И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования РСФСР в качестве учебника для государственных университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

517.2
П 29
УДК 51794

Посвящаю эту книгу
светлой памяти моего отца
ГЕОРГИЯ ИВАНОВИЧА
ПЕТРОВСКОГО

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке этого издания я использовал те замечания к первому изданию, которые были сделаны И. М. Гельфандом, С. Крачковским, С. Г. Михлиным, А. Д. Мышкисом и О. А. Олейник. Особенно большую помощь оказала мне О. А. Олейник. Всех этих товарищей я горячо благодарю.

И. Петровский

14 февраля 1951 г.

В третьем издании исправлены замеченные опечатки и уточнены ссылки на литературу.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Определения. Примеры

Интегральными уравнениями принято называть такие уравнения, которые содержат искомую функцию под знаком интеграла. В частности, интегральным уравнением относительно функции $\varphi(\xi)$ является следующее уравнение:

$$a(x)\varphi(x)+f(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{1,1}$$

где $a(x)$, $f(x)$, $K(x, \xi)$ — известные функции, а $\varphi(\xi)$ — неизвестная функция; переменная x принимает, так же как и ξ, все значения из интервала (a, b).

Мы в этой книге будем рассматривать только уравнения, в которые неизвестная функция входит линейно, т. е. только уравнения вида (1,1). Они называются *линейными* интегральными уравнениями. Если $a(x)$ не обращается в нуль, то, разделив обе части уравнения (1,1) на $a(x)$, получим уравнение вида

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{2,1}$$

Такие уравнения называются линейными интегральными уравнениями *2-го рода* или интегральными уравнениями *Фредгольма* по имени математика, который их впервые исследовал. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (2,1) называется *однородным*.

Если бы $a(x)\equiv 0$, то уравнение (1, 1) обратилось бы в уравнение

$$\int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x),$$

которое называется линейным интегральным уравнением 1-*го рода*.

Функция $K(x, \xi)$ называется *ядром* интегрального уравнения.

В дальнейшем мы будем главным образом заниматься линейными интегральными уравнениями 2-го рода.

Можно рассматривать интегральные уравнения, где неизвестные функции зависят не от одного аргумента, а от многих. Таким будет, например, уравнение

$$\varphi(x, y) = \int_G K(x, y;\ \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + f(x, y)$$

относительно неизвестной функции $\varphi(\xi, \eta)$, где интегрирование распространяется по некоторой области G на плоскости (ξ, η). Точка (x, y) также принадлежит этой области. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varphi(P) = \int_G K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + f(P),$$

где $P \in G$ и $Q \in G$*).

Можно рассматривать системы интегральных уравнений со многими неизвестными функциями.

Замечание. Всюду в дальнейшем, кроме § 20, если даже это не оговорено особо, мы будем предполагать, что рассматриваемые функции точек P или Q определены в конечной d-мерной области G, что они непрерывны в этой области всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек, достаточно гладких линий и поверхностей, до $(d-1)$-го измерения включительно. На этих особых точках, линиях и поверхностях функции могут быть не определены. Границу области G мы будем считать со-

*) Запись $A \in M$ означает, что точка A принадлежит множеству M.

стоящей из конечного числа кусков гладких $(d-1)$-мерных поверхностей или конечного числа гладких дуг, если $d=2$.

Интегрирование всюду в дальнейшем, кроме § 20, мы будем понимать в обычном смысле, если функции непрерывны в G; если эти функции имеют на некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы, то интегралы рассматриваются как несобственные; все рассматриваемые функции будем считать абсолютно интегрируемыми.

§ 2. Типичные задачи, сводящиеся к линейным интегральным уравнениям

Рассмотрим упругую нить длины l, которая легко (в пределе, как мы будем предполагать, без всякого сопротивления) изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на Δl нужна сила $c\Delta l$, где c — некоторая постоянная (закон Гука). Пусть концы этой нити закреплены

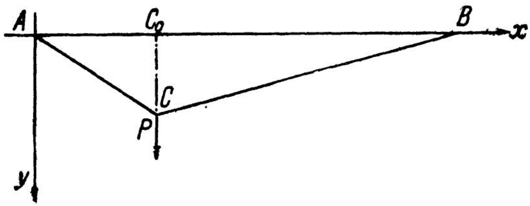

Рис. 1.

в неподвижных точках A и B, находящихся на неотрицательной части оси x. Пусть точка A находится в начальной точке оси. Ось x будем считать горизонтальной. Когда нить находится в покое под действием только горизонтальной растягивающей силы T_0, очень большой в сравнении с другими рассматриваемыми силами, положение нити будет горизонтальным, т. е. совпадающим с осью Ox.

Допустим, что в точке C, для которой $x=\xi$, приложена к нити вертикальная сила P. Под ее влиянием нить примет форму ломаной ACB (рис. 1). Будем считать $CC_0=\delta$ очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B (результат малости P по сравнению с T_0). Пренебрегая квадратом δ по сравнению с l, мы можем считать, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P и пренебрегая опять членами, содержащими δ^2, получим:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P,$$

откуда

$$\delta = \frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Обозначая через $y(x)$ прогиб нити в точке с абсциссой x, мы получим отсюда

$$y(x) = P \cdot G(x, \xi),$$

где

$$\left.\begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} \quad \text{для участка } AC\,(0 \leqslant x \leqslant \xi), \\ G(x, \xi) &= \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} \quad \text{для участка } CB\,(\xi \leqslant x \leqslant l). \end{aligned}\right\} \qquad (1,2)$$

Пользуясь этими формулами, легко проверить, что

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Предположим, что на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$ так, что на участок ее между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$ действует сила, приблизительно равная $p(\xi)\,\Delta\xi$. Так как смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\,\Delta\xi$, суммируются («принцип суперпозиции»), то под действием этой силы нить примет форму

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим следующие задачи.

1. Будем искать плотность распределения силы $p(\xi)$, под влиянием которой нить примет заданную форму $y = y(x)$. Тогда мы придем к интегральному уравнению 1-го рода

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi \qquad (2,2)$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке ξ

$$p(\xi)\sin\omega t \quad (\omega > 0).$$

Под ее влиянием нить придет в движение. Будем при этом предполагать, что при движении нити абсцисса каждой ее точки не меняется и что нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x)\sin\omega t.$$

Обозначая линейную плотность массы нити в точке ξ через $\varrho(\xi)$, мы найдем тогда, что в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi+\Delta\xi$, кроме силы $p(\xi)\sin\omega t\,\Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\varrho(\xi)\,\Delta\xi\,\frac{d^2y}{dt^2} = \varrho(\xi)\,y(\xi)\,\omega^2\sin\omega t\,\Delta\xi.$$

Поэтому равенство (2,2) примет следующий вид:

$$y(x)\sin\omega t = \int_0^l G(x,\ \xi)\,[p(\xi)\sin\omega t + \omega^2\varrho(\xi)\,y(\xi)\sin\omega t]\,d\xi.$$

Сокращая на $\sin\omega t$ и полагая

$$\int_0^l G(x,\ \xi)\,p(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad G(x,\ \xi)\,\varrho(\xi) = K(x,\ \xi), \qquad \omega^2 = \lambda,$$

мы получим:

$$y(x) = \lambda\int_0^l K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi + f(x). \tag{3,2}$$

Считая функцию $p(\xi)$ и, следовательно, $f(x)$ заданной, мы пришли таким образом к интегральному уравнению Фредгольма для определения функции $y(x)$. Заметим, что в силу определения функции $f(x)$ мы имеем:

$$f(0) = f(l) = 0.$$

Если плотность $\varrho(\xi)$ постоянна и $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, это интегральное уравнение нетрудно решить. В самом деле, подставим в $K(x, \xi)$ вместо $G(x, \xi)$ его выражение (1,2). Получим

$$y(x)=\omega^2\varrho\int_0^x \frac{(l-x)\,\xi}{T_0 l}\,y(\xi)\,d\xi+\omega^2\varrho\int_x^l \frac{x\,(l-\xi)}{T_0 l}\,y(\xi)\,d\xi+f(x)$$

или

$$y(x)=\frac{\omega^2 c}{l}(l-x)\int_0^x \xi y(\xi)\,d\xi+\frac{\omega^2 cx}{l}\int_x^l (l-\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

где

$$c=\frac{\varrho}{T_0}\,.$$

Дифференцируя два раза по x обе части этого уравнения, получим:

$$y''(x)=-\omega^2 c y(x)+f''(x). \tag{4,2}$$

С другой стороны, можно показать, что всякое решение дифференциального уравнения (4,2), обращающееся в нуль при $x=0$ и $x=l$, является также решением интегрального уравнения (3,2). Для этого умножим обе части равенства $y''(\xi)=-\omega^2 c y(\xi)+f''(\xi)$ на $-T_0 G(x, \xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до l. Мы получим при этом равенство (3,2), так как, интегрируя по частям, легко показать, что

$$\int_0^l T_0 G(x, \xi)\,\varphi''(\xi)\,d\xi=-\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x=0$ и $x=l$.

Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, общим решением уравнения (4,2) является

$$y=C_1\sin\mu x+C_2\cos\mu x+\frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi,$$

где $\mu=\omega\sqrt{c}$, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из равенств (1,2) и (3,2) следует, что $y(0)=y(l)=0$. Определяя из этих условий C_1 и C_2, получим, если $\sin\mu l \neq 0$,

$$y(x) = -\frac{1}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\sin\mu l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)\,d\xi. \quad (5,2)$$

В этом случае интегральное уравнение (3,2) имеет единственное решение при любой функции $f(x)$, если только она дважды непрерывно дифференцируема и $f(0)=f(l)=0$.

Можно показать, что для существования решения интегрального уравнения (3,2) достаточно, если $\sin\mu l \neq 0$, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной; требование существования и тем более непрерывности второй производной является излишним. Условие же $\sin\mu l \neq 0$ совершенно необходимо для того, чтобы это интегральное уравнение имело решение при всякой непрерывной или даже при всякой сколько угодно раз дифференцируемой функции $f(x)$.

Если $\sin\mu l = 0$, то

$$\mu = \frac{k\pi}{l}, \quad (6,2)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l\sqrt{c}}, \quad (7,2)$$

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{l^2 c}, \quad (8,2)$$

где k — какое-нибудь целое число — положительное, отрицательное или 0. Значения λ, даваемые формулой (8,2) при $k=1, 2, 3, \ldots$, называются *собственными значениями* параметра λ в интегральном уравнении (3,2), а соответствующие значения ω называются *собственными частотами* колебаний струны.

Из вывода формулы (5,2) следует, что интегральное уравнение (3,2) в том случае, если $\sin\mu l = 0$ и у функции $f(x)$ существует непрерывная вторая производная, может иметь решение, только если

$$\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)\,d\xi = 0. \quad (9,2)$$

Интегрируя по частям и пользуясь тем, что $\sin\mu(l-\xi)=0$ и $f(\xi)=0$ при $\xi=0$ и $\xi=l$, это условие можно привести к виду

$$\int_0^l f(\xi)\sin\mu\xi\,d\xi=0. \tag{10,2}$$

Обратно, легко убедиться в том, что условие (10,2) является также достаточным для существования у уравнения (3,2) решения при данном μ, для которого $\sin\mu l=0$.

Условие (10,2) удовлетворяется, в частности, если

$$f(x)\equiv 0.$$

Тогда интегральное уравнение (3,2) и дифференциальное уравнение (4,2) становятся однородными. Все решения однородного дифференциального уравнения (4,2), обращающиеся в 0 при $x=0$ и $x=l$, а следовательно, и все решения интегрального уравнения (3,2) даются формулой

$$y(x)=C\sin\mu_k x, \tag{11,2}$$

где C — произвольная постоянная и μ_k равно одному из чисел (6,2). Формула (11,2) дает амплитуды в точке x *собственных колебаний* струны:

$$y=C\sin\mu_k x\sin\omega_k t,$$

происходящих без действия внешней силы. Как видно из предыдущего, такие колебания могут происходить не с произвольной частотой, а только с одной из частот, даваемых формулой (7,2) при $k=1, 2, \ldots$

Как показывает формула (5,2), если условие (9,2) не выполняется, амплитуда $y(x)$ периодических колебаний струны в точке x бесконечно растет, когда ω — частота колебаний внешней силы — приближается к одной из собственных частот колебаний струны. В пределе при совпадении этих частот наступает резонанс. Тогда не существует, вообще говоря, т. е. при произвольных амплитудах внешней силы, периодических колебаний струны. Соответственно этому, вообще говоря, не существует решения неоднородного интегрального уравнения (3,2) при λ, равном одному из собственных значений этого уравнения.

§ 3. Аналогия между линейными интегральными уравнениями и линейными алгебраическими уравнениями. Формулировка теорем Фредгольма

Будем рассматривать линейное интегральное уравнение 2-го рода

$$y(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x), \tag{1,3}$$

где $K(x,\ \xi)$ и $f(x)$ — известные функции при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$. Разобьем интервал $(a,\ b)$ на n равных между собой интервалов, длина каждого из которых равна:

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x=\Delta\xi.$$

Положим

$$\begin{aligned} K(a+p\Delta x,\ a+q\Delta\xi)&=K_{pq} && (p,\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ y(a+p\Delta x)&=y_p && (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ f(a+p\Delta x)&=f_p && (p=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}$$

Заменим интеграл $\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi$ при $x=a+p\Delta x$ суммой

$$\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\Delta\xi,\quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда вместо интегрального уравнения (1,3) получится система линейных алгебраических уравнений

$$y_p=\sum_{q=1}^{n} K_{pq}y_q\Delta\xi+f_p,\quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2,3}$$

Мы будем считать здесь K_{pq}, f_p, $\Delta\xi$ известными величинами, а y_p — неизвестными.

Целью ближайших параграфов является перенести известные теоремы о линейных алгебраических уравнениях на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода. В обычных формулировках теорем о линейных алгебраических уравнениях участвуют определители, связать которые с интегральными уравнениями было бы, хотя и возможно, но громоздко. Поэтому мы сформулируем эти теоремы, не пользуясь определителями. Эти формулировки напечатаны у нас курсивом.

При решении системы (2,3) существенную роль играет составленный из коэффициентов этой системы определитель

$$\begin{vmatrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1-K_{nn}\Delta\xi \end{vmatrix}. \tag{3,3}$$

Если этот определитель не равен 0, то, как известно, система (2,3) имеет, и притом всегда единственное, решение при любых значениях $f_1, f_2, \ldots, f_n$. В этом случае транспонированная система, т. е. система

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} K_{qp} z_q \Delta\xi + f_p^*, \quad p = 1, 2, \ldots, n,$$

также имеет, и притом единственное, решение при произвольных f_p^*.

Если же определитель равен 0, то система (2,3) при произвольных f_p, вообще говоря, не имеет решения. Но тогда соответствующая однородная система, т. е. система, полученная из (2,3) приравниванием 0 всех f_p, всегда имеет нетривиальное решение, т. е. решение, состоящее не из одних только нулей.

Таким образом, имеет место следующая альтернатива: *или данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений* (2,3) *имеет, и притом только единственное, решение при всяких $f_1, \ldots, f_n$, стоящих в правых частях, или соответствующая однородная система имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Если для данной системы имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированной системы.*

Во втором случае данная однородная система

$$y_p - \sum_{q=1}^{n} K_{pq} y_q \Delta\xi = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{4,3}$$

имеет то же число линейно независимых решений, что *и транспонированная к ней система*

$$z_p-\sum_{q=1}^{n}K_{qp}z_q\Delta\xi=0,\ p=1,\ \ldots,\ n. \tag{5,3}$$

Это число равно $n-r$, где r — ранг матрицы определителя (3,3) *).

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых во втором случае альтернативы неоднородная система (2,3) имеет решения. Прежде всего легко найти необходимые условия для этого. Пусть

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$$

— какое-нибудь решение системы (5,3). Умножая тогда p-е из уравнений (2,3) на z_p и складывая все уравнения почленно, получим:

$$\sum_p y_p z_p-\sum_{p,\,q}K_{pq}y_q z_p\Delta\xi=\sum_p f_p z_p.$$

Но левую часть этого равенства можно переписать еще так:

$$\sum_p y_p z_p-\sum_{p,\,q}K_{qp}y_p z_q\Delta\xi=\sum_p y_p\,(z_p-\sum_q K_{qp}z_q\Delta\xi).$$

В силу уравнений (5,3) это выражение равно 0. Следовательно, должно быть

$$\sum_{p=1}^{n}f_p z_p=0. \tag{6,3}$$

Покажем, что это равенство является также и достаточным условием для существования решения системы (2,3), если оно выполняется для всех решений системы (5,3). Очевидно, это условие будет соблюдено, если оно выполняется для каких-нибудь $(n-r)$ линейно независимых между собой решений системы (5,3). Для доказательства нашего утверждения вспомним из курса высшей алгебры, что достаточным условием существования решения у системы (2,3)

*) Заметим, что утверждение о существовании ровно $(n-r)$ линейно независимых решений у однородных систем (4,3) и (5,3) верно и в первом случае альтернативы, когда $n=r$. Выражение «нуль линейно независимых решений» означает, что имеется лишь решение, состоящее из одних нулей.

в случае, когда ее определитель равен нулю, является следующее условие: ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1-K_{11}\Delta\xi & -K_{12}\Delta\xi & \ldots & -K_{1n}\Delta\xi & f_1 \\ -K_{21}\Delta\xi & 1-K_{22}\Delta\xi & \ldots & -K_{2n}\Delta\xi & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -K_{n1}\Delta\xi & -K_{n2}\Delta\xi & \ldots & 1-K_{nn}\Delta\xi & f_n \end{matrix} \right\| \tag{7,3}$$

должен совпадать с рангом матрицы (3,3).

Для этого достаточно, чтобы равнялись нулю все определители $(r+1)$-го порядка, составленные из элементов матрицы (7,3) и содержащие элементы последнего столбца этой матрицы. Раскрывая такой определитель D_{r+1} по элементам f_k, мы найдем из условия (6,3), что он действительно равен нулю, так как системе (5,3) удовлетворяет ряд чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n,$$

составленный следующим образом: если i таково, что f_i входит в определитель D_{r+1}, то z_i равно алгебраическому дополнению f_i в этом определителе, в противном случае $z_i=0$ *).

Итак, *во втором случае альтернативы решение неоднородной системы существует тогда и только тогда, если для любого решения* $(z_1, \ldots, z_n)$ *транспонированной однородной системы выполняется условие* (6,3).

Заметим, что если во втором случае альтернативы система (2,3) имеет решение, то это решение не единственное. Действительно, прибавляя к этому решению какое-нибудь решение соответствующей однородной системы, мы опять получим решение системы (2,3).

Когда $\Delta\xi$ стремится к 0, естественно ожидать, что $\sum\limits_q K_{pq}y_q\Delta\xi$ переходит в $\int\limits_a^b K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi$, и решение систе-

*) Справедливость этого утверждения можно доказать так. Подставим числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в j-е уравнение системы (5,3). Если j таково, что в определитель D_{r+1} входят элементы j-го столбца матрицы (7,3), то результат подстановки будет равен 0, так как он будет равен определителю, в котором совпадают два столбца. Если j таково, что элементы j-го столбца не входят в определитель D_{r+1}, то результат подстановки будет равен нулю, так как он будет равен определителю $(r+1)$-го порядка, составленному из элементов матрицы ранга r.

мы уравнений (2,3) переходит в решение интегрального уравнения (1,3). Это действительно имеет место при некоторых предположениях относительно ядра $K(x, \xi)$. Но доказательство этого громоздко, и мы не будем его приводить, хотя для приближенного решения интегрального уравнения (1,3) иногда его заменяют системой (2,3) *). Мы докажем только, что теоремы, сформулированные выше для системы (2,3), переходят в следующие теоремы:

Теорема 1. (Альтернатива). *Или данное неоднородное линейное интегральное уравнение 2-го рода имеет, и притом единственное, решение при всякой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное, т. е. не равное нулю тождественно, решение.*

Теорема 2. *Если для данного уравнения* (1,3) *имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для транспонированного уравнения*

$$z(x) = \int_a^b K(\xi, x)\, z(\xi)\, d\xi + f^*(x).$$

Данное однородное интегральное уравнение и транспонированное к нему имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Очевидно, если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ удовлетворяют однородному уравнению (1,3), то любая их линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ с постоянными коэффициентами C_i также удовлетворяет этому уравнению.

Теорема 3. *Во втором случае альтернативы необходимым и достаточным условием существования решения неоднородного уравнения* (1,3) *является условие:*

$$\int_a^b f(x)\, z(x)\, dx = 0,$$

где $z(x)$ — любое решение транспонированного к уравнению (1,3) *однородного уравнения.*

---

*) См. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962, гл. II, § 1.

Если это условие выполнено, то уравнение (1,3) имеет бесконечное множество решений, потому что, как легко проверить, тогда этому уравнению будет удовлетворять также любая функция вида

$$y(x)+\varphi(x),$$

где $y(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1,3), а $\varphi(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения. С другой стороны, ясно, что если уравнению (1,3) удовлетворяют функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то их разность удовлетворяет соответствующему однородному уравнению.

Сформулированные только что теоремы 1, 2, 3 называются *теоремами Фредгольма*, который их впервые доказал для уравнения (1,3) при довольно широких предположениях относительно $K(x, \xi)$ и $f(x)$. Ближайшие параграфы посвящены доказательству этих теорем для некоторых классов уравнений. Число независимых переменных здесь несущественно. Поэтому все доказательства будут проведены для любого числа независимых переменных; вместо x мы будем писать P, вместо ξ будем писать Q, подобно тому как мы это делали в конце § 1. Эти доказательства, как вообще большинство доказательств существования решений уравнений, дают также методы для приближенного решения интегральных уравнений (1,3).

В приложениях особенно важную роль играет первая из теорем Фредгольма — об альтернативе. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1,3) имеет решение, часто бывает гораздо проще доказать, что соответствующее однородное уравнение или транспонирование к нему имеет только тривиальные решения. А отсюда, по первой теореме Фредгольма, будет следовать, что данное уравнение (1,3) действительно имеет решение.

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами

Существует класс интегральных уравнений, которые легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям. Теоремы Фредгольма для этих уравнений непосредственно получаются из теорем, сформулированных в предыдущем параграфе для линейных алгебраических уравнений. Такими интегральными уравнениями являются интегральные уравнения с так называемыми *вырожденными ядрами.*

Мы докажем сейчас теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденными ядрами и используем этот частный случай в дальнейшем при доказательстве теорем Фредгольма для интегральных уравнений с произвольными непрерывными ядрами.

Ядро называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(P,\ Q)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q). \tag{1,4}$$

Мы будем предполагать, что $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $y(P)$ и $f(P)$ равномерно непрерывны на некоторой конечной области G и что все $a_i(P)$ и все $b_i(Q)$ линейно независимы между собой.

Докажем, что последнее предположение не ограничивает общности. Для этого допустим, что существуют такие постоянные $C_1, \ldots, C_m$, что

$$C_1 a_1(P)+\ldots+C_m a_m(P)\equiv 0,$$

причем хотя бы одно из чисел $C_1, \ldots, C_m$ отлично от 0. Пусть $C_m\neq 0$. Тогда это равенство можно разрешить относительно $a_m(P)$. Получим:

$$a_m(P)=C_1^* a_1(P)+\ldots+C_{m-1}^* a_{m-1}(P).$$

Подставляя это выражение в правую часть (1,4), получим:

$$K(P,\ Q)\equiv\sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\, b_i(Q)+\sum_{i=1}^{m-1} C_i^* a_i(P)\, b_m(Q)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\,[b_i(Q)+C_i^*\, b_m(Q)]\equiv\sum_{i=1}^{m-1} a_i(P)\, b_i^*(Q).$$

Таким образом, ядро $K(P,\ Q)$ оказалось возможным представить в виде суммы меньшего чем m числа произведений функций от P на функции от Q. Если бы функции $a_i(P)$ или $b_i^*(Q)$, $i=1, \ldots, m-1$, опять оказались линейно зависимыми, мы могли бы еще уменьшить это число и т. д.

Как мы уже отмечали, интегральные уравнения с вырожденными ядрами легко сводятся к линейным алгебраическим уравнениям, и для них легко доказываются теоремы Фредгольма. Действительно, допустим, что интегральное уравнение

$$y(P)=\int_G K(P, Q)\, y(Q)\, dQ+f(P), \tag{2,4}$$

где $K(P, Q)$ дается формулой (1,4), имеет решение. Тогда должно быть

$$y(P)=\int \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q)\, y(Q)\, dQ+f(P)$$

или

$$y(P)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P) \int b_i(Q)\, y(Q)\, dQ+f(P). \tag{3,4}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы опускаем букву G под знаком интеграла. Символ $\int$ будет всюду означать интеграл, взятый по области G.

Положим

$$\int b_i(Q)\, y(Q)\, dQ=C_i. \tag{4,4}$$

Тогда из уравнения (3,4) получается, что

$$y(P)=\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(P)+f(P). \tag{5,4}$$

Чтобы определить постоянные C_i, подставим значение y, даваемое этой формулой, в уравнение (4,4). Получим:

$$\int b_i(Q)\, \Big[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(Q)+f(Q)\Big]\, dQ=C_i.$$

Полагая

$$\int b_i(Q)\, a_j(Q)\, dQ=K_{ij}, \qquad \int b_i(Q)\, f(Q)\, dQ=f_i, \tag{6,4}$$

из последнего уравнения получим:

$$C_i=\sum_{j=1}^{m} K_{ij} C_j+f_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{7,4}$$

Итак, всякому решению интегрального уравнения (2,4) соответствует решение $(C_1, \ldots, C_m)$ системы (7,4), причем в силу линейной независимости функций $a_i(P)$ только одно. Обратно, если эта система линейных алгебраических уравнений имеет какое-нибудь решение $(C_1, \ldots, C_m)$, то, подставляя его в правую часть (5,4), мы получим решение заданного интегрального уравнения (2,4), так как каждый шаг, сделанный при переходе от (2,4) к (7,4), обратим. Таким образом, задача свелась к исследованию системы (7,4).

Совершенно так же интегральное уравнение

$$z(P) = \int K(Q, P)\, z(Q)\, dQ + f^*(P), \tag{8,4}$$

транспонированное к уравнению (2,4), сводится к системе

$$C_i^* = \sum_{j=1}^{m} K_{ji} C_j^* + f_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9,4}$$

транспонированной к системе (7,4).

