$E=mc^2$

А.З.ПЕТРОВ • НОВЫЕ МЕТОДЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. З. ПЕТРОВ

Новые методы в общей теории относительности

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

530.1
П 30
УДК 530.12

АННОТАЦИЯ

Бурное развитие теории поля в современной физике и, в частности, теории поля гравитации в рамках общей теории относительности Эйнштейна привело к необходимости применения современных математических методов. В данной книге описано применение инвариантно-групповых методов к задачам общей теории относительности.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов физических и механико-математических факультетов университетов.

Алексей Зиновьевич Петров

Новые методы в общей теории относительности

М., 1966 г., 496 стр. с илл.

Редактор *В. Д. Козлов*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская* Корректор *З. В. Автонеева*

Сдано в набор 9/II 1966 г. Подписано к печати 13/VII 1966 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 31. Условн. печ. л. 31. Уч.-изд. л. 31,17. Тираж 7000 экз. Т-11004. Цена книги 2 р. 14 к. Заказ № 72.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

$\frac{2\text{-}3\text{-}2}{137\text{-}65}$

Оглавление

Предисловие

Для современного физика, работающего в общей теории относительности, физическим объектом изучения является поле, которое описывается при помощи четырехмерного пространственно-временно́го континуума — четырехмерного риманова многообразия. Быстрое развитие общей теории относительности за последние годы, постановка новых проблем, анализ основных посылок теории — все это привело к тому, что современного релятивиста, естественно, уже не может удовлетворить тот математический аппарат, которым пользовались Эйнштейн, Гильберт и другие создатели общей теории гравитации. Именно поэтому для современного состояния общей теории относительности является характерным стремление к новым и современным экспериментам, с одной стороны, и стремление применять новые математические методы исследования к новым сюжетам — с другой.

К числу таких методов нужно отнести прежде всего метод алгебраических и дифференциальных инвариантов и метод теории групп Ли, которые все шире применяются в общей теории относительности и дали целый ряд важных и интересных результатов.

Главная цель, которая была намечена при написании этой книги, заключалась в исследовании основных объектов, при помощи которых строится теория гравитации (таких, как тензор кривизны, тензор энергии-импульса и т. д.), указанными выше методами, поэтому книга написана с упором на математическую сторону вопроса и почти вовсе не касается самого построения физической теории поля гравитации.

В том, что книга такого стиля необходима и полезна, убеждает автора тот факт, что его вышедшая в 1961 г. книга «Пространства Эйнштейна», близкая по содержанию к предлагаемой книге, быстро разошлась и является теперь библиографической редкостью. Она издается на немецком и английском языках.

Кроме того, за последние годы были получены новые результаты, не вошедшие в указанную книгу, а самые рамки рассмотрения частного типа полей гравитации, определяемые пространствами Эйнштейна, для которых тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору, являются несомненно узкими для общей теории относительности, где предполагается возможным любое пространство-время, которое может возникать в общей теории относительности для любого тензора энергии-импульса. Изложенные в книге методы и результаты получили сейчас широкое применение как у советских физиков, так и за рубежом, о чем свидетельствует большое количество новых работ, по возможности полно отраженных в библиографии, хотя она и не претендует на исчерпывающую полноту.

Эта книга писалась автором при значительной помощи своих учеников, вклад которых выражается как в получении оригинальных результатов, так и в написании отдельных глав и доведении до конца некоторых задач, поставленных и частично решенных автором. Так, глава построения классификации полей тяготения по группам движений, подытоживающая результаты работ многих ученых, окончательно завершена В. Р. Кайгородовым; глава, посвященная группам конформных преобразований, написана Р. Ф. Биляловым, глава о геодезических отображениях — В. И. Голиковым, исследования конформно-приводимых полей тяготения в значительной мере принадлежат А. М. Анчикову. Большую помощь при оформлении книги оказала А. В. Гусева, которой принадлежит ряд ценных замечаний. В этом смысле книга представляет собой результат комплексной работы, и автор пользуется возможностью выразить этим лицам свою признательность.

В этой книге не рассматриваются так называемые «единые теории», так как, по мнению автора, их физическая значимость уменьшается обратно пропорционально увеличению количества различных вариантов этих теорий, которое сейчас превысило два десятка. Проблемы и методы, не отраженные в тексте книги, автор подробно отразил в библиографии, которая является в этом смысле достаточно полной.

Таким образом, настоящая книга посвящена изучению пространств, лежащих в основе общей теории относительности. Учитывая, что в литературе по релятивистской теории имеется ряд фундаментальных монографий, таких, например, как книги Л. Ландау и Е. Лифшица «Теория поля» и В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения», автор, сознательно избегая повторений, ограничил себя кругом вопросов, которые не освещаются в этих исследованиях и которые должны представить интерес как для физиков, так и для математиков.

Современное развитие теории относительности, приведшее к изучению таких проблем, как гравитационная радиация, компенсирующие поля, поведение элементарных частиц в гравитационном поле, взаимодействие полей, новые аспекты понятия энергии в поле гравитации и т. д., необходимо требуют более точных методов исследования. При написании этой книги автор поставил перед собой цель — помочь читателям приблизиться к некоторым из этих методов.

1966 г. *А. Петров*

Глава I

Основы тензорного анализа

Пространственно-временнóй континуум, лежащий в основе математического аппарата общей теории относительности, а также всякое пространство Эйнштейна являются римановыми многообразиями, и поэтому необходимо остановиться на определении этого понятия.

§ 1. Римановы многообразия

Рассмотрим совокупность объектов, которые можно поставить во взаимно однозначное соответствие со всеми упорядоченными системами n действительных или комплексных чисел $(x^1, \ldots, x^n)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$|x^\alpha - a^\alpha| < \varepsilon^\alpha, \tag{1.1}$$

где a^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, а ε^α — положительные числа. Такую совокупность будем называть *ограниченной областью n-мерного пространства* X_n, а сами объекты — *точками* этой области. В зависимости от приложений и числа n эти точки могут интерпретироваться различным образом (частоты спектра, события в пространственно-временном континууме, состояние динамической системы, прямые и т. д.).

Всякое взаимно однозначное соответствие между точками и системами чисел $(x^1, \ldots, x^n)$ назовем *системой координат*; числа x^α назовем *координатами* той точки, которой в этой координатной системе отвечает система чисел x^α. Совокупность точек с координатами x^α, удовлетворяющими условиям (1.1), определяет так называемую ε-окрестность точки с координатами a^α.

Если в области заданы две системы координат $\{x^\alpha\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$, то существует взаимно однозначное непрерывное соответствие между этими двумя системами; оно может быть записано уравнениями

$$x^\alpha = f^\alpha(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \qquad x^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^1, \ldots, x^n), \tag{1.2}$$

про которые будем говорить, что они определяют *преобразование* координат. Можно также смотреть на (1.2) как на *точечное* преобразование, когда x^{α} и $x^{\alpha'}$ рассматриваются как координаты различных точек в одной системе координат, однако в дальнейшем точечные преобразования, в отличие от (1.2), будем записывать, изменяя коренную букву или отмечая ее знаком «$*$» при тех же индексах:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(y^1, \ldots, y^n), \qquad \overset{*}{x}{}^{\alpha} = \overset{*}{x}{}^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n). \tag{1.3}$$

Функцию $f(x^1, \ldots, x^n)$, допускающую все непрерывные частные производные порядка r, будем называть *функцией класса* C^r. Если f и φ в (1.2) — класса C^r и якобианы $\left|\dfrac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right|$, $\left|\dfrac{\partial \varphi^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right|$ отличны от нуля для любого преобразования координат в области, то будем говорить, что задано *пространство класса* C^r.

Если $\{x^{\alpha}\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$ — две координатные системы в области n-мерного пространства, то якобиан $J = \left|\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\right|$ в этой области не меняет знака; будем говорить, что эти координатные системы *одинаково ориентированы*, если знак J положительный, и что они *противоположно ориентированы*, если знак J отрицательный.

Теперь можно ввести понятие *геометрического объекта*, в рамки которого укладывается почти весь применяемый далее математический аппарат.

Рассмотрим в n-мерном пространстве некоторую область A, в которой определены две системы координат $\{x^{\alpha}\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$. Пусть в A задана система N функций от x^{α} и, кроме того, задается правило (*закон преобразования* объекта), указывающее, каким образом однозначно вычисляется другая система N функций от $x^{\alpha'}$ только через функции первой системы и производные достаточно высокого порядка от $x^{\alpha'}$ по x^{α}. Тогда будем говорить, что задан *геометрический объект*, а первая и вторая системы N функций являются его компонентами относительно координатных систем $\{x^{\alpha}\}$ и $\{x^{\alpha'}\}$ соответственно. Например, величины с одной-единственной компонентой $\varphi(x^{\alpha})$ и законом преобразования

$$\varphi'(x^{\alpha'}) = J^k \varphi(x^{\alpha}),$$

где $J = \left|\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right|$, а k — некоторое число, являются объектами и называются *скалярными плотностями веса* k; в частности, когда $k = 0$, получим объект, называемый *скаляром*, для которого закон преобразования будет иметь вид:

$$\psi'(x^{\alpha'}) = \psi(x^{\alpha}).$$

Предположим теперь, что в области A n-мерного вещественного пространства задан скаляр, который получится, если в системе координат $\{x^\alpha\}$ задать *неопределенную*, в общем случае, квадратичную дифференциальную форму

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{1.4}$$

и потребовать, чтобы она не зависела от системы координат. Здесь, как и везде далее, по повторяющимся внизу и вверху индексам производится суммирование (*правило Эйнштейна*), а $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}(x^\alpha)$ — функции заданного класса C^r, подчиненные условию

$$g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0. \tag{1.5}$$

При помощи формы (1.4) можно в области n-мерного пространства определить *метрику*, после чего получаем *риманово многообразие*; теория римановых многообразий называется *римановой геометрией*, основы которой для положительно-определенных форм заложены в классической работе Римана [1]. Эти многообразия обозначаются далее символом V_n. Если метрика V_n определенная, то принято называть такие многообразия *обыкновенными римановыми пространствами*. Более тщательное определение V_n требует привлечения понятия покрытия топологического пространства или других соображений (П. К. Рашевский [216], стр. 346—366; Яно и Бохнер [293], стр. 7—9; см. также § 38).

Смысл введения метрики при помощи формы (1.4) состоит в том, что ds интерпретируется как длина вектора с компонентами dx^α. В силу неопределенности формы (1.4) ds^2 может быть больше, меньше или равна нулю, и в последнем случае вектор называется *изотропным*.

Если координаты x^α заданы как функции вещественного параметра t, то величина

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right|}\, dt \tag{1.6}$$

определит длину дуги между точками t_1 и t_2 кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, при этом не исключается возможность того, что длина будет равна нулю. Далее такие *изотропные* кривые интерпретируются в пространственном многообразии релятивистской теории тяготения как *мировые линии света*.

Среди различных возможных объектов особенно важными являются *тензорные поля*, для определения которых нужно задать правило их вычисления при переходе от системы координат $\{x^\alpha\}$ к системе $\{x^{\alpha'}\}$. Чтобы получить представление об этом законе, рассмотрим вторую из формул (1.2) и, имея в виду замечание о классе φ^α, запишем:

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} dx^\beta. \tag{1.7}$$

Рассмотрим точно так же компоненту скалярного поля $\psi(x)$; по определению,

$$\psi'(x^{\alpha'}) = \psi(x^\alpha),$$

и следовательно, обозначая оператор $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ через ∂_α, получим частные производные

$$\partial_{\alpha'}\psi = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \partial_\beta\psi. \tag{1.8}$$

В формулах (1.7) и (1.8) связь между старыми и новыми компонентами объектов имеет линейный вид, однако выступают две различные системы коэффициентов линейной зависимости. Соответственно этому будем различать два сорта индексов: *ковариантные индексы*, отвечающие (1.8) (будем их всегда писать внизу), и *контравариантные*, отвечающие (1.7) (их помещаем всегда наверху). Обобщая этот факт, будем далее рассматривать величины, обладающие как ковариантными, так и контравариантными индексами. Если число первых равно r, а вторых s, то будем говорить о величинах *валентности* $r+s$. Теперь можно дать следующее общее определение.

Тензорным полем веса N *и валентности* $r+s$ назовем геометрический объект, имеющий n^{r+s} компонент

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}{}_{\beta_1 \dots \beta_r}(x) \qquad (\alpha_1, \dots, a_s, \beta_1, \dots, \beta_r = 1, \dots, n),$$

причем при переходе к другой системе координат новые компоненты вычисляются по правилу

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_s}{}_{\beta'_1 \dots \beta'_r} = J^N T^{\gamma_1 \dots \gamma_s}{}_{\delta_1 \dots \delta_r} \frac{\partial x^{\alpha'_1}}{\partial x^{\gamma_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha'_s}}{\partial x^{\gamma_s}} \frac{\partial x^{\delta_1}}{\partial x^{\beta'_1}} \dots \frac{\partial x^{\delta_r}}{\partial x^{\beta'_r}}. \tag{1.9}$$

Это поле называют *ковариантным валентности* r *и контравариантным валентности* s. Если $N \neq 0$, поле называется *относительным*, при $N = 0$ будем говорить просто *тензорное поле*, иногда опуская указание веса.

В обозначениях объектов будем придерживаться так называемого *метода коренных букв и индексов* ([125], стр. 13), согласно которому преобразование координат отмечается изменением *типа индексов*, преобразование *объектов* — изменением коренных букв;

только для скаляров ввиду отсутствия индексов приходится ставить штрих над коренной буквой, но уже в (1.8) этого можно не делать.

Таким образом, *скалярное поле* или *скаляр*, определенные выше, дают пример тензорного поля валентности $0+0$ и веса $N=0$. Скалярная плотность имеет валентность $0+0$ и вес N.

Следующим примером тензорных полей будут *векторные поля*: *ковариантные*

$$v_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} v_{\beta} \tag{1.10}$$

и *контравариантные*

$$u^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} u^{\beta}, \tag{1.11}$$

имеющие оба вес, равный нулю. В частности, (1.7) определяет закон преобразования контравариантного поля векторов, а (1.8) — ковариантного и притом градиентного.

Для римановых многообразий, по определению, $ds' = ds$ и, следовательно,

$$g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = g_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'},$$

откуда в силу (1.7) получим

$$\left(g_{\alpha'\beta'} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta}\right) dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'} = 0$$

и в силу полного произвола в выборе дифференциалов $dx^{\alpha'}$

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}},$$

т. е. $g_{\alpha\beta}$ определяет поле ковариантного тензора валентности 2. Так как

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \qquad \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma'}} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}, \tag{1.12}$$

то матрица $\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)$ будет транспонированной, обратной матрицей относительно $\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)$; здесь δ^{α}_{β} — *символ Кронекера*, равный 1 при $\alpha = \beta$ и нулю при $\alpha \neq \beta$.

Рассмотрим некоторую точку P риманова многообразия и обозначим:

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)_P = A^{\alpha'}_{\beta}, \qquad \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)_P = A^{\alpha}_{\beta'}. \tag{1.13}$$

Тогда в P компоненты контравариантного вектора преобразуются по закону

$$\eta^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'}\eta^{\alpha}, \quad \eta^{\alpha} = A_{\alpha'}^{\alpha}\eta^{\alpha'}, \quad |A_{\alpha}^{\alpha'}| \neq 0, \quad A_{\alpha'}^{\alpha}A_{\beta}^{\alpha'} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \tag{1.14}$$

определяющему группу линейных однородных преобразований — *центроаффинную группу*, которой отвечает *геометрия Клейна*, обобщающая для n измерений обычную аффинную геометрию. Следовательно, каждая точка P получает свое собственное *локальное* центроаффинное пространство, которое обозначим символом E_n. Поля геометрических объектов риманова многообразия, если отождествить начало E_n с той точкой V_n, которой оно отвечает, определяют в E_n объекты с постоянными компонентами. Аксиоматике и изучению аффинных пространств посвящен ряд статей и монографий (П. А. Широков [102], А. П. Норден [191], стр. 11—58, П. К. Рашевский [216], стр. 82—144).

Задачи

1. Показать, что если символы Кронекера принять в качестве компонент смешанного тензора валентности $1+1$ в некоторой координатной системе, то компоненты этого тензора в другой системе также будут символами Кронекера.

2. Если компоненты тензора в некоторой точке равны нулю в системе $\{x\}$, то в этой же точке они равны нулю и в любой системе $\{x'\}$; если компоненты тензора равны нулю для одной системы, то они равны нулю и в любой системе координат.

3. Для любого векторного поля $u^{\alpha}(x)$ можно определить такую систему координат $\{x'\}$, что

$$u^{\alpha'} = 0, \qquad u^{n'} = 1 \qquad (\alpha < n). \tag{1.15}$$

4. Доказать, что $\partial_{\alpha\beta}\varphi$ вместе с $\partial_{\alpha}\varphi$ образуют объект с $\frac{n}{2}(n+3)$ компонентами $\left(\partial_{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)$.

§ 2. Алгебра тензоров

Будем говорить, что *тензор* при любом весе *равен нулю*, если все его компоненты равны нулю хотя бы в одной системе координат; в этом случае он равен нулю в любой системе (задача 2, § 1). Алгебра тензоров вводит операции, позволяющие данным тензорам ставить в соответствие новые тензоры.

Сложение и вычитание тензоров. Если сложить соответствующие компоненты двух тензоров одинакового веса, с одинаковым числом r ковариантных и s контравариантных индексов, то получаемая таким образом система величин определит тензор того же типа. Так, если

$$M_{\beta'}^{\alpha'} = J^N A_{\gamma}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\delta} M_{\delta}^{\gamma}, \qquad N_{\beta'}^{\alpha'} = J^N A_{\gamma}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\delta} N_{\delta}^{\gamma},$$

то

$$M_{\beta'}^{\alpha'} + N_{\beta'}^{\alpha'} = J^N A_{\gamma'}^{\alpha'} A_{\beta'}^{\delta} \left(M_{\delta}^{\gamma} + N_{\delta}^{\gamma}\right).$$

Доказательство очевидным образом проводится при любой валентности.

Внешнее произведение тензоров. Умножая каждую компоненту тензора веса N валентности $k+m$ на каждую компоненту другого тензора веса N' валентности $r+s$, получим систему величин, которые будут компонентами тензора веса $N+N'$ и валентности $p+q$, где $p=k+r$, $q=m+s$. Доказательство сводится к перемножению левых и правых частей соотношений, определяющих закон преобразования для компонент этих двух тензоров.

Например, произведение скалярной плотности и ковариантного вектора определяет относительный ковариантный вектор. Точно так же произведение ковариантного и контравариантного векторов дает тензор валентности $1+1$ и веса 0.

Свертывание тензоров — операция, применимая к любому тензору валентности $r+k$, где r и k больше нуля, и заключающаяся в том, что некоторый ковариантный индекс полагают равным некоторому контравариантному и берется сумма по этому индексу суммирования. Это приводит к компонентам тензора валентности $(r-1)+(k-1)$. Так как при доказательстве этого утверждения вес тензора и значения r и k не играют роли, то достаточно рассмотреть тензор

$$M^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}_{\beta\gamma};$$

свертывая его по индексам α' и β', получим:

$$M^{\alpha'}_{\alpha'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\alpha'} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}_{\beta\gamma} = \delta^{\beta}_{\alpha} A^{\gamma}_{\gamma'} M^{\alpha}_{\beta\gamma} = M^{\alpha}_{\alpha\gamma} A^{\gamma}_{\gamma'},$$

т. е. $M^{\alpha}_{\alpha\gamma} = M_{\gamma}$ — тензор, если $M^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор.

Операция *внутреннего умножения тензоров* получается как комбинация внешнего умножения и свертывания и поэтому, как легко убедиться, приводит к тензору.

Пользуясь этими действиями, можно получить так называемое *правило частного* для тензоров, часто применяемое при исследовании тензорных уравнений. Оно заключается в следующем: пусть в каждой системе координат задана система n^{r+s} чисел $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$ таких, что система чисел

$$N_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = M_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s} v^{\beta_1} \ldots v^{\beta_s}$$

при *любом* выборе s контравариантных векторов v определяет тензор валентности $r+0$; тогда $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta_1 \ldots \beta_s}$ определяет тензор валентности $(r+s)+0$. Достаточно провести доказательство для случая $s=1$. Имеем:

$$M_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_r \beta'} v^{\beta'} = v^{\beta'} A^{\beta}_{\beta'} M_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta} A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \ldots A^{\alpha_r}_{\alpha'_r}.$$

Так как выбор v совершенно произволен, то

$$M_{\alpha'_1 \ldots \alpha'_r \beta'} = M_{\alpha_1 \ldots \alpha_r \beta} A^{\alpha_1}_{\alpha'_1} \ldots A^{\alpha_r}_{\alpha'_r} A^{\beta}_{\beta'},$$

что и доказывает утверждение. Это правило, конечно, обобщается на случай, когда числа M имеют контравариантные индексы, а также на случай, когда v — ковариантные векторы; оно часто применяется и в некотором смысле определяет действие, обратное операции умножения тензоров.

Если компоненты некоторого тензора не меняются от перестановки двух или нескольких индексов одинаковой природы, то тензор называется *симметрическим* относительно этих индексов. Если же перестановка индексов ведет только к изменению знака компоненты, то тензор называется *кососимметрическим* по этим индексам. Ясно, что симметрия и косая симметрия инвариантны при преобразовании координат. Эти два часто встречающиеся свойства тензоров означают прежде всего, что тензор, обладающий одним из этих свойств, определяется меньшим числом компонент, чем это было бы в общем случае.

Так, ковариантный тензор второй валентности в общем случае имеет n^2 компонент; если же он симметрический, то его определяют $\frac{n(n+1)}{2}$ компонент, а в случае косой симметрии $\frac{n(n-1)}{2}$ компонент.

Симметрирование и альтернирование тензоров. Если некоторый тензор имеет несколько индексов одного и того же рода, то из него можно образовать новый тензор, симметричный или кососимметричный по этим индексам или по некоторым из этих индексов.

Пусть, например, дан тензор валентности $m+0$: $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$. Взяв $m!$ компонент, которые получаются при перестановке индексов $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ всеми возможными способами, и сложив их, получим компоненту симметрического тензора, которая обозначается так:

$$B_{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} = \frac{1}{m!}\left(B_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m} + B_{\alpha_2\alpha_1 \ldots \alpha_m} + \ldots\right).$$

Эта *операция симметрирования* может применяться только к индексам одного и того же рода.

Аналогично вводится *операция альтернирования*, приводящая к кососимметрическому тензору; взяв $m!$ компонент, как и ранее, образуем сумму, в которой каждую компоненту берем со знаком плюс или минус, соответственно тому, будет ли подстановка $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \alpha_{r_1} & \alpha_{r_2} & \ldots & \alpha_{r_m} \end{pmatrix}$ четная или нечетная. Это приводит к кососимметрическому тензору, который обозначается символом

$$B_{[\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m]} = \frac{1}{m!}\left(B_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} - B_{\alpha_2\alpha_1 \ldots \alpha_m} + \ldots\right).$$

Деление на $m!$ необязательно, но удобно. Если надо показать, что знак симметрирования или альтернирования не распространяется на какой-нибудь индекс, который оказался внутри скобок ( ) или [ ], то этот индекс будем выделять чертами | |. Например,

$$B_{(\alpha|\beta|\gamma)} = \frac{1}{2}(B_{\alpha\beta\gamma} + B_{\gamma\beta\alpha}).$$

Легко показать из определения, что операции симметрирования и альтернирования — операции тензорные.

Все операции, рассмотренные выше, никак не связаны с *метрическим тензором* $g_{\alpha\beta}$, наличие которого характеризует римановы пространства; они имеют место в любом локальном аффинном пространстве. Метризуя пространство при помощи тензорного поля $g_{\alpha\beta}$, мы тем самым привносим ряд новых операций, характерных для римановых многообразий.

Так как по определению $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$, то, обозначая через $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ алгебраическое дополнение элемента $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ в определителе $|g_{\alpha\beta}|$, разделенное на g, получим, что система чисел $g^{\alpha\beta}$ в каждой точке пространства V_n удовлетворяет уравнениям

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{2.1}$$

Покажем, что $g^{\alpha\beta}$ *представляют собой компоненты симметрического контравариантного тензора.* Пусть u^{α} — компоненты *произвольного* вектора. Тогда

$$v_{\beta} = g_{\beta\gamma} u^{\gamma}$$

также определяет вектор. Из (2.1) следует:

$$g^{\alpha\beta} v_{\beta} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} u^{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} u^{\gamma} = u^{\alpha};$$

так как v_{β} — произвольный вектор, то, используя правило частного, получаем требуемый результат. Из (2.1), свертывая по α и γ, получим:

$$g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = n. \tag{2.2}$$

Обозначим определитель $|g^{\alpha\beta}|$ через $\tilde{g}$, получим:

$$g\tilde{g} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{2.3}$$

откуда следует, что алгебраическое дополнение $g^{\alpha\beta}$ в определителе $\tilde{g}$, деленное на $\tilde{g}$, равняется $g_{\alpha\beta}$.

Операция поднятия и опускания индексов. Используя тензор $g_{\alpha\beta}$, каждому тензору можно сопоставить другой тензор с тем же числом индексов, но другого вида. Так, если $B_{\alpha\beta\gamma}$ — компонента тензора, то ему можно сопоставить тензоры с компонентами

$$B^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\lambda} B_{\lambda\beta\gamma}, \qquad B_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = g^{\beta\lambda} B_{\alpha\lambda\gamma}, \qquad B_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = g^{\gamma\lambda} B_{\alpha\beta\lambda}.$$

Для каждого из этих тензоров процесс обратим, например:

$$B^{\alpha}{}_{\beta\gamma} g_{\alpha\nu} = g_{\alpha\nu} g^{\alpha\lambda} B_{\lambda\beta\gamma} = \delta^{\lambda}_{\nu} B_{\lambda\beta\gamma} = B_{\nu\beta\gamma},$$

т. е. снова приходим к исходному тензору. Это позволяет утверждать, что тензор $g_{\alpha\beta}$ в известной мере уничтожает дуализм между ковариантными и контравариантными индексами. С этой точки зрения естественно говорить об одном и том же тензоре, допускающем задание при помощи компонент различного сорта. Удобно, подчеркивая этот факт, сохранять коренную букву для всех возможных компонент тензора.

Отметим, что для опускания и поднятия индексов можно было бы использовать некоторый другой тензор, например кососимметрический, и для некоторых вопросов это является более эффективным ([191], стр. 310), но, во всяком случае на протяжении всего исследования, такой тензор не должен меняться.

Метрический тензор служит также для определения *нормы* любого вектора:

$$g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = u_{\alpha} u^{\alpha} = g^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta}.$$

Так как $g_{\alpha\beta}$ — неопределенный тензор, то в каждой точке пространства возникает *конус изотропных направлений*

$$g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0,$$

который отделяет $+$-*область* (*область вещественных векторов с положительной нормой*) от $-$-*области* (*область вещественных векторов с отрицательной нормой*). Норма всякого изотропного вектора равна нулю. Векторы с нормой, равной ± 1, называются *единичными векторами. Длиной вектора* назовем положительный квадратный корень из абсолютной величины нормы. Впрочем, в теории относительности только для векторов из $-$-области говорят о *длине*, а для векторов из $+$-области принято говорить о *длительности.*

Пользуясь тензором, можно также определить *угол между двумя вещественными векторами* u^{α} и v^{α}, если они оба лежат в $\pm$-области.

Он определяется формулой

$$\cos(u,\ v) = \frac{\pm u_\alpha v^\alpha}{\left|\sqrt{u_\sigma u^\sigma \cdot v_\tau v^\tau}\right|}. \tag{2.4}$$

Но угол будет вещественным только в том случае, если среди векторов

$$au^\alpha + bv^\alpha,$$

определяющих линейную оболочку векторов u^α и v^α, нет изотропных, так как тогда $|\cos(u,\ v)| \leqslant 1$. В противном случае придем или к мнимым углам, или к выражению, которое теряет смысл. Однако во всех этих случаях будем называть векторы u^α и v^α *ортогональными*, если

$$u_\alpha v^\alpha = 0. \tag{2.5}$$

Изотропные векторы и только они сами себе ортогональны.

Отметим, что из закона преобразования для метрического тензора

$$g_{\alpha'\beta'} = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} g_{\alpha\beta}$$

следует:

$$g' = gJ^2, \tag{2.6}$$

т. е. g — скалярная плотность веса 2.

Задачи

1. Если тензор симметричен по индексам α_k и α_l и кососимметричен по индексам α_l и α_m, то он равен нулю.

2. Показать, что для любого тензора справедливы соотношения

$$S_{\alpha\beta} = S_{(\alpha\beta)} + S_{[\alpha\beta]},$$

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = \Omega_{(\alpha\beta\gamma)} + \Omega_{[\alpha\beta\gamma]} + \frac{2}{3}(\Omega_{[\alpha\beta]\gamma} + \Omega_{[\gamma\beta]\alpha}) + \frac{2}{3}(\Omega_{(\alpha\beta)\gamma} - \Omega_{\gamma(\alpha\beta)}).$$

3. Если $\varphi = S_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ — скаляр при любых u^α, то $S_{\alpha\beta}$ — тензор. Если $\varphi = 0$, то $S_{(\alpha\beta)} = 0$.

4. Если тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ удовлетворяет соотношению (при любых u^α) $A_{\alpha\beta\gamma}u^\alpha u^\beta u^\gamma = 0$ и $A_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$, то $A_{\alpha\beta\gamma} + A_{\beta\gamma\alpha} + A_{\gamma\alpha\beta} = 0$.

5. Если тензор $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ удовлетворяет соотношению $T_{\alpha\beta\gamma\delta}u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta = 0$ при любом выборе векторов u^α и v^α, то

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\gamma\beta\alpha\delta} + T_{\alpha\delta\gamma\beta} + T_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0. \tag{2.7}$$

Если, кроме того, тензор T удовлетворяет условиям

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\alpha\gamma\delta} = 0, \quad T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\alpha\beta\delta\gamma} = 0,$$
$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\beta\gamma\alpha\delta} + T_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0,$$

то он равен нулю.

6. Если $A_{[\alpha\beta]\gamma}=0$, то

$$A_{(\alpha\beta\gamma)}=\frac{1}{3}(A_{\alpha\beta\gamma}+A_{\beta\gamma\alpha}+A_{\gamma\alpha\beta}). \tag{2.8}$$

Если $B_{(\alpha\beta)\gamma}=0$, то

$$B_{[\alpha\beta\gamma]}=\frac{1}{3}(B_{\alpha\beta\gamma}+B_{\beta\gamma\alpha}+B_{\gamma\alpha\beta}). \tag{2.9}$$

7. Если для тензора $T_{\alpha\beta}$ имеет место равенство

$$aT_{\alpha\beta}+bT_{\beta\alpha}=0$$

относительно какой-либо одной системы координат, то оно имеет место всегда. Если $T_{\alpha\beta}\neq 0$, то $a=\pm b$ ([88], стр. 16).

8. Если для тензора $T_{\alpha\beta\gamma}$ хотя бы в одной системе координат выполняется равенство

$$aT_{\alpha\beta\gamma}+bT_{\beta\gamma\alpha}+cT_{\gamma\alpha\beta}=0,$$

то оно имеет место всегда. Если $T_{\alpha\beta\gamma}\neq 0$, то $a+b+c=0$ или $a=b=c$.

9. Показать, что

$$A_{[\alpha\beta\ldots\gamma]}B^{\alpha\beta\ldots\gamma}=A_{\alpha\beta\ldots\gamma}B^{[\alpha\beta\ldots\gamma]}=A_{[\alpha\beta\ldots\gamma]}B^{[\alpha\beta\ldots\gamma]}.$$

10. Доказать, что

$$\underset{1}{v}^{[\alpha_1}\ldots\underset{k}{v}^{\alpha_k]}=\underset{[1}{v}^{[\alpha_1}\ldots\underset{k]}{v}^{\alpha_k]}=\underset{[1}{v}^{\alpha_1}\ldots\underset{k]}{v}^{\alpha_k}.$$

11. Ранг матрицы, составленной из компонент тензора $u_\alpha v_\beta$, равен 1, а для тензора $u_{(\alpha}v_{\beta)}$ равен 2, если $u_\alpha\neq\lambda v_\alpha$.

12. Доказать, что

$$T_{\alpha[[\beta\gamma]\delta]}=T_{\alpha[\beta\gamma\delta]}.$$

§ 3. Ковариантное дифференцирование

Преимущества тензорного исчисления там, где они имеют место, связаны прежде всего с возможностью записывать тензорные уравнения в инвариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Приступая к построению тензорного анализа, необходимо прежде всего связать с дифференцированием тензоров операцию тензорного характера. Будем предполагать в этом параграфе, что класс функций соответствует порядку дифференцирования. Формула (1.8) дает пример того, когда производные тензора валентности $0+0$ и веса 0 определяют тензор валентности $1+0$ и веса 0. Этот факт является исключительным. Так, например, частные производные вектора не определяют тензора. Операция тензорного характера, обобщающая обычное дифференцирование, может быть введена неоднозначно.

Ковариантное дифференцирование, вводимое в этом параграфе, тензорный характер которого впервые замечен Кристоффелем ([2], стр. 56), будет определено здесь формально; его геометрический смысл выясняется в § 5.

Совокупности частных производных от компонент метрического тензора $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}\left(\equiv \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)$ *взаимно однозначно отвечает система функций*

$$\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\gamma}+\partial_\gamma g_{\alpha\beta}-\partial_\alpha g_{\beta\gamma}), \tag{3.1}$$

которые принято называть символами Кристоффеля первого рода. В самом деле,

$$\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}+\Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma}=\partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \tag{3.2}$$

т. е. соответствие взаимно однозначное. Метрический тензор и символы Кристоффеля первого рода позволяют ввести *символы Кристоффеля второго рода*:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma,\,\beta\gamma}, \tag{3.3}$$

причем из определения следует:

$$\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}=\Gamma_{\alpha,\,\gamma\beta},\quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}. \tag{3.4}$$

Символы Кристоффеля первого и второго рода не являются тензорами, так как, например, для трехмерного евклидова пространства относительно прямоугольной декартовой системы координат они равны нулю, а в цилиндрических координатах некоторые из них отличны от нуля.

Символы Кристоффеля второго рода образуют объект; символы Кристоффеля первого рода вместе с метрическим тензором также образуют объект.

Рассмотрим закон преобразования метрического тензора

$$g_{\alpha'\beta'}=A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}g_{\sigma\tau}. \tag{3.5}$$

Так как $g_{\sigma\tau}=g_{\sigma\tau}(x)$, то $\partial_{\gamma'}g_{\sigma\tau}=A^\rho_{\gamma'}\partial_\rho g_{\sigma\tau}$ и

$$\partial_{\gamma'}g_{\alpha'\beta'}=A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}A^\rho_{\gamma'}\partial_\rho g_{\sigma\tau}+g_{\sigma\tau}(\partial_{\gamma'}A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}+A^\sigma_{\alpha'}\partial_{\gamma'}A^\tau_{\beta'}).$$

Прибавляя и отнимая выражения, получаемые из написанного соответственно при подстановках $\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \gamma'\alpha'\beta'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \beta'\gamma'\alpha'\end{pmatrix}$, и учитывая, что

$$\partial_{\beta'}A^\sigma_{\alpha'}=\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^{\beta'}\,\partial x^{\alpha'}}=\partial_{\alpha'}A^\sigma_{\beta'},$$

получим:

$$\Gamma_{\alpha',\,\beta'\gamma'}=A^\sigma_{\alpha'}A^\tau_{\beta'}A^\rho_{\gamma'}\Gamma_{\sigma,\,\rho\tau}+g_{\sigma\tau}A^\tau_{\alpha'}\partial_{\beta'}A^\sigma_{\gamma'}, \tag{3.6}$$

что доказывает вторую часть теоремы. Свертывая (3.6) с $g^{\alpha'\delta'}$ и имея в виду (1.14), получим:

$$\Gamma^{\delta'}_{\beta'\gamma'} = A^{\delta'}_{\omega} A^{\tau}_{\beta'} A^{\rho}_{\gamma'} \Gamma^{\omega}_{\rho\tau} + A^{\delta'}_{\omega} \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'}, \tag{3.7}$$

откуда следует первое утверждение.

Введем понятие *ковариантной производной вектора*. Частные производные от ковариантных компонент вектора не определяют тензора, так как

$$\partial_{\gamma'}\lambda_{\alpha'} = \partial_{\gamma'}\left(A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma}\right) = \partial_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma} + A^{\sigma}_{\alpha'}\partial_{\gamma'}\lambda_{\sigma} = \partial_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\lambda_{\sigma} + A^{\sigma}_{\alpha'}A^{\tau}_{\gamma'}\partial_{\tau}\lambda_{\sigma},$$

но если взять разность этого равенства и

$$\Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\lambda_{\sigma'} = \left(A^{\sigma'}_{\tau}\partial_{\alpha'}A^{\tau}_{\gamma'} + A^{\mu}_{\alpha'}A^{\nu}_{\gamma'}A^{\sigma'}_{\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\right)A^{\rho}_{\sigma'}\lambda_{\rho},$$

то получим, что величина

$$\partial_{\gamma'}\lambda_{\alpha'} - \Gamma^{\sigma'}_{\alpha'\gamma'}\lambda_{\sigma'} = A^{\tau}_{\gamma'}A^{\sigma}_{\alpha'}\left(\partial_{\tau}\lambda_{\sigma} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\tau}\lambda_{\nu}\right)$$

является тензором. Выражение в скобке, которое зависит линейно от частной производной компоненты вектора и самой компоненты так, что коэффициенты этой линейной зависимости определяются метрикой пространства V_n, назовем *ковариантной производной вектора* λ_{α} и обозначим:

$$\lambda_{\alpha,\,\gamma} \equiv \partial_{\gamma}\lambda_{\alpha} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}\lambda_{\sigma}. \tag{3.8}$$

Аналогичная операция для контравариантных компонент вектора приводит к определению ковариантной производной, и в этом случае

$$\lambda^{\alpha}{}_{,\,\gamma} \equiv \partial_{\gamma}\lambda^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\lambda^{\sigma}. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) естественным образом следует определение ковариантной производной тензора любой валентности $p+q$, веса 0:

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q,\,\gamma} = \partial_{\gamma} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} &+ \\ + \sum_{\sigma=1}^{p} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{\sigma-1}\tau\alpha_{\sigma+1} \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q}\Gamma^{\alpha_\sigma}_{\tau\gamma} &- \\ - \sum_{\sigma=1}^{q} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{\sigma-1}\tau\beta_{\sigma+1} \ldots \beta_q}\Gamma^{\tau}_{\beta_\sigma\gamma}&. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Таким образом, по сравнению с дифференцируемым тензором его ковариантная производная является тензором, ковариантная валентность которого на единицу больше. Так как каждому невырожденному симметрическому тензору валентности $0+2$ можно сопоставить дифференцирование, то в случае, если в одном исследовании приходится рассматривать операции ковариантного дифференцирования, отвечающие различным симметрическим тензорам, необходимо отличать их разными обозначениями, например, обозначая одно дифференцирование запятой, а другое — точкой с запятой и т. д. Употребителен также знак ∇ («набла»): $\lambda_{\alpha,\,\gamma} \equiv \nabla_\gamma \lambda_\alpha$. Термин «ковариантная производная» введен Риччи ([4], стр. 1—11), тогда как сама операция для римановых пространств встречается уже у Кристоффеля [3].

Для ковариантных производных сумм, внешних произведений, внутренних произведений действительны обычные правила, если дифференцировать один раз. Так,

$$(\lambda_\alpha \pm \nu_\alpha)_{,\,\beta} = \lambda_{\alpha,\,\beta} \pm \nu_{\alpha,\,\beta}, \tag{3.11}$$

$$(\lambda_\alpha \nu_\beta)_{,\,\gamma} = \lambda_{\alpha,\,\gamma}\nu_\beta + \lambda_\alpha \nu_{\beta,\,\gamma}, \tag{3.12}$$

$$\left(T_{\alpha\cdot\gamma}^{\ \beta}\nu_\beta\omega^\gamma\right)_{,\,\delta} = T_{\alpha\cdot\gamma,\,\delta}^{\ \beta}\nu_\beta\omega^\gamma + T_{\alpha\cdot\gamma}^{\ \beta}\nu_{\beta,\,\delta}\omega^\gamma + T_{\alpha\cdot\gamma}^{\ \beta}\nu_\beta\omega^\gamma{}_{,\,\delta}. \tag{3.13}$$

Доказательство этих формул следует очевидным образом из (3.10). Для скаляра ковариантная производная совпадает с частной производной:

$$\varphi_{,\,\alpha} = \partial_\alpha \varphi. \tag{3.14}$$

Формулы (3.10) — (3.14) легко распространить на относительные тензоры веса, не равного нулю, если потребовать, чтобы *вес при ковариантном дифференцировании не менялся*. Так, например, для скалярной плотности веса k получим:

$$\theta_{,\,\alpha} = \partial_\alpha \theta - k\theta\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}; \tag{3.15}$$

для тензора $\Pi^\alpha_{\beta\gamma}$ валентности $1+2$ и веса p ковариантная производная будет иметь вид:

$$\Pi^\alpha_{\beta\gamma,\,\delta} = \partial_\delta \Pi^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\Pi^\sigma_{\beta\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Pi^\alpha_{\sigma\gamma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\sigma}\Pi^\alpha_{\beta\sigma} - p\Pi^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma_\delta, \tag{3.16}$$

где

$$\Gamma_\delta = \Gamma^\sigma_{\delta\sigma}.$$

Так как, по определению, ковариантная производная конструируется, если известны лишь компоненты объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x)$, называемые *коэффициентами связности*, безотносительно к тому, связан этот объект с метрическим тензором или нет, то имеется возможность ввести ковариантное дифференцирование для любого объекта вида $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, что приводит к теории *пространств аффинной связности*, частным случаем которых являются многообразия V_n (Т. Томас [92], А. П. Норден [191], П. К. Рашевский [216]). При этом, естественно, нет необходимости требовать, чтобы имела место симметрия объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ по нижним индексам, что приводит к пространствам с *кручением*.

Будем далее говорить, что тензор *ковариантно постоянен*, если его ковариантная производная равна нулю. Существование такого рода тензоров в V_n подтверждается теоремой: *тензоры* $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, δ^α_β

ковариантно постоянны. Это утверждение следует из (2.1), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4). Вследствие этого *операции свертывания и ковариантного дифференцирования коммутируют*, например:

$$g^{\alpha\beta}(u_\alpha v_\beta)_{,\,\gamma} = g^{\alpha\beta}(u_{\alpha,\,\gamma} v_\beta + u_\alpha v_{\beta,\,\gamma}) =$$
$$= u^\beta{}_{,\,\gamma} v_\beta + u^\beta v_{\beta,\,\gamma} = (u^\beta v_\beta)_{,\,\gamma} = (g^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta)_{,\,\gamma}.$$

Ковариантное дифференцирование допускает введение *ротации* вектора

$$\lambda_{i,\,j} - \lambda_{j,\,i} \equiv \partial_j \lambda_i - \partial_i \lambda_j \qquad \left(\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}\right); \tag{3.17}$$

дивергенции вектора или тензора относительно $g_{\alpha\beta}$, определяемых соответственно выражениями

$$\lambda^\alpha_{,\,\alpha}, \quad a^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta}, \quad b_{\alpha\cdot\beta}^{\ \cdot\beta},$$

и *скалярных операторов*

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1\varphi &= g^{\alpha\beta}\varphi_{,\,\alpha}\varphi_{,\,\beta} \equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi, \\ \Delta_1(f,\ \varphi) &= g^{\alpha\beta} f_{,\,\alpha}\varphi_{,\,\beta}, \\ \Delta_2\varphi &= g^{\alpha\beta}\varphi_{,\,\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

называемых *дифференциальными параметрами Бельтрами первого и второго рода*.

Задачи

1. Для того чтобы ковариантный вектор λ_α был градиентом, необходимо и достаточно, чтобы первая ковариантная производная этого вектора была симметрична: $\lambda_{\alpha,\,\beta} = \lambda_{\beta,\,\alpha}$.

2. Если λ_{ij} — ротация вектора, то $\lambda_{ij,\,k} + \lambda_{jk,\,i} + \lambda_{ki,\,j} = \partial_k\lambda_{ij} + \partial_i\lambda_{jk} + \partial_j\lambda_{ki} = 0$ (Эйзенхарт [88], стр. 44).

3. Показать, что $\partial_\gamma\Delta_1\varphi = 2g^{\alpha\beta}\varphi_{,\,\alpha}\varphi_{,\,\beta\gamma}$ и $\lambda^\alpha_{,\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{g}\lambda^\alpha\right)$.

4. Показать, что дивергенция тензора $a^{\alpha\beta}$ относительно $g_{\alpha\beta}$, т. е. тензор $a^{\alpha\beta}_{,\,\beta}$, имеет выражение $a^{\alpha\beta}{}_{,\,\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\sqrt{g}) + a^{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$; если $a^{\alpha\beta}$ — кососимметрический тензор, то второе слагаемое исчезает.

5. Показать, что $\Gamma_\alpha \equiv \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \partial_\alpha \ln\sqrt{g}$.

6. Показать, что если $\lambda^{[\alpha\beta]} = 0$, то $\lambda_{\alpha,}{}^\beta{}_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\beta\left(\lambda^\beta_\alpha\sqrt{g}\right) + \frac{1}{2}\lambda_{\sigma\tau}\partial_\alpha g^{\sigma\tau}$ (Эйнштейн [42], стр. 769).

7. Рассмотрим величины $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, которые, по определению, равны нулю, если содержат два или большее число одинаковых индексов, и равны 1 или —1, в зависимости от того, получается последовательность индексов $i_1 i_2 \ldots i_n$ из натурального ряда $1\ 2 \ldots n$ с помощью четного или нечетного числа транспозиций. Показать: 1) любой определитель $A = \left|a^i_j\right|$ (индекс i указывает номер столбца, а j — номер строки; $i,\ j = 1, \ldots, n$)

может быть записан в одном из двух видов $a = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{i_1}^1 a_{i_2}^2 \ldots a_{i_n}^n$; 2) величины $\sqrt{g}\,\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ определяют компоненты ковариантного тензора (*дискриминантный тензор*), если $g = |g_{\alpha\beta}|$ — определитель, отвечающий метрическому тензору; контравариантные компоненты этого тензора будут $\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$; 3) дискриминантный тензор ковариантно постоянен.

§ 4. Параллельное перенесение в пространстве V_n

Будем говорить, что пространство V_n *плоское*, и обозначать его символом R_n, если в нем можно определить такую систему координат, относительно которой компоненты метрического тензора будут постоянными: $g_{\alpha\beta} = \text{const}$. Инвариантная характеристика плоских пространств будет дана в следующем параграфе. Если, кроме того, форма $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ определенно-положительная, то такое R_n принято называть *обыкновенным* пространством (см. § 1); примером обыкновенного пространства R_n может служить трехмерное евклидово пространство. V_n является обобщением R_n в том смысле, что возможность для некоторой системы координат в области, не являющейся точкой приведения g_{ij} к постоянным, не предполагается.

Одним из основных понятий евклидовой геометрии является понятие *параллелизма*. При построении геометрии V_n естественно поставить вопрос о параллелизме в таких многообразиях. Всякий параллелизм связан с необходимостью сравнивать векторы в различных точках данной области пространства. Если эти точки соединить некоторой кривой, то можно говорить о сравнении векторов в различных точках кривой. Мы убедимся далее в том, что понятие параллелизма в V_n нельзя отделить от кривой, вдоль которой изучаются векторы, и ввиду этого поставим вопрос о *параллельном перенесении векторов вдоль данной кривой в* V_n.

Это понятие должно быть определено, и если не наложить некоторых дополнительных требований, то такое определение не будет однозначным. Чтобы приводимое ниже определение параллельного переноса векторов в V_n выглядело естественным, приведем некоторые соображения, необязательные, впрочем, с формальной точки зрения. Рассмотрим с этой целью параллелизм в обыкновенном R_3 с тем, чтобы некоторые из свойств взять за образец при определении параллелизма в V_n.

Если R_3 отнесено к криволинейным координатам, то в каждой точке пространства существуют координатные векторы $\underset{\alpha}{\tilde{l}}$, а ковариантные координаты любого вектора $v_\alpha = \tilde{v} \cdot \underset{\alpha}{\tilde{l}}$, где $\tilde{v}$, $\underset{\alpha}{\tilde{l}}$ — безындексные обозначения векторов. Легко убедиться, что v_α является действительно компонентой вектора, проверив для этого закон преобразования этих величин и $\underset{\alpha}{\tilde{l}}$ при преобразовании координат. Если некоторый вектор $\tilde{u}$ переносится параллельно в R_3 вдоль кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, то $\frac{d\tilde{u}}{dt} = 0$. Тогда и компоненты этого вектора равны нулю:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}\underset{\alpha}{\tilde{l}} = \frac{d}{dt}(\tilde{u}\underset{\alpha}{\tilde{l}}) - \tilde{u}\frac{d\underset{\alpha}{\tilde{l}}}{dt} = \frac{du_\alpha}{dt} - u_\sigma \overset{\sigma}{\tilde{l}}\frac{d\underset{\alpha}{\tilde{l}}}{dt} =$$

$$= \frac{du_\alpha}{dt} - u_\sigma \overset{\sigma}{\tilde{l}}\,\partial_\beta \underset{\alpha}{\tilde{l}}\frac{dx^\beta}{dt} = \frac{du_\alpha}{dt} - P^\sigma{}_{\alpha\beta}u_\sigma\frac{dx^\beta}{dt} = 0,$$

т. е. имеет место следующее свойство:

(α) $\frac{du_\alpha}{dt}$ *линейно зависит от* u_σ *и* $\frac{dx^\beta}{dt}$.

Здесь $\overset{\sigma}{\tilde{l}}$ — система векторов, *взаимных* относительно $\underset{\alpha}{\tilde{l}}$, определяемых условием

$$\overset{\sigma}{\tilde{l}}\underset{\tau}{\tilde{l}} = \delta^\sigma_\tau.$$

Взаимная система, как известно, всегда существует, если векторы $\underset{\alpha}{\tilde{l}}$ независимы. Естественно потребовать, чтобы свойство (α) сохранялось и в V_n. Повторяя рассуждение для контравариантной компоненты, мы придем, очевидно, к тому же результату.

Предполагая, что (α) имеет место при параллельном перенесении в V_n вдоль кривой $x^\alpha(t)$, получим:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = -A^\alpha{}_{\beta\gamma}u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt}. \tag{4.1}$$

Потребуем также, чтобы, как и в R_3, выполнялось свойство

(β) *норма вектора при параллельном перенесении в* V_n *сохраняется*:

$$\frac{d}{dt}(g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta) = 0.$$

Тогда, пользуясь (4.1), получим:

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt} + g_{\alpha\beta}\left(\frac{du^\alpha}{dt}u^\beta + u^\alpha\frac{du^\beta}{dt}\right) =$$

$$= (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - A_{\alpha,\,\beta\gamma} - A_{\beta,\,\alpha\gamma})\,u^\alpha u^\beta\frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

где $A_{\alpha,\,\beta\gamma}=g_{\alpha\sigma}A^{\sigma}{}_{\beta\gamma}$. Если это имеет место для любых векторов u^{α} любой кривой, то выражение в скобке, просимметрированное по α и β, должно равняться нулю. Так как это выражение уже симметрично по α, β, то

$$\partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}=A_{\alpha,\,\beta\gamma}+A_{\beta,\,\alpha\gamma}=g_{\alpha\tau}A^{\tau}_{\beta\gamma}+g_{\beta\tau}A^{\tau}_{\alpha\gamma}. \tag{4.2}$$

Потребуем, наконец, чтобы имело место

$$(\gamma)\qquad A^{\alpha}_{[\beta\gamma]}=A_{\alpha,\,[\beta\gamma]}=0.$$

Геометрический смысл требования (γ) состоит в следующем. Рассмотрим некоторую точку пространства V_n и две кривые, проходящие через нее; пусть касательные векторы определяются векторами dx^{α} и δx^{α}. Перенесем вектор δx^{α} вдоль кривой, определяемой вектором dx^{α}, и наоборот. Тогда, если пренебречь бесконечно малыми порядка более чем второго, то при первом перенесении конец смещенного вектора будет находиться в точке $x^{\alpha}+dx^{\alpha}+\delta x^{\alpha}-A^{\alpha}{}_{\beta\gamma}dx^{\beta}\delta x^{\gamma}$; а при втором перенесении конец смещенного вектора придет в точку $x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}+dx^{\alpha}-A^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\delta x^{\beta}dx^{\gamma}$. Следовательно, «зазор» между этими точками выражается величиной $A^{\alpha}_{[\beta\gamma]}dx^{\beta}\delta x^{\gamma}$. Условие ($\gamma$) сводится, таким образом, к требованию, чтобы *в каждом двумерном направлении существовали бесконечно малые параллелограммы* (с точностью до бесконечно малых третьего порядка). Другое истолкование условия (γ) дано Картаном ([71], стр. 593—595; [95]).

При условии (γ) из (4.2) следует: $A^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Таким образом, при условиях (α), (β), (γ) получаем, что при параллельном перенесении вдоль данной кривой вектора u^{α}

$$\frac{du^{\alpha}}{dt}=-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}u^{\beta}\frac{dx^{\gamma}}{dt}. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.3) совпадают по форме с законом параллельного перенесения в R_3, но, в то время как в R_3 параллелизм инвариантен (по смыслу этого понятия), для V_n инвариантность (4.3) необходимо доказать, и такое доказательство должно основываться на законе преобразования объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Так как $u^{\alpha'}=A^{\alpha'}_{\sigma}u^{\sigma}$, то в силу (4.3)

$$du^{\alpha'}=\partial_{\beta}A^{\alpha'}_{\sigma}u^{\sigma}dx^{\beta}+A^{\alpha'}_{\sigma}du^{\sigma}=\left(\partial_{\sigma}A^{\alpha'}_{\tau}-A^{\alpha'}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\tau\sigma}\right)u^{\tau}dx^{\sigma},$$

где в силу преобразования объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (см. (3.7)) выражение в скобках можно выразить через $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$, и тогда будем иметь:

$$du^{\alpha'}=-A^{\lambda'}_{\tau}A^{\nu'}_{\sigma}\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\nu'}u^{\tau}dx^{\sigma}=-\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\nu'}u^{\lambda'}dx^{\nu'},$$

что и доказывает *инвариантность* (4.3) *при преобразовании координат*.

Если задана кривая $x^\alpha = x^\alpha(t)$, где x^α непрерывно зависит от t, то $\Gamma^\tau_{\beta\gamma} = \Gamma^\tau_{\beta\gamma}\big(x^\alpha(t)\big)$ и уравнения (4.3) определят нормальную систему n линейных обыкновенных уравнений с непрерывными в некотором интервале коэффициентами; в силу теоремы существования и единственности для каждой системы начальных условий

$$t = t_0, \quad u^\alpha = \overset{0}{u}{}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

получим единственное решение системы.

Пусть через две точки A и B в V_n проходят две кривые, определяемые уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(t)$ и $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(t)$ с такой параметризацией, чтобы значению t_0 на обеих кривых отвечала точка A, а значению t_1 — точка B. Предположим также, что A и B вместе с кривыми, их соединяющими, принадлежат такой области V_n, где условия теоремы существования и единственности системы (4.3) выполняются. Тогда, задавая в A один и тот же вектор $\overset{0}{u}{}^\alpha$, получим две различные системы уравнений (4.3), отвечающие этим двум кривым, и в B в качестве параллельно перенесенных $\overset{0}{u}{}^\alpha$ будут отвечать два различных вектора. Таким образом, *параллельное перенесение по закону* (4.3) *совершается при заданном пути однозначно*; *перенесение зависит от пути*. Разумеется, эти утверждения носят локальный характер, так как имеют место только в области, определяемой интервалом, в котором справедлива теорема существования и единственности системы (4.3).

Умножая (4.3) на dt, перенося все члены налево и обозначая полученное выражение через δu^α, получим:

$$\delta u^\alpha = \left(\partial_\gamma u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta\right) dx^\gamma = u^\alpha_{,\gamma}\, dx^\gamma = 0.$$

Выражение δu^α называют *абсолютным дифференциалом* поля u^α. Абсолютный дифференциал имеет смысл только при определенном направлении, задаваемом дифференциалами dx^α, и следовательно, *поле u^α переносится параллельно вдоль кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, если абсолютный дифференциал u^α при бесконечно малом смещении вдоль этой кривой равен нулю.*

Обобщая этот факт для любого тензора и вводя абсолютный дифференциал тензора

$$\delta T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q, \gamma}\, dx^\gamma \tag{4.4}$$

вдоль некоторой кривой, будем говорить, что тензор *переносится параллельно вдоль кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$, если его абсолютный дифференциал вдоль этой кривой равен нулю.*

Параллельное перенесение тензоров непосредственно связано с ковариантным дифференцированием: оно носит название *параллельного* *перенесения в смысле Леви-Чивита*, который ввел и обосновал это понятие ([48], стр. 173—205), обобщенное в настоящее время в различных направлениях. Можно дать другие определения параллельного перенесения в V_n, эквивалентные данному выше (И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк [125], стр. 75—91, П. К. Рашевский [216], стр. 429—450).

Задачи

1. В евклидовом пространстве даны сфера и касающийся ее по малой окружности (l) круглый конус. Показать, что всякая совокупность векторов, параллельных вдоль (l) относительно сферы, будет также определять векторы, параллельные вдоль (l) относительно конуса; если конус развернуть на плоскость, то эти векторы перейдут в векторы, параллельные в евклидовом смысле.

2. Для того чтобы касательные к кривым $x^2 = \text{const}$ в пространстве V_2 были параллельны вдоль некоторой кривой (l), необходимо и достаточно, чтобы эта кривая (l) была интегральной кривой уравнения $\Gamma^2_{1\alpha}\, dx^\alpha = 0$.

3. При параллельном перенесении векторов $\underset{1}{u}^\alpha, \ldots, \underset{n}{u}^\alpha$ вдоль некоторой кривой линейные зависимости между ними сохраняются.

§ 5. Тензор кривизны пространства V_n

Обычные частные производные и ковариантные производные первого порядка подчинены одинаковым правилам, но уже для производных второго порядка возникает неустранимое различие. Это различие проще всего установить, решая основной вопрос, возникающий при исследовании уравнений в ковариантных производных, — вопрос об условиях интегрируемости. В то время как для обычных частных производных имеет место переместительность порядка дифференцирования, для ковариантных производных это свойство не выполняется. Пусть задано векторное поле $u_\alpha(x)$. Ковариантная производная

$$u_{\alpha,\,\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} u_\sigma. \tag{5.1}$$

Дифференцируя еще раз, получим, имея в виду (5.1),

$$u_{\alpha,\,\beta\gamma} = \partial_\gamma u_{\alpha,\,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} u_{\lambda,\,\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} u_{\alpha,\,\lambda}.$$

Так как риманова связность не имеет кручения (см. § 3): $\Gamma^\sigma_{[\alpha\beta]} = 0$, то альтернируя это уравнение по β и γ, получим:

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]} = \left(\partial_{[\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma]\,\alpha} + \Gamma^\tau_{\alpha\,[\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta]\,\tau}\right) u_\sigma.$$

Слева находится тензор, u_σ — вектор, и следовательно, согласно правилу частного для тензоров выражение в скобках представляет собой также тензор валентности $1+3$ и веса 0. Вводя обозначение

$$\frac{1}{2} R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{[\beta}\Gamma^\sigma_{\gamma]\,\alpha} + \Gamma^\tau_{\alpha\,[\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta]\,\tau}, \tag{5.2}$$

получим, таким образом, равенство

$$u_{\alpha,\,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_{\sigma}, \tag{5.3}$$

в котором и сказывается различие между частными и ковариантными производными.

Тензор $R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma}$ называется *тензором кривизны* пространства V_n и играет основную роль для его характеристики.

Умножая (5.3) на $g^{\alpha\tau}$ и пользуясь тем, что метрический тензор ковариантно постоянен, получаем:

$$u^{\tau}{}_{,\,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_{\sigma} = \frac{1}{2} R_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\beta\gamma} u^{\sigma} = -\frac{1}{2} R^{\tau}{}_{\sigma\beta\gamma} u^{\sigma}. \tag{5.4}$$

Вообще для тензора любой валентности получим:

$$S^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q,\,[\gamma\delta]} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} S^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1}\sigma\beta_{k+1} \ldots \beta_q} R^{\sigma}{}_{\beta_k\gamma\delta} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p} S^{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}\sigma\alpha_{r+1} \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} R^{\alpha_r}{}_{\sigma\gamma\delta}. \tag{5.5}$$

Это соотношение получено Риччи и носит название *тождества Риччи* ([16], стр. 143). В том случае, когда вместо обычных частных производных применяются ковариантные, это тождество используется как условие интегрируемости. Так как тензор кривизны целиком определяется, если задан объект $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, то он может быть определен и в пространствах аффинной связности с кручением (§ 3), где также будет иметь место (5.5). Смысл этого тождества заключается в том, что в пространствах V_n (пространствах аффинной связности) тензорное поле с компонентами класса C^r ($r \geqslant 2$) не может быть задано произвольно, так как при помощи (5.5) оно связано с метрикой пространства (с коэффициентами связности).

В V_n тензор кривизны можно определить ковариантными компонентами

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\sigma} R^{\sigma}{}_{\beta\gamma\delta}, \tag{5.6}$$

и в такой форме удобно исследовать его свойства. Запишем ковариантные компоненты тензора кривизны в явном виде. Так как

$$g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\tau}\Gamma_{\tau,\,\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma},$$

а $\partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}$ выражаются через символы Кристоффеля при помощи (3.2), то

$$g_{\alpha\sigma}\partial_{\beta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta} = \partial_{\beta}\left(g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta}\right) - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta}\partial_{\beta} g_{\alpha\sigma} = \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha,\,\gamma\delta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta}\left(\Gamma_{\alpha,\,\sigma\beta} + \Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}\right)$$

и, следовательно,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=\partial_\gamma\Gamma_{\alpha,\,\beta\delta}-\partial_\delta\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}+\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\Gamma_{\sigma,\,\alpha\delta}-\Gamma^\sigma_{\beta\delta}\Gamma_{\sigma,\,\alpha\gamma}=$$
$$=\frac{1}{2}(\partial_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}+\partial_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}-\partial_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}-\partial_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})+$$
$$+g^{\sigma\tau}(\Gamma_{\sigma,\,\alpha\delta}\Gamma_{\tau,\,\beta\gamma}-\Gamma_{\sigma,\,\alpha\gamma}\Gamma_{\tau,\,\beta\delta}). \quad (5.7)$$

Из этого выражения для ковариантных компонент тензора кривизны непосредственно следуют тождества:

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha) && R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-R_{\beta\alpha\gamma\delta}=-R_{\alpha\beta\delta\gamma},\\ &(\beta) && R_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\gamma\delta\alpha\beta},\\ &(\gamma) && R_{\alpha\beta\gamma\delta}+R_{\alpha\gamma\delta\beta}+R_{\alpha\delta\beta\gamma}=0. \end{aligned}\right\} \quad (5.8)$$

Назовем *полным рядом тождеств* для некоторого тензора совокупность тождеств, определяющих все алгебраические условия для компонент этого тензора; следовательно, каждое тождество, которому удовлетворяют компоненты тензора, может быть получено из полного ряда. Можно показать (Томас [106], § 49), что для компонент тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ полный ряд тождеств определяется тождествами (α) и (γ); нетрудно непосредственно убедиться, что (β) есть следствие (α) и (γ).

Подсчитаем число независимых компонент тензора кривизны. Среди компонент $R_{\alpha\beta\alpha\beta}$, имеющих только два различных индекса, в силу (α) получим только C_n^2 различных компонент, где C_n^2 — число сочетаний из n по 2. Среди компонент с тремя различными индексами в силу (α) и (γ) получим $3C_n^3$ различных компонент, и, наконец, среди компонент с четырьмя различными индексами найдется $2C_n^4$ независимых. Следовательно, общее число независимых компонент будет определяться числом

$$N=C_n^2+3C_n^3+2C_n^4=\frac{1}{12}n^2(n^2-1). \quad (5.9)$$

В частности V_2 отвечает $N=1$, для V_3 число $N=6$ и для V_4 число $N=20$.

Ввиду важности тензора кривизны пространства V_n, определяемого метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, полезно выяснить, какие тензоры могут возникнуть в результате свертывания этих двух тензоров. Первое свертывание, с точностью до знака, определяет только один тензор

$$R_{\alpha\beta}=R^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta}=\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}-\partial_{\alpha\beta}\ln\sqrt{g}-\Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta}+\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\partial_\sigma\ln\sqrt{g}, \quad (5.10)$$

как это следует из (5.2) и задачи 5 § 3; свертывание по индексам кососимметрической пары дает, конечно, нуль. Тензор $R_{\alpha\beta}$ (симметрический в силу (5.10)) называется *тензором Риччи*, который впервые ввел его, и играет основную роль для пространств Эйнштейна вообще и для теории относительности в частности. Иногда тензором Риччи называют свертку $R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\sigma}$, отличающуюся знаком от $R_{\alpha\beta}$ в (5.10).

Второе свертывание определяет скаляр

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha},$$

называемый *скалярной кривизной пространства* V_n.

Как первый пример приложения тензора кривизны покажем, что имеет место теорема: *для того чтобы пространство было плоским, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны был равен нулю*. Пусть имеем плоское пространство, т. е. в некоторой системе координат компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta} = \mathrm{const}$. Тогда $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ в этой системе координат, а следовательно, и в любой. Предположим, наоборот, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ для некоторого V_n. Рассмотрим метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ и покажем, что существует такое невырожденное преобразование координат $x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^{\beta'})$, что в системе $\{x^{\alpha'}\}$ компоненты $g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{const}$. Это эквивалентно требованию, чтобы

$$\Gamma_{\alpha',\,\beta'\gamma'} = \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = 0,$$

или в силу уравнений (3.7), определяющих преобразование объекта $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} + \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'} A^{\alpha'}_{\omega} = 0.$$

Свертывая это уравнение с $A^{\lambda}_{\alpha'}$, приведем его в силу (1.14) к эквивалентной форме:

$$\partial_{\beta'} A^{\lambda}_{\gamma'} = -\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'}, \qquad \partial_{\sigma'} x^{\alpha} = A^{\alpha}_{\sigma'}. \tag{5.11}$$

Таким образом, вопрос свелся к совместности системы уравнений (5.11) при условиях

$$g_{\alpha\beta} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{const} \tag{5.12}$$

с неизвестными функциями $A^{\alpha}_{\alpha'}$ и x^{α} от независимых переменных $x^{\alpha'}$. Теория интегрируемости (Гурса [62], стр. 103) приводит к следующему результату. Если условия интегрируемости (5.11) выполняются тождественно, т. е. для всех значений $A^{\alpha}_{\alpha'}$ и x^{α}, и если $A^{\alpha}_{\alpha'}$ регулярны в некоторой окрестности $\overset{0}{x}{}^{\alpha}$, $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$, то существует одна и только одна система решений, регулярных в этой окрестности и принимающих значения $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$ при $x^{\alpha} = \overset{0}{x}{}^{\alpha}$. Условия (5.12) потребуются, при тождественном выполнении условий интегрируемости, только для выбора начальных условий $(A^{\alpha}_{\alpha'})_0$. Записывая условия интегрируемости для второй группы уравнений (5.11), получим:

$$\partial_{[\sigma'\tau']} x^{\alpha} = \partial_{[\tau'} A^{\alpha}_{\sigma']},$$

но в силу первой группы уравнений (5.11) (см. задачу 9 § 2)

$$\partial_{[\tau'} A^{\alpha}_{\sigma']} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\beta}_{[\tau'} A^{\gamma}_{\sigma']} = -\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]} A^{\beta}_{\tau'} A^{\gamma}_{\sigma'} \equiv 0.$$

Условия интегрируемости для первой группы уравнений в силу уравнений (5.11) будут иметь вид:

$$\partial_{[\beta'\tau']} A^{\lambda}_{\gamma'} = -\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\left(\partial_{[\tau'} A^{\beta}_{\beta']} A^{\gamma}_{\gamma'} + A^{\beta}_{[\beta'} \partial_{\tau']} A^{\gamma}_{\gamma'}\right) - A^{\gamma}_{\gamma'} A^{\beta}_{[\beta'} A^{\nu}_{\tau']} \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} =$$
$$= -A^{\gamma}_{\gamma'} A^{\beta}_{\beta'} A^{\nu}_{\tau'}\left(\partial_{[\nu} \Gamma^{\lambda}_{\beta]\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta}\right) = -A^{\gamma}_{\gamma'} A^{\beta}_{\beta'} A^{\nu}_{\tau'} R^{\lambda}_{\gamma\nu\beta} \equiv 0$$

и в силу основной предпосылки также обращаются в тождества. Начальные условия (5.11) потребуют задания $n+n^2$ произвольных постоянных, определяющих начальные значения x^{α} и $A^{\alpha}_{\beta'}$ при условии (5.12). Это налагает $\frac{n(n+1)}{2}$ условий, и следовательно, искомое преобразование координат в данном случае содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольных постоянных. Используя этот произвол, можно соотношение $g_{\alpha'\beta'} = \mathrm{const}$ еще упростить, приведя на вещественном пути ds^2 к виду $\sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha} dx^{\alpha^2}$, где $e_{\alpha} = \pm 1$ и определяют сигнатуру метрики плоского пространства.

Исследования в V_n приводят к необходимости рассматривать не только тензор кривизны, но и тензор, определяемый ковариантной производной от тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$. Является важным выяснить алгебраические тождества, связывающие компоненты этого тензора. Выведем так называемые *тождества Бианки*, частично отвечающие на этот вопрос.

Рассмотрим произвольное векторное поле u_{α} и поле $u_{\alpha,\beta}$. Применяя к ним тождество Риччи (5.5), получим:

$$u_{\alpha,[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_{\sigma}, \tag{5.13}$$

$$u_{\alpha,\beta[\gamma\delta]} = \frac{1}{2}\left(R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\delta} u_{\sigma,\beta} + R^{\sigma}{}_{\beta\gamma\delta} u_{\alpha,\sigma}\right). \tag{5.14}$$

Дифференцируя (5.13) еще раз, придем к уравнениям

$$u_{\alpha,[\beta\gamma]\delta} = \frac{1}{2}\left(R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\delta} u_{\sigma} + R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} u_{\sigma,\delta}\right), \tag{5.15}$$

Альтернируя (5.14) и (5.15) по индексам $\beta\gamma\delta$, можно опустить внутренние скобки (см. задачу 12 § 2), и следовательно, приравнивая левые части, получим:

$$R^{\sigma}{}_{\alpha[\gamma\delta} u_{|\sigma|,\beta]} + R^{\sigma}{}_{[\beta\gamma\delta]} u_{\alpha,\sigma} - R^{\sigma}{}_{\alpha[\beta\gamma,\delta]} u_{\sigma} - R^{\sigma}{}_{\alpha[\beta\gamma} u_{|\sigma|,\delta]} = 0;$$

первое и последнее слагаемые отличаются только знаком, второе слагаемое равно нулю в силу (5.8), и следовательно,

$$R^{\sigma}{}_{\alpha[\beta\gamma,\delta]}u_\sigma = 0,$$

что в силу произвольности поля u_α приводит к выводу:

$$R^{\sigma}{}_{\alpha[\beta\gamma,\delta]} = R_{\sigma\alpha[\beta\gamma,\delta]} = 0$$

или, в развернутом виде (см. задачу 6 § 2),

$$R_{\sigma\alpha\beta\gamma,\delta} + R_{\sigma\alpha\gamma\delta,\beta} + R_{\sigma\alpha\delta\beta,\gamma} = 0. \tag{5.16}$$

Это соотношение называется *тождеством Бианки* ([17], стр. 361).

Дифференцируя тождества (α) и (γ) из (5.8), получим также:

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda} &= -R_{\beta\alpha\gamma\delta,\lambda} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma,\lambda},\\ R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda} &+ R_{\alpha\gamma\delta\beta,\lambda} + R_{\alpha\delta\beta\gamma,\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Можно доказать, что (5.16) и (5.17) определяют полный ряд алгебраических тождеств для $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$ (Томас [106], § 49). Из этих тождеств, свертывая, получим следствия

$$R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\sigma} + 2R_{\alpha[\beta,\gamma]} = 0, \tag{5.18}$$

$$R^{\sigma}{}_{\beta,\sigma} - \frac{1}{2}R_{,\beta} = 0. \tag{5.19}$$

В случае, если $n = 4$, (5.19) представляет собой уравнение закона сохранения импульса-энергии для релятивистских полей тяготения.

Тензор кривизны пространства играет исключительную роль при построении теории римановых пространств и в физических приложениях, где он допускает физическую интерпретацию (см. [253], [275], [278], [312], [329], [339]).

Задачи

1. В формулах (5.8) из (α) и (γ) получить (β).

2. Показать, что если $g_{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ — компоненты двух симметрических невырожденных тензоров, а $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля, отвечающие им, то $\Omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензор; тензоры кривизны, отвечающие римановым связностям Γ и $\overset{*}{\Gamma}$, удовлетворяют соотношению

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + 2\Omega^{\sigma}{}_{\beta[\delta,\gamma]} + 2\Omega^{\sigma}{}_{\beta[\delta}\Omega^{\alpha}{}_{|\sigma|\gamma]},$$

где дифференцирование производится относительно метрики $g_{\alpha\beta}$.

3. Показать, что в V_3

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} + g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma} + \frac{R}{2}(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}).$$

4. Доказать, что пространство V_3 определенной метрики, отнесенной к триортогональной системе координат, имеет скалярную кривизну $R=0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{g_{ii}}\left[\sum_j{}'\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\partial_{ii}\sqrt{g_{jj}}-\partial_i\ln\sqrt{g_{ii}}\sum_j{}'\partial_i\ln\sqrt{g_{jj}}+\right.$$
$$\left.+\partial_i\ln\sqrt{g_{jj}}\,\partial_i\ln\sqrt{g_{kk}}\right]=0,$$

где $\sum\limits_j{}'$ означает суммирование по $j\neq i$ и $i, j, k\neq$ (Эйзенхарт [325]).

5. Показать, что, приняв $\sqrt{g_{11}}=x_1^{a_1}x_2^{b_1}x_3^{c_1}$, $\sqrt{g_{22}}=x_2^{a_2}x_3^{b_2}x_1^{c_2}$, $\sqrt{g_{33}}=$ $=x_3^{a_3}x_1^{b_3}x_2^{c_3}$, где a, b, c — постоянные, условиям задачи 4 можно удовлетворить, полагая:

1) $a_i=c_i=0$ $(i=1, 2, 3)$, $b_i=1$ при $g_{11}=x_2^2$, $g_{22}=x_3^2$, $g_{33}=x_1^2$;

2) $a_i=0$, $c_2=b_3$, $c_3=b_1$, $c_1=b_2$, $c_i=\frac{2}{3}b_i=\frac{2}{3}$ при $g_{11}=(x_2x_3)^{4/3}$, $g_{22}=(x_1x_3)^{4/3}$, $g_{33}=(x_1x_2)^{4/3}$.

§ 6. Геодезические линии

Прямую в евклидовом пространстве можно определить или 1) как кривую, касательные векторы к которой параллельны, или 2) как кратчайший путь между точками, или 3) как линию нулевой кривизны.

В V_n можно определить кривые, обладающие соответственным образом обобщенными, но аналогичными свойствами. Такие кривые называют *геодезическими линиями* V_n.

Геодезической линией в V_n назовем такую линию, касательный вектор которой переносится вдоль нее параллельно в смысле Леви-Чивита. Пусть $x^\alpha(t)$, функции класса C^r $(r\geqslant 2)$, определяют уравнения геодезической: $x^\alpha=x^\alpha(t)$. Касательный к кривой вектор $\frac{dx^\alpha}{dt}$ при непрерывно дифференцируемом и обратимом преобразовании параметра $t=t(\tau)$ умножается на $\frac{dt}{d\tau}$:

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}=\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dt}{d\tau},$$

т. е. в каждой точке определяется с точностью до численного множителя. Пусть вектор, переносимый параллельно вдоль геодезической, есть λ^α, тогда

$$\frac{dx^\alpha}{dt}=\sigma\lambda^\alpha.$$

Абсолютный дифференциал $\delta\lambda^\alpha$ вдоль геодезической равен нулю, и следовательно,

$$\frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)=\frac{d\sigma}{dt}\lambda^\alpha=\nu\frac{dx^\alpha}{dt}, \tag{6.1}$$

так как $\dfrac{dx^\alpha}{dt}\neq 0$. Всегда можно ввести новый параметр τ так, чтобы вектор $\dfrac{dx^\alpha}{d\tau}$ переносился параллельно вдоль геодезической, т. е, чтобы правая часть этого равенства обращалась в нуль, а левая имела тот же вид. Пусть $\tau=\tau(t)$. Тогда (6.1) запишется в виде:

$$\frac{\delta}{d\tau}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\left(\nu-\frac{d^2\tau}{dt^2}\Big/\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt},$$

и, выбирая за $\tau(t)$ интеграл уравнения

$$\frac{d^2\tau}{dt^2}=\nu\frac{d\tau}{dt},$$

получим для *канонического параметра* τ уравнение геодезической в виде:

$$\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0 \tag{6.2}$$

или в развернутом виде:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0. \tag{6.3}$$

В той области V_n, где для системы (6.3) выполняются условия теоремы существования и единственности, каждой заданной точке и начальному значению $\left(\dfrac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_0$ отвечает единственное решение системы и, следовательно, *через каждую точку в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая.*

Если метрика V_n неопределенная, то геодезические могут быть как изотропными, так и неизотропными кривыми.

Вдоль любой геодезической с канонической параметризацией

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=\varepsilon=\text{const}, \tag{6.4}$$

так как вдоль кривой (6.2)

$$\partial_\gamma\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)\frac{dx^\gamma}{d\tau}=\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=$$
$$=2g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)_{,\gamma}\frac{dx^\gamma}{d\tau}=0.$$

Другими словами, *норма касательного вектора* $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ *геодезической не меняется вдоль нее*; в частности, *геодезическая, изотропная в точке, изотропна всюду*. Очевидно, что не всякая изотропная кривая будет геодезической.

В случае обыкновенного R_3, когда кривые не могут быть изотропными в декартовых координатах, вектор $\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=\mu^\alpha$ является *вектором главной нормали кривой*. Если же в R_3 введены криволинейные координаты, то μ^α равняется левой части (6.3), если там τ выразить через длину дуги s. Как обобщение назовем

$$\mu^\alpha=\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} \tag{6.5}$$

с каноническим параметром τ *вектором главной нормали кривой в* V_n; то, что μ^α — вектор, следует из (6.2). Тогда естественно

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{|g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta|}$$

назвать *первой кривизной кривой пространства* V_n и поставить вопрос об определении в V_n кривых нулевой первой кривизны, когда

$$g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta=0.$$

В случае определенной метрики пространства V_n *только геодезические имеют нулевую первую кривизну*; *если метрика* V_n *неопределенна, то эти кривые будут или геодезическими, или кривыми с изотропным вектором главной нормали*. Этот результат обобщает свойство 3) для прямых в обыкновенном V_n.

Если в (6.4) $\varepsilon\neq 0$, то геодезическая кривая неизотропная и в качестве одного из возможных канонических параметров можно взять длину дуги этой кривой, что будет означать $\varepsilon=\pm 1$; другие канонические параметры определяются затем с точностью до двух произвольных параметров.

Неизотропную геодезическую можно определить также как линию кратчайшего расстояния между двумя точками A и B в V_n. Это приводит к следующей задаче вариационного исчисления: требуется определить экстремаль, на которой интеграл

$$\int_A^B ds=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}}\,dt$$

имеет стационарное значение. Обозначая подынтегральное выражение через φ, имеем:

$$\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}}=\varphi=\frac{ds}{dt}\equiv\dot{s},$$

и φ должна удовлетворять уравнениям Эйлера (М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник [107], стр. 30):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}=0.$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}^\alpha}=\frac{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta}{\dot{s}},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial_\alpha g_{\sigma\beta}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta}{2\dot{s}},$$

то уравнение Эйлера запишется в виде:

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}+\Gamma_{\alpha,\,\sigma\beta}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta=0.$$

Отсюда, свертывая с $g^{\alpha\gamma}$, получим:

$$\ddot{x}^\gamma+\Gamma^\gamma_{\sigma\beta}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\beta=\frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{x}^\gamma.$$

Вводя канонический параметр $\tau=s$, придем к (6.3). Решение этой задачи, как видим, существенным образом зависит от предположения о неизотропности геодезической. Этот результат обобщает свойство 2) прямых в евклидовом пространстве.

Так как понятие параллелизма имеет место и в пространствах аффинной связности, то геодезические совершенно так же могут быть определены в этих многообразиях ([191], стр. 148—149); это непосредственно видно из уравнений (6.3), зависящих только от коэффициентов связности.

Задачи

1. Показать, что объект связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ определяет те же геодезические, что и объект $\Gamma^\alpha_{(\beta\gamma)}$.

2. Показать, что в *пространстве Минковского*, определяемом метрикой $ds^2=-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}+dx^{4^2}$, всякая изотропная кривая имеет вид:

$$x^1=\int\rho\cos\varphi\cos\psi\,ds,\qquad x^2=\int\rho\cos\varphi\sin\psi\,ds,$$
$$x^3=\int\rho\sin\varphi\,ds,\qquad x^4=\int\rho\,ds,$$

где ρ, φ, ψ — функции от s. Когда эти кривые будут геодезическими?

§ 7. Специальные системы координат в V_n

Далее, при определении различных пространств Эйнштейна, возникает необходимость в специализации системы координат. В этом параграфе рассматриваются некоторые из систем координат, которые могут быть введены в любом V_n. Такая возможность является следствием теоремы, высказанной еще Риманом ([1]) и утверждающей, что *за счет преобразования координат n компонент метрического тензора можно записать в виде наперед заданных функций*. Так как метрика V_n не вырожденная, так же как и допускаемые преобразования, то выбор этих произвольных функций не должен приводить к вырождению метрики. Рассматриваемые ниже системы координат являются различными возможными реализациями этой теоремы.

Координаты, геодезические в точке. Так как вообще тензор кривизны в V_n отличен от нуля, то нельзя объект римановой связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ за счет преобразования координат в области обратить в нуль, но всегда можно специализировать систему координат так, чтобы в наперед заданной точке P этот объект обращался в нуль: $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_P = 0$. Такая система координат называется *геодезической в точке P*.

Пусть V_n отнесено к системе координат x^{α} и точка P определяется координатами $\overset{0}{x}{}^{\alpha}$. Введем новые координаты посредством формул

$$x^{\alpha'} = C^{\alpha'}_{\beta}(x^{\beta} - \overset{0}{x}{}^{\beta}) + \frac{1}{2} C^{\alpha'}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\overset{0}{x})(x^{\beta} - \overset{0}{x}{}^{\beta})(x^{\gamma} - \overset{0}{x}{}^{\gamma}), \qquad (7.1)$$

где $C^{\alpha'}_{\beta}$ — постоянные, удовлетворяющие условию $|C^{\alpha'}_{\beta}| \neq 0$, а в остальном произвольные; можно, в частности, положить $C^{\alpha'}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Дифференцируя (7.1) последовательно по x^{α} и вычисляя эти производные в точке P, получим:

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)_P = C^{\alpha'}_{\beta}, \qquad \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}\,\partial x^{\gamma}}\right)_P = C^{\alpha'}_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\overset{0}{x}{}^{\alpha}). \qquad (7.2)$$

Для того чтобы $(\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'})_P = 0$, при таком преобразовании необходимо и достаточно, чтобы согласно (3.7)

$$(A^{\alpha'}_{\omega} A^{\tau}_{\beta'} A^{\rho}_{\gamma'} \Gamma^{\omega}_{\rho\tau} + A^{\alpha'}_{\omega} \partial_{\beta'} A^{\omega}_{\gamma'})_P = 0.$$

Свертывая с $A^{\beta'}_{\lambda} A^{\gamma'}_{\nu}$ и имея в виду, что

$$A^{\sigma'}_{\beta} A^{\lambda}_{\sigma'} = \delta^{\lambda}_{\beta}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\gamma'}}\right)\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\omega}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\omega}}\right)\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\gamma'}},$$

получим равносильное соотношение

$$(A^{\alpha'}_{\omega} \Gamma^{\omega}_{\lambda\nu}) = \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}\,\partial x^{\nu}}\right)_P,$$

которое обращается в тождество в силу (7.2). Вместо (7.1) можно было бы взять многочлен любого порядка, в котором коэффициенты членов с третьими, четвертыми и т. д. степенями совершенно произвольны. Следовательно, геодезическую в P систему можно ввести бесконечным числом способов. Этот произвол можно использовать для дальнейшей специализации координат.

Например, можно ввести систему координат, *геодезическую вдоль наперед заданной кривой* (Ферми [73], стр. 21—23). Из (7.2) следует, что если рассматривать пространство аффинной связности *без кручения* (см. § 3), то все приведенное выше построение повторяется буквально. Для таких пространств можно также ввести систему координат, геодезическую вдоль наперед заданной кривой (Л. Эйзенхарт [92], стр. 64, П. К. Рашевский [216], стр. 410). Смысл геодезических в точке координат состоит в том, что в достаточно малой окрестности точки P эти координаты приближаются к аффинным координатам R_n, так как формула параллельного переноса в P в этих координатах будет иметь вид: $d\xi^\alpha = 0$, т. е. координаты параллельно переносимого вектора в этой точке стационарны и, следовательно, при смещении из точки P они получают приращения $\Delta\xi^\alpha$ — бесконечно малые высшего порядка. Линейные преобразования таких координат оставляют их геодезическими в данной точке, так как *при таких преобразованиях объекты связности ведут себя, как тензоры* (см. (3.7)).

Римановы и нормальные координаты. Отмеченная выше возможность специализации координат, геодезических в точке, может быть реализована в виде так называемых *римановых координат* в V_n, введенных Риманом [1]. Отличительным свойством этой системы координат является то, что относительно них уравнения геодезических, проходящих через начало координат, имеют такой же вид, какой имеют уравнения прямых, проходящих через начало декартовой системы координат, в евклидовой геометрии.

Рассмотрим пространство V_n, отнесенное к произвольной системе координат, фиксируем некоторую точку P в качестве начала координат и будем проводить через P геодезические по всем возможным направлениям. Уравнение каждой геодезической отнесем к каноническому параметру и, пользуясь тем, что любые два канонических параметра связаны линейной зависимостью $\overset{*}{\tau} = a\tau + b$, выберем параметр τ так, чтобы на каждой геодезической точке P отвечало значение параметра $\tau = 0$, чем параметр фиксируется с точностью до постоянного множителя.

Любая из геодезических, проходящих через P, вполне определяется заданием касательного к ней вектора $\xi^\alpha = \left\{ \dfrac{dx^\alpha}{d\tau} \right\}_{P=0}$, а некоторая точка A на ней будет определена значением параметра τ.

Разумеется, эти утверждения имеют место только в той области около P, где выполняются условия теоремы существования и единственности системы дифференциальных уравнений, определяющих геодезическую, и только в такой области можно говорить о построении римановых координат. Если точка A имела координаты в исходной системе координат x^α ($\alpha = 1, \ldots, n$), то теперь этой же точке можно сопоставить n чисел

$$y^\alpha = \xi^\alpha \tau \tag{7.3}$$

— *римановых координат* точки A. Следовательно,

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, \ldots, y^n) \tag{7.4}$$

(здесь мы, отдавая дань традиции, отступаем от принятого в § 1 правила коренных букв). В исходной системе координат функции x^α на геодезической зависят от начальных условий и параметра τ: $x^\alpha = x^\alpha(\tau, \overset{0}{x}{}^\alpha, \xi^\alpha)$, но, как известно из теории дифференциальных уравнений (В. В. Степанов [115], стр. 275), x^α будут здесь непрерывно дифференцируемыми функциями всех своих аргументов такое же число раз, как и компоненты объекта $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — римановой связности. Следовательно, x^α — непрерывно дифференцируемые функции y^α. Чтобы выяснить взаимно однозначное соответствие x^α и y^α в некоторой области около начала, заметим, что в точке P

$$\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)_P = \xi^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\frac{\partial y^\beta}{\partial \tau}\right)_P = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)_P \xi^\beta,$$

следовательно,

$$\left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right\}_P = \delta^\alpha_\beta,$$

и якобиан $\left|\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right|_P \neq 0$, т. е. он отличен от нуля в некоторой окрестности начала координат, и в этой окрестности соответствие между x^α и y^α взаимно однозначное; геометрически это будет означать, что в такой окрестности из P в A можно провести только одну геодезическую.

Когда исходная система координат будет заменена некоторой другой, то отвечающие им римановы координаты преобразуются одна в другую при помощи линейного однородного преобразования, так как при этом векторы ξ^α в соприкасающемся к V_n в точке P плоском пространстве преобразуются по такому закону.

Можно указать несколько необходимых и достаточных критериев того, чтобы система координат в V_n была римановой, различных по форме, но эквивалентных между собой, например

α) *уравнения геодезических имеют вид* (7.3), *если считать* $\xi^\alpha = \mathrm{const}$;

β) *компоненты объекта римановой связности удовлетворяют соотношению*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} y^{\beta} y^{\gamma} = 0. \tag{7.5}$$

Необходимость α) следует из определения римановых координат. Достаточность α) вытекает из того, что вдоль геодезических $\frac{dy^\alpha}{d\tau} = \xi^\alpha = \text{const}$, т. е. и в P

$$\left(\frac{dy^\alpha}{d\tau}\right)_0 = \xi^\alpha \tag{7.6}$$

и ξ^α — касательный вектор в начале. Тогда эти координаты римановы. Предположим, что α) имеет место, тогда (7.3) при постоянных ξ^α определяет интегральные кривые уравнений (6.3), что приводит к соотношениям

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \xi^{\beta} \xi^{\gamma} = 0,$$

которые после умножения на τ^2 совпадают с (7.5). Это показывает необходимость β). Наоборот, если (7.5) имеют место, то кривые $y^\alpha = \xi^\alpha t$ при $\xi^\alpha = \text{const}$ удовлетворяют уравнению (6.3), и следовательно, являются геодезическими с каноническим параметром t и проходят через начало координат, т. е. имеет место α).

Если в качестве канонического параметра для неизотропных геодезических взять длину дуги, а для изотропных какой-либо из канонических параметров, то

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = \varepsilon, \tag{7.7}$$

где $\varepsilon = \pm 1$ для неизотропных геодезических и 0 для изотропных, а $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ — метрический тензор в начале нормальной системы координат. Умножая (7.7) на s^2, получим:

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = \varepsilon s^2, \tag{7.8}$$

что выражает квадрат геодезического расстояния от начала координат при любом ε. Полагая здесь $s = \text{const}$, получим при $\varepsilon \neq 0$ уравнения *концентрических геодезических гиперсфер мнимого или действительного радиуса*.

$\varepsilon = 0$ отвечает гиперконус, образованный изотропными геодезическими. При $\varepsilon \neq 0$ можно дать критерий римановых координат, отличный от α) и β) ([188], стр. 540).

Римановы координаты являются геодезическими относительно своего начала.

В самом деле, поделив (7.5) на s^2 и относя полученное уравнение к началу координат, получим:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}\xi^{\beta}\xi^{\gamma}=0.$$

Так как ξ^{α} — произвольный вектор, то $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{(\beta\gamma)}=\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$, что и доказывает утверждение.

Компоненты метрического тензора $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ в начале римановой системы координат будут некоторыми постоянными, удовлетворяющими условию $|\overset{0}{g}_{\alpha\beta}|\neq 0$, и следовательно, всегда можно найти такое невырожденное вещественное линейное однородное преобразование с постоянными коэффициентами $y^{\alpha'}=C^{\alpha'}_{\beta}y^{\beta}$, в результате которого форма $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}dy^{\alpha}dy^{\beta}$ перейдет в форму

$$\sum_{\sigma=1}^{n} l_{\sigma}\,dy^{\sigma^2}, \tag{7.9}$$

где $l_{\sigma}=\pm 1$ в соответствии с *сигнатурой* квадратичной формы $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}dy^{\alpha}dy^{\beta}$. В результате такого преобразования риманова система координат перейдет снова в риманову систему координат с началом в той же точке, так как это преобразование оставляет α) в силе. Таким образом, специализированные римановы координаты называются *нормальными координатами* с началом в данной точке. Они были впервые введены Риманом [1], применены в теории относительности и теории пространств V_n, а затем обобщены для пространств аффинной связности рядом авторов ([75]; [79], стр. 551—560; [89], стр. 44—62; [105], стр. 1—72).

Если предположить, что в некоторой окрестности начала нормальной системы координат компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(y)$ суть аналитические функции, то можно определить $g_{\alpha\beta}$ в виде разложения по степеням y^{α}, причем коэффициенты этого ряда определяются тензором кривизны и его ковариантными производными, отнесенными к началу. Рассмотрим предварительно тензорное поле $W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(x)$, компоненты которого — аналитические функции в окрестности начала нормальной системы координат. Тогда

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\overset{0}{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}+\left(\frac{\partial W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^{\nu}}\right)_0 y^{\nu}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^{\mu}\,\partial y^{\nu}}\right)_0 y^{\mu}y^{\nu}+\ldots \tag{7.10}$$

Можно выбрать такую систему координат, относительно которой коэффициенты этого ряда выражаются через ковариантные производные $\overset{0}{W}$ и компоненты тензора кривизны и его ковариантные производные, вычисленные в начале координат. Определив такую систему, мы покажем затем, что она нормальная.

Формула преобразования объекта связности и ее следствия, полученные последовательным дифференцированием, дают серию соотношений:

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^{\nu}_{\alpha'} = A^{\sigma}_{\lambda'}A^{\tau}_{\mu'}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'}A^{\nu}_{\mu'},\\ &\partial_{\omega'}\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^{\nu}_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}\partial_{\omega'}A^{\nu}_{\alpha'} = \partial_{\omega'}A^{\sigma}_{\lambda'}A^{\tau}_{\mu'}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} +\\ &\qquad + A^{\sigma}_{\lambda'}\partial_{\omega'}A^{\tau}_{\mu'}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} + A^{\sigma}_{\lambda'}A^{\tau}_{\mu'}A^{\gamma}_{\omega'}\partial_{\gamma}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'\omega'}A^{\nu}_{\mu'},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Рассмотрим преобразование координат, определяемое формулами

$$x^{\nu} = \overset{0}{x}{}^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\dots\partial y^{\lambda_k}}\right)_0 y^{\lambda_1}\dots y^{\lambda_k}, \tag{7.12}$$

и выберем коэффициенты разложения (7.12) следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}}\right)_0 = \delta^{\nu}_{\lambda_1},\quad \left(\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\partial y^{\lambda_2}}\right)_0 = -\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda_1\lambda_2},\quad \left(\frac{\partial^3 x^{\nu}}{\partial y^{\lambda_1}\partial y^{\lambda_2}\partial y^{\lambda_3}}\right)_0 =$$

$$= 2\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\alpha(\lambda_2}\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda_1\lambda_3)} - \partial_{(\lambda_3}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda_1\lambda_2)},\ \dots; \tag{7.13}$$

тогда в силу (7.11)

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2} = 0,\quad \partial_{(\lambda'_3}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)} = 0,\ \dots,\ \partial_{(\lambda'_3\dots\lambda'_r}\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)} = 0. \tag{7.14}$$

Поставив себе задачей выражение коэффициентов ряда (7.10) до r-го порядка, можно в (7.14) ограничиться написанными условиями. Теперь, в новой системе координат, принимая во внимание (7.14), имеем из выражения для тензора кривизны (5.2) и его следствий, получаемых последовательным дифференцированием:

$$\left.\begin{aligned}&\{\partial_{(\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0 = \frac{1}{3}\overset{0}{R}{}^{\nu}_{(\alpha\beta)\mu},\\ &\{\partial_{(\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0 = -\frac{1}{2}\overset{0}{R}{}_{\mu(\gamma}{}^{\nu}{}_{\beta,\alpha)},\\ &\{\partial_{(\delta\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\}_0 = -\frac{3}{5}\left(\frac{2}{9}\overset{0}{R}{}_{(\alpha}{}^{\rho}{}_{\beta}{}^{\nu}\overset{0}{R}{}_{\delta}{}^{\omega}{}_{\gamma)\mu}\overset{0}{g}{}_{\rho\omega} + \overset{0}{R}{}_{\mu(\delta}{}^{\nu}{}_{\gamma,\alpha\beta)}\right);\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

так как введенная таким образом система координат геодезическая относительно начала, то, последовательно дифференцируя ковариантным образом тензор $W_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$, выражая частные производные через ковариантные и относя результат к началу, можно пренебречь теми слагаемыми, которые содержат объект $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Если же в выражении для некоторой производной появятся слагаемые, содержащие $\partial_{(\gamma \ldots \nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta)\delta}$, то их заменим по формулам (7.15).

Подставляя эти выражения в (7.10), получим для тензора W разложение в виде:

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} &= \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \mu} y^{\mu} + \\
&+ \frac{1}{2!}\left\{ \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \mu\omega} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} \overset{0}{R}{}^{\nu}_{\mu\alpha_k\omega} W_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1} \ldots \alpha_p} \right\} y^{\mu} y^{\omega} + \\
&+ \frac{1}{3!}\left\{ \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p, \mu\omega\sigma} - \sum_{k=1}^{p} \overset{0}{R}{}^{\nu}_{\mu\alpha_k\omega} \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1} \ldots \alpha_p, \sigma} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \overset{0}{R}{}^{\nu}_{\mu\alpha_k\omega, \sigma} \overset{0}{W}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1} \ldots \alpha_p} \right\} y^{\mu} y^{\omega} y^{\sigma} + \ldots, \qquad (7.16)
\end{aligned}
$$

и коэффициенты этого разложения могут быть вычислены как угодно далеко. Эта формула, интересная сама по себе, может быть приложена к любому тензору, заданному ковариантными компонентами.

Применяя ее, в частности, к метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$ и принимая во внимание, что все его ковариантные производные равны нулю, получим из (7.16):

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \overset{0}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\mu\beta\lambda} y^{\mu} y^{\lambda} - \frac{1}{3!}\overset{0}{R}_{\alpha\gamma\beta\lambda, \mu} y^{\lambda} y^{\mu} y^{\gamma} + \\
&+ \frac{1}{5!}\left\{ -6\overset{0}{R}_{\alpha\delta\beta\gamma, \lambda\mu} + \frac{16}{3}\overset{0}{R}_{\lambda\beta\mu}{}^{\rho}\overset{0}{R}_{\gamma\alpha\delta\rho} \right\} y^{\lambda} y^{\mu} y^{\gamma} y^{\delta} + \ldots \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

Покажем, что эта система координат нормальная. Ясно, что $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ можно считать равными $\delta^{\alpha}_{\beta} l_{\alpha}$, т. е. имеем форму вида (7.9), так как до введения этой системы можно предварительно произвести в V_n такое невырожденное линейное преобразование, которое в точке, предназначенной быть началом нормальной системы, приведет $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ к компонентам метрического тензора, определяющего форму (7.9). Свертывая (7.17) с y^{β}, получим:

$$
g_{\alpha\beta} y^{\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} y^{\beta}, \qquad (7.18)
$$

так как во всех остальных слагаемых, как нетрудно видеть, индекс β кососимметричен относительно хотя бы одного индекса суммирования λ, μ, ν, ... Дифференцируя (7.18) по y^γ, получим:

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\beta + g_{\gamma\alpha} = \overset{0}{g}_{\gamma\alpha};$$

отсюда получим два равенства, если свернуть с y^α и y^γ и учесть наличие (7.18):

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} y^\gamma y^\beta = 0. \tag{7.19}$$

Взяв первое уравнение с минусом и прибавив к нему два уравнения, получаемые из второго заменой индексов, получим: $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = 0$, что приводит к условию β), определяющему нормальную систему координат.

Формула (7.17) принимает особенно простой вид для того частного случая, когда ковариантная производная тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = 0$. Такие пространства V_n называются *симметрическими*, и для них имеет место теорема: *для симметрического V_n в нормальной системе координат*

$$g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+2}}{(2k+2)!} m_\alpha^{\sigma_1} m_{\sigma_1}^{\sigma_2} \ldots m_{\sigma_{k-1}\beta}, \tag{7.20}$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \overset{0}{R}_{\alpha\lambda\beta\mu} y^\lambda y^\mu, \tag{7.21}$$

а

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \pm 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

и $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — *компоненты тензора кривизны в начале нормальной системы координат.*

Доказательство (7.20) получается следующим образом. Структура формулы следует непосредственно из (7.17). Численные коэффициенты при m также совпадают для выписанных членов (7.17). Теперь нетрудно проверить, что полная индукция приводит к (7.20) при условии (7.21).

Нормальные координаты допускают физическое истолкование в общей теории относительности (Пирани [306]) и являются удобными во многих вопросах геометрии и физики.

Полугеодезические координаты. Такие координаты (их также иногда называют *координатами Гаусса*) являются обобщением полугеодезических координат на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Они определяются сетью однопараметрического семейства геодезических и семейства ортогональных траекторий ([174], стр. 185). В V_n эти координаты определяются семейством геодезических и семейством гиперповерхностей, ортогональных к этим геодезическим, но при неопределенной сигнатуре ds^2 возможен случай изотропных геодезических линий, что не имеет аналога в евклидовой геометрии.

Дадим предварительно определение поверхности в V_n; *m-мерной поверхностью* в V_n назовем множество точек, заданных уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m),$$

где u^i — *независимые* параметры, причем ранг матрицы $\left(\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$ равен m. Очевидно, что это условие инвариантно относительно любых невырожденных преобразований координат x^α в V_n. Условие о ранге предотвращает появление особых точек на поверхности и вырождение поверхности в геометрический образ меньшего числа измерений. Такое определение m-поверхности по существу *локально*; это определение «куска» поверхности. При $m = 1$ получим *кривую* пространства V_n, при $m = n - 1$ — *гиперповерхность* пространства V_n. Задавая на m-поверхности функции $u^i(t)$ некоторого класса C^r, будем говорить *о кривой соответствующего класса на этой m-поверхности*. Так как тем самым получается кривая пространства V_n, то ее касательный вектор

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt}. \tag{7.22}$$

Будем говорить о *пространственном векторе* $\dfrac{dx^\alpha}{dt}$ и векторе $\dfrac{du^i}{dt}$, *принадлежащем поверхности*, связанных соотношениями (7.22). Будем исследовать только такие точки кривой, в которых $\dfrac{du^i}{dt}$ не все одновременно равны нулю, когда понятие касательного вектора становится неопределенным. Тогда $\dfrac{dx^\alpha}{dt}$ также не все равны нулю в силу условия о ранге для m-поверхности. Для произвольных кривых на m-поверхности при произвольной параметризации получим, что векторы $\xi^i = \dfrac{du^i}{dt}$ произвольны. Тогда векторы

$$\xi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\xi^i \tag{7.23}$$

определят *линейную оболочку m линейно независимых векторов* $\underset{k}{u}{}^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Векторы ξ^α в совокупности определят *касательное m*-мерное пространство A_m в данной точке к m-поверхности.

Называя *координатной линией m*-поверхности линию, вдоль которой меняется только один из параметров u^i, получим, что m линейно независимых векторов $\underset{k}{u}^{\alpha}$ являются касательными векторами к координатным линиям m-поверхности. Таким образом, в каждой точке m-поверхности возникает свой *локальный m-репер*.

Рассмотрим дифференциал дуги при произвольном бесконечно малом смещении кривой на m-поверхности: $dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^i} du^i = \underset{i}{u}^{\alpha} du^i$. Тогда квадрат элемента длины этой кривой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta} = \overset{*}{g}_{ij}\, du^i\, du^j, \tag{7.24}$$

где

$$\overset{*}{g}_{ij}(u) = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial u^j} = g_{\alpha\beta} \underset{i}{u}^{\alpha} \underset{j}{u}^{\beta}, \qquad \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{g}_{ji} \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ m)$$

— скалярные произведения координатных векторов поверхности — определяют дифференциальную квадратичную форму на m-поверхности.

Если $|\overset{*}{g}_{ij}| \neq 0$, то m-поверхность *метризована* и на ней возникает риманово пространство V_m, в этом случае поверхность называется *неизотропной*. Если же $|\overset{*}{g}_{ij}| = 0$, то получаем *изотропные m-поверхности*, которые в теории относительности ($n = 4$, $m = 3$) получают важную физическую интерпретацию при изучении волновых процессов; такие поверхности могут иметь место только для V_n с неопределенной метрикой.

Вектор n^{α} пространства V_n назовем *нормальным* к m-поверхности, если он ортогонален ко всем m координатным векторам $\underset{k}{u}^{\alpha}$ ($k = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, \ldots, n$):

$$g_{\alpha\beta} n^{\alpha} \underset{k}{u}^{\beta} = 0 \qquad (k = 1,\ \ldots,\ m); \tag{7.25}$$

так как ранги матриц $(g_{\alpha\beta})$ и $(\underset{k}{u}^{\beta})$ равны соответственно n и m, то ранг матрицы $(g_{\alpha\beta} \underset{k}{u}^{\beta})$ равен m и система однородных, относительно неизвестных n^{α}, уравнений (7.25) имеет $n - m$ линейно независимых решений: *в каждой точке V_n существует $n - m$ независимых векторов, нормальных к V_m*.

Рассмотрим случай *изотропных гиперповерхностей*, для характеристики которых основное значение имеет следующая теорема: *нормаль к гиперповерхности изотропна тогда и только тогда, когда гиперповерхность изотропна*.

Из (7.24) видно, что, как это следует из теории определителей (Ковалевский [27], стр. 77),

$$\overset{*}{g} = |\overset{*}{g}_{ij}| = \sum_{n} \underset{nn}{\Delta\omega},$$

где $\underset{n}{\Delta}$ и $\underset{n}{\omega}$—соответствующие определители m-го порядка двух матриц $\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right)$ и $\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\right)$. С другой стороны, (7.25) и уравнение $n_\beta u^\beta_k = 0$, которое следует из (7.25), показывают, что $\underset{n}{\Delta}$ и $\underset{n}{\omega}$ пропорциональны n^α и n_α, и следовательно, обозначая через k_1, k_2 множители пропорциональности, отличные от нуля, получим:

$$\overset{*}{g} = k_1 k_2 n_\alpha n^\alpha.$$

Если поверхность изотропна, то $\overset{*}{g} = 0$ и вектор нормали изотропен; обратное утверждение также имеет место.

Введем теперь *полугеодезическую систему координат*, положив в основу такой конструкции *неизотропную* гиперповерхность $\varphi(x^\alpha) = 0$, которой отвечает в каждой точке, в некоторой области, неизотропная нормаль:

$$\Delta_1\varphi = g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} = n_\alpha n^\alpha \neq 0.$$

Проведя через каждую точку гиперповерхности в направлении нормали геодезическую, которая также будет неизотропной в силу (6.4), определим новую систему координат следующим образом. Потребуем, чтобы уравнение гиперповерхности имело вид $x^1 = 0$, геодезические были бы координатными линиями x^1, причем x^1 равно длине дуги, отсчитываемой в заданном направлении от гиперповерхности $x^1 = 0$, если нормаль имеет норму > 0, и $x^1 = is$, если норма нормали < 0. Тогда, вычисляя выражение линейного элемента для бесконечно малого смещения вдоль геодезической линии x^1, получим $ds^2 = g_{11}dx^{1^2}$ и, следовательно, $g_{11} = l = \pm 1$ в зависимости от знака нормы нормального вектора.

Полагая в уравнениях геодезических (6.3) $\tau = x^1 = s$ или is, получим: $\partial_1 g_{1\alpha} = 0$, т. е. $g_{1\alpha}$ не зависит от x^1. Но $g_{1\alpha} = 0$ при $x^1 = 0$, следовательно, это имеет место при любом x^1. Вследствие этого *метрика в полугеодезической* системе координат запишется в виде:

$$ds^2 = l\,dx^{1^2} + g_{ij}\,dx^i dx^j \qquad (i,\ j = 2,\ \ldots,\ n) \quad l = \pm 1. \quad (7.26)$$

Отсюда следует, что, полагая $x^1 = c$, мы получим гиперповерхности, опять-таки ортогональные к геодезическим x^1; эти поверхности называются *геодезически параллельными* гиперповерхности $x^1 = 0$.

Полугеодезические координаты допускают физическую интерпретацию в теории относительности (Ландау и Лифшиц [173], стр. 301; Керес [286], стр. 12—25) и применяются при различных исследованиях. Эту систему координат можно сконструировать даже в том случае, если гиперповерхность вырождается в m-поверхность, $m < n-1$. Тогда в каждой точке m-поверхности геодезические проводятся в направлении $n-m$ нормалей к m-поверхности и, следовательно, опять-таки будут зависеть от $n-m-1$ параметров, как и выше; откладывая на них отрезки равной длины, получим гиперповерхности, геодезически параллельные m-поверхности. В частности, полагая $m=0$, полугеодезическую систему координат можно построить, отправляясь от точки; геодезически параллельными гиперповерхностями здесь будут геодезические гиперсферы с центром в данной точке; эта конструкция определит полугеодезическую систему координат в области, заключенной в некотором гиперконусе и не включающей данную точку.

Предположим теперь, что исходная гиперповерхность $f(x^\alpha)=0$ *изотропная* и, следовательно, нормали к ней также изотропны. Тогда $\Delta_1 f=0$ и, следовательно, гиперповерхности $f(x^\alpha)=\text{const}$ также будут изотропными, как и их нормали. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\Delta_1(f,\varphi)=g^{\alpha\beta}f_{,\alpha}\varphi_{,\beta}=0$. Эта система имеет $n-1$ независимых решений (Степанов [115], стр. 295), которые обозначим $\varphi^i(x^\alpha)$ $(i=2,\ldots,n)$. Введем новую систему координат при помощи формул преобразования

$$x^{1'}=\psi(x^\alpha),\quad x^{2'}=\varphi^2(x^\alpha),\ \ldots,\ x^{n'}=\varphi^n(x^\alpha)\equiv f(x^\alpha),$$

где ψ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $\dfrac{D(\psi,\varphi^2,\ldots,\varphi^n)}{D(x^1,\ldots,x^n)}\neq 0$. В этой системе координат

$$g^{2'n'}=g^{3'n'}=\ldots=g^{n'n'}=0,\quad g^{1'n'}=g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}f_{,\beta},$$

причем $g^{1'n'}\neq 0$, так как ψ функционально независимо от f и φ^k $(k<n)$ и не может быть решением уравнения $\Delta_1(f,\psi)=0$. Всегда можно подобрать $\psi(x^\alpha)$ так, чтобы $g^{1'n'}=1$. Отсюда следует, что $g_{1'i'}=0$ $(i=1,\ldots,n-1)$, $g_{1'n'}=1$, и метрика пространства может быть представлена в виде:

$$ds^2=2\,dx^1\,dx^n+g_{ij}(x^\alpha)\,dx^i\,dx^j \tag{7.27}$$
$$(i,\ j=2,\ \ldots,\ n;\ \alpha=1,\ \ldots,\ n).$$

Геометрическое истолкование этой системы также может быть связано с геодезическими линиями: оно не является таким простым, как для неизотропных гиперповерхностей. Эту систему назовем *изотропной полугеодезической системой координат*, и она может быть введена только для V_n с неопределенной метрикой.

Такого рода система координат особенно удобна при исследовании V_4, допускающих группу движений, действующую на изотропных трехмерных многообразиях (см. гл. IV, V), и она допускает также физическую интерпретацию в общей теории относительности.

Гармонические координаты. Эта система координат реализует теорему Римана при помощи координатных условий

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_{\beta'}\left(\sqrt{-g'}\,g^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}\right)x^{\sigma'} \equiv \Box\, x^{\sigma'} = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, n), \quad (7.28)$$

где $\Box$ — *обобщенный оператор Даламбера*. Таким образом, для определения гармонических координат x^α необходимо в данной системе рассмотреть уравнение

$$\Box\,\varphi = 0,$$

и если n его независимых решений обозначить $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$, то искомое преобразование будет иметь вид:

$$x^{\alpha'} = \varphi^\alpha(x^\sigma).$$

Выбор n функций φ^α можно еще уточнить некоторыми условиями типа неравенств, и тогда система координат определяется с точностью до линейных преобразований Лоренца. Эта система координат, введенная в работах Дондера [61] и Ланцоса [77], получила физическую интерпретацию и приложение в теории относительности, в работах Фока и его сотрудников (см. В. А. Фок [126], [254], Н. М. Петрова [184]). Дискуссия о физической значимости этой системы координат, как системы привилегированной, отражена в работах [217], [218], [231], [255], [274], [275], [286], [320]. Примером гармонической системы может служить декартова система в плоских пространствах. Ее основное преимущество выражается в том, что уравнения поля тяготения в этой системе отнесения принимают удобную для исследования форму (см. гл. II).

Неголономные координаты. Рассмотрим некоторую систему координат в V_n, например одну из введенных выше. В любой точке пространства V_n определим *координатные гиперповерхности* с уравнениями $x^\alpha = \mathrm{const}$ *и координатные линии*, как линии, вдоль которых все координаты x^α, кроме одной, постоянны. Рассмотрим координатную линию, вдоль которой меняется x^α, где α — фиксированный индекс. Можно считать, что вдоль этой кривой x^α является параметром, и поэтому касательный к координатной линии вектор с контравариантными компонентами $\underset{\alpha}{l}{}^\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ (α — номер вектора) определится в виде:

$$\underset{\alpha}{l}{}^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\alpha} = \delta^\sigma_\alpha. \qquad (7.29)$$

Таким образом в каждой точке определяется n *независимых координатных* векторов $\underset{\alpha}{l}{}^\sigma$. Для всякой системы n независимых векторов можно построить *однозначно* систему независимых *взаимных* векторов $\overset{\alpha}{l}_\sigma$ (α — номер, σ $(=1, \ldots, n)$ — ковариантный индекс), и в данном случае в силу (7.29) взаимная система будет иметь вид:

$$\overset{\alpha}{l}_\sigma = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\sigma} = \delta^\alpha_\sigma,$$

и следовательно,

$$\partial_{[\gamma}\overset{\alpha}{l}_{\sigma]} = 0,$$

т. е. *система взаимных к координатным векторов будет системой градиентных векторов.*

Наоборот, если мы выделим систему функционально независимых скалярных полей $\overset{\sigma}{\varphi}$, то им отвечают n градиентных векторных полей $\overset{\sigma}{\varphi}_{,\alpha}$, которые можно рассматривать как поля координатных векторов, заданные своими ковариантными составляющими в новой системе координат, которая определяется преобразованием координат

$$x^{\alpha'} = \overset{\alpha}{\varphi}(x^\sigma). \tag{7.30}$$

Если поле u_α не градиентное ($\partial_{[\gamma}u_{\alpha]} \neq 0$), но *градиентное с точностью до скалярного множителя*: $u_\alpha = \omega(x^\alpha)\, v_\alpha$, где $\partial_{(\gamma}v_{\alpha)} = 0$, то такому полю также отвечает возможность быть выбранным, после деления на скаляр, в качестве координатного. Как известно ([125], стр. 74), для существования такого поля необходимо и достаточно, чтобы

$$u_{[\alpha}\partial_\beta u_{\gamma]} = 0. \tag{7.31}$$

В том случае, когда координатными векторами являются поля градиентных векторов, будем говорить, что система координат *голономная*. Все рассмотренные выше системы координат являются голономными.

Однако очень часто представляется желательным ввести в каждой точке пространства V_n в качестве координатных векторы $\overset{\sigma}{v}_\alpha$, которые от точки к точке образуют векторные поля с компонентами некоторого класса C^r, но *неградиентные*: $\partial_{[\gamma}\overset{\sigma}{v}_{\alpha]} \neq 0$. Эти векторы в каждой точке V_n образуют *неголономный репер* из n независимых векторов и, следовательно, определяют систему координат, но, однако, для *области, не сводящейся к точке*, исходя из заданных полей $\overset{\sigma}{v}_\alpha$, нельзя определить преобразование (7.30). Такую систему координат назовем *неголономной*. Примером введения неголономной системы отнесения может служить следующая задача: исследуется симметрический тензор $h_{\alpha\beta}$, собственные векторы которого взаимно ортогональны; если эти векторы выбрать за координатные, то $h_{\alpha\beta}$ принимает особенно простой вид, но система координат от точки к точке будет неголономной. Здесь мы имеем пример *неголономной ортогональной системы координат* в V_n, тогда как *голономной* ортогональной системы координат в V_n (при $n>3$) вообще не существует.

Предположим, что дана некоторая голономная система координат $\{x^\alpha\}$. Рассмотрим величины

$$\Omega^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=A^{\sigma}_{\beta'}A^{\tau}_{\gamma'}\partial_{[\sigma}\overset{\alpha'}{l}_{\tau]}. \tag{7.32}$$

Тогда *система координат*, образованная векторными полями $\overset{\alpha'}{l}_\tau$, *будет голономной в том и только в том случае, если все компоненты* $\Omega^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=0$. Легко убедиться, проверяя закон преобразования для Ω, что это — объект. Его принято называть *объектом неголономности* (Схоутен и Ван Данциг [99], стр. 646). Каждая неголономная система координат определяется на базе некоторой голономной системы. В то время как для геометрического объекта, отличного от нуля, возможно обращение в нуль в некоторой системе отнесения, для тензоров этого быть не может, и ввиду этого при пользовании неголономными координатами является основным следующий очевидный факт: если тензор равен нулю относительно некоторого неголономного репера, построенного в каждой точке области V_n, то он равен нулю в любой системе координат в этой области; обратное утверждение также имеет место.

Задачи

1. Если в некоторой системе координат метрика пространства V_n имеет вид

$$ds^2=l\,dx^{1^2}+g_{ij}(x^\alpha)\,dx^i\,dx^j$$
$$(l=\pm 1;\ i,j=2,\ldots,n;\ \alpha=1,\ldots,n),$$

то линии x^1 — геодезические, ортогонально пересекающие гиперповерхности $x^1=c$, которые геодезически параллельны $x^1=0$.

2. Как связаны между собой римановы координаты с началом в точке P и полугеодезические координаты с геодезическими параллельными концентрическими гиперсферами с центром в той же точке?

3. Показать, что в нормальной системе координат

$$g=|g_{\alpha\beta}|=\pm 1+\frac{1}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta+\frac{1}{3!}\overset{0}{R}_{\alpha\beta,\,\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma+$$
$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{4}{3}\overset{0}{R}_{\alpha\beta}\overset{0}{R}_{\gamma\delta}+\frac{4}{15}\overset{0}{R}_{\alpha\rho\beta}{}^{\lambda}\overset{0}{R}_{\gamma\lambda\delta}{}^{\rho}+\frac{6}{5}\overset{0}{R}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}\right)y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta+\ldots$$

и, следовательно, если тензор Риччи $R_{\alpha\beta}=0$, то

$$g=\pm 1-\frac{1}{90}\overset{0}{R}_{\alpha\lambda\beta}{}^{\mu}\overset{0}{R}_{\gamma\mu\delta}{}^{\lambda}y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta+\ldots,$$

т. е. в этом случае в окрестности начала нормальной системы координат, с точностью до бесконечно малых четвертого порядка,

$$g = \pm 1.$$

4. Нормальная система координат с фиксированным началом определяется с точностью до линейных преобразований с постоянными коэффициентами, оставляющих инвариантной форму $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ (преобразования Лоренца при $n = 4$ и сигнатуре типа $---+$).

5. Показать, что в V_3 всегда можно ввести *триортогональную* систему координат, относительно которой $ds^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha\alpha}\,(dx^\alpha)^2$, где $g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}(x^1, x^2, x^3)$ (Коттон [13], стр. 385—438).

6. Показать, что в V_n можно определить такую систему координат, относительно которой $g = \pm 1$ в некоторой области, не сводящейся к точке. В этой системе дивергенция вектора записывается так же, как и в векторном анализе обыкновенного R_3.

7. Для триортогональной системы в V_3

$$R_{ij} = \frac{1}{g_{kk}} R_{ikjk}, \quad R_{ii} = \frac{1}{g_{jj}} R_{ijij} + \frac{1}{g_{kk}} R_{ikik} \ (ij,\ k \neq),$$

$$R = \sum_{ij} \frac{1}{g_{ii} g_{jj}} R_{ijij}.$$

8. Тензор кривизны всякого V_3 (см. задачу 3 § 5)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} L_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} L_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta} L_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma} L_{\alpha\delta},$$

где $L_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}$.

9. Если $R_{\alpha\beta} = 0$ в V_4 и существует такое подпространство V_3, нормаль к которому неизотропна, и

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$$

на V_3, то $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ в V_4 [333].

§ 8. Риманова кривизна V_n. Пространства постоянной кривизны

Простейшее истолкование тензора кривизны в пространстве V_n получается в случае *обыкновенного* V_2 — поверхности, погруженной в евклидово трехмерное пространство.

Если $n = 2$, то тензор кривизны имеет только одну существенную компоненту, поэтому можно положить:

$$R_{1212} = K\,(g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}) = K\varphi_1.$$

Внутренняя геометрия поверхности определяет V_2 с определенно-положительной метрикой. Если задать эту поверхность уравнением $z = f(x, y)$, поместить начало пространственных координат в касательной плоскости к этой поверхности, полагая $x = x^1$, $y = x^2$, то

$$ds^2 = (1 + p^2)\, dx^{1^2} + 2pq\, dx^1\, dx^2 + (1 + q^2)\, dx^{2^2}$$

и $p_0 = q_0 = 0$. Следовательно, символы Кристоффеля в начале все равны нулю и $\overset{0}{R}_{1212} = rt - s^2 = \varphi_2$. Отсюда следует, что $K = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ — *гауссова кривизна поверхности*, а φ_1, φ_2 — дискриминанты первой и второй форм поверхности ([174], стр. 148).

В случае $n > 2$ такого рода интерпретация возможна, если ее связать с некоторым двумерным направлением в V_n. Введем в V_n нормальную систему координат. Возьмем в начале координат два вектора $\underset{1}{i}^\alpha$ и $\underset{2}{i}^\alpha$, образуем линейную оболочку, натянутую на эти векторы, и проведем в направлении каждого вектора этой двумерной плоскости геодезические; их совокупность определит двумерную *поверхность, геодезическую в начале координат*.

Уравнение этой поверхности будет:

$$y^\alpha = u^1 \underset{1}{i}^\alpha + u^2 \underset{2}{i}^\alpha, \tag{8.1}$$

где $u^a = \underset{a}{k}\tau$, а τ — канонический параметр, который в случае неизотропной геодезической можно выбрать равным дуге. Из (8.1) следует, что

$$dy^\alpha = \underset{a}{i}^\alpha du^a \qquad (a = 1, 2),$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta = \overset{*}{g}_{ab}\, du^a\, du^b, \quad \overset{*}{g}_{ab} = g_{\alpha\beta} \underset{a}{i}^\alpha \underset{b}{i}^\beta, \tag{8.2}$$

где, таким образом, $\overset{*}{g}_{ab}$ — метрический тензор поверхности, геодезической в точке. Рассмотрим тот случай, когда двумерная поверхность неизотропная ($|\overset{*}{g}_{ab}| \neq 0$) и, следовательно, образует V_2. Так как система координат нормальная, т. е.

$$(\partial_c \overset{*}{g}_{ab})_0 = \left(\partial_\gamma g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial u^c} \underset{a}{i}^\alpha \underset{b}{i}^\beta\right)_0 = 0,$$

то $(\overset{*}{\Gamma}_{a,\,bc})_0 = 0$ и единственная существенная компонента тензора кривизны V_2

$$(\overset{*}{R}_{1212})_0 = \{\partial_1 \overset{*}{\Gamma}_{1,\,22} - \partial_2 \overset{*}{\Gamma}_{1,\,12}\}_0.$$

Символы Кристоффеля в пространстве V_2: $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} \underset{a}{i}^\alpha \underset{b}{i}^\beta \underset{c}{i}^\gamma = \overset{*}{\Gamma}_{a,\,bc}$, и поэтому тензор кривизны

$$(\overset{*}{R}_{1212})_0 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{1}{i}^\alpha \underset{2}{i}^\beta \underset{1}{i}^\gamma \underset{2}{i}^\delta$$

и, как для всякого V_2, равняется, с другой стороны,

$$K\overset{*}{g} = K(\overset{*}{g}_{11}\overset{*}{g}_{22} - \overset{*}{g}{}^2_{12}) = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \underset{1}{i}^\alpha \underset{2}{i}^\beta \underset{1}{i}^\gamma \underset{2}{i}^\delta.$$

Таким образом,

$$K=\frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta}\underset{1}{i^\gamma}\underset{2}{i^\delta}}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\underset{1}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta}\underset{1}{i^\gamma}\underset{2}{i^\delta}}, \tag{8.3}$$

где $\underset{1}{i^\alpha}$, $\underset{2}{i^\alpha}$ — любые два вектора, определяющие двумерную плоскость.

Величину K называют *римановой кривизной пространства* V_n *в двумерном направлении* $\{\underset{1}{i^\alpha}\underset{2}{i^\alpha}\}$; если V_2 обыкновенное, то K *будет гауссовой кривизной геодезической в данной точке поверхности пространства* V_n. Если двумерная поверхность изотропна, то знаменатель в (8.3) обращается в нуль, и такое истолкование теряет смысл. Однако и в этом случае (см. гл. III) можно, предполагая, что $K(x^\alpha)$ — непрерывная функция, дать истолкование K.

Для обыкновенных V_n формула (8.3) всегда имеет смысл.

K в (8.3) является однородной функцией нулевого измерения от *бивектора* $\underset{[1}{i^\alpha}\underset{2]}{i^\beta}$, определяющего двумерную плоскость, и меняется при изменении этого бивектора. $V_n (n>2)$ называется *пространством постоянной кривизны*, если K не зависит от выбора двумерной плоскости. Обозначим:

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}-K\begin{vmatrix} g_{\alpha\gamma} & g_{\alpha\delta}\\ g_{\beta\gamma} & g_{\beta\delta}\end{vmatrix}.$$

Из (8.3) получим

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{2}{i^\beta}\underset{1}{i^\gamma}\underset{2}{i^\delta}=0$$

при любом выборе векторов $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}$. Это означает, что

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}+S_{\gamma\beta\alpha\delta}+S_{\alpha\delta\gamma\beta}+S_{\gamma\delta\alpha\beta}=0.$$

Так как, кроме того, для тензора S имеют место свойства (α), (β), (γ) тензора кривизны, то $S_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ (см. задачу 5 § 2) *и необходимое и достаточное условие того, чтобы* $V_n (n>2)$ *было пространством постоянной кривизны, имеет вид*:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K\begin{vmatrix} g_{\alpha\gamma} & g_{\alpha\delta}\\ g_{\beta\gamma} & g_{\beta\delta}\end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Это условие оказывается настолько жестким, что оно определяет K как функцию точки, а не направления бивектора, как это делалось только что: *риманова кривизна пространства, постоянной кривизны постоянна* (*при* $n>2$) (Шур [5], стр. 563). В самом деле, из (8.4) следует, что

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}=K_{,\lambda}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}),$$

и, применяя тождество Бианки, свернутое по индексам β и γ, получим:

$$(n-2)(g_{\alpha\lambda}K_{,\delta}-g_{\alpha\delta}K_{,\lambda})=0.$$

Если $n>2$, то, свертывая по индексам α и λ, получаем $(n-1)K_{,\delta}=0$, т. е. $K=\mathrm{const}$. Если же $n=2$, то V_2 только тогда будет пространством постоянной кривизны, когда $K=\mathrm{const}$, условие же (8.4) всегда выполняется в этом случае. Из (8.4) следует, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и K обращаются в нуль одновременно, и поэтому всякое плоское пространство представляет собой пространство нулевой римановой кривизны. При $K<0$ приходим к геометрии, обобщающей геометрию Лобачевского — Бояи, а $K>0$ отвечает геометрии, аналогичной геометрии сферы. *Пространства постоянной кривизны* будем обозначать символом S_n при любой сигнатуре метрической формы.

Будем говорить, что два n-мерных римановых пространства *изометричны*, если существует такое невырожденное вещественное преобразование, которое преобразует метрику одного V_n в метрику другого. Для S_n имеет место теорема: *два S_n с равными римановыми кривизнами и одинаковыми сигнатурами метрик изометричны*. Всякое S_n есть симметрическое V_n, следовательно, если в таком S_n задать нормальную систему координат, то согласно (7.20) его метрика полностью определяется значениями компонент тензора кривизны в начале координат: $\overset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Но из (8.4) следует, что для орторепера тензор кривизны $\underset{0}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ будет зависеть только от K и сигнатуры метрики. Следовательно, при совпадении сигнатур и кривизны K пространства S_n изометричны.

Отсюда как следствие получаем, что если нам удастся найти хотя бы одну метрику, удовлетворяющую (8.4), с произвольной сигнатурой и кривизной K, то это будет общее выражение метрики любого S_n в специальной системе координат. Попытаемся определить такую метрику, предположив, что она лишь скалярным множителем отличается от метрики плоского пространства (*конформно-плоские* V_n):

$$ds^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha\,dx^{\alpha^2},\quad \sigma=\sigma(x^\alpha),\quad e_\alpha=\pm 1,\quad n>2,\qquad (8.5)$$

и, таким образом, $g_{\alpha\alpha}=\frac{e_\alpha}{\sigma^2}$, $g_{\alpha\beta}=0$ $(\alpha\neq\beta)$. Вычисляя компоненты тензора кривизны по формулам (5.7) и записывая условия (8.4), получим систему уравнений

$$\partial_{\alpha\beta}\sigma=0,\quad \sigma\{e_\alpha\partial_{\beta\beta}\sigma+e_\beta\partial_{\alpha\alpha}\sigma\}=e_\alpha e_\beta\Big\{K+\sum_\tau e_\tau(\partial_\tau\sigma)^2\Big\},\qquad \alpha\neq\beta.$$

Этой системе удовлетворяет

$$\sigma = 1 + \frac{K}{4} \sum_{\sigma} e_{\sigma} x^{\sigma^2}; \tag{8.6}$$

так как сигнатура (8.5) при условии (8.6) произвольна так же, как и кривизна K, то (8.5) *при условии* (8.6) — *метрика произвольного* S_n. Из (8.5) следует, что *всякое* S_n — *конформно-плоское пространство* V_n.

Задачи

1. Если V_n допускает векторное поле φ_α, удовлетворяющее условию

$$\varphi_{\alpha,\,\beta} = \rho g_{\alpha\beta}$$

и $\rho \neq 0$, то оно допускает такую систему координат, в которой

$$ds^2 = g_{11}\, dx^{1^2} + \frac{1}{g_{11}} \tilde{g}_{pq} (x^2, \ldots, x^n)\, dx^p\, dx^q,$$

где

$$g_{11} = \frac{1}{2 \int \rho (x^1)\, dx^1 + C},$$

а ρ, $\tilde{g}_{pq}$ $(p, q \neq 1)$ — произвольные функции своих аргументов (Н. С. Синюков [292]).

2. Если пространство задачи 1 (при $n > 2$) симметрическое ($R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda} = 0$), то оно является пространством постоянной кривизны.

3. Если риманово пространство V_n с символом Кристоффеля Γ^k_{ij} допускает точечное отображение на V_n с символом Кристоффеля $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$, при котором геодезические отобразятся в геодезические, то в общих по отображению координатах

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i \psi_j + \delta^k_j \psi_i,$$

$$\tilde{R}^p_{ijk} = R^p_{ijk} + \delta^p_k \psi_{ij} - \delta^p_j \psi_{ik},$$

где ψ_i — градиент, $\psi_{ij} = \psi_{i,\,j} - \psi_i \psi_j$.

4. Если V_n (при $n > 2$ и $\psi_i \neq 0$) допускает геодезическое отображение на симметрические $\tilde{V}_n$, то оно является пространством постоянной кривизны (Н. С. Синюков [292]).

§ 9. Теорема о главных осях тензора

Нам потребуется в дальнейшем решение вопроса о приведении пары квадратичных форм с произвольными сигнатурами к каноническому виду *над полем вещественных чисел* в предположении, что одна из этих форм не вырождается. В книгах по линейной алгебре этот вопрос, как правило, обходится; авторы ограничиваются изложением приведения к каноническому виду одной формы и пары форм в случае, если невырожденная форма определенно-положительная, или же занимаются приведением пар форм *над полем комплексных чисел*, когда вопрос значительно упрощается. Общее решение поставленного вопроса дано впервые Диксоном ([31], 357—358). Относительно этого решения можно заметить, что применяемый им метод является довольно громоздким, а получаемые в результате канонические формы не являются простейшими: можно указать для них более симметричный вид при любом n — числе измерений пространств. Так как, кроме того, можно дать решение вопроса на чисто геометрическом пути и для дальнейшего будут полезны именно геометрические факты, то в этом параграфе будет дано решение этого вопроса (А. З. Петров [185], 37—51).

Если в R_n с *определенным* метрическим тензором g_{ij} задан *вещественный* тензор a_{ij}, то *теорема о главных осях тензора* утверждает ([125], 27), как известно, что можно определить r взаимно ортогональных векторов $\underset{\sigma}{\lambda}{}^i$ $(\sigma = 1, \ldots, r)$, которые будут главными осями тензора a_{ij}, причем $a_{ij} = \sum_{\sigma=1}^{r} \underset{\sigma}{\alpha} \underset{\sigma}{\lambda}_i \underset{\sigma}{\lambda}_j$, где $\underset{\sigma}{\alpha}$ — инварианты и r — ранг a_{ij}. Эта теорема является следствием теории элементарных делителей (П. Мут [14], 118—125; Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн [141], 48—50), из которой следует также, что главные оси определяются однозначно в том и только в том случае, если отличные от нуля корни характеристического уравнения $|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ будут простыми. Корню кратности p отвечает p-мерная плоскость, в которой любые p взаимно ортогональных векторов определяют систему p главных осей тензора a_{ij}. Таким образом, матрицы тензоров g_{ij}, a_{ij} $(|g_{ij}| \neq 0)$ одновременно приводятся к диагональному виду.

При *неопределенном* g_{ij} такая теорема не имеет места. Причина этого кроется в том, что элементарные делители λ-матрицы $A = (a_{ij} - \lambda g_{ij})$ могут быть не простыми, а корни соответствующего характеристического уравнения — комплексными. Если задачу поставить над полем комплексных чисел, то две пары тензоров $\{a_{ij}, g_{ij}\}$ и $\{\overset{*}{a}_{ij}, \overset{*}{g}_{ij}\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда элементарные делители матриц одинаковы (М. Бохер [100], 274—275), и, основываясь на результатах Вейерштрасса по теории элементарных делителей, канонические формы g_{ij} и a_{ij} всегда можно определить, и притом неоднозначно. Если же ограничиваться вещественными составляющими g_{ij} и a_{ij} и коэффициентами допустимых линейных преобразований, то эти пары матриц могут быть не эквивалентными, хотя бы они и имели одинаковые элементарные делители. В дальнейшем нам понадобится приведение пары тензоров к каноническому виду именно *на вещественном пути*.

Рассмотрим в R_n две формы: $\varphi = g_{ij}x^i x^j$ и $\psi = a_{ij}x^i x^j$ с постоянными вещественными коэффициентами и $|g_{ij}| \neq 0$. Для определения *собственных* векторов a_{ij} (главные оси a_{ij}), определяемых уравнениями $(a_{ij} - \lambda g_{ij})\lambda^j = 0$, необходимо исследовать корни уравнения $|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$ и элементарные делители матрицы $(a_{ij} - \lambda g_{ij})$. Для неопределенного g_{ij} корни могут быть комплексными, а элементарные делители *не простыми* (П. А. Широков [102], 43—54).

Если вещественное линейное преобразование $A = g^{-1}T = (T^i_j)$, где $G = (g_{ij})$ и $T = (a_{kj})$, то на основании теоремы Гамильтона — Кели (П. А. Широков [102], 174—179; Ф. Клейн [124], 378—387), пользуясь только вещественными преобразованиями, можно ввести новые координаты $\overset{*}{x}{}^i$ так, что каждая из форм φ и ψ распадается на сумму k форм: $\varphi = \sum\limits_1^k \varphi_i$, $\psi = \sum\limits_1^k \psi_i$, где φ_i и ψ_i содержат только переменные $\overset{*}{x}{}^j$ $(j = j_1, \ldots, j_i)$, и если обозначить через $\overset{*}{G}_s$ и $\overset{*}{T}_s$ матрицы форм φ_s и ψ_s соответственно, то характеристическое уравнение линейного преобразования $\overset{*}{A}_s = \overset{*}{G}{}_s^{-1}\overset{*}{T}_s$ будет иметь вид $(\lambda - \underset{s}{\lambda})^{n_s} = 0$.

Иными словами, можно выбрать новые координатные векторы $\underset{p}{\overset{*}{\lambda}}{}^i = c^q_p \underset{q}{\lambda}{}^i$ так, что

$$\overset{*}{G} = \begin{pmatrix} \overset{*}{G}_{n_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \; \overset{*}{G}_{n_k} \end{pmatrix}, \quad \overset{*}{T} = \begin{pmatrix} \overset{*}{T}_{n_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \; \overset{*}{T}_{n_k} \end{pmatrix},$$

$$\overset{*}{A} = \begin{pmatrix} \overset{*}{A}_{n_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \; \overset{*}{A}_{n_k} \end{pmatrix},$$

где $\overset{*}{G}_{n_i}$, $\overset{*}{T}_{n_i}$, $\overset{*}{A}_{n_i}$ — квадратные матрицы, имеющие n_i строк. Таким образом,

$$\overset{*}{a}_{ij} = \overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{a}{}^i_j = 0, \tag{9.1}$$

если индексы i, j отвечают двум различным матрицам, стоящим по главной диагонали, а координатные векторы разбиваются на k *взаимно ортогональных пучков*. Преобразования векторов *внутри* пучка назовем *внутренними*. Тогда при любом внутреннем преобразовании условия (9.1) имеют место.

Рассмотрим случай *вещественных корней*. Пользуясь только вещественными внутренними преобразованиями, приведем матрицы $\overset{*}{A}_{n_i}$ к жордановой форме (П. А. Широков [102], 180—185):

$$\overset{*}{A}_{n_i}=\begin{pmatrix} B_{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{s_l} \end{pmatrix}, \quad \sum_{l=1}^{l} s_l = n_i, \quad B_{s_l}=\begin{vmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{vmatrix}; \quad (9.2)$$

далее везде знак «*» опускаем.

Теперь можно определить матрицы G_{n_i} и T_{n_i}. Не уменьшая общности, можно предположить, что A_{n_i} находится в левом верхнем углу матрицы A и содержит только две подматрицы вида B_{s_l}. Это означает, что характеристическому уравнению $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}=0$ отвечают два инвариантных пучка числа измерений m_1 и m_2, где $m_1+m_2=n_1$, $m_1<m_2$.

Для матрицы A_{n_1} получим:

$$a^i_j \underset{h}{\lambda^j} = \lambda_1 \underset{h}{\lambda^i} + \underset{h}{\Delta} \underset{h-1}{\lambda^i} \qquad (h=1, \ldots, h_i;\ i,\ j=1, \ldots, n), \quad (9.3)$$

где $\underset{h}{\Delta}=0$ для $h=1,\ m_1+1$ и $\underset{h}{\Delta}=1$ в противном случае. Так как $\underset{h}{\lambda^i}=\delta^i_h$, то $a_{ij}=\lambda_1 g_{ij}+\underset{j}{\Delta} g_{i,\,j-1}$. Используя симметрию тензоров g_{ij} и a_{ij}, получим $\underset{i}{\Delta} g_{j,\,i-1}=\underset{j}{\Delta} g_{i,\,j-1}$. Следовательно,

$$G_{n_i}=\left|\begin{array}{cccc|cccc} & & & \alpha_1 & & & & \gamma_1 \\ & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \vdots & & \cdot & & \vdots \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \alpha_1 & \ldots & \ldots & \alpha_{m_1} & \gamma_1 & \ldots & \ldots & \gamma_{m_1} \\ \hline & & & \gamma_1 & & & & \beta_1 \\ & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \vdots & & \cdot & & \vdots \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \gamma_1 & \ldots & \ldots & \gamma_{m_1} & \beta_1 & \ldots & \ldots & \beta_{m_2} \end{array}\right|.$$

В каждом элементарном пучке, отвечающем элементарной ячейке Жордана, можно производить любые преобразования, оставляющие инвариантными соотношения (9.3). Среди этих преобразований существуют такие неособенные вещественные преобразования, которые позволяют обратить в нуль коэффициенты α_i, β_i для $i>1$ и γ_i ($i=1, \ldots, m$) (А. З. Петров [185], 41—42). Так как $(a_{ij})=(g_{ik})(a^k_j)$, *то для вещественных корней на вещественном пути матрицы форм $g_{ij}x^ix^j$ и $a_{ij}x^ix^j$ можно привести к виду*:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} G_{m_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & G_{m_k} \end{pmatrix}, \quad (a_{ij})=\begin{pmatrix} T_{m_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & T_{m_k} \end{pmatrix},$$

$$G_{m_i}=\begin{vmatrix} & & & & & l_i \\ & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ l_i & & & & & \end{vmatrix}, \quad T_{m_i}=\begin{vmatrix} & & & & l_i\lambda_i & \\ & & & \cdot & & l_i \\ & & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ l_i\lambda_i & l_i & & & & \end{vmatrix}, \quad l=\pm 1, \tag{9.4}$$

где $\Sigma m_i = n$, λ_{m_i} — корни характеристического полинома, k — число инвариантных пучков, равное числу элементарных делителей матрицы. Приведение к матрицам (9.4) не нуждается в понятии элементарных делителей, но они вполне определяются этими матрицами. Из (9.4) следует, что *простому элементарному делителю отвечает неизотропное собственное направление a_{ij}; не простому — изотропное*.

Переходим к случаю *комплексных корней*. Если корни уравнения $|a_{ij}-\lambda g_{ij}|=0$ будут все или некоторые комплексными, то, применяя процесс, изложенный выше (без приведения α, β к ± 1), придем к матрицам (9.2) и (9.4) с той разницей, что их элементы будут, вообще говоря, комплексными числами. Но и в этом случае можно выбрать такую вещественную систему отнесения, что для g_{ij} и a_{ij} получим вещественные матрицы, которые назовем *каноническими*.

Так как a_{ij} и g_{ij} — вещественные числа, то каждому комплексному корню будет отвечать комплексно-сопряженный. Если выделить систему комплексных векторов, определяющих жорданову форму матрицы (a^i_j) и, следовательно, удовлетворяющих условиям (9.3), то в сопряженном пучке, соответствующем сопряженному корню, найдется система векторов, комплексно-сопряженных по отношению к данным, также удовлетворяющих (9.3) и определяющих поэтому жорданову ячейку такого же вида и числа измерений.

Иными словами, если p-кратному корню вида $\alpha+\beta i$ соответствует элементарный делитель вида $(\lambda-\alpha-i\beta)^q$ $(q \leqslant p)$, то имеется корень $\alpha-\beta i$, также кратности p, которому отвечает элементарный делитель $(\lambda-\alpha+\beta i)^q$. Меняя нумерацию векторов, всегда можно добиться того, чтобы две такие подматрицы стояли непосредственно одна за другой. Достаточно рассмотреть две такие подматрицы G_s и $\overline{G}_s$, которые можно считать находящимися в верхнем углу (g_{ij}). Их совокупность обозначим через G_{2s} и предположим, что G_{2s} отвечает элементарному делителю $(\lambda-\alpha\pm\beta i)^s$. Тогда

$$G_{2s}=\begin{pmatrix} G_s & 0 \\ 0 & \overline{G}_s \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} & & & l \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ l & & & \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Пусть векторы, образующие инвариантный пучок, отвечающий матрице $\overline{G}_s$, имеют вид:

$$\underset{1}{\lambda^j}=\underset{1}{u^j}+i\underset{1}{v^j}, \ \ldots, \ \underset{s}{\lambda^j}=\underset{s}{u^j}+i\underset{s}{v^j}.$$

Тогда матрице G_s соответствуют векторы

$$\underset{s+1}{\lambda^j}=\underset{1}{u^j}-i\underset{1}{v^j}, \ \ldots, \ \underset{2s}{\lambda^j}=\underset{s}{u^j}-i\underset{s}{v^j},$$

откуда следует, что $l=2(p+iq)$, $\overline{l}=2(p-iq)$, где p и q — некоторые вещественные числа, а g_{kj} равняется $2(p+q)$, если $l+j=s+1$ и $(p-iq)$, если $l+j=3s+1$, или 0 в остальных случаях.

Принимая за координатные векторы $2s$ вещественных векторов $\underset{1}{u^j}, \ldots, \underset{s}{u^j}, \underset{1}{v^j}, \ldots, \underset{s}{v^j}$, перенумеруем их заново, относя векторам u нечетные номера, а векторам v — четные. Тогда матрицы G_{2s} и B_{2s} будут выражаться следующим образом:

$$G_{2s}=\begin{Vmatrix} & & & & p & q \\ & & & & q & -p \\ & & & \cdot & & \\ & & \cdot & & & \\ & \cdot & & & & \\ p & q & & & & \\ q & -p & & & & \end{Vmatrix}, \quad B_{2s}=\begin{Vmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \alpha & \beta \\ & & & & -\beta & \alpha \end{Vmatrix}.$$

Теперь, пользуясь преобразованиями

$$x^1=c_1\overset{*}{x}{}^1-c_2\overset{*}{x}{}^2, \quad x^3=c_1\overset{*}{x}{}^3-c_2\overset{*}{x}{}^4, \ \ldots,$$
$$x^2=c_2\overset{*}{x}{}^1+c_1\overset{*}{x}{}^2, \quad x^4=c_2\overset{*}{x}{}^3+c_1\overset{*}{x}{}^4, \ \ldots,$$

числа p и q можно обратить в 1, так что можно определить матрицу $T_{2s}=G_{2s}\cdot B_{2s}$ в виде:

$$G_{2s}=\begin{bmatrix} & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \end{bmatrix},$$

$$T_{2s}=\begin{bmatrix} & & & & \alpha-\beta & \alpha+\beta \\ & & & & \alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & -1 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta & 1 & 1 & & \\ \alpha+\beta & -\alpha+\beta & 1 & -1 & & \end{bmatrix}, \qquad (9.6)$$

где α и β имеют, вообще, различные значения для каждого s.

Таким образом, общее решение вопроса о приведении пары форм на вещественном пути дает теорема: *матрицы вещественных симметричных тензоров* g_{ij} *и* a_{ij} *при условии* $|g_{ij}|\neq 0$ *вещественным неособенным линейным преобразованием координат можно привести к виду*:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} G_1 & & \\ & \ddots & \\ & & G_r \end{pmatrix}, \qquad (a_{ij})=\begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}, \qquad (9.7)$$

де G_i *и* T_i *определяются формулами* (9.4) *для вещественных корней и* (9.6) — *для каждой пары комплексно-сопряженных корней.*

Здесь r — число инвариантных пучков тензора a_{ij} и равно числу элементарных делителей λ-матрицы $(a_{ij}-\lambda g_{ij})$, если считать пару комплексно-сопряженных делителей за один.

Числа l_i, λ_i, α, β в формулах (9.4) и (9.6) зависят, вообще говоря, от номера пучка и могут, в частности, быть одинаковыми для некоторых матриц T_i, когда два или более соответствующих элементарных делителя имеют одинаковые базисы.

В книгах по линейной алгебре ограничиваются изложением случая, когда элементарные делители простые, т. е. все ячейки Жордана одномерные, или же делают приведение над полем комплексных чисел, когда результат укладывается в рамки формул (9.4).

Задачи

1. Доказать, что матрица всякого *ковариантно постоянного* смешанного тензора S^{α}_{β} может быть в некоторой голономной системе координат приведена к каноническому виду Жордана; иными словами, существует такая голономная система координат, относительно которой все компоненты S^{α}_{β} будут постоянными (А. П. Широков [256]).

2. В каждой точке V_4 бивектор $v_{\alpha\beta}$ и невырожденный тензор $g_{\alpha\beta}$ ($|g_{\alpha\beta}| \neq 0$), пользуясь *комплексными* линейными однородными преобразованиями координат, можно одновременно привести к каноническому виду. Если ξ^{α}_{p} — ковариантные составляющие координатных векторов, то в этом каноническом представлении

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} \underset{\sigma}{\xi}_{\alpha} \underset{\sigma}{\xi}_{\beta},$$

а бивектор $v_{\alpha\beta}$ с точностью до скалярного множителя будет иметь одну из следующих форм приведения:

I. $$\frac{1}{2} v_{\alpha\beta} = \sqrt{-\underset{1}{\lambda}}\, \underset{[1}{\xi}_{\alpha} \underset{2]}{\xi}_{\beta} \pm \sqrt{-\underset{2}{\lambda}}\, \underset{[3}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta}$$

(бивектор будет изотропным тогда и только тогда, когда $\underset{1}{\lambda} + \underset{2}{\lambda} = 0$);

II. $$\frac{1}{2} v_{\alpha\beta} = a\,(\underset{[1}{\xi}_{\alpha} \underset{2]}{\xi}_{\beta} \pm \underset{[3}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta}) + b\,(\underset{[1}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta} \pm \underset{[2}{\xi}_{\alpha} \underset{3]}{\xi}_{\beta}) + c\,(\underset{[2}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta} \pm \underset{[3}{\xi}_{\alpha} \underset{1]}{\xi}_{\beta})$$

(бивектор будет изотропным тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, и в этом случае он будет также однолистным);

III. $$\frac{1}{2} v_{\alpha\beta} = \underset{[1}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta} \pm i\, \underset{[3}{\xi}_{\alpha} \underset{2]}{\xi}_{\beta}$$

(бивектор однолистный, изотропный);

IV. $$\frac{1}{2} v_{\alpha\beta} = i\,(\underset{[1}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta} + \underset{[2}{\xi}_{\alpha} \underset{3]}{\xi}_{\beta}) + \underset{[2}{\xi}_{\alpha} \underset{4]}{\xi}_{\beta} - \underset{[3}{\xi}_{\alpha} \underset{1]}{\xi}_{\beta}$$

(неизотропный бивектор) (А. З. Петров [192]).

§ 10. Группы Ли в V_n

Далее, при классификации пространств V_n, определяемых полями тяготения, по группам движений, ими допускаемым, необходимы сведения из теории непрерывных групп преобразований (групп Ли). В этом параграфе даются основные определения и факты групп Ли и некоторые теоремы, необходимые для дальнейшего.

Если через X_n обозначить n-мерное пространство, отнесенное к координатам $\{x^\alpha\}$ ($\alpha = 1, \ldots, n$), а через Y_r r-мерное пространство параметров $\{a^k\}$ ($k = 1, \ldots, r$), то уравнения

$$\overset{*}{x}{}^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^r) \equiv f^\alpha(x, a) \qquad (10.1)$$

при фиксированных значениях a^k определяет преобразование точки $M(x)$ пространства X_n в точку $\overset{*}{M}(\overset{*}{x})$. Здесь предполагается, что f^α — функции некоторого класса C^s, а a^k — *существенные* параметры, т. е. они не могут быть выражены через меньшее число независимых параметров; для этого, как известно (Эйзенхарт [170], стр. 17), необходимо и достаточно, чтобы функции f^α не удовлетворяли никаким уравнениям вида

$$\sum_s \varphi_s \frac{\partial f^\alpha}{\partial a^s} = 0.$$

Y_r становится группой, которую мы обозначим через G_r, если существует r достаточное число раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi^i(a^s, b^t)$ ($i, s, t = 1, \ldots, r$) таких, что

$$f^\alpha(f(x, a)\, b) = f^\alpha(x, \varphi(a, b)) \equiv f^\alpha(x, c),$$

где c — элемент группы, и существует в G_r *точка* e^s ($s = 1, \ldots, r$), для которой

$$f^\alpha(x, e) = x^\alpha,$$

при этом предполагается, что функции φ определены в окрестности точки e^s и удовлетворяют следующим аксиомам группы:

1) $\varphi^i(a, \varphi(b, c)) = \varphi^i(\varphi(a, b), c)$,
2) $\varphi^s(a, e) = a^s$,
3) $\varphi^s(a, a^{-1}) = \varphi^s(a^{-1}, a) = e^s$.

Независимость этих трех аксиом исследовалась рядом авторов с различных точек зрения (Диксон [26], стр. 198—204; Н. Г. Чеботарёв [137], стр. 46; Г. Вейль [165], стр. 258; Л. С. Понтрягин [229], стр. 285).

Аксиома 1) определяет *ассоциативный закон*, аксиома 2) обеспечивает существование *единицы группы* e^s и аксиома 3) означает существование для каждого элемента a группы *обратного* элемента.

Одномерной подгруппой G_1 группы G_r назовем такую кривую $a^s = a^s(t)$ пространства параметров, проходящую через единицу группы e^s, для любых точек которой

$$\varphi^s(a(t_1), a(t_2)) = a^s(t_3).$$

Всякой точке этой кривой, бесконечно близкой к e^s, в пространстве X_n

отвечает бесконечно малое преобразование

$$\overset{*}{x}{}^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x)\,\delta t, \tag{10.2}$$

которому можно, таким образом, сопоставить оператор

$$X = \xi^{\alpha}(x)\,\partial_{\alpha} \qquad \left(\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{10.3}$$

Из (10.2) следует, что траектория одномерной подгруппы в пространстве X_n, проходящая через данную точку $P(\overset{0}{x}{}^{\alpha})$, определяется как интегральная кривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^{\alpha}}{dt} = \xi^{\alpha}(x) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \tag{10.4}$$

с начальными данными $x^{\alpha}(0) = \overset{0}{x}{}^{\alpha}$, $a^s = e^s$ $(\alpha = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, r)$. Каждой одномерной подгруппе группы G_r можно взаимно однозначно сопоставить оператор с точностью до *постоянного* множителя. Среди всех операторов группы найдется ровно r линейно независимых операторов $X_1, \ldots, X_r$ (*базис* группы); любой оператор группы является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов базиса.

Для того чтобы r операторов группы определяли базис группы, необходимо и достаточно, чтобы операторы

$$[X_i X_j] \equiv \left(\underset{i}{\xi}{}^{\sigma}\,\partial_{\sigma}\underset{j}{\xi}{}^{\beta} - \underset{j}{\xi}{}^{\sigma}\,\partial_{\sigma}\underset{i}{\xi}{}^{\beta}\right)\partial_{\beta}, \tag{10.5}$$

которые называются *коммутаторами*, были операторами G_r, если X_i, X_j — базисные операторы, как это следует из теории совместности систем дифференциальных уравнений. Следовательно, коммутаторы должны иметь вид:

$$[X_i X_j] = C^s_{ij} X_s, \tag{10.6}$$

где C^s_{ij} — так называемые *структурные константы* группы G_r; это составляет содержание так называемой *второй основной теоремы Ли* ([170], стр. 67—69). В частности, если все константы C^s_{ij} равны нулю, то все коммутаторы равны нулю, а группа называется *абелевой*.

Две группы порядка r с операторами X_s и Y_s $(s = 1, \ldots, r)$ соответственно будем называть *изоморфными*, если существует линейное невырожденное преобразование (A^l_j)

$$Y_s = A^l_s X_l,$$

при котором структура одной группы переходит в структуру другой.

Совокупность преобразований группы G_r, оставляющих неподвижной точку $P(\overset{0}{x^\alpha})$, образует подгруппу H_m группы G_r, называемую *стационарной подгруппой* ([170], стр. 81); по определению, для любого оператора H_m имеет место равенство

$$\xi^\alpha(\overset{0}{x}) = 0. \tag{10.7}$$

Если любые две точки X_n могут быть переведены друг в друга некоторым преобразованием группы G_r, то она называется *транзитивной*. В противном случае группа *нетранзитивна* и расслаивает X_n на совокупность *поверхностей транзитивности*, на каждой из которых группа транзитивна. Так, например, группа вращений обыкновенного R_3 нетранзитивна, а группа переносов транзитивна.

Среди транзитивных групп встречаются такие, для которых можно найти семейство многообразий (содержащих, все вместе, любую точку) такое, что при преобразованиях этой группы одна точка одного многообразия переходит в точку другого и все точки первого многообразия переходят в некоторые точки второго. Так будет, например, для транзитивной группы переносов трехмерного евклидова пространства. Такие транзитивные группы называются *импримитивными*, а многообразия указанных семейств — *семействами импримитивности*. В противном случае группы *примитивны*. Так, группа движений евклидовой плоскости очевидно примитивна.

Группа транзитивна в том и только в том случае, если $r \geqslant n$ и ранг матрицы $\left(\underset{s}{\xi^\alpha}\right)$ равен n $(\alpha = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, r)$ ([170], стр. 88). Если $r = n$, то группа называется *просто-транзитивной*, при $r > n$ — *кратно-транзитивной*.

Две группы G_r и $\tilde{G}_r$, определяемые конечными уравнениями

$$(\alpha)\quad \overset{*}{x}{}^\alpha = f^\alpha(x^\sigma, a^s), \qquad (\beta)\quad \overset{*}{\tilde{x}}{}^\alpha = \tilde{f}^\alpha(\tilde{x}^\sigma, \tilde{a}^s)$$
$$(\alpha = 1, \ldots, n; \quad s = 1, \ldots, r),$$

называются *подобными*, если существует такая система r независимых функций $\omega^\alpha(a^s)$, что можно указать невырожденное преобразование координат, переводящее (β) в (α), если положить, что $\tilde{a}^\alpha = \omega^\alpha(a^s)$. Вопрос о подобии групп решает следующая теорема, доказанная Ли (Ли и Энгель [6], стр. 354): две r-параметрические группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных, для которых общие ранги матриц $\left(\underset{s}{\xi^\alpha}\right)$ и $\left(\underset{s}{\tilde{\xi}^\alpha}\right)$ меньше r, подобны тогда и только тогда, когда эти ранги равны q; любая пара соответствующих миноров порядка q имеет одинаковые ранги, и если

$$\underset{p}{\tilde{\xi}}^{\alpha} = \tilde{\varphi}^{h}_{p} \underset{h}{\tilde{\xi}}^{\alpha} \qquad (p = q + 1, \ldots, n),$$

то система уравнений

$$\tilde{\varphi}^{h}_{p}(\tilde{x}) = \varphi^{h}_{p}(x)$$

должна быть совместной и не приводить к соотношениям между переменными какой-нибудь группы.

Если же матрицы $\left(\underset{s}{\xi}^{\alpha}\right)$ и $\left(\underset{s}{\tilde{\xi}}^{\alpha}\right)$ имеют ранги, равные r, то две *нетранзитивные* группы от одного числа переменных будут подобны, если их структуры совпадают. Две просто-транзитивные группы одинаковой структуры от одного числа переменных подобны.

Всевозможные линейные комбинации коммутаторов группы (*линейная оболочка коммутаторов*) отвечают подгруппе G_{r_1}, которую назовем *коммутантом* группы G_r. В свою очередь линейная оболочка коммутантов определит коммутант $G_{r_2} \subset G_{r_1}$ и т. д. Продолжая этот процесс, получим:

$$G_r \supset G_{r_1} \supset G_{r_2} \supset \ldots$$

При этом возникает альтернатива: 1) $r > r_1 > r_2 > \ldots > r_k = 0$, и в этом случае группа называется *разрешимой*; 2) $r > r_1 > \ldots$ $\ldots > r_k = r_{k+1} = \ldots > 0$, и тогда получим *неразрешимую* группу.

Далее потребуется рассмотрение непрерывных групп преобразований в римановых пространствах V_n, и притом специального вида — *групп движений, которые оставляют неизменной метрику* V_n; в результате преобразований группы движений составляющие метрического тензора будут теми же функциями от новых независимых переменных:

$$g_{\alpha\beta}(\overset{*}{x}{}^1, \ldots, \overset{*}{x}{}^n)\, d\overset{*}{x}{}^{\alpha}\, d\overset{*}{x}{}^{\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}. \qquad (10.8)$$

Для того чтобы G_r была группой движения V_n, необходимо и достаточно, чтобы для *каждого* оператора группы выполнялись так называемые *уравнения Киллинга* ([7], стр. 167), для вывода которых удобно воспользоваться понятием *производной Лц*. Пусть задан некоторый объект $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ (валентность индексов в этом вопросе не играет роли, и поэтому они обозначены одной буквой в скобках). Рассмотрим некоторую точку $P(x^{\alpha})$ в V_n и значение объекта $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}(x^{\alpha})$ в этой точке.

Увлечем теперь систему координат на $\xi^{\alpha}\, dt$, т. е. преобразуем систему координат так, чтобы точка

$$x^{\alpha} + \xi^{\alpha}\, dt$$

получила координаты x^α. Тогда точка x^α получит координаты

$$x^\alpha - \xi^\alpha\, dt.$$

После этого мы возвратимся к первоначальной системе координат. Если первоначальное значение объекта в точке x^α было $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$, то значение в той же точке в результате увлечения будет

$$\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} - \underset{L}{\delta}\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}.$$

Объект $\underset{L}{\delta}\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ называется, по предложению Ван Данцига, *дифференциалом Ли*. Из определения следует, что дифференциал Ли не зависит от коэффициентов связности пространства и в голономной системе координат в *направлении векторного поля* ξ^α для ковариантных и контравариантных компонент вектора u будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \underset{L}{\delta}u^\alpha &= \left(\xi^\sigma \partial_\sigma u^\alpha - u^\sigma \partial_\sigma \xi^\alpha\right) dt, \\ \underset{L}{\delta}u_\alpha &= \left(\xi^\sigma \partial_\sigma u_\alpha + u_\sigma \partial_\alpha \xi^\sigma\right) dt. \end{aligned}\right\} \qquad (10.9)$$

Отбрасывая множитель dt, получим так называемые *производные Ли*.

Дифференциал Ли для тензоров более высокой валентности вычисляется по тому же правилу для каждого индекса в отдельности, в зависимости от того, будет ли этот индекс ковариантным или контравариантным.

Уравнения Киллинга представляют собой выражение необходимого и достаточного условия того, чтобы сдвиг $\xi^\alpha dt$ в V_n представлял собой движение, т. е. смещение V_n в самом себе, при котором имеет место (10.8). Это означает, что *увлеченное* значение поля $g_{\alpha\beta}$ в точке

$$x^\alpha + \xi^\alpha dt$$

равняется там естественному значению поля тензора $g_{\alpha\beta}(x)$; другими словами, дифференциал Ли от $g_{\alpha\beta}$ при таком сдвиге $\xi^\alpha dt$ равен нулю.

