается элементарного конуса — случай, уже рассмотренный для внешней задачи, когда

$$g^{44} = 0,$$

приводящий к изотропной гиперповерхности S; 2) многообразия $\widetilde{V}_3$, отвечающие условию

$$\Omega = 0,$$

что приводит к выводу

$$u^4 = 0$$

и, следовательно,

$$S^4{}_\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что гиперповерхность S образована линиями тока. Этот случай является новым по сравнению с внешней задачей.

Если предполагать, что плотность ϱ конечна, то случай $S^{44} = 0$ сводится к предыдущим и не представляет ничего нового.

§ 45. Внутренняя задача Коши в случае идеальной жидкости

Решение внутренней задачи Коши в случае идеальной жидкости приводит к рассуждениям, повторяющим в основном те, которые были приведены в предыдущем параграфе, но при этом возникает обстоятельство, интересное с физической точки зрения.

Пусть тензор энергии-импульса определен в виде:

$$T_{\alpha\beta}=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta-pg_{\alpha\beta}, \tag{45.1}$$

где в случае идеальной жидкости ε может определяться как некоторая функция $\varphi(p)$ от давления. Этому тензору, как и выше, сопоставим две группы уравнений поля:

$$R_{ij}=\lambda\left[(p+\varepsilon)\,u_i u_j-\frac{1}{2}(\varepsilon-p)\,g_{ij}\right], \tag{45.2}$$

$$S^4{}_\alpha=\lambda\,[(p+\varepsilon)\,u_\alpha u^4-p\delta^4_\alpha], \tag{45.3}$$

причем имеют место условия

$$g^{\sigma\tau}u_\sigma u_\tau=1, \tag{45.4}$$

определяющие u_α как единичный времениподобный вектор. Закон сохранения энергии-импульса и уравнения непрерывности аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе, можно записать в виде следующих уравнений:

$$u^\alpha u_{\beta,\,\alpha}-\frac{1}{p+\varepsilon}\,\partial_\alpha p\,(\delta^\alpha_\beta-u^\alpha u_\beta)=0 \tag{45.5}$$

и

$$[(p+\varepsilon)\,u^\alpha]_{,\alpha}-u^\alpha\,\partial_\alpha p=0. \tag{45.6}$$

Если предположить, что значение p на гиперповерхности S дано, то из (45. 3) получим:

$$\lambda\,(p+\varepsilon)\,u_\alpha\,u^4=S^4{}_\alpha+\lambda p\delta^4_\alpha,$$

и вследствие единичности u_α (45.4) приходим к выводу:

$$[\lambda\,(p+\varepsilon)\,u^4]^2=g^{\lambda\mu}\,(S^4{}_\lambda+\lambda p\delta^4_\lambda)\,(S^4{}_\mu+\lambda p\delta^4_\mu).$$

Обозначая определенно-положительную правую часть, которая вообще должна быть функцией от p, через Ω^2, очевидным образом получим:

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha = \frac{1}{\Omega}\left(S^4{}_\alpha + \lambda p \delta^4_\alpha\right), \quad u^4 = \frac{1}{\Omega}\left(S^{44} + \lambda p g^{44}\right), \\ \lambda(p+\varepsilon) = \frac{\Omega^2}{S^{44}+\lambda p g^{44}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (45.7)$$

Если $\varepsilon = \varphi(p)$, то третье уравнение (45.7) является конечным уравнением для p, позволяющим определить возможные значения p. Из других уравнений (45.7) после этого будут определены u_α, ε, и затем, используя (45.2), найдем $\partial_{44} g_{ij}$.

Остается определить $\partial_4 \varepsilon$ и $\partial_4 p$, исходя из уравнений состояния. Если в уравнении (45.5) индекс β поднять вверх и положить $\beta = 4$, то полученное таким образом уравнение, а также уравнение (45.6) можно записать в виде:

$$(p+\varepsilon)\, u^4\, \partial_4 u^4 - \left(g^{44} - u^{4^2}\right) \partial_4 p = A^4,$$
$$(p+\varepsilon)\, \partial_4 u^4 + u^4 \varphi'(p)\, \partial_4 p = B,$$

где A^4 и B задаются вполне определенным образом на гиперповерхности S. Рассматривая эти уравнения как алгебраическую систему относительно неизвестных $\partial_4 \beta$ и $\partial_4 u^4$, приходим к выводу, что их одновременное определение возможно только в том случае, когда

$$u^{4^2}\varphi' + g^{44} - u^{4^2} \neq 0,$$

что обеспечит отличный от нуля определитель, составленный из коэффициентов левой части. Следовательно, $\partial_4 p$ и $\partial_4 u^4$ можно определить однозначно только при условии

$$g^{44} - (1-\varphi')\, u^{4^2} \neq 0. \qquad (45.8)$$

Если это условие выполняется, то будут определены на гиперповерхности S величины $\partial_4 p$, $\partial_4 u^4$ и из остальных уравнений (45.6) величины $\partial_4 u^i$. После этого, очевидно, все рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, повторяются почти буквально. Но условие (45.8) приводит к новой возможности особых многообразий.

В отличие от предыдущего параграфа, получим три случая возможных многообразий, на которых может возникнуть прерывность поля:

1) характеристические изотропные многообразия $\overset{*}{V}_3$, отвечающие условию $g^{44}=0$;

2) многообразия, касательные к «линиям тока» или образованные «линиями тока» $\widetilde{V}_3$;

3) многообразия $\overline{\overline{V}}_3$, для которых

$$g^{44}-(1-\varphi')\,u^{4^2}=0.$$

Эти многообразия удовлетворяют уравнению

$$[g^{\sigma\tau}-u^\sigma u^\tau(1-\varphi')]\,\partial_\sigma f\,\partial_\tau f=0.$$

На этих многообразиях возможна прерывность *градиента давления*, что представляет собой в известном смысле релятивистское обобщение фронта волны классической гидродинамики. В том случае, если эти волновые фронты *ориентировать во времени*, они допускают наглядную интерпретацию к релятивистской физике ([231], § 19).

Пусть имеет место такое предположение, тогда

$$\Delta_1 f\equiv g^{\sigma\tau}\,\partial_\sigma f\,\partial_\tau f\leqslant 0,$$

но вследствие (45.7)

$$\Delta_1 f=(u^\sigma\,\partial_\sigma f)^2\,(1-\varphi'),$$

и следовательно,

$$\varphi'\geqslant 1. \tag{45.9}$$

Используя этот факт, определим «скорость распространения» таких гидродинамических волн. Возьмем два из таких многообразий $\overline{\overline{V}}{}_3^0$ и $\overline{\overline{V}}{}_3^\delta$, определяемых соответственно уравнениями

$$f(x^\alpha)=0,\quad f(x^\alpha)=\delta,$$

и предположим, что δ — бесконечно малая величина. Проведем через некоторую точку $\overline{\overline{V}}{}_3^0$ линию тока и определим на $\overline{\overline{V}}{}_3^\delta$ точку, в которой эта линия тока пересечет это многообразие, ограничиваясь при этом вычислениями с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

Искомая точка на $\overline{\overline{V}}{}_3^\delta$ может быть определена в виде $x^\alpha+\eta u^\alpha$, где скаляр η определяется из соотношения

$$\eta u^\alpha\,\partial_\alpha f=\delta. \tag{45.10}$$

Рассмотрим точку $x^\alpha \subset \overline{\overline{V}}{}^0_3$ и единичный вектор нормали n^α к $\overline{\overline{V}}{}^0_3$ $(n^\alpha n_\alpha = -1)$. Тогда ковариантная составляющая вектора $\vec{n}$ будет иметь вид:

$$n_\alpha = \frac{\partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}.$$

Траектория ортогональна к $\overline{\overline{V}}{}^0_3$ и пересекает $\overline{\overline{V}}{}^\delta_3$ в точке, которая с точностью до бесконечно малых высшего порядка может быть записана в виде $x^\alpha + \tilde{\eta} n^\alpha$, где $\tilde{\eta}$ определяется условием

$$\tilde{\eta} n^\sigma \partial_\sigma f = \varepsilon. \tag{45.11}$$

Следовательно,

$$\tilde{\eta} = \frac{\varepsilon}{n^\sigma \partial_\sigma f} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\Delta_1 f}}. \tag{45.12}$$

Рассмотрим вектор $w^\alpha = \eta u^\alpha - \eta n^\alpha$. Он, очевидно, лежит в касательной плоскости к поверхности волны. В самом деле,

$$\eta u^\alpha n_\alpha = \eta, \qquad \frac{u^\sigma \partial_\sigma f}{\sqrt{-\Delta_1 f}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\Delta_1 f}} = -\tilde{\eta},$$

и вследствие этого

$$t^\alpha n_\alpha - (\eta u^\alpha - \tilde{\eta} n^\alpha)\, n_\alpha = 0.$$

Вычисляя норму вектора t^α, получим:

$$t^\alpha t_\alpha = \eta^2 - \tilde{\eta}^2 - 2n\tilde{\eta} u^\alpha n_\alpha = \eta^2 + \tilde{\eta}^2 > 0,$$

т. е. вектор ориентирован «во времени».

Таким образом, вектор ηu^α определяется как сумма двух векторов, один из которых ортогонален к поверхности волны и ориентирован в пространстве, а другой касается этой поверхности и ориентирован во времени. «Скорость распространения» волны v определяется как предел отношения длин этих векторов и поэтому будет иметь вид:

$$v = \lim_{\delta \to 0} \left| \frac{\tilde{\eta}}{t^\alpha t_\alpha} \right|.$$

Отсюда следует:

$$v^{-2} = \lim_{\delta\to 0}\left(1+\frac{\eta^2}{\tilde{\eta}^2}\right) = 1 - \frac{\Delta_1 f}{(u^\sigma \partial_\sigma f)^2} = 1-(1-\varphi') = \varphi'.$$

Таким образом, скорость распространения волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}},$$

причем имеет место условие (45.9). Этот результат, имеющий место в классической механике, обобщает величину скорости распространения волны. Кроме того, из (45.9) следует, что $v \leqslant c$, так как скорость света принимается здесь за единицу. Этот результат находится в хорошем согласии с релятивистской физикой.

Решение внутренней задачи Коши для других распределений и движений материи, определяемых тензором энергии-импульса более сложного вида, в основном может быть получено на пути, изложенном выше, но, по существу вопроса, оно будет зависеть от формы $T_{\alpha\beta}$, так же как и возникающие при этом особенные гиперповерхности. Такое рассмотрение для электромагнитного поля и поля, полученного наложением полей электромагнитного и «чистой материи», можно найти, например, в [231].

Случай диссипативных процессов и вопросы отыскания решения по аппроксимациям, а также постановка задачи Коши для так называемых *единых* теорий поля, которые здесь не рассматриваются, можно найти, например, в [267], [268], [196], [213].

ГЛАВА VIII

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТИПЫ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ

В этой главе рассматриваются пространства V_4, отвечающие полям тяготения специального вида, определяемым некоторыми условиями геометрического или физического характера.

§ 46. Приводимые и конформно-приводимые пространства Эйнштейна

Риманово пространство V_n называется *приводимым*, если в некоторой голономной системе координат его метрика может быть представлена в виде:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} \varphi_k, \tag{46.1}$$

где φ_k — квадратичная форма, зависящая только от переменных $x^{\alpha_{k-1}+1}, \ldots, x^{\alpha_k}$, а $r > 1$.

Мы, имея в виду теорию относительности, ограничимся здесь рассмотрением случая $n = 4$, предполагая, кроме того, что форма (46.1) в каждой точке рассматриваемой области имеет сигнатуру типа $(- - - +)$. Тогда (46.1) может быть только одного из двух возможных типов:

$$(1) \qquad ds^2 = \varphi_1(x^1) + \varphi_2(x^2, x^3, x^4),$$

$$(2) \qquad ds^2 = \varphi_1(x^1, x^2) + \varphi_2(x^3, x^4).$$

В случае метрики (1) форму всегда можно привести к виду $\varphi_1 = e_1 \, dx^{1^2}$ $(e_1 = \pm 1)$, и следовательно, метрика (1) допускает неизотропный вектор Киллинга $\underset{1}{\xi}{}^\alpha = \delta_1^\alpha$; форму φ_2 в пространстве V_3 переменных x^2, x^3, x^4 всегда можно привести к ортогональному виду [10], и поэтому

$$ds^2 = e_1 \, dx^{1^2} + \sum_{k=2}^{4} e_k H_k^2 \, dx^{k^2},$$

$$H_k = H_k(x^2, x^3, x^4), \quad e_k = \pm 1.$$

Если эта метрика определяет пространство Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), то из уравнений поля получим, что $\varkappa = 0$ и φ_2 определяет трехмерное пространство Эйнштейна с нулевым тензором Риччи: $R_{ij} = 0$ $(i, j = 2, 3, 4)$; следовательно, φ_2 определяет метрику плоского пространства (см. § 13) и рассматриваемое V_4 — плоское многообразие. В силу условия о сигнатуре метрику (1) можно привести к форме метрики Минковского.

Если же имеет место метрика (2), то легко видеть, что, опуская тривиальный случай плоского пространства, придем только к метрикам (14.7) и (14.8), рассмотренным в § 14. Таким образом, *метрика всякого приводимого пространства Эйнштейна при* $n = 4$ *и сигнатуре вида* $(- - - +)$ *в специальной системе координат будет или метрикой Минковского, или* (14.7), *или* (14.8).

Будем называть V_n *конформно-приводимым*, если его метрика в некоторой системе координат имеет вид:

$$ds^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{r} \varphi_k, \tag{46.2}$$

где φ_k определяется, как и в (46.1), а $\alpha = \alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$ — некоторый произвольный скаляр. Рассмотрим тот случай, когда φ_1 и φ_2 — бинарные формы:

$$ds^2 = \alpha^2 [\varphi_1(x^1, x^2) + \varphi_2(x^3, x^4)] \tag{46.3}$$

и метрика удовлетворяет уравнениям поля свободного пространства: $R_{\alpha\beta} = 0$.

Полагая, что индексы $p, q = 1, 2$; $a, b = 3, 4$ и $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, рассмотрим преобразование координат

$$x^p = x^p(x^p), \quad x^a = x^a(x^{a'});$$

в результате такого преобразования компоненты метрического тензора

$$g_{p'a'} = 0, \quad g_{p'q'} = \alpha^2 A^p_{p'} A^q_{q'} g_{pq}, \quad g_{a'b'} = \alpha^2 A^a_{a'} A^b_{b'} g_{ab},$$

$$A^\alpha_{\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}},$$

и следовательно, не меняя структуры метрики (46.3), можно каждую из форм φ_1 и φ_2 привести к диагональному виду

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} -\alpha^2\beta^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\alpha^2\gamma^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad g=-\alpha^8\beta^2\gamma^2<0, \qquad (46.4)$$

где $\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\beta(x^1, x^4)$, $\gamma(x^3, x^4)$ и знаки выбраны в согласии с условием о сигнатуре метрики.

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$R_{1424}=\frac{1}{\gamma^2}R_{2331}, \quad R_{1434}=R_{2312}, \quad R_{2434}=\frac{1}{\beta^2}R_{3112},$$

$$R_{2423}=-\frac{1}{\beta^2}R_{1431},$$

$$\frac{1}{\beta^2}R_{1412}=-\frac{1}{\gamma^2}R_{3423}, \quad R_{2412}=-\frac{1}{\gamma^2}R_{3431},$$

а компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, у которых все четыре индекса различны, тождественно равны нулю вследствие диагонального вида метрики. Из этих соотношений следует, что уравнения поля эквивалентны системе уравнений

$$R_{\alpha\beta\alpha\gamma}=0, \quad \frac{1}{g_{\beta\beta}}R_{\alpha\beta\alpha\beta}+\frac{1}{g_{\gamma\gamma}}R_{\alpha\gamma\alpha\gamma}+\frac{1}{g_{\delta\delta}}R_{\alpha\delta\alpha\delta}=0 \qquad (46.5)$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \neq).$$

Полагая компоненты $R_{1414}=A$, $R_{2424}=B$, из второй группы уравнений (46.5) найдем:

$$\begin{gathered} R_{1414}=A, \quad R_{2424}=B, \quad R_{3434}=-\gamma^2\left(\frac{A}{\beta^2}+B\right), \\ R_{2323}=-\frac{\gamma^2}{\beta^2}A, \quad R_{3131}=-\beta^2\gamma^2B, \quad R_{1212}=A+\beta^2B. \end{gathered} \qquad (46.6)$$

Поэтому, записывая λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a, b=1, \ldots, 6)$, получим, во-первых, что она простого типа и, во-вторых, что базисы элементарных делителей будут

$$\lambda_1=\lambda_4=-\frac{A}{\alpha^4\beta^2}, \quad \lambda_2=\lambda_5=-\frac{B}{\alpha^4},$$

$$\lambda_3=\lambda_6=\frac{1}{\alpha^4}\left(\frac{A}{\beta^2}+B\right).$$

Следовательно, имеет место теорема: *всякое конформно-приводимое поле тяготения* (46.3) *определяет пространство* T_1 *с вещественными стационарными кривизнами и характеристикой* λ*-матрицы типа* [1 1 1, 1 1 1]. Обратное утверждение не имеет места.

Первая группа уравнений (46.5) состоит из шести уравнений, среди которых четыре имеют вид:

$$\alpha_{ki}-\frac{2\alpha_k\alpha_i}{\alpha}=0 \qquad (k=1,\ 2;\ i=3,\ 4),$$

где $\alpha_i\equiv\partial_i\alpha$. Отсюда следует:

$$\alpha^{-1}=\varphi(x^1,\ x^2)+\psi(x^3,x^4),$$

после чего остальные уравнения системы (46.5) могут быть записаны в виде:

$$\varphi_1=\omega(x^1)\,\beta(x^1,\ x^2),\qquad \psi_3=\nu(x^3)\,\gamma(x^3,\ x^4), \tag{46.7}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{11}-\frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}&=\beta^2\left(\varphi_{22}-\frac{\varphi_2\beta_2}{\beta}\right),\\ \psi_{33}-\frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}&=-\gamma^2\left(\psi_{44}-\frac{\psi_4\gamma_4}{\gamma}\right),\end{aligned}\right\} \tag{46.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta^2}\left(\varphi_{11}-\frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}\right)+\varphi_{22}+\frac{\varphi_2\beta_2}{\beta}-\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+\psi)-\\ &\qquad-\frac{1}{\gamma^2}\left(\psi_{33}-\frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}\right)+\psi_{44}+\frac{\psi_1\gamma_4}{\gamma}-\frac{\gamma_{44}}{\gamma}(\varphi+\psi)=0,\end{aligned} \tag{46.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\beta^2}\left(\varphi_{11}-\frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}-\frac{2\varphi_1^2}{\varphi+\psi}\right)+\varphi_{22}-\frac{2\varphi_2^2}{\varphi+\psi}+\frac{\varphi_2\beta_2}{\beta}-\\ &\qquad-\frac{\beta_{22}}{3\beta}(\varphi+\psi)+\frac{1}{\gamma^2}\left(\psi_{33}-\frac{2\psi_3^2}{\varphi+\psi}-\frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}\right)-\\ &\qquad\qquad-\psi_{44}+\frac{2\psi_4^2}{\varphi+\psi}-\frac{\psi_4\gamma_4}{\gamma}+\frac{\gamma_{44}}{3\gamma}(\varphi+\psi)=0,\end{aligned} \tag{46.10}$$

где ω, ν, φ, ψ — неизвестные функции. Для интегрирования этой системы воспользуемся тем, что неизвестные функции, входящие в нее, зависят от разделяющихся переменных.