В силу предположенной линейной независимости функций $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ каждым p линейно независимым решениям однородной системы (7,4) или (9,4) отвечают p линейно независимых решений однородного уравнения (2,4) или соответственно уравнения (8,4), и обратно. (Почему?) Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между решениями интегральных уравнений (2,4) и (8,4), с одной стороны, и решениями линейных алгебраических уравнений (7,4) и (9,4), с другой стороны. При этом решениям транспонированных одно по отношению к другому уравнений (2,4) и (8,4) соответствуют решения транспонированных уравнений (7,4) и (9,4).

Отсюда прямо вытекают первые две теоремы Фредгольма для интегрального уравнения (2,4), так как они справедливы для алгебраической линейной системы (7,4). (Проверьте!)

Чтобы доказать третью из этих теорем, заметим следующее. Если имеет место второй случай альтернативы для системы (7,4), то необходимым и достаточным условием существования решения системы (7,4) является условие

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

где $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ — любое решение транспонированной однородной системы. Пользуясь равенствами (6,4), это условие перепишем так:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* \int f(Q)\, b_i(Q)\, dQ = 0,$$

или:

$$\int f(Q)\left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q)\right) dQ = 0. \qquad (10,4)$$

Если $(C_1^*, \ldots, C_m^*)$ есть решение однородной системы (9,4), то $\sum C_i^* b_i(Q)$ есть решение однородного уравнения (8,4), транспонированного к уравнению (2,4). Поэтому условие (10,4) эквивалентно условию, чтобы

$$\int f(Q)\, z(Q)\, dQ = 0$$

для всякого решения $z(Q)$ однородного уравнения (8,4). Отсюда прямо следует третья теорема Фредгольма для уравнения (2,4).

Замечания. 1. Часто бывает, что ядро $K(P, Q)$ и функция $f(P)$ суть комплексные функции от действительных точек P и Q. Тогда и решения $y(P)$ интегрального уравнения (2,4) будут, вообще говоря, комплексными функциями действительной точки P. При этом сохраняются все доказанные в этом параграфе теоремы. Напомним, что если

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) + i\varphi_2(P),$$

где $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ — действительные функции действительной точки P, то по определению

$$\int \varphi(P)\, dP = \int \varphi_1(P)\, dP + i \int \varphi_2(P)\, dP.$$

2. Часто бывает, что $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ являются функциями от некоторого комплексного параметра λ. Рассуждения настоящего параграфа показывают, что для уравнения (2,4) имеет место первый или второй случай альтернативы Фредгольма в зависимости от того, равняется ли 0 или не равняется 0 определитель, составленный из коэффициентов системы (7,4), т. е. определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-K_{11} & -K_{12} \ldots & -K_{1m} \\ -K_{21} & 1-K_{22} \ldots & -K_{2m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -K_{m1} & -K_{m2} \ldots & 1-K_{mm} \end{vmatrix}, \qquad (11,4)$$

где

$$K_{ij} = \int b_i(Q, \lambda)\, a_j(Q, \lambda)\, dQ.$$

Пусть $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ при каждом Q из G суть голоморфные функции от λ в некоторой конечной области Λ комплексной плоскости. Мы будем предполагать, что $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ равномерно непрерывны по совокупности (Q, λ). Тогда K_{ij} и определитель (11,4) также суть голоморфные функции от λ*). Поэтому те значения λ, при которых определитель (11,4) равен 0 и потому имеет место второй случай альтернативы для (2,4), не могут иметь конечных предельных точек внутри Λ, если только определитель (11,4) отличен от 0 хотя бы при одном $\lambda \in \Lambda$.

3. Пусть K_{ij} и f_i — голоморфные функции $\lambda \in \Lambda$. Так будет, в частности, если $a_j(Q, \lambda)$ и $b_i(Q, \lambda)$ обладают перечисленными в замечании 2 свойствами, а $f(Q)$ — равномерно непрерывная функция Q, что мы и будем предполагать для простоты.

По известным правилам теории определителей коэффициенты C_i находятся из уравнений (7,4) в виде дробей, у которых знаменателем при всех i является один и тот же определитель (11,4), а в числителе стоит определитель D_i, получающийся из определителя (11,4) заменой его i-й колонки колонкой $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Раскрывая D_i по элементам этой последней колонки, получим:

$$C_i = \frac{\sum\limits_j M_{ij} f_j}{D(\lambda)},$$

где M_{ij} суть многочлены от K_{ij}. Подставляя только что найденные значения C_i в правую часть (5,4) и пользуясь формулами (6,4) для f_i, найдем:

$$y(P) = \frac{\int \sum\limits_{ij} M_{ij} b_j(Q, \lambda)\, a_i(P, \lambda)\, f(Q)\, dQ}{D(\lambda)} + f(P). \qquad (12,4)$$

*) Это нетрудно показать, представляя интеграл в виде предела интегральной суммы и пользуясь известной теоремой Вейерштрасса о том, что если последовательность голоморфных функций равномерно сходится в некоторой области, то предельная функция будет голоморфной в той же области (И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е, Физматгиз, 1960, гл. 5, § 1).

Числитель (при каждом фиксированном P) и знаменатель дроби, стоящей в правой части последнего равенства, суть голоморфные функции λ в области Λ.

Часто бывает полезным писать равенство (12,4) в следующем виде:

$$y(P) = \int \overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \tag{13,4}$$

где

$$\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \frac{\sum\limits_{ij} M_{ij} b_j(Q, \lambda)\, a_i(P, \lambda)}{D(\lambda)}. \tag{14,4}$$

Функция $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не зависит от $f(P)$ и, как показывает формула (14,4), представляется в виде частного от двух голоморфных во всей области Λ функций λ. $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ может не быть голоморфной функцией λ только при тех значениях λ, где $D(\lambda) = 0$, т. е. при которых для интегрального уравнения (2,4) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В предыдущем пункте было показано, что такие значения λ не имеют предельных точек внутри Λ, если только $D(\lambda)$ не равно 0 тождественно, что мы будем предполагать. Легко показать, что каждое такое значение $\lambda = \lambda_0$, где $D(\lambda_0) = 0$, действительно является особым для $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ в следующем смысле: $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ не является равномерно непрерывной функцией (P, Q, λ), когда λ находится в произвольно малой окрестности точки λ_0, а P и Q меняются в G.

В самом деле, допустим противное. Пусть функция $y(P, \lambda)$, определенная формулой (13,4), будет равномерно непрерывна, если $P \in G$, а λ меняется в некоторой окрестности точки λ_0. Подставим тогда правую часть (13,4) или, что все равно, (12,4) в обе части уравнения (2,4). Результаты подстановок будут при всякой равномерно непрерывной функции $f(Q)$ равномерно непрерывными функциями при той же области изменения P и λ. Мы знаем, что эти результаты совпадают, когда $\lambda \neq \lambda_0$ и $|\lambda - \lambda_0|$ достаточно мало, так как тогда $D(\lambda) \neq 0$. Значит, по непрерывности эти результаты совпадают и при $\lambda = \lambda_0$. Следовательно, при всякой функции $f(P)$ рассматриваемого класса интегральное уравнение (2,4) имеет решение при $\lambda = \lambda_0$: оно дается формулой (13,4) при $\lambda = \lambda_0$, где $\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ определено при

$\lambda=\lambda_0$ по непрерывности. Но тогда при этом значении λ для уравнения (2,4) имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, а не второй, и потому $D(\lambda_0)\neq 0$*).

Пример.

$$y(x)=-\lambda\int_0^1(x^2\xi+x\xi^2)\,y(\xi)\,d\xi+f(x).$$

Отсюда

$$y(x)=-\lambda\left[x^2\int_0^1\xi y(\xi)\,d\xi+x\int_0^1\xi^2 y(\xi)\,d\xi\right]+f(x).$$

Полагая

$$\int_0^1\xi y(\xi)\,d\xi=C_2\quad\text{и}\quad\int_0^1\xi^2 y(\xi)\,d\xi=C_1, \tag{15,4}$$

получим:

$$y(x)=f(x)-C_1\lambda x-C_2\lambda x^2. \tag{16,4}$$

Подставляя это выражение y в равенства (15,4), получим

$$\int_0^1\xi[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]\,d\xi=C_2,\quad\int_0^1\xi^2[f(\xi)-C_1\lambda\xi-C_2\lambda\xi^2]\,d\xi=C_1$$

или

$$b_1-\frac{C_1\lambda}{3}-\frac{C_2\lambda}{4}=C_2,\quad b_2-\frac{C_1\lambda}{4}-\frac{C_2\lambda}{5}=C_1, \tag{17,4}$$

где

$$b_1=\int_0^1\xi f(\xi)\,d\xi\quad\text{и}\quad b_2=\int_0^1\xi^2 f(\xi)\,d\xi.$$

Перепишем уравнения (17,4) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}C_1\frac{\lambda}{3}+C_2\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)&=b_1,\\ C_1\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)+C_2\frac{\lambda}{5}&=b_2.\end{aligned}\right\} \tag{18,4}$$

*) Предыдущие рассуждения легко переносятся на случай, когда $a_i(Q,\lambda)$, $b_i(Q,\lambda)$, $f(Q)$ имеют разрывы по Q на некоторых точках, достаточно гладких линиях и поверхностях до $(d-1)$-го измерения включительно, независимых от λ, если при подходе точки Q к местам разрыва $|a_i(Q,\lambda)|$, $|b_i(Q,\lambda)|$, $|f(Q)|$ не очень быстро растут. Решения будут неопределенными в тех точках P, где $a_i(P,\lambda)$ и $f(P)$ не определены.

Определитель этой системы равен

$$1+\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{240}.$$

Он имеет только два корня

$$\lambda=60\pm 16\sqrt{15}.$$

Только при этих двух значениях λ имеет место второй случай альтернативы Фредгольма. В этих случаях все решения однородного интегрального уравнения

$$y(x)+\lambda\int_0^1 (x^2\xi+x\xi^2)\,y(\xi)\,d\xi=0$$

даются формулами

$$y(x)=C\left(x\mp\frac{5}{\sqrt{15}}x^2\right),$$

где C — произвольное постоянное. При других же значениях λ наше интегральное уравнение имеет единственное решение, даваемое формулой (16,4), где C_1 и C_2 определяются единственным образом из системы (18,4). Это решение можно представить в виде (13,4), где

$$\overline{\Gamma}(x,\xi,\lambda)=\lambda\frac{\dfrac{\xi x}{5}\lambda-\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)\xi^2x-\xi x^2\left(1+\dfrac{\lambda}{4}\right)+\xi^2x^2\dfrac{\lambda}{3}}{1+\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{\lambda^2}{240}}.$$

Задачи. Найти $u(x)$ из уравнений

1. $u(x)=e^x+\lambda\int_0^{10} xt\,u(t)\,dt.$

2. $u(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin x\,u(t)\,dt.$

3. $u(x)=\lambda\int_0^{\pi}\cos x\,u(t)\,dt.$

4. $u(x)=x+\lambda\int_0^{1}(x-t)\,u(t)\,dt.$

5. $u(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\sin x\sin t\,u(t)\,dt+f(x).$

§ 5. Интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами

Для таких уравнений всегда имеет место первый случай альтернативы, т. е. такие уравнения всегда имеют единственное решение. Доказывается это методом последовательных приближений, как в теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказываются существование и единственность решения одного интегрального уравнения, эквивалентного заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. По существу, это — применение принципа сжатых отображений, изложенного, например, в моей книге по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Я мог бы здесь только проверить возможность применения этого общего принципа, но я предпочту провести доказательство для данного конкретного случая, так как при этом мы получим некоторые формулы, полезные для дальнейшего.

Введем символические обозначения, которыми мы иногда будем пользоваться в дальнейшем. Пусть $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ — равномерно непрерывные функции P и Q, когда $P \in G$ и $Q \in G$. Положим

$$K_2 \circ K_1 = \int K_2(P, S) K_1(S, Q)\, dS. \tag{1,5}$$

Назовем ядро $K(P, Q) = K_2 \circ K_1$ символическим произведением ядра $K_2(P, Q)$ на $K_1(P, Q)$ *). Легко показать, что

---

*) Введенное таким образом символическое умножение ядер аналогично умножению матриц.

Пусть функция $\varphi_1(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_1(P, Q)$ в функцию $\varphi_2(P) = \int K_1(P, Q)\, \varphi_1(Q)\, dQ$, а функция $\varphi_2(P)$ преобразуется с помощью ядра $K_2(P, Q)$ в функцию $\varphi_3(P) = \int K_2(P, Q) \varphi_2(Q) dQ$. Тогда ядро $K_2 \circ K_1$ задает преобразование функции $\varphi_1(P)$ в $\varphi_3(P)$, т. е. $\varphi_3 = \int (K_2 \circ K_1)\, \varphi_1(Q)\, dQ$. Точно так же последовательное применение в n-мерном пространстве двух линейных преобразований дает линейное преобразование с матрицей, равной произведению матриц этих преобразований.

$K_2 \circ K_1$ есть равномерно непрерывная функция P и Q. Действительно,

$$\left| \int K_2(P_1, S) K_1(S, Q_1)\, dS - \int K_2(P_2, S) K_1(S, Q_2)\, dS \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int K_2(P_1, S) [K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)]\, dS \right| +$$
$$+ \left| \int K_1(S, Q_2) [K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)]\, dS \right|. \qquad (2,5)$$

Пусть верхняя граница абсолютных значений $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, когда $P \in G$ и $Q \in G$, не превосходит M, и D — объем области G. В силу равномерной непрерывности $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|K_2(P_1, S) - K_2(P_2, S)| < \frac{\varepsilon}{2DM}$$

и

$$|K_1(S, Q_1) - K_1(S, Q_2)| < \frac{\varepsilon}{2DM},$$

если расстояние между точками P_1 и P_2 и между точками Q_1 и Q_2 меньше η. Легко видеть, что при этом условии левая часть неравенства (2,5) будет меньше ε, что и требовалось доказать. Заметим, что, вообще говоря, $K_2 \circ K_1 \neq K_1 \circ K_2$. Если $K_3(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q, то легко проверить, что

$$K_1 \circ (K_2 \circ K_3) = (K_1 \circ K_2) \circ K_3.$$

Переходим теперь к доказательству того, что интегральные уравнения с достаточно малыми по абсолютной величине непрерывными ядрами всегда имеют единственное решение. Этим мы воспользуемся в дальнейшем для доказательства теорем Фредгольма в случае интегрального уравнения с любым непрерывным ядром.

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P). \qquad (3,5)$$

Пусть $K(P, Q)$ и $f(P)$ — некоторые равномерно непрерывные функции, когда $P \in G$ и $Q \in G$, где G — некоторая конечная область *). Здесь λ — некоторый параметр. Обычно он входит в уравнение именно так, как указано в (3,5).

Все дальнейшие рассуждения этого параграфа одинаково применимы как в том случае, когда рассматриваемые функции принимают комплексные значения, так и в том случае, если они принимают только действительные значения. Параметр λ тоже может принимать комплексные значения. Но очень существенно, что точки P и Q действительны, т. е. что все координаты этих точек действительны, иначе возникла бы необходимость определить, что такое интеграл по многим комплексным переменным.

Следуя в точности тому определению ядра, которое было дано прежде, нам следовало бы теперь называть ядром $\lambda K(P, Q)$. Но, пользуясь обычной терминологией, мы будем функцию $K(P, Q)$ также называть ядром интегрального уравнения (3,5). Говоря в заголовке настоящего параграфа о малости ядра, мы имели в виду малость $\lambda K(P, Q)$.

Мы будем искать решение интегрального уравнения (3,5) в виде бесконечного степенного ряда по λ

$$y(P) = y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \ldots \tag{4,5}$$

Подставляя формально этот ряд в (3,5), получим:

$$y_0(P) + \lambda y_1(P) + \lambda^2 y_2(P) + \lambda^3 y_3(P) + \ldots =$$
$$= \lambda \int K(P, Q) [y_0(Q) + \lambda y_1(Q) + \ldots] \, dQ + f(P). \tag{5,5}$$

---

*) Вместо того чтобы каждый раз подчеркивать равномерную непрерывность рассматриваемых на открытой области G функций, можно было бы рассматривать эти функции на конечной замкнутой области $\overline{G}$ (т. е. на G вместе с ее границей) и требовать только их непрерывность; тогда отсюда прямо следовала бы и равномерная непрерывность этих функций. Если задана какая-нибудь равномерно непрерывная на открытой области G функция φ, то ее можно продолжить по непрерывности и на границу области G. Тогда получится функция, равномерно непрерывная на замкнутой области $\overline{G}$. Для тех простых областей, которые мы будем рассматривать (ср. замечание к § 1), d-мерный объем границы равен 0. Тогда интеграл от функции φ по области G совпадает с интегралом от ее продолжения по $\overline{G}$.

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим:

$$y_0(P)=f(P),$$
$$y_{k+1}(P)=\int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ, \quad k=0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{6,5}$$

или

$$y_0(P)=f(P),$$
$$y_1(P)=\int K(P, P_1) f(P_1)\, dP_1,$$
$$y_2(P)=\int\int K(P, P_1) K(P_1, P_2) f(P_2)\, dP_1\, dP_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_k(P)=\overbrace{\int \ldots \int}^{k \text{ раз}} K(P, P_1)\, K(P_1, P_2) \ldots K(P_{k-1}, P_k) f(P_k) \times \times dP_1 \ldots dP_k. \tag{7,5}$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$y_k(P)=\int K^{(k)}(P, Q) f(Q)\, dQ, \quad k=1,\ 2,\ 3, \ldots, \tag{8,5}$$

где

$$K^{(k)}(P, Q)=\overbrace{\int \ \ldots \ \int}^{(k-1) \text{ раз}} K(P, P_1) \ldots K(P_{k-1}, Q)\, dP_1 \ldots dP_{k-1} \quad \text{при} \quad k=2,\ 3, \ldots, \tag{9,5}$$

$$K^1(P, Q)=K(P, Q).$$

Пользуясь символическими обозначениями, мы можем ядро $K^{(k)}(P, Q)$ представить в виде

$$K^{(k)}(P, Q)=\underbrace{K \circ K \circ K \circ \ldots \circ K.}_{k \text{ раз}} \tag{10,5}$$

По доказанному в начале этого параграфа все ядра $K^{(k)}(P, Q)$ равномерно непрерывны. Функция $K^{(k)}(P, Q)$ называется *k-м повторением ядра* или *k-й итерацией ядра* $K(P, Q)$. Все функции $y_k(P)$, как легко видеть, также равномерно непрерывны.

Оценим ядра $K^{(k)}(P, Q)$. В силу равномерной непрерывности ядро $K(P, Q)$ ограничено. Пусть

$$|K(P, Q)| < M. \tag{11,5}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (9,5), получим:

$$|K^{(k)}(P, Q)| \leqslant M^k \cdot D^{k-1}, \tag{12,5}$$

где D означает объем области G. Пользуясь формулой (8,5), мы получим отсюда

$$|y_k(P)| \leqslant M^k D^k F,$$

где F есть верхняя грань $|f(P)|$. Поэтому ряд (4,5) сходится абсолютно и равномерно по P в области G, если

$$|\lambda| < \frac{1}{MD}. \tag{13,5}$$

Сумма этого ряда будет непрерывной функцией P, так как каждое слагаемое непрерывно. В силу равномерной сходимости ряда (4,5) интегрирование в ранее формально написанном равенстве (5,5) можно производить почленно. Поэтому благодаря определению $y_k(P)$ по формулам (6,5) равенство (5,5) действительно имеет место, т. е. функция $y(P)$, определенная рядом (4,5), является решением интегрального уравнения (3,5).

Покажем, что это решение единственное в классе ограниченных функций при условии (13,5). Действительно, допустим, что существуют два таких решения уравнения (3,5) $y_1(P)$ и $y_2(P)$. Подставляя их в уравнение (3,5) и вычитая почленно полученные тождества, найдем:

$$y_2(P) - y_1(P) = \lambda \int K(P, Q)[y_2(Q) - y_1(Q)]\, dQ. \tag{14,5}$$

Обозначим через Y верхнюю грань $|y_2(P) - y_1(P)|$; тогда из (14,5), пользуясь неравенством (11,5), найдем:

$$Y \leqslant |\lambda| MDY.$$

Отсюда на основании (13,5) получим:

$$Y \leqslant cY, \text{ где } c < 1.$$

Это возможно, только если $Y = 0$, что и требовалось доказать.

Часто бывает удобно представить решение интегрального уравнения (3,5) в следующем виде:

$$y(P) = \lambda \int \Gamma(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ + f(P), \tag{15,5}$$

где

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} K^{(k)}(P, Q). \tag{16,5}$$

Из оценок (12,5) следует что ряд (16,5) сходится равномерно по (P, Q, λ), если $P \in G$, $Q \in G$ и $|\lambda| < \frac{1}{MD} - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Отсюда функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ есть равномерно непрерывная функция по совокупности (P, Q) при фиксированном λ и голоморфная функция от λ в круге (13,5), если $P \in G$ и $Q \in G$. Поэтому интеграл (15,5) существует. Что он действительно дает решение интегрального уравнения (3,5) представленное рядом (4,5), легко увидеть, если подставить вместо $\Gamma(P, Q, \lambda)$ ряд (16,5) в правую часть (15,5) и интегрирование по Q выполнить почленно.

Функция $\Gamma(P, Q, \lambda)$ называется *резольвентой* интегрального уравнения (3,5) *). Как видно из предыдущего, она определяется ядром интегрального уравнения и не зависит от $f(P)$. Так как функция $y(P)$, даваемая формулой (15,5), представляет единственное решение уравнения (3,5), то отсюда следует, что уравнения (3,5) и (15,5) эквивалентны. Поэтому,

---

*) Сравним (15,5) с (13,4). Покажем, что для интегральных уравнений (3,5) с вырожденными ядрами, для которых $a_i(P)$ и $b_i(P)$ равномерно непрерывны и достаточно малы по абсолютной величине, т. е. для тех интегральных уравнений, которые принадлежат одновременно к типам, рассмотренным в §§ 4 и 5, будет

$$\overline{\Gamma}(P, Q, \lambda) = \lambda \Gamma(P, Q, \lambda).$$

Так как при этом имеет место первый случай альтернативы, то $D(\lambda) \neq 0$.

Допустим, что в некоторой точке (P_0, Q_0, λ_0)

$$\overline{\Gamma}(P_0, Q_0, \lambda_0) \neq \lambda_0 \Gamma(P_0, Q_0, \lambda_0), \quad D(\lambda_0) \neq 0.$$

Так как для уравнений с рассматриваемыми ядрами $\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)$ и $\Gamma(P_0, Q, \lambda_0)$ непрерывны по Q, то всегда можно найти такую окрестность G_0 точки Q_0, в которой всюду

$$\operatorname{Re}\{\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \operatorname{Re}\{\lambda_0 \Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}$$

или

$$\operatorname{Im}\{\overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0)\} \neq \operatorname{Im}\{\lambda_0 \Gamma(P_0, Q, \lambda_0)\}.$$

С другой стороны, в силу единственности решения интегральных уравнений рассматриваемого типа при любой равномерно непрерывной функции $f(P)$ должно иметь место следующее равенство:

$$\int \overline{\Gamma}(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ = \lambda_0 \int \Gamma(P_0, Q, \lambda_0) f(Q)\, dQ.$$

В частности, это равенство должно выполняться при функции $f(Q)$, равной нулю всюду вне окрестности G_0 точки Q_0 и положительной внутри этой окрестности, что невозможно. (Почему?)

если в уравнении (15,5) считать $y(P)$ известной функцией, а $f(P)$ неизвестной функцией, то единственное решение $f(P)$ этого уравнения дается формулой (3,5). Функция $K(P, Q)$ в этой формуле играет роль резольвенты для уравнения (15,5) с ядром $\Gamma(P, Q, \lambda)$.

Применяя к уравнению

$$z(P)=\lambda\int K(Q, P)\,z(Q)\,dQ+f(P), \tag{17,5}$$

транспонированному к уравнению (3,5), те же рассуждения, какие мы только что провели для уравнения (3,5), мы найдем, что в круге (13,5) оно имеет единственное в классе ограниченных функций решение, которое дается рядом

$$z(P)=z_0(P)+\lambda z_1(P)+\lambda^2 z_2(P)+\lambda^3 z_3(P)+\ldots$$

Здесь

$$z_0(P)=f(P),$$
$$z_k(P)=\int K(Q, P)\,z_{k-1}(Q)\,dQ$$

или, обозначая через $K^*(P, Q)$ ядро $K(Q, P)$, получим:

$$z_1(P)=\int K^*(P, P_1)\,f(P_1)\,dP_1,$$

$$z_k(P)=\overbrace{\int\ldots\int}^{k\text{ раз}} K^*(P, P_1)\,K^*(P_1, P_2)\ldots K^*(P_{k-1}, P_k)\times$$
$$\times f(P_k)\,dP_1\ldots dP_k$$

или

$$z_k(P)=\int K^{*(k)}(P, Q)\,f(Q)\,dQ, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

где

$$K^{*(k)}(P, Q)=$$
$$=\overbrace{\int\ldots\int}^{k-1\text{ раз}} K^*(P, P_1)\ldots K^*(P_{k-1}, Q)\,dP_1\ldots dP_{k-1}.$$

Легко видеть, выписывая соответствующие интегралы, что $K^{*(k)}(P, Q)=K^{(k)}(Q, P)$. Отсюда следует, что решение уравнения (17,5) можно представить в виде

$$z(P)=\lambda\int\Gamma^*(P, Q, \lambda)\,f(Q)\,dQ+f(P), \tag{18,5}$$

где

$$\Gamma^*(P, Q, \lambda)=\Gamma(Q, P, \lambda).$$

Таким образом, мы видим, что *в круге* (13,5) *как уравнение* (3,5), *так и транспонированное к нему уравнение* (17,5) *при всякой равномерно непрерывной функции* $f(P)$ *и при сделанных предположениях о ядре имеют единственное решение*, т. е. мы доказали, что в этом случае всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма.

Отметим следующие две формулы:

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int K(P, P_1)\,\Gamma(P_1, Q, \lambda)\, dP_1, \qquad (19,5)$$

$$\Gamma(P, Q, \lambda) = K(P, Q) + \lambda \int \Gamma(P, P_1, \lambda)\, K(P_1, Q)\, dP_1. \qquad (20,5)$$

Для проверки этих формул достаточно подставить вместо Γ ряд (16,5), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой (10,5).

Методом последовательных приближений можно пользоваться для приближенного решения интегральных уравнений при достаточно малом $|\lambda|$ *).

§ 6. Интегральные уравнения с ядрами, близкими к вырожденным

Пусть дано интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P), \qquad (1,6)$$

где $f(P)$ — равномерно непрерывная функция, а

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q) + K_1(P, Q) = A(P, Q) + K_1(P, Q).$$

Здесь $a_i(P)$, $b_i(Q)$, $K_1(P, Q)$ — равномерно непрерывные и, следовательно, ограниченные функции, так как их области определения конечны. Нам опять безразлично, принимают ли эти функции комплексные значения или только действительные.