Следовательно, *для того чтобы вектор* ξ^α *определял движение в* V_n, *необходимо и достаточно, чтобы в направлении* ξ^α

$$\underset{L}{\delta}g_{\alpha\beta} = 0, \qquad (10.10)$$

что в развернутом виде запишется вследствие (10.9) *так*:

$$\xi^\sigma \partial_\sigma g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\sigma}\partial_\beta \xi^\sigma + g_{\beta\sigma}\partial_\alpha \xi^\sigma \equiv \xi_{\alpha,\,\beta} + \xi_{\beta,\,\alpha} = 0, \qquad (10.11)$$

в этом случае ξ^α *называют вектором Киллинга*.

По смыслу движения и понятия производной Ли заключаем, что при движениях в V_n должна сохраняться и риманова связность:

$$\underset{L}{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=0, \tag{10.12}$$

что означает

$$\xi^{\alpha}{}_{,\beta\gamma}+\xi^{\sigma}R_{\sigma\gamma}{}^{\alpha}{}_{\beta}=0. \tag{10.13}$$

Так как метрический тензор пространства полностью определяется, если известны компоненты тензора кривизны и его ковариантных производных, то при движениях, определяемых оператором ξ^{α}, должны иметь место также условия в направлении ξ^{α}:

$$\left.\begin{array}{r}\underset{L}{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0,\\ \underset{L}{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \underset{L}{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda_1\ldots\lambda_p}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\end{array}\right\} \tag{10.14}$$

Эти уравнения представляют собой условия интегрируемости уравнений Киллинга и дифференциальные следствия из них, получаемые последовательным ковариантным дифференцированием при использовании условий (10.11) и (10.13). Они, конечно, могут быть получены и непосредственно, как серия условий совместности уравнений (10.11) (см., например, [170], стр. 257—259).

Исследование уравнений (10.14) играет решающую роль при определении порядка r группы G_r, допускаемой V_n. Именно как следствие общих теорем о совместности системы дифференциальных уравнений получаем ([170], § 6):

Для того чтобы в V_n имела место группа движений G_r, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы однородных алгебраических уравнений (10.14) *до номера k относительно неизвестных ξ_α и $\xi_{\alpha,\beta}$ при условии* (10.11) *был равен*

$$\frac{n(n+1)}{2}-r,$$

а добавление новых уравнений из числа (10.14) *с номером $k+1$ не меняло этого ранга.*

Всякая классификация V_n по группам движения необходимо связывается со структурами исследуемых групп, т. е., иными словами, со структурными константами для некоторого канонического базиса группы. Зная структуру группы, можно определить наиболее простую голономную систему координат, связанную с этой структурой, и операторы группы относительно этой системы отнесения. После этого определение V_n с данной группой сводится к интегрированию уравнений Киллинга с неизвестными функциями $g_{\alpha\beta}$.

В приложении к пространствам, определяемым полями тяготения, нас будут интересовать только вещественные группы движений и вещественные структуры. Для $r=2$, 3 классификация по вещественным неизоморфным структурам дана Бианки [50], для $r=4$ (за исключением случая G_4, включающей абелеву подгруппу G_3) — Кручковичем ([226], стр. 9; [288], стр. 209), исходившим из классификации неизоморфных структур групп G_4 в комплексной области, данной Ли ([8], § 137). Эта классификация приводит к возможным структурам:

$$r=2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & [X_1X_2]=0 \text{ — абелева } G_2, \\ \text{II.} & [X_1X_2]=X_1 \text{ — неабелева } G_2. \end{array}\right\} \qquad (10.15)$$

$$r=3$$

$$\left.\begin{array}{rlll} & \text{Разрешимые группы} & & \\ \text{I.} & [X_iX_j]=0 & (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \text{ — абелева } G_3, & \\ \text{II.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=0, \\ \text{III.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=0, & [X_3X_1]=-X_1, \\ \text{IV.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1+X_2, & [X_3X_1]=-X_1, \\ \text{V.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_2, & [X_3X_1]=-X_1, \\ \text{VI.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=qX_2, & [X_3X_1]=-X_1 \\ & & & (q\neq 0 \text{ и } 1), \\ \text{VII.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=-X_1+qX_2, & \\ & & [X_3X_1]=-X_2 & (q^2<4). \\ & \text{Неразрешимые группы} & & \\ \text{VIII.} & [X_1X_2]=X_1, & [X_2X_3]=X_3, & [X_3X_1]=-2X_2, \\ \text{IX.} & [X_1X_2]=X_3, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=X_2. \end{array}\right\} \qquad (10.16)$$

Число неизоморфных структур над полем комплексных чисел будет меньше (типы VI и VII совпадают так же, как VIII и IX).

$$r=4$$

$$\left.\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Разрешимые } G_4, \text{ не содержащие абелевой подгруппы } G_3} \\ \text{I.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=0, \\ & [X_1X_4]=cX_1, & [X_2X_4]=X_2, & [X_3X_4]=(c-1)X_3 \\ & \multicolumn{3}{l}{(c \text{ — любое вещественное число}),} \end{array}\right\} \qquad (10.17)$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{II.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=0,\\
 & [X_1X_4]=2X_1, & [X_2X_4]=X_2, & [X_3X_4]=X_2+X_3,\\
\text{III.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=0,\\
 & [X_1X_4]=qX_1, & [X_2X_4]=X_3, & [X_3X_4]=\\
 & & & =-X_2+qX_3 \quad (q^2<4),\\
\text{IV.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_2, & [X_3X_1]=0,\\
 & [X_1X_4]=X_1, & [X_2X_4]=0, & [X_3X_4]=0,\\
\text{V.} & [X_1X_2]=0, & [X_2X_3]=X_2, & [X_3X_1]=-X_1,\\
 & [X_1X_4]=X_2, & [X_2X_4]=-X_1, & [X_3X_4]=0.\\
\multicolumn{4}{l}{\text{Разрешимые группы } G_4 \text{ с абелевой подгруппой } G_3}\\
\text{VI.} & [X_iX_j]=0, & [X_iX_4]=C_i^kX_k & \\
 & & & (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).\\
\multicolumn{4}{l}{\text{Неразрешимые группы } G_4}\\
\text{VII.} & [X_1X_2]=X_1, & [X_2X_3]=X_3, & [X_3X_1]=-2X_2,\\
 & & [X_iX_4]=0 & (i=1,\ 2,\ 3),\\
\text{VIII.} & [X_1X_2]=X_3, & [X_2X_3]=X_1, & [X_3X_1]=X_2,\\
 & & [X_iX_4]=0 & (i=1,\ 2,\ 3).
\end{array}\right\} \quad (10.17)$$

В комплексной области совпадают следующие структуры: I с III, IV с VIII.

Исследуем структуру VI, не рассмотренную в этой классификации. Применим к операторам абелевой подгруппы G_3 невырожденную вещественную линейную подстановку

$$Y_i = A_i^j X_j, \quad Y_4 = X_4, \quad |A_i^j| \neq 0,$$

тогда $[Y_iY_j]=0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, а

$$[Y_iY_4] = A_i^j\,[X_jX_4] = A_i^jC_j^sX_s + C_i^4X_4 = \overset{*}{C}{}_i^sY_s + C_i^4X_4,$$

где $\overset{*}{C}{}_i^k = A_i^jC_j^s\overset{*}{A}{}_s^k$, а $\overset{*}{A}{}_j^k$ — обратное по отношению к A_j^k преобразование. Таким образом,

$$\overset{*}{C} = ACA^{-1}, \quad |A| \neq 0.$$

Рассматривая C_j^l как линейную функцию в трехмерном аффинном пространстве, приходим к задаче приведения C к каноническому виду невырожденным *вещественным* преобразованием. Но для этого случая имеем четыре и только четыре неизоморфных типа (П. А. Широков [102], стр. 187, 201):

$$(1)\ C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\quad (2)\ C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},$$

$$(3)\ C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad (4)\ C=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & 0\\ -\beta & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad \beta\neq 0,$$

где λ_i, α, β — вещественные числа.

Для того чтобы C^l_j, определяемые этими матрицами, и C^4_l являлись структурными константами, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям Якоби ([170], стр. 35):

$$\left.\begin{aligned} &C^l_{ab}=-C^l_{ba},\\ &C^l_{ab}C^f_{lc}+C^l_{bc}C^f_{la}+C^l_{ca}C^f_{lb}=0. \end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

Подчиняя C^l_j этим условиям, получим: *если G_4 содержит абелеву подгруппу G_3, то она имеет одну из следующих неизоморфных вещественных структур*:

VI_1. $[X_iX_j]=0$, $[X_1X_4]=\varepsilon X_1$, $[X_2X_4]=kX_2$, $[X_3X_4]=lX_3$;

VI_2. $[X_iX_j]=0$, $[X_1X_4]=kX_1+X_2$, $[X_2X_4]=-X_1+kX_2$, $[X_3X_4]=lX_3$;

VI_3. $[X_iX_j]=0$, $[X_1X_4]=kX_1+X_2$, $[X_2X_4]=kX_2$, $[X_3X_4]=\varepsilon X_3$;

VI_4. $[X_iX_j]=0$, $[X_1X_4]=kX_1+X_2$, $[X_2X_4]=kX_2+X_3$, $[X_3X_4]=\varepsilon X_3$

(i, $j=1, 2, 3$); $\varepsilon=0, 1$; k и l — произвольные постоянные. Это рассуждение очевидным образом обобщается для любого r.

Задачи

1. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы V_n допускало бесконечно малое движение, состоит в том, чтобы существовала координатная система, в которой все коэффициенты $g_{\alpha\beta}$ не содержат одной из координат x^γ; в этом случае координатные кривые x^γ представляют собой траектории движения ([170], стр. 252).

2. При движении V_n геодезические переходят в геодезические.

3. Если $\underset{s}{\xi}{}^\alpha$ — векторы Киллинга, то $c^s\underset{s}{\xi}{}^\alpha$ ($c^s=\mathrm{const}$) — также вектор Киллинга.

4. Если V_n допускает нетранзитивную группу G_r движений и некоторая неизотропная гиперповерхность V_{n-1} является гиперповерхностью транзитивности, то тем же свойством обладают гиперповерхности, геодезически параллельные V_{n-1}.

5. Если неизотропные поверхности транзитивности группы движений G_r имеют размерность $n-1$, то они геодезически параллельны.

6. Движения, траектории которых являются геодезическими, называются *параллельным переносом* или *трансляциями*. Необходимое и достаточное условие того, чтобы вектор Киллинга $\underset{s}{\xi}^\alpha$ определял параллельный перенос, записывается так: $g_{\alpha\beta}\underset{s}{\xi}^\alpha\underset{s}{\xi}^\beta = \text{const}$; в этом случае все точки сдвигаются на равные расстояния. Доказать.

7. Векторы группы G_1 движений образуют постоянные углы с любой неизотропной геодезической. Доказать.

8. Бианки сформулировал теорему: траектории двух групп G_1 параллельных переносов пересекаются под постоянным углом ([50], стр. 167). Показать, что это утверждение справедливо только тогда, когда наименьшая содержащая их группа транзитивна (П. А. Широков [117]).

9. Пространство V_n постоянной кривизны допускает G_r с $r = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Всякое V_n с группой движения такого порядка имеет постоянную кривизну.

10. V_2 допускает параллельный перенос тогда и только тогда, когда его кривизна равна нулю.

11. Однородное риманово пространство V_n ($ds^2 > 0$) не допускает группы подобий более широкой, чем группа движений, за исключением того случая когда V_n евклидово (Гу Чао-хао [316]).

Глава II

Пространства Эйнштейна

В этой главе будут рассмотрены основные факты, связанные со специальной и общей теорией относительности, приводящие к четырехмерным пространствам Эйнштейна и их обобщениям для любого числа измерений пространства.

§ 11. Основания специальной теории относительности. Преобразования Лоренца

Оставаясь в рамках, определяемых характером этой книги, основы специальной теории относительности дадим здесь в кратком изложении, с упором на математическую сторону вопроса.

Классическая механика, основы которой были заложены в работах Галилея и Ньютона, получившая всеобщее признание, с течением времени, по мере развития физики, перестала удовлетворительным образом объяснять новые факты; прежде всего это относилось к теории света и электромагнетизма.

Из двух теорий света, базирующихся на классической механике, корпускулярной теории Ньютона и волновой — Гюйгенса, зародившихся почти одновременно, в течение почти целого столетия отдавалось предпочтение первой из них.

Затем под давлением экспериментальных фактов (дифракция света) большинство физиков стало склоняться к волновой гипотезе, рассматривавшей свет как *состояние* среды; *носителем* этого состояния было предложено принять особую среду — эфир, наделенную многими необычайными свойствами, остававшимися загадочными.

С другой стороны, теория электромагнитных явлений, описываемая уравнениями Максвелла, подтверждаемая громадным экспериментальным материалом, не была инвариантной с точки зрения классической механики. Для того чтобы построить теорию, отвечающую в большей мере, чем классическая механика, действительному положению вещей, необходимо было исходить из экспериментально установленных фактов. Такими фактами, доведенными экспериментальной проверкой почти до степени очевидности, являются следующие два положения: 1) принципиальная независимость любых явлений в движущейся системе от поступательного движения системы в целом и 2) *скорость света не зависит от движения источника* (и равняется $c \approx 300\,000$ *км/сек*). Положение 1) более точно означает, что существует ∞^3 *равномерно* и *прямолинейно* движущихся друг относительно друга систем отсчета, в которых явления протекают одинаковым образом. Такие системы отсчета будем называть *инерциальными*. Если ограничиваться механическими явлениями, рассматриваемыми в классической механике, то положение 1) совпадает с *принципом относительности Галилея*. Положение 2) можно теперь сформулировать так: *скорость света в пустоте постоянна и равна с в любой инерциальной системе*. Конечно, для *не инерциальных* систем отсчета предположение 2) не имеет места.

В классической механике принцип относительности Галилея выражается в том факте, что формулировка ее законов не меняется при замене одной инерциальной системы другой инерциальной. Эта замена координат для того простейшего случая, когда координаты y и z не меняются, как известно, может быть записана формулами

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \tag{11.1}$$

причем, кроме того, требуется *независимость промежутка времени от системы отсчета*

$$t' = t. \tag{11.2}$$

Преобразования (11.1) и (11.2) называются *галилеевыми*. Для выяснения существа вопроса достаточно рассмотреть этот частный случай движения инерциальных систем друг относительно друга. Если потребовать, чтобы принцип 1) имел место и для электродинамики, то галилеевы преобразования приводят к противоречию.

Таким образом, возникает вопрос о том, как связаны между собой две инерциальные системы при соблюдении предположений 1) и 2). К этому же вопросу можно подойти, потребовав, чтобы уравнения Максвелла при искомых преобразованиях одной инерциальной системы в другую были инвариантными. Однако гипотез 1) и 2) еще недостаточно для однозначного решения вопроса, и требуются некоторые дополнительные предположения для того, чтобы получить эти преобразования, называемые *преобразованиями Лоренца*.

История вопроса такова. Впервые эти формулы были получены Лармором ([15], стр. 167—177), пришедшим к ним при решении вопроса о продольном сокращении тел при движении и изменении масштаба времени. Эта работа осталась незамеченной. Далее следуют две работы Лоренца ([22], §§ 64, 65; [24], стр. 809, 986), в первой из которых он хотя и предполагал еще существование эфира, но сделал ряд ценных замечаний, а во второй получил искомые преобразования как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны, если рассматривать пространство без зарядов. Сокращение тел и здесь понимается как причинно обусловленное явление. В появившихся затем двух работах Пуанкаре ([28], стр. 1504; [29], стр. 129) заполнены формальные пробелы, имевшиеся в работах Лоренца. Названия «преобразования Лоренца» и «группа Лоренца» фигурируют впервые именно в этих работах Пуанкаре. Здесь впервые высказан принцип относительности в качестве всеобщего принципа. Предположение о неизменности перпендикулярных относительно направления движения размеров тел выводится из гипотезы о том, что искомая группа преобразований содержит в качестве подгруппы обычную группу вращений. Пуанкаре сумел построить инвариантную относительно данной группы теорию электрона.

Одновременно с этим появились работы Эйнштейна, содержащие по существу все существенные результаты, полученные в указанных выше исследованиях (см. [25], стр. 891), и глубокий подход к проблеме с новых точек зрения. Он получил эти результаты из 1) и 2), используя, впрочем, и другие предположения («однородность» пространства и т. д.). В работах Эйнштейна специальная теория относительности получила в известной мере завершенную форму. Гипотезы 1) и 2) вводятся как экспериментально обоснованные, что в дальнейшем блестяще оправдалось (С. И. Вавилов [93]).

Что же касается формальной аксиоматики, то этот вопрос продолжает занимать внимание. Так, если положить в основу аксиомы (Игнатовский [33], стр. 972; [35], стр. 779; Франк и Рут [34], стр. 825; [36], стр. 750; Ми [37]): 1) искомые преобразования образуют однопараметрическую однородную линейную группу; 2) скорость системы отсчета S относительно S' равна с обратным знаком скорости S' относительно S; 3) сокращения масштаба в S' в смысле S и масштаба S в смысле S' равны, то формулы преобразования получаются с точностью до знака и физического истолкования постоянных.

Каттанео [324] рассматривает систему аксиом, общую для классической и релятивистской кинематики, пользуясь которой, при некоторых дополнительных требованиях, получает или преобразования Галилея, или преобразования Лоренца. Вместо аксиом Каттанео можно выставить другие требования (В. А. Фок [254], стр. 31; А. Д. Александров [209], стр. 103; А. Д. Александров, В. В. Овчинников [210], стр. 95; Мацумото [263], стр. 55—58).

Постановка вопроса о строгом построении специальной теории относительности, развиваемая в работах А. Д. Александрова ([347], стр. 80—83), основывается на следующих основных положениях: 1) пространство-время есть многообразие всех событий, взятое лишь с точки зрения его структуры, определенной системой отношений предшествования, в отвлечении от всех иных свойств; 2) пространство-время есть четырехмерное многообразие; 3) пространство-время максимально однородно, т. е. группа его преобразований, сохраняющих отношение следования, максимальная из всех возможных; 4) как само многообразие, которое представляет пространство-время, так и преобразования, указанные в 3), являются дифференцируемыми.

Получим преобразования Лоренца при следующих предположениях: пусть имеют место гипотезы 1) и 2) и, кроме того, 3) преобразования должны быть линейными, 4) — масштабы в плоскости, перпендикулярной к направлению движения, не меняются, 5) показания двух часов, находящихся в плоскости $O'y'z'$, совпадают относительно системы S.

Пусть система отсчета (состоящая из осей координат с масштабом и часов) фиксирует место и время некоторого события набором чисел $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и $x^4 = t$, а система S соответственно четверкой чисел $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$. Тогда, предполагая, что при $x^4 = t = 0$ системы S и S' совпадают, в силу 3) искомое преобразование можно записать в виде:

$$x^{\alpha'} = c^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Пусть инерциальная система S' движется относительно S с *постоянной* скоростью v так, что оси Ox, $O'x'$ совпадают. Тогда в силу 4)

$$x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3.$$

Из 5) следует, что $x^{1'}$ и $x^{4'}$ не должны зависеть от x^2 и x^3. Таким образом, преобразования должны иметь вид:

$$x^{1'} = \alpha x^1 + \beta x^4, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = \gamma x^{1'} + \delta x^4. \qquad (11.3)$$

Предположим, что при $t = x^4 = 0$, когда S и S' совпадают, из общего в этот момент начала излучается световой сигнал, распространяющийся со скоростью c. В силу 2) для такого сигнала за некоторый промежуток времени t в системе отсчета S будем иметь:

$$\sum_1^3 x^{i^2} - c^2 x^{4^2} = 0, \qquad (11.4)$$

а применяя еще и гипотезу 2), получим:

$$\sum_1^3 x^{i'^2} - c^2 x^{4'^2} = 0. \qquad (11.5)$$

Заменяя в (11.5) $x^{\alpha'}$ по формулам (11.3), мы должны получить уравнения, эквивалентные (11.4), т. е. в данном случае, может быть, с точностью до множителя. Но так как $x^{2'} = x^2$, $x^{3'} = x^3$, то этот множитель должен быть равен единице. Отсюда следует:

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad \alpha\beta - c^2\gamma\delta = 0, \quad \delta^2 - \frac{\beta^2}{c^2} = 1,$$

т. е.

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi, \quad \beta = c\operatorname{sh}\varphi, \quad \gamma = \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi, \quad \delta = \operatorname{ch}\varphi.$$

Относительно S' описание движения начала координат системы S получим, полагая $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Это дает

$$x^{1'} = c\operatorname{sh}\varphi t, \quad x^{2'} = x^{3'} = 0, \quad x^{4'} = \operatorname{ch}\varphi t,$$

и следовательно,

$$\frac{x^{1'}}{x^{4'}} = \frac{x'}{t'} = -v = c\operatorname{th}\varphi, \quad \operatorname{th}\varphi = -\frac{v}{c}.$$

Ввиду этого (11.3) записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x^{1'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(x^1 - vx^4), \qquad x^{2'} = x^2, \\ &x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{v}{c^2}\,x^1 + x^4\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

Если встать на формальную точку зрения, подготовленную введенными выше обозначениями, то можно говорить о четырехмерном пространстве с координатами x^α ($\alpha = 1, \ldots, 4$), геометрия которого должна отвечать группе преобразований типа (11.6); отметим, что форма

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{1^2} \qquad (x^4 = ct) \tag{11.7}$$

инвариантна относительно этих преобразований. Если, наоборот, среди (11.3) искать преобразования, оставляющие инвариантной (11.7), то придем к (11.6). Форма (11.7) определяет метрику плоского пространства с сигнатурой типа $(- - - +)$, называемое *пространством Минковского*, указавшего на удобство такой интерпретации [30].

Пусть даны два плоских пространства R_n и $\overset{*}{R}_n$ одного и того же числа измерений и одинаковой сигнатуры; будем говорить, что эти пространства *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное вещественное отображение точек R_n на точки $\overset{*}{R}_n$, что: 1) если точкам A, B пространства R_n отвечают точки $\overset{*}{A}$, $\overset{*}{B}$ в пространстве $\overset{*}{R}_n$, то вектору AB в R_n отвечает вектор $\overset{*}{A}\overset{*}{B}$ в $\overset{*}{R}_n$; 2) если вектору X^α в R_n отвечает вектор $\overset{*}{X}{}^\alpha$ в $\overset{*}{R}_n$, то вектору aX^α в R_n отвечает вектор $a\overset{*}{X}{}^\alpha$ в $\overset{*}{R}_n$ (a — число); 3) $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{u}{}^\alpha\overset{*}{u}{}^\beta$, если $\overset{*}{u}{}^\alpha$ отвечает u^α.

Если изоморфные R_n и $\overset{*}{R}_n$ совпадают, то будем говорить об *автоморфизме* или *движении* в плоском пространстве. Если вместо (3) потребовать инвариантности (11.7) при отображении, то получим, очевидно, автоморфизм. *Геометрия пространства Минковского есть геометрия группы лоренцевых автоморфизмов.*

Преобразование (11.6) в силу равноправности координат x^1, x^2, x^3 допускает еще два аналога. Кроме того, очевидно, что обычные вращения и переносы (при $x^4 = x^{4'}$) не меняют формы (11.7), как и *сдвиг во времени* $x^{4'} = x^4 + \overset{0}{x}{}^4$. Следовательно, существует группа линейных вещественных преобразований, являющаяся группой автоморфизмов пространства Минковского, зависящая от 10 произвольных параметров; она включает 3 лоренцевых вращения, 3 пространственных вращения и 4 сдвига по осям. Хорошо известно (см. задачу 9 § 10), что число независимых параметров при движениях, 10, является максимальным для любого V_4. При этом мы отвлекаемся от зеркальных отображений вида $x^{\alpha'} = -x^{\alpha}$, которые также оставляют (11.7) инвариантной и увеличивают число различных преобразований ([216], стр. 208).

Сущность специальной теории относительности заключается в установлении взаимосвязи пространства и времени, формальными выражениями которой будут как формулы (11.6), так и введение четырехмерного пространства Минковского.

Процесс движения некоторой материальной точки можно описать, если для каждого момента времени задать положение этой точки, т. е. задать

$$x^i = x^i(x^4) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{11.8}$$

что в пространстве Минковского определит кривую. В частности, для равномерного и прямолинейного движения функции $x^i(x^4)$ будут *линейными* и, следовательно, определят в четырехмерном пространстве прямые. Если к тому же точка движется со скоростью света c, то форма (11.7) будет тождественно обращаться в нуль и, следовательно, четырехмерной траекторией такой точки будет *изотропная* прямая.

Если представлять себе распространение света в пустом пространстве, как это делается в геометрической оптике, в виде движения частиц, то получим в пространстве Минковского опять-таки изотропные прямые. Световой сигнал в данной точке распространяется по полуобразующим изотропного гиперконуса, имеющего вершиной данную точку. Из (11.6) следует, что скорость материальной частицы не может превышать c и, следовательно, в случае скорости $< c$ четырехмерные траектории материальных частиц будут кривыми, касательные к которым в каждой точке пространства направлены внутрь этого конуса.

§ 12. Уравнения поля релятивистской теории гравитации

Специальная теория относительности установила взаимную связь между пространством и временем — этими формами существования материи, но в ней не рассматривается зависимость геометрии пространства-времени от распределения и движения материи; пространственно-временной континуум предполагается однородным. Такая зависимость, возможность которой предвидел еще Лобачевский (см. [213], стр. 10—18), устанавливается в релятивистской теории тяготения. В этой теории хотя и предполагается, что локально каждой точке можно сопоставить геометрию специальной теории относительности, т. е. плоскую геометрию, в области метрика пространства-времени принципиально зависит от распределения и движения материи и поэтому будет вообще римановой; иными словами, не найдется такого невырожденного вещественного преобразования координат, которое бы в области, отличной от точки, приводило все компоненты метрического тензора к постоянным.

Общая теория относительности есть теория зависимости пространства-времени от движения и распределения материи в широком смысле этого слова.

В релятивистской теории тяготения геометрические свойства пространственно-временного континуума не укладываются в рамки геометрии плоского пространства и требуют для своего описания римановой геометрии. Если метрика такого V_4 определяется линейным элементом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{12.1}$$

то компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x^1, \ldots, x^4)$ зависят от распределения и движения материи.

Ввиду этого $g_{\alpha\beta}(x)$ называют иногда *потенциалами* гравитационного поля; отметим, впрочем, что такая терминология означает некоторые предположения о размерности $g_{\alpha\beta}$ — вопрос, требующий дополнительного исследования.

Основная задача теории поля — определение поля в зависимости от распределения и движения материи — приводит к необходимости получения уравнений поля. Они были получены Эйнштейном в 1915 г. (Эйнштейн [39], стр. 778) в виде:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -\lambda T_{\alpha\beta}, \tag{12.2}$$

где $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса, а λ — постоянная.

К этим уравнениям Эйнштейн пришел после длительных поисков, исследуя различные гипотезы. Так, например, еще в 1914 г. он исходил из предположения $R_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}$ ([38], стр. 1030). Одновременно (1915 г.) и независимо от Эйнштейна к уравнениям (12.2) пришел Гильберт ([46], стр. 395), получивший эти уравнения из вариационного принципа. Он, однако, вывел эти уравнения не для произвольной материальной системы, а исходя из теории материи Ми ([37], стр. 512). Этот метод получения основных уравнений поля был затем усовершенствован Клейном ([47], стр. 469; [51], стр. 235), пользовавшимся такими вариациями координат, которые не исчезают на границе интегрирования (со времен Лагранжа это часто делается в классической механике), при этом многие соотношения приобретают более простой вид (Паули [168], стр. 104—107, 285; Ландау и Лифшиц [173], стр. 309—313; Фок [254], стр. 273, 278; Вейль [78], стр. 205—206).

Кроме уравнений (12.2), метрический тензор для поля тяготения, отвечающего реальному распределению материи, необходимо должен удовлетворять условию, чтобы в каждой точке области пространства-времени невырожденными вещественными линейными преобразованиями он приводился к виду:

$$(g_{\alpha\beta})_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{12.3}$$

т. е. чтобы в каждой точке P в касательном пространстве R_4 имела место геометрия Минковского. Левая часть (12.2) целиком определяется геометрией пространства-времени; правая часть содержит постоянную λ и тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$, определяемый распределением и движением материи. Таким образом, (12.2) означает, что материя определяет геометрию пространства-времени и, наоборот, движение этих масс определяется метрическим тензором пространства, которое не будет плоским. Условие (12.3) записывает физическое утверждение, согласно которому в бесконечно малой области пространства в течение бесконечно малого промежутка времени можно для описания физического события использовать геометрию Минковского. Важно, однако, отметить, что *искривление пространства-времени, определяемое полем тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, нельзя убрать даже в точке никаким преобразованием координат.*

Согласие выведенных из уравнений (12.2) следствий с опытом (Т. А. Тихов [116], стр. 7; А. Ф. Богородский [136], стр. 3; С. И. Вавилов [93]) в рамках доступной точности и отсутствие фактов, противоречащих им, говорят о правильности этих уравнений для известных экспериментов и наблюдений.

Основные предположения, из которых исходил Эйнштейн при получении уравнений поля (12.2), можно сформулировать следующим образом: 1) При наличии гравитации геометрия пространства-времени — геометрия V_4. 2) Распределение и движение энергии и импульса описываются симметрическим тензором $T_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$, удовлетворяющим *закону сохранения*

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} \equiv 0. \tag{12.4}$$

3) Уравнения поля должны иметь тензорный характер. 4) Они должны быть линейными относительно вторых частных производных от потенциалов $g_{\alpha\beta}(x)$. 5) Тензор энергии-импульса должен определяться геометрией пространства V_4. При соблюдении некоторых граничных условий отсюда однозначно следуют уравнения (12.2). Наоборот, при наличии гипотезы, что уравнения поля тяготения имеют вид (12.2), получим как следствие все эти предпосылки.

Получение (12.2) из вариационного принципа основано на следующих гипотезах: 1) Уравнения поля тяготения должны получаться как результат варьирования суммы действий поля и материи. 2) Варьирование действия поля должно приводить к уравнениям, являющимся уравнениям Эйлера — Лагранжа принципа Гамильтона; таким образом, решается вариационная задача для интеграла, распространенного по четырехмерному объему A:

$$I = \int\limits_A R\sqrt{-g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4, \qquad \delta I = 0,$$

где R — скалярная кривизна пространства V_4. 3) Если Ω — некоторая функция от обобщенных координат q, определяющих систему, и их производных по координатам и времени, то действие выражается интегралом

$$S = \int \Omega\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^\alpha}\right) dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4,$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{\alpha\beta} = \Omega g_{\alpha\beta} - q_{,\alpha}\frac{\partial\Omega}{\partial q^\beta}$$

при условии (12.4). Кроме того, необходимы некоторые другие предположения о граничных условиях.

Гипотеза (12.2) эквивалентна серии таких гипотез, и получение (12.2) из них имеет большое эвристическое значение. Во всяком случае, в большинстве имеющихся в настоящее время вариантов единой теории поля уравнения поля получаются из вариационного принципа.

Что же касается физической значимости (12.2), то она может быть подтверждена только экспериментальным путем.

§ 13. Пространства Эйнштейна

Для свободного пространства там, где тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ обращается в нуль (например, если материя представлена точечными массами, то вне точечных масс), уравнения (12.2) будут иметь вид:

$$R_{\alpha} = 0,_{\beta} \tag{13.1}$$

так как при таком предположении, свертывая по $\alpha\beta$, найдем, что скалярная кривизна пространства $R=0$. Решения уравнений поля (13.1) являются в известном смысле аналогом решений уравнения Лапласа в классической теории поля: они определяют геометрию пространства-времени в областях, свободных от масс. Этим пространствам посвящено большое количество исследований. Наряду с уравнениями (13.1) можно рассматривать уравнения поля

$$R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}, \tag{13.2}$$

где $\varkappa$ (при $n>2$), как это следует непосредственно из (13.2) и (5.19), будет постоянной величиной. Эти уравнения можно рассматривать как уравнения поля (12.2) для того случая, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ лишь постоянным множителем отличается от метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Физической моделью такого поля может служить пространство, которое на всем своем протяжении однородно, причем плотность материи постоянна во всем пространстве ([173], стр. 345; [254], стр. 447). Для «островного» распределения материи можно говорить о «внутренней» и «внешней» задачах при интегрировании уравнений поля, и в этом случае (13.1) определяет решения «внешней» задачи.

Независимо от теории тяготения пространства V_n, удовлетворяющие уравнениям (13.2), встречаются во многих вопросах геометрии. В теории групп Ли возникает риманова связность типа (13.2). Почти во всех имеющихся в настоящее время вариантах единых теорий, как правило, возникают пространства V_n такого типа. Ввиду этого *римановы многообразия при условии* (13.2), *при любом n (размерность пространства) и любой сигнатуре метрики назовем пространствами Эйнштейна* и будем обозначать символом G_n. В том случае, когда $n=4$ и сигнатура G_4 имеет вид $(---+)$, мы будем употреблять символ $\overset{*}{T}$, и, если, кроме того, $\varkappa=0$, т. е. имеют место (13.1), будем употреблять символ T. Таким образом, поле тяготения в свободном пространстве описывается геометрией T.

Вместо (13.2) пространство G_n можно определить иначе. Рассмотрим в V_n некоторую точку P и совокупность направлений, исходящих из P, удовлетворяющих соотношению

$$R_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta}=0;$$

главные направления этого конуса второго порядка Риччи предложил называть *главными направлениями* пространства V_n в данной точке. Если, кроме того, в пространстве, касательном к V_n в данной точке, взять поверхность второго порядка с центром в этой точке, уравнение которой имеет вид:

$$(R_{\alpha\beta}-\varkappa g_{\alpha\beta})\,\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=1,$$

то главные направления этой поверхности, называемой иногда *индикатрисой Эйнштейна*, будут и главными направлениями Риччи. Тогда уравнения (13.2) эквивалентны требованию, чтобы эти направления были неопределенны, т. е. в каждой точке *индикатриса Эйнштейна должна быть гиперсферой.*

Иную характеристику G_n для случая *определенно-положительной метрики*, интересную тем, что она получается, если приравнять нулю некоторый скаляр φ, дал Томас ([122], стр. 331—340). Он показал, что V_n *с определенно-положительной метрикой будет* G_n *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\varphi \equiv nR_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R^2 = 0. \tag{13.3}$$

Требование определенности метрики здесь существенно и возможность замены $\frac{n(n+1)}{2}$ условий (13.2) одним уравнением объясняется тем, что уравнение вида $\sum a_i^2 = 0$ при вещественных a_i эквивалентно системе $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Отметим, что скаляр φ, называемый Томасом «квадратичной кривизной», не имеет ничего общего с термином «квадратичная кривизна V_n», вводимым ниже (задача 5).

Существуют также определения пространств G_n, основанные на понятии кривизны пространства V_n, взятые не в двумерном направлении, а в m-мерном направлении (Картан [110], стр. 199—200; Врона [172], стр. 234).

В случае $n = 4$ имеет место теорема: *если для* V_4 *имеет место одно из условий*:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}, \\ &\beta)\ 3g_{[\alpha\,[\nu}R_{\beta\gamma]\,\lambda\mu]} = 2\varkappa g_{[\lambda\,[\alpha}g_{\mu\beta}g_{\nu]\,\gamma]}, \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

то выполняется и другое.

В условии β) подразумевается двойное альтернирование: одно по $\alpha\beta\gamma$ и другое по $\lambda\mu\nu$. Для доказательства в каждой точке пространства V_4 введем, может быть мнимый, неголономный ортореπер, для которого

$$g^{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Для каждого из этих ортореперов α) и β) запишутся двумя эквивалентными, с точностью до линейных комбинаций, системами уравнений относительно компонент тензора кривизны, что и доказывает теорему.

Так как тензор кривизны всякого V_3 полностью определяется через тензор Риччи и метрический тензор (см. задачу 8 § 7):

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\gamma}L_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}L_{\beta\gamma} + g_{\beta\delta}L_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma}L_{\alpha\delta}, \\ L_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} + \frac{R}{4}g_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

то, если к тому же имеет место (13.2), получим для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражение (8.4); таким образом, *если V_3 — пространство Эйнштейна, то оно является пространством постоянной кривизны.*

Для любого n, свертывая (8.4), придем к (13.2), и следовательно, *всякое риманово пространство постоянной кривизны есть пространство Эйнштейна.*

Отметим, что геометрия четырехмерного пространства-времени общей теории относительности допускает интересную интерпретацию в неголономной геометрии Лагерра, что позволяет подойти к исследованию этого многообразия с новой точки зрения [245].

Задачи

1. Всякое V_2 есть G_2.

2. G_n, конформное плоскому пространству, есть S_n (Схоутен и Стройк [64], стр. 214).

3. Проверить, что V_n с определенно-положительной метрикой является G_n тогда и только тогда, когда имеет место (13.3).

4. Для того чтобы в V_n все геодезические гиперсферы были G_{n-1}, необходимо и достаточно, чтобы V_n было S_n (П. А. Широков [82], стр. 53).

5. Назовем инвариант

$$H = \frac{g_{\alpha\alpha_1\beta\beta_1} R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\lambda} R^{\alpha_1}{}_{\gamma_1\delta_1\lambda_1} u^{\beta\gamma} u^{\delta\lambda} u^{\beta_1\gamma_1} u^{\delta_1\lambda_1}}{\left(g_{\alpha\gamma\delta\lambda} u^{\alpha\gamma} u^{\delta\lambda}\right)^2}$$

квадратичной кривизной пространства V_n. Здесь $g_{\alpha\gamma\delta\lambda} \equiv g_{\alpha\,[\delta} g_{\lambda]\,\gamma}$ и $u^{\alpha\beta} = \xi^{[\alpha}\eta^{\beta]}$ — *однолистный* бивектор. Если H не зависит от выбора $u^{\alpha\beta}$, то V_n назовем *пространством постоянной квадратичной кривизны.* Показать: 1) величина бивектора $u^{\alpha\beta}$, обнесенного параллельно вдоль границы неособенного элемента поверхности $u^{\alpha\beta}\,\Delta\sigma$, характеризуется инвариантом H, если ограничиться величинами, не превышающими четвертого порядка малости ($\Delta\sigma = O(\delta^2)$); 2) любое S_n есть пространство постоянной квадратичной кривизны; 3) любое V_3 постоянной квадратичной кривизны есть S_3; 4) любое V_4 постоянной квадратичной кривизны есть G_4 (А. З. Петров [175], стр. 211—214).

6. Пользуясь тождеством Риччи (5.5), показать, что постоянная $\varkappa$ в (13.2) может быть выражена через любое неизотропное векторное поле a^α:

$$\varkappa = a^\sigma \left(a^\tau_{,\tau\sigma} - a^\tau_{,\sigma\tau}\right) / a^\nu a_\nu;$$

при $\varkappa = 0$ любое векторное поле с компонентами класса C^2 удовлетворяет уравнению $a^\tau_{,\tau\sigma} - a^\tau_{,\sigma\tau} = 0$ (Нарликар [280], стр. 1138).

§ 14. Некоторые решения уравнений поля тяготения

Изучение полей тяготения T (или $\overset{*}{T}$) приводится к исследованию системы 10 дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с 10 неизвестными функциями $g_{\alpha\beta}(x)$ от четырех независимых переменных x^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Уравнения будут линейными относительно старших производных, коэффициенты при которых будут переменными. За счет специализации системы координат (см. § 7) для любого V_n всегда можно n компонент метрического тензора обратить в наперед заданные функции. Следовательно, систему уравнений поля можно привести к 10 уравнениям от шести неизвестных функций — случай переопределенной системы.

Ввиду сложности вопроса и физических требований к теории тяготения, задача решалась при тех или иных дополнительных ограничениях, позволяющих получить решение в замкнутом виде. Например, исследовались *постоянные* гравитационные поля. Для постоянного поля существует такая система отнесения, относительно которой все величины, в частности метрический тензор, не зависят от *временной* координаты x^4. Примером таких полей могут служить так называемые *статические* поля, для них в системе отсчета, относительно которой $g_{\alpha\beta}$ не зависит от времени (x^4), все тела неподвижны. Тогда, очевидно, оба направления времени равноценны, т. е. все составляющие метрического тензора $g_{\alpha 4}=0$ $(\alpha\neq 4)$. Все такого рода поля характеризуются тем, что в некоторой системе координат $\partial_4 g_{\alpha\beta}=0$. Отсюда следует, что постоянные поля определяют геометрию, допускающую ту или иную группу движений порядка $r\geqslant 1$, так как метрика допускает оператор $X=\delta_4^\alpha\partial_\alpha$.

По времени первыми были исследованы *центрально-симметрические* поля тяготения, у которых выражение линейного элемента ds^2 одинаково для всех точек, находящихся на одинаковом расстоянии от центра.

Такое поле может создаваться центрально-симметрическим распределением вещества, причем скорость движения материи в каждой точке направлена по радиусу (центрально-симметрические пульсации). Рассматривались также поля, обладающие *осевой* симметрией.

С момента появления в 1915 г. основной работы Эйнштейна было предложено много частных решений проблемы; некоторые из них обобщали или повторяли разультаты, полученные ранее. Последнее объясняется или незнанием литературы, или же тем, что, хотя проблема эквивалентности квадратичных дифференциальных форм давно решена (Кристоффель [3], стр. 60), в конкретных случаях она приводит иногда к громоздким вычислениям.

Рассмотрим в хронологическом порядке известные в литературе многообразия T и $\overset{*}{T}$.

1. Пространство T, найденное Шварцшильдом ([43], стр. 195), исходившим из физических соображений:

$$\left.\begin{aligned} &g_{44}=-g_{11}^{-1}=1+\frac{c}{x^1}, \quad && g_{22}=-x^{1^2}, \\ &g_{33}=-x^{1^2}\sin^2 x^2, && g_{ij}=0 \quad (i\neq j), \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

где c — произвольная постоянная. Квадратичная форма в полярной системе координат допускает приведение к ортогональному виду. Такое T соответствует, как это было строго доказано Гильбертом [46] и Биркхоффом [75], наиболее общему центрально-симметрическому распределению масс.

Иными словами, при условии шаровой симметрии членов метрики, не зависящих от времени, всегда, интегрируя (13.1), получим (14.1).

2. Пространство $\overset{*}{T}$, являющееся обобщением решения Шварцшильда, предложенное Коттлером ([52], стр. 401—462). В полярной системе координат метрический тензор имеет следующие компоненты:

$$\left.\begin{aligned} & g_{44} = -g_{11}^{-1} = 1 + \frac{a}{3} x^{1^2} + \frac{c}{x^1}, \quad g_{22} = -x^{1^2}, \\ & g_{33} = -x^{1^2} \sin^2 x^2, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

где a, c — произвольные постоянные. При $a = 0$ получим решение (14.1), при $c = 0$ придем к пространству постоянной кривизны S_4. И (14.1) и (14.2) принадлежат к числу тех V_4, метрика которых в некоторой системе координат имеет вид:

$$ds^2 = g_{11}(x^1)\, dx^{1^2} - x^{1^2}\, dx^{2^2} - x^{1^2} \sin^2 x^2\, dx^{3^2} + g_{44}(x^1)\, dx^{4^2},$$

и непосредственным подсчетом можно убедиться, что уравнения (13.2) для метрики такого вида приводят к (14.2).

3. Вейлю ([49], стр. 117; [67], стр. 134) и Леви-Чивита [53] удалось найти статическое решение, обладающее только осевой симметрией, но не сферической. Это решение, удовлетворяющее уравнениям поля (13.1), определяется следующими компонентами метрического тензора:

$$g_{14} = -g_{11}^{-1} = -g_{22}^{-1} = e^{\mu}, \quad g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \pm j), \tag{14.3}$$

где функции μ и ν зависят только от двух переменных: x^3 и $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$ — и удовлетворяют системе уравнений поля:

$$\begin{aligned} & f_1 \equiv \frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \partial_{33}\mu = 0, \\ & f_2 \equiv \frac{\partial \nu}{\partial \rho} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)^2 - (\partial_3 \mu)^2 \right] = 0, \\ & f_3 \equiv \partial_3 \nu - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho}\, \partial_3 \mu = 0, \\ & \partial_3 f_2 - \frac{\partial f_3}{\partial \rho} = \rho f_1\, \partial_3 \mu. \end{aligned}$$

Непосредственно можно убедиться, что первые два из этих уравнений представляют собой результат свертывания тождеств Бианки; задача решалась в предположении, что μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности.

4. Пространство T, полученное Бахом ([70], стр. 119—134), который исходил из предположения, что метрический тензор определяется матрицей

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\alpha & \omega & 0 & 0\\ \omega & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta\end{pmatrix},$$

где функции α, β, γ, δ, ω зависят только от переменных x^3, x^4. Эти решения не являются точными, а, при некоторых дополнительных условиях, ищутся по приближению с ошибками наперед заданного порядка малости. Бах получает, таким образом, три решения в виде полиномов и элементарных функций от x^4 и x^3. Это одна из первых попыток искать приближенные решения уравнений поля, получившая развитие в работах Эйнштейна, Инфельда и Фока.

5. Бринкман ([85], стр. 126) в работе о пространствах, конформно-отображаемых на пространства Эйнштейна, доказал теорему: пространство Эйнштейна может быть конформно отображено на другое пространство Эйнштейна

$$g^{\alpha\beta}=e^{2\sigma}\overset{*}{g}{}^{\alpha\beta}$$

при

$$\Delta_1\sigma\equiv g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\sigma\partial_\beta\sigma\neq 0$$

тогда и только тогда, когда метрика допускает приведение к виду:

$$ds^2=fg_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta+f^{-1}\,dx^{n^2}\qquad(\alpha,\,\beta=1,\,\ldots,\,n-1),\quad(14.4)$$

причем

$$f=\frac{1}{n(n-1)}(Rx^{n^2}+2ax^n+b),$$

где a и b — постоянные, $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^n и метрика $\varphi=$ $=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ — метрика $(n-1)$-мерного пространства Эйнштейна. Таким образом, этот результат определяет особый тип n-мерного пространства Эйнштейна. Заметим, что если $n=4$, то форма φ определит S_3, так как каждое трехмерное пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны. Ввиду этого, полагая, что S_3 имеет риманову форму, получим:

$$ds^2=\frac{f}{\psi^2}\sum_1^3 dx^{i^2}+\frac{1}{f}\,dx^{4^2},$$

где

$$\psi=1+\frac{K}{4}\sum_1^3 x^{i^2},\quad f=-\varkappa x^{4^2}+ax^4+b.$$

После этого нетрудно будет убедиться, что T будет S_4.

6. Казнер отыскивал пространства T ([69], стр. 219), исходя из предположения, что метрика допускает приведение к ортогональному виду, а пространство допускает погружение в плоское $(n+k)$-мерное пространство и, кроме того,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx^{i^2},$$

где f_i зависят от одной переменной или же от двух, но являются многочленами. На этом пути им определены метрики

$$ds^2 = x^{1^{2a_1}} dx^{1^2} + x^{1^{2a_2}} dx^{2^2} + x^{1^{2a_3}} dx^{3^2} + x^{1^{2a_4}} dx^{4^2},$$

где постоянные a_i связаны соотношениями

$$-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \quad -(a_1 + 1)^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$$

и

$$ds^2 = \mathrm{I}(x^1, x^2) + \mathrm{II}(x^3, x^4),$$

где I и II — *бинарные* дифференциальные формы, т. е. пространство *приводимо*.

7. *Симметрические* римановы многообразия с ковариантно постоянным тензором кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda} = 0$. Исследование таких пространств приводит к изучению *неприводимых* V_p $(p < n)$, которые играют существенную роль при изучении так называемых *полупростых* групп ([91], стр. 133—141). Изучением таких пространств занимались: П. А. Широков ([120], стр. 9—27; [82], стр. 111; [233], стр. 71—82), Э. Картан ([183], стр. 118—149), Б. А. Розенфельд [193], [176] и многие другие авторы. Среди таких пространств естественным образом выделяются пространства Эйнштейна. Классификация и определение всех симметрических пространств T будут даны в главе VIII.

8. Миттер ([96], стр. 110—114), пользуясь цилиндрическими координатами z, r, θ, t, изучал V_4 при условии (13.1) с метрикой

$$ds^2 = -e^{\lambda} dz^2 - e^{\mu}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{\nu} dt^2,$$

где λ, μ, ν — некоторые функции от r. Это приводит к отысканию статического решения с симметрией около оси z. Исследованию аналогичных решений (13.1) посвящена также работа [97]. Эти исследования приводят к результатам Вейля и Леви-Чивита.

9. Дельсарт [103] рассматривал пространство T с линейным элементом вида

$$ds^2 = \varphi^2 \overset{*}{ds}{}^2 + f^2 d\sigma^2,$$

называя такие пространства «бинарными». Здесь

$$\overset{*}{ds}{}^2 = \overset{*}{ds}{}^2(u^1, \ldots, u^p), \quad d\sigma^2 = d\sigma^2(v^1, \ldots, v^q),$$
$$f = f(u^1, \ldots, u^p), \quad \varphi = \varphi(v^1, \ldots, v^q), \quad p + q = 4,$$

т. е. это *неприводимые*, вообще, пространства. Взяв в качестве точки отправления предположение, что пространство имеет ось симметрии и четырежды ортогональную систему координат, он получает решение в виде

$$ds^2 = \frac{1}{\{\wp(u) - \wp(v)\}^2}\left\{du^2 - dv^2 + \wp'^2(u)\,dy^2 + \wp'^2(v)\,dz^2\right\}, \quad (14.5)$$

где $\wp$ — вейерштрассовы эллиптические функции от криволинейных координат. К некоторым результатам Дельсарта приходит Юнг [163], который, кроме того, исследует вопрос о том, когда дифференциальная форма T_4 допускает приведение к виду:

$$ds^2 = \{p(x^k, t)\}^2 dt^2 + g_{ij}(x^k)\,dx^i\,dx^j, \quad \partial_t p \neq 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

или

$$ds^2 = \{\sigma(x^k, t)\}^2 dt^2 + \{p(x^k, t)\}^2 g_{ij}(x^k)\,dx^i\,dx^j,$$

где предполагается, что форма $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ определенно-отрицательная. Если для первого из этих элементов предположить $\partial_t p = 0$, то придем к решению Дельсарта. Необходимые и достаточные условия возможности приведения линейного элемента к такому виду выражаются автором в виде дифференциальных условий.

10. Шоу ([118], стр. 754—763) исследовал решение (13.1) для *статического* и *изотропного* V_4 в предположении, что

$$ds^2 = u^2\,dt^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где u и g_{ij} не зависят от t,

$$\partial_{ij} u = \frac{64}{c + u^2}\left(\partial_i u \partial_j u - \frac{1}{3}\Delta_1 u g_{ij}\right), \quad \Delta_1 u = g^{ij}\partial_i u \partial_j u$$

и $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ — метрика трехмерного конформно-евклидова пространства (условия «*изотропности*» пространства по терминологии автора); если $c = 0$, то получается решение Казнера, при $c < 0$ — решение Шварцшильда, а при $c > 0$

$$ds^2 = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{x^1}{2}\right)dt^2 - \frac{\sin^4\left(\frac{x^1}{2}\right)}{4K^2 x^{2^2}}\left[x^{2^2}\,dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right]. \quad (14.6)$$

11. Если $\overset{*}{T}$ — *приводимое* пространство, т. е. его метрика может быть представлена в виде двух или более квадратичных форм, не имеющих общих переменных и дифференциалов, то эти квадратичные формы, как легко видеть, также определяют пространства G_q ($q < 4$).

Ввиду этого, оставляя в стороне тривиальный случай S_4, получим только четыре типа:

$$\begin{aligned} &1) \quad ds^2 = -\operatorname{ch}^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} - \cos^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} + dx^{4^2}, \\ &2) \quad ds^2 = -\operatorname{ch}^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} + \operatorname{ch}^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} - dx^{4^2}, \end{aligned} \tag{14.7}$$

если $k = \frac{1}{a^2} > 0$, где k — гауссова кривизна поверхностей постоянной кривизны, на которые расслаивается V_4, и

$$\begin{aligned} &3) \quad ds^2 = -\cos^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} - \operatorname{ch}^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} + dx^{4^2}, \\ &4) \quad ds^2 = -\cos^2 \frac{x^2}{a} dx^{1^2} - dx^{2^2} + \cos^2 \frac{x^4}{a} dx^{3^2} - dx^{4^2}, \end{aligned} \tag{14.8}$$

если гауссова кривизна $k = -\frac{1}{a^2} < 0$.

12. Такено показал ([145], стр. 125—136), что симметрично-сферические решения уравнений $R_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ приводят к решению Шварцшильда или Коттлера.

13. Имеет место также следующая теорема (А. З. Петров [160], стр. 8—12): метрика

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_i(x^n)\, dx^{i^2} + dx^{n^2}$$

определяет пространство Эйнштейна с сигнатурой $(- - \ldots - +)$ при следующем выборе функций g_i: если в (13.2) $\varkappa > 0$, то

$$g_i = -\sin^{\frac{2}{n-1}}(\alpha x^n) \operatorname{tg}^{\frac{2\alpha_i}{\alpha}}\left(\frac{\alpha x^n}{2}\right), \quad g_n = 1 \quad (i = 1, \ldots, n-1); \tag{14.9}$$

если $\varkappa < 0$, то

$$g_i = -\sin^{\frac{2}{n-1}}(\beta x^n) \operatorname{th}^{\frac{2\beta_i}{\beta}}\left(\frac{\beta x^n}{2}\right), \quad g_n = 1; \tag{14.10}$$

при $\varkappa = 0$ получим или S_n, или

$$g_i = -(x^n)^{c_i}, \quad g_n = 1, \quad \sum c_i = \sum c_i^2 = 1. \tag{14.11}$$

Если в решениях (14.9), (14.10) $\varkappa = 0$, то постоянные α_i и β_i также обращаются в нуль, а само $\overset{*}{T}_n$ вырождается в плоское пространство. Как особое решение при этом получается при $\varkappa < 0$ пространство Лобачевского. Для этих $\overset{*}{T}_n$ вопрос о группе движений решается теоремой: если $g_i \neq g_j$, пространство допускает лишь тривиальную систему операторов $\xi^i = \text{const}$, $\xi^n = 0$, $x_i f = p_i$ $(i < n)$;

если же $g_i = g_j$, то для каждой такой пары получаем оператор вращения.

14. Решения (14.11) в иной системе координат получены Нарликаром и Кармаркаром ([161], стр. 69) в виде:

$$ds^2 = dt^2 - \nu^p\,dx^2 - \nu^q\,dy^2 - \nu^r\,dz^2, \qquad \nu = 1 + kt, \tag{14.12}$$

где $k = \text{const}$, а p, q, r — постоянные, связанные соотношениями $p + q + r = 2$, $pq + qr + rp = 0$.

15. При изучении вопроса о погружении пространств Эйнштейна в плоские пространства и пространства постоянной кривизны (Фиалков [121], стр. 30—34) появляются приводимые пространства (см. гл. V).

16. Эйнштейн и Розен ([119], стр. 43—54), отыскивая решение (13.1) для цилиндрических волн, пришли к элементу, допускающему ортогональную систему координат:

$$\left.\begin{array}{c} -g_{11} = g_{44} = A, \quad -g_{22} = B, \quad -g_{33} = C, \\ g_{\alpha\beta} = 0 \ (\alpha \neq \beta), \quad A,\ B,\ C\,(x^1,\ x^4), \end{array}\right\} \tag{14.13}$$

где A, B и C определяются системой дифференциальных уравнений, которая после замены $\alpha = \ln A$, $\beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{B}{C}\right)$, $\gamma = \frac{1}{2}\ln(BC)$ может быть записана в виде:

$$2\partial_{44}\gamma + \frac{1}{2}[(\partial_4\beta)^2 + 3(\partial_4\gamma)^2 + (\delta_1\beta)^2 - (\partial_1\gamma)^2 - 2\partial_1\alpha\partial_1\gamma - 2\partial_4\alpha\partial_4\gamma] = 0,$$
$$2(\partial_{11}\alpha - \partial_{44}\gamma) + 2(\partial_{11}\gamma - \partial_{44}\alpha) + [(\partial_1\beta)^2 + (\partial_1\gamma)^2 - (\partial_4\beta)^2 - (\partial_4\gamma)^2] = 0,$$
$$\partial_{11}\beta - \partial_{44}\beta + \partial_1\beta\partial_1\gamma - \partial_4\beta\partial_4\gamma = 0,$$
$$2\partial_{11}\gamma + \frac{1}{2}[(\partial_1\beta)^2 + 3(\partial_1\gamma)^2 + (\partial_4\beta)^2 - (\partial_4\gamma)^2 - 2(\partial_1\alpha\partial_1\gamma + \partial_4\alpha\partial_4\gamma)] = 0,$$
$$2\partial_{14}\gamma + \partial_1\beta\partial_4\beta + \partial_1\gamma\partial_4\gamma - 2(\partial_1\alpha\partial_4\gamma + \partial_4\alpha\partial_1\gamma) = 0;$$

этот результат, полученный из формальных соображений, допускает физическое истолкование.

Гравитационные волны переносят энергию, плотность которой становится источником гравитационного поля; это поле деформирует метрику, благодаря чему гравитационные волны должны рассматриваться в пространстве своеобразной метрики. В 1954 г. Розен рассматривал тот случай, когда

$$A = e^{2(\gamma - \psi)}, \quad B = e^{-2\psi}\rho^2, \quad C = e^{2\psi},$$

где

$$\psi = \psi(\rho,\ t), \quad \gamma = \gamma(\rho,\ t)$$

при независимых переменных ρ, Φ, z, t ([242], стр. 328). К вопросу об определении волновых решений обращается также Такено ([282], стр. 15—25), использовавший идею Эйнштейна получения плоских волн, но отбросивший предположение о слабости поля. В полученных при этом решениях для неустранимых преобразованиями координат волн выписанные решения не могут быть вещественными.

17. Изучая статические решения уравнений (13.1), Букдал вводит понятие *взаимных* решений для данного статического. Так, решение, взаимное решению Шварцшильда, имеет вид:

$$ds^2 = -\gamma^2 (\gamma^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2) + p^{-1} dt^2, \quad (14.14)$$

где $p = 1 - \frac{2m}{r}$. В данном случае можно убедиться (см. гл. IV), что (14.14) лишь тривиальным образом отличается от (14.1).

18. В разное время автором исследовались решения (13.1) различной природы ([175], стр. 211—214; [197], стр. 149—152; [198], стр. 87—95; [202], стр. 27—32; [203], стр. 35—47; [251]; [269]; [270]; [290]), которые будут приведены ниже.

19. Верма и Рой ([283], стр. 129—137) указали следующее решение уравнений (13.2):

$$ds^2 = -A(dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2, \quad (14.15)$$

где

$$A^{\frac{1}{2}} = \frac{F(t)}{c_1(x^2+y^2+z^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 z + c_5},$$

$$c_i = \text{const}, \quad \frac{d}{dt}(F^2) = \frac{1}{3\lambda F^2} + \alpha, \quad \alpha = -4c_1 c_5 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2.$$

20. Тауб (1951 г.), исходя из предположения, чтобы пространствами допускалась трехчленная группа движений, указал три точных решения пространств T. Одно из них есть частный случай (14.11), а два других имеют линейные элементы следующего вида [201]:

$$ds^2 = c\,dt^2 - a\,dx^{1^2} - (a \sin^2 x^1 + b \cos^2 x^1)\, dx^{2^2} - 2b \cos x^1\, dx^2 dx^3 - b\, dx^{3^2},$$

где

$$a = \frac{k \operatorname{ch}(kt+\alpha)}{4 \operatorname{ch}^2\left(\frac{kt+\beta}{2}\right)}, \quad b = \frac{k}{\operatorname{ch}(kt+\alpha)}, \quad c = a^2 b, \ k, \ \alpha, \ \beta = \text{const}$$

и

$$ds^2 = (1 + kx^1)^{-1/2} (dx^{0^2} - dx^{1^2}) - (kx^1 + 1)(dx^{2^2} + dx^{3^2}).$$

21. В 1960 г. Йордан и Кундт нашли несколько пространств T с метриками:

1) $ds^2 = (x+y)^{-2}\left(\frac{dx^2}{f} + f\,dy^2 + \frac{dy^2}{g} - g\,dt^2\right)$, $g(y) = -f(-y)$, $f = \pm(4x^3 + ax + b)$, a, $b = \text{const}$.

2) $ds^2 = 2\,du\,dv + dy^2 + dz^2 + 2H(u,\ y,\ z)\,du^2, \quad H_{yy} + H_{zz} = 0,$

(a) $H = F(u)\ln\sqrt{y^2 + z^2},$

(b) $H = u^{-2}\left(\frac{1}{2}(y^2 - z^2)\cos\varphi - yz\sin\varphi\right); \quad \varphi = 2\mathscr{E}\ln u, \quad \mathscr{E} = \pm 1,$

(c) $H = \frac{1}{2}((y^2 - z^2)\cos\varphi - yz\sin\varphi); \quad \varphi = \pm 2u.$

22. В 1962 г. Даyткурт, Папапетру и Тредер [557] нашли все пространства T, метрический тензор которых $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^4)$, а $x^4 = \text{const}$ задает неизотропные гиперповерхности, т. е. рассмотрен случай групп движений абелевой G_3, действующей на неизотропных гиперповерхностях транзитивности. Это приводит к результатам (14.9), (14.10), (14.11).

23. Космологическая модель де-Ситтера [457]

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}\,t}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

(пространство постоянной кривизны).

24. Статическое решение в пустоте с осевой симметрией, найденное Чази [81]:

$$ds^2 = e^{-\frac{2m}{r}}\left\{-dt^2 + e^{\frac{4m}{r}}\left[e^{\frac{m^2x^{1^2}}{r^4}}(dx^{1^2} + dx^{2^2}) + x^{1^2}\,dx^{3^2}\right]\right\},$$

где

$$r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}, \qquad m = \text{const}.$$

25. Решение, найденное Дельсартом [104]:

$$ds^2 = \lambda^{-1}\,dt^2 - \lambda\,dz^2 - r^2(dr^2 + \text{sh}^2\,r\,d\varphi^2),$$

$$\lambda = \left(\frac{2m}{z} - 1\right)^{-1}, \qquad m = \text{const} > 0,$$

$$0 < z < 2m.$$

Это решение получено в другой системе координат Шоу [118].

26. Решение Казнера [63]

$$ds^2 = -z^{-1}\,dt^2 + z\,dz^2 + z^2(dr^2 + r^2\,d\varphi^2), \qquad r > 0.$$

Это же решение получено также Шоу [118], Мукераи [132], Юманом [189].

27. Решение Уильсона [60] для бесконечного стержня однородной плотности

$$ds^2 = r^{\frac{4m}{1-2m}}\,dt^2 - r^{\frac{8m^2}{1-2m}}\,dr^2 - r^{-4m}\,dz^2 - r^2\,d\theta^2, \qquad m = \text{const}.$$

28. Решение Тауба для пустого пространства [201]

$$ds^2 = -t^{2a_1}\,dx^2 - t^{2a_2}\,dy^2 - t^{2a_3}\,dz^2 + dt^2,$$

$a_i = \text{const}$, удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1.$$

В этой же работе рассматриваются поля тяготения с плоской симметрией, метрики которых можно записать в виде:

$$ds^2 = e^{2u}(dx^{4^2} - dx^{1^2}) - e^{2v}(dx^{2^2} + dx^{3^2}),$$

где u, v зависят только от x^1 и x^4. Получено точное решение указанного вида:

$$ds^2 = (1 + kx^1)^{-1/2}(dx^{4^2} - dx^{1^2}) - (1 + kx^1)(dx^{2^2} + dx^{3^2}), \qquad k = \text{const}.$$

29. Группу точных решений уравнений поля в пустоте нашел Харрисон [370]. Он (по аналогии с гидродинамикой) метрический тензор записал в виде «связанных пар»:

$$g_{\alpha\beta} = e_\alpha \delta_{\alpha\beta} A_\alpha^2 (x^1, x^4) B_\alpha^2 (x^3, x^4),$$

$e_\alpha = \pm 1$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Таким путем найдено двадцать невырожденных решений и десять вырожденных в том смысле, что все компоненты метрического тензора сводятся к функциям только двух переменных.

30. Статическое гравитационное поле заряженной частицы предложили Райсснер *) и Нордстрем [54]:

$$ds^2 = r^2(\lambda^{-1} r^{-2} dt^2 - \lambda r^{-2} dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

где $\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2\pi E^2}{r^2}\right)^{-1}$, а тензор энергии-импульса задается следующими компонентами:

$$-T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = T_4^4 = \frac{1}{2}\frac{E^2}{r^4},$$

$$T_\alpha^\beta = 0, \qquad \alpha \neq \beta.$$

31. Космологическая модель Фридмана **)

$$ds^2 = \frac{R^2(t)}{c^2}\left[c^2 R^{-2}(t)\, dt^2 - \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2}{\left(1 + \frac{kr}{4}\right)^2}\right],$$

где $R = R(t)$ — произвольная функция, $k = \text{const}$. Исследованию этой модели посвящено много работ, например см. [457], [173], [254].

*) H. Reissner, Ann. Phys. 50, 106 (1916).

**) A. Friedman, Ueber die Krümmung des Raumes, Zs. Phys. 10, 377 (1922).

32. Розен [582], исследуя симметрии уравнений Эйнштейна — Максвелла, получил нестатическое электромагнитное поле

$$ds^2 = \left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{2b_3}\left(-\frac{b_1^2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{2b_1}}{\sin^2 t}dt^2 + \frac{\sin^4 t}{\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{2b_3}}dx^{1^2} + \right.$$
$$\left. + \left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{2(b_2-b_3)}dx^{2^2} + dx^{3^2}\right).$$

Ненулевые компоненты тензора электромагнитного поля следующие:

$$F_{01} = -F_{10} = \frac{c^2\cos\alpha}{\sqrt{G}}\sin t,$$
$$F_{23} = -F_{32} = \frac{c^2\sin\alpha}{G^{b_1/2}},$$

где α, G — постоянные, c — скорость света.

33. В работе [634] находится приближенное решение уравнений сферически-симметричного скалярного мезонного поля. Найдено нестатическое решение

$$ds^2 = r^2(e^{\nu}r^{-2}dt^2 - e^{\lambda}r^{-2}dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

где

$$e^{-\lambda} = 1 + k\left[\frac{A}{r} + \frac{g}{8\pi}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2\alpha r - 2\beta t}\right],$$
$$e^{\nu} = 1 + k\left[\frac{A}{r} + \frac{g}{8\pi}\left(2\mu^2 e_i(2\alpha r) - \frac{\alpha}{r}e^{-2\alpha r}\right)e^{-2\beta t}\right],$$
$$e_i(2\alpha r) = \int_r^{\infty} t^{-1}e^{-2\alpha t}\,dt.$$

34. В работе [621] Петровым исследован «сингулярный» случай чистого электромагнитного излучения в пустоте. Для метрики с метрическим тензором

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -c^2 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

приводятся два решения уравнений:

$$R_{\alpha\beta} = el_\alpha l_\beta \qquad l_\alpha l^\alpha = 0, \quad e = \pm 1),$$

$$F_{[\alpha,\beta,\gamma]} = F^{\sigma}{}_{\alpha,\sigma} = 0, \qquad \text{где } (F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\rho & 0 & \rho \\ \rho & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & \sigma \\ -\rho & 0 & -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

1. $$\alpha = M(px^2 + nx^3 + S), \qquad \partial_1\rho = \partial_1\sigma = 0,$$
$$\beta = M\left(x^3 + \int p\,dx^1 + v\right), \qquad B\partial_3\rho - C\partial_2\sigma = 0,$$
$$\gamma = M\left(x^2 + \int n\,dx^1 + w\right), \qquad C\partial_2\rho + B\partial_3\sigma = 0,$$

где $A(x^4)$, $M(x^4)$, $n(x^1)$, $v(x^1)$, $S(x^1)$, $w(x^1)$, $p(x^1)$ — произвольные функции, а $B(x^4)$ и $C(x^4)$ определяются из уравнений

$$BB'\left(\frac{B''}{B'} - \frac{M'}{M}\right) = CC'\left(\frac{C''}{C'} - \frac{M'}{M}\right) = -\frac{L}{2}A^2B^2.$$

2. $$\alpha = M(v'x^2 + t'x^3 + S), \qquad \partial_1\rho = \partial_1\sigma = 0,$$
$$\beta = M(v + C'x^3e^{x^4} + p), \qquad B\partial_3\rho - C\partial_2\sigma = 0,$$
$$\gamma = M(t + C'_1x^2e^{x^4} + q), \qquad C\partial_2\rho + B\partial_3\sigma = 0,$$

где $A(x^4)$, $M(x^4)$, $v(x^1)$, $t(x^1)$, $S(x^1)$, $p(x^4)$, $q(x^4)$ — произвольные функции, а $B(x^4)$ и $C(x^4)$ определяются из уравнений

$$B'' - \frac{M'}{M}B' + \frac{L}{2}A^2B = C'' - \frac{M''}{M}C' + \frac{L}{2}A^2C = 0.$$

35. В работе Оппенгеймера и Волкова *) проведено численное интегрирование уравнений Эйнштейна для статической, сферически-симметричной идеальной жидкости с уравнениями состояния для вырожденного ферми-газа. При этом согласно гипотезе, высказанной впервые Л. Ландау в 1932 г., предполагается, что космологический объект приходит к такому состоянию, исчерпав все источники термоядерной энергии. Оказывается, что для вышеуказанного космологического сферически-симметричного невращающегося объекта такие решения существуют, если его масса не превышает $0{,}75M_\odot$ (где $M_\odot$ — масса Солнца). Если масса превышает это значение, то происходит бесконечное сжатие такого объекта (объект «коллапсирует»).

Приведенные выше решения в замкнутом виде уравнений поля относятся главным образом к случаю свободного пространства или же к случаю уравнений (13.2). И только некоторые из них предполагают более сложную структуру тензора энергии-импульса. В этом последнем случае уравнений поля, кроме неизвестных компонент $g_{\alpha\beta}$, приходится определять еще и компоненты тензора энергии-импульса — система становится *недоопределенной*. Только в некоторых самых простых случаях удается дать решение такой системы, хотя именно решение ее представляет наибольший интерес в смысле проверки основной концепции Эйнштейна. Полезно отметить в связи с этим, что проверка теории Эйнштейна на опыте (перигелий Меркурия,

*) J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, On Massive Neutron Cores, Phys. Rev. 55, 374 (1939).

отклонение луча света в поле тяжелой массы) относится именно к случаю поля в пустоте, да и то при жестких дополнительных условиях о симметрии пространства. С другой стороны, появившиеся в последнее время попытки приложения общей теории относительности к космологии существенным образом опираются на решение Оппенгеймера, в котором фигурирует тензор энергии-импульса для случая идеальной жидкости. В связи с трудностью фактического интегрирования таких уравнений в квадратурах применяется метод численного интегрирования.

Кроме того, из этих же соображений в исследованиях по современной теории гравитации часто применяется метод «линеаризации» уравнений поля, применение которого прежде всего оправдывается тем, что он позволяет получить ньютонову теорию тяготения как приближение уравнений (12.2). В самом деле, так как кроме общего релятивизма существует линейная теория Ньютона, которая с большой степенью точности описывает некоторые гравитационные явления, например, в небесной механике, то нужно предположить, во-первых, что такая линейная теория должна получаться из теории Эйнштейна как первое, но хорошее приближение, и, во-вторых, что по крайней мере для тех задач, где ньютонова теория дает хорошие результаты в смысле совпадения с экспериментальной проверкой, гравитационные поля в своем нелинейном уточнении приводят к эффектам второго порядка.

Этот метод развивался в работах Эйнштейна с сотрудниками [187], с одной стороны, и Фоком [126] и Папапетру [250], с другой.

Мы не будем касаться этого круга вопросов, исследованию которых посвящены, например, работы [254], [250].

Глава III

Общая классификация полей тяготения

Как следует из предыдущей главы, решения уравнений поля Эйнштейна получались при некоторых частных физических или геометрических предположениях. Они по существу всегда связаны с выбором специальной системы координат. В связи с этим встает вопрос об общей классификации полей тяготения. Ясно, что такая классификация будет полезной особенно в том случае, если она будет носить инвариантный характер. Такую классификацию естественно связать с изучением основных тензорных объектов, определяющих теорию тяготения Эйнштейна. В этой главе дается метод классификации полей тяготения самого общего вида, который базируется на изучении алгебраической структуры тензора кривизны и тензора энергии-импульса. Методически оказывается полезным рассмотреть сначала поле в пустоте.

§ 15. Бивекторные пространства

Классификацию пространств Эйнштейна свяжем с изучением алгебраической структуры тензора кривизны пространства; так как компоненты тензора кривизны удовлетворяют тождествам (5.8):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \qquad R_{\alpha\,[\beta\gamma\delta]} = 0, \tag{15.1}$$

определяющим *полный* ряд алгебраических тождеств для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то классификация должна основываться на (15.1). *Алгебраическое* изучение тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно проводить в данной точке пространства V_n; в этой точке нас будут интересовать только тензоры специальной природы. Покажем, что совокупность всех таких тензоров допускает отображение на множество всех тензоров некоторого другого пространства, и будем проводить исследование в этом последнем пространстве.

Выделим все тензоры, которые удовлетворяют следующим двум условиям: 1) ковариантная и контравариантная валентности — четные;

2) ковариантные и контравариантные индексы разбиваются на отдельные *пары*, для каждой из которых тензор *кососимметричен*. Примером такого рода тензоров могут служить *бивекторы* (кососимметрические тензоры второго порядка), заданные компонентами $V^{\alpha\beta}$ или $V_{\alpha\beta}$, или же тензор кривизны, если он определен компонентами $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, или $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$, или $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Будем далее такие тензоры называть *битензорами*.

Множество всех такого рода тензорных полей в V_n назовем *бивекторным*, а его представление в данной точке — *локальным бивекторным* множеством. Рассмотрим некоторый тензор, принадлежащий локальному бивекторному множеству, и примем каждую кососимметрическую пару индексов $\alpha\beta$ за один *собирательный* индекс. При этом из двух возможных пар $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ фиксируем одну, например $\alpha\beta$, а компоненты, несущие на себе $\beta\alpha$, отличающиеся от соответствующей компоненты только знаком, не будем принимать во внимание. Все собирательные индексы перенумеруем, и выбор такой нумерации произволен, но число собирательных индексов будет равно $N=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим преобразование компоненты $\Pi^{\alpha\beta}$ некоторого бивектора пространства V_n. Оно будет иметь вид:

$$\Pi^{\alpha'\beta'}=A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\beta'}_{\beta}\Pi^{\alpha\beta}=A^{\alpha'}_{[\alpha}A^{\beta'}_{\beta]}\Pi^{\alpha\beta}$$

или в собирательных индексах

$$\Pi^{a'}=A^{a'}_{a}\Pi^{a}, \tag{15.2}$$

где $a=1,\ \ldots,\ N$,

$$A^{a'}_{a}\to A^{\alpha'}_{[\alpha}A^{\beta'}_{\beta]}. \tag{15.3}$$

Таким образом, преобразование бивекторов в V_n имеет вид преобразования векторов в E_N, но при этом допустимы не любые линейные неособенные преобразования, а некоторая подгруппа центроаффинной группы, определяемая условиями (15.3); это является реализацией теоремы, доказанной Гуревичем ([190], стр. 463—469).

Совокупность бивекторов пространства V_n в данной точке с контравариантными компонентами определит в собирательных индексах совокупность векторов с контравариантными компонентами, каждый из которых имеет N компонент. Отождествляя эти векторы с точками N-мерного многообразия, можно утверждать, что оно будет *аффинным многообразием* E_N в том и только в том случае, когда в нем имеет место геометрия Клейна с группой:

$$\left.\begin{aligned}&\eta^{a'}=A^{a'}_{a}\eta^{a}, \qquad \eta^{a}=A^{a}_{a'}\eta^{a'},\\ &|A^{a'}_{a}|\neq 0, \qquad A^{a}_{b'}A^{b'}_{c}=\delta^{a}_{c},\end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

где $A^a_{a'}$ имеют специфический вид, отвечающий (15.3), и, следовательно, E_N, если оно имеется, будет специального вида.

Первые два условия (15.4) следуют непосредственно из (15.2). Третье условие следует из того, что определитель

$$S = | A^{\alpha'}_{\beta} \cdot A^{\gamma'}_{\delta} | = | A^{\alpha'}_{\alpha} |^{2n} \qquad (\alpha,\ \alpha' = 1,\ \ldots,\ n)$$

(В. Ф. Каган [64], стр. 410) и, с другой стороны, за счет перестановки и линейной комбинации строк и столбцов C его можно представить в виде:

$$C = p \, | A^{a'}_{a} | \qquad (a,\ a' = 1,\ \ldots,\ N),$$

т. е. $| A^{a'}_{a} | \neq 0$, если $| A^{\alpha'}_{\alpha} | \neq 0$. Четвертое из условий (15.4) нетрудно проверить, исходя из первых двух. Таким образом, (15.4) имеют место и E_N существует: *всякое локальное бивекторное множество V_n может быть отображено на центроаффинное E_N* $\left(N = \frac{n(n-1)}{2}\right)$. Из определения этого отображения следует, что оно дает *изоморфизм* относительно операций сложения, вычитания, умножения (без свертывания) тензоров. Операция умножения со свертыванием должна быть исключена, так как она может привести к тензорам, не допускающим такого отображения.

Следовательно, с каждой точкой V_n можно связать локальное E_N с группой (15.4); такое E_N будем называть *бивекторным пространством*. Тензор в V_n в данной точке, с указанными выше свойствами, определит в E_N тензор вдвое меньшей валентности.

Теперь можно *метризовать* бивекторное пространство. Пусть в V_n существует поле тензора $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ такого, что

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = T_{\gamma\delta\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha\gamma\delta} = -T_{\alpha\beta\delta\gamma};$$

тогда в каждом из пространств E_N, отвечающих той или иной точке той области в V_n, где определено поле этого тензора, можно ввести метрический тензор

$$T_{ab} \to T_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

если только $|T_{ab}| \neq 0$. В остальном выбор такого тензора произволен, но представляется наиболее естественным связать метрику, введенную в E_N, с метрикой V_n. Ввиду этого введем метрический тензор

$$g_{ab} \to g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}, \tag{15.5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор V_n, а собирательными индексами являются кососимметрические пары

$$\alpha\beta \to a, \qquad \gamma\delta \to b.$$

Тензор g_{ab} $(a, b=1, \ldots, N)$ *симметрический* и *невырожденный*: $|g_{ab}| \neq 0$; чтобы убедиться в этом, достаточно в данной точке пространства V_n привести $g_{\alpha\beta}$ к диагональному виду и вычислить g_{ab} по формуле (15.5). Если $g_{\alpha\beta}$ — определенно-положительный или определенно-отрицательный тензор, то g_{ab} будет положительно-определенным. Для неопределенного $g_{\alpha\beta}$ метрика g_{ab} может быть неопределенной с некоторой сигнатурой, зависящей от сигнатуры $g_{\alpha\beta}$. Вместо знака $\rightarrow$ в (15.5), обозначающего отображение, можно было бы воспользоваться *связывающими* величинами:

$$g_{ab}=B_a^{\alpha\beta} B_b^{\gamma\delta}\left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}\right),$$

где B — связывающие величины, представляющие ковариантный вектор в E_N и контравариантный бивектор в R_n, отвечающий данной точке V_n.

Отметим, что матрица (g_{ab}) по отношению к $(g_{\alpha\beta})$ является так называемой *производной* матрицей. Именно, если встать на ту точку зрения, что в аффинном пространстве операция свертывания $g_{\alpha\beta}V^\alpha$ определяет линейную вектор-функцию, которая относит точке V^α гиперплоскость, полярно сопряженную относительно гиперквадрики $g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=1$, то некоторый *однолистный* поливектор

$$V^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \equiv \underset{[1}{V^{\alpha_1}} \cdots \underset{p]}{V^{\alpha_p}},$$

после того как к каждому из векторов V_k, альтернированным произведением которых он является, применим эту вектор-функцию, преобразуется в поливектор

$$V_{\beta_1 \ldots \beta_p}=g_{\beta_1 \ldots \beta_p \alpha_1 \ldots \alpha_p} V^{\alpha_1 \cdots \alpha_p},$$

где тензор

$$g_{\beta_1 \ldots \beta_p \alpha_1 \ldots \alpha_p}=p!\, g_{[\alpha_1[\beta_1} g_{\alpha_2\beta_2} \cdots g_{\alpha_p]\beta_p]}$$

определяет *производную* форму. Для $p=2$ этот тензор совпадает с g_{ab}. После введения тензора g_{ab} в бивекторное аффинное пространство E_N становится *метрическим* пространством R_N.

§ 16. Классификация пространств Эйнштейна

Введенные в § 15 понятия позволяют исследовать алгебраическую структуру тензора кривизны любого риманова пространства (А. З. Петров [192], [207]). Отображая тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ пространства V_n на бивекторное метризованное пространство R_N, получим, имея в виду (15.1), в R_N симметрический тензор R_{ab} ($a, b = 1, \ldots, N$), которому можно сопоставить λ-матрицу

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}). \tag{16.1}$$

Приведя эту λ-матрицу к каноническому виду *на вещественном пути* (см. § 9), можно тем самым установить классификацию V_n при заданном n. *Тип* пространства будет определяться *характеристикой* λ-матрицы, и тип пространства сохраняется в той области, где эта характеристика не меняется.

Пусть точке P пространства V_n отвечает λ-матрица (16.1) с системой элементарных делителей

$$\begin{array}{llll} (\lambda - \lambda_1)^{m_1}, & (\lambda - \lambda_2)^{m'_1}, & (\lambda - \lambda_3)^{m''_1}, & \ldots, \\ (\lambda - \lambda_1)^{m_2}, & (\lambda - \lambda_2)^{m'_2}, & (\lambda - \lambda_3)^{m''_2}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

тогда этой λ-матрице отвечает *характеристика*

$$\left[(m_1,\ m_2,\ \ldots)(m'_1,\ m'_2,\ \ldots)(m''_1,\ m''_2,\ \ldots)\ \ldots\right], \tag{16.2}$$

определяющая тип пространства в той области A, где она не меняется. Инварианты λ_i, *базисы* элементарных делителей, будут в то же время корнями характеристического уравнения

$$|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0. \tag{16.3}$$

Однако в области A возможно совпадение на некоторых k-мерных многообразиях базисов $\lambda_i(x)$ элементарных делителей. Эти многообразия *k-поверхности* будут записываться уравнениями вида

$$\lambda_i(x) - \lambda_j(x) = 0.$$

Так, если взять гиперповерхность, определяемую уравнением

$$\lambda_1(x) - \lambda_2(x) = 0,$$

и предположить, что она принадлежит области A, где вообще $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и элементарные делители имеют вид $(\lambda - \lambda_1)^p$, $(\lambda - \lambda_2)^q$, то характеристика в A будет иметь вид $[p,\ q,\ \ldots]$, а на указанной гиперповерхности $[(p,\ q)\ \ldots]$; будем говорить, что такое совпадение *не меняет типа* V_n в данной области. При определении типа λ-матрицы пространства V_n тензор R_{ab} ограничен условиями (15.1) и только ими.

Предположим, что V_n является пространством Эйнштейна; тогда, кроме (15.1), необходимо еще учесть соотношения

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}. \tag{16.4}$$

Введем в данной точке пространства V_n ортогональный неголономный репер $\underset{\sigma}{\xi}^{\alpha}$ (σ, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$) такой, что

$$(g_{\alpha\alpha})_P = e_\alpha = \pm 1, \quad (g_{\alpha\beta})_P = 0 \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{16.5}$$

где e_α определяется сигнатурой формы $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$. Тогда

$$g_{aa} = e_\alpha e_\beta, \quad g_{ab} = 0 \qquad (a, b = 1, \ldots, N;\ a \neq b), \tag{16.6}$$

а тензор кривизны отобразится на симметрический тензор R_{ab}, которому в точке P пространства G_n отвечает тензор кривизны, *ортогональные* компоненты которого будут связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \quad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0,\\ &\sum_\sigma e_\sigma R_{\sigma\alpha\sigma\alpha} = \varkappa e_\alpha, \quad \sum_\sigma e_\sigma R_{\sigma\alpha\sigma\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \end{aligned}\right\} \tag{16.7}$$

Записывая (16.7) в собирательных индексах, получим *полный ряд* алгебраических условий, накладываемых на R_{ab} в R_N, после чего тип пространства будет определен характеристикой λ-матрицы (16.3). Число возможных типов V_n с возрастанием n быстро возрастает и зависит от возможных сигнатур метрики, т. е. от выбора e_α. Далее будет дана подробная классификация для $n = 4$ — случай, наиболее интересный в физических приложениях.

Проиллюстрируем введенные выше понятия на простом примере пространств постоянной кривизны S_n. Если V_n есть S_n, то

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \tag{16.8}$$

и, следовательно, λ-матрица будет иметь вид:

$$((K - \lambda)\, g_{ab}).$$

Вводя в точке P орторепер (16.5), приведем эту матрицу к диагональному виду, и поэтому все элементарные делители будут *простыми* (в первой степени) с базисами, равными K, и характеристикой $[(1, \ldots, 1)]$. Наоборот, если характеристика имеет такой вид, то (см. § 9)

$$g_{ab} = \sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_a \underset{\sigma}{\xi}_b, \quad R_{ab} = \sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\lambda} \underset{\sigma}{\xi}_a \underset{\sigma}{\xi}_b = K g_{ab} \qquad (\underset{\sigma}{\lambda} = K),$$

т. е. имеет место (16.8) и (при $n > 2$) пространство имеет постоянную риманову кривизну. Таким образом, *V_n при $n > 2$ будет S_n тогда и только тогда, когда характеристика λ-матрицы* (16.1) *имеет вид* $[(1, \ldots, 1)]$. В частности, V_n — плоское пространство, если базисы элементарных делителей равны нулю.

Задача

Если число элементарных делителей λ-матрицы равно p, а ранг матрицы (R_{ab}) равен r, то $r \geqslant \frac{n(n-1)}{2} - p$ [290].

§ 17. Стационарные кривизны

Базисы элементарных делителей λ_i λ-матрицы для любого V_n допускают простое геометрическое истолкование ([290], стр. 36—40).

Рассмотрим риманову кривизну пространства V_n в двумерном направлении, определяемом простым (однолистным) бивектором $V^{\alpha\beta} \doteq \underset{[1}{V^{\alpha}} \underset{2]}{V^{\beta}}$:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta} V^{\alpha\beta} V^{\gamma\delta}}{g_{\alpha\beta\gamma\delta} V^{\alpha\beta} V^{\gamma\delta}}, \tag{17.1}$$

где $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет вид (15.5). Будем понимать инвариант K в (17.1) в обобщенном смысле, именно предположим, что требование *простоты бивектора* $V^{\alpha\beta}$ *снимается*. Инвариант K, определяемый (17.1), при таком предположении назовем *бивекторной кривизной* V_n *в направлении данного бивектора*. Отображая на бивекторное пространство R_N, получим:

$$K = \frac{R_{ab} V^a V^b}{g_{ab} V^a V^b} \qquad (a, b = 1, \ldots, N). \tag{17.2}$$

Поставим себе задачей определить критические значения K, если рассматривать этот инвариант как однородную функцию нулевого измерения от V^a, что равносильно нахождению тех векторов V^a, для которых K принимает критические значения. Условимся критические значения K называть *стационарными кривизнами* пространства V^n в данной точке, а векторы V^a, отвечающие критическим значениям K, — *стационарными векторами* R_N (или *стационарными непростыми бивекторами* в V_n в данной точке). Если, в частности, некоторой стационарной кривизне отвечает вектор V^a, определяющий в V_n простой бивектор $V^{\alpha\beta}$, то эта стационарная кривизна совпадает с римановой кривизной V_n в двумерном направлении $V^{\alpha\beta}$.

В зависимости от того, будем ли мы требовать простоты бивектора или нет, получим две различные задачи. Если понимать K в смысле Римана, то придем к задаче определения *условно-стационарных направлений*. Если же иметь в виду *бивекторную* кривизну, то вопрос приводится к определению *безусловно-стационарных* V^{α}, и в этом случае необходимые и достаточные условия стационарности V^a выражаются уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial V^a} K = 0. \tag{17.3}$$

Таким образом, предполагается, что K — *непрерывно дифференцируемая* функция V^a. Необходимо иметь в виду, что при *неопределенной* метрике пространства V_n возможно появление *изотропных* стационарных направлений

$$g_{ab} V^a V^b = 0. \tag{17.4}$$

Мы исключим сначала этот случай из рассмотрения с тем, чтобы вернуться к нему ниже. Выполняя в (17.3) дифференцирование для K, определенного выражением (17.2), получим:

$$(R_{ab} - K g_{ab}) V^b = 0, \tag{17.5}$$

т. е. приходим к уравнениям, определяющим собственные направления тензора R_{ab} в R_N. Стационарные кривизны при этом совпадают с характеристическими числами уравнения (16.3), т. е. λ суть *стационарные кривизны* V_n. Если $n > 3$, то стационарному направлению в V_n будет отвечать, вообще, непростой бивектор.

Предположим теперь, что имеет место (17.4). Нас интересуют только те направления V^a, для которых K меняется непрерывно, и следовательно, если имеет место (17.4), необходимо, чтобы

$$R_{ab} V^a V^b = 0 \tag{17.6}$$

для *изотропного* стационарного V^a.

Тогда, имея в виду непрерывную дифференцируемость K по V^a, значение K для изотропного стационарного направления можно вычислить, исходя из соотношения

$$K(V^a) = \lim_{dV^a \to 0} K(V^a + dV^a).$$

Обозначая

$$\varphi = g_{ab} V^a V^b, \quad \psi = R_{ab} V^a V^b,$$

получим:

$$K(V^a) = \lim_{dV^a \to 0} \frac{\psi(V^a + dV^a) - \psi(V^a)}{\varphi(V^a + dV^a) - \varphi(V^a)} = \lim \frac{\left(\sum \frac{\partial}{\partial V^c} \psi\right) dV^c + \ldots}{\left(\sum \frac{\partial}{\partial V^c} \varphi\right) dV^c + \ldots}.$$

Так как этот предел не может зависеть от способа изменения dV^c, то

$$K(V^a) = \frac{\frac{\partial}{\partial V^c} \psi}{\frac{\partial}{\partial V^c} \varphi} = \frac{R_{cb} V^b}{g_{cb} V^b} \qquad (b,\ c = 1,\ \ldots,\ N),$$

т. е. снова приходим к (17.5): изотропный стационарный бивектор также определяет направление R_{ab}, а соответствующая стационарная кривизна совпадает с базисом *непростого* элементарного делителя (см. § 9). Таким образом, *стационарные направления* V_n *совпадают с главными направлениями* R_{ab} *в* R_N, *а стационарные кривизны — с базисами элементарных делителей, и следовательно, число их* $\leqslant N=\frac{n(n-1)}{2}$. При неопределенной метрике V_n стационарные кривизны будут, вообще говоря, *комплексными*, так же как и отвечающие им стационарные бивекторы в V_n.

§ 18. Классификация пространств Эйнштейна в случае $n=4$

Для четырехмерных пространств Эйнштейна над полем вещественных чисел могут иметь место три принципиально различных типа сигнатур (с точностью до умножения ds^2 на -1):

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & ++++, \\ (\beta) & ---+, \\ (\gamma) & --++. \end{array}\right\} \qquad (18.1)$$

Рассмотрим каждую из этих трех возможностей. Если имеет место случай (α) — *определенно-положительной метрики*, то можно в данной точке ввести такой неголономный ортогональный репер, относительно которого $g_{\alpha\alpha}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ и, следовательно,

$$g_{aa}=1, \quad g_{ab}=0 \qquad (a,\ b\neq).$$

Тогда (см. § 9) λ-матрица имеет только простые элементарные делители с вещественными стационарными кривизнами; характеристика должна иметь вид $[1\ 1\ 1,\ 1\ 1\ 1]$. Таким образом, *в случае сигнатуры* $(++++)$ *существует один тип пространства Эйнштейна.*

Переходим к рассмотрению (β) — сигнатуры *пространств Минковского*. В этом случае в каждой точке пространства T (или $\overset{*}{T}$), определяемого полем тяготения, можно ввести *вещественный* неголономный орторепер, относительно которого

$$(g_{\alpha\beta})_p=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (18.2)$$

Тогда относительно орторепера (18.2) в бивекторном пространстве R_6 получим в силу (15.5)

$$(g_{ab})=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{18.3}$$

т. е. g_{ab} определяет неопределенную метрику. Мы раз и навсегда для $n=4$ вводим следующую *нумерацию собирательных индексов* в R_6:

$$14 \to 1, \quad 24 \to 2, \quad 34 \to 3, \quad 23 \to 4, \quad 31 \to 5, \quad 12 \to 6. \tag{18.4}$$

Покажем, что имеет место теорема: *матрица* (R_{ab}) *для орторепера* (18.2) *будет симметрично-сдвоенной*,

Так как для орторепера (18.2) контравариантные компоненты метрического тензора совпадают с ковариантными, то, записывая уравнения поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, получаем две группы уравнений:

$$\text{(I)}\ \sum_\sigma \underset{\sigma}{e}\, R_{\alpha\sigma\beta\sigma}=0 \qquad (\alpha\neq\beta),$$

$$\text{(II)}\ \sum_\sigma \underset{\sigma}{e}\, R_{\alpha\sigma\alpha\sigma}=\varkappa e_\alpha, \quad e_\alpha=\pm 1.$$

Полагая для уравнений (I) $\alpha, \beta=1, 2, 3, 4$ и записывая в собирательных индексах (18.4), получим:

$$R_{12}+R_{45}=R_{13}+R_{46}=R_{23}+R_{56}=R_{15}-R_{24}=$$
$$=R_{16}-R_{34}=R_{26}-R_{35}=0. \tag{18.5}$$

Система (II) *в собирательных индексах* запишется:

$$\begin{gathered} R_{11}+R_{44}=R_{22}+R_{55}=R_{33}+R_{66}=0, \\ R_{11}+R_{22}+R_{33}=-\varkappa. \end{gathered} \tag{18.6}$$

Кроме того, нужно учесть тождество $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0$, которым завершаются *все ограничения*, накладываемые на тензор R_{ab}; это дает еще *в собирательных индексах*

$$R_{14}+R_{25}+R_{36}=0. \tag{18.7}$$

Поэтому, если ввести обозначения:

$$R_{ab}=m_{ab}, \quad R_{a,\, b+3}=n_{ab}, \quad a,\ b\leqslant 3, \tag{18.8}$$

то из (18.5) — (18.7) следует:

$$(R_{ab})=\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline N & -M \end{array}\right), \tag{18.9}$$

где M и N — две *симметрические* квадратные матрицы третьего порядка

$$M=(m_{ab}),\quad N=(n_{ab}),\quad m_{ab}=m_{ba},\quad n_{ab}=n_{ba} \tag{18.10}$$
$$(a,\ b=1,\ 2,\ 3).$$

При этом имеют место соотношения

$$\sum_{s=1}^{3} m_{ss}=-\varkappa,\qquad \sum_{s=1}^{3} n_{ss}=0; \tag{18.11}$$

это доказывает теорему. Заметим, что к симметрично-сдвоенным матрицам, при *дополнительном*, однако, *условии их ортогональности*, пришел Каган ([87], стр. 1—24) при изучении группы лоренцевых преобразований. Изучением такого рода матриц, при том же предположении об ортогональности, занимались также Дубнов ([90], стр. 33—54) и Лопшиц ([94], стр. 186—187).

Дифференцируя уравнения (13.2) k раз ковариантно, получим:

$$R_{\alpha\beta,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}=0.$$

После этого, вводя, как и выше, собирательные индексы в ортореперe (18.2) (для кососимметрических пар, стоящих *до запятой*), можно повторить все рассуждения с той лишь разницей, что $\varkappa$ нужно положить равной нулю, а компоненты m_{ab} и n_{ab} придется снабдить сложными указателями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Следовательно, *матрица* $(R_{ab,\,\lambda_1\ldots\lambda_k})$ *для любой фиксированной комбинации индексов* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *относительно орторепера* (18.2) *будет симметрично-сдвоенной*:

$$(R_{ab,\,\lambda_1\ldots\lambda_k})=\left(\begin{array}{c|c} M_{,\,\lambda_1\ldots\lambda_k} & N_{,\,\lambda_1\ldots\lambda_k} \\ \hline N_{,\,\lambda_1\ldots\lambda_k} & -M_{,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}\end{array}\right), \tag{18.12}$$

где

$$\sum_{a=1}^{3} m_{aa,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}=\sum_{a=1}^{3} n_{aa,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}=0 \tag{18.13}$$

и

$$m_{ab,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}=m_{ba,\,\lambda_1\ldots\lambda_k},\quad n_{ab,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}=n_{ba,\,\lambda_1\ldots\lambda_k}$$
$$(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6;\ \lambda_i=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Теперь можно доказать основную теорему, решающую вопрос об общей классификации четырехмерных пространств Эйнштейна с сигнатурой $(---+)$ в смысле алгебраической структуры тензора кривизны.

Теорема. *Существует три и только три типа пространств, определяемых полями тяготения* $(R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta})$ *с сигнатурой* $(---+)$.

Так как для (18.2) (g_{ab}) можно записать

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

где ε — трехмерная единичная матрица, то λ-матрицу можно записать в виде:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=\left(\begin{array}{c|c} M+\lambda\varepsilon & N \\ \hline N & -M-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Воспользуемся так называемыми *элементарными преобразованиями*, не меняющими элементарных делителей и характеристики λ-матриц ([102], стр. 34). Прибавляя к матрицам, принадлежащим к первому столбцу, матрицы второго столбца, умноженные на i, получим:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & N \\ \hline -i(M+iN+\lambda\varepsilon) & -M-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Прибавляя к матрицам второй строки соответственные матрицы первой строки, также умноженные на i, приведем матрицу к виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & N \\ \hline 0 & -M+iN-\lambda\varepsilon \end{array}\right).$$

Умножая матрицы первого столбца на $i/2$ и прибавляя к соответствующим матрицам второго столбца и затем проделывая то же самое (с точностью до нумерации строк) с последними, получим следующую матрицу, эквивалентную с точностью до элементарных преобразований исходной λ-матрице:

$$\left(\begin{array}{c|c} M+iN+\lambda\varepsilon & 0 \\ \hline 0 & M-iN+\lambda\varepsilon \end{array}\right)\equiv\begin{pmatrix} Q(\lambda) & 0 \\ 0 & \bar{Q}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{18.14}$$

Задача свелась к исследованию двух трехмерных λ-матриц $Q(\lambda)$ и $\bar{Q}(\lambda)$, соответствующие элементы которых комплексно сопряжены. Отсюда следует, что и элементарные делители этих матриц также комплексно сопряжены, и, следовательно, их характеристики имеют одинаковый вид. Таким образом, характеристика нашей λ-матрицы распадается на две *повторяющие друг друга части*.

Трехмерная матрица $Q(\lambda)$ может иметь только один из трех возможных типов характеристик: 1°. [111], 2°. [2 1], 3°. [3]; мы при этом оставляем в стороне случаи, когда некоторые из элементарных делителей имеют одинаковый базис и, следовательно, некоторые из чисел, стоящих в квадратных скобках, придется заключить в круглые скобки (например, [(11) 1], [(2 1)] и т. д.), так как это будут возможные частные случаи. Матрица $\bar{Q}(\lambda)$ имеет соответственно те же характеристики. Тогда исходная λ-матрица может иметь только одну из следующих характеристик:

$$1^\circ.\ [111,\ \overline{111}],\ 2^\circ.\ [21,\ \overline{21}],\ 3^\circ.\ [3,\ 3].$$

Черта над второй половиной характеристики означает, что тут имеют место элементарные делители с базисами, комплексно-сопряженными базисам элементарных делителей, отвечающих первой половине характеристики. Для третьего типа черта отсутствует, так как в этом случае элементарные делители всегда имеют вещественные базисы, как это будет показано в следующем параграфе. В следующей главе будут даны примеры пространств каждого из этих трех типов, так что ни один из этих типов не является пустым множеством. Это доказывает теорему, полученную автором в 1949 г., с предварительной публикацией в 1950 г. [192], [197], [198]. В 1954 г. автором был дан второй вариант доказательства, воспроизведенный выше [228], и одновременно третий — Норденом [227], исходившим из исследуемых им бипланарных пространств. В 1957 г. четвертый вариант доказательства (при $\varkappa=0$) был дан Жеэньо ([297], стр. 723—724). Физические применения этой теоремы даны Пирани [306] и другими авторами [332], [348], [380], [362].

Будем везде далее пространства T (когда $R_{\alpha\beta}=0$) и $\overset{*}{T}$ (когда $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$) снабжать индексом, обозначающим тип этого пространства: $\overset{*}{T}_i$, T_i $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Переходим к рассмотрению случая (γ) — с сигнатурой метрики типа $(--++)$.

Для метрики с такой сигнатурой матрицу $(g_{\alpha\beta})$ в точке можно задать в виде:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(g^{\alpha\beta}), \tag{18.15}$$

и, следовательно,

$$(g_{ab})=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}. \tag{18.16}$$

Записывая для метрики (18.15) относительного этого неголономного орторепера уравнения $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, получим для матрицы (R_{ab}), при обозначениях (18.8), выражение

$$(R_{ab}) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & -n_{31} & -n_{32} & n_{33} \\ \hline n_{11} & n_{12} & -n_{13} & m_{11} & m_{12} & -m_{13} \\ n_{21} & n_{22} & -n_{23} & m_{21} & m_{22} & -m_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & -m_{31} & -m_{32} & m_{33} \end{array} \right\|, \tag{18.17}$$

где

$$m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}, \quad n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha},$$

причем

$$\left.\begin{aligned} -m_{11} - m_{22} + m_{33} &= \varkappa, \\ n_{11} + n_{22} + n_{33} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18.18}$$

Следовательно, λ-матрица, определяющая структуру пространства, в силу (18.16) запишется:

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc|ccc} m_{11}+\lambda & m_{12} & m_{13} & n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ m_{21} & m_{22}+\lambda & m_{23} & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33}-\lambda & -n_{31} & -n_{32} & n_{33} \\ \hline n_{11} & n_{12} & -n_{13} & m_{11}+\lambda & m_{12} & -m_{13} \\ n_{21} & n_{22} & -n_{23} & m_{21} & m_{22}+\lambda & -m_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & -m_{31} & -m_{32} & m_{33}-\lambda \end{array} \right\|. \tag{18.19}$$

Прежде чем переходить к исследованию матрицы (18.19), сделаем следующее замечание. Наряду с комплексными числами, можно, обобщая вопрос, рассматривать числа вида:

$$a + eb,$$

где a и b — вещественные числа, а для e можно выдвигать различные условия о значении квадрата этой величины. Условимся о следующей терминологии: все числа вида $a + eb$, где a, b — вещественные числа, будем называть *бинарными*; в зависимости от значения e^2 получим следующие случаи:

$e^2 = -1$ — комплексные числа;

$e^2 = 0$ — дуальные числа;

$e^2 = 1$ — двойные числа.

Проделаем над λ-матрицей *последовательно* следующие операции: 1) умножим шестую строку и шестой столбец на -1, 2) умножим последние три столбца на e и прибавим к соответствующим первым трем столбцам, 3) умножим первые три строки на $-e$ и прибавим к соответствующим последним строкам, 4) прибавим три первых столбца, умноженные на $-\frac{e}{2}$, к трем соответствующим последним столбцам, 5) прибавим три последние строки, умноженные на $\frac{e}{2}$, к трем первым, 6) разделим строки и столбцы на численные множители, по величине отличные от нуля. Тогда, если потребовать, чтобы

$$e^2=1,$$

и рассматривать двойные числа (Б. А. Розенфельд [253], стр. 441—444), то

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})\approx\begin{pmatrix}P(\lambda) & 0\\ 0 & \bar{P}(\lambda)\end{pmatrix},$$

где

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}m_{11}+en_{11}+\lambda & m_{12}+en_{12} & m_{13}-en_{13}\\ m_{21}+en_{21} & m_{22}+en_{22}+\lambda & m_{23}-en_{23}\\ m_{31}-en_{31} & m_{32}-en_{32} & m_{33}-en_{33}-\lambda\end{pmatrix},$$

причем

$$m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha},\quad n_{\alpha\beta}=n_{\beta\alpha},$$

а $\bar{P}(\lambda)$ — *двойственно-сопряженная* матрица, т. е. получающаяся от замены во всех элементах $P(\lambda)$ e на $-e$. Особенностью алгебры двойных чисел является то, что в ней имеются элементы, отличные от нуля, «модуль» которых $z\bar{z}=0$; они не имеют обратных элементов и являются делителями нуля. Бинарные числа при $e^2=1$ (двойные) впервые рассматривались Клиффордом ([69], стр. 203—221) и систематически применялись в геометрии А. П. Котельниковым [9], [12].

Алгебра двойных чисел, за исключением (18.19), строится аналогично алгебре комплексных чисел. В частности, если имеется рациональная функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то $f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_k)=$ $=\bar{f}(z_1, z_2, \ldots, z_k)$. Следовательно, элементарные делители (стационарные кривизны) $P(\lambda)$ и $\bar{P}(\lambda)$ двойственно сопряжены, а их характеристики в силу этого совпадают. Таким образом, имеет место теорема: *существует, в смысле структуры тензора кривизны, три и только три типа пространств Эйнштейна с сигнатурой формы $(--++)$, которые определяются характеристиками λ-матрицы $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$:*

$$1^\circ.\ [111,\ \overline{111}],\quad 2^\circ.\ [21,\ \overline{21}],\quad 3^\circ.\ [3,\ 3].$$

Для четырехмерных пространств Эйнштейна с сигнатурами $(----+)$ и $(---++)$ имеем аналогию в смысле числа различных типов, но, в то время как для сигнатуры Минковского λ-матрица отображается с помощью (18.14) на *трехмерное метрическое комплексное пространство*, для второй сигнатуры имеем отображение на *трехмерное метрическое пространство двойных чисел.*

Над полем комплексных чисел матрица (18.19) не будет симметрично-сдвоенной.

§ 19. Канонический вид матриц (R_{ab}) для пространств T_i и $\overset{*}{T}_i$

Так как число независимых компонент тензора кривизны пространства V_n равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, то для $n=4$ получим 20 существенных компонент. Десять уравнений поля для постранств $\overset{*}{T}_i$ снижают это число до 10. Однако в нашем распоряжении остаются еще шесть произвольных параметров, определяющих шесть степеней свободы в выборе ортореперов. Геометрически эти параметры могут быть истолкованы как три пространственных и три лоренцевых вращения, допустимых при выборе ортсрепера. Таким образом, *в каждой точке пространства $\overset{*}{T}$ тензор кривизны полностью определяется заданием не более чем четырех параметров* (не считая параметра $\varkappa$ для пространств $\overset{*}{T}$). Зависимость компонент от этих параметров нужно поставить в связь с типом пространства. Будем исследовать пространства $\overset{*}{T}_i$, так как для T_i результат получим, полагая $\varkappa=0$.

1. *Пространства $\overset{*}{T}_1$ с характеристикой* $[111, \overline{111}]$. Так как в этом случае характеристика простого типа, то тензор R_{ab} $(a, b = 1, \ldots, 6)$ в бивекторном пространстве имеет шесть неизотропных взаимно ортогональных направлений (см. § 9). Эти главные направления R_6 в данной точке $\overset{*}{T}_1$ определяют бивекторы специфического строения.

Обозначим компоненты вещественного ортарепера в точке $\overset{*}{T}_1$ через $\underset{\alpha}{\xi}^{\sigma}$ $(\alpha, \sigma = 1, 2, 3, 4)$, а *простые* бивекторы $\underset{[\alpha}{\xi}^{\sigma}\underset{\beta]}{\xi}^{\tau}$, определяющие двумерные плоскости, образуемые координатными векторами этого неголономного ортарепера, будем обозначать $\underset{\alpha\beta}{\xi}^{\sigma\tau}$. В R_6 эти *простые* бивекторы определят шесть независимых вещественных неизотропных взаимно ортогональных координатных векторов $\underset{c}{\xi}^{a}=\delta_c^a$, и любой вектор R_6 (в частности, и собственные векторы R_{ab}) может быть разложен по векторам $\underset{c}{\xi}^a$. Покажем, что в качестве собственных векторов (они определяются однозначно только в том случае, если корни уравнения $|R_{ab}-\lambda g_{ab}|=0$ различны) можно взять векторы вида

$$w^a=\sigma(\underset{1}{\xi}^a\pm i\underset{4}{\xi}^a)+\mu(\underset{2}{\xi}^a\pm i\underset{5}{\xi}^a)+\nu(\underset{3}{\xi}^a\pm i\underset{6}{\xi}^a)\qquad(a=1,\ \ldots,\ 6).\quad(19.1)$$

В самом деле, условие того, что w^a является собственным вектором R_{ab}, запишется так:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})w^b=0.\qquad(19.2)$$

Но эта система шести уравнений в силу симметричной сдвоенности λ-матрицы сводится к трем уравнениям, как это следует из (18.8) и (18.9):

$$\sigma(m_{a1}\pm in_{a1}+\lambda\delta_{a1})+\mu(m_{a2}\pm in_{a2}+\lambda\delta_{a2})+\nu(m_{a3}\pm in_{a3}+\lambda\delta_{a3})=0$$
$$(a=1,\ 2,\ 3).$$

Для того чтобы σ, μ, ν были ненулевыми решениями *этой* системы, необходимо и достаточно, чтобы число λ было корнем одного из уравнений $Q(\lambda)=0$ или $\overline{Q}(\lambda)=0$, т. е. корнем характеристического уравнения, что доказывает утверждение.

Вектору W^a в данной точке $\overset{*}{T}_1$ будет соответствовать бивектор полного ранга

$$W^{\alpha\beta}=\sigma(\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta})+\mu(\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta})+\nu(\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}\pm i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}).\qquad(19.3)$$

Нетрудно убедиться, что при любом ортогональном преобразовании $W^{\alpha\beta}$ преобразуется в бивектор той же структуры, а σ, μ, ν переходят соответственно в $\overset{*}{\sigma}$, $\overset{*}{\mu}$, $\overset{*}{\nu}$, так что норма бивектора остается инвариантной:

$$\sigma^2+\mu^2+\nu^2=\overset{*}{\sigma}{}^2+\overset{*}{\mu}{}^2+\overset{*}{\nu}{}^2.$$

Пусть корням $\underset{s}{\lambda}$ $(s=1,\ 2,\ 3)$ уравнения $(R_{ab}-\lambda g_{ab})=0$ отвечают собственные векторы $\underset{s}{W}^a$; тогда корням $\underset{s+3}{\lambda}$ должны отвечать собственные векторы с комплексно-сопряженными компонентами $\underset{s}{\overline{W}}{}^a$.

Представим бивектор $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ в виде комбинации двух вещественных бивекторов

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta}=\underset{1}{V}^{\alpha\beta}+i\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta},$$

тогда

$$\underset{4}{W}^{\alpha\beta}=\underset{1}{V}^{\alpha\beta}-i\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}.$$

Полагая $\sigma = \underset{1}{a} + i\underset{1}{b}$, $\mu = \underset{2}{a} + i\underset{2}{b}$, $\nu = \underset{3}{a} + i\underset{3}{b}$, где $\underset{s}{a}$ и $\underset{s}{b}$ — вещественные числа ($s = 1, 2, 3$), найдем:

$$\underset{1}{V}^{\alpha\beta} = \underset{1}{a}\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{2}{a}\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{3}{a}\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta} - \underset{1}{b}\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta} - \underset{2}{b}\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta} - \underset{3}{b}\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta},$$

$$\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta} = \underset{1}{b}\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{2}{b}\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{3}{b}\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{1}{a}\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{2}{a}\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta} + \underset{3}{a}\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Так как $\underset{1}{W}^a$ — неизотропный вектор R_6 (см. § 9), то всегда можно считать, что это единичный вектор: $g_{ab}\underset{1}{W}^a\underset{1}{W}^b = 1$ $(a, b = 1, \ldots, 6)$; отсюда следует, что

$$\sum_{s=1}^{3} \underset{s}{a}\underset{s}{b} = 0, \quad \sum_{s=1}^{3} (\underset{s}{b}^2 - \underset{s}{a}^2) > 0. \tag{19.4}$$

Введем понятия *степени параллелизма и степени ортогональности* бивекторов и соответствующие обозначения. Пусть даны два, вообще говоря *непростых*, бивектора и поэтому (при $n = 4$) принадлежащих плоским пучкам размерности $\leqslant 4$. Если пучки, в которых лежат бивекторы, имеют k общих направлений, то будем говорить, что степень параллелизма этих бивекторов равна $\frac{k}{s}$, где s — размерность того из двух пучков, которая меньше. Точно так же, если эти бивекторы лежат в плоских пучках ε_p и ε_q $(p \leqslant q)$ и если в ε_p существует s независимых направлений, ортогональных к ε_q (т. е. ко всем направлениям ε_q), то будем говорить, что эти бивекторы $\frac{s}{p}$-*ортогональны*.

Покажем, во-первых, что бивекторы $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$ и $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$ *простые*, т. е. лежат в двумерных плоских пучках. Для того чтобы кососимметрический тензор $u^{\alpha\beta}$ (бивектор) был *простым*, т. е. равнялся бы альтернированному произведению двух векторов $\eta^{[\alpha}\gamma^{\beta]}$, необходимо и достаточно (для $n = 4$), чтобы выполнялось условие

$$u^{14}u^{23} + u^{24}u^{31} + u^{34}u^{12} = 0. \tag{19.5}$$

Разлагая определитель

$$\begin{vmatrix} \underset{1}{u}^1 & \underset{1}{u}^2 & \underset{1}{u}^3 & \underset{1}{u}^4 \\ \underset{2}{u}^1 & \underset{2}{u}^2 & \underset{2}{u}^3 & \underset{2}{u}^4 \\ \underset{1}{u}^1 & \underset{1}{u}^2 & \underset{1}{u}^3 & \underset{1}{u}^4 \\ \underset{2}{u}^1 & \underset{2}{u}^2 & \underset{2}{u}^3 & \underset{2}{u}^4 \end{vmatrix} \equiv 0$$

по минорам первых двух строк, получим (19.5). Наоборот, если (19.5) имеет место, то всегда можно найти два вектора η^α и γ^α такие, что $u^{\alpha\beta}=\eta^{[\alpha}\gamma^{\beta]}$; для $n=4$ это проверяется непосредственно. Записывая (19.5) для $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$ и $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$, убедимся, что оно удовлетворяется в силу первого из условий (19.4): каждый из бивекторов $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$ и $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$ лежит в двумерном плоском пучке.

Покажем, что эти бивекторы $\frac{0}{2}$-*параллельны*. Они не могут быть $\frac{2}{2}$-параллельными, так как тогда их компоненты были бы пропорциональными и в силу этого обращались в нуль. Они не могут быть также и $\frac{1}{2}$-параллельными, так как тогда $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$ был бы простым бивектором, но в этом случае условие (19.5) противоречило бы (19.4). Следовательно, остается только возможность $\frac{0}{2}$-параллелизма.

Эти бивекторы $\frac{2}{2}$-ортогональны, т. е. любой вектор, лежащий в плоскости $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$, ортогонален любому вектору, лежащему в плоскости бивектора $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы при любых α и β имело место равенство (см. задачу 6 § 19)

$$\underset{1}{V}_{\alpha\beta}\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\beta\delta}=0.$$

Легко убедиться, что это условие является следствием (19.4).

Рассмотрим простой бивектор $\underset{1}{V}^{\alpha\beta}$. Его норма вследствие (19.4)

$$g_{ab}\underset{1}{V}^a\underset{1}{V}^b=\sum_1^3\left(b_s^2-a_s^2\right)>0.$$

В плоскости этого вещественного бивектора всегда можно выбрать два вещественных, ортогональных и неизотропных вектора η^α, γ^α. Тогда норма этого бивектора может быть также выражена в виде $2\eta_\sigma\eta^\sigma\gamma_\tau\gamma^\tau$. Следовательно, эти два вектора имеют нормы одного знака. Имея в виду сигнатуру формы $(---+)$ и *закон инерции* при вещественных преобразованиях, можно утверждать, что нормы этих двух векторов меньше нуля. Перенормировав эти два вектора, их можно принять за векторы $\underset{2}{\xi}^\alpha$ и $\underset{3}{\xi}^\alpha$ орторепера.

Точно так же в плоскости $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{\alpha\beta}$ определим два ортогональных вектора, вещественных и неизотропных, но уже с нормами противоположного знака, так как $g_{ab}\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^a\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^b < 0$; эти векторы назовем $\underset{1}{\xi}{}^\alpha$ и $\underset{4}{\xi}{}^\alpha$. В этой неголономной системе отнесения

$$\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{14}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{23}{\xi}{}^{\alpha\beta}, \quad \underset{4}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{14}{\xi}{}^{\alpha\beta} - i\underset{23}{\xi}{}^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что орторепер $\{\underset{\sigma}{\xi}{}^\alpha\}$ выбран лишь с точностью до вращения в плоскости $\{\underset{2}{\xi}\underset{3}{\xi}\}$ и лоренцева вращения в плоскости $\{\underset{1}{\xi}\underset{4}{\xi}\}$. Так как $\underset{2}{W}{}^{\alpha\beta}$ должен быть ортогональным к $\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}$ (см. § 9), то

$$\underset{2}{W}{}^{\alpha\beta} = \mu_2\left(\underset{24}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}{}^{\alpha\beta}\right) + \nu_2\left(\underset{34}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{12}{\xi}{}^{\alpha\beta}\right).$$

Пользуясь указанным выше произволом, не меняющим вида $\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}$ и, следовательно, $\underset{2}{W}{}^{\alpha\beta}$, всегда можно обратить ν_2 в нуль, а μ_2 в 1 (см. задачу 1 в этом параграфе). Тогда, учитывая еще и ортогональность $\underset{3}{W}{}^{\alpha\beta}$ к двум первым бивекторам (в R_6), получим:

$$\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{14}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{23}{\xi}{}^{\alpha\beta}, \quad \underset{2}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{24}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{31}{\xi}{}^{\alpha\beta}, \quad \underset{3}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{34}{\xi}{}^{\alpha\beta} + i\underset{12}{\xi}{}^{\alpha\beta}$$

и, вследствие комплексной сопряженности,

$$\underset{4}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{1}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta}, \quad \underset{5}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{2}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta}, \quad \underset{6}{W}{}^{\alpha\beta} = \underset{3}{\overline{W}}{}^{\alpha\beta}.$$

Теперь, записывая условия (19.2) для каждого из этих бивекторов и учитывая, что $\underset{p}{\xi}{}^a = \delta_p^a$ $(a,\ p = 1,\ \ldots,\ 6)$, без труда найдем, что

$$m_{ss} = \alpha_s, \quad m_{st} = n_{st} = 0 \quad (s,\ t \neq), \quad n_{ss} = \beta_s \quad (s = 1,\ 2,\ 3),$$

где α_s и β_s — вещественные и мнимые части стационарных кривизн $\overset{*}{T}_1$ (корней характеристического уравнения). Следовательно, *для пространств типа* $\overset{*}{T}_1$ *матрица* (R_{ab}) $(a,\ b = 1,\ \ldots,\ 6)$ *в некотором неголономном орторепере имеет следующую каноническую форму*:

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \qquad (19.6)$$

где

$$\sum_1^3 \alpha_s = -\varkappa, \qquad \sum_1^3 \beta_s = 0. \qquad (19.7)$$

В этом случае имеется четыре независимых параметра, определяющих *инвариантным образом* структуру пространства; это максимальное число, так как для $\overset{*}{T}_2$ и $\overset{*}{T}_3$ оно будет меньше.

2. *Пространства* $\overset{*}{T}_2$; *характеристика* λ-*матрицы* $[2\ 1,\ \overline{2\ 1}]$. Как было показано выше, за собственные векторы и инвариантные пучки λ-матрицы можно взять собственные векторы и инвариантные пучки матриц $Q(\lambda)$ и $\overline{Q}(\lambda)$. Отсюда следует, что достаточно изучить, например, λ-матрицу $Q(\lambda)$, имеющую элементами комплексные числа, и характеристику $[2\ 1]$. При такой характеристике тензор

$$p_{ij} = m_{ij} + in_{ij}$$

трехмерного пространства (см. § 9) имеет одно собственное *неизотропное* направление

$$(p_{ij} - \lambda g_{ij}) \underset{1}{W}^j = 0, \tag{19.8}$$

одно *ортогональное* к $\underset{1}{W}^j$ *изотропное* собственное направление $\underset{2}{W}^i$

$$(p_{ij} - \underset{2}{\lambda} g_{ij}) \underset{2}{W}^j = 0 \tag{19.9}$$

и, кроме того, существует *изотропный* вектор $\underset{3}{W}^j$, ортогональный к $\underset{1}{W}^j$ и не ортогональный к $\underset{2}{W}^j$, который вместе с $\underset{2}{W}^j$ образует *инвариантный* пучок $\{\underset{2}{W}, \underset{3}{W}\}$ тензора p_{ij}, что выражается соотношением

$$(p_{ij} - \underset{2}{\lambda} g_{ij}) \underset{3}{W}^j = \rho \underset{2}{W}_i, \tag{19.10}$$

где ρ — некоторый скаляр, *отличный от нуля* (иначе $\underset{3}{W}$ также определял бы собственное направление); его выбор в остальном произволен. Произвол этот является следствием того, что $\underset{2}{W}^i$ и $\underset{3}{W}^i$, будучи изотропными, могут быть умножены на любое число, отличное от нуля, без изменения нормы.

Всякое собственное направление или пучок тензора p_{ij} будут определять собственное направление и инвариантные пучки R_{ab} в R_6; все эти векторы будут иметь структуры (19.3), как показано в начале этого параграфа.

Пусть корню λ отвечает простой элементарный делитель $(\lambda - \underset{1}{\lambda})$ λ-матрицы и собственное направление, определяемое бивектором $\underset{1}{W}^{\alpha\beta}$. Так как этот бивектор *неизотропный*, то к нему применимы все рассуждения, проведенные выше для $\underset{1}{W}$ в случае пространств $\overset{*}{T}_1$. Следовательно, можно выбрать такой вещественный орторепер, определяемый с точностью до вращения в двумерной плоскости $\{\underset{2}{\xi}\,\underset{3}{\xi}\}$ и лоренцева вращения в $\{\underset{1}{\xi}\,\underset{4}{\xi}\}$, относительно которого

$$\underset{1}{W}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}^{\alpha\beta}.$$

Тогда вследствие ортогональности $\underset{1}{W}$ к $\underset{2}{W}$ и $\underset{3}{W}$ получим:

$$\underset{s}{W}^{\alpha\beta}=\mu_s\bigl(\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}\bigr)+\nu_s\bigl(\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}\bigr)\qquad(s=2,\ 3).$$

Условия изотропности этих бивекторов приводят к соотношениям

$$\nu_2=e_2 i\mu_2,\qquad \nu_3=e_3 i\mu_3,$$

где e_2 и e_3 равны ± 1. Записывая также тот факт, что $\underset{2}{W}$ и $\underset{3}{W}$ не ортогональны, получим $e_3=-e_2$. Следовательно, можно, например, положить:

$$\underset{2}{W}^{\alpha\beta}=\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}-\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta},$$
$$\underset{3}{W}^{\alpha\beta}=\sigma\bigl\{\underset{24}{\xi}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}^{\alpha\beta}-i\underset{34}{\xi}^{\alpha\beta}+\underset{12}{\xi}^{\alpha\beta}\bigr\},$$

где σ — произвольный скалярный множитель $\neq 0$. Записывая условия, аналогичные (19.8), (19.9) и (19.10), но уже для тензора R_{ab} в R_6, получим:

$$\left.\begin{aligned}(R_{ab}-\underset{1}{\lambda}g_{ab})\underset{1}{W}^b=0,\qquad (R_{ab}-\underset{2}{\lambda}g_{ab})\underset{2}{W}^b=0,\\ (R_{ab}-\underset{2}{\lambda}g_{ab})\underset{3}{W}^b=\sigma g_{ab}\underset{2}{W}^b.\end{aligned}\right\}\qquad(19.11)$$

Чтобы завершить нормировку изотропных векторов, можно например, положить $\sigma=1$, после чего *канонический* орторепер будет определен без какой-либо степени свободы. Так как $\underset{pq}{\xi}^{\alpha\beta}\to\underset{\rho}{\xi}^{a}=\delta^a_\rho$, а тензор g_{ab} имеет вид (18.3), то, полагая в (19.11) $a=1,\ldots,6$, получим систему уравнений, из которой без труда определим все компоненты R_{ab}. Они будут выражаться через вещественные и мнимые части стационарных кривизн:

$$\underset{1}{\lambda}=\alpha_1+i\beta_1,\qquad \underset{2}{\lambda}=\alpha_2+i\beta_2\qquad(\underset{2}{\lambda}\equiv\underset{3}{\lambda}).$$

Таким образом, получаем, что *для пространств* $\overset{*}{T}_2$ *канонический вид матрицы* (R_{ab}) *может быть представлен так*:

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ab})=\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ &M=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2-1 \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

где

$$\alpha_1+2\alpha_2=-\varkappa, \qquad \beta_1+2\beta_2=0. \tag{19.13}$$

3. *Пространства* $\overset{*}{T}_3$; *характеристика* [3, 3]. Для такой характеристики тензор p_{ij} имеет одно собственное направление $\underset{1}{W}{}^j$ и, кроме того, трехмерный *инвариантный* пучок, определяемый векторами $\{\underset{1}{W}, \underset{2}{W}, \underset{3}{W}\}$; эти векторы должны удовлетворять условиям (см. § 9)

$$\left.\begin{aligned} (p_{ij}-\underset{1}{\lambda}g_{ij})\underset{1}{W}{}^j=0, \qquad (p_{ij}-\underset{1}{\lambda}g_{ij})\underset{2}{W}{}^j=\sigma g_{ij}\underset{1}{W}{}^j, \\ (p_{ij}-\underset{1}{\lambda}g_{ij})\underset{3}{W}{}^j=\tau g_{ij}\underset{2}{W}{}^j, \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

где σ и τ — произвольные числа, отличные от нуля, и $i, j=1, 2, 3$. При этом вектор $\underset{2}{W}{}^j$ неизотропный, а $\underset{3}{W}{}^i$ изотропный. Кроме того, $\underset{1}{W}{}^j$ ортогонален к $\underset{2}{W}{}^j$ и не ортогонален к $\underset{3}{W}{}^j$, а $\underset{2}{W}{}^j$ ортогонален к $\underset{3}{W}{}^j$.

Так как $\underset{2}{W}{}^{\alpha\beta}$ — неизотропный бивектор, то, как и в двух предшествующих случаях, выбирая соответствующим образом репер с двумя степенями свободы, можно этот бивектор записать в виде:

$$\underset{2}{W}{}^{\alpha\beta}=\underset{24}{\xi}{}^{\alpha\beta}+i\underset{31}{\xi}{}^{\alpha\beta}.$$

Тогда для бивекторов $\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}$ и $\underset{3}{W}{}^{\alpha\beta}$, записывая указанные выше условия ортогональности и изотропности, получим выражения

$$\underset{1}{W}{}^{\alpha\beta}=\underset{14}{\xi}{}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}{}^{\alpha\beta}+i\underset{34}{\xi}{}^{\alpha\beta}-\underset{12}{\xi}{}^{\alpha\beta}, \qquad \underset{3}{W}{}^{\alpha\beta}=\rho\left\{\underset{14}{\xi}{}^{\alpha\beta}+i\underset{23}{\xi}{}^{\alpha\beta}-i\underset{34}{\xi}{}^{\alpha\beta}+\underset{12}{\xi}{}^{\alpha\beta}\right\},$$

где ρ — любое число, отличное от нуля. Далее исследование ведется по той же схеме, что и для предшествующих типов пространств

$\overset{*}{T}_1$ и $\overset{*}{T}_2$. Записываем условия, аналогичные (19.14), но уже в вещественном пространстве R_6, фиксирующие тот факт, что $\underset{1}{W}^a$ — собственный вектор R_{ab}, а векторы $\underset{2}{W}^a$ и $\underset{3}{W}^a$ вместе с $\underset{1}{W}^a$ определяют *инвариантный пучок* тензора R_{ab}. Эти условия суть:

$$\left.\begin{aligned} (R_{ab} - \underset{1}{\lambda} g_{ab}) \underset{1}{W}^b = 0, \qquad (R_{ab} - \underset{1}{\lambda} g_{ab}) \underset{2}{W}^b = \sigma g_{ab} \underset{1}{W}^b, \\ (R_{ab} - \underset{1}{\lambda} g_{ab}) \underset{3}{W}^b = \tau g_{ab} \underset{2}{W}^b, \end{aligned}\right\} \tag{19.15}$$

где σ и τ — числа, отличные от нуля.

Так как бивектору $\underset{\sigma\tau}{W}^{\alpha\beta}$ в данной точке $\overset{*}{T}_s$ отвечает в R_6 вектор $\underset{p}{W}^a$, а для координатного орторепера в R_6 $\underset{r\lambda}{\xi}^{\alpha\beta} \longleftrightarrow \underset{p}{\xi}^a = \delta^a_p$, то, записывая (19.15) при $a, b = 1, \ldots, 6$, получим систему, состоящую только из девяти независимых уравнений, которые, если R_{ab} выразить через m_{ij} и n_{ij}, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m_{11} + in_{11} + im_{13} - n_{13} &= -\lambda, \\ m_{12} + in_{12} + im_{23} - n_{23} &= 0, \\ m_{13} + in_{13} + im_{33} - n_{33} &= -i\lambda, \\ m_{12} + in_{12} &= -\sigma, \\ m_{22} + in_{22} &= -\lambda, \\ m_{23} + in_{23} &= -i\sigma, \\ m_{11} + in_{11} - im_{13} + n_{13} &= -\lambda, \\ m_{12} + in_{12} - im_{23} + n_{23} &= -\tau, \\ m_{13} + in_{13} - im_{33} + n_{33} &= i\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$ — один из двух возможных комплексно-сопряженных корней уравнения $|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0$, а числа σ и τ отличны от нуля, а в остальном произвольны. Этот произвол возникает в силу произвольности числа ρ и является следствием изотропности векторов $\underset{1}{W}^a$ и $\underset{3}{W}^a$. Для того чтобы определить орторепер однозначно, положим, например, $\sigma = \pm 1$.

Решая после этого систему (19.16) и имея в виду, что $\sum\limits_{s=1}^{3} m_{ss} = -\varkappa$, $\sum\limits_{1}^{3} n_{ss} = 0$, получим:

$$\tau = 2, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha = \frac{\varkappa}{3},$$

а *канонический вид матрицы* (R_{ab}) *для пространств* $\overset{*}{T}_3$ *выражается соотношениями*

$$\left.\begin{aligned} &(R_{ab})=\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ &M=\begin{Vmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} \end{Vmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{19.17}$$

Единственный *всегда вещественный* корень уравнения $|R_{ab}-\lambda g_{ab}|=0$ равен $\frac{\varkappa}{3}$, откуда и следует сделанное в предыдущем параграфе замечание о вещественности корней и базисов элементарных делителей для пространств $\overset{*}{T}_3$.

Подытоживая результаты, получим, что имеет место теорема: *для каждого из трех возможных типов пространств* $\overset{*}{T}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ *существует вещественный орторепер, относительно которого ортогональные составляющие тензора кривизны определяются каноническими формами матриц* (R_{ab}), *которые для* $\overset{*}{T}_1$ *имеют вид* (19.6) *при условиях* (19.7), *для* $\overset{*}{T}_2$ *имеют вид* (19.12) *при условиях* (19.13) *и для* $\overset{*}{T}_3$ — (19.17); *орторепер во всех трех случаях определяется однозначно.*

Этот результат получен методом, который нигде не опирается на предположение $\varkappa \neq 0$. Следовательно, полагая $\varkappa=0$, автоматически получим аналогичный результат для пространств, определяемых уравнениями $R_{\alpha\beta}=0$. Таким образом, имеет место также теорема: *канонический вид матрицы* (R_{ab}), *определяющей ортогональные компоненты тензора кривизны для* T_i, *определяемых полями тяготения в свободном пространстве, будет*

$$(R_{ab})=\begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix},$$

где для T_1

$$M=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{19.18}$$

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 0;$$

для T_2

$$M=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2+1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2-1\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 1\\ 0 & 1 & \beta_2\end{pmatrix},\tag{19.19}$$

$$\alpha_1+2\alpha_2=\beta_1+2\beta_2=0;$$

для T_3

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.\tag{19.20}$$

Полученные здесь канонические формы определяют конкретное содержание основной теоремы, доказанной в § 18, и играют основную роль при *инвариантной* характеристике пространств Эйнштейна в случае $n=4$ и сигнатуры $(---+)$. Три указанных типа T_i допускают, очевидно, более детальную классификацию: случай кратных корней или случай вещественных и чисто мнимых корней и т. д. Это будет сделано далее по мере надобности.

Относительно метода доказательства можно сделать следующее замечание. На первый взгляд, поскольку известна характеристика $\overset{*}{T}_i$, казалось бы возможным сразу выписать канонический вид матриц (R_{ab}), применяя общую теорему § 9. Однако этого сделать нельзя, так как в качестве допустимых линейных преобразований можно брать лишь те, которые определяются матрицами

$$\left(A_a^{a'}\right)\to 2\left(A_{[\alpha}^{\alpha'}A_{\beta]}^{\beta'}\right),$$

где $A_\alpha^{\alpha'}$ — коэффициенты некоторого вещественного ортогонального преобразования в данной точке P пространства $\overset{*}{T}_i$. Следовательно, можно пользоваться преобразованиями некоторой подгруппы всей группы ортогональных вещественных преобразований шестимерного пространства, оставляющих инвариантной метрику с сигнатурой $(---+++)$.

Анализ известных примеров пространств Эйнштейна (см. гл. IV) показывает, что подавляющее число их принадлежит к типу T_1. Только в последнее время главным образом при изучении T_i, допускающих ту или иную группу движений (гл. IV), были определены пространства T_2 и T_3. Необходимо отметить, что с этими пространствами связаны интересные физические теории, как, например, проблема гравитационной радиации и некоторые другие (см. [200], [299], [296], [303], [321], [339], [334], [329], [333], [342], [348], [361], [362], [366], [367], [384], [364], [379]).

Задачи

1. Доказать, что в случае T_2 $(R_{\alpha\beta}=0)$ $(\alpha_i=\beta_i=0)$ существует такое векторное поле l^α, что

$$l^\alpha R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0, \qquad l_\alpha R_{\beta\gamma\lambda\mu}+l_\beta R_{\gamma\alpha\lambda\mu}+l_\gamma R_{\alpha\beta\lambda\mu}=0$$

(Бель [321]).

2. Доказать, что для пространств T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$ существует векторное поле l^α, удовлетворяющее условиям

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta l^\delta=e_{\alpha\beta\sigma\tau}R^{\sigma\tau}_{\gamma\delta}l^\beta l^\delta=0,$$

где $e_{\alpha\beta\sigma\tau}$ — дискриминантный тензор пространства; поле l^α определяет изотропные геодезические линии пространства

$$l^\alpha_{,\sigma}l^\sigma=\varphi l^\alpha$$

(Бель [322]).

3. Доказать, что для пространств T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$, кроме поля l^α, определяемого в задаче 2, существуют еще векторные поля h^α, k^α и r^α, образующие вместе с l^α систему независимых векторов и связанные условиями

$$l^\alpha l_\alpha=r^\alpha r_\alpha=l^\alpha h_\alpha=l^\alpha k_\alpha=h^\alpha k_\alpha=h^\alpha r_\alpha=k^\alpha r_\alpha=0,$$
$$h^\alpha h_\alpha=k^\alpha k_\alpha=-l^\alpha r_\alpha=-1.$$

Эти поля удовлетворяют условиям:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta h^\delta=l_\alpha l_\gamma, \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta k^\delta=0, \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}l^\beta r^\delta=l_\alpha h_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}h^\beta h^\delta=0, \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}h^\beta k^\delta=-k_\alpha l_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}h^\beta r^\delta=-(l_\alpha r_\gamma+k_\alpha k_\gamma), \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta k^\delta=l_\alpha h_\gamma+h_\alpha l_\gamma,$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta r^\delta=h_\alpha k_\gamma, \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta}r^\beta r^\delta=-(h_\alpha r_\gamma+h_\gamma r_\alpha).$$

4. Показать, что в случае T_3 $(R_{\alpha\beta}=0)$ для орторепера, определяющего формулы (19.20), векторы $\bar{l}$, $\bar{h}$, $\bar{k}$, $\bar{r}$ имеют компоненты

$$l^\alpha(0,\ 1,\ 0,\ 1), \qquad h^\alpha(1,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad k^\alpha(0,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$r^\alpha\left(0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

и, как следствие этого, получить выражение

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=-4\,(l_{[\alpha}h_{\beta]}l_{[\gamma}r_{\delta]}+l_{[\alpha}r_{\beta]}l_{[\gamma}h_{\delta]}+l_{[\alpha}k_{\beta]}k_{[\gamma}h_{\delta]}+k_{[\alpha}h_{\beta]}l_{[\gamma}k_{\delta]}).$$

5. Показать, что при выполнении условий задач 3 и 4 дивергенция изотропно-геодезического векторного поля l^α равна нулю:

$$l^\sigma_{,\sigma}=0.$$

6. Доказать, что простые бивекторы тогда и только тогда $\frac{2}{2}$-ортогональны, когда

$$\underset{1}{V}_{\alpha\beta}\underset{2}{V}^{\beta\delta}=0$$

([102], стр. 391).

§ 20. Классификация полей тяготения общего вида

Теорема о существовании трех типов пространств Эйнштейна с сигнатурой $(- - - +)$ и канонические формы компонент тензора кривизны для некоторого неголономного орторепера, определяемого в каждом из трех возможных случаев однозначно, были получены в 1949 г. Этот результат, нашедший физические приложения [306], [296], [299], [322] главным образом при исследовании *свободных* пространств, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}=0$, оставлял открытым вопрос о том, что можно сказать в общем случае, когда $T_{\alpha\beta}\neq\sigma g_{\alpha\beta}$. Рассмотрим теперь этот общий случай [318]. Естественно предположить, что такая классификация в общем случае должна, во-первых, при $T_{\alpha\beta}\to\sigma g_{\alpha\beta}$ приводить к результатам §§ 18, 19 и, во-вторых, должна учитывать алгебраическую структуру не только тензора кривизны пространства, но и тензора энергии-импульса. Будем далее пространства, отвечающие полям тяготения общего вида, обозначать символом $\widetilde{T}$.

Рассмотрим геометрию пространства $\widetilde{T}$, определяемого некоторым распределением и движением материи, с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$, удовлетворяющим уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}, \tag{20.1}$$

которые получаются из (12.2), если отнести $-\lambda$ к тензору энергии-импульса. Свертывание формулы (20.1) устанавливает зависимость между R и T:

$$T=-R. \tag{20.2}$$

Сконструируем четырехвалентный тензор

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma}+g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma}-g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}), \tag{20.3}$$

который, как это следует из определения, обладает свойствами

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta}=-S_{\beta\alpha\gamma\delta}=-S_{\alpha\beta\delta\gamma}=S_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{20.4}$$

и

$$S_{\alpha[\beta\gamma\delta]}=0, \tag{20.5}$$

совпадающими с известными свойствами тензора кривизны пространства V_n. Свертывая (20.3) по индексам β, δ, получим:

$$S_{\alpha\gamma}=T_{\alpha\gamma}+\frac{1}{2}Tg_{\alpha\gamma}=T_{\alpha\gamma}-\frac{R}{2}g_{\alpha\gamma}. \tag{20.6}$$

Определим теперь новый четырехвалентный тензор:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}\overset{\text{def}}{=}\tau(R_{\alpha\beta\gamma\delta}-S_{\alpha\beta\gamma\delta})+\sigma(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \tag{20.7}$$

который назовем *тензором пространства-материи*. Он обладает следующими свойствами:

1) Из свойств (20.4) и (20.5), которым удовлетворяет и тензор кривизны, следует:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\beta\alpha\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\delta\gamma} = P_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{20.8}$$

и

$$P_{\alpha\,[\beta\gamma\delta]} = 0. \tag{20.9}$$

2) Его свертывание по индексам β, δ приводит вследствие (20.6) к соотношению

$$P_{\alpha\gamma} = \tau\left(R_{\alpha\gamma} - T_{\alpha\gamma} + \frac{R}{2}\,g_{\alpha\gamma}\right) + 3\sigma g_{\alpha\gamma},$$

т. е. в силу уравнений поля (20.1)

$$P_{\alpha\gamma} = (\tau R + 3\sigma)\,g_{\alpha\gamma}. \tag{20.10}$$

3) Если задано распределение и движение материи, т. е. тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ и тензор пространства-материи $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, то с точностью до задания скаляров τ и σ определяется кривизна пространства.

4) Задавая метрический тензор, скаляры τ, σ и тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, можно однозначно определить тензор энергии-импульса.

5) Если тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\sigma = 0$, то $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ с точностью до скаляра определяет кривизну свободного пространства-времени.

6) Тензор $P_{\alpha\gamma}$ удовлетворяет уравнениям, аналогичным уравнениям поля тяготения для пространств Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), и в этом смысле является аналогом тензора Риччи.

Тензор пространства-материи (20.7) представляет своим первым слагаемым с точностью до скаляра кривизну пространства, а второе слагаемое отражает распределение и движение материи. Мы свяжем классификацию полей тяготения с классификацией алгебраической структуры тензора пространства-материи.

Тот факт, что $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обладает свойствами (20.8), (20.9) и (20.10), позволяет решить задачу, если воспользоваться методом, применяемым при классификации пространств Эйнштейна в §§ 18, 19. В самом деле, так как в §§ 18, 19 речь шла об *алгебраической* классификации, то вопрос о дифференциальных свойствах тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не играет в данном вопросе никакой роли. Всеми же алгебраическими свойствами тензора кривизны тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обладает так же, как его комитант $P_{\alpha\gamma}$ обладат свойствами тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$. Следовательно результаты, полученные в этих параграфах, автоматически могут быть распространены на любой *битензор*, обладающий свойствами (20.8), (20.9) и (20.10), и, в частности, на тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Для этого достаточно в формулах (19.6), (19.7), (19.12), (19.13), (19.17) заменить $\varkappa$ через $\omega = \tau R + 3\sigma$.

Таким образом, пользуясь результатами, полученными в §§ 18 и 19, получаем следующие теоремы, решающие вопрос о классификации полей тяготения общего вида в смысле алгебраической структуры тензора пространства-материи [318].

Теорема 1. *Для любого орторепера в точке пространства $\tilde{T}$, определяемого полем тяготения, матрица (P_{ab}) в бивекторном пространстве симметрично-сдвоенная*:

$$\left.\begin{array}{c} (P_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ M = (m_{ij}), \quad N = (n_{ij}) \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \end{array}\right\} \tag{20.11}$$

причем трехмерные матрицы M и N симметрические:

$$m_{[ij]} = n_{[ij]} = 0 \tag{20.12}$$

и удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{3} m_{ii} = -\omega, \quad \sum_{i=1}^{3} n_{ii} = 0. \tag{20.13}$$

Используя три лоренцевых и три пространственных вращения, покажем далее, как и в § 19, что имеют место еще следующие две теоремы.

Теорема 2. *Существует три и только три типа полей тяготения общего вида в смысле алгебраической структуры тензора пространства-материи. Эти типы отвечают соответственно трем возможным типам характеристик λ-матрицы $(P_{ab} - \lambda g_{ab})$ в бивекторном пространстве*:

$$(1)\ \tilde{T}_1[1\ 1\ 1,\ \overline{1\ 1\ 1}], \quad (2)\ \tilde{T}_2[2\ 1,\ \overline{21}], \quad (3)\ \tilde{T}_3[(3,\ 3)].$$

Для полей тяготения $\tilde{T}_1$ является характерным существование *простых* элементарных делителей и отвечающих им шести *неизотропных бивекторов* $\underset{s}{W}^{\alpha\beta} \longleftrightarrow \underset{s}{W}^{a}$ (две комплексно-сопряженные тройки), *взаимно ортогональных* между собой и являющихся *собственными* векторами P_{ab} в R_6:

$$P_{ab}\underset{s}{W}^{b} = \underset{s}{\lambda}\underset{s}{W}_{a}, \quad \underset{s}{\lambda} = \alpha_s \pm i\beta_s \quad (s = 1,\ \ldots,\ 6).$$

В случае полей типа $\tilde{T}_2$ имеем два *непростых* элементарных делителя λ-матрицы $(P_{ab} - \lambda g_{ab})$ с комплексно-сопряженными элементарными делителями $(\lambda - \lambda_s)^2$, $(\lambda - \bar{\lambda}_s)^2$, которым отвечают комплексно-сопряженные, ортогональные между собой, *изотропные* $(\underset{-}{W}_a \underset{-}{W}^a = 0)$

собственные векторы $\underset{1}{W^a}$, $\underset{4}{W^a}$ и два *неизотропных*, комплексно-сопряженных, ортогональных между собой и к векторам $\underset{1}{W^a}$, $\underset{4}{W^a}$ вектора $\underset{2}{W^a}$, $\underset{5}{W^a}$, так что

$$P_{ab}\underset{s}{W^b} = \underset{s}{\lambda}\underset{s}{W_a} \; (s = 1,\; 2,\; 4,\; 5)$$

и

$$\underset{s}{\lambda} = \alpha_s \pm i\beta_s, \quad \underset{i}{\lambda} = \underset{i+3}{\overline{\lambda}} \quad (i = 1,\; 2).$$

Наконец, в случае полей $\widetilde{T}_3$ имеется только два непростых элементарных делителя $(\lambda - \underset{1}{\lambda})^3$, $(\lambda - \underset{1}{\lambda})^3$ с одним и тем же *вещественным* базисом $\lambda_1 = \frac{\omega}{3}$. Этим делителям отвечают два взаимно ортогональных *изотропных* собственных вектора $\underset{1}{W^a}$, $\underset{4}{W^a}$.

Теорема 3. *Для полей тяготения $\widetilde{T}_1$ матрица (P_{ab}) для некоторого неголономного ортoрепера, определяемого однозначно, имеет вид*:

$$\left.\begin{aligned} &(P_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \\ M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}&, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{20.14}$$

где

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -\omega, \qquad \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 0; \tag{20.15}$$

для полей $\widetilde{T}_2$:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \tag{20.16}$$

где

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\omega, \; \beta_1 + 2\beta_2 = 0, \tag{20.17}$$

и для полей $\widetilde{T}_3$:

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{\omega}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\omega}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega}{3} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.18}$$

Канонический вид для компонент тензора кривизны пространств Эйнштейна (19.6), (19.7), (19.12), (19.13), (19.17) получается соответственно из (20.14), (20.15), (20.16), (20.17), (20.18), когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta} = \tilde{\sigma} g_{\alpha\beta}$, и в этом смысле эти компоненты можно рассматривать как некоторый *предельный случай*. В частности, когда $T_{\alpha\beta} = 0$, $\sigma = 0$, получим соответствующую классификацию для полей тяготения *свободного* пространства, для чего в (20.15), (20.17), (20.18) достаточно положить $\omega = 0$.

Полученные здесь канонические формы определяют конкретное содержание теоремы 2 и должны, по-видимому, сыграть роль при *инвариантной* характеристике полей тяготения реального мира.

Три указанных типа полей тяготения $\tilde{T}_i$ допускают, очевидно, более детальную классификацию; можно, например, выделить случаи *кратных* или *вещественных* λ_s, можно также дополнить эту классификацию классификацией $(T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta})$ и искать логическое пересечение двух классификаций; такая классификация может быть осуществлена, если воспользоваться результатами § 9.

Что касается тензора пространства-материи, то, как это следует из самого метода рассуждения, приведенного выше, основной результат (существование трех типов полей тяготения) будет иметь место независимо от выбора скаляров τ и σ. Очевидно, что этот выбор желательно уточнять, исходя из некоторых физических или геометрических соображений. Отметим, в частности, что если положить $\tau = 1$ и $\sigma = -\frac{1}{3} R$, то тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ совпадает с тензором конформной кривизны Вейля (см. § 35). При этом ω обращается в нуль, и формулы (20.14), (20.16) и (20.18) будут определять канонический вид ортогональных компонент тензора Вейля; нетрудно видеть, что они будут совершенно аналогичны формулам (19.18), (19.19), (19.20), полученным для тензора кривизны пустого пространства Эйнштейна. Так как для несвободных пространств ($T_{\alpha\beta} \neq 0$) состояние физической системы определяет тензор энергии-импульса, то классификацию полей необходимо производить, изучая такой тензорный объект, который включает не только тензор кривизны пространства, но и тензор энергии-импульса; это соображение и послужило точкой отправления при конструировании тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Задачи

1. Определить тип пространства, которое получается внутри несжимаемого жидкого шара, когда метрика имеет вид:

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - \frac{(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + x^3\,dx^3)^2}{a^2 - r^2} + \left(\frac{3h - h_0}{2hh_0}\right)^2 dx^{4^2},$$

где $a = r_0 \sqrt{\frac{r_0}{2m}}$, h_0 — значение h на поверхности шара, $h^2 = 1 - \frac{2m}{r-2m}$. Тензор энергии-импульса задается в виде:

$$T_{\alpha\beta} = \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta},$$

где μ_0 и p — соответственно плотность масс и давление внутри шара.

2. Рассмотреть случай внешней проблемы при условиях предыдущей задачи.

3. Определить тип пространства, определяемого формулами (14.2) и (14.3).

§ 21. О комплексном представлении тензоров пространства Минковского

Канонические формы для ортогональных компонент тензора кривизны и тензора пространства-материи были получены в §§ 19 и 20 при помощи отображения бивекторного пространства на трехмерное метрическое комплексное плоское многообразие. Такое отображение имеет самостоятельный интерес, так как позволяет подойти к исследованию более широкого круга вопросов.

На этом пути можно, например, ставить вопрос об алгебраической классификации любых битензоров в бивекторном пространстве и пытаться подойти к решению других проблем.

Такого рода вопросы рассматривались в работах [208] и [316], в которых обследовались так называемые *бипланарные* пространства, совпадающие по существу с бивекторными многообразиями, как это будет показано ниже. Таким образом, в этих работах при несколько иной терминологии исследования проходят так же, как и выше; получаемые при этом результаты даются в этом параграфе в кратком изложении.

Назовем векторное пространство B_{2n} четного числа измерений *бипланарным*, если в нем задан тензор ε_a^b, определяющий так называемую *абсолютную инволюцию*, удовлетворяющий условиям:

$$\varepsilon_a^c \varepsilon_c^b = -\delta_a^b \tag{21.1}$$

и характеристическому уравнению:

$$(\lambda^2 + 1)^n = 0$$

с корнями i, $-i$ кратности n. Вследствие этого $\varepsilon_a^a = 0$. Этот тензор позволяет всякому тензору сопоставить сопряженный тензор, который будем отличать от данного, надчеркивая его:

$$\overline{x}^b = \varepsilon_a^b x^a, \quad \overline{\xi}_b = \varepsilon_b^a \xi_a, \quad \overline{a}_{ab} = \varepsilon_a^c \varepsilon_b^d a_{cd}.$$

Всегда можно выбрать векторы a_a так, чтобы они вместе со своими сопряженными образовывали базис независимых векторов, который далее будем называть *каноническим* базисом. Введем в рассмотрение следующие комплексные комбинации:

$$\Delta_a^b = \frac{1}{2}(\delta_a^b + i\varepsilon_a^b), \quad \overline{\Delta}_a^b = \frac{1}{2}(\delta_a^b - i\varepsilon_a^b),$$

которые, как легко видеть, удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_a^b \varepsilon_b^c = -i\Delta_a^c, \quad \overline{\Delta}_a^b \varepsilon_b^c = i\overline{\Delta}_a^c,$$
$$\Delta_a^b \Delta_b^c = \Delta_a^c, \quad \overline{\Delta}_a^b \overline{\Delta}_b^c = \overline{\Delta}_a^c.$$

Эти комплексные конструкции можно использовать в качестве связующих величин при отображении битензоров пространства B_{2n} на комплексное пространство n измерений. Именно для этой цели такого рода конструкция была применена в работе [261] (стр. 247), где в бивекторном пространстве R_6 вводится тензор $p^{ab} = g^{ab} \pm i\varepsilon^{ab}$, совпадающий в R_6 с $\Delta^{ab} = g^{bc}\Delta_c^a$. Это отображение осуществляется по схеме

$$A^a = \Delta_b^a a^b, \quad \overline{A}^a = -iA^a.$$

Для того чтобы убедиться, что комплексное пространство, на которое отображается B_{2n}, будет иметь n измерений, достаточно заметить, что линейная зависимость между векторами в B_{2n}:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda^k \underset{k}{a}^c + \sum_{k=1}^{m} \mu^k \underset{k}{\overline{a}}^c = 0$$

приводится после отображения к соотношению

$$\sum_{k=1}^{m} (\lambda^k - i\mu^k) \underset{k}{A}^c = 0.$$

Если $\underset{k}{a}$, $\underset{k}{\overline{a}}$ — векторы канонического базиса, то они независимы, так же как и отвечающие им векторы $\underset{k}{A}$. Отсюда следует, что всякие $n+1$ комплексных векторов $\underset{k}{A}$ зависимы и, следовательно, отображение происходит на n-мерное комплексное пространство, которое назовем A_n.

Пользуясь Δ_b^a, всякому тензору $t_{ab\ldots}^{c\ldots}$ пространства B_{2n} можно сопоставить тензор $T_{ab\ldots}^{c\ldots}$ в A_n, где

$$T_{ab\ldots}^{c\ldots} = \Delta_a^h \Delta_b^f \ldots \Delta_g^c \ldots t_{hf\ldots}^{g\ldots}.$$

Если же в этой формуле одну или несколько связующих величин Δ_b^a заменить через $\overline{\Delta}_b^a$, то тензору $t_{bc\ldots}^{a\ldots}$ будет сопоставлена некоторая величина, которую можно рассматривать как связующую величину, принадлежащую пространствам A_n и $\bar{A}_n$, которые сопряжены друг другу. Эти величины далее называются *эрмитианами* в силу их сходства с эрмитовыми формами в смысле закона преобразования.

Следовательно, каждому тензору из B_{2n} можно сопоставить тензор и набор эрмитианов из A_n. В частности, для тензора второй валентности получим *тензорный образ* в A_n

$$A_{ab} = \frac{1}{2}\Delta_a^c(a_{cb} - \bar{a}_{cb})$$

и *эрмитов образ*

$$A_{a\bar{b}} = \frac{1}{2}\Delta_a^c(a_{cb} + \bar{a}_{cb}),$$

где

$$\bar{a}_{cb} = \varepsilon_c^l \varepsilon_b^f a_{lf}.$$

Будем называть тензор *протензором*, если его эрмитов образ при отображении равен нулю; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{ab} = -\bar{a}_{ab}.$$

В случае же, если равен нулю тензорный образ, то будем говорить о *проэрмитиане* с необходимым и достаточным условием

$$a_{ab} = \bar{a}_{ab}.$$

Перейдем к пространству Минковского, сигнатура которого $(+++-)$ или $(---+)$ вполне характеризуется также условием

$$e_{ijkl}\, e_{pqrs} = -\begin{vmatrix} g_{ip} & g_{jp} & g_{kp} & g_{lp} \\ g_{iq} & g_{jq} & g_{kq} & g_{lq} \\ g_{ir} & g_{jr} & g_{kr} & g_{lr} \\ g_{is} & g_{js} & g_{ks} & g_{ls} \end{vmatrix} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

связывающим компоненты дискриминантного кососимметрического тензора e_{ijkl} с единственной существенной компонентой $e_{1234} = \sqrt{|g|}$.

Установление в § 15 отображения любой бивекторной величины пространства Минковского на векторы локального бивекторного пространства E_6, как уже отмечалось там, может быть записано при помощи связующих величин:

$$u^a = \eta_{ij}^a u^{ij}\ (a = 1,\ \ldots,\ i;\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n),\quad \eta_{ij}^a = -\eta_{ji}^a.$$

Так как это отображение однозначно, то

$$u^{ij} = \eta_a^{ij} u^a,$$

где

$$\eta_a^{ij}\eta_{ij}^b = \delta_a^b,\quad \eta_a^{ij}\eta_{kl}^a = \delta_{kl}^{ij} = \delta_{[k}^i\delta_{l]}^j.$$

Метризованное бивекторное пространство R_6 получится введением тензора (см. § 18)

$$g_{ab}=\eta_a^{ij}\eta_b^{kl}g_{ijkl}, \quad g_{ijkl}=g_{[i\,[k}g_{e]\,j]},$$

а e_{ij} отвечает битензор

$$2\varepsilon_{ab}=2\varepsilon_{ba}=\eta_a^{ij}\eta_b^{hl}e_{ijkl}.$$

Так как

$$\varepsilon_a^b\varepsilon_b^c=-\delta_a^c,$$

то ε_b^a можно считать тензором абсолютной инволюции в R_6. Теперь ясно, что такое B_{2n} совпадает с введенным выше *бивекторным* пространством, причем

$$\varepsilon_a^c\varepsilon_b^d g_{cd}=-g_{ab}, \quad \bar{g}_{ac}=-g_{ac},$$

т. е. метрический тензор является протензором. Тензорный образ g_{ab}, определяемый формулой

$$G_{ab}=\Delta_a^c\Delta_b^d g_{cd},$$

будем считать метрическим тензором пространства A_3, которое, таким образом, становится комплексным R_3.

Для всякого битензора пространства Минковского a_{ijkl} можно построить сопряженный и показать, что для них имеет место тождество

$$a_{pqij}+\bar{a}_{ijpq}=4\overset{0}{a}_{[p\,]i}g_{j]\,g]}, \tag{21.2}$$

где

$$\overset{0}{a}_{pi}=a_{pi}-\frac{1}{4}g_{pi}a^q{}_q, \quad a_{pi}=a^q{}_{pqi}, \quad \overset{0}{a^r}{}_r=0. \tag{21.3}$$

Если $\overset{0}{a}_{jp}=0$, то вследствие (21.2)

$$\bar{a}_{ijpq}=-a_{pqij};$$

каждое из этих условий характеризует битензоры, которые называются далее *изотропными*. Битензор, удовлетворяющий условиям

$$a_{pqij}=\bar{a}_{ijpq},$$

называется *простым*, а условия

$$a_{ijkl}=a_{klij}, \quad a_{ijkl}=-a_{klij}$$

будут определять соответственно *симметрический* и *кососимметрический* битензоры.

При отображении на бивекторное пространство условия симметрии, косой симметрии, изотропности, простоты и условия, характеризующие протензор и проэрмитиан, запишутся соответственно следующими равенствами:

$$a_{ab}=a_{ba}, \quad a_{ab}=-a_{ba}, \quad a_{ab}=-\bar{a}_{ba},$$
$$a_{ab}=\bar{a}_{ba}, \quad a_{ab}=-\bar{a}_{ab}, \quad a_{ab}=\bar{a}_{ab}.$$

Это позволяет установить связь между этими свойствами при помощи следующей элегантной формулировки: *если битензор удовлетворяет условиям, указанным в двух строках столбца таблицы*

<table>
<tr><td colspan="2">симметрический</td><td colspan="2">кососимметрический</td></tr>
<tr><td>простой</td><td>изотропный</td><td>простой</td><td>изотропный</td></tr>
<tr><td>проэрмитиан</td><td>протензор</td><td>протензор</td><td>проэрмитиан</td></tr>
</table>

, (21.4)

то он удовлетворяет и третьему условию, указанному в том же столбце.

Рассматривая тензор кривизны риманова пространства с локальной метрикой Минковского, видим, что он будет симметрическим битензором. Если же, кроме того, V_4 является пространством Эйнштейна, то его тензор Риччи $R_{ij}=\frac{1}{4}R^k{}_k g_{ij}$, т. е. в силу (21.3) битензор R_{ijkl} изотропный. Тогда из (21.4) при помощи указанного правила приходим к выводу: *для того чтобы V_4, с метрикой Минковского в точке, было пространством Эйнштейна, необходимо и достаточно, чтобы его тензор кривизны был протензором*, т. е. отображался в двухвалентный симметрический тензор комплексного R_3. Отсюда вопрос о приведении тензора кривизны пространства Эйнштейна к каноническому виду, кроме указанной в § 19, допускает следующую интерпретацию. В комплексном R_3 приводится к каноническому виду пара симметрических тензоров R_{ab} и G_{ab}, являющихся соответственно тензорными образами такого отображения для тензора кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тензора $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$. Для R_3 при этом можно воспользоваться хорошо известной классификацией ([90], стр. 280), согласно которой две формы

$$\psi=G_{ab}x^a x^b, \quad \varphi=R_{ab}x^a x^b,$$

из которых первая неособенная, приводятся к одному из трех видов:

$$\text{I. } \psi={x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2, \quad \varphi=a{x^1}^2+b{x^2}^2+c{x^3}^2,$$
$$\text{II. } \psi=2x^1x^2+{x^3}^2, \quad \varphi=2ax^1x^2+b{x^2}^2+c{x^3}^2,$$
$$\text{III. } \psi=2x^1x^2+{x^3}^2, \quad \varphi=2ax^1x^2+a{x^3}^2+2bx^1x^3.$$

После этого необходимо совершить обратное отображение из R_3 в R_6, которое и приведет к каноническим формам § 19 с точностью, впрочем, до некоторых преобразований Лоренца и трехмерных вращений, которые в R_6 индуцируют некоторые линейные преобразования.

Задачи

1. Показать, что группа преобразований A_n, отвечающая группе преобразований B_{2n}, является общей аффинной группой n-мерного комплексного пространства.

2. Показать, что вследствие (21.1) единичный тензор δ_a^b является протензором, а в пространстве A_n ему отвечает величина Δ_a^b, которая также является единичным тензором A_n [353].

3. Показать, пользуясь определением сопряженного тензора, справедливость тождества (21.2).

§ 22. Базис полной системы инвариантов второго порядка пространства V_4

При исследовании полей тяготения общего вида является интересным вопрос об инвариантной характеристике поля при помощи некоторой системы инвариантов, которые представляли бы собой рациональные функции компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и его производных $\partial_{\gamma_1} g_{\alpha\beta}, \ldots, \partial_{\gamma_1 \ldots \gamma_k} g_{\alpha\beta}$, которые мы будем называть *инвариантами k-го порядка*. В такой постановке проблема до сих пор не получила решения. Первым этапом решения этой задачи является задача определения базиса полной системы инвариантов второго порядка; последние, естественно, предполагают, что компоненты метрического тензора и допускаемые преобразования принадлежат к классу C^2 функций. Эта задача решена в совместной работе Жеэньо и Дебеве ([277], стр. 114—123) и независимо от них П. И. Петровым [291]. Методическое улучшение, внесенное в работе [352], учитывается в приводимом ниже изложении вопроса, где предполагается, что сигнатура метрики имеет вид $(---+)$.