Полагая в (46.9) $x^3=\overset{0}{x}{}^3$ и $x^4=\overset{0}{x}{}^4$ и вводя обозначения:

$$\psi(\overset{0}{x})=c_1,$$

$$\left[-\frac{1}{\gamma^2}\left(\psi_{33}-\frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}\right)+\psi_{44}+\frac{\psi_4\gamma_4}{\gamma}-\frac{\gamma_{44}}{\gamma}\,\psi\right]_{x=\overset{0}{x}}=c_2,$$

$$\left(-\frac{\gamma_{44}}{\gamma}\right)_{x=\overset{0}{x}}=c_3,$$

получим:

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\varphi_{11}-\frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}\right)+\varphi_{22}+\frac{\varphi_2\beta_2}{\beta}-\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+c_1)+\\+c_2+c_3\varphi=0. \qquad (46.11)$$

Точно так же, полагая $x^3=\tilde{x}^3$, $x^4=\tilde{x}^4$, где $\overset{0}{x^\alpha}\neq\tilde{x}^\alpha$, получим:

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\varphi_{11}-\frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}\right)+\varphi_{22}+\frac{\varphi_2\beta_2}{\beta}-\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+\tilde{c}_1)+\\+\tilde{c}_2+\tilde{c}_3\varphi=0, \qquad (46.12)$$

где $\tilde{c}_i$ имеют тот же смысл, что и c_i, но, вообще, могут и не совпадать с ними. Из (46.11) и (46.12) следует:

$$(\tilde{c}_1-c_1)\frac{\beta_{22}}{\beta}+c_2-\tilde{c}_2+(c_3-\tilde{c}_3)\varphi=0. \qquad (46.13)$$

Это приводит к следующим предположениям: 1) $c_1=\tilde{c}_1$ при любых x^3, x^4 и 2) $c_1\neq\tilde{c}_1$. В случае условия 1) имеем по определению $\psi=\mathrm{const}$. Если бы при этом $c_3\neq\tilde{c}_3$ при любых x^3, x^4, то из (46.13) следовало бы, что и φ было бы постоянной, т. е. $\alpha=\mathrm{const}$, что давало бы приводимые пространства. Отбрасывая этот рассмотренный выше случай, необходимо предположить, что $c_3=\tilde{c}_3$ при любых значениях переменных x^3, x^4, т. е. $\gamma_{44}=-c_3\gamma$. Кроме того, из (46.13) следует в этом случае, что $c_2=\tilde{c}_2$ и, следовательно, если учесть смысл постоянных c_i, $c_1c_3=c_2$. Таким образом, предположение 1) приводит к тривиальному случаю приводимых пространств Эйнштейна, или к соотношениям

$$\psi=c_1,\quad \gamma_{44}=-c_3\gamma,\quad c_2=c_1c_3,\quad c_1,\ c_3 \text{ — постоянные.} \qquad (46.14)$$

Подставляя эти выражения в (46.10) и используя при этом (46.11), (46.14) и первое из соотношений (46.7), найдем:

$$\varphi_2^2+\omega^2+\frac{2c_3}{3}(\varphi+c_1)^2=0, \qquad (46.15)$$

и следовательно,

$$c_3<0. \qquad (46.16)$$

В случае 2) получим:

$$\frac{\beta_{22}}{\beta} = k\varphi + c, \quad \psi \neq \mathrm{const}, \tag{46.17}$$

где k и c — некоторые постоянные.

Следовательно, возникают альтернативы:

$$(1) \qquad \psi = c_1, \quad \gamma_{44} = -c_3\gamma,$$

$$-\frac{1}{\gamma^2}\left(\psi_{33} - \frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}\right) + \psi_{44} + \frac{\psi_4\gamma_4}{\gamma} - \frac{\gamma_{44}}{\gamma}\psi = c_2, \quad c_2 = c_1c_3;$$

$$(2) \quad \frac{\beta_{22}}{\beta} = k\varphi + c, \quad \psi \neq \mathrm{const}, \quad k,\ c \text{ — постоянные.}$$

Точно так же, фиксируя значения переменных x^1, x^2, получим две возможности:

$$(1') \qquad \varphi = \overset{*}{c}, \quad \beta_{22} = -\overset{*}{c}_3\beta,$$

$$\frac{1}{\beta_2}\left(\varphi_{11} - \frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}\right) + \varphi_{22} + \frac{\varphi_2\beta_2}{\beta} - \frac{\beta_{22}}{\beta}\varphi = \overset{*}{c}_2, \quad \overset{*}{c}_2 = \overset{*}{c}_1\overset{*}{c}_3;$$

$$(2') \quad \frac{\gamma_{44}}{\gamma} = \overset{*}{k}\psi + \overset{*}{c}, \quad \varphi \neq \mathrm{const}, \quad \overset{*}{k},\ \overset{*}{c} \text{ — постоянные.}$$

Искомые решения уравнений поля отвечают возможным комбинациям (1), (2) и (1′), (2′).

Если отбросить тривиальный случай, когда $\varphi = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, отвечающий приводимым пространствам, то получим только три возможных предположения:

$$(\alpha) \qquad \frac{\beta_{22}}{\beta} = k\varphi + c, \quad \frac{\gamma_{44}}{\gamma} = \overset{*}{k}\psi + \overset{*}{c},$$

где k, $\overset{*}{k}$, c, $\overset{*}{c}$ — некоторые постоянные и φ и ψ не могут быть постоянными;

$$(\beta) \quad \psi = c_1 - \frac{1}{\gamma^2}\left(\psi_{33} - \frac{\psi_3\gamma_3}{\gamma}\right) + \psi_{44} + \frac{\psi_4\gamma_4}{\gamma} - \frac{\gamma_{44}}{\gamma}\psi = c_2,$$

$$c_2 = c_1c_3, \quad \frac{\gamma_{44}}{\gamma} = \overset{*}{k}c_1 + \overset{*}{c} = c_3,$$

и, наконец,

$$(\gamma) \qquad \frac{\beta_{22}}{\beta} = k\overset{*}{c}_1 + c = -\overset{*}{c}_3, \quad \varphi = \overset{*}{c}_1,$$

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\varphi_{11} - \frac{\varphi_1\beta_1}{\beta}\right) + \varphi_{22} + \frac{\varphi_2\beta_2}{\beta} - \frac{\beta_{22}}{\beta}\varphi = \overset{*}{c}_2, \quad \overset{*}{c}_2 = \overset{*}{c}_1\overset{*}{c}_3.$$

Для каждого из этих случаев необходимо потребовать, чтобы выполнялись уравнения (46.7), (46.8), (46.9), (46.10). Выполнение этих условий будет в то же время и достаточным для того, чтобы пространство было конформно-приводимым.

Рассмотрим сначала случай (α). Дифференцируя первое из уравнений (46.7) по переменной x^1, получим:

$$\varphi_{11} = \omega'\beta + \omega\beta_1, \tag{48.18}$$

в силу чего первое уравнение (46.8) будет иметь вид:

$$\varphi_{22} = \frac{1}{\beta}(\varphi_2\beta_2 + \omega'). \tag{46.19}$$

Тогда уравнение (46.11) приводит к выводу, что

$$\varphi_{22} = \frac{k}{2}\varphi^2 + p\varphi + q, \tag{46.20}$$

где

$$p = \frac{kc_1 + c - c_3}{2}, \quad q = \frac{c_2 - cc_1}{2}. \tag{46.21}$$

Предположим сначала, что (α_1) $\varphi_2 \neq 0$, с тем, чтобы далее особо рассмотреть случай, когда (α_2) $\varphi_2 = 0$. В этом предположении уравнение (46.20) допускает понижение порядка и приводится к виду:

$$\varphi_2^2 = \frac{k}{3}\varphi^3 + p\varphi^2 + 2q\varphi + r(x^1). \tag{46.22}$$

Дифференцируя (46.2) по x^1 и заменяя φ_1 его значением, дифференцируя выражение для φ_1 дважды по x^2, сравнивая правые части и сокращая на $\beta \neq 0$, получим соотношение

$$\omega(c - p) = 0.$$

Отсюда, используя полученные выше уравнения, легко получить, что если $\omega = 0$, то

$$\varphi = \varphi(x^2), \quad \beta = \delta(x^1)\overset{*}{\beta}(x^2), \quad \varphi_2 = \overset{*}{\beta}(x^2). \tag{46.23}$$

Если же $c = p$, то

$$\varphi_2^2 = \frac{k}{3}\varphi^3 + c\varphi^2 + 2m\varphi - \omega^2(x^2) + \lambda,$$

где $\lambda = \mathrm{const}$.

Если же имеет место случай (α_2), то, как легко видеть, $\omega = \text{const}$.

Очевидно, что эти рассуждения и выводы повторяются двойственным образом для функций $\gamma(x^3, x^4)$ и $\psi(x^3, x^4)$. Запишем полученные результаты в виде следующей схемы.

$\beta,\ \varphi$	$\gamma,\ \psi$
1. $\varphi_2 \neq 0 \quad (\alpha,\ 20), \quad (\alpha,\ 22),$ $\omega = 0, \quad \varphi_1 = 0,$ $\frac{\varphi_{22}}{\varphi_2} = \frac{\beta_2}{\beta}, \quad \beta = \delta(x^1)\,\overset{*}{\beta}(x^1),$ $\varphi_2 = \overset{*}{\beta}.$ 2. $\varphi_2 \neq 0, \quad c = p,$ $\varphi_{22} = \frac{k}{2}\varphi^2 + c\varphi + m,$ $\varphi_2^2 = \frac{k}{3}\varphi^3 + c\varphi^2 + 2m\varphi -$ $- \omega^2(x^2) + \lambda,$ $\varphi_1 = \omega\beta.$ 3. $\varphi_2 = 0, \quad \varphi_1 = \omega\beta(x^1),$ $\omega = \text{const}.$	4. $\psi_4 \neq 0, \quad \psi_{44} = \frac{k}{2}\psi^2 +$ $+ e\psi + t, \quad \nu = 0, \quad \psi_3 = 0,$ $\psi_4^2 = \frac{\overset{*}{k}}{3}\psi^3 + e\psi^2 +$ $+ 2t\psi + h, \quad \frac{\psi_{44}}{\psi_4} = \frac{\gamma_4}{\gamma},$ $\gamma = \sigma(x^3)\,\overset{*}{\gamma}(x^4), \quad \psi_4 = \overset{*}{\gamma}(x^4),$ $\overset{*}{k},\ e,\ t,\ h - \text{const}.$ 5. $\psi_4 \neq 0, \quad \overset{*}{c} = e,$ $\psi_{44} = \frac{s}{2}\psi^2 + \overset{*}{c}\psi + \overset{*}{m},$ $\psi_4^2 = \frac{\overset{*}{k}}{3}\psi^3 + \overset{*}{c}\psi^2 +$ $+ r\overset{*}{m}\psi + \nu^2(x^3) + \mu,$ $\psi_3 = \nu(x^3)\,\gamma(x^3,\ x^4).$ 6. $\psi_4 = 0, \quad \psi = \nu\gamma(x^3),$ $\nu = \text{const}.$

Искомые решения получатся как все возможные комбинации случаев левого и правого столбцов, если, кроме того, записать для них уравнения поля. При этом решения ищутся в вещественной области, что исключает некоторые из комбинаций.

Проделывая эти вычисления, нетрудно убедиться, что если исключить тривиальный случай $\varphi = \mathrm{const}$, $\psi = \mathrm{const}$, приводящий к приводимым пространствам, то получим следующие принципиально различные случаи[1]):

I. $\varphi_2^2 = \frac{k}{3}\varphi^3 + c\varphi^2 + 2q\varphi - \omega^2 + m, \quad \omega = \omega(x^1),$

$$\beta = \varphi_2\left(-\omega^1 \int \frac{dx^2}{\varphi_2^2} + f\right), \quad f = f(x^1),$$

$$\psi_4^2 = -\frac{k}{3}\psi^3 + c\psi^2 - 2q\psi + \nu^2 + m, \quad \nu = \nu(x^3),$$

$$\gamma = \psi_4\left(\nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2} + \overset{*}{f}\right), \quad \overset{*}{f} = \overset{*}{f}(x^3).$$

II. $\varphi = \omega\left(x^2 \int A\,dx^1 + \int B\,dx^1\right) + \lambda, \quad A = A(x^1), \quad B = B(x^1),$

$$\lambda = \lambda(x^2), \quad \beta = Ax^2 + B,$$

$$\psi = \sqrt{\omega^2 + \nu^2}\,x^4 + \mu, \quad \nu = \nu(x^3), \quad \mu = \mu(x^3),$$

$$\gamma = \frac{\nu' x^4}{\sqrt{\omega^2 + \nu^2}} + f\sqrt{\omega^2 + \nu^2}, \quad f = f(x^3), \quad \omega = \mathrm{const}.$$

III. $\varphi = c, \quad \beta = Be^{kx^2} + De^{-kx^2}, \quad B = B(x^1), \quad D = D(x^1),$

$$\psi_4^2 = A(c + \psi)^3 + k^2(c + \psi)^2 + \nu^2, \quad \nu = \nu(x^3),$$

$$\gamma = \psi_4\left(\nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2} + f\right), \quad f = f(x^3), \quad c,\ k,\ A - \mathrm{const}.$$

IV. $\varphi = c, \quad \beta = B\cos kx^2 + D\sin kx^2, \quad B = B(x^1), \quad D = D(x^1),$

$$\psi_4^2 = A(c + \psi)^3 - k^2(c + \psi)^2 + \nu^2, \quad \nu = \nu(x^3),\ c, k, A - \mathrm{const},$$

$$\gamma = \psi_4\left(\nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2} + f\right), \quad f = f(x^3).$$

V. $\varphi = c, \quad \beta = Bx^2 + D, \quad B = B(x^1), \quad D = D(x^1),$

$$\psi_4^2 = A(c + \psi)^3 + \nu^2, \quad \nu = \nu(x^3), \quad A,\ c - \mathrm{const},$$

$$\gamma = \psi_4\left(\nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2} + f\right), \quad f = f(x^3).$$

VI. $\varphi_2^2 = A(c + \varphi)^3 + k^2(c + \varphi)^2 - \omega^2, A, k, c - \mathrm{const}, \quad \omega = \omega(x^1),$

$$\beta = \varphi_2\left(-\omega' \int \frac{dx^2}{\varphi_2^2} + f\right), \quad f = f(x^1),$$

$$\psi = c, \quad \gamma = Be^{kx^4} + De^{-kx^4}, \quad B = B(x^3), \quad D = D(x^3).$$

---

[1]) Вычисления проводились А. М. Анчиковым.

VII. $\varphi_2^2 = A(c+\varphi)^3 - k^2(c+\varphi)^2 - \omega^2$, A, k, c — const, $\omega = \omega(x^1)$,

$$\beta = \varphi_2\left(-\omega' \int \frac{dx^2}{\varphi_2^2} + f\right), \quad f = f(x^1),$$

$$\psi = c, \ \gamma = B\cos kx^4 + D\sin kx^4, \ B = B(x^3), \ D = D(x^3).$$

VIII. $\varphi_2^2 = A(c+\varphi)^3 - \omega^2$, c, A — const, $\omega = \omega(x^1)$,

$$\beta = \varphi_2\left(-\omega' \int \frac{dx^2}{\varphi_2^2} + f\right), \quad f = f(x^1),$$

$$\psi = c, \quad \gamma = Bx^4 + D, \quad B = B(x^3), \quad D = D(x^3).$$

Здесь, таким образом, φ, ψ, β, γ определяются из уравнений, которые вообще не допускают квадратур в элементарных функциях. Легко, например, видеть, что в случае пространств вида I при некоторых частных предположениях о коэффициентах k, c, q функции φ и ψ будут удовлетворять дифференциальным уравнениям, определяющим периодические функции $\varrho(x^2)$, $\varrho(x^4)$ — функции Вейерштрасса. В частности, отсюда можно получить известное решение Дельсарта (см. § 14). Можно, впрочем, пользуясь произвольной сигнатурой, некоторые из этих решений объединить.

Кроме конформно-приводимых пространств Эйнштейна указанного вида, можно исследовать при $n=4$ приводимые дифференциальные формы вида

$$ds^2 = \alpha\,[e_1\,dx^{12} + \psi(x^2,\ x^3,\ x^4)],$$

которые здесь не рассматриваются (см. задачу 2).

Задачи

1. Доказать, что V_n приводимо тогда и только тогда, когда оно допускает поле постоянного, симметрического, идемпотентного тензора $t_{\alpha\beta}$:

$$t_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad t_{[\alpha\beta]} = 0, \quad t_\alpha^\sigma t_{\sigma\beta} = t_{\alpha\beta} \quad \text{(П. А. Широков [108]).}$$

2. Записать дифференциальные уравнения, определяющие g_{ij} в случае, когда пространство Эйнштейна имеет метрику вида

$$ds^2 = \alpha^2(dx^{12} + g_{ij}\,dx^i\,gx^j) \quad (i,\ j = 2,\ 3,\ 4), \quad g_{ij}(x^2x^3x^4),$$

$$\alpha = \alpha(x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4).$$

§ 47. Симметрические поля тяготения

Рассмотрим некоторое пространство T_i и отвечающее ему поле. Будем называть поле и соответствующее ему пространство *симметрическими*, если тензор кривизны T_i ковариантно постоянен:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = 0. \tag{47.1}$$

Найдем необходимые условия интегрируемости этих уравнений, для чего продифференцируем их еще раз ковариантно и проальтернируем по индексам дифференцирования. Тогда, применяя тождество Риччи (5.5), получим:

$$R_{\sigma\lambda\mu[\alpha}R^{\sigma}{}_{\beta]\gamma\delta} + R_{\sigma\lambda\mu[\gamma}R^{\sigma}{}_{\delta]\alpha\beta} = 0. \tag{47.2}$$

Так как эти уравнения содержат только компоненты тензора кривизны, то для того, чтобы их исследовать, удобно записать их в каноническом неголономном орторепере, относительно которого компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют канонический вид (19.6), (19.12), (19.17), а метрический тензор определяется формулой (11.7). Рассмотрим каждый из трех возможных типов полей тяготения.

Пусть имеет место пространство T_1. Тогда, заменяя в (47.2) компоненты тензора кривизны их значениями согласно (19.6), получим:

$$\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) - \beta_1(\beta_2 - \beta_3) = \beta_1(\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_1(\beta_2 - \beta_3) = 0$$

и еще три пары уравнений, получаемых из этих циклированием по индексам 1, 2, 3. Если умножить второе из этих уравнений на i и прибавить к первому, а затем проделать то же самое с остальными двумя парами и воспользоваться стационарными кривизнами (см. § 17) $k_s = \alpha_s + i\beta_s$, то придем к эквивалентной системе уравнений

$$k_1(k_2 - k_3) = k_2(k_3 - k_1) = k_3(k_1 - k_2) = 0. \tag{47.3}$$

Кроме того, из (19.7) следует соотношение

$$\sum_1^3 k_s = \varkappa. \tag{47.4}$$

Система уравнений (47.3) и (47.4) допускает, с точностью до перенумерации, лишь следующие альтернативы при $\varkappa \neq 0$:

$$(\alpha)\quad k_1 = k_2 = k_3 = \frac{\varkappa}{3}, \qquad (\beta)\quad k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = \varkappa.$$

В случае (α) имеем, очевидно, пространство постоянной кривизны, а (β) определяет *приводимое*, как мы сейчас покажем, пространство.