Чтобы последующие довольно громоздкие выкладки не затемняли существа дела, нам будет удобнее записывать интегральные уравнения в символической форме.

---

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, Физматгиз, 1962, гл. II, § 2.

Равенство

$$\psi(P)=\int K(P,\ Q)\,y(Q)\,dQ \tag{2,6}$$

условимся записывать символически в виде

$$\psi=Ky.$$

Таким образом, через K мы будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в функцию $\psi(P)=\int K(P,\ Q)\,y(Q)\,dQ$. Этот оператор определяется ядром $K(P,\ Q)$. Через K^* будем обозначать оператор, который определяется транспонированным ядром $K^*(P,\ Q)=K(Q,\ P)$. Символом E будем обозначать оператор, который функцию $y(P)$ переводит в эту же функцию, т. е. $Ey=y$ при всякой функции $y(P)$. Оператор $K_1\pm K_2$ определяем равенством

$$(K_1\pm K_2)\,y=K_1y\pm K_2y$$

при любой функции $y(P)$. Оператор K_1K_2 определяем при помощи следующего равенства:

$$K_1K_2y=K_1(K_2y)$$

для любой функции $y(P)$.

Легко видеть, что если K_1 и K_2 — операторы вида (2,6) с ядрами $K_1(P,\ Q)$ и $K_2(P,\ Q)$, то оператор $K_1\pm K_2$ определяется ядром $K_1(P,\ Q)\pm K_2(P,\ Q)$, а оператор K_1K_2 определяется ядром $K_1\circ K_2$.

Таким образом, уравнение (1,6) можно записать в виде

$$(E-\lambda K)\,y=f.$$

Прежде чем переходить к доказательству теорем Фредгольма для уравнения (1,6), сформулируем следующие леммы:

Лемма 1. *Если* $A(P,\ Q)$ — *вырожденное ядро и* $K(P,\ Q)$ — *произвольное непрерывное ядро, то* $A\circ K$ *и* $K\circ A$ *также суть вырожденные ядра.*

Лемма 2. *Ядро, транспонированное к* $K_1\circ K_2$, *равно* $K_2^*\circ K_1^*$.

В справедливости этих утверждений легко убедиться, рассматривая соответствующие интегралы.

Докажем теперь, что для уравнения (1,6) при $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, где M_1 есть верхняя грань значений $|K_1(P, Q)|$, а D — объем области G, справедливы три теоремы Фредгольма.

1. Первая теорема Фредгольма. Покажем, что если однородное уравнение (1,6) имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение (1,6) имеет решение при всякой функции $f(P)$.

Заменив K на $A+K_1$, перепишем уравнение (1,6) в виде

$$(E-\lambda A-\lambda K_1)\, y=f,$$

где A и K_1 — операторы, соответствующие ядрам $A(P, Q)$ и $K_1(P, Q)$. Тогда

$$(E-\lambda K_1)\, y=\lambda A y+f. \tag{3,6}$$

Положим

$$(E-\lambda K_1)\, y=\eta. \tag{4,6}$$

Так как $|\lambda| < \frac{1}{M_1 D}$, то из доказанной в предыдущем параграфе формулы (15,5) следует, что

$$y=\eta+\lambda \boldsymbol{\Gamma}\eta=(E+\lambda\boldsymbol{\Gamma})\eta, \tag{5,6}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ — оператор, соответствующий резольвенте $\boldsymbol{\Gamma}(P, Q, \lambda)$ ядра $K_1(P, Q)$. Подставляя это выражение $y(P)$ в уравнение (3,6), получим:

$$\eta=\lambda A(E+\lambda\boldsymbol{\Gamma})\eta+f$$

или

$$[E-\lambda A(E+\lambda\boldsymbol{\Gamma})]\,\eta=f. \tag{6,6}$$

Ядро $A(P, Q)+A \circ \lambda\boldsymbol{\Gamma}$ этого интегрального уравнения вырожденное, как это следует из леммы 1. Таким образом, мы показали, что каждому решению $y(P)$ уравнения (1,6) соответствует по формуле (4,6) решение $\eta(P)$ уравнения (6,6) с вырожденным ядром.

Обратно, легко проверить, что каждому решению $\eta(P)$ уравнения (6,6) соответствует решение $y(P)$ уравнения (1,6), определенное по формуле (5,6). Далее, если однородное уравнение (6,6) имеет нетривиальное решение, то однородное уравнение (1,6) также имеет нетривиальное решение, которое определяется формулой (5,6).

Так как, по предположению, однородное уравнение (1,6) имеет только тривиальное решение, то, следовательно, однородное уравнение (6,6) также имеет только тривиальное решение.

Для уравнения (6,6) с вырожденным ядром мы доказали в § 4 первую теорему Фредгольма. Поэтому неоднородное уравнение (6,6) имеет решение $\eta(P)$ при всякой функции $f(P)$. По формуле (5,6) мы получим решение $y(P)$ уравнения (1,6) при любой функции $f(P)$. Это решение, очевидно, единственное.

Тем самым первая теорема Фредгольма доказана, так как если однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное уравнение либо не имеет решения, либо это решение не единственное.

2. Вторая теорема Фредгольма. Покажем, что уравнение $(E-\lambda A-\lambda K_1)y=0$ и транспонированное к нему уравнение

$$(E-\lambda A^*-\lambda K_1^*)z=0 \tag{7,6}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, если $|\lambda|<\frac{1}{M_1 D}$.

Заметим, что однородные уравнения (1,6) и (6,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений, так как каждым p линейно независимым решениям одного уравнения соответствует по формуле (4,6) или (5,6) p линейно независимых решений другого уравнения.

Однородное уравнение, транспонированное к уравнению (6,6), имеет в силу леммы 2 вид

$$[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{8,6}$$

Так как уравнение (6,6) имеет вырожденное ядро, то по второй теореме Фредгольма, доказанной в § 4 для уравнений с вырожденными ядрами, однородные уравнения (6,6) и (8,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Покажем теперь, что уравнения (8,6) и (7,6) эквивалентны. Пусть некоторая функция $\zeta(P)$ есть решение уравнения (8,6). Покажем, что она удовлетворяет также уравнению (7,6). Применяя к правой и левой частям равенства (8,6) оператор $E-\lambda K_1^*$, мы получим:

$$(E-\lambda K_1^*)[E-\lambda(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=$$
$$=[E-\lambda K_1^*-\lambda(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)A^*]\zeta=0. \tag{9,6}$$

Так как из формул (17,5) и (18,5) следует, что

$$(E-\lambda K_1^*)(E+\lambda\Gamma^*)\varphi=\varphi$$

при любой функции $\varphi(P)$, то из равенства (9,6) получаем:

$$(E-\lambda K_1^*-\lambda A^*)\zeta=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично, применяя оператор $E+\lambda\Gamma^*$ к правой и левой частям равенства (7,6) и пользуясь равенством $(E+ +\lambda\Gamma^*)(E-\lambda K_1^*)=E$, получим, что всякое решение уравнения (7,6) удовлетворяет уравнению (8,6). Итак, мы доказали, что однородные уравнения (1,6), (6,6), (8,6) и (7,6) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Тем самым вторая теорема Фредгольма доказана.

Те значения λ, при которых для уравнения (1,6) имеет место второй случай альтернативы Фредгольма, называются *собственными значениями уравнения* (1,6) (или ядра $K(P, Q)$; ср. § 2), а соответствующие нетривиальные решения однородного уравнения — *собственными функциями, отвечающими этому собственному значению.*

Так как в круге $|\lambda|<\frac{1}{M_1D}$ функция $\Gamma(Q, P, \lambda)$ есть голоморфная функция от λ, то определитель (11,4), соответствующий вырожденному уравнению (6,6), также есть голоморфная функция от λ в этом круге. При $\lambda=0$ этот определитель обращается в 1. Следовательно, он не равен 0 тождественно. Поэтому его корни не могут иметь точек накопления в этом круге. Следовательно, *собственные значения* λ *уравнения* (1,6) *не могут иметь предельных точек в круге* $|\lambda|<\frac{1}{M_1D}$.

3. Третья теорема Фредгольма. Покажем, что решение уравнения (1,6) существует тогда и только тогда, если

$$\int f(P)\,z(P)\,dP=0,$$

где $z(P)$ — любое решение однородного транспонированного к (1,6) уравнения (7,6).

При доказательстве первой теоремы Фредгольма для уравнения (1,6) мы установили, что уравнение (1,6) имеет решение тогда и только тогда, если существует решение уравнения (6,6) с вырожденным ядром. В § 4 мы показали, что уравнение (6,6) с вырожденным ядром имеет решение тогда и только тогда, если

$$\int f(P)\,\zeta(P)\,dP = 0,$$

где $\zeta(P)$ — любое решение уравнения (8,6). Но согласно только что доказанному совокупность таких решений $\zeta(P)$ совпадает с совокупностью решений $z(P)$ уравнения (7,6). Этим теорема доказана.

§ 7. Интегральные уравнения с равномерно непрерывными ядрами

Всякое равномерно непрерывное ядро $K(P, Q)$ можно равномерно аппроксимировать с какой угодно точностью вырожденными ядрами. Действительно, пусть $K(P, Q)$ — какая-нибудь равномерно непрерывная функция (P, Q), заданная на конечной области G. По теореме Вейерштрасса, доказываемой в курсе анализа*), для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $K_0(P, Q)$ достаточно высокой степени относительно координат точек P и Q, что всюду на G

$$|K(P, Q) - K_0(P, Q)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что каждый член многочлена $K_0(P, Q)$ можно представить в виде произведения двух множителей, из которых один зависит только от координат точки P, а другой — только от координат точки Q. Поэтому можно написать

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{N} a_i(P)\,b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

причем

$$|K_1(P, Q)| < \varepsilon.$$

---

*) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. II, § 4, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951; С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, изд. 1-е, М.—Л., 1947, стр. 229.

Отсюда, применяя теорему, доказанную в предыдущем параграфе, мы найдем, что в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon D},$$

где D — объем области G, справедливы все три теоремы Фредгольма и что в этом круге нет точек накопления собственных значений λ. Так как ε можно взять как угодно малым, то отсюда следует справедливость этих теорем на сколь угодно больших кругах с центром в точке $\lambda = 0$, т. е. справедливость их на всей плоскости λ.

Напомним ход рассуждений, которые привели нас к доказательству теорем Фредгольма для уравнений с равномерно непрерывными ядрами. Сначала (§ 4) мы доказали эти теоремы для интегральных уравнений с вырожденными ядрами. В § 6 эти теоремы были доказаны для уравнений с ядрами, близкими к вырожденным. А в настоящем параграфе было показано, что всякое равномерно непрерывное ядро может быть с какой угодно точностью равномерно аппроксимировано вырожденным ядром. Тем самым получилось доказательство теорем Фредгольма для интегральных уравнений с любыми равномерно непрерывными ядрами.

Метод, которым мы доказали здесь теоремы Фредгольма, принадлежит Е. Шмидту. В своем изложении я использовал записки лекций С. Л. Соболева. Заметим, что можно приближенно решать интегральные уравнения с непрерывными ядрами, заменяя эти ядра близкими к ним вырожденными *).

§ 8. Интегральные уравнения с ядрами вида $\frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$

1. Здесь P и Q принадлежат некоторой конечной замкнутой области $\overline{G}$ (ср. примечание на стр. 31), а $\overline{K}(P, Q)$ — некоторая непрерывная по точкам (P, Q) (т. е. по совокупности точек P и Q) функция; PQ — расстояние между точками P и Q. Целью п. 1 настоящего параграфа является доказательство того, что *для интегральных уравнений с ядрами такого*

---

*) Ср. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е, 1962, гл. II, § 4.

вида при $\alpha < d$, где d есть число измерений области G, на всей плоскости λ справедливы все три теоремы Фредгольма и что тогда собственные значения λ не могут иметь конечных предельных точек.

Предварительно докажем следующую лемму для ядер $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$, непрерывных по (P, Q), если $P \neq Q$, $P \in \overline{G}$ и $Q \in \overline{G}$.

Если

$$|K_1(P, Q)| < \frac{A_1}{PQ^{\alpha_1}}, \quad 0 \leqslant \alpha_1 < d \tag{1,8}$$

и

$$|K_2(P, Q)| < \frac{A_2}{PQ^{\alpha_2}}, \quad 0 \leqslant \alpha_2 < d, \tag{2,8}$$

то интеграл

$$K_3(P, Q) = \int K_1(P, P_1) K_2(P_1, Q)\, dP_1$$

всегда существует и непрерывен по (P, Q), если P отлично от Q; далее,

$$|K_3(P, Q)| < \frac{A_3}{PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}}, \quad \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 > d, \tag{3,8}$$

и

$$|K_3(P,Q)| < A_3 |\ln PQ| + A_4, \quad \text{если } \alpha_1 + \alpha_2 = d, \tag{4,8}$$

где A_3 и A_4 — некоторые постоянные. Если же $\alpha_1 + \alpha_2 < d$, то этот интеграл существует всегда и есть равномерно непрерывная функция от (P, Q) *).

Доказательство. Пусть $P \neq Q$. Тогда

$$|K_3(P, Q)| \leqslant \int |K_1(P, P_1)| \cdot |K_2(P_1, Q)|\, dP_1 \leqslant$$

$$\leqslant \overbrace{\int \cdots \int}^{d}_{r_1 \leqslant D} \frac{A_1 A_2 dx_1^{(1)} \ldots dx_d^{(1)}}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d} (x_i - x_i^{(1)})^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot \left[\sum\limits_{i=1}^{d} (x_i^{(1)} - y_i)^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}} = I. \tag{5,8}$$

Здесь x_i, $x_i^{(1)}$, y_i, $i = 1, \ldots, d$, — соответственно координаты точек P, P_1, Q; D — диаметр области $\overline{G}$, т. е.

*) Ср. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, изд. 1-е, М. — Л., 1947, стр. 233.

верхняя грань расстояний между двумя ее точками; $r_1=\sqrt{\sum (x_i^{(1)}-x_i)^2}$.

Для простоты вычислений, не ограничивая общности, положим

$$x_1=\ldots=x_d=0;\ y_1=\varrho,\ y_2=\ldots=y_d=0,$$

где $\varrho=PQ$. Положим далее

$$x_i^{(1)}=\varrho\xi_i.$$

Тогда интеграл I, стоящий в правой части (5,8), можно переписать так:

$$I=\overbrace{\int\ldots\int}^{d}_{r_1\leqslant D}\frac{A_1A_2\varrho^d d\xi_1\ldots d\xi_d}{\left(\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot\left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{i=2}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}\varrho^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Заметим, что если $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i^2}\geqslant 2$, то

$$\sqrt{(\xi_1-1)^2+\sum_{i=2}^{d}\xi_i^2}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\xi_i^2}. \qquad (6,8)$$

Действительно, из рис. 2 видно, что $PM+OP\geqslant OM$. Но $OP=1$. Следовательно, $PM\geqslant OM-1=$ $=\frac{1}{2}\Big(OM+(OM-2)\Big)$. Но по условию $OM\geqslant 2$. Поэтому $PM\geqslant\frac{OM}{2}$.

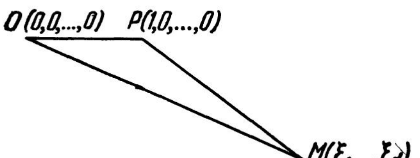

Рис. 2.

Разобьем интеграл I на две части и воспользуемся оценкой (6,8). Тогда получим:

$$I\leqslant\frac{A_1A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}}\int\ldots\int_{\sum\xi_i^2\leqslant 4}\frac{d\xi\ldots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot\left[(\xi_1-1)^2+\sum\limits_{i=2}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_2}{2}}}+$$

$$+\frac{A_1A_2}{\varrho^{\alpha_1+\alpha_2-d}}\int\ldots\int_{4\leqslant\sum\xi_i^2\leqslant\frac{D^2}{\varrho^2}}\frac{2^{\alpha_2}d\xi_1\ldots d\xi_d}{\left[\sum\limits_{i=1}^{d}\xi_i^2\right]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}}.$$

Интеграл в первом слагаемом сходится и дает некоторое постоянное, не зависящее от ϱ число C_1. Для вычисления второго интеграла перейдем к полярным координатам. Получим:

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_2^{\frac{D}{\varrho}} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau, \tag{7,8}$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная.

Если $\alpha_1 + \alpha_2 > d$, то из последней формулы следует, что

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_2^{\infty} \tau^{d-1-\alpha_1-\alpha_2}\, d\tau = C_3 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2},$$

т. е. оценка (3,8).

Если $\alpha_1 + \alpha_2 = d$, то из формулы (7,8) следует

$$I \leqslant C_1 + C_2 \ln \frac{D}{2\varrho},$$

т. е. оценка (4,8) для $K(P, Q)$*).

Если же $\alpha_1 + \alpha_2 < d$, то прежде всего ясно, что $K_3(P, Q)$ существует и при $P = Q$. Далее, из оценки (7,8) следует

$$I \leqslant C_1 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2} + \\ + \frac{C_2 \varrho^{d-\alpha_1-\alpha_2}}{d-\alpha_1-\alpha_2} \left[\left(\frac{D}{\varrho} \right)^{d-\alpha_1-\alpha_2} - 2^{d-\alpha_1-\alpha_2} \right] \leqslant C_3, \tag{8,8}$$

где C_3 есть некоторая постоянная.

Докажем теперь, что $K_3(P, Q)$ всегда непрерывно зависит от (P, Q), если P не совпадает с Q. Для этого заметим, что

$$|K_3(P, Q) - K_3(P^*, Q^*)| \leqslant \\ \leqslant |K_3(P, Q) - K_3(P, Q^*)| + |K_3(P, Q^*) - K_3(P^*, Q^*)| \leqslant \\ \leqslant \int |K_1(P, P_1)| \cdot |K_2(P_1, Q) - K_2(P_1, Q^*)|\, dP_1 + \\ + \int |K_2(P_1, Q^*)| \cdot |K_1(P, P_1) - K_1(P^*, P_1)|\, dP_1. \tag{9,8}$$

Мы предположили, что функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ заданы для всех точек P и Q (если $P \neq Q$), принадлежа-

*) В дальнейших рассмотрениях случая $\alpha_1 + \alpha_2 = d$ всегда можно избежать, увеличивая немного α_1 или α_2.

щих $\overline{G}$, и что $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ непрерывны всюду, где только $P \neq Q$. Поэтому на любом замкнутом множестве точек (P, Q), не содержащем точек, для которых $P = Q$, функции $K_1(P, Q)$ и $K_2(P, Q)$ равномерно по (P, Q) непрерывны. Отсюда каждая из разностей, стоящих под знаком интеграла, равномерно по P_1 мала, если только точки Q и Q^*, P и P^* достаточно близки, во всей области $\overline{G}$ точек P_1, за исключением некоторых окрестностей G_1, G_2, G_3, G_4 точек $P_1 = Q$, $P_1 = Q^*$, $P_1 = P$, $P_1 = P^*$. К G_1, G_2, G_3, G_4 мы относим точки G, отстоящие соответственно от Q, Q^*, P, P^* не дальше некоторого малого, но фиксированного r, не меняющегося при приближении точки P к P^*, Q к Q^*. Поэтому в силу условий (1,8) и (2,8) интегралы, входящие в (9,8) и взятые по областям $\overline{G} - (G_1 + G_2)$ и $\overline{G} - (G_3 + G_4)$, делаются как угодно малыми при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*). Части же интегралов (9,8), взятые по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4, в силу условий (1,8) и (2,8) делаются как угодно малыми, когда $r \longrightarrow 0$, если $P \neq Q$.

Если же $\alpha_1 + \alpha_2 < d$, то при достаточной близости точек (P, Q) и (P^*, Q^*) интегралы (9,8) делаются как угодно малыми, если даже точки P и Q (или P^* и Q^*) совпадают между собой, так как в этом случае части этих интегралов по окрестностям G_1, G_2, G_3 и G_4 равномерно по (P, Q) стремятся к 0 при $r \longrightarrow 0$.

Действительно, первый из интегралов (9,8), взятый по этим окрестностям, не превосходит суммы

$$\int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1, Q)|\,dP_1 + \int |K_1(P, P_1)|\,|K_2(P_1\, Q^*)|\,dP_1.$$

Каждый из этих интегралов мы оцениваем, пользуясь неравенством (8,8). Аналогично оцениваем второй из интегралов (9,8), взятый по G_1, G_2, G_3, G_4.

Отсюда следует непрерывность функции $K_3(P, Q)$ во всей замкнутой области ее определения и, следовательно, ее равномерная непрерывность.

Переходим теперь к рассмотрению интегральных уравнений

$$y(P) = \lambda \int K(P, Q)\, y(Q)\, dQ + f(P), \qquad (10,8)$$

где $K(P, Q)$ имеет вид, обозначенный в заголовке настоящего параграфа при $\alpha < d$. Функцию $f(P)$ мы будем считать непрерывной на замкнутой области и потому ограниченной; мы будем рассматривать также только непрерывные решения этого уравнения. Заметим, что совершенно так же, как в предыдущем абзаце, легко показать, что при наших предположениях о $K(P, Q)$ *всякое ограниченное решение уравнения* (10,8) *непрерывно, если* $f(P)$ *непрерывна.*

Докажем прежде всего, что при достаточно малом $|\lambda|$ это уравнение, точно так же как и транспонированное к нему, имеет всегда единственное решение в классе ограниченных функций. Так как для транспонированного уравнения все доказательства проводятся так же, как и для данного уравнения (10,8), то мы ограничимся рассмотрением только уравнения (10,8). Доказательство существования и единственности решения уравнения (10,8) проводится совершенно так же, как это делалось в § 5. Мы будем искать решение в виде суммы ряда

$$y(P)=y_0(P)+\lambda y_1(P)+\lambda^2 y_2(P)+\ldots \qquad (11,8)$$

Как и в § 5, мы найдем, что

$$y_0(P)=f(P), \quad y_{k+1}(P)=\int K(P, Q)\, y_k(Q)\, dQ,$$
$$k=0, 1, 2, \ldots$$

Применяя только что доказанную лемму, мы получим отсюда, что все $y_k(P)$ суть непрерывные функции P. Оценим их модули. Пусть

$$|f(P)|<N,$$

где N — некоторое постоянное число. Пусть M есть верхняя грань значений интеграла

$$\int |K(P, Q)|\, dQ$$

(M, очевидно, существует). Тогда легко видеть, что

$$|y_k(P)| \leqslant NM^k.$$

Отсюда видно, что при

$$|\lambda| < \frac{1}{M} - \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$$

ряд (11,8) равномерно по λ сходится и дает функцию, голоморфную по λ и равномерно непрерывную по совокупности (P, λ). Совершенно так же, как в § 5, доказывается, что этот ряд дает решение интегрального уравнения (10,8) и что другого решения этого уравнения в классе ограниченных функций нет.

Совершенно так же, как в § 5, мы найдем, что это решение $y(P)$ можно представить в виде

$$y(P)=\lambda\int\Gamma(P, Q, \lambda)f(Q)\,dQ+f(P),$$

где

$$\Gamma(P, Q, \lambda)=K(P, Q)+\lambda K^{(2)}(P, Q)+\lambda^2K^{(3)}(P, Q)+\ldots \quad (12,8)$$

Первый член этого ряда имеет вид

$$K(P, Q)=\frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}, \quad \alpha<d, \quad (13,8)$$

где $\overline{K}(P, Q)$ есть равномерно непрерывная по (P, Q) функция. В силу ограниченности G отсюда следует ограниченность $\overline{K}(P, Q)$, и по доказанной в начале этого параграфа лемме

$$|K^{(2)}(P, Q)|<\frac{A}{PQ^{2\alpha-d}},$$

вообще

$$|K^{(m)}(P, Q)|<\frac{A_m}{PQ^{m\alpha-(m-1)d}}\ ^{*)},$$

если $m\alpha-(m-1)d>0$. Здесь через A и A_m обозначены некоторые постоянные. Так как $\alpha<d$, то при достаточно большом m будет

$$m\alpha-(m-1)d<0.$$

Тогда в силу доказанной леммы $K^{(m)}(P, Q)$ будет равномерно непрерывной по (P, Q) функцией. Все следующие повторения $K^{(p)}(P, Q)$ будут также равномерно непрерывными. При этом для $p\geqslant m$ будет

$$|K^{(p+1)}(P, Q)|\leqslant\left|\int K(P, P_1)K^{(p)}(P_1, Q)\,dP_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant M_p\int|K(P, P_1)|\,dP_1\leqslant M_pM,$$

*) Ср. примечание на стр. 45.

где M_p есть верхняя грань модуля $K^{(p)}(P, Q)$. Отсюда получается доказательство равномерной по P, Q и λ $\left(\text{при } \lambda < \frac{1}{M} - \varepsilon\right)$ сходимости ряда (12,8), так же как это доказывалось для ряда (16,5). Аналогичные рассуждения можно провести для транспонированного уравнения.

Все формулы, которые мы получили в § 5, сохраняют и теперь свою силу.

После этого все рассуждения § 6 делаются применимыми для интегральных уравнений с ядрами

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} a_i(P) b_i(Q) + K_1(P, Q),$$

где $a_i(P)$ и $b_i(Q)$ непрерывны в $\overline{G}$, а $K_1(P, Q)$ имеет вид (13,8). Таким образом, получается доказательство теорем Фредгольма в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1},$$

где M_1 есть наибольшая из верхних граней интегралов:

$$\int |K_1(P, Q)| \, dQ, \quad \int |K_1(P, Q)| \, dP.$$

Кроме того, получается, что в этом круге не может быть точек сгущения для собственных значений λ.

Перейдем теперь к доказательству теорем Фредгольма для интегральных уравнений с ядрами того типа, какой указан в названии настоящего параграфа. Положим

$$\varphi_C(x) = x, \quad \text{если} \quad x \leqslant C,$$
$$\varphi_C(x) = C, \quad \text{если} \quad x > C.$$

Тогда функция

$$K_C(P, Q) = \overline{K}(P, Q) \, \varphi_C\left(\frac{1}{PQ^{\alpha}}\right)$$

будет равномерно непрерывной функцией (P, Q) при всяком C. При достаточно большом C интегралы

$$\int |K(P, Q) - K_C(P, Q)| \, dQ, \int |K(P, Q) - K_C(P, Q)| \, dP$$

будут равномерно по P, соответственно по Q, как угодно малы. Как мы уже говорили в § 6, равномерно непрерывную функцию $K_C(P,Q)$ можно с какой угодно точностью равномерно на области $\overline{G}$ аппроксимировать суммами вида

$$S_m(P, Q)=\sum_{i=1}^{m} a_i(P)\, b_i(Q).$$

Тогда будет

$$K(P, Q)=S_m(P, Q)+\tilde{K}(P, Q),$$

причем верхняя грань значений

$$\int |\tilde{K}(P, Q)|\, dQ, \quad \int |\tilde{K}(P, Q)|\, dP$$

может быть сделана меньше любого $\varepsilon>0$. Отсюда получается доказательство всех трех теорем Фредгольма на всей плоскости λ для интегральных уравнений с ядрами вида (13,8). Кроме того, получается доказательство отсутствия конечных точек накопления у собственных значений.