Рассмотрим некоторую точку пространства V_4 и отвечающее ей бивекторное пространство R_6 и сопоставим тензорам $g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в пространстве R_6 тензоры g_{ab}, R_{ab} и e_{ab}; здесь $e_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор пространства V_4. Этим величинам пространства R_6 в свою очередь могут быть сопоставлены величины трехмерного комплексного пространства R_3. Это отображение может быть осуществлено двояким образом и особенно просто получается, если воспользоваться тензором пространства V_4 ([290], стр. 247—250):

$$\Delta^{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\alpha[\gamma} g^{\beta]\delta} \pm i e^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

которому в R_6, если взять его смешанные компоненты, отвечают тензоры

$$\Delta_a^c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\delta_a^c + ie_a^c\right), \quad \overline{\Delta}_a^c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\delta_a^c - ie_a^c\right). \tag{22.1}$$

Пользуясь тензором Δ_a^c, всякому тензору a_{ab} (a, $b = 1, \ldots, 6$) сопоставим его *тензорный* образ

$$A_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_a^c \Delta_b^d a_{cd} = \frac{1}{2}\Delta_a^c\left(a_{cb} - \overline{a}_{cb}\right) \tag{22.2}$$

и *эрмитов* образ

$$A_{a\bar{b}} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_a^c \overline{\Delta}_b^d a_{cd} = \frac{1}{2}\Delta_a^c\left(a_{cb} + \overline{a}_{cb}\right), \tag{22.3}$$

где

$$\overline{a}_{cb} = e_c^d e_b^l a_{dl}. \tag{22.4}$$

Тензор Δ_a^c является единичным тензором комплексного пространства R_3. Напомним также, что (см. § 21) битензор называется *изотропным* (или *протензором*), если он удовлетворяет условию

$$a_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{22.5}$$

и его эрмитов образ $A_{a\bar{b}} = 0$. Битензор назовем *простым*, если наряду с (22.5) выполняется условие $A_{ab} = 0$. Произвольный битензор можно разложить на инвариантные части, представив его в виде суммы

$$a_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = \overset{*}{a}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} + \overset{0}{a}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} \tag{22.6}$$

соответственно изотропного и простого битензоров. Здесь каждое из слагаемых вполне характеризуется условиями

$$\overset{*}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma} = \frac{A}{4}\, g_{\beta\gamma} \tag{22.7}$$

или

$$\overset{*}{A}_{ab} = \Delta_a^c a_{cb} \tag{22.8}$$

и

$$\overset{0}{a}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 2\overset{0}{a}_{[\alpha\,[\beta} g_{\gamma]\,\delta]}, \tag{22.9}$$

где $\overset{0}{a}{}_c^c = 0$, вследствие чего $\overset{0}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta\alpha\gamma} = \overset{0}{a}_{\beta\gamma}$ и

$$\overset{0}{A}_{a\bar{b}} = \Delta_a^c a_{cb}. \tag{22.10}$$

Искомый базис должен состоять из инвариантов, каждый из которых может быть получен в результате полного свертывания некоторого тензора с метрическим и дискриминантным тензорами пространства V_4.

Рассмотрим сначала такие величины бивекторного пространства a_{ab} и b_{ab}, которые являются симметрическими изотропными или простыми тензорами. В R_3 им соответственно будут отвечать тензоры A_{ab}, B_{ab} или эрмитовы образы $A_{a\bar{b}}$, $B_{a\bar{b}}$. Вследствие (22.8) будем иметь:

$$A_{ab}B^f_c = \Delta^e_a \Delta^h_c a_{eb} b^f_h,$$

а, следовательно, битензор

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = a_{\alpha\beta,\,\sigma\tau} b^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta},$$

если a и b — изотропные битензоры, изображается в R_3 тензором

$$C_{ab} = A_{ac}B^c_b. \tag{22.11}$$

Совершенно так же в случае, если a и b — простые тензоры и, следовательно, изображаются эрмитианами в R_3, получим, что тензорный образ $C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ в R_3 будет

$$C_{ab} = A_{a\bar{c}}B^{\bar{c}}_b. \tag{22.12}$$

Если воспользоваться формулой (22.9), то можно записать:

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 2a_{\sigma\,[\alpha} g_{\beta]\,\tau} b^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} = 2a_{\sigma\,[\alpha} b^{\sigma}{}_{\beta]\,\gamma\delta}. \tag{22.13}$$

Но так как

$$b^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = 2\delta^{[\sigma}{}_{[\beta} b^{\tau]}{}_{\gamma]} g_{\tau\alpha},$$

то

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 4a^{\sigma}_{\alpha} b_{[\gamma\,[\sigma} g_{\beta]\,\delta]} \quad [\alpha\beta], \tag{22.14}$$

где символ $[\alpha\beta]$ означает, что окончательный результат альтернируется по индексам α, β.

Если предположить, кроме того, что $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$, то

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = 2\left(a_{[\alpha\,|\,\sigma\,|} a^{\sigma}_{[\gamma} g_{\delta]\,\beta]} + a_{\alpha\,[\gamma} a_{\delta]\,\beta}\right). \tag{22.15}$$

Рассмотрим теперь (см. задачу 1) эрмитиан

$$\overset{2}{A}_{\bar{c}c} \overset{\mathrm{def}}{=} \varepsilon_{abc}\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} A^{a\bar{a}} A^{b\bar{b}}, \tag{22.16}$$

который получается в результате свертывания тривектора $\varepsilon_{abc} \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta^f_a l_{fbc}$ (l_{fbc} — некоторый антисимметричный тензор) пространства R_3 и комплексно-сопряженного ему тривектора $\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ с эрмитианом. На основании задачи 1 и формулы (22.10) получим, что эрмитов образ $\overset{2}{A}_{\bar{c}c}$ в V_4 будет иметь вид:

$$\overset{2}{a}_{\alpha\beta,\,\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g_{\alpha\beta,\,\gamma\delta,\,\sigma\tau} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta},\,\bar{\gamma}\bar{\delta},\,\bar{\sigma}\bar{\tau}} a^{\gamma\delta,\,\bar{\gamma}\bar{\delta}} a^{\sigma\tau,\,\bar{\sigma}\bar{\tau}}$$

или

$$\overset{2}{a}_{\alpha\beta,\,\bar{\alpha}\bar{\beta}} = a^{\bar{\sigma}}_{\bar{\alpha}\nu\,[\alpha} a^{\nu}_{\beta]\,\bar{\sigma}\bar{\beta}}. \tag{22.17}$$

Так как полученный битензор является прообразом эрмитиана, то он простой, и для его вычисления по формуле (22.9) достаточно знать, чему равняется тензор:

$$\overset{2}{a}_{\beta\bar{\beta}} = \overset{2}{a}{}^{\alpha}{}_{\beta,\,\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{2}\left(a^{\alpha\bar{\tau}}{}_{\sigma\alpha}a^{\sigma}{}_{\beta\bar{\tau}\bar{\beta}} - a^{\alpha\bar{\tau}}{}_{\sigma\beta}a^{\sigma}{}_{\alpha,\,\bar{\tau}\bar{\beta}}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(a_{\sigma\bar{\tau}}a^{\sigma\bar{\tau}}{}_{\beta\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}}a^{\alpha}{}_{\beta}\right).$$

Если заметить, что

$$a_{\sigma\alpha}b^{\sigma}{}_{\beta,\,\gamma\delta} = \frac{1}{2}a_{\sigma\alpha}\left(b^{\sigma}{}_{\gamma}g_{\delta\beta} - b^{\sigma}{}_{\delta}g_{\gamma\beta} - b_{\beta\gamma}\delta^{\sigma}_{\delta} + b_{\delta\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}\right), \tag{22.18}$$

то нетрудно убедиться, что

$$a_{\sigma\bar{\alpha}}a^{\sigma\cdot\bar{\alpha}}{}_{\beta\cdot\bar{\beta}} = a_{\alpha\bar{\beta}}a^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}g_{\beta\bar{\beta}}a_{\sigma\tau}a^{\sigma\tau},$$

и поэтому окончательно

$$\overset{2}{a}_{\beta\bar{\beta}} = -\frac{1}{2}\left(a_{\beta\sigma}a^{\sigma}{}_{\bar{\beta}} - \frac{1}{4}a_{\sigma\tau}a^{\sigma\tau}b_{\beta\bar{\beta}}\right). \tag{22.19}$$

Пользуясь формулой (22.19), можно теперь построить систему инвариантов, определяющую искомый базис.

Рассмотрим тензор кривизны пространства и разложим его на изотропную и простую части:

$$R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = \overset{*}{R}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} + \overset{0}{R}_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}. \tag{22.20}$$

В бивекторном пространстве тензору кривизны отвечает симметрический тензор R_{ab}, с помощью которого по формулам (22.2) и (22.3) можно получить в комплексном R_3 тензорный образ B_{ab} и эрмитов образ $S_{a\bar{b}}$. Метрический тензор g_{ab} в R_6 является изотропным, в R_3 определяет только тензорный образ G_{ab}. Рассмотрим теперь величины B_{ab}, $S_{a\bar{b}}$, G^{ab} и ε_{abc} и образуем при помощи полного свертывания этих величин систему инвариантов:

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = B^a_a, \quad B_2 = \overset{2}{B}{}^a_a, \quad B_3 = B^a_b\overset{2}{B}{}^b_a,\\
&S_2 = \overset{2}{S}{}^a_a, \quad S_3 = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}S^{a\bar{a}}S^{b\bar{b}}S^{c\bar{c}}, \quad S_4 = \overset{2}{S}{}^a_b\overset{2}{S}{}^b_a,\\
&T_1 = B^a_b\overset{2}{S}{}^b_a, \quad T_2 = \overset{2}{B}{}^a_b\overset{2}{S}{}^b_a, \quad T_3 = B^a_b\overset{2}{S}{}^b_c\overset{2}{S}{}^c_a,
\end{aligned}\right\} \tag{22.21}$$

где

$$\overset{2}{B}{}^a_b = B^a_c B^c_b, \quad \overset{2}{S}{}^a_b = S^a_{\bar{c}}S^{\bar{c}}_b$$

и поднятие индексов производилось с помощью тензора G^{ab} или комплексно-сопряженного ему тензора $G^{\overline{a}\overline{b}}$. В системе инвариантов (22.21), как легко видеть, инварианты S_2, S_3, S_4 вещественны, так как при надчеркивании индексов, осуществляющем переход к комплексно-сопряженным величинам, они переходят в себя; инвариант B_1 также вещественен, как это будет видно дальше. Остальные инварианты комплексны, и следовательно, если рассмотреть еще и комплексно-сопряженные инварианты, получим систему 14 инвариантов.

Для того чтобы доказать полноту системы (22.21), необходимо показать независимость этих инвариантов. Здесь необходимо сделать следующую оговорку: число независимых инвариантов пространства V_4 всегда можно связать с базисами элементарных делителей λ-матрицы $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ бивекторного пространства, которая уже не будет вообще симметрично-сдвоенной. Легко видеть, что, положив возможные характеристики λ-матрицы в основу классификации V_4, получим наряду со случаем [1 1 1, 1 1 1], *которому отвечает максимальное число независимых инвариантов*, и характеристики, соответствующие *непростым* элементарным делителям, например [2 1 1 1 1] и т. д., которые *нельзя рассматривать как частные случаи* V_4, отвечающие характеристике простого типа; мы имеем здесь по существу различные типы пространств. Это рассуждение становится особенно прозрачным для случая пространств Эйнштейна, когда имеют место три различных типа пространств T_i $(i = 1, 2, 3)$. Ясно, однако, что V_4 с характеристикой *непростого типа* имеет заведомо число независимых инвариантов второго порядка меньше 14. Поэтому далее вопрос о полноте будет рассматриваться только для V_4, допускающих *максимальное* число независимых инвариантов.

Величины (22.21) являются алгебраическими функциями 20 существенных компонент тензоров B_{ab}, $\overline{B}_{ab}$, $S_{a\overline{b}}$. Для доказательства их независимости в случае максимального числа независимых параметров достаточно исследовать матрицу Якоби этих функций в пространстве, в котором координаты точки определяются значениями компонент тензоров B_{ab}, $\overline{B}_{ab}$, $S_{a\overline{b}}$. Если найдется такая точка, в которой определитель 14-го порядка будет отличен от нуля, то в окрестности такой точки всегда найдется точка, в которой он также отличен от нуля. Следовательно, независимость будет доказана, если подтвердится, что один из таких определителей 14-го порядка в одной такой точке не равен нулю. Нетрудно построить фактически такой определитель (см. задачу 2). Таким образом, (22.21) составляет искомый базис.

Для того чтобы записать инварианты в пространстве V_4, воспользуемся следующими формулами, в справедливости которых нетрудно убедиться (см. задачу 3):

$$\left.\begin{aligned} &B^a_b \sim \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ &\overset{2}{B}{}^a_b \sim \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}, \\ &\overset{2}{S}{}^a_b \sim \overset{0}{R}_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\overset{0}{R}_{\sigma}{}^{\gamma\delta} = 4\overset{0}{R}{}^{\sigma}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{[\gamma}_{[\sigma}\delta^{\delta]}_{\beta]}, \end{aligned}\right\} \tag{22.22}$$

где «$\sim$» — знак соответствия между величинами из R_3 и величинами в точке пространства V_4. Далее, инварианту C^a_a в R^3 будут отвечать два инварианта в точке пространства V_4:

$$C^a_a \sim C^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} + i\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{kl}C^{kl}{}_{\alpha\beta}. \tag{22.23}$$

Вещественная и мнимая части этого выражения различаются тем, что в первом случае свертывание производится с помощью метрического битензора, а во втором — с помощью квадривектора. Применяя формулу (22.23) к комбинации величин (22.22), получим базис системы инвариантов в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &B_1 = \overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\sigma\tau}, \quad B_2 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}, \quad B_3 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\beta}, \\ &\overset{1}{B}_2 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\beta}, \quad \overset{1}{B}_3 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\lambda\nu}\overset{*}{R}{}^{\lambda\nu}{}_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

$$S_2 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\alpha}, \quad S_3 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\gamma}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\alpha}, \quad S_4 = \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\beta}{}_{\gamma}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\delta}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\alpha}, \tag{β}$$

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\gamma}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\beta}, \qquad T_2 = \overset{*}{R}{}^{\alpha\,[\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\sigma]}{}_{\alpha}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}, \\ &\overset{1}{T}_1 = e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}, \quad \overset{1}{T}_2 = e^{\alpha\,[\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{0}{R}{}^{\nu]}{}_{\alpha}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\nu\lambda}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\beta}, \\ &\overset{1}{T}_3 = e^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}A^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta}, \\ &T_3 = \overset{*}{R}{}^{ij}{}_{pq}\Big(4\overset{0}{R}{}^{p}_{k}\overset{0}{R}{}^{k}_{l}\overset{0}{R}{}^{l}_{i}\overset{0}{R}{}^{q}_{j} + 3\overset{0}{R}{}^{p}_{k}\overset{0}{R}{}^{k}_{i}\overset{0}{R}{}^{q}_{l}\overset{0}{R}{}^{l}_{j} + \overset{0}{R}{}^{p}_{k}\overset{0}{R}{}^{k}_{l}\overset{0}{R}{}^{l}_{m}\overset{0}{R}{}^{m}_{i}\delta^{q}_{j}\Big), \end{aligned}\right\} \tag{γ}$$

где

$$A^{\gamma\delta}{}_{\alpha\beta} \overset{\text{det}}{=} 4\overset{0}{R}{}^{\gamma}_{\sigma}\overset{0}{R}{}^{\sigma}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}_{\beta} + 3\overset{0}{R}{}^{\gamma}_{\sigma}\overset{0}{R}{}^{\sigma}_{\alpha}\overset{0}{R}{}^{\delta}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\tau}_{\beta}.$$

В этой схеме отсутствует инвариант $\overset{1}{B}_1 = e^{\sigma\tau}{}_{\lambda\nu}\overset{*}{R}{}^{\lambda\nu}{}_{\sigma\tau}$, так как он равен нулю в силу тождества Риччи, а у $\overset{1}{T}_1$ и $\overset{1}{T}_3$ имеются еще слагаемые вида $e^{\alpha\beta}{}_{\sigma\tau}\overset{*}{R}{}^{\sigma\tau}{}_{\alpha\lambda}\overset{0}{R}{}^{\delta}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\delta}$ и $e^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\overset{*}{R}{}^{\gamma\delta}{}_{\alpha\sigma}\overset{0}{R}{}^{\tau}{}_{\beta}\overset{0}{R}{}^{\lambda}{}_{\tau}\overset{0}{R}{}^{\nu}{}_{\lambda}\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\nu}$, которые также, вследствие того же тождества, обращаются в нуль. Инварианты T_1 и T_3 также упрощаются, так как они имеют слагаемые, в которых содержится тензор $\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta}$, выражающийся вследствие (22.7) через $R\delta^{\alpha}_{\beta}$, где R — скалярная кривизна, и следовательно, эти члены выразятся через инварианты низших степеней. Таким образом, искомый базис определяется 14-ю инвариантами (α) (β) (γ).

Задачи

1. Показать, что метрический *тритензор*

$$g_{\alpha\beta,\ \gamma\delta,\ \lambda\nu} \overset{\text{def}}{=} g_{[\alpha\ [\gamma} g_{\delta]\ \lambda} g_{\nu]\ \beta}$$

изображается в R_6 тривектором l_{abc}, а в R_3 — тривектором

$$\varepsilon_{abc} = \Delta_a^f l_{fbc}.$$

2. Доказать независимость системы (22.21), исследуя определитель 14-го порядка, строки которого принимают значения S_2, S_3, S_4, B_1, B_2, B_3, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$, T_1, T_2, T_3, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$, $\overline{T}_3$, а столбцы $\overline{B}_{12}$, $\overline{B}_{13}$, $\overline{B}_{23}$, R_{12}, R_{13}, R_{23}, $\overline{B}_{11}$, $\overline{B}_{22}$, B_{11}, B_{22}, B_{33}, $S_{1\bar{1}}$, $S_{2\bar{2}}$, $S_{3\bar{3}}$ при условии $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$ ([352], стр. 181).

3. Доказать формулы (22.22) и (22.23) ([352], стр. 181).

4. Показать, что в случае пространств Эйнштейна простейший базис составляет система инвариантов B_2, B_2^1, B_3, B_3^1. Сравнить с результатами § 19.

5. Показать, что для конформно-евклидовых пространств базис определяется инвариантами B_1, S_2, S_3, S_4. Если имеем пространство постоянной кривизны, то базис сводится к одному постоянному инварианту, например, R.

Глава IV

Классификация полей тяготения общего вида по группам движений

В этой главе проводится классификация полей тяготения общего вида по допускаемым ими группам движений; при этом на тензор энергии-импульса в правой части уравнений поля Эйнштейна (12.2) не накладывается никаких специальных условий. Теория групп Ли позволяет подойти к инвариантному изучению полей тяготения.

§ 23. Общие замечания

Рассмотрим некоторое гравитационное поле в некоторой области пространства-времени в том случае, когда тензор энергии-импульса никак не конкретизирован, т. е. представлен полем двухвалентного симметричного тензора $T_{\alpha\beta}(x)$. Однако и при такой постановке вопроса этот тензор нельзя считать вполне произвольным симметричным тензором, так как (см. § 46) из условия на сигнатуру метрики следует, что допускаются не все возможные алгебраические структуры симметричных тензоров, а только некоторые; именно в смысле этих допустимых тензоров следует понимать общий вид полей тяготения. Геометрия такого поля определяется компонентами метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, заданного относительно некоторой системы координат.

Но при этом $g_{\alpha\beta}(x)$ описывают не только физические, чисто «гравитационные» свойства пространства-времени, но и отражают особенности выбора системы отнесения. Различные попытки введения привилегированных систем координат, в которых по замыслу авторов можно было бы выделить эффект выбора системы координат [254], [286], не получили пока общего признания. Ввиду этого естественно изучение полей гравитации связать с инвариантными свойствами метрики, определяемой полем, не зависящим от системы отнесения. В этом смысле групповой подход к изучению геометрии пространства-времени является наиболее плодотворным.

Действительно, пусть метрика пространства, определенная в некоторой системе координат, допускает группу Ли G_r непрерывных преобразований, сохраняющих метрику. Тогда этот же факт будет иметь место для метрики, заданной в любой другой системе отнесения. Преобразования этой группы отображают пространство на себя. Такое отображение пространства называют *автоморфизмом*, а преобразования — *движениями* в V_n. С этой точки зрения каждому полю тяготения отвечает свой автоморфизм — поле инвариантно относительно некоторой группы движений G_r, где r, как известно, меняется в пределах $0 \leqslant r \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$ $(\leqslant 10,\ n=4)$.

Эта идея сопоставления полю геометрии заданного автоморфизма высказывалась несколькими авторами, и вопрос сводился к фактическому определению возможных групп движений и отвечающих им метрик пространства-времени. Кроме того, вопрос о понятии энергии и законах сохранения в общей теории относительности тесно связан с изометриями пространства-времени и уравнения Киллинга играют важную роль в построении величин, которые сохраняются и связаны с физическими свойствами поля [273], [587].

Наряду с исследованием полей тяготения с точки зрения допускаемых ими групп движений существуют другие групповые подходы к их инвариантной характеристике: бесконечно малые конформные преобразования, допускаемые пространством; группы гомотетических движений; проективных отображений; группа голономии и др. Наиболее простому и физическому методу классификации полей тяготения по группам движений посвящена четвертая и пятая главы; в последующих главах будут разобраны инфинитезимальные, конформные, гомотетические и проективные отображения.

В случае $n=4$ при произвольном тензоре энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(x)$ из уравнений поля гравитации (12.2) следует, что классификация полей тяготения по группам движений сводится к задаче *классификации произвольных пространств* V_4 при единственном ограничении: $|g_{\alpha\beta}|<0$, которое эквивалентно (с точностью до умножения метрики на -1) утверждению: метрика пространства V_4 в точке имеет сигнатуру типа $(---+)$.

Впервые вопрос о группах движений в римановых пространствах был поставлен еще в работах С. Ли и В. Киллинга (1890—1895 гг.). В 1897 г. Бианки рассмотрел трехмерные пространства V_3 с положительно-определенной метрикой, допускающие группы движений G_r [11]. Затем эта работа была продолжена Фубини. В работах [19], [23] он дает классификацию собственноримановых пространств V_4 по группам движений. В первой из этих работ им были рассмотрены V_4 с G_r $(r=1, \ldots, 4)$, а также доказана теорема об отсутствии V_n с полной группой движений $G_{n(n+1)/2-1}$. Во второй работе он использовал полученные результаты для отыскания V_4 с G_r $(r \geqslant 5)$. Однако в этих работах содержались неточности. Фубини пользовался классификацией групп G_4 над полем комплексных чисел, указанной С. Ли в [8], и часть пространств V_4 с просто-транзитивными G_4 опустил, так как над полем вещественных чисел число структур увеличивается. Кроме того, ошибочно был сделан вывод, что V_4 не допускают G_8. Эта ошибка была исправлена И. П. Егоровым в работах [182], [248], где было показано, что неэйнштейновы пространства V_4 (собственнориманова или псевдоримановы) не допускают групп движений G_r с $r > \frac{n(n-1)}{2} + 1$ (за исключением пространств постоянной кривизны), а эйнштейновы пространства V_4 могут допускать группу G_8. Там же приведены операторы групп и метрики таких пространств. В последнее время им же этот факт был доказан в самом общем случае [529]: максимальный порядок полных групп движений пространств Эйнштейна, если не фиксировать сигнатуру метрики, равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 5$. Из работ, последовавших за исследованиями Фубини в последующие годы, отметим лишь работу Бианки [50] и работы [111], [131], где решен до конца вопрос о движениях в конформно-плоских пространствах любой сигнатуры и любого числа измерений.

Ряд исследований по движениям в пространствах аффинной связности и пространствах V_n неопределенной метрики был вызван работой [249]. Было показано, что пространства V_n, не являющиеся эйнштейновыми, допускающие полную нетранзитивную группу движений или полную транзитивную группу G_r, являются так называемыми субпроективными пространствами Кагана основного и исключительного типов и обратно. К этим работам тесно примыкают исследования К. Яно [224], Врынчану и других геометров [223].

Классификацией трехмерных римановых пространств неопределенной метрики по группам движений занимался Г. И. Кручкович [226]. Им же полностью решен вопрос о движениях в полуприводимых пространствах [289].

В случае неопределенной метрики появляется дополнительная возможность существования таких V_4, у которых G_r действует на *изотропных* поверхностях транзитивности, метрика которых вырождена. Эту возможность впервые отметил И. П. Егоров [249]. Заслуга построения метода отыскания таких V_4 и классификация их для нетранзитивных G_r ($r = 3$, 4) принадлежит Г. И. Кручковичу [288]. Однако в этой работе имеются неточности: пропущены два возможных подслучая групп G_r и из-за этого выпал ряд V_4 с G_3 на $\overset{*}{V}_3$, отсутствует классификация V_4 по просто- и кратно-транзитивным группам G_r.

В серии совместных работ А. З. Петрова, В. Р. Кайгородова и В. Н. Абдуллина [356], [394], [395], [537] была проведена систематизация известных результатов и восполнены следующие пробелы: определены V_4, допускающие G_2, V_4 с G_3, транзитивно или нетранзитивно действующих на изотропных или неизотропных поверхностях транзитивности, а также проведена классификация по просто- и кратнотранзитивным группам. В последнее время методом Картана Г. И. Кручкович также нашел кратно-транзитивные группы движений для пространства V_4 с сигнатурой $(+++-)$ [613].

Приводимая ниже классификация основывается на рассмотрении канонических вещественных структур (§ 10). Исследование ведется в классе аналитических функций, однако в некоторых случаях достаточно требования, чтобы функции были лишь класса C^1 или C^2.

§ 24. Поля тяготения, допускающие группы G_r движений с двумерными поверхностями транзитивности

Будем всюду далее обозначать векторы Киллинга, определяющие операторы $X_s f = \xi^\alpha_s \partial_\alpha f$, через ξ^α_s, а производную некоторой функции $\varphi(x)$ — $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha \varphi$ для краткости через φ_α. Кроме того, для многообразий с вырожденной метрикой мы употребляем символ $\overset{*}{V}_m$, опуская знак «$*$» в случае невырожденности.

Классификацию полей тяготения по группам движений G_r будем проводить последовательно для $r=0$, $r=1$, ... и т. д. Однако при $r \geqslant 2$ группы G_r имеют поверхности транзитивности, которые могут быть *изотропными* $(\overset{*}{V}_m)$ или *неизотропными* (V_m). Поэтому естественно разбирать эти случаи отдельно, так как в случае изотропности поверхностей транзитивности на метрику V_4 накладываются дополнительные условия.

Так, для групп движений G_2 ранг матрицы (ξ^α_s) $(\alpha = 1, \ldots, 4;$ $s = 1, 2)$ не может быть меньше двух [147], и, следовательно, эти группы могут действовать на V_2 или $\overset{*}{V}_2$. Группы движений G_3, имеющие стационарную подгруппу, также действуют на V_2 или $\overset{*}{V}_2$. При $r > 3$ группы движений не могут иметь своими поверхностями транзитивности многообразия V_2 или $\overset{*}{V}_2$ в силу известного условия, что максимальный порядок групп движений для двумерного пространства равен 3. В этом параграфе разбираются все случаи групп движений с двумерными поверхностями транзитивности, а также приводится несколько замечаний для групп G_0 и G_1.

Группа G_0.

Группа совпадает с единицей группы. Имеем пространство V_4, компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ которого нужно подчинить лишь условию $|g_{\alpha\beta}| < 0$.

Группа G_1.

Возможны два случая: вектор Киллинга ξ^α *изотропный* или *неизотропный*.

Неизотропный ξ^α $(\xi^\alpha\xi_\alpha \neq 0)$. В этом случае V_4 допускает такую систему координат, для которой $\xi_1^\alpha = \delta_1^\alpha$ и $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^2, x^3, x^4)$, а координатные кривые x^1 являются траекториями движения.

Изотропный ξ^α $(\xi^\alpha\xi_\alpha = 0)$. По сравнению с предыдущим случаем добавляется условие: $g_{11} = 0$.

Группа G_2.

G_2I на V_2. Как уже указывалось, ранг (ξ_s^α) $(\alpha = 1, \ldots, 4;\ s = 1, 2)$ не может быть меньше двух [170], и всегда можно выбрать такую систему координат, в которой $\xi_s^3 = \xi_s^4 = 0$, а уравнения поверхности транзитивности будут $x^3 = \mathrm{const}$, $x^4 = \mathrm{const}$. Пользуясь уравнениями структуры и самым общим преобразованием координат, оставляющим эти факты инвариантными:

$$x^{1'} = f(x^1, \ldots, x^4), \qquad x^{3'} = \psi(x^3, x^4),$$
$$x^{2'} = \varphi(x^1, \ldots, x^4), \qquad x^{4'} = \theta(x^3, x^4), \tag{24.1}$$

за счет выбора функций f и φ приведем векторы Киллинга к виду:

$$\xi_s^\alpha = \delta_s^\alpha \qquad (s = 1,\ 2). \tag{24.2}$$

Уравнения Киллинга для (24.2) приводят к выводу:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4). \tag{24.3}$$

Наиболее общее преобразование координат, сохраняющее (24.2) и (24.3), имеет вид:

$$x^{1'} = x^1 + f(x^3,\ x^4), \qquad x^{3'} = \psi(x^3,\ x^4),$$
$$x^{2'} = x^2 + \varphi(x^3,\ x^4), \qquad x^{4'} = \theta(x^3,\ x^4). \tag{24.4}$$

Используем произвол в выборе функции f, φ, ψ, θ для приведения метрики к одной из возможных форм. Выберем эти функции так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:

$$f_4 = \sigma(g^{13}\theta_3 - g^{14}\psi_3), \qquad \psi_4 = \sigma(g^{33}\theta_3 - g^{34}\psi_3),$$
$$\varphi_4 = \sigma(g^{23}\theta_3 - g^{24}\psi_3), \qquad \theta_4 = \sigma(g^{43}\theta_3 - g^{44}\psi_3), \tag{24.5}$$

где $\sigma = \dfrac{e_4}{\sqrt{e_4\omega}}$, $\omega = g^{33}\theta_3^2 - 2g^{34}\theta_3\psi_3 + g^{44}\psi_3^2$, $e_4 = \pm 1$. Параметры e_4 и ω выбираются так, чтобы σ была вещественной. Здесь также предполагается, что в $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ переменные x^α заменены через $x^{\alpha'}$, а f, φ, ψ, θ — функции от $x^{\alpha'}$. Система (24.5) при соблюдении этих условий и предположения об аналитичности $g^{\alpha\beta}$ в некоторой области пространства представляет собой систему дифференциальных уравнений типа Коши — Ковалевской [177], совместную в указанной области. Но (24.5) эквивалентно в новой системе координат системе условий:

$$\begin{aligned} g_{i'4'} &= 0, \\ g_{4'4'} &= e_4 \end{aligned} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{24.6}$$

Следовательно, метрика искомых V_4 в специализированной голономной системе координат будет иметь вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c:c} (g_{ij}) & 0 \\ \hdashline 0 & e_4 \end{array}\right),\ g_{ij}(x^3,\ x^4),\ e_4 = \pm 1,\ X_s = p_s \quad (s = 1,2). \tag{24.7}$$

G_2 II на V_2. Повторяя все вышеприведенные рассуждения с тем лишь отклонением, что уравнения структуры относятся к типу II, получим:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} e^{-2x^2} a_{11} & e^{-x^2} a_{12} & e^{-x^2} a_{13} & 0 \\ e^{-x^2}\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ e^{-x^2}\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{24.8}$$

$$e_4 = \pm 1,\ a_{ij} = a_{ij}(x^3,\ x^4),\ X_1 = p_1,\ X_2 = x^1 p_1 + p_2.$$

G_2 I на $\overset{*}{V}_2$. Если $\overset{*}{V}_2$ отнести к координатам x^1, x^2, то, в силу изотропности многообразия, $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0$. При этом ранг матрицы (g_{pq}) $(pq = 1,\ 2)$ не может быть равен нулю, так как в противном случае $g_{11} = g_{12} = g_{22} = 0$, и, следовательно, $|g_{\alpha\beta}| > 0$ $(\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ 4)$, что для реальных полей тяготения не имеет места. Таким образом, ранг метрики на $\overset{*}{V}_2$ равен единице и тогда на $\overset{*}{V}_2$ существует единственное семейство *особых* линий [288], изотропных и ортогональных ко всему $\overset{*}{V}_2$: $g_{pq}u^q = 0$. Если при этом G_r имеет оператор $X = \xi^s p_s$, то допускается и оператор $Y = \sigma(x)\xi^s p_s$, т. е. получим операторы с общей траекторией. Наоборот, если в $\overset{*}{V}_2$ имеются два оператора с общей траекторией, то эта траектория — *особая* линия $\overset{*}{V}_2$. Очевидно, что особые кривые представляют собой *систему импримитивности* G_r.

Возможны два случая: (a) среди операторов G_2 есть особый; (b) нет особого оператора.

(a) ξ_1^α — *особый вектор Киллинга*. Ранг (ξ_s^α) не может быть меньше двух, поэтому можно ввести такую систему координат, для которой $\xi_s^3 = \xi_s^4 = 0$ $(s = 1,\ 2)$, а уравнения $\overset{*}{V}_2$ — $x^3 = \text{const}$, $x^4 = \text{const}$. Эти свойства инвариантны относительно преобразований типа (24.1).

Всегда можно выбрать f и φ так, чтобы $\xi_1^{\alpha'} = \delta_1^{\alpha'}$, после чего остается допустимым следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^2 + f(x^2, x^3, x^4), & x^{3'} &= \psi(x^3, x^4), \\ x^{2'} &= \varphi(x^2, x^3, x^4), & x^{4'} &= \theta(x^3, x^4). \end{aligned} \qquad (24.9)$$

Так как $\xi_1^\alpha = \delta_1^\alpha$ — особый оператор, то в этой системе координат $g_{11} = g_{12} = 0$. Из уравнений структуры $[X_1 X_2] = 0$ следует, что $\xi_2^\alpha = \xi_2^\alpha(x^2, x^3, x^4)$, причем в силу условия о ранге метрики V_2^* $\xi_2^2 \neq 0$. Используя произвол в преобразованиях (24.9), добьемся того, что $\xi_2^\alpha = \delta_2^\alpha$. После этого допустимым преобразованием будет:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^{1'} + f(x^{3'}, x^{4'}), & x^3 &= \psi(x^{3'}, x^{4'}), \\ x^2 &= x^{2'} + \varphi(x^{3'}, x^{4'}), & x^4 &= \theta(x^{3'}, x^{4'}). \end{aligned} \qquad (24.10)$$

При таком преобразовании $g_{1'4'} = g_{13}\psi_4 + g_{14}\theta_4$, и так как g_{13} и g_{14} не могут одновременно обращаться в нуль ($g_{11} = g_{12} = 0$), то, не нарушая общности, можно принять, что $g_{14} \neq 0$. Кроме того, компонента g_{22} также отлична от нуля (иначе $|g_{\alpha\beta}| > 0$). В виду этого можно положить:

$$\begin{gathered} \psi_4 = \frac{g_{14}}{g}\sqrt{-e_4 g_{22}}, \quad \theta_4 = -\frac{g_{13}}{g_{14}}\psi_4, \quad \varphi_4 = -\frac{1}{g_{22}}(g_{13}\psi_4 + g_{24}\theta_4), \\ f_4 = -\frac{1}{g_{13}\psi_3 + g_{14}\theta_3}(g_{23}\varphi_4\psi_3 + g_{24}\varphi_4\theta_3 + g_{33}\psi_3\psi_4 + \\ + g_{34}(\psi_3\theta_4 + \psi_4\theta_3) + g_{44}\theta_3\theta_4). \end{gathered} \qquad (24.11)$$

Это приводит к совместной системе уравнений поля типа Коши — Ковалевской.

Взяв в качестве f, φ, ψ, θ интегралы этой системы, получим:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} &a_{ij}(x^3, x^4), \ e_4 = \pm 1, \\ &X_s = p_s \qquad (s = 1, 2). \end{aligned} \qquad (24.12)$$

(b) G_2 не имеет особых операторов. Все рассуждения повторяются почти буквально, но с тем ограничением, что если x^1 — особые линии, то не может быть вектора Киллинга $\xi_1^\alpha = \delta_1^\alpha$.

Это приводит к двум возможностям:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23}-x^1a_{22} & 0 \\ 0 & a_{23}-x^1a_{22} & a_{33}-2x^1a_{23}+x^{1^2}a_{22} & a_{34} \\ a_{14} & 0 & a_{34} & 0 \end{pmatrix}, \tag{24.13}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\quad X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^3p_2;$$

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23}-x^1a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23}-x^1a_{22} & a_{33}-2x^1a_{23}+x^{1^2}a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix}, \tag{24.14}$$

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4),\quad e_4=\pm 1,\quad X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^3p_2.$$

G_2 II действует на $\overset{*}{V_2}$. Здесь также выделяются два случая:

a) G_2 *содержит особый оператор*. Рассуждения, аналогичные случаю (a) G_2 I на $\overset{*}{V_2}$, приводят к следующему виду искомой метрики:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-x^2}a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ e^{-x^2}a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} a_{ij}(x^3,\ x^4),\ e_4=\pm 1, \\ X_1=p_1,\ X_2=x^1p_1+p_2. \end{matrix} \tag{24.15}$$

b) G_2 *не содержит особого оператора*. Всегда систему координат можно выбрать так, что x^1 — особые линии, а операторы групп примут вид:

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^2p_2. \tag{24.16}$$

Применяя, далее, допустимые преобразования координат, добьемся того, что в новой системе координат $g_{i'4'}=0$ ($i=1,\ 2,\ 3$) и метрика V_4, допускающего группу движений (24.16), запишется в виде:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & e^{-2x^1}a_{22} & e^{-x^1}a_{23} & 0 \\ a_{13} & e^{-x^1}a_{23} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},\quad a_{\alpha\beta}(x^3,\ x^4). \tag{24.17}$$

Этим исчерпываются все поля тяготения, допускающие группы движений второго порядка.

Группа G_3.

Все трехмерные группы движений в V_4 распадаются на два типа: 1) G_3 с одной стационарной подгруппой (т. е. действующие на двумерных поверхностях транзитивности) и 2) G_3, не содержащие стационарного оператора (т. е. действующие на V_3 или V_3^*).

Остановимся на выделении классов римановых пространств с группами движений G_3 со стационарным оператором. Группы G_3 без стационарной подгруппы будут рассмотрены в следующем параграфе.

(a) G_3 действует на V_2. Так как G_3 — максимальная группа на V_2, то каждое такое V_2 должно иметь постоянную кривизну K. При этом возможны случаи: (a) $K=0$, (b) $K\neq 0$ (не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $K=\pm 1$). Нетрудно показать, что в первом случае ($K=0$), когда V_2 есть плоское двумерное пространство с сигнатурой одного из двух видов: $(+\,+)$ или $(+\,-)$, мы получим группы G_3 VI при $q=-1$ (сигнатура $(+\,-)$) и G_3 VII при $q=0$ (сигнатура $(+\,+)$). Если же $K\neq 0$, то имеем неразрешимые группы G_3 VIII, IX. Операторы искомых групп легко найти, интегрируя уравнения Киллинга соответственно для плоской двумерной метрики и для V_2 постоянной кривизны. Соответствующие римановы пространства определяются путем интеграции уравнений Киллинга для полученных операторов и общей метрики V_4.

Действуя по этой схеме, получаем:

G_3 VI $(q=-1)$, VII $(q=0)$

$$ds^2=a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2}+e_1\,dx^{2^2}\right)+g_{kl}(x^3,\ x^4)\,dx^k\,dx^l,$$
$$e_1=\pm 1,\quad X_1=p_1,\quad X_2=p_2,\quad X_3=x^1p_2-e_1x^2p_1\qquad (k,\ l=3,\ 4), \tag{24.18}$$

G VIII, IX

1) $$ds^2=a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2}+e_1\cos^2 x^1\,dx^{2^2}\right)+g_{kl}(x^3,\ x^4)\,dx^k\,dx^l,$$
$$e_1=\pm 1\qquad (k,\ l=3,\ 4), \tag{24.19}$$

если $e_1=1-X_1=p_2,\ X_2=\cos x^2\,p_1+\sin x^2\operatorname{tg}x^1\,p_2,\ X_3=-\partial_2X_2;$
$e_1=-1,$ то $X_1=p_2,\quad X_2=\operatorname{ch}x^2\,p_1+\operatorname{sh}x^2\operatorname{tg}x^1\,p_2,\quad X_3=\partial_2X_2.$

2) $$ds^2=a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2}+e_1\operatorname{ch}^2x^1\,dx^{2^2}\right)+g_{kl}(x^3,\ x^4)\,dx^k\,dx^l,$$
$$e_1=\pm 1\qquad (k,\ l=3,\ 4) \tag{24.20}$$

при $e_1=1-X_1=p_2,\quad X_2=\operatorname{ch}x^2\,p_1-\operatorname{sh}x^2\operatorname{th}x^1\,p_2,\quad X_3=\partial_2X_2,$
$e_1=-1-X_1=p_2,\quad X_2=\cos x^2p_1-\sin x^2\operatorname{th}x^1p_2,\quad X_3=-\partial_2X_2.$

Для метрик (24.18) — (24.20) преобразования координат

$$x^{1'}=x^1,\ x^{2'}=x^2,\ x^{3'}=\psi(x^3,\ x^4),\ x^{4'}=\theta(x^3,\ x^4)$$

являются допустимыми и с помощью допустимых функций ψ и θ можно упростить вид (24.18) — (24.20) по схеме, подробно рассмотренной в предыдущем параграфе.

Окончательно имеем следующие пространства V_4, допускающие группы G_3 с поверхностями транзитивности V_2:

$$
\begin{aligned}
&1)\ ds^2 = a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2} + e_1 dx^{2^2}\right) + b(x^3,\ x^4)\, dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},\\
&2)\ ds^2 = a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2} + e_1 \cos^2 x^1\, dx^{2^2}\right) + b(x^3,\ x^4)\, dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},\\
&3)\ ds^2 = a(x^3,\ x^4)\left(dx^{1^2} + e_1 \operatorname{ch}^2 x^1\, dx^{2^2}\right) + b(x^3,\ x^4)\, dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},
\end{aligned} \tag{24.21}
$$

где a и b — произвольные функции своих аргументов, $e_1 = \pm 1$, $e_4 = \pm 1$. Операторы групп имеют вид, указанный выше.

(b) G_3 действует на $\overset{*}{V_2}$. В этом случае, как показал Г. Кручкович [226], G_3 будет или разрешимой группой типа II, III, или неразрешимой группой типа VIII. Пусть имеет место G_3 II. Эта группа содержит абелеву подгруппу G_2 и, следовательно, искомые пространства находятся среди метрик (24.12) — (24.14). При рассмотрении группы и метрики (24.12) из уравнений структуры следует, что $X_3 = (x^2 + \lambda(x^3,\ x^4))\, p_1 + \mu(x^3,\ x^4)\, p_2$, а уравнения Киллинга имеют вид:

$$
a_{22}\mu_3 + a_{13} = 0,\quad a_{13}\lambda_3 + a_{23}\mu_3 = 0,\quad \lambda_4 = \mu_4 = 0. \tag{24.22}
$$

Отсюда следует, что $\lambda = \lambda(x^3)$, $\mu = \mu(x^3)$, причем $\mu_3 \neq 0$ (иначе метрика V_4 выродится). Преобразование, не меняющее (24.12):

$$
x^{1'} = x^1,\ x^{2'} = x^2 + \lambda(x^3),\qquad x^{3'} = -\mu(x^3),\ x^{4'} = x^4
$$

приводит к выводу, что $X_3 = x^2 p_1 - x^3 p_2$, а из (24.22) тотчас же следует, что метрика искомых V_4 имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
ds^2 = \alpha(x^3,\ x^4)\left(2\, dx^1\, dx^3 + dx^{2^2}\right) + \beta(x^3,\ x^4)\, dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},\\
e_4 = \pm 1,\ X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = x^2 p_1 - x^3 p_2.
\end{gathered} \tag{24.23}
$$

В случае метрик и групп (24.13) и (24.14) из уравнений структуры имеем: $X_3 = (x^1 + \lambda(x^3,\ x^4))p_1 + \mu(x^3,\ x^4)\, p_2$. Однако уравнения Киллинга для этого оператора приводят к вырожденной метрике пространства V_4, и, следовательно, этот случай невозможен.

Пусть имеет место группа G_3 III. Она также содержит абелеву подгруппу G_2, и этот факт говорит о том, что искомые метрики пространства находятся среди метрик (24.12) — (24.14). В случае (24.12) в результате интеграции уравнений структуры получаем: $X_3 = (x^1 + \lambda(x^3,\ x^4))\, p_1 + \mu(x^3,\ x^4)\, p_2$; для (24.13) и (24.14) — $X_3 = \lambda(x^3,\ x^4)\, p_1 + (x^2 - x^1 x^3 + \mu)\, p_2$. Однако уравнения Киллинга для третьего оператора в первом случае приводят к вырожденной метрике V_4, для второго случая — к условию: $g_{22} = 0$, что противоречит реальным полям тяготения ($|g_{\alpha\beta}| > 0$). Таким образом, не существует реальных полей тяготения с группой движений G_3 III, действующей на V_2^*.

Рассмотрим, наконец, группу G_3 VIII. Группа G_3 VIII содержит неабелеву подгруппу G_2 II, действующую на V_2^* транзитивно. Поэтому пространства V_4, допускающие G_3 VIII на V_2^*, следует искать среди (24.15), (24.17). Рассуждения, совершенно аналогичные выше разобранным случаям G_3 II или G_3 III, приводят для (24.15) и (24.17) к условию $g_{22}=0$, противоречащему реальным полям тяготения. Следовательно, не существует полей тяготения, отвечающих V_4 с G_3 VIII на V_2^*.

Приведенные выше классы пространств (24.21) и (24.23) исчерпывают все V_4, допускающие G_3, действующие на V_2 или V_2^*. Отметим, что эти классы пространств отвечают наиболее интересным с физической точки зрения полям тяготения.

§ 25. Поля тяготения с группами движений G_3 на V_3 или V_3^*

Рассмотрим тот случай, когда G_3 не имеет стационарного оператора, т. е. G_3 действует на гиперповерхностях транзитивности V_3 или V_3^* как просто-транзитивная группа (ранг матрицы (ξ_s^α) равен 3).

G_3 действует на V_3. Так как G_3 действует на гиперповерхностях транзитивности, то они геодезически параллельны [170], и естественно ввести полугеодезическую систему координат, относительно которой эти гиперповерхности имеют уравнение $x^4=\text{const}$.

Такие V_4 для определенной метрики исследовал Фубини. Однако в случае V_4 с неопределенной метрикой неизотропные V_3 могут нести на себе тоже неопределенную метрику, и поэтому вычисления, в основном совпадающие с выкладками Фубини, необходимо проделать заново. В рассматриваемом здесь случае ранг (ξ_s^α) совпадает с порядком группы и, следовательно, в V_4 существует координатная система, в которой компоненты ξ_s^α являются самое большое функциями x^1, x^2, x^3 и для которых гиперповерхности транзитивности имеют уравнение $x^4=\text{const}$ (полугеодезическая система координат). Поэтому достаточно для нахождения вида операторов рассмотреть операторы групп движений G_3, допускаемых пространством V_3 с неопределенной метрикой.

Пользуясь изложенными выше соображениями, можно значительно сократить выкладки. Рассмотрим, например, разрешимые группы G_3 типов I—VI. В полугеодезической системе координат $g_{i4}=0$, $g_{44}=e_4=\pm 1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ и $\xi_s^\alpha=\xi_s^\alpha(x^1,\ x^2,\ x^3)$. Для всех шести типов структур операторы можно записать в виде:

$$X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=(kx^1+\varepsilon x^2)\,p_1+nx^2p_2-p_3. \quad (25.1)$$

Для каждой группы (I—VI) константы k, n, ε имеют конкретные значения, представленные следующей таблицей:

	I	II	III	IV	V	VI
k	0	0	1	1	1	1
n	0	0	0	1	1	2
ε	0	1	0	1	0	0

(25.2)

Записывая и интегрируя уравнения Киллинга для операторов (25.1), получим класс римановых пространств с группами движений G_3 I—VI:

$$\begin{gathered} g_{11}=a_{11}e^{2kx^3},\quad g_{12}=(\varepsilon a_{11}x^3+a_{12})\,e^{(n+k)\,x^3},\quad g_{13}=a_{13}e^{kx^3},\\ g_{22}=\left(\varepsilon a_{11}x^{3^2}+2\varepsilon a_{12}x^3+a_{22}\right)e^{2nx^3},\quad g_{23}=(\varepsilon a_{13}x^3+a_{23})\,e^{nx^3},\\ g_{33}=a_{33},\quad g_{i4}=0,\quad g_{44}=e_4=\pm 1 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \end{gathered} \tag{25.3}$$

где $a_{ij}=a_{ij}(x^4)$, а k, n, ε берутся из таблицы (25.2).

Заметим, что если для операторов (25.1) определить самый общий вид преобразования координат, оставляющего эти операторы неизменными, то это преобразование будет зависеть от четырех произвольных функций от x^4. Но требование сохранения полугеодезической системы координат ($g_{i4}=0$, $g_{44}=e_4$) приводит к тому, что общее преобразование координат будет зависеть лишь от четырех произвольных постоянных. Метрика же (25.3) содержит произвольные функции a_{ij} от x^4, и, следовательно, пользуясь допустимыми преобразованиями, упростить вид (25.3) не представляется возможным.

Для остальных групп G_3 (типы VII—IX) рассуждения совершенно аналогичны вышеприведенным. Поэтому не останавливаясь на частностях, приведем вид искомых метрик V_4 и операторов допускаемых ими групп движений:

G_3 VII

$$\begin{aligned} g_{11}&=e^{qx^3}\,(a_{11}+a_{12}\cos px^3+a_{22}\sin px^3),\\ g_{12}&=\frac{1}{2}\,e^{qx^3}\,(qa_{11}+\nu\cos px^3+\theta\sin px^3),\\ g_{13}&=\frac{1}{2}\,e^{\frac{q}{2}x^3}\left(\lambda\cos\frac{p}{2}\,x^3+\mu\sin\frac{p}{2}\,x^3\right),\\ g_{22}&=e^{qx^3}\left(a_{11}+\left(\frac{q^2-2}{2}\,a_{12}+\frac{pq}{2}\,a_{22}\right)\cos px^3+\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{q^2-2}{2}\,a_{22}-\frac{pq}{2}\,a_{12}\right)\sin px^3\right), \end{aligned} \tag{25.4}$$

$$\begin{aligned}
&g_{23}=e^{+\frac{q}{2}x^3}\left(a_{13}\cos\frac{p}{2}x^3+a_{23}\sin\frac{p}{2}x^3\right),\\
&g_{33}=a_{33},\ g_{i4}=0,\ g_{44}=e_4=\pm 1 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),\\
&\quad p=\sqrt{4-q^2},\ q^2<4,\ a_{ij}=a_{ij}(x^4) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),\\
&\quad \lambda=qa_{13}-pa_{23}, \qquad \mu=pa_{13}+qa_{23},\\
&\quad \nu=qa_{12}+pa_{22}, \qquad \theta=qa_{22}-pa_{12},\\
&X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=-x^2p_1+(qx^2+x^1)\,p_2+p_3.
\end{aligned} \tag{25.4}$$

G_3 VIII

$$\begin{aligned}
&g_{11}=a_{11}, \quad g_{12}=e^{-x^3}(a_{11}x^{1^2}-2a_{13}x^1+a_{12}), \quad g_{13}=a_{13}-x^1a_{11},\\
&g_{22}=e^{-2x^3}(a_{11}x^{1^4}-4a_{13}x^{1^3}+2(a_{12}+2a_{33})\,x^{1^2}-4a_{23}x^1+a_{22}),\\
&g_{23}=e^{-x^3}(a_{23}-(a_{12}+2a_{33})\,x^1+3a_{13}x^{1^2}-a_{11}x^{1^3}),\\
&g_{33}=a_{11}x^{1^2}-2a_{13}x^1+a_{33}, \quad g_{i4}=0, \quad g_{44}=e_4 \quad (i=1,\ 2,\ 3),\\
&\qquad X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3, \quad X_3=e^{x^3}p_1+x^{2^2}p_2+2x^2p_3.
\end{aligned} \tag{25.5}$$

G_3 IX

$$\begin{aligned}
&g_{11}=\frac{1}{2}a_{11}-a_{12}\sin 2x^3-a_{22}\cos 2x^3,\\
&g_{12}=(a_{13}\cos x^3-a_{23}\sin x^3)\cos x^1+(a_{12}\cos 2x^3-a_{22}\sin 2x^3)\sin x^1,\\
&g_{13}=a_{13}\cos x^3-a_{23}\sin x^3,\\
&g_{22}=a_{33}\cos^2 x^1+2\,(a_{23}\cos^3+a_{13}\sin x^3)\sin x^1\cos x^1+\\
&\qquad\qquad +\left(a_{12}\sin 2x^3+a_{22}\cos 2x^3+\frac{1}{2}a_{11}\right)\sin^2 x^1,\\
&\qquad g_{23}=a_{33}\cos x^1+(a_{23}\cos x^3+a_{13}\sin x^3)\sin x^1,\\
&\qquad g_{33}=a_{33}, \quad g_{i4}=0, \quad g_{44}=e_4 \quad (i=1,\ 2,\ 3),\\
&\qquad X_1=p_2, \quad X_2=\cos x^2\,p_1-\operatorname{ctg} x^1\sin x^2p_2+\frac{\sin x^2}{\sin x^1}\,p_3,\\
&\qquad X_3=-\sin x^2p_1-\operatorname{ctg} x^1\cos x^2p_2+\frac{\cos x^2}{\sin x^1}\,p_3.
\end{aligned} \tag{25.6}$$

В (25.4)—(25.6) a_{ij} — произвольные функции x^4. Исследуя самый общий вид преобразований координат, оставляющих неизменным вид операторов и сохраняющих полугеодезическую систему координат, можно убедиться, что они зависят только от произвольных постоянных. Дальнейшее упрощение метрик (25.4)—(25.6) за счет таких преобразований невозможно.

Все рассматриваемые группы G_3, за исключением G_3 IX, содержат подгруппы G_2 I, G_2 II, которые в свою очередь подразделяются на два класса (см. § 24), смотря по тому, где они действуют.

Если подгруппы G_2 I, II группы G_3 действуют на V_2, то метрики V_4, допускающие указанные G_3 с поверхностями транзитивности V_3, имеют найденный нами выше вид (25.3) — (25.5) и никаких дополнительных условий на метрики этих пространств не накладывается (кроме общего условия $|g_{\alpha\beta}| < 0$).

Если же подгруппы G_2 I, II действуют на $\overset{*}{V}_2$, то на метрики V_4, допускающие группы движений G_3 с такой подгруппой G_2, накладываются дополнительные условия вследствие изотропности поверхностей транзитивности подгруппы.

Так, для подгруппы G_2 I с *особым оператором*, действующей на $\overset{*}{V}_2$, возможны случаи групп G_3 I — VI на V_3 с теми же операторами, лишь в метрике (25.3) необходимо положить $a_{11} = a_{12} = 0$. Случай группы G_3 VII с этой подгруппой невозможен.

Для остальных случаев подгруппы G_2 читатель сам без труда сможет выделить из общих метрик (25.3) — (25.5) частный вид пространств V_4, отвечающих таким подгруппам, пользуясь операторами G_2 и соответствующими метриками, указанными в § 24. Поэтому останавливаться на этом не имеет смысла. Впрочем, именно эти выкладки проводятся в следующей главе при определении пространств Эйнштейна, когда они допускают такого рода группы.

G_3 действует на $\overset{*}{V}_3$. Рассматриваемые группы транзитивно действуют на изотропных гиперповерхностях транзитивности $\overset{*}{V}_3$, и поэтому в V_4 всегда можно ввести изотропно-геодезическую систему координат, для которой уравнения семейства $\overset{*}{V}_3$ записываются в виде $x^4 = \text{const}$. В свою очередь на этих гиперповерхностях можно уточнить выбор координат так, чтобы параметрические кривые x^1 совпали с конгруэнцией *особых* линий $\overset{*}{V}_3$ (§ 24), касательный вектор к которым должен удовлетворять условиям: $g_{ij}u^j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Очевидно, в такой системе координат имеем:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{14} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{23} & g_{33} & g_{34} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}, \tag{25.7}$$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^1, \ldots, x^4), \quad g_{22}g_{33} - g_{23}^2 \neq 0.$$

Самый общий вид преобразования координат, относительно которого форма (25.7) инвариантна, находится путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, отражающих неизменность вида (25.7):

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} &= f(x^1, \ldots, x^4), & x^{3'} &= \psi(x^2, x^3, x^4), \\ x^{2'} &= \varphi(x^2, x^3, x^4), & x^{4'} &= \theta(x^4), \end{aligned}\right\} \tag{25.8}$$

где f, φ, ψ, θ — произвольные функции своих аргументов.

Так как пути движения, определенного любым оператором группы G_3, лежат на V_3^*, то уравнения Киллинга с учетом вида (25.7) для любого оператора ξ^α приводят к выводу:

$$\partial_1\xi^2 = \partial_1\xi^3 = 0, \quad \xi^4 = 0. \tag{25.9}$$

Идея метода отыскания групп движений, действующих на изотропных гиперповерхностях транзитивности, предложенная Кручковичем, заключается в следующем: каждая G_3, кроме G_3 IX, допускает подгруппу G_2 движений, поэтому сначала отыскиваем канонический вид операторов G_2, действующей на V_3^*, для изотропно-геодезической системы координат (25.7) и затем ищем из уравнений структуры с учетом (25.9) оператор X_3. После этого из уравнений Киллинга определяется метрика V_4. Для G_3 IX проводится несколько иное рассуждение, которое мы приведем ниже.

Как уже указывалось в § 24, семейство особых линий на V_3^* образует систему импримитивности любой нетранзитивной группы движений, имеющей изотропные поверхности транзитивности. Поэтому если группа допускает особый оператор, совершающий сдвиг вдоль особой кривой, то он должен быть оператором *одномерного нормального делителя группы* [288]. Вследствие этого его коммутант с любым другим оператором отличается от особого оператора лишь на постоянный множитель, может быть, равный нулю. Следовательно, является существенным особо выделить те G_2, которые содержат особый оператор. Оказывается, для определения всех групп движений G_3 с изотропными гиперповерхностями транзитивности, допускаемых реальными полями тяготения, достаточно рассмотреть случаи абелевой G_2 с особым оператором и без особого оператора, а также случай неабелевой G_2 без особого оператора.

(a) Если абелева G_2 *допускает особый оператор*, то [226] она действует на изотропных V_2^*. Систему координат, не меняя вида (25.7), можно выразить так (см. § 24), что операторы рассматриваемой G_2 будут иметь вид:

$$X_s = p_s \qquad (s = 1,\ 2), \tag{25.10}$$

а допустимые преобразования содержат четыре произвольные функции своих аргументов:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 + f(x^3,\ x^4), \quad & x^{3'} &= \psi(x^3,\ x^4),\\ x^{2'} &= x^2 + \varphi(x^3,\ x^4), \quad & x^{4'} &= \theta(x^4). \end{aligned} \tag{25.11}$$

(b) Пусть абелева G_2 *не содержит особого оператора*. Совершая преобразования координат (25.8) для первого вектора ξ_1^α, получим:

$$\xi_1^{1'} = f_1\xi_1^1 + f_2\xi_1^2 + f_3\xi_1^3, \quad \xi_1^{2'} = \varphi_2\xi_1^2 + \varphi_3\xi_1^3, \quad \xi_1^{3'} = \psi_2\xi_1^2 + \psi_3\xi_1^3. \tag{25.12}$$

Заметив, что ξ_1^2, ξ_1^3 не обращаются одновременно в нуль (иначе имели бы особый оператор), потребуем, чтобы функции f, φ, ψ удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{aligned} &f_1\xi_1^1+f_2\xi_1^2+f_3\xi_1^3=0,\\ &\varphi_2\xi_1^2+\varphi_3\xi_1^3=1,\\ &\psi_2\xi_1^3+\psi_3\xi_1^3=0, \end{aligned} \tag{25.13}$$

которая элементарно приводится к виду системы Коши — Ковалевской и совместна. Требование (25.13) эквивалентно тому, что первый оператор в новой системе координат должен иметь вид $X_1=p_2$, а допустимые преобразования запишутся в виде:

$$\begin{aligned} &x^{1'}=f(x^1,\ x^3,\ x^4), \quad &&x^{2'}=x^2+\varphi(x^3,\ x^4),\\ &x^{3'}=\psi(x^3,\ x^4), &&x^{4'}=\theta(x^4), \end{aligned} \tag{25.14}$$

где $f_1\psi_3\theta_4\neq 0$. Из уравнений структуры $[X_1X_2]=0$ следует:

$$\xi^\alpha=\xi_2^1(x^1,\ x^3,\ x^4)\delta_1^\alpha+\xi_2^2(x^3,\ x^4)\delta_2^\alpha+\xi_2^3(x^3,\ x^4)\delta_3^\alpha.$$

Применяя (25.14), получим в новой системе координат, что

$$\xi_2^{1'}=f_1\xi_2^1+f_3\xi_2^3,\quad \xi^{2'}=\xi_2^2+\varphi_3\xi_2^3,\quad \xi_2^{3'}=\psi_3\xi_2^3,\quad \xi_2^{4'}=0.$$

Если $\xi_2^3\neq 0$, то за функции f, φ, ψ возьмем интегралы совместной системы:

$$f_1\xi_2^1+f_3\xi_2^3=0,\quad \xi_2^2+\varphi_3\xi_2^3=0,\quad \psi_3\xi_2^3=1,$$

и, следовательно,

$$X_1=p_2,\qquad X_2=p_3, \tag{25.15}$$

а допустимое преобразование будет иметь вид:

$$x^{1'}=f(x^1,\ x^4),\quad x^{2'}=x^2+\varphi(x^4),\quad x^{3'}=x^3+\psi(x^4),\quad x^{4'}=\theta(x^4). \tag{25.16}$$

Если же $\xi_2^3=0$, то

$$\xi_2^{1'}=f_1\xi_2^1,\quad \xi_2^{2'}=\xi_2^2,\quad \xi_2^{3'}=0,\quad \xi_2^{4'}=0. \tag{25.17}$$

В силу того, что наличие особого оператора исключено, то $\xi_2^1\neq 0$ и $\xi_2^2\neq 0$. Когда $\xi_2^2=\xi_2^2(x^3,\ x^4)$ $\left(\text{или } \xi_2^2=\xi_2^2(x^3)\right)$, функции f и φ определим условиями: $f_1\xi_2^1=1$, $\varphi=\xi_2^2(x^3,\ x^4)$ $\left(\text{или } \varphi=\xi_2^2(x^3)\right)$, что приводит нас к следующему виду операторов:

$$X_1=p_2,\qquad X_2=p_1+x^3p_2. \tag{25.18}$$

Когда же ξ_2^2 — функция только x^4: $\xi_2^2=\xi_2^2(x^4)$, потребуем, чтобы $f_1\xi_2^1=1$, $\theta=\xi_2^2(x^4)$, и тогда

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^4p_2. \tag{25.19}$$

Предположение $\xi_2^2=\text{const}$, как легко убедиться по аналогии с предшествующими рассуждениями, приводит к системе операторов $X_1=p_2$, $X_2=p_1+cp_2$, т. е. к эквивалентной системе $X_1=p_2$, $X_2=p_1$, но это давало бы особый оператор, что противоречит основному предположению.

(с) Наконец, если имеется *неабелева* G_2, *не имеющая особого оператора*, то система координат может быть выбрана (без изменения вида (25.7)) так, что

$$X_1=p_2,\qquad X_2=p_1+x^2p_2, \tag{25.20}$$

или

$$X_1=p_2,\qquad X_2=x^2p_2+p_3. \tag{25.21}$$

Займемся теперь нахождением V_4, допускающих группы движений G_3 с поверхностями транзитивности V_3^*.

Пусть имеет место $G_3\,\mathrm{I}$: $[X_iX_j]=0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, и пусть она включает G_2 абелеву с особым оператором, т. е. первые два оператора приведены к виду (25.10). Из уравнений структуры для $G_3\,\mathrm{I}$:

$$\xi_3^\alpha=\xi_3^i\left(x^3,\ x^4\right)\delta_i^\alpha\qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Применяя преобразование (25.11), получим:

$$\xi_3^{1'}=\xi_3^1+f_3\xi_3^3,\quad \xi_3^{2'}=\xi_3^2+\varphi_3\xi_3^3,\quad \xi_3^{3'}=\psi_3\xi_3^3,\quad \xi_3^{4'}=0.$$

Так как $\xi_3^3\neq 0$ (иначе G_3 действовала бы на V_2^*), то за счет выбора функций f, φ, ψ можно привести невырожденным преобразованием координат $\xi_3^{\alpha'}$ к $\delta_3^{\alpha'}$. Таким образом, $X_i=p_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, а $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^4)$. После этого самый общий тип допускаемых преобразований будет иметь вид:

$$x^{1'}=x^1+f(x^4),\quad x^{2'}=x^2+\varphi(x^4),\quad x^{3'}=x^3+\psi(x^4),\quad x^{4'}=\theta(x^4).$$

Легко убедиться, что, пользуясь такими преобразованиями, можно подобрать f, φ, ψ, θ так, чтобы $g_{1'4'}=1$, $g_{i'4'}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Следовательно, имеем:

$G_3\mathrm{I}$ на V_3^*

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&a_{22}&a_{23}&0\\0&a_{23}&a_{33}&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad a_{\alpha\beta}(x^4),\qquad X_i=p_i. \tag{25.22}$$

Предположим, что подгруппа G_2 не содержит особого оператора и имеет место случай, когда ее операторы приведены к виду (25.15). Из уравнений структуры и (25.9) следует, что тогда

$$\xi_3^\alpha = \xi_3^1(x^1, x^4)\delta_1^\alpha + \xi_3^2(x^4)\delta_2^\alpha + \xi_3^3(x^4)\delta_3.$$

С помощью допустимого преобразования (25.16) получим:

$$\xi_3^{1'} = f_1\xi_3^1, \quad \xi_3^{2'} = \xi_3^2, \quad \xi_3^{3'} = \xi_3^3.$$

Здесь $\xi_3^1 \neq 0$ (иначе группа G_3 действовала бы на V_2), и, кроме того, случай, когда ξ_3^2 и ξ_3^3 одновременно равняются нулю или равны некоторым константам, рассматривать не нужно, так как при выполнении этих условий $X_3 = p_1$ и мы имели бы (25.22). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\xi_3^2 \neq 0$ (в противном случае перенумерация координат $x^3 \to x^2$, $x^2 \to x^3$ возвратит нас к рассматриваемой ситуации). Наложив условия: $f_1\xi_3^1 = 1$, $x^{1'} = \xi_3^2(x^4)$, приведем ξ_3^α в новой системе координат к виду:

$$\xi_3^{\alpha'} = \delta_1^{\alpha'} + x^4\delta_2^{\alpha'} + \lambda(x^4)\delta_3^{\alpha'} .$$

После этого, записывая уравнения Киллинга и используя допустимые преобразования уже для всех трех операторов группы, определим метрику искомого V_4:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & -(a_{22}+a_{23}\lambda')x^1 \\ 0 & a_{23} & a_{33} & -(a_{23}+a_{33}\lambda')x^1 \\ a_{14} & -(a_{22}+a_{23}\lambda')x^1 & -(a_{23}+a_{33}\lambda')x^1 & \left(a_{22}+2a_{23}\lambda'+a_{33}\lambda'^2\right)x^{1^2} \end{bmatrix}, \tag{25.23}$$

где $a_{\alpha\beta}(x^4)$, $\lambda' = \dfrac{d\lambda(x^4)}{dx^4}$, $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = p_1 + x^4p_2 + \lambda p_3$.

Если же имеют место операторы (25.18), то из уравнений структуры и (25.9) следует, что $\xi_3^3 = 0$ — получим случай, когда G_3 действует на $\overset{*}{V}_2$, рассмотренный ранее.

Для операторов (25.19) группа G_3 имеет операторы, получающиеся при $\lambda = 0$ из (25.23). Искомое пространство V_4 содержится в классе пространств (25.23) при $\lambda' = 0$.

Приведенная выше схема рассуждения повторяется для каждого из возможных типов структур G_3. Этим методом классификация групп движений G_3 на $\overset{*}{V}_3$ получена в работе [288], кроме ряда классов пространств, выпавших из общей схемы, вследствие недоопределения операторов G_2 вида (25.18), (25.19).

Таким образом, получаем следующую классификацию:

G_3 II — VI на V_3^* (имеется особый оператор)

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-kx^3} \\ 0 & a_{22}e^{-2lx^3} & a_{23}e^{-lx^3} & -\varepsilon x^3 e^{-kx^3} \\ 0 & a_{23}e^{-lx^3} & a_{33} & 0 \\ e^{-kx^3} & -\varepsilon x^3 e^{-kx^3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (25.24)$$

где $a_{ij}(x^4)$, $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = (kx^1 + \varepsilon x^2)\, p_1 + lx^2 p_2 + p_3$, константы k, l, ε берутся из следующей таблицы:

	II	III₁	IV	V	VI	III₂
k	0	0	1	1	1	1
l	0	1	1	1	$q \neq 1$	0
ε	1	0	1	0	0	0

(25.25)

Если подгруппа G_2 искомых групп G_3 с изотропными поверхностями транзитивности V_3^* не содержит особого оператора и принадлежит к виду (25.15), то метрики V_4, допускающие такие группы движений, следующие:

G_3 II

$$\begin{aligned} &g_{11} = g_{12} = g_{13} = 0, \quad g_{14} = a_{14}, \quad g_{22} = a_{22}, \\ &g_{23} = a_{23} + a_{22}x^1, \quad g_{33} = a_{33} + 2a_{23}x^1 + a_{22}x^{1^2}, \\ &g_{24} = \varepsilon\left(\frac{1}{2}\, a_{22}x^1 + a_{23}\right) x^1, \\ &g_{34} = \varepsilon\left(\frac{1}{2}\, a_{22}x^{1^3} + \frac{3}{2}\, a_{23}x^{1^2} + a_{33}x^1\right) + a_{34}, \\ &g_{44} = \varepsilon\left(\frac{1}{4}\, a_{22}x^{1^4} + a_{23}x^{1^3} + a_{33}x^{1^2} + 2a_{34}x^1\right), \end{aligned} \qquad (25.26)$$

$a_{\alpha\beta}(x^4)$, $\varepsilon = 0,1$; $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = -p_1 + x^3 p_2 + \varepsilon x^4 p_3$.

G_3 III на V_3^*

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23}e^{-x^1} & -\varepsilon a_{22}x^1 \\ 0 & a_{23}e^{-x^1} & a_{33}e^{-2x^1} & -\varepsilon a_{23}x^1 e^{-x^1} \\ a_{14} & -\varepsilon a_{22}x^1 & -\varepsilon a_{23}x^1 e^{-x^1} & a_{44} + \varepsilon a_{22}x^{1^2} \end{pmatrix}, \qquad (25.27)$$

$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x^4)$, $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = p_1 + \varepsilon x^4 p_2 + x^3 p_3$, $\varepsilon = 0,1$.

G_3 IV, V, VI на V_3^*

$$g_{11}=g_{12}=g_{13}=0,\quad g_{14}=1,\quad g_{22}=a_{22}e^{-2x^1},\quad g_{24}=a_{24}e^{-x^1},\quad g_{44}=0,$$

$$\begin{aligned} g_{23}&=\begin{cases} e^{-2x^1}(a_{23}-a_{22}x^1), & G_3\,\text{IV}\ (\varepsilon=q=1),\\ a_{23}e^{-(q+1)\,x^1}, & G_3\,\text{V, VI}\ (\varepsilon=0),\end{cases}\\ g_{33}&=\begin{cases} e^{-2x^1}(a_{22}x^{1^2}-2a_{23}x^1+a_{33}), & G_3\,\text{IV},\\ e^{-2qx^1}a_{33}, & G_3\,\text{V, VI},\end{cases}\\ g_{34}&=\begin{cases} e^{-x^1}(a_{34}-a_{24}x^1), & G_3\,\text{IV},\\ a_{34}e^{-qx^1}, & G_3\,\text{V, VI}.\end{cases}\end{aligned}\tag{25.28}$$

Операторы: $X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=p_1+(x^2+\varepsilon x^3)\,p_2+qx^3p_3.$

G_3 VII на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0,\quad g_{14}=1,\\ &g_{22}=e^{-qx^1}(a_1+(qa_2+pa_3)\cos px^1+(qa_3-pa_2)\sin px^1),\\ &g_{23}=e^{-qx^1}\left(\frac{q}{2}\,a_1+2a_2\cos px^1+2a_3\sin px^1\right),\\ &g_{24}=e^{-\frac{q}{2}x^1}\left(a_4\cos\frac{p}{2}\,x^1+a_5\sin\frac{p}{2}\,x^1\right),\\ &g_{33}=e^{-qx^1}(a_1+(qa_2-pa_3)\cos px^1+(qa_3+pa_2)\sin px^1),\\ &g_{34}=e^{-\frac{q}{2}x^1}\left(\left(\frac{p}{2}\,a_5-\frac{q}{2}\,a_4\right)\cos\frac{p}{2}\,x^1-\left(\frac{p}{2}\,a_4+\frac{q}{2}\,a_5\right)\sin\frac{p}{2}\,x^1\right),\end{aligned}\tag{25.29}$$

$$a_\alpha=a_\alpha(x^4),\quad X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=p_1-x^3p_2+(x^2+qx^3)\,p_3.$$

В случае подгруппы (25.18) имеем такие пространства:

G_3 III на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0,\quad g_{14}=1,\quad g_{22}=a_{22}\,(x^3)^{-2},\\ &g_{23}=(a_{23}-x^1a_{22})\,(x^3)^{-2},\quad g_{24}=a_{24}\,(x^3)^{-1},\\ &g_{33}=(a_{22}x^{1^2}-2a_{23}x^1+a_{33})\,(x^3)^{-2},\\ &g_{34}=(a_{34}-x^1a_{24})\,(x^3)^{-1},\quad a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\,(x^4),\end{aligned}\tag{25.30}$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^3p_2,\quad X_3=x^2p_2+x^3p_3.$$

G_3 IV на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0,\quad g_{14}=e^{x^3},\\ &g_{22}=a_{22}e^{2x^3},\quad g_{23}=a_{23}e^{x^3}-a_{22}e^{2x^3}x^1,\\ &g_{33}=+a_{22}x^{1^2}e^{2x^3}-2a_{23}x^1e^{x^3}+a_{33},\\ &g_{34}=a_{34},\quad g_{24}=0,\quad a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\,(x^4),\end{aligned}\tag{25.31}$$

$$X_1=p_2,\quad X_2=p_1+x^3p_2,\quad X_3=x^1p_1+x^2p_2-p_3.$$

G_3 VI на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{24}=g_{44}=0, \quad g_{14}=(x^3)^{q\omega},\\ &g_{22}=a_{22}(x^3)^{2\omega}, \quad g_{23}=a_{23}(x^3)^{\omega(2-q)}-a_{22}x^1(x^3)^{2\omega},\\ &g_{33}=a_{22}x^{1^2}(x^3)^{2\omega}-2a_{23}x^1(x^3)^{\omega(2-q)}+a_{33}(x^3)^{-2},\\ &g_{34}=a_{34}(x^3)^{-1}, \quad a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(x^4), \quad \omega=(q-1)^{-1}, \end{aligned} \tag{25.32}$$

$$X_1=p_2, \quad X_2=p_1+x^3p_2, \quad X_3=qx^1+x^2p_2+(1-q)x^3p_3.$$

G_3 VII на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0, \quad g_{14}=RS, \quad g_{22}=a_{22}R^{-2}S^2,\\ &g_{23}=a_{23}R^{-3}S-a_{22}x^1R^{-1}S^2, \quad g_{24}=\left(a_{24}-x^3\right)R^{-1}S,\\ &g_{33}=a_{33}x^{1^2}R^{-2}S^2-2a_{23}x^1R^{-3}S+a_{33}R^{-4},\\ &g_{34}=\left(x^3-a_{24}\right)x^1R^{-1}S, \quad a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\left(x^4\right), \end{aligned} \tag{25.33}$$

$$X_1=p_2, \; X_2=p_1+x^3p_2, \; X_3=(x^2+x^2(x^3-q))\,p_1+x^2x^3p_2+R^2p_3,$$
$$R^2=x^3-qx^3+1, \; S=\exp\{-pq\operatorname{arctg}(2x^3-q)\,p\},$$
$$p=(4-q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad q^2<4.$$

Наконец для подгруппы G_2 с операторами (25.19) имеем лишь один класс пространств:

G_3 V на V_3^*

$$\begin{aligned} &g_{11}=g_{12}=g_{13}=0, \quad g_{14}=e^{x^3}, \quad g_{22}=a_{22}e^{2x^3},\\ &g_{23}=a_{23}e^{x^3}, \quad g_{24}=-a_{22}x^1e^{2x^3}, \quad g_{33}=a_{33},\\ &g_{34}=a_{34}-a_{23}x^1e^{x^3}, \quad g_{44}=a_{22}x^{1^2}e^{2x^3}, \quad a_{\alpha\beta}(x^4). \end{aligned} \tag{25.34}$$

$$X_1=p_2, \quad X_2=p_1+x^4p_2, \quad X_3=x^1p_1+x^2p_2-p_3.$$

В случае неразрешимых G_3 VIII и IX, как легко видеть, не может быть особых операторов, так как такие группы не допускают одномерного нормального делителя. Группа G_3 VIII имеет неабелеву подгруппу G_2, для которой можно взять операторы в виде (25.20) или (25.21). Но первое из этих предположений приводит к вырождению метрики V_4, и остается только второе, для которого из уравнений структуры после очевидных упрощений получим:

$$X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3, \quad X_3=-e^{x^3}p_1+(\varepsilon e^{2x^3}+x^{2^2})\,p_2+2x^2p_3,$$

где $\varepsilon=0, 1, -1$.

В зависимости от того, какое значение имеет ε, получим три класса пространств:

1. $G_3\,\mathrm{VIII}$ на V_3^*

$$
\begin{gathered}
g_{11}=g_{12}=g_{13}=0, \quad g_{14}=1, \quad g_{44}=0, \\
g_{22}=\left(\frac{1}{2}\,a_1+a_2e^{4x^1}+a_3e^{-4x^1}\right)e^{-2x^3}, \\
g_{23}=\left(a_2e^{4x^1}-a_3e^{-4x^1}\right)e^{-x^3}, \quad g_{24}=\left(\frac{1}{2}+a_4e^{2x^1}+a_5e^{-2x^1}\right)e^{-x^3}, \\
g_{33}=-\frac{1}{2}\,a_1+a_2e^{4x^1}+a_3e^{-4x^1}, \quad g_{34}=a_4e^{2x^1}-a_5e^{-2x^1}.
\end{gathered}
\tag{25.35}
$$

Операторы: $X_1=p_2$, $X_2=x^2p_2+p_3$, $X_3=-e^{x^3}p_1+(x^{2^2}+e^{2x^3})\,p_2+$ $+2x^2p_3$.

2. $G_3\,\mathrm{VIII}$ на V_3^*

$$
\begin{gathered}
g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0, \quad g_{14}=1, \\
g_{22}=\left(a_2\cos 4x^1+a_3\sin 4x^1-\frac{1}{2}\,a_1\right)e^{-2x^3}, \\
g_{23}=\left(a_3\cos 4x^1-a_2\sin 4x^1\right)e^{-x^3}, \\
g_{24}=\left(a_4\cos 2x^1+a_5\sin 2x^1-\frac{1}{2}\right)e^{-x^3}, \\
g_{33}=-\left(a_2\cos 4x^1+a_3\sin 4x^1+\frac{1}{2}\,a_1\right), \\
g_{34}=a_5\cos 2x^1-a_4\sin 2x^1, \qquad a_\alpha=a_\alpha(x^4),
\end{gathered}
\tag{25.36}
$$

$$
X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3, \quad X_3=-e^{x^3}p_1+(x^{2^2}-e^{2x^3})\,p_2+2x^2p_3.
$$

3. $G_3\,\mathrm{VIII}$ на V_3^*

$$
\begin{gathered}
g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0, \quad g_{14}=1, \\
g_{22}=(4a_1x^{1^2}+4a_2x^1+a_3)\,e^{-2x^3}, \quad g_{23}=(2a_1x^1+a_2)\,e^{-x^3}, \\
g_{24}=(a_5-2a_4x^1-x^{1^2})\,e^{-x^3}, \quad g_{33}=a_1, \quad g_{34}=a_4-x^1, \quad a_\alpha(x^4),
\end{gathered}
\tag{25.37}
$$

$$
X_1=p_2, \quad X_2=x^2p_2+p_3, \quad X_3=2x^2p_3+x^{2^2}p_2-e^{x^3}p_1.
$$

Рассмотрим неразрешимую $G_3\,\mathrm{IX}$, которая также не может содержать особого оператора, и поэтому X_1 можно привести к виду $\xi_1^\alpha=\delta_1^\alpha$. Так как $G_3\,\mathrm{IX}$ является единственной G_3, не содержащей подгруппы G_2, то операторы X_2 и X_3 приходится искать непосредственно из уравнений структуры, используя допустимые преобразования. После этого из уравнений Киллинга определяется метрика, которую за счет допустимых преобразований можно привести к виду:

G_3 IX на V_3^*

$$\begin{aligned}
&g_{11}=g_{12}=g_{13}=g_{44}=0, \quad g_{14}=1,\\
&g_{22}=(a_1\sin 2x^1-a_2\cos 2x^1+a_3)\cos^2 x^3,\\
&g_{23}=-(a_1\cos 2x^1+a_2\sin 2x^1)\cos x^3,\\
&g_{24}=\sin x^3+(a_4\cos x^1+a_5\sin x^1)\cos x^3,\\
&g_{33}=a_2\cos 2x^1-a_1\sin 2x^1+a_3,\\
&g_{34}=a_4\sin x^1-a_5\cos x^1, \quad a_\alpha=a_\alpha(x^4).
\end{aligned} \tag{25.38}$$

Операторы: $X_1=p_2$, $X_2=\sec x^3\cos x^2 p_1-\operatorname{tg} x^3\cos x^2 p_2+\sin x^2 p_3$, $X_3=\partial_2 X_2$.

Этим завершается классификация полей тяготения, допускающих группы движений G_r $(r=3)$.

Относительно этой классификации необходимо сделать следующее замечание: для некоторых полученных выше метрик найденные группы G_3 могут оказаться неполными группами движений — метрики допускают дополнительные операторы. Чтобы это обнаружить, необходимо для каждой из этих метрик проинтегрировать уравнения Киллинга и выделить дополнительные операторы, если они имеются.

Проведя эти вычисления для метрик (25.22) — (25.38), мы придем к выводу, что во всех случаях группы будут полные, за исключением двух метрик (25.22) и (25.24) (при $k=l=0$, $\varepsilon=1$).

Метрика (25.22) допускает еще два оператора, и, следовательно, для этого пространства полной группой движений является нетранзитивная группа G_5, действующая на V_3^*:

$$\begin{aligned}
&X_i=p_i, \quad X_4=x^2p_1+\varphi(x^4)\,p_2+\psi(x^4)\,p_3,\\
&X_5=x^3p_1+\psi p_2+\theta(x^4)\,p_3,
\end{aligned} \tag{25.39}$$

где

$$\Delta\theta'=-g_{22}, \quad \Delta\psi'=g_{23}, \quad \Delta\varphi'=-g_{33}, \quad \Delta=g_{22}g_{33}-g_{23}^2 \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Пространство (25.24) с G_3 II ($k=l=0$, $\varepsilon=1$) также допускает группу движений G_5 с операторами:

$$\begin{aligned}
&X_s=p_s, \quad X_3=x^2p_1+p_3, \quad X_4=\underset{1}{u}x^3p_1+\underset{1}{u}p_2+\underset{1}{v}p_3,\\
&X_5=\underset{2}{u}x^3p_1+\underset{2}{u}p_2+\underset{2}{v}p_3 \qquad (s=1,\ 2),
\end{aligned} \tag{25.40}$$

где $\underset{s}{u}$, $\underset{s}{v}$ образуют систему двух независимых решений линейной системы:

$$u'=\frac{1}{\Delta}(a_{23}u+a_{33}v), \quad v'=\frac{1}{\Delta}(a_{23}v-a_{11}u), \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}\\ a_{23}a_{33}\end{vmatrix}. \tag{25.41}$$

Однако уравнения структуры для (25.40) с помощью подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ сводятся к уравнениям структуры (25.39). Кроме того, из (25.40) непосредственно следует, что эта группа содержит также абелеву подгруппу G_3 с особым оператором, действующую на $\overset{*}{V}_3$. Таким образом, метрика (25.24) для $k=l=0$, $\varepsilon=1$ при помощи невырожденного преобразования может быть приведена к виду (25.22), поэтому случай группы (25.40) не заслуживает специального рассмотрения.

§ 26. Четырехчленные группы движений в полях тяготения

Если порядок полной группы G_r, действующей в V_4, равен 4, а ранг матрицы ξ^α_s ($s=1, 2, 3, 4$) меньше 4, то G_r имеет поверхности транзитивности V_3 или $\overset{*}{V}_3$, так как V_2 и $\overset{*}{V}_2$ не могут допускать группы более высокого порядка, чем 3.

а) G_4 действует на V_3. Так как всякая группа Ли G_4 имеет подгруппу G_3 [249], то V_4 с нетранзитивной G_4, действующей на V_3, содержится среди V_4, допускающих G_3, и можно применить следующий метод: 1) используя классификацию неизоморфных структур G_4 (§ 10) и пользуясь операторами группы G_3 (§§ 24, 25), определим из уравнений структуры G_4 четвертый оператор X_4; 2) интегрируя уравнения Киллинга для X_4 и пользуясь допустимыми преобразованиями, найдем канонический вид искомой метрики. При этом, естественно, можно брать любую подгруппу G_3, содержащуюся в G_4. Кроме того, нужно учесть, что эта G_3 может действовать на V_3, V_2 или $\overset{*}{V}_2$. Таким образом, эти случаи требуют отдельного изучения для того, чтобы классификация была полной и не содержала логических пересечений.

Рассмотрим сначала тот случай, когда группа G_4 содержит подгруппу G_3, действующую транзитивно на этом V_3, и перечислим все возможные случаи структур G_4.

Введем в V_4 полугеодезическую систему координат, относительно которой $ds^2=e_4\,dx^{4^2}+g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, $g_{ij}(x^1, \ldots, x^4)$, $e_4=\pm 1$, а геодезически-параллельные гиперповерхности транзитивности имеют уравнения $x^4=\text{const}$. В такой системе координат $\xi^4_s=0$ и $\xi^\alpha_s=\xi^\alpha_s(x^1, x^2, x^3)$. Применяем далее указанный выше алогорифм для всех структур G_4. Например, группа $G_4\,\mathrm{I}$ содержит подгруппу $G_3\,\mathrm{II}$, операторы которой в случае поверхностей транзитивности V_3 имеют вид (см. (25.1) при $k=n=0$, $\varepsilon=1$). Удобно предварительно в (25.1) и (25.3) провести преобразование $x^1=x^{2'}$, $x^2=x^{3'}$, $x^3=x^{1'}$, после чего операторы примут вид:

$$X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=x^3p_2-p_1. \tag{26.1}$$

Из уравнений структуры $G_4\,\mathrm{I}$ следует:

$$\partial_2\xi_4^\alpha = c\delta_2^\alpha,\ \ \partial_3\xi_4^\alpha = \delta_3^\alpha,\ -\partial_1\xi_4^\alpha + cx^3\delta_2^\alpha - \xi_4^3\delta_2^\alpha = (c-1)\left(x^3\delta_2^\alpha - \delta_1^\alpha\right), \tag{26.2}$$

откуда для ξ_4^α получим выражение

$$\xi_4^\alpha = \left(\alpha + (c-1)\,x^1\right)\delta_1^\alpha + \left(\beta + cx^2 - \gamma x^1\right)\delta_2^\alpha + \left(\gamma + x^3\right)\delta_3^\alpha,$$

где α, β, γ — некоторые константы. В зависимости от того, будет ли $c=1$ или $c\neq 1$, с помощью допустимых преобразований оператор X_4 можно представить соответственно в виде:

$$\text{(a)}\ X_4 = \alpha p_1 + x^2p_2 + x^3p_3,\ \ \text{(b)}\ X_4 = (c-1)\,x^1p_1 + cx^2p_2 + x^3p_3.$$

Однако, интегрируя уравнения Киллинга для (25.3) ($k=n=0$, $\varepsilon=1$) и X_4 в случае (a), придем к противоречию, а случай (b) может иметь место лишь при $c=0$. Таким образом, получим метрику:

$G_4\,\mathrm{I}$ на V_3

$$ds^2 = 2a_{13}\,dx^1\,dx^3 + a_{22}\,(dx^2 + x^1\,dx^3)^2 + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.3}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = x^3p_2 - p_1,\ \ X_4 = x^3p_3 - x^1p_1.$$

Исследование для других типов структур G_4 аналогично.

$G_4\,\mathrm{II}$ на V_3 — не существует полей тяготения, допускающих такую группу движений.

$G_4\,\mathrm{III}$ на V_3 ($q=0$)

$$ds^2 = a_{33}\,(dx^{1^2} + dx^{3^2}) + a_{22}\,(dx^2 + x^1\,dx^3)^2 + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.4}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = x^3p_2 - p_1,$$

$$X_4 = x^1p_3 + \frac{1}{2}(x^{3^2} + x^{1^2})\,p_2 - x^3p_1.$$

$G_4\,\mathrm{IV}$ на V_3

$$ds^2 = a_{11}\,dx^{1^2} + 2a_{23}e^{x^1}\,dx^2\,dx^3 + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.5}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = x^2p_2 - p_1,\ \ X_4 = x^3p_3 - p_1.$$

$G_4\,\mathrm{V}$ на V_3^*

$$ds^2 = a_{11}\,dx^{1^2} + a_{22}e^{2x^1}\,(dx^{2^2} + dx^{3^2}) + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.6}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = x^2p_2 - p_1 + x^3p_3,\ \ X_4 = x^2p_3 - x^3p_2.$$

$G_4\,\mathrm{VI}$ на V_3 ($k=-1$, $l=0$, $\varepsilon=1$)

$$ds^2 = a_{11}\,dx^{1^2} + 2a_{23}\,dx^2\,dx^3 + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.7}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = -p_1,\ \ X_4 = x^2p_2 - x^3p_3.$$

$G_4\,\mathrm{VI}_2$ на V_3 ($k=l=0$)

$$ds^2 = a_{11}\,dx^{1^2} + a_{22}\,(dx^{2^2} + dx^{3^2}) + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.8}$$

$$X_1 = p_2,\ \ X_2 = p_3,\ \ X_3 = -p_1,\ \ X_4 = x^2p_3 - x^3p_2.$$

$G_4\,\mathrm{VI}_3$ на V_3 — не существует полей тяготения, допускающих такую группу движений.

$G_4\,\mathrm{VI}_4$ на V_3 $(k=\varepsilon=0)$

$$ds^2=a_{12}(2dx^1\,dx^2+dx^{3^2})+a_{22}\,dx^{2^2}+e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.9}$$

$$X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=-p_1,\ X_4=x^2p_3-x^3p_1.$$

$G_4\,\mathrm{VII}$ на V_3

$$ds^2=2a_{12}(dx^1\,dx^2-x^2\,dx^1\,dx^3)+a_{22}(dx^2-x^2\,dx^3)^2-\frac{1}{2}a_{12}\,dx^{3^2}+$$
$$+e_4\,dx^{4^2},\ X_1=e^{-x^3}(p_1-x^{2^2}p_2-2x^2p_3),\ X_2=p_3,\ X_3=e^{x^3}p_2,$$
$$X_4=p_1. \tag{26.10}$$

$G_4\,\mathrm{VIII}$ на V_3

$$ds^2=\frac{1}{2}a_{11}(dx^{1^2}+\sin^2x^1\,dx^{2^2})+a_{33}(\cos x^1\,dx^2+dx^3)^2+e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.11}$$

$$X_1=p_2,\ X_2=\cos x^2p_1-\operatorname{ctg}x^1\sin x^2p_2+\frac{\sin x^2}{\sin x^1}p_3,$$
$$X_3=\partial_2X_2,\ X_4=p_3.$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда соответствующая подгруппа G_3 искомой группы G_4 действует уже не на V_3, а на V_2 или $\overset{*}{V}_2$. Чтобы классификация была полной и не содержала повторений, необходимо для каждой G_4 данного типа брать ту же самую подгруппу G_3 (но уже действующую на V_2 или $\overset{*}{V}_2$), что и в случае G_3, действующей на V_3.

Таким образом, классы пространств V_4 придется брать среди пространств, найденных в § 24. В остальном алгоритм остается без изменений, и пользуясь им, найдем, что пространствами V_4 допускаются следующие группы:

$$G_4\,\mathrm{I}\ (c\neq2),\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}\ (G_3\text{ на }\overset{*}{V}_2),\ G_4\,\mathrm{VII},\ \mathrm{VIII}\ (G_3\text{ на }V_2).$$

Приводим вид искомых метрик V_4 и соответствующих операторов:

$G_4\,\mathrm{I}$ на V_3 $(c\neq2)$

$$ds^2=a_{12}(x^3)^{\frac{2}{c-2}}(2dx^1\,dx^3+dx^{2^2})+a_{33}\left(\frac{dx^3}{x^3}\right)+e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.12}$$

$$X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=x^2p_1-x^3p_2,\ X_4=(2-c)\,x^3p_3+cx^1p_1+x^2p_2.$$

$G_4\,\mathrm{II}$ на V_3

$$ds^2=a_{13}e^{-2x^3}(2\,dx^1\,dx^3+dx^{2^2})+a_{33}\,dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.13}$$

$$X_1=p_1,\ X_2=p_2,\ X_3=x^2p_1-x^3p_2,\ X_4=p_3+2x^1p_1+x^2p_2.$$

G_4 III на V_3

$$ds^2 = a_{13}RS(2\,dx^1\,dx^3 + dx^{2^2}) + a_{33}R\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2}, \tag{26.14}$$

$$R = (x^{3^2} + qx^3 + 1)^{-1}, \quad S = \exp\{2qp\,\mathrm{arctg}\,(2x^3 + q)\,p\},$$

$$q^2 < 4, \quad p = (4 - q^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2p_1 - x^3p_2,$$

$$X_4 = \left(qx^1 + \frac{x^{2^2}}{2}\right)p_1 - x^2x^3p_2 - R^{-1}p_3.$$

G_4 VII, VIII на V_3

1. $ds^2 = a_{11}(dx^{1^2} + e_1\cos^2 x^1\,dx^{2^2}) + a_{33}\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2},$ (26.15)

$e_1 = 1 - X_1 = p_2, \quad X_2 = \cos x^2 p_1 + \sin x^2\,\mathrm{tg}\,x^1 p_2, \quad X_3 = -\partial_2 X_2, \quad X_4 = p_3,$

$e_1 = -1 - X_1 = p_2, \quad X_2 = \mathrm{ch}\,x^2 p_1 + \mathrm{sh}\,x^2\,\mathrm{tg}\,x^1 p_2, \quad X_3 = \partial_2 X_2, \quad X_4 = p_3.$

2. $ds^2 = a_{11}(dx^{1^2} + e_1\,\mathrm{ch}^2 x^1\,dx^{2^2}) + a_{33}\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2},$ (26.16)

$e_1 = 1 - X_1 = p_2, \quad X_2 = \mathrm{ch}\,x^2 p_1 - \mathrm{sh}\,x^2\,\mathrm{th}\,x^1 p_2, \quad X_3 = \partial_2 X_2, \quad X_4 = p_3,$

$e_1 = -1 - X_1 = p_2, \quad X_2 = \cos x^2 p_1 - \sin x^2\,\mathrm{th}\,x^1 p_2, \quad X_3 = -\partial_2 X_2, \quad X_4 = p_3.$

Во всех метриках (26.3)—(26.16) $a_{ij} = a_{ij}(x^4)$, $e_4 = \pm 1$.

(b) G_4 действует на $\overset{*}{V_3}$. В отличие от предыдущего случая для классификации V_4 с рассматриваемыми группами удобно выбрать *изотропно-геодезическую* систему координат (25.7).

Схема классификации такая же, что и в (а), с тем различием, что здесь используются пространства с трехмерными группами движений на изотропных многообразиях $\overset{*}{V_3}$, $\overset{*}{V_2}$ или же на неизотропных V_2.

Для групп, не содержащих абелеву G_3, искомые пространства имеют следующий вид (структуры, которым не отвечают реальные поля тяготения, пропускаются):

G_4 I $(c = 2)$

$$ds^2 = a(x^4)\,e^{-2x^3}(2\,dx^1\,dx^4 + dx^{2^2}) + b(x^4)\,dx^{3^2}, \tag{26.17}$$

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x^2p_1 - x^4p_2, \quad X_4 = 2x^1p_1 + x^2p_2 + p_3.$$

Заметим, что преобразованием координат $x^{s'} = x^s$, $x^{4'} = \int a(x^4)\,dx^4$ в (26.17) функция $a(x^4)$ приводится к 1. В § 25 отмечено, что подгруппа G_3 II на $\overset{*}{V_3}$ не является полной в случае (25.24) ($k = l = 0$, $\varepsilon = 1$).

G_4 V

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + a(x^4)\,e^{-x^1}(dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{26.18}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^2p_3 - x^3p_2, \quad X_4 = 2p_1 + x^2p_2 + x^3p_3.$$

G_4 VII

1) $$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + a(x^4)(e^{-2x^3}dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{26.19}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2p_2 + p_3, \quad X_3 = (x^{2^2} - e^{2x^3})\,p_2 + 2x^2p_3, \quad X_4 = p_1.$$

2) $$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + a(x^4)(e^{-2x^3}dx^{2^2} + dx^{3^2}) - e^{-x^3}dx^2\,dx^4, \tag{26.20}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = x^2p_2 + p_3, \quad X_3 = -e^{x^3}p_1 + (x^{2^2} - e^{2x^3})\,p_2 + 2x^2p_3,$$

$$X_4 = p_1.$$

G_4 VIII

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + a(x^4)(\cos^2 x^3\,dx^{2^2} + dx^{3^2}) + 2\varepsilon \sin x^3\,dx^2\,dx^4, \tag{26.21}$$

$$X_1 = p_2, \quad X_2 = \varepsilon\frac{\cos x^2}{\cos x^3}p_1 - \operatorname{tg} x^3 \cos x^2 p_2 + \sin x^2 p_3, \quad X_3 = \partial_2 X_2,$$

$$X_4 = p_1, \quad \varepsilon = 0, 1.$$

Отметим, что в случае пространства (26.17) подгруппа G_3II $\{X_1, X_2, X_3\}$ действует на $\overset{*}{V}_2(x^1, x^2)$. В случае пространств (26.19) и (26.21) при $\varepsilon = 0$ подгруппы G_3VIII и G_3IX действуют на неизотропном многообразии $V_2(x^2, x^3)$.

Рассмотрим, далее, G_4, содержащие абелеву G_3. Как отмечено в § 25, имеется два класса пространств V_4 (25.22) и (25.23), допускающих группу G_3I на $\overset{*}{V}_3$. Следовательно, искомые пространства V_4 должны содержаться среди указанных метрик. Но метрика (25.22) допускает еще два оператора, действующие на $\overset{*}{V}_3$—полной группой движений является группа пятого порядка, т. е. этот случай рассматривать не нужно. Что касается второго класса метрик, то, интегрируя уравнения структуры $G_4\mathrm{VI}_1$—VI_4 и записывая уравнения Киллинга для (25.23) и полученного четвертого оператора, придем к вырожденной метрике. Таким образом, *не существует полей тяготения, допускающих полные нетранзитивные группы движений $G_4\mathrm{VI}_1$—VI_4, действующие на $\overset{*}{V}_3$.*

(с) Просто-транзитивные G_4. Две просто-транзитивные группы одинаковой структуры от одного и того же числа переменных *подобны* [170], поэтому, если V_4 допускает просто-транзитивную группу движений G_4, то можно взять любые четыре оператора, удовлетворяющие уравнениям структуры. Ввиду этого является несущественным, будем ли мы определять четвертый оператор, исходя из видов операторов G_3 на V_3 или G_3 на $\overset{*}{V}_3$. Но при определении метрики V_4, допускающей транзитивную G_4, необходимо исходить из класса метрик V_4, допускающих G_3 на V_3, так как условие изотропности поверхностей транзитивности группы движений накладывает дополнительные условия на общий вид метрики V_4.

В V_4 у нас выбрана полугеодезическая система координат, и в силу этого из уравнений Киллинга получим, что $\partial_4\xi^4 = 0$. Используя эти условия и вид операторов G_3 на V_3 (§ 25), мы из уравнений структуры (§ 10) найдем четвертый оператор, при этом некоторые константы интегрирования можно привести к нулю или ± 1 с помощью допустимых преобразований.

Рассмотрим, например, группу G_4I, которая содержит подгруппу G_3II. Из уравнений структуры получим систему (26.2) с тем лишь различием, что α пробегает значения от 1 до 4, $\xi_4^4 \neq 0$, $\partial_4 \xi_4^4 = 0$, $\xi_4^s(x^1, \ldots, x^4)$. Интегрируя ее, найдем, что

$$\begin{gathered} \xi^1 = (c-1)\,x^1 + A(x^4), \quad \xi^3 = x^3 + C(x^4), \\ \xi^2 = cx^2 - C(x^4)\,x^1 + B(x^4), \quad \xi^4 = D \quad (D = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{26.22}$$

Записывая уравнения Киллинга для полугеодезической системы, имеем:

$$g_{is}\,\partial_4 \xi^s = 0,$$

откуда следует, что $\partial_4 \xi^s = 0$, т. е. A, B, C — константы. Преобразования координат:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 + \alpha, & x^{3'} &= x^3 + \gamma, \\ x^{2'} &= x^2 - \gamma x^1 + \beta, & x^{4'} &= \varepsilon x^4 + \delta, \end{aligned}$$

где α, β, γ, $\delta = \mathrm{const}$, а $\varepsilon = \pm 1$, являются допустимыми. Применяя их, приведем четвертый оператор к виду:

$$X_4 = (c-1)\,x^1 p_1 + cx^2 p_2 + x^3 p_3 + Dp_4 \qquad (D = \mathrm{const}),$$

если $c \neq 1$, и к виду: $X_4 = Ap_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + Dp_4$, если $c = 1$.

Проведем преобразование $x^s = x^{s'}$, $x^4 = Dx^{4'}$ применительно к оператору X_4. В этом случае константа D сведется к единице, но нужно учесть, что для метрики исследуемого V_4 g_{is} $(i \neq 4,\ s \neq 4)$ не меняют своего вида, а $g_{4'4'} = \pm D^2$.

Таким образом, метрики будут иметь вид:

G_4I $(c \neq 1)$

$$\begin{gathered} g_{11} = K_{11} e^{-2(c-1)x^4}, \quad g_{12} = K_{12} e^{-(2c-1)x^4}, \quad g_{13} = K_{13} e^{-cx^4} + K_{12} x^1 e^{-(2c-1)x^4}, \\ g_{22} = e^{-2cx^4}, \quad g_{23} = K_{23} e^{-(c+1)x^4} + K_{22} x^1 e^{-2cx^4}, \\ g_{33} = K_{33} e^{-2x^4} + 2K_{23} x^1 e^{-(c+1)x^4} + K_{22} x^{1^2} e^{-2cx^4}, \\ g_{i4} = 0, \quad g_{44} = \pm D^2, \quad D = \mathrm{const}, \quad K_{ij} = \mathrm{const} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \end{gathered} \tag{26.23}$$

$$\begin{gathered} X_1 = p_2, \quad X_2 = p_3, \quad X_3 = x^3 p_2 - p_1, \\ X_4 = (c-1)\,x^1 p_1 + cx^2 p_2 + x^3 p_3 + p_4. \end{gathered}$$

G_4 I $(c=1)$

$$\begin{gathered}
g_{11}=K_{11},\ g_{12}=K_{12}e^{-x^4},\ g_{13}=(K_{13}+K_{12}(x^1-\alpha x^4))\,e^{-x^4},\\
g_{22}=K_{22}e^{-2x^4},\ g_{23}=(K_{23}+K_{22}(x^1-\alpha x^4))\,e^{-2x^4},\\
g_{33}=(K_{33}+2K_{23}(x^1-\alpha x^4)+K_{22}(x^1-\alpha x^4)^2)\,e^{-2x^4},\\
g_{ia}=0,\ g_{44}=\pm D^2,\ D=\mathrm{const},\ K_{ij}=\mathrm{const}\\
(i,\ j=1,\ 2,\ 3),\\
X_1=p_2,\quad X_2=p_3,\quad X_3=x^3p_2-p_1,\quad X_4=\alpha p_1+x^2p_2+x^3p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.24}$$

Повторяя рассуждения буквально, для других структур получим следующие пространства:

G_4 II

$$\begin{gathered}
g_{11}=(K_{11}+2K_{13}x^4+K_{33}x^{4^2})\,e^{-2x^4},\ g_{12}=(K_{12}+K_{23}x^4)\,e^{-3x^4},\\
g_{13}=(K_{13}+K_{33}x^4)\,e^{-2x^4}+x^1(K_{12}+K_{23}x^4)\,e^{-3x^4},\\
g_{22}=K_{22}e^{-4x^4},\ g_{23}=K_{23}e^{-3x^4}+x^1K_{22}e^{-4x^4},\\
g_{33}=K_{33}e^{-2x^4}+2x^1K_{23}e^{-3x^4}+x^{1^2}K_{22}e^{-4x^4},\\
g_{i4}=0,\ g_{44}=\pm D^2,\ K_{ij}=\mathrm{const},\ D=\mathrm{const}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),\\
X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=x^3p_2-p_1,\\
X_4=x^1p_1+\frac{1}{2}(4x^2+x^{1^2})\,p_2+(x^3-x^1)\,p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.25}$$

G_4 III

$$\begin{gathered}
g_{11}=e^{-qx^4}(C_1+C_2(q\cos\omega x^4+\omega\sin\omega x^4)+\\
+C_3(q\sin\omega x^4-\omega\cos\omega x^4)),\\
g_{12}=\frac{1}{2}\omega e^{-\frac{3}{2}qx^4}\left(C_5\cos\frac{\omega}{2}x^4-C_4\sin\frac{\omega}{2}x^4\right)-\frac{1}{2}qP,\\
g_{13}=x^1g_{12}+e^{-qx^4}\left(-\frac{q}{2}C_1-2c_2\cos\omega x^4-2C_3\sin\omega x^4\right),\\
g_{22}=C_6e^{-2qx^4},\ g_{23}=x^1C_6e^{-2qx^4}+P,\\
g_{33}=x^{1^2}C_6e^{-2qx^4}+2Px^1+e^{-qx^4}(C_1+C_2(q\cos\omega x^4-\omega\sin\omega x^4)+\\
+C_3(q\sin\omega x^4+\omega\cos\omega x^4)),\ g_{i4}=0,\ g_{44}=\pm D^2,\\
D=\mathrm{const},\ C_\nu=\mathrm{const}\ (\nu=1,\ \ldots,\ 6),\ \omega=\sqrt{4-q^2},\ q^2<4,\\
P=e^{-\frac{3}{2}qx^4}\left(C_4\cos\frac{\omega}{2}x^4+C_5\sin\frac{\omega}{2}x^4\right),\\
X_1=p_2,\ X_2=p_3,\ X_3=-p_1+x^3p_2,\\
X_4=(qx^1-x^3)\,p_1+\left(qx^2+\frac{1}{2}(x^{3^2}-x^{1^2})\right)p_2+x^1p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.26}$$

G_4 IV

$$g_{11}=K_{11}, \quad g_{12}=K_{12}e^{x^1}, \quad g_{13}=K_{13}e^{-x^4}, \quad g_{22}=K_{22}e^{2x^1},$$
$$g_{23}=K_{23}e^{x^1-x^4}, \quad g_{33}=K_{33}e^{-2x^4}, \quad g_{i4}=0, \tag{26.27}$$
$$g_{44}=\pm D^2, \quad D=\text{const}, \ K_{ij}=\text{const} \quad (i, \ j=1, \ 2, \ 3),$$
$$X_1=p_3, \quad X_2=p_2, \quad X_3=x^2p_2-p_1, \quad X_4=x^3p_3+p_4.$$

G_4 V

$$\begin{aligned} g_{11}&=K_{11}, \quad g_{12}=e^{x^1}(K_{12}\cos x^4+K_{13}\sin x^4),\\ g_{13}&=e^{x^1}(K_{12}\sin x^4-K_{13}\cos x^4),\\ g_{22}&=e^{2x^1}(K_{33}-K_{22}\sin 2x^4+K_{23}\cos 2x^4),\\ g_{23}&=e^{2x^1}(K_{22}\cos 2x^4+K_{23}\sin 2x^4),\\ g_{33}&=e^{2x^1}(K_{33}+K_{22}\sin 2x^4-K_{23}\cos 2x^4), \end{aligned} \tag{26.28}$$

$$g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \quad D=\text{const}, \quad K_{ij}=\text{const} \quad (i, \ j=1, \ 2, \ 3),$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=x^3p_3+x^2p_2-p_1,$$
$$X_4=p_4+x^2p_3-x^3p_2.$$

G_4 VI$_1$

$$\begin{aligned} g_{11}&=K_{11}e^{-2lx^4}, \quad g_{12}=K_{12}e^{-(l+\varepsilon)x^4}, \quad g_{13}=K_{13}e^{-(k+l)x^4},\\ g_{22}&=K_{22}e^{-2\varepsilon x^4}, \quad g_{23}=K_{23}e^{-(k+\varepsilon)x^4}, \quad g_{33}=K_{33}e^{-2kx^4}, \end{aligned} \tag{26.29}$$

$$g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \quad K_{ij}=\text{const}, \quad D=\text{const} \quad (i, \ j=1, \ 2, \ 3),$$
$$\varepsilon=0,1; \qquad k=\text{const}, \qquad l=\text{const},$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1, \quad X_4=lx^1p_1+\varepsilon x^2p_2+kx^3p_3+p_4.$$

G_4 VI$_2$

$$\begin{aligned} g_{11}&=K_{11}e^{-2lx^4}, \quad g_{12}=e^{-(k+l)x^4}(K_{13}\cos x^4-K_{12}\sin x^4),\\ g_{13}&=e^{-(k+l)x^4}(K_{12}\cos x^4+K_{13}\sin x^4),\\ g_{22}&=e^{-2kx^4}(K_{22}-K_{23}\cos 2x^4-K_{33}\sin 2x^4),\\ g_{23}&=e^{-2kx^4}(K_{33}\cos 2x^4-K_{23}\sin 2x^4),\\ g_{33}&=e^{-2kx^4}(K_{22}+K_{23}\cos 2x^4+K_{33}\sin 2x^4), \end{aligned} \tag{26.30}$$

$$g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \quad K_{ij}=\text{const}, \quad D=\text{const}$$
$$(i, \ j=1, \ 2, \ 3), \quad k, \ l=\text{const}.$$
$$X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1,$$
$$X_4=lx^1p_1+(kx^2-x^3)p_2+(kx^3+x^2)p_3+p_4.$$

$G_4\,\mathrm{VI}_3$

$$\begin{gathered}
g_{11}=K_{11}e^{-2\varepsilon x^4}, \quad g_{12}=(K_{12}-K_{13}x^4)\,e^{-(\varepsilon+k)\,x^4},\\
g_{13}=K_{13}e^{-(\varepsilon+k)\,x^4},\\
g_{22}=(K_{22}-2K_{23}x^4+K_{33}x^{4^2})\,e^{-2kx^4},\\
g_{23}=(K_{23}-K_{33}x^4)\,e^{-2kx^4},\\
g_{33}=K_{33}e^{-2kx^4}, \quad g_{i4}=0,\\
g_{44}=\pm D^2, \quad K_{ij}=\mathrm{const}, \quad D=\mathrm{const}, \quad \varepsilon=0,1,\\
X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1,\\
X_4=\varepsilon x^1p_1+kx^2p_2+(kx^3+x^2)\,p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.31}$$

$G_4\,\mathrm{VI}_4 \quad (k\neq\varepsilon)$

$$\begin{gathered}
g_{11}=K_{11}e^{-2\varepsilon x^4}, \quad g_{12}=\lambda e^{-(k+\varepsilon)\,x^4}-K_{11}\omega^2e^{-2\varepsilon x^4},\\
g_{13}=K_{13}e^{-(k+\varepsilon)\,x^4}+K_{11}\omega e^{-2\varepsilon x^4},\\
g_{22}=K_{11}\omega^4e^{-2\varepsilon x^4}+\mu e^{-2kx^4}-2\lambda\omega^2e^{-(k+\varepsilon)\,x^4},\\
g_{23}=\mu e^{-2kx^4}-K_{11}\omega^3e^{-2\varepsilon x^4}+(\lambda\omega-K_{13}\omega^2)\,e^{-(k+\varepsilon)\,x^4},\\
g_{33}=K_{33}e^{-2kx^4}+K_{11}\omega^2e^{-2\varepsilon x^4}+2K_{13}\omega e^{-(k+\varepsilon)\,x^4},\\
g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \quad K_{ij}=\mathrm{const}, \quad D=\mathrm{const}\\
(i,\ j=1,\ 2,\ 3), \qquad k=\mathrm{const},\\
\lambda=(K_{12}-K_{23}x^4), \quad \mu=(K_{23}-K_{33}x^4), \quad \omega=(k-\varepsilon)^{-1},\\
k\neq\varepsilon, \quad \varepsilon=0,1,\\
X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1,\\
X_4=(\varepsilon x^1-x^3)\,p_1+kx^2p_2+(kx^3+x^2)\,p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.32}$$

$G_4\,\mathrm{VI}_4 \quad (k=\varepsilon)$

$$\begin{gathered}
g_{11}=K_{11}e^{-2kx^4}, \quad g_{12}=\left(K_{22}-K_{13}x^4-\frac{1}{2}K_{11}x^{4^2}\right)e^{-2kx^4},\\
g_{13}=(K_{13}+K_{11}x^4)\,e^{-2kx^4},\\
g_{22}=\left(K_{22}-2K_{23}x^4+(K_{33}-K_{12})\,x^{4^2}+K_{13}x^{4^3}+\frac{1}{4}K_{11}x^{4^4}\right)e^{-2kx^4},\\
g_{23}=\left(K_{23}+(K_{12}-K_{33})\,x^4-\frac{3}{2}K_{13}x^{4^2}-\frac{1}{2}K_{11}x^{4^3}\right)e^{-2kx^4},\\
g_{33}=(K_{33}+2K_{13}x^4+K_{11}x^{4^2})\,e^{-2kx^4}, \quad g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2,\\
K_{ij}=\mathrm{const}, \quad D=\mathrm{const}, \quad k=0,\ 1 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),\\
X_1=p_2, \quad X_2=p_3, \quad X_3=-p_1,\\
X_4=(kx^1-x^3)\,p_1+kx^2p_2+(x^2+kx^3)\,p_3+p_4.
\end{gathered} \tag{26.33}$$

G_4 VII

$$
\begin{gathered}
g_{11}=b_{11}, \quad g_{12}=P, \quad g_{13}=b_{13}+b_{11}x^1-x^2P, \quad g_{22}=Q, \\
g_{23}=R-x^2Q, \quad g_{33}=b_{33}+2b_{13}x^1+b_{11}x^{1^2}-2x^2R+x^{2^2}Q, \\
g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \quad P=b_{11}x^{1^2}+2b_{13}x^1+b_{33}, \\
R=b_{11}x^{1^3}+3b_{13}x^{1^2}+(b_{12}+2b_{33})\,x^1+b_{23}, \quad b_{11}=K_{11}, \\
b_{12}=K_{11}x^{4^2}-2\varepsilon K_{13}x^4+K_{12}, \quad b_{13}=K_{13}-\varepsilon K_{11}x^4, \\
b_{22}=K_{11}x^{4^4}-4\varepsilon K_{13}x^{4^3}+3\,(K_{12}+2K_{33})\,x^{4^2}-4\varepsilon K_{23}x^4+K_{22}, \\
b_{33}=K_{11}x^{4^2}-2\varepsilon K_{13}x^4+K_{33}, \\
b_{23}=K_{23}-\varepsilon\,(K_{12}+2K_{33})\,x^4+3K_{13}x^{4^2}-\varepsilon K_{11}x^{4^3}, \\
X_1=e^{-x^3}(p_1-x^{2^2}p_2-2x^2p_3), \quad X_2=p_3, \quad X_3=e^{x^3}p_2, \\
X_4=p_1+\varepsilon p_4, \quad \varepsilon=\pm 1.
\end{gathered}
\tag{26.34}
$$

G_4 VIII

$$
\begin{gathered}
g_{11}=\frac{1}{2}K_{11}-P, \quad g_{12}=\cos x^1\cdot R+\sin x^1\cdot Q, \quad g_{13}=R, \\
g_{22}=K_{33}\cos^2 x^1+\sin 2x^1\cdot S+\sin^2 x^1\left(\frac{1}{2}K_{11}+P\right), \\
g_{23}=K_{33}\cos x^1+\sin x^1\cdot S, \quad g_{33}=K_{33}, \quad g_{i4}=0, \quad g_{44}=\pm D^2, \\
P=K_{12}\sin 2x^3+K_{22}\cos 2x^3, \quad Q=K_{12}\cos 2x^3-K_{22}\sin 2x^3, \\
R=K_{13}\cos x^3-K_{23}\sin x^3, \quad S=K_{23}\cos x^3+K_{13}\sin x^3, \\
X_1=p_2, \quad X_2=\cos x^2p_1-\operatorname{ctg} x^1\sin x^2p_2+\frac{\sin x^2}{\sin x^1}\,p_3, \\
X_3=\partial_2X_2, \quad X_4=p_4.
\end{gathered}
\tag{26.35}
$$

Этим заканчивается классификация полей тяготения общего вида, допускающих *нетранзитивные* и *транзитивные* четырехчленные группы движений.

§ 27. Поля тяготения с группами движений G_r $(r>4)$

Известно [182], что V_4 с сигнатурой $(---+)$, допускающие группы движений G_r, где $r>7$, являются пространствами постоянной кривизны с группами движений G_{10}, и поэтому для групп G_r порядка $r>4$ следует рассмотреть лишь следующие возможности: (a) V_4 с нетранзитивными G_5, (b) V_4 с транзитивными G_5, (c) V_4, допускающие нетранзитивные G_6, (d) V_4, допускающие транзитивные G_6, (e) V_4 с группами движений G_7. Разберем последовательно эти возможности.

(a) V_4 *с нетранзитивными* G_5. Если V_n с неопределенной метрикой допускает группу движений G_r и ранг матрицы (ξ^α_a)

меньше r, то можно так перенумеровать векторы ξ^α_a, что можно будет записать:

$$\xi^\alpha_h = \varphi^t_h \xi^\alpha_t \qquad (t = 1, \ldots, q;\ \ h = q + 1, \ldots, r),$$

где q — ранг (ξ^α_a), а φ^t_h — функция от x. Пусть среди φ^t_h имеем p независимых. Если в координатной системе, для которой $\xi^\nu_a = 0$ $(\nu = q + 1, \ldots, n)$, ранг матрицы Якоби функций φ от $x^1, \ldots, x^q$ равен p, то существует координатная система, в которой компоненты ξ^α_a являются самое большее функциями $x^1, \ldots, x^q$, если же ранг меньше p, то такого утверждения делать нельзя ([170], стр. 272).

В нашем случае, когда G_5 нетранзитивна (ранг матрицы (ξ^α_a) равен 3) и может действовать на V_3 или $\overset{*}{V}_3$, требование, чтобы ранг матрицы Якоби для функции φ был меньше p, приводит к условию *особого* оператора, а это означает, что группа G_5 действует на $\overset{*}{V}_3$. Следовательно, если G_5 действует на неизотропных гиперповерхностях транзитивности V_3, то в V_4 всегда можно выбрать полугеодезическую систему координат, в которой каждая компонента ξ^α_a векторов Киллинга является самое большее функцией x^1, x^2, x^3. Однако V_3 не может допускать полную группу движений G_5 ([170], стр. 276), метрика автоматически допускает шестой оператор. Таким образом, не существует пространств V_4, допускающих полные нетранзитивные группы движений пятого порядка с неизотропными поверхностями транзитивности.

Что касается групп движений G_5, действующих на изотропных трехмерных поверхностях транзитивности, то существуют поля тяготения, допускающие полные группы G_5 такого сорта. В § 25 мы уже видели (см. (25.22)), что пространство с метрикой

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + A(x^4)\,dx^{2^2} + 2B(x^4)\,dx^2\,dx^3 + C(x^4)\,dx^{3^2} \qquad (27.1)$$

допускает полную нетранзитивную группу G_5, действующую на $\overset{*}{V}_3$:

$$\begin{gathered} X_1 = p_2, \quad X_2 = p_1, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = x^2 p_1 + \varphi(x^4)\,p_2 + \psi(x^4)\,p_3, \\ X_5 = x^3 p_1 + \psi(x^4)\,p_2 + \theta(x^4)\,p_3, \quad \varphi' = -\frac{C}{\Delta}, \quad \psi' = \frac{B}{\Delta}, \\ \theta' = -\frac{A}{\Delta}, \quad \Delta = AC - B^2. \end{gathered} \qquad (27.2)$$

Для того чтобы определить все искомые V_4 с G_5 на $\overset{*}{V}_3$, нужно исходить из метрик (26.17)—(26.21), так как всякая группа движений G_r $(3 < r \leqslant 5)$ содержит подгруппу G_{r-1} ([249], стр. 187—189). Для этого достаточно записать уравнения Киллинга для метрик (26.17)—(26.22) и потребовать, чтобы дополнительно к четырем операторам, определенным там, допускался еще один оператор, действующий на $\overset{*}{V}_3$. Вследствие того, что указанные метрики содержат лишь одну произвольную функцию, эта задача решается просто. Так, например, для (26.17) (если учесть, что $a(x^4)$ сводится к 1) уравнения Киллинга имеют вид:

$$\partial_1\xi^2=\partial_1\xi^3=\partial_3\xi^3=\partial_4\xi^1=0, \quad \partial_1\xi^1=2\xi^3, \quad \partial_2\xi^2=\xi^3,$$
$$e^{-2x^3}\partial_3\xi^2+b(x^4)\,\partial_2\xi^3=0, \quad \partial_4\xi^2+\partial_2\xi^1=0,$$
$$b\partial_4\xi^3+e^{-2x^3}\partial_3\xi^1=0.$$

Система легко интегрируется:

$$X=(2Ax^1-Bx^2+C)\,p_1+(Ax^2+Bx^4+D)\,p_2+Ap_3.$$

При любом виде функции $b(x^4)$ полной группой является группа четвертого порядка; следовательно, рассматриваемое пространство не может допускать нетранзитивных групп выше четвертого порядка.

Для оставшихся четырех метрик (26.18)—(26.21) имеем тот же результат. Таким образом, существует лишь один класс полей тяготения общего вида с метрикой (27.1), допускающей полную нетранзитивную группу движений пятого порядка с операторами (27.2).

(c), (e). *V_4 с нетранзитивными G_6 и группами движений G_7.* Эти случаи разобраны в работах И. П. Егорова [182] и Г. И. Кручковича [454]. Именно, имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Всякое риманово V_n, допускающее нетранзитивную группу движений $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$, является субпроективным пространством Кагана и имеет одну из следующих метрик:*

$$\text{(A)} \quad ds^2=e^{-2\mu(x^1)}\sum_{i=1}^{n} e_i\,(dx^i)^2, \qquad e_i=\pm 1.$$

$$\text{(B)} \quad ds^2=e^{-2\mu(R)}\sum_{i=1}^{n} e_i\,(dx^i)^2, \quad e_i=\pm 1, \qquad R^2=\sum_{i=1}^{n} e_i\,(x^i)^2.$$

$$\text{(C)} \quad ds^2=e^{-2\mu(x^1)}\left(2dx^1\,dx^2+\sum_{k=3}^{n} e_k\,(dx^k)^2\right), \qquad e_k=\pm 1.$$

В случаях (A) и (B) группа действует на неизотропной гиперповерхности, а в случае (C) — на изотропной.

Теорема 2. *Если V_n не является пространством Эйнштейна и допускает G_r с $r>\frac{(n-1)(n-2)}{2}+3$, то оно является субпроективным пространством Кагана, причем для $n=4$ такими G_r являются G_7 и метрика пространства приводится к виду:*

$$ds^2=dx^{1^2}+k\,ds_1^2(x^2,\ x^3,\ x^4),$$
$$ds^2=e^{-2\mu(x^1)}\left(2dx^1\,dx^2+\sum_{k=3}^{4} e_k\,(dx^k)^2\right), \qquad e_k=\pm 1,$$

где $k = \text{const}$, ds_1^2 — *пространство постоянной кривизны, функция* $\mu(x^1)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\mu' = \frac{Ax^1 + B}{Ax^{1^2} + Cx^1 + D}, \quad A,\ B,\ C,\ D = \text{const}.$$

Исключенные из этой теоремы пространства Эйнштейна с используемой нами сигнатурой для $n = 4$ не допускают G_7. Как показано А. З. Петровым и В. Р. Кайгородовым, максимальный порядок групп движений в пространствах Эйнштейна, не являющихся пространствами постоянной кривизны, меньше или равен шести [530] (см. главу V).

(b), (d). V_4 *с транзитивными* G_5 и G_6. По теореме Фубини, исправленной И. П. Егоровым ([249], стр. 187—189), всякая группа движений G_r $(3 < r \leqslant 5)$ в V_4 допускает подгруппу G_{r-1}, поэтому V_4 с группой движений G_5 содержится среди V_4, допускающих G_4. Исходя из этой точки зрения, А. З. Петровым, В. Р. Кайгородовым и В. Н. Абдуллиным были определены поля тяготения с G_5 [537]. Другим методом В. Р. Кайгородовым были найдены поля тяготения с G_6 [607] путем замены в условиях интегрируемости уравнений Киллинга тензора кривизны тензором Вейля и рассмотрением новых условий интегрируемости в точке общего положения. Возможность приведения тензора Вейля к каноническим типам позволяет определять структурные константы группы. По структурным константам строятся операторы группы и находятся метрики соответствующих полей тяготения. Однако для нахождения полей тяготения с транзитивными G_5 и G_6 более удобным является метод Картана, с помощью которого и Г. И. Кручкович дал свое перечисление полей тяготения с G_5 и G_6 [613]. Мы при определении V_4 с G_5 и G_6 будем следовать идее, несколько отличной от идеи подвижного репера в методе Картана.

Уравнения Киллинга в случае транзитивной группы можно записать в виде:

$$\xi_f^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi_f^k + g_{jk} \partial_i \xi_f^k = 0, \tag{27.3}$$

$$\xi_f^i \left(g_{ki} \partial_j \varphi_s^f + g_{ij} \partial_k \varphi_s^f\right) = 0, \tag{27.4}$$

$$i,\ k,\ f = 1,\ \ldots,\ n; \quad s = n + 1,\ \ldots,\ r,$$

где $|\xi_f^i| \neq 0$, $\xi_s^i = \varphi_s^f \xi_f^i$. Как известно, имеет место т е о р е м а ([170], стр. 266):

Если для транзитивной группы существуют частные значения x^i, *для которых уравнения* (27.4) *совместны и допускают решения* g_{ij} *с детерминантом* $|g_{ij}|$, *отличным от нуля, то каждое такое решение определяет риманово пространство, группой движений которого является данная группа.*

В качестве частных значений x^i, для которых должны быть совместны уравнения (27.4), возьмем начало координат. Тогда уравнение (27.4) в точке записывается следующим образом:

$$\xi^i_f\big|_{x=0}\left(g_{ki}\big|_{x=0}\partial_j\varphi^f_s\big|_{x=0}+g_{ij}\big|_{x=0}\partial_k\varphi^f_s\big|_{x=0}\right)=0. \tag{27.5}$$

Уравнения группы для векторов ξ^i_a в случае транзитивной группы содержат уравнения ([170], стр. 93)

$$\partial_\alpha\varphi^f_s=\left[C^f_{gs}+C^t_{gs}\varphi^f_t-\varphi^h_s\left(C^f_{gh}+C^t_{gh}\varphi^f_t\right)\right]\eta^g_\alpha, \tag{27.6}$$
$$\alpha,\ f,\ g,\ h=1,\ \ldots,\ n;\quad s,\ t=n+1,\ \ldots,\ r,$$

где η^f_α вводятся с помощью условий $\xi^\alpha_f\eta^g_\alpha=\delta^g_f$. Делая линейные преобразования в пространстве векторов групп, выберем ξ^α_f так, чтобы

$$\xi^\alpha_f\big|_{x=0}=\delta^\alpha_f,\quad \varphi^f_s\big|_{x=0}=0. \tag{27.7}$$

Тогда из (27.6) получим, что

$$\partial_\alpha\varphi^f_s\big|_{x=0}=C^f_{\alpha s}. \tag{27.8}$$

После подстановки (27.7) и (27.8) в (27.5) получаем:

$$g_{ki}\big|_{x=0}C^i_{js}+g_{ji}\big|_{x=0}C^i_{ks}=0. \tag{27.9}$$

Метрический тензор g_{ij} для полей тяготения в начале координат с помощью аффинных преобразований координат приведем к виду:

$$(g_{ij})\big|_{x=0}=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix}. \tag{27.10}$$

Если определять матрицы $C_s=(C^i_{js})$, то уравнения (27.9) с учетом (27.10) показывают, что матрицы C_s должны быть вида:

$$C_s=\begin{pmatrix}0&-\alpha_s&-\beta_s&a_s\\\alpha_s&0&-\gamma_s&b_s\\\beta_s&\gamma_s&0&c_s\\a_s&b_s&c_s&0\end{pmatrix}. \tag{27.11}$$

Матрица типа (27.11) в классе преобразований группы Лоренца может быть приводима к следующим каноническим типам (см. главу VII):

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}0&-\alpha&&\\\alpha&0&&\\&&0&c\\&&c&0\end{pmatrix},\qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}. \tag{27.12}$$

Соотношения (27.11) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы данная четырехмерная группа, действующая в римановом пространстве V_4 сигнатуры $(- - - +)$, была группой движений. Матрицы C_s определяют представление алгебры Ли L_{r-4} стационарной подгруппы в начале координат группы G_r с операторами $X_a = \xi^i_a p_i$:

$$X_s \to C_s.$$

В самом деле, если рассмотрим тождества Якоби для операторов X_s, X_t, X_i, то в силу X_s, $X_t \in L_{r-4}$ их можно записать в виде:

$$[[X_s X_t] X_i] = [X_s [X_t X_i]] - [X_t [X_s X_i]] \pmod{L_{r-4}}.$$

Таким образом, чтобы определить всевозможные транзитивные группы движений в полях тяготения, нужно перечислить всевозможные матричные алгебры типа (27.11) и их дополнить до алгебры Ли L_r всей группы.

Для нашей задачи достаточно знание алгебр матриц (27.11) до второго порядка включительно, но полная классификация алгебр матриц (27.11) понадобится в дальнейшем при рассмотрении групп конформных преобразований, и поэтому мы сразу дадим полную классификацию.

По теореме Леви — Мальцева [142] всякая алгебра может быть представлена в виде прямой суммы максимального разрешимого идеала N и полупростой подалгебры P, значит,

$$L_{r-4} = N + P.$$

Начнем с разрешимых алгебр матриц типа (27.11). Во всякой разрешимой алгебре базис из операторов $X_1, \ldots, X_q$ можно выбрать так, чтобы

$$[X_i X_s] = 0 \pmod{(X_1, \ldots, X_i)} \qquad (27.13)$$

для любого $s = 1, \ldots, q$ ([137], стр. 209). Если сначала матрицу C_1, соответствующую оператору X_1, возьмем в виде:

$$C_1 = \alpha_1 (e_{21} - e_{12}) + c_1 (e_{43} + e_{34}),$$

тогда из условия (27.13) получим, что C_2 может быть только вида:

$$C_2 = \alpha_2 (e_{21} - e_{12}) + c_2 (e_{43} + e_{34}),$$

здесь e_{ik} означает матрицу, у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента, стоящего в i-й строке и k-м столбце и равного 1. Если же матрица C_1 приводима к виду (27.12 (b)), то C_2 может быть взята в виде:

$$e_{13} - e_{31} + e_{14} + e_{41}, \quad \text{или} \quad e_{34} + e_{43}.$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим следующие разрешимые алгебры матриц:

1. Разрешимые алгебры 2-го порядка:

$$e_{12}-e_{21}, \quad e_{34}+e_{43}; \tag{27.14}$$

$$e_{13}-e_{31}+e_{14}+e_{41}, \quad e_{23}-e_{32}+e_{24}+e_{42}; \tag{27.15}$$

$$e_{13}-e_{31}+e_{14}+e_{41}, \quad e_{34}+e_{43}. \tag{27.16}$$

2. Разрешимые алгебры 3-го порядка:

$$e_{13}-e_{31}+e_{14}+e_{41}, \quad e_{23}-e_{32}+e_{24}+e_{42}, \quad \alpha(e_{21}-e_{12})+c(e_{34}+e_{43}). \tag{27.17}$$

3. Разрешимые алгебры 4-го порядка:

$$e_{13}-e_{31}+e_{14}+e_{41}, \; e_{23}-e_{32}+e_{24}+e_{42}, \; e_{21}-e_{12}, \; e_{34}+e_{43}. \tag{27.18}$$

Нетрудно убедиться в том, что перечисленные алгебры не могут представлять максимальный разрешимый идеал некоторой алгебры матриц (27.11) с ненулевой полупростой частью, т. е. если $P \neq 0$, то $N=0$.

Всякая полупростая алгебра разлагается в прямое произведение простых алгебр, но так как наименьший порядок простых алгебр 3 ([137], стр. 300—301), то наименьший порядок полупростых алгебр будет 6. А в пространстве матриц C_s типа (27.11) можно выбрать самое большее алгебру 6-го порядка, которая совпадает с алгеброй всевозможных матриц C_s и будет простой вещественной алгеброй 6-го порядка. Отсюда ясно, что другие простые алгебры могут быть только порядка 3 и типа $G_{3\,\text{VIII}}$ или $G_{3\,\text{IX}}$. Счет показывает, что соответствующие алгебры матриц будут иметь вид:

$$e_{23}-e_{32}, \quad e_{24}+e_{42}, \quad e_{34}+e_{43}; \tag{27.19}$$

$$e_{12}-e_{21}, \quad e_{13}-e_{31}, \quad e_{32}-e_{23}. \tag{27.20}$$

Теперь перейдем к определению алгебр Ли L_r всей группы G_r. Начнем с G_5. В этом случае алгебра Ли стационарной подгруппы будет одномерна и в качестве матрицы представления нужно брать одну из матриц в (27.12). Рассмотрим *случай* (а), *где* $\alpha=1$, *а* $c=0$. В этом случае из определения матриц (27.11) можно считать известными следующие коммутационные соотношения между операторами группы:

$$[X_1X_5]=-X_2 \;(\operatorname{mod}(X_5)),$$

$$[X_2X_5]=X_1 \;(\operatorname{mod}(X_5)),$$

$$[X_3X_5]=0 \;(\operatorname{mod}(X_5)),$$

$$[X_4X_5]=0 \;(\operatorname{mod}(X_5)),$$

или, освобождаясь от знака mod, будем иметь:

$$\begin{aligned} &[X_1X_5] = -X_2, && && [Y_1X_5] = iY_1, && \\ &[X_2X_5] = X_1, && \text{или} && [Y_2X_5] = -iY_2, && Y_1 = X_1 + iX_2 \\ &[X_3X_5] = aX_5, && && [X_3X_5] = aX_5, && Y_2 = X_1 - iX_2, \\ &[X_4X_5] = 0, && && [X_4X_5] = 0, && a = \text{const}. \end{aligned}$$

Всякий оператор X порождает линейное преобразование в пространстве L_r операторов $X_1, \ldots, X_r$ группы G_r:

$$X_i \to EX_i = [X_iX].$$

Говорят, что Z принадлежит корню ω, если существует показатель ν, для которого

$$(E - \omega)^\nu Z = 0.$$

Известна теорема ([137], стр. 243) о том, что если X_1 принадлежит корню ω_1 и X_2 — корню ω_2, то оператор $X_3 = [X_1X_2]$ принадлежит корню $\omega_1 + \omega_2$; если же $\omega_1 + \omega_2$ не является корнем, то $[X_1X_2] = 0$.

Рассматривая собственные значения и собственные векторы линейного преобразования в искомой L_5 группы G_5, соответствующего оператору X_5, мы увидим, что остальные коммутационные соотношения должны иметь вид:

$$\begin{aligned} &[Y_1Y_2] = ibX_3 + icX_4 + idX_5, && [Y_2Y_3] = \bar{e}Y_2, \\ &[Y_1X_3] = eY_1, && [Y_2X_4] = \bar{f}Y_2, \\ &[Y_1X_4] = fY_1, && [X_3X_4] = gX_3 + hX_4 + lX_5, \end{aligned}$$

где e, f — комплексные числа. Рассмотрение тождеств Якоби приводит к следующим условиям на введенные константы:

$$\begin{aligned} a = 0, \quad cg + (e + \bar{e})b = 0, \quad & -bg + b(f + \bar{f}) = 0, \\ ch + (e + \bar{e})c = 0, \quad & -bh + c(f + \bar{f}) = 0, \\ cl + (e + \bar{e})d = 0, \quad & -bl + d(f + \bar{f}) = 0, \\ & ge + hf + li = 0, \end{aligned} \tag{27.21}$$

Пусть $b \neq 0$. Введя вместо X_3 новый оператор $X_3' = \frac{b}{2}X_3 + \frac{c}{2}X_4 + \frac{d}{2}X_5$, а остальные операторы оставляя без изменения, постоянную b можно обратить в 2, а c и d — в нуль. Тогда уравнения (27.21) сводятся к уравнениям

$$h = l = g - f + \bar{f} = e + \bar{e} = ge = 0.$$

Если $e\neq 0$, с помощью преобразования

$$Y_1'=\frac{Y_1}{\sqrt{|e|}},\quad Y_2'=\frac{Y_2}{\sqrt{|e|}},\quad X_3'=\frac{X_3}{\sqrt{|e|}},\quad X_4'=X_4-ifX_5,\quad X_5'=X_5$$

коммутационные соотношения можно свести к виду (равные нулю коммутационные соотношения опущены):

$$[X_1X_5]=-X_2,\ [X_2X_5]=X_1,\ [X_1X_2]=$$
$$=-X_3,\ [X_1X_3]=\mp X_2,\ [X_2X_3]=\pm X_1,$$

если $e=0$, то возможны следующие алгебры:

1) $[X_1X_5]=-X_2,\ [X_2X_5]=X_1,\ [X_1X_2]=-X_3,\ [X_1X_4]=X_1,$
$[X_2X_4]=X_2,\ [X_3X_4]=2X_3;$

2) $[X_1X_5]=-X_2,\ [X_2X_5]=X_1,\ [X_1X_2]=-X_3.$

Пусть теперь $b=0$. Тогда можно считать, что и $c=0$, так как b и c в коммутационные соотношения входят симметрично. Считая $d\neq 0$, получаем:

$$e+\bar{e}=f+\bar{f}=ge+hf+li=0.$$

Преобразование

$$Y_1'=\frac{Y_1}{\sqrt{\left|\frac{d}{2}\right|}},\ Y_2'=\frac{Y_2}{\sqrt{\left|\frac{d}{2}\right|}},\ X_3'=X_3-ieX_5,$$
$$X_4'=X_4-ifX_5,\quad X_5'=X_5$$

постоянные e, f и l обращает в нуль и коммутационные соотношения в алгебре приводит к виду:

$$[X_1X_5]=-X_2,\quad [X_2X_5]=X_1,\quad [X_1X_2]=\mp X_5,$$
$$[X_3X_4]=gX_3+hX_4.$$

Наконец, случай $b=c=d=0$ приводит к алгебре:

$$[X_1X_5]=-X_2,\quad [X_2X_5]=X_1,\quad [X_1X_4]=X_1,$$
$$[X_2X_4]=X_2,\quad [X_3X_4]=aX_3.$$

Теперь для полученных алгебр Ли L_5 строим операторные представления, считая, что во всех алгебрах оператор X_5 в начале координат имеет первый порядок. Затем интегрируем уравнения Киллинга и полученные пространства V_4 исследуем на максимальную подвижность. В результате получаем, что пространства V_4 сигнатуры $(-\,-\,-\,+)$, *допускающие* G_5 *с представлением* (27.12 (а)) с $\alpha=1$, $c=0$, определяются следующим классом метрик (метрики написаны с точностью до постоянного множителя) с соответствующими группами:

$$1)\ ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} + \varepsilon\left[(dx^3 + x^1\,dx^2)^2 - dx^{4^2}\right],\quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$X_1 = p_1 - x^2 p_3,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3,\quad X_4 = p_4,$$
$$X_5 = -x^2 p_1 + x^1 p_2 + \frac{x^{2^2} - x^{1^2}}{2} p_3;$$

$$2)\ ds^2 = -dx^{1^2} - \cos^2 x^2\,dx^{2^2} + a\left[(dx^3 + \sin x^1\,dx^2)^2 - dx^{4^2}\right] + 2\varepsilon\,[\sin x^1\,dx^2 + dx^3]\,dx^4,\quad a + 1 \neq 0,\quad a\varepsilon = 0,\quad \varepsilon = 0, 1,$$
$$X_1 = \cos x^2 p_1 + \operatorname{tg} x^1 \sin x^2 p_2 - \sin x^2 \sec x^1 p_3,$$
$$X_2 = p_2,\quad X_3 = \partial_2 X_1,\quad X_4 = p_4,\quad X_5 = p_3;$$

$$3)\ ds^2 = -dx^{1^2} - \operatorname{ch}^2 x^1\,dx^{2^2} + a\left[(dx^3 + \operatorname{sh} x^1\,dx^2)^2 - dx^{4^2}\right] + 2\varepsilon\,(\operatorname{sh} x^1\,dx^2 + dx^3)\,dx^4,\quad a\varepsilon = 0,\quad a \neq 1,\quad \varepsilon = 0, 1,$$
$$X_1 = e^{x^2}\left(p_1 - \operatorname{th} x^1 p_2 - \frac{1}{\operatorname{ch} x^1} p_3\right),$$
$$X_3 = e^{-x^2}\left(p_1 + \operatorname{th} x^1 p_2 + \frac{1}{\operatorname{ch} x^1} p_3\right),\quad X_2 = p_2,\quad X_4 = p_4,\quad X_5 = p_3;$$

$$4)\ ds^2 = -e^{-2x^4}\left(dx^{1^2} + dx^{2^2}\right) + \varepsilon\left(e^{-2ax^4}\,dx^{3^2} - dx^{4^2}\right),$$
$$\varepsilon = \pm 1,\quad a \neq 0, 1,$$
$$X_1 = p_1,\quad X_2 = p_2,\quad X_4 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + a x^3 p_3 + p_4,$$
$$X_3 = p_3,\quad X_5 = x^1 p_2 - x^2 p_1;$$

$$5)\ ds^2 = -e^{-2x^4}\left(dx^{1^2} + dx^{2^2}\right) + b\left[e^{-4x^4}(dx^3 + x^1\,dx^2)^2 - dx^{4^2}\right],$$
$$X_1 = p_1 - x^2 p_3,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3,$$
$$X_4 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + 2x^3 p_3 + p_4,\quad X_5 = x^2 p_1 - x^1 p_2 + \frac{x^{1^2} - x^{2^2}}{2} p_3. \tag{27.22}$$

Применяя аналогичные рассуждения для других случаев, получаем следующие метрики и операторы.

Представление (27.12). *Случай* (а) с $\alpha = 0$, $c = 1$.

$$1)\ ds^2 = -(dx^1 + x^3\,dx^4)^2 - dx^{2^2} + \varepsilon\left(dx^{3^2} - dx^{4^2}\right),\quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3 - x^4 p_1,\ X_4 = p_4,$$
$$X_5 = x^3 p_4 + x^4 p_3 - \frac{x^{3^2} + x^{4^2}}{2} p_1;$$

$$2)\ ds^2 = -(dx^1 + \sin x^3\,dx^4)^2 - dx^{2^2} + a\left(dx^{3^2} - \cos^2 x^3\,dx^{4^2}\right),\quad a \neq 1,$$
$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = -\frac{\operatorname{sh} x^4}{\cos x^3} p_1 + \operatorname{ch} x^4 p_3 + \operatorname{tg} x^3 \operatorname{sh} x^4 p_4,$$
$$X_4 = p_4,\ X_5 = \partial_4 X_3;$$

3) $ds^2 = -dx^{1^2} - e^{2ax^1}\, dx^{2^2} - e^{2x^1}\left(dx^{3^2} - dx^{4^2}\right),\ a \neq 0,\ 1,$

$$X_1 = p_1 - ax^2p_2 - x^3p_3 - x^4p_4,\quad X_i = p_i \qquad (i = 2,\ 3,\ 4),$$
$$X_5 = x^3p_4 + x^4p_3;$$

4) $ds^2 = -dx^{1^2} - a^2e^{4x^1}(dx^2 + x^3\, dx^4)^2 + \varepsilon e^{2x^1}\left(dx^{3^2} - dx^{4^2}\right),\ \varepsilon = \pm 1.$

$$X_1 = p_1 - 2x^2p_2 - x^3p_3 - x^4p_4,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3 - x^4p_2,\quad X_4 = p_4,$$
$$X_5 = x^3p_4 + x^4p_3 - \frac{x^{3^2} + x^{4^2}}{2}\, p_2.$$

Представление (27.12) *в случае* (a) с $\alpha c \neq 0$ приводит к плоскому пространству.

Представление (27.12). *Случай* (b).

1) $ds^2 = -dx^{1^2} + \varepsilon e^{-2x^3}\, dx^{2^2} + 2e^{-x^3}\, dx^2\, dx^4 - dx^{3^2},\ \varepsilon = \pm 1,$

$$X_1 = p_1,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = x^2p_2 + p_3,\quad X_4 = p_4,$$
$$X_5 = \frac{x^{2^2}}{2}\, p_2 + x^2p_3 + e^{x^3}p_4;$$

2) $ds^2 = -dx^{1^2} - 2hx^1e^{-2x^1}\, dx^{2^2} + e^{-2x^1}\left(2\, dx^2\, dx^4 - dx^{3^2}\right),\ h \neq 0,$

$$X_1 = p_1 + x^2p_2 + x^3p_3 + (x^4 + hx^2)\, p_4,$$
$$X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3,\quad X_4 = p_4,\quad X_5 = x^2p_3 + x^3p_4;$$

3) $ds^2 = -dx^{1^2} + ce^{2(\alpha-2)x^1}\, dx^{2^2} + e^{2(\alpha-1)x^1}\left(2\, dx^2\, dx^4 - dx^{3^2}\right),\ c\alpha \neq 0,$

$$X_i = p_i\ (i = 2,\ 3,\ 4),\quad X_1 = p_1 + (2 - \alpha)\, x^2p_2 + (1 - \alpha)\, x^3p_3 - \alpha x^4p_4,$$
$$X_5 = x^2p_3 + x^3p_4;$$

4) $ds^2 = -a^2\, dx^{1^2} + \varepsilon e^{-2(x^1+x^3)}\, dx^{2^2} + 2e^{-x^3}\, dx^2\, dx^4 - dx^{3^2},\ \varepsilon = \pm 1,$

$$X_1 = p_1 + x^2p_2 - x^4p_4,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = x^2p_2 + p_3,$$
$$X_4 = \frac{x^{2^2}}{2}\, p_2 + x^2p_3 + e^{x^3}p_4,\quad X_5 = p_4;$$

5) $ds^2 = -dx^{1^2} + c\, dx^{2^2} + e^{2x^1}\left(2\, dx^2\, dx^4 - \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2}\right),\ c \neq -1,$

$$X_1 = p_1 - x^3p_3 - 2x^4p_4,\quad X_2 = p_2 - x^3 \operatorname{th} x^2p_3 - \frac{x^{3^2}}{2}\, p_4,$$
$$X_3 = p_3,\quad X_4 = p_4,\quad X_5 = \operatorname{th} x^2p_3 + x^3p_4;$$

6) $ds^2 = -dx^{1^2} + ce^{2x^1}\, dx^{2^2} + e^{4x^1}\left(-2x^3\, dx^{2^2} + 2\, dx^2\, dx^4 - dx^{3^2}\right),$ $c \neq 0,$

$$X_1 = p_1 - x^2p_2 - 2x^3p_3 - 3x^4p_4,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3 + x^2p_4,$$
$$X_4 = p_4,\quad X_5 = x^2p_3 + \left(x^3 + \frac{x^{2^2}}{2}\right) p_4.$$

Поля тяготения с G_6. *Представление* (27.14) приводит к приводимым полям тяготения

$$ds^2 = C_1\, ds_1^2(x^1,\ x^2) + C_2\, ds_2^2(x^3,\ x^4),$$
$$C_1,\ C_2 = \text{const},$$

где ds_1^2, ds_2^2 — метрики постоянной кривизны (может быть, и равной нулю). Существуют следующие возможности:

1) $ds^2 = C_1(dx^{2^2} + e_1\, dx^{2^2}) + C_2(dx^{3^2} + e_2 \cos^2 x^3\, dx^{4^2})$;

2) $ds^2 = C_1(dx^{1^2} + e_1\, dx^{2^2}) + C_2(dx^{3^2} + e_2 \operatorname{ch}^2 x^3\, dx^{4^2})$;

3) $ds^2 = C_1(dx^{1^2} + e_1 \operatorname{ch}^2 x^1\, dx^{2^2}) + C_2(dx^{3^2} + e_2 \cos^2 x^3\, dx^{4^2})$;

4) $ds^2 = C_1(dx^{1^2} - \cos^2 x^1\, dx^{2^2}) + C_2(dx^{3^2} + \cos^2 x^3\, dx^{4^2})$;

5) $ds^2 = C_1(dx^{1^2} - \operatorname{ch}^2 x^1\, dx^{2^2}) + C_2(dx^{3^2} + \operatorname{ch}^2 x^3\, dx^{4^2})$,

где $C_1,\ C_2 < 0,\ e_1 e_2 < 0;\ e_1,\ e_2 = \pm 1$.

Представление (27.15).

1) $ds^2 = 4e^{-2x^2}\, dx^1\, dx^4 + e^{-2x^3}\, dx^{2^2} + dx^{3^2} + \varepsilon e^{-4x^3}\, dx^{4^2},\ \varepsilon = \pm 1,$

$$X_i = p_i\ (i = 1,\ 2,\ 4),\quad X_3 = x^2 p_2 + 2x^4 p_4 + p_3,$$
$$X_6 = -x^2 p_1 + 2x^4 p_2,$$
$$X_5 = -\frac{1}{2}(x^{2^2} + e^{2x^3})\, p_1 + 2x^2 x^4 p_2 + 2x^4 p_3 + 2x^{4^2} p_4;$$

2) $ds^2 = 2e^{-ux^4}\, dx^1\, dx^4 + g_{22}\, dx^{2^2} + 2g_{23}\, dx^2\, dx^3 + g_{33}\, dx^{3^2}$,

$$X_i = p_i\ (i = 1,\ 2,\ 3),\quad X_5 = -x^3 p_1 + B_5 p_2 + C_5 p_3,$$
$$X_6 = -x^2 p_1 + B_6 p_2 + C_6 p_3,$$
$$X_4 = \left(ux^1 - \frac{vx^{2^2}}{2} - \frac{px^{3^2}}{2}\right) p_1 + (ux^2 + vx^2 B_6 + mx^3 + $$
$$+ px^3 B_5)\, p_2 + (-mx^2 + nx^3 + vx^2 C_6 + px^3 C_5)\, p_3 + p_4, \qquad (27.23)$$
$$B_i(x^4),\ C_i(x^4),\ B_i(0) = C_i(0) = 0,\quad p - v \neq 0,$$

где B_i и C_i определяются условиями:

$$B_5 = C_6,$$
$$\partial_4 B_5 = B_5(vB_6 + u) + (m + pB_5)\, C_5 - mB_6,$$
$$\partial_4 C_5 = 2 + B_5(-m + vC_6) + (u + pC_5)\, C_5 - mC_6,$$
$$\partial_4 B_6 = 2 + mB_5 + B_6(u + vB_6) + C_6(m + pB_5),$$
$$\partial_4 C_6 = mC_5 + B_6(-m + vC_6) + C_6(u + pC_5),$$

а g_{22}, g_{23}, g_{33} — условиями:

$$g_{22}\partial_4 B_5 + g_{23}\partial_4 C_5 = 0,$$
$$g_{22}\partial_4 B_6 + g_{23}\partial_4 C_6 = e^{-ux^4},$$
$$g_{23}\partial_4 B_5 + g_{33}\partial_4 C_5 = e^{-ux^4}.$$

Представление (27.16) приводит к полям тяготения более высокой подвижности, которые уже разобраны выше.

Таким образом, этим завершается полная классификация полей тяготения общего вида по допускаемым ими группам движений. Эти результаты, справедливые для любого возможного тензора энергии-импульса, будут применены в следующей главе к изучению специального случая полей тяготения, которым отвечает пространственно-временной континуум, определяемый пространствами Эйнштейна, — случай, возникающий, например, при рассмотрении полей тяготения в пустоте.

Задачи

1. Показать, что в классе метрик (24.15) содержатся пространства Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$) лишь с $\varkappa \neq 0$, если сигнатура метрики $(- - - +)$.

2. Доказать, что самый общий вид преобразования координат, относительно которого инвариантна форма метрики V_4, записанной в изотропно-геодезической системе координат, имеет вид:

$$x^{1'} = f(x^1, \ldots, x^4), \quad x^{3'} = \psi(x^2, \ldots, x^4),$$
$$x^{2'} = \varphi(x^2, \ldots, x^4), \quad x^{4'} = \theta(x^4).$$

3. Показать, что при $p = v$ пространство V_4 с метрикой (27.23) есть субпроективное пространство Кагана.

4. Пространство, определенное метрикой

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + x^{4^2}\,dx^{2^2} + 2\,dx^2\,dx^3,$$

допускает транзитивную группу движений G_8. Это V_4 — симметрическое, эйнштейново ($R_{\alpha\beta} = 0$), двукратно-проективное пространство, вполне гармоническое с двумя абсолютно параллельными векторными полями. Оно не может отвечать никакому реальному полю тяготения, так как имеет в точке сигнатуру $(- - + +)$.

Глава V

Движения в пространствах Эйнштейна

Среди различных возможных видов полей тяготения особый интерес представляет тот случай, когда тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору (плотность материи постоянна во всей области пространства) или равен нулю (пустое пространство). Такая ситуация приводит к пространствам Эйнштейна ($R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, $\varkappa=\mathrm{const}$) и в данной главе проводится классификация такого рода пространства по группам движений, что позволяет конкретизировать общие результаты, полученные в предыдущей главе, для такого рода полей гравитации.

§ 28. Постановка задачи. Общий метод решения

Полям тяготения T (в единичных случаях T^*) посвящено немалое количество исследований, обзор которых дан в § 14. Как уже указывалось, систему уравнений поля для пространств Эйнштейна можно привести к 10 уравнениям для шести неизвестных функций от четырех переменных, линейным относительно старших производных. Решить такую систему, в замкнутом виде, даже для частных случаев не всегда удается, и найденные примеры точных решений появлялись как изолированные счастливые открытия, не вытекающие из общего конструктивного метода.

Значительным шагом к отысканию такой общей схемы нахождения решений уравнений поля является метод групп движений в сочетании с классификацией алгебраической структуры тензора кривизны пространств Эйнштейна по трем типам (§ 19). Такой подход позволяет дать не только инвариантно-групповую характеристику полям T и T^*, о которой говорилось в § 23 по отношению к общим полям тяготения, но и дать более детальную картину возможных пространств T и T^*. Ввиду этого содержанием данной главы является решение задачи классификации пространств Эйнштейна трех типов по группам движений. В более детальной постановке это означает, что 1) указываются все структуры групп движений G_r $(2 \leqslant r \leqslant 10)$, допускаемых пространствами T_i и $\overset{*}{T}_i$; 2) указываются классы метрик римановых пространств, среди которых находятся искомые пространства Эйнштейна, допускающие группы с найденными структурами; 3) приводятся и, где это возможно, интегрируются уравнения поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$; 4) дается полный обзор полученных результатов.

При этом необходимо отметить следующий принципиально существенный факт: на первый взгляд кажется, что случай $\varkappa \neq 0$ (пространства $\overset{*}{T}$) представляет собой обобщение случая $\varkappa = 0$ в смысле системы дифференциальных уравнений и, в связи с этим казалось бы, что метрики пространств T_i должны получаться из метрик пространств Эйнштейна, содержащих параметр $\varkappa$ при стремлении этого параметра к нулю. Однако на самом деле изучение пространств $\overset{*}{T}_i$ с точки зрения допускаемых ими групп движений показывает, что для второго и третьего типов при $\varkappa \to 0$ происходит перетасовка типов, и случаи $\varkappa = 0$ и $\varkappa \neq 0$ приходится рассматривать как отдельные самостоятельные задачи.

Можно указать следующие два способа решения задачи, поставленной выше.

Пользуясь классификацией общих полей тяготения по группам движений, рассмотренной в главе IV, можно брать метрики найденных классов V_4 и потребовать, чтобы метрика удовлетворяла уравнениям поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, затем вычислить в бивекторном пространстве λ-матрицу $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ $(a, b = 1, \ldots, 6)$ и потребовать, чтобы ее характеристика была соответствующего типа.

Этот простой по идее метод обычно трудно осуществить по следующим двум причинам: 1) он приводит к очень громоздким выкладкам уже на первом этапе, когда записываются уравнения поля, и 2) условия, определяющие тип пространства, записываются дифференциальными уравнениями второго порядка, как и уравнения поля, но уже нелинейными относительно старших производных. Эти затруднения становятся весьма ощутимыми в случае малой подвижности пространства $(r \leqslant 4)$.

Ввиду этого является предпочтительным следующий метод решения проблемы.

Ясно, что пространства Эйнштейна, являясь частным случаем общих римановых многообразий, допускают лишь некоторые группы движений G_r в противовес тому, что мы имели для произвольных полей тяготения (глава IV), допускающих, например, все структуры групп G_r для $r < 5$. Поэтому основной *задачей определения пространств Эйнштейна с группами движений G_r является нахождение уравнений структур групп G_r, допускаемых пространствами T_i и $\overset{*}{T}_i$, заданного типа.*

Для определения структур групп движений G_r воспользуемся известными соотношениями, связывающими ξ^α, $\xi_{\alpha,\beta}$, C^s_{pq} (структурные константы) и тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\underset{p}{\xi}^\alpha \underset{q}{\xi}^\beta{}_{,\alpha} - \underset{q}{\xi}^\alpha \underset{p}{\xi}^\beta{}_{,\alpha} = C^s_{pq}\underset{s}{\xi}^\beta, \tag{28.1}$$

$$\underset{p}{\xi}_{\alpha,\sigma}\underset{q}{\xi}^\sigma_{\beta,} - \underset{p}{\xi}_{\beta,\sigma}\underset{q}{\xi}^\sigma_{\alpha,} + \underset{p}{\xi}^\sigma\underset{q}{\xi}^\tau R_{\sigma\tau\alpha\beta} = C^s_{pq}\underset{s}{\xi}_{\alpha,\beta}. \tag{28.2}$$

Отметим, что (28.1) получено из обычных уравнений структур для группы (10.5) с учетом, что риманова связность имеет кручение, равное нулю; соотношение (28.2) получено из (28.1) путем ковариантного дифференцирования с использованием условия, что для любого вектора Киллинга произвольная Ли коэффициента связности должна обращаться в нуль:

$$\underset{L}{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \xi^\alpha_{,\beta\gamma} + \xi^\sigma R_{\sigma\gamma\cdot\beta}{}^{\alpha} = 0. \tag{28.3}$$

Соотношения (28.1), (28.2) можно дополнить еще одним важным условием — первой серией условий интегрируемости уравнений Киллинга из (10.14):

$$\underset{L}{\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}\xi^\sigma + \xi_{\sigma,\tau}\left(2\delta^\sigma_{[\beta}R^\tau_{\alpha]\gamma\delta} + 2\delta^\sigma_{[\delta}R^\tau_{\gamma]\alpha\beta}\right) = 0, \tag{28.4}$$

дающей на основании теоремы о группе движений в V_n (§ 10) добавочные связи между $\underset{s}{\xi}^\alpha$ и $\underset{s}{\xi}_{\alpha,\beta}$.

Если рассмотреть уравнения (28.4) в ортрепере, где имеют место канонические формы для тензора кривизны пространств Эйнштейна (§ 19), то из них тотчас следует, что $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$ будут выражаться через известные компоненты тензора кривизны $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и неизвестные компоненты его первой ковариантной производной $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$, причем для транзитивных групп без дополнительных параметров, для нетранзитивных — с некоторыми параметрами, возникающими за счет неопределенности $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\alpha$ в ортрепере.

Следовательно, *необходимо знать, от какого числа параметров для каждого типа в отдельности $\overset{*}{T}_i$ (T_i) зависят компоненты $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ в каноническом ортрепере*. Этот вопрос решен в следующем параграфе, где показано, что в подавляющем большинстве случаев число таких параметров гораздо меньше числа неизвестных $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$, и указанные алгебраические системы (28.1) и (28.2) становятся переопределенными, что является существенным при нахождении структурных констант группы.

Кроме того, нужно учесть следующие соображения: 1) допустима любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами для векторов $\underset{s}{\xi}^{\alpha}(x)$, поэтому можно заранее r компонент $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}$ привести к нулю или единице; 2) для любого вектора Киллинга невозможен случай, когда $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}=\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=0$ одновременно, так как это означало бы, что $\underset{s}{\xi}^{\alpha}(x)=0$ в любой системе координат [170]; 3) если группа допускает стационарную подгруппу H_p, то p векторов $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}=0$ $(s=1,\ \ldots,\ p)$.

Важно знать не только структуру группы, но и ранг матрицы $\left(\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}\right)$ и другие геометрические свойства операторов; в частности, решающим является вопрос о том, будут или нет поверхности транзитивности *изотропными*, о чем можно судить, изучая $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}$ и $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ в данной точке. Поэтому определение начальных значений $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}$ и $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ является не менее необходимым, чем нахождение структурных констант.