Для того чтобы пространство V_n было приводимым, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало существование поля постоянного, симметрического, идемпотентного тензора $C_{\alpha\beta}$ (задача 1 § 46):

$$(1)\quad C_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \qquad (2)\quad C_{[\alpha\beta]} = 0, \qquad (3)\quad C^{\sigma}_{\alpha} C_{\sigma\beta} = C_{\alpha\beta}.$$

Покажем, что для пространств, получаемых в случае (β), существует такой тензор, для которого все эти три условия выполняются. Достаточно показать это для неголономной ортогональной системы отнесения. Для того чтобы система дифференциальных уравнений (1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия интегрируемости

$$C_{\alpha\beta,[\gamma\delta]} \equiv R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\delta} C_{\sigma\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta\gamma\delta} C_{\alpha\sigma} = 0. \tag{47.5}$$

Все дальнейшие дифференциальные следствия, получаемые дифференцированием этих соотношений, *тождественно удовлетворяются* в силу (1) и симметричности пространства. Условия (47.5) в орторепере (19.6) запишутся так:

$$C_{12} = C_{34} = 0, \qquad C_{11} = C_{22}, \qquad C_{33} = -C_{44},$$

при этом условия (2) входят в определение $C_{\alpha\beta}$, а (3) — условие *идемпотентности* $C_{\alpha\beta}$ — в том же орторепере приводит к выводу

$$C_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad C^2_{11} + C_{11} = C^2_{33} + C_{33} = 0.$$

Поэтому, задавая $C_{\alpha\beta}$ для канонического орторепера в виде:

$$(C_{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right), \qquad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

удовлетворим всем трем требованиям, достаточным для приводимости пространства. Так как, кроме того, $C_{\alpha\beta}$ —

тензор второго ранга, то метрическая форма распадается на две *бинарные формы* [108]. Легко видеть, что каждая из этих форм определяет двумерное пространство постоянной кривизны, первая — с определенно-отрицательной метрикой, вторая — с неопределенной. Следовательно, в подходящим образом выбранной системе координат будет иметь место утверждение ([261], стр. 242; [287], [320]): *симметрическое пространство T_1 в специальной системе координат будет иметь или метрику*

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \cos^2\left(\sqrt{\varkappa}x^1\right)dx^{2^2} - dx^{3^2} + \cos^2\left(\sqrt{\varkappa}x^3\right)dx^{4^2}, \qquad \varkappa > 0, \quad (47.6)$$

или

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}x^1\right)dx^{2^2} - dx^{3^2} + \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}x^3\right)dx^{4^2}, \qquad \varkappa < 0, \quad (47.7)$$

или же будет пространством постоянной кривизны; при $\varkappa = 0$ получим плоское пространство Минковского.

Рассмотрим пространство T_2, когда компоненты тензора кривизны определяются формулами (19.12) при условиях (19.13). Полагая в уравнениях (47.2) $\lambda = 1$, $\mu = 4$, получим соотношения $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и, следовательно, как это следует из (19.13), $\alpha_2 = \frac{\varkappa}{2}$, $\beta_2 = 0$. Если же теперь в (47.2) фиксировать индексы, пользуясь подстановкой $\begin{pmatrix} \lambda\mu & \alpha\beta & \gamma\delta \\ 24 & 14 & 12 \end{pmatrix}$, то получим: $\alpha_2 = 0$, $\varkappa = 0$. Таким образом, *пространство типа T_2 может быть симметрическим, только если $\varkappa = 0$, когда T_2 определяет геометрию поля свободного пространства.* Но, как показано в § 23, существует единственное симметрическое T_2, метрика которого удовлетворяет уравнениям $R_{\alpha\beta} = 0$, это пространство максимальной подвижности T_2 с метрикой (23.3) и шестичленной транзитивной разрешимой группой движений.

Если же имеет место пространство T_3, то, полагая в уравнениях (47.2), что компоненты тензора кривизны определяются по формулам (19.17), придем, как нетрудно убедиться, к противоречию при любом $\varkappa$.

Таким образом, вопрос о симметрических полях тяготения T_i ($i = 1, 2, 3$) решает следующая теорема: *сим-*

метрическое пространство T_1 будет или пространством постоянной кривизны, или одним из приводимых пространств (47.6), (47.7); при $\varkappa=0$ симметрическое T_1 будет всегда плоским. Симметрическое T_2 всегда имеет $\varkappa=0$ и в специальной системе координат определяется метрикой (23.3). Пространства T_3 не могут быть симметрическими ([261], стр. 243).

Здесь, в отличие от обозначений главы III, не производится разделения на пространства T_i и $\overset{*}{T}_i$.

Вводя в рассмотрение нормальную систему координат (§ 7), получим:

$$g_{\alpha\beta}=\overset{0}{g}_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\sigma\beta\tau}x^\sigma x^\tau-\frac{1}{3!}\overset{0}{R}_{\alpha\sigma\beta\tau,\,\lambda}x^\sigma x^\tau x^\lambda+o(\delta^4).$$

Рассмотрим точку P пространства V_4, бесконечно близкую к началу координат, и компоненты $g_{\alpha\beta}(P)$ с точностью до определенного порядка малости. Нулевое приближение определяет плоскую метрику, т. е. совершенно не отражает действия гравитационного поля. Приближение первого порядка не меняет картины. Приближение второго порядка всегда скажется, если имеет место некоторое распределение и движение материи; оно характеризуется отклонением в орторепере компонент тензора кривизны от нуля, и это первый показатель существования поля. Следующее приближение порядка три определяет, грубо говоря, быстроту изменения тензора кривизны, и для симметрических пространств он обращается в нуль, так что остаются лишь поправки более высокого порядка малости. Можно условно говорить, что в этом случае тензор кривизны *слабо меняется*. Отсюда следует, в частности, что для пространств T_2 «слабое изменение» тензора кривизны возможно только в случае максимальной однородности пространства, а для пространств T_3 никогда не имеет места. Симметрическим V_n посвящен целый ряд исследований (см. § 14).

§ 48. Статические пространства Эйнштейна

Как известно, такие пространства отвечают полям тяготения, которые допускают систему координат, относительно которой компоненты метрического тензора не зависят от времени x^4 и, кроме того, оба направления времени равноценны, что приводит к выводу, что в этой системе координат $g_{\alpha 4}=0$ $(\alpha \neq 4)$. Можно не требовать, чтобы x^4 отвечало временной координате, тогда получим некоторое обобщение статических пространств. Формально такие «обобщенные статические» пространства можно определить требованиями: 1) пространство допускает группу движений G_1 и 2) в той системе координат, где вектор Киллинга имеет вид $\xi^\alpha=\delta_4^\alpha$, пространство допускает еще зеркальное отображение $x^{4'}=-x^4$, $x^{i'}=x^i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

В такой специальной системе координат метрический тензор будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix}, \quad \partial_4 g_{\alpha\beta}=0, \qquad (48.1)$$

и следовательно,

$$ds^2=d\sigma^2+g_{44}\,dx^{4^2},$$

где $d\sigma^2$ — квадратичная форма переменных x^i $(i=1,\ 2,\ 3)$. Будем далее предполагать, что V_4 является статическим пространством и $g_{44}>0$, а $d\sigma^2$ — определенно-отрицательная форма. Как показал Коттон ([10], стр. 357), любое V_3 допускает голономную ортогональную систему координат. Следовательно, $d\sigma^2$ всегда может быть представлена в виде суммы квадратов, умноженной на минус единицу, при помощи некоторого неособенного преобразования

$$x^i=f^i(x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'}) \quad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad x^4=x^{4'}, \qquad |d_j f^i| \neq 0.$$

Так как, кроме того, при таком преобразовании

$$g_{i'4'}=g_{\alpha 4}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

то, таким образом, *всякое статическое пространство* V_4 *допускает 4-ортогональную систему координат*, относительно которой метрика будет определяться в виде:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} -\underset{1}{H}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{2}{H}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\underset{3}{H}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{4}{H}^2 \end{pmatrix}, \tag{48.2}$$

где коэффициенты Ляме H_a — некоторые функции от переменных x^i $(i=1, 2, 3)$. Подсчитывая для (48.2) компоненты тензора кривизны, получим:

$$\left.\begin{aligned} R_{i4i4} &= -\underset{4}{H}\left[\underset{4}{H}_{ii}+\underset{i}{H}\left(\underset{4}{H}_i\frac{\underset{i}{H}_i}{\underset{i}{H}^2}\right)-\sum_k^* \underset{i}{H}_k\left(\frac{\underset{4}{H}_k}{\underset{k}{H}^2}\right)\right], \\ R_{i4j4} &= -\underset{4}{H}\,[\underset{4}{H}_{ij}+\underset{4}{H}_i\,\partial_j \ln \underset{i}{H}+\underset{4}{H}_j\,\partial_i \ln \underset{j}{H}], \\ R_{i4jk} &= 0, \quad R_{ijij}=\underset{i}{H}\underset{i}{H}_{jj}+\underset{j}{H}\underset{j}{H}_{ii}+ \\ &+\underset{i}{H}\underset{j}{H}\left(\frac{\underset{i}{H}_l\underset{j}{H}_l}{\underset{l}{H}^2}-\frac{\underset{i}{H}_i\underset{j}{H}_i}{\underset{i}{H}^2}-\frac{\underset{i}{H}_j\underset{j}{H}_j}{\underset{j}{H}^2}\right), \quad l \neq i,\ j, \\ R_{ijik} &= \underset{i}{H}\underset{i}{H}_{jk}-\underset{i}{H}\left(\frac{\underset{k}{H}_i\underset{i}{H}_k}{\underset{k}{H}}+\frac{\underset{j}{H}_k\underset{i}{H}_j}{\underset{j}{H}}\right) \quad (i,\ j,\ k \neq), \end{aligned}\right\} \tag{48.3}$$

где i, $j=1, 2, 3$ и $\sum\limits_k^*$ означает, что $k \neq i$.

Поставим вопрос об исследовании типа статического пространства в том случае, когда оно является пространством Эйнштейна с уравнениями поля $R_{\alpha\beta}=0$. Записывая уравнения поля, найдем, что три из этих уравнений дают тождества, а остальные семь могут быть записаны в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\underset{j}{H}^2\underset{k}{H}^2 R_{i4i4}+\underset{i}{H}^2\underset{4}{H}^2 R_{jkjk}=0, \\ &\underset{i}{H}^2 R_{k4j4}+\underset{4}{H}^2 R_{ikkj}=0, \\ &\underset{i}{H}^2 R_{jkjk}+\underset{j}{H}^2 R_{ikik}+\underset{k}{H}^2 R_{ijij}=0, \end{aligned}\right\} \tag{48.4}$$

где i, j, $k = 1, 2, 3$ и не равны между собой. Для исследования типа пространства запишем в этой системе координат λ-матрицу

$$A \equiv (R_{ab} - \lambda g_{ab}) \qquad (a,\ b = 1,\ \ldots,\ 6)$$

в собирательных индексах бивекторного пространства. Пользуясь (48.3), получим:

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где

$$P = \begin{pmatrix} R_{1414} + \lambda (\underset{1}{H}\underset{4}{H})^2 & R_{1424} & R_{1434} \\ R_{1424} & R_{2424} + \lambda (\underset{2}{H}\underset{4}{H})^2 & R_{2434} \\ R_{1434} & R_{2434} & R_{3434} + \lambda (\underset{3}{H}\underset{4}{H})^2 \end{pmatrix}$$

и

$$Q = \begin{pmatrix} R_{2323} - \lambda (\underset{2}{H}\underset{3}{H})^2 & R_{2331} & R_{2312} \\ R_{2331} & R_{3131} - \lambda (\underset{1}{H}\underset{3}{H})^2 & R_{3112} \\ R_{2312} & R_{3112} & R_{1212} - \lambda (\underset{1}{H}\underset{2}{H})^2 \end{pmatrix}.$$

Если воспользоваться уравнениями (48.4), то легко, пользуясь элементарными преобразованиями матрицы P, убедиться, что

$$P \approx Q$$

и, следовательно,

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}) \approx \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

Ввиду этого достаточно исследовать элементарные делители одной из этих двух матриц P и Q. Рассмотрим, например, Q. Разделив первую строку на $\underset{2}{H}\underset{3}{H}$, вторую на $\underset{1}{H}\underset{3}{H}$, а третью на $\underset{1}{H}\underset{2}{H}$ и выполнив такую же операцию над столбцами, получим матрицу, эквивалентную, в смысле элементарных делителей, матрице Q, но уже имеющую вид:

$$(A_{MN}-\lambda\delta_{MN}) \qquad (M,\ N=1,\ 2,\ 3),$$

где

$$A_{MN}\longrightarrow\frac{R_{ijkl}}{\underset{i}{H}\underset{j}{H}\underset{k}{H}\underset{l}{H}}$$

и δ_{MN} — символы Кронекера. Следовательно, имеем две симметрические матрицы: A и единичную трехмерную матрицу E. Как известно, в этом случае λ-матрица $(A-\lambda E)$ имеет характеристику простого типа с вещественными базисами элементарных делителей. Таким образом, имеет место теорема: *всякое статическое пространство Эйнштейна с сигнатурой* $(---+)$ *и* $\varkappa=0$ *является пространством первого типа* T_1 *с вещественными стационарными кривизнами.*

Отметим, что хотя уравнения поля и не интегрируются в конечном виде, но не представляет принципиальных затруднений выяснить произвол, от которого зависит общее решение для статического случая. Обобщением статических пространств в указанном выше смысле и для $n>4$ занимался Букдал и некоторые другие авторы [215], [248].

Задачи

1. Показать, что если метрика статического V_4, удовлетворяющая уравнениям $R_{\alpha\beta}=0$, имеет вид:

$$ds^2=g_{ik}(x^i)\,dx^i\,dx^k+g_{aa}(x^j)\,dx^{a^2} \qquad (a\neq i,\ j,\ k),$$

где a — фиксированный индекс, по которому не производится суммирование, то и «взаимная» ей метрика

$$ds^2=(g_{aa})^{\frac{2}{n-3}}g_{ik}\,dx^i\,dx^k+(g_{aa})^{-1}\,dx^{a^2}$$

также определяет статическое решение этих уравнений [215].

2. Применить полученный в задаче 1 результат к решению Шварцшильда и к плоскому пространству Минковского.

3. Показать, что для статического решения общих уравнений поля $(R_{\alpha\beta}\neq\varkappa g_{\alpha\beta})$ можно построить взаимное

ему статическое решение; полные энергии таких полей будут равны по величине и противоположны по знаку [248].

4. Исследовать λ-матрицу и тип четырехмерного *псевдостатического* пространства Эйнштейна, когда x^4 не временная координата.

§ 49. Центрально-симметрические поля тяготения

Вообще естественно думать, что когда имеется несколько масс, то они должны двигаться и поэтому поле будет не статическим. Тем не менее для многих вопросов является важным рассмотрение статических полей тяготения. В частности, принципиальный интерес представляет рассмотрение статических центрально-симметрических полей гравитации.

Центрально-симметрическое поле может создаваться любым центрально-симметрическим распределением материи. При этом, если речь идет о веществе, то не только распределение вещества, но и его движение должно быть центрально-симметрическим.

Центральная симметрия поля, т. е. тот факт, что метрика пространства-времени должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии, может быть всего удобнее определена в терминах теории групп движений (§§ 10, 24). Предварим такое определение следующим геометрическим рассуждением (см. [188], стр. 610 – 617). Будем искать статические центрально-симметрические поля, которые определены условиями: 1) x^4 отвечает времени, 2) определенно-отрицательная форма $\varphi = \tilde{g}_{ij}\, d\tilde{x}^i\, d\tilde{x}^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ инвариантна относительно всевозможных ортогональных преобразований независимых переменных $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$, 3) $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$.

Можно для наглядности рассматривать гиперповерхности $\tilde{x}^4 = \mathrm{const}$ как серию плоских пространств с прямоугольными координатами $\tilde{x}^i$, но, конечно, метрика такого плоского пространства не совпадает с метрикой гиперповерхности.

Введем в рассмотрение координаты x^α, обобщающие полярные координаты в плоском пространстве, полагая

$$x^1 = r = \sqrt{\tilde{x}^{1^2} + \tilde{x}^{2^2} + \tilde{x}^{3^2}}, \quad x^2 = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad x^3 = \varphi,$$

где θ — широта и φ — долгота. При этом полагаем, что

$$\tilde{x}^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \quad \tilde{x}^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3,$$

$$\tilde{x}^3 = x^1 \cos x^2, \qquad \tilde{x}^4 = x^4.$$

Искомой группой движений, определяющей статическое центрально-симметрическое поле, будет группа G_4, причем один оператор этой группы очевиден: $\underset{4}{\xi}^\alpha = \delta_4^\alpha$; искомые компоненты изучаемого тензора не должны зависеть от времени. Кроме того, G_4 должна содержать подгруппу, изоморфную группе ортогональных вращений, оставляющих инвариантными сферы с центром в начале координат в евклидовом пространстве, отнесенном к декартовым координатам. Как это хорошо известно, такая группа G_3 является неразрешимой, не содержащей двучленных подгрупп, т. е. типа IX.

Следовательно, и искомая группа в четырехмерном пространстве должна быть неразрешимой. Над полем комплексных чисел неразрешимые структуры VIII и IX неразличимы. Но при вещественных подстановках, как в данном случае, нам потребуется именно неразрешимая G_3 типа IX. Далее, очевидно, что эта группа должна действовать на многообразиях двух измерений, определяемых широтами и долготами, т. е. ранг матрицы векторов Киллинга $(\underset{s}{\xi}^\alpha)$ $(s = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3, 4)$ должен равняться двум: поверхности транзитивности группы G_3 — двумерные. Такую группу в данной системе координат всегда можно задать операторами (§ 24):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \cos x^3 p_2 - \sin x^3 \operatorname{ctg} x^2 p_3, \\ X_2 &= \sin x^3 p_2 + \cos x^3 \operatorname{ctg} x^2 p_3, \\ X_3 &= -p_3. \end{aligned}\right\} \qquad (49.1)$$

Кроме того, как условие статичности, искомое пространство должно еще допускать оператор

$$X_4 = p_4. \tag{49.2}$$

Искомую метрику получим, интегрируя уравнения Киллинга для заданных операторов (49.1) и (49.2). При этом необходимо учесть, что допустимы еще все такие преобразования координат, которые оставляют эти операторы инвариантными. Легко определить самый общий вид таких допустимых преобразований. Для этого достаточно записать дифференциальные уравнения, фиксирующие тот факт, что операторы не меняют свой вид при искомом преобразовании, и определить общее решение такой системы. Оно будет иметь вид:

$$x^{1'} = \widetilde{f}(x^1), \quad x^{2'} = \pm x^2 + \widetilde{s}\pi, \quad x^{3'} = x^3 + \widetilde{k}\pi, \quad x^{4'} = x^4 + \widetilde{\theta}(x^1), \tag{49.3}$$

где $\widetilde{f}$ и $\widetilde{\theta}$ – произвольные функции переменной x^1, а $\widetilde{s}$ и $\widetilde{k}$ — целые числа и $f' \neq 0$, что следует из предположения о невырожденности преобразования. Следовательно, преобразование, обратное (49.3), будет

$$\left.\begin{gathered} x^1 = f(x^{1'}), \quad x^2 = \pm x^{2'} + s\pi, \quad x^3 = x^{3'} + k\pi, \\ x^4 = x^{4'} + \theta(x^{1'}). \end{gathered}\right\} \tag{49.4}$$

Записывая уравнения Киллинга

$$\underset{s}{\xi^\sigma} \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\sigma} \partial_\beta \underset{s}{\xi^\sigma} + g_{\beta\sigma} \partial_\alpha \underset{s}{\xi^\sigma} = 0$$

для операторов при $s = 3, 4$, получим:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2),$$

а при $s = 1, 2$ после очевидных преобразований получим две группы уравнений:

$$\partial_2 g_{\alpha\beta} - g_{3\alpha} \operatorname{ctg} x^2 \delta^3_\beta - g_{3\beta} \operatorname{ctg} x^2 \delta^3_\alpha = 0, \tag{49.5}$$

$$g_{2\alpha}\delta^3_\beta + g_{2\beta}\delta^3_\alpha - \frac{1}{\sin^2 x^2}(g_{3\alpha}\delta^2_\beta + g_{3\beta}\delta^2_\alpha) = 0. \tag{49.6}$$

Полагая в (49.6) $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, получим:

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0, \quad g_{33} = g_{22} \sin^2 x^2, \tag{49.7}$$

а уравнения (49.5) запишутся в виде системы

$$\left.\begin{aligned} &\partial_2 g_{11} = 0, \quad \partial_2 g_{14} = 0, \quad \partial_2 g_{22} = 0, \\ &\partial_2 g_{33} - 2 g_{33} \operatorname{ctg} x^2 = 0, \quad \partial_2 g_{44} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (49.8)$$

Отсюда следует, что g_{11}, g_{14}, g_{22}, g_{44} зависят только от x^1 и

$$g_{33} = g_{22} \sin^2 x^2.$$

Пользуясь допустимыми преобразованиями (49.4), в новой системе координат получим, кроме соотношений (49.7) и (49.8), еще выражения

$$g_{1'4'} = g_{14} f' + g_{44} \theta', \quad g_{2'2'} = g_{22}(x^1).$$

Если потребовать, чтобы в новой системе координат выполнялись условия

$$g_{1'4'} = 0, \quad g_{22}(x^1) = -x^{1^2},$$

то придем к совместной *на вещественном пути* системе уравнений.