Только что приведенное доказательство теорем Фредгольма для ядер вида (13,8) в основном воспроизводит доказательство этих теорем для ограниченных равномерно непрерывных ядер. Доказательство этих последних теорем в сущности основывалось только на том, что некоторые интегралы были малы; требование малости подинтегральных функций было для этого излишним. Этим мы и воспользовались в настоящем параграфе.

Замечание. Пусть ядро $K(P, Q)$ — непрерывная функция P и Q, когда $P\in G$, $Q\in G$ и $P\neq Q$, и удовлетворяет условию $|K(P, Q)|<\frac{A}{PQ^{\alpha}}$, $0\leqslant\alpha<d$. Пусть $\varepsilon>0$ и $\alpha+\varepsilon<d$. Тогда

$$K(P, Q)=\frac{K(P, Q)\, PQ^{\alpha+\varepsilon}}{PQ^{\alpha+\varepsilon}}=\frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha+\varepsilon}},$$

где $\overline{K}(P, Q)$ — непрерывная функция P и Q. Таким образом, для ядер указанного вида также справедливы все теоремы Фредгольма.

2. Многие задачи математической физики приводят к рассмотрению интегральных уравнений, в которых интегрирование происходит не по области d-мерного евклидова про-

странства, а по линии, поверхности или многообразию *) большей размерности, расположенным в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений.

Для интегральных уравнений такого вида также справедливы теоремы Фредгольма. Ниже мы покажем, как, пользуясь рассуждениями п. 1, можно доказать теоремы Фредгольма в том случае, когда областью интегрирования служит замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве. Для других многообразий доказательства аналогичны.

Итак, пусть дано уравнение

$$y(P)=\lambda\int\limits_{S} K(P, Q)\, y(Q)\, dS_Q+f(P), \tag{14,8}$$

где S — замкнутая гладкая поверхность в трехмерном пространстве (мы предполагаем, что в некоторой достаточно малой окрестности любой точки $A\in S$ какая-либо одна из координат точек S является непрерывно дифференцируемой функцией двух других координат), dS_Q — элемент площади поверхности S; $P\in S$, $Q\in S$, $f(P)$ — заданная непрерывная функция на S. Пусть $K(P, Q)=\frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^{\alpha}}$, где $\overline{K}(P,Q)$ — непрерывная функция, когда $P\in S$ и $Q\in S$; $0\leqslant\alpha<2$ и PQ — расстояние между точками P и Q в трехмерном пространстве. Для того, чтобы доказать с помощью рассуждений п. 1 все теоремы Фредгольма для рассматриваемого уравнения (14,8), достаточно показать, что остается справедливой лемма п. 1 и что всякое непрерывное ядро $K_1(P, Q)$, заданное на S, можно равномерно приблизить вырожденным ядром с любой степенью точности. Все другие рассуждения §§ 4, 5, 6, 7 и 8 переносятся автоматически на уравнения рассматриваемого вида.

Непрерывное ядро $K_1(P, Q)$ можно рассматривать как непрерывную функцию, заданную на некотором замкнутом множестве S^2 в 6-мерном пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$.

---

*) Под d-мерным непрерывно дифференцируемым многообразием M, лежащим в n-мерном евклидовом пространстве E_n $(0<d<n)$, понимают замкнутое связное ограниченное множество точек M, лежащее в E_n и такое, что в некоторой окрестности любой точки $A\in M$ некоторые $n-d$ координат точек M являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных d координат.

Это множество получается, когда точки $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ независимо друг от друга пробегают множество S. Обозначим через R куб в пространстве $(x_P, y_P, z_P, x_Q, y_Q, z_Q)$, содержащий все точки множества S^2. Непрерывную функцию, заданную на замкнутом множестве S^2, можно продолжить до непрерывной функции, заданной на R*). По теореме Вейерштрасса непрерывную функцию, заданную на R, можно равномерно приблизить многочленом с любой степенью точности. Если теперь рассматривать этот многочлен только на S^2, то он и будет являться вырожденным ядром, приближающим ядро $K_1(P, Q)$ с любой степенью точности.

Убедимся теперь в справедливости леммы п. 1 § 8. Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P \neq Q$, подобно доказательству, проведенному в п. 1, достаточно проверить, что интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2,$$

взятый по части поверхности S, расположенной в сфере радиуса r с центром в точке Q, будет равномерно по Q, меняющемуся в малой окрестности некоторой точки Q_0, как угодно мал при достаточно малом r.

Пусть в окрестности точки Q_0 поверхность S задается непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$ и Q' и P_1' — проекции точек Q и P_1 на плоскость $z = 0$. Так как $dS < C\,dx\,dy$, где C есть некоторая постоянная, и кроме того, $Q'P_1' \leqslant QP_1$, то

$$\int\limits_{S(Q,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{QP_1^{\alpha}} < \int\limits_{S(Q',\, r)} \frac{C\,dx\,dy}{Q'P_1'^{\alpha}}.$$

Последний интеграл можно сделать как угодно малым, если r достаточно мало.

Для доказательства непрерывности $K_3(P, Q)$ при $P = Q$ и $\alpha_1 + \alpha_2 < d$ достаточно точно так же оценить интеграл вида

$$\int\limits_{S(Q,\, r)+S(P,\, r)} \frac{dS_{P_1}}{PP_1^{\alpha_1} QP_1^{\alpha_2}},$$

*) П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948, гл. 6, § 13, стр. 284.

когда P и Q меняются в малой окрестности точки $P^* = Q^*$ и r стремится к нулю, и воспользоваться неравенством (8,8).

Чтобы доказать справедливость неравенств (3,8) и (4,8), покажем ограниченность функций

$$K_3(P, Q)\, PQ^{\alpha_1+\alpha_2-d}, \text{ если } \alpha_1+\alpha_2 > d,$$

и

$$\frac{K_3(P, Q)}{|\ln PQ|+1}, \text{ если } \alpha_1+\alpha_2 = d$$

при $P \in S$, $Q \in S$, $P \neq Q$.

Для этого допустим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся последовательности точек $P_1 \in S$, $P_2 \in S, \ldots$, $Q_1 \in S$, $Q_2 \in S$, ..., причем $P_i \neq Q_i$ и

$$|K_3(P_i, Q_i)|\, P_iQ_i^{\alpha_1+\alpha_2-d} \to \infty \text{ при } i \to \infty. \qquad (15,8)$$

Мы можем предполагать, что последовательности P_i и Q_i являются сходящимися, т. е.

$$P_i \to P_0 \in S, \; Q_i \to Q_0 \in S.$$

Из доказанной ранее непрерывности функции $K_3(P, Q)$ при $P \neq Q$ следует, что $P_0 = Q_0$. Положим для определенности, что в некоторой достаточно малой окрестности U точки P_0 координата z точек S является непрерывно дифференцируемой функцией x и y и что в этой окрестности имеет место неравенство $dS \leqslant C\, dx\, dy$ (C — некоторая постоянная). Тогда для всех достаточно больших i

$$|K_3(P_i, Q_i)| \leqslant A_1A_2 \int\limits_U \frac{dS_{P_1}}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}} + A_1A_2 \int\limits_{S-U} \frac{dS_{P_1}}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}} \leqslant$$

$$\leqslant A_1A_2C \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_iP_1'^{\alpha_1}P'_1Q_i'^{\alpha_2}} + A_1A_2 \max_{P_1 \in S-U} \frac{1}{P_iP_1^{\alpha_1}P_1Q_i^{\alpha_2}} \int\limits_{S-U} dS_{P_1},$$

где штрихами обозначены проекции на плоскость $z=0$. Так как последнее из полученных слагаемых ограничено, то из (15,8) следует, что

$$P_iQ_i^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_iP_1'^{\alpha_1}P'_1Q_i'^{\alpha_2}} \to \infty \text{ при } i \to \infty. \qquad (16,8)$$

Однако для всех достаточно больших i будет $P'_i Q'_i \leqslant C_1 P_i Q_i$, где $C_1 > 0$ (почему?). Поэтому из (16,8) получаем:

$$P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d} \int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} \longrightarrow \infty \text{ при } i \longrightarrow \infty.$$

Но точки P'_i, Q'_i находятся уже в области U' на плоскости. Поэтому в силу леммы, доказанной в п. 1, имеем для всех достаточно больших i

$$\int\limits_{U'} \frac{dx\,dy}{P'_i P_1'^{\alpha_1} P'_1 Q_i'^{\alpha_2}} < \frac{A}{P'_i Q_i'^{\alpha_1+\alpha_2-d}}$$

(A — некоторая постоянная). Это соотношение противоречит предыдущему. Аналогично доказывается ограниченность функции $\frac{K_3(P,\ Q)}{|\ln PQ| + 1}$.

§ 9. Примеры особых интегральных уравнений

Особыми интегральными уравнениями мы называем такие, для которых или неверны теоремы Фредгольма, или собственные значения имеют конечные предельные точки. У приводимых в этом параграфе особых интегральных уравнений интервал интегрирования бесконечен. Но, полагая, например,

$$\xi = \operatorname{tg} \eta, \quad x = \operatorname{tg} y,$$

эти интегральные уравнения можно привести к таким уравнениям, у которых интервал интегрирования конечен.

Пример 1. У интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\infty \sin x\xi \varphi(\xi)\, d\xi$$

при $\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ имеется бесконечное множество линейно независимых решений, так как при таких λ этому уравнению удовлетворяют функции

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} \pm \frac{x}{a^2 + x^2}$$

при любом $a > 0$.

Пример 2. Уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\varphi(\xi)\,d\xi$$

имеет решение $e^{i\alpha x}$ при $\lambda=\frac{1+\alpha^2}{2}$. Таким образом, всякое действительное $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ является собственным значением. Мы рассматриваем здесь только действительные значения α, так как в противном случае $e^{i\alpha x}$ делается неограниченным на бесконечном интервале $-\infty<x<+\infty$.

Существуют примеры интегральных уравнений, для которых не имеют места и другие теоремы Фредгольма.

Важную роль в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике играют так называемые *сингулярные интегральные уравнения*. Такие уравнения имеют вид (10,8), но ядра таких уравнений имеют сильную особенность ($\alpha=d$) и неинтегрируемы в обычном смысле, а соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Построена полная теория сингулярных интегральных уравнений. Эта теория существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Сингулярным интегральным уравнениям посвящена обширная литература. См., например, Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962; С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.

ГЛАВА 2
УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

§ 10. Уравнения Вольтерра

Так называются интегральные уравнения

$$y(P)=\lambda\int K(P,\ Q)\,y(Q)\,dQ+f(P),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

а) каждая из координат точек P и Q принимает значение от 0 до некоторого $a>0$;

б) $K(P,\ Q)=0$, если хотя бы одна координата точки Q больше соответствующей (т. е. имеющей тот же номер) координаты точки P.

Мы будем рассматривать только одномерный случай. Тогда уравнение Вольтерра будет иметь вид

$$y(x)=\lambda\int_0^x K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x). \tag{1,10}$$

Покажем, что для этого уравнения при всяком λ будет иметь место первый случай альтернативы Фредгольма в предположении, что $K(x,\ \xi)$ есть непрерывная функция при $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant\xi\leqslant x$, а $f(x)$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant a$.

Иными словами, мы покажем, что *у уравнения Вольтерра нет собственных значений.*

Доказательство. Уравнение (1,10) принадлежит к тому классу интегральных уравнений, для которого мы доказали теоремы Фредгольма. В самом деле,

$$K(x,\ \xi)=\frac{K(x,\ \xi)\,|x-\xi|^{\varepsilon}}{|x-\xi|^{\varepsilon}},\quad 0<\varepsilon<1.$$

Функция $\overline{K}(x, \xi)$, определенная равенствами

$$\overline{K}(x, \xi) = K(x, \xi)\,|x-\xi|^{\varepsilon} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x_1,$$
$$\overline{K}(x, \xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \geqslant x,$$

равномерно непрерывна на квадрате

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant a.$$

Поэтому для интегрального уравнения (1,10) согласно § 8 справедливы все три теоремы Фредгольма. Значит, для доказательства того, что для этого уравнения при всяком λ имеет место первый случай альтернативы Фредгольма, достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \tag{2,10}$$

может при всяком λ иметь только тривиальное решение в классе непрерывных функций от x при $0 \leqslant x \leqslant a$. Для доказательства этого последнего утверждения обозначим через B наибольшее значение $|y(x)|$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, а через M — наибольшее значение $|K(x, \xi)|$ при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Тогда из уравнения (2,10) получим:

$$|y(x)| \leqslant |\lambda|\, MBx.$$

Подставляя эту оценку $y(x)$ опять в правую часть (2,10), получим:

$$|y(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{Bx^2}{2}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$|y(x)| \leqslant \frac{|\lambda|^k M^k x^k B}{k!} \leqslant \frac{|\lambda|^k M^k a^k B}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

А это последнее выражение стремится к 0 при $k \to \infty$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$ на интервале $(0, a)$, что и требовалось доказать.

Можно искать решение уравнения (1,10) в виде ряда

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \ldots \tag{3,10}$$

Согласно § 8 должно быть

$$y_0(x) = f(x), \quad y_{k+1}(x) = \int_0^x K(x, \xi)\, y_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть N есть наибольшее значение $|f(x)|$ на интервале $(0, a)$. Тогда получим:

$$|y_k(x)| \leqslant \frac{M^k x^k N}{k!} \leqslant \frac{M^k a^k N}{k!}.$$

Отсюда видно, что ряд (3,10) равномерно по λ и x сходится, когда λ находится в каком угодно большом круге, а $0 \leqslant x \leqslant a$.

Чтобы наглядно представить себе, почему уравнение Вольтерра не имеет собственных значений, рассмотрим (подобно тому, как это мы делали в § 3) следующую систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую уравнению Вольтерра на интервале $0 \leqslant x \leqslant a$:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= y_1 - \lambda K_{11} y_1 \Delta\xi, \\ f_2 &= \quad -\lambda K_{21} y_1 \Delta\xi + y_2 - \lambda K_{22} y_2 \Delta\xi, \\ f_3 &= \quad -\lambda K_{31} y_1 \Delta\xi \qquad -\lambda K_{32} y_2 \Delta\xi + y_3 - \lambda K_{33} y_3 \Delta\xi, \end{aligned}\right\} \quad (4,10)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Мы здесь всюду сохранили обозначения, принятые в § 3. Уравнения (4,10) при любом фиксированном λ можно решать последовательно, если только $|\Delta\xi|$ достаточно мало, что мы будем предполагать. В самом деле, из первого уравнения можно найти y_1, так как при достаточно малом $|\Delta\xi|$ коэффициент при y_1 отличен от 0. Подставим значение y_1 во все последующие уравнения. Тогда из второго уравнения можно найти y_2. Подставим его значение во все последующие уравнения. Тогда из третьего уравнения можно найти y_3 и т. д. Очень легко показать, что при $\Delta x \longrightarrow 0$ решение системы (4,10) действительно будет приближаться к решению интегрального уравнения (1,10).

Определитель системы (4,10) равен

$$\Pi = (1 - \lambda K_{11} \Delta\xi)(1 - \lambda K_{22} \Delta\xi) \ldots (1 - \lambda K_{nn} \Delta\xi),$$

где $\Delta x = \Delta\xi = \frac{a}{n}$. Отсюда видно, что

$$\Pi \geqslant (1 - |\lambda| M \Delta\xi)^{\frac{a}{\Delta\xi}}. \quad (5,10)$$

Правая часть этого неравенства при всяком достаточно малом $\Delta\xi$ отлична от 0. При уменьшении $\Delta\xi$ она растет. Например, когда $\Delta\xi$ уменьшается вдвое, то $(1-|\lambda| M\Delta\xi)$ в (5,10) заменяется выражением

$$\left(1-|\lambda| M\frac{\Delta\xi}{2}\right)^2=1-|\lambda| M\Delta\xi+\frac{\lambda^2M^2(\Delta\xi)^2}{4}.$$

Когда $\Delta\xi\longrightarrow 0$, то правая часть (5,10) стремится к

$$e^{-|\lambda| aM}.$$

Именно в том обстоятельстве, что определитель системы (4,10) всегда отличен от 0 и не стремится к 0, когда $\Delta\xi\longrightarrow 0$, лежит алгебраическая причина отсутствия собственных значений у уравнения Вольтерра.

З а м е ч а н и е 1. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, какими мы показали отсутствие собственных значений у уравнений Вольтерра с равномерно непрерывными ядрами, можно то же самое показать для уравнений Вольтерра с ядрами вида

$$K(x, \xi)=\frac{\overline{K}(x, \xi)}{|x-\xi|^{\alpha}},$$

$$0\leqslant\alpha<1,$$

где $\overline{K}(x, \xi)$ — равномерно непрерывная функция.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим следующее интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$\int_0^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi=f(x),$$

$$f(0)=0. \tag{6,10}$$

Предположим, что $K(x, \xi)$, $K_x'(x, \xi)$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны, когда $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant\xi\leqslant x$. Тогда всякое непрерывное при $0\leqslant x\leqslant a$ решение $y(x)$ уравнения (6,10) удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(x, x) y(x) + \int_0^x K'_x(x, \xi) y(\xi) d\xi = f'(x), \qquad (7,10)$$

которое получается из (6,10) почленным дифференцированием по x. Легко видеть, что и обратно, всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение уравнения (7,10) удовлетворяет также уравнению (6,10). Если $K(x, x)$ превосходит по абсолютной величине некоторую положительную постоянную, то уравнение (7,10) сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному в настоящем параграфе. Если $K(x, x) \equiv 0$, иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (7,10) по x и т. д.

ГЛАВА 3
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

§ 11. Геометрические аналоги некоторых соотношений между функциями (пространство функций)

Некоторое представление о функции $f(P)$, равномерно непрерывной на заданной конечной области G, например на конечном интервале (a, b), дают значения этой функции на достаточно густом множестве точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$. В одномерном случае за эти точки можно принять точки

$$x = a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (n-1)\Delta x,\ a + n\Delta x,$$

где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ при достаточно большом n. Будем обозначать значения f в этих точках соответственно через

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ \ldots,\ f^{(n)}.$$

Эти последние будем рассматривать как компоненты в n-мерном евклидовом пространстве вектора $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$, начало которого находится в начале координат. Таким образом, функции f соответствует некоторый вектор $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$.

Длина этого вектора, или *норма* его, равна

$$\sqrt{[f^{(2)}]^2 + [f^{(2)}]^2 + \ldots + [f^{(n)}]^2}.$$

Переходя к пределу при $n \longrightarrow \infty$, естественно называть «длиной», или *нормой, функции* $f(P)$ число

$$\sqrt{\int_G f^2(P)\, dP}.$$

В следующей таблице перечислены, с одной стороны, основные величины и соотношения, связанные с векторами в n-мерном евклидовом пространстве, с другой стороны,— соответствующие величины и соотношения для функций (в «пространстве функций»). В этом параграфе *все рассматриваемые функции предполагаются действительными, заданными на конечной области G и имеющими интегрируемый квадрат* (ср. замечание к § 1). Символ $\int f(P)\,dP$ всегда будет означать интегрирование по области G.

1. Вектор $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$.	1. Функция $f(P)$.
2. Длина вектора $(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)})$ $$\|f\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f^{(i)}]^2}.$$	2. Норма функции $f(P)$: $$\|f\|=\sqrt{\int f^2(P)\,dP}.$$
3. Расстояние между точками $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$ $$\sqrt{\sum_i [f_2^{(i)}-f_1^{(i)}]^2}.$$	3. Норма разности двух функций $f_2(P)-f_1(P)$ $$\sqrt{\int [f_2(P)-f_1(P)]^2\,dP}.$$

Определенная только что норма разности $f_2(P)-f_1(P)$ характеризует *среднее квадратичное уклонение* функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$. Характеризовать отличие функции $f_2(P)$ от $f_1(P)$ можно многими разными способами, а не только при помощи определенной только что нормы разности $f_2(P)-f_1(P)$. Это отличие, можно, например, характеризовать при помощи числа B, равного верхней грани выражения

$$|f_2(P)-f_1(P)|.$$

Если B мало, это значит, что разность $f_2(P)-f_1(P)$ равномерно мала по всей рассматриваемой области G. Так как область G конечна, из малости B следует малость определенной выше нормы разности $f_2(P)-f_1(P)$. Обратное утверждение неверно.

Если имеется бесконечная последовательность функций

$$f_1(P),\ f_2(P),\ \ldots,\ f_k(P),\ \ldots$$

и функция $f(P)$, для которых

$$\sup_G |f(P)-f_k(P)| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty,$$

то, как известно, говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ равномерно сходится к $f(P)$.

Если же

$$\int [f(P)-f_k(P)]^2\, dP \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty,$$

то говорят, что последовательность функций $f_k(P)$ *сходится в среднем к* $f(P)$. Из равномерной сходимости на конечной области следует сходимость в среднем. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Последовательность функций

$$f_k(x) = e^{-kx}$$

на открытом интервале $(0, 1)$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$, когда $k \longrightarrow \infty$. Но, очевидно, эта сходимость неравномерная.

Приведем еще пример последовательности, которая сходится в среднем, но нигде не сходится в обычном смысле. Такой будет последовательность функций $f_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, определенных на замкнутом отрезке $[0, 1]$ следующим образом:

$$f_{2^k+p}(x) = 1 \quad \text{при} \quad \frac{p}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{2^k},$$

$$f_{2^k+p}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < \frac{p}{2^k} \quad \text{и при} \quad x > \frac{p+1}{2^k};$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$
$$p = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^k - 1.$$

При $i = 2^k + p \longrightarrow \infty$ эта последовательность в среднем сходится к 0. Но ни в какой точке отрезка $[0, 1]$ эта последовательность не сходится в обычном смысле, так как для каждого значения x из этого отрезка можно указать сколь угодно большие значения i, при которых $f_i(x) = 1$, и сколь угодно большие i, при которых $f_i(x) = 0$.

Задача. Показать, что при соответствующем выборе чисел a_k и b_k функции

$$|\sin(x-b_k)|^{a_k}, \quad \frac{1}{1+a_k(x-b_k)^2}, \quad e^{a_k(x-b_k)^2}$$

при $k \longrightarrow \infty$ сходятся к 0 в среднем на отрезке $[0, 1]$ и не сходятся ни в одной точке.

4. Скалярное произведение векторов

$$(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)}),$$

и

$$(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$$

дается формулой

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2).

5. Неравенство треугольника (сумма двух сторон треугольника не меньше третьей):

$$\sqrt{\sum (a_i - b_i)^2} + \sqrt{\sum (b_i - c_i)^2} \geqslant \sqrt{\sum (a_i - c_i)^2}.$$

4. *Скалярным произведением функций* $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP.$$

Будем обозначать это скалярное произведение символом (f_1, f_2). Существование этого интеграла при наших предположениях следует из того, что

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

5. Неравенство треугольника:

$$\sqrt{\int [f_1(P) - f_2(P)]^2\, dP} + \sqrt{\int [f_2(P) - f_3(P)]^2\, dP} \geqslant \sqrt{\int [f_1(P) - f_3(P)]^2\, dP}.$$

Оба эти неравенства доказываются совершенно одинаково. Поэтому приведем доказательство только первого из них. Легко видеть, что, совершенно не ограничивая общности, можно считать все b_i равными 0. Возведя тогда в квадрат обе части доказываемого неравенства и делая приведение подобных, мы найдем, что оно эквивалентно неравенству $-\sum a_i c_i \leqslant \sqrt{\sum a_i^2 \sum c_i^2}$, так как все квадратные корни мы считаем неотрицательными. Последнее неравенство непосредственно следует из неравенства

$$\left(\sum a_i c_i\right)^2 \leqslant \sum a_i^2 \sum c_i^2, \qquad (1,11)$$

которое называется *неравенством Коши*. Для доказательства его заметим, что при всяких действительных a_i, c_i и λ

$$\sum (a_i \lambda + c_i)^2 \geqslant 0.$$

Поэтому квадратное уравнение относительно λ

$$\lambda^2 \sum a_i^2 + 2\lambda \sum a_i c_i + \sum c_i^2 = 0$$

не имеет действительных различных корней. А это возможно только при соблюдении неравенства (1,11).

Совершенно так же можно доказать неравенство

$$\left[\int f(P)\,\varphi(P)\,dP\right]^2 \leqslant \int f^2(P)\,dP\cdot\int \varphi^2(P)\,dP. \quad (2,11)$$

Это неравенство мы будем называть неравенством Буняковского *).

6. Косинус угла между векторами $(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$ равен

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_1^{(i)}]^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[f_2^{(i)}]^2}}.$$

Согласно (1,11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Единичным мы называем вектор, длина которого равна 1.

Косинус угла между единичными векторами $(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, \ldots, f_2^{(n)})$ равен

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)}.$$

6. Косинусом угла между функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ назовем

$$\frac{\int f_1(P)\cdot f_2(P)\,dP}{\sqrt{\int f_1^2(P)\,dP}\cdot\sqrt{\int f_2^2(P)\,dP}}.$$

Согласно (2,11) это выражение по абсолютной величине не превосходит 1.

Функция $f(P)$ называется *нормированной*, если ее норма равна 1.

Косинус угла между нормированными функциями $f_1(P)$ и $f_2(P)$ равен

$$\int f_1(P) f_2(P)\,dP.$$

---

*) Неравенство (1,11) впервые встречается в курсе анализа Коши (1821): Oeuvres, II^s, т. III (1897), 373. Сам Коши выводил его из тождества

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j-a_j b_i)^2,$$

отбрасывая его неотрицательную правую часть. Неравенство (2,11) впервые доказал и систематически использовал Буняковский (Sur

7. Условие ортогональности векторов $(f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n)})$ и $(f_2^{(1)}, \ldots, f_2^{(n)})$

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(i)} f_2^{(i)} = 0.$$

7. Условие «*ортогональности*» функций $f_1(P)$ и $f_2(P)$

$$\int f_1(P) f_2(P)\, dP = 0.$$

8. Условие линейной зависимости (компланарности) векторов $f_k = (f_k^{(1)}, \ldots, f_k^{(n)})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, состоит в том, что существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k^{(i)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

8. Условие линейной зависимости функций $f_1(P), \ldots, f_m(P)$ состоит в существовании таких постоянных $C_1, \ldots, C_m$, среди которых есть отличные от 0, что

$$\sum_{k=1}^{m} C_k f_k(P) = 0$$

для всех точек P.