Пользуясь указанными замечаниями, из систем (28.1), (28.2) находим структурные константы группы. Далее, элементарными линейными подстановками найденная структура приводится к одному из канонических базисов групп G_r, указанных в § 10, и с учетом общей классификации полей тяготения (глава IV) выделяется класс римановых пространств V_4, допускающих эту группу. Дальнейший процесс сводится к интегрированию уравнений поля для полученных метрик и наложению условий типа.

Наконец, сделаем несколько замечаний по поводу обозначений, применяемых нами на протяжении этой главы. Удобно использовать, например, комплексное представление инвариантов тензора кривизны и его ковариантных производных по следующему закону:

$$\left.\begin{aligned} K_s&=\alpha_s+i\beta_s,\\ \Pi_{AB}&=R_{ab}+iR_{ab+3},\\ \Pi_{AB,\,\sigma}&=R_{ab,\,\sigma}+iR_{ab+3,\,\sigma},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.\qquad (a,\ b\leqslant 3).\tag{28.5}$$

Величины K_s принято называть стационарными кривизнами (см. § 19). Тождества Бианки, к которым мы неоднократно будем обращаться в обозначениях (28.5), будут выглядеть так:

$$\left\{\begin{aligned} &\Pi_{1A,\,1}+\Pi_{2A,\,2}+\Pi_{3A,\,3}=0,\\ &\Pi_{3A,\,1}-\Pi_{1A,\,3}+i\Pi_{2A,\,4}=0,\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} &\Pi_{2A,\,1}-\Pi_{1A,\,2}-i\Pi_{3A,\,4}=0,\\ &\Pi_{3A,\,2}-\Pi_{2A,\,3}-i\Pi_{1A,\,4}=0.\end{aligned}\right.\tag{28.6}$$

Кроме того, из (5.13) следует:

$$\sum_{a=1}^{3} \Pi_{aa,\,\sigma} = 0. \tag{28.7}$$

Отметим также, что в основном исследования ведутся в классе аналитических функций, однако в некоторых случаях достаточно требования, чтобы функции были лишь класса C^1 или C^2.

§ 29. Векторные поля в пространствах Эйнштейна. Вспомогательные теоремы

В работах Беля и Дебеве [321], [322], [366] (см. задачи к § 19) для пространств T_2 и T_3 было выяснено, что в этих пространствах существует такое изотропное векторное поле $l^\alpha(x)$, наличие которого дает нам необходимые условия того, чтобы данное пространство было пространством Эйнштейна второго или третьего типа с $\varkappa = 0$.

Эти условия нами обобщаются на случай $\varkappa \neq 0$, а также показывается, что для пространств второго типа, когда $K_1 = K_2$, эти условия могут быть усилены. Для третьего типа существует не одно векторное поле, а два, и, наконец, векторное изотропное поле существует и для пространств первого типа, если оно имеет две совпадающие стационарные кривизны.

Все приводящиеся ниже выводы справедливы не только для пространств $\overset{*}{T}_i$, но и для T_i. Чтобы получить соответствующие формулы для пространств T_i, нужно во всех нижеприведенных соотношениях положить $\varkappa = 0$.

Рассмотрение начнем с частного случая, условившись предварительно знаком «$\overset{*}{=}$» обозначать выполнение написанного соотношения в ортрепере, где имеют место канонические формы для тензора кривизны (§ 19).

Пусть дано пространство $\overset{*}{T}_2(T_2)$ с условием, что стационарные кривизны его совпадают, т. е. $\alpha_i = -\frac{\varkappa}{3}$, $\beta_i = 0$ ($i = 1, 2$). Подставив эти значения инвариантов в матрицы M и N, определенные в § 19, замечаем, что тензор кривизны пространств может быть представлен в виде:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta} - q_{\alpha\beta} q_{\gamma\delta} + \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{29.1}$$

где $p_{\alpha\beta}$ и $q_{\alpha\beta}$ — кососимметрические тензоры:

$$(p_{\alpha\beta}) \overset{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (q_{\alpha\beta}) \overset{*}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29.2}$$

Ранг $(p_{\alpha\beta})$ и $(q_{\alpha\beta})$ равен двум, и, следовательно, они являются простыми бивекторами [102]. Без труда находим:

$$p_{\alpha\beta} = 2\lambda_{[\alpha}\mu_{\beta]}, \quad q_{\alpha\beta} = 2\lambda_{[\alpha}\nu_{\beta]}, \tag{29.3}$$

где $\lambda^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_1^\alpha + \delta_4^\alpha$, $\mu^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_2^\alpha$, $\nu^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_3^\alpha$, т. е. в любой системе координат:

$$\lambda^\alpha\lambda_\alpha = \lambda^\alpha\mu_\alpha = \lambda^\alpha\nu_\alpha = \mu^\alpha\nu_\alpha = 0. \tag{29.4}$$

Свертывая (29.1) с вектором $l^\alpha = a(x)\lambda^\alpha$ и учитывая (29.3), (29.4), получим:

$$l^\alpha\left(R_{\sigma\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3}\, g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = 0. \tag{29.5}$$

Совершенно аналогично имеем:

$$l^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\left(R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3}\, g^{\sigma\tau}{}_{\gamma\sigma}\right) = 0, \tag{29.6}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}$ — дискриминантный тензор пространства.

Очевидно, что поле l^α с условиями (29.5) или (29.6) *единственное*.

Введем, далее, в рассмотрение вектор $t^\alpha = l^\sigma l^\sigma_{,\sigma}$. Если продифференцировать (29.5) ковариантно один раз, проциклировать по индексам $\gamma\,\delta$ и по индексу дифференцирования σ, а затем свернуть с l^σ сумму проциклированных выражений, то с учетом тождеств Бианки получим:

$$t^\alpha\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3}\, g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = 0. \tag{29.7}$$

Из сравнения (29.5) и (29.7) и замечания о единственности поля l^α, удовлетворяющего (29.5), вытекает:

$$l^\sigma l^\alpha_{,\sigma} = \omega(x)\, l^\alpha. \tag{29.8}$$

Таким образом, *векторное поле l^α определяет изотропно-геодезическую конгруэнцию.*

Если рассматриваемое пространство допускает движение с векторами Киллинга $\underset{s}{\xi}{}^\alpha$, то, взяв производную Ли от выражения (29.5) в направлении этих векторов и учитывая, что для движения

$$\underset{L}{\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \underset{L}{\delta} g_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \tag{29.9}$$

получим:

$$\left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3}\, g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)\underset{\underset{s}{L}}{\delta} l^\alpha = 0, \tag{29.10}$$

откуда следует еще одно условие для векторного поля l^α:

$$\underset{\substack{L\\s}}{\delta} l^\alpha = \omega \underset{s}{l^\alpha}. \tag{29.11}$$

Подобные исследования легко проводятся для каждого типа пространств $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$; ввиду этого мы ограничимся общей резюмирующей теоремой:

Для каждого типа пространств Эйнштейна в отдельности имеют место следующие условия на тензор кривизны:

$\overset{*}{T}_1\,(T_1)$

1) $K_1 \neq K_2 = K_3$ $\quad l^\alpha l^\gamma (R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \alpha_1 g_{\alpha\beta\gamma\delta}) = l^\alpha l^\gamma (\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} R^{\sigma\tau}_{\gamma\delta} + \beta_1 g_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0;$

$$l^\alpha l_\alpha = 0, \quad \underset{\substack{L\\s}}{\delta} l^\alpha = \omega \underset{s}{l^\alpha}. \tag{29.12}$$

2) $K_1,\ K_2,\ K_3 \neq$. *В этом случае векторное поле со свойствами* (29.12) *отсутствует.*

$\overset{*}{T}_2\,(T_2)$

1) $K_1 = K_2$ $\quad l^\alpha \left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = l^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \left(R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}\right) = 0;$

$$\underset{\substack{L\\s}}{\delta} l^\alpha = \omega \underset{s}{l^\alpha}, \quad l^\alpha l_\alpha = 0. \tag{29.13}$$

2) $K_1 \neq K_2$ $\quad l^\alpha l^\gamma (R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \alpha_1 g_{\alpha\beta\gamma\delta}) = l^\alpha l^\gamma (\varepsilon_{\alpha\beta\delta\tau} R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} + \beta_1 g_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0;$

$$\underset{\substack{L\\s}}{\delta} l^\alpha = \omega \underset{s}{l^\alpha}, \quad l^\alpha l_\alpha = 0. \tag{29.14}$$

$\overset{*}{T}_3\,(T_3)$

$$l^\alpha l^\gamma \left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = l^\alpha l^\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\delta\tau} R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} = 0, \tag{29.15}$$

$$n^\alpha n^\gamma \left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta}\right) = n^\alpha l^\gamma \varepsilon_{\gamma\beta\sigma\tau} \left(R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}\right) = 0, \tag{29.16}$$

$$l^\alpha \overset{*}{=} a\left(\delta_2^\alpha - \delta_4^\alpha\right), \quad n^\alpha \overset{*}{=} \delta_1^\alpha, \quad \underset{\substack{L\\s}}{\delta} l^\alpha = \omega \underset{s}{l^\alpha}, \quad \underset{\substack{L\\s}}{\delta} n^\alpha = \bar{\omega} \underset{s}{n^\alpha}, \quad l^\alpha n_\alpha = 0.$$

Для всех трех типов вектор l^α определяет изотропно-геодезическую конгруэнцию.

Перейдем к выяснению вопроса о числе неизвестных компонент первой ковариантной производной от тензора кривизны для пространств Эйнштейна.

Все рассуждения проведем на примере пространств третьего типа. Для других типов результаты получаются аналогично.

Дифференцируя (29.15), (29.16) один раз и учитывая, что из свойств векторов l^α и n^α следует:

$$l^\alpha l_{\alpha,\,\beta}=0, \quad l^\alpha_{,\,\beta}n_\alpha+l^\alpha n_{\alpha,\,\beta}=0,$$

а затем рассматривая полученные из (29.15), (29.16) дифференциальные следствия в каноническом ортрепере, приходим к следующим условиям:

$$\begin{gathered}\Pi_{11,\,\sigma}+i\Pi_{23,\,\sigma}+\frac{1}{2}\Pi_{22,\,\sigma}\overset{*}{=}0,\\ \Pi_{23,\,\sigma}-i\Pi_{12,\,\sigma}\overset{*}{=}0, \quad \Pi_{13,\,\sigma}-\frac{i}{2}\Pi_{11,\,\sigma}+\frac{i}{2}\Pi_{33,\,\sigma}\overset{*}{=}0.\end{gathered} \tag{29.17}$$

Заметим, что при получении (29.17) использовалась симметричная сдвоенность матриц $\|R_{ab,\,\sigma}\|$ и условие (28.7).

Используя тождества Бианки (28.6) и вводя обозначения

$$\Pi_{11,\,\sigma}=A_\sigma, \quad \Pi_{33,\,\sigma}=B_\sigma, \quad A_\sigma=a_\sigma+i\bar{a}_\sigma, \quad B_\sigma=b_\sigma+i\bar{b}_\sigma, \tag{29.18}$$

получим, что остальные компоненты $\Pi_{AB,\,\sigma}$ зависят от восьми комплексных параметров:

$$\begin{gathered}\Pi_{13,\,\sigma}\overset{*}{=}\frac{i}{2}(A_\sigma-B_\sigma), \qquad \Pi_{22,\,\sigma}\overset{*}{=}-(A_\sigma+B_\sigma),\\ \Pi_{12,\,1}\overset{*}{=}2A_2-A_4+B_4, \qquad \Pi_{12,\,3}\overset{*}{=}i(A_2-B_2)-2iA_4,\\ \Pi_{12,\,2}\overset{*}{=}iB_3-2A_1-iA_3, \qquad \Pi_{12,\,4}\overset{*}{=}B_1-A_1-2iA_3,\\ \Pi_{12,\,\sigma}-i\Pi_{23,\,\sigma}\overset{*}{=}0,\end{gathered} \tag{29.19}$$

где на параметры A_σ и B_σ наложено два дополнительных соотношения:

$$B_1+A_1+i(A_3+B_3)\overset{*}{=}0, \quad A_2+B_2-(A_4+B_4)\overset{*}{=}0. \tag{29.20}$$

Тем самым доказана теорема: *для пространств Эйнштейна третьего типа компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ в каноническом ортрепере зависят по крайней мере от шести комплексных параметров (т. е. 12 вещественных) и имеют вид, выражаемый формулами* (29.18), (29.19), (29.20).

Ниже будет показано, что число неизвестных параметров можно понизить.

Для пространств второго типа с учетом (29.14) аналогичные рассуждения дают:

$$\Pi_{11,\sigma} \overset{*}{=} K_{1,\sigma}, \quad \Pi_{22,\sigma} \overset{*}{=} A_\sigma, \quad \Pi_{33,\sigma} \overset{*}{=} -(A_\sigma + K_{1,\sigma}),$$
$$\Pi_{23,\sigma} \overset{*}{=} \frac{i}{2}(2A_\sigma + K_{1,\sigma}). \tag{29.21}$$

$$\begin{aligned}
&\Pi_{12,1} \overset{*}{=} -(A_2 + iA_3) - \frac{i}{2} K_{1,3},\\
&\Pi_{12,2} \overset{*}{=} A_1 + A_4 + \frac{1}{2} K_{1,4},\\
&\Pi_{12,3} \overset{*}{=} i(A_1 + A_4) + \frac{i}{2} K_{1,1},\\
&\Pi_{12,4} \overset{*}{=} (A_2 + iA_3) + \frac{1}{2} K_{1,2},\\
&\Pi_{13,1} \overset{*}{=} A_3 - iA_2 + K_{1,3} - \frac{i}{2} K_{1,2},\\
&\Pi_{13,2} \overset{*}{=} i(A_1 + A_4) + iK_{1,4} + \frac{i}{2} K_{1,1},\\
&\Pi_{13,3} \overset{*}{=} -(A_1 + A_4) - K_{1,1} - \frac{1}{2} K_{1,4},\\
&\Pi_{13,4} \overset{*}{=} iA_2 - A_3 + iK_{1,2} - \frac{1}{2} K_{1,3},\\
&A_\sigma = a_\sigma + i\overline{a}_\sigma.
\end{aligned} \tag{29.22}$$

Формулы (29.21), (29.22) имеют место и для пространств $\overset{*}{T}_2\,(T_2)$, имеющих равные стационарные кривизны, с той лишь разницей, что в (29.21), (29.22) $K_{1,\sigma}$ нужно положить равным нулю, так как в этом случае $K_1 = -\frac{\varkappa}{3} = \text{const}$.

Из сравнения (29.12) и (29.14) заключаем, что (29.21), (29.22) справедливы и в случае полей тяготения $\overset{*}{T}_1\,(T_1)$ с парой совпадающих кривизн. Однако можно показать, что число неизвестных компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ для рассматриваемых полей тяготения равно только четырем. Действительно, используя известные соотношения [88]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma} \overset{*}{=} \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma} - \sum_\sigma e_\sigma (\gamma_{\alpha\tau\sigma} R_{\tau\beta\gamma\delta} + \gamma_{\beta\tau\sigma} R_{\alpha\tau\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\tau\sigma} R_{\alpha\beta\tau\sigma} + \gamma_{\delta\tau\sigma} R_{\alpha\beta\gamma\tau}),$$

где $\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — инварианты, полученные от свертки $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и векторов ортрепера, а $\gamma_{\alpha\tau\delta}$ — коэффициенты вращения Риччи, мы получим:

$$\Pi_{11,\sigma} \overset{*}{=} K_{1,\sigma}, \quad \Pi_{22,\sigma} \overset{*}{=} K_{2,\sigma}, \quad \Pi_{33,\sigma} \overset{*}{=} K_{2,\sigma}. \tag{29.23}$$

Учитывая (29.21), (29.22), (29.23), окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
&\Pi_{11,\sigma} \overset{*}{=} K_{1,\sigma}, && \Pi_{22,\sigma} \overset{*}{=} -\frac{1}{2}K_{1,\sigma},\\
&\Pi_{12,1} \overset{*}{=} \frac{1}{2}K_{1,2}, && \Pi_{12,2} \overset{*}{=} -\frac{1}{2}K_{1,1},\\
&\Pi_{13,1} \overset{*}{=} \frac{1}{2}K_{1,3}, && \Pi_{13,2} \overset{*}{=} \frac{i}{2}K_{1,4},\\
&\Pi_{33,\sigma} \overset{*}{=} \Pi_{22,\sigma}, && \Pi_{23,\sigma} \overset{*}{=} 0,\\
&\Pi_{12,3} \overset{*}{=} -\frac{i}{2}K_{1,4}, && \Pi_{12,4} \overset{*}{=} -\frac{i}{2}K_{1,3},\\
&\Pi_{13,3} \overset{*}{=} -\frac{1}{2}K_{1,1}, && \Pi_{13,4} \overset{*}{=} \frac{i}{2}K_{1,2}.
\end{aligned} \tag{29.24}$$

Что же касается пространств первого типа с не равными друг другу стационарными кривизнами, то в этом случае для определения компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ применим несколько иной метод.

Рассмотрим ковариантно-постоянный тензор $Q^{\alpha\beta\gamma\delta}$, определенный следующим образом:

$$Q^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\right), \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\sigma^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \sigma^{1234} = -1.$$

С помощью этого тензора образуем три инварианта:

$$\begin{aligned}
&I_1 = \Pi_{AB}Q^{AB} = -\varkappa, \quad I_2 = \Pi_{AB}\Pi_{CD}Q^{AC}Q^{BD} = \sum_{s=1}^{3} K_s^2,\\
&I_3 = \Pi_{AB}\Pi_{CD}\Pi_{EF}Q^{AC}Q^{DE}Q^{BF} = \sum_{s=1}^{3} K_s^3.
\end{aligned} \tag{29.25}$$

Инварианты I_k дифференцируем и расписываем в каноническом ортрепере. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\sum_{s}^{3} (\Pi_{ss,\sigma} - K_{s,\sigma}) \overset{*}{=} 0, \quad \sum_{s=1}^{3} K_s(\Pi_{ss,\sigma} - K_{s,\sigma}) \overset{*}{=} 0,\\
&\sum_{s=1}^{3} K_s^2(\Pi_{ss,\sigma} - K_{s,\sigma}) \overset{*}{=} 0.
\end{aligned} \tag{29.26}$$

Эта система относительно неизвестных $(\Pi_{ss,\sigma} - K_{s,\sigma})$ имеет определитель Вандермонда, не равный нулю, так как K_1, K_2, $K_3 \neq$ и, следовательно, $\Pi_{ss,\sigma} \overset{*}{=} K_{s,\sigma}$. Но тогда, обозначая $\Pi_{23,\sigma} \overset{*}{=} A_\sigma = a_\sigma + i\overline{a}_\sigma$

и применяя тождества Бианки (28.6), выражаем оставшиеся компоненты $\Pi_{AB,\sigma}$ через параметры A_σ и $K_{s,\sigma}$:

$$\begin{aligned} &\Pi_{12,1} \overset{*}{=} -(A_3+K_{2,2}), && \Pi_{13,1} \overset{*}{=} -(A_2+K_{3,3}),\\ &\Pi_{12,2} \overset{*}{=} -iA_4+K_{2,1}, && \Pi_{13,2} \overset{*}{=} A_1-iK_{3,4},\\ &\Pi_{12,3} \overset{*}{=} A_1+iK_{2,4}, && \Pi_{13,3} \overset{*}{=} iA_4+K_{3,1},\\ &\Pi_{12,4} \overset{*}{=} i(-A_2+K_{2,3}), && \Pi_{13,4} \overset{*}{=} iA_3-iK_{3,2}. \end{aligned} \tag{29.27}$$

Таким образом, имеет место следующий результат: *в случае пространств первого типа с не равными друг другу стационарными кривизнами компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ в каноническом ортрепере выражаются через 12 комплексных параметров, восемь из которых являются первыми производными от двух стационарных кривизн.*

Однако число параметров можно понизить—существуют два дополнительных соотношения, связывающих $\Pi_{AB,\sigma}$ и $K_{s,\sigma}$.

Для их вывода продифференцируем I_2, I_3 еще раз и свернем по индексам дифференцирования, воспользовавшись при этом формулой, связывающей $R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ и тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и имеющей место для любых пространств Эйнштейна [290]:

$$R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma} = 2\left(\varkappa R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R^{\sigma\cdot\cdot\tau}_{\alpha\gamma}R_{\sigma\beta\tau\delta} + R^{\sigma\cdot\cdot\tau}_{\beta\gamma}R_{\alpha\sigma\tau\delta} + R^{\sigma\cdot\cdot\tau}_{\delta\gamma}R_{\alpha\beta\sigma\tau}\right). \tag{29.28}$$

После этого получим:

$$g^{\sigma\sigma}\left(\Pi^2_{12,\sigma}+\Pi^2_{13,\sigma}+\Pi^2_{23,\sigma}\right) \overset{*}{=} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\sum K_s\Delta_2K_s - \varkappa\sum K_s^2 - \sum K_s^3 - 6K_1K_2K_3, \tag{29.29}$$

$$g^{\sigma\sigma}\left((K_1+K_2)\Pi^2_{12,\sigma}+(K_1+K_3)\Pi^2_{13,\sigma}+(K_2+K_3)\Pi^2_{23,\sigma}\right) \overset{*}{=} \overset{*}{=} \frac{1}{2}\sum K_s^2\Delta_2K_3 - \varkappa\sum K_s^3 - \sum K_3^4 + 2\varkappa K_1K_2K_3. \tag{29.30}$$

Для пространств первого типа с двумя совпадающими кривизнами, учитывая (29.23) и (29.24), вместо (29.29), (29.30) имеем условие на стационарные кривизны:

$$\Delta_1K_1 \overset{*}{=} \frac{1}{2}(3K_1+\varkappa)\Delta_2K_1 + 4K_2(K_1-K_2). \tag{29.31}$$

Этот процесс позволяет получить два квадратичных соотношения и для пространств $\overset{*}{T}_2(T_2)$ $(K_1 \neq K_2)$:

$$g^{\sigma\sigma}\left(\Pi^2_{12,\sigma}+\Pi^2_{13,\sigma}\right) \overset{*}{=} \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2} K_sD_2K_s + 2K_2(K_1-K_2), \tag{29.32}$$

$$g^{\sigma\sigma}\left(\Pi_{12,\sigma}+i\Pi_{13,\sigma}\right)^2 \overset{*}{=} 0. \tag{29.33}$$

Если же $K_1 = K_2$, то для таких пространств $\overset{*}{T}_2(T_2)$ квадратичные соотношения удовлетворяются тождественно.

Для пространств третьего типа тем же методом, учитывая (29.19), (29.20), получим: $g^{\sigma\sigma}\Pi^2_{22,\,\sigma} \overset{*}{=} 0$, что в наших обозначениях выглядит так:

$$A_3 + B_3 \overset{*}{=} A_1 + B_1 \overset{*}{=} 0. \tag{29.34}$$

Таким образом, *компоненты* $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ *для пространств* $\overset{*}{T}_3(T_3)$ *зависят самое большее от десяти вещественных параметров.*

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с пространствами Эйнштейна, имеющими постоянные стационарные кривизны. Для такого рода пространств из предыдущих исследований вытекает очевидная теорема: *если пространства* $\overset{*}{T}_i(T_i)$ *имеют постоянные стационарные кривизны, то компоненты* $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ *зависят самое большее* 1) *для* $\overset{*}{T}_1(T_1)$ $(K_1, K_2, K_3 \neq)$ *от восьми вещественных параметров*; 2) *для* $\overset{*}{T}_1(T_1)$ $(K_1 \neq K_2 = K_3)$ *имеем* $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma} = 0$ — *пространство симметрическое*; 3) *для* $\overset{*}{T}_2(T_2)$ — *от восьми вещественных параметров*; 4) *для* $\overset{*}{T}_3(T_3)$ *стационарные кривизны всегда постоянны и число неизвестных параметров не превышает* 10. Остановимся, далее, на двух вспомогательных теоремах, играющих существенную роль при определении уравнений структур допускаемых групп.

Первая из них касается вопроса о стационарных подгруппах групп движений, а именно, имеет место следующая теорема: *если пространства* $\overset{*}{T}_1(T_1)$ *допускают группу движений со стационарной подгруппой* H_p, *то*: 1) $p = 0$ *при* $K_1, K_2, K_3 \neq$, 2) $p \leqslant 2$, *если* $K_1 \neq K_2 = K_3$, 3) $p = 6$, *если* $K_1 = K_2 = K_3$; *для* $\overset{*}{T}_2(T_2)$ *имеем*: 1) $p = 0$, *когда* $K_1 \neq K_2$; 2) $p \leqslant 2$, *когда* $K_1 = K_2$; *для пространств* $\overset{*}{T}_3(T_3)$ $p = 0$ *всегда.*

Доказательство теоремы проведем для полей T_i, а затем покажем, что то же утверждение для пространств $\overset{*}{T}_i$, сводится к доказательству для пустых пространств.

Введем в пространстве T_i нормальную систему координат (§ 6), фиксируя некоторую точку в качестве начала. Тогда метрика представится в виде:

$$ds^2 = \left(\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R_{\lambda\alpha\mu\beta} x^\lambda x^\mu + \ldots\right) dx^\alpha\, dx^\beta.$$

Из определения стационарной подгруппы следует, что при преобразованиях ее должны оставаться инвариантными коэффициенты этого ряда. Инвариантность первого из коэффициентов показывает, что стационарная подгруппа является подгруппой лоренцовых преобразований. Инвариантность второго коэффициента показывает, что всякая H_p оставляет неизменными коэффициенты $\overset{\circ}{R}_{\alpha(\beta\gamma)\delta}$. Отсюда, пользуясь (5.8), получим, что компоненты этого тензора инвариантны при преобразованиях H_p.

Для того чтобы $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ оставались неизменными, необходимо, чтобы Π_{AB} оставались инвариантными относительно некоторого вращения комплексного R_3. Здесь учитывается, что матрица (R_{ab}) симметрично-сдвоенная. Таким образом, приходим к задаче: требуется определить ортогональные комплексные преобразования, переводящие в себя две формы в $R_3: \varphi = \sum Z^{i^2}$ и $\psi = \sum \Pi_{ij} z^i z^j$.

Для T_1 из (19.18) следует, что $\psi = \sum K_i Z^{i^2}$. Если K_i различны между собой, то ясно, что не существует ортогонально-невырожденного преобразования, отличного от тождественного, сохраняющего эти две формы. Если $K_1 \neq K_2 = K_3$, то, очевидно, допустимо вращение в плоскости $\{Z^2, Z^3\}$. Один комплексный параметр дает два вещественных и, следовательно, $p \leqslant 2$. В случае $K_1 = K_2 = K_3$ имеет место тривиальный случай плоского пространства — $p = 6$.

Для T_2 из (19.19) имеем: $\psi = K_1 Z^{1^2} + (K_2 + 1) Z^{2^2} + (K_2 - 1) Z^{3^2}$, где $K_1 + 2K_2 = 0$. Если $K_1 \neq K_2$, то H_p сводится к тождественному преобразованию. При $K_1 = K_2 = 0$ получим однопараметрическое преобразование, дающее в вещественной области $p \leqslant 2$.

Для T_3 из (19.20) следует, что $\psi = ZZ^2(Z^1 - iZ^3)$, и легко убедиться, что H_p всегда совпадает с единицей группы.

Покажем, что аналогичная теорема справедлива для пространств $\overset{*}{T}_i$. С этой целью введем в рассмотрение тензор

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны пространства $\overset{*}{T}_i$. Очевидно, что тензор $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в ортрепере будет иметь матрицы такого же строения, что и тензор кривизны для пространств T_i. Рассуждая затем так же, как и в случае свободных пространств T_i, мы придем к двум формам $\varphi = \sum Z^{i^2}$ и $\psi = \sum \tilde{\Pi}_{ij} Z^i Z^j + \frac{\varkappa}{3}\varphi$, откуда тотчас следует, что теорема, высказанная выше, справедлива для полей тяготения $\overset{*}{T}_i$.

Докажем далее еще одно утверждение: *решение уравнений поля с $\varkappa > 0$ и сигнатурой $(+++-)$ эквивалентно решению уравнений $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ для $\varkappa < 0$ с сигнатурой $(---+)$.*

Действительно, пусть нам известно решение с $\varkappa = a^2 > 0$ уравнений поля для сигнатуры $(+++-)$. Для $\varkappa = -a^2 < 0$ уравнения $\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = -a^2 \overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, где метрика $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ по условию должна иметь сигнатуру $(---+)$, переходят в уравнения $R_{\alpha\beta}=a^2 g_{\alpha\beta}$, если положить $g_{\alpha\beta}=-\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$. При этом очевидно, что тензор Риччи для метрики $g_{\alpha\beta}$ совпадает с тензором Риччи, подсчитанным для $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$. Отсюда следует: чтобы получить решение уравнения $\overset{*}{R}_{\alpha\beta}=-a^2\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ для сигнатуры $(---+)$, нужно найти $g_{\alpha\beta}$ с сигнатурой $(+++-)$ из уравнения $R_{\alpha\beta}=a^2 g_{\alpha\beta}$ и затем полученную метрику взять со знаком минус.

§ 30. Пространства T_i и $\overset{*}{T}_i$ максимальной подвижности. Классы пространств Эйнштейна с группами движений $G_r\,(r>4)$

В этом параграфе решаются два основных вопроса, возникающие при классификации пространств Эйнштейна T_i и $\overset{*}{T}_i$ по группам движений: 1) Какие максимальные значения может принимать r для заданного i? 2) Какова структура группы при заданном i и максимальном r, а также какова метрика $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$ в этом случае?

При рассмотрении этих вопросов приходится попутно выделять все классы полей $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$ с группами движений порядка выше четырех; поэтому они также включены в данный параграф.

Докажем предварительно следующую теорему: *пространства* $\overset{*}{T}_i$ *не допускают нетранзитивных пятичленных групп движений. Среди пространств* T_i, *допускающих такие группы, имеется лишь один класс. Он относится к полям* T_2, *и его метрика имеет вид*:

$$ds^2=2dx^1\,dx^4+A(x^4)\,dx^{2^2}+2B(x^4)\,dx^2\,dx^3+C(x^4)\,dx^{3^2}, \quad (30.1)$$

где функции A, B, C *удовлетворяют уравнению*

$$\Delta(CA''-2BB''+AC'')-\frac{1}{2}\left(C^2A'^2+A^2C'^2+2ACB'^2+2B^2A'C'+\right.$$
$$\left.+2B^2B'^2-4BCA'B'-4ABC'B'\right)=0,\ \Delta=AC-B^2. \quad (30.2)$$

Действительно, пусть пространства $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$ допускают некоторую нетранзитивную группу движений пятого порядка. В этом случае имеется двучленная стационарная подгруппа. Обозначая ее операторы номером 4 и 5, имеем в начале нормальной системы координат:

$$\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{4}=\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{5}=0, \quad (30.3)$$

а для первых трех операторов, применяя различные линейные комбинации, получим, что существует лишь четыре различных вида, к которым приводятся компоненты $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{s}$ $(s=1,\ 2,\ 3)$:

$$\begin{array}{llll} (\mathrm{A}) & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{1}(0,\ 1,\ 0,\ 0), & (\mathrm{B}) & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{1}(1,\ \alpha,\ 0,\ 0), \\ & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{2}(0,\ 0,\ 1,\ 0), & & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{2}(0,\ 0,\ 1,\ 0), \\ & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{3}(0,\ 0,\ 0,\ 1); & & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{3}(0,\ 0,\ 0,\ 1); \\ (\mathrm{C}) & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{1}(1,\ 0,\ \alpha,\ 0), & (\mathrm{D}) & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{1}(1,\ 0,\ 0,\ \alpha), \\ & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{2}(0,\ 1,\ \beta,\ 0), & & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{2}(0,\ 1,\ 0,\ \beta), \\ & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{3}(0,\ 0,\ 0,\ 1); & & \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{3}(0,\ 0,\ 1,\ \gamma). \end{array} \tag{30.4}$$

Рассмотрим пространства первого типа. Распишем матрицу систем первой серии условий интегрируемости уравнений Киллинга (28.4) в ортрепере, опуская одинаковые строки рассматриваемой матрицы:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{11,\,\sigma}=A_{1\sigma} \\ 0 & 0 & \beta_2-\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_1 & R_{12,\,\sigma}=A_{2\sigma} \\ 0 & \beta_1-\beta_3 & 0 & 0 & \alpha_1-\alpha_3 & 0 & R_{13,\,\sigma}=A_{3\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14,\,\sigma}=A_{4\sigma} \\ 0 & 0 & \alpha_1-\alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2-\beta_1 & R_{15,\,\sigma}=A_{5\sigma} \\ 0 & \alpha_3-\alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1-\beta_3 & 0 & R_{16,\,\sigma}=A_{6\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{22,\,\sigma}=B_{1\sigma} \\ \beta_3-\beta_2 & 0 & 0 & \alpha_3-\alpha_2 & 0 & 0 & R_{23,\,\sigma}=B_{2\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{25,\,\sigma}=B_{3\sigma} \\ \alpha_2-\alpha_3 & 0 & 0 & \beta_3-\beta_2 & 0 & 0 & R_{26,\,\sigma}=B_{4\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{33,\,\sigma}=C_{1\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{36,\,\sigma}=C_{2\sigma} \end{bmatrix}. \tag{30.5}$$

В (30.5) последний столбец означает четыре колонки при $\sigma=1,\ \ldots,\ 4$. По теореме о стационарной подгруппе для пространств первого типа пара стационарных кривизн необходимо совпадает, и в силу равноправности стационарных кривизн и не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\beta_2=\beta_3$, $\alpha_2=\alpha_3$. Таким образом, в матрице (30.5) появляются дополнительные нули, а определитель четвертого порядка, составленный из оставшихся ненулевых элементов первых шести столбцов $\Delta_4=[(\beta_1-\beta_2)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2]^2$, не равен нулю, так как $K_1\neq K_2$.

Рассматривая, далее, условия (28.4) для $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{4}=\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{5}=0$ и учитывая, что $K_1\neq K_2$, получим:

$$\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{3,\,4}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{1,\,2}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,\,4}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{3,\,1}=0 \qquad (p=4,\ 5). \tag{30.6}$$

Вспомнив, что $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ и $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ для движений в римановых пространствах не могут обращаться в нуль одновременно, имеем (с точностью до нумерации):

$$\overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}_{1,4} \neq 0, \quad \overset{\circ}{\underset{5}{\xi}}{}_{2,3} \neq 0, \quad \overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}_{2,3} = 0, \quad \overset{\circ}{\underset{5}{\xi}}{}_{1,4} = 0. \tag{30.7}$$

Но тогда, выбрав новые $\bar{\xi}^{\alpha}_{s}(x)$ в виде:

$$\begin{gathered}\bar{\xi}^{\alpha}_{4} = \frac{1}{\overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}_{1,4}} \underset{4}{\xi}{}^{\alpha}, \quad \bar{\xi}^{\alpha}_{5} = \frac{1}{\overset{\circ}{\underset{5}{\xi}}{}_{2,3}} \bar{\xi}^{\alpha}_{5},\\ \bar{\xi}^{\alpha}_{k} = -\overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{1,4}\underset{4}{\bar{\xi}}{}^{\alpha} - \overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{2,3}\underset{5}{\bar{\xi}}{}^{\alpha} + \underset{k}{\xi}{}^{\alpha} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)\end{gathered} \tag{30.8}$$

и учитывая, что (30.8) не меняет вида $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$, даваемого (30.3) и (30.4), для новых $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ (ради упрощения записи черточку над ξ^{α}_{s} опускаем) получаем следующие матрицы:

$$\begin{gathered}(\overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & \underset{k}{\bar{a}} & \underset{k}{\bar{b}} & 0 \\ -\bar{a}_{k} & 0 & 0 & \underset{k}{\bar{c}} \\ -\bar{b}_{k} & 0 & 0 & \underset{k}{\bar{d}} \\ 0 & -\underset{k}{\bar{c}} & -\underset{k}{\bar{d}} & 0 \end{vmatrix},\\ (\overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (\overset{\circ}{\underset{5}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.\end{gathered} \tag{30.9}$$

Затем, рассматривая уравнения структуры (28.1) в точке для $pq = i4$, $k4\,(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ в случаях (A), (B), (C), приходим к противоречию, в случае (D) получаем, что $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \pm 1$.

Взяв линейную оболочку трех независимых векторов из (D) и вводя на ней метрику обычным способом [216], убеждаемся, что группа действует на *изотропной* гиперповерхности.

Такой же результат имеем и для пространств второго типа $\overset{*}{T}_2\,(T_2)$. Действительно, используя матрицу системы уравнений (28.4) относительно неизвестных $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{s}{\xi}_{\sigma,\beta}$, расписанную в ортрепере:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{11,\sigma}=A_{1\sigma} \\
0 & -1 & \beta_2-\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_2-\alpha_1+1 & R_{12,\sigma}=A_{2\sigma} \\
0 & \beta_1-\beta_2 & 1 & 0 & \alpha_1-\alpha_2+1 & 0 & R_{13,\sigma}=A_{3\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14,\sigma}=A_{4\sigma} \\
0 & 0 & \alpha_1-\alpha_2-1 & 0 & -1 & \beta_2-\beta_1 & R_{15,\sigma}=A_{5\sigma} \\
0 & \alpha_2-\alpha_1-1 & 0 & 0 & \beta_1-\beta_2 & 1 & R_{16,\sigma}=A_{6\sigma} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{22,\sigma}=B_{1\sigma} \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & R_{23,\sigma}=B_{2\sigma} \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & R_{25,\sigma}=B_{3\sigma} \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{26,\sigma}=B_{4\sigma} \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{33,\sigma}=C_{1\sigma} \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & R_{36,\sigma}=C_{2\sigma}
\end{array}\right] \tag{30.10}$$

и принимая во внимание, что по теореме о стационарной подгруппе $K_1=K_2=-\frac{\varkappa}{3}$, после подстановки в выражение (28.4) $\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}=0$ $(p=4,\ 5)$ получим следующие условия:

$$\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,2},\quad \underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,4}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,3},\quad \underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,4}=\underset{p}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3}=0 \qquad (p=4,\ 5).$$

Соответствующие линейные комбинации типа (30.8) упрощают вид матриц $(\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta})$:

$$(\underset{k}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta})=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \underset{k}{\bar a} \\ 0 & 0 & \underset{k}{\bar b} & \underset{k}{\bar c} \\ 0 & -\underset{k}{\bar b} & 0 & \underset{k}{\bar d} \\ -\underset{k}{\bar a} & -\underset{k}{\bar c} & -\underset{k}{\bar d} & 0 \end{vmatrix}, \tag{30.11}$$

$$(\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad (\underset{5}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем (28.1) для $pq=k4,\ k5$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ в случаях (A), (B), (C) приводят к противоречию, а в случае (D) к условиям: $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 1$, и, следовательно, группа действует на *изотропных* гиперповерхностях транзитивности.

Для третьего типа стационарная группа имеет порядок $p = 0$, т. е. пространства $\overset{*}{T}_3(T_3)$ никогда не допускают нетранзитивных групп движений. Более того, ниже будет показано, что порядок групп движений для пространств третьего типа не превышает четырех.

Итак, остается выяснить вопрос, какие V_4 допускают нетранзитивную G_5, действующую на $\overset{*}{V}_3$. В § 27 показано, что имеется лишь один класс таких пространств. Метрика его имеет вид (30.1) и допускает операторы (27.2). Подсчитывая тензор Риччи, получим, что девять компонент обращаются тождественно в нуль, и остается лишь одно: $R_{44} = 0$, имеющее дифференциальный вид (30.2).

Перейдем сейчас к вопросу о максимально-подвижных пространствах T_l и $\overset{*}{T}_l$.

(A) Рассмотрим пространства первого типа. Вопрос о верхней грани для r решается теоремой: *если пространство Эйнштейна первого типа допускает группу движений G_r, где $r \geqslant 7$, то имеем пространство постоянной кривизны, причем для $\overset{*}{T}_1$ кривизна отлична от нуля, для T_1 кривизна равна нулю (пространство Минковского).*

Действительно, пусть $\overset{*}{T}_1(T_1)$ допускает G_r с $r \geqslant 7$. По теореме о движениях в римановых пространствах (§ 10) любой определитель Δ_4 матрицы (30.5) равен нулю. Составляя все возможные Δ_4 для первых шести столбцов и приравнивая их нулю, получим:

$$\alpha_l = -\frac{\varkappa}{3}, \quad \beta_l = 0 \qquad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Это означает, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\varkappa}{3} g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — имеем пространство постоянной кривизны, причем, когда $\varkappa = 0$, тензор кривизны обращается в нуль, т. е. пространство является плоским. Следующая теорема позволяет нам решить вопрос о пространствах Эйнштейна первого типа с группами движений порядка $r > 4$. При этом заметим, что нам придется рассмотреть лишь случай транзитивных групп G_6 и G_5, так как в случае нетранзитивных групп G_6 пространства V_4 являются конформно-евклидовыми (§ 27) и уравнения $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ для такого рода пространств приведут нас к пространству постоянной кривизны; случай нетранзитивных G_5 был рассмотрен выше.

Итак, докажем следующее утверждение: *если пространства первого типа допускают группы движений G_r для $r > 4$, то существуют следующие четыре класса пространств $\overset{*}{T}_1$,* *отличные от пространств постоянной кривизны*:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\operatorname{ch}^2(\sqrt{\varkappa}\,x^2)\,dx^{1^2} - dx^{2^2} + \operatorname{ch}^2(\sqrt{\varkappa}\,x^4)\,dx^{3^2} - dx^{4^2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varkappa > 0, \\
ds^2 &= -\cos^2(\sqrt{-\varkappa}\,x^2)\,dx^{1^2} - dx^{2^2} + \\
&\qquad + \cos^2(\sqrt{-\varkappa}\,x^4)\,dx^{3^2} - dx^{4^2}, \qquad \varkappa < 0, \\
ds^2 &= -\operatorname{ch}^2(\sqrt{\varkappa}\,x^2)\,dx^{1^2} - dx^{2^2} - \cos^2(\sqrt{\varkappa}\,x^4)\,dx^{3^2} + dx^{4^2}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varkappa > 0, \\
ds^2 &= -\cos^2(\sqrt{-\varkappa}\,x^2)\,dx^{1^2} - dx^{2^2} - \\
&\qquad - \operatorname{ch}^2(\sqrt{-\varkappa}\,x^4)\,dx^{3^2} + dx^{4^2}, \qquad \varkappa < 0.
\end{aligned}
\tag{30.12}
$$

В частности, при $\varkappa = 0$ *получаем, что пространства* T_1 *с группами* G_4 $(r > 4)$ *являются плоскими. Метрики* (30.12) *приводимые и допускают шестичленные группы движений, т. е. имеем лакуну: пространств* $\overset{*}{T}_1(T_1)$ *с полными группами движений* G_5 *не существует.*

Как уже указывалось, необходимо рассматривать лишь случай транзитивных G_6 и G_5. В обоих случаях по теореме о стационарной подгруппе имеем $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$. Тогда система (28.4) запишется в виде:

$$
\Pi_{11,\,\sigma}\xi^\sigma_s = \Pi_{22,\,\sigma}\xi^\sigma_s = \Pi_{33,\,\sigma}\xi^\sigma_s = 0. \tag{30.13}
$$

Учитывая, что ранг $\left\|\xi^\sigma_s\right\|$ равен четырем, а также (29.23), (29.24), получим, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma} \overset{*}{=} 0$. Последнее соотношение из-за тензорного характера справедливо в любой системе координат, т. е. искомые пространства *симметрические*.

В § 59, где симметрические пространства Эйнштейна рассмотрены более подробно, показано, что такие пространства являются также приводимыми. В силу этого метрики пространств $\overset{*}{T}_1$ находятся без труда. Они имеют вид (30.12). Отсюда же следует, что при $\varkappa = 0$ (пространства T_1) они являются плоскими.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Для* $\overset{*}{T}_1(T_1)$, *допускающих полную просто-транзитивную группу движений* G_4, *стационарные кривизны различны между собой.*

Предположив противное ($\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$), мы получили бы выполнение (30.13), откуда следовали бы симметричность пространств и метрики (30.12), допускающие G_6.

Следствие 2. *Для того чтобы пространства Эйнштейна первого типа, у которых две стационарные кривизны совпадают, были приводимыми, необходимо и достаточно, чтобы одна из кривизн была постоянной.*

Необходимость следует из того, что все приводимые пространства $V_4 = V_2 \times V_2$ допускают транзитивную группу движений G_6. Достаточность следует из (29.23) и (29.24).

(B) Рассмотрим пространства второго типа. Пусть они допускают группы движений G_r с $r > 6$. По теореме о движениях в римановых пространствах (§ 10) любой Δ_4 в матрице (30.10) равен нулю. Однако, приравнивая нулю все определители четвертого порядка, составленные из элементов первых шести столбцов матрицы (30.10), приходим к противоречию ($1 = 0$). *Пространства $\overset{*}{T}_2$ и T_2 не могут быть пространствами постоянной кривизны.* Этот факт является исключительно важным для теории полей тяготения во всех тех случаях, когда возникает вопрос о так называемых «граничных условиях на бесконечности». Отметим прежде всего, что эти условия, пользуясь некоторыми подходящими преобразованиями координат, можно переформулировать как некоторые условия на некоторой гиперповерхности. Почти во всех существующих монографиях по общей теории относительности молчаливо подразумевалось, что на бесконечности метрика становится плоской, мотивировка сводилась к интуитивным соображениям. Однако строго доказанное выше утверждение приводит с необходимостью к следующим альтернативам: (a) или предположение о плоском пространстве-времени на некоторой гиперповерхности не имеет места, в общем случае, и тогда поля II и III типов представляют собой классы принципиально новых полей тяготения со своеобразной топологией, (b) или же указанная гипотеза об условиях на бесконечности физически необходима, и тогда теория Эйнштейна *недоопределена*, что с неизбежностью строго приводит к необходимости переоценки основ теории.

Можно показать, что для того, чтобы поле одного данного типа переходило на некоторой гиперповерхности или подобласти всей области в целом в поле иного типа, необходимо должно происходить или вырождение метрики, или разрыв некоторых объектов, но это в силу принципа причинности не может оставаться без физической мотивировки и приводит к ряду глубоких проблем общей теории относительности.

Пусть $\overset{*}{T}_2(T_2)$ допускает группу G_6. Рассматриваемая группа необходимо должна быть транзитивной, так как по теореме о стационарной подгруппе для $\overset{*}{T}_2(T_2)$ стационарная подгруппа может быть самое большее второго порядка. В силу той же теоремы $\alpha_i = -\frac{\varkappa}{3}$, $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2)$.

Применяя линейные комбинации с постоянными коэффициентами, приводим векторы Киллинга в ортрепере к виду:

$$\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{1}=\delta^{\alpha}_{1}+\delta^{\alpha}_{4},\quad \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{p}=\delta^{\alpha}_{p},\quad \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{q}=0\qquad (p=2,\ 3,\ 4;\ q=5,\ 6).\qquad (30.14)$$

Используя результат подстановки в (28.4) $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{q}=0$ $(q=5,\ 6)$ и применяя линейные комбинации с постоянными коэффициентами, не меняющие вид (30.14), добиваемся того, что

$$(\underset{k}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta})=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \underset{k}{\bar a} \\ 0 & 0 & \underset{k}{\bar b} & \underset{k}{\bar c} \\ 0 & -\underset{k}{\bar b} & 0 & \underset{k}{\bar d} \\ -\underset{k}{\bar a} & -\underset{k}{\bar c} & -\underset{k}{\bar d} & 0 \end{vmatrix},$$

$$(\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad (\underset{6}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.\qquad (30.15)$$

Рассмотрим далее системы (28.1) и (28 2) для (30.14) и (30.15) при $pq=k5$; $k6$ $(k=1,\ \ldots,\ 4)$. Имеем:

$$\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=0,\quad \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{cases}\neq 0, & \alpha\beta=14,\ 23,\\ 0, & \alpha\beta\neq 14,\ 23,\end{cases}$$
$$\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha\beta}=\begin{cases}0, & \alpha\beta=12,\ 13,\\ \neq 0, & \alpha\beta=12,\ 13\end{cases}\qquad (s=2,\ 3),\qquad (30.16)$$

причем

$$\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,4}=\underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{1,4}=-\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,3},\quad \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{3,4}=\underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,3}=\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{1,4}.\qquad (30.17)$$

Воспользуемся каноническими представлениями компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ для полей второго типа (§ 29). Все компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\sigma}$ выражаются в этом случае определенным образом лишь через восемь вещественных параметров (a_σ и $\bar a_\sigma$), так как $K_{1,\sigma}=0$ $\left(K_1=-\frac{\varkappa}{3}\right)$.

Соотношения (28.4) для (30.14), (30.16), (30.17) дают:

$$a_1+a_4=\bar a_1+\bar a_4=a_2=\bar a_2=a_3=\bar a_3=0,\qquad (30.18)$$

т. е.

$$\overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=0,\quad \overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{cases}-\frac{1}{2}a_4, & \alpha\beta=14,\\ -\frac{1}{2}\bar{a}_4, & \alpha\beta=23,\\ 0, & \alpha\beta\neq 14,23\end{cases}\qquad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{30.19}$$

Системы (28.1) и (28.2) с использованием (30.14) и (30.19) становятся сильно переопределенными и без труда решаются. Из них следует, что $\varkappa=0$ — *пространства* $\overset{*}{T}_2$ *не допускают групп шестого порядка*, а структура G_6 в случае T_2 может быть приведена к виду:

$$\begin{gathered}[X_iX_j]=[X_1X_5]=[X_1X_6]=[X_2X_6]=[X_3X_5]=[X_5X_6]=0,\\ [X_1X_4]=-aX_1,\quad [X_2X_4]=X_5+bX_3,\quad [X_2X_5]=-X_1,\\ [X_3X_4]=-bX_2-X_6,\\ [X_3X_6]=-X_1,\quad [X_4X_5]=aX_5-X_2-bX_6,\\ [X_4X_6]=aX_6+bX_5-X_3.\end{gathered} \tag{30.20}$$

По классификации групп Ли (§ 10) подгруппа $\{X_1,\ \ldots,\ X_4\}$ относится к группе $G\,\mathrm{VI}_3$, когда $k=\varepsilon=0$. Она может быть или 1) *транзитивной*, или 2) *нетранзитивной*.

В первом случае, интегрируя уравнения структуры (30.20) для X_5, X_6 (первые четыре оператора известны из (26.31)) и уравнения Киллинга, придем к вырождающейся метрике.

Во втором случае приходим к выводу, что подгруппа $\{X_1,\ \ldots,\ X_5\}$ действует на *изотропных* гиперповерхностях $\overset{*}{V}_3$. Следовательно, искомые пространства Эйнштейна T_2 максимальной подвижности находятся среди метрик (30.1) с условием (30.2), а первые пять операторов имеют вид (27.2).

Определим оператор X_6. Для этого интегрируем уравнения структуры (30.20) и уравнения Киллинга для (30.1):

$$\begin{gathered}X_6=\left(\frac{1}{2}x^{2^2}-\frac{1}{2}x^{3^2}+bx^2x^3-ax^1\right)p_1+[(b\psi+\varphi)x^2+\\ +(b\varphi+\psi)x^3]\,p_2+[(\psi+b\theta)x^2+(b\psi-\theta-a)x^3]\,p_3+\mu(x^4)\,p_4,\end{gathered} \tag{30.21}$$

где $\mu=ax^4+\alpha$; a, b, $\alpha=\mathrm{const}$, функции φ, ψ, θ из (27.2) удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi'&=-\frac{1}{\mu}(1-a\varphi-\varphi^2-2b\varphi\psi+\psi^2),\\ \psi'&=-\frac{1}{\mu}(\theta\psi-b\theta\varphi-b-b\psi^2-\psi\varphi),\\ \theta'&=-\frac{1}{\mu}(1+a\theta+\theta^2-2b\psi\theta-\psi^2).\end{aligned} \tag{30.22}$$

Заметив, что

$$
\begin{aligned}
&\varphi'' = \frac{2}{\mu}\left(\psi'(b\varphi - \psi) + \varphi'(b\psi + \varphi)\right),\\
&\psi'' = \frac{1}{\mu}\left(\psi'(2b\psi + \varphi - \theta - a) + \varphi'(\psi + b\theta) + \theta'(b\varphi - \psi)\right),\\
&\theta'' = \frac{2}{\mu}\left(\psi'(\psi + b\theta) + \theta'(b\psi - \theta - a)\right),\\
&\Delta = \left(\varphi'\theta' - \psi'^2\right)^{-1}, \quad \Delta' = -\frac{2\Delta}{\mu}(2b\psi + \varphi - \theta - a),
\end{aligned}
\tag{30.23}
$$

приводим (30.2) к виду:

$$
4\mu^2 b^2 = \Delta\,(ab\psi^2 + ab + 2(\psi + b\theta) - ab\varphi\theta)^2. \tag{30.24}
$$

Дифференцируя это соотношение и заменяя производные от функции их выражениями (30.22), приходим к тождеству. Таким образом, (30.24) является первым интегралом системы (30.22).

При произвольных a и b система (30.22) не интегрируется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим частные случаи.

1°. $b = 0$, $a \neq 0$. Соответственно этому имеем ряд несимметрических пространств T_2, допускающих вышеуказанные группы G_6:

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + \\
&\qquad + \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{1}{p_1^2}\operatorname{ch}^2 \ln \bar{c}\,(\mu)^{-p_1}\,dx^{2^2} + \frac{1}{q_1^2}\cos^2 \ln \bar{\bar{c}}\,(\mu)^{-q_1}\,dx^{3^2}\right),\\
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + \\
&\qquad + \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{1}{p_1^2}\operatorname{ch}^2 \ln \bar{c}\,(\mu)^{-p_1}\,dx^{2^2} + \frac{1}{q_1^2}\operatorname{sh}^2 \ln \bar{\bar{c}}\,(\mu)^{q_2}\,dx^{3^2}\right),\\
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 - \\
&\qquad - \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{1}{p_1^2}\operatorname{sh}^2 \ln \bar{c}\,(\mu)^{-p_1}\,dx^{2^2} + \frac{1}{q_1^2}\operatorname{ch}^2 \ln \bar{\bar{c}}\,(\mu)^{q_2}\,dx^{3^2}\right),\\
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + x^4\left(\operatorname{sh}^2 \ln \bar{c}\,(x^4)^{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}\,dx^{2^2} + \frac{1}{2}\ln \bar{\bar{c}}x^4\,dx^{3^2}\right),\\
&\qquad p_1 = \frac{(4 + a^2)^{1/2}}{2a}, \quad q_2 = \frac{(a^2 - 4)^{1/2}}{2a}, \quad a,\ \bar{c},\ \bar{\bar{c}} = \text{const}.
\end{aligned}
\tag{30.25}
$$

2°. $a = b = 0$. Этому случаю отвечают симметрические пространства, так как все компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ в этом случае равны нулю. Имеем два класса пространства T_2:

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 + \alpha\operatorname{ch}^2\left(\frac{x^4}{\alpha} + \bar{c}\right)dx^{2^2} + \alpha\cos^2\left(\frac{x^4}{\alpha} + \bar{\bar{c}}\right)dx^{3^2},\\
&ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 - \alpha\operatorname{sh}^2\left(\frac{x^4}{\alpha} + \bar{c}\right)dx^{2^2} - \alpha\sin^2\left(\frac{x^4}{\alpha} + \bar{\bar{c}}\right)dx^{3^2}.
\end{aligned}
\tag{30.26}
$$

Перейдем к выяснению вопроса о метрике максимально-подвижных пространств $\overset{*}{T}_2$. Мы доказали выше, что максимальный порядок групп движений для таких пространств меньше шести. Будем искать максимально-подвижные пространства $\overset{*}{T}_2$ среди пространств, допускающих группы пятого порядка.

В силу теоремы о нетранзитивных пятичленных группах движений нам нужно рассмотреть только транзитивные G_5. Выбирая $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ в ортрепере в виде

$$\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha} + \delta_4^{\alpha}, \qquad \underset{k}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_k^{\alpha}, \qquad \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha} = 0 \qquad (k = 2,\ 3,\ 4)$$

и используя вид $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ (29.21), (29.22), из условий (28.1), (28.2) и (28.4) получим:

$$\begin{gathered}
a_1 + a_4 = \bar{a}_1 + \bar{a}_4 = a_2 = \bar{a}_3 = 0, \qquad a_3 = -\frac{3}{2}\bar{a}_2, \\
\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,4} = \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3} = \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4} = \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4} = \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4} = \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,4} = \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4} = \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3} = 0, \\
\underset{1}{\xi}_{1,3} = -\frac{1}{2}\bar{a}_2, \quad \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3} = \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,3}, \quad \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3} = -\frac{1}{2}\bar{a}_2, \quad \underset{k}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,4} = \underset{k}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,3} \qquad (30.27) \\
(k = 1,\ 2,\ 3), \\
\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,4} = -\frac{1}{2}a_3, \quad \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,1} + \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,4} = -\frac{1}{2}\bar{a}_2, \quad \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,4} = -\frac{1}{2}a_4, \\
\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,3} = -\frac{1}{2}a_4, \quad \frac{1}{2}\bar{a}_2\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,1} = -1, \quad \frac{1}{4}\bar{a}_2^2 = \frac{\varkappa}{3},
\end{gathered}$$

а также все структурные константы группы C_{pq}^s.

Из (30.27) следует, что параметр $\varkappa$ при сигнатуре типа $(- - - +)$ должен быть *необходимо положителен и не равен нулю*. Следовательно, *пространства T_2 не допускают транзитивных групп движений пятого порядка.*

Для полей тяготения T_2^* элементарными линейными подстановками приводим полученную структуру к простейшему виду:

$$\begin{gathered}
[X_iX_j] = 0, \qquad [X_1X_4] = X_2, \quad [X_2X_4] = X_3, \quad [X_3X_4] = 0, \\
[X_1X_5] = -X_1, \; [X_2X_5] = 2X_2, \; [X_3X_5] = 5X_3, \; [X_4X_5] = 3X_4 \qquad (30.28) \\
(i,\ j = 1,\ 2,\ 3).
\end{gathered}$$

Указанная группа содержит подгруппу G_4 VI_4. Если G_4 VI_4 — транзитивная группа (см. § 26), то, интегрируя (30.28) и уравнения Киллинга для соответствующей метрики (§ 26), получим, что метрика вырождается. Этот случай отпадает.

Пусть G_4 VI_4 — нетранзитивная группа. В этом случае метрика V_4 с такой группой движений имеет вид (26.9). Интегрируя (30.28), уравнения Киллинга и уравнения поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$, придем к следующему пространству $\overset{*}{T}_2$ максимальной подвижности:

$$ds^2=-e^{2\omega x^4}(2\,dx^1\,dx^3+dx^{2^2})+\varepsilon e^{-\omega x^4}\,dx^{3^2}-dx^{4^2},\quad \omega=\sqrt{\frac{\varkappa}{3}} \tag{30.29}$$

с операторами

$$X_i=p_i,\quad X_4=x^3p_2-x^2p_1,\quad X_5=5x^1p_1+2x^2p_2-x^3p_3-\frac{2}{\omega}p_4,$$
$$\varepsilon=\pm1. \tag{30.30}$$

Тем самым доказана теорема: *максимальной группой движений для пространств* $\overset{*}{T}_2$ *является транзитивная группа пятого порядка. Пространство максимальной подвижности возможно лишь при* $\varkappa>0$ *и в полугеодезической системе координат и имеет вид* (30.29) *с группой* (30.30).

Отметим замечательный факт, состоящий в том, что если в (30.29) параметр $\varkappa$ устремить к нулю, то мы получим пространство Минковского, относящееся к первому типу. Тут мы воочию убеждаемся в том, что пространства T_i не могут быть всегда получены как предельный случай соответствующих $\overset{*}{T}_i$, а требуют специального рассмотрения. Более того, *процесс перехода, связанный со стремлением* $\varkappa$ *к нулю, может приводить к перетасовке типов полей гравитации.*

(C) Рассмотрим пространства третьего типа. Прежде всего распишем матрицу системы (28.4) для рассматриваемых пространств, используя канонические формы (§ 19):

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & R_{11,\,\sigma}=A_{1\sigma}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{12,\,\sigma}=A_{2\sigma}\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & R_{13,\,\sigma}=A_{3\sigma}\\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & R_{14,\,\sigma}=A_{4\sigma}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & R_{15,\,\sigma}=A_{5\sigma}\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R_{16,\,\sigma}=A_{6\sigma}\\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & R_{22,\,\sigma}=B_{1\sigma}\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & R_{23,\,\sigma}=B_{2\sigma}\\
0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & R_{25,\,\sigma}=B_{3\sigma}\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{26,\,\sigma}=B_{4\sigma}\\
+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{33,\,\sigma}=C_{1\sigma}\\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & R_{36,\,\sigma}=C_{2\sigma}
\end{bmatrix}. \tag{30.31}$$

В (30.31) для первых шести столбцов имеется $\Delta_6 \neq 0$, и, следовательно, *третий тип пространств Эйнштейна может допускать группы движений G_r лишь при $r \leqslant 4$. Пространства T_3 и T_3^* не могут быть пространствами постоянной кривизны.* В то время как в имеющейся до настоящей монографии литературе подавляющее число известных решений принадлежало к пространствам первого типа и только несколько из них ко второму типу (например, некоторые из решений Эйнштейна — Розена с цилиндрическими волнами), решений третьего типа вообще не существовало, и полученный автором известный пример такого рода (30.56) потребовал преодоления значительных трудностей.

Забегая вперед, отметим, что поля тяготения T_3 допускают максимальную группу движений второго порядка. В случае же пространств T_3^* порядок максимальной группы *повышается* до четырех. Доказательством этого факта мы и займемся в первую очередь.

Пусть T_3^* допускает группу движений G_4. Порядок стационарной подгруппы для пространств третьего типа всегда равен нулю (§ 29) — искомая группа G_4 необходимо должна быть *транзитивной*.

Выберем векторы Киллинга в начале нормальной системы координат такими:

$$\overset{\circ}{\xi}{}_1^\alpha = \delta_2^\alpha - \delta_4^\alpha, \quad \overset{\circ}{\xi}{}_2^\alpha = \delta_1^\alpha, \quad \overset{\circ}{\xi}{}_3^\alpha = \delta_4^\alpha, \quad \overset{\circ}{\xi}{}_4^\alpha = \delta_3^\alpha. \tag{30.32}$$

Применяя комплексное представление тензоров по правилу (28.5) и вводя обозначения

$$\underset{s}{w}_1 = \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{1,\,4} + i\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,\,3}, \quad \underset{s}{w}_2 = \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{2,\,4} + i\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{3,\,1}, \quad \underset{s}{w}_3 = \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{3,\,4} + i\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{1,\,2}, \tag{30.33}$$

запишем систему (28.4) в виде:

$$\begin{aligned}
&2i\underset{s}{w}_3 + \Pi_{11,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0, && 2(\underset{s}{w}_1 + i\underset{s}{w}_3) - \Pi_{22,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0,\\
&\underset{s}{w}_2 + \Pi_{12,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0, && i\underset{s}{w}_2 + \Pi_{23,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0,\\
&\underset{s}{w}_3 + i\underset{s}{w}_1 + \Pi_{13,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0, && 2\underset{s}{w}_1 + \Pi_{33,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{30.34}$$

Используя далее тот факт, что все компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ в ортрепере выражаются через 10 вещественных параметров (§ 29), из системы (30.34) с помощью (30.32) найдем зависимость всех $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta}$ от указанных десяти параметров:

$$\begin{array}{lll}
\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,4} = b_4 - b_2, & \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,4} = 0, & \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,4} = \bar{b}_2 - \bar{b}_4, \\
\underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,4} = -b_1, & \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,4} = 2b_2 - a_4 - 3b_4, & \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,4} = \bar{b}_1, \\
\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,4} = -b_4, & \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,4} = 2(\bar{b}_3 - b_1), & \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,4} = -\bar{a}_4, \\
\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,4} = -b_3, & \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,4} = \bar{b}_4 - \bar{a}_4 - 2\bar{b}_2, & \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,4} = \bar{b}_3, \\
\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,3} = \bar{b}_4 - \bar{b}_2, & \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,1} = 0, & \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,2} = b_4 - b_2, \\
\underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,3} = -\bar{b}_1, & \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,1} = 2\bar{b}_2 - \bar{a}_4 - 3\bar{b}_4, & \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,2} = -b_1, \\
\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,3} = -\bar{b}_4, & \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,1} = -2(b_3 + \bar{b}_1), & \underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,2} = a_4, \\
\underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,\,3} = -\bar{b}_3, & \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,\,1} = a_4 - b_4 + 2b_2, & \underset{4}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,\,2} = -b_3.
\end{array} \qquad (30.35)$$

Все структурные константы группы из уравнений структуры (28.1) в свою очередь однозначно выражаются через $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\,\beta}$:

$$\begin{array}{lll}
C^1_{12} = 3b_2 - a_4 - 4b_4, & C^1_{13} = 2(\bar{b}_3 - b_1), & C^1_{23} = 2b_2 - 3b_4, \\
C^2_{12} = 0, & C^2_{13} = -(a_4 + b_2), & C^2_{23} = -b_1, \\
C^3_{12} = 0, & C^3_{13} = 0, & C^3_{23} = 2(b_2 - b_4), \\
C^4_{12} = 0, & C^4_{13} = \bar{b}_2 - \bar{a}_4 - 2\bar{b}_4, & C^4_{23} = 3\bar{b}_2 + 2b_3, \\
C^1_{14} = 2\bar{b}_4 - 3\bar{b}_2 - \bar{a}_4, & C^1_{24} = -(b_3 + \bar{b}_1), & C^1_{34} = 2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4) + \bar{a}_4, \\
C^2_{14} = 0, & C^2_{24} = 3\bar{b}_4 - 2\bar{b}_2 + \bar{a}_4, & C^2_{34} = 3b_3 + 2\bar{b}_1, \\
C^3_{14} = 0, & C^3_{24} = 0, & C^3_{34} = 2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4), \\
C^4_{14} = 0, & C^4_{24} = b_4 - a_4 - 2b_2, & C^4_{34} = -\bar{b}_3.
\end{array} \qquad (30.36)$$

Чтобы окончательно определить структуры группы, нужно решить систему (28.2), состоящую из 36 квадратных алгебраических уравнений, относительно десяти неизвестных.

Из нее следует, что она *совместна лишь при* $\varkappa > 0$, а структура группы имеет вид:

$$[X_i X_j] = 0, \quad [X_1 X_4] = -\frac{4}{\lambda} X_1, \quad [X_2 X_4] = 2\lambda^2 X_1 - \frac{1}{\lambda} X_2,$$

$$[X_3 X_4] = \left(\frac{3}{\lambda} - \lambda^3\right) X_1 - \frac{5}{2}\lambda^2 X_2 - \frac{2}{\lambda} X_3 \tag{30.37}$$

$$(i, j = 1, 2, 3), \qquad \lambda = \left(\frac{\varkappa}{3}\right)^{-1}.$$

Невырожденными подстановками типа

$$Y_1 = AX_1, \quad Y_2 = BX_1 + CX_2, \quad Y_3 = DX_1 + FX_2 + FX_3, \quad Y_4 = GX_4$$

приведем (30.37) к более простым уравнениям структуры:

$$[X_i X_j] = 0, \quad [X_1 X_4] = 4X_1, \quad [X_2 X_4] = X_2, \quad [X_3 X_4] = -2X_3$$
$$(i, j = 1, 2, 3). \tag{30.38}$$

Для общего риманова пространства, имеющего в качестве группы движений просто-транзитивную группу (30.38), интервал длины запишется в виде:

$$ds^2 = \alpha e^{-8\omega x^4} dx^{1^2} + 2\beta e^{-5\omega x^4} dx^1 dx^2 + 2\gamma e^{-2\omega x^4} dx^1 dx^3 +$$
$$+ \delta e^{-2\omega x^4} dx^{2^2} + 2\varepsilon e^{\omega x^4} dx^2 dx^3 + \lambda e^{4\omega x^4} dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}, \tag{30.39}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda = \mathrm{const}, \quad e_4 = \pm 1, \quad \omega = \mathrm{const}.$$

Уравнения поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ для (30.39) при $\alpha\beta = 14, 24, 34$ удовлетворяются тождественно; для $\alpha\beta = 11, 12, 13, 22, 33$ имеем:

$$-12\alpha^2\delta\lambda + 12\alpha^2\varepsilon^2 + \frac{33}{2}\alpha\beta^2\lambda - 42\alpha\beta\gamma\varepsilon + 30\alpha\gamma^2\delta - \frac{9}{2}\beta^2\gamma^2 = \frac{\varkappa\alpha\Delta}{\omega^2},$$

$$9\alpha\gamma\delta\varepsilon + 12\beta\gamma^2\delta - 3\alpha\beta\delta\lambda + \frac{15}{2}\lambda\beta^3 - 24\beta^2\gamma\varepsilon - \frac{3}{2}\alpha\beta\varepsilon^2 = \frac{\varkappa\beta\Delta}{\omega^2},$$

$$-\frac{9}{2}\alpha\beta\varepsilon\lambda + 15\alpha\gamma\delta\lambda - \frac{3}{2}\beta\gamma^2\varepsilon + 3\gamma^3\delta - 6\beta^2\gamma\lambda - 6\alpha\gamma\varepsilon^2 = \frac{\varkappa\gamma\Delta}{\omega^2},$$

$$\frac{15}{2}\beta^2\delta\lambda - 18\beta^2\varepsilon^2 - 3\alpha\delta^2\lambda + \frac{15}{2}\alpha\delta\varepsilon^2 + 3\beta\gamma\delta\varepsilon + 3\gamma^2\delta^2 = \frac{\varkappa\delta\Delta}{\omega^2},$$

$$12\gamma^2\delta\lambda - \frac{9}{2}\gamma^2\varepsilon^2 - 6\beta\gamma\varepsilon\lambda - 6\beta^2\lambda^2 - \frac{3}{2}\alpha\varepsilon^2\lambda + 6\alpha\delta\lambda^2 = \frac{\varkappa\lambda\Delta}{\omega^2},$$

$$\Delta = \alpha\delta\lambda - \alpha\varepsilon^2 - \beta^2\lambda + 2\beta\gamma\varepsilon - \gamma^2\delta. \tag{30.40}$$

Эта система уравнений совместна лишь при $\alpha = \beta = 0$, $\omega^2 = \frac{\varkappa}{3}$.

Таким образом, получаем следующий результат: *максимально-подвижное пространство* $\overset{*}{T}_3$ *с сигнатурой* $(- - - +)$ *возможно* *лишь при* $\varkappa > 0$. *Оно допускает транзитивную группу движений* G_4 *с операторами*

$$X_i = p_i, \quad X_4 = 4x^1p_1 + x^2p_2 - 2x^3p_3 + \omega^{-1}p_4, \quad \omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{3}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{30.41}$$

а метрика такого пространства имеет вид:

$$ds^2 = e^{-2\omega x^4}(2\varepsilon_1 dx^1 dx^3 - dx^{2^2}) + 2\varepsilon_2 e^{\omega x^4} dx^2 dx^3 - \\ - \frac{1}{2} e^{4\omega x^4} dx^{3^2} - dx^{4^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{3}}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1. \tag{30.42}$$

Обратимся к рассмотрению полей тяготения T_3. При определении максимально-подвижных пространств $\overset{*}{T}_3$ попутно было доказано, что пространства T_3 не могут допускать групп движений четвертого порядка. Ниже (см. § 32), где решаются вопросы о пространствах Эйнштейна с группами движений G_3, показано, что пространств T_3, допускающих группы движений такого порядка, не существует.

Пусть T_3 допускает группу движений G_2. Тогда, используя линейные комбинации с постоянными коэффициентами, для $\overset{\circ}{\xi}{}^\alpha_s$ $(s = 1,\ 2)$ мы будем иметь шесть различных видов (A) — (F) из (32.2). Рассматривая затем системы (28.1) и (28.2) (всего 10 уравнений) с учетом (28.4) и канонических форм компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ для T_3 (§ 29), мы придем к утверждению [290]: *если* T_3 *допускает группу движений* G_2, *то эта группа неабелева и действует на неизотропных поверхностях транзитивности* V_2.

Задача определения метрики максимально-подвижного T_3 значительно усложняется по сравнению со случаем максимально-подвижных T_2 вследствие низкой подвижности и условия, что группа G_2 действует на неизотропных поверхностях транзитивности.

Систему координат в пространствах V_4 всегда можно выбрать так, что векторы Киллинга, определяющие операторы G_2, будут иметь вид (см. § 24):

$$\xi^\alpha_1 = \delta^\alpha_1, \quad \xi^\alpha_2 = x^1\delta^\alpha_1 + \delta^\alpha_4, \tag{30.43}$$

а допустимые преобразования запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x^{1'} = e^{x^4} f(x^2,\ x^3) + x^1, && x^{3'} = \psi(x^2,\ x^3), \\ &x^{2'} = \varphi(x^2,\ x^3), && x^{4'} = \theta(x^2,\ x^3) + x^4. \end{aligned}\right\} \tag{30.44}$$

Интегрируя уравнения Киллинга для (30.43), получим:

$$g_{1\alpha} = e^{-kx^4} a_{1\alpha}(x^2,\ x^3), \quad g_{ij} = a_{ij}(x^2,\ x^3) \qquad (i,\ j \neq 1),$$

$$k = \begin{cases} 2, & \alpha = 1, \\ 1, & \alpha = 2,\ 3,\ 4. \end{cases} \tag{30.45}$$

Определим изотропно-геодезическую конгруэнцию l^α, существование которой для пространств $\overset{*}{T}_3(T_3)$ отмечено в § 29. Интегрируя уравнения (29.16) для векторов (30.43), получим:

$$l^\alpha = \nu\left(e^{x^4}\lambda_1\delta_1^\alpha + \lambda_2\delta_2^\alpha + \lambda_3\delta_3^\alpha + \lambda_4\delta_4^\alpha\right), \tag{30.46}$$

где $\nu = \nu(x) \neq 0$, $\lambda_i = \lambda_i(x^2,\ x^3)$ $(i = 1,\ \ldots,\ 4)$.

С помощью преобразований (30.44) для новых компонент e^α получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} l^{1'} &= \nu e^{-\theta + x^{4'}}(\lambda_1 + f_{2'}\lambda_2 + f_{3'}\lambda_3 + f\lambda_4), \\ l^{2'} &= \nu(\varphi_{2'}\lambda_2 + \varphi_{3'}\lambda_3), \\ l^{3'} &= \nu(\psi_{2'}\lambda_2 + \psi_{3'}\lambda_3), \\ l^{4'} &= \nu(\theta_{2'}\lambda_2 + \theta_{3'}\lambda_3 + \lambda_4). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что возможность использования произвольных функций f, φ, ψ, θ существенно зависит от того, будут или нет λ_2, λ_3, λ_4 тождественно равны нулю при любом допустимом преобразовании.

Если хотя бы одна из функций λ_2 или λ_3 не равна нулю, то всегда можно выбрать так систему координат, что

$$l^\alpha = \nu\delta_3^\alpha. \tag{30.47}$$

Для этого достаточно взять в качестве f, φ, ψ, θ интеграл системы Коши — Ковалевской:

$$f_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - f_3\frac{\lambda_3}{\lambda_2} - f\,\frac{\lambda_4}{\lambda_2}, \qquad \psi_2 = -\psi_3\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$
$$\varphi_2 = -\varphi_3\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \qquad \theta_2 = -\frac{\lambda_4}{\lambda_2} - \theta_3\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2}.$$

(При $\lambda_2 = 0$ перенумерация переменных x^2 и x^3 вернет нас к рассматриваемому случаю.)

Если $\lambda_2 = \lambda_3 \equiv 0$, то при $\lambda_4 = 0$ $l^\alpha = a(x)\,\delta_1^\alpha$; при $\lambda_4 \neq 0$ $l^\alpha = \nu\delta_4^\alpha$. Однако эти случаи невозможны вследствие того, что поверхности транзитивности группы G_2 обязаны быть *изотропными*, так как содержат изотропно-геодезическую конгруэнцию l^α, в то время как допускаемая группа G_2 имеет невырожденные поверхности транзитивности V_2.

Таким образом, нам необходимо рассмотреть лишь случай (30.47). После этого остаются допустимыми преобразования, не меняющие (30.43) и (30.47), вида:

$$\begin{gathered} x^1 = x^{1'} + e^{x^{4'}} f(x^{2'}), \quad x^2 = \varphi(x^{2'}), \quad x^3 = \psi(x^{2'},\ x^{3'}), \\ x^4 = x^{4'} + \theta(x^{2'}), \quad \varphi'\psi_3 \neq 0. \end{gathered} \tag{30.48}$$

Так как конгруэнция l^α изотропно-геодезическая, то $a_{33}=0$ в (30.45) и также

$$a_{13}=\rho b_1(x^2)\,e^{-x^4},\quad a_{23}=\rho b_2(x^2),\quad a_{34}=\rho b_4(x^2),$$

где ρ — произвольная функция от x^2 и x^3, отличная от нуля. Применяя преобразования (30.48), получим:

$$\begin{aligned} g_{1'3'} &= \rho b_1 e^{-\theta}\psi_{3'}\,e^{-x^4},\\ g_{2'3'} &= \rho\psi_{3'}\,(e^{-\theta}b_1 f' + b_2\varphi' + b_4\theta'),\\ g_{3'4'} &= \rho\psi_{3'}\,(b_1 e^{-\theta} f + b_4).\end{aligned}\tag{30.49}$$

Выбирая f, φ, ψ, θ, можно упростить вид $b_i(x^2)$, но при этом возникают следующие три принципиально различные возможности:

$$(1)\ b_1\neq 0,\quad (2)\ b_1=0,\quad b_4\neq 0,\quad (3)\ b_1=b_4=0,$$

каждую из которых необходимо рассмотреть отдельно.

Выберем функцию $\nu=1$ в (30.47), тогда в *любой* допустимой системе координат (30.48) имеем:

$$l_{\alpha,\,\beta}=\Gamma_{\alpha,\,3\beta},\quad l_{\alpha,\,\beta}l^\beta=\partial_3 g_{3\alpha}.\tag{30.50}$$

Предположим, что имеет место случай (1): $b_1\neq 0$. За счет выбора f, ψ, θ получим в новой системе координат $\rho=b_1=1$, $b_2=b_4=0$, а из (30.50):

$$l_{\alpha,\,\beta}l^\beta=0,\quad \partial_3 g_{3\alpha}=0.\tag{30.51}$$

Найдем среди всех допустимых преобразований те, при которых условия $b_2=b_4$ остаются инвариантными. Из (30.49) следует, что такие преобразования получаются из (30.48) при $f=0$, а функции $\varphi(x^2)$, $\psi(x^2,\,x^3)$, $\theta(x^2)$ остаются произвольными функциями. Совершая такое преобразование по формулам (30.49), в которых старые компоненты $g_{13}=e^{-x^4}$, $g_{23}=g_{33}=g_{34}=0$, и учитывая условие (30.51), будем иметь в новой системе координат

$$\partial_{3'}g_{3'1'}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{3'^2}}=0.$$

Но при произвольном выборе ψ это условие противоречиво, и, таким образом, случай (1) отпадает.

Если предположить, что имеет место случай (3) ($b_1=b_4=0$), опять-таки, рассуждая как и выше, получим противоречивое условие $\psi_{3'3'}=0$.

Следовательно, возможен только случай (2): $b_1=0$, $b_4\neq 0$. Из (30.49) в новой системе координат получим $g_{1'3'}=g_{2'3'}=g_{3'3'}=0$, $g_{3'4'}=\rho b_4\psi_{3'}e^{-\theta}$, причем, выбирая функцию ψ, всегда можно обратить $g_{3'4'}$ в единицу. В этой системе координат справедливо равенство (30.51). Предполагая, что $b_1=b_2=0$, $\rho b_4=1$, определим допустимые преобразования, для которых эти условия сохраняются. Из (30.49) следует, что это будет иметь место только тогда, когда $\psi_{3'}=1$ и $\psi_{3'3'}=0$, вследствие чего противоречие, имеющее место для двух предыдущих случаев, снимается. Если же требовать, чтобы $g_{3'4'}=1$, то получим условие $\partial_{3'}(\rho\psi_{3'})=0$, которое означает, что при $\nu=1$ множитель ρ связан определенным образом с координатой $x^3=\psi$, что не является противоречивым.

Однако мы будем предполагать далее, что указанное преобразование совершено, но $\nu\neq 1$, $g_{13}=g_{23}=g_{33}=0$, $g_{34}=g_{34}(x^{2'},\ x^{3'})$. После этого среди преобразований (30.48) можно выделить такие, которые оставляют эти факты инвариантными:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^{1'}+f(x^{2'})\,e^{x^{4'}}, & x^3 &= \psi(x^{2'},\ x^{3'}),\\ x^2 &= \varphi(x^{2'}), & x^4 &= x^{4'}+C,\quad C=\text{const}. \end{aligned}$$

Используя их, приводим $g_{3'4'}$ к единице, а $g_{2'4'}$ обращаем в нуль, причем после этого у нас остается произвол в выборе функций $\varphi(x^{2'})$ и $f(x^{2'})$, который можно будет использовать в дальнейшем, если некоторые из компонент $a_{\alpha\beta}$ или их отношения не будут зависеть от x^3.

Положим для краткости компоненты в новой системе координат следующими: $a_{11}=\alpha$, $\alpha_{12}=\beta$, $a_{14}=\delta$, $a_{22}=\gamma$, $a_{44}=\lambda$; тогда

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{Vmatrix} \alpha e^{-2x^4}, & \beta e^{-x^4}, & 0, & \delta e^{-x^4}\\ \beta e^{-x^4}, & \gamma, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\\ \delta e^{-x^4}, & 0, & 1, & \lambda \end{Vmatrix}, \tag{30.52}$$

где α, β, γ, δ — неизвестные функции от x^2 и x^3.

Неизвестные компоненты должны удовлетворять (29.15) и уравнениям поля $R_{\alpha\beta}=0$. Записывая их, имеем:

$$\begin{gathered} R_{\alpha3\beta3}=R_{123\gamma}=0 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ \ldots,\ 4),\\ R_{1212}=R_{1431}=R_{1423}=R_{2431}=R_{2423}=0,\\ g^{11}R_{1412}+\ g^{12}R_{2412}=R_{2434},\\ g^{12}R_{1412}+\ g^{22}R_{2412}=R_{1434},\\ g^{11}R_{1434}+2g^{12}R_{1424}+2g^{13}R_{1434}+g^{22}R_{2424}+2g^{23}R_{2434}=0. \end{gathered} \tag{30.53}$$

Прежде чем переходить к интегрированию полученной системы уравнений, необходимо проверить, при каких условиях исследуемое многообразие будет определять пространство T_3.

Записывая матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a,\ b=1,\ \ldots,\ 6)$ в бивекторном пространстве, нетрудно убедиться, что *характеристика λ-матрицы будет типа* [3; 3] *в том и только в том случае, если* *по крайней мере одна из компонент* R_{1412} *или* R_{2412} *не равна нулю*. Из (30.53) следует, что это возможно только в случае, если R_{1434} и R_{2434} равны нулю одновременно.

Таким образом, приходим к задаче проинтегрировать переопределенную систему 18 уравнений (30.53) в частных производных второго порядка относительно пяти неизвестных функций α, β, γ, δ, λ, зависящих от двух аргументов x^2, x^3.

При рассмотрении трех уравнений из (30.53):

$$R_{3423} = R_{3131} = R_{1423} = 0,$$

вытекает, что произвол в допустимых преобразованиях (функции f и φ, о которых говорилось выше) может быть использован так, чтобы β и δ обратить в нуль, так что метрика (30.52) запишется в виде:

$$ds^2 = \alpha e^{-2x^4} dx^{1^2} + \gamma\, dx^{2^2} + 2\, dx^3\, dx^4 + \lambda\, dx^{4^2}, \tag{30.54}$$

где α, γ, λ — неизвестные функции от x^2, x^3.

Записывая, далее, уравнения (30.52), кроме двух последних, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\alpha_3(\lambda_3 + 1) = 0,\\
\alpha_{33} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_3^2}{\alpha} = 0,\\
\gamma_{33} - \frac{1}{2}\frac{\gamma_3^2}{\gamma} = 0,\\
\alpha_{23} - \frac{1}{2}\alpha_2\left(\frac{\gamma_3}{\gamma} + \frac{\alpha_3}{\alpha}\right) = 0,\\
\alpha_{22} - \frac{\alpha_2}{2}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2}{\alpha}\right) + \frac{\gamma_3}{2}(\alpha - \lambda\alpha_3) = 0,\\
\lambda_{33} = 0, \qquad \gamma_3\lambda_3 = 0.
\end{gathered} \tag{30.55}$$

Из нее вытекает $\gamma_3 = 0$. Но тогда, проведя преобразование координат

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = \int \sqrt{e\gamma}\, dx^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = x^4, \quad e = \pm 1,$$

в новой системе координат будем иметь, что $\gamma = e = \pm 1$. После этого система (30.55) интегрируется элементарным способом:

$$\alpha = e(C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^3)^2, \ \lambda = ax^3 + b, \ aC_3 = 0, \ C_i = \mathrm{const}, \tag{30.56}$$

где a и b — неизвестные функции от x^2.

Как отмечалось выше, из двух компонент R_{1434} и R_{2434} хотя бы одна должна отличаться от нуля. Первая из них равна нулю тождественно, а вторая равняется $-\frac{1}{2}\lambda_{23}$ и, следовательно, $\lambda_3 = a \neq 0$, что означает с учетом (30.56), что $C_3 = 0$.

Компонента $R_{2412} \equiv 0$, а $R_{1412} = \frac{1}{2}\alpha_2 e^{-2x^4}$, что приводит к условию $C_2 \neq 0$.

Последние два уравнения из (30.53) интегрируются в элементарных функциях, и мы имеем:

$$\lambda = \ln\frac{C_6}{(C_1 + C_2x^2)^2}\left[x^3 - \frac{e}{4C_2^2}(C_1 + C_2x^2)^2 + C_4\right] - \frac{e}{C_2^2}(C_1 + C_2x^2)^2 + C_5,$$

где C_i — постоянные. Полагая

$$x^1 = \frac{1}{C_2}x^{1'}, \quad x^2 = \pm x^{2'} - \frac{C_1}{C_2}, \quad x^3 = -x^{3'} - C_4, \quad x^4 = -x^{4'},$$

получим следующий окончательный вид метрики максимально-подвижного T_3:

$$\begin{gathered} ds^2 = e(\alpha\, dx^{1^2} + dx^{2^2}) + 2\, dx^3 dx^4 + \lambda\, dx^{4^2}, \quad \alpha = ex^{2^2}, \quad \gamma = e, \\ \lambda = \left(x^3 + \frac{1}{4}ex^{2^2}\right)\ln(px^{2^2}) - ex^{2^2} + q, \quad e = \pm 1, \end{gathered} \tag{30.57}$$

где p и q — произвольные постоянные, которые не могут быть исключены при помощи допустимых преобразований.

Такое решение в другой системе координат было получено впервые в работе [290], затем в работах [491], [492], это же пространство было получено методом групп голономии.

Следует отметить, что, интегрируя уравнения Киллинга *при любых p и q* для (30.56), получим как общий интеграл вектор Киллинга в виде:

$$\xi^\alpha = (\alpha + \beta x^1)\delta_1^\alpha + \beta\delta_4^\alpha,$$

т. е. имеет место неабелева группа движений G_2, действующая на неизотропных двумерных поверхностях транзитивности, и пространство не допускает повышения подвижности; группа максимальная — факт, доказанный выше при помощи других соображений.

§ 31. Пространства Эйнштейна, допускающие группы движений G_4

Так как группы движений G_4 в римановых пространствах V_4 разделяются на два вида: 1) *просто-транзитивные группы* и 2) *нетранзитивные*, то рассмотрение пространств Эйнштейна с группами G_4 проводится соответственно в два этапа.

Просто-транзитивные группы.

1°. *Пространства* T_1 *и* $\overset{*}{T}_1$. В силу следствия 1, как доказано в пункте (А) § 30, в случае транзитивных групп необходимо рассматривать лишь пространства с не равными друг другу стационарными кривизнами. Запишем первую серию условий интегрируемости уравнений Киллинга (28.4), применяя комплексное представление тензоров (28.5) и обозначения (30.33):

$$\begin{gathered} \Pi_{aa,\,\sigma}\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\sigma}=0, \quad i(K_1-K_2)\underset{s}{w}_3+\Pi_{12,\,\sigma}\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\sigma}=0, \\ i(K_2-K_3)\underset{s}{w}_2+\Pi_{13,\,\sigma}\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\sigma}=i(K_2-K_3)\underset{s}{w}_1+\Pi_{23,\,\sigma}\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\sigma}=0. \end{gathered} \tag{31.1}$$

Ранг матрицы $\|\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\sigma}\|$ полный, и из (31.1) следует: $\Pi_{aa,\,\sigma}\overset{*}{=}0$, что с учетом (29.27) равносильно соотношениям $K_{s,\,\sigma}\overset{*}{=}0$. Последнее равенство справедливо в любой системе координат, и, следовательно, искомые пространства T_1 и $\overset{*}{T}_1$ должны иметь *постоянные* стационарные кривизны. Но в таком случае компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ выражаются через восемь вещественных параметров (§ 29), и из системы (31.1) все $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta}$ выразятся через эти восемь параметров (для этого удобно взять $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta_s^{\alpha}$). Соответственно этому из (28.1) структурные константы C_{pq}^{s} группы также выразятся через восемь параметров. Для окончательного определения C_{pq}^{s} остается решить алгебраическую систему (28.2) (36 уравнений) с восемью неизвестными. Эта система совместна лишь при $\varkappa=0$, и все проводимые выкладки идентичны выкладкам, проведенным в § 30 при определении пространств $\overset{*}{T}_3$ с транзитивной группой G_4, поэтому мы не будем на них останавливаться, а сразу приведем уравнения структуры:

$$\begin{aligned} &[X_iX_j]=0, \quad [X_1X_4]=-\frac{c}{2}X_1-\frac{c\sqrt{3}}{2}X_2, \\ &[X_2X_4]=\frac{c\sqrt{3}}{2}X_1-\frac{c}{2}X_2, \\ &[X_3X_4]=cX_3, \qquad c\neq 0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{31.2}$$

Подстановка

$$Y_i=X_i, \quad Y_4=-\frac{2}{c}X_4$$

приводит нас к структуре:

$$\begin{aligned} &[Y_iY_j]=0, && [Y_1Y_4]=\frac{\sqrt{3}}{3}Y_1+Y_2, \\ &[Y_2Y_4]=\frac{\sqrt{3}}{3}Y_2-Y_1, && [Y_3Y_4]=-\frac{2\sqrt{3}}{3}Y_3, \end{aligned} \tag{31.3}$$

которая относится к типу $G_4 \mathrm{VI}_2$, когда $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $l = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Используя результаты главы IV, видим, что общее риманово пространство V_4, допускающее группу (31.3), имеет вид (26.30), где $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $l = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Записывая для этой метрики уравнения поля $R_{\alpha\beta} = 0$, которые эквивалентны в данном случае алгебраической системе относительно постоянных K_{ij}, можно уточнить значение входящих в (26.30) постоянных. Мы не будем приводить здесь эти вычисления, отметим лишь, что искомая метрика после некоторого преобразования координат может быть записана в виде:

$$ds^2 = -e^{\nu}\left[\cos\left(\sqrt{3}\,\nu\right) dx^{1^2} - 2\sin\left(\sqrt{3}\,\nu\right) dx^1\, dx^2 - \cos\left(\sqrt{3}\,\nu\right) dx^{2^2}\right] - \\ - e^{-2\nu}\, dx^{3^2} - dx^{4^2}, \qquad \nu = kx^4, \qquad k = \mathrm{const}. \tag{31.4}$$

Это пространство является многообразием T_1 с постоянными стационарными кривизнами. Можно показать (см. задачу 5), что *стационарные кривизны пропорциональны* ε_s, *где* ε_s — *три корня уравнения* $\varepsilon^3 = 1$.

Таким образом, относительно пространств Эйнштейна первого типа с просто-транзитивными группами G_4 можно сформулировать следующий результат: *если пространство* T_1 *допускает транзитивную группу* G_4, *то оно в некоторой системе координат имеет вид* (31.4). *Пространств* $\overset{*}{T}_1$ *с полными просто-транзитивными группами движений не существует.*

2°. *Пространства* T_2 *и* $\overset{*}{T}_2$. Первая серия условий интегрируемости уравнений Киллинга в ортрепере распишется в виде:

$$\begin{gathered} 2\underset{s}{w_1} + \Pi_{22,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\sigma}} = 0, \quad 2l\underset{s}{w_1} + \Pi_{23,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\sigma}} = 0, \\ l(K_1 - K_2 - 1)\underset{s}{w_3} - \underset{s}{w_2} + \Pi_{12,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\sigma}} = 0, \\ l(K_2 - K_1 - 1)\underset{s}{w_2} + \underset{s}{w_3} + \Pi_{13,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\sigma}} = 0, \\ \Pi_{11,\,\sigma}\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\sigma}} = 0. \end{gathered} \tag{31.5}$$

Из (31.5), если принять во внимание, что $\left|\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}}\right| \neq 0$, имеем:

$$\Pi_{11,\,\sigma} \overset{*}{=} 0, \quad \Pi_{22,\,\sigma} + i\Pi_{23,\,\sigma} \overset{*}{=} 0, \quad K_1,\ K_2 - \mathrm{const}. \tag{31.6}$$

Удобно выбрать $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ в виде: $\overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha} = \delta_1^{\alpha} + \delta_4^{\alpha}$, $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_p = \delta_p^{\alpha}$ $(p = 2, 3, 4)$, и тогда из (31.5), учитывая (29.21), мы найдем все $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ через параметры $\Pi_{AB,\sigma}$. Однако при разрешении (31.5) возникает два принципиально различных случая: (α) $K_1 \neq K_2$, (β) $K_1 = K_2$. Разбираем их отдельно. В случае (α) имеем (см. обозначения § 29):

$$
\begin{gathered}
\underset{1}{w}_1 = -\frac{1}{2}(A_1 + A_4), \quad \underset{1}{w}_2 = \underset{1}{w}_3 = 0, \quad \underset{p}{w}_1 = -\frac{1}{2}A_p \quad (p = 2, 3, 4), \\
\underset{2}{w}_2 = -\underset{3}{w}_3 = k(A_1 + A_4), \quad \underset{2}{w}_3 = \underset{3}{w}_2 = ik(A_1 + A_4), \qquad (31.7) \\
\underset{4}{w}_3 = i\underset{4}{w}_2 = ik(A_2 + iA_3), \qquad k = (K_1 - K_2)^{-1}.
\end{gathered}
$$

Обратимся к соотношениям (28.1) и (28.2). Из (28.1) все C^s_{pq} выразятся через восемь вещественных параметров. Однако, решая систему (28.2) для (α), мы придем к противоречию с тем требованием, чтобы $K_1 \neq K_2$. Учитывая этот факт и результаты § 30, касающиеся пространств $\overset{*}{T}_2(T_2)$, получаем теорему: *если для полей тяготения $\overset{*}{T}_2(T_2)$ стационарные кривизны не равны между собой, то такие пространства не допускают транзитивных групп движений любого порядка.*

Таким образом, рассматриваем только те пространства $\overset{*}{T}_2(T_2)$, для которых $K_1 = K_2 = -\frac{\varkappa}{3}$.

Сначала исследуем пространства $\overset{*}{T}_2$. Выражая из (31.5) $\underset{s}{w}_k$, а из (28.1) C^s_{pq} через $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$, решаем систему (28.2). Из нее следует, что константа $\varkappa$ должна быть *положительной*, а структура приводится к виду:

$$
[X_iX_j] = 0, \ [X_1X_4] = 5X_1, \ [X_2X_4] = 2X_2, \ [X_3X_4] = -X_3 \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (31.8)
$$

Метрика же риманова пространства V_4, допускающего такую группу движений, известна (§ 26):

$$
\begin{gathered}
ds^2 = \alpha e^{10\omega x^4} dx^{1^2} + 2\beta e^{4\omega x^4} dx^1 dx^2 + 2\gamma e^{\mp\omega x^4} dx^1 dx^3 + \\
+ \delta e^{-2\omega x^4} dx^{2^2} + 2\varepsilon e^{\omega x^4} dx^2 dx^3 + \lambda e^{4\omega x^4} dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}, \quad (31.9) \\
\omega, \alpha, \beta, \ldots, \lambda = \text{const}, \quad e_4 = \pm 1.
\end{gathered}
$$

Запишем уравнения поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ для (31.9). Три уравнения удовлетворяются тождественно, а из оставшихся семи достаточно рассмотреть только первые пять уравнений:

$$
\begin{gathered}
-10\alpha^2\delta\lambda+10\alpha^2\varepsilon^2+16\beta^2\alpha\lambda-26\alpha\beta\gamma\varepsilon+\\
+\frac{23}{2}\gamma^2\alpha\delta-\frac{3}{2}\gamma^2\beta^2=\varkappa\alpha\Delta,\\
2\alpha\beta\delta\lambda+\alpha\beta\varepsilon^2-\frac{3}{2}\alpha\gamma\delta\varepsilon-\\
-\frac{13}{2}\beta^2\gamma\varepsilon+4\beta^3\lambda+\beta\gamma^2\delta=\varkappa\beta\Delta,\\
-\frac{11}{2}\alpha\gamma\delta\lambda+4\alpha\gamma\varepsilon^2+\frac{17}{2}\beta^2\gamma\lambda-\\
-17\gamma^2\beta\varepsilon+3\alpha\beta\lambda\varepsilon+7\gamma^3\delta=\varkappa\gamma\Delta,\\
4\beta^2\delta\lambda-\frac{3}{2}\beta^2\varepsilon^2+2\alpha\lambda\delta^2-\\
-\frac{1}{2}\alpha\delta\varepsilon^2-2\beta\gamma\varepsilon\delta-2\gamma^2\delta^2=\varkappa\delta\Delta,\\
3\beta\gamma\delta\lambda-5\beta\gamma\varepsilon^2+\frac{1}{2}\alpha\delta\lambda\varepsilon+\\
+\alpha\varepsilon^3-2\gamma^2\delta\varepsilon+\frac{5}{2}\beta^2\lambda\varepsilon=\varkappa\varepsilon\Delta,\\
\Delta=\frac{1}{3}g\omega^{-2},\quad g=e_4(\alpha\delta\lambda-\alpha\varepsilon^2-\beta^2\lambda+2\beta\gamma\varepsilon-\gamma^2\delta),
\end{gathered}
\tag{31.10}
$$

откуда следует, что $\alpha=\gamma=\varepsilon=0$, $\frac{\varkappa}{3}e_4\omega^{-2}=-4$ — мы приходим к пространству $\overset{*}{T}_2$ максимальной подвижности.

Итак, *пространства $\overset{*}{T}_2$ не могут допускать полных просто-транзитивных групп движений.*

Перейдем к рассмотрению пространств T_2. С использованием (29.21), где $K_{1,\sigma}=0$, из (28.2) имеем:

$$
\begin{gathered}
a_2=a_3=\bar a_2=\bar a_3=\bar a_1+\bar a_4=a_1+a_4=0,\quad \underset{1}{\xi}_{2,4}=0,\\
\underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,4}=0,\quad \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,2}=\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{2,4},\quad \underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,4}=\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,3},\\
(\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,2}+\underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,1})\left(\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{1,2}-\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}_{3,1}-\frac{1}{2}a_4\right)=0.
\end{gathered}
\tag{31.11}
$$

Если предположить, что $(\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,2}+\overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{3,1})\neq 0$, то, рассматривая неиспользованные уравнения из (28.2), получим:

$$\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,2}=\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,3}=\frac{1}{2}a_4,\quad \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{3,1}=\frac{1}{\bar a_4}+\sqrt{\left(\frac{1}{\bar a_4}\right)^2-\frac{1}{16}a_4^2},$$
$$\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,2}=-\frac{1}{\bar a_4}+\sqrt{\left(\frac{1}{\bar a_4}\right)^2-\frac{1}{16}a_4^2}. \tag{31.12}$$

Затем простейшими подстановками, учитывая, что $\left(\frac{1}{\bar a_4}\right)^2-\frac{1}{16}a_4^2>0$, приводим структуру группы к виду

$$[X_1X_2]=[X_1X_3]=0,\quad [X_2X_3]=X_1,$$
$$[X_1X_4]=qX_1,\quad [X_2X_4]=X_3,\quad [X_3X_4]=qX_3-X_2, \tag{31.13}$$

где $q=\frac{1}{2}a_4\bar a_4$ и $q^2<4$ (последние выполняются в силу условия из (31.12): $\left(\frac{1}{\bar a_4}\right)^2>\frac{1}{16}a_4^2\Big)$.

Структура (31.13) есть структура G_4 III, и V_4, которое допускает такую группу движений, известно из результатов § 26. Оно имеет вид (26.26).

Вторая альтернатива: $(\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,2}+\overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{3,1})=0$, следующая из (31.11), приводит к тому, что искомые структуры могут быть двух видов: $G_4\,\mathrm{VI}_2$ и $G_4\,\mathrm{VI}_4$. Соответствующие им римановы пространства имеют метрики (26.30), (26.32), (26.33).

Запись уравнений поля и наложение условий типа для указанных метрик предоставляется читателю.

3°. *Пространства* T_3 *и* $\overset{*}{T}_3$. Вопрос о транзитивных группах движения, допускаемых пространствами Эйнштейна третьего типа. решен в § 30, когда рассматривались максимально-подвижные поля тяготения $\overset{*}{T}_3$ (пространства T_3, как известно, допускают группы самое большее второго порядка). Метрика допускаемых пространств $\overset{*}{T}_3$ имеет вид (30.42), а группа — (30.41).

Нетранзитивные G_4.

Для нетранзитивных групп движений G_4 ранг матрицы $\|\xi^\alpha_s\|$ равен трем (см. § 26), и в этом случае допускается один оператор стационарной подгруппы. Обозначая его номером 4 и применяя линейные комбинации с постоянными коэффициентами для $\underset{s}{\xi}{}^\alpha(x)$, разложенных в ряд, в начале нормальной системы координат получим: $\overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}^\alpha=0$, а $\overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}^\alpha\,(k=1, 2, 3)$ будут иметь вид (A) — (D) из (30.4). По теореме о стационарной подгруппе нам необходимо рассмотреть лишь пространства Эйнштейна первого и второго типов, причем для $\overset{*}{T}_1(T_1)$ имеем:

$$\alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_2 = \beta_3, \tag{31.14}$$

для $\overset{*}{T}_2(T_2)$:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\varkappa}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0. \tag{31.15}$$

Затем при указанных выше значениях $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ $(s = 1, \ldots, 4)$ и условиях (31.14), (31.15) решаем системы (28.1) и (28.2), из которых и определяем структурные константы нетранзитивных групп движений G_4, допускаемых полями $\overset{*}{T}_p(T_p)$ $(p = 1, 2)$.

Несмотря на то, что в определении компонент $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}_{s}$ содержатся дополнительные параметры, системы (28.1) и (28.2) решить гораздо легче, чем в случае транзитивных групп G_4, так как наличие условия $\overset{\circ}{\underset{4}{\xi}}{}^{\alpha} = 0$ позволяет заранее определить из (28.4) несколько компонент $\overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta}$.

Заметим также, что вид $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ был получен за счет линейных подстановок лишь трех первых операторов и в случае, если эти операторы составляют подгруппу, можно по начальным данным заранее определить, на каких поверхностях транзитивности действует данная подгруппа. Для этого образуем линейную оболочку рассматриваемых трех векторов Киллинга, вводим на ней метрику и проверяем условие вырожденности метрики.

Так как схема определения структур нетранзитивных групп движений совершенно аналогична алгоритму, приведенному в § 30 и § 31 для транзитивных групп, и выкладки вычислений почти совпадают, то ограничимся сводкой структур, допускаемых пространствами $\overset{*}{T}_p(T_p)$ групп движений с указанием их поверхностей транзитивности.

Теорема 1. *Если пространства $\overset{*}{T}_1(T_1)$ допускают нетранзитивные группы движений G_4, то структура таких групп приводится к виду*:

(A) G_4 IV, V, VIII, I $(c = 0)$, III $(q = 0)$, VI$_1$ $(k = -l = -1)$, VI$_2$ $(k = l = 0)$ —

группы действуют на V_3;

(B) G_4 I $(c = 2)$, III, V, VI, VII, VIII — *группы действуют на* $\overset{*}{V}_3$.

Теорема 2. *Среди нетранзитивных групп движений* G_4, *допускаемых пространствами* $\overset{*}{T}_2(T_2)$, *могут быть лишь группы со следующими структурами*:

(A) G_4 I $(c \neq 2)$, II, III, VI_4 — *группы действуют на* V_3;

(B) G_4 III, VI_3 — *группы действуют на* $\overset{*}{V}_3$.

Нужно иметь в виду, что при получении указанных структур нами были использованы только необходимые условия, и поэтому при интегрировании уравнений поля и наложении условий может оказаться, что метрика искомых пространств Эйнштейна вырождается или допускает группы более высокого порядка. Такой факт будем отмечать каждый раз отдельно.

Переходим к нахождению полей тяготения $\overset{*}{T}_1(T_1)$, допускающих группы (A). Метрики V_4, допускающие такие группы, берем из § 26. Записывая уравнения поля и интегрируя их, приходим к выводу, что в случае групп IV, V метрики переходят в метрику пространства постоянной кривизны, когда $\varkappa \neq 0$, и плоского пространства, когда $\varkappa = 0$. Для групп VI_1, VI_2 имеем следующие поля тяготения:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ ds^2 = \cos^{4/3}\omega\left(-\operatorname{tg}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) + dx^{4^2},\\
&2)\ ds^2 = \operatorname{ch}^{4/3}\omega\left(-\operatorname{th}^2\omega\, dx^{1^2} + dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},\\
&3)\ ds^2 = \operatorname{sh}^{4/3}\omega\left(-\operatorname{cth}^2\omega\, dx^{1^2} + dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},\\
&4)\ ds^2 = \operatorname{ch}^{4/3}\omega\left(\operatorname{th}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},\\
&5)\ ds^2 = \operatorname{sh}^{4/3}\omega\left(\operatorname{cth}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},
\end{aligned}\right\}$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}\, x^4,$$

$$\varkappa > 0, \tag{31.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&6)\ ds^2 = \operatorname{ch}^{4/3}\omega\left(-\operatorname{th}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) + dx^{4^2},\\
&7)\ ds^2 = \operatorname{sh}^{4/3}\omega\left(-\operatorname{cth}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) + dx^{4^2},\\
&8)\ ds^2 = \cos^{4/3}\omega\left(-\operatorname{tg}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},\\
&9)\ ds^2 = \cos^{4/3}\omega\left(\operatorname{tg}^2\omega\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}\right) - dx^{4^2},
\end{aligned}\right\}$$

$$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{-\frac{\varkappa}{3}}\, x^4,$$

T_1

$$\varkappa < 0.$$

$$\begin{gathered}
ds^2 = e_1 (x^4)^{-2/3}\, dx^{1^2} + e_2 (x^4)^{4/3}\left(dx^{2^2} + e_3\, dx^{3^2}\right) + e_4\, dx^{4^2},\\
e_s = \pm 1 \qquad (s = 1, \ldots, 4).
\end{gathered} \tag{31.17}$$

Для структур G_4 I и III имеем пространства:

G_4 III

$$ds^2 = \alpha(x^4)\left(dx^{1^2} + dx^{3^2}\right) + \beta(x^4)(dx^2 + x^1\,dx^3)^2 + e_4\,dx^{4^2}, \quad (31.18)$$

где

$$\begin{gathered}\beta\alpha'' + \frac{1}{2}\alpha'\beta' + e_4\frac{\beta^2}{\alpha} + 2\varkappa e_4\alpha\beta = 0,\\ \beta\alpha\beta'' - \frac{1}{2}\alpha\beta'^2 + \beta\alpha'\beta' - e_4\frac{\beta^3}{\alpha} + 2\varkappa e_4\alpha\beta^2 = 0,\\ \alpha\alpha'\beta' + \frac{1}{2}\beta\alpha'^2 + 2\varkappa e_4\alpha^2\beta + \frac{1}{2}e_4\beta^2 = 0;\end{gathered} \quad (31.19)$$

G_4 I

$$ds^2 = 2\alpha(x^4)\,dx^1\,dx^3 + \beta(x^4)(dx^2 + x^1\,dx^3)^2 + e_4\,dx^{4^2}, \quad (31.20)$$

где

$$\begin{gathered}\beta\alpha'' + \frac{1}{2}\alpha'\beta' - e_4\frac{\beta^2}{\alpha} + 2\varkappa e_4\alpha\beta = 0,\\ \alpha\beta\beta'' - \frac{1}{2}\alpha\beta'^2 + \beta\alpha'\beta' + e_4\frac{\beta^3}{\alpha} + 2\varkappa e_4\alpha\beta^2 = 0,\\ \alpha\alpha'\beta' + \frac{1}{2}\beta\alpha'^2 - \frac{1}{2}e_4\beta^2 + 2\varkappa e_4\alpha^2\beta = 0.\end{gathered} \quad (31.21)$$

Из (31.18) — (31.21) при $\varkappa = 0$ соответственно получаем пространства T_1. В случае группы G_4 VIII, когда ее трехчленный нормальный делитель действует на V_3, искомые пространства Эйнштейна содержатся в классе римановых пространств (26.11). При $\varkappa = 0$ для новой переменной $\bar{x}^4 = \int \frac{dx^4}{\alpha^2\beta}$ Таубом было найдено решение уравнений поля в виде:

$$ds^2 = \frac{k\,\mathrm{ch}\,k\bar{x}^4}{4\,\mathrm{ch}^2\omega}\left(dx^{1^2} + \sin^2 x^1\,dx^{2^2}\right) + \frac{k}{\mathrm{ch}\,k\bar{x}^4}(dx^3 + \cos x^1\,dx^2)^2 + \frac{k^3\,\mathrm{ch}\,k\bar{x}^4}{16\,\mathrm{ch}^2\omega}\,d\bar{x}^{4^2}, \quad \omega = \frac{k\bar{x}^4 + a}{2}. \quad (31.22)$$

Если же в группах G_4 VII, VIII нормальный делитель содержит оператор стационарной подгруппы, то в этом случае уравнения поля интегрируются в элементарных функциях. Среди этих пространств находятся известные решения Шварцшильда и Коттлера, относящиеся к полям тяготения с центральной симметрией.

Пространства T_1:

$$
\begin{aligned}
&1)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - (C_1x^1 + C_2)^2 \left(dx^{2^2} + \cos^2 x^2\, dx^{3^2}\right) + \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&\qquad \lambda = \frac{C_1x^1 + C_2}{\dfrac{x^1}{C_1} + C_3};\\
&2)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - (C_1x^1 + C_2)^2 \left(dx^{2^2} - \cos^2 x^2\, dx^{3^2}\right) - \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&\qquad \lambda = \frac{C_1x^1 + C_2}{\dfrac{x^1}{C_1} + C_3};\\
&3)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - (C_1x^1 + C_2)^2 \left(dx^{2^2} + \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2}\right) + \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&\qquad \lambda = \frac{C_1x^1 + C_2}{C_3 - \dfrac{x^1}{C_1}};\\
&4)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - (C_1x^1 + C_2)^2 \left(dx^{2^2} - \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2}\right) - \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&\qquad \lambda = \frac{C_1x^1 + C_2}{C_3 - \dfrac{x^1}{C_1}}.
\end{aligned}
\tag{31.23}
$$

Линейными преобразованиями координат вида

$$x^{1'} = Ax^1 + B, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = Cx^4, \quad A,\ B,\ C = \mathrm{const}$$

константа C_1 приводится к 1, C_2 — к нулю.

Пространства $\overset{*}{T}_1$:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&1)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - x^{1^2} \left(dx^{2^2} + \cos^2 x^2\, dx^{3^2}\right) + \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&2)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - x^{1^2} \left(dx^{2^2} + \cos^2 x^2\, dx^{3^2}\right) - \lambda^{-1}\, dx^{4^2},
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\qquad \lambda = \frac{x^1}{x^1 - m + \dfrac{\varkappa}{3} x^{1^3}};\\
&\left.\begin{aligned}
&3)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - x^{1^2} \left(dx^{2^2} + \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2}\right) + \lambda^{-1}\, dx^{4^2},\\
&4)\ ds^2 = -\lambda\, dx^{1^2} - x^{1^2} \left(dx^{2^2} - \operatorname{ch}^2 x^2\, dx^{3^2}\right) - \lambda^{-1}\, dx^{4^2}.
\end{aligned}\right\}\\
&\qquad\qquad \lambda = \frac{x^1}{m - x^1 + \dfrac{\varkappa}{3} x^{1^3}}.
\end{aligned}
\tag{31.24}
$$

Рассмотрим пространства $\overset{*}{T}_1 (T_1)$ с группами (В). Метрики V_4, допускающие такие группы движений, содержат лишь одну неизвестную функцию от x^4 (см. § 26), и во всех случаях наложение уравнений поля является настолько сильным условием, что мы приходим только к плоским пространствам ($\varkappa = 0$) или пространствам постоянной кривизны ($\varkappa \neq 0$). Таким образом, *пространства* $\overset{*}{T}_1 (T_1)$, *допускающие нетранзитивные группы движений* G_4, *действующие на неизотропных поверхностях транзитивности, имеют метрики* (31.16)—(31.24). *Если же поверхности транзитивности групп* G_4 *являются изотропными гиперповерхностями, то в этом случае не имеется пространств Эйнштейна первого типа, отличных от плоских пространств и пространств постоянной кривизны.*

Аналогичным методом находим метрики пространств Эйнштейна *второго типа.*

Для метрики V_4 с группой $G_4 \,\mathrm{VI}_4$ после интегрирования уравнений поля мы приходим к пространству максимальной подвижности $\overset{*}{T}_2$ (30.29) с пятичленной группой движений, а для остальных структур (A) имеем следующие поля тяготения T_2 и $\overset{*}{T}_2$.

T_2 с группами G_4 I, II, III:

$$ds^2 = A(x^3)(2\,dx^1\,dx^3 + dx^{2^2}) + \\ + (B(x^3) + C(x^3)\,x^4 + D(x^3)\,x^{4^2})\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2}, \qquad (31.25)$$

где функции A, B, C, D соответственно для каждой группы выражаются следующим образом:

G_4 I

$$A = k(x^3)^{\frac{2}{c-2}}, \quad B = l(x^3)^{-2}, \quad C = m(x^3)^{-2},$$
$$D = e_4 \frac{C-1}{(C-2)^2}(x^3)^{-2}, \quad C \neq 2, \quad k,\ l,\ m = \mathrm{const}, \quad e_4 = \pm 1;$$

G_4 II

$$A = ke^{-2x^3}, \quad B = l, \quad C = m, \\ D = e_4, \quad k,\ l,\ m = \mathrm{const}, \quad e_4 = \pm 1; \qquad (31.26)$$

G_4 III

$$A = k \exp\{2qp \operatorname{arctg}(2x^3 + q)\,p\}\,R, \quad B = lR^2, \quad C = mR^2, \quad D = e_4 R^2,$$
$$R = (x^{3^2} + qx^3 + 1)^{-1}, \quad p = (4 - q^2)^{-1/2},$$
$$q^2 < 4, \quad k,\ l,\ m = \mathrm{const}, \quad e_4 = \pm 1.$$

Однако, интегрируя уравнения Киллинга для (31.25) с условием (31.26), мы получим, что указанные метрики допускают транзитивные шестичленные группы движений, имеющие подгруппу G_5 с поверхностями транзитивности $\overset{*}{V}_3$, т. е. пространства (31.25) с условиями (31.26) относятся к классу максимально-подвижных полей T_2, но записаны в другой системе координат. Следовательно, *пространства T_2 не допускают полных нетранзитивных групп движений G_4.*

$\overset{*}{T}_2$ с группами движений G_4 I, II, III:

$$ds^2 = A(x^3)\, e^{\lambda x^4}(2\,dx^1\,dx^3 + dx^{2^2}) + \left(B(x^3)\, e^{\lambda x^4} + C(x^3)\, e^{-\frac{\lambda}{2}x^4} + D(x^3)\right) dx^{3^2} - dx^{4^2}, \quad \lambda = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}, \tag{31.27}$$

причем

G_4 I

$$A = k(x^3)^{\frac{2}{c-2}}, \quad B = l(x^3)^{-2}, \quad c = m(x^3)^{-2},$$

$$D = \frac{4(c-1)}{\lambda^2(c-2)}(x^3)^{-2}, \quad c \neq 1 \quad \text{и} \quad 2, \quad k,\ l,\ m = \text{const};$$

G_4 II

$$A = ke^{-2x^3}, \quad B = l, \quad C = m, \quad D = \frac{4}{\lambda^2}, \quad k,\ l,\ m = \text{const}; \tag{31.28}$$

G_4 III

$$A = k\exp\{2qp\,\mathrm{arctg}\,(2x^3 + q)\,p\} \cdot R,$$

$$B = lR^2, \quad C = mR^2, \quad D = \frac{4}{\lambda^2}R^2,$$

$$R = (x^{3^2} + qx^3 + 1)^{-1}, \quad p = (4 - q^2)^{-1/2},$$

$$q^2 < 4, \quad k,\ l,\ m = \text{const}.$$

Для метрики (31.27) с условиями (31.28) *группы полные.*

Из групп G_4, действующих на *изотропных* гиперповерхностях транзитивности, пространствами второго типа допускаются лишь группы со структурой G_4 III, VI_4, причем для обоих случаев $\varkappa = 0$. Из § 26 известно, что пространств V_4, допускающих полные группы типов G_4 III, VI_4, не существует, в первом случае полной группой является группа шестого порядка и искомые пространства T_2 относятся к пространствам максимальной подвижности, а во втором случае полной группой является группа пятого порядка, действующая на $\overset{*}{V}_3$; т. е. отыскиваемые T_2 принадлежат к классу пространств (30.1) с условием (30.2).

Таким образом, резюмируем: *поля тяготения* $\overset{*}{T}_2$ *с полными нетранзитивными группами движений* G_4 *на* V_3 *имеют вид* (31.27), *где функции* A, B, C, D *удовлетворяют* (31.28); *полей тяготения* $\overset{*}{T}_2$ *с полными группами движений* G_4, *имеющими изотропные поверхности транзитивности, не существует.*

§ 32. Пространства Эйнштейна с трехчленными группами движений

Как уже указывалось (§ 25), все трехмерные группы движений в V_4 распадаются на два сорта: 1) G_3 с одночленной стационарной подгруппой (т. е. действующие на двумерных поверхностях транзитивности) и 2) G_3, не содержащие стационарного оператора (т. е. действующие на V_3 или $\overset{*}{V}_3$).

Разберем сначала первый случай групп G_3. Но тогда в силу того, что группа имеет стационарный оператор, такие группы могут допускаться лишь пространствами $T_1(\overset{*}{T}_1)$ с парой равных стационарных кривизн и $T_2(\overset{*}{T}_2)$ с кривизнами $K_1 = K_2 = -\frac{\varkappa}{3}$.

Обозначим оператор стационарной подгруппы номером 3 и применим линейные комбинации с постоянными кривизнами для $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ $(s = 1,\ 2)$. Имеем:

$$\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha} = 0, \tag{32.1}$$

$$\begin{array}{llll}
(A)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(1,\ 0,\ \alpha,\ \beta), & (B)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(1,\ \alpha,\ 0,\ \beta), & (C)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(1,\ \alpha,\ \beta,\ 0), & \\
\quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 1,\ \gamma,\ \delta); & \quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 1,\ \gamma); & \quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 0,\ 1); & \\
(D)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 1,\ 0,\ \alpha), & (E)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 1,\ \alpha,\ 0), & (F)\ \underset{1}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 1,\ 0), & (32.2)\\
\quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 1,\ \beta); & \quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 0,\ 1); & \quad\ \underset{2}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}(0,\ 0,\ 0,\ 1). &
\end{array}$$

Вследствие (31.1) из соотношений (28.4) четыре компоненты $\underset{3}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}$ известны, и системы (28.1), (28.2), из которых определяются структуры допускаемых групп для шести случаев (32.2), становятся переопределенными, и их решения легко найти. Более того, вопрос о пространствах $\overset{*}{T}_2(T_2)$ с искомыми группами движений решается рассмотрением лишь первой системы (28.1). А именно, имеет место теорема: *из всех групп G_3, имеющих стационарную подгруппу H_1, пространства Эйнштейна второго типа допускают лишь те, которые действуют на изотропных поверхностях транзитивности.*

Действительно, из (28.4) для (32.1) следует:

$$\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ -\lambda & 0 & 0 & \lambda\\ 0 & -1 & -\lambda & 0\end{Vmatrix},\quad \overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \underset{k}{\bar a} & \underset{k}{\bar b}\\ 0 & 0 & \underset{k}{\bar c} & \underset{k}{\bar d}\\ -\underset{k}{\bar a} & -\underset{k}{\bar c} & 0 & \underset{k}{\bar e}\\ \underset{k}{\bar b} & -\underset{k}{\bar d} & -\underset{k}{\bar e} & 0\end{Vmatrix}, \tag{32.3}$$

или

$$\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0\\ -\lambda & 0 & 0 & \lambda\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\lambda & -1 & 0\end{Vmatrix},\quad \overset{\circ}{\underset{k}{\xi}}{}_{\alpha,\beta}=\begin{Vmatrix} 0 & \underset{k}{\bar a} & 0 & \underset{k}{\bar b}\\ -\underset{k}{\bar a} & 0 & \underset{k}{\bar c} & \underset{k}{\bar d}\\ 0 & -\underset{k}{\bar c} & 0 & \underset{k}{\bar e}\\ -\underset{k}{\bar b} & -\underset{k}{\bar d} & -\underset{k}{\bar e} & 0\end{Vmatrix}. \tag{32.3'}$$

Система (28.1) для произвольных $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}(a_s, b_s, c_s, d_s)$ $(s=1, 2)$ эквивалента системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C^i_{k3}a_i &= -b_k-\lambda c_k,\\ C^i_{k3}b_i &= a_k-d_k.\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} C^i_{k3}c_i &= \lambda(a_k-d_k),\\ C^i_{k3}d_i &= -b_k-\lambda C_k.\end{aligned}\right\} \tag{32.4}$$

Рассматривая (32.4) для (32.2), в случае (C) — (F) приходим к арифметическому противоречию, для (B) векторы $\overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}$ имеют вид: $\overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_1+\delta^{\alpha}_4$, $\overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_3$,

для (A): $\quad \overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_1+\delta^{\alpha}_4, \quad \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_2+\gamma\delta^{\alpha}_3.$

Отсюда следует, что в обоих случаях метрика линейной оболочки вырождается — *искомые группы действуют на изотропной двумерной поверхности.*

Если рассмотреть систему (28.1) при условиях (32.3′), имеем тот же результат. Теорема доказана.

Как показано в § 24, такой группой является группа G_3 II с метрикой (24.23). Система уравнений поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ интегрируется в квадратурах с функциональным произволом.

При $\varkappa=0$ получаем следующий класс пространств T_2:

$$ds^2=\alpha(2\,dx^1\,dx^3+dx^{2^2})+\\ +(\beta+\gamma x^4+\delta x^{4^2})\,dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2},\quad e_4=\pm 1, \tag{32.5}$$

где α, β, γ — произвольные функции от x^3, а функция $\delta(x^3)$ не равна нулю (иначе нарушается тип пространства) и выражается через производные от $\alpha(x^3)$:

$$\delta = \frac{e_4}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right) \neq 0.$$

При $\varkappa \neq 0$ искомые поля тяготения $\overset{*}{T}_2$ имеют метрику:

$$ds^2 = \alpha e^{\lambda x^4}(2\,dx^1\,dx^3 + dx^{2^2}) + \\ + \left(\beta e^{\lambda x^4} + \gamma e^{-\frac{\lambda}{2}x^4} + \frac{4}{\lambda^2}\delta\right)dx^{3^2} - dx^{4^2}, \quad (32.6)$$

где α, β, γ — любые функции от x^3, $\lambda = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}$, $\delta = -\frac{e_4}{2}\times \times\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha''}{\alpha}\right)$. Для пространств (32.5) и (32.6) группа $G_3\,\mathrm{II}$ *полная.*

Аналогично для пространств первого типа $\overset{*}{T}_1(T)$ имеем: *допускаемые группы G_3 действуют на V_2 и имеют структуры* G_3 VI—IX.

Результаты § 24 относительно групп движений G_3 показывают, что искомые пространства Эйнштейна первого типа находятся среди полей (24.18) — (24.20), причем преобразования координат

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = \psi(x^3, x^4), \quad x^{4'} = \theta(x^3, x^4), \quad (32.7)$$

являются допустимыми, и с помощью произвольных функций ψ и θ можно упростить вид (24.18) — (24.20). Можно было бы привести метрики к виду (24.21), но удобнее проделать следующие упрощения.

Если $a_3 \neq 0$ и $a_4 \neq 0$, то, проведя вещественное преобразование координат

$$x^{1'} = x^1, \ x^{2'} = x^2, \ x^{3'} = \sqrt{\varepsilon a} = A(x^3, x^4), \ x^{4'} = \theta(x^3, x^4), \quad (32.8)$$

приведем рассматриваемые метрики к виду:

$$\begin{aligned}
&1)\ ds^2 = \varepsilon x^{3^2}(dx^{1^2} + e_1\,dx^{2^2}) + \\
&\qquad\qquad + a(x^3, x^4)\,dx^{3^2} + b(x^3, x^4)\,dx^{4^2},\\
&2)\ ds^2 = \varepsilon x^{3^2}(dx^{1^2} + e_1\cos^2 x^1\,dx^{2^2}) + \\
&\qquad\qquad + a(x^3, x^4)\,dx^{3^2} + b(x^3, x^4)\,dx^{4^2}, \qquad (32.9)\\
&3)\ ds^2 = \varepsilon x^{3^2}(dx^{1^2} + e_1\,\mathrm{ch}^2 x^1\,dx^{2^2}) + \\
&\qquad\qquad + a(x^3, x^4)\,dx^{3^2} + b(x^3, x^4)\,dx^{4^2},\\
&\qquad \varepsilon = \pm 1, \quad e_1 = \pm 1.
\end{aligned}$$

Из десяти уравнений поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ шесть обращаются в тождество, оставшиеся четыре составляют простую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda-\frac{\varepsilon}{a}+\frac{\varepsilon x^3 a_3}{2a^2}-\frac{\varepsilon x^3 b_3}{2ab}&=\varkappa\varepsilon x^{3^2},\\ a_4&=0,\\ \frac{a_3}{ax^3}+\frac{1}{b}\left(-\frac{1}{2}b_{33}+\frac{1}{4}\frac{b_3^2}{b}+\frac{a_3b_3}{4a}\right)&=\varkappa a,\\ -\frac{b}{ax^3}+\frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2}b_{33}+\frac{1}{4}\frac{b_3^2}{b}+\frac{a_3b_3}{4a}\right)&=\varkappa b,\end{aligned}\right\} \tag{32.10}$$

которая интегрируется в элементарных функциях

$$a=-x^3\left(\frac{\varkappa}{3}x^{3^2}+\lambda\varepsilon x^3+C\right)^{-1},\quad b=B(x^4)\,a^{-1},\quad C=\text{const},$$

где в случае первой метрики (32.9) имеем $\lambda=0$, для второй $\lambda=-1$, для третьей $\lambda=1$.

Проводя затем вещественное преобразование координат

$$x^{i'}=x^i,\quad x^{4'}=\int\sqrt{-e_4B(x^4)}\,dx^4\qquad(i=1,\ 2,\ 3),$$

придем к пространствам, допускающим нетранзитивную группу движений четвертого порядка ($X_4=p_4$).

Якобиан преобразования (32.8) становится вырожденным, если $a_3\neq 0$, $a_4=0$ (может случиться, что $a_3=0$, $a_4\neq 0$, но простая перенумерация переменных x^3 и x^4 возвратит нас к рассматриваемой ситуации).

В этом случае подберем ψ и θ из (32.7) так, чтобы они являлись интегралами систем Коши — Ковалевской [177]:

$$\psi_4^2=-e_1\frac{(\psi_3g_{34}+\theta_3g_{44})^2}{g_{3'3'}\Delta(\psi_3g_{33}+\theta_3g_{34})^2},$$

$$\theta_4=-\psi_4\frac{\psi_3g_{33}+\theta_3g_{34}}{\psi_3g_{34}+\theta_3g_{44}},\quad\Delta=g_{33}g_{44}-g_{34}^2.$$

Это означает, что в новой системе координат метрики (24.18) — (24.20) примут вид:

$$1)\ ds^2=\alpha(x^3)(dx^{1^2}+e_1\,dx^{2^2})+\beta(x^3,\ x^4)\left(dx^3-\frac{e_1}{\beta^2}\,dx^{4^2}\right),$$

$$2)\ ds^2=\alpha(x^3)(dx^{1^2}+e_1\cos^2x^1\,dx^{2^2})+\beta(x^3,\ x^4)\left(dx^{3^2}-\frac{e_1}{\beta^2}\,dx^{4^2}\right), \tag{32.11}$$

$$3)\ ds^2=\alpha(x^3)(dx^{1^2}+e_1\,\mathrm{ch}^2x^1\,dx^{2^2})+\beta(x^3,\ x^4)\left(dx^{3^2}-\frac{e_1}{\beta^2}\,dx^{4^2}\right).$$

Записывая затем одно из уравнений поля ($R_{34}=0$) для (32.11), получим, что $\beta=\beta(x^3)$, т. е. пространства Эйнштейна из классов (32.11) также допускают группы движений G_4.

Наконец, если $a_3=a_4=0$, то, рассматривая уравнения поля для (32.11), где $\alpha=\text{const}$, в случае первой метрики из (32.11) придем к плоскому пространству, в случае второй и третьей метрик приходим к противоречию.

Итак, справедлива теорема: *пространства Эйнштейна первого типа не могут допускать полных групп движений G_3, действующих на V_2. Полными группами таких пространств являются нетранзитивные группы движений G_4, действующие на V_3. Соответствующие пространства Эйнштейна имеют вид* (31.23), (31.24).

Частью доказанной теоремы является теорема Биркгоффа, говорящая о том, что любое сферически-симметричное поле вне материи есть поле Шварцшильда. Здесь мы не останавливаемся на строгом обосновании теоремы Биркгоффа, связанном с классом дифференцируемости потенциалов поля и функций преобразования координат. Более полно этот вопрос будет рассмотрен в § 61.

Рассмотрим сейчас группы движений G_3 второго рода, когда ранг $\|\underset{s}{\xi}^\alpha\|$ $(s=1, 2, 3)$ равен трем. С помощью линейных комбинаций выбираем $\underset{s}{\xi}^\alpha$ такими, чтобы в начале нормальной системы координат их значения $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\alpha$ имели вид (30.4).

Решим сначала вопрос о структурах групп G_3, которые имеют *изотропные* гиперповерхности транзитивности. Нетрудно видеть, что метрика линейной оболочки, натянутой на векторы $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\alpha$, имеющих вид (A), (B), (C) из (30.4), не может быть изотропной, и необходимо исследовать лишь случай (D). Простые вычисления показывают справедливость утверждения: чтобы поверхность транзитивности для этих векторов была изотропной, необходимо и достаточно наложить на константы α, β, γ дополнительное условие

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1. \tag{32.12}$$

Системы уравнений (28.1) и (28.2), из которых определяются структурные константы искомых групп, представляют собой 30 уравнений с 30-ю неизвестными (9 констант C^s_{pq}, 18 компонент $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}_{\alpha,\,\beta}$ и три неизвестные компоненты $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^\alpha$) при дополнительном условии (32.12). Однако для каждого типа пространств $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$ с использованием (28.4) и канонических компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ (§ 28) определение структурных констант группы можно свести к определенной системе 22 уравнений, Действительно, из (28.1) все C^s_{pq} определяются через $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$, и, кроме того, из той же системы при $\beta=4$ возникают еще три дополнительных соотношения, связывающих $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$.

Для $\overset{*}{T}_1(T_1)$ $(K_1, K_2, K_3 \neq)$ из условия (28.4) вытекает, что

$$K_{s,1}+\alpha K_{s,4}=K_{s,2}+\beta K_{s,4}=K_{s,3}+\gamma K_{s,4}=0, \qquad (32.13)$$

и все $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$ однозначно выражаются через $\Pi_{12,\sigma}$, $\Pi_{13,\sigma}$, $\Pi_{23,\sigma}$, которые в свою очередь в силу (29.27), и если принять во внимание (32.13), представлены через 6 комплексных неизвестных $(A_\sigma, K_{1,4}, K_{2,4})$. Таким образом, все $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}_{\alpha,\beta}$, $\underset{s}{\overset{\circ}{\xi}}{}^{\alpha}$, C^s_{pq} выражаются через 15 неизвестных, для которых имеются 18 уравнений (28.2), три уравнения (28.1) и уравнение (32.12).

В случае пространств $\overset{*}{T}_1(T_1)$ $(K_1 \neq K_2 = K_3)$ все сводится к решению 22 уравнений с 11-ю неизвестными.

Для $\overset{*}{T}_2(T_2)$ $(K_1 \neq K_2)$ число неизвестных равно 13. Если же $K_1=K_2$, то приходится решать систему уравнений с 17-ю неизвестными.

В случае пространств третьего типа имеем 13 неизвестных, связанных 22 уравнениями.

Решая полученные таким способом алгебраические системы уравнений для каждого типа в отдельности, мы приходим к следующим результатам:

1. *Пространства* $\overset{*}{T}_1(T_1)$ *с группами движений* G_3 *на* $\overset{*}{V}_3$ *обязательно должны иметь пару совпадающих стационарных кривизн. Структура допустимых групп* G_3 *приводится к виду* I, II, VI, VII.

2. *Если пространства Эйнштейна второго типа допускают группы движений* G_3 *с изотропными поверхностями транзитивности* $\overset{*}{V}_3$, *то такими полями могут быть лишь пространства* T_2, *для которых стационарные кривизны равны между собой. Структура допускаемых ими групп принадлежит к типу* G_3I и G_3II.

3. *Пространства Эйнштейна* $\overset{*}{T}_3(T_3)$ *не допускают групп движений третьего порядка с изотропными поверхностями транзитивности.*

Относительно метрики искомых пространств Эйнштейна можно высказать следующие замечания. В случае G_3VI, VII, записывая и интегрируя уравнения поля для метрик V_4, допускающих такие группы движений (§ 25), мы приходим или к пространствам постоянной кривизны (плоским), или же к условию $\det(g_{\alpha\beta})>0$, противоречащему наличию реального поля тяготения. Случай групп G_3I и G_3 II также отпадают; так, для метрик (25.22), (25.24) ($k=l=0$, $\varepsilon=1$). Полной группой движений является группа пятого порядка, действующая на $\overset{*}{V}_3$ (пространства Эйнштейна относятся к классу (30.1) с условиями (30.2)); для метрик (25.23), (25.26) одно из уравнений поля $R_{11}=0$ сразу же приводит к условию $a_{22}=0$, а это значит, что $\det(g_{\alpha\beta})>0$ — условие, противоречащее реальному полю гравитации.

Итак, *не существует отличных от пространств постоянной кривизны (плоских) полей $\overset{*}{T}_1\,(T_1)$, допускающих группы движений G_3 с изотропными гиперповерхностями транзитивности.*

Не существует пространств Эйнштейна второго типа, допускающих полные группы движений G_3, действующие на $\overset{*}{V}_3$.

Пространств T_3 и $\overset{*}{T}_3$ с рассматриваемыми группами G_3 также не имеется.

Как следует из предыдущего, для групп G_3, имеющих неизотропные гиперповерхности транзитивности, необходимо рассматривать все четыре случая (A) — (D) из (30.4) начальных значений $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$, поэтому число допускаемых структур групп G_3 резко увеличивается.

Алгоритм нахождения структурных констант для рассматриваемых групп G_3 полностью сохраняется.

Для примера разберем случай пространств Эйнштейна третьего типа, когда $\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}^{\alpha}$ имеют вид (A) из (30.4). Удобно взять в ортрепере значения $\overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}^{\alpha}$ следующими:

$$\overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta_2^{\alpha}-\delta_4^{\alpha},\quad \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta_3^{\alpha},\quad \overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}^{\alpha}=\delta_4^{\alpha}. \tag{32.14}$$

Подставляя (32.14) и (28.4) и учитывая вид $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}$ в ортрепере (§ 29), получим:

$$\begin{array}{lll}
\overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}_{1,\,4}=b_4-b_2, & \overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}_{2,\,4}=0, & \overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}_{3,\,4}=\bar{b}_2-\bar{b}_4,\\
\overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{1,\,4}=-b_3, & \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{2,\,4}=(\bar{\beta}_2-\bar{\beta}_4)-(\bar{a}_4+\bar{b}_4), & \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{3,\,4}=\bar{b}_3,\\
\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,\,4}=-b_4, & \overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{2,\,4}=2\,(\bar{b}_3-b_1), & \overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{3,\,4}=-\bar{a}_4,\\
\overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}_{2,\,3}=\bar{b}_4-\bar{b}_2, & \overset{\circ}{\underset{s}{\xi}}{}_{3,\,1}=0, & \overset{\circ}{\underset{1}{\xi}}{}_{1,\,2}=b_4-b_2,\\
\overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{2,\,3}=-\bar{b}_3, & \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{3,\,1}=(b_2-b_4)+(a_4+b_4), & \overset{\circ}{\underset{2}{\xi}}{}_{1,\,2}=-b_3,\\
\overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{2,\,3}=-\bar{b}_4, & \overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{3,\,1}=-2\,(b_3+\bar{b}_1), & \overset{\circ}{\underset{3}{\xi}}{}_{1,\,2}=a_4.
\end{array} \tag{32.15}$$

Из системы (28.1) при $\beta = 1$ следует, что $b_2 + a_4 = 3b_3 + 2\bar{b}_1 = 0$, а все структурные константы принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&C_{12}^1 = 3(\bar{b}_4 - \bar{b}_2) - (\bar{a}_4 + \bar{b}_4), && C_{13}^1 = 2(\bar{b}_3 - b_1), && C_{23}^1 = 2(\bar{b}_4 - \bar{b}_2) - \bar{a}_4,\\
&C_{12}^2 = 0, && C_{13}^2 = 2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4) - (\bar{a}_4 + \bar{b}_4), && C_{23}^2 = \bar{b}_3,\\
&C_{12}^3 = \bar{b}_4 - \bar{b}_2, && C_{13}^3 = 0, && C_{23}^3 = 2(\bar{b}_4 - \bar{b}_2).
\end{aligned}
\tag{32.16}
$$

Чтобы окончательно определить C_{pq}^s, обращаемся к соотношениям (28.2). Расписывая их при $pq = 12$ и $\alpha\beta = 13$; 23; $pq = 13$ и $\alpha\beta = 12$, 24, имеем:

$$
\begin{aligned}
&1)\ b_3(\bar{b}_4 - \bar{b}_2) = 0,\\
&2)\ (b_4 - b_2)^2 + \bar{b}_2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4) = \frac{\varkappa}{3},\\
&3)\ b_3(2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4) - (\bar{a}_4 + \bar{b}_4)) = 1,\\
&4)\ (b_4 - b_2)^2 + 2(\bar{b}_2 - \bar{b}_4) - (\bar{a}_4 + \bar{b}_4)^2 = \frac{\varkappa}{3}.
\end{aligned}
\tag{32.17}
$$

Из третьего уравнения следует, что $b_3 \neq 0$, но тогда из первого имеем: $\bar{b}_4 - \bar{b}_2 = 0$. Сравнение третьего и четвертого уравнений дает, что $\bar{a}_4 + \bar{b}_4 = 0$ — вместе с этим третье уравнение становится противоречивым. Таким образом, случай рассматриваемой группы G_3 отпадает.

Совершенно аналогично разбираются возможности (A) — (D) из (30.4) и для других типов пространств $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$. Мы опускаем промежуточные тривиальные вычисления, связанные с определением структурных констант групп G_3 и приводим окончательные результаты:

1. *Пространства T_3 не могут допускать групп движений G_3 на V_3. Если пространства $\overset{*}{T}_3$ допускают такие группы, то их структуры приводятся к структурам групп* G_3 I—VI.

2. *Если пространства $\overset{*}{T}_2\,(T_2)$ допускают группы движений G_3, действующие на V_3, то такими группами могут быть все разрешимые группы, за исключением* G_3 VII.

3. *Для пространств Эйнштейна первого типа структуры искомых групп G_3 приводятся к типам* G_3 I—V, VII—IX.

Из приведенных теорем следует, что пространствами Эйнштейна $\overset{*}{T}_i(T_i)$ могут допускаться все группы движений G_3, действующие на V_3. Воспользовавшись результатами § 25, заключаем, что искомые пространства Эйнштейна содержатся в классах метрик (25.3) — (25.6).

Все рассматриваемые группы G_3, за исключением $G_3\,\mathrm{IX}$, содержат подгруппы $G_2\,\mathrm{I}$, $G_2\,\mathrm{II}$, которые в свою очередь можно подразделить на два класса, смотря по тому, на каких поверхностях транзитивности они действуют $\left(V_2 \text{ или } \overset{*}{V}_2\right)$.

Если подгруппы $G_2\,\mathrm{I}$, II группы G_3 действуют на V_2, то метрики V_4, допускающие указанные G_3 с поверхностями транзитивности V_3, имеют вид (25.3) — (25.6), и никаких дополнительных условий на метрики пространств V_4 не накладывается. Уравнения поля, которые мы не приводим в силу их громоздкой записи, не интегрируются в конечном виде, и чтобы получить точное решение, нужно исходить из дополнительных требований физического или геометрического характера. Этот случай мы рассматривать не будем, лишь заметим, что в случае абелевой группы движений уравнения поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ были проинтегрированы в работе [557] (см. также § 14) и были найдены пространства $\overset{*}{T}$ и T.

Если же подгруппа $G_2\,\mathrm{I}$, II действует на $\overset{*}{V}_2$, то на метрики V_4, допускающие группы движений G_3 с такой подгруппой G_2, накладываются дополнительные условия вследствие *изотропности* поверхностей транзитивности подгруппы. Как мы увидим ниже, это приводит к тому, что две из шести функций a_{ij} обращаются в нуль и уравнения поля интегрируются в элементарных функциях. Рассмотрим этот случай подробнее.

1°. Пусть имеет место *подгруппа* $G_2\,\mathrm{I}$ *без особого оператора, действующая на* $\overset{*}{V}_2$. Тогда (§ 24) метрика может быть приведена к виду (24.13) или (24.14). Для (24.13) уравнение $R_{11} = 0$ сразу же приводит к требованию $a_{22} = 0$ — условию, противоречащему реальным полям тяготения. В случае (24.14), интегрируя уравнения структуры для разрешимых G_3, придем к группам, действующим на $\overset{*}{V}_3$ — случай уже рассмотренный.

2°. *Пусть имеем подгруппу* $G_2\,\mathrm{I}$ *на* $\overset{*}{V}_2$ *с особым оператором.* В этом случае пространства Эйнштейна содержатся среди метрик (24.12). Интегрируя уравнения структуры для третьего оператора, уравнения Киллинга и применяя допустимые преобразования координат, придем к метрике:

$$\begin{gathered} g_{11} = g_{12} = 0, \quad g_{13} = \alpha(x^4)\, e^{kx^3}, \quad g_{22} = \beta(x^4)\, e^{2nx^3}, \\ g_{23} = (\varepsilon\alpha x^3 + \gamma(x^4))\, e^{nx^3}, \quad g_{33} = \delta(x^4), \quad g_{44} = \pm 1, \quad g_{i4} = 0, \end{gathered} \tag{32.18}$$

где k, n, ε берутся из таблицы (25.2). Уравнения поля имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{\alpha''}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta'}{\beta}+2\varkappa e_4=0,\\
&2) \quad n\left(\frac{\beta'}{\beta}-\frac{\alpha'}{\alpha}\right)=0,\\
&3) \quad \frac{\beta''}{\beta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2+\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta'}{\beta}+2\varkappa e_4=0,\\
&4) \quad \gamma''-\frac{1}{2}\gamma'\frac{\beta'}{\beta}+\gamma\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\beta'}{\beta}+2\varkappa e_4\gamma=0,\\
&5) \quad \delta''-\delta'\left(\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\beta'}{\beta}\right)+\delta\left(\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2+2\varkappa e_4\right)-2ne_4(k-n)-\\
&\qquad -\left(\gamma\frac{\alpha'}{\alpha}-\gamma'\right)^2\beta^{-1}=0,\\
&6) \quad \frac{\alpha''}{\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\beta''}{\beta}-\frac{1}{4}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2+\varkappa e_4=0.
\end{aligned}
\tag{32.19}
$$

Эта система легко интегрируется; без труда определяется также и тип пространства Эйнштейна. Результаты мы приводим в табл. 1.

3°. *Пусть имеет место неабелева подгруппа* G_2, *действующая на* $\overset{*}{V_2}$. Подгруппу G_2 II содержат лишь группы G_3 III—VI, VIII. Применяя тот же метод для исследования групп G_3, что и в случае абелевой подгруппы, приходим к выводу:

1) *если* G_2 II *не имеет особого оператора, то не существует пространств* $\overset{*}{T_i}(T_i)$, *допускающих* G_3 *с такой подгруппой*; 2) *если у подгруппы* G_2 II *один из операторов особый, то искомые* G_3 *могут быть типа* III *и* VIII, *а метрики* V_4 *имеют вид*:

G_3 III

$$
ds^2=2a_{13}e^{-x^2}dx^1\,dx^3+a_{22}\,dx^{2^2}+2a_{23}\,dx^2\,dx^3+a_{33}\,dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2},
$$
$$
a_{ij}=a_{ij}(x^4)\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \tag{32.20}
$$

G_3 VIII

$$
ds^2=2\alpha e^{-x^2}dx^1\,dx^3-\frac{1}{2}\alpha\,dx^{2^2}\pm dx^{4^2},\ \alpha=\alpha(x^4). \tag{32.21}
$$

После интегрирования уравнений поля в случае G_3 III приходим к следующему классу пространств Эйнштейна $\overset{*}{T_2}$:

$$
\begin{aligned}
ds^2=(z^2-\lambda^2)^{-1}\big[2Ae^{-x^2}dx^1\,dx^3+\big(B\lambda^2\ln\big(z+\sqrt{z^2-\lambda^2}\big)-\\
-Bz^2(z^2-\lambda^2)+C\big)\,dx^{3^2}-e_4\,dx^{2^2}\big]+e_4\,dx^{4^2},
\end{aligned}
\tag{32.22}
$$
$$
z=-\lambda\,\mathrm{th}\frac{\lambda}{2}x^4,\quad \lambda=\pm 2\sqrt{-\frac{\varkappa}{3}e_4},\ e_4=\pm 1,
$$

а в случае G_3 VIII имеем пространство постоянной кривизны.

Таблица 1

	Группа	Метрика	Обозначения	Тип пространства
$\varkappa \neq 0$	I — III	$ds^2 = 2Ae^{\lambda x^4 + kx^3}\, dx^1\, dx^3 + Be^{\lambda x^4 + 2kx^3}\, dx^{2^2} + 2\left(Ce^{-\frac{\lambda}{2}x^4} + \varepsilon x^3 A e^{\lambda x^4}\right) e^{kx^3}\, dx^2\, dx^3 + D\left(e^{-\frac{\lambda}{2}x^4} + \frac{C^2}{2B} e^{-2\lambda x^4}\right) dx^{3^2} - dx^{4^2}$	$k,\ n,\ \varepsilon$ из (25.2), $A, \ldots, D = \text{const},\ \lambda = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{3}}$	$C \neq 0 - \overset{*}{T}_3,\ C = 0,$ $D \neq 0 - \overset{*}{T}_2,\ C = 0,$ $D = 0$ — простран. пост. крив.
	I — III	$ds^2 = (z^2 + q\lambda^2)^{-\frac{2}{3}} [2Ae^{kx^3}\, dx^1\, dx^3 + Bz^2\, dx^{2^2} + 2\varepsilon A x^3\, dx^2\, dx^3 + C \ln z\, dx^{3^2}] + e_4\, dx^{4^2}$	$k,\ n,\ \varepsilon$ из 00, $e_4 = \pm 1$, $q = 1;\ z = -\lambda \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4\right)$, $q = -1;\ z = \begin{cases} -\lambda \operatorname{th}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4\right), \\ -\lambda \operatorname{cth}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4\right), \end{cases}$ $\lambda = 2\sqrt{-\frac{\varkappa}{3} e_4}$	$C \neq 0 - \overset{*}{T}_2,$ $C = 0 - \overset{*}{T}_1$
$\varkappa = 0$	I — III	$ds^2 = z^{-4/3} [2Ae^{kx^3}\, dx^1\, dx^3 + Bz^2\, dx^{2^2} + 2\varepsilon A x^3\, dx^2\, dx^3 + C \ln z\, dx^{3^2}] + e_4\, dx^{4^2}$	$k,\ \varepsilon$ из (25.2), $e_4 = \pm 1$, $z = \frac{4}{3}(x^4)^{-1}$, $AB,\ C = \text{const}$	$C \neq 0 - T_2,$ $C = 0 - T_1$
	I — VI	$ds^2 = 2Ae^{kx^3}\, dx^1\, dx^3 + Be^{2kx^3}\, dx^{2^2} + 2(\varepsilon x^3 A + Cx^4 + D) e^{kx^3}\, dx^2\, dx^3 + (Px^{4^2} + Ex^4 + F)\, dx^{3^2} + e_4\, dx^{4^2}$	$k,\ n,\ \varepsilon$ из (25.2), $e_4 = \pm 1$, $P = \frac{C^2}{2B} + ne_4(k - n)$, $A, \ldots, F = \text{const}$	T_2
	I — III	$ds^2 = 2Ae^{kx^3}\, dx^1\, dx^3 + Bz^{-2}\, dx^{2^2} + 2\varepsilon x^3 A\, dx^2\, dx^3 + C \ln z\, dx^{3^2} + e_4\, dx^{4^2}$	$k,\ \varepsilon$ из (25.2), $e_4 = \pm 1$, $z = 2(x^4)^{-1}$, $A,\ B,\ C = \text{const}$	T_2

§ 33. Некоторые классы пространств Эйнштейна с группами движений G_2

Очевидно, что пространствами Эйнштейна $\overset{*}{T}_i\,(T_i)$ могут допускаться группы движений второго порядка обеих структур.

Если группы G_2 I, II имеют неизотропные поверхности транзитивности V_2, то искомые пространства Эйнштейна находятся среди пространств V_4, имеющих метрики (24.7), (24.8).

Определение пространств Эйнштейна в замкнутом виде в этом случае представляет собой довольно трудную задачу в рамках современного аппарата теории дифференциальных уравнений. Примером является нахождение метрики пространства T_3, допускающего группу G_2 II (см. § 30).

Если же группы G_2 I, II действуют на *изотропных* поверхностях транзитивности $\overset{*}{V}_2$, то имеет смысл рассмотреть уравнения поля для таких V_4, так как условие *изотропности* позволяет нам проинтегрировать эти уравнения в элементарных функциях.

Сразу же отметим, что случай групп G_2 (как абелевой, так и неабелевой) *без особого оператора* (см. (24.13), (24.14), (24.17)) отпадает, так как мы приходим после записи уравнений поля к противоречивому условию $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$.

Для групп G_2 *с особым оператором* имеем следующие пространства Эйнштейна:

G_2 I. $\varkappa = 0$

1) $$ds^2 = z^{2/3}(2Az^{-2}\,dx^1\,dx^3 + B\,dx^{2^2} + 2\,(Cz^{-2} + D)\,dx^2\,dx^3 + \\ + \left(\frac{9}{4}\,\frac{D^2}{B} + (F\ln z + E)\,z^{-2}\right)dx^{3^2}) + e_4\,dx^{4^2}, \qquad e_4 = \pm 1, \tag{33.1}$$

где $z = (p + x^4)^{-1}$, A, C, D, E, F, P — произвольные функции от x^3, $B = \mathrm{const}$.

2) $$ds^2 = 2A\,dx^1\,dx^3 + z^{-2}(B\,dx^{2^2} + 2\,(Cz^2 + D)\,dx^2\,dx^3) + \\ + (Ez^2\ln z + Fz^2 + \frac{1}{4}\,D^2B^{-1}\,dx^{3^2}\Big) + e_4\,dx^{4^2}, \qquad z = (P + x^4), \\ B = \mathrm{const}, \tag{33.2}$$

где A, C, D, E, F, P — произвольные функции от x^3.

3) $$ds^2 = 2A\,dx^1\,dx^3 + B\,dx^{2^2} + 2\,(Cx^4 + D)\,dx^2\,dx^3 + \\ + (Tx^{4^2} + Ex^4 + F)\,dx^{3^2} + e_4\,dx^{4^2}, \qquad e_4 = \pm 1, \\ T = \frac{1}{2}\left(\frac{B''}{B} - \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{A'}{A}\,\frac{B'}{B}\right), \tag{33.3}$$

где A, B, C, D, E, F — произвольные функции от x^3.

G_2 I, $\varkappa \neq 0$

$$1)\ ds^2 = 2Ae^{\lambda x^4} dx^1 dx^3 + Be^{\lambda x^4} dx^{2^2} + 2\left(Ce^{\lambda x^4} - De^{-\frac{\lambda}{2}x^4}\right) \times \\ \times dx^2 dx^3 + \left(Ee^{\lambda x^4} + Fe^{-\frac{\lambda}{2}x^4} + \frac{D^2}{2B} e^{-2\lambda x^4} + \right. \\ \left. + \frac{2e_4}{\lambda^2}\left(\frac{B''}{B} - \frac{1}{2}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 - \frac{A'}{A}\frac{B'}{B}\right)\right) dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}, \tag{33.4}$$

где A, B, C, D, E, F — произвольные функции от x^3,

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{\varkappa}{3}e_4}, \quad e_4 = \pm 1.$$

$$2)\ ds^2 = (z^2 + q\lambda^2)^{-2/3}(2A\,dx^1 dx^3 + Bz^2 dx^{2^2} + \\ + 2(C + Dz^2) dx^2 dx^3 + \left((E \ln z + F) + \frac{D^2}{B}(z^2 + q\lambda^2)\right) dx^{3^2}\Big) + \\ + e_4 dx^{4^2}, \qquad e_4 = \pm 1, \tag{33.5}$$

где $z = -\lambda \operatorname{tg}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4 + \omega\right)$, $\lambda = \pm 2\sqrt{\frac{\varkappa}{3}e_4}$, если $q = 1$ и

$$z = \begin{cases} -\lambda \operatorname{th}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4 + \omega\right), \\ -\lambda \operatorname{cth}\left(\frac{3}{4}\lambda x^4 + \omega\right), \quad \lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{\varkappa}{3}e_4}, \text{ если } q = -1, \end{cases}$$

A, C, D, E, F, ω — произвольные функции от x^3, а $B = \text{const}$.

Пространства Эйнштейна с группой G_2 II, действующей на $\overset{*}{V}_2$, должны обязательно иметь $\varkappa \neq 0$, иначе $\det(g_{\alpha\beta}) > 0$. Искомые пространства $\overset{*}{T}_i$ имеют следующую метрику:

$$ds^2 = (z^2 - \lambda^2)^{-1}(2Ae^{-x^3} dx^1 dx^3 - e_4 dx^{2^2} + 2B\,dx^2 dx^3 + \\ + \left(C \ln\left(z + \sqrt{z^2 - \lambda^2}\right) - Cz\sqrt{z^2 - \lambda^2} + D\right) dx^{3^2}) + e_4 dx^{4^2}, \tag{33.6}$$

$$z = \lambda \operatorname{th}\frac{\lambda}{2}x^4, \quad \lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{\varkappa}{3}e_4}, \quad e_4 = \pm 1, \quad A = A(x^3), \ \ldots, \\ D = D(x^3).$$

Среди найденных пространств Эйнштейна находятся поля тяготения всех трех типов, за исключением пространств T_3, метрика которых (см. § 30) допускает неабелеву G_2 с неизотропными поверхностями транзитивности.

Этим мы заканчиваем классификацию пространств Эйнштейна $\overset{*}{T}_i$ (T_i), допускающих группы движений G_r $(r \geqslant 2)$.

§ 34. Обзор результатов

Все известные в литературе решения уравнений поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ допускают некоторую группу движений G_r, поэтому естественно думать, что решения уравнений поля, допускающие некоторую группу движений, являются наиболее интересными с физической точки зрения. Это становится очевидным, если учесть прямую связь между симметриями пространственно-временнóго континуума и законами сохранения [273, 587].

Особенно интересными являются пространства с большой подвижностью, так как они отвечают наиболее простым и физически важным моделям распределения и движения материи. Так как для пространств первого типа максимальная подвижность приводит к пространствам постоянной кривизны (к пространству Минковского в случае пустого пространства-времени), то *в этом смысле* пространства максимальной подвижности второго и третьего типов можно считать некоторыми аналогами пространств постоянной кривизны (метрики Минковского в частном случае пустого пространства) и этот факт является не только формальным (см. § 30).

Так как всякие точечные преобразования, входящие в заданную группу движений, определяют автоморфизм в смысле отображения пространства-времени на себя, в результате которого материя и геометрия гравитационного поля будут описываться теми же формулами и уравнениями, что и до автоморфизма, то всякое описание гравитационного поля задается с точностью до автоморфизмов движения. В этом смысле *геометрия любого гравитационного поля является геометрией автоморфизмов движения пространства-времени.* Каждому гравитационному полю отвечает своя группа движений G_r, где $0 \leqslant r \leqslant 10$. В случае $r = 10$ получим пространство постоянной кривизны (при $R_{\alpha\beta} = 0$ — пространство Минковского с точностью до выбора системы координат), а при $r = 0$ пространство допускает лишь тождественное преобразование $\bar{x}^\alpha = x^\alpha$ и группа автоморфизмов совпадает с единицей группы.

Все известные в литературе решения можно охарактеризовать с этой точки зрения, но среди полученных в этой главе пространств имеются и такие, о существовании которых не было никаких предположений. К таким решениям относятся прежде всего пространства $\overset{*}{T}_2(T_2)$ и $\overset{*}{T}_3(T_3)$. Но и среди пространств $\overset{*}{T}_1(T_1)$ имеются неизвестные в литературе и обладающие рядом интересных свойств; стоит, например, отметить пространства T_1, допускающие просто-транзитивную группу движений G_4 с неравными друг другу стационарными кривизнами или пространства $\overset{*}{T}_i(T_i)$, допускающие группы второго порядка с *изотропными* поверхностями транзитивности, Удобнее всего классификацию пространств Эйнштейна по группам движений изобразить при помощи табл. 2. Двойная штриховка означает, что групп движений порядка r пространства Эйнштейна не допускают; одинарная штриховка показывает, что группа движений указанного порядка r не является полной, и поэтому указывается порядок полной группы движений.

Таблица 2

Тип	$\varkappa$	$7 \leqslant r \leqslant 10$	$r=6$			$r=5$			$r=4$			$r=3$				$r=2$			
			нетр *)		тр. **)	нетр		тр	нетр.		тр	$H_p=G_1$		$H_p=G_0$		I		II	
			$\overset{*}{V}_3$	V_3		$\overset{*}{V}_3$	V_3		$\overset{*}{V}_3$	V_3		$\overset{*}{V}_2$	V_2	$\overset{*}{V}_3$	V_3	$\overset{*}{V}_2$	V_2	$\overset{*}{V}_2$	V_2
I	$\varkappa=0$	← Пространство Минковского →								$T^{I}_{1,4}$	$T^{II}_{1,4}$	$T_{1,10}$	$T^{I}_{1,4}$	$T_{1,10}$	$T_{1,3}$	$T^{I}_{1,2}$	$T^{II}_{1,2}$		$T^{III}_{1,2}$
	$\varkappa \neq 0$	← Пространство постоянной кривизны →			$T^{*}_{1,6}$	$T^{*}_{1,10}$		$T^{*}_{1,6}$	$T^{*}_{1,10}$	$T^{*}_{1,4}$	$T^{*}_{1,6}$	$T^{*}_{1,10}$	$T^{*}_{1,4}$	$T^{*}_{1,10}$	$T^{*}_{1,3}$	$T^{*I}_{1,2}$	$T^{*II}_{1,2}$	$T^{*III}_{1,2}$	$T^{*IV}_{1,2}$
II	$\varkappa=0$				$T_{2,6}$	$T_{2,5}$			$T_{2,5}$	$T_{2,6}$	$T_{2,4}$	$T^{I}_{2,3}$		$T_{2,5}$	$T^{II}_{2,3}$	$T^{I}_{2,2}$	$T^{II}_{2,2}$		$T^{III}_{2,2}$
	$\varkappa \neq 0$							$T^{*}_{2,5}$		$T^{*}_{2,4}$	$T^{*}_{2,5}$	$T^{*I}_{2,3}$			$T^{*II}_{2,3}$	$T^{*I}_{2,2}$	$T^{*II}_{2,2}$	$T^{*III}_{2,2}$	$T^{*IV}_{2,2}$
III	$\varkappa=0$																		$T_{3,2}$
	$\varkappa \neq 0$										$T^{*}_{3,4}$				$T^{*}_{3,3}$	$T^{*I}_{3,2}$	$T^{*II}_{3,2}$	$T^{*III}_{3,2}$	$T^{*IV}_{3,2}$

*) „нетр." - нетранзитивная группа

**) „тр." - транзитивная группа

Из этой схемы непосредственно следует отмеченный выше важный факт: *пространства* T_2 *и* T_3 *не могут быть плоскими, а пространства* $\overset{*}{T}_2$ *и* $\overset{*}{T}_3$ — *пространствами постоянной кривизны*. Наиболее богатым по числу различных классов пространств, допускающих движения, является первый тип. Эти пространства имеют наиболее симметрическую структуру тензора кривизны и являются характерными для задач релятивистской космологии — области, где в основном до сих пор и применялась теория релятивистской гравитации. Может быть, именно этим объясняется тот факт, что почти все известные решения относятся к классу пространств $T_{1,r}$ ($r = 2, 3, 4$).

Приведем классификацию основных известных решений уравнений поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, выяснив их тип и порядок допускаемой группы движений (см. § 14).

1. Решение Шварцшильда (14.1) для центрально-симметрического поля. Как показано в (§ 31), оно относится к пространствам (31.23) с неразрешимой группой G_4 VIII, когда ее нормальный делитель G_3 IX действует на двумерных неизотропных поверхностях транзитивности постоянной кривизны.

2. Решение Коттлера (14.2) является обобщением решений Шварцшильда на тот случай, когда уравнения имеют вид $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, $\varkappa \neq 0$— имеет место та же группа движений.