Следовательно, выбирая в качестве f и θ интегралы этой системы, получим искомую метрику в виде:

$$ds^2 = -e^{\alpha} dx^{1^2} - (dx^{2^2} + \sin^2 x^2 \, dx^{3^2}) + e^{\beta} dx^{4^2}, \qquad (49.9)$$

где учтено условие сигнатуры метрики и α, β — некоторые функции от x^1.

После этого, вычислив компоненты тензора Риччи, можно записать уравнения поля в виде:

$$\left.\begin{aligned} \lambda T_1^1 &= e^{-\alpha}\left(\frac{\beta'}{x^1} + \frac{1}{x^{1^2}}\right) - \frac{1}{x^{1^2}}, \\ \lambda T_2^2 = \lambda T_3^2 &= \frac{1}{2} e^{-\alpha}\left(\beta'' - \frac{\alpha'\beta'}{2} + \frac{\beta' - \alpha'}{x^1}\right), \\ \lambda T_4^4 &= e^{-\alpha}\left(\frac{1}{x^{1^2}} - \frac{\alpha'}{x^1}\right) - \frac{1}{x^{1^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (49.10)$$

Остальные компоненты тензора энергии-импульса тождественно обращаются в нуль.

В случае *свободного* пространства, когда $T_\beta^\alpha = 0$, эта система легко интегрируется и после простых преобразований приводит к выводу, что $\beta = -\alpha$ и

$$e^{-\alpha} = 1 + \frac{\overset{*}{c}}{x^1}, \qquad \overset{*}{c} = \mathrm{const},$$

— известное решение Шварцшильда.

Когда x^1 стремится к бесконечности, то, как легко видеть, метрика стремится к метрике плоского пространства. Если потребовать, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон тяготения Ньютона, то постоянная $\overset{*}{c}$ выразится через полную массу тела, создающего поле. Как известно, в случае слабого поля ([156], § 86)

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2},$$

где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению ([156], § 95)

$$\varphi = -\frac{km}{r} \equiv -\frac{km}{x^1},$$

где m — полная масса тела. Отсюда следует:

$$\overset{*}{c} = -\frac{2km}{c^2}.$$

Такой элемент длины определяет гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметрическим распределением масс, как покоящихся, так и с центрально-симметрической пульсацией.

Эта метрика, важная при решении многих задач, может быть получена многими различными способами ([156], § 96; [188], §§ 129—130; [225], § 57). Она имеет основное значение при расчетах движения перигелия Меркурия, искривления световых лучей и т. д. Впервые эта задача (методом последовательных приближений) была решена Эйнштейном в 1915 г. [35]. Затем Шварцшильд [37] и независимо от него Дросте [38] впервые дали строгое решение для поля материальной точки. Значительно упростил решение этой задачи Вейль, который [42] пользовался вариационным принципом и употреблял декартовы координаты.

Задачи

1. Показать, что метрика

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - \alpha\,(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + x^3\,dx^3)^2 + \beta\,dx^{4^2}$$

определяет центрально-симметрическое статическое распределение материи. Проинтегрировать уравнения в свободном пространстве и показать, что

$$\alpha = -\frac{2m}{r^2\,(r-2m)}, \qquad \beta = 1 - \frac{2m}{r}, \qquad r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}.$$

2. Получить из (49.10) решение Шварцшильда.

3. Показать, что метрика

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - \frac{(x^1dx^1 + x^2dx^2 + x^3dx^3)^2}{a^2 - r^2} + \left(\frac{3h - h_0}{2Hh_0}\right)^2 dx^{4^2},$$

где $a = r_0\sqrt{\frac{r_0}{2m}}$, h_0 — значение h на поверхности шара $h^2 = 1 - \frac{2m}{r-2m}$, может быть интерпретирована как метрика поля внутри несжимаемого жидкого шара. Тензор энергии-импульса задан здесь в виде:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta},$$

где μ_0 — плотность массы покоя, p — давление (Шварцшильд [37], Вейль [69]).

4. Вычислить чисто «пространственный» (т. е. на гиперповерхности $x^4 = \mathrm{const}$) тензор Риччи и тензор кривизны для метрики (49.9).

5. Показать, что функция действия в центрально-симметрическом поле имеет вид:

$$S = -E_0 t + M\varphi + \int e^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2}\,e^{-\nu} - m^2c^2 - \frac{M^2}{x^{1^2}}}\,dx^1,$$

где E_0 — постоянная энергия, M — момент импульса, $e^\nu = 1 - \frac{2km^1}{c^2x^1}$, m^1 — масса тела, создающего поле, m^2 — масса пробной частицы и

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{x^{1^2}}\,dx^1}{\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m^2c^2e^{\nu} - \frac{M^2}{x^{1^2}}\,e^{\nu}}}$$

(Л. Ландау и Е. Лифшиц [156], § 97).

§ 50. Поля тяготения с осевой симметрией

Исследованию гравитационных полей с осевой симметрией, начатому в работах Вейля [42], [56] и Леви-Чивита [47], [50], посвящено большое количество работ. При этом само определение таких полей тяготения претерпело изменения и неодинаково понимается различными авторами.

Исследованию полей тяготения такого рода и анализу понятия осевой симметрии посвящены, например, работы Леви [89], Стоккума [100], Мардера [269] и других авторов.

По-видимому, наиболее общее определение полей с осевой симметрией, инвариантное по существу, можно сформулировать следующим образом: α) это *постоянные* поля, т. е. в специальной системе координат $g_{\alpha\beta}$ не зависит от x^4; это означает, что метрика допускает оператор Киллинга одночленной группы движений, причем норма вектора Киллинга

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{\xi^{\alpha}}\underset{1}{\xi^{\beta}} > 0;$$

β) метрика пространства, отвечающая такому полю, допускает еще один оператор, также неизотропный, но с нормой

$$g_{\alpha\beta}\underset{2}{\xi^{\alpha}}\underset{2}{\xi^{\beta}} < 0,$$

причем эти два оператора определяют группу движений G_2 — *абелеву*:

$$[X_1X_2] = 0. \qquad (50.1)$$

Накладывая на пространство, определенное условиями α), β), некоторые дополнительные условия, можно построить все рассматривавшиеся в литературе поля с осевой симметрией.

Выбирая систему координат так, чтобы векторы Киллинга имели наиболее простой вид, можно определить одпу из возможных форм метрики; такой выбор, естественно, не может быть однозначным.

Группа G_2 такова, что ранг матрицы $\|\underset{s}{\xi^\alpha}\|$ ($s=1, 2$; $\alpha=1, 2, 3, 4$) равен двум: пути двух одночленных групп не могут совпадать. В V_4 всегда можно ввести такую систему координат, относительно которой вектор Киллинга, определяющий первый оператор, будет иметь вид:

$$\underset{1}{\xi^\alpha}=\delta_4^\alpha,$$

причем любое преобразование

$$x^{i'}=\varphi^i, \quad x^{4'}=x^4+\varphi^4 \qquad (i=1, 2, 3), \qquad (50.2)$$

где $\varphi^\alpha=\varphi^\alpha(x^1, x^2, x^3)$, не меняет вида этого вектора. Из уравнений структуры (50.1) следует:

$$\underset{2}{\xi^\alpha}=\underset{2}{\xi^\alpha}(x^1, x^2, x^3).$$

Пользуясь допустимыми преобразованиями (50.2), можно уточнить выбор системы координат так, что вектор $\underset{1}{\xi^\alpha}$ не изменится, а вектор $\underset{2}{\xi^\alpha}$ будет иметь некоторый более простой вид. В частности, так как группа абелева, можно было бы $\underset{2}{\xi^\alpha}$ привести к виду $\underset{2}{\xi^\alpha}=\delta_2^\alpha$, пользуясь известной теоремой ([147], стр. 63). Но, имея в виду получение далее, в частности, решения Вейля и Леви-Чивита, выберем иную систему координат. Пусть кривая x^3 является линией, относительно которой имеет место осевая симметрия и, следовательно, $g_{\alpha\beta}$ должны вообще зависеть от x^3. Рассматривая в некоторый момент времени ($x^4=t=\text{const}$) бесконечно малую область V_3, получим в ней симметрию около касательной l к кривой x^3. Искомый оператор группы должен определять вращение около l и поэтому будет иметь вид:

$$\underset{2}{\xi^\alpha}=x^2\delta_1^\alpha-x^1\delta_2^\alpha. \qquad (50.3)$$

Покажем теперь, минуя эти рассуждения, что к такому виду для $\underset{2}{\xi}^{a}$ можно прийти, исходя из допустимых преобразований (50.2). Вектор $\underset{2}{\xi}^{a}$ в новой системе координат будет иметь вид:

$$\underset{2}{\xi}^{i'}=\varphi^{i}_{j}\underset{2}{\xi}^{j},\quad \underset{2}{\xi}^{4'}=\varphi^{4}_{j}\underset{2}{\xi}^{j}+\underset{2}{\xi}^{4}\qquad (i=1,\,2,\,3).$$

Если потребовать, чтобы

$$\underset{2}{\xi}^{1'}=\varphi^{2},\quad \underset{2}{\xi}^{2'}=-\varphi^{1},\quad \underset{2}{\xi}^{3'}=0,\quad \underset{2}{\xi}^{4'}=0,\qquad (50.4)$$

то получим систему четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями φ^{a} $(a=1,\,2,\,3,\,4)$. Так как $\underset{2}{\xi}^{i}$ не может определять тех же траекторий, что и $\underset{1}{\xi}^{a}$, то по крайней мере одна из компонент $\underset{2}{\xi}^{i}$ $(i=1,\,2,\,3)$ не равняется тождественно нулю в некоторой области A. Ввиду этого можно систему (50.4) представить так:

$$\varphi^{a}_{s}=F^{a}_{s}(\varphi^{a}_{k},\,\varphi^{a},\,x),\qquad k\neq s.$$

Предполагая, кроме того, что правые части этой системы — аналитические функции своих аргументов в A, приходим, таким образом, к системе уравнений типа Коши—Ковалевской, совместной в A.

Таким образом, всегда можно в A ввести такую систему координат, что

$$\underset{1}{\xi}^{a}=\delta^{a}_{4},\quad \underset{2}{\xi}^{a}=x^{2}\delta^{a}_{1}-x^{1}\delta^{a}_{2}.\qquad (50.5)$$

После этого еще остаются, как легко убедиться, допустимыми преобразования

$$x^{1'}=f\cos\left[\operatorname{arctg}\frac{x_{1}}{x_{2}}+\varphi\right],\quad x^{2'}=f\sin\left[\operatorname{arctg}\frac{x_{1}}{x^{2}}+\varphi\right],$$

$$x^{3'}=\varphi^{3},\quad x^{4'}=\varphi^{4},\qquad (50.6)$$

где f, φ, φ^{3}, φ^{4} — произвольные функции от x^{3} и $\rho\equiv\sqrt{x^{1^{2}}+x^{2^{2}}}$. Интегрируя уравнения Киллинга для вектора $\underset{1}{\xi}^{a}$, найдем, что $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^{1},\,x^{2},\,x^{3})$, а записывая эти уравнения для вектора $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$, придем к системе уравнений

$$x^2\partial_1 g_{33} - x^1\partial_2 g_{33} = x^2\partial_1 g_{34} - x^1\partial_2 g_{34} = x^2\partial_1 g_{44} - x^1\partial_2 g_{44} = 0,$$

$$x^2\partial_1 g_{13} - x^1\partial_2 g_{13} - g_{23} = x^2\partial_1 g_{23} - x^1\partial_2 g_{23} + g_{13} = 0,$$

$$\begin{aligned} x^2\partial_1 g_{14} - x^1\partial_2 g_{14} - g_{24} &= x^2\partial_1 g_{24} - x^1\partial_2 g_{24} + g_{14} = \\ &= x^2\partial_1 g_{11} - x^1\partial_2 g_{11} - 2g_{12} = x^2\partial_1 g_{22} - x^1\partial_2 g_{22} + 2g_{12} = \\ &= x^2\partial_1 g_{12} - x^1\partial_2 g_{12} + g_{11} - g_{22} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что компоненты g_{33}, g_{34}, g_{44} являются некоторыми функциями от x^3 и $\varrho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$, а

$$g_{13} = A\cos\varphi, \quad g_{23} = A\sin\varphi,$$

$$A = A(\varrho,\ x^3), \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} + B(\varrho,\ x^3),$$

$$g_{14} = C\cos\omega, \quad g_{24} = C\sin\omega,$$

$$C = C(\varrho,\ x^3), \quad \omega = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} + D(\varrho,\ x^3),$$

$$g_{11} = e^{-\lambda}\left[-1 + (1 - e^{-\nu})\frac{x^{1^2}}{\varrho^2}\right],$$

$$g_{12} = e^{-\lambda}(1 - e^{-\nu})\frac{x^1x^2}{\varrho^2},$$

$$g_{22} = e^{-\lambda}\left[-1 + (1 - e^{-\nu})\frac{x^{2^2}}{\varrho^2}\right],$$

где A, B, C, D, λ, ν — некоторые функции от x^3 и $\varrho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$. Теперь, используя произвол в выборе функций f, φ, φ^3, φ^4 допустимого преобразования (50.6), можно уточнить выбор системы координат так, чтобы

$$g_{1'3'} = g_{2'3'} = g_{3'4'} = 0,$$

$$g_{4'4'}e^{-\overset{*}{\lambda}} = 1,$$

где $\overset{*}{\lambda}$ — значение, которое принимает первый множитель в $g_{1'1'}$ в новой системе координат. Этим исчерпываются все допустимые преобразования, и окончательно метрика будет иметь вид (если учесть еще условие на сигнатуру):

$$\left.\begin{array}{l} g_{pq} = e^{-\mu}\left[-\delta_{pq} + (1-e^{-\nu})\dfrac{x^p x^q}{\varrho^2}\right] \quad (p,\ q = 1,\ 2), \\ g_{31} = g_{32} = g_{34} = 0, \quad g_{33} = -e^{\lambda-\mu}, \quad g_{44} = e^{\mu}, \end{array}\right\} \tag{50.7}$$

где λ, μ, ν — функции только двух переменных, $\varrho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$ и x^3. Накладывая на эти функции некоторые дополнительные требования, получим те или иные решения с осевой симметрией. Выбор в качестве независимых переменных ϱ и x^3 допускает очевидное физическое толкование.

Мы рассмотрим более подробно решение Вейля и Леви-Чивита, которое получится из (50.7), если там положить $\lambda = \nu$ и потребовать, кроме того, чтобы решение было *статическим*, а не только *постоянным*. Как известно, решение называется статическим, если, во-первых, в некоторой системе координат все компоненты метрического тензора не зависят от $x^4 = t$ и, во-вторых, если метрика не меняется при изменении направления течения времени; другими словами, метрика остается инвариантной при преобразованиях *дискретной* группы (зеркальное отображение в данном случае)

$$x^4 \longrightarrow -x^4.$$

В этом случае в указанной выше системе координат все компоненты $g_{4i} = 0$. Таким образом, получим:

$$\left.\begin{array}{l} g_{pq} = e^{-\mu}\left[-\delta_{pq} + (1-e^{-\nu})\dfrac{x^p x^q}{\varrho^2}\right], \\ g_{13} = g_{23} = g_{34} = g_{14} = g_{24} = 0, \\ g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \quad g_{44} = e^{\mu}, \end{array}\right\} \tag{50.8}$$

где

$$\varrho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}},$$

а μ и ν — функции переменных ϱ и x^3. Тогда тензор Эйнштейна

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$$

будет определяться компонентами

$$\left.\begin{aligned}
&G_{34}=0, \quad G_{4p}=0,\\
&G_{3p}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\nu}{\partial x^3}+\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)\frac{x^p}{\varrho},\\
&G_{33}=\frac{1}{2\varrho}\frac{\partial\nu}{\partial\varrho}-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right],\\
&G_{pq}=\left\{-\frac{1}{2\varrho}\frac{\partial\nu}{\partial\varrho}+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}\frac{x^px^q}{\varrho^2}+\\
&\qquad+\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial x^{3^2}}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}e^{-\nu}\left(\delta_{pq}-\frac{x^px^q}{\varrho^2}\right),\\
&G_{44}=e^{2\mu-\nu}\left\{-\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\frac{\partial^2\mu}{\partial x^{3^2}}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\varrho^2}+\frac{\partial^2\nu}{\partial x^{3^2}}\right)+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(50.9)$$

Пользуясь этими выражениями и вводя компоненты тензора энергии-импульса, можно записать общие уравнения поля. В случае, когда рассматривается поле в свободном пространстве, система уравнений поля, как легко убедиться, приводится к уравнениям

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2\mu}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}+\frac{\partial^2\mu}{\partial x^{3^2}}=0, \quad \omega_3\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\nu}{\partial x^3}-\varrho\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3}=0,\\
&\omega_2\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\nu}{\partial\varrho}-\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]=0,\\
&\omega_4\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial^2\nu}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial^2\nu}{dx^{3^2}}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(50.10)$$

Два из этих уравнений представляют собой свернутые тождества Бианки. Кроме того, непосредственно проверяется, что

$$\omega_4\equiv\frac{\partial\omega_2}{\partial\varrho}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x^3}+\varrho\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\omega_1 \qquad (50.11)$$

и

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x^3}-\frac{\partial\omega_3}{\partial\varrho}\equiv\varrho\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\omega_1. \qquad (50.12)$$

Как и обычно при анализе решений уравнений поля, является существенным то, какие условия накладываются на потенциалы поля на бесконечности. Выбор условий на бесконечности в общем случае не является столь очевидным, как это иногда предполагается (см. § 53). Мы проведем, следуя Вейлю и Леви-Чивита, дальнейшее исследование решений системы уравнений поля (50.10), предполагая, что функции μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности.

Из уравнений (50.8) видно, что компоненты g_{pq} имеют на оси x^3 особенность типа неопределенности, если только не имеет места дополнительное условие, что $\lim\limits_{\varrho \to 0} \nu = 0$.

Первое уравнение системы (50.10) является линейным, однородным относительно неизвестной функции μ; для функций, обладающих осевой симметрией, оно является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах. Решения уравнения Лапласа (если отбросить тривиальный случай) удовлетворяют граничным условиям на бесконечности только в том случае, если они имеют особенность в какой-либо точке, находящейся на конечном расстоянии от начала координат. Геометрические места вне оси x^3, на которых возникают особенности, всегда будут окружностями, но на самой оси x^3 могут возникнуть особенности в точках в том случае, если они будут обусловливаться наличием выражений вида $\sum\limits_i [\varrho^2 + (x^3 - a_i)^2]^{-\frac{1}{2}}$ или некоторых производных по x^3 от такого выражения; тут, таким образом, получим полюсы.