9. Пусть дано m единичных взаимно ортогональных векторов

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)}),$$

$$k = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\varphi_k(f)$ есть проекция вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ на направление вектора $(\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$. Тогда

$$\varphi_k(f) = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

9. Пусть дано m взаимно ортогональных нормированных функций

$$\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P).$$

Коэффициентом Фурье функции $f(P)$ по отношению к функции $\varphi_k(P)$ называется

$$f_k = \int f(P) \varphi_k(P)\, dP.$$

Теорема. *Пусть дана интегрируемая вместе со своим квадратом функция $f(P)$. Будем искать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_m$ так, чтобы среднее квадратичное уклоне-*

quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires... Memoires de l'Acad. de St. Petersbourg (VII) 1 (1859), № 9). Но в литературе это неравенство часто называется неравенством Шварца, хотя у Шварца оно впервые встречается только в 1885 г. (Werke, I (1890), 251).

ние I_m линейной комбинации $C_1\varphi_1(P)+\ldots+C_m\varphi_m(P)$ от $f(P)$ было наименьшим. Мы утверждаем, что искомые значения будут равны коэффициентам Фурье f_k *).

Действительно,

$$I_m=\int[f(P)-C_1\varphi_1(P)-\ldots-C_m\varphi_m(P)]^2\,dP=$$

$$=\int f^2(P)\,dP-2\sum_{k=2}^{m}C_k\int f(P)\varphi_k(P)\,dP+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}C_iC_j\int\varphi_i(P)\varphi_j(P)\,dP=$$

$$=\int f^2(P)\,dP-2\sum_{k=1}^{m}C_kf_k+\sum_{k=1}^{m}C_k^2=$$

$$=\int f^2(P)\,dP+\sum_{i=1}^{m}(f_k-C_k)^2-\sum_{k=1}^{m}f_k^2.$$

Отсюда видно, что I_m достигает своего минимума

$$\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{m}f_k^2,\ \text{если}\ f_k=C_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

10. Для всякого вектора $(f^{(1)},\ldots,f^{(n)})$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}[\varphi_k(f)]^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}[f^{(k)}]^2.$$

В случае равенства это соотношение соответствует теореме Пифагора.

10. Для всякой функции $f(P)$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}f_k^2\leqslant\int f^2(P)\,dP.$$

(Неравенство Бесселя.)

Доказательство неравенства Бесселя. Очевидно, $I_m\geqslant 0$ при любых C_i. Если $C_i=f_i$ при $i=1,2,\ldots,m$, то $I_m=\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{m}f_k^2$, т. е. $\int f^2(P)\,dP\geqslant\sum_{i=1}^{m}f_k^2$, что и требовалось доказать.

Последовательность попарно ортогональных нормированных функций (короче, *ортонормальная система*)

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots \tag{3,11}$$

*) Дайте этой теореме геометрическое толкование.

называется *полной*, если для всякой непрерывной (и потому ограниченной) функции $f(P)$, заданной на замкнутой области, имеет место следующее равенство (*равенство Парсеваля*):

$$\int f^2(P)\,dP = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2.$$

Замечание. Из утверждения, доказанного в п. 9, следует возможность заменить данное только что определение полноты системы функций следующим эквивалентным ему: *ортонормальная система функций* (3,11) *называется полной, если для любой непрерывной на замкнутой области функции* $f(P)$ *можно найти такую линейную комбинацию этих функций*

$$\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P),$$

что средняя квадратичная ошибка при замене $f(P)$ *этой комбинацией, т. е.*

$$\int \Big[f(P) - \sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_k(P)\Big]^2 dP,$$

будет как угодно мала. А отсюда следует, что если бы мы назвали полной системой такую ортонормальную систему, у которой равенство Парсеваля выполняется для всякой функции $f(P)$ с интегрируемым квадратом, непрерывной всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек, гладких линий и поверхностей до $(d-1)$-го измерения, то это определение было бы также эквивалентно предыдущему (d — число измерений области G, на которой заданы рассматриваемые функции). Это происходит потому, что всякая функция $f(P)$ этого класса может быть аппроксимирована такой непрерывной на $\bar{G}$ функцией $f^*(P)$, что норма разности $f(P) - f^*(P)$ как угодно мала. Доказательство этого утверждения при помощи неравенства треугольника (см. п. 5) мы предоставляем читателю.

Ортонормальная система (3,11) называется *замкнутой*, если не существует такой функции рассматриваемого класса*),

---

*) См. замечание к § 1.

интеграл от квадрата которой существует, положителен и которая была бы ортогональна ко всем функциям (3,11).

Теорема. *Всякая полная система замкнута.*

Доказательство. Допустим, что полная система (3,11) не замкнута, т. е. что существует функция $f(P)$, у которой интеграл от квадрата существует, положителен и которая ортогональна ко всем функциям (3,11). У такой функции все коэффициенты Фурье по отношению к функциям (3,11) равны 0. Следовательно, для функции $f(P)$ не выполняется равенство Парсеваля.

Обратное утверждение неверно в рассматриваемом классе функций, имеющих разрывы только на конечном числе точек, линий, ..., $(d-1)$-мерных поверхностей. Оно становится верным в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу (см. § 20, п. 1).

11. Нормальное уравнение плоскости в n-мерном пространстве $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)})$:

$$\sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\varphi^{(i)} = p,$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} [a^{(i)}]^2 = 1.$$

11. Аналог в пространстве функций:

$$\int a(P)\,\varphi(P)\,dP = p,$$

где

$$\int a^2(P)\,dP = 1.$$

12. Уравнение поверхности 2-го порядка с центром в начале координат

$$\sum_{i, j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} = 1, \quad (4,11)$$

где

$$K_{ij} = K_{ji}.$$

12. Аналог в пространстве функций

$$\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ = 1, \quad (5,11)$$

где

$$K(P, Q) \equiv K(Q, P), \quad P \in G, \quad Q \in G.$$

13. Основным фактом в теории квадратичной формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)},$$

$$K_{ij} = K_{ji} \qquad (6,11)$$

13. При широких предположениях относительно не равного нулю тождественно действительного симметрического ядра $K(P, Q)$, т. е. такого, для которого

является возможность линейным неособым преобразованием

$$\psi^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi^{(j)}, \quad (7,11)$$

$$i=1, 2, \ldots, n$$

привести эту форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}, \text{ где } m\leqslant n. \quad (8,11)$$

В дальнейшем нас будут интересовать только квадратичные формы с действительными коэффициентами K_{ij}; в этом случае все $\varphi_i^{(j)}$ можно выбрать также действительными. Тогда и все λ_i будут действительными. Существует очень много линейных преобразований (7,11) с действительными коэффициентами, приводящих квадратичную форму (6,11) к каноническому виду (8,11). Среди них особую роль играют ортогональные преобразования, т. е. такие преобразования (7,11), для которых

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_i^{(j)}\varphi_k^{(j)}=\delta_{ik},$$

где $\delta_{ik}=0$, при $i\neq k$ и $\delta_{ik}=1$ при $i=k$. В алгебре $K(P,Q)\equiv K(Q,P)$, будет показано, что интегральная форма

$$\int\int K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ \quad (10,11)$$

может быть представлена в виде конечной или бесконечной суммы вида

$$\sum_{i=1}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}\;^{*)},$$

где

$$\psi^{(i)}=\int\varphi(P)\,\varphi_i(P)\,dP,$$

а функции $\varphi_i(P)$, $i=1,2,\ldots$, образуют непустое конечное или счетное множество взаимно ортогональных и нормированных функций, т. е.

$$\int\varphi_i(P)\,\varphi_k(P)\,dP=\delta_{ik}.$$

Эти функции $\varphi_i(P)$ соответствуют единичным векторам, направленным по конечным главным осям поверхности (5,11). Каждая из функций $\varphi_i(P)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int K(P, Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ. \quad (11,11)$$

Все λ_i — действительны. Та-

*) Мы не написали верхнего предела значений для i, который может быть конечным или бесконечным.

показывается, что коэффициенты такого преобразования удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_i^{(k)}=\lambda_i\sum_{j=1}^{n}K_{kj}\varphi_i^{(j)},\quad (9,11)$$

$i=1, 2, \ldots, m$ (ср. § 19) *).

Геометрически преобразованию квадратичной формы (6,11) ортогональным преобразованием (7,11) к каноническому виду (8,11) соответствует переход к такой координатной системе, когда осями координат служат главные оси поверхности (4,11). Векторы $(\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(n)})$, $i=1, \ldots, m$, суть единичные векторы, направленные по конечным главным полуосям поверхности (4,11). Если $m<n$, то поверхность (4,11) вырождается в цилиндрическую поверхность. Тогда у нее, кроме m конечных осей, имеется еще $n-m$ бесконечных осей. Те полуоси, которым соответствуют положительные λ_i, называются действительными, а те полуоси, которым соответствуют отрицательные λ_i, называются мнимыми.

Задача о нахождении единичного вектора $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \ldots$

ким образом, интегральные уравнения с симметричным ядром весьма общего вида всегда имеют собственные значения (в противоположность уравнениям Вольтерра) и притом действительные.

Основная идея доказательства существования у инте-

*) § 19 предназначен для читателя, который хочет возобновить в памяти теорию квадратичных форм. Эта теория изложена там в форме, удобной для наших дальнейших приложений. Мы рекомендуем сейчас же прочитать этот параграф.

$\ldots, \varphi_1^{(n)}$), направленного по главной полуоси поверхности (4,11), соответствующей λ_1, которое мы будем считать наименьшим по абсолютной величине из всех λ_i, эквивалентна следующей задаче (ср. § 19). Найти максимум, если $\lambda_1 > 0$, или минимум, если $\lambda_1 < 0$ формы $\sum K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}$ при условии, что

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1.$$

Нахождение единичного вектора, направленного по полуоси, соответствующей λ_2, поверхности (4,11) или, что все равно, нахождение решения системы

$$\varphi^{(i)} = \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(j)},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

ортогонального к решению $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ легко сводится к нахождению максимума или минимума формы

$$\sum_{i, j=1}^{n} \left(K_{ij} - \frac{\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}}{\lambda_1}\right) \varphi_i \varphi_j$$

в классе единичных векторов $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. Аналогично находятся единичные векторы, грального уравнения (11,11) по крайней мере одного собственного значения состоит в следующем (ср. §12). Мы докажем существование в классе функций $\varphi(P)$, у которых

$$\int \varphi^2(P)\, dP = 1, \quad (12,11)$$

такой функции, которая дает отличный от 0 максимум или минимум λ_1 интегральной форме (10,11). Эта функция $\varphi_1(P)$ будет удовлетворять интегральному уравнению (11,11) при $i = 1$. Нахождение нормированной функции, направленной по главной полуоси, соответствующей λ_2, поверхности (5,11) и нахождение соответствующей собственной функции интегрального уравнения (11,11) легко сводится к нахождению максимума или минимума интегральной формы

$$\iint \left[K(P, Q) - \frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right] \times \\ \times \varphi(P)\,\varphi(Q)\, dP\, dQ$$

в классе функций, нормированных условием (12,11). Аналогично находятся нормированные функции, направленные по другим главным полуосям поверхности (5,11) или, что все равно, другие нормированные решения интегрального уравнения (11,11), направленные по другим полуосям (ср. § 19).

14. Подставляя в тождество

$$\sum_{i, j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}$$

вместо $\psi^{(i)}$ его выражение через $\varphi^{(j)}$, даваемое формулами (7, 11), получим:

$$\sum_{s,\ t}^{n} K_{st}\varphi^{(s)}\varphi^{(t)} \equiv \sum_{i,\ j} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{s,\ t} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi^{(s)}\varphi_i^{(t)}\varphi^{(t)}}{\lambda_i} \equiv$$

$$\equiv \sum_{s,\ t} \left(\sum_{i} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i} \right) \varphi^{(s)}\varphi^{(t)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях в крайних членах этой цепи тождеств, получим:

$$K_{st} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^{(s)}\varphi_i^{(t)}}{\lambda_i}.$$

15. Необходимым и достаточным условием возможности разложения заданного вектора $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ по направлению конечных главных полуосей поверхности (4,11) является условие, чтобы вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ был ортогонален ко всем бесконечным полуосям поверхности (4,11). Но из равенства (9,11), как легко видеть, следует, что

ортогональные предыдущим решениям (ср. п. 4 § 13).

14. При некоторых предположениях относительно $K(P, Q)$ будет показано (§ 15), что

$$K(P, Q) = \sum_{i} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}.$$

15. В § 14 будет показано, что всякая функция $f(P)$, *истокообразно представимая* при помощи ядра $K(P, Q)$ и некоторой функции $h(Q)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция, представимая в виде

$$f(P) = \int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

может быть разложена в равномерно и абсолютно сходякомпоненты $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$ векторов, направленных по бесконечным полуосям поверхности (4,11), должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,\chi^{(j)}=0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{13,11}$$

Условие же, что вектор $(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ должен быть ортогональным ко всем $(\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(n)})$, удовлетворяющим уравнениям (13,11), есть условие того, что система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ji} h^{(j)}=f^{(i)},$$

$$i=1, \ldots, n,$$

относительно неизвестных $h^{(1)}, \ldots, h^{(n)}$ или, что все равно, в силу условия $K_{ij}=K_{ji}$ система

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} h^{(j)}=f^{(i)},$$

$$i=1, \ldots, n,$$

должна иметь решение (ср. § 3).

щийся ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P,Q)$ (теорема Гильберта-Шмидта).

В §§ 12—18 *мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции принадлежат к классу, описанному в замечании к* § 1, *и кроме того, что все они действительны и их квадраты интегрируемы по всей конечной области их определения.*

§ 12. Доказательство существования собственных функций у интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. Предварительные замечания. Если существуют интегралы от квадратов $\varphi(P)$, $\psi(P)$ и $K(P, Q)$ по областям их определения, что мы предположили, то интеграл

$$\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ$$

также существует. Действительно,

$$|K(P, Q)\,\varphi(P)\,\psi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}K^2(P, Q) + \frac{1}{2}\varphi^2(P)\,\varphi^2(Q).$$

Поэтому

$$\iint |K(P, Q)\,\varphi(P)\,\psi(Q)|\,dP\,dQ \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ + \frac{1}{2}\int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \psi^2(Q)\,dQ.$$

Символ $\iint$ всюду в дальнейшем будет означать интегрирование по всей области определения $K(P, Q)$, т. е. по всей той области, где $P \in G$ и $Q \in G$ (ср. § 4, где аналогично определялся символ $\int$).

В §§ 12—18 мы будем рассматривать ядра $K(P, Q)$, описанные в п. 2 настоящего параграфа. Для таких $K(P, Q)$ все двойные интегралы, т. е. интегралы по совокупности (P, Q), вида

$$\int K(P, Q)\,\varphi(P)\,\psi(Q)\,dP\,dQ$$

можно рассматривать как повторные интегралы, взятые сначала по Q, а потом по P*).

Положим

$$B\varphi(P) = \int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ + c\varphi(P)$$

и

$$(\chi, \psi) = \int \chi(P)\,\psi(P)\,dP.$$

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, М., 1960, т. III, гл. XVI, § 5, стр. 214—273.

Функция $B\varphi(P)$ интегрируема с квадратом по G, так как в силу неравенства Буняковского

$$\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 \leqslant \int [K(P, Q)]^2\,dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ$$

и потому

$$\int\left(\int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ\right)^2 dP \leqslant \iint [K(P,Q)]^2 dP\,dQ \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Обобщение неравенства Буняковского. Пусть сумма интегралов

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ + c\int \varphi^2(P)\,dP \equiv (B\varphi, \varphi), \quad (1,12)$$

где c — некоторая постоянная, *неотрицательно определенна.* Это значит, что при всякой действительной функции $\varphi(P)$ эта сумма не отрицательна. Как и всюду в дальнейшем, мы будем предполагать, что $K(P, Q) = K(Q, P)$. Тогда для любых функций $\varphi(P)$ и $\psi(P)$

$$(B\varphi, \psi)^2 \leqslant (B\varphi, \varphi)\cdot(B\psi, \psi). \quad (2,12)$$

Доказательство неравенства (2,12). В силу предполагаемой неотрицательной определенности суммы (1,12) при всяком действительном μ

$$\iint K(P, Q)\,[\varphi(P) + \mu\psi(P)]\,[\varphi(Q) + \mu\psi(Q)]\,dP\,dQ + \\ + c\int [\varphi(P) + \mu\psi(P)]^2\,dP \geqslant 0.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\iint K(P, Q)\varphi(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ + \\ + \mu\iint K(P, Q)\varphi(Q)\psi(P)\,dP\,dQ + \\ + \mu^2\iint K(P, Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ + \\ + c\int \varphi^2(P)\,dP + 2\mu c\int \varphi(P)\psi(P)\,dP + c\mu^2\int \psi^2(P)\,dP \geqslant 0.$$

Так как в силу симметричности $K(P, Q)$ второй и третий интегралы равны между собой, то это неравенство можно переписать так:

$$(B\varphi, \varphi) + 2\mu (B\varphi, \psi) + \mu^2 (B\psi, \psi) \geqslant 0.$$

Это последнее неравенство может выполняться при всяком действительном μ только в том случае, если

$$(B\varphi, \psi)^2 \leqslant (B\varphi, \varphi) \cdot (B\psi, \psi),$$

что и требовалось доказать.

Если $K(P, Q) \equiv 0$, а $c = 1$, неравенство (2,12) переходит в неравенство Буняковского

$$\left(\int \varphi(P) \psi(P) \, dP\right)^2 \leqslant \int \varphi^2(P) \, dP \cdot \int \psi^2(P) \, dP.$$

2. *В дальнейшем до § 18 включительно мы будем рассматривать интегральные уравнения с действительным симметрическим ядром вида*

$$K(P, Q) = \frac{\overline{K}(P, Q)}{PQ^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{d}{2}, \tag{3,12}$$

где $\overline{K}(P, Q)$ — *равномерно непрерывная функция по* (P, Q), *когда* $P \in G$ *и* $Q \in G$. *Мы будем считать область* G *конечной.* Поэтому функция $\overline{K}(P, Q)$ ограничена.

Теорема. *Пусть дано семейство функций* $h(P)$, *для которых*

$$\int h^2(P) \, dP \leqslant M^2, \tag{4,12}$$

где M — *некоторая постоянная, одна и та же для всех функций* $h(P)$. *Тогда семейство функций* $\psi(P)$, *определяемых равенством*

$$\psi(P) = \int K(P, Q) \, h(Q) \, dQ,$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на G.

Равностепенная непрерывность семейства означает, что для любых двух точек P_1 и P_2, принадлежащих G, $|\psi(P_2) - \psi(P_1)|$ делается меньше произвольного числа $\varepsilon > 0$, если только расстояние P_1P_2 меньше некоторого $\eta > 0$, зависящего только от ε, но не зависящего ни от функции $\psi(P)$ рассматриваемого семейства, ни от положения точек P_1 и P_2 на области G.

Доказательство.

$$|\psi(P_2)-\psi(P_1)|^2=\left|\int [K(P_2, Q)-K(P_1, Q)]\,h(Q)\,dQ\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int [K(P_2, Q)-K(P_1, Q)]^2\,dQ\cdot\int h^2(Q)\,dQ \leqslant$$
$$\leqslant M\int [K(P_2, Q)-K(P_1, Q)]^2\,dQ. \qquad (5,12)$$

Делая предпоследний переход, мы воспользовались неравенством Буняковского, а делая последний — неравенством (4,12). Оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (5,12). Разобьем для этого область G на две части G_1 и G_2. К G_1 мы отнесем точки G, отстоящие от одной из точек P_1 или P_2 не дальше ϱ. В силу равенства (3,12) и ограниченности $\overline{K}(P, Q)$

$$\int_{G_1} [K(P_2, Q)-K(P_1, Q)]^2\,dQ$$

будет меньше любого положительного ε, если ϱ будет меньше некоторого числа $\varrho(\varepsilon)$, зависящего только от ε и стремящегося к 0 при $\varepsilon\to 0$. При этом $\varrho(\varepsilon)$ не зависит от точек P_1 и P_2. С другой стороны, при фиксированном ϱ

$$\int_{G_2} [K(P_2, Q)-K(P_1, Q)]^2\,dQ \qquad (6,12)$$

можно сделать как угодно малым, если только точки P_1 и P_2 становятся достаточно близкими друг к другу в силу равномерной непрерывности $\overline{K}(P, Q)$ в области G. При этом гарантируемая степень малости интеграла (6,12) зависит только от расстояния между точками P_1 и P_2, но не от их положения.

Равномерную ограниченность семейства функций $\psi(P)$ легко получить, пользуясь неравенством Буняковского. Действительно,

$$\left|\int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ\right| \leqslant \sqrt{\int K(P, Q)^2\,dQ}\,\sqrt{\int h^2(Q)\,dQ}.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части этого неравенства, ограничен согласно (3,12), второй меньше M согласно условию (4,12).

3. Теорема. *Интегральное уравнение.*

$$\varphi(P)=\lambda\int K(P,\ Q)\,\varphi(Q)\,dQ \tag{7,12}$$

имеет по крайней мере одно конечное собственное значение, если ядро обладает свойствами, описанными в начале предыдущего пункта, и не равно 0 тождественно. Вообще, во всем дальнейшем мы будем рассматривать только ядра, описанные в начале предыдущего пункта, не оговаривая это особо каждый раз.

Идея приводимого ниже доказательства этой теоремы изложена на правой стороне в п. 13 § 11. Впервые почти одновременно доказали таким методом эту теорему независимо один от другого Гильберт и Гольмгрен. Наибольшая из встречающихся при этом трудностей состоит в доказательстве существования в рассматриваемом классе функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (12,11), такой функции, которая дает максимум или минимум интегральной форме (10,11)*). Излагаемое нами доказательство существования такой функции принадлежит И. М. Гельфанду.

Доказательство. Рассмотрим множество S функций $\varphi(P)$, для которых

$$\int\varphi^2(P)\,dP=1. \tag{8,12}$$

Пусть

$$I(\varphi)=\iint K(P,\ Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ.$$

Значения $I(\varphi)$ на множестве S ограничены. Действительно, по неравенству Буняковского

$$|I(\varphi)|^2\leqslant\iint K^2(P,\ Q)\,dP\,dQ\cdot\iint\varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\,dP\,dQ=$$
$$=\iint K^2(P,\ Q)\,dP\,dQ\cdot\int\varphi^2(P)\,dP\cdot\int\varphi^2(Q)\,dQ.$$

Первый из последних трех интегралов конечен по условию (3,12), а последние два интеграла равны 1 согласно (8,12).

---

*) Справедливость аналогичного утверждения о существовании минимума и максимума квадратичной формы (6,11) на множестве единичных векторов $(\varphi^{(1)},\ \varphi^{(2)},\ \ldots,\ \varphi^{(n)})$ прямо вытекает из теоремы Вейерштрасса о существовании максимума и минимума любой непрерывной функции на любом замкнутом ограниченном множестве точек, в частности — функции (6,11) на сфере $\Sigma\,[\varphi^{(i)}]^2=1$,

Пусть μ_m, соответственно μ_M, есть нижняя, соответственно верхняя, грань значений $I(\varphi)$ на семействе S. Предполагая, что $K(P, Q)$ не равно нулю тождественно, докажем, что по крайней мере одно из чисел μ_M и μ_m отлично от нуля. В самом деле, в противном случае интеграл $I(\varphi)$ равнялся бы 0 для всех функций $\varphi(P)$ семейства S. В частности, это было бы для всякой функции $\varphi_{P_0}(P)$, равной 0 всюду, кроме некоторой произвольно малой окрестности одной какой-нибудь точки P_0, где $\varphi_{P_0}(P) > 0$. Но, с другой стороны, так как $K(P, Q)$ не тождественно равно 0, то непременно найдется точка (P_0, Q_0), где $K(P_0, Q_0) \neq 0$. При этом мы можем считать, что Q_0 не совпадает с P_0, так как если бы $K(P, Q)$ равнялось 0 для всех точек (P, Q), у которых P не совпадает с Q, то оно равнялось бы тождественно 0 в силу предполагаемой равномерной непрерывности по (P, Q) функции $\overline{K}(P, Q)$, написанной в соотношении (3,12). Но

$$I(\varphi_{P_0} + \varphi_{Q_0}) =$$
$$= I(\varphi_{P_0}) + I(\varphi_{Q_0}) + \iint K(P, Q)\,\varphi_{P_0}(P)\,\varphi_{Q_0}(Q)\,dP\,dQ +$$
$$+ \iint K(P, Q)\,\varphi_{P_0}(Q)\,\varphi_{Q_0}(P)\,dP\,dQ.$$

Последние два из написанных здесь интегралов берутся по малым окрестностям точек (P_0, Q_0) и (Q_0, P_0); в силу предполагаемой симметричности $K(P, Q)$ интегралы по этим двум окрестностям совпадают и в силу того, что $K(P_0, Q_0) \neq 0$ и в некоторой окрестности точки (P_0, Q_0) сохраняет знак, они отличаются от 0. Интегралы же $I(\varphi_{P_0})$ и $I(\varphi_{Q_0})$ мы предположили равными 0. Поэтому

$$I(\varphi_{P_0} + \varphi_{Q_0}) \neq 0,$$

что невозможно. Итак, при наших предположениях μ_m и μ_M не могут быть одновременно равными 0. Пусть для определенности $\mu_M \neq 0$.