3. Решение Вейля и Леви-Чивита (14.3) — статическое с осевой симметрией. Так как решение зависит только от двух переменных x^3 и $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$, то имеют место два оператора группы движений, которые в некоторой системе координат могут быть записаны в виде: $x_s = \rho_s$ $(s = 1, 2)$ и, следовательно, определяют абелеву G_r, которая действует на неизотропных поверхностях транзитивности. Кроме того, так как это решение найдено при условии, что μ и ν стремятся к нулю на бесконечности, то это пространство способно вырождаться в плоское. Но только пространство T_1 может обладать таким свойством. Таким образом, имеем $T_{1,2}$ с абелевой группой G_2, действующей на V_2.

4. Решение Бринкмана для $n = 4$ определяет $T_{1, 10}$.

5. Решение Казнера определяет пространство $T_{1, 4}$ с нетранзитивной группой движений G_4 VI_4.

6. Решение Миттера является частным случаем решения Вейля и Леви-Чивита без повышения подвижности.

7. Решение Дельсарта представляет собой частный интеграл системы уравнений поля Вейля и Леви-Чивита. Подвижность не повышается. Характеристика λ-матрицы имеет вид [(11) 1; (11) 1].

8. Решение (14.6) определяет $T_{1, 4}$ с группой G_4 VIII.

9. Всякое приводимое пространство (14.7) или (14.8), когда $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, $\varkappa \neq 0$, имеет 6-членную группу движений (§ 30); если же $\varkappa = 0$, приходим к плоским пространствам $T_{1, 10}$.

10. Решение Нарликара и Кармаркара (14.12) приводится к решению Казнера.

11. Решение Эйнштейна и Розена допускает два очевидных оператора $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, определяющих абелеву G_2. Если же записать уравнения Киллинга для заданной метрики и потребовать, чтобы они допускали решение, отличное от $\xi^\alpha = C_1\delta_1^\alpha + C_2\delta_2^\alpha$, C_1, $C_2 = \mathrm{const}$, то это возможно только при наложении на метрический тензор некоторых дополнительных условий, не являющихся следствиями уравнений поля. Отметим, что решение Эйнштейна—Розена определяется при следующих дополнительных условиях: 1) пространство допускает 4-ортогональную систему координат, 2) допускает абелеву группу движений G_2, 3) $g_{11} = -g_{44}$, 4) сигнатура метрики $(---+)$. Более подробное исследование этих пространств проведено в § 62.

Очевидно, что любое решение можно охарактеризовать по этому принципу, и поэтому, резюмируя, можно утверждать, что классификация полей гравитации $\overset{*}{T}_i$ и T_i по трем типам тензора кривизны, дополненная классификацией по группам движений приводит к инвариантной характеристике рассматриваемых полей тяготения и позволяет подойти к выяснению физического смысла полей тяготения $\overset{*}{T}$ и T.

Задачи

1. Доказать, что в симметрических пространствах T_2 $(k_1 = k_2 = 0)$ существует поле ковариантно-постоянного поля l^α, образующего изотропно-геодезическую конгруэнцию.

2. Записать уравнения поля $(R_{\alpha\beta} = 0)$ для метрик (26.26) и (26.30). Показать, что в этих классах пространств содержатся пространства второго типа.

3. Найти условия, при которых метрика (30.1) переходит в плоскую $(R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0)$.

4. Определить пространства T_2, относящиеся к классу максимально-подвижных при $a = 0$, $b \neq 0$ (см. (30.22) — (30.24)).

5. Показать, что пространство (31.4) является пространством T_1 с постоянными стационарными кривизнами.

6. Найти операторы групп движений для метрики (31.25) с условиями (31.26). Показать, что полной группой движения является группа G_6.

Глава VI

Конформное отображение пространств Эйнштейна

§ 35. Конформное отображение римановых пространств

Если заданы два римановых пространства V_n с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}(x)$ и $\overset{*}{V}_n$ с тензором $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x)$, причем

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}(x) = e^{2\sigma} g_{\alpha\beta}(x), \quad \sigma = \sigma(x), \tag{35.1}$$

то будем говорить, что между V_n и $\overset{*}{V}_n$ имеется *конформное соответствие* и что эти два многообразия *конформны*; соотношение (35.1) является необходимым и достаточным условием конформности V_n и $\overset{*}{V}_n$. Геометрический смысл этого определения заключается в том, что если имеет место (35.1), то в точках V_n и $\overset{*}{V}_n$, имеющих одинаковые координаты, длины векторов с компонентами dx^α различаются множителем, зависящим только от выбора точки, а из формулы (2.4) следует, что углы между двумя соответствующими направлениями в соответствующих точках равны — *отображение* V_n на $\overset{*}{V}_n$ *конформное*.

Пользуясь (35.1), легко установить зависимость между контравариантными компонентами метрических тензоров, коэффициентами римановых связностей, тензорами кривизны и т. д.

Непосредственно из определения $g^{\alpha\beta}$ и формулы (35.1) получаем:

$$\overset{*}{g}{}^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma} g^{\alpha\beta}. \tag{35.2}$$

Из формул (3.1) и (3.2), определяющих символы Кристоффеля первого и второго рода, и формул (35.1), (35.2) следуют соотношения

$$\overset{*}{\Gamma}_{\alpha,\beta\gamma} = e^{2\sigma}(\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + g_{\alpha\beta}\sigma_{,\gamma} + g_{\alpha\gamma}\sigma_{,\beta} - g_{\beta\gamma}\sigma_{,\alpha}), \tag{35.3}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\sigma_{,\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\sigma_{,\beta} - g_{\beta\gamma}g^{\alpha\tau}\sigma_{,\tau}, \tag{35.4}$$

где $\sigma_\alpha \equiv \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha} \equiv \sigma_{,\alpha}$ ([88], стр. 112). Для того чтобы установить зависимость между тензорами кривизны пространств V_n и $\overset{*}{V}_n$, достаточно в формуле (5.7) заменить $g_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\sigma,\alpha\beta}$ через $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\Gamma}_{\sigma,\alpha\beta}$, пользуясь выражениями (35.1), (35.2) и (35.3), и выразить правую часть через σ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Эти несложные выкладки приводят к выражению

$$e^{-2\sigma}\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\alpha\beta\gamma\delta}+g_{\alpha\delta}\sigma_{\beta\gamma}+g_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\delta}-g_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta}-\\-g_{\beta\delta}\sigma_{\alpha\gamma}+\Delta_1\sigma\,(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}-g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}),\qquad(35.5)$$

где для краткости введено обозначение $\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{,\alpha\beta}-\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}$ $(\sigma_\alpha=\sigma_{,\alpha})$, а $\Delta_1\sigma$ — первый оператор Бельтрами, определяемый формулой (3.18). Отсюда, производя свертывание в (35.5) по индексам α, δ с тензором $\overset{*}{g}^{\alpha\delta}$, определяемым (35.2), получим соотношение, связывающее тензоры Риччи отображаемых пространств:

$$\overset{*}{R}_{\beta\gamma}\overset{\text{def}}{=}\overset{*}{g}^{\alpha\delta}\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=R_{\beta\gamma}+(n-2)\,\sigma_{\beta\gamma}+[\Delta_2\sigma+(n-2)\,\Delta_1\sigma]\,g_{\beta\gamma},\qquad(35.6)$$

где $\Delta_2\sigma$ — второй оператор Бельтрами (см. (3.18)). Производя еще одно свертывание, получим, наконец, формулу, устанавливающую зависимость между скалярными кривизнами V_n и $\overset{*}{V}_n$:

$$\overset{*}{R}\overset{\text{def}}{=}\overset{*}{g}^{\beta\gamma}\overset{*}{R}_{\beta\gamma}=e^{-2\sigma}\,[R+2\,(n-1)\,\Delta_2\sigma+(n-1)\,(n-2)\,\Delta_1\sigma].\qquad(35.7)$$

Наличие в правой части этого равенства целочисленных коэффициентов приводит к необходимости специального рассмотрения случаев $n=1$ и $n=2$, но оба эти предположения приводят к тривиальным выводам. Случай $n=1$, очевидно, не представляет интереса, а $n=2$ также исключается из рассмотрения, так как любые бинарные квадратичные формы при любой сигнатуре приводятся к виду $\lambda\,(e_1\,dx^{1^2}+e_2\,dx^{2^2})$, e_1, $e_2=\pm 1$, и, следовательно, любые два V_2 конформны друг другу ([170], стр. 477), если их сигнатура одинакова. Конформное соответствие устанавливается, конечно, на вещественном пути. Ввиду этого будем предполагать, что $n>2$.

Для изучения конформных римановых пространств полезно ввести специальный *тензор конформной кривизны*, введенной в рассмотрение Вейлем ([168], стр. 384—411).

Для определения этого тензора заметим, что в силу (35.1) равенство (35.7) можно также записать в виде:

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{R}=[R+2\,(n-1)\,\Delta_2\sigma+(n-1)\,(n-2)\,\Delta_1\sigma]\,g_{\alpha\beta}.\qquad(35.8)$$

Исключая из (35.6) и (35.8) второй оператор Бельтрами $\Delta_2\sigma$, найдем:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{n-2}\,(\overset{*}{R}_{\alpha\beta}-R_{\alpha\beta})-\frac{1}{2\,(n-1)\,(n-2)}\,(\overset{*}{R}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}-Rg_{\alpha\beta})-\frac{1}{2}\Delta_1\sigma g_{\alpha\beta}.\qquad(35.9)$$

Если, пользуясь (35.2), поднять в (35.5) один индекс, то зависимость между смешанными компонентами тензоров кривизны будет выражаться соотношением

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + \delta^{\alpha}_{\delta}\sigma_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\sigma_{\beta\delta} + g^{\alpha\nu}(g_{\beta\gamma}\sigma_{\nu\delta} - g_{\beta\delta}\sigma_{\nu\gamma}) + \\ + \Delta_1\sigma(\delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}). \quad (35.10)$$

Введем теперь в рассмотрение геометрический объект

$$C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{n-2}(\delta^{\alpha}_{\gamma}R_{\beta\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}R_{\beta\gamma} + R^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta} - R^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}) - \\ - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}), \quad (35.11)$$

который в силу своей конструкции является тензором; назовем его тензором *конформной кривизны*. Нетрудно убедиться, что (см. задачу 3 § 5) *в любом V_3 тензор конформной кривизны равен нулю.*

Теперь из (35.10), если исключить тензор $\sigma_{\alpha\beta}$ при помощи (35.9), приходим к соотношению, характерному для римановых многообразий, находящихся в конформном соответствии:

$$\overset{*}{C}{}^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = C^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}. \quad (35.12)$$

Задачи

1. Показать, что если обозначить

$$R_{\beta\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} R_{\beta\gamma,\,\delta} - R_{\beta\delta,\,\gamma} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{\beta\delta}R_{,\,\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{,\,\delta}),$$

$$R^{\sigma}{}_{\gamma\delta} = g^{\sigma\alpha}R_{\alpha\gamma\delta},$$

то для ковариантной производной тензора конформной кривизны имеют место соотношения

$$C^{\alpha}{}_{\beta(\gamma\delta,\,\sigma)} = \frac{1}{n-2}\left(R_{\beta[\delta\sigma}\delta^{\alpha}_{\gamma]} + g_{\alpha[\delta}R^{\alpha}{}_{\gamma\sigma]}\right). \quad (35.13)$$

2. Показать также, что

$$R^{\sigma}{}_{\sigma\alpha} = 0, \quad C^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma,\,\sigma} = \frac{n-3}{n-2}R_{\alpha\beta\gamma}. \quad (35.14)$$

3. Для того чтобы V_3 можно было конформно отобразить на S_3, необходимо и достаточно, чтобы тензор

$$R_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad ([58], \text{ стр. } 80). \quad (35.15)$$

4. Для того чтобы V_n $(n > 3)$ было конформно S_n, необходимо и достаточно, чтобы

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad ([58], \text{ стр. } 80). \quad (35.16)$$

5. Показать при $n > 2$, что наиболее общее конформное отображение евклидова пространства на самого себя может быть представлено как произведение инверсий относительно гиперсферы, движений и преобразований подобия ([14], стр. 375, 376).

§ 36. Конформное отображение римановых пространств на пространства Эйнштейна

Вопрос о конформном отображении римановых пространств на пространства Эйнштейна является естественным обобщением вопроса о конформно-плоских римановых многообразиях.

Он был поставлен и в основном решен Бринкманом [76], [80], [85] и рассматривался затем рядом других авторов [128], [127], [143], [144], [153], [152], [151], [181], [196], [199].

Будем далее предполагать, что V_n является пространством Эйнштейна и $n > 3$. Следовательно,

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = \frac{\overset{*}{R}}{n} \overset{*}{g}_{\alpha\beta}, \quad \overset{*}{R} = \mathrm{const}. \tag{36.1}$$

Предварительно перепишем соотношения (35.6) и (35.7) в той форме, которая получится, если ввести в рассмотрение тензор

$$\omega_{\alpha\beta} = \sigma_{,\alpha\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \frac{1}{2}\Delta_1\sigma g_{\alpha\beta} \tag{36.2}$$

и скаляр

$$\omega = g^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}.$$

Тогда из (35.6) следует, что

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + (n-2)\,\omega_{\alpha\beta} + \omega g_{\alpha\beta} \tag{36.3}$$

и, следовательно,

$$e^{2\sigma}\overset{*}{R} = R + 2(n-1)\,\omega. \tag{36.3$'$}$$

Так как тензор Риччи пространства Эйнштейна удовлетворяет условию (36.1), то из (36.3) получим соотношение

$$\omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2(n-1)} g_{\alpha\beta}\right) = \frac{\overset{*}{R}e^{2\sigma}}{2n(n-1)} g_{\alpha\beta}. \tag{36.4}$$

Чтобы получить искомые дифференциальные уравнения в более удобной форме, обозначим второе слагаемое левой части (36.4) через $\tau_{\alpha\beta}$ так, что при этом тензор

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{n-2}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2(n-1)} g_{\alpha\beta}\right).$$

Тогда (36.4) вследствие (36.2) можно записать при помощи уравнений

$$\sigma_{,\alpha\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \nu g_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}, \tag{36.5}$$

где

$$\nu = \frac{1}{2}\Delta_1\sigma - \frac{\overset{*}{R}}{2n(n-1)} e^{2\sigma}, \quad \overset{*}{R} = \mathrm{const}. \tag{36.6}$$

Эту систему можно представить в более удобной форме, если записать при помощи (36.5) и (36.6) производную скаляра ν в виде:

$$\nu_{,\alpha} = \nu\sigma_{,\alpha} + \sigma_{,\rho}\tau^{\rho}_{\alpha}. \tag{36.7}$$

Если скаляры σ и ν будут удовлетворять уравнениям (36.5) и (36.7), то и (36.6) будет удовлетворено такими σ и ν при некотором постоянном $\overset{*}{R}$. В (36.5) и (36.6) $\sigma_{,\alpha}$, по определению, *градиентный* вектор. Можно, однако, вместо системы уравнений (36.5), (36.7) рассматривать систему

$$\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_\alpha\sigma_\beta + \nu g_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}, \tag{36.8}$$

$$\nu_{,\alpha} = \nu\sigma_\alpha + \sigma_\beta\tau^{\beta}_{\alpha}, \tag{36.9}$$

где σ_α уже необязательно градиентное векторное поле, а скаляр ν произвольный. В самом деле, если из (36.8) найдем вектор σ_α, то он, очевидно, должен удовлетворять условию

$$\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_{\beta,\alpha} = 0,$$

т. е. будет выполняться условие градиентности, и поэтому можно будет положить $\sigma_\alpha = \sigma_{,\alpha}$.

После этого ν и σ будут удовлетворять (36.5) и (36.7). Функция σ определяется при заданных компонентах $\sigma_{,\alpha}$ с точностью до *несущественной* постоянной. Для того чтобы конформное отображение V_n на $\overset{*}{V}_n$ было возможно, необходимо, чтобы система уравнений (36.8), (36.9) была совместна. Наложим условия интегрируемости на уравнения (36.8) и для этого продифференцируем их еще раз ковариантно, проальтернируем по индексам дифференцирования и применим тождества Риччи (5.13). Тогда, используя (36.8) и (36.9), получим:

$$\sigma^{\rho}C_{\rho\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma}, \tag{36.10}$$

где $C_{\rho\alpha\beta\gamma}$ — тензор конформной кривизны, определяемый формулой (35.11), который можно записать также в виде:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha\delta}\tau_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}\tau_{\beta\delta} + g_{\beta\gamma}\tau_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}\tau_{\alpha\gamma}, \tag{36.11}$$

а

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \tau_{\alpha\beta,\gamma} - \tau_{\alpha\gamma,\beta}, \quad \sigma^{\alpha} = g^{\alpha\rho}\sigma_\rho. \tag{36.12}$$

Система будет совместна, с максимальным произволом в решении, в том случае, если условия интегрируемости (36.10) удовлетворяются тождественно при любых σ^{ρ}. Но это означало бы, что коэффициенты при σ^{ρ} тождественно равны нулю: $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, и следовательно, $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$, что приводит к *конформно-плоским* $\overset{*}{V}_n$ (см. задачи 3, 4 § 35). Отбрасывая этот тривиальный случай, необходимо предположить, что (36.10) выполняются не тождественно и, следовательно, кроме этих уравнений, необходимо рассматривать еще систему условий, которые получатся, если (36.10) дифференцировать ковариантно. Этот процесс последовательного дифференцирования получаемых условий совместности нужно продолжать до тех пор, пока он или приведет к противоречию, или оборвется, так как последующие условия обращаются в тождества в силу предыдущих.

Как второй шаг в процессе нахождения полного ряда условий совместности, продифференцируем ковариантно условия совместности (36.10) и упростим полученные выражения при помощи уравнений исходной системы (36.8), (36.9). Тогда вторая серия условий совместности будет иметь вид:

$$\sigma^{\rho}(C_{\rho\alpha\beta\gamma,\,\delta} + g_{\rho\delta}S_{\alpha\beta\gamma}) - \nu C_{\delta\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma,\,\delta} - \tau_{\rho\delta}C^{\rho}_{\alpha\beta\gamma}. \qquad (36.13)$$

Если заметить, что $\tau_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta\gamma}$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ не зависят от неизвестных σ_{α} и ν, то легко видеть, что при последующих дифференцированиях (36.13), продолженных как угодно далеко, и при использовании той же замены $\sigma_{\alpha,\,\beta}$ и $\nu_{,\,\alpha}$ через их выражения из уравнений основной системы получим, что все последующие серии условий совместности также будут иметь структуру

$$\sigma^{\rho}A_{\rho} - \nu B = T, \qquad (36.14)$$

где A_{ρ}, B, T — тензоры валентности $q+4$, $q+3$, $q+3$ соответственно. Так, полагая $q=0$, 1, получим или (36.10), или (36.13). Нетрудно установить рекуррентные формулы, позволяющие по q-м условиям совместности получать $(q+1)$-е. Их можно получить, если еще раз продифференцировать (36.14). Если искомую $(q+1)$-ю серию снабдить коэффициентами $\tilde{A}^{\rho}$, $\tilde{B}$, $\tilde{T}$, то

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{\rho} &= A^{\rho}_{,\,\pi} + \delta^{\rho}_{\pi}T - B\tau^{\rho}_{\pi}, \\ \tilde{B} &= B_{,\,\pi} + A_{\pi}, \\ \tilde{T} &= T_{,\,\pi} - A^{\rho}\tau_{\rho\pi}. \end{aligned} \qquad (36.15)$$

Таким образом, приходим к выводу: *для того чтобы V_n конформно отображалось на пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$, совокупность всех серий условий совместности* (36.14) *должна образовывать систему уравнений, совместных относительно* σ_{α} *и* ν.

В общем случае V_n не конформно к пространству Эйнштейна; только что доказанная теорема дает необходимые условия для существования конформного соответствия. Для того чтобы получить систему необходимых и достаточных условий, обозначим q-ю серию условий совместности (36.14) через S_q и рассмотрим всю систему условий совместности

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_p,\ \ldots \qquad (36.16)$$

Если, начиная с некоторого номера, эта система становится несовместной относительно неизвестных σ_α и ν, то соответствующие V_n не допускают конформного отображения на пространство Эйнштейна. Таким образом, V_n, допускающим такое отображение, отвечает тот случай, когда, начиная с некоторого номера p, любое решение для $S_0, \ldots, S_p$ будет также решением S_{p+1}. Покажем предварительно, что имеет место утверждение: *если система* (36.16) *до номера* p *имеет только* r *линейно независимых решений и все они удовлетворяют условиям* S_{p+1}, *то система дифференциальных уравнений* (36.8), (36.9) *совместна и ее решение содержит* $(r-1)$ *произвольных постоянных.*

Предположим, что σ_α и ν удовлетворяют уравнениям S_q и S_{q+1}. Тогда, учитывая вид коэффициентов (36.15) и тот факт, что дифференцирование S_q приводит к S_{q+1} при помощи соотношения

$$A^\rho\left(\sigma_{\rho,\alpha}-\sigma_\rho\sigma_\alpha+\nu g_{\rho\alpha}-\tau_{\rho\alpha}\right)-B\left(\nu_{,\alpha}-\nu\sigma_\alpha-\sigma_\rho\tau^\rho_\alpha\right)+\\+\left(\sigma_\rho\tilde{A}^\rho-\nu\tilde{B}-\tilde{T}\right)=0,$$

получим:

$$A^\rho\left(\sigma_{\rho,\alpha}-\sigma_\rho\sigma_\alpha+\nu g_{\rho\alpha}-\tau_{\rho\alpha}\right)-B\left(\nu_{,\alpha}-\nu\sigma_\alpha-\sigma_\rho\tau^\rho_\alpha\right)=0. \quad (36.17)$$

Обозначая через $\tilde{S}_q$ однородное уравнение, соответствующее S_q,

$$A^\rho\sigma_\rho-\nu B=0,$$

видим, что

$$\sigma_{\rho,\alpha}-\sigma_\rho\sigma_\alpha+\nu g_{\rho\alpha}-\tau_{\rho\alpha},\quad \nu_{,\alpha}-\nu\sigma_\alpha-\sigma_\rho\tau^\rho_\alpha$$

определяют решение $\tilde{S}_q$ при любом α.

Предположим сначала, что существует единственное решение системы (36.11), т. е. $r=1$. Если это решение будет σ_α, ν, то оно также должно удовлетворять S_{p+1}.

Тогда однородная система уравнений $\tilde{S}_0, \tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_p$ несовместна, а сделанный выше вывод показывает, что σ_α и ν удовлетворяют (36.8) и (36.9), т. е. теорема имеет место.

Пусть теперь $r>1$, полная система линейно независимых решений однородной системы $\tilde{S}_0, \ldots, \tilde{S}_p$ имеет вид $\sigma^{(\rho)}_\alpha$, $\nu^{(\rho)}$ $(\rho=1, \ldots \ldots, r-1)$. Пусть $\overset{*}{\sigma}_\alpha$, $\overset{*}{\nu}$ — любое частное решение неоднородной системы (36.16). Тогда из (36.17) следует:

$$\overset{*}{\sigma}_{\alpha,\beta}-\overset{*}{\sigma}_\alpha\overset{*}{\sigma}_\beta+\overset{*}{\nu}g_{\alpha\beta}-\tau_{\alpha\beta}=\sum_\rho\mu^{(\rho)}_\beta\sigma_{\alpha,(\rho)}, \quad (36.18)$$

$$\overset{*}{\nu}_{,\beta}-\overset{*}{\nu}\overset{*}{\sigma}_\beta-\overset{*}{\sigma}_\lambda\tau^\lambda_\beta=\sum_\rho\mu^{(\rho)}_\beta\nu^{(\rho)}. \quad (36.19)$$

Если в эти уравнения подставить вместо $\overset{*}{\sigma}_\alpha$, $\overset{*}{\nu}$ выражения $\overset{*}{\sigma}_\alpha + \sigma^{(\rho)}_\alpha$, $\overset{*}{\nu} + \nu^{(\rho)}$ и из полученных таким образом уравнений вычесть соответственно (36.18) и (36.19), то придем к уравнениям

$$\sigma^{(\rho)}_{\alpha,\,\beta} - \overset{*}{\sigma}_\alpha \sigma^{(\rho)}_\beta + \nu^{(\rho)} g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma \chi^{(\sigma\rho)}_\beta \sigma^{(\sigma)}_\alpha, \tag{36.20}$$

$$\nu^{(\rho)}_{,\,\beta} - \sigma^{(\rho)}_\beta \overset{*}{\nu} - \sigma^{(\rho)}_\lambda \tau^\lambda_\beta = \sum_\sigma \chi^{(\sigma\rho)}_\beta \nu^{(\sigma)}, \tag{36.21}$$

где $\sigma, \rho = 1, \ldots, r-1$. Используя метод вариации, положим, что

$$\sigma_\alpha = \overset{*}{\sigma}_\alpha + \sum_\rho b^{(\rho)} \sigma^{(\rho)}_\alpha, \quad \nu = \overset{*}{\nu} + \sum_\rho b^{(\rho)} \nu^{(\rho)} \quad (\rho = 1, \ldots, r-1), \tag{36.22}$$

и поставим задачей определить функции $b^{(\rho)}$ так, чтобы σ_α и ν, определяемые таким образом, удовлетворяли уравнениям (36.8) и (36.9). Подставляя (36.22) в (36.8) и (36.9), придем к выводу, что искомые функции $b^{(\rho)}$ должны удовлетворять системе

$$b^{(\rho)}_{,\alpha} + \mu^{(\rho)}_\alpha + \sum_\sigma b^{(\sigma)} \chi^{(\sigma\rho)}_\alpha - b^{(\rho)} \sigma_\alpha = 0, \tag{36.23}$$

где σ_α берется из (36.22). Остается убедиться, что система (36.23) вполне интегрируема. Доказательство этого факта основывается на использовании уравнений (36.18) — (36.21) (см. задачу 1 § 35). Этим завершается доказательство теоремы. Таким образом, имеем следующий основной результат [80]: *для того чтобы V_n конформно отображалось на пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$ и такое отображение осуществлялось с помощью* σ, ν, *зависящих от* $r-1$ *произвольного параметра, необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число* $p > 0$, *для которого система* (36.16) *имела бы* r *линейно независимых решений и все эти решения удовлетворяли бы* S_{p+1} *из серии условий совместности.*

Как уже отмечалось выше, при получении уравнений (36.8), (36.9) скаляр σ определяется с точностью до произвольной постоянной. За счет этого можно попытаться уточнить выбор $\overset{*}{R}$ скалярной кривизны пространства Эйнштейна. Когда $r = 1$, то, согласно доказанной выше теореме, $\overset{*}{R}$ придется взять такой, какой она получается. Если же $r > 1$, то, имея $\overset{*}{R} \neq 0$, полученное одним из возможных способов отображения, и имея произвольные параметры, можно поставить вопрос о приведении $\overset{*}{R}$ к наперед заданному *ненулевому* значению. Можно также поставить вопрос о возможности приведения $\overset{*}{R}$ к нулю.

Ответом на эти вопросы является утверждение: *если* $r > 1$, *то всегда можно определить такое отображение, при котором*

$\overset{*}{R}=0$; *для определения отображения, при котором* $\overset{*}{R}\neq 0$, *достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие*

$$g^{\alpha\beta}\xi_\alpha\eta_\beta\neq 0,$$

где ξ_α, $\overset{1}{\nu}$ *и* η_α, $\overset{2}{\nu}$ — *некоторые два решения* (*может быть, одинаковые*) *однородной системы* $\tilde{S}_0$, $\tilde{S}_1$, ..., $\tilde{S}_p$.

В самом деле, $\overset{*}{\sigma}_\alpha=\overset{*}{\sigma}_{,\alpha}$, $\overset{*}{\nu}$ и $\overset{*}{\sigma}{}^{(\rho)}_{,\alpha}=\overset{*}{\sigma}_{,\alpha}+\sigma^{(\rho)}_\alpha$, $\overset{*}{\nu}{}^{(\rho)}=\overset{*}{\nu}+\nu^{(\rho)}$ удовлетворяют уравнениям (36.8), (36.9), так что $\overset{*}{\sigma}$ и $\overset{*}{\sigma}{}^{(\rho)}$ определяют конформные отображения, которым отвечают скалярные кривизны R и $R^{(\rho)}$. Положим:

$$\sigma^{(\rho)}=\overset{*}{\sigma}{}^{(\rho)}-\overset{*}{\sigma}.$$

Теперь определяем $b^{(\rho)}$ в уравнениях вида (36.22) так, чтобы σ_α и ν удовлетворяли уравнениям (36.8), (36.9). Если через $\overset{*}{R}$ обозначить соответствующую скалярную кривизну, то нетрудно убедиться, что будет иметь место соотношение

$$\sum_{\sigma,\,\rho} b^{(\sigma)}b^{(\rho)}\Delta\left(\sigma^{(\rho)},\ \sigma^{(\sigma)}\right)+\sum_{\sigma} D^{(\sigma)}b^{(\sigma)}+\frac{\tilde{R}}{n(n-1)}\,e^{2\overset{*}{\sigma}}=\frac{\overset{*}{R}}{n(n-1)}\,e^{2\sigma},$$

где

$$\Delta\left(\sigma^{(\rho)},\ \sigma^{(\sigma)}\right)=g^{\alpha\beta}\sigma^{(\rho)}_{,\alpha}\sigma^{(\sigma)}_{,\beta},$$

$$D^{(\sigma)}=-\Delta_1\sigma^{(\sigma)}+\frac{e^{2\overset{*}{\sigma}}}{n(n-1)}\left[\tilde{R}-R^{(\sigma)}e^{2\sigma^{(\sigma)}}\right].$$

Отсюда непосредственно следует, что, выбирая подходящим образом начальные значения $b^{(\rho)}$, можно в качестве $\overset{*}{R}$ выбрать наперед заданную величину, но только в том случае, если

$$\Delta\left(\sigma^{(\rho)},\ \sigma^{(\sigma)}\right)\neq 0 \qquad (\sigma,\ \rho=1,\ \ldots,\ r-1),$$

$$R=R^{(\rho)}\neq 0 \qquad (\rho=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1),$$

откуда следует справедливость доказываемого утверждения.

В частном случае, когда $n=4$, существенной является следующая лемма: *при* $n=4$ *из уравнения*

$$\sigma^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0 \tag{36.24}$$

следует, что или

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0, \tag{36.25}$$

или

$$g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta=0. \tag{36.26}$$

Для доказательства можно применить следующее рассуждение, предложенное Схоутеном. Уравнение (36.24) эквивалентно утверждению, что тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ принадлежит трехмерному пространству, ортогональному к вектору σ^{α}. Предполагая, что этот вектор неизотропный и, следовательно, (36.26) не имеет места, получим, что гиперповерхность, в которой определен тензор $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, неизотропная (см. § 7), т. е. она несет на себе риманову геометрию V_3 с невырожденным метрическим тензором.

В V_3 любой тензор P_{ijkl}, обладающий алгебраическими свойствами тензора кривизны, всегда может быть представлен (см. задачу 8 § 7) в виде:

$$P_{ijkl} = g_{ik}Q_{jl} - g_{il}Q_{jk} + g_{jl}Q_{ik} - g_{jk}Q_{il},$$

где Q_{ij} — симметрический тензор. Если, кроме того, известно, что $g^{jl}P_{ijkl} = 0$, то тензор $P_{ijkl} = 0$. В применении к рассматриваемому случаю, замечаем, что тензор конформной кривизны обладает всеми перечисленными для P_{ijkl} свойствами и, следовательно, $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

Поэтому при $n = 4$ существенным становится вопрос о том, будет ли градиентное поле σ_{α} изотропным или нет. В соответствии с этим можно различать два случая:

$$\alpha)\quad \Delta_1\sigma \overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} \neq 0,$$

когда мы будем говорить, что отображение *неизотропное*, и случай

$$\beta)\quad \Delta_1\sigma \equiv 0,$$

отвечающий *изотропному* отображению.

Если метрика V_4 определенная и отображение осуществляется при помощи вещественных функций, то случай β) становится невозможным. При неопределенной метрике оба эти случая возможны и требуют специального рассмотрения.

Задачи

1. Показать, что система (36.23) вполне интегрируема.

2. Для того чтобы не конформно-плоское V_4 можно было конформно отобразить неизотропным образом на пространство Эйнштейна, необходимо и достаточно, чтобы уравнение S_0 имело решение (необходимо единственное), которое с некоторым скаляром ν (также необходимо единственным) удовлетворяло бы S_1 и S_2. Доказать. (Бринкман [80], стр. 278.)

3. Не конформно-плоское V_4, не являющееся пространством Эйнштейна, для которого (см. (36.10) и (36.12)) $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$, не может быть отображено неизотропным образом на пространство Эйнштейна. Доказать ([80], стр. 278.).

§ 37. Отображение пространств Эйнштейна на пространства Эйнштейна. Неизотропный случай

Если не только $\overset{*}{V}_n$, но и V_n является пространством Эйнштейна, то

$$R_{\alpha\beta}=\frac{R}{n}g_{\alpha\beta},\quad R=\text{const}. \tag{37.1}$$

Простейшим случаем, когда возможно такое отображение, является тот случай, когда

$$\sigma_{,\alpha}=0,\quad \nu=-\frac{R}{2n(n-1)}e^{2\sigma}, \tag{37.2}$$

так как ясно, что (37.2) удовлетворяет уравнению S_q. Геометрически это отображение означает просто изменение масштабов вдоль параметрических кривых и поэтому будет далее называться *тривиальным*.

Как уже показано в § 36, в случае нетривиального отображения возможны также случаи, когда пространство с ненулевой скалярной кривизной отображается на пространство с нулевой кривизной, и наоборот. Обозначая пространства с ненулевой скалярной кривизной через G_n и с нулевой через $\overset{0}{G}_n$ и применяя теоремы, доказанные в § 36, без труда получим, что если $G_n(\overset{0}{G}_n)$ можно отобразить на $\overset{0}{G}_n(G_n)$ существенно более чем одним способом, то его можно отобразить нетривиально на $G_n(\overset{0}{G}_n)$. Кроме того, если G_n можно нетривиально отобразить на G_n, то его можно также отобразить на $\overset{0}{G}_n$. Наконец, если $\overset{0}{G}_n$ допускает нетривиальное отображение на $\overset{0}{G}_n$, то его можно отобразить и на G_n, хотя при этом возможно исключение, возникающее в том случае, когда для любых двух функций σ, $\tilde{\sigma}$, определяющих два нетривиальных отображения, имеет место соотношение

$$g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\tilde{\sigma}_{,\beta}=0.$$

Произведем замену неизвестных функций, удобную для дальнейшего, полагая

$$\sigma=-\ln\psi,\quad \nu\psi=N-\frac{1}{2}K\psi,\quad K=\frac{R}{n(n-1)}. \tag{37.3}$$

Так как

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta}=\frac{1}{n}\overset{*}{R}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}, \tag{37.4}$$

то, пользуясь тем, что

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\psi^2}\, g_{\alpha\beta}, \tag{37.5}$$

и заменяя в (37.4) все тензоры из $\overset{*}{V}_n$ через тензоры пространства V_n и ψ, придем к выводу, что $\overset{*}{V}_n$ будет пространством Эйнштейна тогда и только тогда, когда

$$\psi_{,\,\alpha\beta} = N g_{\alpha\beta}, \tag{37.6}$$

$$2N\psi = K\psi^2 + \Delta_1\psi - \overset{*}{K}, \tag{37.7}$$

где

$$\Delta_1\psi = g^{\alpha\beta}\psi_{,\,\alpha}\psi_{,\,\beta}, \quad \overset{*}{K} = \frac{\overset{*}{R}}{n\,(n-1)}.$$

Заметим, что N выражается через ψ линейным образом. Дифференцируя ковариантно (37.7), получим:

$$N_{,\,\alpha}\psi + N\psi_{,\,\alpha} = K\psi\psi_{,\,\alpha} + g^{\sigma\tau}\psi_{,\,\sigma}\psi_{,\,\tau\alpha}$$

и, используя (37.6), найдем: $N_{,\,\alpha} = K\psi_{,\,\alpha}$. Таким образом,

$$N = K\psi + D, \quad D = \text{const}.$$

Заменяя в (37.6), (37.7) N через ψ, придем к системе уравнений

$$\psi_{,\,\alpha\beta} = (K\psi + D)\, g_{\alpha\beta}, \tag{37.8}$$

$$\Delta_1\psi = K\psi^2 + 2D\psi + \overset{*}{K}, \tag{37.9}$$

где, впрочем, (37.9) является простым следствием (37.8), так как из (37.8) следует:

$$[\Delta_1\psi - (K\psi^2 + 2D\psi)]_{,\,\alpha} = 2g^{\sigma\tau}\psi_{,\,\sigma}\psi_{,\,\tau\alpha} - 2K\psi\psi_{,\,\alpha} - 2D\psi_{,\,\alpha} = 0,$$

так что при постоянном $\overset{*}{K}$ (37.9) должно иметь место.

Данное в предыдущем параграфе определение *изотропного* отображения, если σ выразить через ψ, будет иметь вид:

$$\Delta_1\psi \equiv 0.$$

Из (37.9) следует, таким образом, что, для того чтобы нетривиальное отображение было изотропным, необходимо и достаточно, чтобы

$$K = \overset{*}{K} = D = 0. \tag{37.10}$$

Следовательно, *изотропное отображение пространств Эйнштейна друг на друга может быть осуществлено только тогда, когда их скалярные кривизны равны нулю.*

Если $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — некоторые два решения системы (37.8), которым соответственно отвечают постоянные $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$, то, полагая

$$\psi = a\psi^{(1)} + b\psi^{(2)} + c,$$

где a, b, c — постоянные, найдем:

$$\psi_{\alpha\beta} = (K\psi + D)\, g_{\alpha\beta},$$

где

$$D = aD^{(1)} + bD^{(2)} - Kc,$$

т. е. система (37.8) ведет себя, как линейная. В соответствии с этим о последовательности решений $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$, ..., $\psi^{(p)}$ будем говорить, что она является *независимой*, если не существует соотношений вида

$$\sum_{r=1}^{p} c_r \psi^{(r)} = d, \quad c_r,\ d = \text{const} \neq 0.$$

Конформные отображения, отвечающие независимым решениям, будем называть также *независимыми*. Таким образом, самый общий вид пространства Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$, конформного к пространству Эйнштейна V_n с метрикой ds^2, будет

$$\overset{*}{ds}{}^2 = \frac{1}{(c_1\psi^{(1)} + \ldots + c_r\psi^{(r)} + d)^2}\, ds^2.$$

В этом параграфе ниже рассмотрен случай неизотропного отображения, когда

$$\Delta_1 \psi \not\equiv 0. \tag{37.11}$$

Это означает, что гиперповерхность $\psi = \text{const}$ неизотропная и поэтому может быть использована в качестве координатной. Введем систему координат неизотропную, *почти-полугеодезическую*, которая отличается от полугеодезической тем, что в качестве параметра вдоль координатной кривой выбирается не длина дуги, а некоторая произвольная функция от дуги. Очевидно, что, если (37.11) имеет место, такая система координат всегда может быть сконструирована, причем $x^{n'} = \psi(x^1, \ldots, x^n)$. В такой системе отнесения (см. § 7) компоненты метрического тензора

$$g_{i'n'} = g^{i'n'} = 0, \quad \partial_{i'} g_{n'n'} = 0 \quad (i' \neq n'). \tag{37.12}$$

Далее, если обозначить

$$g^{n'n'} = \frac{1}{g_{n'n'}} \overset{\text{def}}{=\!=} f,$$

то, записывая уравнение (37.8) в новой системе координат, найдем (см. задачу 1 § 37), что

$$f = Kx^{n^2} + 2Dx^n + B, \quad B = \text{const}, \tag{37.13}$$

$$g_{ij} = f\breve{g}_{ij}, \quad \breve{g}_{ij} = \breve{g}_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}) \quad (i, j \neq n). \tag{37.14}$$

Таким образом, в этой системе координат метрика V_n будет иметь вид:

$$ds^2 = \frac{1}{f}\, dx^{n^2} + f\, d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = \breve{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{37.15}$$

где, следовательно, $d\sigma^2$ определяет метрику неизотропного $\breve{V}_{n-1}$.

Для того чтобы убедиться в том, что ds^2, определяемое соотношением (37.15), задает пространство Эйнштейна, достаточно убедиться, что выполняются условия

$$R_{\alpha\beta} = (n-1)\, Kg_{\alpha\beta}. \tag{37.16}$$

Вычисляя компоненты тензора Риччи для метрики (37.15), получим:

$$R_{ij} = \breve{R}_{ij} + \left[\frac{1}{2} ff'' + \frac{1}{4}(n-2) f'^2\right] \breve{g}_{ij},$$

$$R_{in} = 0, \quad R_{nn} = \frac{1}{2}(n-1)\frac{f''}{f},$$

где штрих «$'$» означает дифференцирование по x^n. Поэтому (37.16) будут иметь место только в том случае, когда

$$\breve{R}_{ij} = \left[(n-1) Kf - \frac{1}{2} ff'' - \frac{1}{4}(n-2) f'^2\right] \breve{g}_{ij}, \quad f'' = 2K. \tag{37.17}$$

Заменяя здесь f при помощи (37.13), получим:

$$\breve{R}_{ij} = (n-2)\breve{K}\, \breve{g}_{ij} = \frac{\breve{R}}{n-1}\, \breve{g}_{ij}, \tag{37.18}$$

где

$$\breve{K} = \frac{\breve{R}}{(n-1)(n-2)} = BK - D^2. \tag{37.19}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема ([85], стр. 125): *пространство Эйнштейна может быть отображено конформно на другое пространство Эйнштейна неизотропным образом в том и только в том случае, когда в специальной системе координат его линейный элемент имеет вид* (37.15), *где f определяется формулой* (37.13); $d\sigma^2$ *определяет пространство Эйнштейна $\breve{V}_{n-1}$ со скалярной кривизной* (37.19).

Если $n > 3$ и $\breve{V}_{n-1}$ является пространством постоянной кривизны, то V_n также будет пространством постоянной кривизны. В самом деле, если $\breve{V}_{n-1}$ есть S_{n-1} и f — некоторая функция от x^n, то, вычисляя тензор конформной кривизны (§ 35), получим:

$$C_{ijkl} = f\check{C}_{ijkl} \quad (i,\ j,\ k,\ l = 1,\ \ldots,\ n-1),$$
$$C_{nijn} = 0, \quad C_{nijk} = 0,$$

т. е. $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. Но для $n > 3$ это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы V_n было конформно-плоским (см. задачу 4 § 35). Всякое конформно-плоское пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны. В частности, когда $n = 4$, замечаем, что метрика $d\sigma^2$ определяет S_3, так как всякое трехмерное пространство Эйнштейна является пространством постоянной кривизны (см. § 13). Поэтому *пространство Эйнштейна* V_4, *которое можно отобразить на другое пространство Эйнштейна при помощи неизотропного отображения, есть пространство постоянной кривизны* S_4.

Задачи

1. Если два пространства Эйнштейна с ненулевыми скалярными кривизнами допускают неизотропное конформное отображение друг на друга, то они изометричны, или могут быть сделаны изометричными за счет изменения масштаба. Доказать.

2. Доказать теорему, аналогичную сформулированной в задаче 1, в случае, когда обе скалярные кривизны равны нулю.

3. Показать, что при условиях задачи 1 или 2, но в предположении, что из двух скалярных кривизн *только одна* равна нулю, отображаемые пространства могут не быть изометричными ([85], стр. 126).

4. Метрика (37.15) допускает замену $x^n \to x'^n + a$. Показать, что при этом $K' = Ka^2 + 2Da + B$ ([85], стр. 126).

5. Доказать, что пространство Эйнштейна, допускающее конформное неизотропное отображение на другое пространство Эйнштейна, может допускать и изотропное отображение на некоторое пространство Эйнштейна только в том случае, если пространство $\check{V}_{n-1}$ допускает нетривиальное отображение на $(n-1)$-мерное пространство Эйнштейна ([85], стр. 130).

§ 38. Отображение пространств Эйнштейна. Изотропный случай

Исследуем пространства Эйнштейна, которые допускают изотропное конформное отображение на некоторое другое пространство Эйнштейна. Как это следует из (37.8), (37.9), (37.10), такое отображение возможно только в том случае, когда функция ψ удовлетворяет системе уравнений

$$\psi_{,\alpha\beta} = 0, \tag{38.1}$$
$$\Delta_1\psi = 0. \tag{38.2}$$

Уравнение (38.2) имеет тот геометрический смысл, что поверхности $\psi = \mathrm{const}$ являются изотропными. Ввиду этого, хотя уже нельзя, как в предыдущем параграфе, ввести аналог неизотропной полугеодезической системы координат и использовать для такой конструкции гиперповерхности $\psi = \mathrm{const}$, но можно ввести изотропную полугеодезическую координатную систему (см. § 7). Выберем ее так, чтобы

$$g^{in} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-2), \quad g^{nn} = 0, \quad g^{(n-1)n} = 1 \tag{38.3}$$

и, следовательно,

$$g_{i\,(n-1)} = 0, \quad g_{(n-1)\,(n-1)} = 0, \quad g_{n\,(n-1)} = 1.$$

Матрицы $(g_{\alpha\beta})$ и $(g^{\alpha\beta})$ будут иметь соответственно вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & 0 & \omega_1 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & g_{ij} & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \omega_{n-2} \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ \omega_1 & \ldots & \omega_{n-2} & 1 & \omega_n \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} & & & -\omega^1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & g^{ij} & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & -\omega^{n-2} & 0 \\ \hline -\omega^1 & \ldots & -\omega^{n-2} & \Omega & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(i, \ j = 1, \ \ldots, \ n-2), \tag{38.4}$$

где

$$\omega^i = g^{ij}\omega_j, \quad \Omega = -\omega_n + \omega^i\omega_i. \tag{38.5}$$

Метрика V_n в этой системе координат будет, таким образом, записываться в виде:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j + (2dx^{n-1} + 2\omega_i\,dx^i + \omega_n\,dx^n)\,dx^n. \tag{38.6}$$

Как показано в § 7, такая координация возможна для любого V_n с неопределенной метрикой; для изучаемого изотропного отображения, как уже отмечалось в § 36, неопределенность метрики должна иметь место. Но в рассматриваемой задаче из (38.1) следует, что градиентный вектор $\psi_{,\alpha}$ является к тому же и ковариантно постоянным. Так как

$$\psi_{,\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha\beta}\psi - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\psi_{,\sigma} = 0, \tag{38.7}$$

а ψ в новой системе координат играет роль $x^{n'}$, то это уравнение дает:

$$\Gamma^{n}_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_{n-1}g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \ \beta = 1, \ \ldots, \ n), \tag{38.8}$$

т. е. в новой координации $g_{\alpha\beta}$ являются функциями только от $x^1, \ldots, x^{n-2}, x^n$.

Необходимо проверить, когда и при каких условиях пространство с метрикой (38.6) является пространством Эйнштейна.

Рассмотрим пространство $\breve{V}_{n-2}$, метрика которого определяется формой

$$d\sigma^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{38.9}$$

так, что метрика V_n может быть записана в виде:

$$ds^2 = d\sigma^2 + (2\,dx^{n-1} + 2\omega_i\,dx^i + \omega_n\,dx^n)\,dx^n, \tag{38.10}$$

и условимся все величины, принадлежащие $\breve{V}_{n-2}$, отмечать знаком «$\breve{}$». Тогда, если воспользоваться обозначениями

$$G_{ij} = \partial_n g_{ij}, \quad G^i_j = g^{ik}G_{kj}, \quad G^{ij} = g^{ik}G^j_k, \quad G = G^i_i, \tag{38.11}$$

$$F_{ij} = G_{ij} + \omega_{i,\,j} - \omega_{j,\,i}, \quad F^i_j = g^{ik}F_{kj}, \tag{38.12}$$

$$M_i = \partial_n\omega_i, \quad M^l = g^{ik}M_k, \quad M = \partial_n\omega_n, \tag{38.13}$$

то компоненты тензора Риччи будут иметь вид:

$$R_{ij} = \breve{R}_{ji}, \tag{38.14}$$

$$R_{in} = \frac{1}{2}\left(G_{,\,i} - F^k_{i,\,k}\right), \tag{38.15}$$

$$R_{nn} = \frac{1}{2}\left(\breve{\Delta}_2\omega_n + \partial_n G + \frac{1}{2}F^k_i F^i_k - 2M^i_{,\,i}\right), \tag{38.16}$$

а все остальные компоненты тождественно равны нулю; здесь

$$\breve{\Delta}_2\omega_n \stackrel{\text{def}}{=} g^{ik}\omega_{n,\,ik}.$$

Так как $R_{(n-1)\,n} = 0$, $g_{(n-1)\,n} = 1$, то является очевидным, что *искомое V_n может быть только пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны*. Но тогда из (38.14) следует, *что и $\breve{V}_{n-2}$ должно быть пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны.*

Кроме того, из (38.15) и (38.16) получаем:

$$G_{,\,i} - F^k{}_{i,\,k} = 0, \tag{38.17}$$

$$\breve{\Delta}_2\omega_n + \partial_n G + \frac{1}{2}F^k_i F^i_k - 2M^i_{,\,i} = 0. \tag{38.18}$$

Пусть $\breve{V}_{n-2}$ задано и является пространством Эйнштейна нулевой скалярной кривизны. Покажем, что в этом случае всегда можно определить ω_i и ω_n как функции от $x^1, \ldots, x^{n-2}, x^n$, так что искомое V_n будет пространством Эйнштейна. Обозначим в (38.17) все члены, не зависящие от ω_n, через f_i, тогда (38.17) запишется в виде:

$$g^{kl}(\omega_{l,\,kl} - \omega_{l,\,ik}) = f_i, \tag{38.19}$$

где

$$f_i = G^k_{i,\,k} - G_{,\,i},$$

или, поднимая индекс вверх, запишем (38.19) в виде:

$$[g^{ji}g^{kl}(\partial_l\omega_i - \partial_i\omega_l)]_{,k} = f^j.$$

Так как в квадратной скобке стоит кососимметрический тензор, то, пользуясь выражением для дивергенции такого тензора (см. задачу 4 § 3), можно переписать это выражение в виде:

$$\partial_k\left[g^{ji}g^{kl}(\partial_l\omega_i - \partial_i\omega_l)\sqrt{g}\right] = f^j, \tag{38.20}$$

где

$$f^j = g^{jk}f_k.$$

Найдем необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений (38.20). Дифференцируя (38.20) по x^i нековариантным образом и свертывая по индексам i и j, получим:

$$\partial_j\left(\sqrt{g}f^j\right) = 0. \tag{38.21}$$

Покажем, что (38.21) является и достаточным условием интегрируемости уравнений (38.20). Так как (см. задачу 3 § 3)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_i\left(\sqrt{g}f^i\right) = f^i_{\ ,i} = G^{ij}_{\ \ ,ij} - g^{ij}G_{,ij} = \partial_n R,$$

а $R = 0$ и $\sqrt{g} \neq 0$, то

$$\partial_i\left(\sqrt{g}f^i\right) = 0,$$

т. е. если (38.21) имеет место, то условия интегрируемости (38.20) выполняются. Следовательно, можно определить ω_i так, чтобы (38.20) удовлетворялись. Подставляя найденные значения ω_i в (38.18), определим ω_n. После этого V_n будет пространством Эйнштейна. Если, в частности, метрика имеет вид:

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j + 2\,dx^{n-1}\,dx^n \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n-2),$$

то уравнения (38.17), (38.18) запишутся:

$$G_{,i} - G^k_{\ i,k} = 0, \quad \partial_n G + \frac{1}{2}\,G^i_k G^k_i = 0. \tag{38.22}$$

Так как, кроме того, подсчитывая компоненты тензора кривизны, можно убедиться, что среди них имеются следующие, отличные от нуля:

$$\left.\begin{aligned}
&R^i_{\ kjl} = \tilde{R}^i_{\ kjl}, \quad R^i_{\ njk} = \frac{1}{2}\left(G^i_{k,j} - G^i_{j,k}\right),\\
&R^{n-1}_{\ \ \ \ jkl} = \frac{1}{2}\left(G_{jk,l} - G_{jl,k}\right),\\
&R^i_{\ nnj} = \frac{1}{2}\left(G^i_j + \frac{1}{2}\,G^i_k G^k_j\right),\\
&R^{n-1}_{\ \ \ \ ijn} = \frac{1}{2}\left(\partial_n G_{ij} - \frac{1}{2}\,G^k_i G_{kj}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{38.23}$$

то становится очевидным, что в общем случае, *если даже* $\check{V}_{n-2}$ — *плоское пространство, пространство* V_n *может и не быть плоским* (см. задачу 2 § 38).

Рассмотрим в частности, случай $n=4$, представляющий особый интерес. Так как было показано, что $\check{V}_{n-2}$ при рассматриваемом отображении обязано быть пространством Эйнштейна с нулевой скалярной кривизной, а всякое V_2, тензор Риччи которого $R_{\alpha\beta}=0$, является плоским пространством, то линейный элемент искомого V_n можно привести к виду:

$$ds^2 = g_{11}\,dx^{1^2} + 2g_{12}\,dx^1\,dx^2 + g_{22}\,dx^{2^2} + \\ + (2\,dx^3 + 2a\,dx^1 + 2b\,dx^2 + m\,dx^4)\,dx^4, \qquad (38.24)$$

где форма

$$d\sigma^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad (i,\ j = 1,\ 2)$$

при любом значении переменной x^4 определяет плоское пространство с метрикой одной из двух возможных сигнатур: $(++)(+-)$; несущественное умножение метрики на -1 здесь не учитывается. Здесь a, b, m — некоторые функции от x^1, x^2, x^4. Задавая метрику $d\sigma^2$ так, чтобы при любых x^4 она определяла плоское пространство, и интегрируя уравнения (38.17) и (38.18), получим общий вид четырехмерных пространств Эйнштейна, допускающих изотропное конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна.

Задачи

1. Показать, что преобразование координат вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1,\ \ldots,\ x^{n-2},\ x^n) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n-2),$$
$$x^{n-1'} = x^{n-1} + z(x^1,\ x^{n-2},\ x^n), \quad x^{n'} = x^n$$

не меняет метрики (38.6). Пользуясь произволом функций $x^{i'}$ $(i = 1,\ \ldots,\ n-2)$, z, упростить метрику (38.6).

2. Показать, что метрика

$$ds^2 = 2\,dx^{n-1}\,dx^n + (ax^n + b)^2\,g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n-2),$$

где a, b — постоянные и $g_{ij} = g_{ij}(x^1,\ \ldots,\ x^{n-2})$ — определяющее $(n-2)$-мерное пространство Эйнштейна, допускает изотропное конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_n$. Найти метрику $\overset{*}{V}_n$. Исследовать частные случаи, которые возникают при $a=0$ и $b=0$ ([85], стр. 136).

3. Когда метрика V_4

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^2 + 2\,dx^3\,dx^4 + 2f(x^1,\ x^4)\,dx^1\,dx^4 + 2g(x^2,\ x^4)\,dx^2\,dx^4$$

определяет пространство Эйнштейна и допускает изотропное конформное отображение на другое пространство Эйнштейна $\overset{*}{V}_4$? Определить метрику $\overset{*}{V}_4$.

4. Показать, что если V_4, пространство Эйнштейна, не являющееся пространством постоянной кривизны, допускает конформное отображение, не

зависящее от $x^4 \equiv \psi$, на другое пространство Эйнштейна, то это отображение обязательно изотропное.

5. Когда V_4 с метрикой

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^2 + 2\,dx^3\,dx^4 + 2f(x^1,\ x^4)\,dx^1\,dx^4$$

удовлетворяет условиям задачи 4?

6. V_4, фигурирующее в задаче 5, может быть вложено в пятимерное пространство Евклида как гиперповерхность [86].

7. V_4 с метрикой, указанной в задаче 3, может быть вложено как пятимерная поверхность в семимерное евклидово пространство.

8. Показать, что V_4, определяемое метрикой

$$ds^2 = 4\,[dx^1\,dx^2 + dx^3\,dx^4 + (x^1\,dx^1 + x^3\,dx^3)^2],$$

является пространством Эйнштейна и допускает погружения в пятимерное псевдоевклидово пространство с метрикой

$$ds^2 = dy^{1^2} - dy^{2^2} + dy^{3^2} - dy^{4^2} + dy^{5^2}$$

при помощи уравнений

$$y^1 = x^1 + x^2,\quad y^2 = x^1 - x^2,\quad y^3 = x^3 + x^4,$$
$$y^4 = x^3 - x^4,\quad y^5 = x^{1^2} + x^{3^2}$$

[86].

9. Показать, что метрика

$$ds^2 = \frac{e_1\,dx^{1^2} + \ldots + e_p\,dx^{p^2}}{\left[1 + \frac{n-2}{p-1}\frac{K_0}{4}(e_1 x^{1^2} + \ldots + e_p\,dx^{p^2})\right]^2} +$$
$$+ \frac{e_{p+1}\,dx^{p+1^2} + \ldots + e_n\,dx^{n^2}}{\left[1 + \frac{n-2}{n-p-1}\frac{K_0}{4}(e_{p+1}x^{p+1^2} + \ldots + e_n x^{n^2})\right]^2},\qquad e_k = \pm 1,$$

определяет пространство Эйнштейна, которое может быть вложено в S_{n+1}. Вложение может быть осуществлено при помощи формул

$$e_1 z^{1^2} + \ldots + e_{p+1} z^{p+1^2} = \frac{p-1}{n-2}\frac{1}{K_0},$$
$$e_{p+2} z^{p+2^2} + \ldots + e_{n+2} z^{n+2^2} = \frac{n-p-1}{n-2}\frac{1}{K_0},$$

где $e = \pm 1$, а S_{n+1} определяется уравнением

$$e_1 z^{1^2} + \ldots + e_{n+2} z^{n+2^2} = \frac{1}{K_0}$$

[86].

10. Рассмотреть частный случай задачи 9, когда

$$ds^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2}}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^{1^2} + x^{2^2})\right]^2} + \frac{dx^{3^2} + dx^{4^2}}{\left[1 + \frac{K}{4}(x^{3^2} + x^{4^2})\right]^2}$$

([86], стр 103—104).

Глава VII

Классификация полей тяготения по группам конформных преобразований

В этой главе дается классификация полей тяготения общего вида по допускаемым ими группам бесконечно малых конформных преобразований.

§ 39. Постановка вопроса. Условия интегрируемости обобщенных уравнений Киллинга

Группы конформных преобразований являются непосредственным обобщением групп движений в V_n. В главе IV была дана классификация полей тяготения общего вида по группам движений. Ввиду этого вслед за классификацией по группам движений возникает задача классификации полей тяготения по группам конформных преобразований. С другой стороны, необходимость изучения полей тяготения с точки зрения групп конформных преобразований определяется тем, что:

1. Если задано некоторое поле в пространстве V_4 с метрикой ds^2, допускающей r-параметрическую группу движений G_r, то оно обладает r законами сохранения. Для того чтобы r-параметрической группе конформных преобразований G_r соответствовало r законов сохранения, необходимо и достаточно, чтобы след тензора энергии-импульса был равен нулю [273].

2. Распределение релятивистского газа по релятивистскому закону Максвелла — Больцмана характеризуется вектором $\xi^i(x)$, который представляет собой вектор Киллинга (если газ состоит из частиц ненулевой массы покоя) или вектор бесконечно малого конформного преобразования (если газ состоит из частиц нулевой массы покоя) [546], [547], [548].

Группы конформных преобразований исследованы гораздо в меньшей степени, чем группы движений. Известен результат Кнебельмана о том, что всякая группа гомотетических движений G_r содержит подгруппу движений G_{r-1} [331]. Хирамацу обобщил теоремы

И. П. Егорова о порядках групп движений на конформные группы преобразований, получив следующие результаты [298]:

1. В V_n ($n \geqslant 3, \neq 4$) не существует групп конформных преобразований G_r порядка r, где

$$\frac{n(n+1)}{2}+2<r<\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. Пространство V_n ($n \geqslant 3$, причем исключается конечное число чисел n, зависящих от специальных типов простых групп), допускающее группу конформных преобразований G_r порядка r, где

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2<r<\frac{n(n-1)}{2}+1,$$

есть конформно-плоское пространство.

Интересный результат получен в работе [260], где доказывается, что во всякой гомотетической точке (так называется точка, в которой группа линейных преобразований векторов касательного пространства, индуцированная группой изотропий в этой точке, не содержится в ортогональной группе) тензор конформной кривизны равен нулю. Если многообразие обладает гомотетической точкой и группа конформных преобразований транзитивна, то это многообразие является конформно-плоским.

Группа конформных преобразований в сферически-симметрических полях тяготения исследовалась Такено [266], [267], указавшим полную систему решений обобщенных уравнений Киллинга для указанных пространств.

Как известно, максимальный порядок групп конформных преобразований в римановых пространствах V_n равен $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ [88]. Эта группа найдена Левином [111], [131].

Классификацию трехмерных римановых пространств по группам гомотетических движений осуществил Н. С. Липатов [615]. Им также определены гомотетические движения в пространствах Эйнштейна полей тяготения [532], [533]. Метод классификации гомотетических групп совпадает с методом классификации групп движений в работах [356], [394], [395], [537]. Б. Абакировым аналогичным образом определены римановы пространства V_4, допускающие нетранзитивные и просто-транзитивные группы гомотетических движений [522], [590], [591].

И. П. Егоров обобщил полученные им теоремы о порядках групп движений в римановых пространствах, получив следующие результаты для порядков групп гомотетий в римановых пространствах [528]:

1. Не существует римановых пространств V_n, допускающих нетривиальные (т. е., не являющиеся группами движений) полные группы

гомотетических движений H_r, если

$$\frac{n(n-1)}{2}+2<r<\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Римановы пространства V_n второй лакунарности в гомотетическом смысле являются субпроективными пространствами; они допускают группы гомотетических движений H_r порядка $r=\frac{n(n-1)}{2}+2$, $r=\frac{n(n-1)}{2}+1$ и $r=\frac{n(n-1)}{2}$. Все субпроективные пространства исключительного случая обладают гомотетическими движениями.

3. Не существует римановых пространств V_n, допускающих полные группы гомотетических движений H_r, порядок которых удовлетворяет неравенствам

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}+6<r<\frac{n(n-1)}{2}.$$

Порядок $r=\frac{(n-2)(n-1)}{2}+6$ достигается и является максимальным для неконформно-евклидовых пространств.

Полное решение задачи о классификации полей тяготения по группам конформных преобразований получено Р. Ф. Биляловым [593], [594], [595], [596], основной результат которого состоит в следующем: *группа конформных преобразований, действующих в неконформно-плоском поле тяготения, является группой движений или гомотетий пространства, конформного данному.*

Пусть дана группа G_r. Чтобы она была группой конформных преобразований пространства V_n с метрикой $ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, необходимо и достаточно выполнение обобщенных уравнений Киллинга:

$$\xi_a^\alpha\,\partial_\alpha g_{ij}+g_{i\alpha}\,\partial_j\xi_a^\alpha+g_{j\alpha}\,\partial_i\xi_a^\alpha=\xi_{ai,\,j}+\xi_{aj,\,i}=\psi_a g_{ij}, \tag{39.1}$$
$$\alpha,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n;\ a=1,\ \ldots,\ r,$$

где ξ_a^α — векторы группы G_r, ψ_a — скаляры.

Если ξ_a^α и ξ_b^α — два вектора группы G_r, ψ_a и ψ_b — соответствующие скаляры в обобщенных уравнениях Киллинга, то вектору

$$\xi^\alpha=\xi_a^\beta\,\partial_\beta\xi_b^\alpha-\xi_b^\beta\,\partial_\beta\xi_a^\alpha,$$
$$\alpha,\ \beta,=1,\ \ldots,\ n;\quad a,\ b=1,\ \ldots,\ r,$$

будет соответствовать скаляр

$$\psi=\xi_a^\alpha\,\partial_\alpha\psi_b-\xi_b^\alpha\,\partial_\alpha\psi_a,$$

т. е., наряду с обобщенными уравнениями Киллинга мы должны рассматривать и уравнения

$$\xi_a^\alpha \partial_\alpha \psi_b - \xi_b^\alpha \partial_\alpha \psi_a = C_{ab}^c \psi_c. \tag{39.2}$$

Доказательство сводится к вычислению выражений $\xi_{i,j} + \xi_{j,i}$ и их упрощений с помощью формулы ([88], стр. 278)

$$\xi_{ak,ij} = -\xi_{am} R_{jki}^m + \frac{1}{2}(g_{ki}\psi_{a,j} + g_{kj}\psi_{a,i} - g_{ij}\psi_{a,k})$$

путем использования свойств тензора кривизны.

Уравнения группы и уравнения (39.1) и (39.2), в общем случае групп со стационарной подгруппой, можно записать в виде:

$$\xi_f^\alpha \partial_\alpha \xi_g^\beta - \xi_g^\alpha \partial_\alpha \xi_f^\beta = (C_{fg}^h + C_{fg}^s \varphi_s^h)\xi_h^\beta, \tag{39.3}$$

$$\partial_\alpha \varphi_s^f = [C_{gs}^f + C_{gs}^t \varphi_t^f - \varphi_s^h (C_{gh}^f + C_{gh}^t \varphi_t^f)]\eta_\alpha^g, \tag{39.4}$$

$$\varphi_s^f \xi_f^\alpha \partial_\alpha (\varphi_t^g \xi_g^\beta) - \varphi_t^f \xi_f^\alpha \partial_\alpha (\varphi_s^g \xi_g^\beta) = C_{st}^u \varphi_u^f \xi_f^\beta, \tag{39.5}$$

$$\partial_\alpha g_{ij} + g_{i\beta} \partial_j \xi_f^\beta \eta_\alpha^f + g_{j\beta} \partial_i \xi_f^\beta \eta_\alpha^f = \psi_f \eta_\alpha^f g_{ij}, \tag{39.6}$$

$$g_{i\alpha} \xi_g^\alpha \partial_j \varphi_s^g + g_{j\alpha} \xi_g^\alpha \partial_i \varphi_s^g = (\psi_s - \varphi_s^g \psi_g) g_{ij}, \tag{39.7}$$

$$\xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_g - \xi_g^\alpha \partial_\alpha \psi_f = C_{fg}^h \psi_h + C_{fg}^u \psi_u, \tag{39.8}$$

$$\xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_s - \varphi_s^g \xi_g^\alpha \partial_\alpha \psi_f = C_{fs}^h \psi_h + C_{fs}^u \psi_u, \tag{39.9}$$

$$\varphi_s^f \xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_t - \varphi_t^f \xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_s = C_{st}^u \psi_u, \tag{39.10}$$

$\alpha, \beta, f, g, h = 1, \ldots, q; \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad s, t, u = q+1, \ldots, r,$

где q — ранг матрицы (ξ_a^α) (если $q < n$, то существует система координат, в которой $\xi_a^\sigma = 0$ $(\sigma = q+1, \ldots, n)$ ([170], стр. 90—92)); ξ_s^α — векторы стационарной подгруппы в *в точке общего положения* P; φ_s^f определяются из уравнений $\xi_s^\alpha = \varphi_s^f \xi_f^\alpha$; $\det|\xi_f^\alpha| \neq 0$; η_α^f вводятся с помощью $\xi_f^\alpha \eta_\alpha^g = \delta_f^g$, для них из (39.3) следуют уравнения

$$\partial_\alpha \eta_\beta^h - \partial_\beta \eta_\alpha^h = (C_{fg}^h + C_{fg}^s \varphi_s^h)\eta_\beta^f \eta_\alpha^g. \tag{39.11}$$

Сначала рассмотрим условия интегрируемости уравнений (39.8) — (39.10). Из (39.8) следует, что

$$\varphi_s^f \xi_g^\alpha \partial_\alpha \psi_f = \varphi_s^f \xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_g + \varphi_s^f (C_{gf}^h \psi_h + C_{gf}^u \psi_u),$$

откуда с помощью (39.4) и (39.9) получаем

$$\xi^\alpha_f\partial_\alpha\left(\psi_s-\varphi^g_s\psi_g\right)=\xi^\alpha_f\partial_\alpha\psi_s-\varphi^g_s\xi^\alpha_f\partial_\alpha\psi_g-\xi^\alpha_f\partial_\alpha\varphi^g_s\psi_g=$$
$$=\left(C^u_{fs}-\varphi^g_s C^u_{fg}\right)\left(\psi_u-\varphi^h_u\psi_h\right),$$

или

$$\partial_\alpha\Delta_s=\eta^f_\alpha\left(C^u_{fs}-\varphi^g_s C^u_{fg}\right)\Delta_u, \tag{39.12}$$

где $\Delta_s=\psi_s-\varphi^g_s\psi_g$. Рассуждая в обратном порядке, легко показать, что из (39.12) и (39.8) вытекает (39.9).

Обратимся к уравнениям (39.10). Подстановка (39.9) дает

$$\varphi^f_s\varphi^g_t\left(\xi^\alpha_g\partial_\alpha\psi_f-\xi^\alpha_f\partial_\alpha\psi_g\right)+\left(\varphi^g_s C^h_{gt}-\varphi^g_t C^h_{gs}\right)\psi_h+$$
$$+\left(\varphi^g_s C^u_{gt}-\varphi^g_t C^u_{gs}\right)\psi_u=C^u_{st}\psi_u,$$

откуда, используя (39.8), получаем:

$$\left(C^f_{gh}\varphi^h_s\varphi^g_t+\varphi^g_s C^f_{gt}-\varphi^g_t C^t_{gs}\right)\psi_f+$$
$$+\left(C^u_{ts}-\varphi^g_s C^u_{tg}-\varphi^g_t C^u_{gs}+\varphi^f_t\varphi^g_s C^u_{fg}\right)\psi_u=0. \tag{39.13}$$

Преобразуя левую часть (39.5) и подставляя (39.4), имеем:

$$\varphi^g_s\xi^\alpha_g\partial_\alpha\left(\varphi^h_t\xi^\beta_h\right)-\varphi^g_t\xi^\alpha_g\partial_\alpha\left(\varphi^h_s\xi^\beta_h\right)=$$
$$=\varphi^g_s\varphi^h_t\left(\xi^\alpha_g\partial_\alpha\xi^\beta_h-\xi^\alpha_h\partial_\alpha\xi^\beta_g\right)+\varphi^g_s\xi^\beta_h\xi^\alpha_g\partial_\alpha\varphi^h_t-\varphi^g_t\xi^\beta_h\xi^\alpha_g\partial_\alpha\varphi^h_s=$$
$$=\left(\varphi^g_t\varphi^h_s C^f_{gh}+\varphi^g_s C^f_{gt}-\varphi^g_t C^f_{gs}+\varphi^g_s C^u_{gt}\varphi^f_u-\varphi^g_t C^u_{gs}\varphi^f_u+\varphi^g_s\varphi^h_t C^u_{hg}\varphi^f_u\right)\xi^\beta_f,$$

и, следовательно, уравнения (39.5) можно записать в виде:

$$\varphi^f_t\varphi^g_s C^u_{fg}+\varphi^f_s C^h_{ft}-\varphi^f_t C^h_{fs}+\varphi^f_s C^u_{ft}\varphi^h_u-\varphi^f_t C^u_{fs}\varphi^h_u-\varphi^f_s\varphi^g_t C^u_{fg}\varphi^h_u=C^u_{st}\varphi^h_u,$$

откуда

$$\varphi^f_t\varphi^g_s C^h_{fg}+\varphi^f_s C^h_{ft}-\varphi^f_t C^h_{fs}=$$
$$=\left(C^u_{st}+\varphi^f_s C^u_{tf}+\varphi^f_t C^u_{fs}-\varphi^f_t\varphi^g_s C^u_{fg}\right)\varphi^h_u, \tag{39.14}$$

что в применении к (39.13) дает

$$\left(C^u_{ts}-\varphi^f_s C^u_{tf}-\varphi^f_t C^u_{fs}+\varphi^f_t\varphi^g_s C^u_{fg}\right)\Delta_u=0. \tag{39.15}$$

Таким образом, уравнения (39.9) и (39.10) в силу (39.8) эквивалентны уравнениям (39.12) и (39.15). Прежде чем исследовать условия интегрируемости уравнений (39.12) и (39.15), рассмотрим условия интегрируемости уравнений (39.8). Если ввести $\varphi_\alpha=\eta^h_\alpha\psi_h$, то (39.8) можно записать в виде

$$\partial_\alpha\varphi_\beta-\partial_\beta\varphi_\alpha=\eta^f_\alpha\eta^g_\beta C^s_{fg}\Delta_s. \tag{39.16}$$

Последние уравнения означают, что правая часть должна быть ротацией некоторого вектора. Как известно, необходимые и достаточные условия, чтобы кососимметрический тензор a_{ij} представлял ротацию некоторого вектора, имеют вид

$$\partial_k a_{lj} + \partial_l a_{jk} + \partial_j a_{kl} = 0.$$

Для $\partial_\gamma \left(\eta^f_\alpha \eta^g_\beta C^s_{fg} \Delta_s\right)$, используя (39.12), имеем

$$\partial_\gamma \left(\eta^f_\alpha \eta^g_\beta C^u_{fg} \Delta_u\right) = \partial_\gamma \eta^g_\alpha \eta^h_\beta C^u_{gh} \Delta_u + \eta^g_\alpha \partial_\gamma \eta^h_\beta C^u_{gh} \Delta_u + \\ + \eta^f_\alpha \eta^g_\beta C^u_{fg} \eta^h_\gamma \left(C^t_{hu} - \varphi^m_u C^t_{hm}\right) \Delta_t,$$

$$\gamma,\ m = 1, \ldots, q.$$

Делая в последних соотношениях циклические перестановки индексов α, β, γ, суммируя и учитывая (39.11), убеждаемся, что условия интегрируемости уравнений (39.8) в силу уравнений (39.12) и (39.15) удовлетворяются тождественно.

Перейдем к нахождению условий интегрируемости уравнений (39.12) вместе с условием (39.15). Для этого введем обозначение

$$X^b_{as} = C^b_{as} - \varphi^f_s C^b_{af}, \qquad (39.17)$$

$$a,\ b = 1, \ldots, r,$$

тогда

$$\begin{gathered} \partial_\alpha \varphi^f_s = \eta^g_\alpha \left(X^f_{gs} + X^t_{gs} \varphi^f_t\right), \quad \partial_\alpha \Delta_s = \eta^f_\alpha X^u_{fs} \Delta_u, \\ \partial_\alpha X^b_{as} = -C^b_{ag} \partial_\alpha \varphi^g_s = -C^b_{ag} \eta^f_\alpha \left(X^g_{fs} + X^v_{fs} \varphi^g_v\right). \end{gathered} \qquad (39.18)$$

Рассматривая

$$\partial_{\beta\alpha} \Delta_s = \partial_\beta \eta^g_\alpha X^u_{gs} \Delta_u + \eta^g_\alpha \partial_\beta X^u_{gs} \Delta_u + \eta^g_\alpha X^u_{gs} \partial_\beta \Delta_u,$$

альтернируя их по α и β и приравнивая нулю, получаем уравнения

$$\left(\partial_\beta \eta^f_\alpha - \partial_\alpha \eta^f_\beta\right) X^u_{fs} \Delta_u - C^u_{fg} \left(X^g_{hs} + X^v_{hs} \varphi^g_v\right) \left(\eta^f_\alpha \eta^h_\beta - \eta^f_\beta \eta^f_\alpha\right) \Delta_u + \\ + X^v_{fs} X^u_{gv} \left(\eta^f_\alpha \eta^g_\beta - \eta^f_\beta \eta^g_\alpha\right) \Delta_u = 0,$$

$$v = q+1, \ldots, r,$$

из которых, используя (39.11) и умножая на $\xi^\alpha_k \xi^\beta_l$, получаем

$$\left[\left(C^f_{kl} + C^t_{kl} \varphi^f_t\right) X^u_{fs} - C^u_{kg} \left(X^g_{ls} + X^v_{ls} \varphi^g_v\right) + C^u_{lg} \left(X^g_{ks} + X^v_{ks} \varphi^g_v\right) + \\ + \left(X^v_{ks} X^u_{lv} - X^v_{ls} X^u_{kv}\right)\right] \Delta_u = 0. \qquad (39.19)$$

Из (39.17) следует

$$X^v_{ks} \varphi^g_v C^u_{lg} + X^v_{ks} X^u_{jv} = X^v_{ks} \left(\varphi^g_v C^u_{lg} + X^u_{lv}\right) = X^v_{ks} C^u_{lv}.$$

Это означает, что уравнение (39.19) можно привести к виду:

$$\left[\left(C_{kl}^{f}+C_{kl}^{t}\varphi_{t}^{f}\right)X_{fs}^{u}+X_{ks}^{a}C_{la}^{u}+X_{ls}^{a}C_{ak}^{u}\right]\Delta_{u}=0.$$

Но так как

$$X_{ks}^{a}C_{la}^{u}+X_{ls}^{a}C_{ak}^{u}=C_{ks}^{a}C_{la}^{u}+C_{ls}^{a}C_{ak}^{u}-\varphi_{s}^{g}\left(C_{kg}^{a}C_{la}^{k}+C_{lg}^{a}C_{ak}^{u}\right)=$$
$$=C_{kl}^{a}C_{sa}^{u}-\varphi_{s}^{g}C_{kl}^{a}C_{ga}^{u}=C_{kl}^{a}X_{as}^{u},$$

то последние соотношения окончательно приводятся к виду:

$$C_{lk}^{t}\left(X_{st}^{u}-\varphi_{t}^{f}X_{fs}^{u}\right)\Delta_{u}=0,$$

которые тождественны в силу (39.15). Используя (39.17), перепишем (39.15) в виде:

$$\left(X_{ts}^{u}-\varphi_{t}^{f}X_{fs}^{u}\right)\Delta_{u}=0. \tag{39.20}$$

Дифференцируя эти соотношения по x^{a}, подставляя (39.18) и умножая на ξ_{h}^{a}, получаем:

$$\left[-C_{tf}^{u}\left(X_{hs}^{f}+X_{hs}^{v}\varphi_{v}^{f}\right)-\left(X_{ht}^{f}+X_{ht}^{v}\varphi_{v}^{f}\right)X_{fs}^{u}+C_{fg}^{u}\left(X_{hs}^{g}+X_{hs}^{v}\varphi_{v}^{g}\right)\varphi_{t}^{f}+\right.$$
$$\left.+\left(X_{ts}^{v}-\varphi_{t}^{f}X_{fs}^{v}\right)X_{hv}^{u}\right]\Delta_{u}=0,$$

которые в развернутом виде запишутся так:

$$\left[\left(C_{hs}^{f}-\varphi_{s}^{g}C_{hg}^{f}+C_{hs}^{v}\varphi_{v}^{f}-C_{hg}^{v}\varphi_{s}^{g}\varphi_{v}^{f}\right)\left(C_{st}^{u}-\varphi_{t}^{k}C_{fk}^{u}\right)-\right.$$
$$-\left(C_{ht}^{f}-\varphi_{t}^{g}C_{hg}^{f}+C_{ht}^{v}\varphi_{v}^{f}-C_{hg}^{v}\varphi_{t}^{g}\varphi_{v}^{f}\right)\left(C_{fs}^{u}-\varphi_{s}^{k}C_{fk}^{u}\right)+$$
$$\left.+\left(C_{ts}^{u}-\varphi_{s}^{f}C_{tf}^{v}-\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{v}+\varphi_{t}^{f}\varphi_{s}^{g}C_{fg}^{v}\right)\left(C_{hv}^{u}-\varphi_{v}^{k}C_{hk}^{u}\right)\right]\Delta_{u}=0.$$

Подставляя в эти соотношения (39.20) в виде:

$$\varphi_{t}^{k}\varphi_{s}^{l}C_{kl}^{u}\Delta_{u}=\left(C_{st}^{u}+\varphi_{s}^{f}C_{tf}^{u}+\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{u}\right)\Delta_{u},$$

(39.14) в виде:

$$\varphi_{t}^{f}\varphi_{s}^{g}C_{fg}^{u}\varphi_{u}^{h}=C_{st}^{u}\varphi_{u}^{h}+\varphi_{s}^{f}C_{tf}^{u}\varphi_{u}^{h}+\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{u}\varphi_{u}^{h}-\varphi_{s}^{f}C_{ft}^{h}+\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{h}-\varphi_{t}^{f}\varphi_{s}^{g}C_{fg}^{h},$$

их можно также записать следующим образом:

$$\left[\left(C_{ks}^{f}-\varphi_{s}^{g}C_{kg}^{f}+C_{ks}^{v}\varphi_{v}^{f}-C_{kg}^{v}\varphi_{s}^{g}\varphi_{v}^{f}\right)C_{ft}^{u}-\left(C_{ks}^{f}-\varphi_{s}^{g}C_{kg}^{f}+C_{ks}^{v}\varphi_{v}^{f}\right)\varphi_{t}^{h}C_{fh}^{u}-\right.$$
$$-\left(C_{kt}^{f}-\varphi_{t}^{g}C_{kg}^{v}+C_{kt}^{v}\varphi_{v}^{f}-C_{kg}^{v}\varphi_{t}^{g}\varphi_{v}^{f}\right)C_{fs}^{u}+\left(C_{kt}^{f}-\varphi_{t}^{g}C_{kg}^{f}+C_{kt}^{v}\varphi_{v}^{f}\right)\varphi_{s}^{h}C_{fh}^{u}+$$
$$+\left(C_{ts}^{v}-\varphi_{s}^{f}C_{tf}^{v}-\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{v}+\varphi_{t}^{f}\varphi_{s}^{g}C_{fg}^{v}\right)C_{kv}^{u}-\left(C_{ts}^{v}-\varphi_{s}^{f}C_{tf}^{v}-\varphi_{t}^{f}C_{fs}^{v}\right)\varphi_{v}^{h}C_{kh}^{u}+$$
$$+C_{kg}^{v}\varphi_{s}^{g}\left(C_{tv}^{u}+\varphi_{t}^{f}C_{vf}^{u}+\varphi_{v}^{f}C_{ft}^{u}\right)-C_{kf}^{v}\varphi_{t}^{f}\left(C_{sv}^{u}+\varphi_{s}^{g}C_{vg}^{u}+\varphi_{v}^{g}C_{gs}^{u}\right)-$$
$$\left.-C_{kf}^{u}\left(C_{st}^{v}\varphi_{v}^{f}+\varphi_{s}^{g}C_{tg}^{u}\varphi_{u}^{f}+\varphi_{t}^{g}C_{gs}^{u}\varphi_{u}^{f}-\varphi_{s}^{g}C_{gt}^{f}+\varphi_{t}^{g}\varphi_{s}^{h}C_{gh}^{f}\right)\right]\Delta_{u}=0. \tag{39.21}$$

В этих уравнениях не содержащие φ коэффициенты перед Δ_u будут:

$$C^f_{ks}C^u_{ft} - C^f_{kt}C^u_{fs} + C^v_{ts}C^u_{kv} = -C^v_{ks}C^u_{vt} - C^v_{tk}C^u_{vs},$$

коэффициенты с φ^f_s:

$$-C^g_{kf}C^u_{gt} + C^u_{gt}C^g_{kt} - C^v_{tf}C^u_{kv} + C^v_{kf}C^u_{tv} + C^h_{ft}C^u_{kh} =$$
$$= C^a_{fk}C^u_{at} + C^g_{kt}C^u_{gf} + C^a_{tf}C^u_{ak} = -C^v_{kt}C^u_{vf},$$

коэффициенты с φ^f_v:

$$C^v_{ks}C^u_{ft} - C^v_{kt}C^u_{fs} - C^v_{ts}C^u_{kf} + C^v_{ts}C^u_{kf} = C^v_{ks}C^u_{ft} - C^v_{kt}C^u_{fs},$$

коэффициенты с $\varphi^f_s\varphi^g_f$:

$$-C^v_{kf}C^u_{gt} + C^u_{gf}C^v_{kt} + C^v_{tf}C^u_{kg} + C^v_{kf}C^u_{gt} - C^v_{tf}C^u_{kg} = C^u_{gf}C^v_{kt},$$

коэффициенты с $\varphi^f_s\varphi^g_v$:

$$C^h_{kf}C^u_{hg} - C^h_{kg}C^u_{hf} + C^v_{gf}C^u_{kv} - C^v_{kg}C^u_{vf} + C^v_{kf}C^u_{vg} + C^u_{kh}C^h_{gf} =$$
$$= C^a_{kf}C^u_{ag} + C^a_{gk}C^u_{af} + C^a_{fg}C^u_{ak} = 0.$$

В силу кососимметричности выражения (39.21) по индексам s и t коэффициенты с φ^g_t и $\varphi^g_t\varphi^h_v$ будут соответственно

$$C^v_{ks}C^u_{vg} \quad \text{и} \quad -C^u_{hg}C^v_{ks}.$$

Таким образом, уравнения (39.21) упрощаются и окончательно принимают вид:

$$\left(-C^v_{ks}C^u_{vt} - C^v_{tk}C^u_{vs} - \varphi^g_sC^v_{kt}C^u_{vg} + \varphi^g_tC^v_{ks}C^u_{vg} + \varphi^g_s\varphi^h_vC^u_{hg}C^v_{kt} -\right.$$
$$\left. - \varphi^g_t\varphi^h_vC^u_{hg}C^v_{ks} + C^v_{kt}\varphi^g_vC^u_{gt} - C^v_{kt}\varphi^g_vC^u_{gs}\right)\Delta_u = 0,$$

или

$$\left[C^v_{ks}\left(X^u_{tv} - \varphi^g_tX^u_{gv}\right) - C^v_{kt}\left(X^u_{sv} - \varphi^g_sX^u_{gv}\right)\right]\Delta_u = 0,$$

которые в силу (39.20) тождественно выполняются. Таким образом, система уравнений (39.8) — (39.10) эквивалентна системе уравнений (39.12), (39.16) и (39.20), в которой (39.20) являются условиями интегрируемости (39.12) и (39.16) и сами новых условий не вводят; значит, условия (39.20) представляют полную систему условий интегрируемости системы уравнений (39.8) — (39.10).

Осталось рассмотреть условия интегрируемости уравнений (39.6), (39.7). Если, следуя [170], ввести обозначения

$$\Lambda^\lambda_{\alpha\mu} = \xi^\lambda_h\partial_\alpha\eta^h_\mu = -\eta^h_\mu\partial_\alpha\xi^\lambda_h,$$
$$\alpha = 1, \ldots, n; \qquad \lambda,\ \mu,\ h = 1, \ldots, q,$$

то уравнения (39.6) можно записать в виде

$$\partial_\alpha g_{ij} = g_{il}\Lambda^l_{j\alpha} + g_{lj}\Lambda^l_{i\alpha} + \psi_l\eta^l_\alpha g_{ij}, \tag{39.22}$$
$$\alpha,\ l = 1, \ldots, q; \qquad i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Условия интегрируемости этих уравнений, как показано в [170], при $\psi_a = 0$ будут:

$$g_{il}\Lambda^l_{j\beta\alpha} + g_{lj}\Lambda^l_{i\beta\alpha} = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, q),$$

где

$$\Lambda^l_{j\beta\alpha} = C^s_{mn}\partial_j\varphi^k_s\eta^m_\beta\eta^n_\alpha\xi^l_k, \tag{39.23}$$
$$k, m, n = 1, \ldots, q.$$

В случае $\psi_a \neq 0$ они будут иметь вид:

$$g_{il}\Lambda^l_{j\beta\alpha} + g_{lj}\Lambda^l_{i\beta\alpha} + \psi_g\eta^g_\beta g_{il}\Lambda^l_{j\alpha} - \psi_g\eta^g_\alpha g_{il}\Lambda^l_{j\beta} +$$
$$+ \psi_g\eta^g_\beta g_{jl}\Lambda^l_{i\alpha} - \psi_g\eta^g_\alpha g_{jl}\Lambda^l_{i\beta} + \psi_g\eta^g_\alpha(g_{il}\Lambda^l_{j\beta} + g_{lj}\Lambda^l_{i\beta} + \psi_g\eta^g_\beta g_{lj}) -$$
$$- \psi_g\eta^g_\beta(g_{il}\Lambda^l_{j\alpha} + g_{lj}\Lambda^l_{i\alpha} + \psi_f\eta^f_\alpha g_{lj}) +$$
$$+ [(\partial_\beta\psi_g\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\psi_g\eta^g_\beta) + \psi_g(\partial_\beta\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\eta^g_\beta)]\, g_{ij} = 0$$

или

$$g_{il}\Lambda^l_{j\beta\alpha} + g_{lj}\Lambda^l_{i\beta\alpha} + [(\partial_\beta\psi_g\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\psi_g\eta^g_\beta) + \psi_g(\partial_\beta\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\eta^g_\beta)]\, g_{ij} = 0.$$

Упрощая множитель перед g_{ij} в последнем члене с помощью (39.8), (39.16):

$$\partial_\beta\psi_g\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\psi_g\eta^g_\beta + \psi_g(\partial_\beta\eta^g_\alpha - \partial_\alpha\eta^g_\beta) =$$
$$= (C^h_{fg}\psi_h + C^u_{fg}\psi_u)\eta^f_\beta\eta^g_\alpha + \psi_g(-C^g_{fh} - C^u_{fh}\varphi^g_u)\eta^f_\beta\eta^g_\alpha =$$
$$= C^u_{fg}(\psi_u - \varphi^h_u\psi_h)\eta^f_\beta\eta^g_\alpha,$$

окончательно условия интегрируемости уравнений (39.22), учитывая (39.23), можно записать в виде соотношений

$$C^s_{mn}\eta^m_\alpha\eta^n_\beta(g_{il}\xi^l_k\partial_j\varphi^k_s + g_{jl}\xi^l_k\partial_i\varphi^k_s - (\psi_s - \varphi^g_s\psi_g)\, g_{ij}) = 0,$$

которые представляют собой тождества в силу (39.7).

Уравнения (39.7) при дифференцировании по x^g, подстановке (39.6) и (39.12) новых соотношений не дают. В самом деле, для

$$A_{sij} = \xi^\alpha_g(g_{i\alpha}\partial_j\varphi^g_s + g_{j\alpha}\partial_i\varphi^g_s)$$

в случае $\psi_a = 0$ в [170] показано, что

$$\partial_g A_{sij} = \Lambda^f_{ig}A_{sfj} + \Lambda^f_{jg}A_{sfi} + \eta^\alpha_g(C^t_{\alpha s} - C^t_{\alpha f}\varphi^f_s)\, A_{tij},$$

откуда для

$$B_{sij} = A_{sij} + (\varphi^g_s\psi_g - \psi_s)\, g_{ij}$$

получаем

$$\begin{aligned}\partial_g B_{sij} = \Lambda^f_{ig} A_{sfj} + \Lambda^f_{jg} A_{sfi} + \eta^\alpha_g (C^t_{\alpha s} - C^t_{\alpha f}\varphi^f_s) A_{tlj} + \\ + \psi_f \eta^f_g A_{sij} + \eta^f_g (C^u_{fs} - \varphi^h_s C^u_{fh})(\varphi^k_u \psi_k - \psi_u) + \\ + (\varphi^f_s \psi_f - \psi_s)(g_{ih}\Lambda^h_{jg} + g_{hj}\Lambda^h_{ig} + \psi_k \eta^k_g g_{ij}) = \\ = \Lambda^f_{ig} B_{sfi} + \Lambda^f_{jg} B_{sfi} + \psi_f \eta^f_g B_{sij} + \eta^f_g (C^u_{fs} - \varphi^h_s C^u_{fh}) B_{uij},\end{aligned}$$

что также тождественно удовлетворяется в силу (39.7).

Таким образом, мы доказали, теорему: *полная система условий интегрируемости обобщенных уравнений Киллинга состоит из функциональных соотношений* (39.7) *и* (39.15).

§ 40. Условия на структуру групп конформных преобразований в полях тяготения

Наряду с пространством V_n с метрикой $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, допускающим группу G_r конформных преобразований с операторами $X_a = \xi^i_a p_i$, рассмотрим пространство V'_n с метрикой $ds^{2\prime}$, конформное пространству $V_n\left(ds^{2\prime} = e^\sigma\,ds^2\right)$. Тогда для новой метрики $ds^{2\prime}$ группа конформных преобразований G_r метрики ds^2 также является группой конформных преобразований. В самом деле, обобщенные уравнения Киллинга (39.1) для преобразованной метрики запишутся так:

$$\xi^k_a \partial_k g'_{ij} + g'_{ik}\partial_j \xi^k_a + g'_{jk}\partial_i \xi^k_a = (\psi_a + \xi^k_a \partial_k \sigma)\, g'_{ij},$$

т. е. векторы ξ^k_a являются векторами группы конформных преобразований новой метрики $ds^{2\prime}$ с соответствующими скалярами

$$\psi'_a = \psi_a + \xi^k_a \partial_k \sigma. \qquad (40.1)$$

Теорема 1. *Если* $\Delta_s = \psi_s - \varphi^f_s \psi_f = 0$ *для* $s = q+1, \ldots, r$, *то данная группа* G_r *конформных преобразований данного пространства с метрикой* $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ *является группой движений некоторого пространства, конформного данному.*

Нужно доказать, что при условии $\Delta_s = 0$ $(s = q+1, \ldots, r)$ существует такая функция σ, что скаляры ψ'_a в (40.1) для некоторой метрики $ds^{2\prime}$ можно обратить в нуль. Для этого рассмотрим условия интегрируемости уравнений

$$\xi^k_a \partial_k \sigma + \psi_a = 0,$$

которые для группы общего типа со стационарной подгруппой имеют вид:

$$\begin{matrix}\xi^\alpha_f \partial_\alpha \sigma + \psi_f = 0, \\ \Delta_s = 0\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}\alpha,\ f = 1, \ldots, q \\ s = q+1, \ldots, r\end{pmatrix}. \qquad (40.2)$$

В силу условий теоремы вторые уравнения этой системы тождественно удовлетворяются, а первые уравнения представляют линейно-независимую систему линейных неоднородных уравнений в частных производных. Для доказательства существования решения этой системы достаточно показать ее замкнутость ([101], глава III).

Если, следуя [101], ввести обозначения $p_\alpha = \partial_\alpha \sigma$, $\sigma = z$, то скобка Якоби для операторов Y_f, Y_g некоторых двух уравнений системы (40.2) представится в виде:

$$[Y_f, Y_g] \overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{q} \left[\frac{\partial Y_f}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial Y_g}{\partial x^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial Y_g}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial Y_g}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial Y_f}{\partial x^\alpha} + p_\alpha \frac{\partial Y_f}{\partial z} \right) \right] = \sum_{\alpha=1}^{q} \left(\xi_f^\alpha \partial_\alpha \xi_g^\beta - \xi_g^\alpha \partial_\alpha \xi_f^\beta \right) p_\beta -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{q} \left(\xi_g^\alpha \partial_\alpha \psi_f - \xi_f^\alpha \partial_\alpha \psi_g \right),$$

откуда, используя соотношения (39.3) и (39.8), будем иметь:

$$[Y_f, Y_g] = \left(C_{fg}^h + C_{fg}^s \varphi_s^h \right) \xi_h^\alpha p_\alpha + C_{fg}^h \psi_h + C_{fg}^s \psi_s = \left(C_{fg}^h + C_{fg}^s \varphi_s^h \right) Y_h,$$

что и означает замкнутость системы (40.2). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если поверхности транзитивности нетранзитивной группы конформных преобразований могут быть включены в однопараметрическое семейство неизотропных гиперповерхностей* $F(x) = \text{const}$, *то эта группа является группой движений некоторого риманова пространства.*

Перейдем к системе координат, в которой гиперповерхности $F(x) = \text{const}$ будут задаваться уравнениями $x^n = \text{const}$. В качестве остальных координатных гиперповерхностей возьмем гиперповерхности, ортогональные к гиперповерхностям $x^n = \text{const}$. В такой координатной системе функциональные соотношения (39.7) при $i = j = n$ сведутся к уравнениям

$$\left(\psi_s - \varphi_s^h \psi_h \right) g_{nn} = 0,$$

из которых следует $\psi_s - \varphi_s^h \psi_n = \Delta_s = 0$, и тогда наша теорема будет вытекать из теоремы 1.

Следствие для V_4 сигнатуры $(---+)$. *Если поверхности транзитивности группы конформных преобразований имеют размерность, на 2 меньшую размерности пространства представления, или являются неизотропными гиперповерхностями, то такая группа является группой движений некоторого риманова пространства* V_4 *сигнатуры* $(---+)$.

Следствие очевидно, так как в римановых пространствах V_4 сигнатуры $(---+)$ всякое двухпараметрическое семейство двумерных подпространств всегда можно включить в однопараметрическое семейство неизотропных гиперповерхностей.

Группы конформных преобразований, которые не могут быть рассматриваемы как группы движений какого-либо пространства, мы будем называть *нетривиальными*. Так, нетривиальные группы конформных преобразований в полях тяготения, как это следует из теоремы 2 и следствия, могут существовать только среди конформных групп преобразований, действующих на изотропных поверхностях транзитивности или транзитивных.

Для нахождения нетривиальных конформных групп преобразований в полях тяготения при условиях интегрируемости (39.7) и (39.15) обобщенных уравнений Киллинга перейдем к точке таким же образом, как это мы делали при определении транзитивных групп движений в полях тяготения в § 27 главы IV. При этом мы должны требовать, чтобы в точке общего положения хотя бы одна из величин Δ_s была отлична от нуля, чтобы получить соотношения для структуры именно нетривиальной группы конформных преобразований. Так как обобщенные уравнения Киллинга (39.1) линейные, то без нарушения общности рассуждений можно, очевидно, положить, что

$$\Delta_{q+1}|_{x=0}=2, \qquad \Delta_s|_{x=0}=0, \qquad s\neq q+1,$$

и тогда, повторяя рассуждения § 27 главы IV при переходе в условиях интегрируемости уравнений Киллинга к точке, получим, что представление операторов стационарной подгруппы в пространстве операторов нулевого порядка в случае группы с изотропными поверхностями транзитивности должно определяться матрицами

$$C_4=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & \alpha & 1\end{pmatrix}, \quad C_s=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a_s & 0 & -\beta_s\\ b_s & \beta_s & 0\end{pmatrix}, \quad s=5, \ldots, r. \tag{40.3}$$

При выводе этого представления мы считали, что система координат изотропно-полугеодезическая, для которой изотропные поверхности транзитивности $\overset{*}{V_3}$ записываются уравнениями $x^4=\mathrm{const}$, а метрический тензор g_{ij} имеет вид:

$$(g_{ij})=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & g_{14}\\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ 0 & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{Vmatrix}, \quad g_{14}\neq 0, \quad g_{22}g_{33}-g_{23}^2>0. \tag{40.4}$$

g_{14} можно обратить в 1 за счет выбора множителя e^{σ} конформного отображения. В такой системе координат $\xi^4=0$, а из обобщенных уравнений Киллинга (39.1) еще следует, что

$$\partial_1\xi^2=\partial_1\xi^3=0, \quad \psi=\partial_1\xi^1. \tag{40.5}$$

Для транзитивной нетривиальной группы конформных преобразований представление операторов стационарной подгруппы в пространстве операторов нулевого порядка задается матрицами

$$C_5=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha_5 & -\beta_5 & a_5 \\ \alpha_5 & 1 & -\gamma_5 & b_5 \\ \beta_5 & \gamma_5 & 1 & c_5 \\ a_5 & b_5 & c_5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_s=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_s & -\beta_s & a_s \\ \alpha_s & 0 & -\gamma_s & b_s \\ \beta_s & \gamma_s & 0 & c_s \\ a_s & b_s & c_s & 0 \end{pmatrix},$$
$$s=6, \ldots, r. \tag{40.6}$$

В случае транзитивной группы можно указать необходимые и достаточные условия на алгебру Ли L_r, чтобы соответствующая группа G_r была группой конформных преобразований некоторого поля тяготения. То что представление операторов стационарной подгруппы в пространстве операторов нулевого порядка должно задаваться матрицами (40.6), является необходимым и достаточным условием того, чтобы данная группа Ли G_r, действующая в четырехмерном пространстве, была группой конформных преобразований. К этим условиям нужно еще добавить условия того, чтобы данная группа имела транзитивное представление в четырехмерном пространстве. Но чтобы группа G_r имела представление в пространстве s измерений, необходимо и достаточно, чтобы она имела подгруппу индекса s, не содержащую нормальный делитель группы G_r ([137], стр. 203), что на языке алгебр Ли означает следующий факт: чтобы алгебре Ли L_r соответствовала транзитивная группа в пространстве s измерений, необходимо и достаточно, чтобы алгебра L_r имела подалгебру индекса s, не содержащую идеалов алгебры L_r. Сопоставляя полученные результаты, мы приходим к следующей теореме 3:

Пусть задана алгебра Ли $L_r(X_1 \ldots, X_r)$, *у которой элементы* $X_5, \ldots, X_r$ *образуют подалгебру* L_{r-4}. *Если для элемента* $X_s \in L_{r-4}$ *определять в пространстве* X_1, X_2, X_3, X_4 *преобразование* $C_sX_g=[X_gX_s]\,(\mathrm{mod}\,L_{r-4})$, *то, чтобы соответствующая группа* G_r *со стационарной подгруппой* G_{r-4} (*алгебры* L_{r-4}) *была нетривиальной группой конформных преобразований риманова пространства* V_4 *сигнатуры* $(---+)$, *необходимо и достаточно существование базиса, в котором* C_s *имеют вид* (40.6) *и подалгебра* L_{r-4} *не содержит идеалов алгебры* L_r.

В § 27 главы IV мы перечислили все возможные матричные алгебры матриц типа (40.6), диагональные элементы которых были равны нулю. Для нетривиальных групп конформных преобразований необходимо присутствие в представлении (40.6) матрицы типа C_5. Матричные алгебры, содержащие такую матрицу, можно получить из матричных алгебр § 27 главы IV либо прибавлением единичной матрицы E_4 к одному из элементов матричных алгебр § 27 главы IV, либо прибавлением E_4 к этим алгебрам как нового элемента. Так как матрица C_5 имеет отличный от нуля след, а след лиевского произведения матриц равен нулю, то первый способ построения матричных алгебр типа (40.6) возможен лишь для разрешимых алгебр. Матричные алгебры такого типа будут сводимы к одной из следующих матричных алгебр:

разрешимые алгебры 1-го порядка:

$$E_4+\alpha(e_{21}-e_{12})+c(e_{34}+e_{43}); \tag{40.7}$$

$$E_4+\alpha(e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}); \tag{40.8}$$

разрешимые алгебры 2-го порядка:

$$E_4+\alpha(e_{12}-e_{21}),\ \beta(e_{12}-e_{21})+e_{34}+e_{43}; \tag{40.9}$$

$$E_4+c(e_{34}+e_{43}),\ e_{21}-e_{12}; \tag{40.10}$$

$$E_4+\alpha(e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}),\ e_{13}+e_{14}-e_{31}+e_{41}; \tag{40.11}$$

$$E_4+c(e_{34}+e_{43}),\ e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}; \tag{40.12}$$

разрешимые алгебры 3-го порядка:

$$E_4+\alpha(e_{12}-e_{21})+c(e_{34}+e_{43}),\ e_{13}+e_{14}-e_{31}+e_{41},\ e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}; \tag{40.13}$$

разрешимые алгебры 4-го порядка:

$$E_4+\alpha(e_{12}-e_{21}),\ \beta(e_{12}-e_{21})+e_{34}+e_{43},\ e_{13}+e_{14}-e_{31}+e_{41},\ e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}; \tag{40.14}$$

$$E_4+c(e_{34}+e_{43}),\ e_{12}-e_{21},\ e_{13}+e_{14}-e_{31}+e_{41},\ e_{23}+e_{24}-e_{32}+e_{42}. \tag{40.15}$$

Второй способ построения всегда возможен. Соответствующие алгебры из метрических алгебр (27.12), (27.14) — (27.18) получаются прибавлением матрицы E_4.

§ 41. Нетранзитивные нетривиальные группы конформных преобразований в полях тяготения. Нетривиальные транзитивные группы гомотетий.

В базисе $X_1, \ldots, X_r$, где операторы X_1, X_2, X_3 имеют нулевой порядок, а другие операторы — порядок выше нулевого в линейном присоединенном представлении группы с представлением (40.3) оператору X_4 будет соответствовать матрица (C^a_{b4}) $(a,\ b=1,\ \ldots,\ r)$, имеющая вид:

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & -\alpha & A \\ 0 & \alpha & 1 & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right\|, \tag{41.1}$$

где A, B — некоторые матрицы. Очевидно, путем выбора базиса в пространстве операторов $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r$ можно добиться того, чтобы операторы X_1, X_2, X_3 считать принадлежащими соответственно корням 2, $1 \pm i\alpha$ характеристического полинома этой матрицы. Докажем, что операторов из стационарной подгруппы, принадлежащих корням, вещественные части которых больше или равны 2, нет. Предположим, что такие операторы в группе G_r существуют. Тогда эти операторы вместе с операторами X_1, X_2, X_3 на основании теоремы ([137], стр. 243) о том, что «если X_1 принадлежит корню ω_1, X_2 — корню ω_2, то оператор $X_3 = [X_1,\ X_2]$ принадлежит корню $\omega_1 + \omega_2$; если же $\omega_1 + \omega_2$ не является корнем характеристического полинома, то $[X_1,\ X_2] = 0$», будут образовывать подалгебру N, являющуюся нильпотентной. Алгебру N называют *нильпотентной*, если для любого $X \in N$ существует такое конечное n, что $[X^n Y] = [X[\ldots[X[XY]]\ldots]] = 0$ для любого $Y \in N$. Пусть в подалгебре N базис выбран таким образом, что его элементы расположены в порядке возрастания вещественных частей соответствующих им корней характеристического полинома оператора X_4. Тогда в присоединенном представлении этой подалгебры N элементам ее базиса будут соответствовать матрицы, у которых будут отличны от нуля только элементы, стоящие выше главной диагонали. Все корни характеристического полинома произвольной линейной комбинации матриц, соответствующих элементам базиса подалгебры N, будут равны нулю, что означает невозможность выбора в подалгебре N оператора, которому в присоединенном представлении подалгебры L соответствовала бы матрица типа (40.1), имеющая характеристический полином с отличными от нуля корнями. Значит, для подгруппы с подалгеброй N все $\Delta_s = 0$ и на основании теоремы 1 § 40 можно утверждать, что эта подгруппа может быть рассматриваема как группа движений; но операторы группы движений могут быть только нулевого или первого порядка ([170], стр. 260) и, значит, представление подалгебры операторов первого порядка в пространстве операторов нулевого порядка *точное*. Представление алгебры называют точным, если нулевым элементам алгебры соответствуют ненулевые матрицы. В представлении (40.3) матрицами, соответствующими операторам подгруппы движений, могут быть матрицы C_s, $s = 5,\ \ldots,\ r$.

В качестве элементов базиса пространства этих матриц можно взять матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют, операторы, принадлежащие корням $1 \pm i\alpha$, 0 характеристического полинома оператора X_4. Мы показали, что, с одной стороны, операторы, принадлежащие корням, вещественные части которых больше или равны двум, могут быть рассматриваемы как операторы движения, с другой стороны, операторы движения стационарной подгруппы могут принадлежать лишь корням $1 \pm i\alpha$, 0, вещественные части которых меньше двух, значит, операторов стационарной подгруппы, принадлежащих корням, вещественные части которых больше или равны двум, нет. Отсюда следует, что операторы X_1, X_2, X_3 образуют подалгебру, которая будет или коммутативной

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0, \tag{41.2}$$

или приводимой к виду:

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2 X_3] = X_1. \tag{41.3}$$

Рассмотрим случай (41.2). Операторы X_2, X_3 с помощью допустимых преобразований, сохраняющих вид метрики (40.4), приведем к виду:

$$X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3.$$

Оставшегося произвола в допустимых преобразованиях достаточно для того, чтобы оператор X_1 привести к виду:

$$X_1 = p_1 + B_1(x^4)\, p_2 + C_1(x^4)\, p_3.$$

Принимая во внимание (40.5), оператор X_4 можно взять в виде:

$$X_4 = A_4(x^1, x^2, x^3, x^4)\, p_1 + B_4(x^2, x^3, x^4)\, p_2 + C_4(x^2, x^3, x^4)\, p_3.$$

Операторы X_2, X_3 принадлежат корневому подпространству корней $1 \pm i\alpha$ характеристического полинома оператора X_4; тому же подпространству будет принадлежать и часть $B_1(x^4)\, p_2 + C_1(x^4)\, p_3$ оператора X_1, но, с другой стороны, линейная комбинация $B_1(x^4)\, p_2 + C_1(x^4)\, p_3$ должна принадлежать и корню 2, так как оператор X_4 разбиение X_1 на сумму p_1 и $B_1(x^4)\, p_2 + C_1(x^4)\, p_3$ оставляет инвариантным; значит, $B_1 = C_1 = 0$. В итоге получается, что операторы X_1, X_2, X_3 могут быть взяты в виде

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3$$

и, как показано выше, могут быть рассматриваемы как операторы групп движений, но тогда, как это показано в § 25 главы IV, соответствующая метрика может быть приведена к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22}(x^4) & g_{23}(x^4) & 0 \\ 0 & g_{32}(x^4) & g_{33}(x^4) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{22}g_{33} - g_{23}^2 > 0. \qquad (41.4)$$

Эта метрика допускает еще два оператора движения X_4 и X_5 (§ 27, глава IV) и оператор гомотетии

$$X_6 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3.$$

Исследование обобщенных уравнений Киллинга (39.1) для данной метрики (41.4) показывает, что если $(g_{22} - g_{33})^2 + g_{23}^2 \neq 0$, то указанная группа G_6 является максимальной. Если же $g_{22} = g_{33}$ и $g_{23} = 0$, то в этом случае пространство становится конформно-плоским.

Теперь перейдем к исследованию случая (41.3). Легко показать, как это уже сделано выше для корней, вещественные части которых больше или равны двум, что операторами, принадлежащими корням $1 \pm i\alpha$, могут быть только X_2, X_3 и некоторые операторы первого порядка. Представление этих операторов первого порядка в пространстве операторов нулевого порядка задается матрицами

$$C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

когда этих операторов первого порядка два, или одной из этих матриц, если таких операторов первого порядка всего один, в последнем случае, очевидно, $\alpha = 0$. В первом случае мы находим следующую подгруппу нашей искомой G_r:

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = [X_1, X_5] = [X_1, X_6] = [X_5, X_6] = 0,$$
$$[X_2 X_3] = X_1, \ [X_2 X_5] = X_1, \ [X_3 X_6] = X_1, \ [X_2 X_6] = [X_3 X_5] = 0.$$

Если мы сделаем преобразование

$$X_1' = X_1, \ X_2' = X_2 - X_5, \ X_3' = X_3, \ X_5' = X_5, \ X_6' = X_6,$$

которое сохраняет структуру матрицы (41.1), то получим, что группа G_r содержит абелеву подгруппу типа (41.2) и, значит, представляет некоторый случай группы конформных преобразований G_6 пространства с метрикой (41.4). Аналогичным образом показывается, что и тогда, когда имеется один оператор первого порядка, принадлежащий корню 1, случай (41.3) сводится к случаю (41.2).

Нам осталось рассмотреть случай, когда корням $1 \pm i\alpha$ характеристического полинома матрицы (41.1) отвечают только операторы X_2, X_3. В этом случае в группе G_r можно указать подгруппу четвертого порядка с операторами X_1, X_2, X_3, X_4:

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = 0, \ [X_2, X_3] = X_1,$$

$$[X_1, X_4] = 2X_1, \ [X_2, X_4] = X_2 - \alpha X_3, \ [X_3, X_4] = \alpha X_2 + X_3,$$

откуда следует, что операторы X_1, X_2, X_3 можно взять в виде:

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = x^2 p_1 + p_3,$$

а метрику в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{22}(x^4) & g_{23}(x^4) & -x^3 \\ 0 & g_{32}(x^4) & g_{33}(x^4) & 0 \\ 1 & -x^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{22}g_{33} - g_{23}^2 > 0.$$

Как отмечено в § 25 главы IV, эта метрика с помощью преобразований координат может быть приведена к метрике (41.4).

Резюмируя все доказанное выше, мы можем сформулировать

Теорему 1: *полями тяготения, допускающими нетривиальную группу конформных преобразований G_r, действующую на изотропных поверхностях транзитивности, могут быть только пространства с метрикой*

$$ds^2 = e^{\sigma(x)} (2\, dx^1\, dx^4 + g_{22}(x^4)\, dx^{2^2} + 2g_{23}(x^4)\, dx^2\, dx^3 + g_{33}(x^4)\, dx^{3^2}),$$

$$\Delta = g_{22}g_{33} - g_{23}^2, \quad (g_{22} - g_{33})^2 + g_{23}^2 \neq 0,$$

с группой G_6 с операторами

$$X_i = p_i \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad X_4 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3,$$

$$X_5 = x^2 p_1 - \int \frac{g_{33}}{\Delta}\, dx^4 p_2 + \int \frac{g_{23}}{\Delta}\, dx^4 p_3,$$

$$X_6 = x^3 p_1 + \int \frac{g_{23}}{\Delta}\, dx^4 p_2 - \int \frac{g_{22}}{\Delta}\, dx^1 p_3.$$

Теорему 1 обобщим следующим образом:

Теорема 2. *Группы конформных преобразований, действующие в полях тяготения, не являющихся конформно-плоскими, являются группами движений или гомотетий пространства, конформного данному.*

Очевидно, теорему нужно доказать только для нетривиальных транзитивных групп. Из уравнений (39.12) и (39.16) ясно, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что $C^5_{ab} = 0$ $(a, b = 1, \ldots, r)$. В самом деле, если $\psi_5|_{x=0} = 2$, $\psi_a|_{x=0} = 0$, $a \neq 5$, то они будут таковыми и повсюду, когда $C^5_{ab}=0$ и ψ_a удовлетворяют уравнениям (39.12) и (39.16).

Лемма 1. *Если все операторы нулевого порядка будут принадлежать корням характеристического полинома группы для оператора X_5, вещественные части которых равны 1, то соответствующее пространство конформно-плоское.*

Лиевское произведение операторов нулевого порядка будет принадлежать корням, вещественные части которых равны двум. Если существуют операторы, принадлежащие корню, вещественная часть которого равна двум, то такие операторы вместе с другими операторами, принадлежащими корням, вещественные части которых больше двух, будут образовывать идеал в алгебре, состоящей из операторов X_1, X_2, X_3, X_4 и указанных операторов, что противоречит условиям теоремы 3 § 40. Значит, операторов, принадлежащих корням, вещественные части которых равны двум, нет, и операторы X_1, X_2, X_3, X_4 соответствуют абелевой подгруппе. Это означает, что соответствующее пространство будет конформно-плоским.

Лемма 2. *Для полей тяготения, не являющихся конформно-плоскими, представление* (40.6) *точное.*

Пусть представление (40.6) неточное, т. е. существуют операторы Y, которым в представлении (40.6) соответствует нулевая матрица. Значит, операторы Y будут порядка двух или выше. Сначала покажем, что порядок операторов группы конформных преобразований не выше двух. Предположим, что у группы G_r, например, есть оператор $X=\xi^i p_i$ третьего порядка:

$$\xi^i = a^i_{klm}x^k x^l x^m + \ldots,$$

тогда из обобщенных уравнений Киллинга (39.1) следует, что

$$\psi = b_{kl}x^k x^l + \ldots$$

Представляя метрический тензор g_{ij} в виде

$$g_{ij} = \delta^i_j e_i + \ldots, \quad e_i = \pm 1,$$

и рассматривая в обобщенных уравнениях Киллинга члены второго порядка, получаем

$$e_i a^i_{jlm} + e_j a^j_{ilm} = \delta^i_j e_i b_{kl},$$

откуда следует, что $a^i_{jlm} = b_{kl} = 0$. Аналогично доказывается отсутствие операторов высших порядков.

Если оператор Y имеет второй порядок, то операторы $[X_iY]$ ($i=1, 2, 3, 4$) будут операторами первого порядка, которым в представлении (40.6) соответствуют ненулевые матрицы. Из тождеств Якоби для операторов X_i, X_j, Y ($i, j=1, \ldots, 4$), взятых по модулю по подпространству операторов $X_5, \ldots, X_r$:

$$[X_i[X_jY]] = [X_j[X_iY]] \ (\mathrm{mod}(X_5, \ldots, X_r)),$$

следует, что эти матрицы должны иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & -\gamma & \delta \\ \beta & \alpha & & \\ \gamma & & \alpha & \\ \delta & & & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & \alpha & & \\ -\alpha & \beta & & \\ & & \beta & \\ & & & \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma & & \alpha & \\ & \gamma & \beta & \\ -\alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ & & \delta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta & & & \alpha \\ & \delta & & \beta \\ & & \delta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{41.5}$$

причем их лиевская оболочка будет совпадать с максимальной алгеброй матриц (40.6), если $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2 \neq 0$. Так как пространство неконформно-плоское, то $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2=0$. Таким образом, операторы Y определяются изотропными векторами $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Линейная комбинация этих векторов снова должна быть изотропным вектором, но в пространстве Минковского такая система изотропных векторов может состоять только из одного вектора, значит, оператор Y второго порядка единствен. С помощью преобразований Лоренца α и β можно обратить в 0, а γ сделать равной $-\delta$, после этого совокупность матриц (41.5) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После преобразования

$$X_1' = X_1, \quad X_2' = X_2, \quad X_3' = \frac{X_4 - X_3}{2}, \quad X_4' = X_3 + X_4$$

матрицы, соответствующие операторам $[X_1Y]$, $[X_2Y]$, $[X_3Y]$, будут равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{41.6}$$

а матрица, соответствующая $[X_4Y]$, будет нулевой матрицей.

Операторы, которым в представлении (40.6) соответствуют эти матрицы, обозначим соответственно X_6, X_7, X_5. Операторы X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_7 можно выбрать таким образом, чтобы они были корневыми векторами оператора X_5. X_1, X_2 будут принадлежать корню 1 характеристического полинома группы для оператора X_5, X_3—корню 2, X_4 — 0, X_6, X_7 — —1, после этого оператор Y окажется принадлежащим корню —2.

Совокупность матриц (41.6) образует алгебру типа (40.13), а после добавления матрицы $e_{12}-e_{21}$ (соответствующий оператор обозначим через X_8) становится алгеброй типа (40.15); добавление всякой иной матрицы превращает алгебру в максимальную алгебру матриц типа (40.6). Оператор X_8 будет принадлежать корню 0.

Предположим сначала, что в алгебре L_r группы G_r оператор X_8 не содержится. В этом случае коммутационные соотношения между операторами группы G_8 должны иметь вид:

$$
\begin{gathered}
[X_1, X_2]=aX_3,\ [X_1, X_3]=[X_2, X_3]=0,\\
[X_1, X_4]=bX_1+cX_2,\ [X_2, X_4]=dX_1+eX_2,\ [X_3, X_4]=0,\\
[X_1, X_5]=X_1,\ [X_2, X_5]=X_2,\ [X_3, X_5]=2X_3,\ [X_4, X_5]=0,\\
[X_6, X_5]=-X_6,\ [X_7X_5]=-X_7,\\
[X_1, X_6]=X_4+fX_5,\ [X_2, X_6]=gX_5,\ [X_3, X_6]=X_1,\\
[X_4, X_6]=hX_6+kX_7,\ [X_6, X_7]=lY,\\
[X_1, X_7]=mX_5,\ [X_2, X_7]=X_4+nX_5,\ [X_3, X_7]=X_2,\\
[X_4, X_7]=pX_6+qX_7,\\
[X_5, Y]=2Y,\ [X_6, Y]=[X_7, Y]=0,\ [X_1, Y]=X_6,\\
[X_2, Y]=X_7,\ [X_3, Y]=X_5,\ [X_4, Y]=rY.
\end{gathered}
\tag{41.7}
$$

Из рассмотрения тождеств Якоби операторов этой алгебры следует, что

$$f=n=r=b=e=h=q=0,$$

$$g=-m=-\frac{a}{2},\quad d=k=-c=-p=-\frac{3a}{2},\quad l=a.$$

Если $a=0$, то операторы нулевого порядка X_1, X_2, X_3, X_4 будут образовывать абелеву подгруппу и соответствующее пространство будет конформно-плоским. Если же $a\neq 0$, то можно считать, что $a=2$, и тогда операторное представление алгебры Ли (41.7) будет иметь вид:

$$X_1=p_1,\quad X_2=p_2+2x^1p_3,\quad X_3=p_3,\quad X_5=x^1p_1+x^2p_2+2x^3p_3,$$
$$X_4=-3x^2p_1+3x^1p_2+3(x^{1^2}-x^{2^2})p_3+p_4,$$
$$X_6=(x^3-3x^1x^2)p_1+\frac{1}{2}(3x^{1^2}-x^{2^2})p_2+(x^{1^3}-3x^1x^{2^2})p_3+x^1p_4,$$
$$X_7=\frac{x^{1^2}-3x^{2^2}}{2}p_1+(x^3+x^1x^2)p_2+2(x^1x^3-x^{2^3})p_3+x^2p_4,$$
$$Y=\left[x^1x^3-\frac{1}{2}(x^{2^3}+3x^2x^{1^2})\right]p_1+\left[x^2x^3+\frac{1}{2}(x^{1^3}-x^1x^{2^2})\right]p_2+$$
$$+\left[x^{3^2}-\frac{3}{2}x^{1^2}x^{2^2}-\frac{3}{4}x^{2^4}+\frac{x^{1^4}}{2}\right]p_3+\frac{1}{2}(x^{1^2}+x^{2^2})p_4.$$

Пространство, допускающее эту группу в качестве группы конформных преобразований, имеет метрику

$$ds^2=e^{\sigma(x)}(dx^{1^2}+dx^{2^2}-4x^2\,dx^1\,dx^4+2\,dx^3\,dx^4),$$

для которой тензор Вейля конформной кривизны равен нулю.

Аналогичный результат получается в случае, когда в алгебре Ли L_r содержится оператор X_8. Лемма доказана.

Чтобы лиевское произведение двух операторов порождало оператор X_5, необходимо, чтобы след матрицы, соответствующей X_5 в присоединенном представлении группы G_r, был равен нулю. След матрицы C_5 в (40.6) равен 4, значит, след оператора X_5 на стационарной подгруппе должен равняться — 4. Этому условию, как видно из (40.7) — (40.15), удовлетворяют только следующие алгебры:

$$E_4+\alpha(e_{12}-e_{21})+2(e_{33}-e_{44}),\ e_{14}-e_{31},\ e_{24}-e_{32},$$
$$E_4+2(e_{33}-e_{44}),\ e_{12}-e_{21},\ e_{14}-e_{31},\ e_{24}-e_{32},$$
$$E_4+4(e_{33}-e_{44}),\ e_{14}-e_{31}.$$

Только для первых двух алгебр возможно $[X_1X_4]=aX_5$ или $[X_2X_4]=bX_5$, но последние противоречат тождествам Якоби для операторов X_1, X_2, X_3, X_4. Теорема полностью доказана.

Нам осталось определить только нетривиальные группы гомотетий в полях тяготения. Метод их нахождения аналогичен тому, который применялся при определении транзитивных групп движений в полях тяготения в § 27 главы IV: рассматриваем всевозможные матричные алгебры (40.7) — (40.15) и ищем их всевозможные дополнения до всей алгебры L_r, по найденной алгебре L_r строим представление группы и затем путем решения обобщенных уравнений Киллинга находим метрику, которую еще исследуем на максимальную подвижность. Оказывается, что *поля тяготения, допускающие максимальную нетривиальную транзитивную группу гомотетий, совпадают* *с полями тяготения* (27.23), *допускающими группу G_6 движений. Оператор гомотетии имеет вид*:

$$X_7 = 2x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3,$$

и, таким образом, порядок максимальной нетривиальной группы гомотетий в неконформно-плоских полях тяготения равен семи.

Приведем также операторы группы конформных преобразований конформно-плоского поля тяготения:

$$\begin{gathered} ds^2 = e^{2H}(-dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{4^2}), \quad H = H(x), \\ X_i = p_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad Z_1 = x^2 p_3 - x^3 p_2, \\ Z_2 = x^3 p_1 - x^1 p_3, \quad Z_3 = x^1 p_2 - x^2 p_1, \\ U_1 = x^1 p_4 + x^4 p_1, \quad U_2 = x^2 p_4 + x^4 p_2, \\ U_3 = x^3 p_4 + x^4 p_3, \quad V = x^i p_i \quad (i = 1, \ldots, 4), \\ Y_i = 2x^i x^j p_j - (x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2}) e_i \delta_i^j p_j, \\ e_1 = e_2 = e_3 = -e_4 = 1 \qquad (i, j = 1, \ldots, 4). \end{gathered} \tag{41.8}$$

§ 42. Классификация полей тяготения по группам конформных преобразований

Результаты, полученные в предыдущих параграфах этой главы, относятся к определению групп Ли G_r, которые могут быть группами конформных преобразований некоторого поля тяготения. Для получения полной классификации полей тяготения по группам конформных преобразований для каждого класса полей тяготения с метрикой $ds^{2'} = e^{\sigma} ds^2$, где метрика ds^2 допускает группу G_r в качестве группы движений или гомотетий или группы конформных преобразований G_{15} (если ds^2 — метрика конформно-плоского поля тяготения), необходимо указать все возможные виды функции σ, определяющие, когда и какая подгруппа группы G_r будет группой движений. Для этого для каждой группы конформных преобразований G_r нужно сделать перечисление всевозможных подгрупп G_m ($m < r$) и затем определять, при каких σ данная подгруппа будет группой движений. Если G_m есть некоторая подгруппа группы G_r с операторами $X_a = \xi_a^i p_i$ ($a = 1, \ldots, m$), то для определения σ необходимо решать систему уравнений $\xi_a^i \partial_i \sigma + \psi_a = 0$, где ψ_a — скаляры, соответствующие векторам ξ_a^i в обобщенных уравнениях Киллинга. Функция σ будет представлять общее решение этой системы уравнений. При умножении метрики ds^2 на конформный множитель e^{σ} операторы подгруппы G_m будут операторами движения, а остальные операторы в правых частях обобщенных уравнений Киллинга будут иметь некоторые скаляры ψ.

Перечисление подгрупп данной группы G_r достаточно вести с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, потому что преобразования, осуществляющие внутренний автоморфизм, сохраняют метрику, и группы, изоморфные при внутреннем автоморфизме, подобны. Определение неизоморфных с точностью до внутренних автоморфизмов подгрупп можно легко осуществить путем рассмотрения присоединенного представления этих групп ([137], стр. 150—151). Так как этот алгоритм применим ко всем случаям, то достаточно ограничиться рассмотрением примера применения его к некоторой группе. В качестве примера применения изложенного метода к классификации полей тяготения по группам конформных преобразований проведем исследование функции σ в классе метрик $ds^{2'} = e^{\sigma} ds^2$, где ds^2 имеет вид (27.22):

$$ds^2 = e^{-2x^4}(dx^{1^2} + dx^{2^2}) + b\,[e^{-4x^4}(dx^3 + x^1 dx^2)^2 - dx^{4^2}]$$

с операторами движения

$$X_1 = p_1 - x^2 p_3,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3,\ X_4 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + 2x^3 p_3 + p_4,$$
$$X_5 = x^2 p_1 - x^1 p_2 + \frac{x^{1^2} - x^{2^2}}{2}\, p_3.$$

Коммутационные соотношения между операторами группы G_5 будут иметь вид:

$$[X_1,\ X_2] = X_3,\quad [X_1,\ X_3] = [X_2,\ X_3] = 0,$$
$$[X_1,\ X_4] = X_1,\quad [X_2,\ X_4] = X_2,\quad [X_3,\ X_4] = 2X_3,$$
$$[X_1,\ X_5] = -X_2,\quad [X_2,\ X_5] = X_1,\quad [X_3,\ X_5] = [X_4,\ X_5] = 0.$$

Матрицы $C_i = (C^j_{kl})$ линейного присоединенного представления алгебры L_5 группы G_r будут иметь вид:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},\quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы определяют преобразование элементов базиса алгебры L_5; чтобы получить преобразование координат, матрицы C_i нужно транспонировать. Линейная присоединенная группа, преобразования которой будут определять внутренний автоморфизм в алгебре Ли L_r, совпадает с совокупностью линейных преобразований координат, задаваемых матрицами

$$A_i(t_i) = e^{t_i C_i'} = E + t_i C_i' + \frac{t_i^2}{2} C_i^{2\prime} + \ldots$$

и их всевозможными произведениями. В нашем примере матрицы $A_i(t_i)$ будут равны:

$$A_1(t_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & -t_1 & 1 & 0 & -\frac{t_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_2(t_2) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -t_2 \\ 0 & 1 & 0 & -t_2 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{t_2^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_3(t_3) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2t_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad A_4(t_4) = \begin{Vmatrix} e^{t_4} & & & & \\ & e^{t_4} & & & \\ & & e^{2t_4} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_5(t_5) = \begin{Vmatrix} \cos t_5 & \sin t_5 & & & \\ -\sin t_5 & \cos t_5 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Если для двух подалгебр L_m и L_m' существует преобразование линейной присоединенной группы, которое подалгебру L_m переводит в подалгебру L_m', то эти подалгебры L_m и L_m' и соответствующие им подгруппы G_m и G_m' будут изоморфны с помощью внутреннего автоморфизма группы. Сначала определим с точностью до внутренних автоморфизмов всевозможные подгруппы G_1. В алгебре Ли L_5 возьмем произвольный оператор

$$X = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5,$$

которому в координатном пространстве алгебры L_5 соответствует вектор

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e). \tag{42.1}$$

Если $d \neq 0$, то этот вектор преобразования $A_1(t_1)$, $A_2(t_2)$, $A_3(t_3)$ можно перевести в вектор

$$(0,\ 0,\ 0,\ d,\ e);$$

если же $d=0$, но $e \neq 0$, то вектор (42.1) можно с помощью преобразований $A_1(t_1)$, $A_2(t_2)$, $A_4(t_4)$ перевести в вектор

$$(0,\ 0,\ \varepsilon e,\ 0,\ e), \quad \varepsilon = 0,\ \pm 1.$$

Наконец, если $d=e=0$, то вектор (42.1) можно перевести в векторы

$$(0,\ b,\ 0,\ 0,\ 0) \quad \text{или} \quad (0,\ 0,\ c,\ 0,\ 0).$$

Переходя от векторов (42.1) к операторам X, получаем, что неизоморфные с точностью до внутренних автоморфизмов подгруппы G_1 задаются оператором

$$X_4 + eX_5, \quad \text{или} \quad X_5 + \varepsilon X_3, \quad \varepsilon = 0,\ \pm 1, \quad \text{или} \quad X_2, \quad \text{или} \quad X_3. \tag{42.2}$$

При определении подгруппы G_2 считаем, что первый оператор должен совпадать с одним из операторов (42.2), а другой находим путем упрощения с помощью преобразований $A_i(t_i)$, которые оставляют без изменения первый оператор в (42.2), исходя из требования, что он должен образовывать алгебру L_2 с первым оператором. Пусть сначала одним оператором подгруппы G_2 является оператор $Y_1 = X_4 + eX_5$. Другой оператор подгруппы G_r можно взять в виде

$$Y_2 = aX_1 + bX_2 + cX_3 + e_1X_5.$$

С помощью преобразований $A_4(t_4)$, $A_5(t_5)$, не изменяющих оператор $X_4 + eX_5$, a можно обратить в нуль, а два числа (если они не равны нулю) из чисел b, c, e_1 превратить в равные между собой по абсолютной величине числа. Так как операторы Y_1 и Y_2 должны образовывать алгебру, то

$$eb = cb = ce_1 = be_1 = 0.$$

Значит, подгруппы G_2, содержащие оператор $X_4 + eX_5$, задаются операторами

$$X_4,\ X_2, \quad \text{или} \quad X_4 + eX_5,\ X_3, \quad \text{или} \quad X_4,\ X_5.$$

Если подгруппа G_2 не содержит оператора X_4, то в этом случае возможны такие неизоморфные с точностью до внутренних автоморфизмов группы подгруппы G_2:

$$X_5,\ X_3 \quad \text{и} \quad X_2,\ X_3.$$

Аналогичным методом определяются подгруппы G_3 и G_4. Подгруппы G_3

задаются операторами:

$$X_4,\ X_2,\ X_3;\quad X_4,\ X_5,\ X_3;\quad X_1,\ X_2,\ X_3,$$

а подгруппы G_4 — операторами:

$$X_4+eX_5,\ X_1,\ X_2,\ X_3;\quad X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_5.$$

Теперь для определения σ для каждой подгруппы G_m с операторами $Y_1, \ldots, Y_m$ нужно решать систему уравнений

$$Y_i\sigma+\psi_i=0 \qquad (i=1, \ldots, m).$$

Результат записывается в следующем виде:

$$\text{I.}\ \Big\{X_4+eX_5;\ \sigma=\varphi\Big((x^{1^2}+x^{2^2})\,e^{-2x^4}=A,\quad \operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2}-ex^4=B,$$
$$x^3e^{-2x^4}+\frac{A}{4}\sin 2\,(ex^4+B)=C\Big)\Big\}.$$

$$\Big\{X_5+\varepsilon X_3,\ \varepsilon=0,\ \pm1;\ \sigma=\varphi\Big(x^{1^2}+x^{2^2},\ x^3-\varepsilon\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2}+\frac{x^1x^2}{2},\ x^4\Big)\Big\}.$$
$$\{X_2;\ \sigma=\varphi(x^1,\ x^3,\ x^4)\}.\quad \{X_3;\ \sigma=\varphi(x^1,\ x^2,\ x^4)\}.$$

$$\text{II.}\ \{X_2,\ X_4;\ \sigma=\varphi(x^1e^{-x^4},\ x^3e^{-2x^4})\}.\ \{X_4+eX_5,\ X_3;\ \sigma=\varphi(A,B)\}.$$
$$\{X_4,\ X_5;\ \sigma=\varphi(A,\ (2x^3+x^1x^2)\,e^{-2x^4})\}.\ \{X_5,\ X_3;\ \sigma=\varphi(x^{1^2}+x^{2^2},\ x^4)\}.$$
$$\{X_2,\ X_3;\ \sigma=\varphi(x^1,\ x^4)\}.$$

$$\text{III.}\ \{X_4,\ X_2,\ X_3;\ \sigma=\varphi(x^1e^{-x^4})\}.\quad \{X_4,\ X_5,\ X_3;\ \sigma=\varphi(A)\}.$$

$$\text{IV.}\qquad \{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_5;\ \sigma=\varphi(x^4)\}.$$

Здесь римская цифра означает порядок подгруппы G_m, φ-произвольная функция своих аргументов. Подгруппы, для которых найденные для них σ допускают подгруппы движений более высокого порядка, опущены.

Применение вышеуказанного метода классификации подгрупп групп G_r к группе конформных преобразований G_{15} конформно-плоского поля тяготения становится затруднительным ввиду большого значения порядка этой группы. Классификацию подгрупп группы конформных преобразований G_{15} и определение соответствующих групп движений в конформно-плоских полях тяготения разберем в следующем параграфе.

§ 43. Группы движений в конформно-плоских полях тяготения

Группы движений в конформно-плоских полях тяготения будут являться подгруппами группы конформных преобразований G_{15} конформно-плоских полей тяготения. Значит, для определения групп движений в конформно-плоских полях тяготения нужно провести классификацию подгрупп группы G_{15} с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы. Метод классификации состоит в следующем. Устанавливается изоморфизм между группой G_{15} и группой движений псевдоевклидова пространства S_6 сигнатуры $(----++)$. Преобразования последней группы можно рассматривать как координатные преобразования, осуществляющие внутренний автоморфизм группы. Задача определения неизоморфных с точностью до внутренних автоморфизмов подгрупп группы G_{15} сводится к перечислению подгрупп группы движений пространства S_6, не подобных относительно преобразований этой же группы.

1. Изоморфизм между группой G_{15} и группой движений псевдоевклидова пространства S_6. Соответствие между операторами (41.8) группы конформных преобразований G_{15} и инфинитезимальными матрицами группы движений пространства S_6 следующее:

$$\begin{aligned}
&X_1 \to e_{15} + e_{14} + e_{51} - e_{41}, && Y_1 \to e_{14} - e_{15} - e_{41} - e_{51},\\
&X_2 \to e_{25} + e_{24} + e_{52} - e_{42}, && Y_2 \to e_{24} - e_{25} - e_{42} - e_{52},\\
&X_3 \to e_{35} + e_{34} + e_{53} - e_{43}, && Y_3 \to e_{34} - e_{35} - e_{43} - e_{53},\\
&X_4 \to - e_{65} - e_{64} - e_{46} + e_{56}, && Y_4 \to e_{64} - e_{65} + e_{46} + e_{56},
\end{aligned} \tag{43.1}$$

$$\begin{aligned}
&Z_1 \to e_{23} - e_{32}, && U_1 \to e_{16} + e_{61}, &&\\
&Z_2 \to e_{31} - e_{13}, && U_2 \to e_{26} + e_{62}, && V \to e_{54} + e_{45}.\\
&Z_3 \to e_{12} - e_{21}, && U_3 \to e_{36} + e_{63}, &&
\end{aligned}$$

Преобразованиям

$$\begin{aligned}
&x^{1'} = - x^1, && x^{i'} = x^i, && i = 2,\ 3,\ 4,\\
&x^{2'} = - x^2, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ 3,\ 4,\\
&x^{3'} = - x^3, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ 2,\ 4,\\
&x^{4'} = - x^4, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ 2,\ 3,
\end{aligned}$$

соответствуют соответственно преобразования

$$\begin{aligned}
&x^{1'} = - x^1, && x^{i'} = x^i, && i = 2,\ \ldots,\ 6,\\
&x^{2'} = - x^2, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ 3,\ \ldots,\ 6,\\
&x^{3'} = - x^3, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\\
&x^{6'} = - x^6, && x^{i'} = x^i, && i = 1,\ \ldots,\ 5.
\end{aligned} \tag{43.2}$$

2. Подгруппы первого порядка. Для перечисления подгрупп первого порядка нужно указать канонические виды в классе преобразований группы движений пространства S_6 для произвольной инфинитезимальной матрицы

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & a_1 & b_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_5 & a_2 & b_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_6 & a_3 & b_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & a_4 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & -\beta \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \beta & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (43.3)$$

Линейное преобразование A, определенное в пространстве S_6 с формой $ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - dx^{4^2} + dx^{5^2} + dx^{6^2}$ и задаваемое матрицей (43.3), антиэрмитово, т. е. для любых $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in S_6$

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}),$$

откуда следует, что если $\boldsymbol{a}$ — собственный вектор, принадлежащий собственному значению λ_a, $\boldsymbol{b}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_b, то

$$(\lambda_a + \lambda_b)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Значит, два собственных вектора, принадлежащих корням, сумма которых не равна нулю, ортогональны; вещественный собственный вектор, принадлежащий ненулевому корню, изотропен; если же $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — векторы, соответствующие комплексному корню, то

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = u^2 = v^2.$$

Характеристический полином матрицы (43.3) будет четным полиномом шестой степени.

Допустим, что характеристический полином матрицы (43.3) имеет комплексные корни, которым соответствуют действительные векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ ненулевой длины. Если $u^2 = v^2 < 0$, то с помощью вращений выберем систему координат таким образом, чтобы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ имели вид:

$$\boldsymbol{u} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{v} = (0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

В этой системе координат матрица (43.3) должна иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\alpha_1 & & & & \\ \alpha_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -\alpha_6 & a_3 & b_3 \\ & & \alpha_6 & 0 & a_4 & b_4 \\ & & a_3 & a_4 & 0 & -\beta \\ & & b_3 & b_4 & \beta & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (43.4)$$

Если же $u^2 = v^2 > 0$, с помощью преобразования системы координат можно добиться обращения в нуль a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4. Матрица, занимающая левую верхнюю клетку в матрице (43.3), представляет кососимметрическую матрицу, которая, если не равна нулю, всегда имеет комплексные корни первой кратности, поэтому рассматриваемая возможность $u^2 = v^2 > 0$ приводит к частному случаю матрицы типа (43.4).

Прежде чем рассмотреть дальнейшие упрощения матрицы (43.4), обратимся к случаю неприводимых к виду (43.4) матриц. Как мы видели выше, если есть комплексные корни, то соответствующие им векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ должны быть изотропными и взаимно ортогональными. С помощью преобразований групп движений S_6 их приведем к видам $\boldsymbol{u} = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$. В этой системе координат матрицы (43.3) должны удовлетворять условиям

$$\begin{gathered} a_1 = \alpha_4, \quad \alpha_2 = b_1, \quad a_3 = \alpha_5, \quad \alpha_3 = b_2, \quad a_4 = b_3, \\ a_3 = -b_4, \quad \alpha_6 + \beta = 2a_3. \end{gathered} \tag{43.5}$$

Пространство, натянутое на векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{s} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{t} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, инвариантно относительно преобразования с матрицей (43.3) с условиями (43.5). Индуцированное преобразование в базисе $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} b_3 & a_3 - \alpha_6 & 0 & 0 \\ \alpha_6 - a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_3 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{43.6}$$

откуда ясно, что если $b_3^2 \neq 0$ или $\alpha_1^2 \neq (a_3 - \alpha_6)^2$, то можно найти инвариантное двумерное подпространство, метрика на котором отрицательно—определенная. Значит, $b_3 = 0$, $\alpha_1^2 = (a_3 - \alpha_6)^2$. Делая преобразования (43.2), добьемся того, чтобы $\alpha_1 = a_3 - \alpha_6$. Положим $\alpha_1 = 1$ ($\alpha_1 = 0$ показывает наличие нулевых корней — случай, рассматриваемый ниже). Совершая преобразования, оставляющие векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ неизменными, можно добиться того, чтобы $\alpha_4 = \alpha_3$, $\alpha_2 = -\alpha_5$. С помощью поворота в плоскости $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ обратим в нуль α_2. Имея в виду еще преобразования (43.2) и преобразования, порождаемые инфинитезимальной матрицей $e_{45} + e_{54} + e_{65} - e_{56}$, можно считать $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Если же $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то мы придем к матрице типа (43.4). Преобразования, оставляющие $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ неизменными, сохраняют вид матрицы (43.6), но с их помощью сделать параметр α_6 определенным не удается.

Окончательно мы получаем следующий канонический тип:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_6 & 1+\alpha_6 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 & -1-\alpha_6 \\ 1 & 0 & 1+\alpha_6 & 0 & 0 & -2-\alpha_6 \\ 0 & 1 & 0 & -1-\alpha_6 & 2+\alpha_6 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (43.7)$$

Разбирая остальные неприводимые к виду (43.4) типы матриц, получаем следующие различные канонические типы (справа указаны элементарные делители):

1) $e_{42}-e_{24}+e_{45}+e_{54}+c(e_{36}+e_{63})$, $(\lambda-c)(\lambda+c)$, λ, λ^3;

2) $e_{32}-e_{23}+e_{62}+e_{26}+e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}-e_{65}+e_{56}$, λ^5, λ; (43.8)

3) $e_{41}-e_{14}+e_{32}-e_{23}+e_{51}+e_{15}+e_{62}+e_{26}$, λ^3, λ^3.

Осталось разобрать нижнюю правую клетку в матрице (43.4). Для нее существуют следующие канонические типы:

1) $a(e_{63}+e_{36}+e_{54}+e_{45})+e_{43}-e_{34}+e_{56}-e_{65}$, $(\lambda-a)^2+1$, $(\lambda+a)^2+1$;

2) $\left.\begin{array}{l} 2(e_{43}-e_{34})+e_{53}+e_{35}-e_{64}-e_{46} \quad \text{или} \\ -e_{53}-e_{35}+e_{64}+e_{46}+2(e_{56}-e_{65}), \end{array}\right\} (\lambda^2+1)^2$;

3) $c(e_{63}+e_{36})+e_{54}+e_{45}$, $(\lambda^2-1)(\lambda^2-c^2)$; (43.9)

4) $e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}+e_{63}+e_{36}+e_{54}+e_{45}+e_{46}+e_{64}-e_{65}+e_{56}$, $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$;

5) $e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}-e_{64}-e_{46}+e_{65}-e_{56}$, λ^2, λ^2;

6) $e_{64}+e_{46}-e_{65}+e_{56}$, λ, λ^3;

7) $e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}$, λ^3, λ;

8) $\alpha_6(e_{43}-e_{34})+\beta(e_{65}-e_{56})$;

3. Неразрешимые подгруппы третьего, четвертого, пятого, шестого порядков. Мы ограничимся перечислением подгрупп группы G_{15} до шестого порядка включительно, потому что всякое поле тяготения, допускающее группу движений G_r $(r \geqslant 7)$, конформно-плоское [453].

Для нахождения неразрешимых подгрупп воспользуемся теоремой Леви — Мальцева, по которой всякая алгебра Ли L может быть представлена в виде прямой суммы полупростой алгебры P и максимального разрешимого идеала N [142]: $L = P + N$.

Для подгрупп шестого порядка включительно P может быть третьего или шестого порядков, в первом случае она будет даже и простой алгеброй. Простые алгебры третьего порядка имеют следующие две неизоморфные естественные формы (см. глава 1, § 10):

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2 \tag{43.10}$$

и

$$[X_1, X_2] = X_2, \quad [X_1, X_3] = -X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1. \tag{43.11}$$

Рассмотрим представления алгебры (43.10). Характеристический полином для каждого элемента алгебры содержит один нулевой и два вещественных корня [137]. Заметим следующее. Если $[A, B] = AB - BA = \alpha B$, $\alpha \neq 0$, и $A\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}$, то $AB\boldsymbol{a} = BA\boldsymbol{a} + \lambda B\boldsymbol{a} = (\alpha + \lambda) B\boldsymbol{a}$ [212]. Это означает, что для того, чтобы матрица A была матрицей представления алгебры (43.10), необходимо существование у характеристического полинома матрицы A корней, разность между которыми была бы мнимой, поэтому ввиду отсутствия комплексных корней сразу следует невозможность представления алгебры (43.10) матрицами, одна из которых типа (43.8). В остальных случаях канонических типов матрицы (43.3) возможность представления так быстро не определяется, и поэтому каждый канонический тип нужно рассматривать особо. Для примера исследуем возможность представления с матрицей типа (43.4) с правой нижней клеткой типа (43.9, 5)).

Очевидно, можно считать, что $\alpha_1 = 1$, так как иначе разность между всеми корнями будет равна нулю. В базисе

$$\boldsymbol{s} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{t} = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{u} = (0, 0, 0, 1, 1, 0),$$
$$\boldsymbol{v} = (0, 0, 1, 0, 0, 1), \quad \boldsymbol{w} = (0, 0, 0, 1, -1, 0), \quad \boldsymbol{z} = (0, 0, 1, 0, 0, -1)$$

рассматриваемая матрица имеет структуру

$$A(\boldsymbol{s} + i\boldsymbol{t}) = i(\boldsymbol{s} + i\boldsymbol{t}), \qquad A\boldsymbol{u} = 0, \quad A\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{u},$$
$$A(\boldsymbol{s} - i\boldsymbol{t}) = -i(\boldsymbol{s} - i\boldsymbol{t}), \quad A\boldsymbol{v} = 0, \quad A\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{v}.$$

Разности между корнями характеристического полинома матрицы A могут быть равны $2i$, i, $-i$, $-2i$. Предположим, что в представлении есть матрица B, которая принадлежит корню $2i$ относительно матрицы A: $[A, B] = 2iB$ (комплексно-сопряженная $\bar{B}$ будет принадлежать корню $-2i$). На основе сказанного в предыдущем абзаце можно утверждать, что

$$B(s-it)=a(s+it),\quad B(s+it)=Bu=Bv=Bw=Bz=0,$$

откуда вообще следует $B=0$.

Рассмотрим случай $[A, B]=iB$. Тогда можно считать, что

$$\begin{aligned} &B(s+it)=0, && Bu=m(s+it), && Bw=p(s+it),\\ &B(s-it)=ku+lv, && Bv=n(s+it), && Bz=q(s+it), \end{aligned}$$

где k, l, m, n, p, q — комплексные числа. Отсюда следует, что вещественные и мнимые части матрицы B равны соответственно матрицам

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -a & -c & c & a\\ 0 & 0 & b & d & -d & -b\\ \hline a & -b & 0 & & & \\ c & -d & & 0 & & \\ c & -d & & & 0 & \\ a & -b & & & & 0 \end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & & -b & -d & d & b\\ & 0 & -a & -c & c & a\\ \hline b & a & 0 & & & \\ d & c & & 0 & & \\ d & c & & & 0 & \\ b & a & & & & 0 \end{array}\right].$$

Лиевское произведение этих матриц должно порождать матрицу A, чего непосредственное вычисление не подтверждает; значит, матрица типа (43.4) с правой нижней клеткой типа (43.9, 5)) вообще не может служить матрицей представления алгебры (43.10).

Аналогичные рассуждения для остальных канонических типов матрицы (43.3) показывают, что только канонический тип (43.9, 8)) может служить матрицей представления алгебры (43.10). При $\alpha_1=\alpha_6=1$, $\beta=0$ получается представление с матрицами

$$e_{21}-e_{12}+e_{43}-e_{34},\quad e_{31}-e_{13}+e_{42}-e_{24},\quad e_{41}-e_{14}-e_{32}+e_{23}, \tag{43.12}$$

и при $\alpha_1=1$, $\beta=\alpha_6=0$ представление с матрицами

$$e_{21}-e_{12},\quad e_{31}-e_{13},\quad e_{32}-e_{23}. \tag{43.13}$$

Для возможности представления алгебры (43.11) одна из матриц представления должна иметь корни, разность между которыми равна действительному отличному от нуля числу. Повторяя рассуждения, приведенные для алгебры (43.10), убеждаемся, что матрицей, соответствующей оператору X_1 алгебры (43.11), может служить лишь матрица канонического типа (43.9, 3)) с $\alpha_1=0$. В зависимости от значений параметра c получаются следующие различные типы представлений алгебры (43.11):

$$
\begin{aligned}
&1)\ X_1 = 2(e_{36} + e_{63}) + e_{54} + e_{45},\ X_2 = \sqrt{3}\,(e_{42} + e_{52} - e_{24} + e_{52}) + \\
&+ e_{34} - e_{43} + e_{53} + e_{35} + e_{64} + e_{46} + e_{65} - e_{56},\quad X_3 = \sqrt{3}\,(e_{52} - e_{42} + \\
&+ e_{25} + e_{24}) + e_{43} + e_{53} - e_{34} + e_{35} + e_{64} - e_{65} + e_{46} + e_{56},\ [X_1, X_2] = X_2, \\
&[X_1, X_3] = -X_3,\ [X_2, X_3] = 2X_1; \\
&2)\ X_1 = e_{63} + e_{54} + e_{45} + e_{36},\quad X_2 = e_{41} + e_{32} - e_{23} - e_{14},\quad X_3 = \\
&= e_{51} + e_{62} + e_{15} + e_{26},\ [X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_2,\ [X_2, X_3] = X_1; \\
&3)\ X_1 = e_{63} + e_{54} + e_{45} + e_{36},\quad X_2 = e_{43} - e_{34} + e_{65} - e_{56}, \\
&X_3 = e_{53} - e_{64} - e_{46} - e_{35},\ [X_1, X_2] = 2X_3,\ [X_1, X_3] = 2X_2, \\
&[X_2, X_3] = 2X_1; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (43.14) \\
&4)\ X_1 = e_{54} + e_{45},\quad X_2 = e_{53} + e_{35},\quad X_3 = e_{43} - e_{34}, \\
&[X_1, X_2] = X_3,\quad [X_1, X_3] = X_2,\quad [X_2, X_3] = -X_1; \\
&5)\ X_1 = e_{54} + e_{45},\quad X_2 = e_{64} + e_{46},\quad X_3 = e_{65} - e_{56}, \\
&[X_1, X_2] = -X_3,\quad [X_1, X_3] = -X_2,\quad [X_2, X_3] = X_1.
\end{aligned}
$$

При нахождении неразрешимых подгрупп четвертого порядка заметим, что в разложении L_4 прямая сумма простой алгебры P и максимального разрешимого идеала N есть в то же время и прямое произведение, потому что в одномерном пространстве N простая алгебра имеет только нулевое представление. Чтобы найти матрицу из N, соответствующую алгебре P, нужно с точностью до внутренних автоморфизмов перечислить подалгебру первого порядка в алгебре коммутирующих с P матриц. Только у простой группы типа (43.14, 1)) всякая коммутирующая с ней матрица оказывается равной нулю. Матрицы X_4, которые при присоединении к P будут давать некоторый тип неразрешимой подгруппы четвертого порядка, в зависимости от P получаются следующими:

P типа (43.12): $X_4 = \beta(e_{21} - e_{12} - e_{43} + e_{34}) + \alpha(e_{65} - e_{56})$;

P типа (43.13): 1) $X_4 = e_{45} + e_{54}$, 2) $X_4 = e_{65} - e_{56}$,
3) $X_4 = e_{64} - e_{65} + e_{56} + e_{46}$;

P типа (43.14, 2)): $X_4 = e_{21} - e_{12} + e_{43} - e_{34} - e_{65} + e_{56}$;

P типа (43.14, 3)): 1) $X_4 = \alpha(e_{21} - e_{12}) + e_{43} - e_{34} - e_{65} + e_{56}$,
2) $X_4 = \alpha(e_{21} - e_{12}) + e_{53} + e_{35} + e_{64} + e_{46}$,
3) $X_4 = \alpha(e_{21} - e_{12}) + e_{43} - e_{34} + e_{53} + e_{35} + e_{64} + e_{46} - e_{65} + e_{56}$,
4) $X_4 = e_{21} - e_{12}$;

P типа (43.14, 4)): 1) $X_4 = e_{21} - e_{12}$, 2) $X_4 = e_{21} - e_{12} + e_{16} + e_{61}$,
3) $X_4 = e_{61} + e_{16}$;

P типа (43.14, 5)): $X_4 = e_{12} - e_{21}$.

Подгруппы пятого порядка. Можно ожидать, что алгебра P со структурой (43.1) имеет ненулевое представление над N с коммутационными соотношениями (Z_1, Z_2 — базис N):

$$\begin{matrix} [X_1, Z_1]=kZ_1, & [X_2, Z_1]=0, & [X_3, Z_1]=Z_2, \\ [X_1, Z_2]=-kZ_2, & [X_2, Z_2]=Z_1, & [X_3, Z_2]=0, \end{matrix} \quad [Z_1, Z_2]=0.$$

Если для данного представления P считать, что $[X_1, X_2]=lX_2$, $[X_1, X_3]=-lX_3$ и что существуют Z_1, Z_2, для которых $[X_1, Z_1]=kZ_1$, $[X_1, Z_2]=-kZ_2$, то для выполнения оставшихся коммутационных соотношений, за исключением $[Z_1, Z_2]=0$, необходимо и достаточно, чтобы $k=2l$ и чтобы у X_1 существовали корни, разность между которыми была равна $\frac{k}{2}$. Такому условию удовлетворяет матричная алгебра типа (43.14, 3)), но требование выполнения соотношения $[Z_1, Z_2]=0$ приводит к $Z_1=Z_2=0$.

Остаются случаи прямого произведения P и N:

P типа (43.12): $X_4=e_{21}-e_{12}-e_{43}+e_{34}$, $X_5=e_{65}-e_{56}$;
P типа (43.13): $X_4=e_{45}+e_{54}$, $X_5=e_{64}-e_{65}+e_{56}+e_{46}$;
P типа (43.14.3):

1) $X_4=e_{21}-e_{12}$, $X_5=e_{43}-e_{34}-e_{65}+e_{56}$,
2) $X_4=e_{21}-e_{12}$, $X_5=e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}$,
3) $X_4=e_{21}-e_{12}$, $X_5=e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}-e_{65}+e_{56}$,
4) $X_4=\alpha(e_{21}-e_{12})+e_{45}+e_{54}-e_{36}-e_{63}$, X_5 как в 3);

P типа (43.14.4): $X_4=e_{62}+e_{26}$, $X_5=e_{12}-e_{21}+e_{16}+e_{61}$;
P типов (43.14, 1—2 или 5)) не допускают присоединения двух операторов.

Неразрешимые неполупростые группы шестого порядка. В случае (43.10) возможно ненулевое представление P над N:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N \text{ — абелева}, \tag{43.15}$$

а в случае (43.11)

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} [Z_1, Z_2]=aZ_3, & [Z_1, Z_3]=bZ_1, \\ [Z_2, Z_3]=bZ_2, & ab=0, \end{matrix} \tag{43.16}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad N \text{ — абелева.} \qquad (43.17)$$

Представление типа (43.15) возможно для P типа (43.13): к алгебре (43.13) нужно присоединить еще матрицы:

$$e_{41}+e_{51}-e_{14}+e_{15}, \quad e_{42}+e_{52}-e_{24}+e_{25}, \quad e_{43}+e_{53}-e_{34}+e_{35}.$$

Представление типа (43.16) возможно лишь для P типа (43.14, 3)):

$$Z_1=e_{51}-e_{41}+e_{14}+e_{15}, \quad Z_2=e_{31}-e_{61}+e_{13}-e_{16},$$
$$Z_3=-e_{43}+e_{34}+e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}+e_{65}-e_{56}.$$

Представление типа (43.17) возможно для P типа (43.14, 4)):

$$Z_1=e_{32}-e_{23}+e_{63}+e_{36}, \quad Z_2=e_{42}-e_{24}+e_{64}+e_{46},$$
$$Z_3=e_{52}+e_{25}-e_{65}+e_{56}.$$

Наконец, для P типа (43.14, 3)) существует возможность, когда прямая сумма $P+N$ представляет прямое произведение:

$$X_4=e_{21}-e_{12}, \quad X_5=-e_{63}+e_{54}+e_{45}-e_{36},$$
$$X_6=e_{43}-e_{34}+e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}-e_{65}+e_{56}.$$

Полупростые группы шестого порядка. Полупростые группы 6-го порядка есть прямое произведение простых групп третьего порядка. Такие группы можно определить, исходя из тех алгебр P типов (43.12) — (43.15), для которых коммутирующие с ними алгебры матриц простые. Существуют следующие возможности:

P типа (43.12): $X_4=e_{21}-e_{12}-e_{43}+e_{34}$, $X_5=e_{31}-e_{13}-e_{42}+e_{24}$,
$X_6=e_{41}+e_{32}-e_{23}-e_{14}$;

P типа (43.13): P типа (43.14, 5));

P типа (43.14, 3)): $X_4=e_{63}-e_{54}-e_{45}+e_{46}$, $X_5=e_{43}-e_{34}-e_{65}+e_{56}$,
$X_6=e_{53}+e_{35}+e_{64}+e_{46}$;

P типа (43.14, 4)): $X_4=e_{21}-e_{12}$, $X_5=e_{16}+e_{61}$, $X_6=e_{26}+e_{62}$.

Простые группы шестого порядка. Как известно, простых алгебр 6-го порядка над полем комплексных чисел нет, поэтому простая алгебра 6-го порядка над полем вещественных чисел есть вещественная реализация прямого произведения двух комплексных взаимно-сопряженных простых алгебр 3-го порядка. Так как простая алгебра 3-го порядка над полем комплексных чисел единственна, то будет единственной и вещественная простая алгебра 6-го порядка. Она имеет также единственное представление и в пространстве матриц (43.3):

к P типа (43.13) нужно присоединить

$$X_4 = e_{61} + e_{16}, \quad X_5 = e_{62} + e_{26}, \quad X_6 = e_{36} + e_{63}.$$

4. Разрешимые и максимальные разрешимые подгруппы. Разрешимая алгебра матриц может быть приведена к треугольному виду [166]. В частности, существует общий для всех матриц собственный вектор u. Пусть этот вектор веществен и изотропен, тогда в системе координат, в которой вектор u приведен к виду $u = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$, совокупность матриц, имеющих вектор u своим собственным вектором, будет состоять из матриц следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \alpha_4 & b_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_5 & \alpha_5 & b_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_6 & \alpha_6 & b_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & a_4 & b_4 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & a_4 & 0 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -b_4 & 0 \end{bmatrix}. \tag{43.18}$$

Ортогональное дополнение M вектора u в пространстве S_6 инвариантно относительно этих матриц как линейных антиэрмитовых операторов. Преобразования с матрицей (43.18) на это ортогональное дополнение M индуцируют преобразования с некоторыми матрицами. Если в базисе ортогонального дополнения M вычеркнуть вектор u, то из матриц индуцированных преобразований мы получаем следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & b_1 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & b_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Совокупность этих матриц также должна быть приводима к треугольному виду, т. е. снова должен существовать общий для всех этих матриц собственный вектор, который без нарушения общности можно считать изотропным и действительным. В итоге получаем следующую максимальную разрешимую алгебру матриц девятого порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_5 & \alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & -\alpha_6 & \alpha_6 & b_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 0 & a_4 & \beta \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & a_4 & 0 & \beta \\ \alpha_2 & \alpha_3 & b_3 & \beta & -\beta & 0 \end{pmatrix}. \tag{43.19}$$

Если общий собственный вектор разрешимой алгебры матриц принадлежит комплексному корню, которому отвечают действительные изотропные векторы u и v, то в этом случае получается такая максимальная разрешимая алгебра матриц восьмого порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & -\alpha_5 & \alpha_5 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & d+b & -b & a \\ \alpha_4 & \alpha_5 & -d-b & 0 & a & b \\ \alpha_4 & \alpha_5 & -b & a & 0 & b-d \\ \alpha_2 & \alpha_3 & a & b & d-b & 0 \end{pmatrix}. \tag{43.20}$$

Существует еще одна максимальная разрешимая алгебра матриц порядка 3, получающаяся в предположении существования общего собственного вектора, принадлежащего комплексному корню, которому соответствуют действительные неизотропные векторы u и v:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & & & & \\ \alpha_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -\alpha_6 & & \\ & & \alpha_6 & 0 & & \\ & & & & 0 & -\beta \\ & & & & \beta & 0 \end{pmatrix}. \tag{43.21}$$

Разрешимые подгруппы группы движений пространства S_6 будут подгруппами максимальных разрешимых подгрупп, поэтому всевозможные разрешимые подгруппы можно перечислить путем рассмотрения присоединенных представлений матричных алгебр (43.19)—(43.21), как это делали в § 42. Вычисления ввиду простоты опустим и в дальнейшем результаты будем приводить в терминах группы конформных преобразований G_{15} с операторами (41.8). Здесь ограничимся лишь выписыванием коммутационных соотношений между элементами алгебр (43.19) — (43.21). Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\alpha_1 \to U, \quad a_4 \to V, \quad b_3 \to W, \quad \alpha_2 \to Y_1, \quad \alpha_3 \to Y_2, \quad \alpha_4 \to Y_3, \\ \alpha_5 \to Y_4, \quad \alpha_6 - \beta \to Z, \quad \alpha_6 + \beta \to X, \quad a \to W + V, \quad d \to S,\end{gathered}$$

где, например, $\alpha_1 \to U$ означает, что в алгебре (43.19) или (43.20) матрица с $a_1 = 1$ и с равными нулю значениями других параметров обозначается через U. Коммутационные соотношения между матрицами алгебр (43.19) и (43.20) будут иметь вид:

$$\begin{array}{llll} [U, Y_1] = Y_2, & [V, Y_3] = Y_3, & [W, Y_1] = Y_1, & [X, Y_1] = 2Y_3, \\ [U, Y_2] = -Y_1, & [V, Y_4] = Y_4, & [W, Y_2] = Y_2, & [X, Y_2] = 2Y_4, \\ [U, Y_3] = Y_4, & [V, X] = X, & [W, Z] = Z, & [Y_1, Y_3] = Z, \\ [U, Y_4] = -Y_3, & [V, Z] = Z, & [W, X] = -X, & [Y_2, Y_4] = Z, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [S, W] = -S - X, & [S, Y_3] = Y_1, \\ [S, V] = S + X, & [S, Y_2] = -Y_4, \\ [S, X] = 2(W - V), & [S, Y_4] = Y_2, \\ [S, Y_1] = -Y_3. & \end{array}$$

Так как алгебра (43.20) отличается лишь элементом S от алгебры (43.19), то после перечисления подалгебр алгебры (43.19) у алгебры (43.20) нужно перечислить лишь подалгебры, содержащие S. К подалгебрам, принадлежащим как алгебре (43.19), так и алгебре (43.20), нужно применить внутренние автоморфизмы обеих максимальных разрешимых алгебр.