Нужно, конечно, еще потребовать, чтобы эти решения удовлетворяли уравнениям $\omega_2 = \omega_3 = 0$ для неизвестной функции ν. Дело заключается в том, что если уравнение $\omega_1 = 0$ удовлетворяется в некоторой односвязной области двумерного пространства в переменных ϱ и x^3 $(\varrho \geqslant 0)$, то в силу (50.12) уравнения $\omega_2 = \omega_3 = 0$ имеют решения, но при наличии особенностей пространство (ϱ, x^3) уже не будет односвязным. Ввиду этого необходимо рассмотреть возможные особенности ([152], стр. 277—280).

Если имеет место особенность вне оси x^3, то, выбирая решение μ уравнения $\omega_1 = 0$ с произвольной окружностью особых точек, получим, что интеграл по замкнутому контуру, окружающему такую особенность в плоскости ϱ, x^3:

$$\oint\left(\frac{\partial\nu}{\partial\varrho}d\varrho+\frac{\partial\nu}{\partial x^3}dx^3\right)=$$
$$=\oint\left\{\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]d\varrho+\varrho\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3}dx^3\right\}, \quad (50.13)$$

не будет, вообще говоря, обращаться в нуль. Но если этот интеграл не исчезает, то неизвестная функция ν не будет определяться однозначно вне геометрического места, на котором возникает особенность; следовательно, как необходимое условие существования решения нужно потребовать обращения этого интеграла в нуль.

Если же имеет место особенность на оси x^3 и так как вне точки, где имеет место особенность, $\frac{\partial\nu}{\partial x^3}$ равна нулю на оси x^3, то, предполагая, что ν обращается в нуль в некоторой точке на оси x^3, необходимо получим, что ν равняется нулю на всей оси x^3 *до особой точки.*

В особой точке должен обращаться в нуль интеграл от дифференциала

$$d\nu=\frac{\varrho}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\right)^2-\left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]d\varrho+\varrho\frac{\partial\mu}{\partial\varrho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3}dx^3, \quad (50.14)$$

взятый по малой полуокружности около особенности от одной точки пересечения этой полуокружности с осью x^3 до другой.

Рассмотрим, например, типичную особенность, возникающую на оси x^3, если

$$\overset{*}{\mu}=(\varrho^2+x^{3^2})^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$\frac{\partial\overset{*}{\mu}}{\partial\varrho}=-\frac{\varrho}{r^3}, \quad \frac{\partial\overset{*}{\mu}}{\partial x^3}=-\frac{x^3}{r^2}, \quad r=\sqrt{\varrho^2+x^{3^2}},$$

то дифференциал (50.14) будет иметь вид:

$$d\nu=\left(\frac{\varrho}{2}\,\frac{\varrho^2-x^{3^2}}{r^6}\,d\varrho+\frac{\varrho^2x^3}{r^6}dx^3\right). \quad (50.15)$$

Для вычисления интеграла от $d\nu$ по малой полуокружности введем угол φ, полагая

$$\varrho = r\cos\varphi, \qquad d\varrho = -x^3\,d\varphi,$$

$$x^3 = r\sin\varphi, \qquad dx^3 = \varrho\,d\varphi, \qquad r = \mathrm{const}.$$

Тогда из (50.15) получим:

$$d\nu = \frac{1}{2r^2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi, \qquad r = \mathrm{const},$$

и, производя интегрирование в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, получим:

$$[\nu]\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2r^2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4r^2}\left[\sin^2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0. \qquad (50.16)$$

Решение $\overset{*}{\mu}$ совместимо с условиями регулярности для ν.

Особый интерес представляет рассмотрение того случая, когда имеют место сразу две особенности. Воспользуемся тем, что в одной особой точке решение с особенностью в другой точке можно разложить в степенной ряд по ϱ^2 и x^3 и предположить, что вблизи от начала координат решение μ имеет вид:

$$\overset{**}{\mu} = \frac{a}{r} + \sum_{m,\,n} a_{m,\,n}\,\varrho^{2^{m}} x^{3^{n}}. \qquad (50.17)$$

В этом разложении нас будут интересовать только те коэффициенты $a_{m,\,n}$, которые существенно войдут при вычислении интеграла по полуокружности. Если полуокружность не охватывает никакой другой особой точки, кроме $r = 0$, то интеграл не должен зависеть от r. Ввиду этого несущественны все те коэффициенты $a_{m,\,n}$, которые делают интеграл зависящим от r. Далее, регулярная часть $\overset{**}{\mu}$ сама по себе не может приводить к неисчезающему интегралу, и следовательно, нужно рассматривать только «перекрестные» произведения сингулярной и регулярной частей $\overset{**}{\mu}$. Производные сингулярной части $\overset{**}{\mu}$ при заданном φ убывают, как r^{-2}. Они умножаются на ϱ, на дифференциалы координат, возрастающие, как r^{+1}, и на производные от регулярной части $\overset{**}{\mu}$. Ввиду этого представляют интерес только те члены разложения, которые зависят от φ, но не от r. Таким членом будет только $\varrho^0 x^3$. Поэтому можно взять

$$\overset{**}{\mu} = \frac{a}{r} + bx^3 + \dots$$

Вычисляя искомый дифференциал, получим:

$$d\nu = -\varrho\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}(bx^3)\,d\varrho + \varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}(bx^3)\,dx^3 + \dots,$$

и только выписанные члены могут привести к неисчезающим значениям интеграла. Но теперь имеем:

$$d\nu = \frac{ab}{r^3}\varrho\,(x^3\,d\varrho - \varrho\,dx^3) = -ab\cos\varphi\,d\varphi = -ab\,d(\sin\varphi),$$

и в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интеграл отличен от нуля. Следовательно, в окрестности одной из особых точек производная по x^3 от регулярной части μ должна обращаться в нуль. Другими словами, *возможность одновременного существования нескольких особых точек на оси x^3 исключается*. Это фактически означает, что уравнения поля исключают движения точечных масс, не совместимые с уравнениями движения ([152], гл. XV).

Задачи

1. Показать, что если решение с осевой симметрией допускает абелеву группу G_3 движений, то линейный элемент можно представить в виде:

$$ds^2 = e^{2\alpha}dt^2 - r^2e^{-2\alpha}d\varphi^2 - e^{2\beta-2\alpha}(dr^2 + dz^2),$$

где $\alpha = c\ln r + D$, $\beta = c^2\ln r + \varepsilon$, D, c, ε — постоянные ([269], стр. 8—9).

§ 51. Гармонические поля тяготения

Если в обыкновенном евклидовом пространстве R_n через x^α обозначить декартовы координаты, то расстояние некоторой точки до начала координат

$$s = \sqrt{g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}. \qquad (51.1)$$

Отсюда, дифференцируя, получим:

$$(s^p)_{,\alpha} = ps^{p-2}g_{\alpha\beta}x^\beta \tag{51.2}$$

и

$$(s^P)_{,\alpha}{}^{\alpha} = p(n+p-2)\,s^{p-2}. \tag{51.3}$$

Следовательно, $s_{,\alpha}{}^{\alpha}$ является функцией только от s и s^{2-n} $(n \neq 2)$ есть решение уравнения Лапласа

$$v_{,\alpha}{}^{\alpha} = 0. \tag{51.4}$$

Для произвольного V_n, вообще говоря, нельзя указать такого рода решений. Ввиду этого выделяется специальный класс пространств V_n, *допускающих существование гармонических функций, зависящих только от расстояния.* Такие V_n принято называть *гармоническими* (или *вполне гармоническими*). Различают также V_n, *гармонические в данной точке* $\overset{0}{x}{}^{\alpha}$, для которых расстояние от некоторой точки до $\overset{0}{x}{}^{\alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$s_{,\alpha}{}^{\alpha} = f(s). \tag{51.5}$$

Рассмотрение гармонических пространств в теории гравитации имеет принципиальный интерес, который объясняется следующим. Классическая теория тяготения и электростатика строится на законах Ньютона и Кулона, в основе которых лежит возможность использования гармонических функций, зависящих только от расстояния. Для произвольного V_n априорное утверждение о существовании такого рода функций, без дополнительных требований к метрике, не имеет смысла. Исследование этого вопроса приводит к выводу, что только V_n довольно частного вида будут гармоническими.

Исследование такого рода пространств V_n начато в работах П. А. Широкова [72], [75], [108], который, в частности, рассматривая проблемы теории потенциала в V_n, показал, что: 1) для того чтобы в V_n существовала гармоническая функция, зависящая только от расстояния, от любой его точки, необходимо и достаточно, чтобы каждая гиперсфера этого пространства имела среднюю постоянную кривизну, и 2) V_n, в которых каждая гиперсфера имеет постоянную среднюю кривизну, являются пространством Эйнштейна ($R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$). Здесь гиперсфера понимается как гиперповерхность, все точки которой равноудалены от данной точки — центра гиперсферы; таким образом, речь идет об аналогах окружности на поверхности в смысле Бианки в V_n — геометрический образ, имеющий смысл в любом V_n.

Таким образом, для $n=3$ такие функции существуют только в пространствах постоянной кривизны. Для $n>3$ вопрос существенным образом зависит от сигнатуры метрики V_n. Понятие пространств V_n, гармонических в точке, введено Рузе и Гобсоном [123]. Аффинное обобщение этого понятия рассматривалось в работах [185], [186]. Основные результаты для гармонических V_n и гармонических в данной точке V_n и о связях между этими двумя видами гармоничности получены в работах Лихнеровича [139], [197], Уолкера [128], [141], [142], [145] и других авторов [217], [178], [198].

Мы рассмотрим далее подробно, имея в виду физические приложения, только случай четырехмерного пространства с сигнатурой метрики $(---+)$.

Рассмотрим некоторую точку V_n и введем для этой точки локально геодезическую систему координат. Если обозначить

$$\frac{\partial^{p-1}\Gamma^i_{jk_1}}{\partial x^{k_2}\ldots\partial x^{k_p}}=\Gamma^i_{jk_1k_2\ldots k_p},$$

то (§ 7)

$$\{\Gamma^i_{j(k,\,lpq)}\}_0=-\frac{3}{5}\left\{\frac{2}{9}R^{ai}{}_{(kl}R_{aq|j|p)}+R^{i}{}_{(pq|j|,\,kl)}\right\}_0. \qquad (51.6)$$

Предположим теперь, что V_n допускает гармоническую функцию, зависящую только от расстояния, и, следовательно, оно должно быть многообразием Эйнштейна. Производя в (51.6) свертывание по индексам i, j и учитывая, что $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, получим:

$$\{R_{a(k|b|l}R^{ab}{}_{qp)}\}_0=-\frac{15}{2}\{\Gamma^a_{a(k,\,lpq)}\}_0. \qquad (51.7)$$

Исследуем значение правой части этого равенства, исходя из условий поставленной задачи. Прежде всего отметим (см. задачу 1 § 51), что средняя кривизна любой гиперсферы Бианки должна быть постоянна и будет в данной системе координат

$$H=\frac{n-1}{s}+\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k}\xi^k\equiv\frac{n-1}{s}+\frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial s}, \tag{51.8}$$

а искомая функция $\varphi(s)$ должна иметь вид [72]:

$$\varphi=a\int e^{-\int H\,ds}\,ds+C_2. \tag{51.9}$$

Из (51.8) и (51.9) следует:

$$\varphi=C_1\int\frac{ds}{s^{n-1}\sqrt{g}}+C_2,$$

и следовательно, дискриминант метрического тензора является некоторой функцией от s: $g\equiv|g_{\alpha\beta}|=g(s)$. Ввиду этого

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}=\frac{1}{2}\,\partial_\alpha \ln g(s)$$

будет зависеть только от расстояния s от начала координат. После этого, дифференцируя четыре раза тождество

$$s^2=g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta,$$

сравним члены с одинаковыми степенями s, имея в виду' что $x^\alpha=\xi^\alpha s$, где ξ^α — единичный вектор, определяющий направление геодезической, выходящей из начала координат. Так как

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\alpha}\equiv\Gamma_\alpha=\theta_\alpha(s)\,s_\alpha,\qquad s_\alpha=\frac{\partial s}{\partial x^\alpha},$$

то

$$-\frac{15}{2}\{\Gamma^{\sigma}_{\sigma\,(k,lpq)}\}_0=\{\lambda g_{(kl}g_{pq)}\}_0$$

и, следовательно,

$$R_{a\,(k\,|b|\,l}R^{ab}{}_{qp)}=\lambda g_{(kl}g_{pq)} \tag{51.10}$$

уже в любой точке той области V_n, где соблюдаются условия, позволяющие ввести геодезическую систему координат. Это условие впервые отмечено П. А. Широковым [72]. Пользуясь свертыванием, найдем:

$$\lambda = \varkappa^2. \tag{51.11}$$

Положим теперь, что $n=4$, и, чтобы не заниматься пока рассмотрением различных случаев возможных сигнатур, введем в данной точке V_n ортогональный репер (мнимый в случае сигнатуры типа $(- - - +)$), относительно которого

$$g_{\alpha\alpha}=1, \quad g_{\alpha\beta}=0 \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{51.12}$$

и рассмотрим бивекторное пространство (см. § 15), отвечающее этому ортореперу, в котором, как и ранее,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \longrightarrow R_{ab}, \qquad g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} \longrightarrow g_{ab} \qquad (a,\ b=1, \ldots, 6).$$

Тогда

$$g_{aa}=1, \quad g_{ab}=0 \quad (a \neq b)$$

и

$$(R_{ab})=\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix},$$

где $M \equiv (m_{ij})$, $N \equiv (n_{ij})$ — симметрические трехмерные матрицы, обладающие, кроме того, тем свойством, что их *следы*

$$\sum_1^3 m_{ii}=\varkappa, \qquad \sum_1^3 n_{ii}=0,$$

причем бивекторные индексы, как и ранее, определены нумерацией: 14 — 1, 24 — 2, 34 — 3, 23 — 4, 31 — 5, 12 — 6. Запишем подробно условия (51.10) в бивекторном пространстве. При этом существенно рассмотреть следующую комбинацию индексов k, l, p, q:

1. $k,\ l,\ p,\ q \neq$,
2. $k=l \neq p \neq q$,
3. $k=l \neq p=q$,
4. $k=l=p \neq q$,
5. $k=l=p=q$,

соответственно чему получим пять типов соотношений между m_{ij} и n_{ij}:

$$\begin{gathered}
m_{\alpha\alpha}(n_{\beta\beta}-n_{\gamma\gamma})+m_{\beta\beta}(n_{\gamma\gamma}-n_{\alpha\alpha})+m_{\gamma\gamma}(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta})=0,\\
m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}+m_{\alpha\beta}\left(m_{\gamma\gamma}-\frac{\varkappa}{3}\right)=n_{\alpha\gamma}n_{\beta\gamma}+n_{\alpha\beta}n_{\gamma\gamma},\\
m_{\gamma\gamma}^2+n_{\gamma\gamma}^2+4(m_{\alpha\beta}^2-n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta})+2(m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta}-n_{\alpha\beta}^2)+\\
+(m_{\alpha\gamma}^2+m_{\beta\gamma}^2)+(n_{\alpha\gamma}^2+n_{\beta\gamma}^2)=\varkappa^2,\\
m_{\alpha\beta}(m_{\alpha\alpha}-m_{\beta\beta})+m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}=n_{\alpha\beta}(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta})+n_{\alpha\gamma}n_{\beta\gamma},\\
m_{\alpha\alpha}^2+m_{\beta\beta}^2+m_{\gamma\gamma}^2+2(n_{\beta\gamma}^2+n_{\alpha\beta}^2+n_{\alpha\gamma}^2)=\varkappa^2,
\end{gathered}$$

где α, β, γ по смыслу обозначений могут принимать только значения 1, 2, 3 и всегда α, β, γ не равны между собой.

Не представляет труда, исследуя эту алгебраическую систему при всех возможных случаях, убедиться, что

$$\left.\begin{gathered}
n_{\alpha\alpha}=e\left(m_{\alpha\alpha}-\frac{\varkappa}{3}\right), \quad n_{\alpha\beta}=em_{\alpha\beta}\\
(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)\quad (\alpha\neq\beta),\ e=\pm 1.
\end{gathered}\right\} \tag{51.13}$$

Таким образом, λ-матрица $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ldots,6)$ бивекторного пространства будет

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=\begin{pmatrix} M & N\\ N & M\end{pmatrix}, \tag{51.14}$$

где

$$M=(m_{\alpha\beta}-\lambda\delta_{\alpha\beta}),\quad N=\left(e\left(m_{\alpha\beta}-\frac{\varkappa}{3}\delta_{\alpha\beta}\right)\right). \tag{51.15}$$

Все исследование до сих пор велось без учета сигнатуры метрики пространства V_4 над полем комплексных чисел. Потребуем, чтобы изучаемое поле гравитации было реальным и, следовательно, в каждой точке V_4 метрику можно привести на вещественном пути к метрике Минковского:

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-g_{44}=-1,\quad g_{\alpha\beta}=0\quad (\alpha\neq\beta). \tag{51.16}$$

Переход от (51.12) к (51.16) можно осуществить при помощи невырожденного преобразования, определяемого матрицей

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)_0=\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но при таком преобразовании, как легко видеть, все составляющие вида $n_{\alpha\beta}$ будут *чисто мнимыми*, а составляющие $m_{\alpha\beta}$ — вещественными. Это приводит к противоречию, если не предположить, что $m_{\alpha\beta}=0$, $m_{\alpha\alpha}=\frac{\varkappa}{3}$ ($\alpha\neq\beta$; α, $\beta=1, 2, 3$). Отсюда следует, что гармоническому пространству V_4 с сигнатурой метрики $(---+)$ отвечает в бивекторном пространстве λ-матрица простого типа с одинаковыми элементарными делителями и характеристикой λ-матрицы $[(1\,1\,1,\ 1\,1\,1)]$. Так как в этом случае

$$R_{ab}=\frac{\varkappa}{3}g_{ab} \qquad (a,\ b=1, \ldots, 6),$$

то

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\frac{\varkappa}{3}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

т. е. такое V_4 *будет пространством постоянной кривизны* S_4. Иначе этот же результат вытекает из теоремы, согласно которой всякое V_n является конформно-евклидовым многообразием, если для каждого ортореперa в таком V_n $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ (α, β, γ, $\delta\neq 0$) ([77], § 37). Всякое конформно-плоское пространство Эйнштейна является пространством S_n. Таким образом, *реальное поле тяготения общей теории относительности может допускать существование гармонической функции, зависящей только от расстояния, в том лишь случае, если это поле определяет геометрию пространства постоянной кривизны.*

Если ставить вопрос о развитии теории тяготения или электростатики на основе законов типа Ньютона и Кулона, то это возможно только для пространств постоянной кривизны, а для геометрий, определяемых в общей теории относительности, в общем случае необходимо положить в основу другие законы.

Задачи

1. Доказать формулы (51.8), (51.9) (П. А. Широков [72]).

2. Показать, что гармоническое V_n будет пространством S_n, если $n = 2$, 3.

3. Гармоническое конформно-плоское V_n есть S_n,

4. Гармоническое V_n есть S_n, если индекс метрики равен 1 или $n-1$ (т. е. $n-p=1$ или $n-1$; здесь p — число полюсов при квадратах дифференциалов для канонического вида метрики в данной точке пространства $ds^2 = \Sigma e_i dx^{i^2}$, $e_i = \pm 1$) [142].

5. Показать, что пространство, определяемое метрикой

$$ds^2 = c\,(x^2\,dx^1 - x^1\,dx^2)^2 + 2dx^1\,dx^3 + 2dx^2\,dx^4, \quad c = \mathrm{const} \neq 0,$$

гармоническое. Показать также, что это пространство Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = 0$) с сигнатурой метрики индекса 2.

6. Каждое вполне гармоническое V_{n-1} в S_n есть S_{n-1} ([217], стр. 388).