Рассмотрим бесконечную последовательность нормированных функций

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots$$

для которых

$$I(\varphi_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu_M. \tag{9,12}$$

Разность

$$-I(\varphi)+\mu_M\int\varphi^2(P)\,dP,$$

как легко проверить, неотрицательно определенна в смысле, описанном в п. 1 настоящего параграфа. Поэтому в неравенстве (2,12) можно считать

$$B\varphi(P)=\int(-K(P,\ Q))\,\varphi(Q)\,dQ+\mu_M\varphi(P).$$

Положим в этом неравенстве

$$\varphi(P)=\varphi_k(P),$$
$$\psi(P)=B\varphi_k(P).$$

Получим:

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k)^2\leqslant(B\varphi_k,\ \varphi_k)\cdot(BB\varphi_k,\ B\varphi_k). \qquad (10,12)$$

В силу (9,12)

$$(B\varphi_k,\ \varphi_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (11,12)$$

С другой стороны,

$$|B\varphi_k(P)|\leqslant\frac{1}{2}\int K^2(P,\ Q)\,dQ+\frac{1}{2}\int\varphi_k^2(Q)\,dQ+|\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|.$$

Согласно (3,12) первый из интегралов в правой части ограничен, а второй по условию (8,12) равен 1. Поэтому

$$|B\varphi_k(P)|\leqslant M+|\mu_M|\cdot|\varphi_k(P)|,$$

где M — некоторая не зависящая от φ_k постоянная. Точно так же аналогичную оценку можно получить для $BB\varphi_k$. Применяя неравенство Буняковского, легко показать, что выражение $(BB\varphi_k,\ B\varphi_k)$ также ограничено. Поэтому из соотношений (10,12) и (11,12) следует, что

$$(B\varphi_k,\ B\varphi_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0. \qquad (12,12)$$

Согласно п. 2 семейство функций

$$K\varphi_k(P)=\int K(P,\ Q)\,\varphi_k(Q)\,dQ$$

равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Поэтому по теореме Арцеля (см., например, мои «Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям», § 11) из последовательности функций $K\varphi_k(P)$ можно выбрать *равномерно сходящуюся* подпоследовательность. Пусть это будет

$$K\varphi_{k_1}(P),\ K\varphi_{k_2}(P),\ \ldots,\ K\varphi_{k_m}(P),\ \ldots$$

Пусть

$$K\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} \varphi^*(P).$$

Мы утверждаем тогда, что функция $\varphi^*(P)$ будет решением интегрального уравнения (7,12) при $\lambda = \frac{1}{\mu_M}$. Действительно,

$$\begin{aligned} |BK\varphi_k(P)| &= |-KK\varphi_k(P) + \mu_M K\varphi_k(P)| = \\ &= |K[-K\varphi_k(P) + \mu_M\varphi_k(P)]| = |KB\varphi_k(P)| = \\ &= \left|\int K(P,\ Q)\cdot B\varphi_k(Q)\,dQ\right| \leqslant \\ &\leqslant \left\{\int [K(P,\ Q)]^2\,dQ\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int [B\varphi_k(Q)]^2\,dQ\right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (12,12), получим:

$$BK\varphi_{k_m}(P) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда в силу равномерной сходимости $K\varphi_{k_m}(P)$

$$B\varphi^*(P) = 0,$$

что и требовалось доказать. При этом $\varphi^*(P)$ не равно 0 тождественно, так как в противном случае в силу соотношения (12,12) последовательность $\mu_M\varphi_{k_m}(P)$ при $m \to \infty$ также стремилась бы в среднем к 0; а это невозможно, так как

$$\int [\mu_M\varphi_{k_m}(P)]^2\,dP = \mu_M^2 > 0.$$

Замечания. 1. Случай $\mu_m \neq 0$ сводится к разобранному случаю $\mu_M \neq 0$ изменением знака у $K(P,\ Q)$.

2. Мы показали, что нижняя, соответственно верхняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве нормированных функций $\varphi(P)$ равна обратной величине некоторого собственного значения λ интегрального уравнения (7,12), если только эта грань не равна 0. С другой стороны, обратная величина каждого собственного значения λ_i уравнения (7,12) есть одно из значений интеграла $I(\varphi)$ при некоторой функции из класса (8,12). Действительно, значение интеграла $I(\varphi)$ при $\varphi(P)=\varphi_i(P)$, где $\varphi_i(P)$ есть нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, равно:

$$\int \varphi_i(P)\,dP \int K(P,\ Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ = \frac{1}{\lambda_i}\int \varphi_i^2(P)\,dP = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Можно также сказать, что верхняя, соответственно нижняя, грань значений интеграла $I(\varphi)$ на множестве функций $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию

$$\int \varphi^2(P)\,dP \leqslant 1, \tag{13,12}$$

равна обратной величине наименьшего положительного, соответственно наибольшего отрицательного, собственного значения λ уравнения (7,12), если только эта грань не равна 0, Отсюда следует, что при всех функциях $\varphi(P)$, удовлетворяющих условию (13,12), значения интеграла $I(\varphi)$ по абсолютной величине не превосходят обратной величины наименьшего по абсолютному значению собственного значения λ уравнения (7,12). Кроме того, из предыдущих рассуждений видно, что верхняя, соответственно нижняя, грань $I(\varphi)$ на (13,12) *достигается* при φ, равном какой-нибудь нормированной собственной функции, соответствующей наименьшему по абсолютной величине положительному, соответственно отрицательному, собственному значению λ, если только эта грань не равна 0.

Задача. Доказать, что множество значений $I(\varphi)$ на (8,12) может быть любой точкой, либо замкнутым отрезком, либо полузамкнутым отрезком, к которому не принадлежит точка $I=0$, являющаяся одним из концов этого отрезка. Множество значений $I(\varphi)$ на (13,12) всегда содержит значение $I=0$ и является либо точкой, либо отрезком. Какие случаи возможны, если ядро вырожденное?

§ 13. Некоторые свойства собственных функций и собственных значений интегральных уравнений с симметрическими ядрами

1. Теорема. *Собственные функции уравнения* (7,12), *соответствующие различным собственным значениям* λ, *ортогональны между собой.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi_1(P)=\lambda_1\int K(P, Q)\,\varphi_1(Q)\,dQ, \tag{1,13}$$

$$\varphi_2(P)=\lambda_2\int K(P, Q)\,\varphi_2(Q)\,dQ, \tag{2,13}$$

причем $\lambda_1\neq\lambda_2$. Умножим (1,13) на $\lambda_2\varphi_2(P)$, а (2,13) — на $\lambda_1\varphi_1(P)$. Вычитая почленно полученные равенства и интегрируя разность по P, получим:

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int\varphi_1(P)\,\varphi_2(P)\,dP=$$
$$=\lambda_1\lambda_2\iint K(P, Q)\,\varphi_1(P)\,\varphi_2(Q)\,dQ\,dP-$$
$$-\lambda_1\lambda_2\iint K(P, Q)\,\varphi_2(P)\,\varphi_1(Q)\,dQ\,dP. \tag{3,13}$$

Меняя обозначения переменных интеграции во втором члене правой части, получим:

$$\iint K(P, Q)\,\varphi_2(P)\,\varphi_1(Q)\,dP\,dQ=\iint K(Q, P)\varphi_2(Q)\,\varphi_1(P)dQdP.$$

Так как $K(P, Q)=K(Q, P)$, то отсюда следует, что правая часть (3,13) равна 0. А так как, по предположению, $\lambda_2\neq\lambda_1$, то

$$\int\varphi_1(P)\,\varphi_2(P)\,dP=0,$$

что и требовалось доказать.

2. Теорема. *Все собственные значения интегральных уравнений с симметрическими ядрами действительны.*

Докажем сначала лемму. *Все собственные функции уравнений рассматриваемого вида непрерывны.*

Действительно, согласно сказанному в конце § 11 мы считаем все такие функции интегрируемыми с квадратом. Наша лемма сразу следует из п. 2 § 12.

Доказательство теоремы. Допустим, что у интегрального уравнения (7,12) имеется комплексное собственное значение $\lambda = a + bi$, где $b \neq 0$. Пусть ему соответствует собственная функция $\varphi(P)$. Тогда

$$\varphi(P) = (a + bi)\int K(P, Q)\varphi(Q)\, dQ. \tag{4,13}$$

Обозначая через $\overline{\varphi(P)}$ функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(P)$, из тождества (4,13) получим:

$$\overline{\varphi(P)} = (a - bi)\int K(P, Q)\,\overline{\varphi(Q)}\, dQ.$$

Согласно теореме 1 должно быть:

$$\int \varphi(P)\,\overline{\varphi(P)}\, dP = 0.$$

Отсюда и из только что доказанной леммы следует, что

$$\varphi(P) \equiv 0,$$

и потому $(a + bi)$ при $b \neq 0$ не может быть собственным значением λ.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что как действительная, так и мнимая часть комплексной собственной функции является также собственной функцией, соответствующей тому же собственному значению.

3. Ортогонализация собственных функций. Подобно тому как у поверхности второго порядка может быть несколько главных полуосей одинаковой длины, точно так же одному и тому же собственному значению λ интегрального уравнения с симметрическим ядром могут соответствовать несколько линейно независимых между собой собственных функций. По второй теореме Фредгольма множество линейно независимых между собой собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, всегда конечно. Пусть это будут функции

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_m(P). \tag{5,13}$$

Из того, что соответствующее этим функциям собственное значение λ действительно, легко вывести, что все эти функции мы можем выбрать действительными. Согласно теореме 1 все эти функции ортогональны собственным функциям того же интегрального уравнения, но соответствующим другим значениям λ. Любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами функций (5,13) есть также собственная функция уравнения (7,12). Покажем, что, составляя такие линейные с действительными коэффициентами комбинации функций (5,13), мы можем получить m нормированных, взаимно ортогональных и потому линейно независимых между собой собственных функций

$$\psi_1(P),\ \psi_2(P),\ \ldots,\ \psi_m(P)$$

уравнения (7,12). Положим

$$\psi_1(P)=a\varphi_1(P).$$

Подберем постоянную $a\neq 0$ так, чтобы

$$\int \psi_1^2(P)\,dP=1.$$

Положим

$$\psi_2(P)=b\,[\varphi_2(P)+b_1\psi_1(P)],$$

где $b\neq 0$ и b_1 — некоторые постоянные. Выберем постоянную b_1 так, чтобы было

$$\int \psi_1\psi_2\,dP=b\left[\int \psi_1\varphi_2\,dP+b_1\int \psi_1^2\,dP\right]=0.$$

Так как $\int \psi_1^2\,dP=1$, то это неравенство единственным образом определяет b_1. Постоянную b подберем так, чтобы норма ψ_2 равнялась 1. Это возможно сделать, потому что в силу предполагаемой линейной независимости функций (5,13) $\varphi_2(P)+b_1\psi_1(P)$ не равно 0 тождественно. А так как все собственные функции уравнения (7,12) непрерывны, то интеграл от квадрата $\varphi_2+b_1\psi$ не может быть равным 0.

Положим далее

$$\psi_3(P)=c\,[\varphi_3(P)+c_2\psi_2(P)+c_1\psi_1(P)],\quad c\neq 0.$$

Подберем постоянную c_1 так, чтобы

$$\int \psi_1\psi_3\,dP=c\left[\int \varphi_3\psi_1\,dP+c_2\int \psi_2\psi_1\,dP+c_1\int \psi_1^2\,dP\right]=0.$$

Так как

$$\int \psi_1\psi_2\,dP=0 \quad \text{и} \quad \int \psi_1^2\,dP=1,$$

то это условие однозначно определяет c_1:

$$c_1 = -\int \varphi_3\psi_1\, dP.$$

Совершенно так же постоянные c_2 и $c \neq 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\int \psi_2\psi_3\, dP = 0 \text{ и } \int \psi_3^2\, dP = 1.$$

Продолжая этот процесс, получим $\psi_4(P), \ldots, \psi_m(P)$.

Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением лишь таких линейно независимых между собой собственных функций рассматриваемого интегрального уравнения, которые образуют ортонормальную систему. Возьмем одну какую-нибудь ортонормальную систему собственных функций этого уравнения, *максимальную* в том смысле, что всякая собственная функция этого интегрального уравнения выражается линейно через функции этой системы. Для дальнейшего нам будет удобно занумеровать их так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения абсолютных величин соответствующих собственных значений λ (множество которых согласно § 8 не имеет конечных предельных точек). Если одному и тому же λ соответствуют несколько линейно независимых между собой собственных функций, то все эти собственные функции мы поставим рядом. Таким образом, мы получим ряды

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_i(P),\ \ldots \tag{6,13}$$

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\ \ldots,\quad \lambda_i,\ \ldots \tag{7,13}$$

Здесь под каждой собственной функцией подписано соответствующее собственное значение λ. Ряды (6,13) и (7,13) могут быть конечными или бесконечными. В ряду (7,13) некоторые рядом стоящие λ_i могут быть равными. Это будет тогда, если при соответствующем значении λ_i уравнение (7,12) имеет несколько линейно независимых между собой собственных функций. Но согласно второй теореме Фредгольма для каждого λ_i имеется только конечное число собственных функций, ортогональных между собой и потому линейно независимых. Из этой же теоремы следует, что если ряды (6,13) и (7,13) бесконечные, то

$$|\lambda_i| \to \infty \text{ при } i \to \infty.$$

Система (6,13) будет максимальной в указанном выше смысле, если в ряду (7,13) будут находиться все собственные значения рассматриваемого интегрального уравнения и если каждому такому собственному значению в ряду (6,13) будет соответствовать максимальное число линейно независимых между собой собственных функций, отвечающих этому собственному значению.

4. Теорема. *Пусть* $\varphi_1(P)$ — *собственная функция интегрального уравнения* (7,12), *соответствующая собственному значению* λ_1. *Тогда для ядра*

$$K_1(P, Q)=K(P, Q)-\frac{\varphi_1(P)\cdot\varphi_1(Q)}{\lambda_1}$$

ряды собственных функций и собственных значений, аналогичные рядам (6,13) *и* (7,13) *для* $K(P, Q)$, *можно получить из рядов* (6,13) *и* (7,13), *соответствующих ядру* $K(P, Q)$, *зачеркиванием* $\varphi_1(P)$ *и* λ_1.

Доказательство. Покажем сначала, что всякая собственная функция $\varphi(P)$ ядра $K_1(P, Q)$, соответствующая собственному значению λ, есть собственная функция ядра $K(P, Q)$, соответствующая тому же собственному значению. Действительно, пусть

$$\varphi(P)=\lambda\int K_1(P, Q)\varphi(Q)\,dQ. \tag{8,13}$$

Тогда

$$\int\varphi(P)\varphi_1(P)\,dP=0, \tag{9,13}$$

потому что

$$\begin{aligned}\int\varphi(P)\varphi_1(P)\,dP&=\lambda\iint K_1(P, Q)\varphi(Q)\varphi_1(P)\,dP\,dQ=\\&=\lambda\iint\left[K(P, Q)-\frac{\varphi_1(P)\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_1(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ=\\&=\lambda\iint K(P, Q)\varphi_1(P)\varphi(Q)\,dP\,dQ-\\&-\frac{\lambda}{\lambda_1}\int\varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ\int\varphi_1^2(P)\,dP=\\&=\frac{\lambda}{\lambda_1}\int\varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ-\frac{\lambda}{\lambda_1}\int\varphi_1(Q)\varphi(Q)\,dQ=0.\end{aligned}$$

В силу соотношения (9,13) равенство (8,13) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(P)=\lambda\int\left[K(P,\ Q)-\frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi(Q)\,dQ=$$
$$=\lambda\int K(P,\ Q)\,\varphi(Q)\,dQ.$$

Таким образом, доказано, что $\varphi(P)$ есть собственная функция интегрального уравнения (7,12), отвечающая тому же λ.

Покажем теперь обратно, что всякая собственная функция $\varphi_i(P)$ из ряда (6,13), соответствующая собственному значению λ_i из ряда (7,13) при $i>1$, есть собственная функция, отвечающая тому же собственному значению λ_i для ядра $K_1(P,\ Q)$. Действительно, пусть

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int K(P,\ Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ,\quad i>1. \tag{10,13}$$

Тогда

$$\int\varphi_1(P)\,\varphi_i(P)\,dP=0.$$

Поэтому из равенства (10,13) следует:

$$\varphi_i(P)=\lambda_i\int\left[K_1(P,\ Q)+\frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1}\right]\varphi_i(Q)\,dQ=$$
$$=\lambda_i\int K_1(P,\ Q)\,\varphi_i(Q)\,dQ.$$

Функция же $\varphi_1(Q)$ не является собственной функцией уравнения (8,13), так как в противном случае из условия (9,13) следовало бы, что $\int\varphi_1^2(P)\,dP=0$, что невозможно.

Из доказанных утверждений легко следует наша теорема.

5. Применяя последовательно теорему 4 к ядрам

$$K_1(P,\ Q)=K(P,\ Q)-\frac{\varphi_1(P)\,\varphi_1(Q)}{\lambda_1},$$

$$K_2(P,\ Q)=K_1(P,\ Q)-\frac{\varphi_2(P)\,\varphi_2(Q)}{\lambda_2},\ \ldots,$$

мы найдем, что все собственные функции $\varphi_i(P)$ из ряда (6,13), соответствующие собственным значениям λ_i из ряда (7,13) для ядра $K(P,\ Q)$, суть собственные функции, соответствующие тем же собственным значениям, для ядра

$$K_m(P,\ Q) = K(P,\ Q) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\,\varphi_k(Q)}{\lambda_k},$$

если $i > m$. Эти собственные функции $\varphi_i(P)$, $i > m$ образуют для интегрального уравнения с ядром $K_m(P,\ Q)$ максимальную систему собственных функций в том смысле, что всякая другая собственная функция этого ядра выражается линейно через них.

Таким образом, *ряды* (6, 13) *и* (7, 13) *для симметрического ядра* $K(P,\ Q)$ *можно получить, применяя последовательно вариационный метод к ядрам* $K(P,\ Q)$, $K_1(P,\ Q)$, $K_2(P,\ Q)$, ...

6. Допустим, что ядро $K(P,\ Q)$ имеет только конечное число линейно независимых собственных функций (так будет у всякого вырожденного ядра). Тогда при достаточно большом m ядро $K_m(P,\ Q)$ не будет иметь ни одного собственного значения. С другой стороны, так как функции $\varphi_k(P)$ согласно лемме п. 2 непрерывны, то ядро $K_m(P,\ Q)$ будет точно так же, как и $K(P,\ Q)$, обладать всеми свойствами, описанными в п. 2 § 12. Поэтому согласно п. 3 § 12 должно быть $K_m(P,\ Q) \equiv 0$, т. е. должно быть

$$K(P,\ Q) \equiv \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(P)\,\varphi_k(Q)}{\lambda_k}. \qquad (11,13)$$

Из этой формулы следует, что всякое ядро рассматриваемого вида с конечным числом собственных значений (или, что равносильно, с конечным числом линейно независимых собственных функций) есть вырожденное ядро.

З а м е ч а н и е. Пусть $K(P,Q) = \dfrac{\overline{K}(P,\ Q)}{PQ^{\alpha}}$, где $0 \leqslant \alpha < d$, $\overline{K}(P,\ Q)$ — равномерно непрерывная функция P и Q и $\overline{K}(P,\ Q) = \overline{K}(Q,\ P)$. Легко видеть, что для непрерывных собственных функций интегрального уравнения с ядром $K(P,\ Q)$ указанного вида справедливы теоремы 1 и 2 настоящего параграфа. Воспользовавшись этим, мы покажем, что интегральное уравнение с ядром указанного вида имеет по крайней мере одно собственное значение.

Из леммы § 8 следует, что существует такое m, что ядро $K^{(m)}(P, Q) = \underbrace{K \circ K \circ \ldots \circ K}_{m \text{ раз}}$ непрерывно. Так как $K^{(m)}(P, Q)$ — непрерывное симметрическое ядро, то по доказанному в § 12 существуют такое действительное число μ_1 и непрерывная функция $\varphi_1(P)$, что

$$\varphi_1 = \mu_1 K^{(m)} \varphi_1$$

($K^{(m)}$ означает оператор, соответствующий ядру $K^{(m)}(P, Q)$, см. стр. 37). Будем предполагать, что m нечетно, и положим $\mu_1 = \lambda_1^m$, где λ_1 — действительное число. Пусть e — какой-нибудь первообразный корень степени m из единицы. Имеет место равенство

$$(E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K) \ldots (E-\lambda_1 e^{m-1} K) = \\ = (E-\lambda_1^m K^{(m)}).$$

Справедливость этого равенства вытекает из алгебраического тождества

$$(a^m - b^m) \equiv (a-b)(a-eb)(a-e^2 b) \ldots (a-e^{m-1} b).$$

Таким образом,

$$(E-\lambda_1^m K^{(m)}) \varphi_1 = (E-\lambda_1 K)(E-\lambda_1 eK) \ldots (E-\lambda_1 e^{m-1} K) \varphi_1.$$

Положим

$$(E-\lambda_1 eK)(E-\lambda_1 e^2 K) \ldots (E-\lambda_1 e^{m-1} K) \varphi_1 = \psi_1.$$

Тогда

$$(E-\lambda_1 K) \psi_1 = 0 \quad \text{и} \quad \psi_1 \not\equiv 0,$$

т. е. ψ_1 есть собственная функция интегрального уравнения с ядром $K(P, Q)$. Действительно, так как m нечетно, то $\lambda_1 e^p$ — комплексные числа при $1 \leqslant p \leqslant m-1$. Далее, $(E-\lambda_1 e^p K) \varphi \not\equiv 0$ при любой функции $\varphi(P) \not\equiv 0$ и $1 \leqslant p \leqslant m-1$, так как уравнение с симметрическим ядром не имеет комплексных собственных значений в силу теоремы 2 настоящего параграфа. Поэтому $\psi_1 \not\equiv 0$, так как в противном случае мы получили бы, что для некоторого $1 \leqslant p \leqslant m-1$ и некоторой функции $\varphi(P)$, нетождественно равной нулю, $(E-\lambda_1 e^p K) \varphi = 0$.

Этим наше утверждение доказано.

Задача 1. Доказать, что для симметрического ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого в п. 2 § 12, можно найти вторую собственную функцию из ряда (6,13), применяя описанный в п. 3 § 12 вариационный метод, с той разницей, что теперь допустимые функции удовлетворяют не только условию (8,12), но еще условию (9,13). Использовать этот метод для нахождения остальных собственных функций.

Задача 2. Пусть $K(P, Q) = -K(Q, P)$ и $K(P, Q)$ удовлетворяет условию (3,12). Докажите, что тогда все собственные значения — чисто мнимые, а собственные функции не могут быть вещественными. Любая из собственных функций ортогональна сама себе и всем другим собственным функциям, за исключением, быть может, тех, которые отвечают комплексно сопряженному собственному значению.

§ 14. Теорема Гильберта-Шмидта

Всякая функция $f(P)$, истокообразно представимая при помощи функции $h(P)$ с интегрируемым квадратом, т. е. функция вида

$$f(P) = \int K(P, Q)\, h(Q)\, dQ,$$

может быть разложена в ряд по собственным функциям (6,13) *симметрического ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание. Конечно, о сходимости этого ряда имеет смысл говорить только в том случае, если интегральное уравнение (7,12) имеет бесконечное множество линейно независимых собственных функций. В противном случае этот ряд обращается в сумму конечного числа слагаемых. Чтобы не удлинять запись, мы здесь, как и в других аналогичных случаях, будем писать всюду бесконечные ряды, помня, что в случае конечного числа собственных функций эти ряды заменятся конечными суммами, сходимость которых не надо доказывать.

Доказательство теоремы будет состоять в том, что мы сначала построим некоторый ряд по собственным функциям (6,13) и докажем, что он сходится равномерно, а потом докажем, что он сходится именно к функции $f(P)$.

Допустим, что функция $f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям (6,13), которые мы считаем ортонормированными. Пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(P) = f(P), \tag{1,14}$$

причем ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно. Для определения коэффициента C_m помножим обе части равенства (1,14) на $\varphi_m(P)$ и проинтегрируем почленно по всей области G определения функций $f(P)$ и $\varphi_i(P)$. Получим:

$$C_m = \int f(P)\varphi_m(P)\,dP = \iint K(P, Q)\,h(Q)\,\varphi_m(P)\,dP\,dQ =$$
$$= \int h(Q)\left(\int K(Q, P)\,\varphi_m(P)\,dP\right)dQ =$$
$$= \int \frac{\varphi_m(Q)\,h(Q)\,dQ}{\lambda_m} = \frac{h_m}{\lambda_m}. \qquad (2,14)$$

Мы здесь положили

$$h_m = \int h(Q)\,\varphi_m(Q)\,dQ.$$

Покажем теперь, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} \qquad (3,14)$$

сходится равномерно и абсолютно. Для этого применим признак Коши. Составим отрезок ряда

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{h_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}.$$

Применяя неравенство Коши, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} |h_i| \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|\right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} h_i^2 \sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2. \qquad (4,14)$$

Коэффициенты h_i суть коэффициенты Фурье функции $h(P)$ по отношению к функциям $\varphi_i(P)$. Поэтому, применяя неравенство Бесселя, мы найдем, что числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$$

сходится. Следовательно, по признаку Коши величина

$$\sum_{i=m}^{m+p} h_i^2$$

будет меньше любого положительного ε_1, если только m будет достаточно велико.

С другой стороны, величины $\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье при разложении ядра $K(P, Q)$, рассматриваемого как функция только от Q, в ряд по функциям $\varphi_i(Q)$. Применяя опять к этим коэффициентам неравенство Бесселя, мы найдем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right)^2 \leqslant \int K^2(P, Q)\,dQ.$$

Последний интеграл существует в силу условия (3,12) и ограничен постоянной, не зависящей от P. Поэтому при любых m и p сумма

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{\varphi_i(P)}{\lambda_i}\right|^2$$

ограничена.

Таким образом, из неравенства (4,14) мы находим, что для любого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что при любом $m > m_0$ и любом $p > 0$ будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p}\left|\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда по признаку Коши следует, что ряд (3,14) сходится абсолютно и равномерно.

Перейдем теперь к доказательству того, что ряд (3,14) сходится именно к функции $f(P)$.

Заметим прежде всего, что из теоремы, доказанной в п. 2 § 12, следует, что функция $f(P)$ и все собственные функции $\varphi_i(P)$ равномерно непрерывны. Кроме того, мы только что доказали, что ряд (3,14) сходится равномерно. Поэтому для доказательства сходимости этого ряда к $f(P)$ достаточно доказать, что этот ряд сходится к $f(P)$ в среднем, т. е. что

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (5,14)$$

Для доказательства же этого последнего утверждения заметим, что

$$f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)=\int\left[K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\,dQ,$$

откуда, полагая для сокращения записи

$$K_m(P,\ Q)=K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i},$$

$$g_m(P)=f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P),$$

получим:

$$\int\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]^2 dP=\iint\left[K(P,\ Q)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]h(Q)\left[f(P)-\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(P)\right]dP\,dQ=$$

$$=\frac{1}{2}\iint K_m(P,Q)\,[h(Q)+g_m(Q)]\,[h(P)+g_m(P)]\,dP\,dQ-$$

$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,\ Q)\,h(Q)\,h(P)\,dP\,dQ-$$

$$-\frac{1}{2}\iint K_m(P,\ Q)\,g_m(Q)\,g_m(P)\,dP\,dQ. \qquad (6,14)$$

Мы здесь воспользовались тем, что в силу симметричности ядра $K(P,\ Q)$

$$\iint K_m(P,\ Q)\,h(P)\,g_m(Q)\,dP\,dQ=$$

$$=\iint K_m(P,\ Q)\,h(Q)\,g_m(P)\,dP\,dQ.$$

Так как

$$\int g_m^2(P)\,dP=\int f^2(P)\,dP-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{h_i}{\lambda_i}\right)^2\leqslant\int f^2(P)\,dP,$$

то существует такое не зависящее от m число M, что при всяком m

$$\int g_m^2(P)\,dP<M,\quad \int h^2(P)\,dP<M,\quad \int[h(P)+g_m(P)]^2\,dP<M.$$

Согласно замечанию 2 к п. 3 § 12 и п. 5 § 13

$$\left|\int K_m(P, Q)\psi(P)\psi(Q)\,dP\,dQ\right| \leqslant \frac{M}{|\lambda_{m+1}|},$$

если

$$\int \psi^2(P)\,dP \leqslant M.$$

Значит, все три интеграла, стоящие в правой части (6,14), стремятся к 0 при $m \longrightarrow \infty$, и потому справедливо соотношение (5,14).

Следствие. Формула Шмидта для решения интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(P) = \lambda \int K(P, Q)\varphi(Q)\,dQ + f(P), \tag{7,14}$$

где $K(P, Q)$ — симметрическое ядро вида, описанного в начале п. 2 § 12, $f(P)$ — известная равномерно непрерывная функция, $\varphi(P)$ — искомая функция, λ — параметр. По первой теореме Фредгольма (§ 8) интегральное уравнение (7,14) имеет равномерно непрерывное решение $\varphi(P)$, если λ не является собственным значением. Тогда по теореме Гильберта-Шмидта функция $\varphi(P) - f(P)$ разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(P, Q)$, который сходится абсолютно и равномерно. Пусть

$$\varphi(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P).$$

Отсюда

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P) + f(P). \tag{8,14}$$

Подставляя вместо $\varphi(P)$ в уравнение (7,14) правую часть равенства (8,14), получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i\varphi_i(P) + f(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int K(P, Q)\varphi_i(Q)\,dQ +$$

$$+ \lambda \int K(P, Q) f(Q)\,dQ + f(P) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i\varphi_i(P)}{\lambda_i} + f(P). \tag{9,14}$$

Воспользовавшись опять теоремой Гильберта-Шмидта, мы заменили здесь

$$\int K(P, Q) f(Q)\, dQ$$

абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i}, \quad \text{где } f_i = \int f(P) \varphi_i(P)\, dP.$$

Легко видеть, что и первый из рядов, стоящих в правой части (9,14), равномерно сходится. Сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_i(P)$ в правой и левой частях равенства (9,14), получим:

$$C_i = \frac{\lambda C_i}{\lambda_i} + \frac{\lambda f_i}{\lambda_i}.$$

Отсюда

$$C_i = \frac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$$

и, следовательно,

$$\varphi(P) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P), \tag{10,14}$$

где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно. Эта формула называется формулой Е. Шмидта.

В том случае, когда λ совпадает с одним из собственных значений λ_i, можно аналогичным образом получить решение уравнения (7,14). При этом $f_i = 0$ для всех i, которым соответствуют собственные значения, равные λ, в силу третьей теоремы Фредгольма. Решение $\varphi(P)$ будет представляться в виде ряда (8,14), в котором $C_i = \dfrac{\lambda f_i}{\lambda_i - \lambda}$, если $\lambda_i \neq \lambda$, и $C_i = \alpha_i$, где α_i — произвольная постоянная, если $\lambda_i = \lambda$.

З а д а ч а. Доказать теорему Гильберта-Шмидта для вырожденных ядер непосредственно, воспользовавшись формулой (11,13).

§ 15. Теорема о разложении ядер

Теорема. *Ядро $K(P, Q)$ рассматриваемого в настоящей главе вида разлагается в ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}, \tag{1,15}$$

который сходится к $K(P, Q)$ в среднем по P, т. е. при всяком фиксированном Q

$$\int \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2,15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$K_2(P, Q) = \int K(P, S) K(S, Q)\, dS$$

как функцию только P, считая Q фиксированным. Тогда эту функцию можно по теореме Гильберта-Шмидта разложить в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$, который сходится равномерно и абсолютно по P. Пусть

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(P).$$

Согласно формуле (2,14)

$$c_i = \frac{\int K(P, Q)\varphi_i(P)\, dP}{\lambda_i} = \frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2},$$

Следовательно,

$$K_2(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{3,15}$$

По теореме Гильберта-Шмидта этот ряд сходится абсолютно и равномерно по P при всяком фиксированном Q. Из соображений симметрии отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость этого ряда также и по Q при всяком фиксированном P. Но нет никаких оснований заключить отсюда о равномерной сходимости этого ряда по совокупности P и Q. Такая сходимость будет доказана в § 17.

Из (3,15) следует, что

$$K_2(Q,\ Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}, \tag{4,15}$$

причем последний ряд сходится, но мы не можем пока утверждать, что он сходится равномерно по Q.

С другой стороны,

$$\int\left[K(P,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP=$$

$$=\int K(Q,\ P)K(P,\ Q)\,dP-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\int K(Q,\ P)\varphi_i(P)\,dP+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=K_2(Q,\ Q)-2\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}=$$

$$=K_2(Q,\ Q)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{5,15}$$

Согласно (4,15) эта последняя разность стремится к 0 при $m\longrightarrow\infty$. Отсюда следует (2,15), что и требовалось доказать.

§ 16. Классификация ядер

Рассмотрим интегральную форму

$$\int\int K(P,\ Q)\,\chi(P)\,\chi(Q)\,dP\,dQ, \tag{1,16}$$

где $\chi(P)$ — какая-нибудь функция с интегрируемым квадратом. Воспользовавшись неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл (1,16) существует, так как существует интеграл от квадрата $K(P,\ Q)$ [ср. (3,12)]. По теореме Гильберта-Шмидта функция от P

$$\int K(P,\ Q)\,\chi(Q)\ dQ$$

разлагается в ряд по собственным функциям $\varphi_i(P)$ ядра $K(P,\ Q)$, который равномерно по P сходится. Воспользовавшись при этом формулой (2,14), мы получим, таким образом,

$$\int K(P, Q)\chi(Q)\,dQ=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\chi_i}{\lambda_i}\varphi(P), \tag{2,16}$$

где

$$\chi_i=\int \chi(P)\varphi_i(P)\,dP.$$

Помножив обе части (2,16) на $\chi(P)$ и проинтегрировав по P, получим:

$$\int\int K(P, Q)\chi(P)\chi(Q)\,dP\,dQ=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\chi_i^2}{\lambda_i}. \tag{3,16}$$

Интегральная форма и ядро $K(P, Q)$ *называются неотрицательно, соответственно неположительно, определенными (или дефинитными), если для всякой функции* $\chi(P)$ *с интегрируемым квадратом интегральная форма* (1,16) *неотрицательна, соответственно неположительна* (ср. § 12, п. 1).

Из формулы (3,16) видно, что *необходимым и достаточным условием неотрицательной, соответственно неположительной, определенности формы* (1,16) *является условие, чтобы все* λ_i *были положительными, соответственно отрицательными.*

Будем форму (1,16) и ядро $K(P, Q)$ называть *квазиопределенными неотрицательно*, соответственно *неположительно*, если все соответствующие λ_i, кроме, быть может, конечного их числа, положительны, соответственно отрицательны.

§ 17. Теорема Дини и ее приложения

Теорема Дини. *Если монотонная последовательность непрерывных функций*

$$f_1(P),\ f_2(P), \ldots,\ f_k(P), \ldots \tag{1,17}$$

всюду на замкнутом ограниченном множестве F *сходится к непрерывной функции* $f(P)$, *то эта последовательность сходится равномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $f(P)\equiv 0$; общий случай сводится к этому вычитанием $f(P)$ из каждой функции $f_k(P)$. Мы можем далее считать, что последовательность (1,17) монотонно убывает в каждой точке P*), так как противоположный случай сводится к этому переменой знака у всех $f_k(P)$.

Итак, пусть имеется монотонно убывающая в каждой точке последовательность непрерывных функций $f_k(P)$, сходящаяся к 0 в каждой точке ограниченного замкнутого множества F. Докажем, что эта сходимость равномерная. Для этого заметим следующее. Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой точки P множества F можно указать такое m, что

$$0 \leqslant f_m(P) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности $f_m(P)$ то же неравенство будет иметь место и в некоторой окрестности O_P точки P. В силу монотонного убывания рассматриваемой последовательности функций в окрестности O_P будет

$$0 \leqslant f_k(P) < \varepsilon \quad \text{при всех } k \geqslant m. \tag{2,17}$$

Таким образом, при выбранном ε для каждой точки P множества F можно указать такую ее окрестность O_P, что, начиная с некоторого k, в ней будет справедливо неравенство (2,17). По лемме Гейне-Бореля из всей совокупности окрестностей O_P можно выбрать такое их конечное множество, которое покрывает все множество F. Пусть M будет максимальным из всех чисел m, соответствующих этим окрестностям. Тогда очевидно, что при всех $k \geqslant M$ на всем множестве F будет

$$f_k(P) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Приложения теоремы Дини.

1. В § 15 мы доказали, что

$$K_2(Q, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}. \tag{4,15}$$

Оставался нерешенным вопрос о том, равномерно ли по Q сходится ряд в правой части. Теперь, после доказательства

*) То есть

$$f_k(P) \geqslant f_{k+1}(P), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

теоремы Дини, мы легко сможем решить этот вопрос. Действительно, согласно лемме, доказанной в § 8, функция $K_2(Q, Q)$ равномерно непрерывна по Q. Следовательно, ее можно считать непрерывной на $\overline{G}$ (ср. примечание на стр. 31). Значит, последовательность

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}$$

есть монотонная в каждой точке Q последовательность непрерывных функций, которая сходится при $m \to \infty$ к непрерывной же функции. Следовательно, по теореме Дини эта сходимость *равномерна* на $\overline{G}$.

2. Из того, что ряд, стоящий в правой части (4,15), сходится равномерно по Q, следует, что последовательность (2,15) сходится к 0 равномерно по Q [см. (5,15)]. *Поэтому*

$$\iint \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\,dQ \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Из равномерной по Q сходимости ряда (4,15) следует *равномерная по* (P, Q) *и абсолютная сходимость ряда* (3,15), так как

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left|\frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i^2}.$$

4. Интегрируя по Q обе части (4,15), найдем:

$$\int K_2(Q, Q)\,dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2},$$

так как функции $\varphi_i(Q)$ нормированы. Значит, *ряд, составленный из квадратов обратных величин* λ_i, *сходится.*

5. Теорема Мерсера. *Если ядро* $K(P, Q)$ *квазиопределенно и равномерно непрерывно по* (P, Q), *то ряд* (1,15) *сходится к нему не только в среднем, но абсолютно и равномерно по* (P, Q).

Доказательство. Для определенности будем предполагать, что ядро $K(P, Q)$ квазиопределенно неотрицательно.

Заметим далее, что если ядро $K_m(P, Q)$ неотрицательно определенно и непрерывно, то всегда $K_m(P, P) \geqslant 0$. Действительно, если бы в некоторой точке P_0 было $K_m(P_0, P_0) < 0$, то в силу непрерывности оно было бы отрицательным и в некоторой окрестности точки (P_0, P_0) в пространстве (P, Q). Построим тогда непрерывную функцию $\varphi_{P_0}(P)$, которая равняется 0 всюду на области G, кроме некоторой малой окрестности G_0 точки P_0, где эта функция положительна. Тогда, если область G_0 достаточно мала, будет

$$\iint K_m(P, Q)\ \varphi_{P_0}(P)\varphi_{P_0}(Q)\ dP\,dQ < 0,$$

что противоречит предположению о неотрицательной определенности ядра $K_m(P, Q)$.

В силу предполагаемой неотрицательной квазиопределенности ядра $K(P, Q)$ при достаточно большом m ядро

$$K_m(P, Q) = K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}$$

будет неотрицательно определенным (ср. § 16). Поэтому согласно только что доказанному утверждению о неотрицательно определенных непрерывных ядрах должно быть при всех достаточно больших m

$$K(P, P) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \tag{3,17}$$

при всех P сходится. Поэтому ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} \tag{4,17}$$

также сходится при всех Q. Так как $K(P, P)$ ограничено, то все частичные суммы рядов (3,17) и (4,17) при всех P и Q по абсолютной величине ограничены некоторой постоянной

$$M_0 > 0.$$

Применяя неравенство Коши и считая m настолько большим, что все $\lambda_i > 0$ при $i > m$, получим:

$$\left[\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| \right]^2 \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} \cdot \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i}. \qquad (5,17)$$

Применяя необходимый признак сходимости Коши к ряду (4,17), мы найдем, что для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ при любом фиксированном Q можно указать такое большое m_0, зависящее только от ε и Q, что будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{|\lambda_i|} = \sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(Q)}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon^2}{2M_0}, \text{ если } m > m_0(\varepsilon, Q).$$

Поэтому из неравенства (5,17) получим, что при любом $p > 0$ и при $m > m_0(\varepsilon, Q)$ будет:

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon.$$

Отсюда, применяя достаточный признак сходимости Коши, мы найдем, что ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно по P при каждом фиксированном Q.

В силу доказанного прежде соотношения (2,15) мы получим отсюда, что ряд (1,15) сходится именно к $K(P, Q)$. В частности,

$$K(P, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i}. \qquad (6,17)$$

Так как $K(P, P)$, по предположению, непрерывно на замкнутой области $\overline{G}$ и так как все функции $\varphi_i(P)$ также непрерывны на этой области (см. лемму п. 2 § 12), а все λ_i, начиная с некоторого, положительны, то по теореме Дини ряд в правой части (6,17) сходится равномерно по P. Поэтому для каждого постоянного $\varepsilon > 0$ можно указать такое m_0, зависящее только от ε, что будет при любом $p > 0$

$$\sum_{i=m}^{m+p} \frac{\varphi_i^2(P)}{\lambda_i} < \varepsilon, \text{ если } m > m_0(\varepsilon).$$

Из неравенства (5,17) следует, что при любых P и Q, $p > 0$ и тех же m и ε будет

$$\sum_{i=m}^{m+p} \left| \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

и потому ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно по (P, Q), что и требовалось доказать.

§ 18. Пример

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1,18}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина, построенная в § 2. Как там было указано, эта функция симметрична относительно обоих своих аргументов. Поэтому к интегральному уравнению (1,18) применима вся теория, развитая в настоящей главе. Это уравнение имеет, как мы видели в § 2, бесконечное множество собственных функций и собственных значений, которые все были найдены в § 2. Нормируя их и выписывая собственные значения λ под соответствующими собственными функциями, получим ряды

$$\left.\begin{array}{llll} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x, & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin 2x, \;\ldots, & \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin kx, & \ldots \\ 1, & 4 \qquad\;\;, \;\ldots, & k^2 & , \;\ldots \end{array}\right\} \tag{2,18}$$

Для упрощения записи мы положили в уравнениях (1, 2) $l = \pi$, $c = \frac{\varrho}{T_0} = 1$. Здесь каждому собственному значению λ соответствует только одна собственная функция. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, как легко проверить, ортогональны между собой, в соответствии с общей теорией (ср. п. 1 § 13).

Применяя теорему Гильберта-Шмидта, мы найдем, что всякая функция $f(x)$ вида

$$f(x) = \int_0^\pi G(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3,18}$$

где $h(\xi)$ — функция с интегрируемым квадратом, разложима в ряд по собственным функциям (2,18) ядра $G(x, \xi)$. Будем считать, как это мы делали всюду в предыдущем (ср. замечание к § 1), что функция $h(\xi)$ имеет только конечное число точек разрыва. Продифференцируем два раза по x обе части равенства (3,18) так же, как это мы делали в § 2, воспользовавшись при этом формулами (1,2). Получим, что всюду, кроме, быть может, конечного числа точек,

$$f''(x) = -\frac{h(x)}{T_0}.$$

Обратно, пользуясь формулами (1,2), легко проверить, что всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, обращающаяся в 0 на концах этого интервала и имеющая непрерывную, за исключением конечного числа точек, вторую производную с интегрируемым квадратом, представима в виде (3,18), где $h(x)$ — функция с интегрируемым квадратом; за $h(x)$ надо принять именно $\frac{-f''(x)}{T_0}$. Таким образом, по теореме Гильберта-Шмидта получается, что может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по $\sin kx$ всякая непрерывная вместе с ее первой производной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функция $f(x)$, у которой имеется всюду, за исключением конечного числа точек, непрерывная вторая производная с интегрируемым квадратом и у которой $f(0) = f(\pi) = 0$. Из теории тригонометрических рядов известна возможность такого разложения и при более слабых предположениях относительно $f(x)$. Для этого достаточно, например, чтобы $f(x)$ была непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ вместе с ее первой производной и чтобы было $f(0) = f(\pi) = 0$ *). Из этого последнего класса функций легко выбрать функцию, которая не удовлетворяет условиям теоремы Гильберта-Шмидта; достаточно, например, взять функцию, нигде не имеющую второй производной. Это показывает, что условия теоремы Гильберта-Шмидта, вообще говоря, не являются необходимыми для

*) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М.—Л., 1960, гл. XIX, § 2, стр. 435.

возможности разложения функции $f(x)$ в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Покажем, что система (2,18) полна, т. е. что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти такую линейную комбинацию $\sin kx$, что средняя квадратичная ошибка при замене $f(x)$ этой линейной комбинацией будет как угодно мала. Для этого заметим, что для каждой непрерывной на замкнутом интервале $[0, \pi]$ функции $f(x)$ можно найти на этом интервале такую функцию $f_1(x)$, непрерывную вместе с ее первыми двумя производными и обращающуюся в 0 на концах этого интервала, что норма разности $f(x)-f_1(x)$ будет как угодно мала. Функцию же $f_1(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по $\sin kx$, как мы только что видели. Поэтому функцию $f_1(x)$ можно аппроксимировать такой линейной комбинацией $\sin kx$ (именно, частичной суммой равномерно сходящегося к этой функции ряда по $\sin kx$), что средняя квадратичная ошибка будет как угодно мала. Отсюда, применяя неравенство треугольника (ср. п. 5 § 11), легко показать, что система (2,18) полна.

Из полноты системы (2,18) следует ее замкнутость по доказанному в п. 10 § 11.

Все собственные значения ядра $G(x, \xi)$ положительны. Поэтому к нему применима теорема Мерсера. Получим:

$$\frac{\pi}{2} G(x, \xi) = \frac{\sin x \sin \xi}{1} + \frac{\sin 2x \sin 2\xi}{4} + \ldots,$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно по (x, ξ).

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 19. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием

Мы дадим здесь доказательство возможности такого приведения, соответствующее изложенной в §§ 12 и 13 теории интегральных форм $I(\varphi)$.

1. Отметим предварительно некоторые свойства взаимно ортогональных единичных векторов. Пусть

$$\varphi_k = (\varphi_k^{(1)},\ \varphi_k^{(2)},\ \ldots,\ \varphi_k^{(n)}), \quad k = 1,\ \ldots,\ n,$$

— n взаимно ортогональных единичных векторов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_p^{(i)} = \delta_{kp}; \quad k,\ p = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\delta_{kp} = 0$, если $k \neq p$, и $\delta_{pp} = 1$.

а) $D = |\varphi_p^{(i)}| = \pm 1$. Действительно, вычисляя по известным правилам D^2 как произведение двух одинаковых определителей, мы получим определитель, у которого на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны 0.

б) Обозначим через $\Phi_k^{(i)}$ алгебраическое дополнение элемента $\varphi_k^{(i)}$ в детерминанте D. Тогда

$$\Phi_k^{(i)} = D\varphi_k^{(i)}. \tag{1,19}$$

Действительно, при любом k имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} (\Phi_k^{(i)} - D\varphi_k^{(i)})\, \varphi_p^{(i)} = 0, \quad p = 1,\ \ldots,\ n.$$

Рассматривая их как n линейных однородных уравнений с коэффициентами $\varphi_p^{(i)}$, мы найдем соотношения (1,19), так как $D \neq 0$.

в)
$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{2,19}$$

В этом можно убедиться, умножая равенство (1,19) на $\varphi_k^{(j)}$ и суммируя по k.

2. Рассмотрим значения квадратичной формы

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)}, \quad K_{ij} = K_{ji}, \tag{3,19}$$

где все K_{ij} и $\varphi^{(i)}$ действительны, на сфере

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 = 1. \tag{4,19}$$

По теореме Вейерштрасса на замкнутом ограниченном множестве точек сферы (4,19) имеется по крайней мере одна точка, где непрерывная функция (3,19) принимает наибольшее значение. Пусть это наибольшее значение равно μ_1 и пусть оно достигается в точке A_1 $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ *).

Рассмотрим значения формы (3,19) в точках пересечения S_{n-2} сферы (4,19) и гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(n)})$ и проходящей через центр сферы. По той же теореме Вейерштрасса среди точек множества S_{n-2} должна найтись по крайней мере одна такая точка, где форма (3,19) принимает наибольшее значение по сравнению с другими точками S_{n-2}. Пусть это наибольшее значение равно μ_2 и пусть оно достигается в точке A_2 $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$.

---

*) Ср. замечание 2 к п. 3 § 12, где было доказано существование такой функции $\varphi(P)$ на «сфере»

$$\int \varphi^2(P)\, dP = 1,$$

которая дает наибольшее значение интегральной форме

$$\int\int K(P, Q)\, \varphi(P)\, \varphi(Q)\, dP\, dQ,$$

если только это значение отлично от 0.

Рассмотрим далее значения формы (3,19) в точках множества S_{n-3}, являющегося пересечением S_{n-2} и проходящей через начало координат гиперплоскости, перпендикулярной к вектору $(\varphi_2^{(1)}, \ldots, \varphi_2^{(n)})$. Пусть μ_3 есть верхняя грань значений формы (3,19) на S_{n-3}; по теореме Вейерштрасса она достигается по крайней мере в одной точке S_{n-3}; пусть такой точкой будет точка $A_3(\varphi_3^{(1)}, \ldots, \varphi_3^{(n)})$.

Продолжая эти рассуждения, мы найдем n взаимно перпендикулярных единичных векторов $\varphi_k = (\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(n)})$, $k = 1, \ldots, n$. Примем их за направления новых координатных осей $O\psi_1, \ldots, O\psi_n$. Тогда

$$\psi^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Каждое из множеств S_{n-k} будет пересечением $(n-k+1)$-мерной плоскости

$$\psi^{(1)} = \psi^{(2)} = \ldots = \psi^{(k-1)} = 0$$

и сферы

$$\sum_{i=1}^{n} [\psi^{(i)}]^2 = 1. \tag{5,19}$$

Что сфера (4,19) перейдет в сферу (5,19) и потому для всех точек множества S_{n-k} будет удовлетворяться равенство (5,19), следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{n} [\psi^{(k)}]^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,\,j=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi^{(i)} \varphi_k^{(j)} \varphi^{(j)} = \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} \right) \varphi^{(i)} \varphi^{(j)},$$

а согласно (2,19)

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(i)} \varphi_k^{(j)} = \delta_{ij}.$$

Мы утверждаем, что в новых координатах $\psi^{(i)}$ форма (3,19) примет вид

$$F \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}^{*} \psi^{(i)} \psi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i [\psi^{(i)}]^2. \tag{6,19}$$

Что

$$K_{ii}^{*} = \mu_i,$$

следует из того, что наша форма принимает значение μ_i в точке A_i, у которой все координаты ψ равны 0, кроме $\psi^{(i)}$, которое равно 1. Что $K^*_{1j}=K^*_{j1}=0$ при $j>1$, можно доказать так.

Допустим, что $K^*_{1j}\neq 0$ при некотором $j>1$. Положим все $\psi^{(i)}$, кроме $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(j)}$, равными 0. Тогда

$$F=\mu_1[\psi^{(1)}]^2+2K^*_{1j}\psi^{(1)}\psi^{(j)}+\mu_j[\psi^{(j)}]^2.$$

Пусть $|\psi^{(j)}|$ очень мало по сравнению с $|\psi^{(1)}|$ и

$$[\psi^{(1)}]^2+[\psi^{(j)}]^2=1.$$

Тогда, пренебрегая величинами порядка $[\psi^{(j)}]^2$, получим:

$$F\approx\mu_1+2K^*_{1j}\psi^{(j)}. \tag{7,19}$$

Выберем знак $\psi^{(j)}$ так, чтобы было $2K^*_{1j}\psi^{(j)}>0$. Тогда из соотношения (7,19) будет следовать, что на сфере (5,19) или, что все равно, на сфере (4,19) имеются точки, где $F>\mu_1$, что противоречит определению μ_1. Этим заканчивается доказательство того, что все $K^*_{1j}=0$ при $j>1$. Совершенно так же доказывается, что равны 0 и все другие K^*_{ij}, если $i\neq j$.

Из самого нашего построения следует, что

$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\ldots\geqslant\mu_n.$$

Может быть, что некоторые из чисел μ_i равны 0, а некоторые отрицательны. Перенумеруем все μ_i и соответствующие ψ_i так, чтобы стало

$$\mu_1\geqslant\ldots\geqslant\mu_i\geqslant\ldots\geqslant\mu_m;\ \mu_{m+1}=\ldots=\mu_n=0\ (\mu_i\neq 0 \text{ при } i\leqslant m).$$

Положим

$$\lambda_i=\frac{1}{\mu_i},\quad i=1,\ \ldots,\ m.$$

Тогда равенство (6,19) примет вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i}.$$

Если $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_\nu$ положительны, а $\lambda_{\nu+1},\ \ldots,\ \lambda_m$ отрицательны, то $\sqrt{\lambda_1},\ \ldots,\ \sqrt{\lambda_\nu}$ называются *действительными* полуосями поверхности

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{[\psi^{(i)}]^2}{\lambda_i} = 1. \tag{8,19}$$

Легко видеть, что эта поверхность отсекает отрезки $\pm\sqrt{\lambda_i}$ на осях $O\psi^{(i)}$ при $i = 1, 2, \ldots, \nu$; $\sqrt{\lambda_1}$ будет наименьшей из действительных полуосей. Величины $\sqrt{-\lambda_{\nu+1}}, \ldots, \sqrt{-\lambda_m}$ называются *мнимыми* полуосями поверхности (8,19). Эта поверхность не пересекает действительных осей $O\psi^{(\nu+1)}, \ldots, O\psi^{(m)}$.

Если $m < n$, то в пространстве $(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$ и в пространстве $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)})$ уравнение (8,19) представляет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны плоскости

$$\psi^{(1)} = \ldots = \psi^{(m)} = 0.$$

В этом случае естественно говорить, что полуоси, соответствующие осям $O\psi^{(m+1)}, \ldots, O\psi^{(n)}$, бесконечны.

В следующих пунктах мы возвращаемся к прежней нумерации осей.

3. Покажем, что

$$\mu_1\varphi_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_1^{(j)}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9,19}$$

Действительно, по нашему построению при всех действительных $\varphi^{(j)}$ должно быть

$$F \equiv \mu_1 \sum_{i=1}^{n} [\varphi^{(i)}]^2 - \sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij}\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \geqslant 0.$$

Если $\varphi^{(i)} = \varphi_1^{(i)}$ при всех i, то $F = 0$, т. е. принимает минимальное значение. Поэтому частные производные по всем переменным, взятые при этих значениях $\varphi^{(i)}$, обращаются в нуль, что и дает нам равенства (9,19).

4. Вместо того чтобы при нахождении оси $O\psi^{(2)}$ рассматривать значение формы (3,19) на множестве S_{n-2}, являющемся пересечением сферы (4,19) и гиперплоскости $\psi^{(1)} = 0$, можно, если $\mu_2 > 0$, рассматривать значения формы

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}]\,\varphi^{(i)}\varphi^{(j)} \tag{10,19}$$

на всей сфере (4,19). Нетрудно показать, что форма (10,19) принимает наибольшее значение μ^* в некоторой точке $A^*(\varphi^{(1)*}, \ldots, \varphi^{(n)*})$, принадлежащей S_{n-2}, и $\mu^* = \mu_2$. Действительно,

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} [K_{ij} - \mu_1 \varphi_1^{(i)} \varphi_1^{(j)}] \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} =$$
$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} K_{ij} \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} - \mu_1 [\psi^{(1)}]^2 = \sum_{i=2}^{n} \mu_i [\psi^{(i)}]^2. \quad (11,19)$$

Поэтому чтобы форма (10,19) приняла наибольшее значение в точке A^* на сфере (4,19) или, что все равно, на сфере (5,19), необходимо, если $\mu_2 > 0$, чтобы у этой точки равнялись 0 все ψ_i, кроме тех, которым соответствуют μ_i, равные μ_2; сумма же квадратов этих последних должна равняться 1. При этом мы сохраняем первоначальную нумерацию μ_i, при которой

$$\mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n.$$

Следовательно, μ^* должно быть равным μ_2, точка A^* лежит на S_{n-2} и ее можно принять за A_2. Этот способ нахождения второй полуоси был бы неприменим, если бы было $\mu_2 \leqslant 0$, так как тогда форма (11,19) принимала бы наибольшее значение 0, например при

$$\psi_1 \equiv 1, \;\; \psi_2 \equiv \psi_3 \equiv \ldots \equiv \psi_n \equiv 0.$$

Совершенно так же, если $\mu_3 > 0$, можно свести нахождение оси $O\psi_3$ к нахождению максимума формы

$$\sum_{i\, j=1}^{n} \left[K_{ij} - \mu_1 \varphi_1^{(i)} \varphi_1^{(j)} - \mu_2 \varphi_2^{(i)} \varphi_2^{(j)}\right] \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} \qquad (12,19)$$

на сфере (4,19) и т. д.

Применяя к форме (10,19) такие же рассуждения, как в п. 3, можно показать, если $\mu_2 > 0$, что $\varphi_2^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, должны удовлетворять уравнениям

$$\mu_2 \varphi_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \left[K_{ij} - \mu_1 \varphi_1^{(i)} \varphi_1^{(j)}\right] \varphi_2^{(j)}$$

или

$$\mu_2\varphi_2^{(i)}=\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\varphi_2^{(j)}, \quad i=1, \ldots, n, \tag{13,19}$$

так как

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_1^{(j)}\varphi_2^{(j)}=0.$$

Пользуясь формой (12,19) и другими аналогично составленными формами, можно доказать, что $\varphi_3^{(i)}, \varphi_4^{(i)}, \ldots$, соответствующие $\mu_3>0$, $\mu_4>0$, ..., также удовлетворяют уравнениям вида (9,19).

Если же $\mu_2=0$, то это значит, что квадратичная форма

$$\sum_{i=1,\ j=1}^{n} \left[K_{ij}-\mu_1\varphi_1^{(i)}\varphi_1^{(j)}\right]\varphi^{(i)}\varphi^{(j)}\leqslant 0$$

при любых $\varphi^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots, n$, и обращается в нуль, если $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$ при всех i. Приравняв нулю частные производные этой формы по всем переменным, взятые при значениях $\varphi^{(i)}=\varphi_2^{(i)}$, получим, что $\varphi_2^{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений вида (9,19). Эти же рассуждения применимы к другим векторам $\varphi_k^{(i)}$, которым соответствуют $\mu_k=0$.

Если $\mu_2<0$, то числа $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$, которые все в этом случае отрицательны, и соответствующие векторы $(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$, $i=2, 3, \ldots, n$, можно найти посредством рассмотрения минимума формы (11,19) (вместо ее максимума). При этом числа $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ и соответствующие векторы будут получаться в обратном порядке. Аналогично можно поступать, если $\mu_3<0$ и т. д. Во всех этих случаях сохраняются уравнение (13,19) и аналогичные ему уравнения для других векторов $(\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_n^{(i)})$.

З а д а ч а. Опираясь на уравнения (9,19), (13,19), ..., разработать невариационный метод приведения квадратичных форм к каноническому виду, использующий решение характеристического уравнения

$$|K_{ij}-\mu\delta_{ij}|=0.$$

§ 20. Теория интегральных уравнений с симметрическими ядрами в классе функций, интегрируемых вместе с их квадратами по Лебегу

Построенная прежде теория интегральных уравнений с симметрическим ядром легко переносится на интегральные уравнения, у которых ядра симметричны и интегрируемы по Лебегу вместе с их квадратами; при этом она становится более стройной.

Построение новой теории во многом сходно с построениями §§ 11—16 и проводится в точности по тому же плану. Поэтому мы ограничимся изложением только тех мест этой теории, которые существенно отличаются от соответствующих мест прежде изложенной теории.

1. Мы будем предполагать известной теорию интеграла Лебега *). Отметим только некоторые свойства функций, интегрируемых по Лебегу (суммируемых).

а) Теорема Фубини. Допустим, что функция $f(P, Q)$ интегрируема по топологическому произведению измеримых множеств G_1 и G_2, причем $P \in G_1$, а $Q \in G_2$. Запишем этот интеграл в виде

$$I = \int_{G_1} \int_{G_2} f(P, Q)\, dP\, dQ.$$

Тогда почти для всех точек Q, принадлежащих G_2, существует интеграл

$$I(Q) = \int_{G_1} f(P, Q)\, dP,$$

функция $I(Q)$ суммируема и

$$I = \int_{G_2} I(Q)\, dQ. \tag{1,20}$$

---

*) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1957. См. также Г. Е. Шилов, Математический анализ (специальный курс), изд. 2-е, Физматгиз, 1961.

Обратно, если почти для всех точек $Q \in G_2$ существует интеграл

$$I^*(Q) = \int\limits_{G_1} |f(P, Q)|\, dP,$$

причем функция $I^*(Q)$ суммируема на G_2, и если $f(P, Q)$ измерима на G_1G_2, то существует также интеграл I и справедливо равенство (1,20).

Напомним, что топологическим произведением G_1G_2 множеств G_1 и G_2 называется совокупность таких «точек» (P, Q), что $P \in G_1$, $Q \in G_2$. Мы считаем, что множества G_1, G_2, G_1G_2 находятся, соответственно, в евклидовых пространствах $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Если точки P, Q определялись, соответственно, координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1})$, $(y_1, \ldots, y_{d_2})$, то точка (P, Q) определяется координатами $(x_1, \ldots, x_{d_1}, y_1, \ldots, y_{d_2})$. Меры множеств G_1, G_2, G_1G_2 определяются как меры Лебега в евклидовых пространствах, соответственно, d_1, d_2, $d_1 + d_2$ измерений.

б) Пусть функция $f(S)$ определена на d-мерной области G. Пусть интеграл от $f(S)$ по всякому d-мерному кубу, лежащему внутри G, с ребрами, параллельными координатным осям, равен 0. Тогда $f(S) = 0$ почти всюду на G.

в) Теорема Фишера-Рисса. Пусть дана бесконечная последовательность функций с суммируемыми квадратами на некотором измеримом множестве G:

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$$

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число N, что

$$\int\limits_G (f_n - f_m)^2\, dP < \varepsilon, \tag{2,20}$$

если только $n > N$ и $m > N$. Тогда на области G существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int\limits_G (f_n - f)^2\, dP \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3,20}$$

Обратное утверждение, что из (3,20) следует (2,20), очевидно.

Во всем дальнейшем сходимость последовательности функций понимается только в среднем. Теорема Фишера-Рисса является аналогом хорошо известного, необходимого и достаточного признака сходимости Коши. Пространство функций, в котором выполнение критерия Коши обеспечивает сходимость последовательности функций, называется *полным*. Значит, *пространство функций с суммируемыми квадратами, где сходимость понимается в среднем, полно.*

г) В классе функций с суммируемыми квадратами можно провести все те построения и доказать все те утверждения, какие были проведены в пп. 1—10 § 11 для функций, имеющих только конечное число точек, линий, k-мерных поверхностей разрыва ($k=2, 3, \ldots, d-1$), когда интегрирование понималось по Коши. Кроме того, можно показать, что в этом классе понятия полноты и замкнутости системы ортогональных нормированных функций полностью совпадают. Приведенное в п. 10 § 11 доказательство того, что из полноты системы следует ее замкнутость, полностью переносится и на рассматриваемый нами класс функций с суммируемыми квадратами. Что *в этом классе из замкнутости системы ортогональных нормированных функций следует ее полнота,* доказывается следующим образом.

Допустим, что система ортогональных нормированных функций

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P),\ \ldots,\ \varphi_k(P),\ \ldots \tag{4,20}$$

не полна. Тогда существует такая функция $f(P)$ с суммируемым квадратом, что

$$\int f^2(P)\,dP-\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2>0, \tag{5,20}$$

где

$$a_k=\int f(P)\,\varphi_k(P)\,dP.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_k a_k\varphi_k(P). \tag{6,20}$$

Для нее выполняется критерий сходимости Коши, так как

$$\int \left[\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \varphi_k (P) \right]^2 dP = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k^2,$$

а бесконечный числовой ряд $\sum a_k^2$ сходится, и потому для него выполняется признак Коши. Поэтому по теореме Фишера-Рисса существует такая функция $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом, к которой ряд (6,20) сходится в среднем. Тогда функция

$$f(P) - \varphi(P)$$

ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(P)$, а интеграл от ее квадрата, равный левой части (5,20), положителен. Следовательно, система (4,20) не замкнута.

д) Отметим еще одно важное свойство функций, суммируемых с квадратом, которое мы используем в дальнейшем.

Для всякой функции $F(P)$, суммируемой с квадратом на некотором измеримом множестве G, и любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $f(P)$, что

$$\int [F(P) - f(P)]^2 \, dP < \varepsilon \text{ *)}.$$

2. При интегрировании функций по Лебегу на величину этого интеграла совершенно не влияют значения подинтегральной функции на множестве меры 0. Можно считать эту функцию даже неопределенной на некотором множестве меры 0. Поэтому все функции, совпадающие на множестве полной меры, т. е. отличающиеся только на множестве меры 0, где некоторые из этих функций могут быть даже неопределенными, естественно считать эквивалентными и не различать друг от друга. Поэтому мы будем называть решением интегрального уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_G K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ \tag{7,20}$$

всякую функцию с суммируемым квадратом, которая удовлетворяет этому уравнению почти при всех P.

---

*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, том V, Физматгиз, М., 1959, гл. II, § 3, п. 60; И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, Физматгиз, М., 1957, гл. VII, XII.

Доказательство того, что при некотором действительном λ в классе функций с суммируемыми квадратами существует нетривиальное решение интегрального уравнения (7,20) с действительным симметрическим ядром, проводится совершенно по тому же плану, какой был принят в § 12. Поэтому мы изложим только те части этого доказательства, которые существенно отличаются от соответствующих мест § 12. Мы будем предполагать, что существует интеграл

$$\iint K^2(P, Q)\,dP\,dQ, \tag{8,20}$$

распространенный по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q. По теореме Фубини отсюда следует, что почти при всех P существует интеграл

$$\int K^2(P, Q)\,dQ$$

и, следовательно, почти при всех P существует интеграл

$$\int K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ$$

для всякой функции $\varphi(Q)$ с суммируемым квадратом, так как

$$|K(P, Q)\,\varphi(Q)| \leqslant \frac{K^2(P, Q) + \varphi^2(Q)}{2}.$$

Здесь, как и во всем дальнейшем, знаки $\iint$ означают интегрирование по топологическому произведению двух одинаковых измеримых множеств G, которым принадлежат точки P и Q; знак $\int$ означает интегрирование по множеству G.

Для всякой функции $\varphi(P)$ с суммируемым квадратом существует интеграл

$$\iint K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)\,dP\,dQ,$$

так как

$$|K(P, Q)\,\varphi(P)\,\varphi(Q)| \leqslant \frac{1}{2}\,[K^2(P, Q) + \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)],$$

$$\iint \varphi^2(P)\,\varphi^2(Q)\,dP\,dQ = \int \varphi^2(P)\,dP \cdot \int \varphi^2(Q)\,dQ.$$

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать только симметрические ядра $K(P, Q)$, для которых существует интеграл (8,20). Вообще, *во всем дальнейшем будут рассматриваться только функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на всем множестве G их определения.* Мы не будем каждый раз оговаривать это.

3. Пункт 1 § 12 повторяется полностью.

Вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, докажем следующую теорему.

Пусть дано некоторое семейство H функций $h(P)$, для каждой из которых

$$\int h^2(P)\,dP \leqslant M^2, \qquad M > 0, \tag{9,20}$$

где M — некоторая постоянная, одна и та же для всех функций $h(P)$. Тогда семейство Σ функций $\psi(P)$, определенных равенством

$$\psi(P) = \int K(P, Q)\,h(Q)\,dQ,$$

компактно. Это значит, что из каждого бесконечного множества таких функций можно выбрать последовательность, сходящуюся в среднем.

Доказательство. Если $K(P, Q)$ — равномерно непрерывная функция, когда $P \in G$ и $Q \in G$, то по теореме, доказанной в п. 2 § 12, семейство функций $\psi(P)$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено.

В силу теоремы Арцеля семейство функций $\psi(P)$ компактно, т. е. из всякой бесконечной последовательности функций $\psi(P)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно и, следовательно, сходящуюся в среднем. Воспользовавшись этим утверждением, мы докажем компактность семейства Σ для произвольного ядра $K(P, Q)$, суммируемого с квадратом.

Согласно замечанию д) из п. 1 настоящего параграфа мы можем построить последовательность непрерывных функций

$$K_1(P, Q),\ K_2(P, Q),\ \ldots,\ K_n(P, Q),\ \ldots$$

такую, что

$$\iint [K(P, Q)-K_n(P, Q)]^2\, dP\, dQ < \frac{1}{2^{2n}}, \qquad (10,20)$$
$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть задана теперь бесконечная последовательность функций

$$\psi_1(P),\ \psi_2(P),\ \ldots,\psi_n(P),\ \ldots \qquad (11,20)$$

из семейства Σ, полученная с помощью последовательности функций

$$h_1(P),\ h_2(P),\ \ldots,h_n(P),\ \ldots \qquad (12,20)$$

из семейства H, так что $\psi_i=Kh_i$ (см. (2,6)).

Так как $K_1(P, Q)$ — непрерывная функция, то из последовательности (12,20) можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(1)}(P),\ \ldots,\ h_n^{(1)}(P),\ \ldots \qquad (13,20)$$

такую, что последовательность функций

$$K_1h_1^{(1)},\ K_1h_2^{(1)},\ \ldots,\ K_1h_n^{(1)},\ \ldots \qquad (14,20)$$

сходится равномерно и, следовательно, сходится в среднем. Далее, из последовательности (13,20) снова выбираем бесконечную подпоследовательность

$$h_1^{(2)}(P), h_2^{(2)}(P),\ \ldots,\ h_n^{(2)}(P),\ \ldots \qquad (15,20)$$

такую, что последовательность

$$K_2h_1^{(2)},\ K_2h_2^{(2)},\ K_2h_3^{(2)},\ \ldots,\ K_2h_n^{(2)},\ \ldots$$

сходится в среднем и т. д.

Легко видеть, что последовательность

$$h_1^{(1)}(P), h_2^{(2)}(P),\ \ldots,\ h_n^{(n)}(P) \qquad (16,20)$$

такова, что при любом $K_m(P, Q)$ последовательность

$$K_mh_1^{(1)},\ K_mh_2^{(2)},\ \ldots,\ K_mh_n^{(n)},\ \ldots \qquad (17,20)$$

сходится в среднем.

Покажем теперь, что последовательность функций $\psi(P)$ из семейства Σ

$$Kh_1^{(1)},\ Kh_2^{(2)},\ \ldots,\ Kh_n^{(n)},\ \ldots,$$

являющаяся подпоследовательностью (11,20), также сходится в среднем.

Действительно, по неравенству треугольника (см. стр. 64)

$$\begin{gathered}\| Kh_m^{(m)} - Kh_n^{(n)} \| \leqslant \| Kh_m^{(m)} - K_p h_m^{(m)} \| + \\ + \| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| + \| K_p h_n^{(n)} - Kh_n^{(n)} \|. \qquad (18,20)\end{gathered}$$

Из условия (10,20) следует, что p можно выбрать настолько большим, чтобы $\| Kh - K_p h \|$ была меньше любого $\varepsilon > 0$ для всех функций из семейства H. В этом легко убедиться, применяя неравенство Буняковского, так как

$$\begin{gathered}\left(\int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]\, h(Q)\, dQ \right)^2 \leqslant \\ \leqslant \int [K(P, Q) - K_p(P, Q)]^2\, dQ \int h^2(Q)\, dQ\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}\| Kh - K_p h \| \leqslant \\ \leqslant M \left[\iint (K(P, Q) - K_p(P, Q))^2\, dP\, dQ \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant M \cdot \frac{1}{2^p}.\end{gathered}$$

Выбрав, таким образом, p, мы можем указать такое число N, что если n и m больше N, то

$$\| K_p h_m^{(m)} - K_p h_n^{(n)} \| < \varepsilon,$$

так как последовательность (17,20) сходится в среднем. При этом левая часть неравенства (18,20) будет меньше 3ε. Таким образом, компактность семейства Σ доказана.

4. *Доказательство существования конечных собственных значений* для интегральных уравнений с симметрическим ядром $K(P, Q)$, у которого квадрат суммируем по совокупности (P, Q), если G ограничено, проводится совершенно так же, как в п. 3 § 12. Отличие состоит только в следующем.

а) Функцию $\varphi_{P_0}(P)$ надо определить так, чтобы она равнялась 0 всюду, кроме пересечения множества G с некоторым кубом K_{P_0}, у которого центр находится в точке P_0 и стороны параллельны координатным осям. На этом пересечении функция $\varphi_{P_0}(P)$ должна равняться 1. Тогда предположение, что $\mu_M = \mu_m = 0$, приводит к заключению, что должен равняться 0 интеграл

$$\iint K(P, Q)\, dP\, dQ,$$

взятый по пересечению $G \cdot G$ с любым $2n$-мерным кубом в пространстве (P, Q), если ребра этого куба параллельны координатным осям. Пользуясь п. 1 б) настоящего параграфа, отсюда легко получить, что $K(P, Q) = 0$ почти всюду на топологическом произведении множества G самого на себя (даже если G не является областью).

б) Сходимость надо понимать всюду как сходимость в среднем, и соответственно этому вместо теоремы, доказанной в п. 2 § 12, применять теорему, доказанную в предыдущем пункте настоящего параграфа.

в) Для каждого собственного значения имеется только конечное число линейно независимых собственных функций и собственные значения не могут иметь конечную точку накопления. Это можно показать так. Построим для данного ядра $K(P, Q)$ ряды (6,13) и (7,13) так, как это делалось в § 13. При этом мы a priori не исключаем возможности, что все члены ряда (7,13), начиная с некоторого, совпадают. Тогда при любом m

$$\iint \left[K(P, Q) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(P)\,\varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right]^2 dP\, dQ =$$

$$= \iint K^2(P, Q)\, dP\, dQ - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda_i^2} \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

сходится, и потому $\lambda_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Замечание. Таким образом, интегральное уравнение с ядром, квадрат которого интегрируем, обладает не более чем счетным множеством собственных значений и линейно независимых собственных функций. Этот факт является частным случаем того, что любая ортонормальная система функций S, заданных на конечной области, имеет мощность не более чем счетную. Действительно, из теоремы Вейерштрасса легко следует, что для любой функции $f \in S$ можно подобрать такой многочлен φ_f от координат с рациональными коэффициентами, что норма разности $f - \varphi_f$ будет меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, в частности меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но множество таких многочленов счетно, и если S несчетно, то найдутся $f' \neq f''$ такие, что $\varphi_{f'} = \varphi_{f''}$. Отсюда по неравенству треугольника (см. § 11, п. 5) норма разности $f' - f''$ будет меньше $\sqrt{2}$. А это невозможно, так как легко проверить, что норма разности между любыми взаимно ортогональными нормированными функциями равна $\sqrt{2}$.

5. Рассуждения §§ 13—16 полностью сохраняют силу, если множество G ограничено. Надо только всюду вместо равномерной сходимости рассматривать сходимость в среднем. Например, *теорема Гильберта-Шмидта* теперь утверждает сходимость в среднем ряда (3,14) к истокообразно представимой функции $f(P)$.

6. Для интегральных уравнений (7,14) с симметрическими ядрами $K(P, Q)$ рассматриваемого типа, если множество G, по которому берется интеграл, ограничено, нетрудно доказать все *теоремы Фредгольма*.

Для всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом, стоящей в правой части уравнения (7,14), можно составить коэффициенты Фурье, пользуясь ортонормальной системой собственных функций (6,13) ядра $K(P, Q)$. Согласно неравенству Бесселя сумма квадратов этих коэффициентов сходится. Пользуясь теоремой Фишера-Рисса, легко проверить, что ряд, стоящий в правой части (10,14), при всякой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом сходится в среднем к некоторой функции $\varphi_0(P)$ также с суммируемым квадратом, если λ не равно какому-нибудь собственному значению λ_i. Тогда эта функция $\varphi_0(P)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (7,14).

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что если бы результаты подстановки $\varphi_0(P)$ в правую и левую части уравнения (7,14) [соответственно $F_1(P)$ и $F_2(P)$] не совпадали почти всюду, то интеграл от квадрата их разности не был бы равен 0. Покажем, что этого не может быть. Для этого в правую и левую части уравнения (7,14) вместо $\varphi(P)$ подставим:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P).$$

Пусть результатами этой подстановки будут функции $F_1^{(n)}(P)$ и $F_2^{(n)}(P)$. Очевидно, при достаточно большом n нормы (средние квадратичные уклонения) разностей $F_1 - F_1^{(n)}$ и $F_2 - F_2^{(n)}$, которые мы будем обозначать

$$\| F_1 - F_1^{(n)} \|, \text{ соответственно } \| F_2 - F_2^{(n)} \|,$$

будут как угодно малы. Применяя неравенство треугольника, мы получим отсюда, что не может иметь место соотношение

$$\| F_1^{(n)} - F_2^{(n)} \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

если

$$\| F_1 - F_2 \| \neq 0.$$

Но, с другой стороны,

$$F_2^{(n)}(P) =$$
$$= \lambda^2 \int K(P, Q) \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(Q)}{\lambda_i - \lambda}\, dQ + \lambda \int K(P, Q) f(Q)\, dQ + f(P).$$

Пользуясь теоремой Гильберта-Шмидта в ее новой формулировке, а также тем, что функции φ_i суть собственные функции ядра $K(P, Q)$, мы получим отсюда, что почти всюду

$$F_2^{(n)}(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda^2}{\lambda_i} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P) + f(P) =$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i \varphi_i(P)}{\lambda_i - \lambda} + f(P) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} f_i \varphi_i(P).$$

Следовательно, почти всюду

$$F_2^{(n)}(P)-F_1^{(n)}(P)=\lambda\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{f_i\varphi_i(P)}{\lambda_i}$$

и потому

$$\|F_2^{(n)}(P)-F_1^{(n)}(P)\|=\lambda^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{f_i^2}{\lambda_i^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Таким образом, предположение, что $\varphi_0(P)$ не удовлетворяет почти всюду уравнению (7,14), привело нас к противоречию.

Таким образом, если λ не равно ни одному из собственных значений уравнения (7,14), то это уравнение имеет решение при любой функции $f(P)$. Это решение единственно. Действительно, если бы $\varphi_1(P)$ и $\varphi_2(P)$ были решениями уравнения (7,14), то $\varphi_1(P)-\varphi_2(P)$ была бы решением соответствующего однородного уравнения и λ было бы собственным значением, вопреки предположению. Таким образом, 1-я теорема Фредгольма доказана.

В силу симметричности ядра $K(P, Q)$ 2-я теорема Фредгольма является очевидным следствием замечания в) п. 4.

Когда λ совпадает с одним из λ_i, для существования решения уравнения (7,14) необходимо, чтобы $f(P)$ было ортогонально ко всем собственным функциям $\varphi_1^{(i)}(P), \ldots$ $\ldots, \varphi_m^{(i)}(P)$, соответствующим этому λ_i, так как тогда должно быть:

$$\int\varphi(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP=$$
$$=\lambda_i\iint K(P, Q)\varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP\,dQ+\int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP=$$
$$=\int\varphi(Q)\varphi_k^{(i)}(Q)\,dQ+\int f(P)\varphi_k^{(i)}(P)\,dP,$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Убедимся в достаточности этого условия. Для этого мы образуем ряд (10,14), полагая в тех членах, где $\lambda=\lambda_i$

(и потому $f_i = 0$), отношение $\frac{\lambda_i}{\lambda - \lambda_i}$ равным любому фиксированному числу α_i. Тогда, аналогично предыдущему, убеждаемся в том, что полученный ряд сходится в среднем и сумма его удовлетворяет уравнению (7,14) почти всюду. При изменении α_i мы будем иметь все решения уравнения (7,14) (которые получаются из одного любого решения добавлением всех решений соответствующего однородного уравнения). Этим доказывается третья теорема Фредгольма.

Иван Георгиевич Петрсвский

«Лекции по теории интегральных уравнений»

М., 1965 г., 128 стр. с илл.

Редакторы *Л. А. Чудов, Г. Ф. Рыбкин*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *М. Ф. Алексеева*

Сдано в набор 29/XII 1964 г. Подписано к печати 24/II 1965 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,56. Уч.-изд. л. 7,14. Тираж 23 600 экз. Т-01638. Цена 36 коп.
Заказ № 2183

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова
Главполиграфпрома Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.