5. Классификация конформно-плоских полей тяготения по группам движений. Для классификации конформно-плоских полей тяготения по группам движений для каждой найденной в предыдущих разделах этого параграфа подгруппы группы движений псевдоевклидова пространства S_6 нужно определить по изоморфизму (43.1) соответствующую подгруппу группы G_{15} с операторами (41.8).

Функция H метрики конформно-плоского пространства, соответствующая данной подгруппе G_m с операторами $X_a = \xi^i_a p_i$ $(a = 1, \ldots, m)$, найдется как решение уравнений Киллинга, сводящихся в случае конформно-плоского пространства к системе уравнений:

$$\xi^k_a \partial_k H + \partial_i \xi^i_a = 0 \quad (i \text{ не суммируется}). \tag{43.22}$$

Ниже, в классификации конформно-плоских пространств по группам движений мы приводим операторы групп и соответствующий вид функции H. Для подгрупп первого порядка все решения уравнений (43.22) найти не удалось, поэтому классификация начинается с подгрупп второго порядка. В тех случаях, когда (43.22) не удалось проинтегрировать, выписаны только операторы.

Если для двух групп G_1 и G_2, из которых одна содержит другую, функция H одна и та же, то в классификации выписывается только группа высшего порядка.

а) Группы движений второго порядка

1) $$Z_3 + vV + wU_3, \quad wV - vU_3,$$

$$H = -\frac{v^2}{2(v^2+1)}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) - \frac{v}{v^2+1}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} - \\ - \frac{vw^2}{2(v^2+1)(v^2+w^2)}\ln\frac{(x^3+x^4)^{2v}}{(x^{1^2}+x^{2^2})^{v+w}} + \\ + \varphi\left[\frac{(x^{3^2}-x^{4^2})}{x^{1^2}+x^{2^2}},\ -2(v^2+w^2)\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} + \right.\\ \left. + (v+w)\ln(x^3+x^4) + (v-w)\ln(x^3-x^4)\right];$$

2) $$Z_3, \quad vV + wU_3,$$

$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) + \varphi\left(\frac{x^{3^2}-x^{4^2}}{x^{1^2}+x^{2^2}},\ (x^3+x^4)^{w-v}(x^3-x^4)^{v+w}\right);$$

3) $$Z_3 + vV + wU_3, \quad X_3 - X_4,$$

$$H = -\frac{v^2}{2(v^2+1)}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) - \frac{v}{v^2+1}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} + \\ + \varphi\left[(x^3-x^4)^{2v}(x^{1^2}+x^{2^2})^{w-v},\ \ln(x^3-x^4) + (w-v)\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right].$$

Если $v=w$, то аргументы φ будут иметь вид: x^3-x^4, $\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) - v\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}$;

4) $$Z_3 - v(V-U_3) - X_3 - X_4, \quad X_3 - X_4,$$

$$H = -\frac{v^2}{2(v^2+1)}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) - \frac{v}{1+v^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} + \\ + \varphi\left[\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) - v(x^3+x^4),\ 2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} + x^3 + x^4\right];$$

5) $$Z_3 + v(V-U_3), \quad U_3 - V + X_3 + X_4,$$

$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{x^3-x^4},\ (x^{1^2}+x^{2^2})\,e^{-(x^3+x^4)}\right];$$

6) $$Z_3 - X_3 - X_4, \quad V - U_3,$$

$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{x^3-x^4},\ x^3+x^4+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

7) $$Z_3 + vV, \quad X_3,$$
$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2} + x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^{1^2} + x^{2^2}}{x^{4^2}},\ \ln x^4 - v \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

8) $$Z_3 + vV, \quad X_4,$$
$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2} + x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^{1^2} + x^{2^2}}{x^{3^2}},\ \ln x^3 - v \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

9) $$Z_3 - 2X_4, \quad X_3, \quad H = \varphi\left[x^{1^2} + x^{2^2},\ x^4 + 2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

10) $$Z_3 - 2X_3, \quad X_4, \quad H = \varphi\left[x^{1^2} + x^{2^2},\ x^3 + 2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

11) $$V, \quad U_3, \quad H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2} + x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^{1^2} + x^{2^2}}{x^{3^2} - x^{4^2}},\ \frac{x^2}{x^1}\right];$$

12) $$vV + wU_3, \quad U_1 + Z_2,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^{1^2} + x^{3^2} - x^{4^2}}{x^{2^2}},\ x^{2^{v+w}}(x^3 + x^4)^{-v}\right];$$

13) $$vV + U_3, \quad v \neq 1, \quad X_1,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[x^{2^{w-v}}(x^3 - x^4)^v,\ (x^3 + x^4)^{w-v}(x^3 - x^4)^{v+w}\right];$$

14) $$vV + wU_3, \quad X_3 + X_4,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^2}{x^1},\ x^{2^{w-v}}(x^3 - x^4)^v\right];$$

15) $$V + U_3 - X_3 + X_4, \quad U_1 + Z_2,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^3 + x^4}{x^{2^2}},\ x^3 - x^4 + \frac{x^{1^2}}{x^3 + x^4} + 2\ln x^2\right];$$

16) $$V + U_3 + X_4 - X_3, \ X_1, \quad H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^3 + x^4}{x^{2^2}},\ x^{2^2}e^{x^3 - x^4}\right];$$

17) $$V + U_3 - X_3 + X_4, \quad X_3 + X_4,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^2}{x^1},\ x^{2^2}e^{x^3 - x^4}\right];$$

18) $$2V - U_3, \quad U_1 + Z_2 + X_3 + X_4,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{4x^1 - (x^3 + x^4)^2}{x^2},\ \frac{x^3 - x^4 + x^1(x^3 + x^4) - \dfrac{(x^3 + x^4)^3}{6}}{x^{2^3}}\right];$$

19) $$V - U_3, \quad U_1 + Z_2 + X_2,$$
$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2} + x^{3^2} - x^{4^2}) + \varphi\left[x^3 + x^4,\ \frac{[x^1 - x^2(x^3 + x^4)]^2}{x^{1^2} + x^{3^2} - x^{4^2}}\right];$$

20) $V - U_1 - Z_2, \quad X_2,$

$$H = -\ln(x^3 + x^4) + \varphi\left[\frac{x^1}{x^3 + x^4} - \ln(x^3 + x^4),\right.$$
$$\left.\frac{x^3 - x^4}{x^3 + x^4} - \frac{2x^1 \ln(x^3 + x^4)}{x^3 + x^4} + \ln^2(x^3 + x^4)\right];$$

21) $V - U_1 - Z_2, \quad X_3 - X_4,$

$$H = -\ln(x^3 + x^4) + \varphi\left[\frac{x^3 + x^4}{x^2}, \ \frac{x^1}{x^3 + x^4} - \ln(x^3 + x^4)\right];$$

22) $V - U_1 - Z_2, \quad U_2 - Z_1,$

$$H = -\ln(x^3 + x^4) + \varphi\left[\frac{x^1}{x^3 + x^4} - \ln(x^3 + x^4),\right.$$
$$\left.\frac{x^{2^2}}{(x^3 + x^4)^2} + \frac{x^3 - x^4}{x^3 + x^4} - \frac{2x^1}{x^3 + x^4}\ln(x^3 + x^4) + \ln^2(x^3 + x^4)\right];$$

23) $U_3 + X_1, \quad U_2 - Z_1, \quad H = \varphi[x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2}, \ e^{-x^1}(x^3 + x^4)];$

24) $U_3 + X_1, \quad X_2, \quad H = \varphi[x^{3^2} - x^{4^2}, \ (x^3 + x^4)\, e^{-x^1}];$

25) $U_3 + X_1, \quad X_3 + X_4, \quad H = \varphi[x^2, \ (x^3 - x^4)\, e^{x^1}];$

26) $U_1 + Z_2 + X_3 + X_4, \quad X_2,$

$$H = \varphi\left[4x^1 - (x^3 + x^4)^2, \ x^3 - x^4 + x^1(x^3 + x^4) - \frac{1}{6}(x^3 + x^4)^3\right];$$

27) $U_1 + Z_2 + X_3 + X_4, \quad X_2 + X_3 - X_4,$

$$H = \varphi\left[4x^1 - (x^3 + x^4)^2, \ x^3 - x^4 + x^1(x^3 + x^4) - \frac{(x^3 + x^4)^3}{6} - 2x^2\right];$$

28) $U_1 + Z_2 + X_3 + X_4, \quad X_3 - X_4, \quad H = \varphi[x^2, \ 4x^1 - (x^3 + x^4)^2];$

29) $Z_2 + U_1, \quad X_2, \quad H = \varphi[x^3 + x^4, \ x^{1^2} + x^{3^2} - x^{4^2}];$

30) $Z_2 + U_1 + X_2, \ X_3 - X_4, \ H = \varphi[x^3 + x^4, \ x^1 - x^2(x^3 + x^4)].$

31) $X_3 + Y_3, \quad X_4 + Y_4,$

$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2} + x^{2^2}) + \varphi\left[\frac{x^2}{x^1}, \ \frac{2x^{4^2} + (1 + x^{4^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2})^2}{x^{1^2}}\right];$$

32) $X_3 + Y_3 + X_4 + Y_4 + uZ_3 + v(U_3 - V), \ \ u_1 Z_3 + v_1(U_3 - V),$

$$H = -\frac{1}{2}\ln(1 + (x^3 + x^4)^2) + \frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3 + x^4) -$$
$$- \frac{v}{2}\ln B + \varphi\left[\frac{A}{B}, \ B^{u_1} e^{2v_1 C}\right],$$

$$A(v) = \frac{x^{1^2} + x^{2^2}}{1 + (x^3 + x^4)^2}\, e^{v \operatorname{arctg}(x^3 + x^4)},$$

$$B(v) = e^{v \operatorname{arctg}(x^3 + x^4)}\left(\frac{(x^3 + x^4)(x^{1^2} + x^{2^2})}{1 + (x^3 + x^4)^2} + x^3 - x^4\right),$$

$$C(u) = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1} + \frac{u}{2}\operatorname{arctg}(x^3 + x^4);$$

33) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+uZ_3+v(U_3-V), \quad X_3-X_4,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+\frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)+\varphi[A, C];$$

34) $Y_3+Y_4+2X_4, \quad Z_3+z(X_3-X_4),$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+ +\varphi\left[A(0), B(0)+C(2)-(1+2z)\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

35) $Y_3+Y_4+2X_3, \quad Z_3+z(X_3-X_4),$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+ +\varphi\left[A(0), B(0)-C(2)+(1-2z)\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

36) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+2Z_3+v(V-U_3), \quad U_1+Z_2-X_2,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)-\frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)+ +\varphi\left[\frac{x^1+x^2(x^3+x^4)}{1+(x^3+x^4)^2}e^{-\frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)}=K,\right.$$
$$\left.\frac{x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2}}{x^3+x^4}e^{v\operatorname{arctg}(x^3+x^4)}+K^2\left(x^3+x^4-\frac{1}{x^3+x^4}\right)\right];$$

37) $2X_4+Y_3+Y_4+2Z_3, \quad U_1+Z_2-X_2,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+\varphi\left[\frac{1+(x^3+x^4)^2}{x^1+x^2(x^3+x^4)}=K^{-1},\right.$$
$$\left.\frac{x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2}}{x^3+x^4}+K^2\left(x^3+x^4-\frac{1}{x^3+x^4}\right)+\operatorname{arctg}(x^3+x^4)\right];$$

38) $Y_3+Y_4+2X_3+2Z_3, \quad U_1+Z_2-X_2,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+\varphi\left[K=\frac{x^1+x^2(x^3+x^4)}{1+(x^3+x^4)^2},\right.$$
$$\left.\frac{x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2}}{x^3+x^4}+K^2\left(x^3+x^4-\frac{1}{x^3+x^4}\right)-\operatorname{arctg}(x^3+x^4)\right];$$

39) $Z_3+a(X_4+Y_4), \quad X_3+Y_3+b(X_4+Y_4);$

40) $Z_3+a(X_3+Y_3), \quad X_4+Y_4;$

b) Группы движений третьего порядка

1) $Z_3, V, U_3, \quad H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{x^{3^2}-x^{4^2}}\right];$

2) $Z_3+vV+wU_3, \quad wV-vU_3, \quad X_3-X_4,$

$$H=-\frac{v^2}{2(v^2+1)}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})-\frac{v}{v^2+1}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}-$$
$$-\frac{w^2v}{2(v^2+1)(w^2+v^2)}\ln\frac{(x^3+x^4)^{2v}}{(x^{1^2}+x^{2^2})^{v+w}}+$$
$$+\varphi\left[e^{-2(v^2+w^2)\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}}(x^{1^2}+x^{2^2})^{v-w}(x^3+x^4)^{2w}\right];$$

3) $Z_{\smile},\ vV+wU_3,\ X_3-X_4,\ H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[\frac{(x^{1^2}+x^{2^2})^{v+w}}{(x^3+x^4)^{2v}}\right];$

4) $$Z_3+v(V-U_3),\quad U_3-V+X_3+X_4,\quad X_3-X_4,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[(x^{1^2}+x^{2^2})\,e^{-(x^3+x^4)}\right];$$

5) $$Z_3-X_3-X_4,\quad X_3-X_4,\quad U_3-V,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[x^3+x^4+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

6) $$U_3,\quad V,\quad U_1+Z_2,$$
$$H=-\ln x^2+\varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2}}{x^{2^2}}\right];$$

7) $$vV+wU_3,\quad U_1+Z_2,\quad X_2,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})+\varphi\left[x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})^{v+w}(x^3+x^4)^{-2v}\right];$$

8) $$2V-U_3,\quad X_2,\quad U_1+Z_3+X_3+X_4,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(4x^1-(x^3+x^4)^2)+$$
$$+\varphi\left[[4x^1-(x^3+x^4)^2]^3\left[x^3-x^4+x^1(x^3+x^4)-\frac{(x^3+x^4)^3}{6}\right]^2\right];$$

9) $$U_3,\ X_3,\ X_4,\quad H=\varphi(x^1,\ x^2);$$

10) $$V+U_3-X_3+X_4,\quad U_1+Z_2,\ X_2,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^3+x^4)+\varphi\left[x^3-x^4+\frac{x^{1^2}}{x^3+x^4}+\ln(x^3+x^4)\right];$$

11) $$2V-U_3,\quad U_1+Z_2+X_3+X_4,\quad X_3-X_4,$$
$$H=-\ln x^2+\varphi\left[\frac{4x^1-(x^3+x^4)^2}{x^2}\right];$$

12) $$X_3+Y_3+X_4+Y_4,\quad Z_3,\quad U_3-V,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[x^3+x^4+\frac{(x^3-x^4)(1+(x^3+x^4)^2)}{x^{1^2}+x^{2^2}}\right];$$

13) $$vV+wU_3,\quad U_1+Z_2,\quad U_2-Z_1,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2})+\varphi\left[\frac{(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2})^{v+w}}{(x^3+x^4)^{2v}}\right];$$

14) $$U_3-V,\quad X_2+Z_2+U_1,\quad U_2-Z_1+X_1,$$
$$H=-\frac{1}{2}\ln\{[x^1-x^2(x^3+x^4)]^2+$$
$$+[(x^3+x^4)^2-1](x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})\}+\varphi(x^3+x^4);$$

15) $U_1+Z_2,\quad X_3-X_4,\quad X_1,\quad H=\varphi(x^2,\ x^3+x^4);$

16) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+v(U_3-V),\ \ Z_3+v_1(U_3-V),\ \ X_3-X_4,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)+\frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)+v_1^2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}+$$
$$+\varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{1+(x^3+x^4)^2}e^{v\operatorname{arctg}(x^3+x^4)}+2v_1\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right];$$

17) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+uZ_3,\quad U_3-V,\quad X_3-X_4,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}+\frac{u}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)\right];$$

18) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+2Z_3,\quad U_3-V,\quad U_1+Z_2-X_2,$

$$H=\frac{1}{2}\ln(1+(x^3+x^4)^2)-\ln(x^1+x^2(x^3+x^4))+$$
$$+\varphi\left[\frac{(x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})(1+(x^3+x^4)^2)^2}{[x^1+x^2(x^3+x^4)]^2}+x^3+x^4-\frac{1}{x^3+x^4}\right];$$

19) $X_3+Y_3+X_4+Y_4+2Z_3+v(U_3-V),\ U_1+Z_2-X_2,\ X_3-X_4,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln[1+(x^3+x^4)^2]-\frac{v}{2}\operatorname{arctg}(x^3+x^4)+\varphi\left[\frac{1+(x^3+x^4)^2}{x^1+(x^3+x^4)x^2}\right];$$

20) $X_3+Y_3,\quad X_4+Y_4,\quad Z_3,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[\frac{2x^{4^2}+(1+x^{4^2}-x^{1^2}-x^{2^2}-x^{3^2})^2}{x^{1^2}+x^{2^2}}\right];$$

21) $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\quad H=\varphi(x^4,\ x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2});$

22) $2Z_2-X_2-Y_2,\quad 2U_1+X_2-Y_2,\quad U_3+V,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})+$$
$$+\varphi\left(\frac{[x^1+x^2(x^3-x^4)]^2}{(x^3-x^4)^2(x^{1^2}+x^{3^2}-x^{4^2})}+\ln(x^3-x^4)-\frac{1}{(x^3-x^4)^2}\right);$$

23) $V,\ X_4,\ Y_4,\quad H=-\ln x^1+\varphi\left[\frac{x^2}{x^1},\ \frac{x^3}{x^1}\right];$

24) $V,\ X_3,\ Y_3,\quad H=-\ln x^1+\varphi\left[\frac{x^2}{x^1},\ \frac{x^4}{x^1}\right];$

25) $V+2U_3,\quad -\sqrt{3}X_2-Y_3+Y_4,\quad -\sqrt{3}Y_2-X_3+X_4.$

с) Группы движений четвертого порядка

1) $Z_3+vV,\quad U_3,\ X_3,\ X_4,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2})+\varphi\left[(x^{1^2}+x^{2^2})e^{-2v\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}}\right];$$

2) $Z_3,\quad vV+wU_3,\quad U_1+Z_2,\quad U_2-Z_1,$

$$H=-\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2})+\varphi\left[\frac{(x^3+x^4)^{2v}}{(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2})^{v+w}}\right];$$

3) $$vV + wU_3, \quad U_1 + Z_2, \quad X_3 - X_4, \quad X_1,$$
$$H = -\ln x^2 + \varphi\left[\frac{x^{2v+w}}{(x^3+x^4)^v}\right];$$

4) $$U_3 + vV, \quad X_1, \; X_2, \; Z_3,$$
$$H = -\frac{v}{1+v}\ln(x^3+x^4) + \varphi\left[(x^3+x^4)^{1-v}(x^3-x^4)^{1+v}\right];$$

5) $$V + U_3 - X_3 + X_4, \quad U_1 + Z_2, \quad U_2 - Z_1, \; Z_3,$$
$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^3+x^4) + \varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}-x^{4^2}}{x^3+x^4} + \ln(x^3+x^4)\right];$$

6) $$V - U_1 - Z_2, \quad U_2 - Z_1, \quad X_2, \quad X_3 - X_4,$$
$$H = -\ln(x^3+x^4) + \varphi\left[\frac{x^1}{x^3+x^4} - \ln(x^3+x^4)\right];$$

7) $$U_3 + X_1, \; X_2, \; X_3 - X_4, \; U_2 - Z_1, \; H = \varphi\left[(x^3+x^4)\,e^{-x^1}\right];$$

8) $$U_1 + Z_2 + X_3 + X_4, \quad X_2, \quad X_3 - X_4, \quad U_2 - Z_1,$$
$$H = \varphi\left[4x^2 - (x^3+x^4)^2\right];$$

9) $$U_3 - V + X_3 + X_4, \quad X_3 - X_4, \quad U_1 + Z_2, \quad X_1,$$
$$H = -\frac{x^3+x^4}{2} + \varphi\left[x^{2^2}e^{x^3+x^4}\right];$$

10) $$X_4 + Y_4 + X_3 + Y_3 + 2Z_3, \; U_1 + Z_2 - X_2, \; X_3 - X_4, \; V - U_3,$$
$$H = \frac{1}{2}\ln\left(1 + (x^3+x^4)^2\right) - \ln\left(x^1 + x^2(x^3+x^4)\right);$$

11) $$Z_1, \; Z_2, \; Z_3, \; V, \quad H = -\ln x^4 + \varphi\left(\frac{x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}}{x^{4^2}}\right);$$

12) $$Z_1, \; Z_2, \; Z_3, \quad X_4 + Y_4,$$
$$H = -\frac{1}{2}\ln(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}) + \varphi\left[\frac{1+x^{4^2}-x^{1^2}-x^{2^2}-x^{3^2}}{\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}}}\right];$$

13) $$Z_1, \; Z_2, \; Z_3, \; X_4, \quad H = \varphi(x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2});$$

14) $$2Z_2 - (X_2 + Y_2), \quad 2U_1 + X_2 - Y_2, \quad U_3 + V,$$
$$2Z_3 + X_3 + Y_3 + X_4 + Z_4;$$

15) $$V, \; X_4, \; Y_4, \; Z_3, \quad H = -\ln\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}} + \varphi\left(\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{x^{3^2}}\right);$$

16) $$V, \; X_3, \; Y_3, \; Z_3, \quad H = -\ln\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}} + \varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}}{x^{4^2}}\right];$$

17) $$V, \; X_3, \; Y_3, \; U_1 - Z_3, \quad H = -\ln(x^2 - x^3) + \varphi\left[\frac{x^{1^2}+x^{2^2}-x^{4^2}}{(x^2+x^4)^2}\right];$$

18) $$U_1, \; X_3, \; Y_3, \; V, \quad H = -\ln\sqrt{x^{1^2}-x^{4^2}} + \varphi\left[\frac{x^{1^2}-x^{4^2}}{x^{2^2}}\right].$$

d) Группы движений пятого порядка

1) $U_3 - 2V,\quad U_1 + Z_2 + X_3 + X_4,\quad X_3 - X_4,\quad U_2 - Z_1,\quad X_2,$

$$H = -\frac{1}{2}\ln\left[4x^1 - (x^3 + x^4)^2\right].$$

e) Группы движений шестого порядка

1) $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\quad H = \varphi(x^4);$

2) $V,\ X_3,\ Y_3,\quad U_3 - Z_1,\quad X_2 + X_4,\quad Y_2 - Y_4,$

$$H = -\ln x^1 + \varphi\left[\frac{x^2 - x^4}{x^1}\right];$$

3) $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\quad X_1 + Y_1,\quad X_2 + Y_2,\quad X_3 + Y_3,$

$$H = -\ln x^4 + \varphi\left[\frac{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2} + 1}{x^4}\right];$$

4) $Y_4,\ X_4,\ V,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\quad H = -\frac{1}{2}\ln\left(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}\right);$

5) $X_3,\ Y_3,\ U_3,\ V,\ X_4,\ Y_4,\quad H = -\ln x^1 + \varphi\left(\frac{x^2}{x^1}\right);$

6) $Z_3,\ U_1,\ U_2,\ X_3,\ Y_3,\ V,\quad H = -\frac{1}{2}\ln\left(x^{1^2} + x^{2^2} - x^{4^2}\right);$

7) $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\quad H = \varphi\left[x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2}\right].$

Задачи

1. Показать, что представление (40.13) при $\alpha = 0$, $c = 1$ приводит к группе конформных преобразований G_7, допускаемой метрикой (27.23).

2. Показать, что канонический тип (43.9.8) может служить матрицей представления алгебры (43.10). При $\alpha_1 = \alpha_6 = 1$, $\beta = 0$ получается представление (43.12), при $\alpha_1 = 1$, $\beta = \alpha_6$ — (43.13).

3. Доказать, что всякая просто-транзитивная группа может быть рассматриваема как группа конформных преобразований некоторого риманова пространства.

4. Доказать, что поля тяготения, допускающие максимальные транзитивные группы G_5, могут допускать только тривиальные группы конформных преобразований.

5. Показать, что представление типа (43.15) возможно для P типа (43.13), представление типа (43.16) — для P типа (43.14.3).

Глава VIII

Геодезическое отображение полей гравитации

В этой главе рассматриваются так называемые геодезические отображения полей тяготения, которые, являясь, с одной стороны, естественным обобщением автоморфизмов движений и конформных отображений, рассмотренных в предыдущих главах, допускают, с другой стороны, возможность интересной и важной физической интерпретации в общей теории относительности.

§ 44. Постановка проблемы. Пространства V_n с соответствующими геодезическими

Одним из способов получения информации о структуре какого-либо поля является изучение поведения пробных частиц в данном поле. Частица называется пробной, если она реагирует на воздействие поля, но обратного воздействия на поле не производит. Такая идеализация, разумеется, является естественной и возможной только в том случае, когда можно оценить порядок воздействия частицы на поле и при заданном порядке точности пренебречь этим воздействием.

В общей теории относительности траектории пробных частиц в общерелятивистском поле являются геодезическими линиями (изотропными или времениподобными в зависимости от массы покоя частицы) четырехмерного риманова пространства, метрический тензор g_{ik} которого удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (12.2). Представляется интересным выяснить, насколько однозначно можно определить риманово многообразие, отвечающее общерелятивистскому полю, изучив в нем движение пробных частиц. Оказывается, что если известны уравнения только изотропных геодезических (например, траекторий фотонов), то метрика соответствующего риманова пространства определяется с точностью до конформного отображения. Зная же уравнения всех времениподобных и всех изотропных геодезических линий, можно определить метрический тензор с точностью до постоянного множителя.

Однако эту задачу можно решать в более общей постановке. Именно, поставим задачей определить два различных четырехмерных римановых пространства, имеющих в общей системе координат одинаковые уравнения геодезических линий, но при этом не будем требовать, чтобы все изотропные геодезические линии одного пространства были изотропными и для другого пространства. Такая задача, как будет показано в настоящей главе, имеет нетривиальные решения и может быть интерпретирована как «моделирование» (в смысле поведения пробных частиц) одного общерелятивистского поля другим. В самом деле, зная закон геодезического соответствия двух полей общего релятивизма и уравнения геодезических линий в одном поле, можно определить поведение пробных частиц в другом поле. При этом в принципе оказывается возможным моделирование путей света траекториями частиц с ненулевой массой покоя и линий пространственно-подобных кратчайших расстояний путями движения фотонов и наоборот. Может случиться, что двум таким полям отвечают различные функции, определяющие физическое состояние материальных систем.

Для того чтобы сформулировать корректную математическую постановку вопроса, предположим прежде всего, что метрики двух различных полей гравитации $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ определены в общей координации. Тогда математическая постановка проблемы геодезического отображения полей гравитации может быть выражена в следующей формулировке: даны два римановых многообразия с метриками $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ с общей системой координат $\{x^k\}$ и геодезические линии метрики $\bar{g}_{ij}(x)$ являются в то же время геодезическими $g_{ij}(x)$ и наоборот; требуется определить общий вид $g_{ij}(x)$ и $g_{ij}(x)$ с таким свойством. Предполагается при этом, что: 1) сигнатуры обеих метрик имеют вид $(---+)$, 2) задача решается в таком классе C^k функций, который определяется применяемым аппаратом, 3) $n=4$ $(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

В этой главе дается общее решение поставленной проблемы в замкнутом виде и полностью выясняется возможный произвол в выборе *моделирующих* друг друга полей.

Пусть в одном и том же многообразии X_n, отнесенном к координатам $\{x^i\}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, заданы две метрики

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad \text{и} \quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j. \tag{44.1}$$

Если каждая геодезическая линия $x^i(t)$ одной метрики является геодезической и для другой и наоборот, то метрики (44.1) имеют общие геодезические. Чтобы кривая $x^i(t)$ была геодезической для метрики g_{ij}, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: абсолютная производная касательного вектора $\frac{\delta\xi^i}{\delta t}$ вдоль кривой должна быть коллинеарна самому касательному вектору $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$. Условие коллинеарности этих векторов можно записать в виде:

$$\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta\xi^j}{\delta t} = \frac{dx^j}{dt}\frac{\delta\xi^i}{\delta t},$$

или, что то же самое,

$$\frac{dx^i}{dt}\frac{d^2x^j}{dt^2} - \frac{dx^j}{dt}\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left(\Gamma^j_{lm}\frac{dx^i}{dt} - \Gamma^i_{lm}\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^m}{dt} = 0. \tag{44.2}$$

Последние уравнения являются уравнениями геодезических метрики g_{ij} для произвольного параметра t.

Если кривая $x^i(t)$, удовлетворяющая уравнениям (44.2), будет геодезической и для метрики $\bar{g}_{ij}(x)$, то одновременно с (44.2) должны иметь место уравнения, аналогичные им, с заменой Γ^i_{lm} на $\bar{\Gamma}^i_{lm}$. Вычитая эти уравнения одни из других, получим:

$$\left[\left(\bar{\Gamma}^i_{lm} - \Gamma^i_{lm}\right)\frac{dx^j}{dt} - \left(\bar{\Gamma}^j_{lm} - \Gamma^j_{lm}\right)\frac{dx^i}{dt}\right]\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^m}{dt} = 0.$$

Из закона преобразования коэффициентов связности при переходе от одних координат к другим следует, что величины

$$a^i_{lm} = \bar{\Gamma}^i_{lm} - \Gamma^i_{lm}$$

представляют собой компоненты тензора, симметричного по нижним индексам. Предпоследнее равенство в новых обозначениях принимает вид:

$$\left(\delta^j_k a^i_{lm} - \delta^i_k a^j_{lm}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^m}{dt} = 0,$$

где δ^i_k — символ Кронекера. Как видно из сказанного выше, выполнение полученных условий для произвольного направления $\frac{dx^i}{dt}$ необходимо и достаточно, чтобы метрики (44.1) имели общие геодезические. Поскольку вектор $\frac{dx^i}{dt}$ произволен, то

$$\delta^j_k a^i_{lm} + \delta^j_l a^i_{mk} + \delta^j_m a^i_{kl} = \delta^i_k a^j_{lm} + \delta^i_l a^j_{mk} + \delta^i_m a^j_{kl}.$$

Свертывание по индексам j и m дает

$$a^i_{kl} = \delta^i_k \psi_l + \delta^i_l \psi_k,$$

где

$$\psi_l = \frac{1}{n+1} a^k_{lk}.$$

Таким образом,

$$\bar{\Gamma}^i_{km} = \Gamma^i_{km} + \delta^i_k \psi_m + \delta^i_m \psi_k, \tag{44.3}$$

здесь ψ_k — компоненты вектора. Свертывая (44.3) по i и m, получим

$$\frac{\partial \ln \bar{g}}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln g}{\partial x^k} + 2(n+1)\psi_k,$$

где $\bar{g} = \det(\bar{g}_{ij})$, $g = \det(g_{ij})$. Следовательно, $\psi_{,k}$ есть градиент функции

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \frac{\bar{g}}{g}. \tag{44.4}$$

Из приведенного рассуждения ясно, что (44.3) являются необходимыми и достаточными условиями общности геодезических линий метрик (44.1). Эти условия можно представить в ином виде, если учесть, что ковариантная производная от $\bar{g}_{ij}$ по x^k в связности $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ равна нулю, и заменить коэффициенты $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ через Γ^i_{jk} согласно (44.3). В результате будем иметь:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\bar{g}_{ij}\psi_{,k} + \bar{g}_{ik}\psi_{,j} + \bar{g}_{jk}\psi_{,i}. \tag{44.5}$$

Здесь и в дальнейшем запятая обозначает ковариантную производную относительно метрики g_{ij}.

Уравнения (44.5) эквивалентны (44.3) и, следовательно, также необходимы и достаточны для того, чтобы метрики (44.1) имели общие геодезические. Точнее, метрики $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ тогда и только тогда имеют общие геодезические, когда существует такая функция $\psi(x^1, \ldots, x^n)$, что выполняются равенства (44.5). Функция $\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln \frac{\bar{g}}{g}$ называется функцией, определяющей геодезическое отображение друг на друга двух римановых пространств V_n и $\bar{V}_n$ с метриками (44.1). Таким образом, чтобы найти метрики пространств V_n и $\bar{V}_n$ с общими геодезическими, достаточно проинтегрировать уравнения (44.5).

Условия интегрируемости уравнений (44.5), получаемые ковариантным дифференцированием (44.5), альтернированием и применением (5.5), приводятся к виду:

$$\bar{g}_{mk}R^m_{ijl} + \bar{g}_{im}R^m_{kjl} = \bar{g}_{ij}\psi_{kl} - \bar{g}_{il}\psi_{kj} + \bar{g}_{kj}\psi_{il} - \bar{g}_{kl}\psi_{ij}, \tag{44.6}$$

где

$$\psi_{ij} = \psi_{,ij} - \psi_{,i}\psi_{,j}. \tag{44.7}$$

Если обозначить через $\bar{R}^m_{ijl}$ риманов тензор, отвечающий $\bar{g}_{ij}$, то из формул (44.3) получим:

$$\bar{R}^m_{ijl} = R^m_{ijl} + \delta^m_l\psi_{ij} - \delta^m_j\psi_{il}. \tag{44.8}$$

Свертывая последнее равенство по индексам m и j, приходим к уравнениям, связывающим компоненты тензоров Риччи пространств V_n и $\overline{V}_n$:

$$\overline{R}_{il} = R_{il} - (n-1)\psi_{il}. \tag{44.9}$$

Подставляя ψ_{ij} из (44.9) в (44.8), найдем:

$$\overline{W}^m_{ijk} = W^m_{ijk},$$

где

$$W^m_{ijk} = R^m_{ijk} - \frac{1}{n-1}\left(\delta^m_k R_{ij} - \delta^m_j R_{ik}\right). \tag{44.10}$$

Этот тензор называется *тензором проективной кривизны*. Он был введен впервые в рассмотрение Вейлем ([66], стр. 101).

Пространство называется проективно-евклидовым, или проективно-плоским, если $W^m_{ijk} = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{mijk} - \frac{1}{n-1}(g_{mk}R_{ij} - g_{mj}R_{ik}).$$

Так как $R_{iijk} = 0$, то $g_{ij}R_{ik} - g_{ik}R_{ij} = 0$. Отсюда $R_{ij} = \rho g_{ij}$. Но тогда

$$R_{mijk} = \frac{\rho}{n-1}(g_{mj}g_{ik} - g_{mk}g_{ij})$$

и, следовательно, V_n есть пространство постоянной кривизны.

Если пространства V_n и $\overline{V}_n$ имеют не только общие геодезические, но и одинаковую связность, т. е. $\overline{\Gamma}^i_{kj} = \Gamma^i_{kj}$, то, как видно из (44.3), $\psi_{,k} = 0$ или $\overline{g}_{ij,k} = 0$. В этом случае геодезическое отображение V_n на $\overline{V}_n$ называют *тривиальным*.

Рассмотрим случай двух конформных метрик $\overline{g}_{ij} = \rho g_{ij}$ с общими геодезическими. Уравнения (44.5) тензорные, значит, они справедливы в любой системе координат, в том числе и в неголономном ортрепере, в котором $g_{ij} = e_i\delta_{ij}$, где $e_i = \pm 1$ в зависимости от сигнатуры формы ds^2. В таком ортрепере эти уравнения для $\overline{g}_{ij} = \rho g_{ij}$ имеют вид

$$e_i\rho_{,k}\delta_{ij} = \rho(2e_i\delta_{ij}\psi_{,k} + e_i\delta_{ik}\psi_{,j} + e_j\delta_{jk}\psi_{,i}).$$

При $i = j \neq k$ отсюда следует $\rho_{,k} = 2\rho\psi_{,k}$, поэтому при любых i, j, k

$$e_i\delta_{ik}\rho_{,j} + e_j\delta_{jk}\rho_{,i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \rho_{,i} = 0, \quad \rho = \text{const}.$$

Таким образом, конформные метрики с общими геодезическими попросту подобны (отличаются только на постоянный множитель).

Для четырехмерных римановых пространств совершенно очевидна следующая *теорема*: *если в каждой точке все изотропные направления одного четырехмерного* ($n = 4$) *риманова пространства с сигнатурой* —2 *являются изотропными направлениями* *и для другого четырехмерного риманова пространства, то их метрики конформны.*

Но для конформных метрик изотропные геодезические имеют одинаковые уравнения. Это следует из того, что касательный вектор $\frac{dx^i}{dt}$ к изотропной геодезической изотропен, т. е.

$$g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0,$$

и римановы связности конформных пространств удовлетворяют соотношениям ([88], стр. 113)

$$\bar{\Gamma}^l_{ij}=\Gamma^l_{ij}+\delta^l_i\sigma_{,j}+\delta^l_j\sigma_{,i}-g_{ij}g^{lm}\sigma_{,m},$$

где $\sigma=\frac{1}{2}\ln\rho$. Следовательно, дифференциальные уравнения (44.2) изотропных геодезических совпадают для конформных метрик, и при одинаковых начальных условиях получатся одинаковые уравнения. Таким образом, *если известны все изотропные геодезические (траектории фотонов) четырехмерного риманова пространства общей теории относительности, то его метрика определяется с точностью до конформности.*

Предположим, что кроме изотропных геодезических две конформные метрики $\bar{g}_{ij}=\rho g_{ij}$ имеют одинаковые уравнения времениподобных геодезических, тогда, очевидно, они являются метриками с общими геодезическими и, как показано выше, $\rho=\mathrm{const}$.

Итак, *требование совпадения уравнений изотропных и времениподобных линий соответственно для двух римановых пространств V_4 и $\bar{V}_4$, первые квадратичные формы которых имеют сигнатуру —2, приводит к тому, что их метрические тензоры отличаются лишь постоянным множителем.*

§ 45. Историческая справка

Общее решение задачи геодезического отображения пространств с положительно-определенными основными квадратичными формами дал Леви-Чивита [10]. Его результаты послужили отправной точкой для исследования геодезических отображений римановых пространств с групповой точки зрения (проективные преобразования в V_n) в работах Фубини [20] (случай $n=3$) и А. С. Солодовникова [272] (при любом n в случае V_n с определенными метриками). Леви-Чивита показал, что, если ds^2 и $d\bar{s}^2$ — положительно-определенные метрические формы двух римановых пространств с общими геодетиками, то в зависимости от степеней кратности $p_l - p_{l-1}$ корней $\underset{p_1}{\lambda}, \underset{p^2}{\lambda}, \ldots, \underset{p_{n-m+1}}{\lambda}$ уравнения

$$|\bar{g}_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0 \tag{45.1}$$

можно определить такую систему координат, в которой

$$ds^2 = \sum_{l=1}^{n-m+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n-m+1} |\varphi_{p_j} - \varphi_{p_l}| \sum_{rs=p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs}\, ds^r\, dx^s;$$

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{\varphi_{p_1} \ldots \varphi_{p_{n-m+1}}} \sum_{l=1}^{n-m+1} \frac{1}{\varphi_{p_l}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n-m+1}{}' |\varphi_{p_j} - \varphi_{p_l}| \times$$
$$\times \sum_{rs=p_{l-1}+1}^{p_l} k_{rs}\, dx^r\, dx^s, \tag{45.2}$$

где φ_{p_l} — функция только от x^{p_l}, когда $\underset{p_l}{\lambda}$ — простой корень, и равняется постоянной в противном случае; k_{rs} есть функция переменных $x^{p_{l-1}+1}, x^{p_{l-1}+2}, \ldots, x^{p_l}$ и равняется единице, если $\underset{p_l}{\lambda}$ — простой корень.

Для определенных квадратичных форм корни уравнения (45.1) будут вещественными, а элементарные делители λ-матрицы

$$(\bar{g}_{ij} - \lambda g_{ij}) \tag{45.3}$$

— простыми. Если же взять римановы пространства неопределенных метрик, как это обязательно будет в общей теории относительности, то обе эти особенности не будут вообще иметь места, и задача значительно усложнится.

В случае $n = 2$ задача для неопределенного мероопределения, по-видимому, впервые была решена П. А. Широковым в 1934 году, как это следует из материалов, обнаруженных в его архиве.

Классификация трехмерных геодезически соответствующих римановых пространств с неопределенными метриками и их канонические формы даны в работе А. З. Петрова [186]. В этой же работе намечается метод для решения задачи в случае n измерений, приводится такое решение для одного типа римановых пространств, обобщается результат Леви-Чивита на тот случай, когда элементарные делители λ-матрицы (45.3) простые, но среди корней уравнения (45.1) имеются комплексные. Отдельные интересные типы геодезических отображений римановых пространств для $n > 3$ рассмотрены Н. С. Синюковым в работах [230], [271].

Задача геодезического отображения пространств Эйнштейна (когда $T_{ij}=\sigma g_{ij}$, $n=4$ и сигнатура метрик типа $(---+)$) решена А. З. Петровым [461], который показал, что в этом случае отображаемые пространства будут или пространствами постоянной кривизны, или их метрики связаны тривиальным образом ($\bar{g}_{ij}=\nu g_{ij}$, $\nu=\mathrm{const}$).

Общее решение проблемы для $n=4$ и сигнатуры $(---+)$ получено В. И. Голиковым [526], [602], [603], [604]. В этой главе приводятся результаты, полученные им, т. е. дается классификация четырехмерных римановых пространств, допускающих геодезические отображения, и их канонические формы для случая пространств, сигнатура которых имеет вид сигнатуры Минковского $(---+)$. Следовательно, в эту схему укладываются канонические формы метрик геодезически соответствующих полей тяготения самого общего вида, к которым приводят уравнения Эйнштейна (12.2) при любой структуре тензора энергии-импульса T_{ij}. Для сигнатур другого типа в случае $n=4$, а также для n-мерных пространств, квадратичные формы которых имеют сигнатуру $n-2$ или $-(n-2)$, решения могут быть получены без труда, как это следует из самого метода. Но они не представляют интереса с физической точки зрения и поэтому далее не рассматриваются.

§ 46. Алгебраическая классификация возможных случаев

Прежде всего естественно разбить задачу на ряд возможных случаев по какому-либо признаку. Таким признаком может служить алгебраическая структура пары форм

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j \quad \text{и} \quad d\bar{s}^2=\bar{g}_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{46.1}$$

которые являются метрическими формами двух римановых многообразий V_4 и $\bar{V}_4$ соответственно, отнесенных к общей системе координат x^i. Причем, сигнатура ds^2 равна -2. Алгебраическая структура пары форм определяется инвариантными элементами этой пары, а они (главные направления и инвариантные площадки тензора $\bar{g}_{ij}$) зависят от вида элементарных делителей λ-матрицы (45.3) [102].

Таким образом, для классификации возможных случаев необходимо предварительно перечислить все возможные типы характеристик и отвечающие им инвариантные элементы. Такая классификация является алгебраической задачей и сводится к локальному изучению (в данной точке) многообразий V_4 и $\bar{V}_4$. Для $n=4$ возможны следующие характеристики λ-матрицы (45.3).

I. λ-матрица имеет характеристику простого типа [1 1 1 1]; элементарные делители простые, корни уравнения (45.1) вещественные и различные. Если же некоторые из корней совпадают, то им будут отвечать характеристики II [(1 1) 1 1], III [(1 1 1) 1], IV [(1 1 1 1)], V [(1 1) (1 1)]. Во всех этих четырех случаях элементарные делители простые, корни уравнения (45.1) вещественные. Одинаковые базисы элементарных делителей отмечены круглыми скобками.

Эти пять случаев характерны для определенных форм (46.1) и канонические формы линейных элементов соответствующих пространств с общими геодезическими определяются формулами (45.2) с той лишь разницей, что сигнатура будет вида $(- - - +)$.

VI. $[1\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}]$ четыре различных элементарных делителя λ-матрицы (45.3), корни (45.1) комплексно-сопряженные.

VII. $[(1\ 1)(\bar{1}\ \bar{1})]$ корни (45.1) комплексно-сопряженные и кратные. Комплексно-сопряженные базисы элементарных делителей отмечены чертой сверху.

Эти два случая возможны только для неопределенной метрики g_{ij}, но, как легко видеть, они не могут отвечать сигнатуре типа $(- - - +)$ и поэтому не будут далее рассматриваться. Отметим, однако, что канонические формы соответствующих метрик с общими геодезическими получаются автоматически из результатов работы [186].

VIII. $[1\ 1\ 1\ \bar{1}]$. Среди корней уравнения (45.1) имеются два вещественных и пара комплексно-сопряженных. В этом случае $\bar{g}_{ij}$ в вещественном пространстве имеет два главных направления и одну двумерную инвариантную площадку (см. [102], стр. 188).

Если не ограничивать себя требованием вещественности, то, выбирая в каждой точке пространства четыре взаимно ортогональных главных направления тензора $\bar{g}_{ij}$ за координатные, получим некоторую, вообще говоря, неголономную систему отнесения. Обозначая компоненты тензоров g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ в этой координатной системе через $\overset{\circ}{g}_{ij}$ и $\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij}$ соответственно, можно записать:

$$(\overset{\circ}{g}_{ij}) = \begin{Vmatrix} \underset{1}{e} & & & \\ & \underset{2}{e} & & \\ & & \underset{3}{e} & \\ & & & \underset{3}{e} \end{Vmatrix}, \quad (\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij}) = \begin{Vmatrix} \underset{1}{e}\underset{1}{\lambda} & & & \\ & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda} & & \\ & & \underset{3}{e}(\alpha + i\beta) & \\ & & & \underset{3}{e}(\alpha - i\beta) \end{Vmatrix}, \quad (46.2)$$

где $\underset{1}{\lambda}$, $\underset{2}{\lambda}$, $\alpha \pm i\beta$ — корни уравнения (45.1), а $\underset{1}{e} = \underset{2}{e} = \underset{3}{e} = -1$.

IX. $[(1\ 1)\ 1\ \bar{1}]$. Среди корней (45.1) имеется пара комплексно-сопряженных и один вещественный кратный.

В этом случае $\bar{g}_{ij}$ имеет в вещественном пространстве два главных направления (причем двумерный пучок, определяемый этими направлениями, будет весь состоять из главных направлений) и одну инвариантную двумерную площадку. В комплексном же пространстве относительно неголономной ортогональной системы отнесения, связанной с главными направлениями тензора $\bar{g}_{ij}$, имеем формулы (46.2), в которых нужно положить $\underset{1}{\lambda} = \underset{2}{\lambda} = \lambda$.

Все дальнейшие исследования будем проводить относительно некоторой неголономной системы отнесения и поэтому для каждого случая матрицу $(\overset{\circ}{g}_{ij})$ будем приводить к диагональному виду.

X. [112]. Имеем три главных направления. Одно из них — изотропное. Кроме того, здесь имеется двумерная инвариантная площадка, проходящая через изотропное главное направление. Корни (45.1) вещественные. Выбирая соответствующим образом систему координат, можно в каждой точке пространства привести квадратичные формы (46.1) к виду (см. [185]):

$$(\overset{\circ}{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{2}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{e} \\ 0 & 0 & \underset{3}{e} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{e}\underset{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{e}\underset{3}{\lambda} \\ 0 & 0 & \underset{3}{e}\underset{3}{\lambda} & \underset{3}{e} \end{pmatrix}, \quad \underset{1}{e} = \underset{2}{e} = \underset{3}{e} = -1,$$

где $\underset{1}{\lambda}$, $\underset{2}{\lambda}$ и $\underset{3}{\lambda}$ — вещественные корни уравнения (45.1), $\underset{3}{\lambda}$ соответствует изотропному главному направлению тензора $\bar{g}_{ij}$. Если, пользуясь этими формулами, исследовать, как вектор-функция $\bar{g}^i_j u_i$ преобразует координатные векторы, то легко убедиться в справедливости утверждения о характере инвариантных элементов в этом случае. Применяя подстановку

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = y^2, \quad x^3 = \frac{1}{2}(y^3 - y^4), \quad x^4 = y^3 + y^4,$$

найдем:

$$(\overset{\circ}{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{e} & & & \\ & \underset{2}{e} & & \\ & & \underset{3}{e} & \\ & & & -\underset{3}{e} \end{pmatrix}, \quad (\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{e}\underset{2}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{3}{e}(\underset{3}{\lambda}+1) & \underset{3}{e} \\ 0 & 0 & \underset{3}{e} & -\underset{3}{e}(\underset{3}{\lambda}-1) \end{pmatrix}. \tag{46.3}$$

XI. $[1\bar{1}2]$. Имеется пара комплексно-сопряженных корней уравнения (45.1). В этом случае $\bar{g}_{ij}$ в вещественном пространстве имеет одно главное изотропное направление и две двумерные инвариантные площадки. Одна из них проходит через главное изотропное направление. Если же не ограничиваться требованием вещественности, то относительно ортогонального репера, связанного с инвариантными элементами пары форм (46.1), в комплексном пространстве можно записать формулы (46.3), в которых нужно положить $\underset{1}{e}=\underset{2}{e}=e$, $\underset{1}{\lambda}=\alpha+i\beta$, $\underset{2}{\lambda}=\alpha-i\beta$.

Легко убедиться, что этот случай не может отвечать сигнатуре $(---+)$, и поэтому в дальнейшем не будет рассматриваться, хотя решение задачи для него легко получается из решения для случая X методом, указанным А. З. Петровым [186].

XII. [(11) 2]. Среди корней уравнения (45.1) есть кратный, имеем всего три элементарных делителя. Тензор $\bar{g}_{ij}$ имеет одно изотропное и два неизотропных направления. Причем пучок, определяемый неизотропными главными направлениями, будет весь состоять из главных направлений. Через изотропное главное направление проходит двумерная инвариантная площадка. Для $(\overset{\circ}{g}_{ij})$ и $(\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij})$ можно записать равенства (46.3), положив в них $\underset{1}{\lambda}=\underset{2}{\lambda}$.

XIII. [1 (12)]. Три элементарных делителя λ-матрицы (45.3) и среди корней (45.1) есть кратный. В отличие от случая X, пучок, определяемый изотропным и одним из неизотропных главными направлениями, будет весь состоять из главных направлений. В формулах (46.3) для данного случая $\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}$.

XIV. [(112)]. Корни (45.1) кратные. Имеются два неизотропных и одно изотропное главные направления. Трехмерный пучок, определяемый ими, будет весь состоять из главных направлений. В формулах (46.3) для данного случая следует положить $\underset{1}{\lambda}=\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}$.

XV. [13]. В этом случае имеем два главных направления, из которых одно изотропное. Кроме того, здесь имеются один двумерный и один трехмерный инвариантные пучки, проходящие через изотропное главное направление. Метрики в данной точке пространства могут быть записаны следующим образом (см. [185]):

$$(\overset{\circ}{g}_{ij})=\begin{vmatrix}\underset{1}{e} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \underset{2}{e}\\ 0 & 0 & \underset{2}{e} & 0\\ 0 & \underset{2}{e} & 0 & 0\end{vmatrix},\quad (\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij})=\begin{vmatrix}\underset{1}{e}\underset{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda}\\ 0 & 0 & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda} & \underset{2}{e}\\ 0 & \underset{2}{e}\underset{2}{\lambda} & \underset{2}{e} & 0\end{vmatrix},\quad \underset{1}{e}=\underset{2}{e}=-1,$$

где $\underset{1}{\lambda}$ и $\underset{2}{\lambda}$ — корни уравнения (45.1), $\underset{2}{\lambda}$ соответствует изотропному главному направлению. Подстановкой

$$x^1 = y^1, \quad x^2 = \frac{1}{2}(y^2 - y^4), \quad x^3 = y^3, \quad x^4 = y^2 + y^4$$

эти матрицы приводятся к виду:

$$(\overset{\circ}{g}_{ij}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{e} & & & \\ & \underset{2}{e} & & \\ & & \underset{2}{e} & \\ & & & -\underset{2}{e} \end{vmatrix}, \quad (\overset{\circ}{\bar{g}}_{ij}) = \begin{vmatrix} \underset{1\,1}{e\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{2\,2}{e\lambda} & \underset{2}{e} & 0 \\ 0 & \underset{2}{e} & \underset{2\,2}{e\lambda} & \underset{2}{e} \\ 0 & 0 & \underset{2}{e} & -\underset{2\,2}{e\lambda} \end{vmatrix}. \tag{46.4}$$

XVI. [(13)]. Два элементарных делителя (45.3). Корни (45.1) кратные.

Тензор $\bar{g}_{ij}$ имеет одно изотропное и одно неизотропное главные направления; в отличие от XV, пучок, определяемый этими направлениями, весь состоит из главных направлений. В (46.4) для данного случая $\underset{1}{\lambda} = \underset{2}{\lambda}$.

Остальные типы характеристик, возможные для $n = 4$ ([22], [2$\bar{2}$], [(22)] и [4]), не могут отвечать полям тяготения, так как легко убедиться, что их сигнатура равна нулю. Таким образом, подлежат рассмотрению только случаи VIII — X, XII — XVI, для каждого из которых можно построить такую голономную систему отнесения, чтобы в ней определить компоненты тензоров g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$.

§ 47. Инвариантные уравнения для $\bar{g}_{ij}$ в неголономном репере

Рассмотрим равенства (44.5), выражающие необходимые и достаточные условия того, что метрики g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ имеют общие геодезические. Если положить

$$\psi = -\frac{1}{2}\ln\mu,$$

то они примут вид:

$$2\mu\bar{g}_{ij,\,k} + 2\bar{g}_{ij}\mu_{,\,k} + \bar{g}_{ik}\mu_{,\,j} + \bar{g}_{jk}\mu_{,\,i} = 0. \tag{47.1}$$

Здесь

$$\mu = c\left(\frac{g}{\bar{g}}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad c = \mathrm{const}$$

g и $\bar{g}$ — определители тензоров g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ соответственно, а запятой обозначена ковариантная производная относительно метрики g_{ij}. Выбирая в данной точке пространства ортогональный координатный репер $\underset{m}{i}^k$, формулу $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ можно привести к виду $ds^2 = \sum\limits_i \underset{i}{e}\,(dx^i)^2$, а тензоры g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ представить следующим образом:

$$g_{ij} = \sum_m \underset{m}{e}\, \underset{m}{i}_i\, \underset{m}{i}_j; \qquad \bar{g}_{ij} = \sum_{r,s} \underset{r}{e}\,\underset{s}{e}\,\overset{\circ}{\bar{g}}_{rs}\,\underset{r}{i}_i\,\underset{s}{i}_j. \tag{47.2}$$

На основании этого система (47.1) приводится к инвариантной форме [186]:

$$2\mu\left\{\underset{r}{X}(\overset{\circ}{\bar{g}}_{pq}) + \sum_s \underset{s}{e}\,\overset{\circ}{\bar{g}}_{sq}\gamma_{spr} + \sum_t \underset{t}{e}\,\overset{\circ}{\bar{g}}_{tp}\gamma_{tqr}\right\} + \\ + 2\overset{\circ}{\bar{g}}_{pq}\underset{r}{X}(\mu) + \overset{\circ}{\bar{g}}_{pr}\underset{q}{X}(\mu) + \overset{\circ}{\bar{g}}_{qr}\underset{p}{X}(\mu) = 0, \tag{47.3}$$

где $\underset{r}{X}(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}\underset{r}{i}^k$, $\underset{s}{e} = \pm 1$, $\overset{\circ}{\bar{g}}_{st}$ задаются матрицами (46.3), (46.4), а коэффициенты вращения Риччи, инварианты γ_{spq}, определяются соотношениями:

$$\gamma_{lnk} = \underset{l}{i}_{i,\,j}\,\underset{n}{i}^i\,\underset{k}{i}^j, \qquad \gamma_{nkl} = -\gamma_{knl}, \qquad \gamma_{nnl} = 0. \tag{47.4}$$

Теперь, подставляя в (47.3) вместо $\overset{\circ}{\bar{g}}_{st}$ соответствующие компоненты из (46.3), (46.4), получим для всевозможных значений индексов p, q, r ($n = 4$) для каждого типа характеристики 40 уравнений, которые для отдельных типов будут иметь вид:

1. X. [112]

$$\gamma_{123} = \gamma_{124} = \gamma_{132} = \gamma_{142} = \gamma_{231} = \gamma_{241} = 0;$$

$$\gamma_{134} = \gamma_{143} = -\frac{\underset{3}{e}\underset{1}{\lambda}}{2(\underset{3}{\lambda} - \underset{1}{\lambda})^2}\underset{1}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{234} = \gamma_{243} = -\frac{\underset{3}{e}\underset{2}{\lambda}}{2(\underset{3}{\lambda} - \underset{2}{\lambda})^2}\underset{2}{X}(\ln\mu); \tag{47.5}$$

$$\gamma_{341} = -\frac{1}{2}\underset{3}{e}\underset{1}{X}(\ln\mu); \qquad \gamma_{342} = -\frac{1}{2}\underset{3}{e}\underset{2}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{121} = \frac{\underset{1}{e}\underset{1}{\lambda}}{2(\underset{2}{\lambda} - \lambda_1)}\underset{2}{X}(\ln\mu); \qquad \gamma_{212} = \frac{\underset{2}{e}\underset{2}{\lambda}}{2(\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda})}\underset{1}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{131}=\gamma_{141}=\frac{e_1\lambda_1}{2(\lambda_3-\lambda_1)}X_3(\ln\mu);\qquad \gamma_{343}=e_3\frac{-\lambda_3-4}{4}X_3(\ln\mu);$$

$$\gamma_{232}=\gamma_{242}=\frac{e_2\lambda_2}{2(\lambda_3-\lambda_2)}X_3(\ln\mu);\qquad \gamma_{434}=e_3\frac{-\lambda_3+4}{4}X_3(\ln\mu);$$

$$\gamma_{313}=-e_3\frac{\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_1}{2(\lambda_3-\lambda_1)^2}X_1(\ln\mu);\qquad \gamma_{414}=e_3\frac{\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_1}{2(\lambda_3-\lambda_1)^2}X_1(\ln\mu);\tag{47.5}$$

$$\gamma_{323}=e_3\frac{\lambda_2+\lambda_2\lambda_3-\lambda_3^2}{2(\lambda_3-\lambda_2)^2}X_2(\ln\mu);\qquad \gamma_{424}=e_3\frac{\lambda_2-\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2}{2(\lambda_3-\lambda_2)^2}X_2(\ln\mu);$$

$$X_1(\lambda_1\mu^2)=0;\quad X_p(\lambda_1\mu)=0,\quad p=2,\ 3,\ 4;\quad X_1(\lambda_3\mu)=X_2(\lambda_3\mu)=0;$$

$$X_2(\lambda_2\mu^2)=0;\quad X_q(\lambda_2\mu)=0;\quad q=1,\ 3,\ 4;\quad X_3(\lambda_3^2\mu^3)=X_4(\lambda_3^2\mu^2)=0;$$

$$X_3(\mu)=X_4(\mu).$$

2. XII. [(11) 2]

Этот случай отличается от предыдущего только тем, что $\lambda_1=\lambda_2$, поэтому будем иметь:

$$\gamma_{132}=\gamma_{142}=\gamma_{134}=\gamma_{143}=\gamma_{133}=\gamma_{144}=\gamma_{231}=\gamma_{241}=$$
$$=\gamma_{234}=\gamma_{243}=\gamma_{233}=\gamma_{244}=\gamma_{341}=\gamma_{342}=0;$$

$$\gamma_{131}=\gamma_{141}=\frac{e_1\lambda_1}{2(\lambda_3-\lambda_1)}X_3(\ln\mu);\qquad \gamma_{343}=e_3\frac{-\lambda_3-4}{4}X_3(\ln\mu);$$

$$\gamma_{232}=\gamma_{242}=\frac{e_2\lambda_1}{2(\lambda_3-\lambda_1)}X_3(\ln\mu);\qquad \gamma_{434}=e_3\frac{-\lambda_3+4}{4}X_3(\ln\mu);\tag{47.6}$$

$$X_p(\lambda_1\mu)=0,\quad p=1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad X_1(\mu)=X_2(\mu)=0;$$

$$X_1(\lambda_3\mu)=X_2(\lambda_3\mu)=0;\quad X_3(\lambda_3^2\mu^3)=X_4(\lambda_3^2\mu^3)=0;$$

$$X_3(\mu)=X_4(\mu).$$

3. XIII. [1 (12)]

В этом случае $\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}$, поэтому будем иметь следующую систему:

$$\gamma_{123}=\gamma_{124}=\gamma_{132}=\gamma_{142}=\gamma_{121}=\gamma_{131}=\gamma_{141}=\gamma_{342}=\gamma_{343}=\gamma_{344}=0;$$

$$\gamma_{321}=\gamma_{421};\quad \gamma_{324}=\gamma_{424};\quad \gamma_{323}=\gamma_{423};\quad \gamma_{322}=\gamma_{422};$$

$$\gamma_{134}=\gamma_{143}=-\frac{\underset{3}{e}\underset{1}{\lambda}}{2(\underset{2}{\lambda}-\underset{1}{\lambda})^2}\underset{1}{X}(\ln\mu),\qquad \gamma_{431}=\frac{\underset{3}{e}}{2}\underset{1}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{313}=\underset{1}{e}\frac{\underset{1}{\lambda}+\underset{1}{\lambda}\underset{2}{\lambda}-\underset{2}{\lambda}^2}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^2}\underset{1}{X}(\ln\mu);\qquad \gamma_{122}=\frac{\underset{2}{e}\underset{2}{\lambda}}{2(\underset{2}{\lambda}-\underset{1}{\lambda})}\underset{1}{X}(\ln\mu);\tag{47.7}$$

$$\gamma_{414}=\underset{3}{e}\frac{\underset{1}{\lambda}-\underset{1}{\lambda}\underset{2}{\lambda}+\underset{2}{\lambda}^2}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^2}\underset{1}{X}(\ln\mu);\qquad \underset{q}{X}(\underset{2}{\lambda}\mu)=0,\quad q=1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\underset{1}{X}(\underset{1}{\lambda}\mu^2)=0;\qquad \underset{p}{X}(\underset{1}{\lambda}\mu)=\underset{p}{X}(\mu)=0;\qquad p=2,\ 3,\ 4.$$

4. XIV. [(112)]

Этот случай отличается от предыдущих тем, что

$$\underset{1}{\lambda}=\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}=\lambda.$$

$$\begin{gathered}\gamma_{434}=\gamma_{343}=\gamma_{341}=\gamma_{342}=0;\\ \gamma_{313}=\gamma_{413};\quad \gamma_{314}=\gamma_{414};\quad \gamma_{131}=\gamma_{141};\\ \gamma_{323}=\gamma_{423};\quad \gamma_{324}=\gamma_{424};\quad \gamma_{232}=\gamma_{242};\\ \gamma_{321}=\gamma_{421};\quad \gamma_{312}=\gamma_{412};\\ \underset{p}{X}(\lambda\mu)=0;\quad \underset{p}{X}(\mu)=0;\quad p=1,\ 2,\ 3,\ 4.\end{gathered}\tag{47.8}$$

5. XV. [13]

$$\begin{gathered}\gamma_{321}=\gamma_{341}=\gamma_{311}=0;\\ \gamma_{123}=\gamma_{132}=\gamma_{134}=\gamma_{143}=-\frac{\underset{2}{e}\underset{1}{\lambda}}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^2}\underset{1}{X}(\ln\mu);\\ \gamma_{124}=\gamma_{142}=-\frac{\underset{2}{e}\underset{1}{\lambda}}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^3}\underset{1}{X}(\ln\mu);\qquad \gamma_{421}=\underset{2}{e}\underset{1}{X}(\ln\mu);\\ \gamma_{212}=\underset{2}{e}\frac{\underset{1}{\lambda}+\underset{2}{\lambda}(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^2}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})^3}\underset{1}{X}(\ln\mu);\qquad \gamma_{313}=\frac{\underset{2}{e}\underset{2}{\lambda}}{2(\underset{1}{\lambda}-\underset{2}{\lambda})}\underset{1}{X}(\ln\mu);\end{gathered}\tag{47.9}$$

$$\gamma_{414} = \underset{2}{e}\,\frac{\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda}\,(\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda})^2}{2\,(\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda})^3}\,\underset{1}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{121} = \gamma_{141} = -\frac{\underset{1}{e}\underset{1}{\lambda}}{2\,(\underset{1}{\lambda} - \underset{2}{\lambda})}\,\underset{2}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{342} = -\gamma_{324} = \frac{\underset{2}{e}}{2\mu}\,\underset{2}{X}(\underset{2}{\lambda}\mu);$$

$$\gamma_{343} = \gamma_{323} = -\frac{\underset{2}{e}}{2}\,\underset{2}{X}(\ln\mu); \tag{47.9}$$

$$\gamma_{424} = \gamma_{422} = \frac{3}{2}\,\underset{2}{e}\underset{2}{X}(\ln\mu);\ \gamma \quad \gamma_{423} = \frac{\underset{2}{e}\underset{2}{\lambda}}{2}\,\underset{2}{X}(\ln\mu);$$

$$\gamma_{344} = -\gamma_{322} = \frac{\underset{2}{e}}{2\mu^2}\,\underset{2}{X}(\underset{2}{\lambda}\mu^2);$$

$$\underset{1}{X}(\underset{1}{\lambda}\mu^2) = 0; \quad \underset{p}{X}(\underset{1}{\lambda}\mu) = 0; \quad p = 2,\ 3,\ 4, \quad \underset{2}{X}(\mu) = \underset{4}{X}(\mu);$$

$$\underset{1}{X}(\underset{2}{\lambda}\mu) = 0; \quad \underset{2}{X}(\underset{2}{\lambda}^3\mu^4) = \underset{4}{X}(\underset{2}{\lambda}^3\mu^4) = 0; \quad \underset{3}{X}(\mu) = \underset{3}{X}(\underset{2}{\lambda}) = 0.$$

6. XVI. [(13)]

Отличие данного случая от случая 5. XV. [13] в том, что $\lambda = \underset{2}{\lambda} = \underset{1}{\lambda}$. Имея это в виду, а также то, что $|\underset{r}{i}^k| \neq 0$, из последних уравнений (47.9) находим:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x^i} = 0; \quad \frac{\partial(\lambda\mu)}{\partial x^i} = 0; \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\text{или}\ \mu = c_1, \quad \lambda = c_2.$$

Тогда система (2.9) для данного случая сведется к следующей:

$$\gamma_{313} = \gamma_{421} = \gamma_{314} = \gamma_{312} = \gamma_{321} = \gamma_{341} = \gamma_{342} = \gamma_{324} = \gamma_{343} = \gamma_{323} =$$
$$= \gamma_{242} = \gamma_{232} = \gamma_{131} = \gamma_{424} = \gamma_{434} = \gamma_{423} = 0;$$
$$\gamma_{213} = \gamma_{413}; \quad \gamma_{211} = \gamma_{411}; \quad \gamma_{212} = \gamma_{412}; \quad \gamma_{214} = \gamma_{414}; \tag{47.10}$$
$$\mu = c_1; \quad \lambda = c_2,$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

Что же касается типов VIII, IX, то тут также можно было бы построить вещественные неголономные системы отнесения и выписать соответствующие системы уравнений. Но исследование удобнее вести в комплексном пространстве, а затем преобразованием координат перейти к вещественному, что и будет осуществлено в дальнейшем.

§ 48. Канонические формы метрик V_4 и $\bar{V}_4$ в голономной системе координат

1. Случаи VIII и IX. Так как в этих случаях элементарные делители λ-матрицы (45.3) простые, то в комплексном пространстве для них справедлив результат Леви-Чивита, т. е. будем иметь:

в случае VIII:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \underset{1}{e}\,|\varphi_2-\varphi_1|(\varphi_3-\varphi_1)(\varphi_4-\varphi_1)\,dx^{1^2} + \underset{2}{e}\,|\varphi_1-\varphi_2| \times \\
\times(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_4-\varphi_2)\,dx^{2^2} + \underset{3}{e}\,(\varphi_1-\varphi_3)(\varphi_2-\varphi_3)(\varphi_4-\varphi_3)\,dx^{3^2} + \\
+ \underset{3}{e}\,(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)(\varphi_3-\varphi_4)\,dx^{4^2};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{d}s^2 = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4}\Bigg\{ \frac{\underset{1}{e}}{\varphi_1}|\varphi_2-\varphi_1|(\varphi_3-\varphi_1)(\varphi_4-\varphi_1)\,dx^{1^2} + \\
+ \frac{\underset{2}{e}}{\varphi_2}|\varphi-\varphi_2|(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_4-\varphi_2)\,dx^{2^2} + \\
+ \frac{\underset{3}{e}}{\varphi_3}(\varphi_1-\varphi_3)(\varphi_2-\varphi_3)(\varphi_4-\varphi_3)\,dx^{3^2} + \\
+ \frac{\underset{3}{e}}{\varphi_4}(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)(\varphi_3-\varphi_4)\,ds^{4^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(x^1)$ и $\varphi_2 \equiv \varphi^2(x_2)$ — вещественные функции, а $\varphi_3 = \varphi_3(x^3)$ и $\varphi_4 = \varphi_4(x^4)$ — комплексно-сопряженные функции комплексных переменных;

в случае IX:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = (\varphi_3-c)(\varphi_4-c)\,g_{pq}\,dx^p\,dx^q + \\
+ \underset{3}{e}\,(c-\varphi_3)(\varphi_4-\varphi_3)\,dx^{3^2} + \underset{3}{e}\,(c-\varphi_4)(\varphi_3-\varphi_4)\,dx^{4^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{ds}^2 = \frac{1}{c\varphi_3\varphi_4}\Bigg\{\frac{1}{c}(\varphi_3-c)(\varphi_4-c)\,g_{pq}\,dx^p\,dx^q + \\
+ \frac{\underset{3}{e}}{\varphi_3}(c-\varphi_3)(\varphi_4-\varphi_3)\,dx^{3^2} + \frac{\underset{3}{e}}{\varphi_4}(c-\varphi_4)(\varphi_3-\varphi_4)(\varphi_3-\varphi_4)\,dx^{4^2}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

где $g_{pq} = g_{qp}$, $(pq = 1, 2)$ — вещественные функции двух переменных x^1 и x^2, $c = \mathrm{const}$, φ_3 и φ_4 есть комплексно-сопряженные функции комплексных переменных x^3 и x^4 соответственно.

Чтобы перейти к вещественному пространству, в обоих случаях произведем преобразование координат вида:

$$
x^1 = y^2, \quad x^1 = y^2, \quad x^3 = y^3 + iy^4; \quad x^4 = y^3 - iy^4.
$$

Относительно новых координат будем иметь:

$$\varphi_1 = \varphi_1(y^1); \quad \varphi_2 = \varphi_2(y^2); \quad \varphi_3 = \sigma + i\tau; \quad \varphi_4 = \sigma - i\tau;$$
$$g_{pq} = g_{qp}(y^1, \ y^2),$$

где σ и τ есть гармонически сопряженные функции вещественных переменных y^3 и y^4. Следовательно, квадратичные формы примут вид:

в случае VIII:

$$ds^2 = |\varphi_1 - \varphi_2| \{ \underset{1}{e} [(\sigma - \varphi_1)^2 + \tau^2] \, dy^{1^2} + \underset{2}{e} [(\sigma - \varphi_2)^2 + \tau^2] \, dy^{2^2} \} +$$
$$+ \underset{3}{e} 4\tau^2 (2\sigma - \varphi_1 - \varphi_2)(dy^{3^2} - dy^{4^2}) + \underset{3}{e} 8\tau [(\varphi_1 - \sigma)(\varphi_2 - \sigma) - \tau^2] \, dy^3 \, dy^4, \tag{48.1}$$
$$\overline{ds}^2 = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2(\sigma^2+\tau^2)} \left(|\varphi_1 - \varphi_2| \left\{ \underset{1}{e} \frac{1}{\varphi_1} [(\sigma - \varphi_1)^2 + \tau^2] \, dy^{1^2} + \right.\right.$$
$$\left. + \underset{2}{e} \frac{1}{\varphi_2} [(\sigma - \varphi_2)^2 + \tau^2] \, dy^{3^2} \right\} + \underset{3}{e} \frac{4\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} (\sigma^2 + \tau^2 - \varphi_1\varphi_2)(dy^{2^2} - dy^{4^2}) +$$
$$\left. + \underset{3}{e} \frac{8\tau}{\sigma^2+\tau^2} [\sigma(\varphi_1 - \sigma)(\varphi_2 - \sigma) - \tau^2 (\varphi_1 + \varphi_2 - \sigma)] \, dy^3 \, dy^4 \right),$$

в случае IX:

$$\overline{ds}^2 = \frac{1}{c(\sigma^2+\tau^2)} \left\{ \frac{1}{c} [(\sigma - c)^2 + \tau^2] \, g_{pq} \, dy^p \, dy^q - \right.$$
$$\left. - \underset{3}{e} \frac{4c\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} (dy^{3^2} - dy^{4^2}) + \underset{3}{e} \frac{8\tau}{\sigma^2+\tau^2} (c\sigma - \sigma^2 - \tau^2) \, dy^3 dy^4 \right\}, \tag{48.2}$$
$$ds^2 = [(\sigma - c)^2 + \tau^2] \, g_{pq} \, dy^p \, dy^q + \underset{3}{e} 4\tau \{ -\tau (dy^{3^2} -$$
$$- dy^{4^2}) + 2(c - \sigma) \, dy^3 \, dy^4 \}.$$

2. Характеристика [112]. На этом случае придется остановиться подробнее, чтобы детально пояснить используемый метод.

Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестной функции $f(x^1, \ldots, x^4)$:

$$\underset{s}{X}(f) = \underset{s}{i}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0, \qquad (s = m+1, \ldots, 4), \tag{48.3}$$

где $\underset{s}{i}^k$ — векторы ортрепера, относительно которого справедливы формулы (46.3) и (47.5). Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (48.3) состоит в том [170], что все коммутаторы операторов системы ([88], стр. 143)

$$[\underset{s}{X}\underset{t}{X}](f) = \underset{s}{X}\underset{t}{X}(f) - \underset{t}{X}\underset{s}{X}(f) = \sum_{l=1}^{4} \underset{l}{e} (\gamma_{lst} - \gamma_{lts}) \underset{l}{X}(f)$$

должны выражаться линейно через $\underset{s}{X}(f)\,(s=m+1,\ \ldots,\ 4)$, т. е. коэффициенты при $\underset{1}{X}(f),\ \ldots,\ \underset{m}{X}(f)$ равны нулю. Тогда существует m независимых решений $f^1,\ \ldots,\ f^m$ системы (48.3).

Учитывая (47.5), составим все коммутаторы операторов

$$\underset{1}{X}(f),\ \underset{2}{X}(f),\ \underset{3}{X}(f)\ \text{и}\ \underset{4}{X}(f):$$

$$\begin{aligned}
&[\underset{1}{X}\underset{2}{X}](f) = -\underset{1}{e}\gamma_{121}\underset{1}{X}(f) + \underset{2}{e}\gamma_{212}\underset{2}{X}(f);\\
&[\underset{1}{X}\underset{3}{X}](f) = -\underset{1}{e}\gamma_{131}\underset{1}{X}(f) + \underset{3}{e}\gamma_{313}\underset{3}{X}(f) - \underset{3}{e}(\gamma_{413}-\gamma_{431})\underset{4}{X}(f);\\
&[\underset{1}{X}\underset{4}{X}](f) = -\underset{1}{e}\gamma_{131}\underset{1}{X}(f) + \underset{3}{e}(\gamma_{413}+\gamma_{431})\underset{3}{X}(f) - \underset{3}{e}\gamma_{414}\underset{4}{X}(f);\\
&[\underset{2}{X}\underset{3}{X}](f) = -\underset{2}{e}\gamma_{232}\underset{2}{X}(f) + \underset{3}{e}\gamma_{323}\underset{3}{X}(f) - \underset{3}{e}(\gamma_{423}-\gamma_{432})\underset{4}{X}(f);\\
&[\underset{2}{X}\underset{4}{X}](f) = -\underset{2}{e}\gamma_{232}\underset{2}{X}(f) + \underset{3}{e}(\gamma_{423}+\gamma_{432})\underset{3}{X}(f) - \underset{3}{e}\gamma_{424}\underset{4}{X}(f);\\
&[\underset{3}{X}\underset{4}{X}](f) = -\underset{3}{e}\gamma_{343}\underset{3}{X}(f) - \underset{3}{e}\gamma_{434}\underset{4}{X}(f).
\end{aligned} \tag{48.4}$$

Из вышеуказанного видно, что система $\underset{2}{X}(f)=\underset{3}{X}(f)=\underset{4}{X}(f)=0$ вполне интегрируема и имеет одно решение, которое обозначим через f^1; система $\underset{1}{X}(f)=\underset{3}{X}(f)=\underset{4}{X}(f)=0$ тоже вполне интегрируема и ее решение обозначим через f^2. Если учесть, что $\gamma_{313}-\gamma_{413}=\gamma_{413}-\gamma_{414}$ и $\gamma_{323}-\gamma_{423}=\gamma_{423}-\gamma_{424}$, то легко убедиться в полной интегрируемости системы $\underset{1}{X}(f)=\underset{2}{X}(f)=(\underset{3}{X}-\underset{4}{X})(f)=0$ с решением f^4. Система $\underset{1}{X}(f)=\underset{2}{X}(f)=0$ также вполне интегрируема, но имеет два независимых решения, одно из которых можно выбрать совпадающим с f^4, а другое обозначить f^3.

Если теперь произвести преобразование координат

$$x^{k'} = f^k(x^1,\ \ldots,\ x^4),$$

то в новой системе отнесения компоненты векторов ортрепера $\underset{r}{i}^k$ (штрих можно опустить) конкретизируются следующим образом:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{i}^k = P_1(x)\,\delta_1^k;\quad \underset{2}{i}^k = P_2(x)\,\delta_2^k;\quad \underset{3}{i}^k - \underset{4}{i}^k = P_3(x)\,\delta_3^k;\\
\underset{3}{i}^1 = \underset{3}{i}^2 = \underset{4}{i}^1 = \underset{4}{i}^2 = 0.
\end{gathered} \tag{48.5}$$

После этого запас допустимых преобразований координат, не меняющих нулевых компонент векторов ортрепера, оказывается следующим:

$$x^{1'} = f^1(x^1),\quad x^{2'} = f^2(x^2),\quad x^{3'} = f^3(x^3,\ x^4),\quad x^{1'} = f^4(x^4). \tag{48.6}$$

Теперь, воспользовавшись (48.5) и тем, что $|\underset{s}{i^k}| \neq 0$ из тринадцати последних уравнений системы (47.5), найдем:

$$\mu = c\varphi_1\varphi_2\varphi_4^2;\quad \underset{1}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2\varphi_4^2};\quad \underset{2}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2^2\varphi_4^2};\quad \underset{3}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2\varphi_4^3}, \tag{48.7}$$

где $c = \mathrm{const}$, а $\varphi_1(x^1)$, $\varphi_2(x^2)$ и $\varphi_4(x^4)$ — произвольные функции указанных аргументов. Учитывая, что

$$[\underset{s}{X}\underset{t}{X}](f) = \underset{s}{i^k}\partial_k\underset{t}{i^r}\partial_r f - \underset{t}{i^k}\partial_k\underset{s}{i^r}\partial_r f,\quad \text{где } \partial_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k},$$

и то, что функция f в (48.4) произвольна, приравняем коэффициенты при одинаковых производных f. Получим систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{i^1}\partial_1\underset{2}{i^2} = \underset{2}{e}\gamma_{212}\underset{2}{i^2};\qquad \underset{2}{i^2}\partial_2\underset{1}{i^1} = \underset{1}{e}\gamma_{121}\underset{1}{i^1};\\
\underset{3}{i^3}\partial_3\underset{1}{i^1} + \underset{3}{i^4}\partial_4\underset{1}{i^1} = \underset{1}{e}\gamma_{131}\underset{1}{i^1};\quad \underset{1}{i^1}\partial_1\underset{3}{i^3} = \underset{3}{e}\gamma_{313}\underset{3}{i^3} - \underset{3}{e}(\gamma_{413} - \gamma_{431})\underset{4}{i^3};\\
\underset{1}{i^1}\partial_1\underset{3}{i^4} = \underset{3}{e}(\gamma_{313} - \gamma_{413} + \gamma_{431})\underset{3}{i^4};\\
\underset{4}{i^3}\partial_3\underset{1}{i^1} + \underset{4}{i^4}\partial_4\underset{1}{i^1} = \underset{1}{e}\gamma_{131}\underset{1}{i^1};\quad \underset{1}{i^1}\partial_1\underset{4}{i^3} = \underset{3}{e}(\gamma_{413} + \gamma_{431})\underset{3}{i^3} - \underset{3}{e}\gamma_{414}\underset{4}{i^3};\\
\underset{3}{i^3}\partial_3\underset{2}{i^2} + \underset{3}{i^4}\partial_4\underset{2}{i^2} = \underset{2}{e}\gamma_{232}\underset{2}{i^2};\quad \underset{2}{i^2}\partial_2\underset{3}{i^4} = \underset{3}{e}(\gamma_{323} - \gamma_{423} + \gamma_{432})\underset{3}{i^4};\\
\underset{2}{i^2}\partial_2\underset{3}{i^3} = \underset{3}{e}\gamma_{323}\underset{3}{i^3} - \underset{3}{e}(\gamma_{423} - \gamma_{432})\underset{4}{i^3};\\
\underset{4}{i^3}\partial_3\underset{2}{i^2} + \underset{4}{i^4}\partial_4\underset{2}{i^2} = \underset{2}{e}\gamma_{232}\underset{2}{i^2};\\
\underset{2}{i^2}\partial_2\underset{4}{i^3} = \underset{3}{e}(\gamma_{423} + \gamma_{432})\underset{3}{i^3} - \underset{3}{e}\gamma_{424}\underset{4}{i^3};\\
\underset{3}{i^3}\partial^3\underset{4}{i^3} - \underset{4}{i^3}\partial_3\underset{3}{i^3} + \underset{3}{i^4}\partial_4(\underset{4}{i^3} - \underset{3}{i^3}) = -\underset{3}{e}\gamma_{343}\underset{3}{i^3} - \underset{3}{e}\gamma_{434}\underset{3}{i^3};\\
(\underset{3}{i^3} - \underset{4}{i^3})\partial_3\underset{3}{i^4} = -\underset{3}{e}(\gamma_{343} + \gamma_{434})\underset{3}{i^4}.
\end{gathered} \tag{48.8}$$

Интегрирование уравнений 1, 8, 11 и 2, 3, 6 этой системы с учетом (47.5) и (48.7) дает:

$$\underset{1}{i^1} = \frac{\underset{1}{\theta}(x^1)}{\sqrt{|\varphi_2 - \varphi_1||\varphi_4 - \varphi_1|^2}};\qquad \underset{2}{i^2} = \frac{\underset{2}{\theta}(x^2)}{\sqrt{|\varphi_2 - \varphi_1||\varphi_4 - \varphi_2|^2}}.$$

Из уравнений 4, 7 и 10, 12 находим, что

$$\underset{3}{i}^3 - \underset{4}{i}^3 = \frac{\underset{3}{\theta}(x^3, x^4)}{\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)|}};$$

здесь $\underset{1}{\theta}(x^1)$, $\underset{2}{\theta}(x^2)$, $\underset{3}{\theta}(x^3, x^4)$, $\varphi_1(x^1)$, $\varphi_2(x^2)$ и $\varphi_4(x^4)$ — произвольные функции указанных аргументов. В зависимости от того, является ли φ_4 постоянной или нет, рассмотрим два подслучая.

а) $\partial_4\varphi_4 \neq 0$. Тогда, учитывая (48.6), произведем преобразование координат

$$x^{1'} = \int \frac{dx^1}{\underset{1}{\theta}};\quad x'_2 = \int \frac{dx^2}{\underset{2}{\theta}};\quad x^{3'} = \int \frac{dx^3}{\underset{3}{\theta}};\quad x^{4'} = x^4.$$

После чего, опустив штрихи, получим:

$$\begin{gathered}\underset{1}{i}^k = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_2-\varphi_1|\,|\varphi_4-\varphi_1|^2}}\delta^k_1;\quad \underset{2}{i}^k = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_1-\varphi_2|\,|\varphi_4-\varphi_2|^2}}\delta^k_2;\\ \underset{3}{i}^k - \underset{4}{i}^k = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)|}}\delta^k_3;\\ \underset{3}{i}^1 = \underset{3}{i}^2 = \underset{4}{i}^1 = \underset{4}{i}^2 = 0.\end{gathered}\tag{48.9}$$

Преобразования координат, не меняющие вида компонент ортрепера, будут иметь вид:

$$\begin{gathered}x^{1'} = x^1 + \text{const};\quad x^{2'} = x^2 + \text{const};\quad x^{3'} = x^3 + f^3(x^4);\\ x^{4'} = f^4(x^4).\end{gathered}\tag{48.10}$$

Интегрируя оставшиеся уравнения системы (48.8), а также уравнения 4 и 10, получим:

$$\underset{3}{i}^4 = \underset{4}{i}^4 = -\frac{\varphi_4^4\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\mathrm{sign}(\varphi_1-\varphi_2)}{[x^3+\underset{4}{\theta}(x^4)]\,\partial_4\varphi_4\sqrt{|\varphi_1-\varphi_4|\,|\varphi_2-\varphi_4|}};$$

$$\underset{4}{i}^3 = -\frac{1}{2\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)|}} -$$

$$-\frac{\varphi_4^4(\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_4)\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\mathrm{sign}(\varphi_1\varphi_1)}{2(\varphi_1-\varphi_4)(\varphi_2-\varphi_4)\sqrt{|\varphi_1-\varphi_4|\,|\varphi_2-\varphi_4|}} - \frac{4\varphi_4^3\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\mathrm{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{2\sqrt{|\varphi_1-\varphi_4|\,|\varphi_2-\varphi_4|}} +$$

$$+\frac{\underset{5}{\theta}(x^4)\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\varphi_4^4}{2\partial_4\varphi_4(x^3+\underset{4}{\theta})\sqrt{|\varphi_1-\varphi_4|\,|\varphi_2-\varphi_4|}}.$$

Если теперь произвести преобразование координат

$$x^{1'} = x^1;\quad x^{2'} = x^2;\quad x^{3'} = x^3 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(\varphi_1\varphi_2)\int \underset{5}{\theta}(x^4)\,dx^4;\quad x^{4'} = \varphi_4(x^4)$$

и опустить штрихи, то будем иметь формулы (48.9), в которых $\varphi_4(x^4)=x^4$ и следующие:

$$\underset{3}{i}^4=\underset{4}{i}^4=-\frac{(x^4)^4\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{[x^3+\theta(x^4)]\sqrt{|\varphi_1-x^4|\,|\varphi_2-x^4|}};$$

$$\underset{4}{i}^3=-\frac{1}{2\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-x^4)(\varphi_2-x^4)|}}-\frac{2(x^4)^3\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{\sqrt{|\varphi_1-x^4|\,|\varphi_2-x^4|}}-$$
$$-\frac{(x^4)^4(\varphi_1+\varphi_2-2\varphi_4)\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}\,\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{2(\varphi_1-x^4)(\varphi_2-x^4)\sqrt{|\varphi_1-x^4|\,|\varphi_2-x^4|}}; \tag{48.11}$$

причем преобразование координат, не меняющее вида компонент векторов ортрепера, будет тождественным преобразованием с точностью до переноса начала отсчета.

Воспользовавшись формулой

$$g^{ij}=\sum_{k=1}^{4}\underset{k}{e}\underset{k}{i}^i\underset{k}{i}^j,$$

а также (48.9) и (48.11), можно определить контрвариантные компоненты g^{ij} метрического тензора:

$$g^{11}=\underset{1}{e}\frac{1}{|\varphi_2-\varphi_1|(x^4-\varphi_1)^2};\quad g^{12}=g^{13}=g^{14}=0;$$
$$g^{22}=\underset{2}{e}\frac{1}{|\varphi_1-\varphi_2|(x^4-\varphi_2)^2};\quad g^{23}=g^{24}=0;$$
$$g^{33}=-\frac{\underset{3}{e}\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{|\varphi_1-x^4|\,|\varphi_2-x^4|}\left\{4(x^4)^3+\frac{(x^4)^4(\varphi_1+\varphi_2-2x^4)}{(\varphi_1-x^4)(\varphi_2-x^4)}\right\};$$
$$g^{34}=-\underset{3}{e}\frac{(x^4)^4\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{(x^3+\theta)|\varphi_1-x^4|\,|\varphi_2-x^4|};\quad g^{44}=0.$$

Тогда ковариантный тензор g_{ij} определяется как обратный контрвариантному:

$$g_{11}=\underset{1}{e}|\varphi_2-\varphi_1|(x^4-\varphi_1)^2;\quad g_{12}=g_{13}=g_{14}=0;$$
$$g_{22}=\underset{2}{e}|\varphi_1-\varphi_2|\,|x^4-\varphi_2|^2;\quad g_{23}=g_{24}=0;\quad g_{33}=0;$$
$$g_{34}=-\underset{3}{e}\frac{x^3+\theta}{(x^4)^4}|x^4-\varphi_1|\,|x^4-\varphi_2|\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2); \tag{48.12}$$
$$g_{44}=\underset{3}{e}\frac{(x^3+\theta)^2}{(x^4)^8}|x^4-\varphi_1|\,|x^4-\varphi_2|\left\{4(x^4)^3+\frac{(x^4)^4(\varphi_1+\varphi_2-2x^4)}{(\varphi_1-x^4)(\varphi_2-x^4)}\right\}\times$$
$$\times\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2).$$

Опустив с помощью тензора g_{ij} индексы контравариантных составляющих векторов ортрепера, определенных равенствами (48.9) и

(48.11), на основании второй формулы (47.2) определим компоненты тензора $\overline{g}_{ij}$:

$$\begin{aligned}
&\overline{g}_{11}=\underset{1}{\lambda} g_{11}; \quad \overline{g}_{12}=\overline{g}_{13}=\overline{g}_{14}=0; \quad && \underset{1}{\lambda}=\frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2(x^4)^2};\\
&\overline{g}_{22}=\underset{2}{\lambda} g_{22}; \quad \overline{g}_{23}=\overline{g}_{24}=\overline{g}_{33}=0; \quad && \underset{2}{\lambda}=\frac{1}{\varphi_1\varphi_2^2(x^4)^2};\\
&\overline{g}_{34}=\underset{3}{\lambda} g_{34}; && \underset{3}{\lambda}=\frac{1}{\varphi_1\varphi_2(x^4)^3};\\
&\overline{g}_{44}=\underset{3}{\lambda} g_{44}-g_{34}\frac{x^3+\theta}{\varphi^1\varphi^2(x^4)^4}.
\end{aligned} \tag{48.13}$$

В равенствах (48.12) и (48.13) $\varphi_1(x^1)$, $\varphi_2(x^2)$ и $\theta(x^4)$ — произвольные функции своих аргументов. Легко убедиться непосредственной проверкой, что тензоры (48.12) и (48.13) действительно удовлетворяют уравнениям (47.1).

б) Если $\varphi_4=\alpha=\text{const}$, то в силу (48.6) можно произвести преобразование координат

$$x^{1'}=\int\frac{|\varphi_1-\alpha|}{\underset{1}{\theta}}dx^1;\quad x^{2'}=\int\frac{|\varphi_2-\alpha|}{\underset{2}{\theta}}dx^2;\quad x^{3'}=\int\frac{dx^3}{\underset{3}{\theta}};$$
$$x^{4'}=x^4.$$

После этих преобразований формулы (48.5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{i}^k=\frac{1}{\sqrt{|\varphi_1-\varphi_2|}}\delta_1^k; \qquad \underset{2}{i}^k=\frac{1}{\sqrt{|\varphi_1-\varphi_2|}}\delta_2^k;\\
&\underset{3}{i}^k-\underset{4}{i}^k\frac{1}{\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)|}}\delta_3^k; \qquad \underset{3}{i}^1=\underset{3}{i}^2=0.
\end{aligned} \tag{48.14}$$

Допустимые преобразования координат, не меняющие (48.14), определяются формулами (48.10).

Поскольку $\varphi_4=\text{const}$, μ не зависит от x^4, следовательно,

$$\gamma_{434}=\gamma_{343}=\gamma_{411}=\gamma_{311}=\gamma_{422}=\gamma_{322}=0.$$

Тогда из уравнений 14, 13, 5, 9, 7 и 12 системы (48.8) следует, что

$$\underset{3}{i}^4=\underset{4}{i}^4=\frac{\underset{4}{\theta}(x^4)\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}}{\sqrt{|\varphi_1-\alpha||\varphi_2-\alpha|}};$$

$$\underset{4}{i}^3=-\frac{1}{2\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)|}}\left\{1+\frac{\alpha^4\varphi_1\varphi_2(\varphi_1+\varphi_2-2\alpha)}{(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)}\right\}+$$
$$+\frac{\underset{5}{\theta}(x^4)\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}}{\sqrt{|\varphi_1-\alpha||\varphi_2-\alpha|}}.$$

Если использовать допустимые преобразования координат

$$x^{1'} = x^1,\ x^{2'} = x^2,\ x^{3'} = x^3 - \int \frac{\underset{5}{\theta}}{\underset{4}{\theta}}\, dx^4,\ x^{4'} = \int \frac{dx^4}{\underset{4}{\theta}},$$

то вышеприведенные формулы примут вид:

$$\begin{gathered}\underset{3}{i}^4 = \underset{4}{i}^4 = \frac{\sqrt{|\varphi_1\varphi_2|}}{\sqrt{|\varphi_1-\alpha|\,|\varphi_2-\alpha|}};\\ \underset{4}{i}^3 = -\frac{1}{2\sqrt{|\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)|}}\left\{1 + \frac{\alpha^4\varphi_1\varphi_2(\varphi_1+\varphi_2-2\alpha)}{(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)}\right\}.\end{gathered} \tag{48.15}$$

По формуле

$$g^{ij} = \sum_{k=1}^{4} \underset{k}{e}\,\underset{k}{i}^i\,\underset{k}{i}^j$$

с учетом (48.14) и (48.15) определяются контрвариантные компоненты тензора g^{ij}:

$$g^{11} = \frac{\underset{1}{e}}{|\varphi_1-\varphi_2|};\quad g^{22} = \frac{\underset{2}{e}}{|\varphi_1-\varphi_2|};\quad g^{12} = g^{13} = g^{14} = 0;$$

$$g^{23} = g^{24} = 0;\quad g^{33} = -\underset{3}{e}\,\frac{\alpha^4(\varphi_1+\varphi_2-2\alpha)\operatorname{sign}(\varphi_1\varphi_2)}{(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)|\varphi_1-\alpha|\,|\varphi_2-\alpha|};$$

$$g^{34} = \frac{\underset{3}{e}}{|\varphi_1-\alpha|\,|\varphi_2-\alpha|};\quad g^{44} = 0.$$

После этого, так же как в подслучае а), можно определить компоненты тензора g_{ij}, с помощью последнего определить ковариантные составляющие $\underset{r}{i}_k$ векторов неголономного репера, а затем с помощью (47.2) — компоненты тензора $\bar{g}_{ij}$. Ниже приведен окончательный результат:

$$\begin{gathered}g_{11} = \underset{1}{e}|\varphi_1-\varphi_2|;\quad g_{22} = \underset{2}{e}|\varphi_1-\varphi_2|;\quad g_{34} = \underset{3}{e}|\varphi_1-\alpha|\,|\varphi_2-\alpha|;\\ g_{44} = \underset{3}{e}\alpha^4(\varphi_1+\varphi_2-2\alpha)\operatorname{sign}[\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\alpha)(\varphi_2-\alpha)];\\ \bar{g}_{11} = \underset{1}{\lambda} g_{11};\quad \bar{g}_{22} = \underset{2}{\lambda} g_{22};\quad \bar{g}_{34} = \underset{3}{\lambda} g_{34};\\ \bar{g}_{44} = \underset{3}{\lambda} g_{44} + \underset{3}{e}\,\frac{|\varphi_1-\alpha|\,|\varphi_2-\alpha|}{|\varphi_1\varphi_2|};\\ \underset{1}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1^2\varphi_2\alpha^2};\quad \underset{2}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2^2\alpha^2};\quad \underset{3}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2\alpha^3}.\end{gathered} \tag{48.16}$$

Таким образом, *метрические тензоры геодезически соответствующих четырехмерных римановых пространств с харак-*

теристикой [112] *можно привести к виду или* (48.12) *и* (48.13), *или* (48.16), *в зависимости, соответственно, от того, зависит* μ *от* x^4 *или нет, причем представление их в таком виде единственно, как это непосредственно следует из самого метода.*

3. Характеристика [(11) 2]. Так как рассуждения для остальных случаев повторяются почти буквально, то можно их опустить, выписав лишь результаты. Для двух римановых пространств V_4 и $\overline{V}_4$ с указанной выше характеристикой, имеющих общие геодезические, когда $\mu(x)$ не сводится к постоянной, можно выбрать общую голономную систему координат, относительно которой

$$\begin{gathered} \underset{1}{i^4} = \underset{2}{i^4} = \underset{1}{i^3} = \underset{2}{i^3} = \underset{3}{i^1} = \underset{3}{i^2} = \underset{4}{i^1} = \underset{4}{i^1} = 0; \\ \underset{4}{i^3} = -\underset{3}{i^3} = \frac{1}{2(x^4)^2}; \quad \underset{3}{i^4} = \underset{4}{i^4} = \frac{(x^4)^2}{x^3 + \theta(x^4)}; \\ \mu = c(x^4)^2; \quad \underset{1}{\lambda} = \frac{1}{c^1 (x^4)^2}; \quad \underset{3}{\lambda} = \frac{1}{(x^4)^3}, \end{gathered} \tag{48.17}$$

где c и d^1 — постоянные, а $\theta(x^4)$ — произвольная функция. Линейные элементы этих пространств записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (c_1 - x^4)^2 g_{pq}\, dx^p\, dx^q - 2\underset{3}{e}(x^3 + \theta)\, dx^3\, dx^4; \\ \overline{ds}^2 &= \underset{1}{\lambda}(c_1 - x^4)^2 g_{pq}\, dx^p\, dx^q - \underset{33}{e\lambda}(x^3 + \theta) \times \\ &\qquad \times \left[2\, dx^3\, dx^4 - \frac{x^3 + \theta}{x^4}\, dx^{4^2}\right]; \end{aligned} \tag{48.18}$$

где $q_{pq} = q_{qp}(x^1, x^2)$, $(p, q = 1, 2)$, а $\underset{1}{\lambda}$ и $\underset{3}{\lambda}$ определены равенствами (48.17). Представление линейных элементов в таком виде единственно с точностью до преобразований внутри V_2 с метрикой $d\sigma^2 = q_{pq}\, dx^p\, dx^q$.

Если же $\mu \equiv \text{const}$, то можно определить такую голономную систему координат, что

$$\begin{gathered} \underset{1}{i^3} = \underset{1}{i^4} = \underset{2}{i^3} = \underset{2}{i^4} = \underset{3}{i^1} = \underset{3}{i^2} = \underset{4}{i^1} = \underset{4}{i^2} = 0; \\ \underset{3}{i^3} = -\underset{4}{i^3} = -1; \quad \underset{3}{i^4} = \underset{4}{i^4} = 1. \end{gathered} \tag{48.19}$$

Первые квадратичные формы пространств V_4 и $\overline{V}_4$ в этой системе координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{pq}\, dx^p\, dx^q - \underset{3}{e}\, dx^3\, dx^4; \qquad (p, q = 1, 2); \\ \overline{ds}^2 &= \underset{1}{\lambda} g_{pq}\, dx^p\, dx^q - \underset{32}{e\lambda}\, dx^3\, dx^4 + \underset{3}{e}\, dx^{4^2}, \end{aligned} \tag{48.20}$$

где $g_{pq} = g_{qp}(x^1, x^2)$; $p, q = 1, 2$, а $\underset{1}{\lambda}$ и $\underset{2}{\lambda}$ — неравные друг другу постоянные. Система координат, в которой справедливы (48.19) и (48.20) определяется с точностью до преобразований внутри V_2 с метрикой

$$d\sigma^2 = g_{pq}\, dx^p\, dx^q, \quad p, q = 1, 2.$$

4. В случае характеристики [1 (12)] можно построить такую голономную систему отнесения, что

$$\underset{1}{i^k} = \delta_1^k; \quad \underset{2}{i^1} = 0; \quad \underset{2}{i^2} = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_1 - c_1|}}; \quad \underset{2}{i^4} = 0;$$

$$\underset{3}{i^1} = \underset{4}{i^1} = 0; \quad \underset{3}{i^2} = \underset{4}{i^2}; \quad \underset{3}{i^3} - \underset{4}{i^3} = \frac{1}{\sqrt{|\varphi_1(\varphi_1 - c_1)|}};$$

$$\underset{3}{i^4} = \underset{4}{i^4} = \frac{\sqrt{|\varphi_1|}}{\sqrt{|\varphi_1 - c_1|}}; \quad \mu = c\varphi_1; \quad \underset{1}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1^2}; \quad \underset{3}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1 c_1};$$

где c и c_1 — постоянные, а $\varphi_1 = \varphi_1(x^1)$ — произвольная функция. Первые квадратичные формы пространств V_4 и $\overline{V}_4$ с общими геодезическими в этой системе координат будут иметь вид:

$$ds^2 = \underset{1}{e}\, dx^{1^2} + |\varphi_1 - c_1| \Big\{ \underset{2}{e}\, dx^{2^2} + 2\underset{3}{e}\, dx^3\, dx^4 + \underset{1}{e}\Big[\frac{c_1^2 \operatorname{sign}\varphi_1}{\varphi_1 - c_1} - R\Big] dx^{4^2} \Big\};$$

$$\overline{ds}^2 = \underset{1}{e}\underset{1}{\lambda}\, dx^{1^2} + \underset{3}{\lambda}|\varphi_1 - c_1| \Big\{ \underset{2}{e}\, dx^{2^2} + 2\underset{3}{e}\, dx^3\, dx^4 + \underset{3}{e}\Big[\frac{c_1\varphi_1}{\varphi_1 - c_1} - R\Big] dx^{4^2} \Big\}; \quad (48.21)$$

где $R = R(x^2, x^4)$ — произвольная функция.

Представление метрик в виде (48.21) единственно с точностью до преобразования $x^{k'} = x^k + \delta_3^k f(x^4)$.

5. Если λ-матрица (45.3) имеет характеристику [(112)], то требование совпадения дифференциальных уравнений геодезических пространств V_4 и $\overline{V}_4$ с метрическими тензорами соответственно g_{ij} и $\overline{g}_{ji}$ в общей системе координат приводит к совпадению их римановых связностей.

В силу того, что $|\underset{r}{i^k}| \neq 0$, из последних уравнений системы (47.8) можно получить:

$$\mu = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}.$$

Из уравнений (47.1) следует тогда, что тензор $\overline{g}_{ij}$ ковариантно постоянен при ковариантном дифференцировании относительно метрики g_{ij}. Оказывается, что с точностью до преобразований

$$x^{1'}=f^1(x^1,\ x^2,\ x^4);\qquad x^{2'}=f^2(x^1,\ x^1,\ x^4);$$
$$x^{3'}=x^3+f^3(x^1,\ x^2,\ x^4);\qquad x^{4'}=x^4+\text{const}$$

линейные элементы пространств V_4 и $\overline{V}_4$ можно представить соответственно в виде:

$$ds^2=q_{pq}\,dx^p\,dx^q+2\underset{3}{e}\,dx^3\,dx^4,\qquad p,\ q=1,\ 2,\ 4;$$
$$\overline{ds}^2=\lambda\,ds^2+\underset{3}{e}\,dx^{4^2}. \tag{48.22}$$

Здесь $q_{pq}=q_{qp}=q_{pq}(x^1,\ x^2,\ x^4)$, а в остальном произвольные функции. При этом относительно компонент векторов ортрепера, для которого справедливы равенства (47.8), можно сказать только, что

$$\underset{3}{i^k}-\underset{4}{i^k}=\underset{3}{\delta^k};\quad \underset{3}{i^4}=\underset{3}{i^4}=1;\quad \underset{1}{i^4}=\underset{2}{i^4}=0.$$

6. Характеристика [13]. В этом случае, так же как и в случаях 2 и 3, приходится рассматривать два подслучая: а) когда μ является функцией лишь одной переменной x^1, меняющейся вдоль координатных линий, касательные векторы которых совпадают в каждой точке с неизотропным собственным направлением тензора $\overline{g}_{ij}$; б) когда μ обязательно является функцией хотя бы двух переменных. В подслучае а) совершенно однозначно можно выбрать такую голономную систему, что

$$\underset{1}{i^k}=\delta^k_1;\quad \underset{2}{i^1}=\underset{3}{i^1}=\underset{4}{i^1}=\underset{3}{i^4}=0;\quad \underset{3}{i^3}=\frac{1}{\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}};$$
$$\underset{3}{i^2}=-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^5\operatorname{sign}\varphi_1}{(\varphi_1-\alpha)\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}};\quad \underset{2}{i^k}-\underset{4}{i^k}=\frac{1}{|\varphi_1|\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}}\delta^k_2;$$
$$\underset{2}{i^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{|\varphi_1|\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}}\left\{1+\frac{\varphi_1^2\alpha^9}{\varphi_1-\alpha}\left[1+\frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{\varphi_1-\alpha}\right]\right\}; \tag{48.23}$$
$$\underset{2}{i^3}=-\frac{1}{2}\,\frac{\varphi_1\alpha^5}{(\varphi_1-\alpha)\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}};\quad \underset{2}{i^4}=\frac{|\varphi_1|}{\sqrt{|\varphi_1-\alpha|}}.$$

Метрики пространств V_4 и $\overline{V}_4$ в той же системе координат имеют вид:

$$ds^2=\underset{1}{e}\,dx^{1^2}+\underset{2}{e}|\varphi_1-\alpha|(2dx^2\,dx^4+dx^{3^2})+$$
$$+2\underset{2}{e}\alpha^5\operatorname{sign}[\varphi_1(\varphi_1-\alpha)]\,dx^3\,dx^4-\underset{2}{e}\alpha^9\operatorname{sign}(\varphi_1-\alpha)\,dx^{4^2};$$
$$\overline{ds}^2=\underset{1\,1}{\lambda e}\,dx^{1^2}+\underset{2\,2}{e\lambda}|\varphi_1-\alpha|(2\,dx^2\,dx^4+dx^{3^2})+ \tag{48.24}$$
$$+2\underset{2}{e}\operatorname{sign}[\varphi_1(\varphi_1-\alpha)]\,dx^3\,dx^4;$$
$$\underset{1}{\lambda}=\frac{1}{\varphi_1^2\alpha^3};\quad \underset{2}{\lambda}=\frac{1}{\varphi_1\alpha^4}.$$

В формулах (48.23) и (48.24) φ_1 — произвольная функция только от x^1. В подслучае б) также однозначно можно выбрать такую голономную систему отнесения, относительно которой

$$\underset{1}{i}^k = \underset{1}{\delta}^k |\varphi_1 - x^4|^{-\frac{3}{2}} \underset{3}{i}^1 = \underset{3}{i}^4 = 0; \quad \underset{3}{i}^3 = |\varphi_1 - x^4|^{-\frac{1}{2}};$$

$$\underset{3}{i}^2 = -\frac{1}{2}(x^4)^5 |\varphi_1 - x^4|^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sign}[\varphi_1(\varphi_1 - x^4)];$$

$$\underset{2}{i}^1 = \underset{4}{i}^1 = 0;$$

$$\underset{2}{i}^2 = \frac{1}{2}\left[\varphi_1^2 |\varphi_1 - x^4|\right]^{-\frac{1}{2}} \Big\{ 1 + \varphi_1^2 (x^4)^9 \Big[(\varphi_1 - x^4)^{-1} + \frac{3}{4} x^3 \times$$
$$\times (\varphi_1 - x^4)^{-2}\Big] - \frac{9}{2} \varphi_1^2 (x^4)^4 x^2 (x^3 + \theta)^{-1} \operatorname{sign} \varphi_1 \Big\};$$

$$\underset{4}{i}^2 = \underset{2}{i}^2 - \frac{1}{\sqrt{|\varphi_1(\varphi_1 - x^4)|}}; \quad \underset{2}{i}^4 = \underset{4}{i}^4 = -\frac{\varphi_1 (x^4)^5}{2(x^3 + \theta)\sqrt{|\varphi_1 - x^4|}};$$

$$\underset{2}{i}^3 = \underset{4}{i}^3 = -\frac{\varphi_1}{2\sqrt{|\varphi - x^4|}} \left\{ \frac{(x^4)^5}{\varphi_1 - x^4} + \frac{3(x^4)^4 x^3 + 2x^2 \operatorname{sign} \varphi_1}{2(x^3 + \theta)} \right\}; \qquad (48.25)$$

$$\mu = c\varphi_1 (x^4)^3; \qquad \underset{1}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1^2 (x^4)^3}; \qquad \underset{2}{\lambda} = \frac{1}{\varphi_1 (x^4)^4};$$

где $c = \mathrm{const}$, $\varphi_1(x^1)$ и $\theta(x^4)$ — произвольные функции своих аргументов.

Метрики пространств V_4 и $\overline{V}_4$, имеющих общие геодезические в той же системе координат, будут иметь вид:

$$g_{11} = \underset{1}{e} |\varphi_1 - x^4|^3; \qquad g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{22} = g_{23} = 0;$$

$$g_{24} = -\underset{2}{e}\, 2(x^4)^{-5} (x^3 + \theta) |\varphi_1 - x^4| \operatorname{sign} \varphi_1;$$

$$g_{33} = \underset{2}{e} |\varphi_1 - x^4|;$$

$$g_{34} = -\underset{2}{e} \Big\{ 2(x^3 + \theta) \operatorname{sign}(\varphi_1 - x^4) +$$
$$+ \frac{1}{2}(x^4)^{-5} |\varphi_1 - x^4| [3(x^4)^4 x^3 + 2x^2 \operatorname{sign} \varphi_1] \Big\};$$

$$g_{44} = \underset{2}{e} (x^4)^{-6} |\varphi_1 - x^4| \Big\{ \frac{1}{4}(x^4)^{-4} [3(x^4)^4 x^3 + 2x^2 \operatorname{sign} \varphi_1]^2 +$$
$$+ 2(x^3 + \theta)(\varphi_1 - x^4)^{-1} [(x^4)^5 (x^3 - 2\theta) +$$
$$+ x^2 (9\varphi_1 - 7x^4) \operatorname{sign}(\varphi_1)] \Big\}; \qquad (48.26)$$

$$\overline{g}_{11}=\underset{1}{\lambda}g_{11};\qquad \overline{g}_{12}=\overline{g}_{13}=\overline{g}_{14}=\overline{g}_{22}=\overline{g}_{23}=0;$$

$$\overline{g}_{24}=\underset{2}{\lambda}g_{24};\qquad \overline{g}_{33}=\underset{2}{\lambda}g_{33};\qquad \overline{g}_{34}=\underset{2}{\lambda}g_{34}+\frac{g_{24}}{|\varphi_1|};$$

$$\overline{g}_{44}=\underset{2}{\lambda}g_{44}+\frac{2\underset{2}{e}g_{24}}{|\varphi_1||\varphi_1-x^4|}\left[g_{34}-2(x^3+\theta)\frac{|\varphi_1-x^4|}{\varphi_1-x^4}\right].$$

То, что пространства с метриками (48.24) и (48.26) являются пространствами с общими геодезическими, легко проверяется непосредственной подстановкой этих метрик в уравнения (47.1).

7. Когда характеристика пары форм (44.1) имеет вид [(13)], то требование совпадения геодезических пространств, для которых эти формы являются линейными элементами, приводит к совпадению их римановых связностей. Так же как в случае 5, тензор $\overline{g}^{ij}$ оказывается ковариантно постоянным относительно g^{ij}. С точностью до преобразований

$$x^{k'}=x^k+\delta_2^k f(x^4),\qquad k=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

можно определить такую голономную систему координат, в которой первые квадратичные формы пространств V_4 и $\overline{V}_4$ будут иметь соответственно вид:

$$ds^2=\underset{1}{e}\,dx^{1^2}+2\underset{2}{e}\,dx^2\,dx^4+\underset{2}{e}\,dx^{3^2}+\theta\,dx^{4^2};$$

$$\overline{ds}^2=\lambda\,ds^2+2\underset{2}{e}\,dx^3\,dx^4, \tag{48.27}$$

где $\lambda=\text{const}$, а $\theta(x^1,\ x^4)$ — произвольная функция. Компоненты векторов ортрепера, относительно которого справедливы равенства (47.10), подчинены следующим соотношениям:

$$\underset{1}{i}^1=1;\qquad \underset{1}{i}^3=\underset{1}{i}^4=0;\qquad \underset{1}{i}^k=\delta_3^k;\qquad \underset{2}{i}^3-\underset{4}{i}^3=\delta_2^k;$$

$$\underset{2}{i}^3=\underset{4}{i}^3=0;\qquad \underset{2}{i}^4=\underset{4}{i}^4=1.$$

Таким образом, получены точные решения для всех полей гравитации с общими геодезическими линиями. Хотя эти решения содержат значительный запас произвольных функций, тем не менее можно утверждать, что требование совпадения геодезических линий является довольно жестким. Еще более жестким оно является в том случае, когда одно из отображаемых пространств оказывается пространством Эйнштейна (пустое пространство — $R_{ik}=0$ или случай, когда $R_{ik}=\varkappa g_{ik}$). Этот случай заслуживает специального исследования.

Принципиально важным является тот факт, что исследование вопроса, приведенное в этом параграфе, базируется только на алгебраической структуре $\bar{g}_{ij}$, не предопределяя физического состояния системы, т. е. прежде всего выбора тензора энергии-импульса. Отсюда возникает следующая возможность: выбирая в качестве g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ такие метрики, которые отвечали бы T_{ij} и $\bar{T}_{ij}$ конкретного вида, и так, чтобы при этом λ-матрица $(\bar{g}_{ij}-\lambda g_{ij})$ имела один из возможных типов, можно отображать в смысле совпадения геодезических линий (проективные преобразования полей) поля различного физического происхождения; на этом пути можно, например, построить электромагнитную модель гравитационного поля специальной природы.

Рассмотрим в заключение случай, когда пространство V_4 является пространством Эйнштейна, а $\bar{V}_4$ — произвольное пространство-время.

§ 49. Проективное отображение пространств Эйнштейна

Предположим, что риманово пространство V_n с основной формой

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{49.1}$$

подвергается бесконечно малому преобразованию

$$\overset{*}{x}{}^i=x^i+\xi^i\,\delta t, \tag{49.2}$$

где $\xi^i(x)$ — векторное поле, определяющее преобразование, а δt — малый параметр. Тогда

$$\delta x^i=\xi^i\,\delta t,\quad \delta\,dx^i=d\,\delta x^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\,dx^k\,\delta t,\qquad \delta g_{ij}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,\xi^k\,\delta t;$$

здесь δf означает бесконечно малое приращение функции f первого порядка относительно δt при преобразовании (49.2). Форма (49.1) при таком преобразовании перейдет в форму

$$d\bar{s}^2=ds^2+\delta\,ds^2=(g_{ij}+h_{ij}\,\delta t)\,dx^i\,dx^j,$$

где $h_{ij}=\xi_{i,\,j}+\xi_{j,\,i}$, т. е. метрика g_{ij} преобразуется в метрику

$$\bar{g}_{ij}=g_{ij}+h_{ij}\,\delta t. \tag{49.3}$$

Если (49.2) — бесконечно малое преобразование, сохраняющее геодезические линии, то метрики (49.1) и (49.3) являются метриками с общими геодезическими, следовательно, для них справедливы формулы (44.5). Подставляя в последние (49.3) $\psi_{,\,i}=\varphi_{,\,i}\,\delta t$ (и учитывая при этом, что $\bar{g}_{ij}|_{t=0}=g_{ij}$, и поэтому $\psi_{,\,i}|_{t=0}=0$, $\left.\frac{\partial\psi_{,\,i}}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_{,\,i}$;

$\varphi_{,i}$ есть градиент функции φ) и ограничиваясь членами первого порядка относительно δt, получаем:

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{jk}\varphi_{,i} + g_{ik}\varphi_{,j}; \tag{49.4}$$

запятой всегда будем обозначать ковариантную производную относительно g_{ij}.

Таким образом, *если дана однопараметрическая группа проективных преобразований в V_n и ей соответствует векторное поле $\xi^i(x)$, то существует функция $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$, такая, что имеют место равенства* (49.4), *в которых* $h_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}$. Можно показать ([272], стр. 55), что если векторное поле $\xi^i(x)$ совместно с некоторой функцией φ удовлетворяет уравнениям (49.4), то определяемая им однопараметрическая группа будет группой проективных преобразований пространства V_n.

Условия интегрируемости уравнений (49.4) имеют вид:

$$h_{im}R^m_{jkl} + h_{mj}R^m_{ikl} = g_{ik}\varphi_{,jl} - g_{il}\varphi_{,jk} + g_{jk}\varphi_{,il} - g_{jl}\varphi_{,ik}. \tag{49.5}$$

Эти условия будут играть основную роль в настоящем параграфе.

Если $\varphi_{,k} = 0$ в уравнениях (49.4), то, очевидно, *преобразование* (49.2) *сохраняет связность пространства V_n, поэтому его называют аффинным преобразованием.*

Пусть (49.2) отвечает некоторой однопараметрической группе преобразований T_t. Применяя к геометрическому объекту $a^i_{jk}(x)$ преобразование T_{t+dt}, получим:

$$\tilde{a}^i_{jk}(x, t+dt) = \tilde{a}^i_{jk}(x, t) + \frac{\partial a^i_{jk}(x, t)}{\partial t}dt + \ldots$$

С другой стороны, так как $T_{t+dt} = T_t \cdot T_{dt}$, то

$$\tilde{a}^i_{jk}(x, t+dt) = T_t\{a^i_{jk}(x) + La^i_{jk}(x)dt + \ldots\} =$$
$$= \tilde{a}^i_{jk}(x, t) + T_t[La^i_{jk}(x)dt] + \ldots,$$

где La^i_{jk} обозначает производную Ли от объекта a^i_{jk}, поэтому

$$\frac{\partial \tilde{a}^i_{jk}(x, t)}{\partial t} = T_t[La^i_{jk}(x)].$$

Отсюда вытекает следующая формула:

$$\tilde{a}^i_{jk}(x, t) = a^i_{jk}(x) + \int_0^t T_t[La^i_{jk}(x)]\,dt. \tag{49.6}$$

На основании этой формулы легко показать, что если $h_{ij} = \rho g_{ij}$, то соответствующее преобразование (49.2) является аффинным и $\rho = \text{const}$.

В самом деле, преобразование T_t переводит метрику $g_{ij}(x)$ в метрику $\bar{g}_{ij}(x, t)$, при этом $\bar{g}_{ij}|_{t=0} = g_{ij}(x)$ и по условию

$$\left.\frac{\partial \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \rho g_{ij}(x).$$

По формуле (49.6)

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t} = \rho g_{ij}(x) + \int_0^t T_t [L\rho g_{ij}(x)]\, dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t^2} = T_t [L\rho g_{ij}(x)],$$

но

$$L[\rho g_{ij}(x)] = g_{ij} L\rho + \rho L g_{ij} = g_{ij}(L\rho + \rho^2),$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t^2} = \mu(x, t)\, \bar{g}_{ij}(x, t),$$

где

$$\mu(x, t) = T_t (L\rho + \rho^2).$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \mu(x)\, g_{ij}(x).$$

Аналогично, любой тензор

$$\left.\frac{\partial^n \bar{g}_{ij}(x, t)}{\partial t^n}\right|_{t=0}$$

пропорционален $g_{ij}(x)$. Представляя $\bar{g}_{ij}(x, t)$ в виде ряда Маклорена по t, получим $\bar{g}_{ij}(x, t) = f(x, t)\, g_{ij}(x)$, а так как метрики $\bar{g}_{ij}$ и g_{ij} имеют общие геодезические, то $f = f(t)$ и $\psi_{,i} = 0$ (см. конец § 44). Таким образом, метрики $\bar{g}_{ij}$ и g_{ij} обладают одинаковой связностью и $\rho = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = \text{const}$.

Перейдем теперь к исследованию проективных преобразований четырехмерных пространств Эйнштейна ($R_{ik} = \varkappa g_{ik}$, $\varkappa = \text{const}$), основные квадратичные формы которых имеют сигнатуру типа $(- - - +)$. Так как (см. § 19) существует три и только три типа таких пространств в смысле алгебраической структуры тензора кривизны, то исследование естественно провести для каждого типа отдельно.

1. Для пространств первого типа (см. § 19)

$$(R_{ab}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix} \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, 6),$$

а матрицы M и N имеют вид:

$$M=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}; \quad N=\begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{49.7}$$

где $\sum\limits_1^3 \alpha_i = \varkappa$, $\sum\limits_1^3 \beta_i = 0$ или, если ввести *стационарные кривизны* $k_s = \alpha_s + i\beta_s$, $\sum\limits_1^3 k_s = -\varkappa$.

Учитывая то, что для неголономного ортрепера, относительно которого имеют место формулы (49.7), метрический тензор имеет вид:

$$(\overset{\circ}{g}_{ik}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix},$$

и используя его для поднятия и опускания индексов, запишем условия интегрируемости (49.5) для всех возможных индексов. Получим систему условий, которая эквивалентна следующей:

$$k_p(h_{qq} - h_{rr}) = \varphi_{,qq} - \varphi_{,rr}; \quad k_p(h_{pp} + h_{44}) = \varphi_{,pp} + \varphi_{,44}; \tag{49.8}$$

$$k_p h_{qr} = \varphi_{,qr}; \quad k_p h_{p4} = \varphi_{,p4}; \tag{49.9}$$

$$(k_p - k_r)(h_{pq} - ih_{r4}) = (k_p - k_r)(h_{r4} - ih_{pq}) = 0, \tag{49.10}$$

где $p, q, r = 1, 2, 3$ и $p \neq q \neq r$.

Из (49.10) следует, что если хотя бы одно $h_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, то $k_1 = k_2 = k_3 = -\frac{\varkappa}{3}$. Значит, характеристика λ-матрицы $(R_{ab} - \lambda g_{ab})$ $(a, b = 1, 2, \ldots, 6)$ будет простого типа [(111 111)], и, переходя от собирательных индексов к обычным, будем иметь:

$$R_{iklj} = \frac{\varkappa}{3}(g_{il}g_{kj} - g_{ij}g_{kl}),$$

т. е. V_4 — пространство постоянной кривизны.

Но пространства V_n постоянной кривизны допускают $n(n+2)$-параметрическую группу бесконечно малых проективных преобразований, причем эта группа локально изоморфна группе проективных преобразований плоского пространства [272]. Кроме того, $\overline{V}_4$ должно быть согласно теореме Бельтрами ([2], стр. 232) также пространством постоянной кривизны.

Если же все $h_{ij}=0$ при $i \neq j$, то (49.10) выполняются. Из (49.8), исключив $\varphi_{,ii}$ ($i=1, 2, 3, 4$), получим систему трех уравнений:

$$(k_1-k_2)(h_{33}-h_{11}-h_{22}-h_{44})=0;$$
$$(k_1-k_3)(h_{22}-h_{11}-h_{33}-h_{44})=0;$$
$$(k_2-k_3)(h_{11}-h_{22}-h_{33}-h_{44})=0.$$

Решая эту систему, приходим к трем возможностям: а) все k_p не равны между собой, б) два из k_p равны между собой и не равны третьему и в) все k_p равны.

В случае а)

$$h_{11}=h_{22}=h_{33}=-h_{44},$$

и тогда $h_{ik}=\nu g_{ik}$. В силу сказанного в начале этого параграфа (см. формулу (49.6) и ниже) $\nu=\mathrm{const}$, следовательно, однопараметрическая группа состоит из преобразований подобия, метрика же $\bar{V}_4$, имеющего с данным V_4 общие геодезические, будет равна $\bar{g}_{ij}=\sigma g_{ij}$, где $\sigma=\mathrm{const}$ (случай тривиально-конформного соответствия).

В случае б) рассмотрим, например, предположение $k_1=k_2 \neq k_3$. Для двух остающихся подслучаев ($k_1=k_3 \neq k_2$ и $k_2=k_3 \neq k_1$) результат будет аналогичным с точностью до перенумерации.

При нашем предположении

$$k_1-k_2=0, \quad k_1-k_3 \neq 0, \quad k_2-k_3 \neq 0,$$

следовательно, остаются два уравнения

$$\begin{aligned} h_{22}-h_{11}-h_{33}-h_{44}&=0;\\ h_{11}-h_{22}-h_{33}-h_{44}&=0. \end{aligned} \tag{49.11}$$

Складывая и вычитая, будем иметь

$$h_{11}=h_{22}, \quad h_{33}=-h_{44},$$

т. е. характеристики λ-матриц

$$(h_{ij}-\lambda g_{ij}) \quad \text{и} \quad (\bar{g}_{ij}-\lambda g_{ij}) \tag{49.12}$$

будут простого типа [(11)(11)], и можно воспользоваться результатами Солодовникова [272]; если характеристики λ-матриц (49.12) типа [(11)(11)] и $h_{ij} \neq \rho g_{ij}$ удовлетворяют уравнениям (49.4), то в некоторой системе координат

$$ds^2=g_{pq}\,dx^p\,dx^q+g_{rs}\,dx^r\,dx^s; \tag{49.13}$$

$$h_{ij}\,dx^i\,dx^j=(2c_1+c_2)\,g_{pq}\,dx^p\,dx^q+(2c_2+c_1)\,g_{rs}\,dx^r\,dx^s; \tag{49.14}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}(c_1+c_2); \tag{49.15}$$

здесь $p, q=1, 2$; $r, s=3, 4$; c_1 и c_2 — постоянные; g_{pq} зависит только от x^1 и x^2, а g_{rs} — от x^3, x^4. Доказательство этой теоремы не зависит от сигнатуры, а опирается лишь на требование простых элементарных делителей матрицы $(h_{ij}-\lambda g_{ij})$.

Таким образом, V_4 — приводимое пространство, т. е. имеем один из четырех возможных типов метрик приводимых пространств Эйнштейна (14.7), (14.8).

Группа проективных преобразований, более широкая, чем группа движений, будет в данном случае группой аффинных преобразований, т. е. преобразований, сохраняющих связность; она будет состоять из преобразований подобия, действующих в каждом из двумерных подпространств, топологической суммой которых является данное приводимое пространство.

Пространства $\bar{V}_4$, имеющие общие геодезические с пространствами (14.7) и (14.8) на основании теоремы Леви-Чивита (45.2) о метриках с общими геодезическими, будут соответственно иметь метрики вида: при $\varkappa > 0$

$$d\bar{s}^2 = -a_1\left[dx^{1^2} + \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\varkappa}\, x^1\right) dx^{2^2}\right] - a_2\left[dx^{3^2} - \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\varkappa}\, x^3\right) dx^{4^2}\right]; \qquad (49.16)$$

$$d\bar{s}^2 = -a_1\left[dx^{1^2} + \operatorname{ch}^2\left(\sqrt{\varkappa}\, x^1\right) dx^{2^2}\right] - a_2\left[\cos^2\left(\sqrt{\varkappa}\, x^4\right) dx^{3^2} - dx^{4^2}\right]; \qquad (49.17)$$

при $\varkappa < 0$

$$d\bar{s}^2 = -a_1\left[dx^{1^2} + \cos^2\left(\sqrt{-\varkappa}\, x^1\right) dx^{2^2}\right] - a_2\left[dx^{3^2} - \cos^2\left(\sqrt{-\varkappa}\, x^3\right) dx^{4^2}\right]; \qquad (49.18)$$

$$d\bar{s}^2 = -a_1\left[dx^{1^2} + \cos^2\left(\sqrt{-\varkappa}\, x^1\right) dx^{2^2}\right] - a_2\left[\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{-\varkappa}\, x^4\right) dx^{3^2} - dx^{4^2}\right]; \qquad (49.19)$$

где a_1 и a_2 — произвольные, не равные нулю постоянные. Отметим, что пространства (49.16) — (49.19), вообще говоря, уже не являются пространствами Эйнштейна.

В случае в), когда $k_1 = k_2 = k_3 = -\frac{\varkappa}{3}$, получим, что пространства V_4 и $\bar{V}_4$ являются пространствами постоянной кривизны, и группа проективных преобразований, допускаемых ими, будет локально изоморфна группе проективных преобразований пространства Минковского. Этим полностью исчерпывается случай пространств Эйнштейна первого типа.

2. Для пространств Эйнштейна второго типа матрицы M и N могут быть записаны в виде:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}; \tag{49.20}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\varkappa, \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 0. \tag{49.21}$$

Записывая условия интегрируемости (49.5) в неголономном ортрепере, в котором справедливы формулы (49.20) для всех возможных значений индексов (i, j, k, $l = 1, 2, 3, 4$), придем к системе условий, которая будет довольно громоздкой, но так же, как и для первого типа, легко решается, приводя к выводу $h_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $h_{11} = h_{22} = h_{33} = -h_{44}$, т. е. в ортрепере

$$h_{ij} = \nu g_{ij}.$$

Последнее равенство справедливо в силу своего тензорного характера в любой системе координат, причем $\nu = \text{const}$, как это следует из рассуждений, проведенных в начале параграфа (формула (49.6) и ниже).

Итак, имеет место следующее утверждение: *пространства Эйнштейна второго типа из проективных преобразований, более широких, чем группа движений, допускают только преобразования подобия*. Метрика же $\bar{V}_4$ будет тривиально конформной метрике g_{ij}:

$$\bar{g}_{ij} = \sigma g_{ij}, \quad \sigma = \text{const}.$$

3. Пространства третьего типа характеризуются тем, что в каждой точке допускают только один неголономный ортрепер, относительно которого матрицы M и N имеют вид:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записывая условия интегрируемости (49.5) для этого ортрепера, получим:

$$h_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad h_{11} = h_{22} = h_{33} = -h_{44}.$$

То есть в любой голономной системе координат опять будем иметь

$$h_{ij} = \nu g_{ij}, \quad \nu = \text{const}.$$

Таким образом: *пространства Эйнштейна* V_4 *с гиперболической метрикой допускают отображение с сохранением геодезических на римановы многообразия* $\overline{V}_4$ (*той же сигнатуры* $----+$) *тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий*: 1) V_4 *и* $\overline{V}_4$ — *пространства постоянной кривизны*, 2) V_4 *и* $\overline{V}_4$ *тривиально конформны* ($\overline{g}_{ij}=\sigma g_{ij}$, $\sigma=\mathrm{const}$) *или же* 3) V_4 — *приводимые пространства Эйнштейна* (14.7) *и* (14.8), *а* $\overline{V}_4$ *соответственно определены метриками* (49.16) — (49.19). Следовательно, в случае, если одно из отображаемых пространств является многообразием Эйнштейна, то требование совпадения геодезических является настолько жестким, что приводит к конформно-тривиальному отображению метрик, или к приводимым пространствам, или же исчерпывается случаем пространств постоянной кривизны; пустое пространство-время не допускает моделирования другими свободными или не свободными V_4.

Задачи

1. Доказать, что если риманово пространство V_n с метрическим тензором g_{ij} допускает нетривиальное геодезическое отображение на $\overline{V}_n$ с метрическим тензором $\overline{g}_{ij}$, определяемое функцией ψ, то риманово пространство $\breve{V}_n$ с фундаментальным тензором $\breve{g}_{ij}=l^{2\psi}\overline{g}^{km}g_{ki}g_{mj}$ допускает нетривиальное отображение на $\bar{\breve{V}}_n$ с метрикой $\bar{\breve{g}}_{ij}=l^{2\psi}g_{ij}$, определяемое той же функцией ψ (см. [466]).

2. Доказать, что пространства $\breve{V}_n$ и $\bar{\breve{V}}_n$ задачи 1 принадлежат тому же классу, что и пространства V_n и $\overline{V}_n$ в смысле классификации § 46.

3. Показать, что пространства (49.16) — (49.19) не являются, вообще говоря, пространствами Эйнштейна (когда это будет иметь место?).

4. Доказать, что пространство Эйнштейна V_4 может быть отображено с сохранением геодезических на пространство Эйнштейна $\overline{V}_4$ при $n=4$ и сигнатуре $(----+)$ тогда и только тогда, когда имеет место одно из условий: 1) отображение конформно-тривиальное: $\overline{g}_{ij}=\sigma g_{ij}$, $\sigma=\mathrm{const}$, 2) V_4 и $\overline{V}_4$ — пространства постоянной кривизны. Сравнить с результатами § 49.

5. Произвести тривиальное обобщение теоремы задачи 4 на случай, когда n — произвольное число, но сигнатура V_n имеет вид $(--\cdots-+)$.

Глава IX

Проблема Коши для уравнений поля Эйнштейна

В релятивистской механике, отвечающей общей теории относительности и уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}, \tag{α}$$

возможна постановка различных задач, аналогичных задачам классической механики [215], [232], [265], [278], [304], [305], но в этом направлении сделаны только первые шаги. Исключение составляет задача определения интегралов поля по начальным данным (задача Коши), для которой имеется четкая математическая постановка и определенные результаты. По этой причине в настоящей главе излагается проблема Коши для системы (α), нашедшая наиболее полное решение в работах Лихнеровича [178], [262], [278]. Необходимо отметить основной результат для проблемы Коши в приложении к системам уравнений с частными производными, полученный И. П. Петровским [114], [215]. Вопрос о корректности постановки задачи Коши для уравнений (α) и дискуссия по этому поводу отражены в работах [217], [232], [255], [278].

Решение задачи Коши, как правило [215], существенным образом зависит от класса функций, в которых ищутся решения, и от условий, накладываемых на поверхность, для которой ставится задача. Для системы (α), таким образом, вопрос будет зависеть от условий, накладываемых на компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ и тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}(x)$ и их производные. Тем самым решение задачи Коши необходимо было бы, при общем рассмотрении, связать с возможным типом алгебраических структур симметричного тензора $T_{\alpha\beta}$ в пространстве Минковского (см. § 54). В такой постановке задача до сих пор не решена и в этой главе рассматриваются лишь случаи тензора энергии-импульса потока частиц, не взаимодействующих между собой, и идеальной жидкости, как наиболее интересные в приложениях.

§ 50. Уравнения поля Эйнштейна

Придерживаясь терминологии, введенной в § 1, будем говорить о функции φ, что она класса C^r, если допускает непрерывные частные производные вплоть до порядка r; обозначим бесконечно дифференцируемые функции и аналитические функции соответственно символами C^∞ и C^a.

Введем также понятие *функции класса C^2 на куске поверхности S*. Рассмотрим для этого функцию φ, непрерывную в окрестности гиперповерхности S. Пусть система координат в V_n выбрана так, что эта гиперповерхность записывается уравнением $x^n = 0$. Предположим, что φ удовлетворяет условиям:

1) она класса C^2 в каждой из окрестностей, принадлежащих областям $x^n > 0$ и $x^n < 0$;

2) $\partial_\alpha\varphi$ и $\partial_{\alpha\beta}\varphi$ равномерно стремятся к определенным пределам, когда $x^n \to 0$, не меняя знака, но в зависимости от того, будет ли при этом $x^n > 0$ или $x^n < 0$, эти пределы будут различными.

Прерывность φ на S принято обозначать символом $[\varphi]$. Тогда, согласно классическим результатам Адамара ([21], стр. 83—87), прерывности производных функции φ на S будут иметь вид:

$$[\partial_i\varphi] = 0, \quad [\partial_n\varphi] = A, \tag{50.1}$$

$$[\partial_{ij}\varphi] = 0, \quad [\partial_{in}\varphi] = \partial_i A, \quad [\partial_{nn}\varphi] = B \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{50.2}$$

где A и B — некоторые функции, определяемые на S.

Если в V_n произведено преобразование координат класса C^2, то в новой системе отнесения получим функцию φ и гиперповерхность S, определяемую уравнением $f(x) = 0$, для которых: 1) φ имеет класс C^2 для каждой из окрестностей S, удовлетворяющих условиям $f > 0$ и $f < 0$, и 2) первые и вторые производные φ равномерно стремятся к определенным пределам (при $f = +0$ и $f = -0$), не совпадающим вообще между собой. Теперь, по определению, функцию φ, определенную в некоторой области V_n, назовем *кусочно-гладкой* класса C^2, если в этой области φ имеет класс C^2, за исключением окрестностей конечного числа поверхностей разрыва $S_1, S_2, \ldots, S_k$, для каждой из которых имеют место условия 1) и 2).

Отметим, что эти условия аналогичны тем, которые появляются в теории гидродинамических волн.

Уравнения поля (α) действуют в пространстве-времени V_4, определяемом метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\,dx^\alpha\,dx^\beta, \tag{50.3}$$

и здесь V_4 определяется как *дифференцируемое многообразие*. Для дальнейшего является существенным уточнение понятия V_4.

Пусть дано некоторое n-мерное, топологическое, связное ([229], стр. 96) пространство V_n, каждая точка которого обладает окрестностью, *гомеоморфной* евклидовой сфере (см. § 1). Рассмотрим некоторую *открытую* область D в V_n ([229], стр. 91) и совершим отражение этой области D на евклидово n-мерное пространство R_n; это определит *локальную систему координат* D, при помощи которой каждой точке x из D сопоставляется точка ξ из R_n, определяемая n вещественными числами x^α. *Дифференцируемое многообразие заданного класса* C^r определим как такое V_n, с которым можно связать множество A локальных систем координат, удовлетворяющих условиям:

α) Области, отвечающие A, целиком покрывают V_n.

β) Пусть D_1 и D_2 — две такие области; рассмотрим их пересечение $D_1 \cap D_2$. Тогда если $x \subset D_1 \cap D_2$, то координаты точки x в одной локальной системе координат, отвечающей D_1, суть функции класса C^r (с якобианом, отличным от нуля) от координат этой точки в другой локальной системе, отвечающей D_2.

Аксиомы α) и β) позволяют ввести такие понятия, как *эквивалентность* покрытий области, *рефлексивность* (эквивалентность самому себе), *транзитивность* и т. д. Тщательное изложение этих вопросов содержится, например, в книге Л. С. Понтрягина [229].

В качестве пространственно-временного многообразия V_4, для которого исследуются уравнения поля (α), возьмем такое V_4, которое будет дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям α) и β) и, кроме того, условию

γ) Требуем, чтобы на пересечении областей двух локальных систем координат вторые производные функций, определяющих замену координат, были функциями *кусочно-гладкими класса* C^r.

В дальнейшем будет конкретно подразумеваться, что на пересечении областей двух систем координат координаты точки в одной из систем суть четырежды дифференцируемые функции (с ненулевым якобианом) координат точек в другой системе; при этом первые и вторые производные непрерывны, а третьи и четвертые могут допускать разрывы типа Адамара.

Компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ и их производные $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}(x)$ будут предполагаться соответственно класса C^1 и класса C^2 кусочно-гладких.

Рассматривая некоторую гиперповерхность S в v_n, проходящую через точку x^α, можно построить касательное к S в данной точке плоское пространство R_{n-1}. Если направление некоторого вектора, принадлежащего R_{n-1}, определяется вектором $\overrightarrow{dx}$ с компонентами dx^α, то это касательное плоское пространство можно определить уравнением $v_\alpha dx^\alpha = 0$, где v_α — ковариантные составляющие вектора нормали к R_{n-1}. В зависимости от того, какую норму имеет этот вектор, будем касательной к S гиперплоскости приписывать ту или иную ориентацию в пространстве-времени, именно: если

$$g^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta > 0,$$

то будем говорить, что гиперповерхность *ориентирована в пространстве* (при сигнатуре метрики пространства типа $(---+)$), и если

$$g^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta < 0,$$

будем говорить *об ориентации гиперповерхности во времени*. Эти понятия позволяют далее уточнить выбор гиперповерхности S, на которой задаются начальные данные Коши.

Уравнения поля (α) Эйнштейна, как уже отмечалось в § 12, были получены последним в предположении, что они должны, с одной стороны, обобщать уравнения Лапласа — Пуассона, локально определяющие ньютоновский потенциал, и, с другой стороны, удовлетворять закону *сохранения*. Если обозначить левую часть (α) через $S_{\alpha\beta}$, то уравнения поля запишутся в виде:

$$S_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta}, \tag{50.4}$$

где тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ целиком определяется распределением и движением материи, а $S_{\alpha\beta}$ — метрикой пространства-времени. Если $T_{\alpha\beta} \neq 0$, то будем далее говорить о *внутренней задаче*, и в противном случае, когда $T_{\alpha\beta} = 0$ и речь идет о свободных областях пространства-времени, не возмущенных энергетически, — *о внешней задаче*. Не уточняя пока вопрос о строении $T_{\alpha\beta}$ в зависимости от природы поля, отметим лишь, что этот тензор, по существу, обобщает правую часть уравнения Пуассона.

Что же касается *тензора Эйнштейна* $S_{\alpha\beta}$, имеющего чисто геометрическое происхождение, то он удовлетворяет двум условиям:

1°. $S_{\alpha\beta}$ — комитант (т. е. рациональная функция) от $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ и $\partial_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta}$, причем от вторых производных зависит линейно.

2°. Он удовлетворяет закону сохранения

$$S^{\alpha}_{\beta,\,\alpha} = 0. \tag{50.5}$$

Условия 1° и 2° являются гипотезами, которые, однако, мотивируются физически. Так как, с другой стороны, уравнения (α) могут быть получены из вариационного принципа и тогда 1° и 2° будут следствиями, то тем самым устанавливается согласованность этих условий с вариационными принципами. Эйнштейн вывел уравнения поля из условий 1° и 2°, опираясь при этом на интуицию. Строгий анализ этих условий, произведенный Картаном (стр. 141—203), привел его к теореме: *если* $S_{\alpha\beta}$ *удовлетворяет* 1° *и* 2°, *то*

$$S_{\alpha\beta}=h\left\{R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}\right\}, \tag{50.6}$$

где $R_{\alpha\beta}$ — *тензор Риччи,* R — *скалярная кривизна пространства, а* h, k — *произвольные постоянные.* Относя постоянную h к правой части, можно прийти к уравнениям поля

$$S_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta}. \tag{50.7}$$

Так называемая *космологическая константа* k, к которой обращался в свое время и Эйнштейн ([45], стр. 142), приводящая к гипотезе о конечности вселенной в космологических проблемах, была исключена из физических соображений, после чего (50.7) приведется к (50.4). Отметим, что для многих вопросов присутствие постоянной k не отражается на методе и результатах, которые получаются автоматической заменой $R\to R+k$.

Если считать, что тензор $S_{\alpha\beta}$ определяется формулой (50.6), то закон сохранения (50.5) является непосредственным следствием тождества Бианки (5.16). Свертывая его по σ, γ, получим:

$$-R_{\alpha\beta,\,\delta}+R_{\alpha\delta,\,\beta}+R^{\sigma}{}_{\alpha\delta\beta,\,\sigma}=0,$$

откуда, производя еще одно свертывание по α, β, найдем:

$$R_{,\,\delta}-2R^{\sigma}{}_{\delta,\,\sigma}=0.$$

Если k — постоянное число, то ввиду этого тождества получим, что для $S_{\alpha\beta}$ имеет место закон сохранения независимо от того, будет ли $S_{\alpha\beta}$ тензором Эйнштейна или же имеет место формула (50.7).

§ 51. Внешняя задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для такой области V_4, в которой тензором энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ можно пренебречь и, если исходить из (51.7), уравнения имеют вид:

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(R+k)\,g_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta},\quad \varkappa=\frac{1}{2}(R+k). \tag{51.1}$$

Если в этом равенстве произвести свертывание по α и β, то зависимость между постоянной k и скалярной кривизной пространства определится в виде:

$$R=-2k. \tag{51.2}$$

В частности, для уравнения поля (α), когда космологическая постоянная k предполагается равной нулю, получим, что $R=0$ и уравнения поля для *свободного пространства* будут иметь вид:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{51.3}$$

Решение задачи Коши для уравнений (51.1) или (51.3), которые не отличаются существенно, представляя самостоятельный интерес, в то же время будет полезно при рассмотрении внутренней задачи Коши.

Пусть задана некоторая гиперповерхность S пространства-времени V_4, определяемого компонентами метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, тогда задача Коши формулируется следующим образом: *требуется определить компоненты тензора $g_{\alpha\beta}(x)$ так, чтобы на S они и их первые производные были данными функциями, если на S и вне S искомые потенциалы $g_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям поля* (51.1) *или* (51.3). Строго говоря, случай (51.1) более естественно отнести к внутренней задаче, когда $\lambda T_{\alpha\beta} = -\frac{k}{2} g_{\alpha\beta}$, но в смысле метода решения задачи Коши условия $k = 0$ или $k \neq 0$ не приводят к существенному различию.

Для задачи Коши прежде всего требуется определить *данные Коши*. Для этого удобно ввести сначала в V_4 такую специальную систему координат, где гиперповерхность S задается уравнением $x^4 = 0$, по крайней мере локально. В этой системе координат $g_{44} > 0$. Назовем для этой системы координат *индексом* производной потенциала $g_{\alpha\beta}(x)$ число, показывающее, сколько раз эта компонента дифференцируется по x^4. Тогда *данные Коши* состоят из значений $g_{\alpha\beta}$ на S и первых частных производных от $g_{\alpha\beta}$ индекса 1, т. е. $\partial_4 g_{\alpha\beta}$. Здесь предполагается, что эти данные соответственно трижды и дважды дифференцируемы по крайней мере.

Для дальнейшего необходимо прежде всего выяснить, привлекая для этой цели систему уравнений поля, вопрос о поведении вторых производных от потенциалов на S. Что касается вторых производных от $g_{\alpha\beta}$ индекса $\leqslant 1$ ($\partial_{4i} g_{\alpha\beta}$, $\partial_{ij} g_{\alpha\beta}$; $i, j = 1, 2, 3$), то они могут быть определены по данным Коши непосредственным дифференцированием и они непрерывны. Производные же индекса 2 ($\partial_{44} g_{\alpha\beta}$) определяются системой уравнений поля и должны быть определены из этой системы. Они вообще могут претерпевать разрыв на S.

Так как на основании (5.2)

$$\frac{1}{2} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_{[\beta} \Gamma^{\sigma}_{\gamma]\,\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\alpha\,[\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\beta]\,\tau},$$

то

$$R_{\alpha\beta} = g^{\lambda\nu} (\partial_\alpha \Gamma_{\nu,\,\lambda\beta} - \partial_\lambda \Gamma_{\nu,\,\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} (\partial_{\beta\lambda} g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha\nu} g_{\beta\lambda} - \partial_{\lambda\nu} g_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} - \partial g_{\lambda\nu}) + \omega_{\alpha\beta}; \tag{51.4}$$

здесь $\omega_{\alpha\beta}$ — рациональная функция от символов Кристоффеля $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, и следовательно, $\omega_{\alpha\beta}$ *полностью определяются данными Коши.* Отсюда получаем, что если брать уравнения поля в виде 1), то, поскольку $R = -2k = \text{const}$, правую часть можно включить в $\omega_{\alpha\beta}$, и эта группа членов уравнения не перестает от этого определяться данными Коши.

Рассматриваемую нами специальную систему координат можно было бы, в частности, выбрать как полугеодезическую, но мы не требуем этого, ограничивая ее выбор тем, что в ней гиперповерхность S *ориентирована в пространстве* и записывается уравнением $x^4 = 0$. Ввиду особой роли, которую играет индекс 4, для этой системы координат запишем систему (51.4) в виде:

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{44} \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{ij} = 0, \tag{51.5}$$

$$R_{i4} \equiv \frac{1}{2} g^{4j} \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{i4} = 0, \tag{51.6}$$

$$R_{44} \equiv -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_{44} g_{ij} + \Omega_{44} = 0, \tag{51.7}$$

где $\Omega_{\alpha\beta}$ составляется из $\omega_{\alpha\beta}$ и тех вторых производных, которые могут быть определены дифференцированием на гиперповерхности S данных Коши и, следовательно, также определяются данными Коши. Так как гиперповерхность ориентирована в пространстве, то $g^{44} \neq 0$ и из уравнений (51.5) можно определить все производные вида $\partial_{44} g_{ij}$. Что же касается производных вида $\partial_{44} g_{4\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), то они вообще в уравнениях (51.5) — (51.7) не встречаются, так как все компоненты тензора кривизны вида $R_{44\alpha4} \equiv 0$. Тем не менее существенно показать, что *прерывность производных* $\partial_{44} g_{4\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), *если она имеет место, не может иметь физического смысла и потому является несущественной.* Это будет ясно, если удастся показать, что при некотором преобразовании координат производные $\partial_{44} g_{ij}$ не меняют своего значения, а $\partial_{44} g_{4\alpha}$ можно привести к любому наперед заданному значению.

Рассмотрим в окрестности гиперповерхности S преобразование координат, обладающее тем свойством, что на S оно сохраняет численное значение координат каждой точки (напомним, что S записывается уравнением $x^4 = 0$):

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda} + \frac{x^{4^3}}{6} (\varphi^{\lambda}(x^i) + \varepsilon^{\lambda}), \tag{51.8}$$

где предполагается, что $\varepsilon^{\lambda} \to 0$, когда $x^4 \to 0$. Ясно, что

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}\right)_S = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \lim_{x^4 \to 0} \left[x^{\alpha} + \frac{x^{4^3}}{6} (\varphi^{\alpha}(x^i) + \varepsilon^{\alpha}) \right] \tag{51.9}$$

и

$$\left(\partial_\mu A_4^{\alpha'}\right)_S = \left(\partial_4 A_\beta^{\alpha'}\right)_S = \left(\partial_{i4} A_4^{\alpha'}\right)_S = \left(\partial_{44} A_l^{\alpha'}\right)_S = 0, \quad A_\beta^{\alpha'} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}, \tag{51.10}$$

а

$$\left(\partial_{44} A_4^{\alpha'}\right)_S = \varphi^\alpha. \tag{51.11}$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\beta} g_{\sigma'\tau'},$$

то непосредственно получим:

$$\partial_4 g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} A_4^{\lambda'} \partial_{\lambda'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_4 A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_4 A_\beta^{\tau'} A_\alpha^{\sigma'} g_{\sigma'\tau'}, \tag{51.12}$$

и, следовательно, вследствие (51.10) имеем, что данные Коши на гиперповерхности S после такой замены координат определяются соотношениями

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha'\beta'}, \quad \partial_4 g_{\alpha\beta} = \partial_{4'} g_{\alpha'\beta'}. \tag{51.13}$$

Если, кроме того, вычислить вторые производные, то придем к выражению

$$\partial_{44} g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} A_4^{\lambda'} A_4^{\nu'} \partial_{\lambda'\nu'} g_{\sigma'\tau'} + \partial_{44} A_\alpha^{\sigma'} A_\beta^{\tau'} g_{\sigma'\tau'} + \\ + \partial_{44} A_\beta^{\tau'} A_\alpha^{\sigma'} g_{\sigma'\tau'} + u_{\alpha\beta}, \tag{51.14}$$

где через $u_{\alpha\beta}$ обозначена группа членов, содержащих множителями первые производные от A_β^α, которые в силу (51.10) на S обращаются в нуль. Следовательно, из (51.14) имеем:

$$\partial_{44} g_{ij} = \partial_{4'4'} g_{i'j'},$$

$$\partial_{44} g_{4\alpha} = \partial_{4'4'} g_{4'\alpha'} + g_{\alpha\sigma}\varphi^\sigma + g_{4\sigma}\delta_\alpha^4\varphi^\sigma.$$

Таким образом, в то время как производные $\partial_{44} g_{ij}$ не меняются, относительно вторых производных вида $\partial_4 g_{4\alpha}$ можно сказать, что в зависимости от выбора функций φ^σ, которые пока произвольны, их можно привести к наперед заданным функциям ([262], § 14). Можно, в частности, выбрать $\varphi^{(\alpha)}$ так, чтобы $\partial_{44} g_{\alpha 4}$ были непрерывными на S.

Следовательно, с точностью до этой оговорки вторые производные *непрерывны на* S. Если же, кроме того, предположить дифференцируемость данных Коши более высокого порядка, то дифференцируя (51.10) последовательно достаточное число раз, этот вывод можно распространить на производные более высокого порядка.

Для решения задачи Коши необходимо еще рассмотреть группу уравнений (51.6) и (51.7).

Для простоты предположим далее, что $k = 0$, хотя, как мы видели, это несущественно и все выводы без труда распространяются и на случай $k \neq 0$. Уравнения (51.6) и (51.7) при этом предположении записываются в виде $R_{4\alpha}=0$ $(\alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Так как

$$S^4{}_i = g^{4j}R_{ij} + g^{44}R_{4i}, \quad S^4_4 = R^4_4 - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}\left(g^{44}R_{44} - g^{ij}R_{ij}\right),$$

то эта система эквивалентна системе

$$S^4{}_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{51.15}$$

которая не содержит производных индекса 2 и, следовательно, определяет систему условий, накладываемых на данные Коши.

Докажем, что *система уравнений поля Эйнштейна находится в инволюции, т. е. если потенциалы* $g_{\alpha\beta}(x)$ *удовлетворяют системе* (51.5) *и на гиперповерхности* S *условиям* (51.15) (*или, что то же самое,* (51.6) *и* (51.7)), *то они удовлетворяют* (51.15) *и в окрестности* S.

Пусть данные Коши удовлетворяют условиям

$$\left(S^4{}_\alpha\right)_S = 0$$

и потенциалы $g_{\alpha\beta}(x)$, отвечающие этим данным Коши, удовлетворяют уравнениям (51.5). В силу закона сохранения (51.5)

$$S^\alpha{}_{\beta,\alpha} = 0,$$

или, выделяя индекс 4, можно записать:

$$S^4{}_{\beta,4} + \sum_{i=1}^{3} S^i{}_{\beta,i} = 0. \tag{51.16}$$

С другой стороны, имеем из (51.5):

$$\begin{aligned}
S^i{}_j &= g^{4i}R_{4j} - \frac{1}{2}\left(g^{44}R_{44} + 2g^{4i}R_{4i}\right),\\
S^i{}_4 &= g^{i\sigma}R_{\sigma 4},\\
S^4{}_i &= g^{44}R_{4i},\\
S^4{}_4 &= \frac{1}{2}g^{44}R_{44}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что систему (51.16) можно представить в виде:

$$g^{44}\partial_4 S^4{}_\beta = M^{i\sigma}{}_\beta \partial_i S^4{}_\sigma + N^\sigma{}_\beta S^4{}_\sigma, \tag{51.17}$$

где M и N будут класса C^0.

Подытоживая, получим следующий вывод: для любого решения (51.5) S^4_β удовлетворяет системе четырех уравнений (51.17) с частными производными, линейных, однородных, разрешимых относительно производных $\partial_4 S^4_\beta$. Но такая система для нулевых данных Коши на S, $(S^4_\beta)_S = 0$, имеет только нулевые решения; это доказывает утверждение.

Следовательно, если данные Коши удовлетворяют (51.6) и (51.7), то они удовлетворяют им и в окрестности S и эти уравнения служат только для определения данных Коши, в то время как первая группа уравнений поля (51.5) служит для определения изменения потенциалов во времени.

Следовательно, проблема Коши для уравнений поля Эйнштейна приводится к двум задачам ([262], § 15):

1) *Задача определения начальных условий*, которая состоит в отыскании данных Коши, удовлетворяющих на гиперповерхности S условиям $S^4_\alpha = 0$.

2) *Задача интегрирования по времени* x^4, которая состоит в интегрировании уравнений $R_{ij} = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ $\left(\text{или уравнений } R_{ij} = \frac{1}{2}(R + k)\, g_{ij}, \text{ если } k \neq 0\right)$ для данных Коши, удовлетворяющих условиям первой задачи.

Основную трудность представляет решение первой задачи, которая зависит от характера гиперповерхности S и которую только при некоторых частных предположениях можно считать решенной в замкнутой форме. Вторая задача в предположении, что первая задача решена, была решена Фурес при сравнительно простых предположениях о дифференцируемости [178], [278].

Если предположить, что решение ищется в классе аналитических функций (т. е. все функции, появляющиеся при решении второй задачи, аналитические и вещественные), то, основываясь на теореме Коши — Ковалевской ([177], § 1; [169], стр. 294) о системе уравнений с частными производными, можно утверждать, что с точностью до замены координат, сохраняющей координаты гиперповерхности S и данные Коши на S неизменными, вторая задача допускает единственное и вещественное решение в классе C^a. Нужно отметить, что в релятивистской теории поля аналитичность $g_{\alpha\beta}(x)$ может иметь место только для некоторых пространственно-временных областей и в общем случае, при наличии, например, тяготеющих масс неизбежно должны появиться прерывности потенциалов. Именно при прохождении гиперповерхностей, ориентированных во времени, отделяя движущуюся материю от областей, «заметаемых» ею во времени, нужно неизбежно ожидать появления прерывностей, по крайней мере вторых производных от $g_{\alpha\beta}(x)$. Учитывая это, Лихнерович ([262], гл. I) при постановке задачи Коши для внешней и внутренней задач исходил из *постулированной им прерывности* $\partial_{\sigma\tau} g_{\alpha\beta}$ на S. Ему удалось определить данные Коши в замкнутом виде лишь в том случае, если гиперповерхность S *минимальная*, когда задача значительно упрощается. Основное затруднение заключается здесь в том, что требуется определить *решения на многообразиях, топология которых может быть сложной.*

В случае, если гиперповерхность S ориентирована всюду во времени ($g_{44} < 0$), предыдущее рассуждение можно провести с соответствующими изменениями, и задача Коши опять-таки будет приводиться к двум задачам, аналогичным указанным выше.

Полученные выше результаты существенным образом опираются на возможность явным образом разрешить систему уравнений поля (51.5) относительно производных $\partial_{44}\partial_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), которая в данном случае вытекает из условия $g^{44} \neq 0$.

Если гиперповерхность S выбрана так в локальной системе координат, что это условие не имеет места, то мы придем к принципиально другим результатам, связанным с понятием *характеристического многообразия*, как это следует из теории дифференциальных уравнений.

§ 52. Оценка произвола в задании потенциалов поля пространств Эйнштейна

Требование аналитичности функций при решении задачи Коши значительно упрощает вопрос и позволяет воспользоваться классическими теоремами существования и единственности. Хотя такое требование, на первый взгляд, носит несколько формальный характер, тем не менее оно заслуживает рассмотрения. Это объясняется тем, что, например, для свободного пространства (см. гл. II) все известные конкретные решения уравнений поля в некоторых областях пространства-времени определяются потенциалами, принадлежащими классу C^a. Кроме того, с решением задачи Коши тесно связан вопрос об определении произвола, с которым можно задать потенциалы поля; если при этом удастся максимально упростить систему координат, то для этой системы отнесения (в классе аналитических функций) определится, выражаясь условно, *«физический» функциональный произвол*, с которым можно задать поле. Такая качественная оценка во всяком случае представляет интерес. При этом такая оценка, произведенная для свободных пространств или пространств Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$), является полезной и для изучения полей тяготения общего вида, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta} \neq \sigma g_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим пространство Эйнштейна V_4, для которого

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta},$$

и введем в нем полугеодезическую систему координат (координаты Гаусса), в которой координатные линии x^4 будут геодезическими (вдоль которых x^4 служит длиной дуги), ортогонально пересекающими координатные гиперповерхности $x^4 = \text{const}$. Таким образом, нормали к этим гиперповерхностям времениподобны. Такую систему координат можно, по крайней мере локально, ввести в любом V_4 с сигнатурой в точке вида $(- - - +)$.

В этой системе координат метрика пространства будет иметь вид:

$$ds^2 = \overset{*}{ds}{}^2 + dx^{4^2}, \tag{52.1}$$

где $\overset{*}{ds}{}^2$ — определенно-отрицательная форма, причем

$$\overset{*}{ds}{}^2 = g_{ij}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{52.2}$$

и таким образом,

$$g_{i4} = 0, \quad g_{44} = g^{44} = 1, \tag{52.3}$$

а дискриминант тензора

$$g \equiv |g_{\alpha\beta}| = \overset{*}{g} \equiv |g_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{52.4}$$

Следовательно, ds^2 определяет пространство, являющееся обобщением топологического произведения трехмерного пространства V_3 и одномерного, а на каждой гиперповерхности $x^4 = \text{const}$ форма $\overset{*}{ds}{}^2$ определяет, в силу условия об определенности, многообразие, гомеоморфное трехмерному евклидову пространству.

В такой системе координат гиперповерхности $x^4 = \text{const}$ геодезически параллельны, а *второй* фундаментальный тензор на $x^4 = \text{const}$ будет выражаться формулами

$$h_{ij} = -\frac{1}{2}\, \partial_4 g_{ij}, \quad h^{ij} = \frac{1}{2}\, \partial_4 g^{ij}. \tag{52.5}$$

Впрочем, удобнее взять этот тензор с обратным знаком, положив

$$\omega_{ij} = -h_{ij}, \tag{52.6}$$

после чего, пользуясь трехмерным тензором $\overset{*}{g}{}^{ij}$, где

$$(\overset{*}{g}_{ij}) = (g_{ij})_{x^4=c}, \tag{52.7}$$

естественно вводятся тензоры

$$\omega^{ij} = \overset{*}{g}{}^{ih}\overset{*}{g}{}^{jk}\omega_{hk} \tag{52.8}$$

и

$$\omega_i^j = \overset{*}{g}{}^{jk}\omega_{ki}. \tag{52.9}$$

Пользуясь этими тензорами, введем трехмерный инвариант

$$H = \omega_i^i,$$

определяющий *среднюю* кривизну гиперповерхности, и инвариант

$$T^2 = \omega_i^j \omega_j^i. \tag{52.10}$$

Поставим вопрос о решении внешней задачи Коши в этой системе координат и, как это делалось в предыдущем параграфе, запишем уравнения поля в виде двух групп уравнений:

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{52.11}$$

$$R_{\alpha 4} = \varkappa g_{\alpha 4} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{52.12}$$

Употребление термина «внешняя задача» тут формально не совсем правильно, но предположение $\varkappa = 0$ ничего не меняет в последующем рассуждении. Как показано в предыдущем параграфе, уравнения (52.11), (52.12) определяют систему в инволюции, и задача Коши разбивается на две задачи: 1) задачу определения данных Коши, состоящую в том, чтобы найти наиболее общие данные Коши, удовлетворяющие на $x^4 = c$ уравнениям (52.12), и 2) задачу интегрирования по времени x^4, т. е. интегрирования уравнений (52.11). В данном случае гиперповерхность S не будет характеристическим многообразием.