7. Показать, что вполне гармоническое V_4 с определенным метрическим тензором есть симметрическое V_4 [142].

8. Показать, что V_4 с метрикой

$$ds^2 = \psi\,(x,\,y)\,dx^2 + 2\varphi\,(x,\,y)dx\,dy + \theta\,(x,\,y)\,dy^2 + 2dx\,dz + 2dy\,dt$$

вполне гармоническое.

§ 52. Пространства, допускающие цилиндрические волны

Рассмотрим в этом параграфе решение уравнений поля в свободном пространстве, предложенное Эйнштейном и Розеном, к которому они пришли, разыскивая строгое решение для цилиндрических волн. Постановка этой задачи была вызвана тем, что в то время как для *линеаризированных* уравнений поля, когда решение берется по приближению, можно говорить *о плоских* гравитационных волнах, для нелинеаризированных уравнений этого не будет. Хотя задача сведена только к системе уравнений поля упрощенного типа, для которых Эйнштейну и Розену не удалось указать решений, тем не менее их рассмотрение представляет интерес, так как на основании результатов, полученных в гл. IV, можно указать целые классы конкретных решений для задачи такого рода.

При этом является важной *инвариантная* характеристика этих пространств, именно тип пространства и группа движений.

Исходя из формальных соображений, Эйнштейн и Розен пришли к рассмотрению пространств с метрическим тензором

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-A & 0 & 0 & 0\\ 0 & -B & 0 & 0\\ 0 & 0 & -C & 0\\ 0 & 0 & 0 & A\end{pmatrix},\quad g=-A^2BC,\quad BC>0, \tag{52.1}$$

где A, B, C — функции только от переменных x^1, x^4. Этот факт по аналогии с теорией электромагнитных волн и послужил основой формальной конструкции метрики. Применяя затем подстановку

$$\alpha=\ln A,\quad \beta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{B}{C}\right),\quad \gamma=\frac{1}{2}\ln(BC),$$

Эйнштейн и Розен [104] пришли к пяти независимым уравнениям поля.

Проведем исследование, не пользуясь этой заменой.

Вычисляя компоненты тензора кривизны по формулам (5.7) для метрики (52.1), получим непосредственно

$$\left.\begin{aligned}
R_{1414}&=\frac{1}{2}\left(A_{44}-A_{11}-\frac{A_4^2}{A}+\frac{A_1^2}{A}\right),\\
R_{2323}&=\frac{1}{4A}(B_1C_1-B_4C_4),\\
R_{2424}&=\frac{1}{2}\left(B_{44}-\frac{B_4^2}{2B}-\frac{A_1B_1+A_4B_4}{2A}\right),\\
R_{3131}&=\frac{1}{2}\left(C_{11}-\frac{C_1^2}{2C}-\frac{A_1C_1+A_4C_4}{2A}\right),\\
R_{3434}&=\frac{1}{2}\left(C_{44}-\frac{C_4^2}{2C}-\frac{A_1C_1+A_4C_4}{2A}\right),\\
R_{1212}&=\frac{1}{2}\left(B_{11}-\frac{B_1^2}{2B}-\frac{A_1B_1+A_4B_4}{2A}\right),\\
R_{2412}&=\frac{1}{2}\left(-B_{14}+\frac{B_1B_4}{2B}+\frac{A_1B_4+A_4B_1}{2A}\right),\\
R_{3431}&=\frac{1}{2}\left(C_{14}-\frac{C_1C_4}{2C}-\frac{A_1C_4+A_4C_1}{2A}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{52.2}$$

а все остальные компоненты равны нулю. Здесь индексы, стоящие около A, B, C, означают частное дифференцирование по соответствующим аргументам:

$$A_i \equiv \partial_i A, \quad A_{ij} \equiv \partial_{ij} A, \ \ldots$$

Записывая уравнения поля для свободного пространства $R_{\alpha\beta}=0$, получим, что пять из них обращаются в тождества, а остальные пять будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{A} R_{1414} - \frac{1}{B} R_{1212} - \frac{1}{C} R_{3131} = 0,\\
\frac{1}{A}(R_{2424} - R_{1212}) - \frac{1}{C} R_{2323} = 0,\\
\frac{1}{A}(R_{3434} - R_{3131}) - \frac{1}{B} R_{2323} = 0,\\
\frac{1}{A} R_{1414} + \frac{1}{B} R_{2424} + \frac{1}{C} R_{3434} = 0,\\
\frac{1}{B} R_{2412} - \frac{1}{C} R_{3431} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (52.3)$$

Заменяя в (52.3) компоненты тензора кривизны по формулам (52.2), придем к пяти уравнениям поля, определяющим потенциалы A, B, C, эквивалентные уравнениям, полученным Эйнштейном и Розеном.

Что касается группы движений, допускаемой метрикой (52.1) при условиях (52.3), то имеем два очевидных оператора: $X=\delta_2^\alpha\partial_\alpha$, $Y=\delta_3^\alpha\partial_\alpha$, определяющих абелеву группу G_2. Если же записать уравнения Киллинга для метрики (52.1) и потребовать, чтобы они допускали решения, отличные от

$$\xi^\alpha = C_1\delta_2^\alpha + C_2\delta_3^\alpha, \qquad C_1, \ C_2 - \text{const},$$

то, как легко проверить, это возможно только при наложении на метрический тензор некоторых дополнительных условий, не вытекающих из (52.3). Следовательно, Эйнштейн и Розен искали решения при такой постановке вопроса, которая эквивалентна следующим требованиям: 1) метрика искомого пространства удовлетворяет уравнениям поля тяготения свободного пространства $R_{\alpha\beta}=0$, 2) искомое пространство допускает 4-ортогональную систему координат, 3) оно допускает также абелеву группу движений G_2, действующую на неизотропных двумерных поверхностях транзитивности определенной метрики, 4) в указанной системе координат $g_{11} = -g_{44}$, 5) сигнатура метрики имеет вид $(- - - +)$.

Для определения типа пространства исследуем λ-матрицу в бивекторном пространстве. Эта матрица будет иметь вид:

$$(R_{ab} - \lambda g_{\alpha\beta}) =$$

$$= \begin{pmatrix} R_{1414}+\lambda A^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{2424}+\lambda AB & 0 & 0 & 0 & R_{2412} \\ 0 & 0 & R_{3434}+\lambda AC & 0 & R_{3431} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{2323}-\lambda BC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{3431} & 0 & R_{3131}-\lambda AC & 0 \\ 0 & R_{2412} & 0 & 0 & 0 & R_{1212}-\lambda AB \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что после перестановки строк и столбцов эта матрица может быть записана так:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix},$$

где M_1 и M_2 определяют одномерные блоки матрицы

$$\left(\lambda + \frac{R_{1414}}{A^2}\right), \quad \left(\lambda - \frac{R_{2323}}{BC}\right),$$

которым отвечают два простых элементарных делителя λ-матрицы. Ввиду этого характеристика λ-матрицы может быть только одного из двух следующих типов: $[111, \overline{111}]$ и $[12, \overline{12}]$. Следовательно, исследуемое пространство может быть только или пространством типа T_1, или типа T_2. Следующие два блока имеют вид:

$$M_3 = \begin{pmatrix} R_{2424} + \lambda AB & R_{2412} \\ R_{2412} & R_{1212} - \lambda AB \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} R_{3434} + \lambda BC & R_{3431} \\ R_{3431} & R_{3131} - \lambda AC \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения системы (52.3) следует, что компоненты R_{2412} и R_{3431} равны или не равны нулю одновременно. Если, например,

$$R_{2412} = 0,$$

то оба блока определяют одновременно *простые* элементарные делители, что приводит к пространствам типа T_1. Если же

$$R_{2412} \neq 0,$$

то получим одновременно два *непростых* элементарных делителя вида $(\lambda - \underset{0}{\lambda})^2$, $(\lambda - \underset{0}{\bar{\lambda}})^2$, что приводит к пространствам T_2. Более того, в этом последнем случае можно утверждать, что

$$\frac{R_{1414}}{A^2} = -\frac{R_{2323}}{BC} \tag{52.4}$$

и что два квадратных уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^2 + \frac{1}{AB}(R_{2424} - R_{1212})\lambda + \left(\frac{R_{2412}}{AB}\right)^2 = 0,\\ &\lambda^2 + \frac{1}{AC}(R_{3434} - R_{3131})\lambda + \left(\frac{R_{3431}}{AC}\right)^2 = 0,\\ &\qquad R_{2412} \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{52.5}$$

определяют четыре корня, разбивающиеся на две пары корней, комплексно-сопряженных между собой. Условия (52.4) и (52.5) определяют всякое возможное пространство типа T_2, удовлетворяющее условиям Эйнштейна—Розена. Имея в виду классификацию пространств T_2 по группам движений (см. § 27), можно указать сколько угодно интегралов системы уравнений поля Эйнштейна—Розена. В частности, таким интегралом будет пространство максимальной подвижности T_2 с группой G_6 движений, определяемое метрикой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \mathrm{sh}^2\nu\, dx^{2^2} - \sin^2\nu\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \qquad \nu = x^1 - x^4,$$

а также все те классы пространств, которые удовлетворяют условиям (52.4) и (52.5) и допускают более низкую группу движений.

Задачи

1. Показать, что решение уравнений поля Розена (§ 14) представляет собой частный случай решения Эйнштейна—Розена при

$$A = e^{2(\gamma-\psi)}, \quad B = x^{1^2} e^{-2\psi}, \quad C = e^{2\psi},$$

где ψ, γ — некоторые функции от x^1 и x^4 с абелевой группой движения G_2.

2. Исследовать тип пространства задачи 1.

§ 53. Пространства, связанные с граничными условиями

Вопрос о предельных условиях при интегрировании уравнений поля тяготения в релятивистской теории играет такую же роль, как и в классической теории. Для ньютоновской теории гравитации, основанной на принципе дальнодействия, характерна следующая картина. Пусть на некоторую точку воздействуют массы, причем эта точка может быть внутри этих масс или вне их (*внутренняя* или *внешняя* задачи). Тогда действие этих масс на точку описывается потенциалом φ, т. е. такой функцией, производные которой φ'_x, φ'_y, φ'_z, взятые с обратным знаком, определяют компоненты силы, действующей на точку. Так как результат действия зависит от плотности материи, то вводится еще плотность $\varrho(x, y, z)$. В теории Ньютона этот потенциал определяется уравнением Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi\varrho$ или же, если рассматривается внешняя задача, уравнением Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Общее выражение однозначной и один раз непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяющей уравнению Пуассона, имеет вид:

$$\varphi = \int \frac{\bar{\varrho}\, dv}{r} + \overset{0}{\varphi},$$

где $\overset{0}{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа ($\Delta \overset{0}{\varphi} = 0$) во всем бесконечном пространстве. Важно отметить, что для теории Ньютона важное значение имеет *условие на бесконечности*, которое состоит в том, что $\bar{\varphi}$ на бесконечности считается заданной функцией. В классической механике это проявляется в том, что $\overset{0}{\varphi}$ принимается за потенциальную функцию масс, которые целиком лежат на бесконечности. Например, в качестве $\overset{0}{\varphi} = \text{const}$ принимают потенциальную функцию однородного шарового слоя бесконечно большого радиуса.

В релятивистской теории тяготения, если понимать ее в широком смысле, дело обстоит в сущности аналогичным образом. Роль потенциала φ здесь играют компоненты метрического тензора — потенциалы $g_{\alpha\beta}(x)$; аналогом плотности ϱ является тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(x)$. Соответственно этому вместо уравнения Пуассона имеем общие уравнения поля

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta},$$

а для областей, где исчезает тензор $T_{\alpha\beta}$, получим как аналог уравнения Лапласа систему

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

В этом смысле можно говорить, что $g_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющие этим последним уравнениям, являются обобщениями гармонических функций.

Разумеется, эта несколько формальная аналогия не претендует на доказательную силу, но она, несомненно, полезна для уяснения существа вопроса. Так же, как и в классическом случае, в теории гравитации предельные условия должны играть важную роль. Они должны проявиться при интегрировании уравнений поля [225].

Исторически проблема граничных условий связана прежде всего с вопросами космологии, и именно поэтому она формулировалась как задача о граничных условиях на бесконечности. К этому вопросу неоднократно возвращался Эйнштейн ([97], стр. 315 — 331), который при формулировке граничных условий видел лишь следующие три возможности: 1) *в пространственной бесконечности при надлежащем выборе системы координат метрика стремится к метрике плоского пространства Минковского*, 2) *не существует граничных условий, которые могли бы претендовать на всеобщую справедливость;* каждая задача должна иметь индивидуальное решение этого вопроса, 3) *общие* *уравнения поля должны быть изменены путем введения добавочного (космологического) члена так, чтобы пространство стало замкнутым*, чем снимается вопрос о граничных условиях; вселенная замыкается в себе и является везде однородной.

По поводу этих трех возможностей Эйнштейн в указанной работе делает следующие замечания.

Гипотеза 1) не всегда согласуется с понятием относительности инерции и плохо согласуется с некоторыми статистическими соображениями; предположение 2) фактически не соответствует какому-либо решению вопроса, а означает отказ от его решения; в случае же 3) получается такое обобщение уравнений поля, которое не подтверждается нашими действительными знаниями о тяготении.

В дальнейшем этот вопрос хотя и обсуждался, но не получил определенного решения. Как нам кажется, пользуясь классификацией по алгебраической структуре тензора кривизны (см. главу III), можно попытаться сформулировать достаточно определенное и *инвариантное* решение этого вопроса.

Прежде всего, можно утверждать, что гипотеза 1), тесно связанная с планетарными задачами, которые обычно рассматриваются как задачи статические, в общем случае не имеет места Рассмотрим, например, некоторое поле типа T_2. Физически в некоторых случаях его можно истолковать как поле, создаваемое материей и гравитационными волнами. Согласно гипотезе 1) пространство, определяемое таким полем, в предельном случае должно стремиться к плоскому пространству-времени. Для этого необходимо и достаточно, чтобы компоненты тензора кривизны такого риманова пространства стремились к нулю для некоторых значений аргумента. Но, например, для любого из пространств T_2, допускающих некоторую группу движений, легко убедиться, что это невозможно ни при каких значениях аргументов, если исключить вырождение метрики. Так, для пространства максимальной подвижности T_2 с метрикой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \mathrm{sh}^2(x^1 - x^4)dx^{2^2} - \sin^2(x^1 - x^4)dx^{3^2} + dx^{4^2}$$

среди компонент тензора кривизны имеется равная $\mathrm{sh}^2(x^1 - x^4)$, и стремление ее к нулю означало бы, что $g \overset{\mathrm{def}}{=} |g_{\alpha\beta}|$

стремится к нулю. Тем более это рассуждение относится к пространствам типа T_3.

Можно было бы пойти по пути исключения пространств типа T_2 или T_3 из рассмотрения, но такое решение вопроса едва ли может претендовать на научность, если оно не будет подтверждено более вескими аргументами. Ввиду этого гипотеза 1) явно не может быть универсальной.

Для того чтобы подойти к иному решению вопроса, заметим, что является нежелательным при формулировке граничных условий связывать их с некоторой системой координат. Такие условия нужно сформулировать инвариантным образом с четким физическим содержанием. Далее, понимая под граничными условиями для $g_{\alpha\beta}(x)$ характеристику этих потенциалов в тех областях, где $T_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow 0$, необходимо предположить, что данное поле в областях, где имеют место граничные условия, должно сколь угодно мало отличаться от поля, отвечающего метрическому тензору, компоненты которого являются решением уравнений поля для свободного пространства

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Кроме того, *тип пространства не должен меняться*: всякое изменение типа с физической точки зрения можно объяснить только наложением нового поля, что исключается существом поставленной задачи.

Так как, наконец, гипотеза 1) хорошо согласуется с экспериментом и наблюдениями для пространств первого типа (к этому типу относятся все экспериментально проверенные решения), то для этих пространств (T_1) ее следует признать правильной и в этом смысле она может послужить образцом для формулировки граничных условий для пространств T_2 и T_3.

Для пространств T_1 искривление, выражающееся в отклонении компонент тензора кривизны от нуля, обусловливается, например, наличием гравитационных масс. По мере удаления от этих масс (например, на гиперсфере бесконечно большого радиуса, для метрики Шварцшильда, в полярной системе координат) их гравитационное действие ослабевает, «искривленность» пространства сглаживается, оно становится более однородным и *стремится к пространству максимальной подвижности* T_1 с группой движений G_{10}, т. е. к плоскому пространству. Это и составляет существо гипотезы 1). Группа Ли движений имеет то простое физическое истолкование, что при преобразованиях группы $g_{\alpha\beta}(x)$ *переходят в те же самые функции от новых переменных* и, следовательно, *поле гравитации не меняется.* Поэтому подход к граничным условиям с точки зрения групп движения является наиболее естественным.

Если предполагать, что пространства T_2 и T_3 обязаны своим происхождением наличию движущейся гравитирующей материи и, может быть, гравитационным волнам, распространяющимся в пустоте со скоростью света, то, например, можно было бы думать, что при удалении от масс гравитационное действие этих масс ослабевает, но остается еще вторая причина искривления пространства, которая не позволяет, так сказать, «приблизиться» данному пространству к плоскому многообразию. Необходимо отметить, что нет необходимости говорить о бесконечности, так как в принципе можно представить себе, что для некоторого физического феномена имеет место своя геометрия, создаваемая «тяготением», которое не сходно с тяготением между планетами, истолковывается в более широком смысле и которое имеет место только в области, где всеми иными полями, не относящимися к данному феномену, можно пренебречь. Эта идея высказывалась еще Лобачевским в его знаменитом «Вступлении» к книге «Новые начала геометрии».

Кажется наиболее естественным для пространств T_2 и T_3 по аналогии с пространствами T_1 предположить, что в областях, где должны иметь место граничные условия, эти пространства приближаются к пространствам максимальной подвижности данного типа. Таким образом, можно сформулировать следующий *принцип наложения граничных условий*: пусть имеется поле тяготения T_i $(i = 1, 2, 3)$, тогда для областей, где $T_{\alpha\beta}(x) \longrightarrow 0$, компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ данного поля тяготения сколь угодно мало отличаются от соответствующих компонент метрического тензора пространства, определяемого условиями: α) оно является пространством того же типа T_i, что и данное, и β) допускает максимально возможную для данного типа группу движений.

Такая формулировка не зависит от системы отнесения и является *инвариантно-групповой* по существу. Таким образом, здесь речь идет не об отказе сформулировать граничные условия, имеющие всеобщий характер, что оттолкнуло Эйнштейна от гипотезы 2), а о том, что существует три и только три типа полей тяготения и *для каждого типа существуют свои граничные условия*. Следовательно, можно говорить о трех типах граничных условий.

Если задано некоторое T_i, то всегда можно определить его тип и тем самым выяснить, какие граничные условия отвечают этому полю тяготения. Используя результаты § 25, получим следующую схему:

$T_1 \longrightarrow$ плоское пространство T_1 с группой G_{10},

$T_2 \longrightarrow$ пространство T_2 с транзитивной разрешимой группой G_6 вида (25.3),

$T_3 \longrightarrow$ пространство T_3 с неабелевой группой G_2 вида (25.52).

Является очевидным, что попытка поставить при решении некоторой задачи для пространств некоторого заданного типа граничные условия другого типа приведет к противоречию, так как вырождение метрики и изменение типа здесь физически не будут мотивированы.

Можно думать, что сформулированный выше принцип наложения граничных условий должен сыграть роль при изучении пространств T_2 и T_3, исследованию которых посвящен ряд работ (см. [258], [299]).

Возможен в принципе и иной подход к вопросу о граничных условиях для T_2 и T_3, когда пространственно-временной континуум типа T_i $(i = 2, 3)$ мыслится как замкнутый в себе и тем самым вопрос о граничных условиях отпадает. Этот вопрос может быть решен только на пути физического осмысливания такого рода многообразий и в конечном счете экспериментом.