Задача 1) может быть теперь сформулирована следующим образом: требуется определить функции g_{ij} и ω_{ij} от независимых переменных x^1, x^2, x^3, удовлетворяющие системе (52.12). Эту систему можно также представить в виде двух групп уравнений, соответственно тому, будет ли индекс α равен 4 или нет. Если $\alpha = 4$, то, пользуясь введенными выше обозначениями, получим уравнение

$$H^2 - T^2 - \overset{*}{R} = \varkappa, \tag{52.13}$$

где $\overset{*}{R}$ — скалярная кривизна для трехмерного многообразия, определяемого тензором $\overset{*}{g}_{ij}$.

Три других уравнения могут быть записаны в виде:

$$(\omega^{ij} - H\overset{*}{g}{}^{ij})_{;\,j} = 0, \tag{52.14}$$

где символом «;» обозначено ковариантное дифференцирование относительно метрики $\overset{*}{ds}{}^2$.

Нас интересует максимальный произвол, с которым определяются g_{ij} и ω_{ij} из четырех уравнений. Для выяснения этого запишем эти уравнения подробно и покажем, что они эквивалентны системе уравнений типа Коши — Ковалевской относительно четырех неизвестных функций.

Рассмотрим уравнение (52.13) и разрешим его относительно старшей производной одной из неизвестных функций по некоторому аргументу. Выберем в качестве аргумента, например, x^3. T не содержит производных по x^i $(i = 1, 2, 3)$ от неизвестных функций, но $\overset{*}{R}$ содержит, а именно:

$$\overset{*}{R} = \overset{*}{g}{}^{pq}\overset{*}{g}{}^{st}\left\{\frac{1}{2}(\partial_{pt}\overset{*}{g}_{sq} + \partial_{sq}\overset{*}{g}_{pt} - \partial_{st}\overset{*}{g}_{pq}) + \right.$$
$$\left. + \overset{*}{g}{}^{lm}(\overset{*}{\Gamma}_{m,\,pt}\overset{*}{F}_{l,\,sq} - \overset{*}{\Gamma}_{m,\,pq}\overset{*}{\Gamma}_{l,\,st})\right\}. \tag{52.15}$$

Вторая скобка содержит только первые производные от $\overset{*}{g}_{ij}$, входящие в символы Кристоффеля $\overset{*}{\Gamma}_{p,\,qr}$ — трехмерного пространства Римана, а первая скобка содержит вторые производные. Нас будет интересовать вторая производная $\partial_{33}g_{ij}$. Непосредственно убеждаемся, что в правую часть не входят производные вида $\partial_{33}g_{3j}$ ($j=1,\ 2,\ 3$), и поэтому остановимся, например, на производной $\partial_{33}g_{22}$ и разрешим уравнение относительно нее. Коэффициент при такой производной равен

$$\overset{*}{g}{}^{23^2}-\overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33},$$

и поэтому уравнение (52.15) можно представить в виде:

$$(\overset{*}{g}{}^{23^2}-\overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33})\,\partial_{33}\overset{*}{g}_{22}=M, \tag{52.16}$$

где

$$M=H^2-T^2-\varkappa-\overset{*}{K},$$

$\overset{*}{K}$ означает разность между $\overset{*}{R}$ и левой частью написанного выше уравнения.

Переходим к рассмотрению системы (52.14). Опустив предварительно индекс i вниз, получим:

$$\omega^j_{k,\,j}-H_{,\,k}\equiv\partial_j\omega^j_k-\overset{*}{\Gamma}{}^p_{kj}\omega^j_p+\overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p_k-\partial_kH=0.$$

Положим сначала индекс k равным единице и рассмотрим среднюю кривизну H. После уничтожения подобных членов придем к уравнению

$$\partial_2\omega^2_1+\partial_3\omega^3_1-\partial_1\omega^2_2-\partial_1\omega^3_3-\overset{*}{\Gamma}{}^p_{1j}\omega^j_p+\overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p_1=0.$$

Точно так же, полагая k равным 2 и 3, получим еще два уравнения:

$$\partial_1\omega^1_2+\partial_3\omega^3_2-\partial_2\omega^1_1-\partial_2\omega^3_3-\overset{*}{\Gamma}{}^p_{2j}\omega^j_p+\overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p_2=0,$$
$$\partial_1\omega^1_3+\partial_2\omega^2_3-\partial_3\omega^1_1-\partial_3\omega^2_2-\overset{*}{\Gamma}{}^p_{3j}\omega^j_p+\overset{*}{\Gamma}{}^j_{pj}\omega^p_3=0.$$

Таким образом, в эту систему входят только первые частные производные от $\overset{*}{g}_{ij}$ и ω^i_j. Разрешим ее относительно производных по x^3 от трех неизвестных функций ω_{ij}. Для этого необходимо сначала заменить ω^i_j через ω_{ij}, пользуясь тем, что

$$\omega^i_j=\overset{*}{g}{}^{ki}\omega_{kj}.$$

Перепишем первое из этих уравнений в виде:

$$\partial_3\omega^3_1=P_1,$$

где

$$P_1=P_1\left(\partial_k\omega^p_q,\ \partial_s\overset{*}{g}{}^{pr},\ \partial_s\overset{*}{g}_{pr},\ \overset{*}{g}_{pr},\ \omega_{pq}\right),\qquad k<3.$$

Так как

$$\partial_3\omega_1^3 = \partial_3\left(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{s1}\right),$$

то первое уравнение может быть записано в виде:

$$\overset{*}{g}{}^{33}\partial_3\omega_{13} = P_1 - \omega_{13}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}_{3s}\omega_{s1}).$$

Совершенно так же второе и третье уравнения запишутся при тех же обозначениях:

$$\overset{*}{g}{}^{33}\partial_3\omega_{23} = P_2 - \omega_{23}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{s2}),$$

$$\overset{*}{g}{}^{22}\partial_3\omega_{22} = P_3 - \omega_{22}\partial_3\overset{*}{g}{}^{22} - \sum_{s\neq 2}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{2s}\omega_{2s}) - \sum_{s\neq 1}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{1s}\omega_{1s}).$$

Так как в правой части последнего уравнения встречаются производные, стоящие в левых частях двух первых уравнений, то эти производные можно заменить их выражениями. При этом необходимо потребовать, чтобы коэффициенты при этих производных были отличны от нуля. Очевидно, не нарушая общности, всегда можно предположить, что на гиперповерхности $x^4 = 0$ компоненты

$$\overset{*}{g}{}^{22},\quad \overset{*}{g}{}^{33},\quad \overset{*}{g}{}^{23^2} - \overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33}$$

отличны от нуля. После этого получим следующую систему уравнений, эквивалентную (52.12):

$$\partial_{33}\overset{*}{g}_{22} = \frac{1}{\Delta}M,\quad \Delta \equiv \overset{*}{g}{}^{23^2} - \overset{*}{g}{}^{22}\overset{*}{g}{}^{33},$$

$$\partial_3\omega_{13} = \frac{1}{\overset{*}{g}{}^{33}}\left\{P_1 - \omega_{13}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{1s})\right\};$$

$$\partial_3\omega_{23} = \frac{1}{\overset{*}{g}{}^{33}}\left\{P_2 - \omega_{23}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{2s})\right\};$$

$$\begin{aligned}\partial_3\omega_{22} = \frac{1}{\overset{*}{g}{}^{22}}\Bigg\{&P_3 - \omega_{22}\partial_3\overset{*}{g}{}^{22} - \partial_3(\overset{*}{g}{}^{21}\omega_{21}) - \\ &- \omega_{23}\partial_3\overset{*}{g}{}^{23} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{s1}\omega_{s1}) - \omega_{13}\partial_3\overset{*}{g}{}^{13} - \\ &- \frac{\overset{*}{g}{}^{13}}{\overset{*}{g}{}^{33}}\left[P_1 - \omega_{13}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{1s})\right] - \\ &- \frac{\overset{*}{g}{}^{23}}{\overset{*}{g}{}^{33}}\left[P_2 - \omega_{23}\partial_3\overset{*}{g}{}^{33} - \sum_{s\neq 3}\partial_3(\overset{*}{g}{}^{3s}\omega_{2s})\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Если задать совершенно *произвольным образом функции от* x^1, x^2, x^3:

$$\overset{*}{g}_{11},\ \overset{*}{g}_{12},\ \overset{*}{g}_{13},\ \overset{*}{g}_{23},\ \overset{*}{g}_{33},\ \omega_{11},\ \omega_{12},\ \omega_{33},$$

то для остальных неизвестных функций

$$\overset{*}{g}_{22},\ \omega_{13},\ \omega_{23},\ \omega_{22}$$

получим систему четырех уравнений, разрешенную относительно старших производных по x^3 от этих неизвестных функций и такую, что эти старшие производные не встречаются в правых частях, т. е. систему типа Коши — Ковалевской. Предположение об аналитичности функций позволяет применить, при определении произвола в решениях этой системы, теорему Коши — Ковалевской.

Разумеется, эти выводы имеют место *с точностью до перенумерации индексов*. Следовательно, эти четыре функции определены с произволом

$$\begin{gathered}\omega_{13}(x^1,\ x^2),\quad \omega_{23}(x^1,\ x^2),\quad \omega_{22}(x^1,\ x^2),\\ g_{22}(x^1,\ x^2),\quad \partial_3 g_{22} = f(x^1,\ x^2)\end{gathered}\tag{52.17}$$

для $x^3 = \overset{0}{x}{}^3$, где эти функции произвольные, аналитические в области точки $x^i = \overset{0}{x}{}^i$ и в этой точке принимающие вместе со своими производными заданные значения. Этим определяется произвол в определении данных Коши при решении задачи 1).

Перейдем теперь к решению задачи 2). Она, как указывалось выше, заключается в интегрировании уравнений поля для начальных данных Коши. Система (52.11) записывается в виде:

$$\partial_{44} g_{ij} = F_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

где F_{ij} полностью определяется данными Коши. Это — система шести уравнений от шести неизвестных функций g_{ij} типа Коши — Ковалевской, и следовательно, в качестве аналитических функций она допускает единственное решение с произволом

$$\begin{gathered}g_{ij} = g_{ij}(x^1,\ x^2,\ x^3),\\ \partial_4 g_{ij} = \varphi_{ij}(x^1,\ x^2,\ x^3) \equiv \omega_{ij}\end{gathered}$$

для $x^4 = 0$. Здесь, однако, эти функции не вполне произвольны, а такие, которые на гиперповерхности $x_4 = 0$ удовлетворяют (52.12), т. е. являются данными Коши, определенными при решении задачи 1).

Теперь можно записать искомые потенциалы в полугеодезической системе координат, выделив *явным образом произвольные функции*, от которых они зависят (*параметрическая часть*), и определенные компоненты (*главная часть*).

Рассмотрим разложение потенциала поля $g_{ij}(x)$ в степенной ряд:

$$g_{ij}=\sum_{k_1,\ldots,k_4=0}^{\infty} C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}(x^1-\overset{0}{x}{}^1)^{k_1}(x^2-\overset{0}{x}{}^2)^{k_2}(x^3-\overset{0}{x}{}^3)^{k_3}(x^4-\overset{0}{x}{}^4)^{k_4}, \tag{52.18}$$

где коэффициенты $C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}$ определяются соответствующими производными g_{ij}, вычисленными в точке $x^\alpha=\overset{0}{x}{}^\alpha$:

$$C_{ij,\,k_1k_2k_3k_4}=\frac{1}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+k_4}}{\partial x^{1k_1}\,\partial x^{2k_2}\,\partial x^{3k_3}\,\partial x^{4k_4}}\,g_{ij}\right)_{x^\alpha=\overset{0}{x}{}^\alpha}.$$

Для того чтобы выделить *параметрическую* часть в этом разложении, нужно удалить из этого разложения все члены с теми производными, которые стояли в левых частях системы (52.11), (52.12), и члены с любыми производными от этих производных (так называемые *главные производные* системы уравнений поля).

Рассмотрим, например, потенциал $g_{22}(x)$. В левые части (52.11) и (52.12) входят следующие главные производные этой неизвестной функции: $\partial_{33}g_{22}$, $\partial_3\omega_{22}=\partial_{34}g_{22}$, $\partial_{44}g_{22}$. Для первой из этих двух производных в разложении нужно вычеркнуть члены, делящиеся на $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)^2$. После такого вычеркивания останется параметрическая, относительно такой производной, часть разложения. Она должна состоять: 1) из членов, которые не делятся на $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$, и поэтому эта группа получится, если в (52.18) положить $x^3=\overset{0}{x}{}^3$; следовательно, это будет произвольная функция от x^1, x^2, x^4; 2) из членов, содержащих $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)$ в первой степени; эта группа получится, если разложение (52.18) продифференцировать по x^3 и затем положить $x^3=\overset{0}{x}{}^3$. Это снова определит некоторую функцию от x^1, x^2, x^4. Таким образом, для главной производной ∂_3g_{22} параметрическая часть имеет вид:

$$A(x^1,\ x^2,\ x^4)+(x^3-\overset{0}{x}{}^3)B(x^1,\ x^2,\ x^4). \tag{52.19}$$

Вторая главная производная $\partial_{34}g_{22}$ показывает, что нужно вычеркнуть в разложении (52.18) члены, делящиеся на произведение $(x^3-\overset{0}{x}{}^3)\times$

$\times (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)$. Это будут те члены разложения, которые: 1) не делятся на $(x^3 - \overset{0}{x}{}^3)$, т. е. $A(x^1, x^2, x^4)$, и 2) члены, содержащие $(x^3 - \overset{0}{x}{}^3)$, но не содержащие $x^4 - \overset{0}{x}{}^4$; они получаются, если (52.19) продифференцировать по x^3 и положить затем $x^4 = \overset{0}{x}{}^4$. Это приводит к функции от переменных x^1, x^2, и поэтому разложение для g_{22} будет иметь вид:

$$A(x^1, x^2, x^4) + (x^3 - \overset{0}{x}{}^3) B(x^1, x^2). \tag{52.20}$$

Наконец, для третьей главной производной $\partial_{44} g_{22}$ нужно вычеркнуть в (52.20) члены, делящиеся на $(x^4 - \overset{0}{x}{}^4)^2$. После этого останутся члены, которые: 1) не делятся на $x^4 - \overset{0}{x}{}^4$; они найдутся, если в (52.20) $x^4 = \overset{0}{x}{}^4$, имеют вид:

$$A(x^1, x^2) + (x^3 - \overset{0}{x}{}^3) B(x^1, x^2),$$

и 2) члены, содержащие $x^4 - \overset{0}{x}{}^4$, но не содержащие $(x^4 - \overset{0}{x}{}^4)^2$; они найдутся, если разложение продифференцировать по x^4 и затем положить $x^4 = \overset{0}{x}{}^4$. Это дает некоторую функцию от x^1, x^2. Следовательно, параметрическая часть будет иметь вид:

$$A(x^1, x^2) + (x^3 - \overset{0}{x}{}^3) B(x^1, x^2) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4) C(x^1, x^2).$$

Это полностью определяет произвол в задании $g_{22}(x)$; кроме того, в разложение этого потенциала войдет еще *главная часть*, не содержащая произвола, которая, вообще говоря, будет зависеть от всех четырех независимых переменных x^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Ясно, что A, B, C представляют собой данные Коши на $x^4 = \mathrm{const}$: $g_{22}(x^1, x^2)$, $\partial_3 g_{22}(x^1, x^2)$, $\omega_{22}(x^1, x^2)$. Таким образом,

$$g_{22} = A(x^1, x^2) + (x^3 - \overset{0}{x}{}^3) B(x^1, x^2) + \\ + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4) C(x^1, x^2) + \psi_{22}(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

где ψ_{22} — главная часть потенциала, целиком определяющаяся при помощи уравнения поля, если определены данные Коши.

Повторяя эти рассуждения для каждого из потенциалов и несколько изменяя обозначения произвольных функций, получим для потенциалов следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} &= f_{11}(x^1,\ x^2,\ x^3) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{11}(x^1,\ x^2,\ x^3) + \psi_{11},\\
g_{12} &= f_{12}(x^1,\ x^2,\ x^3) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{12}(x^1,\ x^2,\ x^3) + \psi_{12},\\
g_{13} &= f_{13}(x^1,\ x^2,\ x^3) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{13}(x^1,\ x^2) + \psi_{13},\\
g_{22} &= f_{22}(x^1,\ x^2) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{22}(x^1,\ x^2) + \\
&\qquad\qquad + (x^3 - \overset{0}{x}{}^3)\,\theta_{22}(x^1,\ x^2) + \psi_{22},\\
g_{23} &= f_{23}(x^1,\ x^2,\ x^3) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{23}(x^1,\ x^2) + \psi_{23},\\
g_{33} &= f_{33}(x^1,\ x^2,\ x^3) + (x^4 - \overset{0}{x}{}^4)\,\varphi_{33}(x^1,\ x^2,\ x^3) + \psi_{33},\\
g_{i4} &= 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad g_{44} = 1,
\end{aligned}\right\} \qquad (52.21)$$

где функции ψ_{ij} определяют главные части потенциалов, вполне определяемые параметрическими частями и уравнениями поля. Функции f_{ij}, φ_{ij}, θ_{ij} определяют искомый произвол в общем решении для полугеодезической системы координат.

Нужно учесть, что выбор поверхности S, для которой решается задача Коши, является произвольным, что дает одну произвольную функцию $x^4 = \Phi(x^1,\ x^2,\ x^3)$.

Нас интересует *произвол в построении самого пространства, безотносительно к выбору начальной гиперповерхности.* Поэтому произвол уменьшается на одну функцию, и в окончательном подсчете произвольных функций нужно учесть этот факт. Тогда остается все же некоторый произвол в выборе системы координат. Именно, система координат во всем пространстве определена, но остается еще возможность, не меняя выбранную в V_4 систему гиперповерхности $x^4 = \text{const}$, производить преобразования вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1,\ x^2,\ x^3) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

на гиперповерхностях $x^4 = \text{const}$. Пользуясь такими преобразованиями на гиперповерхности Коши $x^4 = 0$, три из потенциалов $g_{ij}(x^1, x^2, x^3)$ можно обратить в наперед заданные функции, согласно известной теореме Римана. Для этого на $x^4 = 0$ можно специализировать некоторым образом систему координат: можно, например, в V_3 ввести полугеодезическую систему или наложить иные требования; последнее автоматически снижает полученный выше произвол на *три функции от трех аргументов каждая.*

После этого остается еще произвол в выборе координат на $x^4=\text{const}$, который *с точностью до перенумерации* можно записать в виде:

$$x^{s'} = x^{s'}(x^1, x^2) \qquad (s'=1, 2),$$

за счет которого можно уменьшить произвол в задании потенциалов на $x^4=0$ *на две функции от двух переменных*.

Таким образом, *произвол, с которым в полугеодезической системе координат можно определить потенциалы поля, определяется в четыре функции от трех аргументов и три функции от двух аргументов* (*данные Коши*).

Этот произвол в такой маскимально упрощенной полугеодезической системе координат, так сказать, отражает тот неустранимый остаток, который в общем случае выражает *чисто гравитационный эффект*, и в этом смысле его можно условно назвать *физическим произволом*.

Задачи

1. Получить формулы (52.21) для всех потенциалов так же, как это было сделано для $g_{22}(x)$.

2. Показать, что произвол для пространств T_1 не меньше, чем для пространств T_2 и T_3, и, следовательно, определяется в четыре функции от трех аргументов и три функции от двух аргументов.

3. Показать, что «физический» произвол для пространств T_2 в полугеодезической системе координат определяется в две функции от трех аргументов и семь функций от двух аргументов ([290]), стр. 237).

4. Показать, что для T_3 «физический» произвол будет равен девяти функциям от двух независимых переменных ([290], стр. 237).

§ 53. Характеристические и бихарактеристические многообразия

В каждой точке пространства V_4 (см. § 2) с неопределенной метрикой существует конус изотропных направлений

$$g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0,$$

который отделяет область вещественных векторов с положительной нормой от области вещественных векторов с отрицательной нормой. Каждый вектор, лежащий на этом конусе, будет изотропным. Если гиперповерхность S такова, что в каждый из своих точек она касается изотропного конуса, отвечающего этой точке, то касательная плоскость в этой точке к S будет изотропной, а метрика — вырожденной (§ 7), и следовательно, нормаль к гиперповерхности будет изотропной. Если уравнение S имеет вид $f(x^{\alpha})=0$, то

$$\Delta_1 f = g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta} = 0. \tag{53.1}$$

Уравнение (53.1) определяет *изотропную* гиперповерхность пространства V_4, которую будем обозначать, как и ранее, $\overset{*}{V}_3$ и назовем *характеристическим многообразием* относительно уравнений поля. В специальной системе координат, когда S задается уравнением $x^4=0$, уравнение (53.1) принимает вид:

$$\Delta_1(x^4)=g^{44}=0.$$

Это условие приводит к тому, что из уравнений (51.5) не определяется явно $\partial_{44}g_{ij}$, что, как известно (И. Г. Петровский [114], гл. I), может привести к тому, что $\partial_{44}g_{ij}$ будут прерывными на S, а число решений уравнений поля при одних и тех же данных Коши может быть бесконечным: *изотропные конусы будут характеристическими для уравнений поля Эйнштейна. Изотропные гиперповерхности* $\overset{*}{V}_3$, *касательные к изотропным конусам, будут характеристическими многообразиями уравнений поля.* Если интерпретировать этот факт в терминах геометрической оптики, то изотропную нормаль к $\overset{*}{V}_3$ можно понимать как *волновой вектор*, касательный к световому лучу, f—как *эйконал*, а уравнение (51.1) — как *уравнение эйконала* (Л. Ландау и Е. Лифшиц [173], стр. 283).

Покажем, что характеристические многообразия $\overset{*}{V}_3$ можно получить, если заданы некоторые кривые C_0, называемые *бихарактеристиками уравнений поля*, и 1-параметрическое семейство гиперплоскостей, определенных в каждой точке бихарактеристики.

Рассмотрим билинейную форму

$$H(x^\alpha,\ y_\sigma)=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$$

и неоднородное уравнение с частными производными

$$2H(x^\alpha,\ \partial_\sigma f)=C,$$

где C — произвольная постоянная. Этому уравнению отвечает система обыкновенных уравнений

$$\frac{dx^1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}=\frac{dx^2}{\frac{\partial H}{\partial y_2}}=\frac{dx^3}{\frac{\partial H}{\partial y_3}}=\frac{dx^4}{\frac{\partial H}{\partial y_4}}=-\frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial x^1}}=-\frac{dy_2}{\frac{\partial H}{\partial x^2}}=-\frac{dy_3}{\frac{\partial H}{\partial x^3}}=\frac{dt}{2H}$$

относительно переменных x^α, y_σ, допускающих первый интеграл

$$2H(x^\alpha,\ y_\sigma)=C,$$

когда $C=\mathrm{const}$. Вводя вспомогательный параметр u, можно переменные x^α, y_σ задать как функции этого параметра при помощи канонических систем

$$\frac{dx^\alpha}{du}=\frac{\partial H}{\partial y_\alpha};\quad \frac{dy_\alpha}{du}=-\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \tag{53.2}$$

в которых правые части выражаются, если задана функция Гамильтона $H(x^\alpha, y_\sigma)$. Обозначая $\frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha$, первую группу уравнений (41.2) можно записать в виде:

$$\dot{x}^\alpha = g^{\alpha\beta} y_\beta \tag{53.3}$$

и, следовательно, наоборот:

$$y_\beta = g_{\beta\sigma}\dot{x}^\sigma.$$

Это приводит к выводу, что x^α и (53.2) определяют экстремали функции Лагранжа

$$2L = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta,$$

так как, переходя от переменных $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ к переменным (x^α, y_σ), которые связаны между собой при помощи соотношений (53.3), придем к классическому соотношению между L и H:

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L.$$

Решения этого уравнения являются экстремалями, удовлетворяющими первому интегралу

$$2L = C, \quad C = \text{const}. \tag{53.4}$$

Это означает, что полученные экстремали будут экстремалями и для

$$\sqrt{2L} = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta},$$

если имеют место (53.3). Но это означает, что кривые x^α определяют геодезические линии пространства V_4 (§ 6). Если, в частности, $C = 0$, то система уравнений эйконала (53.1) допускает первый интеграл $f = \text{const}$, и многообразия $\overset{*}{V}_3$ могут быть найдены при помощи геодезических нулевой длины, т. е. изотропных геодезических, если брать изотропные гиперплоскости, касательные к изотропному конусу, вдоль касательной к изотропной кривой.

Можно заранее утверждать, что бихарактеристики — изотропные кривые, так как из теории уравнений с частными производными известно, что, если дано множество многообразий $\overset{*}{V}_3$, касающихся элементарного конуса в V_4, вдоль образующей g, касательная к кривой C_0, связанной с $\overset{*}{V}_3$ в V_4, есть g. Но не всякая изотропная кривая является геодезической. Предыдущее рассуждение приводит к выводу, что *бихарактеристики уравнений Эйнштейна являются изотропными геодезическими.*

Отсюда на основе аналогии с теорией Адамара распространения волн были построены некоторые теории о природе гравитационных волн, основанные на представлении фронта волны как поверхности прерывности вторых производных потенциалов поля $g_{\alpha\beta}(x)$ ([262], § 16; [306]; [340]; [341]).

Прежде чем перейти к постановке внутренней задачи Коши, необходимо остановиться на изучении тензора энергии-импульса, от физических свойств которого существенно должны зависеть метрика пространства V_4 и характер потенциалов поля $g_{\alpha\beta}(x)$.

§ 54. Тензор энергии-импульса

Вопрос о структуре тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ в уравнениях поля Эйнштейна и, в частности, вопрос о *космологическом члене* в этих уравнениях, который, во-первых, всегда может быть отнесен к $T_{\alpha\beta}$ и, во-вторых, должен оцениваться не вообще, а исходя из конкретной постановки проблемы на современном уровне развития общей теории относительности, когда приходится исследовать сложные задачи гравитации, во всяком случае должен решаться более тщательно, чем это делалось во время создания теории. Тензор энергии-импульса пылевидной системы не взаимодействующих между собой частиц ($T_{\alpha\beta}=m_0c^2u_\alpha u_\beta$), которым фактически ограничивались Эйнштейн и многие другие релятивисты, описывает состояние физической системы лишь в простейших идеальных случаях. Кроме того, стиль этой книги требует подойти к проблеме структуры тензора энергии-импульса с общей точки зрения, изучив все представляющиеся здесь возможности. Основу для решения проблемы должна давать *алгебраическая структура* тензора $T_{\alpha\beta}$, т. е. (в данной точке пространства-времени): 1) его собственные числа, 2) собственные векторы, 3) характеристика, определяющая элементарные делители. Определив при помощи этих элементов структуру $T_{\alpha\beta}$ в точке и записав ее в тензорном виде, получим тем самым структуру в области, не сводящейся к точке, *где характеристика не меняется*. При решении любой конкретной задачи эти элементы, определяющие структуру $T_{\alpha\beta}$, должны задаваться, исходя из физической постановки задачи; они, по существу вопроса, не могут быть универсальными.

Рассмотрим в данной точке пространства-времени пару симметрических тензоров $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ и отвечающую им λ-матрицу

$$(T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta}). \tag{54.1}$$

Будем иметь, кроме того, в виду тот факт, что метрика пространства-времени определяется формой $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$ гиперболического типа (сигнатура в точке вида $---+$). Пользуясь общей теоремой о приведении пары форм, однá из которых не вырождена ($|g_{\alpha\beta}|\neq 0$) *на вещественном пути*, к каноническому виду, сформулированной в § 9, нетрудно выписать все возможные характеристики элементарных делителей и написать канонические формы для тензоров $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в данной точке пространства. Записывая эти формы в тензорном виде, тем самым получим выражение для *тензорных полей* $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в области. Эти тензорные выражения можно получить, изучая $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в некотором однозначно определяемом *квазиортрепере* (см. § 9), где слово «квази» употребляется в том смысле, что среди координатных векторов такого репера могут быть и изотропные векторы.

На первый взгляд в принципе возможны следующие типы характеристик матрицы:

$$1)\ [1111],\quad 2)\ [211],\quad 3)\ [31],\quad 4)\ [22],\quad 5)\ [4]. \tag{54.2}$$

При этом такие характеристики могут еще подразделяться на особые подслучаи, которые могут возникнуть, если некоторые базисы элементарных делителей кратные; например, [(21) 1], когда элементарные делители имеют вид $(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)$. Кроме того, вследствие неопределенности метрической формы возможно появление комплекных собственных чисел и изотропных и комплексных собственных векторов тензора.

Однако тот факт, что сигнатура метрики имеет вид $(---+)$, сокращает число возможных типов характеристик до трех. Этот результат всего проще получить непосредственно из формул (9.4) и (9.6), которые накладывают определенное условие на сигнатуру метрики $g_{\alpha\beta}$ и делают невозможными случаи (4) и (5).

Детальное исследование структуры пары тензоров уже проведено выше (§ 46) с заменой $T_{\alpha\beta}$ на $\bar{g}_{\alpha\beta}$, и поэтому мы можем здесь, воспользовавшись результатами § 46, дать *полную классификацию* возможных структур тензора энергии-импульса.

I тип [1111]

а) Собственные числа вещественные.

В зависимости от *кратности* собственных чисел возможны подслучаи: a_1) [1111], a_2) [(11) 11], a_3) [(111) 1], a_4) [(11)(11)], a_5) [(1111)]. В ортрепере, построенном на базисе собственных векторов, получим канонические формы:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&1\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-\lambda_1&&&\\&-\lambda_2&&\\&&-\lambda_3&\\&&&\lambda_4\end{pmatrix}. \tag{54.3}$$

Здесь λ_α — *базисы* элементарных делителей, совпадающие с *собственными числами* $T_{\alpha\beta}$. В случае кратности собственных чисел (случаи a_2, a_3, a_4, a_5) в (54.3) следует соответствующие λ_α приравнять друг другу.

b) Имеются комплексные собственные числа.

В этом случае возможны только два подслучая:

b_1) $[111\bar{1}]$ — два вещественных и два комплексно-сопряженных собственных числа тензора $T_{\alpha\beta}$, который в вещественном пространстве имеет, таким образом, два вещественных собственных направления и одну вещественную инвариантную 2-плоскость.

b_2) $[(11)1\bar{1}]$ — два комплексно-сопряженных и одно вещественное (кратности 2) собственные числа. Тензор $T_{\alpha\beta}$ имеет в реальном пространстве двумерный пучок собственных направлений и одну инвариантную 2-плоскость. В вещественном *квазирепере* из (9.6) получим канонические формы:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad (T_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & \\ & -\lambda_2 & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \alpha-\beta, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta, & -\alpha+\beta \end{matrix}} \end{bmatrix}, \tag{54.4}$$

где вещественные собственные числа равны λ_1 и λ_2, а два комплексно-сопряженных имеют вид $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. В случае b_2) (54.4) следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$. Не представляет труда определить вещественное линейное преобразование, приводящее матрицу $(g_{\alpha\beta})$ в (54.4) к диагональному виду. *Никаких других подслучаев характеристики* [1111] *гиперболический вид метрики не допускает.*

II тип [112]

Легко проверить, что здесь возможны *только вещественные* собственные числа и в зависимости от их кратности получим следующие подслучаи: 1) [112], 2) [(11)2], 3) [1(12)], 4) [(112)]. В первом случае однозначно определяется такой ортрепер, для которого получим канонические формы:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (T_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & & \\ & -\lambda_0 & \\ & & \boxed{\begin{matrix} -\lambda_3 - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_3 - 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}. \tag{54.5}$$

Здесь имеется три собственных вектора тензора $T_{\alpha\beta}$, один из которых изотропный и одна инвариантная 2-плоскость, проходящая через изотропное собственное направление. В случае (2) в формулах (54.5) следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$, причем появляется 2-плоскость, состоящая из собственных направлений, представляющая собой линейную оболочку двух неизотропных собственных векторов, отвечающих кратным собственным числам. В случае 3) в (54.5) следует положить $\lambda_2 = \lambda_3$, причем появляется трехмерный пучок собственных направлений, натянутый на три независимых собственных вектора.

III тип [13]

Так же, как и для II типа, *для лоренцевой сигнатуры возможны только вещественные собственные числа.* В зависимости от кратности собственных чисел возникают две возможности: 1) [13] и 2) [(13)].

В первом случае имеются два собственных вектора, один из которых неизотропный (отвечает простому элементарному делителю), а другой изотропный (отвечает непростому элементарному делителю). Имеется трехмерный инвариантный пучок, проводящий через изотропное собственное направление. Всегда и однозначно можно определить ортрепер, для которого

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (T_{\alpha\beta}) = \left[\begin{array}{c|ccc} -\lambda_1 & & & \\ \hline & -\lambda_2 & -1 & 0 \\ & -1 & -\lambda_2 & -1 \\ & 0 & -1 & \lambda_2 \end{array}\right]. \tag{54.6}$$

В случае (2) в (54.6) следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$. При этом появится инвариантная 2-плоскость, натянутая на изотропное и неизотропное собственные направления, вся состоящая из собственных векторов. Следовательно, ортрепер уже не будет определен однозначно.

Вообще, *кратность собственных чисел ведет к неоднозначности определения реперов* (54.3), (54.4), (54.5), (54.6).

Этим заканчивается полная классификация возможных вообще тензоров энергии-импульса реальных полей тяготения.

Переходя к конкретным физическим задачам, отметим, что до сих пор в основном исследовались лишь простейшие случаи состояния материи, отвечающие наиболее простым возможным случаям характеристик тензора $T_{\alpha\beta}$. Рассмотрим с этой точки зрения наиболее характерные случаи тензора $T_{\alpha\beta}$.

Тензор энергии-импульса «чистой материи» или, как иногда называют, *тензор энергии-импульса потока масс* ([216], стр. 304) отвечает тому случаю, когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ имеет единственный собственный вектор с ненулевым собственным числом, ориентированным во времени, и интерпретируется физически как касательный вектор τ^α к четырехмерной траектории потока масс; его собственное число $\lambda_4 \equiv M_0(x^\alpha)$, где $M_0(x)$ — *плотность покоя*. Все остальные собственные числа $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Вектор τ^α можно дополнить в этом случае до орторепера неоднозначно при помощи трех векторов $\underset{i}{\xi}{}^\alpha$ $(i = 1, 2, 3)$. Таким образом, имеем:

$$g_{\sigma\beta} = \sum_{\sigma=1}^{4} e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}{}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}{}_\beta, \quad e_4 = -e_1 = -e_2 = -e_3 = 1, \quad \underset{4}{\xi}{}_\alpha = \tau_\alpha \tag{54.7}$$

и

$$T_{\alpha\beta} = \mu_0 \tau_\alpha \tau_\beta. \tag{54.8}$$

При этом, как известно ([216], стр. 305), в орторепере компоненты $T^{\alpha\beta}$ имеют следующий физический смысл: T^{44} определяют *плотность энергии в потоке*; T^{4i} $(i = 1, 2, 3)$ — *плотность проекций импульса на оси* Ox, Oy, Oz, *умноженную на* c *или деленную на* c, *плотность потока энергии в направлении* i*-й оси*; T^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — *плотность потока импульса на* i*-ю ось в направлении* j*-й оси*.

По схеме (54.2) мы имеем здесь случай характеристики простого типа I, когда она имеет вид $[1\ (1\ \overset{0}{1}\ 1)]$, где «0» над круглой скобкой означает, что три базиса элементарных делителей (собственные числа) равны нулю.

Тензор энергии-импульса макроскопических тел, который, например, имеет место для «идеальной жидкости». Так как поток импульса через элемент $d\sigma$ поверхности тела является силой, действующей на $d\sigma$, то $T_{\alpha\beta}\,d\sigma^\beta$ представляет собой α-ю компоненту силы. Так как для твердых тел максимальные возможные разности давлений в разных направлениях исчезающие малы по сравнению с давлениями, существенными в теории относительности, то с большим приближением можно считать, что картина будет аналогична той, которая имеет место для «идеальной жидкости». Введем в данном элементе объема собственную систему отсчета. В такой системе давление, которое оказывает данный участок тела, перпендикулярно к площадке, на которую оно производится одинаково во всех направлениях (закон Паскаля). Следовательно,

$$T_{\alpha\beta}\,d\sigma^\beta = p\,d\sigma_\alpha,$$

иными словами,

$$T_{ij} = p g_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Компоненты T_{i4} определяют плотность импульса, они равны нулю, а компоненты T_{44} определяют плотность энергии ε тела; следовательно, $\frac{\varepsilon}{C^2}$ определит плотность массы тела, т. е. массу единицы «собственного» объема. Следовательно, в собственной системе отсчета для элемента объема

$$(T_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{54.9}$$

Пусть скорость макроскопического движения элемента объема будет u_α. Для собственной системы отсчета, где объем покоится, $u_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, $u_4 = 1$. Следовательно, для матрицы (54.9) имеет место соотношение, справедливое, в силу тензорного характера, уже не только в собственной системе, а в любой системе координат:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \varepsilon)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}. \tag{54.10}$$

Из (54.9) следует, что элементарные делители λ-матрицы (54.1) будут все первой степени, т. е. имеет место, опять-таки по схеме (54.2), тип I с характеристикой $[(1\ 1\ 1)\ 1]$. Полагая давление $p = 0$, получим тензор энергии-импульса (54.8), где $\varepsilon = \mu_0$. Тензоры (54.8) и (54.10) широко применяются в различных вопросах релятивистской гидродинамики [241], [243], [247].

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля. В специальной теории относительности показывается, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля может быть сконструирован из кососимметрического тензора $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$, называемого *тензором электромагнитного* поля ([195], стр. 191, 202; [173], § 32; [295]; [308]; [246]; [259]; [338]). Именно при помощи $F_{\alpha\beta}$ тензор энергии-импульса электромагнитного поля выражается в виде:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} g_{\alpha\beta} - F_{\alpha\sigma} F^{\sigma}_{\beta}, \tag{54.11}$$

откуда следует, что *«след» тензора энергии-импульса электромагнитного поля равен нулю*:

$$T^{\sigma}_{\sigma} = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0. \tag{54.12}$$

Для того чтобы оценить тензор $T_{\alpha\beta}$ (54.11) в смысле его алгебраической структуры, можно, например, поступить следующим образом. В локальном неголономном орторепере, как известно из специальной теории относительности, компоненты F_{i4} определяют составляющие электрического поля относительно этого репера, а F_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — составляющие магнитного поля. Именно если вектор электрического поля имеет пространственные компоненты $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, а вектор магнитного поля $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= F_{14} = -F^{14}, & \beta_1 &= F_{23} = F^{23}, \\ \alpha_2 &= F_{24} = -F^{24}, & \beta_2 &= F_{31} = F^{31}, \\ \alpha_3 &= F_{34} = -F^{34}, & \beta_3 &= F_{12} = F^{12}, \end{aligned}\right\} \tag{54.13}$$

где поднятие и опускание индексов осуществляются при помощи метрического тензора Минковского в данном орторепере. Поэтому из (54.11) и (54.13) непосредственно имеем:

$$T(_{\alpha\beta})=\begin{Vmatrix} \nu & \alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3 & \alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2 \\ \alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3 & \nu-\alpha_1^2-\beta_1^2 & -\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 & -\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1 & -\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2 & \nu-\alpha_2^2-\beta_2^2 & -\alpha_2\alpha_3-\beta_2\beta_3 \\ \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2 & -\alpha_1\alpha_3-\beta_1\beta_3 & -\alpha_2\alpha_3-\beta_2\beta_3 & \nu-\alpha_3^2-\beta_3^2 \end{Vmatrix}, \tag{54.14}$$

где

$$\nu=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\alpha_i^2+\beta_i^2\right). \tag{54.15}$$

Полная группа лоренцевых вращений состоит из трех пространственных вращений и трех лоренцевых. Если фиксировать вектор $\underset{4}{\overline{e}}$ и тем самым ортогональную к нему неизотропную гиперплоскость, то на этой гиперплоскости за счет трех чисто пространственных вращений можно так специализировать систему координат (на гиперплоскости с определенно-отрицательной метрикой), чтобы выполнялись некоторые три условия. Например, как в этом легко непосредственно убедиться, на *вещественном пути* совместны требования в новой системе координат:

$$\alpha_3'=\beta_3'=\alpha_1'\alpha_2'+\beta_1'\beta_2'=0. \tag{54.16}$$

Так как вообще имеем тождество для любого орторепера

$$\left(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\right)^2+\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)^2+\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\right), \tag{54.17}$$

то, полагая

$$\alpha_1^2+\beta_1^2=a^2, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2=b^2,$$

получим из (54.14), (54.16) и (54.17) в новой системе координат (штрихи опускаем):

$$(T_{\alpha\beta})=\begin{Vmatrix} \frac{a^2+b^2}{2} & 0 & 0 & \pm ab \\ 0 & \frac{-a^2+b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2-b^2}{2} & 0 \\ \pm ab & 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{2} \end{Vmatrix}. \tag{54.18}$$

Отсюда следует, что корни характеристического уравнения $|T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta}|=0$ будут $\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3=-\lambda_4=\lambda=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.

Следовательно, *тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет четыре вещественных собственных числа, попарно равных и попарно противоположных по знаку* (Синг [109]; Рузе [112], стр. 302—322). Но можно, определяя при помощи матрицы (54.18) элементарные делители λ-матрицы $(T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$ (§ 9), непосредственно показать несколько больше.

Можно различать два случая: 1) $\lambda\neq 0$ и 2) $\lambda=0$. В первом случае, ввиду наличия простых элементарных делителей и равенств по абсолютной величине собственных чисел $T_{\alpha\beta}$, пользуясь формулой (9.4), получим следующие канонические формы для матриц $(g_{\alpha\beta})$ и $(T_{\alpha\beta})$:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}+\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},$$

и следовательно, здесь имеет место характеристика простого типа [(1 1) (1 1)]. Из этих матриц можно непосредственно выразить $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ через собственные векторы и собственные числа $T_{\alpha\beta}$ по формулам

$$g_{\alpha\beta}=\sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta,\quad T_{\alpha\beta}=\sum_\sigma e_\sigma \underset{\sigma}{\lambda} \underset{\sigma}{\xi}_\alpha \underset{\sigma}{\xi}_\beta,$$

которые справедливы, впрочем, только для характеристик простого типа, как в данном случае.

Следовательно, получим:

$$T_{\alpha\beta}=\lambda(-\underset{1}{\xi}_\alpha\underset{1}{\xi}_\beta+\underset{2}{\xi}_\alpha\underset{2}{\xi}_\beta+\underset{3}{\xi}_\alpha\underset{3}{\xi}_\beta+\underset{4}{\xi}_\alpha\underset{4}{\xi}_\beta),\quad g_{\alpha\beta}=\sum_\sigma e_\sigma\underset{\sigma}{\xi}_\alpha\underset{\sigma}{\xi}_\beta, \qquad (54.19)$$

где единичные ортогональные векторы $\underset{2}{\xi}^\alpha$ и $\underset{3}{\xi}^\alpha$ оба пространственные, выбранные в площадке $\{\underset{2}{\xi}, \underset{3}{\xi}\}$ с точностью до вращения, а векторы $\underset{1}{\xi}^\alpha$ и $\underset{4}{\xi}^\alpha$ единичные, ортогональные, определяемые в площадке $\{\underset{1}{\xi}, \underset{4}{\xi}\}$ с точностью до лоренцева вращения, так что $\underset{1}{\xi}$ пространственный, а $\underset{4}{\xi}$ временной.

В случае 2), который называют *особым случаем*, $\lambda=\frac{a^2-b^2}{2}=0$ и, следовательно, $b=\varepsilon a$, $\varepsilon=\pm 1$. Вычисляя в этом предположении для тензора $T_{\alpha\beta}$, определенного матрицей (54.18) и $(g_{\alpha\beta})$, взятыми в форме

Минковского, элементарные делители λ-матрицы $(T_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$ (см. § 9), убедимся, что тут имеет место характеристика *непростого типа* $[(\overset{0}{2}\;1\;1)]$. Для такой характеристики характерен один *изотропный собственный вектор* тензора $T_{\alpha\beta}$, а канонический вид $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ принимает особенно простой вид, если вместо ортрепера ввести квазиортрепер, для которого этот изотропный вектор использован в качестве координатного. Общий вид канонических матриц для такой характеристики для этого квазиортрепера по формуле (9.4) будет

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{bmatrix} e_1\underset{1}{\lambda} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_2\underset{2}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \underset{3}{\lambda}\\ 0 & 0 & \underset{3}{\lambda} & 1\end{bmatrix}.$$

Но в данном случае, когда $\underset{1}{\lambda}=\underset{2}{\lambda}=\underset{3}{\lambda}=0$, $e_1=e_2=-1$, получим:

$$(g_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad (T_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\tag{54.20}$$

откуда следует:

$$T_{\alpha\beta}=\underset{4}{e}_\alpha\underset{4}{e}_\beta,\tag{54.21}$$

где вектор $\underset{4}{e}_\alpha$ изотропный, как это непосредственно видно из (54.20) при рассмотрении матрицы $(g_{\alpha\beta})$. Разумеется, формула (54.21) имеет место уже в любой системе координат.

В силу изотропности вектора $\underset{4}{e}_\alpha$ его можно умножать на любое число, *не изменяя его нормы*, и поэтому в (54.21) справа можно при желании вставить множителем квадрат любого скаляра. Не представляет труда от квазиортрепера (54.20) перейти к ортреперу при помощи подстановки типа

$$x_3\to x_3+x_4,\quad x_4\to x_3-x_4.$$

Особый случай электромагнитного поля дает первый пример тензора энергии-импульса с характеристикой по схеме (54.5) непростого типа.

Кроме этих тензоров, рассматривают также тензор энергии-импульса для поля, образованного наложением двух или нескольких полей. Например, *тензор энергии-импульса, отвечающий идеальной жидкости и электромагнитному полю* ([262], стр. 18), *будет иметь вид*:

$$T_{\alpha\beta}=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta-pg_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}\left(F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau}\right)g_{\alpha\beta}-F_{\alpha\sigma}F^{\sigma}_{\beta}, \qquad (54.22)$$

где u_α есть u-скорость движения частиц — неизотропный вектор.

Отметим также *тензор энергии-импульса диссипативных процессов*, появляющийся тогда, когда требуется установить релятивистские уравнения гидродинамики с учетом *вязкости и теплопроводности* ([000], стр. 606).

Искомый тензор энергии-импульса получится, если к правой части (54.10) прибавить некоторый тензор $\tau_{\alpha\beta}$, и для вектора плотности вещества h_i также придется найти некоторую дополнительную компоненту ν_α. Следовательно,

$$\left.\begin{aligned}T_{\alpha\beta}&=(p+\varepsilon)\,u_\alpha u_\beta+pg_{\alpha\beta}+\tau_{\alpha\beta},\\ h_\alpha&=hu_\alpha+\nu_\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (54.23)$$

Скорость u^α определяется так, чтобы в *собственной системе отсчета* каждого данного элемента жидкости его импульс был равен нулю, а его энергия выражалась бы через другие термодинамические величины теми же функциями, как и при отсутствии диссипативных процессов. В собственной системе отсчета $\tau_{44}=\tau_{4i}=0$ и $u^i=0$, а следовательно,

$$\tau_{\alpha\beta}u^\beta=0, \qquad (54.24)$$

соотношение, справедливое, в силу своего тензорного характера, уже и в любой системе координат. Так как в собственной системе компонента h^4 *4-вектора потока частиц* должна совпадать с плотностью числа частиц h, то

$$\nu_\alpha h^\alpha=0. \qquad (54.25)$$

Уравнения движения жидкости должны следовать из уравнений

$$\partial_\sigma T^\sigma_\alpha=0, \quad \partial_\alpha h^\alpha=0, \qquad (54.26)$$

из которых следует соотношение

$$u^\alpha\partial_k T^k_\alpha=-T\partial_\alpha\left(\sigma u^\alpha\right)+\mu\partial_\alpha\nu^\alpha+u^\alpha\partial_\sigma\tau^\sigma_\alpha,$$

где $\mu=\dfrac{r+\varepsilon-T_\sigma}{n}$ — релятивистский химический потенциал вещества, T — абсолютная температура и σ — плотность энтропии. Используя (54.24), получим:

$$\partial_\alpha\left(\sigma u^\alpha-\frac{\mu}{T}\,\nu^\alpha\right)=-\,\nu^\alpha\partial_\alpha\left(\frac{\mu}{T}\right)-\frac{1}{T}\,\tau^\sigma_\alpha\partial_\sigma u^\alpha.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой 4-дивергенцию потока энтропии и поэтому справа будем иметь величину, характеризующую возрастание энтропии в результате диссипативных процессов. Следовательно, вектор плотности потока энтропии равен

$$\sigma^{\alpha}=\sigma u^{\alpha}-\frac{\mu}{T}\nu^{\alpha}. \tag{54.27}$$

Тензор $\tau_{\alpha\beta}$ и вектор ν^{α} должны выражаться линейно через градиенты скорости и термодинамических величин так, чтобы соблюдалось требование: правая часть (54.23) положительна. Это требование вместе с (54.24) и (54.25) позволяет определить $\tau_{\alpha\beta}$ и ν^{α} однозначно в виде:

$$\tau_{\alpha\beta}=\eta\left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+u_{\beta}u^{\sigma}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}+u_{\alpha}u^{\sigma}\frac{\partial u_{\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right)-\\-\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}(g_{\alpha\beta}-u_{\alpha}u_{\beta}),$$

$$\nu_{\alpha}=-\frac{\chi}{c}\left(\frac{hT}{p+\varepsilon}\right)^{2}\left[\partial_{\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right)+u_{\alpha}u^{\sigma}\partial_{\sigma}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right].$$

Отсюда, переходя к инвариантной форме, можно написать:

$$\tau^{\alpha\beta}=\eta\left[(g^{\alpha\sigma}-u^{\alpha}u^{\sigma})u^{\beta}{}_{,\sigma}+(g^{\beta\sigma}-u^{\beta}u^{\sigma})u^{\alpha}{}_{,\sigma}\right]-\\-\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)(u^{\alpha}u^{\beta}-g^{\alpha\beta})u^{\sigma}{}_{,\sigma}. \tag{54.28}$$

Здесь η и ζ — коэффициенты вязкости.

Возможны и другие комбинации полей. Отметим, что все приведенные тензоры $T_{\sigma\beta}$, кроме (54.28), относятся к простейшему виду характеристик типа схемы (54.5).

Исследование тензора $T_{\alpha\beta}$, определяющего распределение и движение и свойства материи, имеет основное значение и приводит к ряду интересных физических выводов (см., например, [295]).

§ 55. Закон сохранения тензора энергии-импульса

Если уравнения поля записать в виде:

$$S_{\alpha\beta}=\lambda T_{\alpha\beta} \tag{55.1}$$

и учесть, что тензор Эйнштейна $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяет тождеству $S^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}=0$, $\lambda=\mathrm{const}$, то тензор $T_{\alpha\beta}$ удовлетворяет закону сохранения

$$T^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}=0. \tag{55.2}$$

Посмотрим, какие физические следствия можно получить из (55.2) для некоторого заданного тензора $T_{\alpha\beta}$. Рассмотрим прежде всего тензор $T_{\alpha\beta}$, определяемый формулами (54.8) и (54.10) соответственно для потока масс и идеальной жидкости. Чтобы сблизить эти два случая, запишем тензор энергии-импульса в виде:

$$T_{\alpha\beta} = ru_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta}, \tag{55.3}$$

где u_α — единичный вектор скорости, ориентированный во времени, r — скалярная плотность и $\theta_{\alpha\beta}$ — некоторый относительный симметрический тензор. Таким образом,

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1 \tag{55.4}$$

и

$$u^\alpha_{,\beta}u_\alpha = 0. \tag{55.5}$$

Если обозначить

$$\theta^\alpha_{\beta,\alpha} = r\sigma_\beta, \tag{55.6}$$

то закон сохранения (55.2) запишется в виде:

$$(ru^\alpha u_\beta)_{,\alpha} = r\sigma_\beta,$$

т. е. скаляр r и вектор u_α, кроме (55.4) и (55.5), удовлетворяют еще соотношению

$$(ru^\alpha)_{,\alpha}u_\beta + ru^\alpha u_{\beta,\alpha} = r\sigma_\beta; \tag{55.7}$$

свертывая с u^β это соотношение и используя (55.4) и (55.5), придем к выводу, что

$$(ru^\alpha)_{,\alpha} = r\sigma_\alpha u^\alpha. \tag{55.8}$$

Так как $r \neq 0$, то отсюда получим:

$$u^\alpha u_{\beta,\alpha} = (g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)\,\sigma^\alpha. \tag{55.9}$$

Теперь уравнения (55.8) и (55.9) получают следующее предварительное истолкование. Во-первых, отметим, что левая часть (55.8) напоминает хорошо известное выражение, входящее в уравнение непрерывности. Кроме того, если $u^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{ds}$, то уравнения (55.9) можно истолковать как систему дифференциальных уравнений, определяющих *линии тока*, если считать заданным вектор σ^α.

Закон сохранения для тензора потока масс. В этом случае из (55.3) следует:

$$r = \mu_0, \quad \theta_{\alpha\beta} = 0, \quad \sigma_\beta = 0,$$

и уравнения (55.8) и (55.9) соответственно запишутся:

$$(\mu_0 u^\alpha)_{,\alpha} = 0, \tag{55.10}$$

$$u^\alpha u_{\beta,\alpha} = 0. \tag{55.11}$$

Условие (55.10) будет *уравнением непрерывности* изучаемой среды, выражающим тот факт, что *дивергенция вектора, выражающего* *произведение плотности покоя среды на единичный вектор скорости, равна нулю*, а уравнения (55.11) просто записывают тот факт, что *линии тока являются неизотропными геодезическими линиями* V_4.

Если положить

$$r = p + \varepsilon, \quad \theta_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta}, \quad \sigma_\beta = \frac{1}{p+\varepsilon}\left(p\delta^\alpha_\beta\right)_{,\alpha} = \frac{1}{p+\varepsilon}\,\partial_\beta p,$$

то придем к тензору энергии-импульса (54.10). Предположим, кроме того, что при помощи некоторых соображений, например термодинамического характера, удалось установить уравнение состояния, связывающее собственную плотность и давление

$$\varepsilon = \varphi(p).$$

Тогда, как можно видеть,

$$\sigma = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varphi(p)+p},$$

и можно было бы показать, что в этом случае линии тока являются также неизотропными геодезическими, но уже не пространства V_4, а некоторого другого риманова пространства $\tilde{V}_4$, конформного к данному, метрика которого

$$\widetilde{ds}^2 = \omega^2\, ds^2,$$

где в данном случае

$$\omega = e^{\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{p+\varepsilon}}.$$

Аналогичное утверждение будет иметь место вообще в том случае, если σ_β — градиентное поле ([262], § 17).

Мы не будем здесь рассматривать закон сохранения для тензора энергии-импульса электромагнитного поля, так как это далее не понадобится (см. [262], гл. II, раздел II).

При исследовании внутренней задачи Коши, существенным образом зависящей от физического смысла и структуры тензора энергии-импульса, мы ограничимся рассмотрением тензора энергии-импульса в случае потока масс (55.8) и идеальной жидкости (55.10).

§ 56. Внутренняя задача Коши для потока масс

Рассмотрим внутреннюю задачу Коши для случая, отвечающего тензору энергии-импульса (54.18).

Если на гиперповерхности S задано гравитационное поле при помощи данных Коши, введенных в § 52, то требуется определить это поле вне S, если оно удовлетворяет уравнению

$$S^{\alpha}_{\beta} = \chi\rho u^{\alpha} u_{\beta}, \tag{56.1}$$

где $\rho > 0$, а вектор u_{α} единичный. Мы предположим также, что S не касается изотропного конуса. Если локально система координат выбрана так, что S записывается уравнением $x^4 = 0$, то $g^{44} \neq 0$. Аналогично тому, как это делалось в случае решения внешней задачи, можно в данном случае ($g^{44} \neq 0$) систему (56.1) заменить двумя системами уравнений. Первая система состоит из шести уравнений:

$$R_{ij} = \chi\rho\left(u_i u_j - \frac{1}{2} g_{ij}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{56.2}$$

вторая:

$$S^4_{\alpha} = \chi\rho n^4 u_{\alpha}, \tag{56.3}$$

причем еще должны выполняться условия

$$g^{\sigma\tau} u_{\sigma} u_{\tau} = 1 \tag{56.4}$$

и

$$\rho > 0. \tag{56.5}$$

В силу закона сохранения всякая система решений $\{g_{\alpha\beta}, u_{\alpha, \rho}\}$ этих уравнений удовлетворяет и уравнениям вида (55.10), (55.11), которые в данном случае можно записать в виде:

$$u^{\alpha} u_{\beta, \alpha} \equiv u^4 \partial_4 u_{\beta} + \Psi_{\beta} = 0, \tag{56.6}$$

$$(\rho u^{\alpha})_{, \alpha} \equiv u^4 \partial_4 \rho + \rho \partial_4 u^4 + F = 0, \tag{56.7}$$

где Ψ_{β} зависит от u_{α}, $\partial_i u_{\alpha}$ и данных Коши на S, а F определена как функция от u_{α}, $\partial_i u_{\alpha}$, ρ, $\partial_i \rho$ и опять-таки от данных Коши. Потребуем, чтобы $g_{\alpha\beta}$ и $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ были соответственно три и два раза непрерывно дифференцируемы на S. Имея в своем распоряжении данные Коши, однозначно на S определим компоненты S^4_{α}. Кроме того, теперь можно определить на S ρ и u_{α}. Для этого воспользуемся соотношением

$$(\chi\rho u^4)^2 = g^{\sigma\tau} S^4_{\sigma} S^4_{\tau}.$$

Правая часть по смыслу больше нуля, т. е. S^4_{α} можно рассматривать как времениподобный вектор. Обозначая его норму

$$g^{\sigma\tau} S^4_{\sigma} S^4_{\tau} = \Omega^2,$$

найдем:

$$\chi\rho u^4 = \Omega.$$

Вследствие этого, используя вторую группу уравнений поля (65.3), получим:

$$u_{\alpha} = \frac{1}{\Omega} S^4_{\alpha}, \qquad u^4 = \frac{1}{\Omega} S^{44}, \qquad \chi\rho = \frac{\Omega^2}{S^{44}}.$$

Учитывая, что имеет место (65.5)

$$\rho > 0,$$

получим, что и

$$S^{44} > 0. \tag{56.8}$$

Так как знак Ω является неопределенным, то для того, чтобы определить с помощью данных Коши u_α однозначно, необходимо знак Ω фиксировать определенным образом.

Теперь, учитывая результат, полученный при решении внешней задачи, можно утверждать, что первая группа уравнений поля (56.2) определяет на гиперповерхности S значения производных $\partial_{44}g_{ij}$. Кроме того, из (56.8) следует, что $u^4 \neq 0$, и следовательно, из уравнений (56.6) и (56.7) на гиперповерхности S можно определить $\partial_4 u_\alpha$ и $\partial_4\rho$.

Таким образом, если выполняются все предположения, упомянутые выше, то *на гиперповерхности S величины u_α, ρ, $\partial_{44}g_{ij}$, $\partial_4 u_\alpha$, $\partial_4\rho$ непрерывны и имеют вполне определенное значение.*

Легко видеть, что если, в частности, данные Коши локально дифференцируемы большее число раз, то тот же вывод может быть отнесен к более высоким производным системы функций $\{g_{\alpha\beta}, u_\alpha, \rho\}$: для этого достаточно продифференцировать по x^4 (56.2), (56.6), (56.7).

Чтобы завершить исследование, рассмотрим систему функций $\{g_{\alpha\beta}, u_\alpha, \rho\}$, удовлетворяющую на гиперповерхности S условиям (56.3) — (56.5). Выясним, что можно сказать о ней в окрестности S. Из (56.6) и (56.7) следует:

$$\left(S^\alpha_\beta - \lambda T^\alpha_\beta\right)_{,\,\alpha} = 0.$$

Записывая эту систему уравнений для решений (56.2), получим:

$$g^{44}\partial\left(S^4_\alpha - \lambda T^4_\alpha\right) = A^{i\sigma}_\alpha \partial_i\left(S^4_\sigma - \lambda T^4_\sigma\right) + B^\sigma_\alpha\left(S^4_\sigma - \lambda T^4_\sigma\right)$$

и, применяя рассуждение, приведенное для случая внешней задачи, к уравнениям (51.17), получим, что (56.3) выполняется в окрестности S, если оно имеет место на S. Получаем систему в инволюции.

Этим решается задача определения данных Коши, и дело приводится к задаче *интегрирования «во времени» системы уравнений* (56.2), (56.6), (56.7), для которой имеется указанный в § 51 метод, при довольно слабых требованиях относительно класса функций.

В частности, в классе функций C^a, пользуясь классической теоремой существования Коши — Ковалевской, будем иметь единственное принадлежащее классу C^a решение с точностью до такой замены координат (см. § 51), которая сохраняет гиперповерхность *точечно* и данные Коши в предположении, что они удовлетворяют условиям

$$g^{44} \neq 0, \quad \Omega^2 = g^{\sigma\tau} S^4_\sigma S^4_\tau > 0, \quad S^{44} > 0.$$

Если для внутренней задачи Коши поставить вопрос о характеристическом многообразии, то по сравнению с внешней задачей получим еще многообразия, которые во внешнем случае не имеют места. Именно для внутренней задачи Коши возможны два типа гиперповерхностей S, на которых возможна прерывность данных Коши: 1) гиперповерхность S касается элементарного конуса — случай, уже рассмотренный для внешней задачи, когда

$$g^{44} = 0,$$

приводящий к изотропной гиперповерхности S; 2) многообразия $\widetilde{V}_3$, отвечающие условию

$$\Omega = 0,$$

что приводит к выводу

$$u^4 = 0$$

и, следовательно,

$$S^4_\alpha = 0.$$

Отсюда следует, что гиперповерхность S образована линиями тока. Этот случай является новым по сравнению с внешней задачей.

Если предполагать, что плотность ρ конечна, то случай $S^{44} = 0$ сводится к предыдущим и не представляет ничего нового.

§ 57. Внутренняя задача Коши в случае идеальной жидкости

Решение внутренней задачи Коши в случае идеальной жидкости приводит к рассуждениям, повторяющим в основном те, которые были приведены в предыдущем параграфе, но при этом возникает обстоятельство, интересное с физической точки зрения.

Пусть тензор энергии-импульса определен в виде:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \varepsilon) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}, \tag{57.1}$$

где в случае идеальной жидкости ε может определяться как некоторая функция $\varphi(p)$ от давления. Этому тензору, как и выше, сопоставим две группы уравнений поля:

$$R_{ij} = \lambda \left[(p + \varepsilon) u_i u_j - \frac{1}{2} (\varepsilon - p) g_{ij} \right], \tag{57.2}$$

$$S^4_\alpha = \lambda \left[(p + \varepsilon) u_\alpha u^4 - p \delta^4_\alpha \right], \tag{57.3}$$

причем имеют место условия

$$g^{\sigma\tau} u_\sigma u_\tau = 1, \tag{57.4}$$

определяющие u_α как единичный времениподобный вектор. Закон сохранения энергии-импульса и уравнения непрерывности аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе, можно записать в виде следующих уравнений:

$$u^\alpha u_{\beta,\alpha} - \frac{1}{p+\varepsilon}\,\partial_\alpha p\left(\delta^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta\right) = 0 \tag{57.5}$$

и

$$[(p+\varepsilon)\,u^\alpha]_{,\alpha} - u^\alpha \partial_\alpha p = 0. \tag{57.6}$$

Если предположить, что значение p на гиперповерхности S дано, то из (57.3) получим:

$$\lambda\,(p+\varepsilon)\,u_\alpha u^4 = S^4_\alpha + \lambda p \delta^4_\alpha,$$

и вследствие единичности u_α (45.4) приходим к выводу:

$$[\lambda\,(p+\varepsilon)\,u^4]^2 = g^{\lambda\mu}\left(S^4_\lambda + \lambda p\delta^4_\lambda\right)\left(S^4_\mu + \lambda p\delta^4_\mu\right).$$

Обозначая определенно-положительную правую часть, которая вообще должна быть функцией от p, через Ω^2, очевидным образом получим:

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha = \frac{1}{\Omega}\left(S^4_\alpha + \lambda p\delta^4_\alpha\right), \quad u^4 = \frac{1}{\Omega}\left(S^{44} + \lambda p g^{44}\right), \\ \lambda\,(p+\varepsilon) = \frac{\Omega^2}{S^{44} + \lambda p g^{44}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{57.7}$$

Если $\varepsilon = \varphi(p)$, то третье уравнение (57.7) является конечным уравнением для p, позволяющим определить возможные значения p. Из других уравнений (57.7) после этого будут определены u_α, ε, и затем, используя (57.2), найдем $\partial_{44} g_{ij}$.

Остается определить $\partial_4 \varepsilon$ и $\partial_4 p$, исходя из уравнений состояния. Если в уравнении (57.5) индекс β поднять вверх и положить $\beta = 4$, то полученное таким образом уравнение, а также уравнение (57.6) можно записать в виде:

$$(p+\varepsilon)\,u^4\partial_4 u^4 - \left(g^{44} - u^{4^2}\right)\partial_4 p = A^4,$$
$$(p+\varepsilon)\,\partial_4 u^4 + u^4\varphi'(p)\,\partial_4 p = B,$$

где A^4 и B задаются вполне определенным образом на гиперповерхности S. Рассматривая эти уравнения как алгебраическую систему относительно неизвестных $\partial_4 p$ и $\partial_4 u^4$, приходим к выводу, что их одновременное определение возможно только в том случае, когда

$$u^{4^2}\varphi' + g^{44} - u^{4^2} \neq 0,$$

что обеспечит отличный от нуля определитель, составленный из коэффициентов левой части. Следовательно, $\partial_4 p$ и $\partial_4 u^4$ можно определить однозначно только при условии

$$g^{44} - (1-\varphi')\,u^{4^2} \neq 0. \tag{57.8}$$

Если это условие выполняется, то будут определены на гиперповерхности S величины $\partial_4 p$, $\partial_4 u^4$ и из остальных уравнений (57.5) величины $\partial_4 u^i$. После этого, очевидно, все рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, повторяются почти буквально. Но условие (57.8) приводит к новой возможности особых многообразий.

В отличие от предыдущего параграфа, получим три случая возможных многообразий, на которых может возникнуть прерывность поля:

1) характеристические изотропные многообразия $\overset{*}{V}_3$, отвечающие условию $g^{44}=0$;

2) многообразия, касательные к «линиям тока» или образованные «линиями тока» $\tilde{V}_3$;

3) многообразия $\bar{\bar{V}}_3$, для которых

$$g^{44}-(1-\varphi')\,u^{4^2}=0.$$

Эти многообразия удовлетворяют уравнению

$$[g^{\sigma\tau}-u^\sigma u^\tau(1-\varphi')]\,\partial_\sigma f\partial_\tau f=0.$$

На этих многообразиях возможна прерывность *градиента давления*, что представляет собой в известном смысле релятивистское обобщение фронта волны классической гидродинамики. В том случае, если эти волновые фронты *ориентировать во времени*, они допускают наглядную интерпретацию к релятивистской физике ([262], § 19).

Пусть имеет место такое предположение, тогда

$$\Delta_1 f\equiv g^{\sigma\tau}\partial_\sigma f\partial_\tau f\leqslant 0,$$

но вследствие (45.7)

$$\Delta_1 f=(u^\sigma\partial_\sigma f)^2(1-\varphi'),$$

и следовательно,

$$\varphi'\geqslant 1. \tag{57.9}$$

Используя этот факт, определим «скорость распространения» таких гидродинамических волн. Возьмем два из таких многообразий $\bar{\bar{V}}{}_3^0$ и $\bar{\bar{V}}{}_3^\delta$, определяемых соответственно уравнениями

$$f(x^\alpha)=0,\quad f(x^\alpha)=\delta,$$

и предположим, что δ — бесконечно малая величина. Проведем через некоторую точку $\bar{\bar{V}}{}_3^0$ линию тока и определим на $\bar{\bar{V}}{}_3^\delta$ точку, в которой эта линия тока пересечет это многообразие, ограничиваясь при этом вычислениями с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

Искомая точка на $\overline{\overline{V}}{}_3^\delta$ может быть определена в виде $x^\alpha + \eta u^\alpha$, где скаляр η определяется из соотношения

$$\eta u^\alpha \partial_\alpha f = \delta. \tag{57.10}$$

Рассмотрим точку $x^\alpha \subset \overline{\overline{V}}{}_3^0$ и единичный вектор нормали n^α к $\overline{\overline{V}}{}_3^0$ $(n^\alpha n_\alpha = -1)$. Тогда ковариантная составляющая вектора $\vec{n}$ будет иметь вид:

$$n_\alpha = \frac{\partial_\alpha f}{\sqrt{-\Delta_1 f}}.$$

Траектория ортогональна к $\overline{\overline{V}}{}_3^0$ и пересекает $\overline{\overline{V}}{}_3^\delta$ в точке, которая с точностью до бесконечно малых высшего порядка может быть записана в виде $x^\alpha + \tilde{\eta} n^\alpha$, где $\tilde{\eta}$ определяется условием

$$\tilde{\eta} n^\sigma \partial_\sigma f = \delta. \tag{57.11}$$

Следовательно,

$$\tilde{\eta} = \frac{\delta}{n^\sigma \partial_\sigma f} = \frac{\delta}{\sqrt{-\Delta_1 f}}. \tag{57.12}$$

Рассмотрим вектор $\tau^\alpha = \eta u^\alpha - \tilde{\eta} n^\alpha$. Он, очевидно, лежит в касательной плоскости к поверхности волны. В самом деле,

$$\eta u^\alpha n_\alpha = \eta \frac{u^\sigma \partial_\sigma f}{\sqrt{-\Delta_1 f}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{-\Delta_1 f}} = -\tilde{\eta},$$

и вследствие этого

$$t^\alpha n_\alpha = (\eta u^\alpha - \tilde{\eta} n^\alpha)\, n_\alpha = 0.$$

Вычисляя норму вектора t^α, получим:

$$t^\alpha t_\alpha = \eta^2 - \tilde{\eta}^2 - 2n\tilde{\eta} u^\alpha n_\alpha = \eta^2 + \tilde{\eta}^2 > 0,$$

т. е. вектор ориентирован «во времени».

Таким образом, вектор ηu^α определяется как сумма двух векторов, один из которых ортогонален к поверхности волны и ориентирован в пространстве, а другой касается этой поверхности и ориентирован во времени. «Скорость распространения» волны v определяется как предел отношения длин этих векторов и поэтому будет иметь вид:

$$v = \lim_{\delta \to 0} \left| \frac{\tilde{\eta}}{t^\alpha t_\alpha} \right|.$$

Отсюда следует:

$$v^{-2} = \lim_{\delta \to 0} \left(1 + \frac{\eta^2}{\tilde{\eta}^2}\right) = 1 - \frac{\Delta_1 f}{(u^\sigma \partial_\sigma f)^2} = 1 - (1 - \varphi') = \varphi'.$$

Таким образом, скорость распространения волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varphi'}},$$

причем имеет место условие (57.9). Этот результат, имеющий место в классической механике, обобщает величину скорости распространения волны. Кроме того, из (57.9) следует, что $v \leqslant c$, так как скорость света принимается здесь за единицу. Этот результат находится в хорошем согласии с релятивистской физикой.

Решение внутренней задачи Коши для других распределений и движений материи, определяемых тензором энергии-импульса более сложного вида, в основном может быть получено на пути, изложенном выше, но, по существу вопроса, оно будет зависеть от формы $T_{\alpha\beta}$, так же как и возникающие при этом особенные гиперповерхности. Такое рассмотрение для электромагнитного поля и поля, полученного наложением полей электромагнитного и «чистой материи», можно найти, например, в [262].

Случай диссипативных процессов и вопросы отыскания решения по аппроксимациям, а также постановка задачи Коши для так называемых *единых* теорий поля, которые здесь не рассматриваются, можно найти, например, в [305], [285], [219], [240].

Глава X

Специальные типы полей тяготения

В этой главе рассматриваются пространства V_4, отвечающие полям тяготения специального вида, определяемым некоторыми условиями геометрического или физического характера. Их специальное изучение представляет особый интерес, так как они особенно часто встречаются в различных конкретных задачах современной теории тяготения.

§ 58. Приводимые и конформно-приводимые пространства

Риманово пространство V_n называется *приводимым*, если в некоторой голономной системе координат его метрика может быть представлена в виде:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} ds_k^2 \qquad (r > 1), \tag{58.1}$$

где ds_k^2 — квадратичная форма пространства V_{m_k} $(m_1 + m_2 + \ldots$ $\ldots + m_r = n)$.

Имея в виду теорию относительности, ограничимся здесь рассмотрением случая $n = 4$, предполагая, кроме того, что форма (58.1) в каждой точке рассматриваемой области имеет сигнатуру типа $(- - - +)$. Тогда (58.1) может быть только одного из двух возможных типов:

$$ds^2 = g_{11}(x^1)\,dx^{1^2} + d\bar{s}^2, \tag{58.2}$$

где

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x^2,\ x^3,\ x^4)\,dx^i\,dx^j \qquad (i,\ j = 2,\ 3,\ 4),$$

и

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2, \tag{58.3}$$

где

$$ds_1^2 = g_{i_1 j_1}(x^1,\ x^2)\,dx^{i_1}\,dx^{j_1} \qquad (i_1,\ j_1 = 1,\ 2),$$

$$ds_2^2 = g_{i_2 j_2}(x^3,\ x^4)\,dx^{i_2}\,dx^{j_2} \qquad (i_2,\ j_2 = 3,\ 4),$$

с точностью до перенумерации переменных x^α; таким образом, в (58.2) и (58.3) переменная x^4 не обязательно соответствует релятивистскому времени.

В случае метрики (58.2) форму $g_{11}(x^1)\,dx^{1^2}$ всегда можно привести к виду $e_1\,dx^{1^2}$ $(e_1 = \pm 1)$ и, следовательно, метрика (58.2) допускает неизотропный вектор Киллинга $\underset{1}{\xi}{}^\alpha = \delta_1^\alpha$ в такой системе координат; форму $\overline{ds}^2$ в пространстве V_3 переменных x^2, x^3, x^4 на основании теоремы Коттона для V_3 [13] всегда можно привести к ортогональному виду, и поэтому

$$ds^2 = e_1\,dx^{1^2} + \sum_{i=2}^{4} g_{ii}\,dx^{i^2},$$

$$g_{ii} = g_{ii}(x^2,\ x^3,\ x^4), \qquad e_1 = \pm 1.$$

Если эта метрика определяет пространство Эйнштейна $(R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta})$, то из уравнений поля получим, что $\varkappa = 0$ и $\overline{ds}^2$ определяет трехмерное пространство Эйнштейна с нулевым тензором Риччи: $R_{ij} = 0$ $(i,\ j = 2,\ 3,\ 4)$; следовательно, $\overline{ds}^2$ определяет метрику плоского пространства (см. § 5) и рассматриваемое V_4-плоское многообразие. В силу условия о сигнатуре метрику (58.2) можно привести к форме метрики Минковского.

Если же имеет место метрика (58.3), то легко видеть, что, опуская тривиальный случай плоского пространства, придем только к метрикам (14.7) и (14.8), рассмотренным в § 14. Таким образом, *метрика всякого приводимого пространства Эйнштейна при* $n = 4$ *и сигнатуре вида* $(-\,-\,-\,+)$ *в специальной системе координат будет или метрикой Минковского, или* (14.7) *и* (14.8).

Перейдем к рассмотрению *конформно-приводимых* пространств. Будем называть V_n *конформно-приводимым,* если его метрика в некоторой голономной системе координат имеет вид:

$$ds^2 = \alpha^2 \sum_{k=1}^{r} ds_k^2,$$

где ds_k^2 определяется, как и в (58.1), $r > 1$, а $\alpha = \alpha(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n)$ — некоторый произвольный скаляр.

Сначала установим инвариантные признаки конформной приводимости V_n при $r = 2$; таким образом, рассматриваем любое V_n при n произвольном, $r = 2$ и любой сигнатуре метрики, т. е.

$$ds^2 = \alpha^2(ds_1^2 + ds_2^2), \tag{58.4}$$

$$ds_1^2 = g_{i_1 j_1}(x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^p)\,dx^{i_1}\,dx^{j_1} \quad (i_1,\ j_1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

$$ds_2^2 = g_{i_2 j_2}(x^{p+1},\ x^{p+2},\ \ldots,\ x^n)\,dx^{i_2}\,dx^{j_2} \quad (i_2,\ j_2 = p+1,\ \ldots,\ n).$$

Для конформно-приводимых пространств V_n можно доказать следующую теорему [649]: *для того чтобы V_n было конформно-приводимым, необходимо и достаточно, чтобы существовал симметричный (не пропорциональный метрическому) тензор $C_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий вместе с некоторым скаляром α условиям*

$$C_{\alpha\beta,\gamma} = -(C_{\alpha\gamma}\sigma_\beta + C_{\beta\gamma}\sigma_\alpha) + \sigma_\tau (C^\tau_\alpha g_{\beta\gamma} + C^\tau_\beta g_{\alpha\gamma}), \tag{58.5}$$

$$C_{\alpha\gamma}C^\gamma_\beta = C_{\alpha\beta}, \tag{58.6}$$

где $\sigma_\beta = \partial_\beta \ln \alpha$.

Рассмотрим сначала необходимость этих условий. При доказательстве этой теоремы воспользуемся инвариантным признаком для приводимых пространств, который получен П. А. Широковым [120] (см. задачу 1). Возьмем метрический (не пропорциональный метрическому) тензор $C_{\alpha\beta}$ и запишем его ковариантную производную относительно метрики (58.4):

$$C_{\alpha\beta,\gamma} = C_{\alpha\beta;\gamma} - 2C_{\alpha\beta}\sigma_\gamma - (C_{\alpha\gamma}\sigma_\beta + C_{\beta\gamma}\sigma_\alpha) + \sigma_\tau (C^\tau_\alpha g_{\beta\gamma} + C^\tau_\beta g_{\alpha\gamma}), \tag{58.7}$$

где $\sigma_\beta = \partial_\beta \ln \alpha$, точкой с запятой обозначена ковариантная производная относительно приводимого пространства $ds^{*2} = ds_1^2 + ds_2^2$. Предположим, что рассматриваемый тензор $C_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям Широкова (см. задачу 1), т. е.

$$C_{\alpha\beta;\gamma} = 0. \tag{58.8}$$

Из (58.7) и (58.8) следует условие

$$C_{\alpha\beta,\gamma} = -2C_{\alpha\beta}\sigma_\gamma - (C_{\alpha\gamma}\sigma_\beta + C_{\beta\gamma}\sigma_\alpha) + \sigma_\tau (C^\tau_\alpha g_{\beta\gamma} + C^\tau_\beta g_{\alpha\gamma}). \tag{58.9}$$

Вместо условия *идемпотентности* $(C_{\alpha\gamma}C^\gamma_\beta = C_{\alpha\beta})$ в приводимом пространстве имеем:

$$\alpha^2 C_{\alpha\gamma}C^\gamma_\beta = C_{\alpha\beta}. \tag{58.10}$$

Действительно, из (58.4) имеем $g_{\alpha\beta} = \alpha^2 g^*_{\alpha\beta}$, где $g^*_{\alpha\beta}$ — метрический тензор приводимого пространства $ds^{*2} = ds_1^2 + ds_2^2$. Отсюда из условия идемпотентности тензора $C_{\alpha\beta}$ в приводимом пространстве легко получается (58.10).

Легко доказать также достаточность. Из (58.10) следует $g_{\alpha\beta} = \alpha^2 g^*_{\alpha\beta}$. Ковариантная производная $C_{\alpha\beta}$ относительно метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ запишется в виде (58.7). В силу (58.7) и (58.9) мы получаем условия приводимости пространства с метрическим тензором $g^*_{\alpha\beta}$, т. е. $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор конформно-приводимого пространства.

Если ввести новый тензор $\bar{C}_{\alpha\beta}=\alpha^2 C_{\alpha\beta}$, условия (58.9) и (58.10) переходят в (58.5) и (58.6) соответственно*), т. е. теорема доказана.

Условия интегрируемости уравнений (58.5) запишутся в виде:

$$C_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}+C_{\sigma\beta}R^{\sigma}_{\alpha\gamma\delta}=$$
$$=\sigma_{\beta\gamma}C_{\alpha\delta}-\sigma_{\beta\delta}C_{\alpha\gamma}+\sigma_{\alpha\gamma}C_{\beta\delta}-\sigma_{\alpha\delta}C_{\beta\gamma}+\sigma_{\tau\sigma}\left(g_{\alpha\gamma}C^{\tau}_{\beta}+g_{\beta\gamma}C^{\tau}_{\alpha}\right)-$$
$$-\sigma_{\tau\gamma}\left(C^{\tau}_{\alpha}g_{\beta\delta}+C^{\tau}_{\beta}g_{\alpha\delta}\right)+\Delta_1\sigma\left[g_{\beta\delta}C_{\alpha\gamma}-g_{\beta\gamma}C_{\alpha\delta}+g_{\alpha\delta}C_{\beta\gamma}-g_{\alpha\gamma}C_{\beta\delta}\right],$$

где $\Delta_1\sigma=g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{,\alpha\beta}+\sigma_\alpha\sigma_\beta$.

Теперь рассмотрим специальный тип конформно-приводимых пространств, когда метрика представится в виде:

$$ds^2=\alpha^2(e_1\,dx^{1^2}+g_{ij}\,dx^i\,dx^j), \tag{58.11}$$

где $e_1=\pm 1$, $g_{ij}=g_{ij}(x^2, x^3, \ldots, x^n)$, $i, j=2, 3, \ldots, n$. В этом случае предыдущую теорему можно сформулировать так: *для того чтобы V_n было конформно-приводимым пространством вида* (58.11), *необходимо и достаточно, чтобы существовало неизотропное векторное поле C_α, которое совместно с некоторым скаляром α удовлетворяло уравнениям*

$$C_{\alpha,\beta}=-(C_\alpha\sigma_\beta+C_\beta\sigma_\alpha)+g_{\alpha\beta}C^{\tau}\sigma_{\tau}, \tag{58.12}$$

где $\sigma_\beta=\partial_\beta\ln\alpha$. Доказательство можно провести аналогично тому, как это сделано в предыдущем случае. Условия интегрируемости уравнений (58.12) имеют вид:

$$C_{\tau}R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma}=C_{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}-C_{\beta}\sigma_{\alpha\gamma}+C^{\tau}\left(g_{\alpha\beta}C_{\tau\gamma}-g_{\alpha\gamma}\sigma_{\tau\beta}\right)+\Delta_1\sigma\left(g_{\alpha\gamma}C_{\beta}-g_{\alpha\beta}C_{\gamma}\right),$$

где $\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{,\alpha\beta}+\sigma_\alpha\sigma_\beta$.

Из предыдущих теорем легко получаются (как частные случаи) условия приводимости (см. задачу 1) и полуприводимости (см. задачу 2).

Перейдем к исследованию конформно-приводимых пространств, удовлетворяющих условиям: 1) $n=4$, 2) $|g_{\alpha\beta}|<0$, 3) $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$.

В общей теории относительности существует целый ряд решений уравнений поля $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ (Шварцшильда, Дельсарта, Коттлера, Вейля, Леви-Чивита, Казнера, Уильсона, Нарлиркара и Кармаркара, Эйнштейна и Розена и др. — см. § 14), которые являются конформно-приводимыми V_4, ввиду этого специальное рассмотрение такого класса полей тяготения вообще представляет несомненный интерес.

) Знак «» над $C_{\alpha\beta}$ опущен.

Для $n=4$ возможны только два случая:

$$ds^2 = \alpha^2 [g_{11}(x^1)\, dx^{1^2} + d\bar{s}^2], \quad d\bar{s}^2 = g_{ij}(x^2, x^3, x^4)\, dx^i\, dx^j \tag{58.13}$$

и

$$ds^2 = \alpha^2 (ds_1^2 + ds_2^2), \tag{58.14}$$

где ds_1^2 и ds_2^2 определяются, как и в (58.3).

Рассмотрим сначала метрику (58.13). Так же, как это делалось выше для приводимых пространств, за счет изменения параметризации x^1 и трехмерных преобразований $x^i = \psi^i(x^{j'})$ $(i,\ j = 2,\ 3,\ 4)$, не меняя структуры формы, приведем метрику к виду:

$$ds^2 = \alpha^2 \left(e_1\, dx^{1^2} + \sum_{i=2}^{4} g_{ii}\, dx^{i^2} \right), \quad g_{ij} = g_{1i} = 0 \quad (i,\ j = 2,\ 3,\ 4). \tag{58.15}$$

Для такой метрики уравнения поля будут иметь вид:

$$(\alpha)\quad R_{1j} = 0, \qquad (\gamma)\quad R_{ii} = \varkappa\alpha^2 g_{ii},$$

$$(\beta)\quad R_{ij} = 0, \qquad (\delta)\quad R_{11} = \varkappa\alpha^2 e_1,$$

или, вычисляя тензор Риччи, получим соответственно

(α) $\quad 2\alpha_1\alpha_j - \alpha\alpha_{1j} = 0,$

(β) $\quad 4\alpha_i\alpha_j - 2\alpha\alpha_{,\,ij} + \alpha^2 \overset{*}{R}_{ij} = 0,$

(γ) $\quad -e_1(\alpha_1^2 + \alpha\alpha_{11}) - \dfrac{2\alpha\alpha_{,\,ii}}{g_{ii}} - \alpha\Delta_2\alpha + \alpha^2 \dfrac{\overset{*}{R}_{ii}}{g_{ii}} - \Delta_1\alpha + \dfrac{4}{g_{ii}}\alpha_i^2 = \varkappa\alpha^4,$

(δ) $\quad 3e_1(\alpha_1^2 - \alpha\alpha_{11}) - \alpha\Delta_2\alpha - \Delta_1\alpha = \varkappa\alpha^4,$

где $\Delta_1\alpha = g^{ij}\alpha_i\alpha_j$, $\Delta_2\alpha = g^{ij}\alpha_{,\,ij}$ — первый и второй параметры Бельтрами, $\alpha_j \equiv \partial_j\alpha$, $\alpha_{,\,ij}$ — вторая ковариантная производная относительно метрики $d\bar{s}^2$, $\overset{*}{R}_{ij}$ — тензор Риччи трехмерного пространства с метрикой $g_{ij}\,dx^i\,dx^j$.

Интегрируя систему (α), найдем, что

$$\alpha^{-1} = \varphi(x^2, x^3, x^4) + \psi(x^1). \tag{58.16}$$

После этого уравнения (β), (γ), (δ) можно привести к эквивалентной системе уравнений:

$$2\varphi_{,\,ij} + (\varphi + \psi)\overset{*}{R}_{ij} = 0, \tag{58.17}$$

$$-2e_1\psi_{11} + 2g^{ii}\varphi_{,\,ii} + (\varphi + \psi)\, g^{ii}\overset{*}{R}_{ii} = 0 \text{ (по } i \text{ не суммировать)} \tag{58.18}$$

$$-3e_1\psi_1^2 + 6e_1\psi_{11}(\varphi + \psi) - 3\Delta_1\psi - \frac{\overset{*}{R}}{2}(\varphi + \psi)^2 = \varkappa. \tag{58.19}$$

Так как ψ зависит только от x^1, а φ и $\overset{*}{R}_{ij}$ зависят только от x^2, x^3, x^4, то (58.17) приводит к альтернативам:

$$1) \qquad \psi \neq \mathrm{const}, \quad \overset{*}{R}_{ij}=0, \quad \varphi_{,ij}=0,$$

$$2) \qquad \psi = \mathrm{const}.$$

Во втором случае, не нарушая общности рассуждений, включая $\psi=\mathrm{const}$ в φ, можно положить $\psi=0$. Следовательно, возможны два случая:

$$1) \qquad \overset{*}{R}_{ij}=0, \quad \varphi_{,ij}=0, \quad \psi\neq \mathrm{const}, \quad i\neq j. \tag{58.20}$$

$$2) \qquad 2\varphi_{,ij}+\overset{*}{R}_{ij}\varphi=0, \quad \psi=0. \tag{58.21}$$

В случае (58.20) из уравнений (58.18) получим:

$$g^{ii}\overset{*}{R}_{ii}=\overset{*}{\varkappa}_i=\mathrm{const} \qquad (\text{по } i \text{ не суммировать}),$$

$$2e_1\psi_{11}-\overset{*}{\varkappa}_i\psi=2g^{ii}\varphi_{,ii}+\overset{*}{\varkappa}_i\varphi=\lambda_i=\mathrm{const}.$$

Вследствие того, что функция ψ одна и та же для всех рассматриваемых уравнений, следует:

$$\overset{*}{\varkappa}_i=\overset{*}{\varkappa}_j=\overset{*}{\varkappa} \qquad (i\neq j),$$

$$\lambda_i=\lambda_j=\lambda \qquad (i\neq j)$$

и

$$\overset{*}{R}_{ij}=\overset{*}{\varkappa}g_{ij}. \tag{58.22}$$

(58.20) и (58.22) приводят к выводу, что $\sum\limits_{i=2}^{4} g_{ii}\,dx^{i^2}$ определяет трехмерное пространство Эйнштейна, т. е. (см. § 5) пространство постоянной кривизны. Следовательно, метрика $d\overset{*}{s}{}^2=e_1dx^{1^2}+g_{ij}dx^idx^j$ определяет так называемое *субпроективное пространство Кагана основного типа* [455]. Но всякое субпроективное пространство V_4 является *конформно-евклидовым*. Вследствие этого и метрика ds^2 определяет конформно-евклидово пространство Эйнштейна и, следовательно, (см. § 8) определяет *пространство постоянной кривизны* V_4.

Рассмотрим случай 2), когда имеют место соотношения (58.21). Здесь φ отлична от постоянной, так как иначе получили бы *приводимые* пространства, рассмотренные выше.

В этом случае из уравнений поля следует:

$$\overset{*}{R}_{ij}=-\frac{2\varphi_{,ij}}{\varphi}, \tag{58.23}$$

и, таким образом, получаем теорему: *исключая случаи пространств постоянной кривизны и приводимых пространств, задача определения конформно-приводимых пространств Эйнштейна типа* (58.15) *эквивалентна задаче определения трехмерных римановых пространств* (*в переменных* x^2, x^3, x^4), *определяемых условиями* (58.23) *и уравнением*:

$$3\Delta_1\varphi + \frac{\overset{*}{R}}{2}\varphi^2 = -\varkappa, \quad \varphi \neq \mathrm{const}. \tag{58.24}$$

Отметим, что в этом случае второй параметр Бельтрами функции φ удовлетворяет условию

$$2\Delta_2\varphi + \overset{*}{R}\varphi = 0,$$

или же вследствие (58.24)

$$3\Delta_1\varphi - \varphi\Delta_2\varphi + \varkappa = 0,$$

а условия интегрируемости уравнений (58.23) будут иметь вид:

$$\left(\overset{*}{R}{}^s_j g_{ik} - \overset{*}{R}{}^s_k g_{ij}\right)\varphi_s + \frac{\overset{*}{R}}{2}\left(g_{ij}\varphi_k - g_{ik}\varphi_j\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\varphi_j \overset{*}{R}_{ki} - \varphi_k \overset{*}{R}_{ij}\right) + \varphi \overset{*}{R}_{i\,[j,\,k]} = 0.$$

Переходим к рассмотрению конформно-приводимых пространств Эйнштейна вида (58.14). К такому виду приводятся, в частности, решения уравнений поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, полученные Дельсартом, Шварцшильдом, Коттлером, Казнером и много других решений уравнений поля в пустоте и в случае $\varkappa \neq 0$.

С помощью преобразования координат вида

$$x^{i_1} = x^{i_1}\left(x^{j'_1}\right), \quad x^{i_2} = x^{i_2}\left(x^{j'_2}\right),$$

не меняя структуры метрики (58.24), каждую из форм ds_1^2 и ds_2^2 можно привести к диагональному виду, так что

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} e_1\alpha^2\beta^2 & & & \\ & e_2\alpha^2 & & \\ & & e_3\gamma^2\alpha^2 & \\ & & & e_4\alpha^2 \end{pmatrix}, \tag{58.25}$$

где $\beta = \beta(x^1, x^2)$, $\gamma = \gamma(x^3, x^4)$, $\alpha = \alpha(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $e_i = \pm 1$.

Вычисляя компоненты тензора кривизны для метрики (58.25), учитывая, что в силу ортогональности системы координат все компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ с четырьмя различными индексами равны нулю, и записывая уравнения поля, получаем:

$$2\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}-\alpha\alpha_{i_1 i_2}=0 \qquad (i_1=1,\ 2;\ i_2=3,\ 4), \tag{58.26}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1\alpha_2-\alpha\alpha_{12}+\frac{\alpha}{\beta}\alpha_1\beta_2=0,\\ 2\alpha_3\alpha_4-\alpha\alpha_{34}+\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_3\gamma_4=0, \end{aligned}\right\} \tag{58.27}$$

$$\frac{e_1}{\beta^2}\left(2\frac{\alpha}{\beta}\alpha_1\beta_1-2\alpha\alpha_{11}+\alpha_1^2\right)-e_2\left(\frac{2\alpha}{\beta}\alpha_2\beta_2+2\alpha\alpha_{22}-\alpha_2^2\right)-$$
$$-e_2\frac{\alpha^2}{\beta}\beta_{22}+\frac{e_3}{\gamma^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_3\gamma_3-\alpha\alpha_{33}-\alpha_3^2\right)-e_4\left(\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_4\gamma_4+\alpha\alpha_{44}+\alpha_4^2\right)=\varkappa\alpha^4, \tag{58.28}$$

$$\frac{e_1}{\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\alpha_1\beta_1-\alpha\alpha_{11}+2\alpha_1^2\right)=e_2\left(\frac{\alpha}{\beta}\alpha_2\beta_2-\alpha\alpha_{22}+2\alpha_2^2\right), \tag{58.29}$$

$$\frac{e_1}{\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\alpha_1\beta_1-\alpha\alpha_{11}-\alpha_1^2\right)-e_2\left(\frac{\alpha}{\beta}\alpha_2\beta_2+\alpha\alpha_{22}+\alpha_2^2\right)+$$
$$+\frac{e_3}{\gamma^2}\left(2\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_3\gamma_3-2\alpha\alpha_{33}+\alpha_3^2\right)-$$
$$-e_4\left(2\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_4\gamma_4+2\alpha\alpha_{44}-\alpha_4^2\right)-e_4\frac{\alpha^2}{\gamma}\gamma_{44}=\varkappa\alpha^4, \tag{58.30}$$

$$\frac{e_3}{\gamma^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_3\gamma_3-\alpha\alpha_{33}+2\alpha_3^2\right)=e_4\left(\frac{\alpha}{\gamma}\alpha_4\gamma_4-\alpha\alpha_{44}+2\alpha_4^2\right). \tag{58.31}$$

Из (58.26) следует, что

$$\alpha^{-1}=\varphi(x^1,\ x^2)+\psi(x^3,\ x^4),$$

вследствие чего из (58.27) получим:

$$\varphi_{12}=\varphi_1\frac{\beta_2}{\beta},\qquad \psi_{34}=\psi_3\frac{\gamma_4}{\gamma},$$

т. е.

$$\varphi_1=\omega(x^1)\beta,\qquad \psi_3=\nu(x^3)\gamma, \tag{58.32}$$

где $\omega(x^1)$ и $\nu(x^3)$ — некоторые функции указанных аргументов. После этого остальные уравнения поля можно свести к следующим:

$$\frac{e_1}{\beta^2}\left(\varphi_{11}-\varphi_1\frac{\beta_1}{\beta}\right)=e_2\left(\varphi_{22}-\varphi_2\frac{\beta_2}{\beta}\right), \tag{58.33}$$

$$\frac{e_3}{\gamma^2}\left(\psi_{33}-\psi_3\frac{\gamma_3}{\gamma}\right)=e_4\left(\psi_{44}-\psi_4\frac{\gamma_4}{\gamma}\right), \tag{58.34}$$

$$6e_2\varphi_{22}-\frac{6e_1\varphi_1^2}{\beta^2(\varphi+\psi)}-\frac{6e_2\varphi_2^2}{\varphi+\psi}+6e_4\psi_{44}-\frac{6e_3\psi_3^2}{\gamma^2(\varphi+\psi)}-$$
$$-\frac{6e_4\psi_4^2}{\varphi+\psi}-e_2\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+\psi)-e_4\frac{\gamma_{44}}{\gamma}(\varphi+\psi)=\frac{2\varkappa}{\varphi+\psi}, \tag{58.35}$$

$$2e_2\varphi_{22}-e_4\psi_{44}-e_2\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+\psi)+e_4\frac{\gamma_{44}}{\gamma}(\varphi+\psi)=0. \tag{58.36}$$

Таким образом, система уравнений, определяющих необходимые и достаточные условия того, чтобы V_4 второго типа было конформно-приводимым пространством Эйнштейна, свелась к шести уравнениям (58.32)—(58.36) с четырьмя неизвестными функциями φ, ψ, β, γ при условии $\alpha^{-1}=\varphi+\psi$.

Метод интегрирования этой системы уравнений вытекает из того, что функции φ, β зависят только от переменных x^1, x^2, а ψ, γ — от переменных x^3, x^4. Это позволяет применить метод разделения переменных. Рассмотрим в бинарной области $\{x^3, x^4\}$ некоторую точку P с координатами $x^3=\overset{\circ}{x}{}^3$, $x^4=\overset{\circ}{x}{}^4$ и обозначим:

$$\psi(P)=C_1,\quad \left(-2\psi_{44}+\frac{\gamma_{44}}{\gamma}\psi\right)_P=C_2,\quad \left(\frac{\gamma_{44}}{\gamma}\right)_P=C_3.$$

Тогда из (58.36) следует:

$$2e_2\varphi_{22}+e_2C_2-e_4\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+C_1)+e_4C_3\varphi=0.$$

Для другой точки $\bar{P}$ той же области получим аналогично:

$$2e_2\varphi_{22}+e_4\bar{C}_2-e_4\frac{\beta_{22}}{\beta}(\varphi+C_1)+e_4\bar{C}_3\varphi=0,$$

т. е.

$$(C_2-\bar{C}_2)e_4+(\bar{C}_1-C_1)e_2\frac{\beta_{22}}{\beta}+e_4(C_3-\bar{C}_3)\varphi=0. \tag{58.37}$$

Для этого соотношения важно различать две возможности: 1) коэффициент при $\frac{\beta_{22}}{\beta}$ равен нулю: $C_1=\bar{C}_1$, 2) $C_1\neq\bar{C}_1$. Первое предположение означает, что (если учесть смысл постоянных и произвольное значение точки P) $\psi=\text{const}$, так как при этом $\varphi\neq\text{const}$ (что привело бы к *приводимым* пространствам Эйнштейна), то получим окончательно следующие две возможности:

$$1)\ \frac{\beta_{22}}{\beta}=K\varphi+C,\quad 2)\ \psi=\overset{*}{C}_2,\quad \frac{\gamma_{44}}{\gamma}=\overset{*}{C}_1, \tag{58.38}$$

где K, C, $\overset{*}{C}_1$, $\overset{*}{C}_2$ — постоянные. Впрочем, в последнем случае, не нарушая общности рассуждений, можно положить $\psi=0$ (включая $\psi=\text{const}$ в φ). Ясно, как получить аналогичные возможные варианты задачи, исходя из бинарной области $\{x^1, x^2\}$. Такое рассуждение приводит к альтернативам:

$$1')\ \frac{\gamma_{44}}{\gamma}=\bar{K}\psi+\bar{C},\qquad 2')\ \varphi=0,\quad \frac{\beta_{22}}{\beta}=\bar{C}_1. \tag{58.39}$$

Теперь следует взять логическое пересечение условий (58.38) и (58.39), что в принципе дает четыре возможности, но, отбрасывая случай *приводимых* пространств (комбинация 2—2′), придем к следующим возможностям:

$$\begin{array}{lll} 1) & \dfrac{\beta_{22}}{\beta}=K\varphi+C, & \dfrac{\gamma_{44}}{\gamma}=\bar{K}\psi+\bar{C}, \\ 2) & \varphi=0, & \dfrac{\beta_{22}}{\beta}=C_1, \\ 3) & \psi=0, & \dfrac{\gamma_{44}}{\gamma}=C_1, \end{array} \tag{58.40}$$

где K, $\bar{K}$, C, $\bar{C}$, C_1 — постоянные.

Таким образом, необходимо проинтегрировать систему уравнений поля (58.32) — (58.36) для каждого из этих случаев по отдельности. Такое интегрирование не представляет принципиальных затруднений, и, предоставляя его проделать заинтересованному в этом читателю, приведем окончательную сводку результатов.

Метрика конформно-приводимого пространства Эйнштейна вида (58.14) всегда может быть приведена к одному из следующих видов:

$$\text{I. } ds^2=\frac{1}{(\varphi+\psi)^2}\left\{e_1\varphi_2^2\left(f-e_1e_2\omega'\int\frac{dx^2}{\varphi_2^2}\right)^2dx^{1^2}+e_2\,dx^{2^2}+\right.$$
$$\left.+e_3\psi_4^2\left(\bar{f}-e_3e_4\nu'\int\frac{dx^4}{\psi_4^2}\right)^2dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2}\right\},$$

где

$$\varphi_2^2=\frac{K}{3}\varphi^3+\frac{C}{2}\varphi^2+e_2t\varphi+e_2m-e_1e_2\omega^2,$$
$$\psi_4^2=\frac{\bar{K}}{3}\psi^3+\frac{\bar{C}}{2}\psi^2+e_2t\psi-e_4m-e_3e_4\nu^2-\frac{e_4\varkappa}{3},$$

$\varphi_1=\omega\beta$, $\psi_3=\nu\gamma$, K, $\bar{K}$, C, $\bar{C}$, t, m — постоянные,

$e_2K=e_4\bar{K}$, $e_2C=-e_4\bar{C}$, $\omega(x^1)$, $\nu(x^3)$ — произвольные функции.

$$\text{II. } ds^2=\frac{1}{(\varphi+\psi)^2}\left\{e_1\left(\frac{\varphi'}{\omega}\right)^2dx^{1^2}+e_2\,dx^{2^2}+\right.$$
$$\left.+e_3\left[\mu\sqrt{-e_4\tau}\,x^4+\frac{e_3e_4\nu'x^4}{\sqrt{-e_4\tau}}\right]^2dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2}\right\},$$

$$\psi=\tau x^4+f(x^3),\quad \tau=\frac{\varkappa}{3}+e_1\omega^2+e_3\nu^2,$$

$f'=\nu\mu\tau$, $\nu=\nu(x^3)$, $\mu=\mu(x^3)$, $\varphi=\varphi(x^1)$, $\omega=\text{const}\neq 0$.

$$\text{III. } ds^2=\frac{1}{(\varphi+\psi)^2}\left\{e_1\left(\frac{\varphi'}{\omega}\right)^2dx^{1^2}+e_2\,dx^{2^2}+e_3\left(\frac{\psi'}{\nu}\right)^2dx^{3^2}+e_4\,dx^{4^2}\right\},$$

$e_1\omega^2+e_3\nu^2=-\dfrac{\varkappa}{3}$, $\varphi=\varphi(x')$, $\psi=\psi(x^3)$; ω, ν — постоянные.

Это — пространство постоянной кривизны.

IV. $$ds^2 = \frac{1}{\psi^2}\left\{e_1\beta^2 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + \right.$$
$$\left. + e_3\psi_4^2\left(f - e_3 e_4 \nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2}\right)^2 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}\right\},$$
$$\beta = \mu_1(x^1)\operatorname{ch} Kx^2 + \mu_2(x^1)\operatorname{sh} Kx^2,$$
$$\psi_4^2 = N\psi^3 - e_2 e_4 K^2\psi^2 - e_3 e_4 \nu^2 - e_4\frac{\varkappa}{3},$$
$$\psi_3 = \nu\cdot\gamma,\quad K,\ N\text{ — постоянные},\quad \nu = \nu(x^3),\quad f = f(x^3).$$

V. $$ds^2 = \frac{1}{\psi^2}\left\{e_1\beta^2 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + \right.$$
$$\left. + e_3\psi_4^2\left(f - e_3 e_4 \nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2}\right)^2 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}\right\},$$
$$\beta = \mu_1(x^1)\cos Kx^2 + \mu(x^1)\sin Kx^2,$$
$$\psi_4^2 = N\psi^3 + e_2 e_4 K^2\psi^2 - e_3 e_4 \nu^2 - e_4\frac{\varkappa}{3},$$
$$\psi_3 = \nu\cdot\gamma,\quad K,\ N\text{ — постоянные},\quad \nu = \nu(x^3),\quad f = f(x^3).$$

VI. $$ds^2 = \frac{1}{\psi^2}\left\{e_1\beta^2 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + \right.$$
$$\left. + e_3\psi_4^2\left(f - e_3 e_4 \nu' \int \frac{dx^4}{\psi_4^2}\right)^2 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}\right\},$$
$$\beta = \mu_1(x^1)\,x^2 + \mu_2(x^1),$$
$$\psi_4^2 = N\psi^3 - e_3 e_4 \nu^2 - e_4\frac{\varkappa}{3},$$
$$\psi_3 = \nu\cdot\gamma,\quad N\text{ — const},\quad \nu = \nu(x^3),\quad f = f(x^3).$$

Здесь учтена симметричная роль функций φ и ψ и произвольное значение $e_\alpha = \pm 1$; для решений, отвечающих реальному полю гравитации, e_α выбирают так, чтобы сигнатура метрики имела вид $(- - - +)$. В остальном e_α произволен, что позволяет получать из приведенных выше метрик *статические* и *нестатические* поля.

Придавая входящим в эти метрики произвольным функциям и постоянным различные значения, можно получить многие из известных решений. Так, например, полагая в метрике I $K = 12$, $f = \bar{f} = 1$, $m = \omega = \nu = \varkappa = 0$, $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_4 = 1$, получим известное решение Дельсарта

$$ds^2 = \frac{1}{[\wp(x^2) - \wp(x^4)]^2}\left\{-\wp'^2(x^2)\,dx^{1^2} - dx^{2^2} - \wp'^2(x^4)\,dx^{3^2} + dx^{4^2}\right\},$$

где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Полагая в метрике V

$$\mu_1 = \nu = \varkappa = 0,\quad \mu_2 = 1,\quad N = -2a,\quad K^2 = 1,$$
$$e_1 = e_2 = e_4 = -1,\quad e_3 = 1,\quad f = 1$$

придем, как легко убедиться, к решению Шварцшильда. Таким же образом можно получить ряд других известных в литературе решений, на которых здесь останавливаться не будем.

Задачи

1. Доказать, что V_n приводимо тогда и только тогда, когда оно допускает поле постоянного, не пропорционального метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$, симметрического, идемпотентного тензора $C_{\alpha\beta}$:

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma}=0,\quad C_{\alpha\beta}\neq\tau g_{\alpha\beta},$$
$$C_{[\alpha\beta]}=0,\quad C_{\alpha\gamma}C^{\gamma}_{\beta}=C_{\alpha\beta}\quad \text{(П. А. Широков [120]).}$$

2. Доказать, что V_n полуприводимо, т. е. в некоторой системе координат имеет метрику

$$ds^2=ds_1^2+\omega\,ds_2^2,$$

где ds_1^2 и ds_2^2 определяется как в (58.3), а $\omega=\omega(x^1, x^2, \ldots, x^p)$ тогда и только тогда, когда оно допускает симметрический, не пропорциональный метрическому тензор $C_{\alpha\beta}$, удовлетворяющий совместно с некоторым скаляром α условиям

$$C_{\alpha\beta,\,\gamma}=-\frac{1}{2}(\sigma_\alpha C_{\beta\gamma}+\sigma_\beta C_{\alpha\gamma}),$$
$$C_{\alpha\gamma}C^{\gamma}_{\beta}=C_{\alpha\beta},$$

где $\sigma_\beta=\partial_\beta\ln\omega$ (К. И. Кручкович [454]).

§ 59. Симметрические поля тяготения

Такие поля тяготения естественным образом появляются в теории тяготения Эйнштейна, если обратить внимание на то, что поле тяготения характеризуется прежде всего кривизной пространства, и поставить вопрос о том, что будет, если кривизна меняется медленно при переходе от одного события к другому, т. е. от точки к точке в соответствующем пространстве-времени. Это можно показать следующим рассуждением.

Рассмотрим некоторое пространство-время в пустоте (T_i, $i=1$, 2, 3), введем в нем нормальную систему координат (§ 7) с началом системы координат в некоторой точке P. В этой системе метрический тензор будет иметь вид (§ 7):

$$g_{\alpha\beta}=\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}-\frac{1}{3}\overset{\circ}{R}_{\alpha\sigma\beta\tau}x^\sigma x^\tau-\frac{1}{3!}\overset{\circ}{R}_{\alpha\sigma\beta\tau,\,\lambda}x^\sigma x^\tau x^\lambda+O(\delta^4),$$

где «°» над коренной буквой обозначает, что соответствующие компоненты тензора вычисляются в точке P. Рассмотрим также точку P', бесконечно близкого к P, и значение компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}(P')$ с заданным порядком малости. Из написанных выше формул следует, что нулевые приближения, констатируя неизменность метрики при переходе из точки P в P', определяют тем самым плоскую геометрию в некоторой области и тем самым совершенно не отражают наличие гравитационного поля. Приближение первого порядка также ничего не добавляет в информацию о поле гравитации, так как оно попросту отсутствует. Но уже приближение второго порядка дает вклад в метрику, характеризующий распределение и движение материи, порождающей поле гравитации, хотя и неполностью; он характеризуется компонентами тензора кривизны в начале координат и никакими преобразованиями координат не может быть устранен. В выбранной нами системе координат второе приближение дает первый сигнал о наличии поля гравитации. Вопрос о том, насколько точно отражает физическую структуру это приближение и какова оценка порядка малости, будет решаться изучением следующих членов разложения $g_{\alpha\beta}(P')$. Приближение третьего порядка определяется набором постоянных $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\sigma\delta,\,\lambda}$ и поэтому означает ковариантные производные тензора кривизны, т. е., грубо говоря, изменением кривизны пространства-времени при переходе из P в P'. Если поле в этом смысле слабо меняется ($\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0$), то в достаточно малой четырехмерной окрестности точки можно говорить о «почти постоянном» поле с точностью до поправок более высокого порядка. По этому пути можно пойти далее и ввести понятия о полях с произвольной скоростью изменения, но со *слабым ускорением* с точностью до $O(\delta^5)$ и т. д.

Если условия о слабом изменении поля накладывать не только в окрестности данной точки, а для всех точек некоторой четырехмерной области, то получим информацию инвариантного характера об изменении поля с заданными порядками точности. Первый вопрос, который возникает при таком подходе к изучению поля, будет вопрос о слабо меняющихся (с точностью до величины $O(\delta^4)$) полях тяготения, определяемых условием в некоторой четырехмерной области

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\lambda}=0, \tag{59.1}$$

т. е. в этой области тензор кривизны ковариантно-постоянен. Такие пространства в римановой геометрии и в более общем случае пространства аффинной связности принято называть *симметрическими*, и их исследованию посвящен целый ряд работ (см § 14), начатых П. А. Широковым (83) и с особой глубиной развитых в трудах Картана [183], установившего глубокую связь таких римановых многообразий с теорией групп Ли. Пространства постоянной кривизны, очевидно, являются симметрическими пространствами, так же как пространства, у которых линейный элемент ds^2 является суммой нескольких ds_i^2 постоянной кривизны (см. задачу 5), если переменные, которые входят в эти различные ds_l^2, независимы друг от друга, т. е. пространство приводимо (см. предыдущий параграф).

Для симметрических полей тяготения можно дать также следующую геометрическую интерпретацию: это такие пространства, кривизна которых сохраняется при параллельном переносе. Эта интерпретация возможна и для более общего класса пространств аффинной связности без кручения; иными словами — это такие пространства, что параллельный перенос любой площадки сохраняет ее риманову кривизну; аналитически это свойство как раз и запишется условием (59.1). Результаты чисто геометрического свойства, полученные Картаном, опираются прежде всего на следующий замечательный факт: если V_n симметрическое и приводимое, то каждое из V_{k_l} $\left(\sum k_l = n\right)$, на которые разбивается данное V_n, есть также симметрическое и обратно.

Предположим, что ds^2 n-мерного риманова симметрического пространства можно рассматривать как сумму двух линейных элементов от соответственно n_1 и n_2 переменных, независимых друг от друга $(n_1 + n_2 = n)$:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

тогда римановы пространства с линейными элементами ds_1^2 и ds_2^2 также симметрические. В самом деле, отнесем к ds_1^2 n_1 первых индексов и к ds_2^2 соответственно n_2 последних индексов. Тогда единственными компонентами $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}$, которые могут быть отличными от нуля, являются только такие компоненты, у которых все пять индексов α, β, γ, δ, λ принадлежат группе первых n_1 индексов или, разумеется, только группе последних индексов (см. задачу 6). Поэтому, если исходное пространство V_n-симметрическое, то это же будет иметь место и для каждого из подпространств V_{n_1} и V_{n_2}. Доказательство обратного утверждения очевидно.

Что же касается применения понятия симметрических пространств к теории гравитации Эйнштейна, то имеем лишь отдельные примеры полей с такого рода геометрией. Здесь излагается общее решение вопроса, полученное автором [320] для случая пространств Эйнштейна, т. е. поля в простом пространстве-времени, и для случая, когда тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору. Вопрос о симметрических полях тяготения в общем случае (при любом тензоре энергии-импульса) остается пока открытым.

Вопрос о существовании симметрических полей тяготения приводится к существованию решений уравнений (59.1), т. е. возникает необходимость исследовать условия интегрируемости этих уравнений. Они, как обычно, могут быть получены из (59.1), если их продифференцировать еще раз, проальтернировать по индексам дифференцирования и записать тождество (5.6). Выполняя эти операции, получим:

$$R_{\lambda\mu\sigma\alpha}R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}-R_{\lambda\mu\sigma\beta}R^{\sigma}_{\alpha\gamma\delta}+R^{\sigma}_{\delta\alpha\beta}\cdot R_{\lambda\mu\sigma\gamma}-R_{\lambda\mu\sigma\delta}R^{\sigma}_{\gamma\alpha\beta}=0. \quad (59.2)$$

Полная серия условий интегрируемости для уравнений (59.1), кроме (59.2), должна включать еще уравнения, полученные из них последовательным дифференцированием, но вследствие (59.1) и того, что (59.2) содержит только компоненты тензора кривизны, все такие уравнения дадут тождества и дело сводится к исследованию только (59.2). Что же касается этих последних уравнений, то их особенно удобно исследовать в том неголономном ортрепере, относительно которого компоненты тензора кривизны имеют канонический вид (19.6), (19.12), (19.17), а свертывание производится при помощи метрического тензора Минковского. Тем самым возникает необходимость рассмотрения каждого из трех возможных типов полей тяготения по отдельности.

В случае $\overset{*}{T}_1$, используя (19.6), приведем (59.2) в ортрепере к виду:

$$\alpha_i(\alpha_j-\alpha_k)-\beta_i(\beta_j-\beta_k)=0,$$
$$\beta_i(\alpha_j-\alpha_k)+\alpha_i(\beta_j-\beta_k)=0,$$

где i, j, k не равны друг другу и принимают значения, получаемые при циклических перестановках (12.3). Если учесть симметрию в этих уравнениях и ввести стационарные кривизны $\underset{s}{K}=\underset{s}{\alpha}+i\underset{s}{\beta}$ (§ 17), то эту систему уравнений можно записать в более компактном виде:

$$K_i(K_j-K_k)=0 \qquad (i,\ j,\ k\neq), \quad (59.3)$$

причем из (19.7) имеем еще соотношение

$$\sum_1^3 K_s=-\varkappa. \quad (59.4)$$

Непосредственно получим, что сумма уравнений (59.3) и (59.4) приводит к альтернативам, первая из которых

$$K_1=K_2=K_3=-\frac{\varkappa}{3}$$

означает вследствие (16.8), что симметрическое пространство будет иметь постоянную кривизну. Оставляя этот тривиальный случай в стороне, рассмотрим вторую возможность, возникающую здесь:

$$K_1=K_2=0, \qquad K_3=-\varkappa,$$

разумеется, с точностью до возможной перенумерации. Покажем, что в этом случае риманово пространство, определяемое полем гравитации, будет приводимым, т. е. метрика этого пространства может быть представлена в виде суммы двух метрик, не имеющих общих переменных (§ 58).

Существует инвариантный признак П. А. Широкова приводимости риманова пространства, который заключается в следующем (задача 1, § 58): для того чтобы риманово многообразие V_n было приводимым, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало существование поля тензора $\varphi_{\alpha\beta}$, отличного от метрического тензора:

(α) ковариантно-постоянного, т. е.

$$\varphi_{\alpha\beta,\,\gamma} = 0,$$

(β) симметрического, т. е.

$$\varphi_{[\alpha\beta]} = 0,$$

(γ) идемпотентного, т. е.

$$\varphi^{\sigma}_{\alpha}\varphi_{\sigma\beta} = \varphi_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, для рассматриваемых пространств нужно показать существование такого тензорного поля $\varphi_{\alpha\beta}$. В случае, если такое поле существует, то ранг этого тензора определяет размерность тех двух метрик, на которые в силу приводимости разбивается наша метрика. Условия (β) и (γ) являются чисто алгебраическими, что же касается условий (α), то тут мы имеем систему дифференцированных уравнений и, следовательно, необходимость построить полную серию условий интегрируемости. Первые условия, как обычно, получаются ковариантным дифференцированием и альтернированием уравнений (α), что дает

$$\varphi_{\alpha\beta,\,[\gamma\delta]} \equiv R^{\sigma}_{\alpha\gamma\delta}\varphi_{\sigma\beta} + R^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}\varphi_{\alpha\sigma} = 0. \tag{59.5}$$

Однако на этом серия и обрывается, так как дифференцирование (59.5) приводит в силу (59.1) и (α) к тождествам. Таким образом, дело сводится к исследованию уравнений (β), (γ) и (59.5), которые наиболее просто выглядят в неголономном ортрепере (19.6), когда они будут иметь вид:

$$\varphi_{ij} \overset{*}{=} 0 \qquad (i \neq j), \qquad \varphi_{11}^2 + \varphi_{11} \overset{*}{=} \varphi_{33}^2 + \varphi_{33} \overset{*}{=} 0,$$

$$\varphi_{12} \overset{*}{=} \varphi_{34} = 0, \qquad \varphi_{11} \overset{*}{=} \varphi_{22}, \qquad \varphi_{33} \overset{*}{=} -\varphi_{44},$$

т. е.

$$(\varphi_{\alpha\beta}) \overset{*}{=} \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & w \end{array}\right), \qquad w \overset{*}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, существует метрическое поле второго ранга, удовлетворяющее всем поставленным условиям, и метрика симметрического пространства может быть записана в специальной системе в виде:

$$ds^2 = \overset{1}{g}_{ij}(x^1,\ x^2)\, dx^i\, dx^j + \overset{2}{g}_{ab}(x^3,\ x^4)\, dx^a\, dx^b$$

$$(i,\ j = 1,\ 2; \qquad a,\ b = 3,\ 4).$$

Учитывая результаты предыдущего параграфа, получаем таким образом следующий результат: *симметрические поля тяготения* $\overset{*}{T}_1$ *будут или пространствами постоянной кривизны, или же, в специальной системе координат, определяются метриками*

$$\varkappa > 0$$

$$\begin{aligned} &1)\quad ds^2 = -\operatorname{ch}^2 \frac{x^2}{a}\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - \cos^2 \frac{x^4}{a}\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \\ &2)\quad ds^2 = -\operatorname{ch}^2 \frac{x^2}{a}\, dx^{1^2} - dx_2^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{x^4}{a}\, dx^{3^2} - dx^{4^2}, \end{aligned} \tag{59.6}$$

$$\begin{aligned} &3)\quad ds^2 = -\cos^2 \frac{x^2}{a}\, dx^{1^2} - dx^{2^2} - \operatorname{ch}^2 \frac{x^4}{a}\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \\ &4)\quad ds^2 = -\cos^2 \frac{x^2}{a}\, dx^{1^2} - dx^{2^2} + \cos^2 \frac{x^4}{a}\, dx^{3^2} - dx^{4^2}, \end{aligned} \tag{59.7}$$

при $\varkappa = 0$ получим метрику Минковского, т. е. поле T_1 отсутствует.

В случае полей тяготения $\overset{*}{T}_2$, пользуясь в неголономном ортрепере формулами (19.12), (19.13), получим аналогично предыдущему условия:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 = \beta_2 = 0, \end{aligned} \qquad \varkappa = 0,$$

т. е. поля $\overset{*}{T}_2$ только в пустоте могут быть симметрическими, когда они будут полями T_2. Как показано в § 30, с точностью до вывода начальных данных, такие поля определяются одной из метрик (30.26). В этих метриках можно, пользуясь переносом вдоль координатной кривой x^α и изменением масштаба вдоль этих кривых, например, привести C к нулю, а постоянную α к единице. Это — пространство максимальной подвижности T_2, допускающее транзитивную разрешимую группу движений G_6. Для случая же полей тяготения $\overset{*}{T}_3$, сопоставляя формулы (19.17) и (59.2), придем при любом $\varkappa$ к противоречию, т. е. этот тип полей по своей структуре не может быть симметрическим (никогда не будет «меняться медленно» в смысле своей кривизны).

Подытоживая, можно утверждать, что: *симметрические* $\overset{*}{T}_1$ *будут или пространствами постоянной кривизны или определятся метриками* (59.6) *и* (59.7); *симметрических* T_1 *не существует,* *так как пространство становится плоским. Симметрических* $\overset{*}{T}_2$ *не существует; симметрические* T_2 *определяются метрикой в специальной системе координат:*

$$ds^2 = 2\,dx^1\,dx^4 - \operatorname{sh}^2 x^4\,dx^{2^2} - \sin^2(x^4 + c)\,dx^{3^2}, \qquad c = \text{const}, \tag{59.8}$$

или аналогичной метрикой, получаемой из (30.26). *Не существует симметрических* T_3 *и* $\overset{*}{T}_3$.

Задачи

1. Показать, что симметрическое T_2 имеет стационарные кривизны $k_s = \alpha_s + i\beta_s = 0$.

2. Показать, что для симметрических T_2 в нормальной системе координат (§ 7)

$$g_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k+2}}{(2k+2)\,!}\,m_\alpha^{\sigma_1}m_{\sigma_1}^{\sigma_2}\ldots m_{\sigma_{k-1}\beta},$$

где

$$m_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{R}_{\alpha\lambda\beta\sigma}x^\lambda x^\sigma,$$

а x^σ — нормальные координаты, $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — значения компонент этих тензоров в начале нормальной системы координат.

Показать также, что для ортрепера (19.19) при $\alpha_s = \beta_s = 0$ имеем

$$\overset{\circ}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} - p_{\alpha\beta}p_{\gamma\delta},$$

где

$$(h_{\alpha\beta}) = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (p_{\alpha\beta}) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. При обозначениях задач 1 и 2 и полагая

$$h_{\alpha\lambda}x^\lambda = y_\alpha, \quad p_{\alpha\lambda}x^\lambda = z_\alpha,$$

показать, что

$$m_\alpha^{\sigma_1}m_{\sigma_1}^{\sigma_2}\ldots m_{\sigma_r\beta} = (-1)^r\,\nu^{2r}\left[y_\alpha y_\beta + (-1)^{r+1}z_\alpha z_\beta\right], \quad \nu = i\,(x^1 - x^4)$$

и, следовательно,

$$g_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + Ay_\alpha y_\beta + Bz_\alpha z_\beta,$$

где

$$A = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}2^{2m+2}}{(2m+2)!}\,\nu^{2m-2} = -\frac{1}{\tilde{\nu}^4}\,(\operatorname{sh}^2\nu - \nu^2),$$

$$B = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2^{2m+2}}{(2m+2)\,!}\,\nu^{2m-2} = -\frac{1}{\tilde{\nu}^4}\,(\sin^2\nu - \nu^2),$$

получить отсюда

$$g_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{\nu^4}\left[(\nu^2 - \operatorname{sh}^2\nu)\, y_\alpha y_\beta + (\nu^2 - \sin^2\nu)\, z_\alpha z_\beta\right], \quad \nu = x^1 - x^4.$$

4. Показать, что метрику (52.6) можно, пользуясь преобразованиями координат, привести к виду

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \operatorname{sh}^2\nu\, dx^{2^2} - \sin^2\nu\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \quad \nu = x^1 - x^4,$$

а также преобразовать в метрику

$$ds^2 = 2\, dx^1\, dx^4 - \operatorname{sh}^2 x^4\, dx^{2^2} - \sin^2 x^4\, dx^{3^2}.$$

5. Получить из (30.26) систему (59.8), ей аналогичную.

6. Исследовать разрывы этих метрик на гиперповерхностях $x^4 = \mathrm{const}$.

§ 60. Статические поля тяготения в пустоте

При решении многих задач общей теории относительности, особенно в астрономических приложениях, возникает тот случай, когда пространственно-временнóй континуум можно рассматривать как топологическое произведение трехмерного пространства определенной метрики, не меняющееся со временем, и одномерного пространства, которое играет роль «времени». Обычно вводится еще предположение, что оба возможных направления времени равноценны. Другими словами, такие поля тяготения допускают такую специальную систему координат, относительно которой компоненты $g_{\alpha\beta}$ не зависят от времени x^4:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

Это означает, другими словами, что пространство допускает одночленную группу G_1, причем оператор движения в этой системе координат определяется вектором Киллинга $\xi^\alpha = \delta_4^\alpha$.

Условие равноценности времени означает, другими словами, что пространство допускает еще и *дискретную группу* зеркальных отображений $x^{4'} = -x^4$, $x^{i'} = x^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Это условие автоматически приводит к выводу $g_{i4} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Следовательно, в этой системе координат

$$(g_{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} g_{ij}(x^1, x^2, x^3) & 0 \\ \hline 0 & g_{44} \end{array}\right). \tag{60.1}$$

Если здесь $g_{44} > 0$, а $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — определенно-отрицательная форма, то получим поля, которые называются статическими, если же эти условия не накладывать, то придем к полям, которые тогда называют или *обобщенно-статическими*, или квазистатическими, которые будут поэтому полями с группой G_1 и соответствующей дискретной группой.

Рассмотрим статические поля и, пользуясь теоремой Коттона ([13], стр. 357), приведем трехмерную метрику $g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ к диагональному виду, пользуясь только неособенными трехмерными преобразованиями $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$, $\left|\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right| \neq 0$. Учитывая, что при таких преобразованиях компоненты метрического тензора вида $g_{i'4'} = g_{\alpha 4}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{i'}} \equiv 0$, можно утверждать, что *для всякого статического пространства можно ввести четырехортогональную голономную систему координат такую, что*

$$ds^2 = -\sum_1^3 \underset{i}{h}^2 dx^{i^2} + \underset{4}{h}^2 dx^{4^2}, \tag{60.2}$$

где

$$\underset{\alpha}{h} = \underset{\alpha}{h}(x^1,\ x^2,\ x^3) \qquad (\alpha = 1,\ \ldots,\ 4)$$

так называемые коэффициенты Ламе. Так как предыдущие рассуждения по своему характеру не связаны с понятием сигнатуры метрики, то они могут рассматриваться с точностью до нумерации и для обобщенно-статических полей метрику снова можно будет привести к диагональному виду, но поле будет уже не статическим.

Возвращаясь к статическим полям, нетрудно подсчитать выражения для компонент тензора кривизны в этой системе координат. Они будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
R_{ijik} &= \underset{i\ i}{hh}_{jk} - \underset{i}{h}\left(\frac{\underset{k}{h_i}\underset{i}{h_k}}{\underset{k}{h}} + \frac{\underset{j}{h_k}\underset{i}{h_j}}{\underset{j}{h}}\right) \quad (i,\ j,\ k \neq),\\
R_{ijij} &= \underset{i\ i}{hh}_{jj} + \underset{j\ j}{hh}_{ii} + \underset{i\ j}{hh}\left(\frac{\underset{i}{h_l}\underset{j}{h_l}}{\underset{l}{h^2}} - \frac{\underset{i}{h_i}\underset{j}{h_i}}{\underset{i}{h^2}} - \frac{\underset{i}{h_j}\underset{j}{h_j}}{\underset{j}{h^2}}\right) \quad (l \neq i,\ j),\\
R_{i4jk} &= 0, \quad R_{i4ik} = 0,\\
R_{i4j4} &= -\underset{4}{h}\,[\underset{4}{h}_{ij} + \underset{4}{h}_i \partial_j \ln \underset{i}{h} + \underset{4}{h}_j \partial_i \ln \underset{j}{h}],\\
R_{i4i4} &= -\underset{4}{h}\left[\underset{4}{h}_{ii} + \underset{i}{h}\left(\underset{4}{h}_i \frac{\underset{i}{h_i}}{\underset{i}{h^2}}\right) - \sum_k^{*} \underset{i}{h}_k\left(\frac{\underset{4}{h_k}}{\underset{k}{h^2}}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{60.3}$$

Здесь $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$ и $\overset{*}{\sum\limits_k}$ означает, что $k \neq i$.

Будем исследовать статические поля в пустоте и покажем, что в этом случае можно дать инвариантную в смысле структуры тензора кривизны характеристику всех такого рода полей тяготения. Этот результат является существенным, так как дает новый способ изучения этих важных в приложениях полей гравитации. Согласно постановке вопроса нужно записать уравнения поля в пустоте

$$R_{\alpha\beta} = 0;$$

используя (60.3), получим, вычисляя компоненты тензора Риччи и приравнивая их нулю, следующие уравнения, эквивалентные уравнениям поля в пустоте:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{R}_{i4i4}+\tilde{R}_{jkjk}=0,\\&\tilde{R}_{k44j}+\tilde{R}_{ikij}=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3),\\&\tilde{R}_{jkjk}+\tilde{R}_{ikik}+\tilde{R}_{ijij}=0\ (i,\ j,\ k\neq),\end{aligned}\right\} \tag{60.4}$$

где, по определению,

$$\tilde{R}_{ijkl}=\frac{R_{ijkl}}{\underset{i\,j\,k\,l}{hhhh}}.$$

Поставим задачей определить тип поля при условиях (60.4). Для этого необходимо исследовать λ-матрицу

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab}) \qquad (a,\ b=1,\ \ldots,\ 6),$$

записанную в собирательных индексах бивекторного пространства. Легко установить, пользуясь (60.4), что, используя элементарные преобразования, относительно которых λ-матрица инвариантна, ее можно привести к виду

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})\approx\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & S\end{pmatrix},$$

где

$$S=\begin{Vmatrix}R_{1414}+\lambda\,(\underset{1\,4}{hh})^2, & R_{1424}, & R_{1434}\\ R_{1424}, & R_{2424}+\lambda\,(\underset{2\,4}{hh})^2, & R_{2434}\\ R_{1434}, & R_{2434}, & R_{3434}+\lambda\,(\underset{3\,4}{hh})^2\end{Vmatrix}.$$

Произведем следующие элементарные операции: разделим каждую строку и каждый столбец на первую степень коэффициента при λ. В результате этой операции мы приводим матрицу S к эквивалентному виду:

$$S\approx(A_{ij}-\lambda\delta_{ij}) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

где A_{ij} — симметрический тензор, а δ_{ij} — трехмерный символ Кронекера, так что

$$S\approx(A-\lambda E)$$

и E — единичная матрица. Хорошо известно, что такого рода λ-матрицы имеют характеристику простого типа и вещественные собственные числа тензора A_{ij}. Таким образом, *всякое статическое пространство Эйнштейна с сигнатурой* $(---+)$ *и* $\varkappa=0$ *определяет поле тяготения первого типа* T_1 *с вещественными стационарными кривизнами.*

Обратное утверждение вообще не имеет места. В случае «обобщенно-статических» или «псевдостатических», как их иногда называют, полей такое утверждение также может не быть справедливым. Обобщением статических полей в указанном смысле и для $n \geqslant 4$ занимались Букдал и некоторые другие авторы [234], [278]. Более тщательное изучение статических полей приводит к необходимости исследовать поля, допускающие группу движений G_r, где $r \geqslant 1$.

§ 61. Центрально-симметрические поля тяготения

Среди других возможных случаев полей тяготения особое место занимает случай центрально-симметрического поля (поле одного центра), так как, по существу дела, именно только этот простейший случай получил проверку в астрономии в широко известных наблюдениях, проведенных над изменением перигелия Меркурия и исследования луча света около диска Солнца. Нужно отметить, что тут предполагается также, что поле статическое. Таким образом, этот простейший случай поля является единственным примером в общей теории относительности, для которого теория сравнивается с опытом.

Имеется громадная литература, посвященная специально этому типу полей, и ряд монографий, среди которых следует отметить вышедшие в последнее время книгу Г. Такено «Теория сферически-симметрических пространств-времени» (Хиросима, 1963 г.) и книгу А. Арцелье «Центрально-симметрические поля тяготения» (Париж, 1963 г.). Этот факт объясняется теми приложениями, которые имеют такого рода поля в астрономии, космологии и других вопросах.

Вообще центрально-симметрические поля могут создаваться любым центрально-симметрическим распределением материи. При этом если речь идет о веществе, то не только распределение вещества, но и его движение предполагается центрально-симметрическим. Рассматривая более общий случай, можно думать, что когда имеется некоторая масса, то она должна двигаться, и поэтому поле будет не статическим. Но для многих вопросов является важным рассмотрение статических полей гравитации и в особенности принципиальный интерес представляет рассмотрение статических центрально-симметрических полей гравитации.

Вопрос о том, когда центрально-симметрическое поле в рамках теории гравитации Эйнштейна будет статическим, тесно связан с так называемой теоремой Биркгофф *), которая утверждает, что *всякое центрально-симметрическое поле в пустоте — статическое* и поэтому с точностью до преобразования координат определяется метрикой Шварцшильда. Это утверждение является общепринятым,

*) G. D. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Cambridge, 1929, p. 256.

оно фигурирует во всех серьезных монографиях по общей теории относительности, и оно является — при определенных предположениях — справедливым, но именно при этих предположениях. Дело заключается в том, что условие этой теоремы приводится у различных авторов, как правило, без использования предположений о классе функций, определяющих компоненты метрики и коэффициенты преобразований, применяемых для упрощения метрики. Однако такого рода рассуждения необходимо должны проводиться в определенном классе функций, иначе они повиснут в воздухе. Можно привести формальный пример метрики, удовлетворяющей уравнениям поля в пустоте, являющейся центрально-симметрической, но не статической. Для этого достаточно, например, взять метрику Шварцшильда в полярных координатах

$$e\,ds^2 = \frac{r}{a-r}\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \frac{r-a}{r}\,dt^2 \quad (e = \pm 1),$$

где a — так называемый гравитационный радиус (см. ниже), рассмотреть ее в пространственно-временно́й области внутри «гиперсферы» ($r < a$) и провести замену $r \to t$, тогда получим метрику

$$e\,ds^2 = \frac{t-a}{t}\,dr^2 - t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \frac{t}{a-t}\,dt^2, \qquad (61.1)$$

которая (при $t < a$) будет иметь сигнатуру типа Минковского $(---+)$, будет, очевидно, по-прежнему удовлетворять уравнениям поля в пустоте, поэтому обладает центральной симметрией, но будет нестатической. Известно, впрочем, что для реальных объектов, изученных в настоящее время, область $r < a$ не существует, так как гравитационный радиус всегда оказывается внутри реального тела, создающего центрально-симметрическое поле гравитации; в этом случае в уравнениях поля справа появляется тензор энергии-импульса, и задача решается уже не в пустоте. Только в случаях пока гипотетических сверхплотных звезд можно было бы говорить о реальных полях, определяемых метрикой (61.1); отметим попытки физических интерпретаций этих метрик в работе И. Д. Новикова *). Вообще можно отметить, что, как стало ясно в настоящее время (см. [618]), можно утверждать следующее: 1) известные до сих пор доказательства теоремы Биркгоффа недостаточно корректны, так как не опираются на понятие класса допустимых функций, 2) теорему Биркгоффа, по-видимому, можно доказать строго при постулатах Лихнеровича о классе допустимых функций (см. § 50), 3) меняя класс допустимых функций, можно, по-видимому, привести примеры, когда эта теорема может оказаться не верной, хотя физическая значимость таких примеров неясна.

*) И. Д. Новиков, Вестник МГУ, сер. 3 (1962).

Не останавливаясь на этом вопросе более подробно, следует отметить, что он представляет немалый физический интерес.

В этом параграфе мы исследуем случай статических центрально-симметрических полей тяготения, рассматривая в конце случай особо интересный — поля в пустоте.

Центральная симметрия в поле, т. е. тот факт, что метрика пространства-времени должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии, может быть всего удобнее определена в терминах теории групп движений (§ 10). Прежде чем дать такое определение, введем следующее понятие.

Пусть дано трехмерное евклидово пространство с декартовыми координатами $x^i \equiv (x, y, z)$. Тогда вращения вокруг начала будут определяться формулами

$$x'^i = p^i_j x^j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3),$$

где p^i_j — постоянные, связанные условиями

$$\sum_k p^k_i p^k_j = \delta_{ij}, \qquad \sum_k p^i_k p^j_k = \delta^{ij}, \qquad |p^i_j| = 1.$$

Такие преобразования (мы отвлекаемся от зеркальных отображений, полагая $|p^i_j| = +1$) образуют группу вращений с операторами в декартовых координатах

$$\begin{aligned} X_1 &= z\,\partial y - y\,\partial z \equiv x^3\,\partial_2 - x^2\partial_3, \\ X_2 &= x\,\partial z - z\,\partial x \equiv x^1\,\partial_3 - x^3\partial_1, \\ X_3 &= y\,\partial x - x\,\partial y \equiv x^2\,\partial_1 - x^1\partial_2 \end{aligned} \qquad \left(\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x};\ \ \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Переводя декартовы координаты (x, y, z) в полярные подстановкой

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

запишем эти же операторы в виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sin\varphi\,\partial_\theta - \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi, \\ X_2 &= -\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi, \\ X_3 &= -\partial_\varphi \end{aligned} \tag{61.2}$$

$$\left(\partial_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta},\ \ \partial_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

и легко непосредственно проверить, что мы имеем здесь группу.

Теперь мы дадим определение центральной или сферической симметрии в V_4, которое задает пространство-время: *всякий геометрический объект или величина Ω называется сферически-симме-*

трическим для некоторого оператора $X_i \equiv \underset{s}{\xi}^{\alpha}\partial_{\alpha}$, *если производная Ли в направлении* $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$ (61.2)

$$\underset{s}{\delta}\Omega = 0.$$

Применяя это определение к метрическому тензору для векторов $\underset{s}{\xi}^{\alpha}$, определяемых операторами (61.2):

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\xi}^{\alpha} &= (0,\ \sin\varphi,\ \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi,\ 0),\\ \underset{2}{\xi}^{\alpha} &= (0,\ -\cos\varphi,\ \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi,\ 0),\\ \underset{3}{\xi}^{\alpha} &= (0,\ 0,\ -1,\ 0), \end{aligned}\right\} \tag{61.3}$$

придем к системе уравнений Киллинга (§ 10)

$$\partial_{\varphi} g_{ij} = 0 \tag{61.4}$$

для вектора $\underset{3}{\xi}^{\alpha}$ и

$$\partial_{\theta} g_{11} = 0, \quad \partial_{\theta} g_{44} = 0, \quad \partial_{\theta} g_{14} = 0, \tag{61.5}$$

$$\begin{aligned} &\sin\varphi\,\partial_{\theta} g_{22} - 2g_{23}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta} = 0,\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{33} - 2g_{23}\operatorname{ctg}\theta) + 2g_{23}\cos\varphi = 0,\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{12}) - g_{13}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta} = 0,\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{13} - g_{13}\operatorname{ctg}\theta) + g_{12}\cos\varphi = 0, \qquad (61.6)\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{23} - g_{23}\operatorname{ctg}\theta) + \cos\varphi\left(g_{22} - \frac{g_{33}}{\sin^2\theta}\right) = 0,\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{24}) - g_{34}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta} = 0,\\ &\sin\varphi\,(\partial_{\theta} g_{34} - g_{34}\operatorname{ctg}\theta) + g_{24}\cos\varphi = 0 \qquad (61.6') \end{aligned}$$

для векторов $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$, $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$. Кроме того, очевидно, получим систему уравнений, которая получается из (61.6), если в ней произвести перемену $-\cos\varphi$ на $\sin\varphi$ и $\sin\varphi$ на $\cos\varphi$ соответственно. Из (61.4), (61.5), (61.6) и (61.6′) непосредственно следует, что

$$g_{12} = g_{13} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0, \tag{61.7}$$

а g_{11}, g_{22}, g_{44}, g_{14} будут функциями r и t и

$$g_{33} = g_{22}\sin^2\theta. \tag{61.8}$$

Обратно, (61.7) и (61.8) будут решениями уравнений Киллинга для операторов X_1, X_2, X_3.

Если учесть, что мы предполагаем наличие сигнатуры вида $(- - - +)$, то $g = |g_{\alpha\beta}| < 0$, и, следовательно, $g_{22} < 0$ и $g_{33} < 0$ и $g_{11}g_{44} - g_{14}^2 < 0$. Отсюда, полагая

$$g_{11} = -A, \quad g_{22} = -B, \quad g_{44} = C, \quad g_{14} = D, \quad B > 0, \tag{61.9}$$

получим, что метрика сферически-симметрического поля тяготения может быть задана в виде:

$$ds^2 = -A\,dr^2 - B\,(d\vartheta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + C\,dt^2 + 2D\,dr\,dt, \tag{61.10}$$

где A, B, C, D — некоторые функции от r и t.

Нетрудно убедиться, что самый общий вид преобразований, не меняющих вид метрики (61.10), имеет форму

$$r' = h'(r, t), \quad t' = k'(r, t), \quad \frac{D(r', t')}{D(r, t)} \neq 0, \tag{61.11}$$

или же обратное выражение

$$r = h(r', t'), \quad t = k(r', t'), \quad \frac{D(r, t)}{D(r', t')} \neq 0. \tag{61.12}$$

Нельзя, как это обычно делается, не задавая класса функции $g_{\alpha\beta}$ и h и k (или h', k'), применить (61.11) или (61.12) для упрощения метрики (61.10). Предположим, что класс функций $g_{\alpha\beta}$ позволяет все же произвести такое упрощение. Тогда, вычисляя выражение для D^* в новой системе координат, получаем:

$$\frac{D^*}{(A^*C^* + D^{*2})} = \frac{1}{AC + D^2}\left\{-C\frac{\partial r'}{\partial r}\cdot\frac{\partial t'}{\partial r} + A\frac{\partial r'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + D\left[\frac{\partial r'}{\partial r}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial r'}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial r}\right]\right\}$$

и, выбирая r' и t' интегралами уравнения $D^* = 0$, получим следующий упрощенный вид метрики:

$$ds^2 = -A\,dr^2 - B\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + C\,dt^2.$$

Отметим следующие удобные для вычисления формулы, выражающие компоненты тензора кривизны, тензора Риччи и скалярной кривизны для метрики (61.10), которые можно получить непосредственно. Введем для краткости следующие обозначения:

$$L_1 = \frac{1}{2} B'' - \frac{B'^2}{4B} - \frac{1}{4(AC+D^2)} [A\dot{A}\dot{B} + CA'B' + 2A\dot{B}D' + \\ + 2DB'D + D\dot{A}B' - DA'\dot{B}],$$

$$L_2 = \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - C''\right) + \dot{D}' + \frac{1}{4(AC+D^2)} [-C\dot{A}^2 + AC'^2 + CA'C' - \\ - A\dot{A}\dot{C} - D\dot{A}C' - 2CA'\dot{D} - 4DD'\dot{D} - 2D\dot{A}\dot{D} + \\ + 2DC'D' + DA'\dot{C} - 2A\dot{C}D'],$$

$$L_3 = -B + \frac{1}{4(AC+D^2)} [CB'^2 - 2DB'\dot{B} - A\dot{B}^2], \tag{61.13}$$

$$L_4 = \frac{1}{2}\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{4B} + \frac{1}{4(AC+D^2)} [-A\dot{B}\dot{C} - CB'C' + 2CB'\dot{D} - \\ - 2D\dot{B}\dot{D} + D\dot{B}C' - DB'\dot{C}],$$

$$L_5 = -\frac{1}{2}\dot{B}' + \frac{B'\dot{B}}{4B} + \frac{1}{4(AC+D^2)} [A\dot{B}C' + C\dot{A}B' + DB'C' - D\dot{A}\dot{B}],$$

где точка означает обычное дифференцирование по t, а штрих — дифференцирование по r. Тогда легко непосредственно убедиться, что компоненты тензора кривизны, отличные от нуля, будут иметь вид:

$$R_{1212} = \frac{R_{3131}}{\sin^2\theta} = L_1, \quad R_{1224} = \frac{-R_{3431}}{\sin^2\theta} = L_5, \quad R_{1414} = L_2,$$
$$R_{2323} = \sin^2\theta L_3, \quad R_{2424} = \frac{R_{3434}}{\sin^2\theta} = L_4, \tag{61.14}$$

точно также компоненты тензора Риччи $R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}_{\alpha\sigma\beta}$ будут иметь вид:

$$R_{11} = -\frac{2L_1}{B} + \frac{AL_2}{AC+D^2}, \quad R_{44} = -\frac{CL_2}{AC+D^2} - \frac{2L_4}{B},$$
$$R_{14} = \frac{2L_5}{B} - \frac{DL_2}{AC+D^2},$$
$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{CL_1 + 2DL_5 - AL_4}{AC+D^2} - \frac{L_3}{B}, \tag{61.15}$$

и для скалярной кривизны получим формулу

$$R = \frac{1}{B(AC+D^2)} [4CL_1 - 4AL_4 + 8DL_5] - \frac{2L_2}{AC+D^2} + \frac{2L_3}{B^2}. \tag{61.16}$$

Отсюда легко получаются уравнения поля Эйнштейна для некоторого заданного состояния материальной системы, т. е. заданного тензора энергии-импульса.

Рассмотрим частный случай уравнений поля в пустоте и предположим, что поле статическое, т. е. метрика допускает еще оператор

$$X_4 = \xi_4^\alpha \partial_\alpha, \quad \text{где} \quad \xi_4^\alpha = \delta_4^\alpha,$$

тогда $g_{\alpha\beta}$ будут функциями только от $x' \equiv r$. Отбрасывая случай, когда $B = \mathrm{const}$, противоречащий уравнениям поля, легко показать, что B в этом случае можно привести к виду r^2 и D к нулю, т. е. метрика может быть записана в виде:

$$ds^2 = -e^\alpha dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + e^\beta dt^2 \text{ *)}.$$

Из уравнений поля для этой метрики в пустоте получим систему трех уравнений:

$$e^{-\alpha}\left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$\beta'' - \frac{\alpha'\beta'}{r} + \frac{\beta' - \alpha'}{r} = 0,$$

$$e^{-\alpha}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta = -\alpha$, $e^{-\alpha} = 1 + \frac{\overset{*}{c}}{r}$, $\overset{*}{c} = \mathrm{const}$, т. е. приходим к известному решению Шварцшильда.

Когда r стремится к бесконечности, то, как легко видеть, метрика стремится к метрике плоского пространства. Накладывая требование, чтобы на больших расстояниях от центра, создающего поле гравитации, имел место закон тяготения Ньютона, получим, что $\overset{*}{c}$ выражается через полную массу тела, создающего поле. В случае слабого поля, как известно ([173], § 86),

$$g_{44} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2},$$

где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению ([173], § 95):

$$\varphi = -\frac{mk}{r} \equiv -\frac{mk}{x^1},$$

где m — полная масса тела. Отсюда следует:

$$\overset{*}{c} = -\frac{2km}{c^2}.$$

Такой элемент длины определяет поле гравитации в пустоте, создаваемое центрально-симметрическим распределением масс. Эта метрика, важная для решения многих задач, может быть получена многими различными способами ([173], § 96; [216], §§ 129 и 130; [254],

*) При этом еще возможен случай $g_{44} = 0$. И хотя его можно привести к метрике Шварцшильда, но только в классе преобразований C^0, если рассматривать область, включающую точки внутренние и внешние относительно гравитационной гиперсферы.

§ 57 и т. д.). Она имеет основное значение при расчетах движения перигелия Меркурия, искривления световых лучей в поле большой массы и т. д. Впервые эта задача методом последовательных приближений была решена Эйнштейном в 1915 году [39]. Затем Шварцшильд [43] и независимо от него Дросте [41] впервые дали строгое решение для поля материальной точки. Затем значительно упростил решение этой задачи Вейль [49], который пользовался вариационным принципом и употреблял декартовы координаты.

Задачи

1. Показать, что метрика

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - \alpha\,(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + x^3\,dx^3)^2 + \beta\,dx^{4^2}$$

определяет центрально-симметрическое статическое распределение материи. Проинтегрировать уравнения в свободном пространстве и показать, что

$$\alpha = \frac{2m}{r^2\,(r-2m)}, \quad \beta = 1 - \frac{2m}{r}, \quad r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}.$$

2. Получить из (49.10) решение Шварцшильда.

3. Показать, что метрика

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} - \frac{(x^1\,dx^1 + x^2\,dx^2 + x^3\,dx^3)^2}{a^2 - r^2} + \left(\frac{3h - h_0}{2hh_0}\right)^2 dx^{4^2},$$

где $a = r_0\sqrt{\frac{r_0}{2m}}$, h_0 — значение h на поверхности шара $\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{2mr^2}{r_0^3}$, может быть интерпретирована как метрика поля внутри несжимаемого жидкого шара с массой $M = \frac{c^2 m}{k}$. Тензор энергии-импульса задан здесь в виде

$$T_{\alpha\beta} = \left(\mu_0 + \frac{p}{c^2}\right) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta},$$

где μ_0 — плотность массы покоя, p — давление (Шварцшильд [44], Вейль [78]).

4. Вычислить чисто «пространственный» (т. е. на гиперповерхности $x^4 = \text{const}$) тензор Риччи и тензор кривизны для метрики (49.9).

5. Показать, что функция действия в центрально-симметрическом поле имеет вид:

$$S = -E_0 t + M\varphi + \int e^{-\frac{\nu}{2}} \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2}\,e^{-\nu} - m^2 c^2 - \frac{M^2}{x^{1^2}}}\,dx^1,$$

где E_0 — постоянная энергия, M — момент импульса, $e^\nu = 1 - \frac{2km^1}{c^2 x^1}$, m_1 — масса тела, создающего поле, m_2 — масса пробной частицы и

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{x^{1^2}}\,dx^1}{\sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m_2 c^2 e^\nu - \frac{M^2}{x^{1^2}}\,e^\nu}}$$

(Л. Ландау и Е. Лифшиц [173], § 97).

6. Получить формулы (61.14), (61.15), (61.16), пользуясь (61.13).

7. Показать, что операторы (61.3) вместе с x_4 определяют группу, и определить структуру группы и поверхности транзитивности.

8. Исходя из теоремы: если ξ^α — компоненты движения, а λ^α — компоненты единичного вектора, касательного к неизотропным геодезическим, то $\xi_\alpha \lambda^\alpha = \mathrm{const}$ вдоль геодезической (доказать), получить законы сохранения для пробной частицы.

9. Показать, что общий вид сферически-симметрического вектора V^α будет иметь вид:

$$V^\alpha = (f_1, 0, 0, f_2),$$

где f_1, f_2 — некоторые произвольные функции от r и t. Получить то же самое для ковариантного вектора W_α.

10. Показать, что общий вид сферически-симметрического тензора $h_{\alpha\beta}$, если он симметричный, будет определяться условиями

$$h_{11} = f_1, \quad h_{22} = \frac{h_{33}}{\sin^2\theta} = f_2, \quad h_{44} = f_3, \quad h_{14} = \dot{h}_{41} = f_4,$$

все остальные компоненты равны нулю, если же $h_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор, то получим аналогично условия

$$h_{14} = -h_{41} = f_5, \quad h_{23} = -h_{32} = f_2 \sin^2\theta,$$

другие компоненты равны нулю, f_i — произвольная функция от r и t.

11. Показать, что неисчезающие независимые компоненты сферически-симметрического тензора $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$, удовлетворяющего условиям

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta} = -M_{\beta\alpha\gamma\delta} = -M_{\alpha\beta\delta\gamma} = M_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad M_{\alpha\,[\beta\gamma\delta]} = 0,$$

определяются условиями:

$$M_{1212} = \frac{M_{1313}}{\sin^2\theta} = f_1, \quad M_{1224} = \frac{M_{1334}}{\sin^2\theta} = f_5, \quad M_{1414} = f_2,$$

$$M_{2323} = \sin^2\theta f_3, \quad M_{2424} = \frac{M_{3434}}{\sin^2\theta} = f_4,$$

$$2M_{1234} = -2M_{1324} = -M_{1423} = 2f_6 \sin^2\theta,$$

где f_i — произвольная функция от r и t.

12. Метрика Шварцшильда определяет T_1. Показать.

13. Исследовать вид метрики (61.10).

14. Исследовать нестатическую метрику

$$e\,ds^2 = \frac{t-a}{t}\,dr^2 - t^2\,(dt^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \frac{t}{a-t}\,dt^2$$

при $t < a$ и показать, что она 1) удовлетворяет уравнениям поля в пустоте, 2) определяет поле T_1, 3) обладает центральной симметрией.

15. Выяснить, при каком значении плотности вещества, распределенного с центральной симметрией, оно будет находиться внутри гравитационного радиуса.

16. Исследовать поведение пробной частицы в сферически-симметричном поле в пустоте при движении по радиусу x^1 $(=r)$.

§ 62. Осе-симметрические поля в пустоте

После центрально-симметрических полей поля, обладающие осевой симметрией, принадлежат к числу наиболее обследованных. Изучение свойств таких полей проводилось в работах Вейля [49], [67] и Леви-Чивита [53], [57], было продолжено рядом авторов, подходивших к изучению полей с различных точек зрения и даже при неодинаковом понимании термина «осевая симметрия». По этому поводу можно, например, указать работы Льюис [97], Стоккума [113], Мардера [300] и других авторов.

В то время как интуитивное определение такого рода полей кажется очевидным, при различных попытках строгого определения возникают формальные трудности и, может быть, лучшим здесь является подход с точки зрения групп Ли движений.

Изучение различных возможных подходов к определению такого рода полей наводит на мысль, что все они фактически укладываются в рамки следующего формально-группового определения.

Будем называть осе-симметрическими полями тяготения такие поля, которые 1) постоянны и 2) имеют еще одну симметрию по движению, 3) эти два движения перестановочны. Эти условия эквивалентны следующим: 1) поле допускает два вектора Киллинга $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$, с нормами

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{\xi}^{\alpha}\underset{1}{\xi}^{\beta}>0, \quad g_{\alpha\beta}\underset{2}{\xi}^{\alpha}\underset{2}{\xi}^{\beta}<0$$

и 2) группа движений, определяемая этими векторами — абелева:

$$[X_1X_2]=0. \tag{62.1}$$

Исходя из этого общего определения, мы определим сначала такую специальную систему координат, относительно которой $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ имели бы по возможности простой вид, что хотя и является неоднозначной операцией, но зато всегда выполнимой.

Так как группа движений, определенная векторами $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ и $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$, такова, что ранг матрицы $\left\|\underset{s}{\xi}^{\alpha}\right\|$ $(s=1,\ 2;\ \alpha=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ равен двум, то в V_4 всегда можно ввести такую систему координат, чтобы первый вектор Киллинга имел вид:

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha}=\delta_4^{\alpha}.$$

При этом можно еще производить любые преобразования вида:

$$x^{i'}=\varphi^i, \quad x^{4'}=x^4+\varphi^4 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{62.2}$$

где $\varphi^a=\varphi^a(x^1,\ x^2,\ x^3)$ и при этом $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ не изменяет своего канонического вида. Записывая уравнения структуры (62.1), убедимся, что если $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ имеет указанный вид, то

$$\underset{2}{\xi}^{\alpha} = \underset{2}{\xi}^{\alpha}(x^1, x^2, x^3).$$

Набор произвольных функций преобразования (62.2) позволяет значительно упростить произвольные компоненты $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$, и это упрощение может быть произведено, разумеется, также неоднозначно. Имея в виду получение в дальнейшем решений Вейля и Леви-Чивита, записанных в определенной системе координат, мы выберем функцию φ^a соответствующим образом. Существенную роль при этом будет играть «ось» симметрии. Естественно именно ее выбрать за координатную линию (параметр x^3). Рассматривая в некоторый момент времени $x^4 = \mathrm{const}$ бесконечно малый объем V_3, мы должны получить в этом трехмерном многообразии симметрию около касательной к координатной кривой x^3. Искомый оператор $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ должен определить вращение около этой касательной и поэтому может (в некоторой системе отнесения) иметь вид:

$$\underset{2}{\xi}^{\alpha} = x^2\delta_1^{\alpha} - x^1\delta_2^{\alpha}. \tag{62.3}$$

Покажем, что имеющийся у нас набор произвольных функций φ^{α} позволяет приведение вектора $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ именно к такому виду. Для преобразования координат (62.2) компоненты преобразованного вектора будут иметь вид:

$$\underset{2}{\xi}^{i'} = \varphi^i_j \underset{2}{\xi}^j \quad \underset{2}{\xi}^{4'} = \varphi^4_j \underset{2}{\xi}^j + \underset{2}{\xi}^4, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где

$$\varphi^i_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^i.$$

Следовательно, если потребовать, чтобы

$$\underset{2}{\xi}^{1'} = \varphi^2, \quad \underset{2}{\xi}^{2'} = -\varphi^1, \quad \underset{2}{\xi}^{3'} = 0, \quad \underset{2}{\xi}^{4'} = 0, \tag{62.4}$$

что как раз задает оператор $\underset{2}{\xi}^{\alpha}$ в нужном виде, то мы придем к системе четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями:

$$\varphi^1_j \underset{2}{\xi}^j = \varphi^2,$$
$$\varphi^2_j \underset{2}{\xi}^j = -\varphi^1,$$
$$\varphi^3_j \underset{2}{\xi}^j = 0,$$
$$\varphi^4_j \underset{2}{\xi}^j + \underset{2}{\xi}^4 = 0.$$

Покажем, что эта система дифференциальных уравнений допускает приведение к виду Коши. Замечаем, что пути двух одночленных групп, образующих нашу группу G_r, не могут совпадать (ранг $\|\underset{s}{\xi}^{\alpha}\|$ равен двум), и, имея в виду канонический вид для вектора $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$, мы можем утверждать, что по крайней мере одна из компонент $\underset{2}{\xi}^{i}$ ($i = 1, 2, 3$) будет отлична от нуля в некоторой области и на нее можно делить уравнения предыдущей системы. Так как это по существу безразлично, то с точностью до перенумерации можно положить $\underset{2}{\xi}^{1} \neq 0$ в указанной области. Тогда, деля все уравнения написанной выше системы на $\underset{2}{\xi}^{1}$, приведем ее к виду:

$$\varphi_1^{\alpha} = F_1^{\alpha}\left(\varphi_k^{a}, \varphi^{a}, x^1, x^2, x^3\right) \qquad \left(k \neq 1, \ \alpha = 1, \ldots, 4, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right).$$

Если предположить, кроме того, что правые части этой системы будут аналитическими функциями в указанной области или в области, целиком лежащей в ней, то автоматически получим, что все условия, определяющие систему уравнений типа Коши, здесь выполнены и, следовательно, система совместна. После этого, выбирая за φ^{α} систему интегралов этой системы, мы получим новую систему координат, относительно которой векторы Киллинга будут иметь вид:

$$\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta_4^{\alpha}, \quad \underset{2}{\xi}^{\alpha} = x^2\delta_1^{\alpha} - x^1\delta_2^{\alpha}. \tag{62.5}$$

Нетрудно проверить, что эти векторы не меняют своего вида при любом преобразовании

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \varphi^1 \cos\left[\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2} + \varphi^2\right], \\ x^{2'} &= \varphi^1 \sin\left[\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2} + \varphi^2\right], \\ x^{3'} &= \varphi^3, \qquad x^{4'} = \varphi^4, \end{aligned} \tag{62.6}$$

где φ^{α} ($\alpha = 1, \ldots, 4$) — произвольные функции от x^3, т. е. функции сдвига по оси симметрии. Вид первого вектора Киллинга $\underset{1}{\xi}^{\alpha}$ говорит о том, что $g_{\alpha\beta}$ зависит только от переменных x^1, x^2, x^3, а уравнения Киллинга для второго оператора будут иметь вид:

$$\begin{gathered} x^2\partial_1 g_{33} - x^1\partial_2 g_{33} = x^2\partial_1 g_{34} - x^1\partial_2 g_{34} = x^2\partial_1 g_{44} - x^1\partial_2 g_{44} = 0, \\ x^2\partial_1 g_{13} - x^1\partial_2 g_{13} - g_{23} = x^2\partial_1 g_{23} - x^1\partial_2 g_{23} + g_{13} = 0, \\ x^2\partial_1 g_{14} - x^1\partial_2 g_{14} - g_{24} = x^2\partial_1 g_{24} - x^1\partial_2 g_{24} + g_{14} = \\ = x^2\partial_1 g_{11} - x^1\partial_2 g_{11} - 2g_{12} = x^2\partial_1 g_{22} - x^1\partial_2 g_{22} + 2g_{12} = \\ = x^2\partial_1 g_{12} - x^1\partial_2 g_{12} + g_{11} - g_{22} = 0. \end{gathered}$$

Интегрируя эти уравнения, легко найти, что

$$g_{33}=g_{33}(x^3,\ \rho),\quad g_{34}=g_{34}(x^3,\ \rho),\quad g_{44}=g_{44}(x^3,\ \rho)$$

— произвольные функции переменных x^3 и $\rho=\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}$, а

$$g_{13}=A\cos\varphi,\ g_{23}=A\sin\varphi,\ A=A(x^3,\ \rho),\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2}+B(x^3,\ \rho),$$

$$g_{14}=C\cos\omega,\ g_{24}=C\sin\omega,\ C=C(x^3,\ \rho),\ \omega=\operatorname{arctg}\frac{x^1}{x^2}+D(x^3,\ \rho),$$

$$g_{11}=e^{-\lambda}\left[-1+(1-e^{-\nu})\frac{x^{1^2}}{\rho^2}\right],\quad g_{12}=e^{-\lambda}(1-e^{-\nu})\frac{x^1x^2}{\rho^2},$$

$$g_{22}=e^{-\lambda}\left[-1+(1-e^{-\nu})\frac{x^{2^2}}{\rho^2}\right],$$

причем A, B, C, D, λ, ν — некоторые произвольные функции от переменных x^3 и ρ.

Для дальнейшего упрощения метрики в нашем распоряжении имеются еще четыре произвольные функции φ^α. Нетрудно убедиться аналогично предыдущему, что можно наложить следующие условия:

$$g_{1'3'}=g_{2'3'}=g_{3'4'}=0,$$
$$g_{4'4'}e^{-\lambda^*}=1,$$

где λ^* означает величину, в которую переходит первый множитель при $g_{1'1'}$ в новой системе координат. Эти четыре условия приводят к системе дифференциальных уравнений для φ типа Коши и, следовательно, опять-таки непротиворечивой. Выбирая в качестве φ^α именно интегралы этой системы, мы окончательно упростим метрику и фиксируем систему координат. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}&g_{pq}=e^{-\mu}\left[-\delta_{pq}+(1-e^{-\nu})\frac{x^px^q}{\rho^2}\right]\qquad (p,\ q=1,\ 2),\\ &g_{31}=g_{32}=g_{34}=0,\quad g_{33}=-e^{\lambda-\mu},\quad g_{44}=e^{\mu},\end{aligned}\right\}\tag{62.7}$$

где λ, μ, k — произвольные функции только двух переменных x^3 и $\rho=\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}$. Выбор этих функций, продиктованный теми или иными соображениями, определит тем самым некоторый частный вид осе-симметрических полей.

Можно было бы, разумеется, указать другие канонические выражения для $g_{\alpha\beta}$, например, те, которые отвечают выбору вектора Киллинга $\underset{2}{\xi}{}^\alpha$ в виде δ^α_2 (такой выбор также возможен), но (62.7) имеет во всяком случае то преимущество, что независимые переменные x^3 и ρ имеют очевидное физическое истолкование.

Среди других возможных частных решений (62.7) заслуживает специального рассмотрения решение Вейля и Леви-Чивита; оно получится, если в (62.7) положить $\lambda = \nu$ и потребовать, чтобы поле было статическим, т. е. (см. § 60) имеют место еще условия $g_{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Вследствие этого получим из (62.7)

$$\left.\begin{aligned} &g_{pq} = e^{-\mu}\left[-\delta_{pq} + \left(1 - e^{-\nu}\right)\frac{x^p x^q}{\rho^2}\right], \\ &g_{13} = g_{23} = g_{34} = g_{14} = g_{24} = 0, \\ &g_{33} = -e^{\nu-\mu}, \quad g_{44} = e^{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{62.8}$$

где $\rho = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}$, а μ и ν — произвольные функции переменных x^3 и ρ.

Для получения уравнений поля Эйнштейна необходимо вычислить, исходя из (62.8), компоненты тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$. Проводя такое вычисление, получим выражения

$$\left.\begin{aligned} &G_{34} = 0, \quad G_{4p} = 0, \\ &G_{3p} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\nu}{\partial x^3} + \frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)\frac{x^p}{\rho}, \\ &G_{33} = \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right], \\ &G_{pq} = \left\{-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\nu}{\partial\rho} + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}\frac{x^p x^q}{\rho^2} + \\ &\quad + \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^{3^2}}\right) - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\} e^{-\nu}\left(\delta_{pq} - \frac{x^p x^q}{\rho^2}\right), \\ &G_{44} = e^{2\mu-\nu}\left\{-\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\mu}{\partial x^{3^2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^{3^2}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}, \\ &p, q = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{62.9}$$

Приравнивая полученные выражения соответствующим компонентам тензора энергии-импульса, получим уравнения поля.

В частности, положив $G_{\alpha\beta} = 0$, придем к уравнениям поля в пустоте, которые будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\mu}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\mu}{\partial x^{3^2}} = 0, \quad \omega_3 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\nu}{\partial x^3} - \rho\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\frac{\partial\mu}{\partial x^3} = 0, \\ &\omega_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\nu}{\partial\rho} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right] = 0, \\ &\omega_4 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\nu}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2\nu}{\partial x^{3^2}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial x^3}\right)^2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{62.10}$$

Два из этих уравнений представляют собой следствия тождеств Бианки; легко также проверить, что

$$w_4 \equiv \frac{\partial w_2}{\partial \rho} + \frac{\partial w_3}{\partial x^3} + \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} w_1$$

и

$$\frac{\partial w_2}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial \rho} \equiv \rho \frac{\partial \mu}{\partial x^3} w_1.$$

Дальнейшее исследование поля с осевой симметрией существенным образом зависит от тех условий, которые будут наложены на $g_{\alpha\beta}$ на бесконечности. Выбор условий на бесконечности (см. § 65) вовсе не является таким самоочевидным, как это выглядит на первый взгляд. Он, как оказывается при более тщательном анализе, зависит прежде всего от того, к какому типу принадлежит исследуемое решение. Например, если положить, что функции μ и ν должны обращаться в нуль на бесконечности, как это полагали Вейль и Леви-Чивита, то придем к полю первого типа. Однако этот вопрос в каждом отдельном случае требует специального анализа и не является тривиальным.

Задачи

1. Показать, что если осе-симметрическое решение допускает абелеву группу движений G_3, то метрика может быть в специальной системе координат записана в виде:

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - r^2 e^{-2\alpha} d\varphi^2 - e^{2\beta - 2\alpha}(dr^2 + dz^2),$$

где $\alpha = C \ln r + A$, $\beta = C^2 \ln r + B$, A, B, C — постоянные.

2. Исследовать тип метрик (62.7), (62.8).

3. Найти вид метрики осе-симметрического поля в той системе координат, относительно которой

$$\underset{1}{\xi}^\alpha = \delta_4^\alpha, \quad \underset{2}{\xi}^\alpha = \delta_2^\alpha.$$

4. Определить структуру тензора энергии-импульса пылевидной материи, если предположить, что метрика определяется формулами (62.7), (62.8) и так, как в первой задаче.

5. Тот же вопрос, но в предположении, что имеет место тензор энергии-импульса идеальной жидкости.

6. Тот же вопрос, но предполагая, что в уравнениях поля справа стоит электромагнитный тензор энергии-импульса (несингулярный случай—см. § 2).

7. Тот же вопрос для сингулярного случая.

§ 63. Поля, допускающие гармонические функции

До последнего времени в теории поля гравитации рассматриваются различные попытки построения теорий, в той или иной мере базирующихся на основных предположениях, имеющих место в классических теориях. В этой связи является интересным вопрос о том, можно ли в рамках теории гравитации Эйнштейна, т. е. предполагая, что пространственно-временной континуум определен многообразием V_4 с сигнатурой типа $(---+)$, опираться на законы типа Ньютона в гравитации или Кулона в электростатике. Применение такого рода законов опирается на факт существования функций, зависящих только от расстояния. Именно, для обычного евклидова пространства R_n, обозначая через x^α декартовы координаты, расстояние до некоторой точки от начала декартовой системы координат получим в виде:

$$s = \sqrt{g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta}. \tag{63.1}$$

Легко привести пример функций в евклидовом пространстве, которые удовлетворяют уравнениям Лапласа, описывающим внешнее поле гравитации в теории Ньютона. Рассмотрим функцию

$$\overset{p}{V} \overset{\text{def}}{=} s^p,$$

где p — целое число. Обозначая через запятую обычное дифференцирование $\left(„,\alpha“ \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)$, получим:

$$\overset{p}{V}_{,\alpha} = (s^p)_{,\alpha} = p s^{p-2} g_{\alpha\beta} x^\beta$$

и, следовательно,

$$\overset{p}{V}{}^{\alpha}_{,\alpha} = \Delta \overset{p}{V} = p(n + p - 2) s^{p-2}.$$

Таким образом, полагая $p = 2 - n$, убеждаемся, что для любого заданного n — числа измерения пространства, существует функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta \overset{2-n}{V} = 0 \qquad (n \neq 2).$$

При $n = 3$ получим $V = \dfrac{1}{s}$, при $n = 4$ получим $V = \dfrac{1}{s^2}$ и т. д. Нужно сразу отметить, что постановка такого же рода вопроса в римановом пространстве V_n будет существенно отличаться от предыдущего рассуждения; решение его будет существенно зависеть, во-первых, от сигнатуры метрики, от числа измерений пространства, во-вторых, и как мы убедимся ниже, только для очень специального вида римановых пространств можно говорить о положительном решении вопроса.

Таким образом, рассмотрение римановых пространств, допускающих существование функций, зависящих только от расстояния и удовлетворяющих обобщенным уравнениям Лапласа, является нетривиальным. Такие пространства называют иногда *гармоническими* (или *вполне-гармоническими*). Как обобщение вопроса, рассматривают также *обобщенно-гармонические* V_n *в данной точке* $\overset{\circ}{x}{}^{\alpha}$, для которых расстояние от данной точки до $\overset{\circ}{x}{}^{\alpha}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta s = s^{\alpha}_{,\alpha} = f(s). \tag{63.2}$$

Мы будем рассматривать далее гармонические пространства и поля, так как исследование (63.2) приводится фактически также к этому случаю. Исторически впервые изучением такого рода V_n начал заниматься П. А. Широков [82], [84], [120], который, идя по этому пути, анализировал проблемы теории классического потенциала в римановых пространствах и получил ряд глубоких результатов. Так, он показал, что для того, чтобы в V_n существовала гармоническая функция, зависящая только от расстояния (от любой точки V_n), необходимо и достаточно, чтобы *каждая гиперсфера* этого пространства имела среднюю постоянную кривизну; далее он показал, что V_n, в котором каждая гиперсфера имеет постоянную среднюю кривизну, является пространством Эйнштейна ($R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$). Нужно отметить, что в этих формулировках термин «гиперсфера» понимается как такая гиперповерхность, все точки которой равноудалены от некоторой данной точки — «центра» гиперсферы; таким образом, речь идет об аналогах окружности на поверхности в смысле Бианки в V_n — геометрический образ, имеющий смысл в любом V_n.

Если взять $n = 3$, то V_3, будучи пространством Эйнштейна, было бы (см. § 13) и пространством постоянной кривизны, т. е. в трехмерном случае требование гармоничности оказывается чрезвычайно жестким. Для $n > 3$, как уже отмечалось выше, вопрос будет существенно зависеть от сигнатуры метрики и в настоящее время он не решен до конца для любого V_n, хотя и рассматривался многими учеными. Так, пространства с условием (63.2) были введены Рузе и Гобсоном [138], а аффинное обобщение этого понятия рассматривается в работах [207], [208]. Основные результаты, касающиеся гармонических V_n и гармонических в данной точке V_n, и связи между ними получены в работах Лихнеровича [155], [220], Уолкера [146], [159], [158], [162] и других авторов [244], [198], [221]. Нас будут далее интересовать гармонические поля тяготения и, следовательно, случай $n = 4$ и сигнатура метрики вида $(- - - +)$.

Покажем прежде всего, каким образом можно связать понятие гармонической функции в поле тяготения со средней кривизной гиперсферы типа Бианки, как это было впервые отмечено в работах П. А. Широкова. Для этого удобно воспользоваться локально-геодезической системой координат в данной точке (§ 7). Обозначая

$$\Gamma^{i}_{jkk_1k_2\ldots k_p} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{k_1}\ldots\partial^{k_p}}\,\Gamma^{i}_{jk},$$

имеем согласно (7.15), что

$$\left\{\Gamma^{i}_{j\,(k,\,lpq)}\right\}_0 = -\frac{3}{5}\left\{\frac{2}{9}R^{ai}{}_{(kl}R_{aq\,|\,j\,|\,p)} + R^{i}_{(pq\,|\,j\,|,\,kl)}\right\}_0. \tag{63.3}$$

Если наше поле допускает гармоническую функцию, зависящую только от расстояния, то согласно первой теореме Широкова любая гиперсфера в смысле Бианки будет иметь постоянную среднюю кривизну, а согласно второй теоремы это поле будет определять пространственно-временно́й континуум, являющийся пространством Эйнштейна:

$$R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}.$$

Если учесть это уравнение и произвести свертку в уравнении (63.3) по индексам i и j, то получим соотношение, играющее основную роль для дальнейшего:

$$\left\{R_{a\,(k\,|\,b\,|\,e}R^{ab}_{qp)}\right\}_0 = -\frac{15}{2}\left\{\Gamma^{a}_{a\,(k,\,epq)}\right\}_0. \tag{63.4}$$

Воспользуемся тем, что средняя кривизна любой гиперповерхности Бианки в V_4 рассматриваемого типа должна быть постоянной и, как это следует из формулы, полученной в [82], имеет вид:

$$H = \frac{n-1}{s} + \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^k}\xi^k \equiv \frac{n-1}{s} + \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial s}, \tag{63.5}$$

а искомая гармоническая функция $\varphi(s)$ будет иметь вид [82]:

$$\varphi = a\int e^{-\int H\,ds}\,ds + C_2, \tag{63.6}$$

т. е. в силу (63.5)

$$\varphi = c_1\int \frac{ds}{s^{n-1}\sqrt{g}} + C_2.$$

Отсюда следуют два важных вывода: 1) искомая функция φ существенно зависит от дискриминанта метрического тензора, т. е. от кривизны пространства, и 2) обращая эту формулу и имея в виду, что φ есть функция от s, получаем как следствие, что дискриминант $g \equiv |g_{\alpha\beta}| = g(s)$ есть также функция только от s. Для того чтобы выразить правую часть (63.4) через некоторую функцию от s, заметим, что, согласно хорошо известной формуле

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda i} = \frac{1}{2}\,\partial_i \ln g(s),$$

и, следовательно, левая часть этого соотношения также будет функцией, зависящей только от расстояния. Воспользуемся теперь тем, что все наши рассуждения ведутся в геодезической системе координат, определяемой условием

$$x^\alpha = \xi^\alpha s,$$

где ξ^α — единичный вектор, определяющий направление некоторой геодезической, выходящей из начала координат. Тогда, если взять тождество

$$s^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$$

и продифференцировать его четыре раза, то, сравнивая члены с одинаковыми степенями s, получим, что

$$\Gamma^\tau_{\tau\alpha} = \theta_\alpha(s)\, s_\alpha, \quad s_\alpha \equiv \frac{\partial s}{\partial x^\alpha},$$

и, следовательно,

$$-\frac{15}{2}\left\{\Gamma^\sigma_{\sigma(k,\, epq)}\right\}_0 = \left\{\lambda g_{(ke} g_{pq)}\right\}_0,$$

т. е. из (63.4) следует, что

$$R_{a(k\,|\,b\,|\,e} R^{ab}_{qp)} = \lambda g_{(ke} g_{pq)}. \tag{63.7}$$

Это накладывает условия на пространство уже безотносительно к точке (началу координат), так как все предыдущие рассуждения можно провести для каждой точки пространства. Отметим, что из (63.7) можно получить выражения для λ:

$$\lambda = \varkappa^2. \tag{63.8}$$

Теперь мы используем специфику нашего пространства, полагая $n=4$ и фиксируя лоренцеву сигнатуру метрики $(---+)$. Для упрощения счета введем при помощи преобразования

$$A = \pm\begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

мнимый ортрепер так, чтобы в некоторой данной точке в неголономном репере

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Рассмотрим ассоциированное с этой точкой бивекторное шестимерное пространство (см. § 15), в котором тензору кривизны и тензору $g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}$ будут отвечать соответственно тензоры R_{ab} и g_{ab} $(a,\ b = 1,\ \ldots,\ 6)$. В мнимом ортрепере

$$g_{ab} = \delta_{ab} \qquad (a,\ b = 1,\ \ldots,\ 6),$$

а

$$(R_{ab}) = \left(\frac{P\,|\,Q}{Q\,|\,P}\right),$$

где P и Q, как и в действительном ортрепере (§ 15), будут симметрическими трехмерными матрицами. Если положить, что

$$P=(m_{ij}),\quad Q=(n_{ij})\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$

то следы этих матриц, как это следует из (18.11), удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Sp} P\equiv\sum_{1}^{3} m_{ii}=\varkappa,\qquad \operatorname{Sp} Q\equiv\sum_{1}^{3} n_{ii}=0.$$

Теперь можно записать основные уравнения (63.7) через m_{ij} и n_{ij} и произвести алгебраический анализ этих уравнений в точке.

В этих уравнениях фиксируется четыре свободных индекса k, l, p, q. Поэтому, переходя к записи этой системы в ортрепере, необходимо различать случаи, когда некоторые из этих индексов равны между собой или же различны. Все такие возможности приводят, как нетрудно видеть, к пяти существенно различным случаям:

$$1)\ k,\ l,\ p,\ q\neq,\quad 2)\ k=l\neq p\neq q,\quad 3)\ k=l\neq p=q,$$
$$4)\ k=l=p\neq q,\quad 5)\ k=l=p=q,$$

в соответствии с чем получим пять типов уравнений системы (63.7). Они будут иметь вид:

$$\begin{gathered}
m_{\alpha\alpha}(n_{\beta\beta}-n_{\gamma\gamma})+m_{\beta\beta}(n_{\gamma\gamma}-n_{\alpha\alpha})+m_{\gamma\gamma}(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta})=0,\\
m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}+m_{\alpha\beta}\left(m_{\gamma\gamma}-\frac{\varkappa}{3}\right)=n_{\alpha\gamma}n_{\beta\gamma}+n_{\alpha\beta}n_{\gamma\gamma},\\
m_{\gamma\gamma}^2+n_{\gamma\gamma}^2+4\left(m_{\alpha\beta}^2-n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta}\right)+2\left(m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta}-n_{\alpha\beta}^2\right)+\\
+\left(m_{\alpha\gamma}^2+m_{\beta\gamma}^2\right)+\left(n_{\alpha\gamma}^2+n_{\beta\gamma}^2\right)=\varkappa^2,\\
m_{\alpha\beta}(m_{\alpha\alpha}-m_{\beta\beta})+m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}=n_{\alpha\beta}(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta})+n_{\alpha\gamma}n_{\beta\gamma},\\
m_{\alpha\alpha}^2+m_{\beta\beta}^2+m_{\gamma\gamma}^2+2\left(n_{\beta\gamma}^2+n_{\alpha\beta}^2+n_{\alpha\gamma}^2\right)=\varkappa^2,
\end{gathered}\tag{63.9}$$

где α, β, γ могут принимать значения 1, 2, 3 и α, β, $\gamma\neq$, согласно смыслу выделения этих пяти групп уравнений. Изучим на основании этих соотношений зависимость между $m_{\alpha\beta}$ и $n_{\alpha\beta}$. Для этого прежде всего, симметрируя и альтернируя четвертое уравнение этой системы по индексам α, β, найдем:

$$m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}=n_{\alpha\gamma}n_{\beta\gamma},\tag{63.10}$$

$$m_{\alpha\beta}(m_{\alpha\alpha}-m_{\beta\beta})=n_{\alpha\beta}(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta}).\tag{63.11}$$

После этого второе уравнение (63.9) в силу (63.10) перепишется в виде:

$$m_{\alpha\beta}\left(m_{\gamma\gamma}-\frac{\varkappa}{3}\right)=n_{\alpha\beta}n_{\gamma\gamma};\tag{63.12}$$

складывая (63.11) и (63.12), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m_{\alpha\beta}\left(m_{\alpha\alpha}-\frac{\varkappa}{3}\right)&=n_{\alpha\beta},\\ m_{\alpha\beta}\left(m_{\beta\beta}-\frac{\varkappa}{3}\right)&=n_{\alpha\beta}n_{\beta\beta},\\ m_{\alpha\beta}\left(m_{\gamma\gamma}-\frac{\varkappa}{3}\right)&=n_{\alpha\beta}n_{\gamma\gamma}.\end{aligned}\tag{63.13}$$

Отметим следующее обстоятельство, важное для решения нашей системы. Если в любой ортогональной системе отнесения *компоненты тензора кривизны с четырьмя различными индексами* (т. е. составляющие $n_{\alpha\alpha}$ в нашем случае) равны нулю, то такое V_4 — конформно-плоское ([88], стр. 153) и, следовательно, будучи к тому же и пространством Эйнштейна, будет пространством постоянной кривизны.

Оставляя в стороне этот тривиальный случай, можно таким образом предполагать, что наверное существует хотя бы одна компонента n_{ii}, отличная от нуля. Пусть это будет, например, $n_{11}\neq 0$, что, разумеется, не нарушает общности рассуждений; так как $\operatorname{Sp} Q=\sum n_{ii}=0$, то по крайней мере еще одна компонента n_{ii} отлична от нуля. Пусть это будет $n_{22}\neq 0$. Тогда, полагая в (63.13) $\alpha=1$, получим:

$$n_{\alpha\beta}=\omega m_{\alpha\beta}\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3),\tag{63.14}$$

где

$$\omega=\frac{m_{11}-\frac{\varkappa}{3}}{n_{11}}$$

и

$$m_{11}=\omega n_{11}+\frac{\varkappa}{3}.$$

Из (63.10) следует, что

$$m_{\alpha\gamma}m_{\beta\gamma}(\omega^2-1)=0\qquad(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq 0).\tag{63.15}$$

Дальнейшее рассуждение существенно будет зависеть от того, существует ли среди $m_{\alpha\beta}$ отличные от нуля компоненты. В соответствии с этим рассмотрим три возможных случая:

1) Существуют две отличные от нуля компоненты вида $m_{\alpha\beta}$; 2) существует одна ненулевая компонента $m_{\alpha\beta}$; 3) все $m_{\alpha\beta}=0$.

В первом случае должны существовать и две соответствующие компоненты вида $n_{\alpha\beta}\neq 0$, и тогда из (63.14) следует, что

$$\omega=l=\pm 1.$$

Подставляя в (63.13) вместо $m_{\alpha\beta}$ не равную нулю компоненту и вместо $n_{\alpha\alpha}$ составляющую n_{22}, мы получим, что

$$\frac{n_{\alpha\beta}}{m_{\alpha\beta}}=\omega=\frac{m_{22}-\frac{\varkappa}{3}}{n_{22}},$$

т. е.

$$m_{22}=\omega n_{22}+\frac{\varkappa}{3},$$

тогда из тождеств $\operatorname{Sp} P=\varkappa$ и $\operatorname{Sp} Q=0$ следует:

$$m_{33}=n_{33}+\frac{\varkappa}{3},$$

т. е. вообще

$$m_{\alpha\alpha}=en_{\alpha\alpha}+\frac{\varkappa}{3}, \quad n_{\alpha\alpha}=em_{\alpha\alpha}-e\frac{\varkappa}{3}. \tag{63.16}$$

Уравнения (63.14) и (63.16) позволяют ввести общую формулу:

$$n_{\alpha\beta}=e\left(m_{\alpha\beta}-\frac{\varkappa}{3}g_{\alpha\beta}\right). \tag{63.17}$$

Рассмотрим теперь второй возможный случай, когда не существует двух компонент вида $m_{\alpha\beta}$, отличных от нуля, и, следовательно, две такие компоненты равны нулю. Предположим, что третья из них не равна нулю. Альтернируя последнее уравнение (63.9) по индексам α, γ, найдем:

$$m_{\beta\gamma}^2-n_{\beta\gamma}^2=m_{\alpha\beta}^2-n_{\alpha\beta}^2.$$

Пусть в этом соотношении $n_{\alpha\beta}\neq 0$. Для рассматриваемого случая мы должны получить:

$$m_{\beta\gamma}=n_{\beta\gamma}=0,$$

и, следовательно,

$$n_{\alpha\beta}=em_{\alpha\beta}.$$

Так как $n_{\alpha\beta}\neq 0$, то

$$\frac{n_{\alpha\beta}}{m_{\alpha\beta}}=e=\frac{m_{22}-\frac{\varkappa}{3}}{n_{22}}, \quad m_{22}=en_{22}+\frac{\varkappa}{3}.$$

Тогда

$$m_{33}=en_{33}+\frac{\varkappa}{3},$$

и мы снова имеем (63.17).

Рассмотрим, наконец, третий возможный случай, когда все $m_{\alpha\beta}=0$. Тогда в силу (63.14) все компоненты

$$n_{\alpha\beta}=0,$$

и третье уравнение системы (63.7) запишется в виде

$$m^2_{\gamma\gamma}+n^2_{\gamma\gamma}-4n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta}+2m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta}=\varkappa^2, \tag{63.18}$$

а последнее уравнение (63.7) дает

$$m^2_{\alpha\alpha}+m^2_{\beta\beta}+m^2_{\gamma\gamma}=\varkappa^2. \tag{63.19}$$

Вычитая из (63.19) уравнение (63.18), получим:

$$m^2_{\alpha\alpha}+m^2_{\beta\beta}-2m_{\alpha\alpha}m_{\beta\beta}+4n_{\alpha\alpha}n_{\beta\beta}-n^2_{\gamma\gamma}=0,$$

или

$$(m_{\alpha\alpha}-m_{\beta\beta})^2=(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta})^2,$$

т. е.

$$m_{\alpha\alpha}-m_{\beta\beta}=e\,(n_{\alpha\alpha}-n_{\beta\beta}).$$

Отсюда следует, что

$$m_{\alpha\alpha}-en_{\alpha\alpha}=m_{\beta\beta}-en_{\beta\beta}=\lambda,$$

где λ не зависит от индексов α, β, поэтому

$$m_{\alpha\alpha}=en_{\alpha\alpha}+\lambda \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3).$$

Суммируя по α, найдем в силу условия $\operatorname{Sp} P=\varkappa$, что

$$\lambda=\frac{\varkappa}{3}.$$

Таким образом,

$$m_{\alpha\alpha}=en_{\alpha\alpha}+\frac{\varkappa}{3}.$$

Так как, кроме того, $m_{\alpha\beta}$ и $n_{\alpha\beta}$ равны нулю ($\alpha\neq\beta$), то мы и в этом случае будем иметь уравнения (63.17). Таким образом, можно констатировать, что многообразия Эйнштейна для $n=4$, допускающие гармонические функции, зависящие только от расстояний, допускают такой ортрепер, относительно которого

$$g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta},\quad (Rab)=\begin{pmatrix} P & Q\\ Q & P\end{pmatrix},$$

$$P=(m_{ij}),$$

$$Q=\left\|\begin{matrix} e\left(m_{11}-\frac{\varkappa}{3}\right) & em_{12} & em_{13}\\ em_{21} & e\left(m_{22}-\frac{\varkappa}{3}\right) & em_{23}\\ em_{31} & em_{32} & e\left(m_{33}-\frac{\varkappa}{3}\right)\end{matrix}\right\|. \tag{63.20}$$

Вычисляя корни уравнения

$$|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0 \tag{63.21}$$

и определяя элементарные делители λ-матрицы

$$(R_{ab} - \lambda g_{ab}),$$

при условии (63.20) получим, что характеристика λ-матрицы простая, а корни характеристического уравнения (63.4) совпадают, т. е. имеется единственный шестикратный корень $\lambda = \frac{\varkappa}{3}$.

Переходя к вещественному реперу при помощи преобразования

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} i & & & \\ & i & & \\ & & i & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

убедимся, что все компоненты $n_{\alpha\beta}$ будут чисто мнимыми, а составляющие $m_{\alpha\beta}$-вещественными. Если не предположить, что все

$$m_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \qquad m_{\alpha\alpha} = \frac{\varkappa}{3},$$

то в силу (63.20) мы пришли бы к противоречию. Но тогда имеет место утверждение о характеристике λ-матрицы и корнях уравнения (63.21): это утверждение просто означает, что в бивекторных индексах

$$R_{ab} = \frac{\varkappa}{3} g_{ab} \qquad (a, b = 1, \ldots, 6)$$

или в обычных индексах

$$R_{ijke} = \frac{\varkappa}{3} \left(g_{ik} g_{je} - g_{ie} g_{jk}\right),$$

т. е. наше V_4 — пространство постоянной кривизны (S_k).

Это означает, что *реальное поле тяготения в рамках теории Эйнштейна может допускать существование гармонической функции, зависящей только от расстояния, только в том тривиальном случае, когда этому полю соответствует геометрия пространства постоянной кривизны.*

Иными словами, в теории Эйнштейна противопоказаны законы Ньютона и Кулона. Более глубокие причины этого факта можно искать в том, что уравнения типа Лапласа не инвариантны относительно преобразований Лоренца в касательном, в некоторой данной точке, пространстве Минковского; собственно говоря, этот факт и был исходным для построения теории гравитации, привлекшей понятие кривого пространства.

§ 64. Поля тяготения, допускающие цилиндрические волны

Если потребовать, чтобы в слабом приближении компоненты метрического тензова

$$g_{\alpha\beta}=e_\alpha \delta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta},$$

где $e_\alpha=\pm 1$, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $h_{\alpha\beta}$ — величины заданного (одного и того же) порядка малости, и поставить, кроме того, условия линеаризации уравнений поля, сводящиеся к тому, что:

а) $h_{\alpha\beta}$, $\dfrac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$, $\dfrac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta}$ — малые одного («первого») порядка, так что произведениями их можно пренебрегать по сравнению с самими этими величинами,

б) величинами $h_{\alpha\beta}$, $\dfrac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$, $\dfrac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma\,\partial x^\delta}$ можно пренебрегать по сравнению с единицей, то, как это хорошо известно ([173] § 99), в пустоте уравнения гравитационного поля могут быть записаны в виде

$$\Box\, h^\alpha_\beta=0,$$

где $\Box$ — обобщенный оператор Даламбера, равный $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}$ ($\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}=-e_\alpha\delta^{\alpha\beta}$). Так как это обычное волновое уравнение, то в данном приближении можно говорить о волнах тяготения, и притом распространяющихся со скоростью света. Вводя понятие плоской гравитационной волны, можно в этом приближении показать, что они являются поперечными волнами, поляризация которых определяется симметрическим тензором второго ранга в некоторой плоскости с суммой диагональных членов, равной нулю. Таким образом, для линеаризованных уравнений можно говорить о плоских гравитационных волнах, но для нелинеаризованных уравнений поля этого утверждать уже нельзя. Поэтому в разное время разными авторами ставились задачи о полях тяготения, допускающих если не плоские, то сферические или цилиндрические волны или же волны более общего вида. Однако этот вопрос, несомненно заслуживающий самостоятельного исследования и вызвавший большую литературу, является по существу до сих пор не решенным до конца. Это видно хотя бы из того, что до сих пор не существует общепринятого определения понятия волн гравитации и тем более понятия энергии, переносимой волной. Различные авторы вводят эти понятия по-разному, иногда исходя из аналогии с электромагнитным полем. По существу, из такого рода аналогии исходят Эйнштейн и Розен в своей работе, посвященной исследованию уравнений поля, допускающих строгое решение с цилиндрическими волнами. Хотя такая постановка вопроса является в известной мере формальной и, кроме того, Эйнштейну и Розену удалось лишь привести решение этого вопроса к задаче интегрирования системы уравнения поля упрощенного типа, но не удалось указать решений в замкнутой форме, все же такое решение имеет несомненный интерес, так как, во-первых, если использовать результаты, полученные в главе IV, то можно указать целые классы конкретных решений для этих уравнений, и, во-вторых, эти решения послужили первым толчком к исследованию проблемы гравитационных волн. В этой работе Эйнштейн и Розен исходили из следующей аналогии. Если электромагнитное поле допускает цилиндрические волны, то функции, описывающие их, должны зависеть, вообще говоря, только от радиуса r и времени t. На основании этого было предположено, что «потенциалы» поля $g_{\alpha\beta}$ должны в некоторой специальной системе координат зависеть только от двух переменных x^1 (играющего роль r) и x^4 («время»); кроме того, несомненно в целях упрощения предполагается, что именно в этой системе координат метрика допускает приведение к диагональному виду:

$$ds^2 = -A\,dx^{1^2} - B\,dx^{2^2} - C\,dx^{3^2} + A\,dx^{4^2}, \tag{64.1}$$

где $g = -A^2BC$ и, следовательно, $BC > 0$, а функции A, B, C зависят только от переменных x^1, x^4. Применяя затем подстановку

$$\alpha = \ln A, \quad \beta = \frac{1}{2}\ln({}^B/_C), \quad \gamma = \frac{1}{2}\ln(BC),$$

Эйнштейн и Розен [119] сводят систему уравнений поля в пустоте к пяти независимым уравнениям поля. Мы проведем исследование далее, не пользуясь этой заменой, так как это не меняет существенно исследования. Сформулируем постановку вопроса в строгой математической форме. Эйнштейн и Розен искали решение уравнений поля при следующих условиях: 1) волны распространяются в пустом пространстве-времени, т. е. уравнения поля должны иметь вид $R_{\alpha\beta} = 0$; 2) пространство-время допускает абелеву группу движений G_2, действующую на неизотропных двумерных поверхностях транзитивности V_2 с определенной метрикой; 3) в той системе координат, где векторы Киллинга группы G_2 приводятся к виду $\underset{1}{\xi}^\alpha = \delta_2^\alpha$, $\underset{2}{\xi}^\alpha = \delta_3^\alpha$, метрика имеет диагональный вид и 4) в этой же системе координат $g_{11} = -g_{44}$. В этой постановке задачи мы получим метрику (64.1) и, наоборот, метрика (64.1) приводит к этим условиям.

Поставим себе задачей определить тип такого решения с цилиндрическими волнами. Для этого вычислим сначала компоненты тензора кривизны по формуле (5.7) для метрики (64.1). Они будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
R_{1414} &= \frac{1}{2}\left(A_{44} - A_{11} - \frac{A_4^2}{A} + \frac{A_1^2}{A}\right),\\
R_{2323} &= \frac{1}{4A}(B_1C_1 - B_4C_4),\\
R_{2424} &= \frac{1}{2}\left(B_{44} - \frac{B_4^2}{2B} - \frac{A_1B_1 + A_4B_4}{2A}\right),\\
R_{3131} &= \frac{1}{2}\left(C_{11} - \frac{C_1^2}{2C} - \frac{A_1C_1 + A_4C_4}{2A}\right),\\
R_{3434} &= \frac{1}{2}\left(C_{44} - \frac{C_4^2}{2C} - \frac{A_1C_1 + A_4C_4}{2A}\right),\\
R_{1212} &= \frac{1}{2}\left(B_{11} - \frac{B_1^2}{2B} - \frac{A_1B_1 + A_4B_4}{2A}\right),\\
R_{2412} &= \frac{1}{2}\left(-B_{14} + \frac{B_1B_4}{2B} + \frac{A_1B_4 + A_4B_1}{2A}\right),\\
R_{3431} &= \frac{1}{2}\left(C_{14} - \frac{C_1C_4}{2C} - \frac{A_1C_4 + A_4C_1}{2A}\right),
\end{aligned}
\tag{64.2}
$$

а все остальные компоненты равны нулю. Здесь, для краткости, вводятся следующие обозначения: индексы, стоящие около A, B, C, означают частное дифференцирование по соответствующим аргументам:

$$A_i \equiv \partial_i A, \qquad A_{ij} = \partial_{ij} A.$$

После этого, записывая уравнения поля в пустом пространстве, можно убедиться, что они обращаются в тождества для компонент (64.2) и метрики (64.1), кроме следующих пяти, эквивалентных уравнениям системы, полученной Эйнштейном и Розеном. Эти неисчезающие уравнения будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A} R_{1414} - \frac{1}{B} R_{1212} - \frac{1}{C} R_{3131} = 0,\\
&\frac{1}{A}(R_{2424} - R_{1212}) - \frac{1}{C} R_{2323} = 0,\\
&\frac{1}{A}(R_{3434} - R_{3131}) - \frac{1}{B} R_{2323} = 0,\\
&\frac{1}{A} R_{1414} + \frac{1}{B} R_{2424} + \frac{1}{C} R_{3434} = 0,\\
&\frac{1}{B} R_{2412} - \frac{1}{C} R_{3431} = 0.
\end{aligned}
\tag{64.3}
$$

Не представляет труда убедиться в том, что метрика (64.1) не допускает группы более высокого порядка, чем непосредственно видимая абелева группа G_2 с операторами $x_1=\delta_2^\alpha\partial_\alpha$ и $x_2=\delta_3^\alpha\partial_\alpha$. В самом деле, легко убедиться, что если потребовать, чтобы уравнения Киллинга для метрики (64.1) допускали еще решения, отличные от

$$\xi^\alpha=C_1\delta_2^\alpha+C_2\delta_3^\alpha$$

(C_1, C_2 — постоянные), то это привело бы к требованиям к метрике, не вытекающим из уравнений поля (64.3), т. е. группа вообще максимального порядка, равного 2.

Определяя тип поля по классификации, данной в главе III, необходимо рассмотреть λ-матрицу в бивекторном пространстве, которая в данном случае будет иметь вид:

$$(R_{ab}-\lambda g_{ab})=$$

$$=\begin{bmatrix} R_{1414}+\lambda A^2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & R_{2424}+\lambda AB, & 0, & 0, & 0, & R_{2412} \\ 0, & 0, & R_{3434}+\lambda AC, & 0, & R_{3431}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & R_{2323}-\lambda BC, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & R_{3431}, & 0, & R_{3131}-\lambda AC, & 0 \\ 0, & R_{2412}, & 0, & 0, & 0, & R_{1212}-\lambda AB \end{bmatrix}=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{M_3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{M_4}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right),$$

где одномерные блоки

$$M_1=\left(\lambda+\frac{R_{1414}}{A^2}\right), \quad M_2=\left(\lambda-\frac{R_{2323}}{BC}\right),$$

а двумерные блоки

$$M_3=\begin{pmatrix} R_{2424}+\lambda AB & R_{2412} \\ R_{2412} & R_{1212}-\lambda AB \end{pmatrix},$$

$$M_4=\begin{pmatrix} R_{3434}+\lambda BC & R_{3431} \\ R_{3431} & R_{3131}-\lambda AC \end{pmatrix}.$$

Отсюда непосредственно следует, что исследуемое поле тяготения может быть или типа T_1, или же типа T_2, так как характеристика λ-матрицы может быть только одного из двух следующих типов: $[111, \overline{111}]$ или $[12, \overline{12}]$. Последние из уравнений поля (64.3) позволяют утверждать, что компоненты R_{2412} и R_{3431} будут равны или отличны от нуля одновременно. Так, если, например,

$$R_{2412} = 0,$$

то оба блока M_3 и M_4 определяют одновременно *простые* элементарные делители, и поле будет первого типа (T_1 с характеристикой [111, 111] и вещественными стационарными кривизнами). Если же

$$R_{2412} \neq 0, \qquad R_{1212} + R_{2424} = \pm R_{2412},$$

то, очевидно, получим одновременно два *непростых* элементарных делителя $(\lambda - \lambda_0^2)$, $(\lambda - \bar{\lambda}_0)^2$, т. е. приходим к пространствам T_2. В этом случае, как легко убедиться,

$$\frac{R_{1414}}{A^2} = -\frac{B_{2323}}{BC} \tag{64.4}$$

и два квадратных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{1}{AB}(R_{2424} - R_{1212})\lambda + \left(\frac{R_{1212} - R_{2424}}{AB}\right)^2 = 0, \\ \lambda^2 + \frac{1}{AC}(R_{3434} - R_{3131})\lambda + \left(\frac{R_{3131} - R_{3434}}{AC}\right)^2 = 0, \\ R_{2412} \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{64.5}$$

определяют четыре корня, из которых два будут комплексно-сопряженными двум другим.

Следовательно, решение Эйнштейна — Розена может быть или первого типа или же второго. Нельзя указать в замкнутом виде общий интеграл уравнений поля в этом случае, но можно указать сколько угодно много частных решений для этих уравнений. Для этого достаточно взять классификацию полей тяготения возможных типов по группам движений и среди них искать неизвестные интегралы. Например, симметрическое максимально-подвижное T_2 с метрикой

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \mathrm{sh}^2 \nu\, dx^{2^2} - \sin^2 \nu\, dx^{3^2} + dx^{4^2}, \qquad \nu = x^1 - x^4,$$

и другие поля, удовлетворяющие условиям (64.4) и (64.5), будут представлять из себя, при определенных ограничениях, искомые поля с цилиндрическими волнами. Приведенное выше исследование типа полей с цилиндрическими волнами показывает, что такой инвариантный метод исследования может оказаться полезным при изучении конкретных полей, помогая установить основные структурные характеристики поля.

Задачи

1. Показать, что решение уравнений поля Розена (§ 14) представляет собой частный случай решения Эйнштейна — Розена при

$$A = e^{2(\gamma - \psi)}, \quad B = x^{1^2} e^{-2\psi}, \quad C = e^{2\psi},$$

где ψ, γ — некоторые функции от x^1 и x^4 с абелевой группой движения G_2.

2. Исследовать тип пространства задачи 1.

§ 65. О граничных условиях в общей теории относительности

Уже в рамках классической теории тяготения Ньютона, основывающейся на принципе дальнодействия, в полной мере выясняется важность предельных условий или условий на бесконечности (граничных условий). В самом деле, хорошо известно, что ньютоновская теория гравитации может быть описана при помощи следующего аппарата. Предположим, во-первых, что поле гравитации описывается потенциалом, удовлетворяющим дифференциальному уравнению Лапласа — Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho\delta, \tag{65.1}$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность материи, а δ можно рассматривать как оператор разрывности: δ равно нулю вне масс, создающих поле (внешняя задача, которой отвечает уравнение Лапласа), и $\delta = 1$ внутри этих масс (внутренняя задача, которой отвечает уравнение Пуассона).

Если на некоторую точку воздействует масса, то это действие будет как раз описываться потенциалом φ, т. е. такой функцией, что ее производные φ'_x, φ'_y, φ'_z, взятые с обратным знаком, определяют компоненты силы, действующей на точку; поле гравитации мыслится как поле сил. Если искать решение уравнения (65.1) в классе C^1 функций, т. е. предполагать, что φ — однозначная и один раз непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям Пуассона (класс C^1 обеспечивается хорошо известными теоремами из теории потенциала), а разрывность вторых производных следует из уравнения (65.1) непосредственно как следствие наличия множителя δ, то общее решение будет иметь вид:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dv}{r} + \mathring{\varphi},$$

где $\mathring{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа ($\Delta\mathring{\varphi} \equiv 0$) во всем бесконечном пространстве, т. е. как вторую необходимую составную часть ньютоновской теории, необходимо еще добавить условия на бесконечности: стремление φ на бесконечности к определенному пределу заданной функции. Этот факт классической механики обычно реализуется при помощи предположения, что $\mathring{\varphi}$ есть потенциальная функция масс, целиком расположенных в бесконечности. Скажем, за $\mathring{\varphi}$ можно принять потенциальную функцию однородного шарового слоя бесконечно большого радиуса.

Если теперь добавить еще к уравнению (65.1) и условию на бесконечности уравнения движения материальной точки, то мы получим все необходимое для построения теории дальнодействия Ньютона.

Если рассуждать, отталкиваясь от аналогии, то в релятивистской теории тяготения должно иметь место нечто аналогичное. Разумеется, метод аналогии может быть эффективным только в том случае, если такая аналогия объективно имеет место и во всяком случае такой метод не может претендовать на доказательную силу. В данном случае, однако, если стоять на основных позициях теории гравитации Эйнштейна $\left(g_{\alpha\beta}(x)\right.$ — потенциалы, уравнения $R_{\alpha\beta}-\frac{R}{2}g_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}$ есть уравнения поля, пространство-время представлено римановым многообразием), аналогия подтверждается тем, что классическая теория тяготения получается как предельный случай из теории Эйнштейна, и в этом случае можно проследить, что из чего получается *).

Тогда можно с большой достоверностью утверждать, что аналогами потенциала φ в общей теории относительности являются компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$, уравнению Пуассона отвечают уравнения поля Эйнштейна с правой частью, где аналогом плотности ρ выступает тензор энергии-импульса; для области, где исчезает тензор энергии-импульса, получим в качестве соответствующей уравнению Лапласа систему уравнений поля в пустоте $R_{\alpha\beta}=0$. Идя дальше по этому пути сопоставления, можно думать, что в общей теории относительности также должны играть важную роль предельные условия для потенциалов $g_{\alpha\beta}(x)$. Они во всяком случае должны появиться при интегрировании уравнений поля; можно думать, что здесь также к дифференциальным уравнениям поля должны быть прибавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространственном отношении. Но уже в этом пункте возникает необходимость оговорки. Термин «пространственная бесконечность», так хорошо и легко понимаемый интуитивно, при совмещении его с принципом общековариантности теряет всякий смысл, так как возможность введения любых систем координат приводит зачастую к такой ситуации, когда становится неясным, что принять за пространственную бесконечность. Поэтому сразу же лучше избавиться от интуитивных предвзятостей и говорить вообще о *граничных условиях* на некоторой гиперповерхности, которую можно трактовать как отображение пространственной бесконечности.

Если говорить об истории вопроса, то проблема граничных условий и в классической и в релятивистской теориях тяготения формулировалась прежде всего для задач космологии и для планетных проблем. Это наложило свой отпечаток на постановку вопроса. В ньютоновской теории характерным является следующее рассуждение. Пусть во вселенной можно найти такое место, внутри которого поле тяготения материи, если его рассматривать в целом, обладает сферической симметрией (поле одного центра). Тогда из уравнений

*) Нужно отметить, что такое соответствие выполняется не буквально. Например, в общей теории относительности есть аналог первого закона Ньютона — гипотеза геодезических, но нет тензорного аналога второго закона для сил тяготения.

Пуассона следует, что средняя плотность, т. е. средняя плотность материи, определенная для области пространства, большой по сравнению с расстояниями между неподвижными звездами, но малой по сравнению с размерами всей звездной системы $\rho(x, y, z)$ с увеличением r-расстояния от центра, должна стремиться к нулю быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$, для того, чтобы φ в бесконечности стремилось к конечному пределу. Аналогичная картина, по видимости, должна была бы иметь место и в общей теории относительности.

Именно, рассуждая в таком плане, Эйнштейн, неоднократно возвращавшийся к этому вопросу ([108], стр. 315—331), пришел к следующим трем возможностям:

1) *в пространственной бесконечности при надлежащем выборе системы координат метрика стремится к метрике плоского пространства Минковского.* 2) *Не существует граничных условий, которые могли бы претендовать на всеобщую справедливость, каждая задача должна иметь индивидуальное решение этого вопроса.* 3) *Общие уравнения поля должны быть изменены путем введения добавочного космологического члена так, чтобы пространство стало замкнутым, чем кардинальным образом автоматически снимается вопрос о граничных условиях; вселенная замыкается на себя.* Отметим, что третья возможность, указываемая Эйнштейном, является предпосылкой к созданию модели мира безграничного, но конечного (так же как двумерная поверхность сферы).

Обсуждая эти три возможности, Эйнштейн в указанной работе делает следующие замечания.

Первая гипотеза не всегда согласуется с понятием относительности инерции и плохо согласуется с некоторыми статистическими соображениями; вторая гипотеза физически не соответствует никакому решению вопроса, а означает отказ от решения вопроса; в случае же третьей гипотезы получается такое решение вопроса, которое не подтверждается нашими действительными знаниями о тяготении (т. е. в классической теории тяготения не имеется намека на необходимость такого рода обобщений). Этот вопрос обсуждался и в дальнейшем, но это обсуждение не привело к определенному решению и страдало тем, что оно не всегда сопровождалось конкретным исследованием вопроса.

В настоящее время, опираясь на основную теорему о существовании трех типов полей гравитации, можно в этот вопрос внести новые конструктивные данные. Основным является тот фундаментальный факт, что поля тяготения в пустоте или в среде второго и третьего типов не определяют, вообще говоря, ни на какой гиперповерхности (граничные условия) плоской геометрии Минковского. Для негативного утверждения достаточно подтвердить его примером. Рассмотрим с этой целью симметрическое пространство максимальной подвижности (с группой G_6) T_2, которому отвечает метрика

$$ds^2 = -dx^{1^2} - \mathrm{sh}^2(x^1 - x^4)\,dx^{2^2} - \sin^2(x^1 - x^4)\,dx^{3^2} + dx^{4^2};$$

среди компонент тензора кривизны такого пространства-времени имеются равные $\mathrm{sh}^2(x^1 - x^4)$. Для того чтобы на некоторой гиперповерхности геометрия стремилась к плоской, необходимо и достаточно, чтобы все компоненты тензора кривизны на этой гиперповерхности стремились к нулю. Следовательно, единственной гиперповерхностью для данной геометрии, где могла бы осуществиться плоская геометрия, будет гиперповерхность с уравнением в другой системе координат:

$$x^1 - x^4 = 0.$$

Однако если вычислить определитель $|g_{\alpha\beta}|$ для этой метрики, то мы увидим, что

$$g \equiv |g_{\alpha\beta}| = -\mathrm{sh}^2(x^1 - x^4)\sin^2(x^1 - x^4),$$

и как раз на этой гиперповерхности g равно нулю — метрика разрывается, геометрия перестает быть римановой. Это рассуждение можно повторить и для пространств третьего типа.

Этот факт является принципиально важным, и он сразу же приводит к альтернативам: 1) или нужно признать необходимой первую гипотезу о том, что на некоторой гиперповерхности пространства-времени геометрия должна стремиться к плоской, и вследствие этого отбросить некоторые поля тяготения II и III типов, или 2) признать, что первая гипотеза не универсальна.

Первая альтернатива означала бы, что, во-первых, теория Эйнштейна *недоопределена* и ее следует доопределить и, во-вторых, разумеется, нельзя без достаточных оснований выбрасывать целые классы полей из рассуждения только потому, что они ранее не исследовались; стоит также отметить, что решение Эйнштейна — Розена с цилиндрическими волнами как раз содержит и поля второго типа наряду с полями третьего типа; кроме того, целый ряд исследований, появившихся в последние годы и посвященных проблеме гравитационных волн, в значительной мере базируется именно на полях тяготения второго и третьего типов и даже имеются утверждения (необщепринятые, впрочем), что только для полей тяготения такого рода характерна гравитационная радиация.

Поэтому может быть более приемлемой и во всяком случае более осторожной по выводам вторая альтернатива. Если исходить из этого предположения, то на первый взгляд должна возникнуть очень обескураживающая ситуация, указанная Эйнштейном в виде второй возможности, когда утверждается, что не существует граничных условий, которые могли бы претендовать на всеобшую справедливость. Не означает ли это на самом деле уклонения от всякого решения вопроса? Что это на самом деле далеко не так, можно показать хотя бы на следующей возможности, которую, впрочем, нужно, пока она не подтверждена фактами и опытными данными, понимать не более как гипотетически возможный вариант выхода из положения.

Обсудим возможность следующей непротиворечивой и в достаточной мере естественной точки зрения на выбор граничных условий общей теории относительности. Поставим целью дать инвариантную, не зависящую от выбора системы координат формулировку принципа наложения граничных условий, опираясь на четкие физические соображения. Введем следующие условия: 1) будем понимать под граничными условиями для $g_{\alpha\beta}(x)$ условия на эти «потенциалы» в тех областях, где $T_{\alpha\beta}(x)=0$, и, следовательно, необходимо предположить, что *данное поле* в областях, где имеют место граничные условия, *должно сколь угодно мало отличаться от поля, отвечающего метрическому тензору, компоненты которого являются решениями уравнений поля для свободного пространства*

$$R_{\alpha\beta}=0,$$

2) *тип пространства при стремлении к гиперповерхности граничных условий не должен меняться: всякое изменение типа с физической точки зрения можно объяснить только наложением нового поля, что исключается существом поставленной задачи*, 3) *если имеется поле* $T_i (i=1, 2, 3)$, *то для гиперповерхности граничных условий его геометрия неограниченно приближается к геометрии того же типа i, но максимальной подвижности, возможной для данного типа.*

Это третье условие, основное для всей постановки задачи, можно попытаться обосновать при помощи следующих соображений: первая гипотеза, рассматриваемая Эйнштейном (стремление геометрии поля на пространственной бесконечности к плоской геометрии), хорошо оправдывается экспериментом и наблюдениями для полей тяготения именно первого типа (к этому типу относятся все эксперименты, подтверждавшие решения уравнений поля, т. е. решение Шварцшильда, в первую очередь); поэтому для полей тяготения первого типа ее следует признать правильной. В этом смысле она может послужить образцом для формулировки принципа граничных условий для полей второго и третьего типов.

Более детально это можно получить так: для полей T_1 (к ним относится большинство решенных задач) искривление пространства-времени инвариантно записывается отклонением компонент тензора кривизны от нуля, обусловливаемое, например, наличием гравитирующих масс. Но как только мы будем удаляться от гравитирующих масс (например, по направлению к гиперсфере бесконечно большего радиуса, для метрики Шварцшильда, в полярной системе координат: $r\to\infty$), их гравитационное действие ослабевает, искривленность пространства сглаживается, оно становится более однородным и *стремится к пространству максимальной подвижности того же типа* T_1 с группой движений G_{10}, т. е. к *плоскому пространству* ($R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$).

Заметим, что если в уравнениях Эйнштейна предполагать наличие космологического члена, т. е. записать эти уравнения в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta},$$

то в пределе придем аналогично не к плоской геометрии, а к геометрии пространства постоянной кривизны (в зависимости от знака λ — геометрия Лобачевского или же эллиптического типа).

То что здесь было сказано, представляет как раз реализацию первой гипотезы Эйнштейна в инвариантно-групповой формулировке, не зависящей от выбора системы координат, так как *группы Ли движений не меняют поля гравитации*; *они фиксируют автоморфизмы поля.*

Так же, как и поле T_1, поля типа T_2 или T_3 обязаны своим происхождением движущейся гравитирующей материи (и, может быть, гравитационным волнам, распространяющимся в пустоте со скоростью света), и можно думать, что такой стимулятор искривления пространства-времени как волны гравитации не позволяет ни на какой пространственной бесконечности приблизиться геометрии поля к плоской геометрии. Но естественно думать, что если имеются в таком пространстве-времени области *наименее* возмущенные, то на них должна иметь место геометрия пространств того же типа, но с наивысшей подвижностью. Это определяет тенденцию стремления к пространствам максимальной подвижности того же типа. Это и приводит к условию 3.

Более сжато можно дать следующую формулировку *принципа наложения граничных условий*: если задано некоторое T_i, то на основании результатов § 30

$T_1 \to$ плоское пространство T_1 (группа G_{10}),

$T_2 \to$ пространство T_2 (с транзитивной разрешимой группой G_6),

$T_3 \to$ пространство T_3 (с неабелевой группой). Является очевидным, что попытка поставить при решении некоторой задачи для поля заданного типа граничные условия, соответствующие полям другого типа, приведет к противоречию, так как связана с вырождением метрики, и такое вырождение и изменение поля не будет, по-видимому, иметь физической мотивировки. Ясно также, что такая формулировка не зависит от выбора системы координат и является *инвариантно-групповой* по существу. Таким образом, здесь речь идет не об отказе сформулировать граничные условия, имеющие всеобщий характер, что оттолкнуло Эйнштейна от гипотезы, а о том, что существуют три и только три типа полей тяготения, и для каждого типа существуют свои граничные условия; имеется в этом предположении три типа граничных условий.

Разумеется, без подтверждения опытом (прямым или косвенным) эта гипотеза не может претендовать на большее, чем на право стоять в ряду других неподтвержденных опытом гипотез, но выглядит она отнюдь не хуже других предположений, и она полностью согласуется с основной физической и философской идеей общей теории относительности — геометрия определяется физикой, — высказанной еще Лобачевским в его знаменитом «Вступлении» к книге «Новые начала геометрии» и рассматриваемой впоследствии Эйнштейном.

Более детальный анализ этой гипотезы приводит к фактам, которые не имеют места в классической теории гравитации, например, можно отметить, что пространства максимальной подвижности T_2 и T_3 определяются метрикой, зависящей от двух произвольных параметров, неустранимых при помощи преобразований координат. То есть тут возникают новые мировые константы — факт, требующий тщательного анализа. *Может быть, они допускают физическое истолкование, и это, разумеется, имеет решающее значение для всей гипотезы.* В принципе можно указать другие попытки ответить на вопрос о принципе наложения граничных условий. Можно, например, предположить, что пространственно-временной континуум типа T_i $(i = 1, 2, 3)$ мыслится как замкнутый в себе, и тем самым вопрос о граничных условиях отпадает. Или, как другой вариант решения вопроса, можно предположить, что тип поля при стремлении к граничным условиям меняется; такая возможность не исключена, но она сразу приводит к тонкой математической проблеме склейки полей (обязательно в заданном классе функций) и необходимости физической мотивировки для объяснения такого скачка. Это связано, если оценивать задачу с математической точки зрения, с рассмотрением глобальных проблем римановой геометрии.

Не претендуя при современном состоянии вопроса на его решение, можно только утверждать, что то решение будет получено на пути физического осмысливания указанных выше гипотез (или возможных других) и в конечном счете — экспериментом.

Решения задач

Здесь даются решения или указания на метод решения только тех задач, которые не снабжены литературной ссылкой или не являются тривиальными.

§ 1

1, **2** и **4** задачи. Проверить закон преобразования при замене координат.

3. Рассмотрим $n-1$ функций ψ^j $(j=1, \ldots, n-1)$, являющихся независимыми решениями системы обыкновенных уравнений $\frac{dx^1}{u^1} = \ldots = \frac{dx^n}{u^n}$, и любую функцию ψ^n, удовлетворяющую условию $\left|\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\beta}\right| \neq 0$. Преобразование координат $x'^\alpha = \psi^\alpha(x)$ приводит вектор u^α в виду $u'^\alpha = \omega\delta^\alpha_n$, $\omega \neq 0$.

§ 2

1. Пусть $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma} = -T_{\alpha\gamma\beta}$. Тогда $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma} = -T_{\beta\gamma\alpha} = -T_{\gamma\beta\alpha} = T_{\gamma\alpha\beta} = T_{\gamma\beta\alpha} = -T_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$.

2. Проверяется непосредственно.

3. Проверить закон преобразования координат и, пользуясь произволом u^α, «поделить» на них равенство. Предварительно просимметрировать.

4. $A_{(\alpha\beta\gamma)} = 0$, и ввиду $A_{[\alpha\beta]\gamma} = 0$ получим искомое равенство.

5. Многочлен четвертой степени относительно u^α, v^α тождественно обращается в нуль. Следовательно, все его коэффициенты после приведения подобных членов должны равняться нулю. Фиксируя индексы α, β, γ, δ, отберем члены, содержащие u^α, v^β, u^γ, v^δ. Такие члены получаются только при следующих значениях индексов: $\alpha\beta\gamma\delta$, $\gamma\beta\alpha\delta$, $\alpha\delta\gamma\beta$, $\gamma\delta\alpha\beta$. Эти комбинации индексов будут различны лишь при $\alpha \neq \gamma$ и $\beta \neq \delta$; если $\alpha = \gamma$ (или $\beta = \delta$), останутся только две такие комбинации; если $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ — останется только одна комбинация. Вообще же после приведения этих подобных членов получим коэффициент при $u^\alpha v^\beta u^\gamma v^\delta$, равный нулю:

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\gamma\beta\alpha\delta} + T_{\alpha\delta\gamma\beta} + T_{\gamma\delta\alpha\beta} = 0.$$

Остальное очевидно.

7. $aT_{\alpha'\beta'} + bT_{\beta'\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} A^\beta_{\beta'} \left(aT_{\alpha\beta} + bT_{\beta\alpha}\right) = 0$. Симметрируя по α, β, получим $(a+b)(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}) = 0$, т. е. или $a+b=0$, или $T_{(\alpha\beta)} = 0$, и тогда $a-b=0$.

8. Первое утверждение доказывается как в предыдущей задаче; циклируя по α, β, γ, найдем $(a+b+c)(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\beta\gamma\alpha}+T_{\gamma\alpha\beta})=0$. Следовательно, или $a+b+c=0$, или второй множитель равен нулю, но последнее означает, что $a=b=c$.

9, 10, 11 и 12. Доказывается непосредственно проверкой.

§ 3

1. Если $\lambda_\alpha=\partial_\alpha\lambda$, то $\lambda_{[\alpha,\beta]}=\partial_{[\beta\alpha]}\lambda-\Gamma^\sigma_{[\alpha\beta]}\lambda_\sigma=0$. Если $\lambda_{[\alpha,\beta]}=0$, то $\partial_{[\beta}\lambda_{\alpha]}$ — достаточное условие полного дифференциала.

2. L. P. Eisenhart, Condition that a tensor be the care of Vector. Bulletin of the Amer. Math. Soc. 28, 425—427.

3 и 4. Проверяется непосредственным вычислением.

5. Искомая формула следует из комбинации равенств $\partial_\gamma g^{\alpha\beta}=-\left(g^{\alpha\sigma}\Gamma^\beta_{\gamma\sigma}+g^{\beta\sigma}\Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\right)$ и $\partial_\gamma\ln g=-g_{\sigma\tau}\partial_\gamma g^{\sigma\tau}$.

7. См., например, [88], стр. 126—129. Остальные утверждения могут быть проверены непосредственно. Они доказаны впервые в работе G. Ricci and Levi-Civita, Math. Ann., № 54, 125—201, 608 (1901).

§ 4

1. Указание. Удобно использовать классическое выражение для элемента сферы $ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2$, откуда следуют выражения для символов Кристоффеля $\Gamma^1_{22}=-\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^2_{12}=\operatorname{ctg}\theta$. Элемент длины для конуса вдоль (L) можно связать с θ и φ.

2. Записать условие параллельного переноса в V_2.

§ 5

1. Из (γ) при замене индексов $\binom{\alpha\beta\gamma\delta}{\gamma\delta\alpha\beta}$ получим $R_{\gamma\delta\alpha\beta}+R_{\gamma\alpha\beta\delta}+R_{\gamma\beta\delta\alpha}=0$, что вместе с (γ) дает $(R_{\alpha\beta\gamma\delta}-R_{\gamma\delta\alpha\beta})+(R_{\alpha\delta\beta\gamma}-R_{\beta\gamma\alpha\delta})=0$. Применяя подстановку $\binom{\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\alpha\delta\gamma}$, получим аналогичное соотношение, которое в сумме с уже полученным и при использовании (α) дает (β).

2. Первое утверждение следует из формулы (3.7); второе проверяется непосредственно.

3. Для $n=3$ число независимых компонент $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $R_{\alpha\beta}$ совпадает, что и позволяет выразить первый тензор через второй; в справедливости формулы можно, например, убедиться в ортрепере, где $g_{\alpha\beta}=0$ и $g_{\alpha\alpha}=e_\alpha=\pm 1$, выразив $R_{\alpha\beta}$ и R через $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

5. Убедиться проверкой.

§ 6

2. Из уравнений геодезических следует, что изотропная кривая будет геодезической только в случае, если ρ, φ, ψ — постоянные.

§ 7

1. $\Delta_1 x^1=e_1$, следовательно, линия x^1 — неизотропная, и x^1 можно взять за длину дуги и считать каноническим параметром в уравнении геодезической, которое удобнее для вычислений представить в форме

$$g_{ij}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma_{i,jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

2. Через точку P проводятся всевозможные неизотропные геодезические. Они будут определены, если задан параметр s и единичный вектор касательной к геодезической в точке P. В области A, где для заданной римановой связности выполняются условия существования и единственности интегралов системы дифференциальных уравнений, определяющей геодезическую, через каждые две точки проходит одна и только одна геодезическая. Следовательно, любые точки этой области вполне определяются набором чисел s, ξ^α $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ при условии $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = e_\alpha = \pm 1$. Для изотропных геодезических приходится использовать канонический параметр, но уже нельзя интерпретировать его как длину дуги. Римановы координаты введем как $y^\alpha = s\xi^\alpha$. Будем откладывать от P по неизотропным геодезическим расстояние $s = a = \mathrm{const}$. Геометрическое место точек образует геодезическую гиперсферу радиуса a с центром в P. Они пересекают нормально геодезические, проходящие через P. На первой гиперповерхности выбираем систему координат u^i $(i = 1, \ldots n-1)$. Задавая s и u^i, мы вполне определим любую точку области A. Обозначая $x^i = u^i$, $x^n = s$, нужно потребовать, чтобы $\left|\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right| \neq 0$.

3. Искомые формулы являются следствием (7.20).

4. Исходить из определения нормальной системы координат.

6. Вопрос приводится к существованию решения уравнения $gJ^2 = \pm 1$. $J = \left|\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\right|$ над полем вещественных чисел.

§ 8

2 и 3. См. [292].

§ 10

2. Для движений в v_n имеем $\underset{L}{\delta} g_{\alpha\beta} = 0$, где $\underset{\alpha}{\delta}$ — производная Ли. Следовательно, $\underset{L}{\delta}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, т. е. геодезическая переходит в геодезическую.

4. Если семейство геодезически параллельных гиперповерхностей задать уравнением $x^1 = \mathrm{const}$, где x^1 определяет расстояние между ними вдоль геодезических, то $g_{11} = e_1 = \pm 1$, $g_{1i} = 0$ $(i \neq 1)$. Для $x^1 = 0$, $\underset{s}{\xi}^1 = 0$ $(s = 1, \ldots, r)$. Из уравнения $\xi_{(\alpha,\beta)} = 0$ следует для $\alpha = \beta = 1$, что $\partial_1\underset{s}{\xi}^1 = 0$, т. е. $\underset{s}{\xi}^1 = 0$ для всех поверхностей.

5. Зададим эти гиперповерхности уравнениями $x^1 = \mathrm{const}$, а другие координаты выберем так, чтобы $g_{11} \neq 0$, $g_{1j} = 0$ $(j \neq 1)$. Тогда $\underset{s}{\xi}^1 = 0$, и уравнения Киллинга дают $\underset{s}{\xi}^t\partial_t g_{11} = 0$ $(t = 2, \ldots, n)$. Ранг матрицы $(\underset{s}{\xi}^t)$ равен $n-1$ и, следовательно, $\partial_t g_{11} = 0$ $(t = 2, \ldots, n)$, т. е. $g_{11} = g_{11}(x^1)$, эти гиперповерхности геодезически параллельны.

6. Исходить из определения геодезической.

7. Пусть $\xi^\alpha(x)$ — вектор Киллинга и λ^β — единичный вектор касательной к данной неизотропной геодезической: $\lambda^\beta = \dfrac{dx^\beta}{ds}$. Тогда $\dfrac{d}{ds}(g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta) = (g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta)_{,\gamma}\lambda^\gamma = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha{}_{,\gamma}\lambda^\beta\lambda^\gamma + g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta{}_{,\gamma}\lambda^\gamma = \xi_{(\gamma,\beta)}\lambda^\beta\lambda^\gamma + \xi^\beta\lambda_{\beta,\gamma}\lambda^\gamma = 0$.

9. См., например, [88], § 71.

10. См. [88], §§ 73, 74.

§ 13

1. Пусть $R_{1212}=\sigma$, $R_{11}=\sigma g^{22}=\tau g_{11}$, $R_{12}=\sigma g^{12}=\tau g_{12}$, $R_{22}=\sigma g^{22}=\tau g_{22}$.

3. См. [122], стр. 331—340. Но проще проверить формулы в ортрепере, воспользовавшись каноническими формами для $(R_{\alpha\beta})$ вида (9.4) и тем, что элементарные делители пары форм $(R_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$ $(\alpha, \beta=1, \ldots, 4)$ имеют характеристику простого типа.

§ 19

3. Достаточно проверить формулы в ортрепере и воспользоваться каноническими формами для $(R_{\alpha\beta})$ третьего типа (19.20).

4 и 5. То же указание, что и в предыдущей задаче.

§ 20

1 и 2. Указание. Для заданной метрики вычислим тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну R, что позволяет сконструировать тензор Вейля. Вычислив тензор Эйнштейна, приравняем его $T_{\alpha\beta}$. Сопоставляя одно из трех возможных предположений о типе тензора Вейля случаю идеальной жидкости, можно вывести, какой из этих типов не приводит к противоречию. В случае задачи 2 вместо тензора Вейля берем тензор кривизны.

3. Указание. Для данной метрики подсчитать тензор кривизны и в точке общего положения определить характеристику λ-матрицы $(R_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})$. Ответ — I типа.

§ 21

1. Необходимо сосчитать число независимых параметров.

3. См. [353].

§ 22

1. Указание. Правильность утверждения для R_6 следует из определения этого тритензора, а для R_3 из определения отображения $R_6\to R_3$.

4. Указание. Вычислить базис при дополнительном условии $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$.

5. То же указание, что и в предыдущей задаче, но при условии, что тензор Вейля равен нулю.

§ 27

1. Среди уравнений системы $R_{\alpha\beta}=0$ выделим следующие:

$$\frac{\alpha_{44}}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\alpha_4}{\alpha}\frac{\beta_4}{\beta}+\frac{e_4}{\beta}=0,$$

$$\frac{\alpha_{44}}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\beta_{44}}{\beta}-\frac{1}{2}\frac{\alpha_4^2}{\alpha^2}-\frac{1}{2}\frac{\beta_4^2}{\beta}=0,$$

отсюда находим $\dfrac{\alpha_4}{\alpha}=\dfrac{\beta_4}{\beta}$,

$$\alpha=A(x^3)\,\beta,\quad \beta=-e_4\left[D(x^3)+\frac{1}{2}x^4\right]^2.$$

Но тогда $g=-e_4\alpha^2\beta>0$. Если же $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha\beta}$ $(x\neq 0)$, то при $g<0$ система совместна и даже допускает интегрирование в квадратурах.

2. См. [288].

3. При $p=\nu$ из (27.23) следует, что метрика допускает группу движений G_7. На основании теоремы И. П. Егорова (§ 27) такими пространствами будут только субпроективные пространства.

4. См. [248].

§ 34

1. Первая серия условий интегрируемости уравнений $l^{\alpha}_{,\beta}=0$ имеет вид $l^{\alpha}_{,[\beta\gamma]}=l^{\sigma}R_{\sigma\gamma\beta}^{\ \ \ \alpha}=0$, и в силу условий (29.5), которые имеют место для T_2, она удовлетворяется тождественно. Вторая серия условий интегрируемости будет иметь вид $l^{\sigma}_{,\delta}R_{\sigma\gamma\beta}^{\ \ \ \alpha}+l^{\sigma}R_{\sigma\gamma\beta\delta,\,\delta}^{\ \ \ \alpha}=0$ и также дает тождества в силу первой серии и симметричности пространства ($R_{\alpha\beta\gamma\delta,\,\sigma}=0$). Легко убедиться, что все последующие условия интегрируемости удовлетворяются тождественно. Существование изотропно-геодезической конгруэнции доказывается в § 29.

2. Вычисляя компоненты тензора Риччи, записывая уравнения поля и накладывая условия, определяющие второй тип полей тяготения, придем к совместной системе 7 алгебраических уравнений относительно постоянных, входящих в метрики (26.26) и (26.30).

3. Среди компонент тензора кривизны только R_{2424}, R_{2434}, R_{3434} отличны от нуля. Приравнивая их нулю, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функций A, B, C:

$$2\Delta A''-A'^2C+2A'B'B-B'^2A=0,$$
$$2\Delta B''-A'B'C+A'C'B-B'C'A+B'^2B=0,$$
$$2\Delta C''-B'^2C+2B'C'B-C'^2A=0,$$
$$\Delta=AC-B^2,$$

которая и определяет систему необходимых и достаточных условий.

4. Метрики максимально-подвижных пространств T_2 выражаются через три функции φ, ψ, θ, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\varphi'=k(1-\varphi^2-2b\varphi\psi+\psi^2),$$
$$\psi'=k(\theta\psi-b\theta\varphi-b-b\psi^2-\psi\varphi),$$
$$\theta'=k(1+\theta^2-2b\theta\psi-\psi^2)$$

(k, b — постоянные). Кроме того, уравнения поля дают еще условие

$$b^2k^{-2}=(\psi+b\theta)^2\Delta,\quad (*)$$
$$\Delta=(\varphi'\theta'-\psi'^2)^{-1},$$

и, следовательно,

$$\Delta'=k\Delta(\varphi-\theta+2b\psi).$$

Дифференцируя (*), получим: $\psi'+b\theta'=0$, $\psi+b\theta=\lambda=\mathrm{const}$. Отсюда следует, что $\Delta=b^2k^{-2}\lambda^{-2}=\mathrm{const}$ и $\Delta'=0$, что приводит к соотношению $\varphi-\theta+2b\psi=0$, т. е. $\varphi=\theta-2b\lambda+2b^2\theta$, $\psi=\lambda-b\theta$, $\Delta=[\theta'^2(1+b^2)]^{-1}$. Подставляя φ, ψ, θ в основную систему, придем к выводу $1+b^2=0$, следовательно, на вещественном пути при $a=0$, $b\neq0$ максимально-подвижных T_2 не существует.

5. Пространство (31.4) допускает просто-транзитивную группу. Но тогда коэффициенты вращения Риччи постоянны (см. работу G. Vranceanu, C. R. Acad. Sci. [189] (1929). См. также А. З. Петров, О решении уравнений поля тяготения, Уч. зап. КГУ 118, кн. 4, 38 (1958)). Стационарные

кривизны, выражающиеся через коэффициенты вращения Риччи, также будут постоянными. Тип пространства может быть установлен или непосредственной проверкой при вычислении характеристики λ-матрицы $(R_{AB} - \lambda g_{AB})$, или при помощи предельного перехода, учитывая тот факт, что только пространства T_1 содержат среди себя пространства постоянной кривизны.

6. Рассмотрим, например, (31.25) со вторым условием из (51.26). Уравнения Киллинга в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\partial_1\xi^3 = 0,\\
&\partial_2\xi^3 + \partial_1\xi^2 = 0,\\
&-2\xi^3 + \partial_3\xi^3 + \partial_1\xi^1 = 0,\\
&k\partial_4\xi^3 + e_4e^{2x^3}\,\partial_1\xi^4 = 0,\\
&-\xi^3 + \partial_2\xi^2 = 0\\
&k\,\partial_3\xi^2 + k\,\partial_2\xi^1 + (e_4x^{4^2} + mx^4 + l)\,e^{2x^3}\,\partial_2\xi^3 = 0,\\
&k\partial_4\xi^2 + e_4e^{2x^3}\,\partial_2\xi^4 = 0,\\
&\xi^4\,(2e_4x^4 + m) + 2xe^{-2x^3}\,\partial^3\xi^1 + 2\,(e_4x^{4^2} + mx^4 + l)\,\partial_3\xi^3 = 0,\\
&\partial_4\xi^4 = 0,\\
&k\,\partial_4\xi^1 + e_4e^{2x^3}\,\partial_3\xi^4 = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$X_1 = 2p_1 + x^2p_2 + p_3,\qquad X_2 = -x^2p_1 + x^3p_2,\qquad X_3 = p_2,$$

$$X_4 = \frac{1+\frac{1}{2}me_4}{\sqrt{2}-1}\,e^{-(\sqrt{2}-1)\,x^3}\,p_1 - ke_4e^{-2x^3}e^{-(\sqrt{2}-1)\,x^3}p_4,$$

$$X_5 = -1\,\frac{1+\frac{1}{2}me_4}{\sqrt{2}+1}\,e^{-(\sqrt{2}+1)\,x^3}\,p_1 - ke_4e^{-2x^3}e^{-(\sqrt{2}+1)\,x^3}p_4,\quad X_6 = p_1.$$

§ 35

1. Проверить непосредственной подстановкой $R_{\beta\gamma\delta}$ и выражения тензора $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через тензор кривизны, тензор Риччи и скалярную кривизну в искомую формулу.

2. Следствие (35.13).

§ 36

1. Указание. Учесть теорему единственности решения для линейных систем.

§ 37

1. См. [85].
2. См. [85].

§ 38

1. Указание. Инвариантность метрики проверяется непосредственно. Упрощая метрику за счет выбора $x^{l'}$ и z, что может быть сделано неоднозначно, нужно каждый раз проверять совместность дифференциальных уравнений, записывающих условия выбора $x^{l'}$ и z.

3. Указание. Первая часть задачи решается интегрированием уравнений поля для данной метрики; при решении второй части задачи нужно учесть (38.21).

4. Указание. Исходить из условия (37.15).

7. См. [86].

§ 43

1. Указание. По данному представлению алгебры Ли стационарной подгруппы в пространстве операторов нулевого порядка определяется алгебра Ли группы G_7 так же, как и для представления (27.11) в случае (а). Зная алгебру Ли L_7, можно найти ее операторное представление и определить метрику как решение обобщенных уравнений Киллинга.

2. Указание. Рассуждения такие же, как и для канонического типа (43.9,5)), подробно разобранного в § 43.

3. Указание. Нужно показать, что условия интегрируемости обобщенных уравнений Киллинга тождественно выполняются.

4. Указание. Нужно показать, что нетривиальные транзитивные конформные группы преобразований могут быть только порядка 7.

5. Указание. Нужно показать, что если X_1, X_2, X_3 имеют вид (43.13), то матрицы Z_1, Z_2, Z_3, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &[X_1Z_1]=0, && [X_2Z_1]=-Z_3, && [X_3Z_1]=-Z_2, && \\ &[X_1Z_2]=-Z_3, && [X_2Z_2]=0, && [X_3Z_2]=Z_1, && [Z_iZ_j]=0 \quad (i,\ j=1,2,3) \\ &[X_1Z_3]=Z_2, && [X_2Z_3]=Z_1, &&]X_3Z_3]=0, && \end{aligned}$$

существуют. Аналогично для представления (43.16).

§ 49

2. Достаточно записать определение класса (см. § 46).

3. Указание. Проверить уравнения $R_{\alpha\beta}=\varkappa g_{\alpha,\beta}$.

4. См. А. З. Петров, О геодезическом отображении пространств Эйнштейна, Известия вузов, Математика 2, 1961, стр. 130—136.

5. Воспользоваться тем, что для сигнатуры метрики указанного типа все выводы и методы доказательств, применяемые для $n=4$, и сигнатуры $(---+)$ повторяются буквально.

§ 52

2. Указание. Пространства T_2 и T_3 обязательно имеют среди корней характеристического уравнения $|R_{AB}-\lambda g_{AB}|=0$ кратные как следствие характеристик непростого типа. Условие на кратность корней сужает произвол в выборе $g_{\alpha\beta}(x)$.

§ 59

1. Указание. Записать условия интегрируемости для симметрических ($R_{\alpha\beta\gamma\delta,\lambda}=0$) пространств Эйнштейна при условиях (23.6).

2. Указание. Пользуясь (7.20) и (19.19), проверить на ортрепере правильность формулы для $(h_{\alpha\beta})$ и $(p_{\alpha\beta})$.

3. Указание. Произвести замену $\widetilde{V}\to iV$.

4. Указание. Достаточно положить

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1\left[x^1-\frac{1}{2x^1}-\frac{x^1}{2}(1+x^{2^2}+x^{3^2})\right], \\ x^{2'} &= x^1x^2, \qquad x^{3'}=x^1x^3, \\ x^{4'} &= x^4\left[-\frac{1}{2x^1}-\frac{x^1}{2}(1+x^{2^2}+x^{3^2})\right], \end{aligned}$$

чтобы получить первую из указанных метрик. Преобразовав ее подстановкой

$$x' + x^4 = x^{1'} C_1, \qquad x^2 = x^{2'},$$
$$x' - x^4 = x^{4'} C_2, \qquad x^3 = x^{3'},$$

можно подобрать постоянные C_1, C_2 так, чтобы получить вторую форму метрики.

2. См. [234].

4. Указание. Пусть сигнатура имеет вид (e_1, e_2, e_3, e_4), не сводящийся к сигнатуре Минковского. Это не мешает ввести для x^4 полугеодезическую систему координат и считать, что $\partial_4 g_{ij} = 0$ (i, $j \neq 4$). В остальном исследование идет аналогично приведенному в § 60.

5. Указание. Исследовать тензор Вейля при наличии формулы (60.1).

§ 61

1. Указание. Проинтегрировать для этой метрики уравнения Киллинга, определить группы движений и убедиться, что она подобна группе вращений.

4. См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, 1965, § 92, стр. 318.

§ 62

3. Указание. Определить преобразование координат, переводящее (62.5) в $\underset{1}{\xi}^{\alpha} = \delta_4^{\alpha}$, $\underset{2}{\xi}^{\alpha} = \delta_2^{\alpha}$ и затем применить это преобразование к (62.7).

4. Указание. Определить для заданных метрик тензор Эйнштейна и затем в точке общего положения исследовать элементарные делители пары форм ($T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}$).

5, 6, 7. См. указание к задаче 4.

§ 63

2. Для V_3 такого сорта каждая сфера (двух измерений) имеет постоянную среднюю кривизну и, следовательно, по указанной в начале § 63 теореме Широкова является пространством Эйнштейна. Но всякое трехмерное пространство Эйнштейна есть уже и S_3. Для V_2 рассуждение аналогично.

3. Конформно-плоское пространство Эйнштейна есть всегда S_n.

5. Указание. Структура метрики может быть вычислена в любой точке общего положения. Остальное проверяется непосредственной подстановкой $g_{\mu\nu}$ в уравнения $R_{\alpha\beta} = 0$.

8. См. A. G. Walker, A particular harmonic riemannian space. Journ. Lond. Math. Soc. 20, 93—99, 1945.

§ 64

1. Указание. Проинтегрировать уравнения Киллинга.

2. Указание. Исследовать λ-матрицу ($R_{AB} - \lambda g_{AB}$) ($A_1 B = 1, \ldots, 6$) в точке общего положения.

Библиография

1868

1. Riemann B., Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Nachrichten von derk. Gesellschaft von Wissenschaften, Göttingen, 13, 133—152 (см. русский перевод: сб. «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956, 309—341).
2. Beltrami E., Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante, Ann. di Mathem., ser. 2, **2**.

1869

3. Christoffel E. B., Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Journ. reine und angew. Math. (Crelle) **70**, 46—70.

1886

4. Ricci G., Sui parametri gli invarianti delle forme differenziale, Ann. Math. **11**, 14.
5. Schur F., Über die Zusammenhang der Räume konstanten Krümmengs Massen mit den projektiven Räumen, Ann. Math. **27**.

1888

6. Lie S. und Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, S. 1, 2, Teubner, Leipzig, Reprinted in 1930.

1892

7. Killing W., Über die Grundlagen der Geometrie, Journ. reine und angew. Math. (Crelle) **109**.

1893

8. Lie S. und Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Leipzig.

1895

9. Котельников А. П., Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике, Казань.

1896

10. Levi-Civita T., Sulle transformazioni delle equazioni dinamische, Ann. di Mat., Milano, ser. 2, **24**, 255—300.

1897

11. Bianchi L., Sugli spazii atre dimensioni du ammettono un gruppo continuo di movimenti, Soc. Ital. della Sci. Mem. di Mat., s. 3, **11**.

1899

12. Котельников А. П., Проективная теория векторов, Казань.
13. Cotton E., Sur les variétés a trois dimensions, Ann. Fac. Sci. Toulouse (2), I, Thése, Paris.
14. Muth P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig.

1900

15. Larmor Y. J., Aether and Matter, Cambridge.

1901

16. Ricci G., Levi-Civita T., Méthodes du calcul differentiel absolu et leurs applications, Ann. Math. **54**.

1902

17. Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale **1**, Spoerri, Risa.

1903

18. Fubini G., Sulla teoria degli spacii che ammetono un gruppo conformo, Atti Accad. Sci. Torino, 38.
19. Fubini G., Sugli spacii che ammetono un gruppo continuo di movimenti, Ann. Math. **3**, 8.
20. Fubini G., Sui transformazioni geodetishe, Mem. Accad. Torino (2) **53**, 261—313.
21. Hadamard J., Lecons sur la propagations des ondes, Hermann.
22. Lorentz H. A., Обзорная статья в «Enzyklopädie der Mathemat. Wissensch.» **14**.

1904

23. Fubini G., Sugli spacii a quattro dimensioni she ammetono un gruppo continuo di movimenti, Ann. Math. **3**, 9.
24. Lorentz H. A., Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity Smaller than of Light, Amst. Proc., №№ 6, 12.

1905

25. Einstein A., Zur Electrodynamik bewegter Körper, Ann. Phys. **17**.
26. Dickson L. E., Definitions of a Group and a Field of Independent Postulates, Trans. Amer. Math. Soc. **6**.
27. Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig.
28. Poincaré H., Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **140**.

1906

29. Poincaré H., Sur la dynamique de l'électron, Rend. Circolo mat. Palermo **21**.

1907

30. Minkowski H., Das Relativitätsprinzip, Доклад Матем. о-ву в Геттингене, см. сб. «Принцип относительности», ОНТИ, 1935.

1909

31. Dickson L. E., Equivalence of Paires of Bilinear or Quadratic Formes in the Rational Transformations, Trans. Amer. Math. Soc. **10**, **№ 3**.
32. Fubini G., Sulle rappresentazioni che concervano le ipersfere, Ann. Math. **16**.

1910

33. Ignatowsky W., Zs. Phys, № 11.

1 9 1 1

34. Frank Ph., Rothe H., Ann. Phys. **34.**
35. Ignatowsky W., Zs. Phys., № 12.

1 9 1 2

36. Frank Ph., Rothe H., Phys. Zs., № 13.
37. Mie G., Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. Phys., № 37, 39.

1 9 1 4

38. Einstein A., Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Ber.

1 9 1 5

39. Einstein A., Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Ber.
40. Einstein A., Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie, K. Preuss. Akad. Wiss. Sitz. Ber., 831.

1 9 1 6

41. Droste Y., Amsterdam. Versl. **25,** 163.
42. Einstein A., Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Phys. **49.**
43. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsber. Akad. Wiss., Berlin.
44. Schwartzschild K., Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibiler Flüssigkeit nach der Einsteinishen Theorie. K. Preuss. Akad. Wiss. Sitz. Ber. 424.

1 9 1 7

45. Einstein A., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.
46. Hilbert D., Grundlagen der Physik, 2 Mitteilung, Gött. Nachr.
47. Klein F., Zu Hilbert erster Note über die Grundlagen der Physik, Gött. Nachr., math.-pys. Klasse.
48. Levi-Civita T., Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana, Rend. di Palermo **42.**
49. Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. Phys. **54** (см. также **59** (1919)).

1 9 1 8

50. Bianchi L., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformazioni sperri, Pisa.
51. Klein F., Über die Differentialgesetze von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie, Gött. Nachr.
52. Kottler F., Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie, Ann. Phys., Ser. 4, **56.**
53. Levi-Civita T., ds^2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. dei Lincei **27**, fasc. 7—8, Roma.
54. Nordstrem C., On the Energy of Gravitational Field in Einstein's Theory., Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam **20,** 1238.
55. Schouten J. A., Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Ver. kon. Akad. Amsterdam **12,** № 6.
56. Weyl H., Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zs. **2.**

1 9 1 9

57. Levi-Civita T., ds^2 Einsteiniani in campi Newtoniani, Atti Accad. Naz. Lincei **28.**
58. Weyl H., Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Ann. Phys. **59.**

1920

59. Eisenhart L. P., Condition that a Tensor be the Curl of a Vector, Bull. Amer. Math. Soc. **28.**
60. Wilson W., Phil. Mag. **6,** 40, 703.

1921

61. De Donder Th., La gravifique einsteinienne, Paris.
62. Goursat E., Lecons sur l'intégration des équatons aux dérivées partielles du 1-er ordre, Paris.
63. Kasner E., Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations, Amer. Journ. Math. **43.**
64. Schouten J. A., Struik D. J., On Some Properties of General Manifolds Relating to Einstein's Theory of Gravitation, Amer. Journ. Math. **43.**
65. Schouten J. A., Über die konforme Abbildung n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Masszbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit Euklidscher Masszbestimmung, Math. Zs. **11.**
66. Weyl H., Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung, Gött. Nachr. 99—112.

1922

67. Bach P., Weyl H., Math. Zs. **13.**
68. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Одесса.
69. Клиффорд В. К., Предварительный очерк бикватернионов, Приложение к его книге «Здравый смысл точных наук», Петроград.
70. Bach P., Neue Lösungen Einsteinschen Gravitationsgleichungen, Math. Zs. **13.**
71. Cartan E., Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **174.**
72. Cartan E., Journ. Math. pures et appl. **1.**
73. Fermi E., Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, Rend. Accad. Sci. Lincei (Roma) **31.**
74. Veblen O., Normal Coordinates for the Geometry of Paths, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **8.**

1923

75. Birkchoff G. D., Relativity and Modern Physics, Horvard Univ. Press, Cambridge, Mass.
76. Brinkman H. W., On Riemann Spaces Conformal to Einstein's Spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **9.**
77. Lanczos K., Zs. Phys. **23,** 537.
78. Weyl H., Raum-Zeit-Materie, Springer, Berlin.
79. Veblen O., Thomas T. Y., The Geometry of Paths, Trans. Amer. Math. Soc. **25.**

1924

80. Brinkman H. W., Riemann Spaces Conformal to Einstein's Spaces, Ann. Math. **91.**
81. Chazy J., Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la theorie de la relativite, Bull. Soc. Math. France **52, 17.**

1925

82. Широков П. А., Об отличительных свойствах сфер в пространствах постоянной кривизны, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, сер. 2, **25.**
83. Широков П. А., Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах, Изв. Каз. физ-мат. о-ва, сер. 2, **25.**

84. Широков П. А., О функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа в римановых трехмерных пространствах и зависимых только от расстояния, Уч. зап. Каз. ун-та 85, кн. 1.
85. Brinkman H. W., Einstein Spaces which Mapped Conformally on Each Other, Math. Ann. **94**.
86. Kasner E., An Algebraic Solution of the Einstein Equations, Trans. Amer. Math. Soc. **27**.

1926

87. Каган В. Ф., О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцевы преобразования, части 1, 2, изд. Ин-та мат. и мех. при МГУ, Москва.
88. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press. (см. русский перевод: Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, ИЛ, 1948).
89. Hlavaty V., Application des paramétres locaux, Ann. Soc. Polon. **5**.

1927

90. Дубнов Я. С., О симметрично-сдвоенных ортогональных матрицах, изд. Ин-та мат. и мех. при МГУ, Москва.
91. Cartan E., La theorie des groupes et la géometrie, Доклад на заседании Швейцарского мат. о-ва в Берне 7 мая 1927 г.; L'enseignement mathématique (см. русский перевод: Серия монографий и исследований по неевклидовой геометрии, № 1, Казань, 1939).
92. Eisenhart L. P., Non Riemannian Geometry, Amer. Coll. Publ. **8**.

1928

93. Вавилов С. И., Экспериментальные основания теории относительности, ГИЗ.
94. Лопшиц А. М., Векторное решение задачи о симметричносдвоенных матрицах, Труды Всеросс. съезда математиков.
95. Gartan E., Geometrie les éspaces riemanniens, Paris.

1931

96. Mitter O. K., On a Solution of Einstein's Gravitational Equations $G_{\mu\nu}=0$, Symmetrical about an Axis, Tohoku Math. Journ. **34**.

1932

97. Lewis T., Proc. Roy. Soc. **136**.
98. Lewis T., Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields, Proc. Royal Soc., ser. A, **81**.
99. Schouten J. A., van Dantzig G. F., Generalle Feldtheorie, Zs. Phys. **78**.

1933

100. Бохер М., Введение в высшую алгебру, ГТТИ.

1934

101. Гюнтер Н. М., Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных, ОНТИ.
102. Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. 1, ГТТИ.
103. Delsarte M., Sur les ds^2 d'Einstein a symétrie axiale, Paris.
104. Delsarte M., Sur les ds^2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ. Math. Pures Appl. **13**, 19.
105. Hlavaty Y., Les courbes de la variété générale a n dimensions, Mem. Sci. mathém., fasc. 63, Paris.
106. Thomas T. Y., The Differential Invariants of Generalized Spaces, Cambr. Univ. Press **25** i S.

1935

107. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2, ОНТИ.
108. Эйнштейн А., Вопросы космологии и общая теория относительности, Сб. работ классиков релятивизма «Принцип относительности».
109. Synge J. L., Univ. of Toronto Studies, Appl. Math. Series.

1936

110. Картан Э., Геометрия римановых пространств, ОНТИ.
111. Levine J., Groups of Motions in Conformally Flatspaces. I, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 6.
112. Ruse H. S., Proc. Lond. Math. Soc. **41**.
113. Van Stockum W. J., The Gravitational Field of a Distribution of Particles Rotating about an Axis of Symmetry, Proc. Roy. Soc., Edinburgh **107**, part II.

1937

114. Петровский И. Г., О проблеме Коши для системы уравнений с частными производными, Матем. сб. **2** (44): 5.
115. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, ОНТИ.
116. Тихов Т. А., Об отклонении световых лучей в поле тяготения звезд, ДАН **16**, № 4.
117. Широков П. А., К вопросу о трансляциях в римановых пространствах, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, сер. 3, **9**.
118. Chow P. V., Isotropic Static Solutions of the Field Equations in Einstein's Theory of the Gravitation, Amer. Journ. Math. **59**.
119 Einstein A., Rosen N., On Gravitational Waves, Journ. Franklin Inst. 223.

1938

120. Широков П. А., Симметрические конформно-евклидовы пространства, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, сер. 3, **11**.
121. Fialkow A., Einstein Spaces on a Space of Constant Curvatura, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24**.
122. Thomas T. Y., New Theorems on Riemann Einstein Spaces.

1939

123. Картан Э., Теория групп и геометрия, Казань, стр. 113—141.
124. Клейн Ф., Высшая геометрия, М. — Л., Гостехиздат.
125. Схоутен И. А. и Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1, Гостехиздат.
126. Фок В. А., О движении конечных масс в общей теории относительности, ЖЭТФ **9**, № 4.
127. Fialkow A., Totally. Geodesic Einstein Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **45**.
128. Haantjes Y., Wrona W., Über konformeuklidsche und Einsteinsche Räume Gerader Dimensionen, Proc. kon. Ned. Akad. Amsterdam **42**.
129. Höhl H. und Papapetrou A., Über die Selbstenergie und das Gravitationsfeld einer elektrischen Punktladung, Zs. Phys. **112**, 65—88.
130. Höhl H. und Papapetrou A., Über die innere Bewegung des Elektrons. I, Zs. Phys. **112**, 512—541.
131. Levine J., Groups of Motions in Conformally Flatspaces. II, Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 10.
132. Mukheriee B. C., Bull. Calcutta Math. Soc. **31**, 63.

133. Papapetrou A. und Höhl H., Über die innere Bewegung des Elektrons. II, Zs. Phys. **114**, 478—495.
134. Papapetrou A., Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik, Praktika de l'Académie d'Athenes **14**, 54—547.

1940

135. Богородский А. Ф., Задача Кеплера в общей теории относительности, Циркуляр ГАО № 30, Пулково.
136. Богородский А. Ф., К вопросу о природе красного смещения в спектрах внегалактических туманностей, Циркуляр ГАО № 29, Пулково.
137. Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат.
138. Gobson E. T., Ruse M. S., Harmonic Riemannian Spaces, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60**, 117—133.
139. Höhl H., Papapetrou A., Über die innere Bewegung des Elektrons. III, Zs. Phys. **116**, 153—184.
140. Papapetrou A., Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der Diracschen Theorie des Elektrons, Praktika de l'Académie d'Athenes **15**, 404—417.

1941

141. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем, Гостехиздат.

1942

142. Мальцев А. И., ДАН СССР **36**, 46—50.
143. Fialkow A., Correction to «Totally Geodesic Einstein Spaces», Bull. Amer. Math. Soc. **48**.
144. Sasaki S., On a Relation between a Riemannian Space which is Conformal with Einstein Spaces and Normal Conformally Connected Spaces whose Groups of Holonomy Fix a Point or a Hypersphere, Tensor 5, 66—72.
145 Takeno H., Equations characterising Various Riemann Spaces treated in Cosmologies, Journ. Sci. Hiroshima Univ., ser. A, **12**.
146. Walker A. G., Note on a Distance Invariant and the Calculation of Ruse's Invariant, Proc. Edinburgh Math. Soc. **2**, 7.

1943

147. Papapetrou A., Les corpuscules a structure multipolaire en relativité restreinte, Praktika de l'Académie d'Athenes **18**, 40—50.
148. Papapetrou A., La structure intérieure des corpuscules a constitution mono-bipolaire, Praktika de l'Académie d'Athenes **18**, 50—62.
149. Papapetrou A., Ondes gravifiques du corpuscule monobipolaire, Praktika de l'Académie d'Athenes **18**, 313—317.
150. Papapetrou A., La loi des moments dans un systeme quelconque de coordonnées, Praktika de l'Académie d'Athenes **18**, 317—323.
151. Wong Y. Ch., Family of Totally Umbilical Hypersurfaces in a Einstein Space, Ann. Math. **44**.
152. Wong Y. Ch., Some Einstein Spaces with Conformally Separable Fundamental Tensors, Trans. Amer. Math. Soc. **53**.
153. Yano K., Conformal and Concircular Geometries in Einstein Spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19**, 444—453.

1944

154. Курош А. Г., Теория групп, Гостехиздат.
155. Lichnerowicz A., Sur les éspaces riemanniens completement harmoniques, Bull. Soc. Math. France **72**.

156. Papapetrou A., La théorie de la gravitation dans la relativité restreinte, Praktika de l'Académie d'Athenes **19**, 224—236.

1945

157. Lichnerowicz A. and Walker A. G., Sur les espaces harmoniques de type hyperbolique normal, Compt. Rend. **221**, 394.
158. Walker A. G., On Completely Harmonic Spaces, Journ. Lond. Math. Soc. **20**.
159. Walker G., A Particular Harmonic Riemannian Space, Journ. Lond. Math. Soc. **20**.

1946

160. Петров А. З., Один тип пространств Эйнштейна, Труды Каз. авиационного ин-та **7**.
161. Narlikar V. V., Karmarkar K. K., On a Curious Solution of Relativistic Field Equations, Currient Sci. **15**.
162. Walker A. G., Symmetric Harmonic Spaces, Journ. Lond. Math. Soc. **40**.
163. Yang Chow Wong, Some Theorems on Einstein 4-Space, Duke Math. Journ. **13**, № 4.

1947

164. Бергман П. Т., Введение в теорию относительности, ИЛ.
165. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ.
166. Дынкин Е. Б., УМН **II**, 4, 59—127.
167. Каган В. Ф., Основы теории поверхностей, ч. 1, Гостехиздат.
168. Паули В., Теория относительности, Гостехиздат.
169. Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат.
170. Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, ИЛ.
171. Papapetrou A., A Static Solution of the Equations Gravitational Field for an Arbitrary Charge — Distribution, Proc. Roy. Irish Academy **51A**, 191—204.
172. Wrona W., Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un éspace soit Einsteinien ou conforméeuclidien (см. статью «Польское математическое общество» в УМН **2**, вып. 1 (17)).

1948

173. Ландау Л. и Лифшиц Е., Теория поля, М. — Л., Гостехиздат (см. последнее издание 1965 г.).
174. Норден А. П., Дифференциальная геометрия, Учпедгиз.
175. Петров А. З., О кривизне римановых пространств, ДАН **61**, № 2.
176. Розенфельд Б. А., Дифференциальная геометрия образов симметрии, ДАН **59**, № 6.
177. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана, Гостехиздат.
178. Mme Foures et Lichnerowicz A., Sur un théoreme global de réduction des ds^2 stationaires d'Einstein, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **226**.
179. Papapetrou A., Einstein's Theory of Gravitation and Plat Space, Proc. Roy. Irish Academy **52A**, 11—23.
180. Papapetrou A., The Question of Non-Singular Solutions in the Generalized Theory of Gravitation, Phys. Rev. **73**, 1105—1108.
181. Wrona W., Conditions nécessaires et suffisantes qui determinent les éspaces Einsteiniens, conformément euclidiens et de courbure constante, Ann. Soc. Polon. Math. **20**.

1949

182. Егоров И. П., К усилению теоремы Фубини о порядке групп движений римановых пространств, ДАН **66**, № 5.
183. Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, ИЛ.
184. Петрова Н. М., Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности, ЖЭТФ **19**, вып. 11.
185. Петров А. З., К теореме о главных осях тензора, Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, сер. 3, **14**.
186. Петров А. З., О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства, Уч. зап. КГУ, Казань **109**, 4, 7—36.
187. Einstein A., Infeld L., On the Motion of Particles in General Relativity Theory, Canad. Journ. Math. **I**.
188. Walker A. G., On Lichnerowicz's Conjecture for Harmonic 4-spaces, Journ. Lond. Math. Soc. **21**.
189. Wyman M., Radially Symmetric Distributions of Matter, Phys. Rev. **75**, 1930.

1950

190. Гуревич Г. Б., О некоторых линейных преобразованиях симметрических тензоров и поливекторов, Мат. сб. **26**, № 3.
191. Норден А. П., Пространства аффинной связности, Гостехиздат.
192. Петров А. З., Об одновременном приведении тензора и бивектора к каноническому виду, Уч. зап. Каз. ун-та **110**, кн. 3.
193. Розенфельд Б. А. и Абрамов А. А., Пространства аффинной связности и симметрические пространства, УМН **5**, вып. 2 (36).
194. Kniper N. H., Einstein Spaces and Connections. I, II, Kon. Ned. Acad. Amsterdam Proc. **53**.
195. Lichnerowicz A., Elémentes du calcul tenseuriel, Paris.
196. Rainich G. Y., Mathematics of Relativity, New York.

1951

197. Петров А. З., О пространствах, определяющих поля тяготения, ДАН **81**, № 2.
198. Петров А. З., О существовании в поле тяготения гармонической функции, зависящей только от расстояния, Уч. зап. Каз. ун-та **111**, кн. 8.
199. Kniper N. H., Sur les propriétés conformes de éspaces d'Einstein, Coll. Geometrie Différentielle, London.
200. Papapetrou A., Equations of Motion in General Relativity, Proc. Phys. Sci., ser. A, **14**, 64.
201. Taub A. H., Empty Space — Times Admitting a Three Parameter Group of Motions, Ann. Math. **53**, № 3, 472—490.

1952

202. Петров А. З., Регулярные пространства Эйнштейна, допускающие транзитивную группу движений, Уч. зап. Каз. ун-та **112**, кн. 10.
203. Петров А. З., Поля тяготения с комплексными стационарными кривизнами, Уч. зап. Каз. ун-та **112**, кн. 10.
204. Петров А. З., О полях тяготения, Юбилейный сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», Гостехиздат.
205. Соколов А. А., Замечания к квантовой теории гравитационного поля, Вестник МГУ, № 9, 9—19.
206. Широков А. П., К вопросу об A-пространствах, Юбилейный сб. «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского», Гостехиздат.

207. Patterson E. M., Simply Harmonic Riemann Extensions, Journ. Lond. Math. Soc. **27**.
208. Ruse H. S., Simply Harmonic Affine Spaces of Symmetric Connection, Publ. Math. Debradu.

1953

209. Александров А. Д., О сущности теории относительности, Вестник ЛГУ, сер. мат., физ. и хим., № 8.
210. Александров А. Д. и Овчинников В. В., Замечания к основам теории относительности, Вестник ЛГУ, сер. мат., физ. и хим., № 11.
211. Александров А. Д., По поводу некоторых взглядов на теорию относительности, Вопросы философии, № 5.
212. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М.
213. Делоне Б. Н., Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, Изд-во АН СССР.
214. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат.
215. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат.
216. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат.
217. Франкль Ф. И., Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности, УФН **8**, вып. 3.
218. Франкль Ф. И., О гравитационных волнах и о движении газов в сильных переменных гравитационных полях, Труды физ.-мат. ф-та Киргизского ун-та, вып. 2.
219. Lichnerowicz A., Etude des équations du champ de la théorie unitaire d'Einstein, Rend. Sem. Mat. e fis. Milano, 14—133.
220. Lichnerowicz A., Equations de Laplace et éspaces harmoniques, Premier colloque sur les équations aux dérivees partielles, Louvain, 17—19.
221. Willmore T. Y., Mean Value Theorems in Harmonic Riemannian Spaces, Journ. Lond. Math. Soc. **25**.
222. Vranceanu G., A supra grupurilal de miscare ale unii spatii Riemann cupartu dimensioni, Studii si cercetarri mat. **4**, № 1—2.
223. Vranceanu G., Sur les spaces V_4 agaunt comme groupe de stalilite un G_4, Publ. mat. 3, № 1—2.
224. Yano K., On n-dimensional Riemannian Spaces Admitting a Group of Motions of Order $\frac{n(n-1)}{2} \neq 1$, Trans. Am. Math. Soc. **72**, 2.

1954

225. Инфельд Л., Несколько замечаний о теории относительности, Вопросы философии, № 5.
226. Кручкович Г. И., Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений, УМН **9**, вып. 1 (59).
227. Норден А. П., О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства, Уч. зап. Каз. ун-та **114**, кн. 8.
228. Петров А. З., Классификация пространств, определяемых полями тяготения, Уч. зап. Каз. ун-та **114**, кн. 8.
229. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 2-е изд., Гостехиздат.
230. Синюков Н. С., О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства, ДАН **98**, № 1.
231. Фок В. А., О работе Ф. И. Франкля «Некоторые принципиальные замечания к общей теории относительности», УФН **9**, вып. 4.
232. Халатников И. М., Некоторые вопросы релятивистской теории Эйнштейна, ЖЭТФ **27**, вып. 5.

233. Широков П. А., Симметрические пространства 1-го класса, Уч. зап. Каз. ун-та **114**, кн. 8.
234. Buchdahl H. A., Reciprocal Static Solutions of the Equations $G=0$, Quart. Journ. Math. **5**, № 18.
235. Clauser E., Sui fronti d'ondi nella teoria unifoia Einsteiniana, Rend. Inst. Lombardo Sci. e Lettere, Cl. Sci. mat. e natur. **87**, № 3, 473—492.
236. Papapetrou A., Eine Theorie des Gravitationsfeldes mit einer Feldfunktion, Zs. Phys. **139**, 518—532.
237. Papapetrou A., Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes. I, Math. Nachr. **12**, № 3—4.
238. Papapetrou A., Eine neue Theorie des Gravitationsfeldes. II, Math. Nachr. **12**, № 3—4.
239. Papapetrou A., Urich W., Zur Kohlerschen Formulierung der Gravitationstheorie, Ann. Phys. **14**, 220—232.
240. Pham Man Quan, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **238**, № 3, 324—325.
241. Pounder Y. R., On Relativically Rigid Surfaces of Revolution, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., ser. A, № 11.
242. Rosen N., Bull. Res. Council. Israel 3.
243. Salzman G., Taub A. H., Born-Type Rigid Motion in Relativity, Phys. Rev. **95**, № 6, 1659—1669.
244. Schouten J. A., Ricci-Calculus, Berlin.
245. Takasu T., Equations of Motion a Free Particle in the Author's General Relativity as a Nonholonomic Laguerre Geometry Realized in the Moving Three Dimensional Cartesian Space, Proc. Jap. Acad. **30**, № 9.
246. Takeno H., On Solutions of Electromagnetic Equations in Non-Static Spherically Symmetric Space-Times, Tensor 4, № 1.
247. Taub A. H., General Relativitic Variational Principles for Perfect Fluids, Phys. Rev. **94**, № 6, 146—470.
248. Егоров И. П., Максимальные подвижные римановы пространства непостоянной кривизны, ДАН **103**, № 1.
249. Егоров И. П., О движениях в пространствах аффинной связности, Докторская диссертация, МГУ.
250. Мейстер Г. И. и Папапетру А., О роли координатного условия в выводе уравнений движения общей теории относительности, Бюлл. Польск. АН, отд. III, 3, № 3.
251. Петров А. З., О пространствах максимальной подвижности, определяемых полями тяготения, ДАН **105**, № 5.
252. Рашевский П. К., Теория спиноров, УМН **10**, вып. 2.
253. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии, Гостехиздат.
254. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат.
255. Франкль Ф. И., О корректности постановки задачи Коши и о свойствах гармонических координат в общей теории относительности, Труды физ. мат. ф-та Киргизского ун-та, вып. 3.
256. Широков А. П., Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров, ДАН **102**, № 3.
257. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ.
258. Bochner S., Stationary Space-Time in General Relativity, Math. Ann. **41**, 485—490.
259. Ikeda M., On Static Solutions of Einstein's Generalized Theory of Gravitation, II, Progr. Theor. Phys. **13**, № 3.
260. Ishihara Shigeru, Obata Morio, Proc. Jap. Acad. **31**, № 7, 426—429.
261. Kron G., A Physical Interpretation of the Riemann-Christoffel Curvature Tensor, Tensor 4, № 3.
262. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme, Masson Cie, Paris.

263. Matsumoto T., Sur la déduction axiomatique des formules de Transformation de Lorentz, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **A29**, № 1.
264. Papapetrou A., Urich W., Das Pol-Dipol-Teilschen in der Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feld, Zeitschr. Naturforschung **10A**, 109—117.
265. Storchi E., Su una nuova interpretazione del principii dell'acione potenziale, Bull. Unione Mat. Ital. **10**, № 2.
266. Takeno H., On Conformal Transformations in the Space-Time of Relativistic Cosmology, Tensor 4, № 3.
267. Takeno H., On Groups of Conformal Transformations in Spherically Symmetric Space — Times, Tensor 5, № 1.
268. Егоров И. П., Римановы пространства второй лакунарности, ДАН СССР **III**, 2.
269. Петров А. З., Классификация пространств, определяемых полями тяготения, по группам движений, УМН **11**, вып. 4 (70).
270. Петров А. З., Движения в полях тяготения, Труды III Всесоюзного матем. съезда, т. II.
271. Синюков Н. С., Нормальные геодезические отображения римановых пространств, ДАН **111**, № 4, 766—767.
272. Солодовников А. С., Проективные преобразования римановых пространств, УМН **11**, 4 (70), 45—116.
273. Траутман А., Уравнения Киллинга и законы сохранения, Бюлл. Польск. АН, отд. III, 4, № 10, 671—674.
274. Фок В. А., Замечание к работе Ф. И. Франкля «О корректности постановки задачи Коши и о свойстве гармонических координат в общей теории относительности», УМН **11**, вып. 3.
275. Франкль Ф. И., О корректности постановки задачи Коши и о свойстве гармонических координат в общей теории относительности, УМН **11**, вып. 3.
276. Buchdahl H. A., Reciprocal Static Solutions of the Equations of the Gravitational Field, Austral. Journ. Phys. **9**, № 1.
277. Cehenіau J., Debever R., Les invariants de courbure de l'éspace de Riemann a quatre dimensions, Bull. Acad. Roy. Bélgique **42**, № 2.
278. Mme Fourés-Bruhat Y., Sur l'intégration des équations de la rélativité générale, Journ. Rat. Mech. und Anal. **5**, № 6.
279. Mikhail F. Y., Solutions of Einstein's Field Equations for Empty Space, A'in Shams Bull., № 1, 125—135.
280. Narlikar V. V., Results of Gravitational Significance in Riemannian Geometry, Nature **177**, № 4520.
281. Pirani F. A. E., On the Physical Significance of the Riemann Tensor, Acta Physica Polonica **25**, fasc. 6.
282. Takeno H., On the Theory of Gravitational Waves, Tensor 6, № 1.
283. Verma D. N., Roy S. R., Special Metric Forms and their Gravitational Significance, Bull. Calcutta Math. Soc. **48**, № 3.
284. Yust K., Strenge Kugelsymmetrische Lösungen Einsteinschen Feld Gleichungen, Zs. Phys. **34**, № 2, 235—240.

1957

285. Айтмурзаев Т., Метод решения уравнений неустановившегося течения газа с учетом диссипативных процессов в общей теории относительности, ДАН **113**, № 4.
286. Керес Х., О понятии инерциальной системы в общей теории относительности, сб. «Исследования по теоретической физике», Тарту.
287. Керес Х., Некоторые вопросы общей теории относительности, сб. «Исследования по теоретической физике», Тарту.

288. Кручкович Г. И., О движениях в римановых пространствах, Матем. сб. **41** (83): 2.
289. Кручкович Г. И., О движениях в полуприводимых римановых пространствах, УФН **12**, вып. 6 (78).
290. Петров А. З., Пространства, определяемые полями тяготения, Докторская диссертация, МГУ.
291. Петров П. И., Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы, ДАН **113**, № 6.
292. Синюков Н. С., Эквидистантные римановы пространства, Научн. ежегодн. одесск. ун-та.
293. Яно К. и Бохнер С., Кривизна и числа Бетти, ИЛ.
294. Bondi H., Plane Gravitational Waves in General Relativity, Nature **179**, 1072—1073.
295. Bondi H., Negative Mass in General Relativity, Rev. Mod. Phys. **20**, № 3.
296. Conference on the Role of Gravitation in Physics, Carolina.
297. Geheniau J., Une classification de éspaces Einsteiniens, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **244**, № 6.
298. Hiramatu Kitasi, Journ. Math. Soc. Jap. **9**, № 1, 114—130.
299. Joseph V., Physical Properties of some Empty Space — Times, Proc. Cambr. Phys. Soc. **53**, 836.
300. Marder L., On the Existence of Cylindrical Gravitational Waves, London King's College, Тезисы докторской диссертации, pre-print; см. также: Proc. Lond. Math. Soc. **A244** (1958).
301. Papapetrou A., Le probleme du mouvement dans la relativité générale et dans la théorie du champ urifié d'Einstein, Ann. Inst. Henri Poincaré **15**, 173—203.
302. Papapetrou A., Eine neue Formulierung in der Relativitätstheorie, Schriften d. Forsch. Inst. f. Mathematik b. d. Deutschen Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, № 1, 210—221.
303. Papapetrou A., Über periodische nichtsinguläre Lösungen in der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Phys. **6F20**, № 7—8.
304. Pham Man Quan, Inductions électromagnetiques dans un millieu anisotrope relativiste, Comrt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **245**, № 21.
305. Pham Man Quan, Inductions électromagnetiques en relativité générale et principe de Fermat, Acch. Art. Mech. and Anal. **1**, 54—86.
306. Pirani F. A. E., Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory, Phys. Rev. **105**, № 3, 1089—1099.
307. Pirani F. A. E., Tetrad Formulation of General Relativity Theory, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Cl. **III**, 5, № 2, 143—146.
308. Takeno H., On Plane Wave Solutions of Field Equations in General Relativity, Tensor 7, № 2, 97—102.
309. Taub A. H., Singular Hypersurfaces in General Relativity, Illinois Journ. Math. **1**, № 3, 370—388.
310. Taub A. H., Approximate Solutions of the Einstein Equations for Isentropic Motions of Plane Symmetric Distributions of Perfect Fluids, Phys. Rev. **107**, № 3, 884—900.
311. Trautman A., On the Conservation Theorems and Coordinate Systems in General Relativity, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Cl. **III**, 5, № 7, 721—727.
312. Trautman A., Discontinuities of Field Derivatives and Radiation in Covariant Theories, Bull. Acad. polon. Sci., Cl. **III**, 5, № 3, 273—274.
313. Treder H., Stromladungsdefinition und elektrische Kraft in der Feldtheorie, Ann. Phys. 19, 369—380.
314. Yano K., Nagano T., Einstein Spaces Admitting a One-parameter Group of Conformal Transformations, Ann. Math. **69**, № 2, 451—461.

1958

315. Брумберг В. А., Уравнения движения и координатные условия в релятивистской задаче тел, Астр. журн. **35**, № 6, 839—903.
316. Гу Чао-хао, О некоторых типах однородных римановых пространств, ДАН **122**, № 2.
317. Петров П. И., Поправка к статье «Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы», ДАН **119**, № 5.
318. Петров А. З., Классификация полей тяготения общего вида, Изв. вузов, Матем., № 6 (7).
319. Пугачев Я. И., Дифференциальные тождества и разрешимость уравнений Эйлера — Лагранжа, Труды Краснодарск. ин-та пищев. пром., вып. 20, 55—57.
320. Тодоров И. Т., Об одной теореме единственности для волнового уравнения (к дискуссии В. А. Фок — Ф. И. Франкль), УМН **13**, вып. 2.
321. Bel L., Sur la radiation gravitationelle, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **247**, № 18, 1044—1046.
322. Bel L., Etude algébrique d'un certain type de tenseurs de courbure. Le cas 3 de Petrov, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **247**, № 27, 2096—2099.
323. Bel L., Définition d'une densité d'énergie et d'un état de radiation totale généralisée, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246**, 3015—3018.
324. Cattaneo C., Sui postulati comuni della cinematica classica e della cinematica relativistica, Atti Accad. Naz. Lincei Rend, Cl. sci. fis., mat. e natur. **24**, № 5, 526—532.
325. Eisenhart L. P., Spaces for which the Ricci Scalar Ris Equal to Zero, Proc. Acad. Nat. Sci. USA **44**, № 7, 195—648.
326. Mme Fourés-Bruhat Y., La relativité générale, Semin, méc. analyt. et méc. céleste, M. Janet. Fac. Sci., Paris 1957—1958. **I**. Année, Paris.
327. Geiszlerund D., Treder H., Über ebene Wellen in der allgemeinen Relativitätstheorie, Tensor 8, 165—168.
328. Hlavaty V., The Structure of our Space, Aeronautical Engineering, Review, April.
329. Israel W., Discontinuities in the Spherivally Symmetric Gravitational Fields and Shells of Radiation, Proc. Roy. Soc., ser. A, **248**, 404—414.
330. Joseph V., On Apparent Luminosity in General Relativity, Month. Nat. Roy. Astr. Soc. **118**, № 6.
331. Knebelman M. J., Homothetic Mappings of Riemann Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, № 6.
332. Kundt W., Methoden zur Charakterisierung von Lösungen der Einsteinschen Gravitations feldgleichungen, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (preprint), Universität Hamburg.
333. O'Raifearteign L., Synge J. L., A Property of the Empty Space — Time, Proc. Roy. Soc., ser. A, **246**, 299—300.
334. Papapetrou A., Über periodische gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Phys. **7F, 1**, № 4—5.
335. Papapetrou A., Über zeitabhängige Lösungen der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Phys. **7F, 2**, № 3—4.
336. Pham Tan Huang, La méthode des singularités pour les équations du mouvement en relativité générale et en theorie du champ unifié, Ann, Schola norm. super. Pisa, Sci. fis. e mat. **12**, № 4, 425—477.
337. Synge J. L., Whittaker's Contributions to the Theory of Relativity, Proc. Math. Soc. **11**, part 1, June.
338. Takeno H., On Plane Wave Solutions of the Field Equations in General Relativity, 11, Tenzor 8, № 1.
339. Treder H., Stoszwellen des Gravitationsfelds, Ann. Phys., **7F, 2**, № 5—6.
340. Trautman A., Sur la propagation des discontinuies du tenseur de Riemann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246**.

341. Trautman A., Lectures on the General Relativity, preprint, King's College, London.
342. Trautman A. i Tulczyjew W., Gravitacja i niezmélnniczosc, Postepy Fizyki **9**, 1.
343. Trautman A., Radiation and Boundary Conditions in the Theory of Gravitation, Bull. Acad. Polon. Sci. **6**, № 6.
344. Trautman A., Boundary Conditions at Infinity for Physical Theories, Bull. Acad. Polon. Sci. **6**, № 6.
345. Trautman A., Sur la propagation des discontinuites du tenseur de Riemann, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246**, 1500—1502.

1959

346. Айтикеева З. А. и Петрова Н. М., О системе сферически симметрических тел в общей теории относительности, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 209—228.
347. Александров А. Д., Философское содержание и значение теории относительности, Вопросы философии, № 1.
348. Вавилов Б. Т., О слабых полях гравитации, Изв. вузов, Физика, № 2.
349. Иосифьян А. Г., Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциального полей, Изд. АН Арм. ССР, Ереван.
350. Мицкевич Н. В., Вакуумный нелинейный эффект в теории гравитации, ЖЭТФ **36**, вып. 4, 1207—1214.
351. Мурзагалиев Г., Тензоры момента импульса (кинетического момента) и моменты силы в релятивистской механике, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 229—236.
352. Норден А. П., Вишневский В. В., О комплексном представлении инвариантов четырехмерного риманова пространства, Изв. вузов, Матем., № 2 (9).
353. Норден А. П., О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца, Изв. вузов, Матем., № 1 (8).
354. Петрова Н. М., О законах сохранения для системы вращающихся тел в общей теории относительности, Тематический сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности», Алма-Ата, Казахск. ун-т, 192—208.
355. Петров А. З., О симметрических полях тяготения, Изв. вузов, Матем., № 2 (9).
356. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений. I, Изв. вузов, Матем., № 6, 118—130.
357. Araki H., On Weak Time — Symmetric Gravitational Waves, Ann. Phys. **7**, 456—465.
358. Arnowitt R., Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Linearized Theory, Phys. Rev. **113**, № 2, 745—750.
359. Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., Dynamical Structure and Definition of the Energy in General Relativity (preprint), Depart. of Physics Syracusa University.
360. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity (preprint).
361. Bel L., Indtroduction d'un tenseur du quatrieme ordre, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **248**, 1297—1300.
362. Bel L., Quelques remarques sur la Classification de Petrov. Etude du cas 2, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **248**, 2561—2563.
363. Bergman P. G., Summary of the «Colloque international de Royaumont» (preprint), Syracusa University.

364. Bondi H., Pirani F. A. E., Robinson I., Gravitational Waves in General Relativity. III, Exact Plane Waves, Proc. Roy. Soc. **A251**, 519—553.
365. Brill D. R., On the Positive Definite Mass of the Bondi — Weber — Wheeler Time — Symmetric Gravitational Waves, Ann. Phys. **7**, № **4**, 466—483.
366. Debever R., Tenseur de super-énergie, tenseur de Riemann: Cas singuliers, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **249**, 1744—1746.
367. Debever R., Sur le tenseur de super-énergie, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **249**, 1324—1326.
368. Miss Durga Roy, Resistance on a Circular Cylindre Due to any Number of Vortices Lying in Two Rows, Journ. Appl. Math. and Phys. **10**, 5, 502—508.
369. Geiszler D., Papapetrou A. und Treder H., Die Gravitationstrahlung eines Zeitweilig nichtstationären Systems, Ann. Phys. **2**, 344—350.
370. Harrison B. K., Exact Three Variable Solutions of the Field Equations of General Relativity, Phys. Rev. **116**, № 5, 1285.
371. Hlavaty V., The Holonomy Group. I. The Curvature Tensor, Journ. Math. and Mech. **8**, 2—59, 285—308.
372. Hlavaty V., The Holonomy Group. II. The Lie Group Induced by a Tensor, Journ. Math. and Mech **8**, 597—622.
373. Hlavaty V., The Holonomy Group. III. Covariant Constant Quadratic Tensors, Journ. Math. and Mech.
374. Hlavaty V., The Holonomy Group, IV. The General with Symmetric Connection, Journ. Math. and Mech.
375. Ikeda M., Miyachi Y., Coordinate Systems in General Relativity and Geometrical Representation for Physical Quantities, Progr. Theor. Phys., № 9, 45—68.
376. Mast C. B., Strathdee J., On the Relativistic Interpretation of Astronomical Observations, Proc. Roy. Soc. **A252**, 476—487.
377. Newman D. J., Kilmister C. W., A new Expression for Einstein's Law of Gravitation, Proc. Cambr. Phil. Soc. **55**, № 1, 139—141.
378. Papapetrou A. und Treder H., Das Sprungproblem erster Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie, Math. Nachr. **20**, 53—66.
379. Pirani F. A. E., Gravitational Waves in General Relativity, IV. The Gravitational Field of a Fast-Moving Particle, Proc. Roy. Soc. **A252**, 96—101.
380. Sachs R. K., A Covariant Integral Conservation Law in Vacuum Gravitational Fields of Tupe III (preprint), Hamburg University.
381. Synge T. L., A Theory of Elasticity in General Relativity, Math. Zs. **72**, 82—87.
382. Takasu T., Ein Seitenstück der Relativitätstheorie als eine erweiterte Laguerresche Geometrie, Proc. Jap. Acad. **35**, № 2.
383. Takasu T., Adjusted Relativity Theory: Applications of Extended Euclidian Geometry, Extended Equiform Geometry and Extended Laguerre Geometry of Physics, Journ. Yokohama University, ser. D (Math.).
384. Takeno H., A Note on the Theory of the Gravitational Waves, Tensor 9, № 2, 73—75.
385. Takeno H., On Geometric Properties of some Plane Wave Solutions in General Relativity. I, Tensor (new series) 9, № 2, 79—93.
386. Takeno H., On Geometric Properties of some Plane Wave Solutions in General Relativity. II, Tensor 9, № 3, 168—174.
387. Taub A. H., Small Motions of Spherically Symmetric Distribution of Matter, Illinois University (preprint).

1960

388. Гейдельман Р. М., Конформная теория двупараметрических семейств сфер, ДАН СССР **138**, № 4.
389. Дружкин Л. А., К вопросу о структуре фотона и о красном смещении, Уч. записки Новг. гос. пед. ин-та **1**, № 1.
390. Левашев А. Е., Теория лоренцевой связности при релятивистском движении, Автореферат докторской диссертации.
391. Лифшиц Е. М. и Халатников И. М., Об особенностях космологических решений уравнений гравитации. I, ЖЭТФ **39**, вып. 1.
392. Лифшиц Е. М. и Халатников И. М., Об особенностях космологических решений уравнений гравитации. II, ЖЭТФ **39**, вып. 3.
393. Новиков Н. Д., О псевдотензоре энергии — импульса гравитационного поля, Вестник МГУ, № 2.
394. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений. II, Изв. вузов, Матем., № 1.
395. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений. III, Изв. вузов, Матем., № 4.
396. Петров А. З., В. И. Ленин о пространстве и времени и общая теория относительности, Доклад на юбилейной сессии в Ленинграде в апреле 1960 г., 119—129.
397. Рыжиков В. В., О тангенциально вырожденных поверхностях, ДАН СССР **135**, № 1.
398. Скрипкин В. А., Точечный взрыв в идеальной жидкости в общей теории относительности, ДАН СССР **135**, № 5.
399. Скрипкин В. А., Разрывные центрально-симметрические движения ультрарелятивистского газа в общей теории относительности, П. М. Т. Ф., № 4.
400. Соколов А. А., Парадокс часов при движении заряженных частиц в магнитном поле, ДАН СССР **131**, № 1.
401. Фок В. А., Эйнштейнова статика в конформном пространстве, ЖЭТФ **38**.
402. Черников Н. А., Приведение релятивистского интеграла столкновений к форме Больцмана, ДАН СССР **133**, № 1.
403. Черников Н. А., Релятивистское кинетическое уравнение и равновесное состояние газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле, ДАН СССР **133**, № 2.
404. Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W., Interior Schwarzschild Solutions and Interpretation of Source Terms, preprint, Dep. of Phys., Bronders Univ., Waltham, Mussachysetts.
405. Das A. Birkhoff's theorem for electromagnetic fields in General relativity Progr. Theor. Phys. **24**, № 4.
406. Das A., Cellular space-time and quantum field theory. H. Nuovo Cimento, ser. X, **18**, 482—504.
407. Debever R., Tenseur de super-energie et composantes irreductibles du tenseur de Riemann. Seance du 4 Janvier.
408. Cheorgiev, Geometrische Betrachtungen bei nichtstationären Bewegungen von Flüssigkeiten.
409. Hlavaty V., Proper Time, Apparent Time and Formal Time in the Twin Paradox, Journ. Math. and Mech. **9**, № 5.
410. Hlavaty V., Apereu General de la Thiorie du Champ Unifie D'Einstein
411. Hlavaty V., An almost complex space of order p and characteristic $(n, \ldots, n)$, The Tensor, New Series, **10**, № 2, 90—124.
412. Hlavaty V., Rigid motion in a Riemannian space V_n II. A regular V_n, Rendiconti del Circolo Matematico S. II — T. IX.

413. H l a v a t y V., Rigid motion in a Riemannian space V_n I, A recurrent V_n. Rendic. del Circolo, S. II — T. IX.
414. H o f f m a n B., On Yilmaz new approach to General relativity, Journ. Math. and Mech. **9**, № 3, 445—452.
415. I k e d a, M i n e o and A b e, S h i n g o, On yroups of motions in space-time with a non-symmetric fundamental tensor Gnv, I. The Tensor, New Series **10**, № 1, 26—33.
416. I k e d a R. P., On the guasi-static approximation in General relativity, Nuovo Cim., ser. X, **16**, 26—60.
417. I n f e l d L., A new form of the Geodesic line equation. Bull. de l'Acad. Polon. des sciences. Serie des sciences math., astr. et phys. **VIII**, № 8.
418. I n f e l d L., The EIH and the K — approximation methods. Bull, de l'Acad. Polon. des Sciences. Serie des sciences math., astr. et phys. **IX**, № 2.
419. I o r d a n P., E h l e r s J. und K u n d t W., Strenge Losüngen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, Abh. Math.-Mat., 2.
420. K e r r R. P., On the Quasi-Static approximation in general relativity, Nuovo Cim., ser. X, **16**, 26—60.
421. L e n o i r M., Sur les solutions at symetrie spherique de la theorie du champ unifie. Acad. des sc., scance du 8 fev.
422. L e-T h a n h-P h o n g, Vecteur de Poynting en relativite generale, Seance du 8 fev.
423. P a p a p e t r o u A., Periodische Lözungen in der Einheitlichen Feldtheorie mit nichtsymmetrischen $g_{\mu\nu}$, Veb. Deutscher verlag der Wissenschaften.
424. P a p a p e t r o u und T r e d e r, Zur Frage der Existenz von singularitätsfrein Lösungen der allgemein — relativistischen Feldgleichungen, die Feilchenmodelle darstellen Könnten. II. Ann. Phys., Bd. 6, Heft. 5—6.
425. P e n r o s e R., A Spinor Approach to General Relativity, King's College, preprint.
426. P e r e s A., Null Electromagnetic Fields in General Relativity Theory, Inst. of Technology, Haifa.
427. P e r e s A., Gauge Covariance of Spinor Geometry, Inst. of Technology, Haifa.
428. P e r e s A., On Geometrodynamics and Null Fields, Inst. of Technology, Haifa.
429. P i r a n i F. A. E., Introduction to the Concepts of gravitational radiation theory, ARL Technical Note, 60—143.
430. P i r a n i F. A. E., Survey of gravitational radiation theory, King's College, London.
431. P i r a n i F. A. E., A note on Fermi coordinates, Royal Irech. Acad., **61**, Sect. A, № 2.
432. R o y, D u r g a, A special solution in viscons fluid Motion, The minuteo of proceedings, Royal Irech Acad., 9 May.
433. S h i b a t a, T a k a s h i, Geometrical definition of plane gravitational waves in General relativity, Memoirs of the Faculty of Engineering Hiroshima Univ. **1**, № 3.
434. S m o r o d i n s k i J. I., Der gegenwärtige Stand der Theorie des β-Zerfalls, Fortsch. Phys. **8**, 426—491.
435. S o e r g e l-F a b r i c u i s, C h a r l o t t e, Thirring — Effect im Einsteinkosmos, Zs. Phys. **159**, 541—553.
436. S y n g e J. L., Optical observations in general relativity, Rend. del Seminaric Mat. e Fis. di Milano **XXX**.
437. T a k a s u, T s u r u s a b u r o, Four transverse masses and a quaternary in the relativistic physics and a ternery in the classical physics, The Jokohama Math. Journ. **VIII**,

438. Takasu, Tsurusaburo, Extend conformalggeometry obtained by extending the group parameters to coordinates. I, The Jokohama Math. Journ. **VIII.**
439. Takeno, Hyôitiro, On the theory of gravitational waves in general relativity, The tensor, new series **10,** № 1, 14—46.
440. Takeno, Hyôitiro, On geometric properties of some plane wave Solutions in general relativity. III, The tensor, new series **10,** № 1, 47—60.
441. Takeno H., On the Theory of Gravitational Waves in General Relativity, preprint, to be published in Tensor 10.
442. Terletsky J. P., Le principe de causalite et le second pricipe de la termodynamique, Journ Phys. Rad. **21,** № 10.
443. Terletsky J. P., Sur la theorie statistique des champs non lineaires, Journ. Phys. Rad. **21,** 771.
444. Treder H., Über die allgemeine Form der Fortpflanzungsgesetze der Stoßwellen des Gravitationsfelds, Ann. Phys. **7,** Zolge, Bd. 6, Heft 5—6.
445. Winogradzki J., Formalisme tensoriel et spinoriel incluant les parites, Journ. Phys. Rad. **21,** 835.
446. Vescan T. T., Processes of microcosm and unified field theories, Annlele Stiintifice ale Universitâtti, Al. J. Cuza, din iasi. **VI.**
447. Vrânceanu G., Reducerea le formâ a unei forme pâtratice prin transformâri iperbolice, Anal. Univ. C. L. Parhon. Ser. mat, fis., № 25.
448. Брагинский В. Б. и Рукман Г. И., Регистрация и измерение электрических сигналов малой мощности, Вестник МГУ, сер. физ., № 3.
449. Вавилов Б. Т., К вопросу об угловом распределении в множественных процессах, ДАН СССР **137,** № 1.
450. Герценштейн М. Е., О законах сохранения в общей теории относительности, ЖЭТФ **40,** № 1.
451. Герценштейн М. Е., Волновой резонанс световых и гравитационных волн, ЖЭТФ **41,** № 1, 113—114.
452. Зельдович Я. Б. и Смородинский Я. А., О верхнем пределе плотности нейтрино, гравитонов и барионов во вселенной, ЖЭТФ **41,** вып. 3 (9).
453. Каган В. Ф., Субпроективные пространства, Физматгиз.
454. Кручкович Г. И., Об одном классе римановых пространств, Труды сем. по вект. и тенз. анализу **XI.**
455. Кручкович Г. И., О пространствах В. Ф. Кагана, Прил. к кн. В. Ф. Кагана «Субпроективные пространства», Физматгиз.
456. Лифшиц Е. М., Халатников И. М., Судаков В. В., Об особенностях космологических решений уравнений гравитации. III, ЖЭТФ **40,** № 6.
457. Мак-Витти Г., Общая теория относительности и космология, ИЛ (McVittie G. C. «General Relativity and Cosmology», London, 1956).
458. Мицкевич Н. В., О трансформационных свойствах некоторых физических величин в общей теории относительности, Докл. Болг. АН **4,** № 5.
459. Новиков Н. Д., Свойства кривизны сопутствующего пространства некоторых космологических моделей, рассматриваемых в квазиньютоновском приближении, Астр. журн., № 5.
460. Новиков Н. Д., К вопросу о пространственно-временной метрике внутри сингулярной сферы Шварцшильда, Астр. журн., № 3.
461. Петров А. З., О геодезическом отображении пространств Эйнштейна, Изв. вузов, Матем., № 2, 130—136.
462. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, Физматгиз.
463. Радзиевский В. В., Два наклономера для измерения гравитационного эффекта, Бюлл. Всесоюзн. астрон. о-ва, № 31 (39).

464. Радзиевский В. В. и Гиммельфарб Б. Н., О мнимых парадоксах астрономической аберрации, Бюлл. Всесоюзн. астр.-геод. о-ва, № 31 (38).
465. Рылов Ю., Об особенности в решении Шварцшильда для уравнений тяготения, ЖЭТФ **40**, № 6, 1755—1757.
466. Синюков Н. С., Об инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими, ДАН СССР **137**, № 6, 1312—1314.
467. Скрипкин В. А., Разрывные центрально-симметрические движения ультрарелятивистского газа в общей теории относительности, АН СССР, Астр. журн. **XXXVIII**, вып. 1.
468. Скрипкин В. А., Об одном точном решении уравнений одномерной релятивистской гидродинамики со скачком преобразования остаточной массы вещества, ДАН СССР **138**, № 1.
469. Скрипкин В. А., Об одном классе автомодельных движений ультрарелятивистского газа, ДАН СССР **136**.
470. Скрипкин В. А., Задачи релятивистской гидродинамики с центральной симметрией, Автореферат кандидатской диссертации, МГУ.
471. Солодовников А. С., Римановы пространства с общими геодезическими, МГУ.
472. Станюкович К. П., Об излучении гравитационных волн элементарными частицами, Вестник МГУ, № 5.
473. Фок В. А., О роли принципов относительности и эквивалентности в теории тяготения Эйнштейна, Вопросы философии, № 12, 45—52.

1961

474. Bergmann P. G., Observables in General Relativity Rev. Mod. Phys. **33**, № **4**, 510—514.
475. Bergmann P. G., «Guage — Invariant» variables in general relativity, Phys. Rev. **124**, № 1, 274—278.
476. Bondi H., On the reception of electromagnetic waves, Proc. the Roy. Soc. **A261**, 1—9.
477. Bondi H., Gravitational waves, Endeavour, **XX**, № 79, 121—130.
478. Bondi H., Research program in relativity physics, ARL **16**, May.
479. Capella A., Sur la guantification de la superenergie du champ de gravitation, C. r. Acad. Sci. **252**, № 25, 3940—3942.
480. Cospar, Abstracts of scientifice papers by U. S. Participants, Cospar Meeting, Italy.
481. Das A., Florides P. S., Synge J. L., Stationary weak gravitational fields to any order of approximation, Proc, Roy. Soc. **A263**, 451—472.
482. Dicke R., Ar eöfvös-kisérlet és a gravitacios vörös-eltolodas, Mogyar fiz folyoirat **9**, № 3, 209—215.
483. Djuric J., Gravitational fields, PJRE **49**, № 11.
484. Djuric J., The gh-field theory, PJRE **49**, № 11.
485. Fletcher J. G., Initial value date for Poisson brackets in general relativity, Ann. Phys. (USA) **12**, № 2, 283—294.
486. Hlavaty V., Einstein — Maxwell Fields, Journ. Math. **XV**, Fasc. 1.
487. Hlavaty V., The Holonomy group *V*. Veyl space *W*, First Part., Journ. Math. and Mech. **10**, № 2.
488. Hoffman B., Noon-Midnight Red Shift, The Phys. Rev. **121**, № 1, 337—342.
489. Infeld L., On the most Cartesian-like coordinate system, Bull. de l'Acad. Polon. des Sciences. Serie des sciences, math., astr. et phys. **IX**, № 4.
490. Jordan P., The mathematical theory of quasi order, semigroups of idempotents and noncommutative lattices — a new field of modern algebra, Final Report.

491. Kerr R. P. and Goldberg, Some applications of the infinitesimal — holonomy group to the Petrov classification of Einstein Spaces, Journ. Math. Phys. **2**, № 3, 327—332.
492. Kerr R. P. and Goldberg J. N., Einstein spaces with fourparameter holonomy groups, Journ. Math. Phys. **2**, № 3, 332—336.
493. Kilmister C. W., Newtonian models for general relativity, 5, July.
494. Komar A., Positive-definite energy density and global consequences for general relativity, Syracuse Univ.
495. Krywoblozki M., On the general form of the special theory of relativity. II, Acta phys. ausfriaca **14**, № 1, 22—28.
496. Kraus K„ Über die Energie — Impuls Objekte des Gravitations feldes, Zs. Phys. **163**, № 2, 240—244.
497. Kundt W., The plane-fronted gravitational waves, Zs. Phys. **163**, № 1, 77—86.
498. Lichnerovicz A., Anticommutateuv du champ spinorielen relativity generale, C. r. Acad. Sci. **252**, № 24, 3742—3744.
499. National Academy of sciences, Science, 28 April.
500. Newmann E., Some properties of empty space-time, Journ. Math. Phys. **2**, № 3, 324—327.
501. Pandya J. M., Vaidya P. C., Wave solutions in general relativity. I, Proc. Nat. Inst. Sci., India **A27**, № 6, 620—624.
502. Papapetrou und Treder, Das Sprungroblem nullter Ordnung in der allgemeinen Relativitätstheorie, Math. Nachr. 23 Band, Heft. 6.
503. Peres A., Electromagnetic Radiation from a Freely Gravitating Charge, Dep. of Phys., Israel Inst. of Technology, Haifa.
504. Peres A., Gauge covariance of spinor geometry, Nuovo cim. **21**, № 1, 182—183.
505. Petros S., Florides, Applications of Moller's theory on energy and its locatization in general relativity, Proc. Cambr. Phil. Soc., № 58, part I, 102—109.
506. Petros S., Florides, The Electromagnetic energy and the Gravitational Mass of a Charged particle in General Relativity, Proc. Cambr. Phil. Soc., № 58, part I, 110—118.
507. Plebanski J., Ryten J., Coordinate conditions, Journ Math. Phys. **2**, № 5, 677—681.
508. Pirani F. A. E. and Schild, Geometrical and physical interpretation of the Weyl Conformal curvature tensor, I May, preprint.
509. Rayski J., Conservation laws in general relativity, Bull. Acad. Polon. Sci. math., astron. et phys. **9**, № 1, 33—37.
510. Regge T., General relativity without coordinates, Nuovo cim. **19**, № 3, 558—571.
511. Rindler W., Length contraction paradox, Amer. Journ. Phys. **29**, № 6, 365—366.
512. Schell Joseph F., A classification of fourdimensional Riemannian Spaces, Journ. Math. Phys. **2**, № 2, 202—206.
513. Schiff L., Ac oltalanos relativitaselmelet kiserlete iqazolasarol, Madyar fiz. tolyoivat **9**, № 3, 201—208.
514. Synge J. L., How to pass to an exact solution of Einstein's Vacuum field equations, starting from a linear approximation, Proc. Rou. Irish Acad. **61**, Sec. A, № 5.
515. Synge J. L., On a certain non-linear differential equation. Proc. Rou. Irish Acad. **62**, Sec. A, № 3.
516. Takeno H., Some plane wave-like solutions of non-symmetric unified field theory, Tensor **11**, № 3, 263—269.
517. Tauber G., Weinberg J., Internal state of a gravitating gas, Phys. Rev. **122**, № 4, 1342—1365.

518. Tonelat M.-A., Theorie euclidienne du champ de gravitation, Energie gravitationalle, C. r. Acad. Sci. **253**, № 22, 2475—2477.
519. Treder H., Zur Roll der Planckschen Elementarläge in Diracs Quanten theorie des Gravitations felds, D. A. W. Berlin.
520. Treder H., Uber eine einheitliche fold theorie mit symmetrischer affinität, Tensor **11**, № 1, 1—5.
521. Weber J., General relativity and gravitational waves, New York.

1962

522. Абакиров Б. Группы гомотетических движений H_r ($r \leq 3$) в четырехмерных римановых пространствах, АН Кирг. ССР, Иссл. по интегр.-диф. уравн. в Киргизии, вып. II, Фрунзе.
523. Билялов Р. Ф., Об обобщении одной теоремы для групп движений на случай групп конформных преобразований, Тезисы доклада на итоговой научной аспирантской конф. за 1962 г., стр. 96—1000.
524. Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И., К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот, ЖЭТФ **43**, № 2, 605—607.
525. Голиков В. И., О движении пробных частиц в общей теории относительности. Тезисы доклада на итоговой научной аспирантской конф. за 1962 г., стр. 100—103.
526. Голиков В. И., О проективных преобразованиях пространств Эйнштейна, Сб. аспирантских работ (точные науки), Изд. КГУ, Казань, 15—22.
527. Гутман Н. И., Общековариантный метод последовательных приближений в общей теории относительности, Автореферат кандидатской диссертации АН Узб. ССР.
528. Егоров И. П., Движения и гомотетии в римановых пространствах, Труды 2-й научн. конф. Пед. ин-та Поволжья, вып. 1, Куйбышев.
529. Егоров И. П., Максимально-подвижные эйнштейновы пространства не постоянной кривизны, ДАН СССР **145**, № 5.
530. Кайгородов В. Р., Пространства Эйнштейна максимальной подвижности, ДАН СССР **146**, № 4.
531. Кайгородов В. Р., О движениях в пространствах Эйнштейна, Тезисы доклада на итоговой научной аспирантской конф. за 1962 г., КГУ, стр. 89—92.
532. Липатов Н. С., Классификация непростых полей тяготения по группам гомотетических движений, Уч. зап. Горьковского пед. ин-та, вып. 1, 67—76.
533. Липатов Н. С., Классификация простых полей тяготения по группам гомотетических движений ($r \geq 4$), Труды 2-й научн. конф. Пед. ин-та Поволжья, вып. 1, Куйбышев.
534. Мицкевич Н. В., Приближение слабого гравитационного поля и некоторые общерелятивистские уравнения полей, Труды унив., вып. 117, 33—40.
535. Моисеев С. С., О влиянии релятивистских эффектов на кинетику разреженной плазмы, Автореферат кандидатской диссертации, Сиб. отд. АН СССР.
536. Петров А. З., Современная дифференциальная геометрия и общая теория относительности, Доклад на Всесоюзной геометр. конф., Киев.
537. Петров А. З., Кайгородов В. Р., Абдуллин В. Н., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений, IV, Изв. вузов, Матем., № 1.
538. Пустовойт В. И. и Герценштейн М. Е., Гравитационное излучение релятивистской частицы, ЖЭТФ **42**, вып. 1, стр. 163—170.

539. Рылов Ю. А., Об относительной энергии статического центрально-симметрического гравитационного поля, Вестник МГУ, № 6, 45—55.
540. Селезнев С., О движении пробных частиц в поле тяготения, Тезисы доклада на студ. научной конф. КГУ.
541. Станюкович К. П., Взаимодействие тел, излучающих гравитационные волны, Вестник МГУ, № 1.
542. Стусяк П. Л., К вопросу о причине зависимости массы от скорости ее движения.
543. Тагиров Э. А., О скалярном поле, допускающем группу движений, Тезисы доклада на итоговой научной аспирантской конф. за 1962 г., КГУ, стр. 103—107.
544. Терлецкий Я. П., Положительные, отрицательные и мнимые собственные массы, Дополнение к конспекту лекций спецкурса по теории относит., прочитанного в 1962 г., Москва.
545. Федоров Р. И., О композиции параметров группы Лоренца, ДАН СССР **143**, № 1.
546. Черников Н. А., Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле, ДАН СССР **144**, № 1, 89—92.
547. Черников Н. А., Вектор потока и тензор массы релятивистского идеального газа, ДАН СССР, № 2, 314—317.
548. Черников Н. А., Релятивистское распределение Максвелла — Больцмана и интегральные формы законов сохранения, ДАН СССР **144**, № 3, 544—547.
549. Bel M., La radiation gravitationelle, Colloq. internat. Centre not. rech. scient., № 91, 119—126.
550. Belinfante, Garrison, On the uniqueness of Fock's harmonic coordinate systems in the presence of static, sperically symmetric sources, Phys. Rev. **125**, № 3, 1124—1130.
551. Bergmann P. G., Asymptotic Properties of Gravitating Systems, Syracuse Univ., New York, USA.
552. Bondi H., Relativity and Cosmology, Recent Developments in General Relativity, Pergam. Press, PWN.
553. Bondi H., On the physical characteristics of gravitational waves, Colloq. internat. Centre not. rech. scient., № 91, 129—134.
554. Bonnor W. B., On Birkhoff's theorem, Recent Develop. in Gen. Relativ., Warszawa, PWN; Oxford — London — New York — Paris, Pergam. Press, 167—169.
555. Bulletin on General Relativity and Gravitation, № 1, April.
556. Das A., A class of exact solutions of certain classical field equations in general relativity, Proc. Roy. Soc. **A267**, 1—10.
557. Dautcourt G., Papapetrou A., Treder H., Eindimensionable Gravitationsfelder, Ann. Phys. **9**, № 5, 6.
558. Dirac P. A. M., Interacting gravitational and spinor fields, Recent Develop. in Gen. Relativ., Warszawa, PWN Oxford — London — New York — Paris, Pergam Press, 191—200.
559. Dirac P. A. M., The energy of the gravitational field, Colloq. internat. Centre not. rech. scient., № 91, 385—394.
560. Dirac P. A. M., The Motion of an Extended Particle in the Gravitational Field, Тез. докл. на Варш. конф.
561. Ginzburg V. L., Experimental verifications of the General theory of relativity, USSR Academy of Sciences, Moscow.
562. Goldberg J. N., Dinamical variables and surface intergrals. Pergam. Press — PWN.
563. Havos P., General relativity and the special relativistic equations of motion of particles, Recent Develop. in Gen. Relativ., Warszawa, PWN; Oxford — London — New York — Paris, Pergam. Press, 259—277.

564. Hlavaty, The holonomy group VI, Weyl Space, Second party, Journ. Math. and Mech. **11**, № 1, 35—60.
565. Kerr P., Scalar invariants and groups of motions in a V_n with positive definite metric tensor, The tensor, New Series, **12**, № 1, 74—83.
566. Kundt W., Thompson A., Le tenseur de Weyl et une congruence associee de geodesiques isotropes saus distorsion, C. r. Acad. Sci. **254**, № 25, 4257—4259.
567. Lancos C., The splitting of the Rieman tensor, Rev. Mod. Phys. **34**, № 3, 379—389.
568. Lichnerowicz A., Propagateurs et Quantification en Relativite Generale, College de France, Paris.
569. Majumdor S. Datta, Wave equations in curved space-time, Phys. Rev. **126** № 6, 2227—2230.
570. Mavrides Stamatia, Modeles cosmologiques en relativite, Semin. mec. anolyt. et. mec. celeste M. Janet. Fac. sci., Paris, 4/1—4/38.
571. Newman E., Tamburino L., Unti T., Curling geodesic rays with vanishing shear, Univ. of Fittsbourgh, preprint.
572. Papapetrou A., Non-existence of periodically varying non-singular gravitational fields, Colloq. internat. Centre not. rech. scient., № 91, 193—197.
573. Peres A., On Canchy's Problem in General Relativity. III. Dep. of Ohys., Seracuse Univ., New York.
574. Peres A, Three — Component Spinors, Journ. of Math. and Mech. **11**, № 1, 61—80.
575. Petros S., Florides, The electromagnetic energy and the gravitational mass of a charged particle in general relativity, Proc. of the Cambridge Philosophical Society **58**, part I, 110—118.
576. Petrov A. Z., Invariant classification of gravitational fields, Recent developments in general relativity, Pergam. Press — PWN.
577. Petrov A. Z., Gravitational field geometry as the geometry of automorphisms, Recent developments in General relativity, Pergam. Press — PWN.
578. Petrov A. Z., Gravitational field geometry as the geometry of automorphisms, Pergam. Press — PWN.
579. Purser, Synge, Water Waves and Hamilton's Method, Nature **194**, № 4825, 268 only.
580. Robinson, Some spherical gravitational waves in general relativity: Proc. Roy. Soc. **A**, № 265, 463—473.
581. Rosen N., Flat-space metric in general relativity theory. Dep. of Phys., Israil Inst., of Technology, Haifa.
582. Rosen G., Symmetries of the Einstein — Maxwell equations, Journ. Math. Phys. **3**, № 2, 313.
583. Synge I. L., Relativity Based on Chronometry, Recent Developments in General Relativity.
584. Synge J. L., Tensorial integral conservation laws in general relativity, Les theories relativistes de la Gravitation, Paris.
585. Synge J. L., Action at a distance and metaphysics, Nature **194**, № 4825, 47 only.
586. Szymanski P., Extraits de la theorie des intensives et de la theorie de matiere continue. Varsovie, preprint.
587. Trautman A., Sur les lois de conservation dans les espaces de Riemann, Coll. int. centre n. r. sci., 91.
588. Trümper M., Zur Bewegung von Probekörpern in Einsteinchen Gravitations — Vakuumfeldern. Zs. Phys., 55—60.
589. Weinberg S., The neutrino in cosmology, Nuovo Cim **25**, № 1, 15—27.

1963

590. Абакиров Б., Четырехмерные пространства, допускающие четырехчленные интранзитивные группы гомотетических движений, Матер. 7-й научн. конф. каф. высш. мат. Фрунз. политехн. ин-та.
591. Абакиров Б., Четырехмерные римановы пространства, допускающие четырехчленные простотранзитивные группы гомотетических движений, Матер. 7-й научн. конф. каф. высш. матем. Фрунз. политехн. ин-та.
592. Анчиков А. М., Точные решения уравнений общей теории относительности для метрики конформно-приводимого вида, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
593. Билялов Р. Ф., Конформные группы преобразований в полях тяготения, ДАН СССР **152**, № 3.
594. Билялов Р. Ф., Конформные группы преобразований в полях тяготения, действующие на изотропных поверхностях транзитивности, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 2, Казань.
595. Билялов Р. Ф., Транзитивные конформные группы преобразований, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 2, Казань.
596. Билялов Р. Ф., Об одном классе конформных групп преобразований в полях тяготения, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
597. Брагинский В. Б., О пределах, определяющих возможность измерения гравитационных эффектов, ЖЭТФ **44**, вып. 5.
598. Брагинский В. Б., Руденко В. Н., Обнаружимые гравитационные эффекты, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
599. Вартанян Ю. Л., Массы и радиусы барионных конфигураций, Изв. АН Арм. ССР **XVI**, № 6.
600. Вишневский В. В., О комплексном представлении некоторого класса римановых пространств, Кандидатская диссертация, Казань.
601. Гинзбург В. Л., Что подтверждают измерения гравитационного смещения частоты, УФН **LXXXI**, вып. 4.
602. Голиков В. И., Поля тяготения с общими геодезическими. I, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 2, 72—95, Казань.
603. Голиков В. И., Поля тяготения с общими геодезическими. II, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, 59—67, Казань.
604. Голиков В. И., Классификация полей тяготения с общими геодезическими по типам Петрова, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, 26—43, Казань.
605. Дружкин Л. А., К вопросу о красном смещении, Изд-во АН СССР, № 34, Москва.
606. Зельдович Я. Б., О потере массы сверхтяжелых звезд за счет нейтринного излучения, Астр. циркуляр, № 250.
607. Кайгородов В. Р., Классификация полей тяготения общего вида по группам движений V, Изв. вузов, Матем., № 6.
608. Кайгородов В. Р., Пространства Эйнштейна с четырехмерными группами движений, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 2, Казань.
609. Кайгородов В. Р., О классах пространств Эйнштейна с группами движений G_s, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
610. Керес Х. П., О принципах эквивалентности и относительности, Исслед. по теор. физике, стр. 5, Тарту.
611. Кирия В. С., О приближенном решении задачи двух тел в общей теории относительности, Сообщ. АН Груз. ССР **XXXII**, 2.
612. Копп В. Г., Двучленные пучки косых поляритетов в трехмерном псевдоэвклидовом пространстве, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 1.
613. Кручкович Г. И., Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. XII.
614. Крюков М., Движение твердого тела по инерции в плоскости Лобачевского, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 1, 103.

615. Липатов Н. С., Трехмерные римановы пространства, допускающие нетривиальные гомотетические движения. Свободные поля тяготения высокой подвижности, Кандидатская диссертация, Казань.
616. Лифшиц Е. М. и Халатников И. М., Проблемы релятивистской космологии, УФН **LXXX**, вып. 3.
617. Новиков И. Д., Озерной Л. М., Распространение света вне и внутри сферы Шварцшильда, ДАН СССР **150**, № 5, 1019—1021.
618. Петров А. З., О центрально-симметрических полях тяготения, ЖЭТФ **44**.
619. Петров А. З., Замечания по поводу одной теоремы Биркхоффа, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
620. Петров А. З., Понятие энергии в общей теории относительности, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
621. Петров А. З., Тип поля и тип тензора энергии — импульса, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 2, Казань.
622. Петров А. З., Гусева А. В., О скорости изменения гравитационного поля, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
623. Скроцкий Г. В., Гравитационное поле однородной равномерно движущейся сферы, Труды Уральского политехн. ин-та им. С. М. Кирова, вып. 123, Свердловск.
624. Станюкович К. П., Обобщение моделей вселенной Фридмана, ДАН СССР **151**, № 3, Москва.
625. Черников Н. А., Кинетическая теория релятивистского газа, Докторская диссертация, ОИЯИ, Дубна.
626. Черников Н. А., Вывод уравнений релятивистской неородинамики из релятивистского кинетического уравнения, ОИЯИ, Дубна.
627. Широков А. П., Классификация групп движений биаксиального пространства эллиптического типа, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 1, Казань.
628. Dicke R. H., Experimental Relativity, Palmer Phys. Lab. Prinst. Univ., May 24.
629. Goldberg J. N., Asymptotic Invariants in Gravitational Radiation Fields, Phys. Rev. **131**, № 3, 1367—1378.
630. Hlavaty V., Metric Null Parameter and Conformal Null Parameter of a Minimal Geodesic, Journ Math. Mech. **12**, № 5.
631. Hlavaty V., Reduction of Unknowns in Einstein — Maxwell Field Equations Characteristic (1111), Journ. Math. Mech. **12**, № 6, 811—830.
632. Hlavaty V., Infinitesimal deformation applied to a singl minimal curve, Journ, Math. Pur. Appl. **XLII**, fasc. 2.
633. Hlavaty V. and Mishra R. S., Gravitation of Space — Time Curvature tensor, The Tensor (New Series), **14**, 138—168.
634. Hyde J., Approximate solutions of the general relativity field equations with a scalar meson field, Proc. Cambr. Phil. Soc. **59**, № 4, 739.
635. Jordan P., The generalised theory of Gravitation, Nato International Summer Course on Cosmological Models.
636. Kerr R. P. Scalar Invariants and Groups of Motions in a Four Dimensional Einstein Space, Journ. Math. Mech. **12**, № 1, 33—54.
637. Kerr R. P., Gravitational Field of a Spinning mass as an Example of Algebraically Special Metrics, Univ. of Texas.
638. Kreisel E., Liebscher E. und Treder H., Gravitationsfelder mit Nullstellen der Determinante der guv, Printed in Germany, 7 Folge, Bd. 12, Heft 3—4.
639. Lichnerowicz A., Champs Spinoriels et Propagateurs en Relativite Generale.
640. Liebscher E., Zur gravitativen wechselwirkung von Photonen, Berlin.
641. Loiseau J., Notre univers dans un space a quatre dimensions spatia les, Paris.

642. Papapetrou A., Quelques Identites Dans la Relativite Generale et Dans la Theorie du champ Unifie, Extrait des Annales de L'Institut Henri Poincare **XVIII**, 108.
643. Sachs R., Asymptotic Symmetries in Gravitational Theory, Reseach supported Jointly by the US. Army and U. S. Air Forse.
644. Sohakian G. S., On Weyl's Solution for Axical — Symmetrical Gravitational Fields, Nuovo Cim., ser. X, **27**, 1497.
645. Sohakian G. S., Vartanian Yn. L., On the Possible Phase States of Matter at Extremely High Densities, Nuovo Cim., ser. X, **30**, 82—104.
646. Thomas T. Y., Proper Volume and its Application in the General Theory of Relativity, Nuovo Cim., ser. X, **28**, 368—384.
647. Treder H. J., Die Problematik des globalen Determinismus der allgemeinen Relativitatstheorie, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humbolt — Universität zu Berlin, Math.-Nat., R. XII.
648. Weber, Dicke, Gravitational Radiation experiments, preprint.

1964

649. Анчиков А. М., О конформно-приводимых полях тяготения, Кандидатская диссертация, Казань.
650. Анчиков А. М., О конформно-приводимых полях тяготения с однородным распределением материи **123**, кн. 2.
651. Билялов Р. Ф., О группах конформных преобразований в полях тяготения, Кандидатская диссертация, КГУ.
652. Гинзбург В. Л., О гравитационном коллапсе магн. звезды, ЖЭТФ **47**.
653. Захаров В. Д., К вопросу об инвариантном описании гравитационных волн, Сообщ. ГАИ им. П. К. Штернберга, № 131, Изд-во МГУ.
654. Зельдович Я. Б., Наблюдения во вселенной, однородной в среднем, Астр. журн. **XI**, 1.
655. Зельдович Я. Б., О механизме выделения энергии при коллапсе сверхзвезд, Астр. циркуляр, № 290, 8 апреля.
656. Зельдович Я. Б., Судьба звезды и выделение гравитационной энергии при аккреции, ДАН СССР **155**, № 1, 67—70.
657. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Излучение гравитационных волн телами, движущимися в поле коллапсирующей звезды, ДАН СССР **155**, № 5, 1033—1036.
658. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Оценка массы сверхзвезды, ДАН СССР **158**, № 4, 811—814.
659. Зельдович Я. Б., Подурец М. А., Нейтринная светимость звезды при гравитационном коллапсе в общей теории относительности, ДАН СССР **156**, № 1, 57—60.
660. Кайгородов В. Р., Пространства Эйнштейна с четырехмерными группами движений, Уч. зап. КГУ **123**, кн. 12, Казань.
661. Новиков И. Д., Какова природа сверхзвезд (гравитационный коллапс)?, «Природа», август, 92—97, Изд-во АН СССР.
662. Новиков И. Д., Задержка взрыва части фридмановского мира и сверхзвезды, Астр. журн. **IXL**, вып. 6, 1075—1083.
663. Новиков И. Д., *R*- и *T*-области в пространстве — времени со сферически-симметрическим пространством, Сообщ. ГАИ им. П. К. Штернберга, № 132, Изд-во МГУ.
664. Новиков И. Д., Некоторые свойства сферически-симметрического пространства, сопутствующего веществу, Сообщ. ГАИ им. Штернберга, № 132, Изд-во МГУ.
665. Новиков И. Д., Озерной Л. М., Оценка массы сверхзвезды, ДАН СССР **158**, № 4, 811—814.

666. Петров А. З., Современное состояние развития теории гравитационного поля, Тезисы докладов и сообщений на всесоюзном симпозиуме, 2—26, Киев.
667. Подурец М. А., Об одной форме уравнений Эйнштейна для сферически симметричного движения сплошной среды, Астр. журн. **IXL,** вып. 1, 28—32.
668. Подурец М. А., Коллапс звезды с учетом противодавления, ДАН СССР, **154,** № 2, 300—301.
669. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Основные параметры барионных конфигураций, Астр. журн. **XLI,** 2.
670. Bergmann P., Condensation of Matter in Gravitational Collapse, to be presented the Washington meeting of the APS, April.
671. Bergmann P. G., Cahen M. and Komar A. B., Spherically Symmetric Gravitational Fields, New York.
672. Hamovi A., Sur le theoreme de Birkhoff et la solution «radiative» de Petrov, C. r. Acad. Sci., Paris, **258,** 6085—6087.
673. Hlavaty V., Reduction of Unknowns in Einstein — Maxwell Field Equations II Characteristics (II, 2), (II/II), (III/I), Journ. Math. and Mech. **13,** № 1, 31—54.
674. Jordan P., Irreversibilitat und Leitrichtung, Zs. Naturforsch., Hamburg.
675. Ioshi R. L. and Husain S. J., Total Radiation in Einsteins Unified Field Theory, Tensor, New Series, **15,** № 1, 66—73.
676. Kerr R. P. and Schild A., A New Class of Vacuum Solutions of the Einstein Field Equations (Invited paper to be presented to the International meeting on General Relativity, Fourth centenary of the Birth of Galileo, Florence, Italy p. 9—12, 1964).
677. Relativity, Groups and Topology, сб. под ред. Де Витта — Де Витта, London and Glasgow.
678. Schild A., Geometrical and Physical Interpretation of the Weyl Conformal Curvature Tensor, University of Texas, 33 (657)—7482, project 7114, Task 711401.
679. Beiglböck W., Zur Theorie der infinitesimalen Holonomiegruppe in der Allgemeinen Relativitatstheorie, Univ. Hamburg, Zs. Phys., 148—160.

Предметный указатель

Указатель обозначений