БИБЛИОГРАФИЯ

1868

1. Riemann B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Nachrichten von der k. Gesellschaft von Wissenschaften, Göttingen, **13**, 133—152 (см. русский перевод: сб. «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956, 309—341).

1869

2. Christoffel E. B., Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journ. reine und angew. Math. (Crelle) **70**, 46—70.

1886

3. Ricci G., Sui parametri gli invarianti delle forme differenziale, Ann. Math. **11**, 14.
4. Schur F., Über die Zusammenhang der Räume konstanten Krümmengs massen mit den projektiven Räumen, Math. Ann. **27**.

1888

5. Lie S. und Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, S. 1, 2, Teubner, Leipzig, Reprinted in 1930.

1892

6. Killing W., Über die Grundlagen der Geometrie, Journ. reine und angew. Math. (Crelle) **109**.

1893

7. Lie S. und Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Leipzig.

1895

8. Котельников А. П., Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань.

1899

9. Muth P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig.

10. Cotton E., Sur les variétés a trois dimensions, Ann. Fac. Sci. Toulouse (2), 1, Thése, Paris.
11. Котельников А. П., Проективная теория векторов, Казань.

1900

12. Larmor Y. J., Aether and Matter, Cambridge.

1901

13. Ricci G., Levi-Civita T., Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. 54.

1902

14. Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, vol. 1, Spoerri, Pisa.

1903

15. Lorentz H. A., Обзорная статья в «Enzyklopädie der Mathemat. Wissensch.», V. 14.
16. Fubini G., Sulla teoria degli spacii che ammetono un gruppo conformo, Atti Accad. Sci. Torino 38.
17. Hadamard J., Leçons sur la propagations des ondes, Hermann.
18. Fubini G., Sugli spacii che ammetono un gruppo continuo di movimenti, Ann. di Math. 3, 8.

1904

19. Lorentz H. A., Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Smaller than of Light, Amst. Proc., № 6; № 12.
20. Fubini G., Sugli spacii a quattro dimensioni she ammetono un gruppo continuo di movimenti, Ann. Math. 3, 9.

1905

21. Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig.
22. Dickson L. E., Definitions of a Group and a Field of Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc. 6.
23. Poincaré H., Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 140.
24. Einstein A., Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. Physik 17.

1906

25. Poincaré H., Sur la dynamique de l'électron, Rend. Circolo mat. Palermo 21.

1907

26. Minkowski H., Das Relativitätsprinzip, Доклад Матем. об-ву в Геттингене, см. сб. «Принцип относительности», М.—Л., ОНТИ, 1935.

1909

27. Dickson L. E., Equivalence of Paires of Bilinear or Quadratic Formes in the Rational Transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 10, № 3.
28. Fubini G., Sulle rappresentazioni che concervano le ipersfere, Ann. Math. 16.

1910

29. Ignatowsky W., Physik Zs., № 11.

1911

30. Frank Ph., Rothe H., Ann. Physik 34.
31. Ignatowsky W., Physik Zs., № 12.

1912

32. Frank Ph., Rothe H., Physik Zs., № 13.
33. Mie G., Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. Physik, № 37, 39.

1914

34. Einstein A., Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Berichte.

1915

35. Einstein A., Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Berichte.

1916

36. Einstein A., Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Physik 49.
37. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berl.
38. Droste Y., Amsterdam. Versl. 25, 163.

1917

39. Levi-Civita T., Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana, Rend. di Palermo 42.
40. Klein F., Zu Hilbert erster Note über die Grundlagen der Physik, Gött. Nachr., math.-pys. Klasse.

41. Hilbert D., Grundlagen der Physik, 2 Mitteilung, Gött. Nachr.
42. Weyl H., Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Physik 54 (см. также 59 (1919)).
43. Einstein A., Sitzungsber. der Preussische Akad. Wiss.

1918

44. Bianchi L., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni sperri, Pisa.
45. Klein F., Über die Differentialgesetze von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Gött. Nachr.
46. Kottler F., Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie, Ann. Physik, ser. 4, 56.
47. Levi-Civita T., ds^2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei 27, fasc. 7—8, Roma.
48. Schouten J. A., Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Ver. kon. Akad. Amsterdam 12, № 6.
49. Weyl H., Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2.

1919

50. Levi-Civita T., ds^2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei 28.
51. Weyl H., Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Physik 59.

1920

52. Eisenhart L. P., Condition that a Tensor be the Curl of a Vector, Bull. Amer. Math. Soc. 28.

1921

53. Goursat E., Leçons sur l'intégration des équatons aux dérivées partielles du I-er ordre, Paris.
54. De Donder Th., La gravifique einsteinienne, Paris.
55. Schouten J. A., Struik D. J., On Some Properties of General Manifolds Relating to Einstein's Theory of Gravitation, Amer. Journ Math. 43.
56. Bach P., Weyl H., Math. Ann. 13.
57. Kasner E., Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations, Amer. Journ. Math. 43.
58. Schouten J. A., Über die konforme Abbildung n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Masszbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit Euklidischer Masszbestimmung, Math. Zeitschr. 11.

1922

59. Cartan E., Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 174.

60. Fermi E., Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, Rend. Accad. Sci. Lincei (Roma) 31.
61. Veblen O., Normal Coordinates for the Geometry of Paths, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 8.
62. Bach P., Neue Lösungen Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Math. Zeitschr. 13.
63. Cartan E., Journ. Math. pures et appl. 1.
64. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Одесса.
65. Клиффорд В. К., Предварительный очерк бикватернионов, Приложение к его книге «Здравый смысл точных наук», Петроград.

1923

66. Birkchoff G. D., Relativity and Modern Physics, Horvard Univ. Press, Cambridge, Mass.
67. Veblen O., Thomas T. Y., The Geometry of Paths, Trans. Amer. Math. Soc. 25.
68. Lanczos K., Physik Zs. 23, 537.
69. Weyl H., Raum-Zeit-Materie, Springer, Berlin.
70. Brinkman H. W., On Riemann Spaces Conformal to Einstein's Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9.

1924

71. Brinkman H. W., Riemann Spaces Conformal to Einstein's Spaces, Math. Ann. 91.

1925

72. Широков П. А., Об отличительных свойствах сфер в пространствах постоянной кривизны, Изв. Казанск. физ-матем. об-ва, сер. 2, 25.
73. Brinkman H. W., Einstein Spaces which Mapped Conformally on Each Other, Math. Ann. 94.
74. Широков П. А., Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, сер. 2, 25.
75. Широков П. А., О функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа в римановых трехмерных пространствах и зависимых только от расстояния, Уч. зап. Казанск. ун-та 85, кн. 1.
76. Kasner E., An Algebraic Solution of the Einstein Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 27.

1926

77. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press; русский перевод: Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, М., ИЛ, 1948.
78. Hlavaty V., Application des paramétres locaux, Ann. Soc. Polon. 5.

79. Каган В. Ф., О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцевы преобразования, части 1, 2, изд. Ин-та матем. и мех. при МГУ, Москва.

1927

80. Eisenhart L. P., Non Riemannian Geometry, Amer. Coll. Publ. 8.
81. Cartan E., La théorie des groupes et la géométrie, Доклад на заседании Швейцарск. матем. об-ва в Берне 7 мая 1927 г.; L'enseignement mathématique; русский перевод: Серия монографий и исследований по неевклидовой геометрии, № 1, Казань, 1939 г.
82. Дубнов Я. С., О симметрично-сдвоенных ортогональных матрицах, изд. Ин-та матем. и мех. при МГУ, Москва.

1928

83. Gartan E., Geometie les éspaces riemanniens, Paris.
84. Вавилов С. И., Экспериментальные основания теории относительности, ГИЗ.
85. Лопшиц А. М., Векторное решение задачи о симметрично-сдвоенных матрицах, Труды Всеросс. съезда математиков.

1931

86. Mitter O. K., On a Solution of Einstein's Gravitational Equations $G_{\mu\nu}=0$, Symmetrical about an Axis, Tohoku Math. Journ. 34.

1932

87. Schouten J. A., van Dantzig G. F., Generalle Feldtheorie, Zs. Physik 78.
88. Lewis T., Proc. Royal Soc. 136.
89. Lewis T., Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields, Proc. Royal Soc., series A, 81.

1933

90. Бохер М., Введение в высшую алгебру, М.—Л., ГТТИ.

1934

91. Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. 1, М.—Л., ГТТИ.
92. Thomas T. Y., The Differential Invariants of Generalized Spaces, Cambr. Univ. Press 25 i S.
93. Hlavaty V., Les courbes de la variété générale a n dimensions, Mem. Sci. mathém., fasc. 63, Paris.
94. Delsarte M., Sur les ds^2 d'Einstein a symétrie axiale, Paris.

1935

95. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2, М.—Л., ОНТИ.
96. Synge J. L., Univ. of Toronto Studies, Appl. Math. Series.
97. Эйнштейн А., Вопросы космологии и общая теория относительности, Сб. работ классиков релятивизма «Принцип относительности».

1936

98. Картан Э., Геометрия римановых пространств, М.—Л., ОНТИ.
99. Ruse H. S., Proc. London Math. Soc. 41.
100. Van Stockum W. J., The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry, Proc. Royal Soc. Edinburgh 107, part II.

1937

101. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М.—Л., ОНТИ.
102. Тихов Т. А., Об отклонении световых лучей в поле тяготения звезд, ДАН 16, № 4.
103. Choy P. V., Isotropic Static Solutions of the Field Equations in Einstein's Theory of the Gravitation, Amer. Journ. Math. 59.
104. Einstein A., Rosen N., On Gravitational Waves, Journ. Franklin Inst. 223.
105. Широков П. А., К вопросу о трансляциях в римановых пространствах, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, сер. 3, 9.
106. Петровский И. Г., О проблеме Коши для системы уравнений с частными производными, Матем. сб. 2 (44) : 5.

1938

107. Thomas T. Y., New Theorems on Riemann Einstein Spaces, Матем. сб. 3 (45) : 2.
108. Широков П. А., Симметрические конформно-евклидовы пространства, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, сер. 3, 11.
109. Fialkow A., Einstein Spaces on a Space of Constant Curvatura, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 24.

1939

110. Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1, М.—Л., Гостехиздат.
111. Фок В. А., О движении конечных масс в общей теории относительности, ЖЭТФ 9, № 4.
112. Клейн Ф., Высшая геометрия, М.—Л., Гостехиздат.
113. Haantjes Y., Wrona W., Über konformeuklidische und Einsteinsche Räume Gerader Dimensionen, Proc. kon. Ned. Akad. Amsterdam 42.

114. Fialkow A., Totally Geodesic Einstein Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 45.
115. Картан Э., Теория групп и геометрия, Казань, стр. 113—141.
116. Höhl H. und Papapetrou A., Über die Selbstenergie und das Gravitationsfeld einer elektrischen Punktladung, Zs. Physik 112, 65—88.
117. Höhl H. und Papapetrou A., Über die innere Bewegung des Elektrons, I, Zs. Physik 112, 512—541.
118. Papapetrou A. und Höhl H., Über die innere Bewegung des Elektrons, II, Zs. Physik 114, 478—495.
119. Papapetrou A., Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik, Praktika de l'Académie d'Athenes 14, 54—547.

1940

120. Чеботарёв Н. Г., Теория групп Ли, М.—Л., Гостехиздат.
121. Богородский А. Ф., К вопросу о природе красного смещения в спектрах внегалактических туманностей, Циркуляр ГАО № 29.
122. Богородский А. Ф., Задача Кеплера в общей теории относительности, Циркуляр ГАО № 30, Пулково.
123. Gopson E. T., Ruse M. S., Harmonic Riemannian Spaces, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 60, 117—133.
124. Höhl H., Papapetrou A., Über die innere Bewegung des Elektrons, III, Zs. Physik 116, 153—184.
125. Papapetrou A., Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der Diracschen Theorie des Elektrons, Praktika de l'Académie d'Athenes 15, 404—417.

1941

126. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, М.—Л., Гостехиздат.

1942

127. Takeno H., Equations characterising Various Riemann Spaces treated in Cosmologies, Journ. Sci. Hiroshima Univ., series A, 12.
128. Walker A. G., Note on a Distance Invariant and the Calculation of Ruse's Invariant, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 7.
129. Fialkow A., Correction to «Totally Geodesic Einstein Spaces», Bull. Amer. Math. Soc. 48.
130. Sasaki S., On a Relation between a Riemannian Space which is Conformal with Einstein Spaces and Normal Conformally Connected Spaces whose Groups of Holonomy Fix a Point or a Hypersphere, Tensor 5, 66—72.

1943

131. Yano K., Conformal and Concircular Geometries in Einstein Spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, 444—453.
132. Wong Y. Ch., Some Einstein Spaces with Conformally Separable Fundamental Tensors, Trans. Amer. Math. Soc. 53.

133. Yang Chow Wong, Family of Totally Umbilical Hypersurfaces in a Einstein Space, Ann. Math. 44.
134. Papapetrou A., Les corpuscules a structure multipolaire en relativité restreinte, Praktika de l'Académie d'Athenes 18, 40—50.
135. Papapetrou A., La structure intérieure des corpuscules a constitution mono-bipolaire, Praktika de l'Académie d'Athenes 18, 50—62.
136. Papapetrou A., Ondes gravifiques du corpuscule mono-bipolaire, Praktika de l'Académie d'Athenes 18, 313—317.
137. Papapetrou A., La loi des moments dans un systeme quelconque de coordonnées, Praktika de l'Académie d'Athenes 18, 317—323.

1944

138. Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., Гостехиздат.
139. Lichnerowicz A., Sur les éspaces riemanniens complement harmoniques, Bull. Soc. Math. France 72.
140. Papapetrou A., La théorie de la gravitation dans la relativité restreinte, Praktika de l'Académie d'Athenes 19, 224—236.

1945

141. Walker A. G., A Particular Harmonic Riemannian Space, Journ. London Math. Soc. 20.
142. Walker A. G., On Completely Harmonic Spaces, Journ. London Math. Soc. 20.

1946

143. Yang Chow Wong, Some Theorems on Einstein 4-Space, Duke Math. Journ. 13, № 4.
144. Narlikar V. V., Karmarkar K. K., On a Curious Solution of Relativistic Field Equations, Currient Sci. 15.
145. Walker A. G., Symmetric Harmonic Spaces, Journ. London Math. Soc. 40.
146. Петров А. З., Один тип пространств Эйнштейна, Труды Казанск. авиационного ин-та 7.

1947

147. Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, М., ИЛ.
148. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ.
149. Паули В., Теория относительности, М.—Л., Гостехиздат.
150. Wrona W., Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un éspace soit Einsteinien ou conformé-euclidien (см. статью «Польское матем. общество» в УМН 2, вып. 1 (17)).
151. Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.—Л., Гостехиздат.
152. Бергман П. Т., Введение в теорию относительности, М., ИЛ.

153. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 1, М.—Л., Гостехиздат.
154. Papapetrou A., A Static Solution of the Equations Gravitational Field for an Arbitrary Charge-Distribution, Proc. Royal Irish Academy 51, A, 191—204.

1948

155. Норден А. П., Дифференциальная геометрия, М., Учпедгиз.
156. Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля, М.—Л., Гостехиздат.
157. Петров А. З., О кривизне римановых пространств, ДАН 61, № 2.
158. Розенфельд Б. А., Дифференциальная геометрия образов симметрии, ДАН 59, № 6.
159. Mme Foures et Lichnerowicz A., Sur un théoreme global de réduction des ds^2 stationaires d'Einstein, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 226.
160. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, М.—Л., Гостехиздат.
161. Wrona W., Conditions nécessaires et suffisantes qui determinent les éspaces Einsteiniens, conformément euclidiens et de courbure constante, Ann. Soc. Polon. Math. 20.
162. Papapetrou A., Einstein's Theory of Gravitation and Flat Space, Proc. Royal Irish Academy 52, A, 11—23.
163. Papapetrou A., The Question of Non-Singular Solutions in the Generalized Theory of Gravitation, Phys. Rev. 73, 1105—1108.

1949

164. Петрова Н. М., Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности, ЖЭТФ 19, вып. 11.
165. Петров А. З., К теореме о главных осях тензора, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, сер. 3, 14.
166. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., ИЛ.
167. Einstein A., Infeld L., On the Motion of Particles in General Relativity Theory, Canad. Journ. Math. 1.
168. Егоров И. П., К усилению теоремы Фубини о порядке групп движений римановых пространств, ДАН 66, № 5.

1950

169. Розенфельд Б. А. и Абрамов А. А., Пространства аффинной связности и симметрические пространства, УМН 5, вып. 2 (36).
170. Норден А. П., Пространства аффинной связности, М.—Л., Гостехиздат.
171. Петров А. З., Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду, Уч. зап. Казанск. ун-та 110, кн. 3.

172. Гуревич Г. Б., О некоторых линейных преобразованиях симметрических тензоров и поливекторов, Матем. сб. 26, № 3.
173. Lichnerowicz A., Elémentes du calcul tenseuriel, Paris.
174. Rainich G. Y., Mathematics of Relativity, New York.
175. Kniper N. H., Einstein Spaces and Connections, I, II, Kon. Ned. Acad. Amsterdam Proc. 53.

1951

176. Петров А. З., О пространствах, определяющих поля тяготения, ДАН 81, № 2.
177. Papapetrou A., Equations of Motion in General Relativity, Proc. Phys. Sci., series A, 14, 64.
178. Петров А. З., О существовании в поле тяготения гармонической функции, зависящей только от расстояния, Уч. зап. Казанск. ун-та 111, кн. 8.
179. Kniper N. H., Sur les propriétés conformes de éspaces d'Einstein, Coll. Géométrie Différentielle, London.
180. Taub A. H., Empty Space-Times Admitting a Three Parameter Group of Motions, Ann. Math. 53, № 3, 472—490.

1952

181. Петров А. З., Регулярные пространства Эйнштейна, допускающие транзитивную группу движений, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, кн. 10.
182. Петров А. З., Поля тяготения с комплексными стационарными кривизнами, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, кн. 10.
183. Петров А. З., О полях тяготения, Юбилейный сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», М.—Л., Гостехиздат.
184. Широков А. П., К вопросу об A-пространствах, Юбилейный сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», М.—Л., Гостехиздат.
185. Ruse H. S., Simply Harmonic Affine Spaces of Symmetric Connection, Publ. Math. Debradu.
186. Patterson E. M., Simply Harmonic Riemann Extensions, Journ. London Math. Soc. 27.
187. Соколов А. А., Замечания к квантовой теории гравитационного поля, Вестник МГУ № 9, 9—19.

1953

188. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М.—Л., Гостехиздат.
189. Франкль Ф. И., Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности, УФН 8, вып. 3.
190. Александров А. Д., О сущности теории относительности, Вестник ЛГУ, сер. матем., физ. и хим., № 8.
191. Александров А. Д. и Овчинников В. В., Замечания к основам теории относительности, Вестник ЛГУ, сер. матем., физ. и хим., № 11.

192. Александров А. Д., По поводу некоторых взглядов на теорию относительности, Вопросы философии, № 5.

193. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных тел.

194. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными., М.—Л., Гостехиздат.

195. Франкль Ф. И., О гравитационных волнах и о движении газов в сильных переменных гравитационных полях, Труды физ.-матем. факультета Киргизского ун-та, вып. 2.

196. Lichnerowicz A., Etude des équations du champ de la théorie unitaire d'Einstein, Rend. Sem. Mat. e fis. Milano (1953—1954), 14—133.

197. Lichnerowicz A., Equations de Laplace et éspaces harmoniques, Premier colloque sur les équations aux dérivees partielles, Louvain, 17—19.

198. Willmore T. Y., Mean Value Theorems in Harmonic Riemannian Spaces, Journ. London Math. Soc. 25.

199. Делоне Б. Н., Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., Изд. АН СССР.

200. Vranceanu G., A supra grupurilal de miscare ale unii spatii Riemann cupartu dimensiomi, Studii si cercetarri mat. 4, № 1—2.

1954

201. Фок В. А., О работе Ф. И. Франкля «Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности», УФН 9, вып. 4.

202. Инфельд Л., Несколько замечаний о теории относительности, Вопросы философии, № 5.

203. Кручкович Г. И., Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений, УМН 9, вып. 1 (59).

204. Широков П. А., Симметрические пространства 1-го класса, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, кн. 8.

205. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 2-е изд., М., Гостехиздат.

206. Rosen N., Bull. Res. Council. Israel 3.

207. Петров А. З., Классификация пространств, определяемых полями тяготения, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, кн. 8.

208. Норден А. П., О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, кн. 8.

209. Халатников И. М., Некоторые вопросы релятивистской теории Эйнштейна, ЖЭТФ 27, вып. 5.

210. Pounder Y. R., On Relativically Rigid Surfaces of Revolution, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., series A, № 11.

211. Taub A. H., General Relativitic Variational Principles for Perfect Fluids, Phys. Rev. 94, № 6, 146—470.

212. Salzman G., Taub A. H., Born-Type Rigid Motion in Relativity, Phys. Rev. 95, № 6, 1659—1669.

213. Pham Man Quan, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 238, № 3, 324—325.

214. Clauser E., Sui fronti d'ondi nella teoria unifoia Einsteiniana, Rend. Inst. Lombardo Sci. e Lettere, Cl. Sci. mat. e natur. 87, № 3, 473—492.

215. Buchdahl H. A., Reciprocal Static Solutions of the Equations $G_{\mu\nu}=0$, Quart. Journ. Math. 5, № 18.
216. Takasu T., Equations of Motion a Free Particle in the Author's General Relativity as a Nonholonomic Laguerre Geometry Realized in the Moving Three Dimensional Cartesian Space, Proc. Japan Acad. 30, № 9.
217. Schouten J. A., Ricci-Calculus, Berlin.
218. Takeno H., On Solutions of Electromagnetic Equations in Non-Static Spherically Symmetric Space-Times, Tensor 4, № 1.
219. Синюков Н. С., О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства, ДАН 98, № 1.
220. Papapetrou A., Eine Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion, Zs. Physik 139, 518—532.
221. Papapetrou A., Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, I, Math. Nachr. 12, № 3—4.
222. Papapetrou A., Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes, II, Math. Nachr. 12, № 3—4.
223. Papapetrou A., Urich W., Zur Kohlerschen Formulierung der Gravitationstheorie, Ann. Physik 14, 220—232.

1955

224. Рашевский П. К., Теория спиноров, УМН 10, вып. 2.
225. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., Гостехиздат.
226. Франкль Ф. И., О корректности постановки задачи Коши и о свойствах гармонических координат в общей теории относительности, Труды физ.-матем. факультета Киргизского ун-та, вып. 3.
227. Matsumoto T., Sur la déduction axiomatique des formules de Transformation de Lorentz, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A, 29, № 1.
228. Петров А. З., О пространствах максимальной подвижности, определяемых полями тяготения, ДАН 105, № 5.
229. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, М., Гостехиздат.
230. Егоров И. П., О движениях в пространствах аффинной связности, Докторская диссертация, МГУ.
231. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme, Masson & Cie, Paris.
232. Storchi E., Su una nuova interpretazione del principii dell'acione potenziale, Bull. Unione Mat. Ital. 10, № 2.
233. Takeno H., On Conformal Transformations in the Space-Time of Relativistic Cosmology, Tensor 4, № 3.
234. Kron G., A Physical Interpretation of the Riemann-Christoffel Curvature Tensor, Tensor 4, № 3.
235. Широков А. П., Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров, ДАН 102, № 3.
236. Takeno H., On Groups of Conformal Transformations in Spherically Symmetric Space-Times, Tensor 5, № 1.

237. Ikeda M., On Static Solutions of Einstein's Generalized Theory of Gravitation, II, Progr. Theor. Phys. 13, № 3.

238. Мейстер Г. И. и Папапетру А., О роли координатного условия в выводе уравнений движения общей теории относительности, Бюлл. Польск. Акад. наук, отд. III, 3, № 3.

239. Егоров И. П., Максимальные подвижные римановы пространства V_4 непостоянной кривизны, ДАН 103, № 1.

240. Papapetrou A., Urich W., Das Pol-Dipol-Teilschen in der Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld, Zeitschr. Naturforschung 10 A, 109—117.

241. Bochner S., Stationary Space-Time in General Relativity, Math. Ann. 41, 485—490.

1956

242. Takeno H., On the Theory of Gravitational Waves, Tensor 6, № 1.

243. Петров А. З., Классификация пространств, определяемых полями тяготения, по группам движений, УМН 11, вып. 4 (70).

244. Петров А. З., Движения в полях тяготения, Труды III Всесоюзного матем. съезда, т. II.

245. Narlikar V. V., Results of Gravitational Significance in Riemannian Geometry, Nature 177, № 4520.

246. Verma D. N., Roy S. R., Special Metric Forms and their Gravitational Significance, Bull. Calcutta Math. Soc. 48, № 3.

247. Mme Fourés-Bruhat Y., Sur l'intégration des équations de la rélativité générale, Journ. Rat. Mech. und Anal. 5, № 6.

248. Buchdahl H. A., Reciprocal Static Solutions of the Equations of the Gravitational Field, Austral. Journ. Phys. 9, № 1.

249. Yust K., Strenge Kugelsymmetrische Lösungen Einsteinschen Feld Gleichungen, Zs. Physik 34, № 2, 235—240.

250. Ceheniau J., Debever R., Les invariants de courbure de l'éspace de Riemann a quatre dimensions, Bull. Acad. Roy. Bélgique 42, № 2.

251. Pirani F. A. E., On the Physical Significance of the Riemann Tensor, Acta Physica Polonica 25, fasc. 6.

252. Траутман А., Уравнения Киллинга и законы сохранения, Бюлл. Польск. АН. отд. III, 4, № 10, 671—674.

253. Франкль Ф. И., О корректности постановки задачи Коши и о свойстве гармонических координат в общей теории относительности, УМН 11, вып. 3.

254. Фок В. А., Замечание к работе Ф. И. Франкля «О корректности постановки задачи Коши и о свойстве гармонических координат в общей теории относительности», УМН 11, вып. 3.

255. Mikhail F. Y., Solutions of Einstein's Field Equations for Empty Space, A'in Shams Bull. № 1, 125—135.

256. Синюков Н. С., Нормальные геодезические отображения римановых пространств, ДАН 111, № 4, 766—767.

1957

257. Яно К. и Бохнер С., Кривизна и числа Бетти, М., ИЛ.
258. Pirani F. A. E., Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory, Phys. Rev. 105, № 3, 1089—1099.
259. Керес Х., О понятии инерциальной системы в общей теории относительности, сб. «Исследования по теоретической физике», Тарту.
260. Кручкович Г. И., О движениях в римановых пространствах, Матем. сб. 41 (83) : 2.
261. Петров А. З., Пространства, определяемые полями тяготения, Докторская диссертация, МГУ.
262. Gehéniau J., Une classification de éspaces Einsteiniens, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 244, № 6.
263. Joseph V., Physical Properties of some Empty Space-Times, Proc. Cambr. Phys. Soc. 53, 836.
264. Керес Х., Некоторые вопросы общей теории относительности, сб. «Исследования по теоретической физике», Тарту.
265. Conference on the Role of Gravitation in Physics, Carolina.
266. Pham Man Quan, Inductions électromagnetiques dans un milieu anisotrope relativiste, Comrt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 245, № 21.
267. Pham Man Quan, Inductions électromagnetiques en relativité générale et principe de Fermat, Acch. Art. Mech. and Anal. 1, 54—86.
268. Айтмурзаев Т., Метод решения уравнений неустановившегося течения газа с учетом диссипативных процессов в общей теории относительности, ДАН 113, № 4.
269. Marder L., On the Existence of Cylindrical Gravitational Waves, London King's College, Тезисы докторской диссертации, pre-print; см. также: Proc. London Math. Soc., A, 244 (1958).
270. Петров П. И., Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы, ДАН 113, № 6.
271. Papapetrou A., Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Physik 6F, 20, № 7—8.
272. Takeno H., On Plane Wave Solutions of Field Equations in General Relativity, Tensor 7, № 2, 97—102.
273. Bondi H., Negative Mass in General Relativity, Rev. Modern Phys. 20, № 3.
274. Синюков Н. С., Эквидистантные римановы пространства, Научн. Ежегодн. Одесск. ун-та.
275. Papapetrou A., Eine neue Formulierung in der Relativitätstheorie, Schriften d. Forsch. Inst. f. Mathematik b. d. Deutschen Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, № 1, 210—221.
276. Papapetrou A., Le probleme du mouvement dans la relativité générale et dans la théorie du champ unifié d'Einstein, Ann. Inst. Henri Poincaré 15, 173—203.
277. Treder H., Stromladungsdefinition und elektrische Kraft in der Feldtheorie, Ann. Physik 19, 369—380.
278. Meister H. I., Die Bewegungsgleichungen in der Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion, Zs. Physik 147.

279. Taub A. H., Singular Hypersurfaces in General Relativity, Illinois Journ. Math. 1, № 3, 370—388.
280. Taub A. H., Approximate Solutions of the Einstein Equations for Isentropic Motions of Plane Symmetric Distributions of Perfect Fluids, Phys. Rev. 107, № 3, 884—900.
281. Bondi H., Plane Gravitational Waves in General Relativity, Nature 179, 1072—1073.
282. Yano K., Nagano T., Einstein Spaces Admitting a One-parameter Group of Conformal Transformations, Ann. Math. 69, № 2, 451—461.
283. Pirani F. A. E., Tetrad Formulation of General Relativity Theory, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, № 2, 143—146.
284. Trautman A., On the Conservation Theorems and Coordinate Systems in General Relativity, Bull. de l'Acad. Polon. Sci, Cl. III, 5, № 7, 721—727.
285. Trautman A., Discontinuities of Field Derivatives and Radiation in Covariant Theories, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, № 3, 273—274.

1958

286. Петров П. И., Поправка к статье «Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы», ДАН 119, № 5.
287. Петров А. З., Классификация полей тяготения общего вида, Изв. вузов, Матем., № 6 (7).
288. Trautman A., Sur la propagation des discontinuics du tenseur de Riemann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 246.
289. Trautman A., Lectures on the General Relativity, preprint, King's College, London.
290. Cattaneo C., Sui postulati comuni della cinematica classica e della cinematica relativistica, Atti Accad. Naz. Lincei Rend, Cl. sci. fis., mat. e natur. 24, № 5, 526—532.
291. Bel L., Sur la radiation gravitationelle, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 247, № 18, 1044—1046.
292. Eisenhart L. P., Spaces for which the Ricci Scalar R is Equal to Zero, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 44, № 7, 195—648.
293. Treder H., Stoszwellen des Gravitationsfelds, Ann. Physik, 7F, 2, № 5—6.
294. Papapetrou A., Über periodische gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Physik, 7F, 1, № 4—5.
295. Papapetrou A., Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Physik, 7F, 2, № 3—4.
296. O'Raifearteigh L., Synge J. L., A Property of the Empty Space-Time, Proc. Royal Soc., series A, 246, 299—300.
297. Israel W., Discontinuities in the Spherically Symmetric Gravitational Fields and Shells of Radiation, Proc. Royal Soc., series A, 248, 404—414.
298. Synge J. L., Whittaker's Contributions to the Theory of Relativity, Proc. Math. Soc. 11, part I, June.

299. Bel L., Etude algébrique d'un certain type de tenseurs de courbure. Le cas 3 de Petrov, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 247, № 27, 2096—2099.
300. Trautman A. i Tulczyjew W., Gravitacja i niezmélnniczosc, Postepy Fizyki 9, 1.
301. Trautman A., Radiation and Boundary Conditions in the Theory of Gravitation, Bull. Acad. Polon. Sci. 6, № 6.
302. Trautman A., Boundary Conditions at Infinity for Physical Theories, Bull. Acad. Polon. Sci. 6, № 6.
303. Trautman A., Sur la propagation des discontinuites du tenseur de Riemann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 246, 1500—1502.
304. Takeno H., On Plane Wave Solutions of the Field Equations in General Relativity, II, Tensor 8, № 1.
305. Joseph V., On Apparent Luminosity in General Ralativity, Month. Nat. Roy. Astr. Soc. 118, № 6.
306. Тодоров И. Т., Об одной теореме единственности для волнового уравнения (к дискуссии В. А. Фок — Ф. И. Франкль), УМН 13, вып. 2.
307. Гу Чао-хао, О некоторых типах однородных римановых пространств, ДАН 122, № 2.
308. Kundt W., Methoden zur Charakterisierung von Lösungen der Einsteinschen Gravitations feldgleichungen, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (pre-print), Universität Hamburg.
309. Bel L., Définition d'une densité d'énergie et d'un état de radiation totale généralisée, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 246, 3015—3018.
310. Hlavaty V., The Structure of our Space, Aeronautical Engineering, Review, April.
311. Geiszlerund D., Treder H., Über ebene Wellen in der allgemeinen Relativitätstheorie, Tensor 8, 165—168.
312. Pham Tan Huang, La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en théorie du champ unifié, Ann. Schola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat. 12, № 4, 425—477.
313. Mme Fourés-Bruhat Y., La relativité générale, Semin. méc. analyt. et méc. céleste, M. Janet. Fac. Sci., Paris 1957—1958. I. Année, Paris.
314. Брумберг В. А., Уравнения движения и координатные условия в релятивистской задаче N тел., Астр. журн. 35, № 6, 839—903.
315. Пугачев Я. И., Дифференциальные тождества и разрешимость уравнений Эйлера — Лагранжа, Труды Краснодарск. ин-та пищев. пром., вып. 20, 55—57.

1959

316. Норден А. П., О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца, Изв. вузов, Матем., № 1 (8).
317. Александров А. Д., Философское содержание и значение теории относительности, Вопросы философии, № 1.

318. Норден А. П., Вишневский В. В., О комплексном представлении инвариантов четырехмерного риманова пространства, Изв. вузов, Матем., № 2 (9).
319. Takasu T., Ein Seitenstück der Relativitätstheorie als eine erweiterte Laguerresche Geometrie, Proc. Japan Acad. 35, № 2.
320. Петров А. З., О симметрических полях тяготения, Изв. вузов, Матем., № 2 (9).
321. Вавилов Б. Т., О слабых полях гравитации, Изв. вузов, Физика, № 2.
322. Sachs R. K., A Covariant Integral Conservation Law in Vacuum Gravitational Fields of Tupe III (pre-print), Hamburg University.
323. Bel L., Introduction d'un tenseur du quatrieme ordre, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 248, 1297—1300.
324. Bel L., Quelques remarques sur la classification de Petrov. Etude du cas 2, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 248, 2561—2563.
325. Hlavaty V., The Holonomy Group, I. The Curvature Tensor, Journ. Math. and Mech. 8, 2—59, 285—308.
326. Hlavaty V., The Holonomy Group, II. The Lie Group Induced by a Tensor, Journ. Math. and Mech. 8, 597—622.
327. Hlavaty V., The Holonomy Croup, III. Covariant Constant Quadratic Tensors, Journ. Math. and Mech. (in print).
328. Hlavaty V., The Holonomy Group, IV. The General with Symmetric Connection, Journ. Math. and. Mech. (in print).
329. Takasu T., Adjusted Relativity Theory: Applications of Extended Euclidian Geometry, Extended Equiform Geometry and Extended Laguerre Geometry of Physics, Journ. Yokohama University, series D (Math.).
330. Geiszler D., Papapetrou A. und Treder H., Die Gravitationstrahlung eines Zeitweilig nichtstationären Systems, Ann. Physik 2, 344—350.
331. Papapetrou A. und Treder H., Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie, Math. Nachr. 20, 53—66.
332. Taub A. H., Small Motions of Spherically Symmetric Distribution of Matter, Illinois University (pre-print).
333. Arnowitt R., Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Linearized Theory, Phys. Rev. 113, № 2, 745—750.
334. Arnowitt R., Deser S., and Misner C. W., Dynamical Structure and Definition of the Energy in General Relativity (pre-print), Depart. of Physics Syracusa University.
335. Bergman P. G., Summary of the «Colloque international de Rayaumont» (pre-print), Syracusa University.
336. Newman D. J., Kilmister C. W., A new Expression for Einstein's Law of Gravitation, Proc. Cambr. Philos. Soc. 55, № 1, 139—141.
337. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений. I, Изв. вузов, Матем., № 6, 118—130.

338. Петрова Н. М., О законах сохранения для системы вращающихся тел в общей теории относительности, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 192—208.
339. Айтикеева З. А. и Петрова Н. М., О системе сферически симметрических тел в общей теории относительности, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 209—228.
340. Мурзагалиев Г., Тензоры момента импульса (кинетического момента) и моменты силы в релятивистской механике, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 229—236.
341. Мицкевич Н. В., Вакуумный нелинейный эффект в теории гравитации, ЖЭТФ **36**, вып. 4, 1207—1214.
342. Debever R., Tenseur de super-énergie, tenseur de Riemann: Cas singuliers, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **249**, 1744—1746.
343. Debever R., Sur le tenseur de super-énergie, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **249**, 1324—1326.
344. Takeno H., A Note on the Theory of the Gravitational Waves, Tensor **9**, № 2, 73—75.
345. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity (pre-print).
346. Synge T. L., A Theory of Elasticity in General Relativity, Math. Zeitschr. **72**, 82—87.
347. Miss Durga Roy, Resistance on a Circular Cylindre Due to any Number of Vortices Lying in Two Rows, Journ. Appl. Math. and Phys. **10**, 5, 502—508.
348. Mast C. B., Strathdee J., On the Relativistic Interpretation of Astronomical Observations, Proc. Roy. Soc., A, **252**, 476—487.
349. Иосифьян А. Г., Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциального полей, Изд. АН Арм. ССР, Ереван.
350. Takeno H., On Geometric Properties of some Plane Wave Solutions in General Relativity, I, Tensor (new series) **9**, № 2, 79—93.
351. Takeno H., On Geometric Properties of some Plane Wave Solutions in General Relativity, II, Tensor **9**, № 3, 168—174.
352. Ikeda M., Miyachi Y., Coordinate Systems in General Relativity and Geometrical Representation for Physical Quantities, Progr. Theor. Phys., № 9, 45—68.
353. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I., Gravitational Waves in General Relativity, III, Exact Plane Waves, Proc. Roy. Soc., A, **251**, 519—553.
354. Pirani F. A. E., Gravitational Waves in General Relativity, IV. The Gravitational Field of a Fast-Moving Particle, Proc. Roy. Soc., A, **252**, 96—101.

355. Brill D. R., On the Positive Definite Mass of the Bondi-Weber-Wheeler Time-Symmetric Gravitational Waves, Ann. Phys. 7, № 4, 466—483.

356. Araki H., On Weak Time-Symmetric Gravitational Waves, Ann. Physik 7, 456—465.

1960

357. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений, II, Изв. вузов, Матем., № 1.

358. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений, III, Изв. вузов, Матем., № 4.

359. Takeno H., On the Theory of Gravitational Waves in General Relativity (pre-print, to be published in Tensor 10).

360. Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., Interior Schwarzschild Solutions and Interpretation of Source Terms (pre-print), Depart. of Physics, Brouders University, Waltham, Massachysetts.

361. Kerr R. P., On the Quasi-Static Approximation in General Relativity, Nuovo cimento 10, 16.

362. Penrose R., A Spinor Approach to General Relativity King's College, University of Lond.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ
