В. Г. ПИСАРЕНКО

ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ МНОГИХ ТЕЛ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

НАУКОВА
ДУМКА

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

В. Г. Писаренко

ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ МНОГИХ ТЕЛ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1974

530.1
П34

УДК 530.12+521.12+535.13+530.145+517.946+517.948

В монографии впервые исходя из уравнений электромагнитного поля в общей теории относительности дается строгий вывод уравнений внешней задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел, которые имеют вид нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Затрагивается проблема квантования уравнений релятивистской задачи многих тел. Исследуются нелинейные уравнения поля, ковариантные относительно физических групп симметрии в римановых пространствах. Развиваются методы построения решений таких уравнений с помощью разложений по полным ортогональным системам функций, связанным с неприводимыми представлениями соответствующих групп симметрии. Эти методы могут быть применены при исследовании многих нелинейных задач общей теории относительности, физики плазмы, теории источников, предложенной Ю. Швингером для описания взаимодействующих элементарных частиц, гидродинамики, гидромеханики и теории волновых процессов в физически нелинейных средах.

Книга рассчитана на физиков, занимающихся общей теорией относительности и нелинейной теорией поля, и математиков, интересующихся приложениями качественной и аналитической теории дифференциально-функциональных уравнений к фундаментальным проблемам физики. Полезна также преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов физико-математических факультетов.

Рецензенты:

Акад. АН УССР *Ю. А. Митропольский*,
д-р физ.-мат. наук *К. Г. Валеев*,
д-р физ.-мат. наук *В. П. Гачок*

Редакция математики и кибернетики

П $\frac{20402-101}{М221(04)-74}$ 19—73

Предисловие

В монографии В. Г. Писаренко «Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейной теории поля» ставятся и решаются многие вопросы, интересные с математической стороны и важные с точки зрения приложений к физике. Так, например, в теории тяготения Эйнштейна приходится решать нелинейные дифференциальные уравнения, и здесь возникает необходимость работать с функциями с отклоняющимся аргументом. Такого рода исследования позволяют более полно подойти к вопросу об устойчивости движения в теории тяготения Эйнштейна.

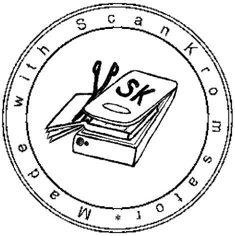
Применение развиваемых автором математических методов возможно и полезно также в физике плазмы, в физике твердого тела и везде, где приходится решать нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных; особенно полезны эти методы в тех случаях, когда мы имеем дело с римановым пространством.

Монография В. Г. Писаренко представляется мне чрезвычайно ценным научным трудом, в котором поставлено и решено много трудных и важных задач математической и теоретической физики, относящихся к проблемам нелинейной динамики.

Академик В. Фок

Ленинград
29 мая 1973 г.

Эта страница пуста



ОТ АВТОРА

Развитие фундаментальных теоретических и экспериментальных исследований в физике за последние десятилетия привело к глубокому проникновению в концепции теоретической физики многих специальных разделов математики, с одной стороны, и к накоплению фантастического объема экспериментальной информации — с другой. Теоретики оказались в чрезвычайно трудном положении, так как основные направления развития фундаментальных исследований — физика микромира, астрофизика, теория реальных сплошных сред — требуют от них большой широты охвата физических явлений и вместе с тем чрезвычайно высокой универсальности их как математиков-прикладников.

В этих условиях вполне понятны скепсис и недовольство исследователей-теоретиков в адрес обилия феноменологических подходов к описанию новых экспериментальных данных, объясняемые низким «коэффициентом полезного действия» таких теорий в смысле их предсказательной способности для эксперимента. Поэтому представляется целесообразным систематизировать актуальные проблемы теоретической физики, трудности и неудачи частных феноменологических подходов, применяемых в физике микромира, теории сплошных сред и астрофизике, с целью выявления некоторых общих закономерностей возникновения причин таких неудач и нахождения наиболее эффективного математического аппарата, при помощи которого можно было бы преодолеть значительное число таких трудностей.

Попытка такой систематизации была сделана автором. Как оказалось, весьма большое число неудач, трудностей и несостоявшихся теорий в фундаментальной теоретической физике связано с проблемой нелинейной динамики в физических задачах. Смысл этой проблемы в том, что очень большое число физических задач приводит к необходимости решать системы нелинейных дифференциально-функциональных уравнений. В свою очередь, такие уравнения совершенно недостаточно изучены в математике. Одна из важных сторон проблемы нелинейной динамики обусловлена спецификой теории физических континуумов (теория поля, теория сплошных сред, теория тяготения), приводящей к необходимости исследования нелинейных уравнений движения в общих римановых пространствах, в частности — это общая теория относительности.

Автор избрал проблему нелинейной динамики в качестве проблемы исследования. Полученные им результаты по проблеме многих тел в общей теории относительности и нелинейной теории поля составляют основную часть предлагаемой монографии. Первая часть работы, относящаяся к проблеме многих тел, написана под влиянием книги В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения» (Физматгиз, М., 1961 г.), вторая — является развитием идей Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского в нелинейной механике.

Пользуясь случаем, автор считает своим приятным долгом поблагодарить академика Н. Н. Боголюбова за многочисленные советы и замечания, во многом определившие выбор темы исследования, и выразить особую признательность академику В. А. Фоку за всестороннее обсуждение поставленных в монографии проблем и полученных результатов, а также за ряд ценных замечаний. Большую благодарность автор приносит академикам АН УССР А. С. Давыдову, В. А. Марченко, Ю. А. Митропольскому, члену-корреспонденту АН СССР Д. И. Блохинцеву, докторам физико-математических наук, профессорам К. Г. Валееву, В. П. Гачку, В. Г. Кадышевскому, А. Д. Мышкису, кандидатам физико-математических наук, старшим научным сотрудникам В. И. Коломыцеву, Л. П. Нижнику, В. И. Фодчуку, В. Н. Шевело за обсуждение результатов и ценные советы, относящиеся к различным вопросам, затронутым в монографии.

ВВЕДЕНИЕ

Без преувеличения можно сказать, что проблема нелинейной нелокальной динамики является одной из центральных проблем современной теоретической и математической физики. Приведем несколько наиболее важных примеров, иллюстрирующих эту мысль.

1. Современные представления о структуре материи на уровне ядерных и субъядерных размеров неизбежно приводят к представлению о тех или иных условно элементарных объектах, непрерывно взаимодействующих между собой и превращающихся друг в друга. При этом всякая попытка построения последовательной теории, претендующей на достаточно всестороннее описание динамических закономерностей в физике элементарных частиц, приводит к необходимости рассматривать нелинейные дифференциально-функциональные (нелокальные) уравнения в частных производных, играющие роль динамических уравнений. По существу главная трудность, возникающая при построении последовательной теории взаимодействующих микрочастиц, состоит в необходимости решать такие уравнения. Эта трудность имеет место как в классической теории физических полей, так и в квантовой теории поля.

2. Постановка конкретных задач общей теории относительности приводит к необходимости решать нелинейные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом,— в силу нелинейности уравнения поля общей теории относительности. Особую важность приобретают задачи о решении нелинейных уравнений общей теории относительности в связи с необходимостью адекватного теоретического описания новых объектов релятивистской астрофизики (пульсары, квазизвездные объекты, коллапсары) и в связи с проблемами построения реалистических космологических моделей, описывающих всю наблюдаемую часть вселенной.

3. Реалистические модели, используемые в физике плазмы, гидродинамике, физике твердого тела, теории упругости, теории распространения волновых процессов в диспергирующих средах и

акустике, приводят к необходимости решать системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных — с отклонением либо без отклонения аргумента.

Образно выражаясь, основа всех трудностей, возникающих при необходимости исследовать физически нелинейные задачи теоретической физики, заключается в нелинейности, «отягчаемой» возможной нелокальностью уравнений математической физики, которыми описывается соответствующая физически нелинейная задача.

Вместе с этим нелинейные дифференциально-функциональные уравнения изучены в математике не достаточно. В частности, до самого недавнего времени отсутствовал общий подход к решению указанной проблемы теоретической физики.

При этом во многих работах по теоретической физике по вопросам, относящимся непосредственно к проблеме нелинейной нелокальной динамики, нередко отсутствовала строгая математическая постановка, отражающая физическую сущность рассматриваемой физической задачи, вместо чего использовались грубые приближенные оценки, сделанные на уровне простых инженерных расчетов.

Необходимые лишь на самом первом этапе исследования физической задачи, такие простые оценки должны быть затем замещены математически строгой постановкой, опирающейся на точные количественные методы решения и исследования изучаемого физического явления.

Итак, глобальный характер проблемы нелинейной нелокальной динамики в теоретической (и математической) физике требует развития соответствующего подхода к решению этой проблемы.

В связи с этим цель, преследуемая при написании данной монографии, состояла в последовательном изучении этой общей физической проблемы, расчленении ее на ряд более частных, тесно связанных между собой проблем, их строгой математической постановке и развитии некоторых конструктивных математических методов решения этих проблем.

Перечислим те основные, тесно связанные между собой проблемы, представляющиеся нам важными в числе проблем, относящихся к нелинейной нелокальной динамике; именно эти проблемы рассматриваются в монографии.

Некоторые из этих проблем решаются в монографии в основном полностью, некоторые сформулированы математически и решены частично с указанием перспективы, в которой они могут быть решены до конца, а некоторые сформулированы математически и решаются для частных примеров с указанием дальнейших путей исследования.

Вот эти проблемы теоретической физики, которые сформулируем как проблемы математической физики.

1. Получение уравнений движения многих тяготеющих тел, учитывающих конечность скорости распространения взаимодействия

и содержащих поэтому отклонение аргумента (т. е. релятивистское обобщение ньютонового «закона всемирного тяготения»).

2. Получение уравнений движения многих тяготеющих и электрически заряженных тел, учитывающих конечность скорости распространения взаимодействия и содержащих поэтому отклонение аргумента (т. е. релятивистское обобщение ньютонового «закона всемирного тяготения» и закона Кулона для заряженных точек, называемое релятивистской электродинамикой многих тел).

3. Исследование существования, единственности и устойчивости физически интересных решений уравнений релятивистской электродинамики многих тел и, в первую очередь, решений, аналогичных кеплеровым орбитам ньютоновой механики (круговые, эллиптические, параболические и гиперболические орбиты).

4. Решение уравнений движения классического нелинейного осциллятора в поле нелокального потенциала (т. е. квазилинейные уравнения с отклоняющимся аргументом) и влияние вида этого потенциала на асимптотическое при $t \to \infty$ поведение решений. В частности, проблема устойчивости асимптотического при $t \to \infty$ поведения решений относительно введения нелокальности в потенциал.

5. Проблема квантования в релятивистской электродинамике многих тел, учитывающей отклонение аргумента в уравнениях движения.

6. Проблема квантования нелинейного осциллятора с нелокальным потенциалом.

7. Проблема устойчивости решений нелинейных уравнений поля (квазилинейных уравнений гиперболического типа) относительно введения нелокальности в потенциал (т. е. введения отклонения аргумента в правую часть уравнения).

8. Постановка задачи об устойчивости физически интересных решений нелинейных (а также нелокальных) уравнений поля на многообразиях частного вида, отражающих физическое существо исследуемой конкретной задачи.

9. Построение семейств решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений, обладающих определенными групповыми свойствами.

10. Изучение существенно нелинейных и нелокальных уравнений квантовой теории поля, возникающих в связи с квантовым характером гравитационного поля.

Сделаем теперь ряд конкретных замечаний по каждому пункту приведенного перечня.

Прежде всего отметим, что общность указанных тесно связанных между собой проблем состоит в их принадлежности к общей проблеме нелинейной нелокальной динамики. Вместе с этим все перечисленные проблемы являются частными проблемами, возникающими в конкретных задачах релятивистской теории тяготения.

Ниже в качестве такой теории будем рассматривать теорию тяготения Эйнштейна, называемую часто общей теорией относительности *. Большинство исследователей признает, что общая теория относительности является наиболее общей и стройной из всех современных физических теорий. В настоящей монографии при исследовании релятивистской проблемы многих тяготеющих и электрически заряженных тел и нелинейной теории поля общая теория относительности используется в качестве глубокого физического принципа, определяющего внутреннюю взаимосвязь взаимодействующих физических объектов; тем самым определяется форма соответствующих нелинейных дифференциально-функциональных уравнений движения, описывающих динамику этих объектов. Эта точка зрения последовательно развивается в монографии.

Одной из принципиальных проблем, стоящих перед современной теоретической и математической физикой, является проблема последовательного учета конечности скорости распространения взаимодействия в основных законах физики и механики. Впервые эта проблема серьезно заинтересовала П. Лапласа [261], что привело к появлению в литературе известного «парадокса Лапласа» как следствие тех больших трудностей, с которыми столкнулся Лаплас при изучении указанной проблемы. В частности, парадоксальность полученных им результатов состояла в том, что согласно его расчетам, учитывая явным образом конечность скорости распространения гравитации и требуя вместе с тем согласованности получаемых таким путем расчетов с данными астрономических наблюдений, следовало бы допустить, что скорость распространения гравитации не менее чем в сто миллионов раз превосходит скорость света.

По-видимому, первые попытки явно учесть отклонение аргумента в уравнениях движения двух тяготеющих тел восходят к работам Тетроде [300], приведшим к более завершенной формулировке этого подхода в работах А. Фоккера [239], а также Л. Грановского, А. Пантюшина [57], А. Волкова [305].

Все эти работы так или иначе базируются на фоккеровском принципе действия и приводят к уравнениям движения материальных точек, содержащим как запаздывание, так и опережение аргумента.

Применительно к задаче многих электрически заряженных тел формализм Фоккера рассматривался в работах Дж. Уилера, Р. Фейнмана [308], Дж. Ржевуского [278], А. Старушкевича [293, 294], А. Шильда и Дж. Шлессера [282].

---

* Теория тяготения Эйнштейна является теорией пространства, времени и тяготения. В частном случае плоского пространства — времени Минковского теория тяготения Эйнштейна принимает вид так называемой специальной теории относительности. Поскольку теория тяготения Эйнштейна возникла исторически как обобщение специальной теории относительности на случай общего риманова пространства, то она вошла в историю науки под названием общей теории относительности. Это укоренившееся в литературе альтернативное название теории тяготения Эйнштейна не очень удачно, о чем подробнее будет сказано ниже, в § 5.

Помимо общих математических трудностей обоснования формализма Фоккера, такой подход не согласован с требованиями релятивистской теории тяготения, приводит из-за наличия опережения аргумента в получаемых уравнениях движения к нарушению принципа макропричинности и приводит к сильной неустойчивости кеплеровых круговых орбит задачи двух тел. Три последних обстоятельства делают этот подход интересным лишь с точки зрения методологической, поскольку он не согласован с базисными физическими принципами.

Содержащие отклонение аргумента уравнения движения двух заряженных материальных точек в рамках специальной теории относительности были получены Дж. Сингом [299], использовавшим выражения для известных потенциалов Лиенара—Вихерта. Существование и единственность полученных Дж. Сингом уравнений для модели двумерного пространства — времени исследовались в работах Р. Драйвера [228, 229].

Попытки явно учесть отклонение аргумента в уравнениях движения двух тяготеющих тел путем видоизменения уравнений механики Ньютона были сделаны в работах В. Р. Петухова [141] и П. П. Логинова [103—105].

В этих работах феноменологически вводилось отклонение аргумента в уравнения движения как качественно вытекающее из конечной скорости распространения гравитационного взаимодействия. Вместе с тем предлагаемые в этих работах подходы к указанной проблеме так же, как и подходы, используемые в цитированных выше работах, не были согласованы с общими принципами релятивистских теорий тяготения, что приводило к невозможности однозначного получения уравнений движений и к отсутствию недвусмысленной физической интерпретации получаемых решений.

В результате этого упомянутая выше проблема оставалась нерешенной и была указана в обзорах А. Д. Мышкиса и Л. Э. Эльсгольца [125, 210] в числе важнейших нерешенных проблем теории и приложений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

В настоящей монографии в гл. II уравнения внешней задачи N тяготеющих релятивистских тел, содержащие отклонение аргумента, получены из уравнений общей теории относительности.

Следует отметить, что в существующей литературе при получении уравнений движения N тяготеющих тел, исходя из уравнений общей теории относительности, применяются методы, использующие ряды теории возмущений по обратным степеням скорости света c [208, 196, 98, 75, 26, 132, 54, 119, 55]. При этом все величины, содержащие отклонение аргумента Δ, раскладываются по Δ, поскольку Δ есть величина порядка $\frac{1}{c}$. Полученные в результате указанной процедуры уравнения движения N тяготеющих тел не содержат отклонения аргумента, что, очевидно, существенно обедняет физическую постановку задачи (в частности, свойства устойчивости физически интересных решений таких уравнений, вообще говоря, не будут соответствовать истинным).

При получении уравнений N тяготеющих тел, согласно развиваемой нами базисной идее, будем исходить из основного положения общей теории относительности, состоящего в том, что поле тяготения проявляется в кривизне пространства — времени, в результате чего пространственно-временной континуум рассматривается как четырехмерное риманово пространство. Выражение для интервала в этом римановом пространстве записывается с помощью метрического тензора g_{ik}, связанного с помощью уравнений гравитационного поля с тензором энергии-импульса T_{ik}, описывающим распределение и движение материи, создающей поле.

В этом пункте развиваемый нами подход наиболее близок к идеям В. А. Фока [196] о том, что при получении уравнений движения N материальных тяготеющих тел необходимо совместно решать уравнения гравитационного поля и уравнения движения материальных тел, подчиняя решение предельным условиям евклидовости метрики и условиям изучения типа условий Зоммерфельда, вытекающим из островного характера распределения вещества в рассматриваемой постановке, а также учитывая пространственную протяженность N тел и выбирая гармоническую систему координат.

В гл. II монографии метод В. А. Фока, основы которого изложены в монографии [196], строго доказывается и усовершенствуется далее с тем, чтобы получить уравнения внешней задачи N тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента в общей теории относительности. На языке теорем и лемм математической физики строго излагаются предпосылки и утверждения соответствующих математических результатов. Изложение опирается на аппарат теории обобщенных функций, качественной и аналитической теории дифференциально-функциональных уравнений, дифференциальной геометрии римановых пространств, теории представлений групп Ли.

Полученные в гл. II уравнения внешней задачи N тяготеющих тел, содержащие отклонение аргумента, удовлетворяют принципу макропричинности и для предельно малых скоростей движения тел эти уравнения переходят формально в уравнения движения N тяготеющих точек, взаимодействующих по «закону всемирного тяготения» Ньютона.

Таким образом, полученные в гл. II уравнения внешней задачи N тяготеющих тел являются обобщением ньютонового «закона всемирного тяготения», полученным с учетом требований общей теории относительности.

В гл. III монографии развитые в гл. II методы перенесены на случай задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел. Исходя из уравнений поля общей теории относительности при наличии тяготеющих масс и электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла — Лоренца в общековариантной форме, получены уравнения внешней задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел, содержащие отклонение аргумента (для островного распределения материи). Результаты сформулированы в виде теорем и лемм.

Полученные уравнения для частного случая двух тел, у которых произведение их масс на гравитационную постоянную исчезающе мало по сравнению с абсолютной величиной произведения зарядов тел, принимают вид уравнений релятивистской электродинамики двух тел, полученных Дж. Сингом [299] в рамках специальной теории относительности.

Найденные в гл. III уравнения внешней задачи N тел электродинамики общей теории относительности удовлетворяют принципу макропричинности. Для предельно малых скоростей движения тел эти уравнения переходят формально в уравнения движения N тяготеющих электрически заряженных точек, взаимодействующих по ньютоновому «закону всемирного тяготения» и закону Кулона. Таким образом, выведенные в гл. III уравнения внешней задачи N тяготеющих электрически заряженных тел, содержащие отклонение аргумента, являются обобщением закона всемирного тяготения Ньютона и закона Кулона.

Одной из первоочередных задач, возникающих при исследовании полученных в гл. II, III уравнений внешней задачи N тяготеющих электрически заряженных тел, является, во-первых, вопрос о том, каким образом следует ставить основную начальную задачу для этих уравнений, во-вторых, вопрос о существовании и построении решений этих уравнений, наиболее близких к решениям соответствующих ньютоновых уравнений движения (например, к кеплеровым круговым, эллиптическим, гиперболическим и параболическим орбитам для задачи двух тел), в-третьих, вопрос об устойчивости таких решений, близких к ньютоновым решениям.

Два последних вопроса имеют принципиальную важность с такой точки зрения. Как известно, в большинстве случаев проблема многих тел применительно к небесным телам солнечной системы (планеты, их естественные и искусственные спутники, астероиды) качественно удовлетворительно описывается уравнениями ньютонового закона всемирного тяготения. Это значит, что в пределах погрешности астрономических наблюдений орбиты небесных тел солнечной системы, как правило, вполне согласуются с расчетами, сделанными в рамках ньютонового закона всемирного тяготения. Исключения сравнительно редки, что объясняется чрезвычайной малостью количественных эффектов, предсказываемых общей теорией относительности для движения макротел солнечной системы. В качестве таких исключений можно назвать известное сверх-ньютоновское вращение ближайших к Солнцу точек орбит планет солнечной системы, объясняемое количественно общей теорией относительности *, если предположить устойчивость соответствующего решения

---

* Более подробное изложение вопросов, связанных с наблюдаемыми эффектами общей теории относительности, приведено ниже в § 16 гл. II, а также в книге А. Ф. Богородского [19].

уравнений задачи многих тел общей теории относительности относительно возмущений начальных данных.

Подчеркнем, что это согласование с предсказаниями общей теории относительности *существенно зиждется на предположении об устойчивости соответствующих решений*. По существу, это предположение было взято «на веру», поскольку устойчивость решений уравнений задачи многих тел не была исследована уже потому, что такие уравнения до самого недавнего времени *не были получены*.

Вместе с тем, из качественной теории дифференциально-функциональных уравнений хорошо известно, что для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, являющихся разновидностью сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, устойчивость физически интересных решений этих уравнений может быть совершенно отличной от устойчивости таких решений соответствующего приближенного уравнения, получаемого из исходного уравнения при значении аргумента, равном нулю тождественно. При этом если некоторое физически интересное решение оказывается сильно неустойчивым относительно возмущений начальных данных, то это значит, что такое решение может реализоваться лишь с исчезающе малой вероятностью.

Что касается наблюдаемых свойств устойчивости орбит небесных тел солнечной системы, то, согласно астрономическим данным; свойства устойчивости соответствующих решений ньютоновых уравнений проблемы многих тел на конечном интервале времени совпадают с наблюдаемыми свойствами устойчивости на конечном интервале орбит небесных тел солнечной системы.

Именно поэтому установление существования, единственности и устойчивости близких к ньютоновским решений уравнений внешней задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел, содержащих отклонение аргумента, получаемых из уравнений общей теории относительности, является проблемой первостепенной важности не только с точки зрения исследований полученных в гл. II, III уравнений, но и (что принципиально важно) с точки зрения проверки адекватности общей теории относительности физическому миру вообще.

До недавнего времени было известно пять прямых экспериментально наблюдаемых тестов общей теории относительности, подтверждающие соответствующие пять предсказаний общей теории относительности. Это прецизионные измерения отношения инертной и гравитационной масс тел, три «знаменитых эффекта» общей теории относительности и опыт Шапиро, о которых более подробно сказано в § 16 гл. II. Тест на устойчивость решений уравнений внешней задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел, содержащих отклонение аргумента и получаемых из общей теории относительности, следует считать *еще одним испытанием наблюдаемых предсказаний общей теории относительности*. Очевидно, что если физически интересные решения уравнений внешней задачи N тяготеющих и электрически заряженных тел оказались бы сильно неустойчивыми, то это было бы весьма серьезным доводом против адекватности общей теории относительности (в общепринятой формулировке) реальному физическому миру.

В монографии указанный тест приведен в § 14 гл. II и в § 18 гл. III для задачи двух тяготеющих и электрически заряженных тел в общей теории относительности. В этих параграфах, во-первых, получены решения, относящиеся к восьмипараметрическому семейству решений, наиболее близких на конечном интервале времени к двум круговым орбитам ньютоновской механики (постоянных) радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{m_1 r_1^0}{m_2}$ для двух тел масс m_1 и m_2 соответственно. Решения этого восьмипараметрического семейства имеют вид весьма малых колебаний вблизи двух круговых орбит радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{m_1 r_1^0}{m_2}$ с постоянной угловой скоростью вращения. Во-вторых, исследована устойчивость по первому приближению на конечном интервале времени решений, наиболее близких к двум круговым орбитам, уравнений внешней задачи двух не сталкивающихся тел, полученных в гл. II и III. Установлена важная теорема, утверждающая, что устойчивость по первому приближению наиболее близкого к двум круговым орбитам (заданных радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{m_1 r_1^0}{m_2}$) решения полученных уравнений двух не сталкивающихся тел с отклонением аргумента не хуже, чем устойчивость кругового решения (тех же радиусов и угловой частоты вращения) соответствующих уравнений задачи двух тел ньютоновой механики на конечном интервале времени. Установленная в монографии *теорема означает, что указанный шестой тест (тест на устойчивость решений) общая теория относительности выдержала.* Это обстоятельство имеет принципиально важное значение.

Полученные в гл. II—III уравнения релятивистской проблемы N тяготеющих и электрически заряженных тел представляют несомненный интерес в современной астрофизике и космогонии при исследовании проблем релятивистской астрофизики, которые обсуждаются в § 16. В частности, теоретический анализ наблюдаемого движения двойных звезд и звездных скоплений, основанный на использовании этих релятивистских уравнений задач N тел, как мы надеемся, позволит пролить новый свет на центральную дилемму современной космогонии о происхождении небесных тел нашей Вселенной. (Как известно, эта дилемма состоит в конкуренции двух гипотез: гипотезы Канта—Лапласа—Шмидта о происхождении небесных тел в результате сгущения газопылевидной космической материи и гипотезы Амбарцумяна о происхождении небесных тел в результате взрыва гипотетического «дозвездного вещества» [154].)

В гл. IV рассматривается общая постановка о физических нелинейных полях в общей теории относительности (скалярное, фермионное, векторное поле).

В силу уравнений гравитационного поля уравнения нелинейного «затравочного» физического поля, формально Пуанкаре-инвариантного, становятся существенно нелинейными и нелокальными.

Далее в гл. IV исследуются решения уравнений нелинейной теории поля с конкретными моделями нелокальности. Исследуется устойчивость решений нелинейных нелокальных уравнений поля (гиперболические квазилинейные уравнения в частных производных с отклонением аргумента, определяемым специальной мерой) на многообразиях решений типа бегущих волн.

На таком многообразии уравнение в частных производных принимает вид квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с отклонением аргумента. Конструируется определяющая отклонение аргумента мера, обуславливающая заданное асимптотическое при $t \to \infty$ свойство всех решений уравнения и заданное свойство устойчивости решений.

В гл. V развиваются методы построения многообразий решений квазилинейных гиперболических и эллиптических уравнений, инвариантныхотносительно определенных групп симметрии,с помощью разложений по подходящим полным системам функций, связанным с базисом унитарного представления этих групп симметрий.

Эти методы опираются на теорию представлений групп Ли и дискретных групп симметрии, основы которой были заложены в работах Э. Картана [84, 85], С. Ли [262], Хариш-Чандра [244, 245], С. Хельгасона [197, 246] и получили дальнейшее развитие в большом числе работ различных авторов, из которых применительно к затрагиваемым ниже вопросам следует выделить работы И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса, З. Я. Шапиро [48], Н. Я. Виленкина [41], Я. А. Смородинского и сотрудников [40, 42, 43, 169], С. Строма [295—297], И. А. Вердиева и сотрудников [38, 1, 8, 36, 37, 303].

С другой стороны, развиваются проекционно-итеративные методы построения решений нелинейных интегральных уравнений, разработанные в работах М. А. Красносельского [88—90], Л. В. Канторовича [82, 83], И. Шмидта [283, 284], Ю. Д. Соколова [171], И. П. Мысовских [120], А. Ю. Лучки [106] и Н. С. Курпеля [94].

Развитые в гл. V методы нелинейной механики, которые можно рассматривать как обобщение и дальнейшее развитие методов Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [17], найдут применение в широком классе конкретных задач теоретической физики и прежде всего в теории физических континуумов (теории поля, физике плазмы, гидродинамике, физике твердого тела, теории упругости) и в теории источников, предложенной Ю. Швингером для описания взаимодействующих элементарных частиц [202]. Весьма перспективны эти методы в теории тяготения Эйнштейна (общей теории относительности), где особенно актуальна проблема построения решений нелинейных уравнений гравитационного поля, обладающих теми или иными групповыми свойствами.

Всестороннее использование предлагаемых методов позволит дать дальнейшее развитие работам А. З. Петрова и его школы [138, 139], относящимся к пространствам Эйнштейна.

Предлагаемые методы представляют собой тот математический фундамент (включающий методы теории представлений групп, методы дифференциальной геометрии в римановых пространствах, проекционно-итеративные методы функционального анализа), на основе которого открывается широкая перспектива для развития фундаментальных исследований по общей теории относительности, и в частности для исследования интересной идеи о возможной взаимосвязи космологических решений общей теории относительности (типа замкнутых и полузамкнутых фридмановских миров), описывающих Вселенную в целом, и «пространственно-временной структуры» элементарных частиц.

Эти идеи берут свое начало в работах А. Эйнштейна [208], А. А. Фридмана [240], Л. Нордстрема [271], Г. Рейсснера [277], А. А. Маркова [109, 111], К. П. Станюковича [173, 174] и примыкают к работам А. З. Петрова [138]. Надо отметить, однако, что подобные работы пока носят поисковый характер, и необходимо глубоко и всесторонне исследовать, плодотворна ли указанная идея о возможной взаимосвязи макромира космических масштабов и микромира *.

Для подобных исследований необходимо привлечь аппарат нелинейных дифференциально-функциональных уравнений. Не исключено, что развитие таких исследований может привести к установлению определенных глубоких закономерностей между макромиром космических масштабов и микромиром, что было бы чрезвычайно заманчивым с точки зрения построения общей единой картины материального мира.

С затронутыми выше фундаментальными проблемами теоретической физики теснейшим образом связаны вопросы о квантовом характере гравитационного поля. Поскольку гравитационное поле определяется распределением материи, то естественно считать, что гравитационное поле, создаваемое квантовым полем элементарных частиц, должно быть также квантовым, в силу самих уравнений гравитационного поля общей теории относительности. В § 27 развивается эта точка зрения, представляющаяся нам более естественной, чем наиболее распространенная в настоящее время (см. С. Гупта [58], Р. Арновитт, С. Дезер, К. Мисснер [213], Н. В. Мицкевич [119], Р. Фейнман [191], Т. Кимура [259, 260]) о том, что гравитационное и физическое поля (скалярное, фермионное, векторное) можно независимо квантовать в рамках представления взаимодействия. В нашем подходе рассматривается представление взаимодействия, в котором развивается схема квантования физического «затравочного»

---

* Здесь важно отметить, что, во всяком случае, частный случай общей теории относительности, а именно специальная теория относительности, входит в качестве составной части в математический аппарат квантовой электродинамики, хорошо описывающей взаимодействие фотонов, электронов и позитронов между собой.

нелинейного поля. При этом лагранжиан взаимодействия нелинейного физического поля, в силу уравнений гравитационного поля, становится существенно нелинейным и нелокальным. В результате этого получаем, что возможный механизм возникновения существенно нелинейного и нелокального физического поля из затравочного нелинейного локального поля может проистекать из квантового характера нелинейного гравитационного поля, индуцированного затравочным физическим квантовым полем. Это обстоятельство проливает новый свет на проблему физической природы существенно нелинейных и нелокальных полей.

В § 27 изложена лишь формальная схема подхода, основанная на теории возмущений по малому параметру, пропорциональному гравитационной постоянной. Детальному исследованию этого подхода, выходящему за рамки настоящей монографии, будет посвящено специальное исследование.

В заключение автор выражает надежду, что затронутые и решаемые в монографии проблемы, относящиеся к проблеме нелинейной нелокальной динамики, а также развитый для решения этих проблем математический аппарат окажутся весьма полезными как для многих исследователей в области теоретической физики, занимающихся общей теорией относительности, теорией поля, физикой элементарных частиц, физикой плазмы, физикой твердого тела, гидродинамикой, гидромеханикой, теорией упругости, так и для математиков, занимающихся поиском фундаментальных проблем естественных наук, нуждающихся в приложениях различных разделов математики.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Физическая сущность общей теории относительности

Основной постулат специальной теории относительности состоит в утверждении независимости физических явлений от неускоренного движения замкнутой системы, внутри которой они происходят.

Для того чтобы измерять количественные характеристики движения в замкнутой системе, необходимо прежде всего ввести в ней систему пространственных координат x^1, x^2, x^3 и помещенные в начале координат «часы», с помощью которых можно измерять временну́ю координату x^0. Ввести систему координат можно внесением в замкнутую систему материального тела или системы материальных тел достаточно малых размеров, обладающих достаточно малым зарядом поля любой природы (гравитационная масса, электрический заряд, барионный заряд и т. п.). Такую систему отсчета (систему материальных тел, снабженную «часами»), относительно которой измеряются четыре координаты x^0, x^1, x^2, x^3 всякого тела рассматриваемой замкнутой системы, обычно называют *базисом* данной системы *.

Будем различать систему отсчета (базис) и систему координат, связанную с этим базисом. Даже если выбран базис,— система материальных тел, снабженная «часами»,— то можно различными способами выбрать систему координат, которыми будем описывать положение прочих тел относительно этого базиса. Например, в простейшем случае псевдоевклидова пространства — времени положение всякого тела относительно выбранного базиса можно задавать его прямоугольными декартовыми координатами, или сферическими координатами, или какими-либо иными криволинейными координатами. Соответственно получаем для выбранного базиса прямо-

---

* С точки зрения геометрии пространственно-временного континуума под базисом данной системы здесь подразумевается четырехмерный локальный репер касательного аффинного пространства для той точки пространственно-временного многообразия, с которой связана данная система координат. Более подробно об этом будет сказано ниже, в § 2, п. 2. 3.

угольную декартову, либо сферическую, либо иную криволинейную систему координат.

В частном случае, когда нас интересует лишь макроскопическое описание явлений, в качестве такого базиса можно, например, подразумевать снабженную часами радиолокационную станцию достаточно малых размеров и массы. С помощью такой станции можно измерять пространственные координаты x^1, x^2, x^3 всякого тела рассматриваемой замкнутой системы в заданный момент x^0*.

Математическое выражение этого постулата утверждает, что физически равноправны все системы координат, которые могут быть связаны друг с другом преобразованиями пространства — времени, оставляющими инвариантной квадратичную форму:

$$-ds^2 = -c^2dt^2 + dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}, \quad t \in R^1, \quad x^\alpha \in R^1 \ (\alpha = 1, 2, 3), \qquad (1.1)$$

где $c = \mathrm{const}$ — постоянная, равная скорости света в вакууме.

При этом «физически равноправны» означает следующее.

Определение 1. 1. Пусть имеются две различные системы отсчета (два базиса), относительно которых описывается один и тот же физический процесс. Если физический процесс описывается относительно первого базиса некоторыми функциями от координат и времени первого базиса и этот же процесс описывается по отношению ко второму базису *теми же функциями* от координат и времени второго базиса, причем сказанное верно для всякого физического процесса, то будем говорить, что две такие системы отсчета *физически равноправны.*

Отметим, что группой преобразований пространства — времени, оставляющих инвариантной квадратичную форму (1.1), является группа Пуанкаре $\mathcal{P}$ (3,1).

Указанный постулат оказывается весьма плодотворным. Так, требуя, чтобы уравнения электродинамики имели ковариантный относительно группы Пуанкаре вид, получаем уравнения Максвелла. Эти уравнения, как известно, с высокой экспериментальной точностью описывают распространение электромагнитных волн в пространстве с предельно малой плотностью вещества в нем. В частности, из этих уравнений получается закон постоянства скорости света в пустоте — факт, подтвержденный экспериментально с высокой степенью точности.

Подчеркнем, что требование инвариантности физических законов относительно преобразований пространства — времени, остав-

---

* Требование малости массы и заряда системы материальных тел, входящих в базис, относительно которого измеряются координаты всех прочих взаимодействующих тел, обусловлено необходимостью вносить в поведение этих взаимодействующих тел исчезающе малые искажения, связанные с влиянием самого материального базиса. Вместе с этим, в одном частном случае, когда исследуется не очень быстрое движение N тяготеющих тел, из которых первое тело обладает массой, много большей, чем сумма масс всех прочих тел, бывает удобно в качестве системы отсчета выбрать это первое тело; удобство такого выбора здесь будет обусловлено тем, что центр масс всей системы будет с высокой точностью находиться внутри первого тела. Подробнее последний случай будет разобран ниже, в главах II и III.

ляющих инвариантной квадратичную форму (1.1), означает однородность и изотропность пространства — времени (псевдоевклидово пространство).

Однако заранее очевидно, что требование однородности и изотропности пространства — времени является достаточно специальным. Действительно, реальное физическое пространство — время заполнено веществом, причем это вещество распределено в нем отнюдь не равномерно. При этом однородное изотропное пространство — время реализуется в реальном мире лишь с определенной степенью точности и вдали от вещества (например, на достаточном пространственном удалении от небесных тел в космическом пространстве), т. е. в некоторых ограниченных областях реального пространства — времени.

Далее, из физических соображений ясно, что с приближением к достаточно большому скоплению вещества пространство — время уже не может быть однородным. Например, траектория некоторого материального тела вблизи такого скопления вещества будет, очевидно, в общем случае отличной от траектории в пустом пространстве из-за возмущений, обусловленных взаимодействием тела с этим скоплением вещества. Тем самым в системе отсчета, помещенной вблизи скопления вещества, физические явления будут протекать иначе, чем в системе отсчета, помещенной вдали от таких скоплений. Так что две такие системы отсчета не будут физически равноправны — в смысле определения 1.1.

Таким образом, для того чтобы создать теорию, пригодную для описания свойств пространства — времени с произвольным распределением вещества в нем, необходимо в общем случае рассматривать в качестве интервала пространства — времени не выражение (1.1), а более общее выражение

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}dx^i dx^k, \qquad x^i \in R^1 \ (i = 0, 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где совокупность величин $g_{ik} = g_{ki}$, называемая метрическим тензором, зависит от координат x^0, x^1, x^2, x^3. При этом вид величин g_{ik} как функций от координат в общем случае должен зависеть от распределения вещества в пространстве — времени.

Итак, в общем случае распределения вещества в пространстве — времени надо рассматривать не псевдоевклидово пространство (1.1), а (псевдо) риманово пространство (1.2).

Распределение вещества в пространстве — времени обычно задается с помощью тензора энергии—импульса $T_{ik} = T_{kl}(x^0, x^1, x^2, x^3)$, описывающего распределение пространственной плотности энергии — импульса вещества как функцию координат x^0, x^1, x^2, x^3.

Таким образом, в случае общего распределения вещества необходимо связать метрический тензор g_{ik} из формулы (1.2) с тензором энергии — импульса вещества T_{ik}.

Общая теория относительности как раз и претендует на описание такой связи, как адекватной в значительной степени реальному физическому миру. Уравнения, с помощью которых устанавливается такая связь, являются уравнениями гравитационного поля.

Прежде чем сформулировать те физические принципы, из которых получают уравнения поля в общей теории относительности, приведем некоторые основные, необходимые в дальнейшем, сведения из тензорного анализа и римановой геометрии. Систематическое изложение этих вопросов можно найти, например, в монографиях П. К. Рашевского [157] и Б. А. Розенфельда [158, 159].

§ 2. Элементы римановой геометрии, общей тензорной алгебры и теории представлений групп Ли

2.1 Элементарное многообразие. Связную область в аффинном пространстве n измерений можем относить к различным системам криволинейных координат, любые две из которых связаны между собой взаимно однозначным и в обе стороны N раз непрерывно дифференцируемым преобразованием:

$$x'^{i} = f_i(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}),$$

и обратно,

$$x^{i} = g_i(x'^0, x'^1, x'^{n-1}). \qquad (2.1)$$

При этом $x = \{x^0, \dots, x^{n-1}\}$ пробегают область изменения $\Omega \subset R^n$, а $x'^i = \{x'^0, \dots, x'^{n-1}\}$ — область изменения $\Omega' \subset R^n$.

При выполнении указанных условий преобразование (2.1) переменных x^i в переменные x'^i будем называть *преобразованием класса N*.

Определение 2.1. *Элементарным многообразием* (n измерений и класса N) будем называть любое множество $\mathfrak{M}_n$, для которого задано взаимно однозначное отображение на связную область изменения n переменных $x^0, x^1, \dots, x^{n-1}$, но задано лишь с точностью до произвольного преобразования (2.1) класса N. Это отображение можно обозначить как

$$\mathfrak{M}_n \ni M \leftrightarrow (x^0, \dots, x^{n-1}) \in \Omega, \qquad (2.2)$$

где $\Omega \subset R^n$ — связная область.

Замечание 2.1. Важным обстоятельством в определении 2.1 является то, что отображение (2.2) задается с точностью до всевозможных преобразований класса N над переменными $x^0, \dots, x^{n-1}$, т. е. с точностью до перехода к любому другому отображению

$$\mathfrak{M}_n \ni M \leftrightarrow (x'^0, \dots, x'^{n-1}) \in \Omega' \qquad (2.3)$$

при единственном условии, что такой переход есть (непрерывное) преобразование класса N.

Благодаря такому определению это многообразие приобретает некоторые, хотя и скудные, геометрические свойства. Так, в нем можно ввести обычным путем понятие предельной точки M_0, понятие области (открытого множества) $R \subset \mathfrak{M}_n$, имеющих смысл независимо от выбора координатной системы. При этом элементы M многообразия будем называть точками, заданные отображения (2.2) — координатными системами в элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ и значения $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$, отвечающие точке M в отображении (2.2),— координатами точки M в соответствующей координатной системе.

2.2 Тензоры в элементарном многообразии. **Определение 2.2.** Будем говорить, что *в данной точке $M \in \mathfrak{M}_n$ задан тензор, l раз контравариантный и m раз ковариантный,* если в каждой системе координат $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ задана система чисел $a_{j_1, j_2, \ldots, j_m}^{i_1, i_2, \ldots, i_l}$, преобразующихся при переходе к другим координатам $x'^0, \ldots, x'^{n-1}$ по закону*

$$a_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_m}^{i'_1, i'_2, \ldots, i'_l}(M) = \prod_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial x'^{i'_\alpha}}{\partial x^{i_\alpha}}(M) \prod_{\beta=1}^{m} \frac{\partial x^{j_\beta}}{\partial x'^{j'_\beta}}(M)\, a_{j_1, j_2, \ldots, j_m}^{i_1, i_2, \ldots, i_l}(M), \qquad (2.4)$$

где частные производные вычислены в точке M. В формуле (2.4) и всюду далее по каждому дважды повторяющемуся индексу будем подразумевать суммирование по всем значениям этого индекса, если противное не оговорено.

Определение 2.3. Будем говорить, что *задано тензорное поле* $a_{j_1, \ldots, j_m}^{i_1, \ldots, i_l}$, если задан тензор $a_{j_1, \ldots, j_m}^{i_1, \ldots, i_l}$ в каждой точке M элементарного многообразия $\mathfrak{M}_n$. Тогда *координатами тензора* (или *компонентами тензора)* в каждой системе координат $x^0, \ldots, x^{n-1}$ будем называть функции

$$a_{j_1, \ldots, j_m}^{i_1, \ldots, i_l} = a_{j_1, \ldots, j_m}^{i_1, \ldots, i_l}(M) = a_{j_1, \ldots, j_m}^{i_1, \ldots, i_l}(x^0, \ldots, x^{n-1}) \qquad (2.5)$$

точки M в этой координатной системе. При этом будем считать, что тензорное поле задано на элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ (размерности n и класса N) лишь тогда, когда функции (2.5) являются $N - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми по всем координатам $x^0, \ldots, x^{n-1}$.

Замечание 2.2. Для аффинного пространства определение 2.3 дает определение координат тензора, m раз ковариантного и l раз контравариантного, вычисленных относительно локального аффинного репера в точке M. В общем же случае многообразия $\mathfrak{M}$ локальный репер ввести, очевидно, нельзя. Но можно ввести понятие локального репера в касательном аффинном пространстве, т. е. в бесконечно малой окрестности точки M. Это будет сделано ниже.

Для того чтобы задать тензор данного строения в определенной точке M, достаточно произвольно задаться его координатами в одной какой-либо координатной системе $x^0, \ldots, x^{n-1}$. Тогда в любой другой координатной системе $x'^0, \ldots, x'^{n-1}$ координаты этого тензора определятся по закону (2.4).

---

* Тензор, l раз контравариантный и m раз ковариантный, называется еще *тензором валентности $m+l$.*

Обычные операции тензорной алгебры (сложение, умножение, свертывание по верхнему и нижнему индексам) переносятся также на тензорные поля в элементарном многообразии, а именно эти операции над полями определяются как операции над тензорами этих полей, производимые в каждой точке M по отдельности.

Вместе с тем в элементарном многообразии еще нельзя определить операции абсолютного дифференцирования, поскольку само по себе элементарное многообразие не снабжено метрикой. Более того, по той же причине в элементарном многообразии даже нельзя никак сравнивать тензора, заданные в разных точках многообразия M_1 и M_2.

2.3. Касательное аффинное пространство. Рассмотрим один раз контравариантный тензор ξ^i в точке $M \in \mathfrak{M}_n$ и возьмем экземпляр n-мерного аффинного пространства A_n с отмеченной в нем точкой 0.

Отобразим каждый тензор ξ^i в данной точке M в некоторый вектор $\vec{\xi}$ пространства $A_n(M)$ так, чтобы умножению тензора ξ^i на число и сложению двух тензоров ξ^i и η^i отвечали такие же операции над соответствующими векторами:

$$\begin{aligned} &\text{если } \eta^i = \alpha\xi^i, \text{ то } \vec{\eta} = \alpha\vec{\xi}; \\ &\text{если } \zeta^i = \xi^i + \eta^i, \text{ то } \vec{\zeta} = \vec{\xi} + \vec{\eta}. \end{aligned} \tag{2.5а}$$

При этом потребуем, чтобы в этом отображении получались все векторы $\vec{\xi}$ пространства A_n.

Искомое отображение нетрудно построить следующим образом. Выберем среди всевозможных тензоров ξ^i в точке M n линейно независимых:

$$\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)}, \ldots, \xi^i_{(n)},$$

т. е. удовлетворяющих условию $\det |\xi^i_{(j)}| \neq 0$.

Тогда любой тензор ξ^i в точке M можно разложить по этим $\xi^i_{(j)}$ с некоторыми коэффициентами

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} \alpha^{(j)}\xi^i_{(j)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.5б}$$

Теперь в $A_n(M)$ выберем произвольно n линейно независимых векторов

$$\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \ldots, \vec{\xi}_n,$$

и каждому тензору ξ^i из (2.5б) сопоставим вектор $\vec{\xi}$ в $A_n(M)$, определяемый формулой

$$\vec{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \alpha^{(j)}\vec{\xi}_{(j)}.$$

Ясно, что отображение будет взаимно однозначным с соблюдением условий (2.5а).

Определение 2.4. Пусть для каждой точки M элементарного многообразия $\mathfrak{M}_n$ построено описанным выше способом аффинное пространство $A_n(M)$, имеющее с элементарным многообразием одну общую точку M, причем тензоры ξ^i в точке M изображаются векторами $\vec{\xi}$ в $A_n(M)$ с сохранением линейных зависимостей между ними. Тогда будем называть такое пространство $A_n(M)$ *касательным аффинным пространством,* а его векторы $\vec{\xi}$ — *касательными векторами в данной точке M элементарного многообразия $\mathfrak{M}_n$* или просто *векторами в данной точке M.*

Замечание 2.3. Во всяком касательном аффинном пространстве $A_n(M)$, очевидно, можно ввести локальный аффинный репер. При этом если тензору ξ^i в точке M отвечает в касательном пространстве $A_n(M)$ вектор $\vec{\xi}$, то его координаты относительно локального репера совпадают с ξ^i. Аналогично, если $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_m}$ суть координаты некоторого тензора в многообразии $\mathfrak{M}_n$ в точке M относительно координатной системы x^i, то те же самые координаты будет иметь этот тензор в касательном аффинном пространстве $A_n(M)$ относительно соответствующего локального репера.

Определение 2.5. *Элементарной m-мерной поверхностью $\mathfrak{M}_m$* в n-мерном элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ будем называть множество точек, заданных параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^m) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ m \leqslant n),$$

где $u^1, \dots, u^m$ — независимые параметры, пробегающие некоторую связную m-мерную область изменения $\Omega_u \subset R^m$. При этом будем предполагать функции $x^i(u^1, \dots, u^m)$ непрерывно дифференцируемыми N раз и удовлетворяющими следующему условию *(регулярности поверхности):*

$$\operatorname{rang}\left[\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right] = m. \qquad (2.6)$$

Элементарная одномерная поверхность $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_n$ называется кривой в многообразии $\mathfrak{M}_n$. Кривая в многообразии $\mathfrak{M}_n$ задается параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad t \in \Omega \subset R^1. \qquad (2.7)$$

Пусть данному значению t соответствует точка M, а значению $t + dt$ соответствует точка M' кривой (2.7). Дифференциалы координат $dx^i = dx^i(t)$ образуют в точке M один раз контравариантный тензор, поскольку при переходе в многообразии $\mathfrak{M}_n$ от старых координат (2.2) к новым (2.3) для бесконечно малого смещения по кривой (2.7) по формуле полного дифференциала получаем

$$dx'^i(t) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}(M)\, dx^j(t). \qquad (2.8)$$

Поэтому в касательном аффинном пространстве тензору $\xi^i = dx^i(t)$ должен отвечать бесконечно малый вектор, который будем обозначать через $\vec{dx}$.

Аналогично получаем, что тензору $\xi^i = \frac{dx^i}{dt}$ должен в касательном пространстве отвечать определенный вектор $\vec{\xi}$, который будем называть *касательным вектором к кривой* (2.7) *в точке* M. Прямую из $A_n(M)$, проходящую через точку M и содержащую касательный вектор, будем называть *касательной к этой кривой в точке* M.

В касательном аффинном пространстве $A_n(M)$ можно ввести локальный репер. При этом координаты тензора $a^{i_1, \ldots, i_l}_{j_1, \ldots, j_m}$ в многообразии $\mathfrak{M}_n$ в данной точке M относительно координатной системы $x^1, \ldots, x^n$ совпадают с координатами этого же тензора в касательном аффинном пространстве $A_n(M)$ относительно соответствующего локального репера.

2.4. Многообразие, риманово пространство. **Определение 2.6.** Будем называть *n-мерным многообразием класса N* множество $\mathfrak{M}$ элементов (называемых точками), в котором задана конечная или счетная система подмножеств $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \subset \mathfrak{M}$, удовлетворяющая следующим условиям (пустое множество обозначим через $\varnothing$).

1. Каждое подмножество $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ есть элементарное n-мерное многообразие класса N.
2. Каждая точка M множества $\mathfrak{M}$ входит, по крайней мере, в одно $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$.
3. Если $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \cap \mathfrak{M}_{(\beta)} = \mathfrak{R} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{R}$ образует область (вообще говоря, несвязную) как в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, так и в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$; при этом, когда точка M пробегает $\mathfrak{R}$, ее координаты y^i в $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ являются N раз непрерывно дифференцируемыми однозначными функциями от ее координат x^i в $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$, равно как и наоборот.
4. **Аксиома Хаусдорфа**. Если M_1 и M_2 — две различные точки $\mathfrak{M}$, причем $M_1 \in \mathfrak{M}_{(\alpha)}$, $M_2 \in \mathfrak{M}_{(\beta)}$ (допускается, что $\alpha = \beta$), то найдется такая область $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и такая область $\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{M}_{(\beta)}$, что $M_1 \in \mathfrak{R}_1$, $M_2 \in \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 = \varnothing$.
5. Любые два подмножества $\mathfrak{M}_{(\alpha)}$ и $\mathfrak{M}_{(\beta)}$ можно связать конечной цепочкой последовательно пересекающихся между собой подмножеств $\mathfrak{M}_{(\gamma)}$; точнее, существует конечная последовательность $\mathfrak{M}_{\gamma_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ такая, что $\mathfrak{M}_{(\gamma_i)} \cap \mathfrak{M}_{(\gamma_{i+1})} \neq \varnothing$, $\mathfrak{M}_{(\alpha)} \cap \mathfrak{M}_{(\gamma_1)} \neq \varnothing$, $\mathfrak{M}_{(\beta)} \cap \mathfrak{M}_{(\gamma_s)} \neq \varnothing$.

Чтобы превратить многообразие, определенное выше, в риманово пространство, нужно внести в него метрику.

Определение 2.7а. *Римановым пространством* V_n будем называть многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задано поле тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}),$$

два раза ковариантного, симметричного и невырожденного:

$$g = \det[g_{ij}] \neq 0, \quad g_{ij} = g_{ji}. \tag{2.9}$$

Тензор $g_{ij}(M)$ называется *метрическим*.

Замечание 2.4. Располагая тензорным полем $g_{ij}(M)$, превращаем каждое касательное пространство $A_n(M)$ из аффинного в евклидово $R_n(M)$, вводя в нем скалярное произведение любых двух векторов $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ по формуле

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = g_{ij}(M)\xi^i\eta^j. \qquad (2.10)$$

К формуле (2.10) сводится геометрический смысл метрического тензора $g_{ij}(M)$ в $\mathfrak{M}_n$.

Будем называть риманово пространство *собственно римановым* или *псевдоримановым* в зависимости от того, будет ли соответствующее касательное пространство евклидовым или псевдоевклидовым.

Пользуясь понятием касательного пространства, можно легко установить, что для всякого тензора $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$, заданного в точке M, разница между верхними и нижними индексами несущественна в том смысле, что верхние индексы можно переводить в нижние и, наоборот, при помощи метрического тензора, т. е. справедливо

$$a^{i_1, i_2, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}(M) = g^{i,k}(M)\, a_{k\,j_1, \dots, j_s}^{\;i_2, \dots, i_l}(M) = g_{pj_1}(M) a^{pi_1, i_2, \dots, i_l}_{j_2, \dots, j_s}(M), \qquad (2.10\text{а})$$

где $g^{ij}(M)$ — метрический тензор, координаты которого образуют матрицу, обратную матрице $[g_{jl}(M)]$:

$$g^{ij}(M)\, g_{jl}(M) = \delta^i_l = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l. \end{cases} \qquad (2.10.\text{б})$$

Рассмотрим теперь в римановом пространстве V_n кривую $x^i = x^i(t)$, $t \in [a, b] \subset R^1$.

Бесконечно малому смещению вдоль этой кривой соответствует бесконечно малый вектор $dx^i(t)$ в касательном пространстве. Теперь можно измерить длину этого вектора $dx^i(t)$, которому отвечает вектор $\vec{dx}$ в касательном пространстве. Основываясь на формуле (2.10), по аналогии с евклидовым пространством принимаем длину вектора $\vec{dx}$ за дифференциал дуги ds вдоль кривой (2.7), так что

$$ds^2 = \vec{dx}^2 = g_{ij}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})\, dx^i dx^j. \qquad (2.11)$$

Таким образом, ds^2 является *дифференциальной квадратичной формой от координат* x^i. Эга форма является инвариантной при произвольных преобразованиях координат класса N и называется *метрической*.

Пользуясь понятием квадратичной формы (2.11), можно сформулировать определение 2.7а риманова пространства в следующем эквивалентном виде.

Определение 2.7б. *Римановым пространством* V_n называется многообразие $\mathfrak{M}_n$, в котором задана инвариантная дифференциальная квадратичная форма

$$g_{ij}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})\, dx^i dx^j, \qquad (2.12)$$

где функции g_{ij} непрерывно дифференцируемы $N - 1$ раз и удовлетворяют условию (2.9).

Рассмотрим в римановом пространстве V_n поверхность $\mathfrak{M}_m$

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m). \tag{2.13}$$

Для дифференциала дуги при произвольном бесконечно малом смещении вдоль некоторой кривой на $\mathfrak{M}_m$ получаем

$$ds^2 = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}du^\alpha du^\beta \equiv G_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta. \tag{2.14}$$

Замечание 2.5. Итак, на поверхности $\mathfrak{M}_m$ возникает дифференциальная квадратичная форма от переменных u^1, ..., u^m, выражающая квадрат дифференциала дуги и, следовательно, инвариантная (линейный элемент поверхности $\mathfrak{M}_m$).

Если для поверхности $\mathfrak{M}_m$ в V_n выполняется соотношение $\det[G_{\alpha\beta}] = 0$, то такая поверхность называется *изотропной,* а если $\det[G_{\alpha\beta}] \neq 0$, то соответствующая поверхность называется *неизотропной*. Очевидно, поверхность $\mathfrak{M}_m$ в V_n является m-мерным римановым пространством только тогда, когда она неизотропна.

Пользуясь понятием касательного пространства, легко получить для инвариантного элемента объема в римановом пространстве V_n следующее выражение:

$$dW = \sqrt{|g|}\,dx^0 \ldots dx^{n-1}. \tag{2.15}$$

Для элемента объема m-мерной поверхности (2.13) в V_n получаем аналогично

$$dW_{\mathfrak{M}_m} = \sqrt{|G|}\,du^1 \ldots du^m, \tag{2.16}$$

где $|G| = \det[G_{\alpha\beta}] = \det\left[g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right]$.

2.5. Пространство аффинной связности, геодезические линии. Оставим на время пространство V_n и рассмотрим теперь другой вариант геометрии, которую можно получить на базе данного n-мерного многообразия $\mathfrak{M}_n$.

А именно внесением так называемого *поля объекта связности* $\Gamma^k_{ij}(M)$ в $\mathfrak{M}_n$ (вместо внесения поля метрического тензора $g_{ij}(M)$ в $\mathfrak{M}_n$) превращаем $\mathfrak{M}_n$ в пространство аффинной связности L_n.

Определение 2.8. Если в данной точке в $\mathfrak{M}_n$ для каждой координатной системы x^i, область действия которой включает точку M, задана система чисел Γ^k_{ij}, преобразующаяся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}(M) = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\cdot\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}(M), \tag{2.17}$$

то будем говорить, что в точке M *задан объект связности (скобки Кристоффеля, символы Кристоффеля второго рода* или просто *символы Кристоффеля).*

Все частные производные в (2.17) предполагаются вычисленными в точке M.

Определение 2.9. *Пространством аффинной связности* назовем многообразие $\mathfrak{M}_n$ (класса N), в котором задано поле объекта связности

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}), \tag{2.18}$$

т. е. объект связности задан в каждой точке M, причем функции (2.18) $N-2$ раза непрерывно дифференцируемы.

Замечание 2.6. Для задания поля объекта связности в элементарном многообразии $\mathfrak{M}_n$ в силу формулы (2.17) достаточно задаться функциями (2.18) в одной какой-либо координатной системе x^i.

Определение 2.10. Пусть вдоль некоторой кривой в L_n

$$x^i = x^i(t), \quad t \in [a, b] \subset R^1,$$

где $x^i(t)$ непрерывно дифференцируемы, задано векторное поле (в касательном аффинном пространстве A_n)

$$\xi^i = \xi^i(t).$$

Будем говорить, что *вектор* ξ^i (t) *параллельно переносится вдоль кривой,* если при каждом бесконечно малом смещении по кривой координаты вектора ξ^i (t) меняются по закону

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i. \tag{2.19}$$

Замечание 2.7. Если вектор ξ^i (t) параллельно переносится вдоль данной кривой с точки зрения одной координатной системы x^i, то это же верно и с точки зрения любой другой координатной системы x'^i (связанной с первой преобразованием класса N). Это означает *инвариантный характер* определения 2.10.

Определение 2.11. Кривая в пространстве аффинной связности называется *геодезической,* если всякий вектор ξ^i_0 $(\neq 0)$, касательный к этой кривой в какой-нибудь точке M_0, остается к ней касательным при параллельном перенесении вдоль нее.

Определение 2.12. Параметр τ на геодезической, для которого $\frac{dx^i}{d\tau}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, будем называть *каноническим.*

Применяя формулу параллельного перенесения (2.19) к вектору $\frac{dx^i}{d\tau}$, получаем дифференциальное уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\cdot\frac{dx^l}{d\tau}, \tag{2.20}$$

отнесенных к каноническому параметру τ.

Замечание 2.8. В силу теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения (2.20) с начальными условиями

$$x^i(\tau_0) = a^i = \overline{a^i}, \quad \frac{dx^i(\tau_0)}{d\tau} = b^i = \overline{b^i} \tag{2.21}$$

в некоторой окрестности точки $\tau = \tau_0$ получаем, что через каждую точку в L_n по каждому направлению проходит *одна и только одна геодезическая.*

В случае аффинного пространства A_n всякая геодезическая в A_n является прямой линией, и наоборот.

2.6. Аффинная связность в римановом пространстве. Если раньше мы рассматривали риманову геометрию и геометрию аффинной связности независимо друг от друга, то теперь зададимся целью объединить ту и другую геометрию.

Лемма 2.1. *В римановом пространстве всегда можно построить и притом единственным образом связность $\Gamma^k_{ij}(M)$, обладающую следующими свойствами:*

а) *кручение равно нулю*

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji};$$

б) *всякий раз, когда вдоль какого-либо пути одновременно переносятся два вектора $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ (из касательного аффинного пространства A_n), их скалярное произведение не меняется.*

Это единственное решение для связности имеет вид

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right), \tag{2.22}$$

причем все частные производные в правой части (2.22) *вычисляются в точке M.*

Доказательство леммы 2.1 несложно и может быть найдено в любом учебнике по римановой геометрии.

Замечание 2.9. Для неизотропной геодезической в римановом пространстве *длина дуги s служит каноническим параметром.*

2.7. Абсолютный дифференциал. Введем важное понятие абсолютного дифференциала в римановом пространстве V_n.

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t), \quad t \in [a, b] \subset R^1, \tag{2.23}$$

причем в каждой точке кривой (2.23) задан тензор определенного строения, например $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$, как непрерывно дифференцируемая функция параметра t:

$$a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} = a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}(t) \in C^1[a, b].$$

Тогда введем следующее определение.

Определение 2.13. Назовем *абсолютным (ковариантным) дифференциалом* $Da^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$ главную линейную часть разности $\tilde{a}^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} - a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$ между тензором $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}(t + dt)$, параллельно перенесенным из точки $t + dt$ в точку t, и тензором $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}(t)$.

Оказывается, что главная линейная часть разности имеет вид

$$Da^{i_1, i_2, \dots, i_l}_{j_1, j_2, \dots, j_s} = \Big\{ \frac{\partial}{\partial x^k} a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} + \Gamma^{i_1}_{kp} a^{p, i_2, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} +$$

$$+ \Gamma^{i_2}_{kp} a^{i_1, p, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} + \dots + \Gamma^{i_l}_{kp} a^{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, p}_{j_1, \dots, j_s} -$$

$$- \Gamma^{p}_{kj_1} a^{i_1, \dots, i_l}_{p, j_2, \dots, j_s} - \Gamma^{p}_{kj_2} a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, p, \dots, j_s} - \dots - \Gamma^{p}_{kj_s} a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_{s-1}, p} \Big\} dx^k \equiv$$

$$\equiv \nabla_k a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} dx^k = da^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} + \{ \Gamma^{i_1}_{kp} a^{p, i_2, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} + \Gamma^{i_2}_{kp} a^{i_1, p, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s} +$$

$$+ \dots + \Gamma^{i_l}_{kp} a^{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, p}_{j_1, \dots, j_s} - \Gamma^{p}_{kj_1} a^{i_1, \dots, i_l}_{p, j_2, \dots, j_s} - \Gamma^{p}_{kj_2} a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, p, \dots, j_s} -$$

$$- \dots - \Gamma^{p}_{kj_s} a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_{s-1}, p} \} dx^k, \qquad (2.24)$$

где $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$ — тензорное поле, заданное в некоторой области $\Omega_1 \subset \subset R^n$, содержащей кривую (2.23).

Из (2.24), (2.17) получаем, что величины $Da^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$ преобразуются по тензорному закону при переходе от одной координатной системы к другой.

Величина $\nabla_k a^{k, i_2, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$ называется *расходимостью тензора* $a^{i_1, \dots, i_l}_{j_1, \dots, j_s}$.

2.8. Кривые в римановом пространстве, тензор кривизны. Пусть в римановом пространстве V_n параметрически задана кривая

$$x^i = x^i(t) \in C^n[a, b], \ t \in [a, b] \in R^1, \qquad (2.25)$$

где x^i предполагаются n раз непрерывно дифференцируемыми функциями параметра t, и пусть производные $\frac{dx^i(t)}{dt}$ ни в одной точке не обращаются в нуль одновременно. В каждой точке кривой сопоставляем касательный вектор ξ^i:

$$\xi^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt},$$

так что вдоль кривой $x^i(t)$ вектор ξ^i образует тензорное поле.

Один раз контравариантный тензор $\frac{D\xi^i}{dt}$ всегда имеет истолкование в касательном евклидовом пространстве R_n в виде вектора. Вектор $\frac{D\xi^i(t)}{dt}$ будем называть *производной вектора* ξ^i *по параметру* t. От этого векторного поля можно в свою очередь вычислить производную $D\left(\frac{D\xi^i}{dt}\right)$, которую обозначим через $\frac{D^2\xi^i}{dt^2}$, и т. д. Так, получим последовательность векторов

$$\xi^i(t), \ \frac{D\xi^i(t)}{dt}, \ \frac{D^2\xi^i(t)}{dt^2}, \ \dots, \ \frac{D^{n-1}\xi^i(t)}{dt^{n-1}} \qquad (2.26)$$

в некоторой точке $M(t)$ на кривой.

Если эти n векторов будут в каждой точке линейно независимыми, то соответствующую кривую будем называть *кривой основного типа.*

Определение 2.14. Для кривой основного типа p-мерное линейное пространство в касательном пространстве R_n, содержащее точку M и построенное на первых p векторах (2.26), называется p-й *соприкасающейся плоскостью* $R_{(p)}$.

Замечание 2.10. В частности, первая соприкасающаяся плоскость $R_{(1)}$ совпадает просто с *касательной* к кривой (2.25).

Соприкасающиеся плоскости имеет смысл рассматривать, кончая $R_{(n-1)}$:

$$R_{(1)} \subset R_{(2)} \subset \cdots \subset R_{(p)} \subset R_{(p+1)} \subset \cdots \subset R_{(n-1)}.$$

Действительно, $R_{(n)}$ совпадает уже со *всем касательным пространством.*

На данной кривой параметр t можно выбирать по-разному, в зависимости от чего будут меняться векторы последовательности (2.26). Однако легко показать, что при переходе от параметра t для кривой к параметру

$$\tau = \tau(t) \in C^n [a, b] \tag{2.27}$$

получаемая новая последовательность векторов

$$\hat{\xi}^i(\tau) \equiv \xi^i[\tau(t)], \ \frac{D\hat{\xi}^i(\tau)}{d\tau}, \ \ldots, \ \frac{D^{n-1}\hat{\xi}^i(\tau)}{d\tau^{n-1}} \tag{2.28}$$

такова, что всегда первые p векторов ($p = 1, 2, \ldots, n - 1$) последовательности (2.28) будут выражаться через первые p векторов последовательности (2.26), и наоборот. А поэтому понятие p-соприкасающейся плоскости $R_{(p)}$ носит *инвариантный характер* относительно преобразования (2.27).

Наряду с кривыми основного типа играют важную роль различные случаи *уплощения кривой* (так будем называть кривую, *в каждой точке которой векторы* (2.26) *линейно зависимы*).

Пусть при этом первые m ($m \leqslant n - 1$) среди них еще линейно независимы, а следующий вектор $\frac{D^{m+1}\xi^i(t)}{dt^{m+1}}$ уже линейно зависит от предыдущих (в каждой точке кривой). При этом легко убедиться прямым дифференцированием, что и все остальные векторы последовательности (2.26) линейно выражаются через первые m штук векторов этой последовательности.

Для такой кривой имеет смысл рассматривать соприкасающиеся плоскости от $R_{(1)}$ до $R_{(m)}$: $R_{(1)} \subset R_{(2)} \subset \ldots \subset R_{(m)}$.

Для различных кривых m может принимать различные значения от 1 до $n - 1$. Чем меньше m, тем сильнее уплощение кривой. При $m = 1$ уплощение наибольшее, и соответствующая кривая оказывается геодезической. При $m = n$ уплощение исчезает и получаем кривую основного типа.

Оказывается, что максимально-мерная соприкасающаяся плоскость $R_{(m)}$ для данной кривой параллельно переносится вдоль этой кривой.

Важную роль в тензорном анализе играет смешанный тензор

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^n_{jk}\Gamma^i_{nl} - \Gamma^n_{jl}\Gamma^i_{nk}, \tag{2.29}$$

называемый *тензором кривизны,* или *тензором Римана — Кристоффеля.*

Замечание 2.11. Из формул (2.17), (2.22) можно получить, что выражение (2.29) преобразуется при переходе от одной координатной системы к другой как один раз контравариантный и три раза ковариантный тензор и обладает следующими свойствами симметрии:

$$R^i_{j,kl} = -R^i_{j,lk}, \tag{2.30}$$

а соответствующий четыре раза ковариантный тензор

$$R_{ij,kl} = g_{nj}R^n_{i,kl}$$

обладает такими свойствами:

$$R_{ik,ln} = R_{kl,ln}, \tag{2.31}$$

$$R_{ij,kl} + R_{ik,lj} + R_{il,jk} = 0 \tag{2.32}$$

(тождество Бианки — Падова).

Можно получить, что в силу свойств симметрии (2.30) — (2.32) полное число независимых компонент тензора кривизны равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$. В частности, для $n = 4$ это число равно 20.

Два раза ковариантный тензор

$$R_{ik} = g^{mn}R_{im,nk} = R^m_{i,mk} \tag{2.33}$$

называется *тензором Риччи,* а величина

$$R = g^{ik}R^m_{i,mk} \tag{2.34}$$

называется *скалярной кривизной.*

Легко получить следующее соотношение для расходимости тензора Риччи:

$$\nabla^k R_{kl} = \frac{1}{2}\nabla_l R. \tag{2.35}$$

2.9. Группы Ли в римановых пространствах. Для наших целей будет важно исследовать римановы пространства V_n, для которых выражение для интервала инвариантно относительно произвольных преобразований, связанных с той или иной группой симметрии. С этой целью приведем некоторые сведения из теории непрерывных групп преобразований (групп Ли) и связь последних с римановыми пространствами.

Систематическое изложение этих вопросов можно найти в книгах Д. П. Желобенко [66], Б. А. Розенфельда [158, 159]

С. Хельгасона [197, 246], Н. Я. Виленкина [41], А. З. Петрова [138, 139], И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса, З. Я. Шапиро [48], М. А. Наймарка [126], а также в статье Ф. Гюрши [60].

Группы непрерывных преобразований являются примером бесконечных групп, т. е. групп, состоящих из бесконечного числа элементов. Множество элементов называется *группой* тогда и только тогда, когда это множество обладает четырьмя свойствами.

1°. Любым двум элементам группы g_1, $g_2 \in G$ сопоставляется третий элемент $g_3 = g_2 g_1 \in G$, называемый произведением элементов g_1 и g_2 группы.

2°. Умножение ассоциативно, т. е. $g_1 (g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$, если g_1, g_2, $g_3 \in G$.

3°. Имеется единичный элемент e, так что для $\forall g_1 \in G$ справедливо

$$e g_1 = g_1 e = g_1.$$

4°. Для любого $g \in G$ существует обратный элемент $g^{-1} \in G$:

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e.$$

Пусть множество элементов группы G наделено *топологией*. Это значит, что определена такая система подмножеств G, что каждый элемент G содержится по крайней мере в одном из этих подмножеств; в этой системе подмножеств имеется также пустое подмножество и само множество G; пересечение двух подмножеств и их объединение также содержится в этой системе подмножеств. Тогда мы говорим, что G есть *топологическое пространство*, а элементы G называются *точками* этого пространства.

Если отображения множества G на себя, индуцируемые групповыми операциями, являются непрерывными и G является топологическим пространством, то говорят, что множество образует *топологическую группу*. При этом множество G обладает структурой двух родов: геометрической структурой, превращающей его в топологическое пространство, и групповой структурой, индуцирующей непрерывные отображения множества G на само себя.

Если топологическая группа, рассматриваемая как топологическое пространство, является компактным пространством, то она называется *компактной группой*. В противном случае такая группа называется *некомпактной*.

В простейшем случае топологическая группа может локально обладать свойствами n-мерного евклидова пространства E_n, так что окрестность всякой точки из G может быть непрерывно и одно-однозначно отображена (*гомеоморфное отображение*) в окрестность точки пространства E_n. Такое топологическое пространство называется *n-мерным групповым многообразием*.

Определение 2.15. Топологическая группа, являющаяся групповым многообразием, называется *группой Ли*.

Ниже ограничимся рассмотрением таких групп Ли, элементы группового многообразия которых можно задавать с помощью конечного числа непрерывно изменяющихся параметров.

Обозначим через $\mathcal{X}_n$ n-мерное пространство, отнесенное к координатам $\{x^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а через $\mathcal{Y}_s$ — s-мерное пространство параметров $\{a^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$. Тогда уравнения

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n; a^1, \ldots, a^s) \equiv f^i(x, a) \qquad (2.36)$$

при фиксированных значениях a^α определят преобразование точки $M(x)$ пространства $\mathcal{X}_n$ в точку $M'(x')$. Предположим, что при этом f^i — функции некоторого класса C^p, а a^α — существенные параметры, которые не могут быть выражены через меньшее число независимых параметров.

Пространство $\mathcal{Y}_s$ становится группой, которую обозначим через G_s, если существует s достаточное число раз дифференцируемых функций $\varphi^\alpha(a^\beta, b^\rho)$, $\alpha, \beta, \rho = 1, 2, \ldots, s$, таких, что

$$f^i(f(x, a), b) = f^i(x, \varphi(a, b)) \equiv f^i(x, c), \qquad (2.37)$$

где c — элемент группы; в G_s существует точка e^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$. для которой

$$f^i(x, e) = x^i,$$

и при этом предполагается, что функции φ определены в окрестности точки e^α и удовлетворяют следующим аксиомам группы:

1) $\varphi^\alpha(a, \varphi(b, c)) = \varphi^\alpha(\varphi(a, b), c)$ (ассоциативный закон);

2) $\varphi^\alpha(a, e) = a^\alpha = \varphi^\alpha(e, a)$ (существование единицы группы e^α);

3) $\varphi^\alpha(a, a^{-1}) = \varphi^\alpha(a^{-1}, a) = e^\alpha$ (существование обратного элемента для $\forall a^\alpha \in G_s$) *.

Очевидно, чтобы выполнялось свойство 3), необходимо, чтобы

$$\det\left[\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial b^\beta}\right] \neq 0. \qquad (2.37\text{а})$$

Одномерной подгруппой G группы G_s назовем такую кривую $a^i = a^i(t)$ пространства параметров, проходящую через единицу группы e^α, для любых точек которой

$$\varphi^\alpha(a(t_1), a(t_2)) = a^\alpha(t_3).$$

Всякой точке этой кривой, бесконечно близкой к e^α, в пространстве $\mathcal{X}_n$ отвечает бесконечно малое преобразование

$$x^i \to x'^i = x^i + \xi^i(x)\,\delta t, \qquad (2.38)$$

которому можно, таким образом, сопоставить оператор

$$X_1 \equiv X = \xi^i(x)\,\partial_i, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (2.39)$$

Из формулы (2.38) вытекает, что траектория одномерной подгруппы в пространстве $\mathcal{X}_n$, проходящая через данную точку $M(x_0^i)$, определяется как интегральная кривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.40)$$

---

* Число s для группы Ли G_s называется *порядком группы* G_s.

с начальными данными $x^i(0) = x_0^i$, $a^\alpha = e^\alpha$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$.

Каждой одномерной подгруппе группы G_s можно взаимно однозначно сопоставить оператор с точностью до постоянного множителя.

Для этого можно рассуждать, например, следующим образом. Умножим элемент a^α группы слева на малый элемент δa^α, близкий к единичному элементу e^α группы. В результате группового умножения получим новый элемент

$$\tilde{a}^\alpha = \varphi(a^\alpha, \delta a^\alpha). \qquad (2.41)$$

Поскольку φ — непрерывная функция, элемент $\tilde{a}^\alpha$ должен лежать в окрестности элемента a^α так, что можно записать левую часть соотношения (2.41) в виде $\tilde{a}^\alpha = a^\alpha + da^\alpha$. Теперь для бесконечно малых δa^α получаем из (2.41)

$$a^\alpha + da^\alpha = \varphi^\alpha(a, e) + \left[\frac{\partial \varphi^\alpha(a, b)}{\partial b^\beta}\right]_{b=e} \delta a^\beta. \qquad (2.42)$$

Полагая

$$\mu_\beta^\alpha(a) \equiv \left[\frac{\partial \varphi^\alpha(a, b)}{\partial b^\beta}\right]_{b=e} \qquad (2.43)$$

и замечая, что $\varphi^\alpha(a, e) = a^\alpha$, находим

$$da^\alpha = \mu_\beta^\alpha(a)\, \delta a^\beta. \qquad (2.44)$$

Обратимся теперь к закону преобразования (2.36) координат x^i при действии элемента δa^α группы. В силу непрерывности функций f из (2.36) имеем под действием бесконечно малого δa^α преобразование

$$x^i \to x^i + dx^i = f^i(x, \delta a) = x^i + \left[\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=e} \delta a^\alpha = x^i + \xi_\alpha^i(x)\, \delta a^\alpha, \qquad (2.45)$$

где введено

$$\xi_\alpha^i(x) \equiv \left[\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=e}$$

Из (2.44) находим

$$\delta a^\beta = \lambda_\alpha^\beta(a)\, da^\alpha, \qquad (2.46)$$

где $\lambda_\alpha^\beta(a)$ — матрица, обратная к матрице $\mu_\beta^\alpha(a)$ из (2.43),

$$\lambda_\beta^\nu(a)\, \mu_\rho^\beta(a) = \delta_\rho^\nu.$$

Существование матрицы λ гарантировано выполняющимся в случае группы условием (2.37а).

Подставляя (2.46) в (2.45), получаем окончательно

$$dx^i = \xi_\alpha^i(x)\, \lambda_\beta^\alpha(a)\, da^\beta. \qquad (2.47)$$

Рассмотрим теперь, как произвольная непрерывная функция $F(x)$ изменяется при бесконечно малых преобразованиях, соответствующих элементу δa^α. Получаем в силу (2.47)

$$dF(x) = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial F}{\partial x^i} \xi_\alpha^i(x)\, \delta a^\alpha = \delta a^\alpha X_\alpha F(x),$$

где операторы

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (2.48)$$

являются генераторами инфинитезимальных преобразований в x-пространстве.

Среди всех операторов группы найдется ровно s линейно независимых операторов $X_1, \ldots, X_s$, называемых *инфинитезимальными генераторами группы Ли (базис группы)*. Любой оператор группы является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов базиса. Из теории совместности систем дифференциальных уравнений получаем следующую теорему.

Теорема 2.1. (вторая основная теорема Ли). *Для того чтобы s операторов группы G_s определяли базис группы, необходимо и достаточно, чтобы операторы*

$$[X_\alpha, X_\beta] \equiv (\xi^l_\alpha \partial_l \xi^k_\beta - \xi^l_\beta \partial_l \xi^k_\alpha)\,\partial_k,$$

называемые коммутаторами, были операторами G_s, если X_α, X_β — базисные операторы.

Следствие 2.1. Из теоремы 2.1 получаем коммутаторы следующего вида:

$$[X_\alpha, X_\beta] = c^\rho_{\alpha\beta} X_\rho, \qquad (2.49)$$

где $c^\rho_{\alpha\beta}$ — называемые *структурные константы группы G_s*, обладающие очевидным свойством

$$c^\rho_{\alpha\beta} = -c^\rho_{\beta\alpha}. \qquad (2.49\text{а})$$

Если (2.49) подставить в тождество Якоби

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] + [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] + [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] = 0, \qquad (2.49\text{б})$$

то найдем

$$c^\mu_{\rho\sigma} c^\nu_{\mu\tau} + c^\mu_{\sigma\tau} c^\nu_{\mu\rho} + c^\mu_{\tau\rho} c^\nu_{\mu\sigma} = 0. \qquad (2.49\text{в})$$

Если все константы $c^\rho_{\alpha\beta}$ равны нулю, то все коммутаторы равны нулю, а группа G_s называется *абелевой*.

Две группы порядка s с операторами X_α и Y_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, соответственно будем называть *изоморфными*, если существует линейное невырожденное преобразование $[A^\alpha_\beta]$

$$Y_\alpha = A^\beta_\alpha X_\beta,$$

при котором структура одной группы переходит в структуру другой.

Совокупность преобразований группы G_s, оставляющих неподвижной точку $M(x^i_0)$, образует подгруппу H_m группы G_s, называемую *стационарной подгруппой*. По определению для любого оператора подгруппы H_m имеет место равенство для (2.38)

$$\xi^i(x_0) = 0. \qquad (2.50)$$

Если группа Ли G определена в топологическом пространстве T, причем для всяких двух точек z_1, $z_2 \in T$ существует преобразование этой группы, переводящее точку z_1 в точку z_2, то это топологическое пространство называется *однородным пространством,* или *пространством Клейна,* а группа преобразований G — *транзитивной группой.*

Если же группа Ли не обладает таким свойством, то эта группа называется *интранзитивной* (или *нетранзитивной*), а топологическое пространство T можно разбить на *классы транзитивности* (или *поверхности транзитивности*), в каждом из которых группа транзитивна.

Например, группа вращений $SO(3)$ трехмерного пространства R_3 нетранзитивна; сфера постоянного радиуса в R_3 является поверхностью транзитивности для $SO(3)$. Группа трансляций пространства R_3 транзитивна.

Если топологическое пространство группы Ли является однородным и римановым одновременно, то в таком случае говорят о симметрическом пространстве, определяемом так.

Определение 2.16. Будем называть *римановым* или *псевдоримановым симметрическим пространством* соответственно риманово или псевдориманово пространство, с каждой точкой которого связано инволютивное * преобразование, определенное на всем пространстве, оставляющее инвариантной метрику пространства и порождающее отражение от этой точки в касательном пространстве этого пространства.

Всевозможные линейные комбинации коммутаторов группы (линейная оболочка коммутаторов) отвечают подгруппе G_{s_1}, которую назовем *коммутантом группы* G_s. В свою очередь, линейная оболочка коммутантов определит коммутант $G_{s_2} \supset G_{s_1}$ и т. д. Продолжая этот процесс, получим

$$G_s \supset G_{s_1} \supset G_{s_2} \supset \cdots, \text{ если } s > s_1 > s_2 > \cdots > 0.$$

Таким образом, приходим к альтернативе

1) $s > s_1 > s_2 > \ldots > s_k = 0$ и в этом случае группа называется *разрешимой;*

2) $s > s_1 > \ldots > s_k = s_{k+1} = \ldots > 0$ и такую группу назовем *неразрешимой.*

Группа Ли, не имеющая инвариантных подгрупп **, называется *простой группой Ли;* группа Ли, не имеющая абелевых инвариантных подгрупп, называется *полупростой группой Ли.*

---

* *Инволюцией* в алгебре B называется такое отображение $b \to b^*$ алгебры B в себя, что

$$(b_1 + b_2)^* = b_1^* + b_2^*,\quad (b_1 b_2)^* = b_2^* b_1^*,$$

$$(\alpha b)^* = \bar{\alpha} b^*,\quad (b^*)^* = b.$$

** Подгруппа H группы G называется *инвариантной* или *нормальным делителем* группы G, если она коммутирует с любым элементом g группы G:

$$g^{-1} H g = H.$$

Рассмотрим далее непрерывные группы преобразований (группы Ли) в римановых пространствах V_n, и притом специального вида — групп движений, оставляющих неизменной метрику V_n.

Определение 2.17. *Группой движений риманова пространства* V_n назовем группу преобразований этого пространства $x^i \to f^i(x^j)$, при которых составляющие метрического тензора будут теми же функциями от новых независимых переменных (координат) точки риманова пространства:

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^k = g_{ik}(x'^1, \ldots, x'^n)\, dx'^i\, dx'^k. \qquad (2.51)$$

Для того чтобы G_s была группой движения, необходимо и достаточно, чтобы для каждого оператора группы выполнялись так называемые уравнения Киллинга. Для получения этих уравнений нам понадобится ввести понятие производной Ли.

Пусть задан тензор $a^{(l)}_{(m)}$, для которого (l) означает совокупность всех его контравариантных, а (m) — всех его ковариантных индексов. Рассмотрим некоторую точку $M(x^i)$ в пространстве V_n и значение тензора $a^{(l)}_{(m)}(x^i)$ в этой точке.

Увлечем теперь систему координат на $\xi^i dt$, т. е. преобразуем ее так, чтобы точка $M(x^i + \xi^i\, dt)$ получила координаты x^i. Тогда по отношению к переносимой системе координат точка $M(x^i)$ получит координаты $x^i - \xi^i dt$. После этого возвратимся к первоначальной системе координат. Если первоначальное значение тензора в точке $M(x^i)$ было $a^{(l)}_{(m)}$, то значение в той же точке в результате увлечения (т. е. в новой системе координат) будет

$$a^{(l)}_{(m)} - \delta_L a^{(l)}_{(m)}.$$

Объект $\delta_L a^{(l)}_{(m)}$ называется *дифференциалом Ли*. Из определения следует, что в голономной системе координат * в направлении векторного поля ξ для контравариантных и ковариантных компонентов вектора дифференциал Ли будет иметь вид

$$\delta_L a^i = (\xi^l \partial_l a^i - a^l \partial_l \xi^i)\, dt, \qquad (2.52)$$

$$\delta_L a_i = (\xi^l \partial_l a_i + a^l \partial_l \xi_i)\, dt. \qquad (2.53)$$

Выражения, стоящие в круглых скобках в правых частях формул, называются соответственно *производными Ли* контравариантного вектора a^i и ковариантного вектора a_i.

Дифференциал Ли и производная Ли для тензоров произвольного порядка вычисляются по тому же правилу для каждого контравариантного и каждого ковариантного индекса отдельно.

---

* Назовем систему координат *голономной*, если координатными векторами являются поля *градиентных векторов* $u^i_{(j)} = u^i_{(j)}(x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. если $\dfrac{\partial u^i_{(j)}}{\partial x^l} - \dfrac{\partial u^l_{(j)}}{\partial x^i} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, во всем пространстве V_n.

Уравнения Киллинга представляют собой выражение необходимого и достаточного условия того, чтобы сдвиг $\xi^i dt$ в V_n представлял собой движение, т. е. смещение V_n в самом себе, при котором выполняется (2.51). Это означает, что увлеченное значение поля g_{ik} в точке $x^i + \xi^i dt$ равно $g_{ik}(x)$, т. е. дифференциал Ли от g_{ik} при таком сдвиге $\xi^i dt$ равен нулю.

Следовательно, справедлива лемма.

Лемма 2.2. *Для того чтобы вектор* ξ^i *определял движение в* V_n, *необходимо и достаточно, чтобы в направлении* ξ^i

$$\delta_L g_{ik} = 0,$$

что в развернутом виде в силу (2.52), (2.53) *запишется так:*

$$\xi^l \partial_l g_{ik} + g_{il}\partial_k \xi^l + g_{kl}\partial_i \xi^l \equiv \nabla_k \xi_i + \nabla_i \xi_k = 0. \qquad (2.54)$$

В этом случае ξ^i *называют вектором Киллинга.*

Уравнения (2.54) называются *уравнениями Киллинга.*

Лемма 2.3. *Для того чтобы выполнялись уравнения Киллинга* (2.54), *должны выполняться условия в направлении* ξ^i *для тензора кривизны:*

$$\begin{aligned}
&\delta_L R_{ij,kl} = 0,\\
&\delta_L[\nabla_q R_{ij,kl}] = 0,\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\delta_L[\nabla_{q_1}\,.\,\nabla_{q_p} R_{ij,kl}] = 0, \qquad (2.55)\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ .
\end{aligned}$$

представляющие собой условия совместности уравнений (2.54).

Исследование уравнений (2.55) играет решающую роль при определении порядка s группы G_s, допускаемой римановым пространством V_n. А именно как следствие из теорем о совместности системы дифференциальных уравнений получаем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Для того чтобы в* V_n *имела место группа движений* G_s, *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы однородных алгебраических уравнений* (2.55) *до номера* p *относительно неизвестных* ξ_i *и* $\nabla_k \xi_i$ *при условии* (2.54) *был равен* $\frac{n(n+1)}{2} - s$, *а добавление новых решений уравнений из числа* (2.55) *с номером* $p+1$ *не меняло этого ранга.*

Классификация заданного V_n по группам движения с необходимостью связывается со структурами исследуемых групп, т. е. со структурными константами для некоторого канонического базиса группы. Зная структуру группы, можно определить наиболее простую голономную систему координат, связанную с этой структурой, и выразить все операторы группы через соответствующие инфинитезимальные генераторы. После этого определение V_n по заданной группе G_s сводится к интегрированию уравнений Киллинга (2.54) с целью восстановления метрического тензора g_{ik}.

В приложении к римановым пространствам, определяемым полями тяготения, нас будут интересовать только вещественные структуры. В частности, для четырехмерного пространства времени $n = 4$, а поэтому $0 \leqslant s \leqslant 10$ в силу теоремы 2.2.

Произведем данную Л. Бианки [214] и Г. И. Кручковичем [92, 93] классификацию групп движений G_s риманова пространства V_n по структурам для нижайших значений $s = 2$, 3, 4. Эта классификация приводится в книге А. З. Петрова [138, гл. 1].

I. Для $s = 2$

1) $[X_1, X_2] = 0$ — абелева G_2,
2) $[X_1, X_2] = X_1$ — неабелева G_2.

II. Для $s = 3$

разрешимые группы

1) $[X_\alpha, X_\beta] = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — абелева G_3,
2) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = 0,$
3) $[X_1, X_2] = 0;\ [X_2, X_3] = 0,\ [X_3, X_1] = -X_1,$
4) $[X_1, X_2] = 0;\ [X_2, X_3] = X_1 + X_2,\ [X_3, X_1] = -X_1,$
5) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = -X_1,$
6) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = qX_2,\ [X_3, X_1] = -X_1 \quad (q \neq 0$ и $1),$
7) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ (q^2 < 4);$

неразрешимые группы

8) $[X_1, X_2] = X_1,\ [X_2, X_3] = X_3,\ [X_3, X_1] = -2X_2,$
9) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2.$

III. Для $s = 4$

разрешимые G_4, не содержащие абелевой подгруппы G_3,

1) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = 0,$
$[X_1, X_4] = cX_1,\ [X_2, X_4] = X_2,\ [X_3, X_4] = (c - 1)X_3,$
c — любое вещественное число;
2) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = 0,$
$[X_1, X_4] = 2X_1,\ [X_3, X_4] = X_2,\ [X_3, X_4] = X_2 + X_3;$
3) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = 0,$
$[X_1, X_4] = qX_1,\ [X_2, X_4] = X_3,\ [X_3, X_4] = -X_2 + qX_8$
$(q^2 < 4);$
4) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = 0,$
$[X_1, X_4] = X_1,\ [X_2, X_4] = 0,\ [X_3, X_4] = 0;$
5) $[X_1, X_2] = 0,\ [X_2, X_3] = X_2,\ [X_3, X_1] = -X_1,$
$[X_1, X_4] = X_2,\ [X_2, X_4] = -X_1,\ [X_3, X_4] = 0;$

разрешимые группы G_4 с абелевой подгруппой G_3

6) $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \ [X_\alpha, X_4] = c_\alpha^\rho X_\rho,$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \rho = 1, 2, 3, 4,$$

c_α^ρ — структурные константы одного из четырех следующих видов:

6′) $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \ [X_1, X_4] = \varepsilon X_1, \ [X_2, X_4] = kX_2,$

$$[X_3, X_4] = lX_3,$$

6″) $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \ [X_1, X_4] = kX_1 + X_2, \ [X_2, X_4] = -X_1 + kX_2,$

$$[X_3, X_4] = lX_3,$$

6‴) $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \ [X_1, X_4] = kX_1 + X_2, \ [X_2, X_4] = kX_2,$

$$[X_3, X_4] = \varepsilon X_3,$$

6^{IV}) $[X_\alpha, X_\beta] = 0, \ [X_1, X_4] = kX_1 + X_2,$

$$[X_2, X_4] = kX_2 + X_3, \ [X_3, X_4] = \varepsilon X_3,$$

где $\varepsilon = 0, 1$; k и l — произвольные вещественные постоянные;
неразрешимые группы G_4

7) $[X_1, X_2] = X_1, \ [X_2, X_3] = X_3, \ [X_3, X_1] = -2X_2,$

$$[X_\alpha, X_4] = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3;$$

8) $[X_1, X_2] = X_3, \ [X_2, X_3] = X_1, \ [X_3, X_1] = X_2,$

$$[X_\alpha, X_4] = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Для $s \geqslant 5$ полная классификация групп G_s пока отсутствует. Отдельные примеры групп движений G_s для $s \geqslant 5$ будут указаны ниже (группа вращений $SO(n)$, группа Пуанкаре $\mathcal{P}(3, 1)$, группа де Ситтера $SO(4,1)$).

В общей теории относительности представляют интерес группы движений G_s не произвольных римановых пространств V_n, а таких пространств V_n, которые являются решением уравнений поля тяготения с космологическим членом

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \lambda g_{ik} = -\varkappa T_{ik}. \tag{2.56}$$

При этом обычно выделяют три различные случая:

а) поле тяготения в пустоте (т. е. $T_{ik} \equiv 0$) для $\lambda \equiv 0$:

$$R_{ik} = 0; \tag{2.57}$$

б) поле тяготения для случая $T_{ik} = \sigma g_{ik}$ (σ — некоторое вещественное число):

$$R_{ik} = (\lambda + \varkappa\sigma) g_{ik}; \tag{2.58}$$

в) поле тяготения в присутствии материи, причем распределение энергии — импульса материи таково, что T_{ik} инвариантен относительно некоторой группы G_T; при этом уравнения поля имеют общий вид (2.56).

Риманово пространство V_n, метрический тензор которого удовлетворяет уравнению поля в форме (2.58), называется *пространством Эйнштейна.*

Для островного распределения материи можно говорить о «внутренней» и «внешней» задачах при интегрировании уравнений поля, и в этом случае уравнение (2.57) определяет решения «внешней» задачи при $\lambda \equiv 0$.

Общая классификация пространств Эйнштейна дана в книге А. З. Петрова [138, гл. III], а классификация полей тяготения по группам движений G_s дается там же, в гл. IV. Некоторые известные точные решения уравнений поля (2.56), обладающие той или иной группой симметрии, описаны в § 14 книги [138].

2.10. Представление группы, операторы Казимира группы Ли. Группа с матрицами в качестве элементов и матричным умножением в качестве группового закона композиции называется *матричной группой.*

Матрица представляет собой преобразование в векторном пространстве L, которое имеет размерность m в случае $(m \times m)$-матриц. Матричной группе соответствует группа линейных преобразований в пространстве L. С элементом M матричной группы мы связываем линейное преобразование $My = y'$.

Представлением **T** *группы* G называется матричная группа, на которую гомоморфно [*] отображена группа $G : \mathbf{T} \leftrightarrow G$. При этом, очевидно, матрица T_g поставлена в соответствие каждому элементу g группы G таким образом, что $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$, если $g_1 \in G$, $g_2 \in G$.

Будем говорить, что **T** есть m-мерное представление группы G в векторном пространстве L, если размерность пространства L есть m. Пространство L называется *пространством представления.*

Существование обратного элемента требует, чтобы матрица T_g была несингулярной, так как

$$T_{g^{-1}} = (T_g)^{-1}.$$

Кроме того,

$$T_e = I,$$

где I — единичная матрица $m \times m$.

Пусть B — линейное отображение пространства представления L в L_1:

$$x = By \in L_1, \quad y \in L,$$

имеющее непрерывное обратное отображение B^{-1}. При этом матрица T_g представления в L элемента $g \in G$ в новом базисе

---

[*] *Гомоморфным отображением* называется много-однозначное отображение элементов бо́льшей группы G на элементы меньшей группы $\tilde{G}$, причем такое, что оно сохраняет произведение; т. е. при этом всякому элементу $g_1 \in \tilde{G}$ соответствует некоторое множество $G_1 \subset G$, а всякому элементу $g \in G$ соответствует единственный элемент $g_1 \in \tilde{G}$.

принимает вид $T'_g = B^{-1}T_gB$. Матрица T'_g—новое представление элемента $g \in G$ в пространстве L_1, называемое *эквивалентным представлению* T_g.

Пусть T_g — представление элемента $g \in G$ в L, а T'_g — представление элемента $g \in G$ в L_1. Если не существует линейного отображения B пространства L в L_1, обладающего непрерывным обратным отображением B^{-1} и удовлетворяющего соотношениям

$$T'_g = B^{-1}T_gB, \quad \forall g \in G,$$

то представления T_g и T'_g называются *неэквивалентными*.

Определение 2.18. Представление **T** размерности m группы G, которое некоторым невырожденным линейным преобразованием A

$$y' = Ay, \; T'_g = A^{-1}T_gA,$$

может быть приведено к ящично-диагональному виду

$$T'_g = A^{-1}T_gA = \begin{bmatrix} (T_g)_1 & 0 \\ 0 & (T_g)_2 \end{bmatrix}, \quad \forall g \in G,$$

где $(T_g)_1$ — $(m_1 \times m_1)$-матрица, $(T_g)_2$ — $(m_2 \times m_2)$-матрица, $m_1 + m_2 = m$, называется *вполне приводимым*. Если такого преобразования A в L не существует, то представление называется *неприводимым*.

Если пространством представления является (бесконечномерное) гильбертово пространство $\mathcal{H}$, а преобразования группы симметрии G оставляют инвариантными скалярные произведения (Φ, Ψ) любых векторов Φ, Ψ из $\mathcal{H}$, то в таком случае всякая матрица преобразования **T** для выбираемого представления должна обладать свойством унитарности

$$T_g^{+}T_g = I,$$

получаемым из требования $(\Phi', \Psi') = (T_g\Phi, T_g\Psi) = (\Phi, \Psi)$. В таком случае представление **T** группы G называется *унитарным*.

Можно доказать, что все неприводимые унитарные представления компактной группы Ли конечномерны, а некомпактная группа Ли может иметь бесконечномерные неприводимые унитарные представления.

Итак, для s-параметрической группы Ли всегда существует ровно s линейно независимых инфинитезимальных операторов X_ρ. Из этих операторов можно составить всевозможные линейные комбинации $u^\rho X_\rho$ с вещественными величинами $\{u^\rho\}$ и получить s-мерное векторное пространство. В этом векторном пространстве любому элементу $u = u^\rho X_\rho$ можно сопоставить линейный оператор $A(u)$, действующий по формуле

$$A(u)v = v' = [u, v],$$

где $v \equiv v^\rho X_\rho$ — другой элемент алгебры Ли. Очевидно,

$$A(u)v = [u, v] = u^\sigma v^\rho [X_\sigma, X_\rho] = u^\sigma v^\rho c^\nu_{\sigma\rho} X_\nu \equiv v' = v'^\nu X_\nu. \quad (2.59)$$

В свою очередь, формула (2.59) определяет операцию умножения двух элементов алгебры Ли *u* и *v*.

Определение 2.19. Вещественное векторное *s*-мерное пространство величин $a^\rho X_\rho$, замкнутое относительно умножения (2.59), (2.49), (2.49а) — (2.49в), называется *алгеброй Ли группы Ли.*

Таким образом, оператор A (u) индуцирует на компонентах элемента v преобразование

$$v^\nu = u^\sigma c^\nu_{\sigma\rho} v^\rho = A^\nu_\rho(u)\, v^\rho,$$

где $A^\nu_\rho(u) = u^\sigma\, c^\nu_{\sigma\rho}$, u — матрица, соответствующая элементу u алгебры. Как нетрудно убедиться, эти матрицы $A^\nu_\rho(u) = u^\sigma c^\nu_{\sigma\rho}$ образуют представление $u \to A$ (u) с законом композиции, являющимся операцией коммутирования:

$$A(u)\, A(v) w = [u,\ [v,\ w]].$$

Это представление называется *присоединенным представлением алгебры Ли.*

Поставим в соответствие двум элементам u и v алгебры Ли число (uv) по формуле (форма Киллинга — Картана)

$$(uv) = \mathrm{tr}\, A(u)\, A(v) = u^\sigma v^\tau c^\mu_{\sigma\rho} c^\rho_{\tau\mu} = u^\sigma v^\tau g_{\sigma\tau}, \qquad (2.60)$$

где A (u) и A (v) — матрицы, соответствующие в присоединенном представлении элементам u и v, а

$$g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma} = c^\mu_{\sigma\rho} c^\rho_{\tau\mu} \qquad (2.61)$$

— симметричный тензор. Он обладает тензорными свойствами и линейно преобразуется при изменении базиса алгебры Ли.

Картан доказал следующую теорему.

Теорема 2.3. *Для того чтобы группа Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\det\, [g_{\sigma\tau}] \neq 0.$$

Следствие 2.2. При выполнении условия (2.61) можно определить дважды контравариантный тензор $g^{\sigma\tau}$:

$$g^{\sigma\tau} g_{\tau\rho} = \delta_{\sigma\rho}.$$

Доказывается, что бесконечно малый элемент da^α ведет себя в групповом пространстве как ковариантный вектор, а длина этого вектора в силу формулы типа (2.46) может быть вычислена по формуле

$$|da|^2 = g_{\mu\nu}\delta a^\mu \delta a^\nu = g_{\mu\nu}\lambda^\mu_\alpha(a)\, \lambda^\nu_\beta(a)\, da^\alpha da^\beta = \tilde{g}_{\alpha\beta}(a)\, da^\alpha da^\beta, \qquad (2.62)$$

где

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(a) = g_{\mu\nu}\lambda^\mu_\alpha(a)\, \lambda^\nu_\beta(a)$$

— ковариантные компоненты метрического тензора в групповом пространстве.

Далее заключаем, что поскольку групповое пространство полупростой группы Ли порядка s обладает метрикой $\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}(a)$, то оно может рассматриваться как n-мерное риманово пространство.

Таким образом, если n-мерное риманово пространство V_n с метрикой g_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ (например, пространственно-временной континуум с $n = 4$) обладает группой движения G_s, являющейся полупростой группой Ли, то, помимо риманова пространства V_n, можно ввести в рассмотрение другое риманово пространство, а именно $\tilde{V}_s$, групповое пространство для группы G_s, обладающее метрикой $\tilde{g}_{\alpha\beta}(a)$, α, $\beta = 1, 2, \ldots, s$. Очевидно, в общем случае эти два риманова пространства совершенно различны; при этом по теореме 2.2 необходимо $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant s$.

Для описания неприводимых представлений полупростых групп Ли важную роль играют так называемые операторы Казимира соответствующей алгебры Ли. Поскольку для полупростых групп Ли всегда существует контравариантный метрический тензор $g^{\alpha\beta}$, то в алгебре Ли можно всегда ввести новый оператор

$$C = g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta, \tag{2.63}$$

обладающий, как нетрудно убедиться, тем важным свойством, что он коммутирует со всеми генераторами:

$$[C, X_\nu] = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Оператор C называется *оператором Казимира алгебры Ли*. Так как оператор C коммутирует со всеми матрицами представления, то в силу леммы Шура [39] он должен быть кратен единичной матрице этого представления, т. е. он диагонален. Постоянное численное значение, принимаемое оператором C для данного представления, удобно использовать в приложениях для характеристики этого представления.

Для данной алгебры Ли группы Ли могут существовать другие однородные формы от операторов X_α, коммутирующие со всеми элементами алгебры Ли. Они также называются операторами Казимира и используются для характеристики представлений.

1. Группа трехмерных вращений $SO(3)$. Определяется как группа вещественных линейных преобразований трехмерного пространства, оставляющих инвариантным интервал

$$ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2},$$

не меняющих ориентации пространства и оставляющих инвариантным расстояние точек от начала координат. Это—компактная простая группа Ли порядка 3. Ее инфинитезимальные генераторы $X_\alpha = \{H_3, H_+, H_-\}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[H_3, H_+] = H_+, \ [H_3, H_-] = -H_-, \ [H_+, H_-] = H_3. \tag{2.64}$$

Можно перейти от этих генераторов к более употребительному базису из эрмитовых операторов трех проекций момента количества движения J_1, J_2, J_3:

$$H_3 = J_3,\ H_+ = \frac{J_1 + iJ_2}{\sqrt{2}},\ H_- = \frac{J_1 - iJ_2}{\sqrt{2}}.$$

Для этих операторов коммутационные соотношения (2.64) перепишутся в виде

$$[J_\alpha, J_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\rho} J_\rho,$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\rho}$ — абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга, нормированный таким образом: $\varepsilon_{123} = 1$.

Метрическим тензором группы вращений будет

$$g_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta},$$

так что оператор Казимира (2.63) запишется в такой форме:

$$C = g^{\alpha\beta}X_\alpha X_\beta = 2(H_3^2 + H_+H_- + H_-H_+) = 2(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) =$$
$$= 2\vec{J}\cdot\vec{J}. \qquad (2.65)$$

Таким образом, для характеристики неприводимых представлений могут быть использованы собственные значения оператора квадрата момента количества движения $\vec{J}\cdot\vec{J}$.

2. Группа n-мерных вращений $SO(n)$, $n \geqslant 2$. Определяется как группа вещественных линейных преобразований n-мерного пространства с интервалом

$$ds^2 = dx^{1^2} + \cdots + dx^{n^2},$$

оставляющих инвариантным расстояние точек от начала координат и не меняющих ориентации пространства.

Это компактная группа Ли порядка $\frac{n(n-1)}{2}$. Коммутационные соотношения для ее $\frac{n(n-1)}{2}$ инфинитезимальных генераторов $J_{\alpha\beta} = -J_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ в стандартной форме можно получить стандартным путем, используя технику так называемой корневой диаграммы, описанной, например, в статье [14]. Таким путем получаем

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\rho\nu}] = i(\delta_{\alpha\nu}J_{\beta\rho} + \delta_{\beta\rho}J_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\rho}J_{\beta\nu} - \delta_{\beta\nu}J_{\alpha\rho}),$$
$$\alpha, \beta, \nu, \rho = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.65\text{a})$$

В частном случае группы $SO(4)$ алгебра (2.65а) принимает в обозначениях

$$J_{12} = M_3,\ J_{23} = M_1,\ J_{31} = M_2,$$
$$J_{41} = N_1,\ J_{42} = N_2,\ J_{43} = N_3$$

следующий вид:

$$[M_j,\ M_k] = i\varepsilon_{jkl}M_l,$$
$$[N_j,\ M_k] = i\varepsilon_{jkl}N_l, \qquad j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3. \qquad (2.66)$$
$$[N_j,\ N_k] = i\varepsilon_{jkl}M_l,$$

В группе SO (4) имеется ровно два оператора Казимира

$$C_1 = \frac{1}{4} J_{\alpha\beta}J_{\alpha\beta},\ C_2 = -\frac{1}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho}J_{\alpha\beta}J_{\nu\rho} \qquad (2.67)$$

(где $\varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho}$ — абсолютно антисимметричный тензор четвертого ранга, $\varepsilon_{1234} = 1$) с собственными значениями соответственно

$$\langle C_1\rangle = k(k+1) + l(l+1),\ \langle C_2\rangle = k(k+1) - l(l+1),$$

где $k, l = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2, \ldots$ Таким образом, всякое неприводимое представление группы SO (4) можно задать этой парой чисел $(k,\ l)$.

Отметим, что четырехмерная группа вращений SO (4) является группой движений трехмерного пространства постоянной положительной кривизны (статического пространства Эйнштейна) *.

3. Собственная группа Лоренца Λ. Определяется как группа вещественных линейных преобразований четырехмерного пространства с интервалом

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} \equiv dx^{0^2} - d\vec{x}^2, \qquad (2.68)$$

оставляющих инвариантными расстояния точек от начала координат, сохраняющих ориентацию пространства и переводящих в себя каждую из двух областей

$$\Gamma^{\pm} = (x^0, \vec{x} \parallel x^{0^2} - \vec{x}^2 > 0,\ x^0 \gtrless 0).$$

Это — некомпактная группа Ли порядка 6. Вводя для ее шести инфинитезимальных генераторов обозначения

$$J_{12} = H_3,\ J_{23} = H_1,\ J_{31} = H_2,$$
$$J_{01} = F_1,\ J_{02} = F_2,\ J_{03} = F_3,$$

алгебру Ли группы Λ можно записать в следующем виде:

$$[H_i,\ H_j] = i\varepsilon_{ijk}H_k,$$
$$[H_i,\ F_j] = i\varepsilon_{ijk}F_k, \qquad (2.69)$$
$$[F_i,\ F_j] = -i\varepsilon_{ijk}H_k.$$

В собственной группе Лоренца Λ имеется ровно два оператора Казимира, имеющих в данном базисе вид

$$C_1 = H_iH_i - F_iF_i,\quad C_2 = H_iF_i \qquad (2.70)$$

---

* См., например, [60, 138].

с собственными значениями, обозначаемыми соответственно

$$\begin{aligned}\langle C_1\rangle &= l_0^2 + l_1^2 - 1,\\ \langle C_2\rangle &= - il_0 l_1,\end{aligned} \tag{2.71}$$

где l_0 — целое или полуцелое число, а l_1 — произвольное комплексное число.

Таким образом, всякое неприводимое представление собственной группы Лоренца Λ можно охарактеризовать парой чисел (l_0, l_1), связанной со значениями операторов Казимира C_1 и C_2 для этого неприводимого представления по формулам (2.71). При этом всякое неприводимое представление, характеризуемое парой чисел (l_0, l_1), содержит унитарные представления группы трехмерных вращений SO (3) с весом $L = l_0$, $l_0 + 1$, $l_0 + 2$, ..., причем каждый такой вес содержится в заданном неприводимом представлении группы Λ один раз.

Неприводимое представление (l_0, l_1) конечномерно, если l_0 и l_1 — одновременно целые или полуцелые и $|l_1| > l_0$. При этом в представлении участвуют все веса группы трехмерных вращений от $L = l_0$ до $L = |l_1| - 1$ включительно. Представления, определяемые такими парами, неунитарны.

В случае унитарного неприводимого представления числа (l_0, l_1) должны удовлетворять одному из следующих условий:

а) l_1 — чисто мнимое, l_0 — произвольное целое или полуцелое $\left(l_0 = \frac{m}{2},\ l_1 = \frac{i\rho}{2}\right)$.

Это основная серия унитарных неприводимых представлений.

б) l_1 — действительное число из интервала [0, 1], $l = 0$ (дополнительная серия унитарных неприводимых представлений).

Собственная группа Лоренца Λ представляет собой подгруппу группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ (3,1), включающей, кроме Λ, еще преобразования всевозможных четырехмерных трансляций четырехмерного пространства с метрикой (2.68), отражение T оси ox^0 и одновременное отражение S трех осей ox^α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Группа Пуанкаре есть группа симметрии псевдоевклидова пространства Минковского (2.68) и играет важную роль в теории относительности (группа Лоренц-инвариантных космологий и группа симметрии уравнений Максвелла — Лоренца).

4. Группа де Ситтера ***SO (4,1)***. Определяется как группа линейных вещественных преобразований четырехмерного пространства, сохраняющих метрику

$$ds^2 = \Phi^2 (r, x^0) (dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}), \tag{2.72}$$

где

$$\Phi (r, x^0) = \left(1 + \frac{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} - x^{0^2}}{4R^2}\right)^{-1}, \quad r \equiv \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}.$$

Будем рассматривать только случай положительной пространственной кривизны. Пространство (2.72) удобно рассматривать как четырехмерное риманово пространство, реализующееся на поверхности сферы постоянного радиуса R в некотором вспомогательном пятимерном «пространстве — времени» с координатами ξ^α, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$. А именно координаты x^i являются стереографическими проекциями координат такой сферы:

$$\xi^{1^2} + \xi^{2^2} + \xi^{3^2} + \xi^{4^2} + \xi^{5^2} = R^2, \ \xi^4 = i\xi^0. \qquad (2.73)$$

При этом координаты x^i связаны с координатами ξ^α посредством формул

$$\gamma^\alpha\xi^\alpha = R\frac{1 + \frac{1}{2R}\gamma^5\gamma^i x^l}{1 - \frac{1}{2R}\gamma^5\gamma^i x^i} = \frac{1 - \frac{1}{4R^2}x^l x^l + \frac{1}{R}\gamma^5\gamma^l x^l}{1 + \frac{4}{R^2}x^l x^i},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$; $x^4 = ix^0$; $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$, а γ^α — пять антикоммутирующих эрмитовых матриц алгебры Дирака

$$\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}.$$

В результате получим для интервала (2.72)

$$-ds^2 = d\xi^\alpha d\xi^\alpha = \Phi^2 dx^i dx^i. \qquad (2.74)$$

Очевидно, интервал (2.74) инвариантен относительно линейных преобразований координат ξ^α, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$, принадлежащих пятимерной группе вращений SO (5). Для пятимерной группы вращений алгебра Ли определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{gathered}[J_{jk}, J_{ls}] = i\delta_{js}J_{kl} + i\delta_{kl}J_{js} - i\delta_{jl}J_{ks} - i\delta_{ks}J_{jl},\\ [\Pi_j, J_{kl}] = i\delta_{jk}\Pi_l - i\delta_{jl}\Pi_k, \\ [\Pi_j, \Pi_l] = -\frac{i}{R^2}J_{jl},\end{gathered} \qquad (2.75)$$

где

$$\Pi_j = \frac{1}{R}J_{5j}, \qquad j, k, l, s = 1, 2, 3, 4.$$

При $R \to \infty$ получаем $\Pi_j \to P_j$, где P_j — оператор четырехмерного импульса, соответствующий четырехмерным трансляциям, так что при этом (2.75) дает алгебру Ли группы Пуанкаре.

Для группы де Ситтера имеем два оператора Казимира:

$$C_1 = -\frac{1}{2R^2}J_{jk}J_{jk} - \Pi_l\Pi_l, \ C_2 = -V_lV_l - \frac{1}{R^2}W_5^2, \qquad (2.76)$$

где ($\varepsilon_{\alpha\beta\rho\mu\nu}$ — абсолютно антисимметричный тензор пятого ранга, $\varepsilon_{12345} = 1$)

$$V_l = -\frac{1}{2}\varepsilon_{5lksq}\Pi_k J_{sq}, \ W_5 = \frac{1}{8}\varepsilon_{lksq}J_{lk}J_{sq}.$$

В пределе $R \to \infty$ операторы Казимира приобретают вид

$$C_1 \to -P_lP_l, \ C_2 \to V_lV_l.$$

Собственными значениями операторов Казимира C_1 и C_2 можно характеризовать всякое неприводимое представление группы де

Ситтера и при $R \to \infty$ эти собственные значения приобретают вид

$$\langle C_1 \rangle \to m^2, \ \langle C_2 \rangle \to m^2 s(s+1), \quad R \to \infty. \tag{2.77}$$

Постоянные m и s называются обычно *массой покоя* и *спином*, характеризующими неприводимое представление группы SO (4, 1).

Группа де Ситтера SO (4, 1) имеет космологическую интерпретацию, поскольку она является группой, оставляющей инвариантной метрику (2.72) четырехмерного пространства — времени с постоянной положительной кривизной. Такое риманово пространство является моделью замкнутой Вселенной, имеющей радиус R. В пределе $R \to \infty$ получаем из (2.72) метрику псевдоевклидова пространства Минковского, группа инвариантности которого есть группа Пуанкаре $\mathcal{P}$ (3, 1).

2.11. *Разложение функции, заданной на группе.* Изучим сначала ортогональные системы функций, возникающие из неприводимых представлений компактных групп. Эти системы функций связаны с матричными элементами таких представлений.

Разобьем множество всех неприводимых унитарных представлений компактной группы G на классы эквивалентных представлений и выберем из каждого класса по одному представлению. Полученная система представлений $\{T_g^\alpha\}$ называется *полной системой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений группы G*. Множество индексов α обозначим через A.

При исследовании функций от элемента g группы Ли G нам понадобится рассматривать интегралы от этих функций по группе (т. е. по всем допустимым значениям существенных параметров $a^\alpha \in \in \mathcal{Y}_s$ рассматриваемой группы Ли). Наиболее приспособленным для теории представлений является так называемое инвариантное интегрирование. *Инвариантный интеграл* для функции $f(g)$ есть интеграл $\int f(g)\, dg$, выбранный так, чтобы выполнялось равенство

$$\int f(gg_0)\, dg = \int f(g)\, dg, \quad \forall\, g_0 \in G \tag{2.78}$$

и условие нормировки

$$\int dg = 1. \tag{2.79}$$

Мера dg, удовлетворяющая условиям (2.78) и (2.79), называется *нормированной инвариантной мерой на группе G*.

Важным для дальнейшего классом функций является класс функций, квадратично интегрируемых по мере dg.

Так, множество измеримых функций $f(g)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 \equiv \int |f(g)|^2\, dg < \infty, \tag{2.80}$$

образуют гильбертово пространство $L_2(G) \equiv \mathcal{L}_2(G)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg.$$

Функции, отличающиеся одна от другой на множестве меры нуль, в $L_2(G)$ отождествляются.

Справедлива следующая теорема.

***Теорема* 2.4.** *Пусть* $\{T_g^\alpha\}$, $\alpha \in A$ *— полная система попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы* G *и пусть размерность представления* T_g^α *равна* d_α, *а его матричные элементы обозначены через* $t_{ij}^\alpha(g)$, $i, j = 1, 2, \dots, d_\alpha$. *Тогда функции*

$$\sqrt{d_\alpha} t_{ij}^\alpha(g), \qquad i, j = 1, 2, \dots, d_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{2.81}$$

образуют полную ортонормированную систему на группе G *относительно нормированной инвариантной меры* dg *на этой группе.*

Таким образом,

$$\int t_{ij}^\alpha(g) t_{mn}^\beta(g)\, dg = 0, \qquad (\alpha, i, j) \neq (\beta, m, n),$$
$$\int |t_{ij}^\alpha(g)|^2 dg = \frac{1}{d_\alpha}. \tag{2.82}$$

Следствие 2.3. Из полноты системы $\{t_{ij}^\alpha(g)\}$ следует, что любая функция $f(g)$ на группе, принадлежащая гильбертову пространству $L_2(G)$, разлагается в ряд Фурье по функциям $t_{ij}^\alpha(g)$

$$f(g) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g), \tag{2.83}$$

сходящийся по норме (2.80) пространства $L_2(G)$.

Коэффициенты Фурье этого ряда вычисляются однозначно по формуле

$$a_{ij}^\alpha = d_\alpha \int f(g) \overline{t_{ij}^\alpha(g)}\, dg \tag{2.84}$$

и при этом выполняется равенство Парсеваля

$$\int |f(g)|^2 dg = \sum_{\alpha \in A} \frac{1}{d_\alpha} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} |a_{ij}^\alpha|^2. \tag{2.85}$$

Замечание 2.12. Сходимость ряда (2.83) по норме (2.80) пространства $L_2(G)$, называемая еще *сходимостью в среднем в* $L_2(G)$, означает следующее. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное множество $A_\varepsilon \subset A$, что

$$\left\| f(g) - \sum_{\alpha \in A_\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a_{ij}^\alpha t_{ij}^\alpha(g) \right\| < \varepsilon, \tag{2.86}$$

где коэффициенты a_{ij}^α вычислены для заданной функции $f(g) \in L_2(G)$ по формулам (2.84). Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ получаем $A_\varepsilon \to A$ в формуле (2.86).

1. Группа трехмерных вращений SO (3). Можно доказать, что для любого неприводимого представления инфинитезимальные генераторы H_+, H_-, H_3 записываются в ортогональном базисе, состоящем из нормированных собственных векторов H_3 (канонический базис), формулами

$$\begin{aligned} H_+f_m &= \alpha_{m+1}f_{m+1}, \\ H_-f_m &= \alpha_m f_{m-1}, \\ H_3f_m &= mf_m, \end{aligned} \tag{2.87}$$

где $m = -l, -l+1, \ldots, l$; l — целое или полуцелое число и $\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$.

Таким образом, всякое неприводимое представление группы вращений определяется некоторым целым или полуцелым числом l. Это означает, что для группы SO (3) множество A в формулах (2.81) — (2.83) состоит только из целых и полуцелых чисел, а размерность неприводимого представления равна $d_\alpha = d_l = 2l + 1$.

Теперь построим матричные элементы $\{t^l_{ij}(g)\}^{2l+1}_{i,j=1}$ представления T^l_g группы SO (3), фигурирующие в теореме 2.4 и следствии 2.3.

Одним из наиболее часто используемых наборов существенных параметров, с помощью которых задается произвольный элемент группы SO (3), есть три угла Эйлера φ_1, θ, φ_2. С помощью этих трех углов всякое вращение $g \in SO$ (3) может быть представлено как произведение трех последовательных вращений трехмерной декартовой системы координат, а именно: вращения g_{φ_1} в положительном направлении на угол φ_1 вокруг оси OZ (в результате чего ось OX примет положение OX'), затем вращения g_θ на угол θ вокруг оси OX' (в результате чего ось OZ примет положение OZ'), и, наконец, вращения g_{φ_2} на угол φ_2 вокруг оси OZ':

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = g_{\varphi_2}g_\theta g_{\varphi_1}.$$

Обозначим матрицы представления, отвечающие каждому из элементов g_{φ_1}, g_θ, g_{φ_2} через T_{φ_1}, T_θ и T_{φ_2}. Тогда в силу свойств представлений справедливо $T_g = T_{\varphi_2}\,T_\theta T_{\varphi_1}$.

Можно показать, что при выборе трех углов Эйлера в качестве существенных параметров группы SO (3) инфинитезимальные генераторы H_+, H_-, H_3 принимают вид следующих дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} H_+ &= H_1 + iH_2 = e^{-i\varphi_2}\left(\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ H_- &= H_1 - iH_2 = e^{i\varphi_2}\left(-\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ H_3 &= i\,\frac{\partial}{\partial\varphi_2}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Используя формулы (2.87) и (2.88), получим, что матрица, отвечающая для неприводимого представления веса l произвольному вращению g с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2, имеет в каноническом базисе вид

$$T^l_g = [T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)], \qquad m, n = -l, -l+1, \ldots, l,$$

где

$$T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_2} p^l_{mn}(\cos\theta)\, e^{-in\varphi_1}, \tag{2.89}$$

$$p^l_{mn}(z) = \frac{(-1)^{l-m}\, i^{n-m}}{2l\,(l-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!\,(l+n)!}{(l+m)!\,(l-n)!}}\,(1-z)^{-\frac{n-m}{2}} \times$$

$$\times (1+z)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{dz^{l-n}} [(1-z)^{l-m}(1+z)^{l+m}].$$

Функции (2.89) называются обобщенными сферическими функциями l-го порядка.

Для дальнейшего нам понадобится разлагать произвольную заданную функцию $F_{l_0}(x)$, значение которой в каждой точке есть величина, преобразующаяся по неприводимому представлению группы вращений веса l_0. Это значит, что в каждой точке заданы $2l_0 + 1$ чисел c_m, $m = -l_0, -l_0+1, \ldots, l_0$, компонентов величины F (т. е. задано поле величины F), которые при вращении g подвергаются линейному преобразованию

$$c'_m = \sum_{n=-l_0}^{l_0} a_{mn}(g)\, c_n, \tag{2.90}$$

где $a_{mn}(g)$ — представление элемента $g \in G$ в базисе $\{c_n\}^{l_0}_{n=-l_0}$.

С иной точки зрения, поле величины $F(x)$ при вращении g преобразуется следующим образом: во-первых, в результате вращения g пространства $\mathcal{X}_3$ в точку x приходит значение величины F, отвечающее до этого точке $g^{-1}x$ и, во-вторых, величина F подвергается преобразованию U_g. Таким образом, при вращении g величина $F(x)$ заменяется величиной $U_g F(g^{-1}x)$, т. е. получаем преобразование T_g поля величин, определенное формулой

$$T_g F(x) = U_g F(g^{-1}x), \tag{2.91}$$

где U_g — матрица неприводимого представления веса l_0, соответствующая вращению g.

Лемма 2.4. *Пусть $F(x) = F(r, \theta, \varphi)$ — поле величины, заданной в пространстве $\mathcal{X}_3 \equiv R^3$ и преобразующейся при произвольном вращении g по неприводимому представлению группы $SO(3)$ веса l_0 по закону (2.91) и пусть при заданном $r = \text{const} > 0$ функция $F(x)$ квадратично интегрируема по мере, сосредоточенной на сфере $S_r = (x \parallel r = \text{const})$, т. е. $F(r = \text{const}, \theta, \varphi) \in L_2(S_r)$.*

Тогда разложение компонентов $\{c_m\}^{l_0}_{m=-l_0}$ этой величины по матричным элементам $T^l_{mn}(g)$ группы вращений получаем так. Величина $F(x)$ в точке $x = \{r, \theta, \varphi\}$ задается сначала ее компонентами $\overset{0}{c}_m(\varphi, \theta; r)$ в каноническом базисе, затем совершается переход к компонентам $c_m(g)$, зависящим от вращения $g = g\left(\varphi, \theta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, *путем действия на величины* $\overset{0}{c}_m\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \theta;\ r\right)$ *преобразованием* U_g, *отвечающим этому вращению. После этого каждая функция* $\tilde{c}_m(g;\ r)=\tilde{c}_m(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2;\ r)=c_m(g^{-1};\ r)$ *разлагается в ряд по элементам m-х строк всех матриц* T_g^l *для всех* $l \geqslant m$:

$$\tilde{c}_m(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2;\ r)=c_m(g^{-1};\ r)=\sum_{l=m}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}a_{mn}^l(r)\,T_{mn}^l\,(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2). \quad (2.92)$$

Лемма 2.4 является реализацией для случая группы трехмерных вращений SO (3) теоремы 2.4 о разложении по полной системе попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений.

Отметим, что объекты, с которыми нам будет необходимо работать ниже, будут тензорами $a_{i_1,\ \dots,\ i_k}$ заданного ранга k относительно группы SO (3). Компоненты $a_{i_1,\ \dots,\ i_k}$ всякого такого тензора можно разложить в сумму величин, преобразующихся по определенным неприводимым представлениям группы вращений в силу того, что произвольное тензорное представление группы является приводимым, а поэтому раскладываемым по неприводимым представлениям группы.

Соответствующий результат для группы SO (3) дается следующей теоремой.

Теорема 2.5. *Всякое тензорное представление ранга* k *группы* SO (3) *раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений весов* $l=0,\ 1,\ 2,\dots,\ l_k$, *причем каждое представление веса* l *в этом разложении встречается с весом* $m_{k,l}\geqslant 0$, *так что для* $0\leqslant k\leqslant 5$ *результат разложения можно записать в виде следующей таблицы, дающей зависимость кратности* $m_{k,l}$ *от* k, l:

Таблица 2.1

k \ l	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	1	1	1			
3	1	3	2	1		
4	3	6	6	3	1	
5	6	15	15	10	4	1

Зависимость кратности $m_{k,l}$ от ранга r и от веса l.

В частности, поскольку прямое произведение двух тензоров ранга k_1 и k_2 есть тензор ранга k_1+k_2, то это тензорное представление ранга k_1+k_2 можно разложить в соответствии с теоремой 2.5 на неприводимые компоненты весов $l=0,\ \dots,\ l_{k_1+k_2}$, после чего воспользоваться леммой 2.4 о разложении неприводимых компонентов произведения по матричным элементам группы вращений T_{mn}^l.

В качестве примера применения теоремы 2.5 получаем, что девятимерное пространство тензоров a_{ik} второго ранга раскладывается в сумму инвариантных подпространств: одномерного пространства тензоров вида $\frac{(a_{11}+a_{22}+a_{33})\,\delta_{ik}}{3}$, трехмерного подпространства антисимметричных $a_{[i,k]}$ тензоров и пятимерного подпространства симметричных тензоров $a_{\{i,k\}}$ со следом, равным нулю *.

2. Группа n-мерных вращений $SO(n)$, $n \geqslant 2$. Для этой компактной группы также применима теорема 2.4 о разложении по полной системе попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, и результаты предыдущего примера (группа $SO(3)$) могут быть обобщены на случай группы $SO(n)$ с произвольным заданным $n \geqslant 2$.

В качестве иллюстрации ограничимся изучением вопроса о разложениях поля скалярной функции F, заданной в пространстве R^n, по неприводимым унитарным представлениям группы $SO(n)$. Для этих целей целесообразно рассмотреть так называемое квазирегулярное представление группы $SO(n)$. Группа $SO(n)$ является транзитивной группой преобразований n-мерной единичной сферы S^{n-1}. Обозначим через $L_2(S^{n-1})$ множество измеримых функций $f(\xi)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 = \int\limits_{S^{n-1}} |f(\xi)|^2\, d\xi < \infty, \tag{2.93}$$

где $d\xi$ — нормированная евклидова мера на сфере S^{n-1}. Это множество образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{S^{n-1}} f_1(\xi)\, \overline{f_2(\xi)}\, d\xi.$$

Представление группы $SO(n)$ в пространстве функций $L_2(S^{n-1})$ называется *квазирегулярным представлением* этой группы.

Пусть $F(\xi)$ — поле функции на сфере S^{n-1}, преобразующейся как скаляр при всяком преобразовании $g \in SO(n)$. Каждому элементу группы $g \in SO(n)$ соответствует оператор T_g в пространстве $L_2(S^{n-1})$, переводящий скалярную функцию $F(\xi)$ в функцию

$$T_g F(\xi) = F(g^{-1}\xi).$$

Важную роль для квазирегулярного представления группы играют функции Ξ^l_K на сфере S^{n-1}:

$$\Xi^l_K(\xi) = \hat{\Xi}^l_K(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = A^l_K \prod_{j=0}^{n-3} c_{k_j-k_{j+1}}^{\frac{n-j-2}{2}+k_{j+1}}(\cos\theta_{n-j-1}) \times$$
$$\times \sin^{k_j+1}\theta_{n-j-1} e^{\pm i k_{n-2}\theta_1}, \tag{2.94}$$

где символ K означает последовательность целых чисел $(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$ таких, что $l \equiv k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-2} \geqslant 0$, c^p_k — многочлены

---

* $a_{[i,k]} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki})$; $\alpha_{\{i,k\}} \equiv \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki})$.

Гегенбауэра, образующие ортогональную систему на отрезке $t \in [-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}$ и нормированные с помощью соотношения

$$\int_{-1}^{1} C_k^p(t)\, C_{k'}^p(t)\, (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi\Gamma(2p+k)\,\delta_{kk'}}{2^{2p-1}k!\,(p+k)\,\Gamma^2(p)}, \qquad (2.95)$$

а постоянные A_K^l в формуле (2.94) находятся из условий нормировки

$$\int_{S^{n-1}} |\Xi_K^l(\xi)|^2\, d\xi = 1. \qquad (2.96)$$

Функции $\Xi_K^l(\xi)$ и $\Xi_{K'}^{l'}(\xi)$, для которых последовательности чисел $(l, K) \equiv (l, k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$ и $(l', K') \equiv (l', k_1', \ldots, \pm k_{n-2}')$ не совпадают, ортогональны на единичной сфере S^{n-1}:

$$\int_{S^{n-1}} \overline{\Xi_K^l(\xi)}\, \Xi_{K'}^{l'}(\xi)\, d\xi = 0, \qquad (l, K) \neq (l', K'). \qquad (2.97)$$

В сферических координатах $x = \{r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}\} \in R^n$ n-мерный оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0, \qquad (2.98)$$

причем оператор Δ_0 действует только на угловые переменные $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ и имеет функции $\Xi_K^l(\xi) = \hat{\Xi}_K^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ в качестве собственных функций:

$$\Delta_0 \Xi_K^l(\xi) = -l(l+n-2)\,\Xi_K^l(\xi). \qquad (2.98a)$$

Лемма 2.5. Функции $\Xi_K^l(\xi)$, *даваемые формулами* (2.94), (2.97), *образуют ортогональный нормированный базис в пространстве* $L_2(S^{n-1})$.

(Этот базис назовем *каноническим*.)

Совокупность $\Xi_K^l(\xi)$ с фокусированным l образует базис неприводимого представления группы $SO(n)$ веса l.

В пространстве $L_2(S^{n-1})$ оператор Δ_0 из (2.98) представляет собой оператор Казимира группы $SO(n)$.

Следствие 2.4. Всякая скалярная относительно преобразований группы $SO(n)$ функция $F(\xi) \in L_2(S^{n-1})$ может быть разложена в сходящийся в среднем (по норме (2.93)) ряд вида

$$F(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{K} a_K^l \Xi_K^l(\xi), \qquad (2.99)$$

где

$$a_K^l = \int_{S^{n-1}} F(\xi)\overline{\Xi_K^l}(\xi)\, d\xi, \qquad (2.100)$$

а $d\xi$ — нормированная евклидова мера на единичной сфере $S^{n-1} \in R^n$.

Замечание 2.13. В частном случае $n = 3$ (т. е. для группы вращений трехмерного пространства) канонический базис $\{\Xi_K^l(\xi)\}$ принимает вид обычных сферических функций:

$$\Xi_K^l(\xi) = \hat{\Xi}_K^l(\varphi,\theta) = \hat{\Xi}_{\pm k_1}^l(\varphi, \theta) = (-1)^{k_1} \sqrt{4\pi}\, Y_l^{\pm k_1}(\theta, \varphi) \quad (2.101)$$

$$(l \geqslant k_1 \geqslant 0).$$

Матричные элементы $t_{KK'}^l(g)$ оператора представления T_g^l можно получить в каноническом базисе как коэффициенты разложения величины $\Xi_K^l(g^{-1}x)$ по столбцу $\{\Xi_{K'}^l(x)\}$:

$$\Xi_K^l(g^{-1}x) = T_g^l \Xi_K^l(x) = \sum_{K'} t_{KK'}^l(g)\, \Xi_{K'}^l(\xi).$$

Используя эти матричные элементы $\{t_{KK'}^l(g)\}$, можно обобщить на группу $SO(n)$ лемму 2.4 о разложении поля произвольной величины, преобразующейся по неприводимому представлению группы $SO(n)$ заданного веса l_0, по матричным элементам представлений $t_{KK'}^l(g)$ этой группы.

Теорема 2.4 и два рассмотренных после нее примера относятся к случаю компактных групп Ли. Для компактных групп Ли собственные значения операторов Казимира группы на инвариантных подпространствах образуют дискретное множество (т. е. спектр операторов Казимира дискретный). Поэтому разложение функции, заданной на компактной группе, по матричным элементам неприводимых унитарных представлений этой группы имеет вид суммы (2.83).

Для случая некомпактных групп Ли операторы Казимира могут иметь для унитарных неприводимых представлений как дискретный, так и непрерывный спектр. Общая теория разложения функции, заданной на некомпактной группе Ли, по матричным элементам унитарных неприводимых представлений этой группы развита пока значительно меньше, чем для случая компактных групп Ли. Достаточно законченные результаты здесь имеются лишь для некоторых конкретных групп Ли, наиболее важных в физике.

3. Собственная группа Лоренца Λ. В последние несколько лет в работах Н. Я. Виленкина, Я. А. Смородинского [40], С. Строма [295, 296, 297], Й. А. Вердиева с сотрудниками [36, 37, 38], Я. А. Смородинского с сотрудниками [42, 43, 169] получены разложения квазирегулярного представления (некомпактной) собственной группы Лоренца Λ по матричным элементам унитарных неприводимых представлений этой группы.

Используя эти разложения, в работах [1, 8] получены разложения решений линейных лоренц-ковариантных уравнений поля (типа уравнений Дирака, уравнений Максвелла — Лоренца) по матричным элементам унитарных неприводимых представлений группы Λ. При этом техника, развитая И. М. Гельфандом, Р. А. Минлосом и З. Я. Шапиро [48] для (компактной) группы вращений SO (3), была обобщена на случай (некомпактной) собственной группы Лоренца Λ.

Приведем некоторые из результатов, полученных С. Стромом [295, 296, 297] и Й. А. Вердиевым с сотрудниками [36, 37, 38, 8, 309] для представлений собственной группы Лоренца Λ, важные для дальнейшего изложения.

Всякое преобразование L собственной группы Лоренца Λ может быть записано как

$$L = R_1 A R_2,$$

где R_1, R_2 — трехмерные вращения, а A — ускорение в определенном направлении (гиперболический поворот). Всякое такое преобразование можно изобразить шестью независимыми параметрами. В качестве первых пяти таких параметров возьмем углы Эйлера φ_1, θ, φ_2, β, γ, а шестого — угол гиперболического поворота a в плоскости x^0x^3.

Лемма 2.6. *Матричный элемент $D^{JJ'}_{MM'}(L)$ оператора T_L, представляющего преобразование L в базисе, в котором $\vec{H}^2$ и H_3 диагональны, для унитарного неприводимого представления основной серии $\left(\frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right)$ можно записать в виде*

$$D^{JJ'}_{MM'}(L) = D^{JJ'}_{MM'}\left(\varphi_1, \theta, \varphi_2, a, \beta, \gamma;\ \frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right) =$$

$$= \sum_{M''=-\min[J,J']}^{\min[J,J']} T^{J}_{MM''}(0, \beta, \gamma)\, \Phi^{(\rho,m)}_{J,M'',J'}(a)\, T^{J'}_{M''M}(\varphi_2, \theta, \varphi_1), \qquad (2.102)$$

где $T^{J}_{MM'}$—матричные элементы $(2J+1)$-мерного унитарного неприводимого представления группы трехмерных вращений (2.89), φ_1, θ, φ_2, β, γ—*параметры трехмерного поворота (углы Эйлера), a—параметр гиперболического поворота в плоскости x^0x^3, а функции $\Phi^{(\rho,m)}_{J,M,J'}$ могут быть получены из уравнений на собственные функции операторов Казимира $C_1 = \vec{H}^2 - \vec{F}^2$, $C_2 = \vec{H}\cdot\vec{F}$:*

$$(\vec{H}^2 - \vec{F}^2)\, D^{JJ'}_{MM'}\left(\varphi_1, \theta, \varphi_2, a, \beta, \gamma;\ \frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{m^2-\rho^2}{4} - 1\right) D^{JJ'}_{MM'}\left(\varphi_1, \theta, \varphi_2, a, \beta, \gamma;\ \frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right);$$

$$(\vec{H}\cdot\vec{F})\, D^{JJ'}_{MM'}\left(\varphi_1, \theta, \varphi_2, a, \beta, \gamma;\ \frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right) =$$

$$= \frac{m\rho}{4} D^{JJ'}_{MM'}\left(\varphi_1, \theta, \varphi_2, a, \beta, \gamma;\ \frac{m}{2}, \frac{i\rho}{2}\right). \qquad (2.103)$$

Записывая инфинитезимальные генераторы H_i, F_i, $i = 1, 2, 3$, собственной группы Лоренца с алгеброй Ли (2.69) через параметры группы φ_1, θ, φ_2, a, β, γ и первые производные по этим параметрам, с помощью (2.103) и рекуррентных соотношений для матричных элементов группы вращений $T^J_{MM'}$ получим систему рекуррентных дифференциальных уравнений относительно функций $\Phi^{(\rho,m)}_{J,M,J'}$. В частности, для функции $\Phi^{(\rho,m)}_{J,\lambda,L}$ с максимальным значением $\lambda = L$ $(L \leqslant J)$ получаем гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + 2(L+1)\operatorname{cth} a\frac{d}{da} - \frac{J(J+1)-L(L+1)}{\operatorname{sh}^2 a} - \right.$$
$$\left. - \frac{im\rho}{2}\operatorname{cth} a + (L+1)^2 + \frac{\rho^2 - m^2}{4}\right]\Phi^{(\rho,m)}_{JLL}(a) = 0. \quad (2.104)$$

Решение этого уравнения следует подчинить требованию ограниченности при $a \to 0$ и условию отображения единичного элемента группы в единичный оператор

$$\Phi^{(\rho,m)}_{JMJ'}(0) = \delta_{JM}.$$

Единственное решение уравнения (2.104), удовлетворяющее этим двум требованиям, имеет вид

$$\Phi^{(\rho,m)}_{JLL}(a) = i^{(J-L)}\left(1 - e^{-2a}\right)^{J-L}\exp\left[-\left(L + 1 - \frac{m}{2} - \frac{i\rho}{2}\right)a\right] \times$$
$$\times F\left(J + 1 - \frac{i\rho}{2},\ J + 1 - \frac{m}{2},\ 2J+2;\quad 1 - e^{-2a}\right), \quad (2.105)$$

Функции $\Phi^{(\rho,m)}_{J,M,L}(a)$ с произвольным $M = -\min[J, L]$, $-\min[J, L] + 1$, ..., $\min[J, L]$ можно получить из функции (2.105) с помощью рекуррентных формул (см., например [295, 36]). Имеет место соотношение

$$\Phi^{(\rho,m)}_{JML}(a) = \overline{\Phi^{(\rho,m)}_{JML}(-a)}. \quad (2.105a)$$

Свойства функций $\Phi^{(\rho,m)}_{J,L,L}(a)$ при $a \to \infty$ и при $\rho \to \infty$ даны в приложении к гл. V.

Функции $\Phi^{(\rho,m)}_{J,M,L}(a)$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\sum_{M=-\min[J,L]}^{\min[J,L]}\int_0^\infty \overline{\Phi^{(\rho',m')}_{JML}(a)}\,\Phi^{(\rho,m)}_{JML}(a)\operatorname{sh}^2 a\,da = N^{(\rho,m)}_{JL}\delta_{mm'}\delta(\rho - \rho'), \quad (2.106)$$
$$m = -2j_0, -2j_0 + 2, \ldots, 2j_0; \quad j_0 \equiv \min[J,L],$$

где $N^{(\rho,m)}_{JL}$ для случая $L > \frac{|m|}{2} + 1$ имеет вид $(J \geqslant L)$

$$N^{(\rho,m)}_{JL} = 2\pi\frac{(J-L)!\,[2(J+1)!]^2\left(L + \frac{|m|}{2}\right)!\left(L - \frac{|m|}{2}\right)!}{(J+L)!\left(J + 1 + \frac{|m|}{2}\right)!\left(J - \frac{|m|}{2}\right)!\left(J + 1 - \frac{|m|}{2}\right)!\,2L!} \times$$
$$\times \prod_{k=\frac{|m|}{2}+1}^{L}\left(\frac{\rho^2}{4} + k^2\right)\left|\frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + \frac{|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + J + 1\right)}\right|^2. \quad (2.107)$$

Матричные элементы собственной группы Лоренца $D^{JJ'}_{MM'}(L)$ при построении базиса квазирегулярного представления группы играют такую же роль, как матричные элементы группы вращений $T^{J}_{MM'}(g)$ для построения базиса квазирегулярного представления группы вращений.

Собственная группа Лоренца Λ действует нетранзитивно в четырехмерном пространстве-времени с интервалом

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}$$

(поскольку далеко не всякую пару точек этого пространства можно перевести друг в друга с помощью преобразований группы Λ). При этом все четырехмерное пространство—время x^i расслаивается на поверхности транзитивности пяти типов:

а) верхние полы двуполостных гиперболоидов

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = \text{const} > 0, \qquad x^0 > 0;$$

б) нижние полы двуполостных гиперболоидов

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = \text{const} > 0, \qquad x^0 < 0;$$

в) световой конус

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = 0;$$

г) однополостные гиперболоиды

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = \text{const} < 0;$$

д) начало координат

$$x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0.$$

Поэтому эти поверхности транзитивности являются однородными пространствами с группой преобразований Λ.

В соответствии с этим следует отдельно строить квазирегулярное представление для двуполостного гиперболоида и для однополостного гиперболоида.

Точку x^i внутри светового конуса можно задавать в сферических координатах:

$$\begin{aligned} x^0 &= \pm r \operatorname{ch} a, && r \in [0, \infty), \\ x^1 &= r \operatorname{sh} a \sin\theta \cos\varphi, && a \in [0, \infty), \\ x^2 &= r \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, && \theta \in [0, \pi), \\ x^3 &= r \operatorname{sh} a \cos\theta, && \varphi \in [0, 2\pi), \end{aligned} \tag{2.108}$$

так что

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = r^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, поле всякой функции $f(x)$ внутри светового конуса можно задавать, используя сферические координаты $f(x) \equiv \hat{f}(r, a, \theta, \varphi)$.

Если при фиксированном значении параметра $r > 0$ и фиксированном знаке временной координаты $x^0 > 0$ ($x^0 < 0$) функция

$\hat{f}(r, a, \theta, \varphi)$ существует во всей области значения $\xi = (a, \theta, \varphi) \in \in [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$, то при фиксированном r и фиксированном знаке x^0 получаем функцию, заданную на верхней (нижней) полé единичного двуполостного гиперболоида.

Обозначим через $L_2(\Omega_+)$ $(L_2(\Omega_-))$ множество измеримых функций $f(\xi)$, заданных на верхней (нижней) полé двуполостного единичного гиперболоида и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\underset{(-)}{+}} = \int\limits_{\underset{(\Omega_-)}{\Omega_+}} |f(\xi)|^2 d\xi < \infty, \tag{2.109}$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на верхней (нижней) полé двуполостного гиперболоида, имеющая вид

$$d\xi = \operatorname{sh}^2 a da.$$

Это множество образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{\underset{(\Omega_-)}{\Omega_+}} f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)} d\xi.$$

Представление собственной группы Лоренца Λ, реализованное в пространстве $L_2(\Omega_+)$ $(L_2(\Omega_-))$, называется *квазирегулярным представлением группы Λ, связанным с верхней (нижней) полой двуполостного гиперболоида.*

Теорема 2.6. *Система*

$$\sum_{M'=-\min[J,J']}^{\min[J,J']} T^J_{MM'}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi^{(\rho,m)}_{JM'J'}(a) \tag{2.110}$$

образует полную ортогональную систему функций в пространстве $L_2(\Omega_+)$ (в пространстве $L_2(\Omega_-)$). При этом условие ортогональности для матричных элементов группы вращений имеет вид

$$\int\limits_0^{2\pi} T^J_{MN}(-\varphi, \theta, \varphi)\, T^{J'}_{M'N'}(-\varphi, \theta, \varphi)\, d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{NN'}, \tag{2.111}$$

а условие ортогональности для функций $\Phi^{(\rho,m)}_{JML}(a)$ имеет вид (2.106), (2.107).

Следствие 2.5. Из теоремы 2.6 вытекает, что для всякой функции $f(\xi) \in L_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$ существует интегральное представление

$$f(\xi) = f(a, \theta, \varphi) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{J'=0}^{\infty} \sum_{M=-J'}^{J'} \sum_{M'=-\min[J,J']}^{\min[J,J']} \int\limits_0^{\infty} a^{(\rho,m)}_{J,M,J'} T^J_{MM'}(-\varphi, \theta, \varphi) \times$$

$$\times \Phi^{(\rho,m)}_{J,M',J'}(a)\, d\rho, \tag{2.112}$$

в котором ядра $a_{J,J',M}^{(\rho,m)}$ вычисляются по формуле

$$a_{J,J',M}^{(\rho,m)} = \frac{2J+1}{4\pi N_{J,J'}^{(\rho,m)}} \sum_{M'} \int_{0}^{2\pi} f(a,\theta,\varphi)\, \overline{\Phi_{J,M',J'}^{(\rho,m)}(a)} \times$$
$$\times \overline{T_{MM'}^{J}(-\varphi,\theta,\varphi)}\, d\varphi \int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta \int_{0}^{\infty} \mathrm{sh}^2 a da. \qquad (2.113)$$

При этом ряд (2.112) сходится в среднем по норме (2.109).

Замечание 2.14. В силу свойств неприводимых (унитарных и неунитарных) представлений собственной группы Лоренца, перечисленных в § 2, п. 2.10, пример 3, получаем, что в частном случае, когда функция $f(\xi)$ преобразуется по конечномерному (неунитарному) неприводимому представлению (l_0, l_1) группы Λ, то в формуле (2.112) суммирование по m, J' и по M' проводится лишь по конечному множеству значений: $J = l_0, l_0 + 1, \ldots, |l_1| - 1$; $m = -J', -J' + 1, \ldots, J'$; $M' = -\min[J, J'], \ldots, \min[J, J']$.

Если же $f(\xi) \in L_2(\underset{(-)}{\Omega_{+}})$ является базисной функцией, принадлежащей каноническому базису неприводимого конечномерного представления собственной группы Лоренца (l_0, l_1), и при этом собственной функцией операторов $\vec{M}^2$ и M_3 с собственными числами соответственно $L(L+1)$ и $\tilde{M}$, $(L = l_0, l_0 + 1, \ldots, |l_1| - 1)$, то формула (2.112) упрощается еще более, поскольку при этом в формуле (2.112) J', M и m могут принимать только такие значения:

$$J' = L; \quad M' = \tilde{M}; \quad m = -L, \ -L+1, \ .. , \ L.$$

Таким образом, в силу того что операторы Казимира (некомпактной) группы Λ для квазирегулярного представления, связанного с двуполостным гиперболоидом, имеют непрерывный спектр, разложение функции $f(\xi) \in L_2(\underset{(-)}{\Omega_{+}})$ имеет вид *интеграла* Фурье по базисным функциям (2.110). В этом проявляется существенное отличие от случая компактной группы G, для которой, согласно теореме 2.4, в силу дискретности спектра операторов Казимира функция $f(g) \in L_2(G)$ разлагается в *ряд* Фурье по базисным функциям. Система функций (2.110) оказывается, таким образом, релятивистским обобщением (на случай собственной группы Лоренца Λ) обобщенных сферических функций $T_{MM'}^{J}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ группы трехмерных вращений $SO(3)$.

Рассмотрим теперь квазирегулярное представление, связанное с однополостным гиперболоидом.

Точку x^i вне светового конуса также можно задавать в сферических координатах

$$x^0 = r\,\mathrm{sh}\,a, \qquad r \in [0, \infty), \ a \in [0, \infty),$$
$$x^1 = r\,\mathrm{ch}\,a \sin\theta \cos\varphi, \qquad \theta \in [0, \pi), \ \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$x^2 = r \operatorname{ch} a \sin\theta \sin\varphi,$$
$$x^3 = r \operatorname{ch} a \cos\theta,$$

так что

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = -r^2 \leqslant 0. \qquad (2.114)$$

Обозначим через $L_2(\Omega_0)$ множество измеримых функций $f(\xi)$, заданных на однополостном единичном гиперболоиде, удовлетворяющих условию

$$\| f \|_0 = \int\limits_{\Omega_0} | f(\xi)|^2 d\xi < \infty, \qquad (2.115)$$

где $d\xi$ — инвариантная мера на однополостном гиперболоиде, имеющая вид $d\xi = \operatorname{ch}^2 a da$. Это множество образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2)_0 = \int\limits_{\Omega_0} f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)} \, d\xi.$$

Представление собственной группы Лоренца Λ, реализованное в пространстве $L_2(\Omega_0)$, называется *квазирегулярным представлением группы* Λ, *связанным с однополостным гиперболоидом.*

Полная система функций для квазирегулярного представления группы на однополостном гиперболоиде связана так же, как и для случая двуполостного гиперболоида, с унитарными представлениями группы Λ. Но, в отличие от двуполостного гиперболоида, для однополостного гиперболоида унитарные представления возникают не только при чисто мнимом $l_1 = \frac{i\rho}{2}$ и $l_0 = \frac{m}{2}$ (непрерывный спектр), но и при целых l_0 и $l_1 = 0$ (дискретный спектр).

Для соответствующей полной системы функций на однополостном гиперболоиде зависимость от углов θ, φ задается так же, как на двуполостном гиперболоиде, матричными элементами представления группы вращения T^l_{mn}, а зависимость от гиперболического угла a определяется унитарными решениями уравнения

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + 2(L+1) \operatorname{th} a \frac{d}{da} + \frac{J(J+1) - L(L+1)}{\operatorname{ch}^2 a} - \right.$$
$$\left. - \frac{im\rho}{2} \operatorname{th} a + (L+1)^2 - \frac{\rho^2 - m^2}{4}\right] \Psi^{(\rho,m)}_{J,L,L}(a) = 0. \qquad (2.116)$$

и рекуррентной формулой

$$\gamma_\lambda \Psi^{(\rho,m)}_{J,\lambda-1,\ L}(a) - \gamma_{\lambda+1} \Psi^{(\rho,m)}_{J,\lambda+1,L}(a) =$$
$$= 2i \operatorname{ch} a \left(\lambda \frac{\partial}{\partial a} + \lambda \operatorname{th} a - i \frac{m\rho}{2}\right) \Psi^{(\rho,m)}_{J,\lambda,L}(a), \qquad (2.117)$$

где

$$\gamma_\lambda \equiv [(J+\lambda)(J-\lambda+1)(L+1)(L-\lambda+1)]^{1/2}.$$

Унитарное решение уравнения (2.116), соответствующее непрерывному спектру $\left(0 \leqslant \rho < \infty,\ -L \leqslant \frac{m}{2} \leqslant L\right)$, может быть записано как аналитическое продолжение матричных элементов $\Phi_{J,L,L}^{(\rho,m)}$ от аргумента $a + \frac{i\pi}{2}$:

$$\Psi_{J,L,L}^{(\rho,m)}(a) = \Phi_{J,L,L}^{(\rho,m)}\left(a + \frac{i\pi}{2}\right) =$$
$$= (1 - \operatorname{th}^2 a)^{\frac{L+1}{2}} \{B(\rho, m, L, J) P^J{}_{\frac{i\rho}{2}, \frac{m}{2}}(\operatorname{th} a) +$$
$$+ B(-\rho, -m, L, J) P^J{}_{-\frac{i\rho}{2}, \frac{m}{2}}(\operatorname{th} a)\}, \qquad (2.118)$$

где*

$$B(\rho, m, L, J) \equiv \pi\Gamma(2J + 2) \exp\left|\frac{i\pi}{2}\left(L + 1 - \frac{m}{2} - \frac{i\rho}{2}\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{i\pi}{2}(J - L)\right| \cdot \left\{2^{L+1}\left[\sin\frac{\pi(m + i\rho)}{2}\right|\Gamma\left(J + \frac{m}{2} + 1\right)\Gamma\left(J + \frac{i\rho}{2} + 1\right)\right\}^{-1}. \qquad (2.119)$$

Для целых J и L унитарное решение уравнения (2.116), соответствующее дискретному спектру $\left(\rho = 0,\ \frac{m}{2} = k \geqslant L\right)$, имеет вид

$$\Psi_{J,L,L}^{(0,m=2k)}(a) = (1 - \operatorname{th}^2 a)^{\frac{L+1}{2}} P_k^J(\operatorname{th} a) \equiv V_{J,L,L}^{(0,2k)}(a).$$

Функции $V_{J,\lambda,L}^{(0,2k)}(a) = V_{J,-\lambda,L}^{(0,2k)}(a)$ для произвольных значений λ можно получить из рекуррентных формул (2.117) для $\rho = 0$.

Для полуцелых L и J уравнения (2 116), (2.117) не имеют унитарных решений, т. е. в этом случае спектр чисто непрерывный. Условие ортогональности для функций $V_{I,\lambda,L}^{(0,2k)}(a)$ будет таким:

$$\sum_{\lambda=-L}^{L} \int V_{J,\lambda,L}^{(0,2k')}(a) V_{J,\lambda,l}^{(0,2k)}(a) \operatorname{ch}^2 a da = N_{JL}^k \delta_{kk'}, \qquad (2.120)$$

где N_{JL}^k для значений $L = 0, 1$ имеет вид

$$N_{J0}^k = 2^{2k} k!(k - 1)! \frac{(J - k)!}{(J + k)!}$$
$$N_{J1}^k = N_{J0}^k \frac{2(k^2 - 1)}{J(J + 1)},$$

а N_{JL}^k для высших значений L можно получить из рекуррентных соотношений (2.117) для $\rho = 0$. Функции $\Phi_{J,\lambda,L}^{(\rho,m)}\left(a + \frac{i\pi}{2}\right)$ и $V_{J,\lambda,L}^{(0,m')}(a)$ ортогональны на единичном однополостном гиперболоиде.

Теорема 2.7. *Пусть функция* $f_{\widetilde{LM}}(\xi) \in L_2(\Omega_0)$ *преобразуется по конечномерному (неунитарному) неприводимому представлению* (l_0, l_1) *группы* Λ *и принадлежит при этом каноническому базису*

---

* $P_{kl}^J(z)$ — функции, связанные с многочленами Якоби (см., например, [41], стр. 133); $P_k^J(z)$ — присоединенные функции Лежандра.

этого представления, являясь собственной функцией операторов $\vec{M}^2$ и M_3, *отвечающей их собственным значениям* $L\,(L+1)$ *и* $\tilde{M}$, $(L = l_0,\ l_0+1,\ \ldots,\ |l_1|-1)$.

Тогда существует интегральное представление

$$f_{L\tilde{M}}(\xi) = f_{L\tilde{M}}(a, \theta, \varphi) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M'=-J}^{J} \sum_{\frac{m}{2}=-L}^{L} \int_0^{\infty} a_{JM'L}^{(\rho,m)} \times$$

$$\times T^J_{M'\tilde{M}}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi^{(\rho,m)}_{J\tilde{M}L}\left(a + \frac{i\pi}{2}\right) d\rho + \tag{2.121}$$

$$+ \sum_{\frac{m}{2} \geqslant L} \sum_{J \geqslant \frac{m}{2}} \sum_{M=-J}^{J} b^{(0,m)}_{JML} T^J_{M\tilde{M}}(-\varphi, \theta, \varphi)\, V^{(0,m)}_{l\tilde{M}L}(a).$$

Если L — полуцелое, то в выражении (2.121) второе слагаемое, содержащее функции $V^{(0,m)}_{J\tilde{M}L}$ и отвечающее дискретному спектру, равно нулю тождественно.

Коэффициенты $a^{(\rho,m)}_{JM'L}$, $b'^{(0,m)}_{lML}$ вычисляются по формулам, аналогичным формулам (2.113), с учетом соотношений ортогональности (2.106), (2.120) и ортогональности функций $\Phi^{(\rho,m)}_{J,\lambda,L}\left(a + \frac{i\pi}{2}\right)$ к функциям $V^{(0,m)}_{J,\lambda,L}(a)$.

4. Группа де Ситтера SO (4,1). Как было показано выше в § 2, п.2.10, пример 4, изучение группы де Ситтера SO (4,1) может быть приведено к изучению группы пятимерных вращений SO (5). Разложение функции заданной на единичной сфере в пятимерном пространстве, по базисным функциям $\Xi^l_K(\xi)$ квазирегулярного представления группы описано в § 2, п 2.11, пример 2

§ 3. Элементы качественной теории дифференциально-функциональных уравнений

Нам будет необходимо рассматривать системы дифференциально-функциональных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial^k u_j(x)}{(\partial x^0)^k} + F_j\Bigg(x;\ u_1(x), \ldots, u_N(x);$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial u_N(x)}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial^{k-1}}{(\partial x^0)^{k-1}} D^s u_1(x), \ldots, \frac{\partial^{k-1}}{(\partial x^0)^{k-1}} D^s u_N(x)\Bigg) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \prod_{k=1}^{N} \int \cdots \int [d\Phi_{j,l,s_k}(y_k;\ x)]\, [D^{s_k} u_k(x - y_k)]^{b_{lk}} = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, N, \quad D^s \equiv \frac{\partial^{s_1+s_2+\cdots+s_n}}{(\partial x^1)^{s_1} \ldots (\partial x^n)^{s_n}}, \tag{3.1}$$

где $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n) \in R^{n+1}$, $y_k \in C^{n+1}$, $\{u_j\}_{j=1}^N$ — N-мерная вектор-функция, $\Phi_{j,l,s_k}(y;\ x)$, j, $l = 1, 2, \ldots, N$, при $x = \text{const} \in$

$\in R^{n+1}$ — некоторая мера, сосредоточенная в ограниченной области Ω_{j,l,s_k} $n+1$-мерного комплексного пространства C^{n+1} (в частности, $\Phi_{j,l,s_k}(y;\ x)$ при $x = \text{const}$ может быть функцией ограниченной вариации, заданной в ограниченной области R_{j,l,s_k} вещественного пространства R^{n+1}), а $F_j(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ — некоторая заданная нелинейная вектор-функция всех своих аргументов, b_{lk} — заданные целые числа.

Очевидно, класс дифференциально-функциональных уравнений (3.1) включает в себя следующие важные для нас классы уравнений.

1. Системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений k-го порядка, разрешимых относительно старших производных

$$\frac{d^k u_j(t)}{dt^k} + F_j\left(t;\ u_1(t),\ \ldots,\ u_N(t);\ \frac{du_1(t)}{dt},\ \ldots,\ \frac{du_N(t)}{\partial t};\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}u_1(t),\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}u_N(t)\right) = 0, \tag{3.2}$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^k u_j(x)}{(\partial x^0)^k} + F_j\left(x,\ u_1(x),\ \ldots,\ u_N(x);\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial x^0},\ \ldots,\ \frac{\partial u_N(x)}{\partial x^0};\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots;\ \frac{\partial^{k-1}}{(\partial x^0)^{k-1}}D^s u_1(x),\ \ldots,\ \frac{\partial^{k-1}}{(\partial x^0)^{k-1}}D^s u_N(x)\right) = 0, \tag{3.3}$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

3. Системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d^k u_j(t)}{dt^k} + F_j\left(t;\ u_1(t),\ \ldots,\ u_N(t);\ \frac{du_1(t)}{dt},\ \ldots,\ \frac{du_N(t)}{dt};\ \ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}u_1(t),\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}u_N(t)\right) +$$
$$+ \int\limits_{a_j}^{b_j} B_j(t,\ u_1(t-\tau),\ \ldots,\ u_k(t-\tau))\, d\Phi_j(\tau;\ t,\ \lambda) = 0, \tag{3.4}$$
$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

где $\Phi_j(\tau, t, \lambda)$ при $t = \text{const}$, $\lambda = \text{const} \in [-\lambda_1, \lambda_1]$ является известной функцией ограниченной вариации, заданной на интервале $[a_j,\ b_j] \subset R^1$, $a_j \leqslant 0 \leqslant b_j$, λ_1— параметр, а $B_j(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ — заданная нелинейная вектор-функция своих аргументов; интеграл в последнем слагаемом в левой части уравнения (3.4) понимается в смысле Стильтьеса.

Система уравнений (3.4) является *системой дифференциальных уравнений k-го порядка с отклоняющимся аргументом.*

4. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом вида (3.1), где $\Phi_{j,l,s_k}(y, x)$, j, $l = 1, 2, \dots, N$ при $x = \mathrm{const} \in R^{n+1}$, являются функциями ограниченной вариации, заданными в ограниченной области $R_{j,l,sk}$ вещественного пространства R^{n+1}; интегралы в последнем слагаемом в левой части уравнения (3.1) понимаются в смысле Стильтьеса.

Ниже приведем некоторые сведения из качественной теории решений уравнений указанных классов, а именно приведем некоторые важнейшие определения и теоремы существования и единственности решений, свойств устойчивости этих решений и укажем ряд методов отыскания решений таких уравнений Эти сведения будут нам необходимы для дальнейшего изложения.

Систематическое изложение этих вопросов можно найти в монографиях А. Пуанкаре [155], А. М. Ляпунова [107], И. Г. Малкина [108], А. Д. Мышкиса [121], К. Беллмана и Р. Кука [12], Н. Н. Красовского [91], Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [17], Ю. А. Митропольского и Д. И. Мартынюка [116], А. А. Мартынюка [112], Д И Мартынюка [113], В. П. Рубаника [161]

3.1 Определение и устойчивость решений задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть E^n — евклидово пространство n-мерных векторов $\vec{x}$ с нормой $|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i x_i}$. Рассмотрим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_j}{dt} = F_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{3.5}$$

где $\vec{x}(t) \in E^n$, $F_j(t, x_1, \dots, x_n)$ — n-мерная нелинейная вектор-функция $(n + 1)$ аргумента, непрерывная в области $D \subset R^{n+1}$. Отыскиваем решение системы (3.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\xi}. \tag{3.6}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что вектор-функция $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ является *решением начальной задачи Коши* (3.5), (3.6) *на интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$, если при заданном $T > 0$ существует такая вещественнозначная вектор-функция $\vec{x}(t, \xi) \in E^n$, которая непрерывна на интервале $t \in [0, T]$, удовлетворяет системе уравнений (3.5) на этом интервале и начальному условию (3.6) при $t = t_0$.

Определение 3.2. Будем называть решение начальной задачи Коши (3.5), (3.6) *устойчивым по Ляпунову (по отношению к возмущениям начальных данных)*, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что будет справедливо неравенство

$$|\vec{x}(t, \xi) - \vec{x}(t, \xi')| < \varepsilon, \quad t \geqslant t_0, \tag{3.7}$$

как только

$$|\vec{\xi}-\vec{\xi}'|<\delta(\varepsilon). \tag{3.8}$$

Если система уравнений (3.5) есть система второго порядка ($n = 2$), то для качественных методов ее исследования можно рассматривать компоненты вектора $\vec{x} \equiv \{x_1, x_2\}$ как координаты точки на плоскости, называемой *фазовой плоскостью*, а точка (x_1, x_2) на этой плоскости называется *фазовой точкой*. Движение $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ совершается в фазовой плоскости по некоторой линии, называемой *фазовой траекторией* (или *траекторией*), соответствующей решению $x(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.5) с начальными условиями (3.6). Топология в фазовой плоскости есть топология евклидового пространства E^2. Введем в этой плоскости обычное определение ρ-окрестности $u_\rho(A)$ ограниченного множества A на фазовой плоскости.

Определение 3.3. Будем говорить, что фазовая траектория L_ξ, соответствующая решению $\vec{x}(t, \xi)$ начальной задачи (3.5), (3.6) на интервале $t \in [t_0, \infty)$, является *орбитально устойчивой*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства

$$|\vec{\xi}_1-\vec{\xi}|<\delta(\varepsilon) \tag{3.9}$$

на интервале $t \in [t_0, \infty)$ вытекает соотношение

$$L_{\xi_1} \subset u_\varepsilon(L_\xi), \quad t \in [t_0, \infty). \tag{3.10}$$

Определение 3.4. Устойчивое по Ляпунову решение $\vec{x}(t, \xi)$ начальной задачи Коши (3.5), (3.6) называется *асимптотически устойчивым*, если можно указать такое $\delta > 0$, что из

$$|\vec{\xi}-\vec{\xi}'|<\delta \tag{3.11}$$

вытекает

$$\lim_{t\to\infty} |\vec{x}(t, \xi) - \vec{x}(t, \xi')| = 0. \tag{3.12}$$

Определение 3.4 а. При заданных оценках величин $\lambda > 0$, $A > 0$ решение $\vec{x}(t, \vec{\xi})$ начальной задачи Коши (3.5) (3.6) называется *технически устойчивым* на заданном интервале $t \in [t_0, t_0 + T] \equiv J$, если выполняется неравенство $|\vec{x}(t, \vec{\xi}) - \vec{x}(t, \vec{\xi}')| < A$, $\forall t \in J$, как только $|\vec{\xi}-\vec{\xi}'| < \lambda$. Такую устойчивость назовем (λ, A, J)-устойчивостью.

3.2. Фазовая плоскость и особые точки обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему двух квазилинейных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — заданные нелинейные функции переменных x и y.

Исключая отсюда t, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} . \qquad (3.14)$$

В соответствии с изложенным выше, введем в рассмотрение для системы уравнений (3.13) плоскость с координатами (x, y), называемую фазовой плоскостью системы уравнений (3.13). Всякому непрерывно дифференцируемому вещественному решению уравнения (3.13) $(x, y) \in C^1$ будет соответствовать на фазовой плоскости кривая, называемая фазовой траекторией. Уравнение всякой фазовой траектории описывается дифференциальным уравнением первого порядка (3.14). Дальнейшие сведения о фазовых траекториях системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений (3.13) можно найти в книге А. А. Андронова, Е. А. Леонтовича, И. И. Гордона, А. Г. Майера [7].

Заметим, что правая часть уравнения (3.14) становится неопределенной в тех фазовых точках, в которых правые части уравнений (3.13) обращаются в нуль.

Фазовые точки, в которых выполняется условие

$$P(x, y) = Q(x, y) = 0,$$

называются *особыми точками системы дифференциальных уравнений* (3.13).

Оказывается, если знать поведение фазовых траекторий в окрестности всех особых точек системы уравнений (3.13), то можно затем представить качественный характер фазовых траекторий во всей фазовой плоскости, не решая самой системы (3.13). Ниже укажем один метод исследования поведения фазовых траекторий системы уравнений (3.13) вблизи особых точек.

Пусть (x_0, y_0) — особая точка системы уравнений (3.13), в которых функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитичны по обеим переменным. Заменой переменных

$$x = x_0 + u, \quad y = y_0 + v$$

приводим систему уравнений (3.13) к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au + bv + P_2(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= cu + dv + Q_2(u, v), \end{aligned} \qquad (3.15)$$

где постоянные коэффициенты a, b, c, d и функции $P_2(u, v)$, $Q_2(u, v)$, начинающиеся членами не ниже второго порядка малости по совокупности переменных, получены из разложений правых частей уравнений (3.13) в окрестности особой точки $x = x_0$, $y = y_0$.

Рассмотрим один частный случай уравнений (3.13), а именно такой, при котором уравнения (3.15) вблизи особой точки (x_0, y_0) принимают следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = -\lambda v + U(x, y),$$
$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + V(x, y), \tag{3.16}$$

где λ — вещественное число, а U, V — известные нелинейные функции, начинающиеся членами не ниже второго порядка по совокупности переменных.

Перейдем в уравнениях (3.16) к полярным координатам r и θ по формулам

$$u = r\cos\theta, \quad v = r\sin\theta. \tag{3.17}$$

Уравнения (3.16) примут при этом вид

$$\frac{dr}{dt} = U(r\cos\theta, \ r\sin\theta)\cos\theta + V(r\cos\theta, \ r\sin\theta)\sin\theta \equiv rR(r, \theta),$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda - \frac{1}{r}U(r\cos\theta, \ r\sin\theta)\sin\theta + \tag{3.18}$$
$$+\frac{1}{r}V(r\cos\theta, \ r\sin\theta)\cos\theta \equiv \lambda + \Theta(r, \theta),$$

где $R(r, \theta)$, $\Theta(r, \theta)$ — функции переменных r и θ, разлагающиеся в ряды по степеням r, сходящиеся при достаточно малом r и обращающиеся в нуль при $r = 0$. Коэффициенты этих разложений являются периодическими функциями θ периода 2π.

Исключая из уравнений (3.18) t, получаем

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{rR}{\lambda + \Theta} \equiv \sum_{l=2}^{\infty} r^l R_l(\theta), \tag{3.19}$$

где ряд, стоящий в право' части уравнения (3.19), сходится при достаточно малом r, причем коэффициенты $R_l(\theta)$, $l=2, 3, \ldots$, этого ряда являются полиномами относительно $\cos\theta$ и $\sin\theta$. Уравнение (3.19) имеет тривиальное решение $r = 0$, т. е. одна из фазовых траекторий состоит из начала координат. Так как правая часть уравнения (3.19) аналитична в окрестности начала координат, то через каждую точку этой окрестности на основании теоремы существования решений дифференциальных уравнений (см. п. 3.3) проходит одна и только одна фазовая траектория. Отсюда вытекает, что ни одна фазовая траектория, выходящая из какой-либо точки окрестности начала координат $r = 0$, не пересекает этой точки.

В силу аналитичности правой части уравнения (3.19) получаем, что любое решение $r = r(\theta, b)$ этого уравнения, определяемое начальным условием

$$r(0, b) = b, \tag{3.20}$$

может быть разложено в ряд в окрестности точки $b = 0$:

$$r(\theta, b) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\theta) b^k, \tag{3.21}$$

сходяшейся равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$, если $|b|$ достаточно малó.

Подставляя (3.21) в правую часть (3.19), получаем

$$\sum_{l=2}^{\infty} R_l(\theta)\left[\sum_{k=1}^{\infty} r_k(\theta)\,b^k\right]^l \equiv \sum_{k=2}^{\infty} b^k F_k(\theta), \tag{3.22}$$

так что все функции $R_k(\theta)$, $F_k(\theta)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ являются полиномами от $\cos\theta$ и $\sin\theta$.

Ряд (3.22) сходится равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$ для достаточно малых $|b|$. Подставляя разложение (3.21) в левую и правую части уравнения (3.19), с учетом (3.22) получаем систему дифференциальных уравнений для $r_j(\theta)$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$, решение которых, удовлетворяющее вытекающим из (3.20) начальным условиям

$$r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = r_3(0) = \cdots = 0,$$

имеет вид

$$\begin{aligned} r_1 &= 1,\\ r_2 &= \int_0^{\vartheta} F_2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\theta} R_2(\theta)\,d\theta,\\ r_3 &= \int_0^{\theta} F_3(\theta)\,d\theta = \int_0^{\theta} [R_3(\theta) + 2R_2(\theta)\,r_2(\theta)]\,d\theta, \qquad (3.23)\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ r_k &= \int_0^{\theta} F_k(\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

Допустим, что все функции $r_k = r_k(\theta)$ $(k = 2, 3, \ldots)$, составленные по формулам (3.17) — (3.23) для системы уравнений (3.16), оказываются периодическими. Это означает, что все фазовые траектории для этой системы, лежащие в достаточно малой окрестности начала координат $r = 0$ замкнуты и окружают начало координат. Начало координат в таком случае называется *особой точкой типа центр*.

Рассмотрим другой случай. А именно: пусть не все функции r_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ из (3.23) получаются периодическими, так что $r_m(\theta)$ — первая непериодическая функция в разложении (3.21). Легко установить, что при этом эта функция имеет вид

$$r_m = h\theta + \varphi(\theta), \quad h = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_m(\theta)\,d\theta. \tag{3.24}$$

Можно показать, что при $h < 0$ $(h > 0)$ все фазовые траектории, лежащие в достаточно малой окрестности начала координат, будут при $\theta \to +\infty$ $(\theta \to -\infty)$ асимптотически стремиться к началу координат, навиваясь по спирали на начало координат. В обоих случаях при $h \neq 0$ начало координат назовем *особой точкой типа фокус*.

Если $h < 0$, то эта особая точка *асимптотически при* $\theta \to +\infty$ *устойчива* в соответствии с определением 3.4. Если $h > 0$, особая точка фокус, очевидно, *вполне неустойчива*.

Итак, мы рассмотрели некоторые виды особых точек на примере системы уравнений (3.16). В случае системы уравнений общего типа (3.15) могут встречаться, кроме особых точек типа центр либо типа фокус, иные особые точки. Укажем критерии, при которых появляется та или иная особая точка.

Предложение 3.1. Пусть правые части $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ уравнений (3.13) имеют простой нуль в точке $x = x_0$, $y = y_0$ и аналитичны

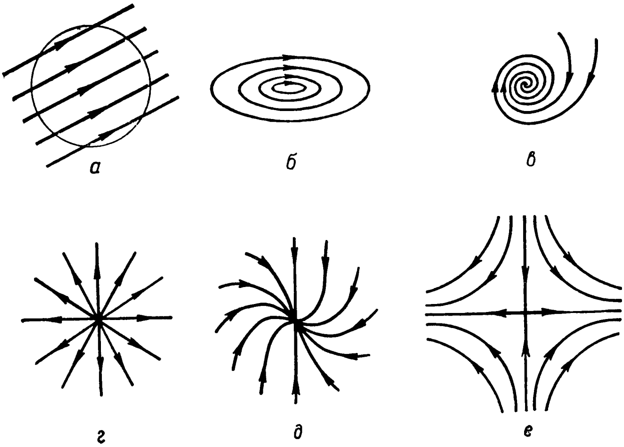


Рис. 1. Фазовые траектории вблизи регулярной точки (*а*) и вблизи особых точек типа центр (*б*), фокус (*в*), узел (*г*), (*д*) и седло (*е*).

в этой точке, так что для достаточно малых $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ сходятся ряды

$$\begin{aligned} P(x_0 + u,\ y_0 + v) &= \sum_{\substack{i=0\\(i+k\geqslant 1)}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}u^i u^k \equiv au + bv + P_2(u, v), \\ Q(x_0 + u,\ y_0 + v) &= \sum_{\substack{i=0\\(i+k\geqslant 1)}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q_{ik}u^i v^k \equiv cu + dv + Q_2(u, v). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Тогда особая точка x_0, y_0 называется *особой точкой типа*

а) *центр*, если $(a - d)^2 + 4bc < 0$, $a + d = 0$;

б) *фокус*, если $(a - d)^2 + 4bc < 0$, $a + d \neq 0$;

$$\begin{cases} a + d < 0 & \text{(устойчивый фокус);} \\ a + d > 0 & \text{(неустойчивый фокус);} \end{cases}$$

в) *узел*, если $(a - d)^2 + 4bc = 0$, либо, если $(a - d^2) + 4bc > 0$, $bc - ad < 0$,

$$\begin{cases} a + d < 0 & \text{(устойчивый узел);} \\ a + d > 0 & \text{(неустойчивый узел);} \end{cases}$$

г) *седло*, если $(a - d)^2 + 4bc > 0$, $bc - ad > 0$.

Поведение фазовых траекторий в окрестности этих особых точек изображено на рис. 1.

Систематическое исследование особых точек систем дифференциальных уравнений (3.13) и изучение устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в монографиях А. Пуанкаре [155], А. М. Ляпунова [107], Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [17], И. Г. Малкина [108].

3.3. Существование и единственность решений уравнений с частными производными. Рассмотрим систему уравнений с частными производными (3.3) вида

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{(\partial x^0)^{k_i}} = F_i\left(x, u_1, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^{\alpha_0}}{(\partial x^0)^{\alpha_0}} D^\alpha u_j, \dots\right), \qquad (3.26)$$

$$u_i = u_i(x), \quad x \equiv (x^0, \vec{x}) \in R^{n+1} \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant k_i, \quad \alpha_0 \leqslant k_i - 1, \qquad (3.27)$$

$$D^\alpha \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}}{(\partial x^1)^{\alpha_1}(\partial x^2)^{\alpha_2}\dots(\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

Система дифференциальных уравнений (3.26), для которой выполняются условия (3.27), называется *нормальной относительно переменной* x^0.

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной x^i $(i = 1, 2, \dots, n)$; волновое уравнение, помимо этого, нормально относительно переменной x^0.

Для нормальной относительно x^0 системы уравнений (3.26) поставим следующую задачу Коши: отыскать решение $u_1, u_2, \dots, u_N$ системы (3.26), удовлетворяющее начальным условиям при $x^0 = \overset{0}{x}_0$:

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{(\partial x^0)^k}\right|_{x^0=\overset{0}{x}_0} = \varphi_{ik}(\vec{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_i - 1 \qquad (3.28)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\varphi_{ik}(\vec{x})$ — заданные в некоторой области $G \subset R^n$ функции.

Теорема 3.1 (Коши — Ковалевской). *Если все функции* $\varphi_{ik}(\vec{x})$ *аналитичны в некоторой окрестности точки* $\vec{x}_0$ *и все функции* $F_i\left(x, u_1, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^{\alpha_0}}{(\partial x^0)^{\alpha_0}} D^\alpha u_j, \dots\right)$ *аналитичны в некоторой окрестности точки*

$$(\overset{0}{x}_0, \vec{x}_0, \dots, D^\alpha \varphi_{j\alpha_0}(\vec{x}_0), \dots), \qquad (3.29)$$

то задача Коши (3.26) — (3.28) *имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(\overset{0}{x}_0, \vec{x}_0)$, *и притом единственное в классе аналитических функций.*

3.4. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Классификация и постановка основной начальной задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом общего вида

$$\Phi(\tau, Y(\tau); \quad \frac{dY(\tau)}{d\tau}, \ldots, \frac{d^{m_0}Y(\tau)}{d\tau^{m_0}}, \int\limits_{a_0}^{b_0} Y(\tau + \xi\Delta_0(\tau))\, d\eta_0(\xi),$$

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\left[\frac{dY(\tau + \xi\Delta_1(\tau))}{d\tau}\right] d\eta_1(\xi), \ \ldots, \int\limits_{a_m}^{b_m}\left[\frac{d^mY(\tau + \xi\Delta_m(\tau))}{d\tau^m}\right] d\eta_m(\xi)) = 0, \tag{3.30}$$

где $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_{m+m_0+3})$—заданная нелинейная функция аргументов $z_1, z_2, \ldots, z_{m+m_0+3}$; $\eta_i(\xi)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m)$—известная функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [a_i, b_i] \subset R^1$ и непрерывная справа; $\Delta_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$,— известные непрерывные функции от τ, заданные в некоторой области $D_1 \supset D$.

Предположим, что на интервале $t \in D \subset R^1$, где ищется решение, существует наибольшее отклонение, определяемое как

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant m} |b_i\Delta_i(\tau)| \equiv h_0(\tau), \quad \tau \in D.$$

Обозначим $t(\tau) \equiv \tau + h_0(\tau)$ Пусть $\frac{dt(\tau)}{d\tau} > 0$. $\tau \in D$. Тогда, переходя от переменного τ к переменному t можно в принципе свести уравнение (3.30) к виду $[Y(\tau) = Y(\tau(t)) \equiv y(t)]$:

$$y^{(m_0)}(t) = f\Big(t, y(t), \ldots, y^{(m_0-1)}(t), \int\limits_{-c_0}^{0} y(t + \xi\nu_0(t))\, d\rho_0(\xi), \ldots$$

$$\ldots, \int\limits_{-c_m}^{0} \frac{d^my(t + \xi\nu_m(t))}{dt^m}\, d\rho_m(\xi)\Big), \tag{3.31}$$

где $f(z_1, z_2, \ldots)$ — известная нелинейная функция своих аргументов; $\rho_i(\xi)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$— известная функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-c_i, 0]$; $c_i > 0$ — известные постоянные; $\nu_i(t) \geqslant 0$— известные функции переменного t. Таким образом, уравнение (3.31) содержит только отрицательные отклонения аргумента.

Обозначим

$$\lambda = m_0 - m$$

Определение 3.5. Уравнения (3.31), для которых $\lambda > 0$, называются *уравнениями запаздывающего типа* или *уравнениями с запаздываниями аргумента*. Уравнения (3.31), для которых $\lambda = 0$, называются *уравнениями нейтрального типа*. Уравнения (3.31), для которых $\lambda < 0$, называются *уравнениями опережающего типа*.

Рассмотрим постановку основной начальной задачи для уравнения (3.31) запаздывающего и нейтрального типов.

Основная начальная задача для уравнения запаздывающего типа (3.31) ставится так. Отыскивается решение уравнения (3.31) с $m_0 > m$ при $t > 0$ с начальными условиями

$$\frac{d^l y(t)}{dt^l} = \varphi_l(t) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0],$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots, m_0 - 1, \tag{3.32}$$

где

$$\Delta = \inf \left(\Delta_0 \,\|\, \Delta_0 \geqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \sup_{t \in [-\Delta_0, 0]} [c_j \nu_j(t)]\right), \tag{3.33}$$

т. е. Δ — наименьшее из всех тех чисел $\{\Delta_0\}$, для которых выполняется неравенство

$$\Delta_0 \geqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \sup_{t \in [-\Delta_0, 0]} [c_j \nu_j(t)].$$

Определение 3.6. Будем говорить, что *функция* $y(t) = y(t; \varphi)$ *является решением задачи* (3.31), (3.32) *с* $m_0 > m$ *на интервале* $t \in [0, T]$, если существует при заданном $T > 0$ такая вещественнозначная функция $y(t; \varphi)$, которая непрерывна вместе с $(m_0 - 1)$-й производной на интервале $t \in [0, T]$ и удовлетворяет уравнению (3.31) с $m_0 > m$ на этом интервале и начальному условию (3.32) на начальном множестве $t \in [-\Delta, 0]$. Тем самым такое решение по формуле

$$y(t + \xi; \varphi) \equiv y(t + \xi) = y_t(\xi), \quad \xi \in [-\Delta, 0]$$

для фиксированного $t \in [0, T]$ определяет элемент пространства $C[-\Delta, 0]$.

Выберем в пространстве $C[-\Delta, 0]$ норму $|\cdot|$ с помощью соотношения

$$|\varphi| = \sup_{\xi \in [-\Delta, 0]} \sqrt{\sum_{l=0}^{m_0-1} |\varphi_l(\xi)|^2}. \tag{3.34}$$

Для уравнения нейтрального типа (3.31) с $m_0 = m$ основная начальная задача ставится следующим образом. Отыскивается решение уравнения (3.31) с $m_0 = m$ при $t > 0$ с начальными условиями

$$\frac{d^l y(t)}{dt^l} = \varphi_l(t) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0], \quad l = 0, 1, 2, \ldots, m, \tag{3.35}$$

и дополнительными условиями

$$\varphi_m(0) = f\Bigg(0, \varphi_0(0), \ldots, \varphi_{m-1}(0),$$
$$\int_{-c_0}^{0} \varphi_0(\xi \nu_0(0))\, d\rho_0(\xi), \ldots, \int_{-c_m}^{0} \varphi_m(\xi \nu_m(0))\, d\rho_m(\xi)\Bigg), \tag{3.36}$$

где по-прежнему Δ определяется формулой (3.33).

Определение 3.7. Будем говорить, что *функция* $y(t) = y(t;\ \varphi)$ *является решением задачи* (3.31), (3.35), (3.36) с $m_0 = m$ *на интервале* $t \in [0,\ T]$, если существует при заданном $T > 0$ такая вещественнозначная функция $y(t;\ \varphi)$, которая непрерывна вместе с $(m-1)$-й производной на интервале $t \in [0,\ T]$ и удовлетворяет уравнению (3.31) с $m_0 = m$ на этом интервале, начальному условию (3.35) на начальном множестве $t \in [-\Delta,\ 0]$ и дополнительному условию (3.36) в точке $t = 0$.

Тем самым такое решение по формуле

$$y(t+\xi;\ \varphi) \equiv y(t+\xi) = y_t(\xi),\quad \xi \in [-\Delta,\ 0]$$

для фиксированного $t \in [0,\ T]$ определяет элемент пространства $C[-\Delta,\ 0]$.

Приведем теорему существования и единственности решения основной начальной задачи для уравнения запаздывающего типа (3.31) с $m_0 > m$. Эта теорема доказывается методом последовательных приближений для интегрального уравнения, которому эквивалентна основная начальная задача (3.31), (3.32) с $m_0 > m$.

Теорема 3.2. *Пусть правая часть уравнения запаздывающего типа* (3.31) *с* $m_0 > m$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{m_0+m}) - f(z_0',\ z_1',\ z_2',\ \ldots,\ z_{m_0+m}')| \leqslant \leqslant \lambda \left[\sum_{l=0}^{m_0+m} |z_l - z_l'|\right] \tag{3.37}$$

в шаре

$$N_c = \left(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{m_0+m} \,\middle\|\, \sum_{l=0}^{m_0+m} |z_l| < c\right). \tag{3.38}$$

Пусть C_1 *означает максимум (непрерывной) функции* $|f(z_0,\ \ldots,\ z_{m_0+m})|$ *в шаре* N_c:

$$C_1 = \sup_{(z_0,\ldots,z_{m_0+m}) \in N_c} |f(z_0,\ \ldots,\ z_{m_0+m})|.$$

Пусть для заданной функции $\varphi(t) = (\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_{m_0-1}) \in C[-\Delta,\ 0]$

$$m_\varphi \equiv |\varphi| = \sup_{t \in [-\Delta,\, 0]} \sqrt{\sum_{l=0}^{m_0-1} |\varphi_l(t)|^2}.$$

Тогда если $2m_\varphi < c$, *то на отрезке* $t \in [0,\ C_2]$, *где* $C_2 < < (c - 2m_\varphi)\frac{1}{2C_1}$, *существует одно и только одно непрерывное вместе с* (m_0-1)*-й производной решение* $y(t;\ \varphi)$ *уравнения* (3.31) с $m_0 > m$ *и с начальными условиями* (3.32).

Методом шагов можно с помощью теоремы 3.2 построить единственное непрерывное решение основной начальной задачи (3.31), (3.32) с $m_0 > m$ на любом конечном интервале $t \in [0,\ T]$.

В одном важном частном случае, когда правая часть уравнения (3.31) с $m_0 > 0$ линейна и автономна, можно глобальное единственное непрерывное решение представить в виде определенных интегралов от начальных функций.

Пусть правая часть уравнения (3.31) $f(t, z_0, \ldots, z_{m+m_0})$ — линейная функция каждого переменного $z_0, \ldots, z_{m+m_0}$, не зависящая явно от t, а функции $\nu_0(t), \ldots, \nu_m(t)$, фигурирующие в правой части уравнения (3.31), не зависят от времени и положительны. Тогда уравнение запаздывающего типа (3.31) с $m_0 > m$ можно переписать как систему m_0 уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами и постоянными распределенными запаздываниями

$$\dot{x}(t) + Bx(t) + \int_{-\Delta}^{0} x(t+\xi)\, dR(\xi) = 0, \qquad (3.39)$$

где Δ дается формулой (3.33),

$$x(t) = \left\{ y(t),\ \frac{dy(t)}{dt}, \ \ldots, \ \frac{d^{m_0-1}y(t)}{dt^{m_0-1}} \right\}$$

— искомая вектор-функция, B — известная матрица $m_0 \times m_0$ с постоянными коэффициентами, а $R(\xi)$ — известная матрица $m_0 \times m_0$, коэффициенты которой являются известными функциями ограниченной вариации, заданными на интервале $\xi \in [-\Delta, 0]$ и непрерывными справа.

Для того чтобы сформулировать теорему о представлении решения основной начальной задачи для уравнения (3.39), приведем некоторые вспомогательные результаты из теории аналитических функций, касающиеся свойств выражений типа

$$\det \left| sI + B + \int_{-\Delta}^{0} e^{s\xi} dR(\xi) \right|,$$

составленных из параметров уравнений (3.39).

3.5. Методы отыскания нулей квазиполиномов. Рассмотрим систему уравнений с отклоняющимся аргументом в векторной форме вида

$$\sum_{j=0}^{k} [A_j x(t-\varkappa_j) + B_j x(t-\varkappa_j)] = 0, \qquad (3.40)$$

где $0 = \varkappa_0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_k$ — заданные постоянные, A_j, B_j — постоянные $(n \times n)$-матрицы.

Выражение

$$h(s) \equiv \det \left[\sum_{j=0}^{k} (A_j s e^{-\varkappa_j s} + B_j e^{-\varkappa_j s}) \right] = 0, \qquad (3.41)$$

составленное для параметров уравнения (3.40), называется *характеристическим уравнением системы* (3.40).

Будучи домноженной на $e^{n\varkappa_k}$, левая часть соотношения (3.41) примет вид целой функции такой формы:

$$f(s) = \sum_{j=0}^{k} p_j(s)\, e^{\beta_j s}, \qquad (3.42)$$

где $0 = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$ — известные постоянные, а $p_j(s)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ — полиномы по переменной s порядка не выше n с постоянными коэффициентами.

Целые функции общего вида (3.42) с постоянными неотрицательными числами $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$ и полиномиальными функциями $p_j(s)$ будем называть *квазиполиномами*.

Нас будут интересовать поведение квазиполинома (3.42) в комплексной плоскости переменного $s = \sigma + i\rho$.

Предложение 3.2. При достаточно больших $|s|$ нули квазиполинома (3.42) совпадают асимптотически при $|s| \to \infty$ с нулями его функции сравнения

$$g(s) = \sum_{j=0}^{k} \hat{p}_j s^{m_j} e^{\beta_j s}, \tag{3.43}$$

где

$$p_j(s) = \hat{p}_j s^{m_j} \left[1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right], \quad |s| \to \infty \quad \hat{p}_j = \text{const}, \; j = 0, 1, \ldots, k. \tag{3.44}$$

Систематическое исследование квазиполиномов вида (3.40) можно найти в монографии Р. Беллмана и К. Кука [12].

Будем интересоваться корнями характеристического уравнения системы (3.40), называемыми *характеристическими корнями* или *корнями системы* (3.40). Нули выражения $h(s)$, очевидно, совпадают с нулями выражения $h(s)\, e^{n\varkappa s}$.

Чтобы представить потом расположение нулей квазиполинома (3.43) графически, построим так называемую диаграмму распределения для квазиполинома (3.43).

Для этого сделаем следующее:

а) на плоскости (β, m) нанесем все точки W_j с координатами (β_j, m_j) из (3.43);

б) проведем через некоторые из точек W_j ломаную, имеющую вершины только в точках W_j и выпуклую кверху, причем такую, чтобы все W_j легли либо на ломаной, либо под нею;

в) последовательные отрезки прямой, из которых состоит такая ломаная, обозначим через $L_1, L_2, \ldots, L_r$, нумеруя их в порядке возрастания β_j. Угловой коэффициент отрезка прямой L_j обозначим через μ_j. Полученная ломаная называется *диаграммой распределения для квазиполинома* (3.43).

Далее, построим в комплексной плоскости s ряд криволинейных полос $V_1, V_2, \ldots, V_r$, определенных неравенствами

$$V_j = (s \| \, |\operatorname{Re}(s + \mu_j \ln s)| \leqslant C_1), \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. *Кривая* $\operatorname{Re}(s + m \ln s) = C$, $m \neq 0$, *на плоскости* s *обладает следующими свойствами:*

а) *она симметрична относительно действительной оси;*

б) *если точка* s *лежит на кривой, то при* $|s| \to \infty$ *имеем*

$$\left|\frac{\operatorname{Im} s}{\operatorname{Re} s}\right| \to \infty \text{ и } |\arg s| \to \frac{\pi}{2};$$

в) *рассматриваемая кривая асимптотически приближается к кривой*

$$\operatorname{Re} s + m \ln |\operatorname{Im} s| = C; \tag{3.45}$$

г) *если* $m > 0$, *то кривая целиком лежит в левой полуплоскости и* $\operatorname{Re} s \underset{|s|\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$;

д) *если* $m < 0$, *то кривая целиком лежит в правой полуплоскости и* $\operatorname{Re} s \underset{|s|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Пользуясь леммой 3.1, можно представить расположение полос V_i в комплексной плоскости s. Каждая полоса V_i с $\mu_i \neq 0$ ограничена кривыми типа, рассмотренного в лемме 3.1, как это показано на рис. 2.

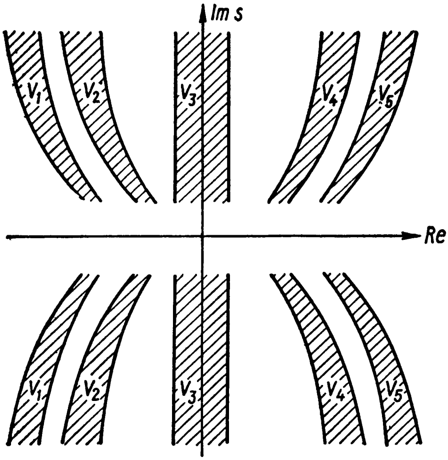


Рис. 2. Примеры полос запаздывающего, (V_1, V_2), нейтрального (V_3) и опережающего (V_4, V_5) типов.

Причем в зависимости от знака μ_i назовем V_i *полосой*

а) *запаздывающего типа*, если $\mu_i > 0$;

б) *нейтрального типа*, если $\mu_i = 0$;

в) *опережающего типа*, если $\mu_i < 0$.

При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. *Все асимптотические нули (т. е. нули с достаточно большим* $|s|$) *всякого квазиполинома* (3.42) *лежат в полосах* V_i.

Точное выражение для асимптотических нулей квазиполинома (3.42) некоторого частного вида дается следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Рассмотрим функции вида*

$$g(s) = \sum_{j=0}^{k} \hat{p}_j \left[1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right] s^{m_j} e^{\beta_j s}, \tag{3.46}$$

где $\hat{p}_j \neq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$; $0 = \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_k$ *и* m_j — *целые числа и такие, что*

$$m_j = \nu\beta_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k$$

для некоторого действительного числа ν.

Если $\nu \neq 0$, *то нули функции* (3.46) *асимптотически лежат вдоль конечного числа кривых* $|s^\nu e^s| = \mathrm{const}$ *типа, описанного в лемме* 3.1.

Нули с большими модулями принадлежат одной из цепей нулей, имеющих вид

$$s = m\left(\ln|w| - \ln\left|2\pi rm + m\arg w \mp \frac{m\pi}{2}\right|\right) +$$

$$+ o(s) + im\left[2r\pi + \arg w \mp \frac{\pi}{2}\right] + io(s), \tag{3.47}$$

где $o(s)$ *означает*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{o(s)}{|s|} = 0,$$

r, m *— натуральные числа,* w *— один из корней уравнения*

$$\sum_{j=0}^{n} \hat{p}_j w^{m_j} = 0. \tag{3.48}$$

Для наших целей будут также полезны следующие три теоремы.

Теорема 3.5. *Достаточным условием для того, чтобы все цепи корней системы* (3.40) *были запаздывающего или нейтрального типа, является условие* $\det A_0 \neq 0$.

Теорема 3.6. *Достаточным условием для того, чтобы все цепи корней системы* (3.40) *были запаздывающего типа, является условие, что* $\det A_0 \neq 0$, *тогда как все матрицы* $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = 0$.

Теорема 3.7. *Пусть* $f(s)$ *— квазиполином вида*

$$f(s) = \sum_{j=0}^{k} p_j(s)\, e^{\beta_j s}.$$

Для любого достаточно малого числа q *существуют последовательность замкнутых контуров* C_l $(l = 1, 2, \ldots)$ *и положительное число* l_0 *такие, что*

а) *контур* C_1 *охватывает начало координат;*

б) $C_l \subset C_{l+1}$ $(l = 1, 2, \ldots)$;

в) *контуры* C_l *расположены по крайней мере на расстоянии* $d > 0$ *от множества всех нулей функции* $f(s)$; *это означает, что если точка* s *лежит на некотором контуре, а* s_n *есть нуль, то*

$$\inf_{s, s_n} |s - s_n| = d > 0;$$

г) *для* $l \geqslant l_0$ *контур* C_l *проходит вдоль окружности* $|s| = ql$, *если* $s \overline{\in} \bigcup_r V_r$; *если же* $s \in V_r$, *то контур* C_l *расположен между окружностями*

$$|s| = (l-1)q \text{ и } |s| = (l+1)q;$$

д) *общая длина частей контура* C_l *внутри* $\bigcup_r V_r$ *ограничена при* $l \to \infty$;

е) *если* $l \geqslant l_0$, *то число нулей функции* $g(s)$ *между контурами* C_l *и* C_{l+1} *не более* $2k$.

Теперь можно сформулировать теорему о представлении единственного непрерывного решения уравнения в векторной форме (3.39) с запаздыванием аргумента.

Теорема 3.8. *Пусть $x(t) \equiv \vec{x}(t)$ — единственное непрерывное решение системы уравнений в векторной форме* (3.39) *с начальными условиями*

$$\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0] \tag{3.49}$$

и пусть (в векторной форме)

$$P(s) \equiv \vec{P}(s) = \varphi(0) + \int_0^\Delta [\dot{\varphi}(t) + B\varphi(t)] e^{-st} dt +$$

$$+ \int_{-\Delta}^0 e^{\xi s} \int_0^{\Delta+\xi} e^{-st} dt \varphi(t) \, dR(\xi). \tag{3.50}$$

Тогда при $t > \Delta$ справедливо соотношение

$$\vec{x}(t) \equiv x(t) = \lim_{l \to \infty} \sum_{C_l} \operatorname{res} [e^{st} H^{-1}(s) P(s)] = \lim_{l \to \infty} \sum_{C_l} e^{s_r t} \vec{P}_r(t), \tag{3.51}$$

где

$$H(s) = s \cdot I + B + \int_{-\Delta}^0 e^{\xi s} dR(\xi), \tag{3.52}$$

$e^{s_r t} \vec{P}_r(t)$ *— вычет функции* $e^{st} H^{-1}(s) P(s)$ *в нуле* s_r *определителя* $\det H(s)$, *а последовательность контуров* $\{C_l\}_{l=0}^{\infty}$ *выбирается так же, как описано в теореме* 3.7.

Сходимость к пределу (3.51) *равномерна по* $t \in [\Delta, \infty)$. *Функция* $\vec{P}_r(t)$ *есть векторный многочлен степени, меньшей кратности нуля* s_r.

3.6. Виды устойчивости и периодические решения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Приведем определения некоторых видов устойчивости решений уравнений с отклоняющимся аргументом, являющихся обобщением соответствующих определений 3.1 — 3.4 для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение запаздывающего типа (3.31) с $m_0 > m$ можно переписать в более общей форме как систему уравнений в векторной форме

$$\frac{dx_l(t)}{dt} = f_i\left(t, \int_{-b_1}^0 x_1(t + \xi\Delta_1(t)) \, d\rho_1(\xi), \ \ldots, \int_{-b_n}^0 x_n(t + \xi\Delta_n(t)) \, d\rho_n(\xi)\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.53}$$

где $f(t, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — заданная нелинейная вектор-функция своих аргументов; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — неотрицательные постоянные;

$\rho_j(\xi)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — известная функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-b_j, 0]$; $\Delta_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — заданные неотрицательные функции. Интегралы в правой части (3.53) понимаются в смысле Стильтьеса.

Обозначим

$$\Delta \equiv \inf \left(\Delta_0 \,\|\, \Delta_0 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left[\sup_{t \in [-\Delta_0, 0]} b_j \Delta_j(t) \right]\right).$$

Предположим, что существует на интервале $t \in [0, T]$ непрерывное решение системы уравнений (3.53) с начальными условиями

$$x_i(t) = \varphi_i(t) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0], \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.54}$$

под которым понимаем функцию $\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \varphi)$ непрерывную на интервале $[0, T]$ и удовлетворяющую уравнению (3.54) на этом интервале и начальному условию (3.54) на интервале $t \in [-\Delta, 0]$.

Определение 3.8. Решение $\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \varphi)$ системы уравнений запаздывающего типа (3.53) с начальными условиями (3.54) называется *устойчивым по отношению к возмущениям на начальном множестве* $[-\Delta, 0]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякой начальной вектор-функции $\vec{\varphi}'(t) = (\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t)) \in C[-\Delta, 0]$, удовлетворяющей условию

$$\sqrt{\sum_{l=1}^{n} |\varphi_l(t) - \varphi_l'(t)|^2} < \delta(\varepsilon), \quad t \in [-\Delta, 0], \tag{3.55}$$

решение $x(t; \varphi')$ при всех $t > 0$ будет удовлетворять неравенству

$$|\vec{x}(t; \varphi) - \vec{x}(t; \varphi')| \equiv \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |x_l(t; \varphi) - x_l(t; \varphi')|^2} < \varepsilon. \tag{3.56}$$

Уравнение нейтрального типа (3.31) с $m_0 = m$ можно переписать в более общей форме как систему уравнений в векторной форме:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, \int_{-b_1}^{0} x_1(t + \xi\Delta_1(t))d\rho_1(\xi), \ldots, \int_{-b_n}^{0} x_n(t + \xi\Delta_n(t))\,d\rho_n(\xi),\right.$$

$$\left.\int_{-c_1}^{0} \frac{dx_1(t + \xi\nu_1(t))}{dt}\,d\eta_1(\xi), \ldots, \int_{-c_n}^{0} \frac{dx_n(t + \xi\nu_n(t))}{dt}\,d\eta_n(\xi)\right), \tag{3.57}$$

где $f_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$, $i = 1,2, \ldots, n$, — заданная нелинейная функция своих аргументов; $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$—заданные неотрицательные постоянные; $\rho_j(\xi), \eta_j(\xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$,—известные функции ограниченной вариации, заданные на интервалах $\xi \in [-b_j, 0]$ и $\xi \in [-c_j, 0]$ соответственно; $\Delta_j(t)$, $\nu_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$,— известные неотрицательные функции. Интегралы в правой части (3.57) понимаются в смысле Стильтьеса.

Обозначим

$$\Delta \equiv \inf\,(\Delta_0 \,\|\, \Delta_0 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\ [\sup_{t \in [-\Delta_0, 0]} b_j \Delta_j\,(t),\ \sup_{t \in [-\Delta_0, 0]} c_j \nu_j\,(t)]).$$

Предположим, что существует на интервале $t \in [0,\ T]$ *непрерывное решение системы уравнений* (3.57) с начальными условиями

$$x_i\,(t) = \varphi_i\,(t) \in C\,[-\Delta,\ 0],$$

$$\frac{dx_i\,(t)}{dt} = \psi_i\,(t) \in C\,[-\Delta,\ 0],\ t \in [-\Delta,\ 0],\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3.58}$$

и с дополнительными условиями

$$\psi_i\,(0) = f_i\Bigl(0,\ \int\limits_{-b_1}^{0} \varphi_1\,(\xi\Delta_1\,(0))\,d\rho_1\,(\xi),\ \ldots,\ \int\limits_{-b_n}^{0} \varphi_n\,(\xi\Delta_n\,(0))\,d\rho_n\,(\xi),$$
$$\int\limits_{-c_1}^{0} \psi_1\,(\xi\nu_1\,(0))\,d\eta_1\,(\xi),\ \ldots,\ \int\limits_{-c_n}^{0} \psi_n\,(\xi\nu_n\,(0))\,d\eta_n\,(\xi)\Bigr), \tag{3.59}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

под которым понимаем функцию $\vec{x}\,(t) = \vec{x}\,(t;\ \varphi,\ \psi)$, непрерывную на интервале $[0,\ T]$ и удовлетворяющую уравнению (3.57) на этом интервале, начальному условию (3.58) на интервале $t \in [-\Delta,\ 0]$ и дополнительному условию (3.59).

Определение 3.9. Решение $\vec{x}\,(t) = \vec{x}\,(t;\ \varphi,\ \psi)$ системы уравнений нейтрального типа (3.57) с начальными условиями (3.58) и дополнительным условием (3.59) называется *устойчивым по отношению к возмущениям на начальном множестве* $[-\Delta,\ 0]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta\,(\varepsilon) > 0$, что для всяких начальных функций $\vec{\varphi}'\,(t) = (\varphi_1'\,(t),\ \ldots,\ \varphi_n'\,(t)) \in C\,[-\Delta,\ 0]$ и $\vec{\psi}'\,(t) = (\psi_1'\,(t), \ldots, \psi_n'(t)) \in C\,[-\Delta,\ 0]$, удовлетворяющих условиям

$$\sqrt{\sum_{l=1}^{n} |\varphi_l\,(t) - \varphi_l'\,(t)|^2} + \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |\psi_l\,(t) - \psi_l'\,(t)|^2} < \delta\,(\varepsilon), \tag{3.60}$$
$$t \in [-\Delta,\ 0],$$

решение $x\,(t;\ \varphi',\ \psi')$ при всех $t > 0$ будет удовлетворять неравенству

$$|\vec{x}\,(t;\ \varphi,\ \psi) - \vec{x}\,(t;\ \varphi',\ \psi')| + \left|\frac{d\vec{x}\,(t;\ \varphi,\ \psi)}{dt} - \frac{d\vec{x}\,(t;\ \varphi',\ \psi')}{dt}\right| \equiv$$
$$\equiv \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |x_l\,(t;\ \varphi,\ \psi) - x_l\,(t;\ \varphi',\ \psi')|^2} +$$
$$+ \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \left|\frac{dx_l\,(t;\ \varphi,\ \psi)}{dt} - \frac{dx_l\,(t,\ \varphi',\ \psi')}{dt}\right|^2} < \varepsilon. \tag{3.61}$$

Определение 3.10. Устойчивое решение $x(t;\ \varphi)$ уравнения запаздывающего типа (3.53) называется *асимптотически устойчивым по отношению к возмущениям на начальном множестве,* если для любой непрерывной на начальном множестве вектор-функции $\vec{\varphi}'(t) \in C[-\Delta, 0]$ из неравенства (3.55) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty} |\vec{x}(t;\ \varphi) - \vec{x}(t;\ \varphi')| = 0. \qquad (3.62)$$

Определение 3.11. Устойчивое решение $x(t;\ \varphi, \psi)$ уравнения нейтрального типа (3.57) называется *асимптотически устойчивым по отношению к возмущениям на начальном множестве,* если для любых непрерывных при $t \in [-\Delta, 0]$ вектор-функций $\vec{\varphi}'(t) \in C[-\Delta, 0]$, $\vec{\psi}'(t) \in C[-\Delta, 0]$ из неравенства (3.60) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \left[|\vec{x}(t;\ \varphi, \psi) - \vec{x}(t;\ \varphi', \psi')| + \left| \frac{d\vec{x}(t;\ \varphi, \psi)}{dt} - \frac{d\vec{x}(t;\ \varphi', \psi')}{dt} \right| \right] = 0. \qquad (3.63)$$

Особый интерес представляют периодические решения уравнений с отклоняющимся аргументом. Приведем результаты о периодических решениях системы квазилинейных уравнений запаздывающего типа, полученные С. Н. Шимановым [205, 206].

Рассмотрим систему уравнений в векторной форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) + gf(x(t),\ x(t-\tau), g), \qquad (3.64)$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$; A, B — постоянные $n \times n$-матрицы; τ — постоянное положительное запаздывание. Вектор-функция $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ предполагается дифференцируемой по всем аргументам $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ в некоторой области D изменения первых $2n$ переменных при $|g| < g_0$, где g_0 — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим наряду с уравнением (3.64) так называемое *порождающее уравнение*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\tau) \qquad (3.65)$$

с теми же параметрами, что и в уравнении (3.64). Допустим, что характеристическое уравнение системы (3.65)

$$\det[A + Be^{-s\tau} - sI] = 0 \qquad (3.66)$$

имеет корни $\pm iN_j\omega$, где N_j — целые числа или нуль, а ω — некоторое (вещественное) число. Предложим, что все эти корни простые и что по крайней мере одно из N_j отлично от нуля.

Лемма 3.2. *Пусть характеристическое уравнение* (3.66) *порождающего уравнения* (3.65) *имеет корни, лежащие на мнимой оси, вида*

$$s_j^{\pm} = \pm iN_j\omega, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.67}$$

где $N_j > 0$ — *натуральные числа,* $\omega = \overline{\omega}$, *причем все эти корни простые.*

Тогда самое общее периодическое решение порождающего уравнения можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} M_j \cos N_j\omega t + \sum_{j=1}^{k-1} M_{j+k} \sin N_j\omega t \equiv \sum_{i=1}^{2k-1} M_i\varphi_i(t). \tag{3.68}$$

Выясним, при каких условиях система уравнений (3.64) допускает периодическое решение, обращающееся при $g = 0$ в порождающее решение (3.68). В силу автономности исходной системы (3.64) период искомого периодического решения будет, вообще говоря, отличаться от периода порождающего решения и иметь вид

$$T = T(g) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + g\alpha(g)), \tag{3.69}$$

где $\alpha(g)$ — неизвестная величина, подлежащая определению. С учетом этого сделаем замену переменного

$$t_1 = \frac{t}{1 + g\alpha(g)} \tag{3.70}$$

и рассмотрим вспомогательную систему уравнений вида

$$\frac{dx(t_1)}{dt_1} = Ax(t_1) + Bx(t_1 - \tau') + g[Ax(t_1) + Bx(t_1 - \tau')]\alpha(g) +$$
$$+ gf(x(t_1), x(t_1 - \tau'), g)(1 + g\alpha) + \sum_{j=1}^{2k} \varphi_j(t_1) W_j, \tag{3.71}$$

где периодические функции $\{\varphi_j\}_{j=1}^{2k}$ определены формулой (3.68),

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + g\alpha(g)},$$

а W_j — постоянные, которые будут определены ниже.

Теорема 3.9. *Система уравнений* (3.71) *допускает периодическое с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ *решение вида*

$$x(t_1, M_1, \ldots, M_{2k-1}, g\alpha, g) = \sum_{i=1}^{2k-1} M_i\varphi_i(t_1) +$$
$$+ gx_*(t_1, M_1, \ldots, M_{2k-1}, g\alpha, g), \tag{3.72}$$

которое при $g = 0$ *обращается в порождающее решение*

$$x_0 = \sum_{i=1}^{2k-1} M_i\varphi_i(t), \tag{3.73}$$

принадлежащее области D при $|M_i - M_i^*| \leqslant H$, $i = 1, 2, \ldots, 2k$, *где* M_i^*, $H > 0$ — *некоторые постоянные.*

Существуют положительные числа $h \leqslant H$, ε_1, h_1 *такие, что функция* $x_*(t_1, M_1, \ldots, M_{2k-1}, g\alpha(g), g)$ *в области*

$$|M_i - M_i^*| \leqslant h, \ |g| \leqslant g_1, \ |\alpha| \leqslant h_1$$

допускает непрерывные частные производные по M_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k - 1)$, α, g.

При этом постоянные W_i $(i = 1, 2, \ldots, 2k)$, *соответствующие периодическому решению* (3.72) *уравнения* (3.71) *определяются уравнениями*

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \{Bx(t_1 - \tau') - Bx(t_1 - \tau) + g[Ax(t_1) + Bx(t_1 - \tau')]\alpha(g) + \\ + gf(x(t_1), x(t_1 - \tau'), g)[1 + g\alpha(g)]\} \psi_j(t_1)\,dt_1 + \\ + \sum_{l=1}^{2k} d_{lj} W_l = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2k), \tag{3.74}$$

где $\{\psi_j(t)\}_{j=1}^{2k}$ — *периодические решения уравнения, сопряженного порождающему уравнению* (3.65).

Пусть далее

$$P_j(M_1, \ldots, M_{2k-1}, g\alpha, g) \equiv \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Big\{[Bx(t_1 - \tau') - Bx(t - \tau)]\frac{1}{g} + \\ + \alpha g[Ax_*(t_1) + Bx_*(t_1 - \tau')] + f(x(t_1), x(t_1 - \tau'), g) \times \\ \times [1 + g\alpha(g)]\Big\} \psi_j(t_1)\,dt_1 + \alpha(g) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [Bx_0(t_1 - \tau') - \\ - Bx_0(t_1 - \tau)] \psi_j(t_1)\,dt_1, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2k, \tag{3.75}$$

$$\sum_{l=1}^{2k-1} A_{lj} M_l = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} [Ax_0(t_1) + Bx_0(t_1 - \tau)] \psi_j(t_1)\,dt_1, \tag{3.76}$$

где x_0 — порождающее решение вида (3.73), а ψ_j — периодические решения системы, сопряженной порождающей системе (3.65), и обозначим

$$Q_j(\alpha, M) \equiv P_j(M_1, \ldots, M_{2k-1}, g\alpha, g) + \\ + \alpha(g) \sum_{l=1}^{2k-1} A_{lj} M_l + \sum_{l=1}^{2k} d_{lj} W_l, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2k. \tag{3.77}$$

Перейдем теперь к вопросу о необходимых условиях существования периодических решений системы автономных уравнений с запаздыванием (3.64).

Лемма 3.3. *Для того чтобы система уравнений* (3.64) *обладала периодическим решением, обращающимся при* $g = 0$ *в порождающее решение*

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{2k-1} M_i^* \varphi_i(t), \tag{3.78}$$

необходимо, чтобы выполнялись соотношения $(\alpha(g = 0) \equiv \alpha^*)$

$$Q_j^*(\alpha^*, M^*) \equiv \sum_{l=1}^{2k-1} A_{lj} M_l^* \alpha^* + P_j(M_1^*, \ldots, M_{2k-1}^*, 0, 0) = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, 2k. \tag{3.79}$$

Как следствие теоремы существования неявной функции получаем следующую теорему.

Теорема 3.10. *Пусть постоянные* $M_1^*, \ldots, M_{2k-1}^*, \alpha^*$ *удовлетворяют системе* (3.79) *и выполняется условие*

$$\left. \frac{\partial (Q_1^*, \ldots, Q_{2k}^*)}{\partial (M_1, \ldots, M_{2k-1}, \alpha)} \right|_{M_i = M_i^*, \alpha = \alpha^*} \neq 0. \tag{3.80}$$

Тогда система (3.64) *допускает единственное периодическое решение с периодом* $T(g) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + g\alpha(g))$, $|\alpha(0)| < \infty$, *которое при* $g = 0$ *обращается в порождающее решение* (3.78) *с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$.

3.7. Применение операционного исчисления для представления решений дифференциально-функциональных уравнений. Приведем некоторые основные определения и теоремы, касающиеся преобразования Лапласа. Систематическое изложение методов операционного исчисления и, в частности, преобразования Лапласа можно найти в книгах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [95] и И. З. Штокало [207].

Определение 3.12. Будем называть *оригиналом* такую комплексную функцию $f(t)$ от вещественной переменной t, которая удовлетворяет следующим трем условиям.

1. Функция $f(t)$ однозначна и непрерывна вместе со своими производными до n-го порядка включительно для всех значений t, за исключением тех, в которых она и ее производные имеют разрывы первого рода, причем точек разрыва в каждом конечном интервале изменения t имеется конечное число.

2. Функция $f(t)$ возрастает медленнее некоторой экспоненциальной функции, т. е. всегда можно указать такие не зависящие от t положительные величины M и a, что при любом $t > 0$ выполняется неравенство

$$|f(t)| < Me^{at}; \tag{3.81}$$

постоянная a называется *показателем роста функции* $f(t)$.

3. Функция $f(t)$ тождественно равна нулю для всех значений $t < 0$.

Рассмотрим теперь интеграл Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt, \tag{3.82}$$

где $p = \sigma + i\rho$ — комплексная величина.

Теорема 3.11. *Если функция $f(t)$ является оригиналом в соответствии с определением* 3.12, *то ее изображение $F(p)$ определено для всех значений p, вещественная часть которых превосходит показатель роста a функции $f(t)$, и является аналитической функцией при указанных значениях p.*

Следствие 3.1. Когда действительная часть переменной p стремится к бесконечности, то изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ стремится к нулю.

Теорема 3.12. *Если функция $f(t)$ является оригиналом в соответствии с определением* 3.12 *и если для функции $F(p)$ выполняется соотношение* (3.82), *то в любой точке, в которой $f(t)$ непрерывна, справедливо равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)\, e^{pt} dp, \tag{3.83}$$

причем указанный интеграл взят вдоль любой прямой, для точек которой $\operatorname{Re} p = \sigma > a$, *где a — показатель роста функции $f(t)$, и понимается в смысле*

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p)\, e^{pt} dp = \lim_{\omega \to \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} F(p)\, e^{pt} dp.$$

Определение 3.13. Функция $F(p)$, связанная с оригиналом $f(t)$ посредством формулы (3.82), называется *изображением по Лапласу оригинала $f(t)$* и записывается так:

$$f(t) \fallingdotseq F(p).$$

Теорема 3.13. *Преобразование по Лапласу обладает свойством линейности и однородности, т. е. справедливы формулы*

$$f(bt) \fallingdotseq \frac{1}{b} F\left(\frac{p}{b}\right), \tag{3.84}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p). \tag{3.85}$$

Теорема 3.14 (дифференцирование оригинала). *Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$ и если взять новым оригиналом производную n-го порядка от функции $f(t)$, то справедлива формула*

$$f^{(n)}(t) \fallingdotseq p^n \left[F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{p^{k+1}} \right], \tag{3.86}$$

где в случае разрывов первого рода в точке $t = 0$

$$f^{(k)}(0) = f^k(+0), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{3.87}$$

Теорема 3.15 (дифференцирование изображения). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и если новым изображением взять производную n-го порядка от $F(p)$, то*

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t). \tag{3.88}$$

Теорема 3.16 (интеграл от оригинала). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и если в качестве нового оригинала взять*

$$\int\limits_0^t dt_n \int\limits_0^{t_n} dt_{n-1}, \ \ldots, \int\limits_0^{t_2} f(t_1)\, dt_1,$$

то справедливо

$$\int\limits_0^t dt_n \int\limits_0^{t_n} dt_{n-1}, \ \ldots, \int\limits_0^{t_2} f(t_1)\, dt_1 \risingdotseq \frac{F(p)}{p}. \tag{3.89}$$

Теорема 3.17 (интеграл от изображения). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и если интеграл $\int\limits_p^\infty F(p')\, dp'$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$, являющейся для него оригиналом.*

Теорема 3.18 (сдвиг аргумента оригинала). *Если $f(t)$ — оригинал, имеющий изображение по Лапласу $F(p)$, то для любого $\tau > 0$ выполняется символическое соотношение*

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p). \tag{3.90}$$

Теорема 3.19 (сдвиг аргумента изображения). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любой постоянной p_0 выполняется символическое соотношение*

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p-p_0). \tag{3.91}$$

Теорема 3.20 (свертка оригинала). *Произведение двух изображений $F_1(p)$* и *$F_2(p)$ является также изображением и определяется символическим равенством*

$$F_1(p)\, F_2(p) \fallingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{3.92}$$

Теорема 3.21 (умножение оригиналов). *Если $f_1(t)$* и *$f_2(t)$ являются оригиналами с показателями роста соответственно a_1* и *a_2, а $F_1(p)$, $F_2(p)$ — соответствующие изображения этих оригиналов, то произведение $f_1(t)\, f_2(t)$ удовлетворяет символическому равенству*

$$f_1(t)\, f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F_1(q)\, F_2(p-q)\, dq, \tag{3.93}$$

где $\operatorname{Re} q = \sigma > a_1$ и $\operatorname{Re} p > a_2 + \sigma$.

Теорема 3.22 (теорема разложения для случая кратных корней). *Пусть изображение $F(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию*

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_n p^n} \qquad (m < n) \tag{3.94}$$

и пусть корни знаменателя $F_2(p)$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ будут кратными с кратностями, соответственно равными $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, причем $\sum\limits_{j=1}^{k} \mu_j = n$. Тогда соответствующий оригинал находится по формуле

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \fallingdotseq f(t) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{\mu_l} \frac{B_l^{(\mu_l - j)}(p_l)}{(\mu_l - j)!} \cdot \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_l t}, \tag{3.95}$$

где

$$B_l(p) \equiv \frac{F_1(p)}{F_2(p)} (p - p_l)^{\mu_l}.$$

Лемма 3.4. *Пусть A_0, B_0, B_1 — постоянные $(n \times n)$-матрицы, $\tau > 0$.*

Тогда все корни p_l уравнения

$$\det (A_0 p + B_0 + B_1 e^{-p\tau}) = 0, \tag{3.96}$$

принадлежащие комплексной плоскости $p = \sigma + i\rho$, лежат слева от некоторой вертикальной прямой

$$\operatorname{Re} p = c. \tag{3.97}$$

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и стационарными распределенными запаздываниями:

$$\sum_{q=-s}^{s} e^{-iqt} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\Delta}^{0} [dA_{qk}(\theta)] \frac{d^k Y(t+\theta)}{dt^k} = \Phi(t), \tag{3.98}$$

где $Y(t) = \{Y_1(t), \ldots, Y_m(t)\}$, элементы матриц $A_{qk}(\theta) = [a_{sj}^{qk}(\theta)]_1^n$, функции $a_{sj}^{qk}(\theta)$ являются функциями ограниченной вариации, непрерывными справа и заданными на интервале $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$. Интеграл по мере $da_{sj}^{qk}(\theta)$ понимается в смысле Стильтьеса.

Предполагаем выполнение условий для $k = n$:

$$A_{qn}(\theta) \equiv 0, \quad \theta \in [-\Delta, 0), \quad \sum_{q=-s}^{s} |A_{qn}(0)| = 1, \tag{3.99}$$

в силу чего справедливо

$$\int_{-\Delta}^{0} dA_{qn}(\theta) \frac{d^n Y(t+\theta)}{dt^n} = A_{qn}(0) \frac{d^n Y(t)}{dt^n}, \qquad q = -s, -s+1, \ldots, s.$$

Ищем решение системы уравнений (3.98), (3.99) $Y(t)$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$Y(t) = Y_0^{(0)}(t) \in C[-\Delta, 0], \ldots, \frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} = Y_0^{(n-1)}(t) \in C[-\Delta, 0],$$

$$t \in [-\Delta, 0], \tag{3.100}$$

и предполагаем, что векторы $\frac{d^l Y(t)}{dt^l}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ непрерывны в точке $t = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$L_q(p) \equiv \sum_{k=0}^{n} p^k \int_{-\Delta}^{0} e^{p\theta} dA_{qk}(\theta), \qquad q = -s, -s+1, \ldots, s, \tag{3.101}$$

$$\Psi_q(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \int_{-\Delta}^{0} e^{p\theta} [dA_{qk}(\theta)] Y_0^{(k)}(0) p^{j-k-1} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\Delta}^{0} e^{p\theta} [dA_{qk}(\theta)] \int_{\theta}^{0} Y_0^{(k)}(t) e^{-pt} dt. \tag{3.102}$$

Обозначим через $F(p)$ изображение по Лапласу решения $Y(t)$ системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (3.98) с начальными условиями (3.100):

$$Y(t) \doteqdot F(p). \tag{3.103}$$

Домножая уравнение (3.98) слева и справа на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, с учетом (3.100) — (3.103) получаем систему линейных разностных уравнений относительно изображения $F(p)$:

$$\sum_{q=-s}^{s} L_q(p+iq) F(p+iq) = R(p), \tag{3.104}$$

где

$$R(p) \equiv Q(p) + \sum_{q=-s}^{s} \Psi_q(p+iq); \; Q(p) \doteqdot \Phi(t). \tag{3.105}$$

Согласно (3.101), величины $L_q(p)$, $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots \pm s$, являются целыми функциями переменного p. Составим величины

$$K_q(p) = -\frac{L_q(p+iq)}{L_0(p)}, \qquad q = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s. \tag{3.106}$$

Введем матрицу

$$S_{00}^{0}(p) = \sum_{\rho=1}^{\infty} \sum_{q_1, \ldots, q_\rho}' K_{q_1} K_{q_2} \ldots K_{q_\rho}, \tag{3.107}$$

где

$K_{q_1} = K_{q_1}(p)$, $K_{q_2} = K_{q_2}(p + iq_1), \ldots, K_{q_\rho} = K_{q_\rho}(p + i(q_1 + q_2 + \cdots$
$\cdots + q_{\rho-1}))$, $q_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s, \ldots, q_\rho = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s,$

а $\sum\limits_{q_1,\ldots,q_\rho}'$ означает суммирование по таким $q_1, \ldots, q_\rho$, для которых всегда выполняется

$$q_1 + \cdots + q_\rho = 0.$$

Решение системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (3.98), (3.99) с начальными условиями общего вида (3.100) дается следующими двумя теоремами, доказанными К. Г. Валеевым [30, 32].

Теорема 3.23. *Решение системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и постоянными распределенными запаздываниями вида* (3.98), (3.99) *и с начальными условиями общего вида* (3.100) *можно представить асимптотическим рядом*

$$Y(t) = \sum_{s=1}^{\infty} e^{p_s t}\,[B_{s0}(t) + tB_{s1}(t) + \cdots + t^{k_s-1}B_{s,k_s-1}(t)], \qquad (3.108)$$

где $\operatorname{Re} p_1 \geqslant \operatorname{Re} p_2 \geqslant \operatorname{Re} p_3 \geqslant \ldots, \operatorname{Re} p_s \to -\infty$ *при* $s \to \infty$, $k_s = 1, 2, 3, \ldots$

Векторы B_{sj} *голоморфны в некоторой полосе вдоль вещественной оси* t *и периодичны с периодом* 2π. *Если* $\operatorname{Re} p_0 > \operatorname{Re} p_r$, *то*

$$\left\{Y(t) - \sum_{s=1}^{r} e^{p_s t} \sum_{j=1}^{k_s-1} t^j B_{s,j}(t)\right\} e^{-p_0 t} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Комплексные величины $p_1, p_2, p_3, \ldots$, фигурирующие в теореме 3.23, называются *характеристическими показателями системы* (3.98), (3.99).

Теорема 3.24. *Нули уравнения*

$$L_0(p) - L_0(p)S_{00}^0(p) = 0, \qquad (3.109)$$

составленного по формулам (3.101), (3.106), (3.107) *для системы уравнений* (3.98), (3.99), *являются характеристическими показателями решений системы уравнений* (3.98), (3.99), *причем число* k_s *в формуле* (3.108) *равно кратности соответствующего нуля* p_s, $s = 1, 2, 3, \ldots,$ *уравнения* (3.109).

§ 4. Некоторые сведения из теории обобщенных функций

Обобщенные функции впервые были введены П. Дираком в его работах по квантовой механике, где он систематически использовал известную дельта-функцию [64]. Основы теории обобщенных функций были заложены С. Л. Соболевым [292, 170] и Л. Шварцем [286, 200]. Систематическое и подробное изложение основных положений теории обобщенных функций можно найти в монографиях И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [49, 50] и В. С. Владимирова [44]. В этом параграфе приведем лишь некоторые сведения из теории обобщенных функций, необходимые нам для дальнейшего изложения.

4.1. Пространство основных функций $\mathcal{D}$. Пусть O — открытое множество в R^n.

Будем говорить, что *функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* $C^m = C^m(O)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *в открытом множестве* O, если все ее производные до порядка m включительно непрерывны в O.

Носителем $\operatorname{supp}\varphi$ *непрерывной функции* $\varphi(x)$ назовем замыкание множества точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$.

Если $\operatorname{supp}\varphi \subset O$, то функция $\varphi(x)$ называется *финитной в* O.

Пространством $\mathcal{D}^{(m)}(O)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ назовем (линейное) множество всех финитных в O функций класса $C^{(m)}(O)$, где O — ограниченное множество в R^n. *Сходимость последовательности функций из* $\mathcal{D}^{(m)}(O)$ определим как *равномерную сходимость* вместе со всеми производными до порядка m включительно при условии, что носители функций этой последовательности содержатся в фиксированном множестве, компактном в O. Топологию в $\mathcal{D}^{(m)}(O)$ можно задать с помощью совокупности $(m + 1)$ норм:

$$\|\varphi\|_p = \sup_{x \atop l_1+\cdots+l_n \leqslant p} \left| \frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \varphi(x) \right|, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, m. \quad (4.1)$$

Пространство $\mathcal{D}^{(\infty)}(O) = \mathcal{D}(O)$ является счетно-нормированным и топологию в нем можно задать посредством совокупности счетного числа норм (4.1) с $m = \infty$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ *пространство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций аргумента* $x \in R^n$. Очевидно, $\mathcal{D}$ — есть объединение счетно-нормированных пространств $\mathcal{D}(O)$:

$$\mathcal{D} = \bigcup_O \mathcal{D}(O).$$

Отнесем к *множеству основных функций* все финитные бесконечно дифференцируемые в R^n функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$.

Сходимость в $\mathcal{D}$ определим следующим образом: последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ из $\mathcal{D}$ сходится к функции φ (из $\mathcal{D}$), если существует такое число A, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset (x \parallel |x| < A)$, и если при каждом $l = (l_1, \ldots, l_n)$ последовательность $\{D^l\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ сходится к функции $D^l\varphi(x)$ из $\mathcal{D}$ при $k \to \infty$ равномерно по $x \in R^n$. В этом случае будем писать $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$.

Здесь и ниже будет использовано следующее обозначение для некоторого $l = (l_1, \ldots, l_n)$:

$$D^l\varphi(x) \equiv \frac{\partial^{l_1+\cdots+l_n}}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \varphi(x), \quad l = (l_1, \ldots, l_n).$$

Будем обозначать ρ-окрестность ограниченного множества $G \subset R^n$ через $u_\rho(G)$; в частности, $u_\rho(x)$ означает шар с радиусом ρ и центром в точке x.

Очевидно, $\mathcal{D}$ — линейное пространство. Операция дифференцирования $D^l\varphi(x)$ непрерывна из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Операции неособенной линейной замены переменных $\varphi(Ay+b)$ и умножения на функцию $a \in C^\infty(R^n)$, $a(x)\varphi(x)$, непрерывны из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$.

Примером основной функции является функция

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left[-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right], & |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases} \tag{4.2}$$

где постоянная C_ε выбирается так, чтобы

$$\int \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1,$$

т. е.

$$C_\varepsilon \varepsilon^n \int\limits_{|\xi| \leqslant 1} \exp\left[-\frac{1}{1-|\xi|^2}\right] d\xi = 1.$$

Другие многочисленные примеры основных функций дает следующая лемма.

Лемма 4.1. *Для любых области G и числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\eta \in C^\infty(R^n)$ такая, что*

$$0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1, \quad \eta(x) \equiv 1, \quad x \in u_\varepsilon(G);$$
$$\eta(x) \equiv 0, \quad x \bar{\in} u_{3\varepsilon}(G).$$

Можно показать, что такой функцией является функция

$$\eta(x) = \int P(y)\,\omega_\varepsilon(x-y)\,dy,$$

где $P(y)$ — характеристическая функция множества $u_{2\varepsilon}(G)$:

$$P(y) \equiv 1, \ y \in u_{2\varepsilon}(G); \quad P(y) \equiv 0, \ y \bar{\in} u_{2\varepsilon}(G),$$

а $\omega_\varepsilon(y)$ — функция (4.2).

Лемма 4.2 (разложение единицы). *Пусть носитель основной функции φ покрыт конечным числом окрестностей $u_{r_k}(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Тогда существуют такие функции $h_k \in \mathcal{D}$, что*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x)\,h_k(x), \quad \operatorname{supp} h_k \subset u_{r_k}(x_k).$$

4.2. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$. **Определение 4.1.** *Обобщенной функцией в смысле Соболева — Шварца* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}$.

Значение функционала f (обобщенной функции) на основной функции φ будем записывать в виде (f, φ). Обобщенную функцию f также будем записывать формально в виде $f(x)$, подразумевая под x аргумент основных функций, на которые действует функционал f, а величину (f, φ) — в виде «интеграла»

$$(f, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Расшифруем определение обобщенной функции f:

1) обобщенная функция f есть функционал на $\mathcal{D}$, т. е. каждой $\varphi \in \mathcal{D}$ сопоставляется (комплексное) число (f, φ);

2) обобщенная функция f есть линейный функционал на $\mathcal{D}$, т. е. если $\varphi_1 \in \mathcal{D}$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}$ и λ_1, λ_2— комплексные числа, то

$$(f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2);$$

3) обобщенная функция f есть непрерывный функционал на $\mathcal{D}$, т. е. если $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}$, то

$$(f, \varphi_k) \to (f, \varphi), \quad k \to \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{D}' = \mathcal{D}' (R^n)$ множество всех обобщенных функций. Множество $\mathcal{D}'$ линейное, если линейную комбинацию $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ обобщенных функций f_1 и f_2 определить как функционал, действующий по формуле

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \varphi) = \lambda_1 (f_1, \varphi) + \lambda_2 (f_2, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Определим сходимость в $\mathcal{D}'$ следующим образом.

Определение 4.2. Последовательность обобщенных функций f_1, f_2, ... из $\mathcal{D}'$ сходится к обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi)$, $k \to \infty$. В этом случае будем писать $f_k \to f$, $k \to \infty$ в $\mathcal{D}'$. Введенная сходимость называется *слабой сходимостью*. Линейное множество $\mathcal{D}'$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством обобщенных функций* $\mathcal{D}'$. Можно сказать, что это пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$ является пространством, *сопряженным с пространством основных функций* (относительно (f, φ)).

Пространство $\mathcal{D}'$ полно относительно введенной слабой топологии.

4.3. Носитель обобщенной функции. Из определения 4.1 видно, что обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. И все же можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в некоторой области.

Будем говорить, что обобщенная функция f обращается в нуль в области G, если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, и запишем это так: $f = 0, x \in G$. С учетом такого определения обобщенные функции f_1 и f_2 называются *равными в области* G, если $f_1 - f_2 = 0$, $x \in G$. При этом пишем $f_1 = f_2$, $x \in G$. Если $f_1 = f_2$, $x \in R^n$, то будем говорить, что *обобщенные функции* f_1 и f_2 *равны*. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.3. *Для того чтобы обобщенная функция f обращалась в нуль в области G, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль в окрестности каждой точки этой области.*

Определение 4.3. *Носителем обобщенной функции* f называется множество всех тех точек, для каждой из которых нельзя указать окрестности, где $f \equiv 0$; носитель f обозначаем $\operatorname{supp} f = S_f$.

Очевидно, $\operatorname{supp} f$ — замкнутое множество. Если $\operatorname{supp} f$ — ограниченное множество, то обобщенная функция f называется *финитной*.

4.4. *Регулярные и сингулярные обобщенные функции.* Самым простым примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в R^n функцией $\psi(x)$ (т. е. интегрируемой в каждой конечной области $G \subset R^n$):

$$(\psi, \varphi) = \int \psi(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{4.3}$$

Определение 4.4. Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в R^n функциями по формуле (4.3), называются *регулярными обобщенными функциями*. Остальные обобщенные функции называются *сингулярными обобщенными функциями*.

Лемма 4.4 (дю Буа — Реймонда). *Для того чтобы локально интегрируемая в G функция $\psi(x)$ обращалась в нуль в области G в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x) = 0$ почти везде в G.*

Всякая локально интегрируемая функция $\psi(x)$ в R^n определяет по формуле (4.3) регулярную обобщенную функцию. При этом из леммы дю Буа — Реймонда следует, что всякая регулярная обобщенная функция определяется единственной (с точностью до значений на множестве меры нуль) локально интегрируемой в R^n функцией. Следовательно, между локально интегрируемыми в R^n функциями и регулярными обобщенными функциями существует *взаимно однозначное соответствие*. Мы будем поэтому отождествлять локально интегрируемую функцию $\psi(x)$ («обычную» функцию) и порождаемую ею по формуле (4.3) обобщенную функцию — функционал (ψ, φ).

В соответствии с определением 4.4 сингулярную обобщенную функцию нельзя отождествлять ни с какой локально интегрируемой функцией. Простейшим примером сингулярной обобщенной функции является дельта-функция Дирака: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in \mathscr{D}$. Очевидно, $\delta \in \mathscr{D}'$, $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, так что $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$. Можно доказать, что существует слабая сходимость (в $\mathscr{D}'$) последовательности функций $\omega_\varepsilon(x) \in \mathscr{D}$, $\varepsilon \to 0$ из формулы (4.2) к дельта-функции:

$$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x), \quad \varepsilon \to +0 \qquad \text{в}\, \mathscr{D}'.$$

4.5. *Умножение, дифференцирование и свертка обобщенных функций.* Пусть T — линейный непрерывный оператор, переводящий пространство $\mathscr{D}$ в $\mathscr{D}$. Для оператора T определим сопряженный оператор T^*, переводящий $\mathscr{D}'$ в $\mathscr{D}'$, по формуле

$$(T^* f, \varphi) = (f, T\varphi), \quad f \in \mathscr{D}', \quad \varphi \in \mathscr{D}. \tag{4.4}$$

Таким образом, оператор умножения af в $\mathscr{D}'$ на функцию $a \in C^\infty(R^n)$ определяется в соответствии с (4.4) по формуле

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad f \in \mathscr{D}', \quad \varphi \in \mathscr{D}, \quad a \in C^\infty(R^n).$$

Производная $D f$ в пространстве $\mathcal{D}'$ в силу (4.4) определяется по формуле

$$(D^l f, \varphi) = (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_n}(f, D^l\varphi) = (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_n} \times$$
$$\times \int f(x) D^l\varphi(x)\, dx,\ f \in \mathcal{D}',\ \varphi \in \mathcal{D},\ l = (l_1, l_2, \ldots, l_n). \quad (4.5)$$

Отсюда видно, что оператор дифференцирования $D^l f$ в $\mathcal{D}'$ является сопряженным к оператору $(-1)^{l_1+\cdots+l_n} D^l\varphi$ в $\mathcal{D}$.

Из такого определения операции дифференцирования немедленно вытекают следующие свойства:

а) любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема;

б) $D^{l+m}f = D^l(D^m f) = D^m(D^l f)$;

в) если $f \in \mathcal{D}'$ и $a \in C^\infty(R^n)$, то справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af:

$$\frac{\partial(af)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha} f + a\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n);$$

г) если $f = 0$, $x \in G$, то и $D^l f = 0$, $x \in G$, так что $\operatorname{supp} D^l f \subset \subset \operatorname{supp} f$;

д) операция дифференцирования непрерывна из $\mathcal{D}'$ в $\mathcal{D}'$, т. е. если $f_k \to f$, $k \to \infty$, в $\mathcal{D}'$, то $D^l f_k \to D^l f$ в $\mathcal{D}'$;

е) если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = S(x),$$

составленный из локально интегрируемых функций $\psi_k(x)$, сходится равномерно во всякой ограниченной замкнутой области $G \subset R^n$, то его можно почленно дифференцировать любое число раз, и полученные ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'$.

Пример 1. Пусть $n = 1$ и функция $f(x)$ такова, что $f \in C^1$ $(x \leqslant x_0)$ и $(f \in C^1$ $(x \geqslant x_0)$. Покажем, что

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0), \qquad (4.6a)$$

где $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$, а $\{f'(x)\}$ — классическая производная от функций $f(x)$.

Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{D}$ имеем, интегрируя по частям,

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') = -\int f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{x_0-0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0+0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -f(x_0 - 0)\varphi(x_0) + f(x_0 + 0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{x_0-0}\{f'(x)\}\varphi(x)\,dx +$$
$$+ \int_{x_0+0}^{\infty}\{f'(x)\}\varphi(x)\,dx = ([f]_{x_0}\delta(x - x_0) + \{f'(x)\}, \varphi).$$

Отсюда, в частности, получаем $\theta'(x) = \delta(x)$, где θ — функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть $n = 1$ и пусть $F(x)$ — дифференцируемая при всех $x \in R^1$ функция, имеющая n нулей, причем пусть все ее нули простые. Тогда справедлива следующая формула в смысле обобщенных функций на $\mathcal{D}$:

$$\delta(F(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta(x - x_j)}{\left|\frac{dF(x_j)}{dx}\right|}, \tag{4.6б}$$

где x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — корни алгебраического уравнения $F(x) = 0$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.5. *Всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'$, носитель которой состоит из конечного числа точек x_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, имеет единственное представление вида*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{|l| \leqslant m} c_{l,j} D^l \delta(x - x_j) \tag{4.6в}$$

при некоторых $m \geqslant 0$ и комплексных $c_{l,j}$. Значение числа m назовем порядком этой обобщенной функции.

Определим прямое произведение обобщенных функций $f_1(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $f_2(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$ по формуле

$$(f_1(x) \cdot f_2(y), \varphi) = (f(x), (f_2(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}). \tag{4.6г}$$

Можно показать, что определяемый по формуле (4.6г) функционал есть линейный непрерывный функционал над $\mathcal{D}(R^{n+m})$.

Пусть $f_0 \in \mathcal{D}'$ — *свертыватель,* т. е. обладает тем свойством, что оператор свертки в $\mathcal{D}$

$$f_0 * \varphi = (f_0(\xi), \varphi(x + \xi)) \tag{4.6д}$$

непрерывен из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Тогда оператор свертки $f_0 * f$ в $\mathcal{D}'$ определим как сопряженный оператор к оператору (4.6д) в $\mathcal{D}$:

$$(f_0 * f, \varphi) = (f, f_0 * \varphi) = \int f(x) f_0(y) \varphi(x + y)\, dx dy,$$
$$f \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Отсюда вытекает, что если f_0 — финитная суммируемая функция и $\psi(x)$ — локально интегрируемая функция, то

$$(f_0 * \psi)(x) = \int \psi(\xi) f_0(x - \xi)\, d\xi;$$

если же $\varphi \in \mathcal{D}$, то

$$(\varphi * \psi)(x) = (\psi(\xi), \varphi(x - \xi)).$$

Имеют место равенства

$$D^l(f_0 * f) = D^l f_0 * f = f_0 * D^l f. \tag{4.6е}$$

Справедлива следующая теорема, устанавливающая достаточные условия существования свертки.

Теорема 4.1. *Пусть f — произвольная и g — финитная обобщенные функции. Тогда свертка $f * g$ существует в $\mathcal{D}'$ и представляется в виде*

$$(f * g, \varphi) = (f(x) g(y), \eta(y) \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

где η — *любая основная функция, равная единице в окрестности носителя g. При этом свертка непрерывна относительно f и g в отдельности:*

а) *если* $f_k \to f$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'$, *то* $f_k * g \to f * g$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'$;

б) если $g_k \to g$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'$ *и при некотором* R $\operatorname{supp} g_k \subset u_R\,(0)$, *то* $f * g_k \to f * g$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'$.

С помощью этой теоремы можно доказать, что бесконечно дифференцируемая функция

$$f_\varepsilon(x) = f * \omega_\varepsilon = (f(y),\ \omega_\varepsilon(x-y)),$$

называемая *регуляризацией обобщенной функции* f, сходится в слабом смысле к обобщенной функции $f \in \mathcal{D}'$:

$$f_\varepsilon(x) \to f(x),\ \ \varepsilon \to +0 \qquad \text{в}\ \mathcal{D}'.$$

Справедлив более сильный результат.

Теорема 4.2. *Всякая обобщенная функция f есть слабый предел основных функций, т. е. множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$.*

Пример 3. Построим разными способами последовательности регулярных обобщенных функций, сходящихся к дельта-функции в смысле слабой сходимости. Такие последовательности называются дельта-образными последовательностями. Можно показать, что

а) последовательность функций $\omega_\varepsilon(x)$, представленных формулой (4.2), $\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, $\varepsilon \to +0$ в $\mathcal{D}'$;

б) последовательность функций

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \to \delta(x),\ \varepsilon \to +0 \qquad \text{в}\ \mathcal{D}';$$

в) последовательность функций

$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \to \delta(x),\ t \to +0 \qquad \text{в}\ \mathcal{D}'.$$

Для каждой из этих последовательностей выполняется следующее свойство: при любых фиксированных a и b, отличных от нуля,

$$\lim_{\nu\to\infty}\underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} f_\nu(\xi) \prod_{\alpha=1}^{n} d\xi^\alpha = \begin{cases} 0, & a < b < 0,\\ 0, & 0 < a < b,\\ 1, & a < 0 < b.\end{cases}$$

При этом

$$\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D},\ \text{но}\ f_\varepsilon(x)\ \overline{\in}\ \mathcal{D}\ \text{и}\ f_t(x)\ \overline{\in}\ \mathcal{D}.$$

4.6. Обобщенные решения линейных дифференциальных уравнений.

Пусть

$$L_a(x, D)\,u \equiv \sum_{|l|=0}^{m} a_l(x)\,D^l u = f(x),\ \ f \in \mathcal{D}', \tag{4.7}$$

$$l = (l_1, l_2, \ldots, l_n), \qquad |l| \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} l_\alpha,$$

— линейное дифференциальное уравнение порядка m с коэффициентами $a_l \in C^\infty(R^n)$.

Определение 4.5. *Обобщенным решением* уравнения (4.7) в области G называется всякая обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая этому уравнению в области G в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset G$,

$$(L_a(x, D)\, u, \varphi) = (f, \varphi). \tag{4.8}$$

По формулам (4.4), (4.5) нетрудно установить, что равенство (4.8) означает следующее:

$$(u, L_a^*(x, D)\, \varphi) \equiv \left(u, \sum_{|l|=0}^{m} (-1)^{|l|} D^l (a_l \varphi)\right) = (f, \varphi). \tag{4.9}$$

Ясно, что всякое классическое решение является и обобщенным решением. Обратное утверждение можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 4.6. *Если обобщенное решение $u(x)$ уравнения* (4.7) *в области G принадлежит классу* $C^{(m)}(G)$ и $f \in C(G)$, *то оно является и классическим решением этого уравнения в области G.*

Пусть $L_a(x, D)$ — оператор с постоянными коэффициентами $a_l(x) = a_l$. *Фундаментальным решением* дифференциального оператора $L_a(x, D)$ с постоянными коэффициентами называется обобщенная функция $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, удовлетворяющая в R^n уравнению

$$L_a(x, D)\, \mathcal{E} = \delta(x) \qquad \text{в } \mathcal{D}'.$$

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ оператора $L_a(x, D)$, вообще говоря, не единственно; оно определяется с точностью до слагаемого $\mathcal{E}_0(x)$, являющегося произвольным решением однородного уравнения $L_a(x, D)\mathcal{E}_0 = 0$. Рассмотрим неоднородное уравнение (4.7) для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Для такого уравнения справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть $f \in \mathcal{D}'$ такова, что свертка $\mathcal{E} * f$ существует в $\mathcal{D}'$. Тогда решение уравнения* (4.7) *с постоянными коэффициентами существует в $\mathcal{D}'$ и дается формулой*

$$u = \mathcal{E} * f \qquad \text{в } \mathcal{D}'.$$

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, для которых существует свертка с $\mathcal{E}$.

Пример 4. Рассмотрим волновой оператор для $x = (x^0, \vec{x}) \in R^4$, $\vec{x} \in R^3$:

$$L_a(x, D) = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2} \equiv \square.$$

Можно показать, что фундаментальное решение волнового оператора имеет вид

$$\mathcal{E}(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi}\, \delta(x^{0^2} - \vec{x}^2) \equiv G^{\text{ret}}(x^0, \vec{x}). \tag{4.10}$$

Рассмотрим далее неоднородное волновое уравнение в $\mathcal{D}'$:

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] u(x^0, \vec{x}) = f(x^0, \vec{x}) \tag{4.11}$$

с финитной обобщенной функцией $f(x^0, \vec{x})$. С помощью теоремы 4.3 можно получить, что общее решение уравнения (4.11) в $\mathcal{D}'$ имеет вид

$$u(x^0, \vec{x}) = (G^{\text{ret}} * f)(x^0, \vec{x}) + u_0(x^0, \vec{x}), \tag{4.12}$$

где $u(x^0, \vec{x})$ — произвольная обобщенная функция, удовлетворяющая волновому уравнению $\square\, u(x^0, \vec{x}) = 0$. В силу теоремы 4.3 решение (4.12) существует в $\mathcal{D}'$.

Приведем один достаточный признак существования свертки обобщенных функций.

Теорема 4.4. *Пусть обобщенные функции* f *и* F *из* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ *таковы, что* $f(x^0, \vec{x}) = 0$, $x^0 < 0$ и $\operatorname{supp} F \subset \overline{\Gamma}^+ = (x^0, \vec{x} \,\|\, x^{0^2} - \vec{x}^2 \geqslant 0,\ x^0 \geqslant 0)$.

Тогда свертка $f*F$ *существует в* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$ *и представляется в виде*

$$(f * F, \varphi) = (F * f, \varphi) = (f(\xi^0, \vec{\xi}) \cdot F(\xi^{0\prime}, \vec{\xi}'), \tag{4.12a}$$

$$\eta(\xi^0)\,\eta(\xi^{0\prime})\,\eta(\xi^{0\prime 2} - |\vec{\xi}'|^2)\,\varphi(\xi^0 + \xi^{0\prime}, \vec{\xi} + \vec{\xi}')),\quad \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1}),$$

где $\eta(\tau)$ — *любая функция из класса* $C^\infty(R^1)$, *равная нулю при* $x^0 < -\delta$ *и единице при* $x^0 > -\varepsilon$ (δ и ε — *любые числа*, $\delta > \varepsilon > 0$). *При этом свертка* $f * F$ *обращается в нуль при* $x^0 < 0$ *и непрерывна по* f *и* F *в отдельности:*

1) *если* $f_k \to f$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$, $f_k = 0$, $x^0 < 0$,
   то $f_k * F \to f * F$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$;
2) *если* $F_k \to F$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$, $\operatorname{supp} F_k \subset \overline{\Gamma}^+$,
   то $f * F_k \to f * F$, $k \to \infty$ *в* $\mathcal{D}'(R^{n+1})$.

Пример 5. Пусть обобщенная функция $f(x^0, \vec{x}) \in \mathcal{D}'(R^4)$ обращается в нуль в полупространстве $x^0 < 0$. Тогда обобщенная функция $V = G^{\text{ret}} * f$, где G^{ret} — фундаментальное решение (4.10) волнового оператора, называется *запаздывающим потенциалом с плотностью* f.

Лемма 4.7. *Если* $f(x^0, \vec{x})$ *является локально интегрируемой функцией в* R^4 *и* $f(x^0, \vec{x}) = 0$, $x^0 < 0$, *то запаздывающий потенциал* $V = G^{\text{ret}} * f$ *является локально интегрируемой функцией в* R^4 *и выражается формулой*

$$V(x^0, \vec{x}) = (G^{\text{ret}} * f) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{|\vec{x} - \vec{\xi}| < x^0} \frac{f(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}. \tag{4.12б}$$

Пример 6. Если $f_1 = u_1(\vec{x})\,\delta(x^0)$ и $f_2 = u_0(x)\,\delta'(x^0)$, где u_0 и u_1 — произвольные обобщенные функции из $\mathcal{D}'(R^3)$, то соответствующие запаздывающие потенциалы $V^{(0)} = G^{\text{ret}} * u_1(\vec{x})\,\delta(x^0)$ и $V^{(1)} = G^{\text{ret}} * u_0(\vec{x})\,\delta'(x)$, где G^{ret} — фундаментальное решение (4.10) волнового оператора, называются поверхностными запаздывающими потенциалами (простого и двойного слоя с плотностями u_1, u_0 соответственно).

Лемма 4.8. *Поверхностные запаздывающие потенциалы $V^{(0)}$ и $V^{(1)}$ принадлежат классу C^∞ по переменной x^0 в $(0, \infty)$ и удовлетворяют начальным условиям при $x^0 \to +0$*

$$\begin{aligned} &V^{(0)}(x^0, \vec{x}) \to 0, \quad \frac{\partial V^{(0)}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \to u_1(\vec{x}) \text{ в } \mathcal{D}'(R^3), \\ &V^{(1)}(x^0, \vec{x}) \to u_0(\vec{x}), \quad \frac{dV^{(1)}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \to 0 \text{ в } \mathcal{D}'(R^3). \end{aligned} \tag{4.12в}$$

Лемма 4.9. *Если u_1 и u_0 — локально интегрируемые функции в R^3, то поверхностные потенциалы $V^{(0)}$ и $V^{(1)}$ — локально интегрируемые функции в R^4 и выражаются формулами*

$$\begin{aligned} &V^{(0)}(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{4\pi x^0} \iint\limits_{s(\vec{x};\, x^0)} u_1(\vec{\xi})\, ds, \\ &V^{(1)}(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x^0}\left[\frac{1}{x^0} \iint\limits_{s(\vec{x};\, x^0)} u_0(\vec{\xi})\, ds\right], \end{aligned} \tag{4.12г}$$

где $s(\vec{x}, x^0) = (\vec{\xi} \,\|\, |\vec{x} - \vec{\xi}| = x^0 \geqslant 0)$ — *сфера радиуса x^0 с центром в точке $\vec{x} \in R^3$.*

4.7. *Другие функциональные пространства.* Рассмотрим только вещественные функции, если противное не оговорено особо.

Пространство $\mathcal{L}_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{L}_p(\Omega) \equiv L_p(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, совокупность всех функций $f(x)$, измеримых и суммируемых с p-й степенью в области $\Omega \subset R^n$, конечной или бесконечной:

$$\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

Каждую такую функцию считаем вектором пространства $\mathcal{L}_p(\Omega)$. Две такие функции будем считать равными векторами тогда и только тогда, когда они отличаются друг от друга только на множестве меры нуль. Обозначим через (f_1, f_2) скалярное произведение в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, т. е.

$$(f_1, f_2) = \int\limits_\Omega f_1(x) f_2(x)\, dx. \tag{4.13}$$

Можно показать, что $\mathcal{L}_2(\Omega)$ — гильбертово пространство относительно скалярного произведения (4.13).

Аналогично обозначим скалярное произведение элементов $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ (пространство функций класса $C^\infty(\Omega)$, имеющих компактный носитель в Ω) и $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (пространство, сопряженное с пространством $\mathcal{D}(\Omega)$, см. п. 4. 1). Там, где не может возникнуть недоразумений, будем писать

$$|f| = (f, f)^{1/2} = \left(\int\limits_\Omega f(x)^2\, dx\right)^{1/2}; \tag{4.14}$$

в противных случаях будем пользоваться обозначениями $\|f\|_X$ для нормы функции f из банахова пространства X (в частности, $X = \mathcal{L}_2(\Omega)$).

Пространство Соболева $H_p^l(\Omega)$. Обозначим

$$H_p^l(\Omega) = \left(f \left\| \frac{\partial^{q_1+\dots+q_n}}{(\partial x^1)^{q_1}\dots(\partial x^n)^{q_n}} f \in \mathcal{L}_p(\Omega),\ f \in C^l(\Omega),\ |q| \equiv q_1 + \dots + q_n \leqslant l \right. \right),$$

где l—целое, $0 < p < \infty$. Снабдим это пространство нормой

$$\left(\sum_{|q| \leqslant l} \|f^{(q)}\|_{\mathcal{L}_p} \right)^{1/p} = \|v\|_{H_p^l(\Omega)}.$$

Пространство $H_2^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Пространство $H_{2,0}^1(\Omega)$. Обозначим через $H_{2,0}^1(\Omega)$ замыкание пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H_2^1(\Omega)$. Таким образом, $H_{2,0}^1(\Omega)$ есть подпространство функций из $H_2^1(\Omega)$, «равных нулю» на границе $\partial\Omega$ области Ω.

Пространство $H^{-1}(\Omega)$. Обозначим через $H^{-1}(\Omega)$ пространство, сопряженное с пространством $H_{2,0}^1(\Omega)$:

$$H^{-1}(\Omega) = (H_{2,0}^1(\Omega))'.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$H_{2,0}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}_2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Элементами $H^{-1}(\Omega)$ являются суммы производных первого порядка от функций из $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Пространство $V_\rho(\Omega)$. Обозначим $V_\rho(\Omega) = H_{2,0}^1(\Omega) \cap \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$, где $p = \rho + 2$. Пространство $V_\rho(\Omega)$ снабжается нормой

$$\|f\|_{H_{2,0}^1(\Omega)} + \|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)},$$

превращающей его в банахово пространство.

В силу теорем вложения С. Л. Соболева [170] получаем

$$H_{2,0}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}_q(\Omega),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \quad \text{при } n \geqslant 3,$$

так что $V_\rho(\Omega) = H_{2,0}^1(\Omega)$ при $\rho \leqslant \frac{4}{n-2}$.

В п. 4.2 было введено пространство обобщенных функций на пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ как совокупность всех линейных непрерывных функционалов f над пространством $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ всех финитных в $\mathcal{O}$ бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций, где $\mathcal{O}$ — открытое множество R^n.

Пространство обобщенных функций Φ'. Аналогично этому введем пространство Φ' обобщенных функций на линейном топологическом пространстве Φ как совокупность всех линейных непрерывных функционалов f над линейным топологическим пространством Φ.

Теперь надо ввести пространство функций от $\vec{x}$ и x^0. Если отображение $\vec{x}, x^0 \to \varphi(\vec{x}, x^0)$ — функция, определенная в $\Omega \times [0, T]$, то функцию φ будем рассматривать как обычную (или обобщенную) функцию от x^0 со значениями в пространстве функций (или обобщенных функций) от $\vec{x}$.

В общем случае, если B — банахово пространство, то через $\mathcal{L}_p(0, T; B)$ обозначим пространство (классов) функций, осуществляющих отображение $x^0 \to f(x^0)$, где $x^0 \in [0, T]$, а функции $f(x^0)$ измеримы, принимают значения из B и такие, что

$$\left[\int_0^T (\|f(x^0)\|_B)^p \, dx^0\right]^{1/p} = \|f\|_{\mathcal{L}_p(0,T;B)} < \infty. \tag{4.15}$$

Если $p = \infty$, то норма (4.15) заменяется нормой

$$\sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_B = \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(0,T;B)}. \tag{4.16}$$

Можно показать, что нормированное пространство $\mathcal{L}_p(0, T; B)$ является полным и справедливо

$$\mathcal{L}_p(0, T; \mathcal{L}_p(\Omega)) = \mathcal{L}_p(Q), \quad Q = \Omega \times [0, T].$$

Перейдем теперь к выводу уравнений поля Эйнштейна в общей теории относительности.

§ 5. Уравнения поля Эйнштейна

5.1. Вывод уравнений поля. Как отмечалось выше, в случае общего распределения вещества пространственно-временной континуум необходимо рассматривать как риманово пространство (характеризуемое метрическим тензором g_{ik}), причем метрический тензор должен быть связан с распределением вещества в пространственно-временном континууме (характеризуемым тензором энергии — импульса T_{ik}). Общая теория относительности как раз и претендует на достаточно правильное установление этой связи в виде соответствующих уравнений поля. А именно, согласно общей теории относительности, уравнения поля должны удовлетворять следующим четырем требованиям.

1°. Иметь общековариантную формулировку (в смысле общей тензорной алгебры).

2°. Связывать метрический тензор g_{ik} с тензором энергии — импульса материи T_{ik}.

3°. Тензор энергии — импульса должен удовлетворять закону сохранения в ковариантной форме:

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \tag{5.1}$$

4°. Член при $\left(\frac{1}{c}\right)^0$ в разложении по степеням $\frac{1}{c}$ всякого непрерывного по $\frac{1}{c}$ в точке $\frac{1}{c} = 0$ решения уравнения поля должен удовлетворять закону движения механики Ньютона и уравнению Пуассона.

Расшифруем физический смысл этих требований. Условие 1° означает, что форма уравнений поля не должна зависеть от выбора системы координат (принцип относительности).

Условие 2° является формулировкой основной идеи теории относительности о том, что геометрия пространственно-временного континуума определяется распределением вещества в последнем.

Условие 3° является общековариантным обобщением весьма важного закона специальной теории относительности (когда метрический тензор имеет вид псевдоевклидового метрического тензора), записываемого в соответствующих (псевдоевклидовых) координатах:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{5.2}$$

В свою очередь соотношение (5.2) является обобщением законов сохранения массы и количества движения механики Ньютона (записанных в дифференциальной форме).

И, наконец, условие 4° означает требование, чтобы уравнения поля являлись обобщением и «содержали в себе» уравнения механики Ньютона в пределе $c \to \infty$ в следующем смысле. Поскольку общековариантное обобщение уравнений поля должно в пределе бесконечно малой плотности материи переходить в уравнения специальной теории относительности, то эти общековариантные уравнения должны в качестве параметра содержать фундаментальную постоянную c, равную скорости света в вакууме. Для достаточно невысоких скоростей $|\vec{v}| \equiv v$ вещества отношение $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ может быть достаточно малым. Таким образом, для не слишком высоких скоростей вещества уравнения поля будут содержать малый параметр $\beta = \frac{v}{c}$. С точки зрения наличия этого малого параметра уравнения поля, согласно требованию 4°, могут иметь вид сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных (как увидим ниже, эти уравнения поля имеют именно такой вид), но эти уравнения должны обладать достаточно богатым семейством S решений, непрерывно зависящих от параметра β в точке $\beta = 0$. Причем это семейство решений должно содержать при $\beta = 0$ семейство Q всех решений соответствующих уравнений механики Ньютона (а может быть, и совпадать с семейством Q при $\beta = 0$). В частности, при $\beta = 0$ семейство S должно удовлетворять уравнению Пуассона механики Ньютона

$$\begin{gathered}\Delta g_{00}(\vec{x}) = -4\pi\gamma\rho(\vec{x}),\\ g_{00} = 1 - \frac{2u(\vec{x})}{c^2},\end{gathered} \tag{5.3}$$

где u — потенциал тяготения Ньютона в точке $\vec{x} \in R^3$, $\rho(\vec{x})$ — плотность массы в точке $\vec{x}$, γ — гравитационная постоянная, определяемая экспериментально:

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \frac{см^3}{г \cdot сек^2}. \tag{5.4}$$

Поскольку $c^2\rho(\vec{x})$ есть компонента T_{00} симметричного тензора плотности энергии — импульса $T_{mn} = T_{mn}(x^0, \vec{x})$, то общековариантным обобщением уравнения (5.3) в простейшем случае должно быть уравнение, связывающее общековариантным образом все координаты тензора T_{mn} со всеми координатами тензора g_{ik}, т. е. уравнение вида

$$f_{l,\ldots,s}(g_{ik}, T_{mn}) = 0, \tag{5.5}$$

где $f_{l,\ldots,s}$ — нелинейная функция своих аргументов, имеющая некоторую тензорную структуру.

В простейшем случае уравнение (5.5) будет разрешимо относительно координат тензора T_{mn} и в таком случае (5.5) примет вид

$$T_{mn} = F_{mn}(g_{ik}), \tag{5.6}$$

где в правой части должен стоять симметричный дважды ковариантный тензор, составленный из координат метрического тензора. Далее, согласно требованию 4°, 00 — компонента уравнения (5.6) должна переходить при $c \to \infty$ в уравнение Пуассона (5.3). Поскольку оператор Лапласа из уравнения Пуассона (5.3) является дифференциальным оператором второго порядка по координатам x^1, x^2, x^3, то простейшим общековариантным обобщением величины Δg_{00} должен быть тензор $F_{mn}(g_{ik})$, который приводит к нелинейной функции от компонент g_{ik}, их первых и вторых производных по координатам, линейно зависящей от вторых производных.

В этом месте нам будет полезна следующая лемма, полученная Фермелем [304, 20], которую приведем без доказательства.

Лемма 5.1. *Всякий симметричный дважды ковариантный тензор, зависящий только от компонент метрического тензора g_{ij} и от их первых и вторых производных по координатам и являющийся линейной функцией вторых производных, имеет вид*

$$F_{mn}(g_{ik}) = C_1 R_{mn} + C_2 g_{mn} R + C_3 g_{mn}, \tag{5.7}$$

где R_{mn} — тензор Риччи, а R — скалярная кривизна.

Подставляя выражение (5.7) в правую часть (5.6), получаем уравнение

$$T_{mn} = C_1 R_{mn} + C_2 g_{mn} R + C_3 g_{mn}. \tag{5.8}$$

Возьмем расходимость от левой и правой частей уравнения (5.8). Тогда, подчиняя тензор энергии — импульса T_{mn} условию (5.1), получаем связь между произвольными постоянными C_1 и C_2 в виде

$$C_1 + 2C_2 = 0. \tag{5.9}$$

При получении соотношения (5.9) было использовано тождество

$$\nabla_k g^{ls} \equiv \frac{\partial g^{ls}}{\partial x^k} + g^{ps}\Gamma^l_{pk} + g^{lp}\Gamma^s_{pk} = 0, \qquad (5.10)$$

вытекающее из формулы (2.22).

Таким образом, из леммы 5.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. Всякое уравнение вида (5.6) с симметричным тензором T_{mn}, удовлетворяющим условию (5.1), и симметричным тензором F_{mn}, являющимся нелинейной функцией от компонент метрического тензора и первых производных по координатам x^0, x^1, x^2, x^3 и линейной функцией от вторых производных от компонент метрического тензора, имеет форму

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn}R + \Lambda g_{mn} = -\varkappa T_{mn}. \qquad (5.11)$$

Произвольная постоянная Λ называется *космологической постоянной*. Соотношение (5.11) называется *уравнениями поля с космологическим членом.*

Итак, (5.11) является простейшим уравнением, удовлетворяющим требованиям 1°—3°; при $c \to \infty$ одно из соотношений (5.11) переходит в уравнение Пуассона (5.3) механики Ньютона. Таким образом, выполняется и требование 4° общей теории относительности.

Что касается самих уравнений движения, то, как покажем ниже, для (5.11) они будут уравнениями геодезических, которые для семейства S решений уравнений поля (5.11) в пределе $\beta = 0$ будут содержать семейство решений Q соответствующих ньютоновых уравнений движения.

Таким образом, соотношения (5.11) являются простейшим классом уравнений, удовлетворяющих всем четырем требованиям 1°—4° общей теории относительности.

Подчеркнем, что этих четырех требований еще не достаточно для того, чтобы однозначно зафиксировать вид уравнений поля общей теории относительности. Поэтому добавим еще два требования («соображения простоты»).

5°. Разрешимость уравнения поля относительно тензора энергии — импульса T_{mn}, т. е. представимость уравнений поля в форме (5.6) (при этом правая часть уравнения (5.6) имеет вид (симметричного) тензора $F_{mn}(g_{ik})$).

6°. Требование, чтобы функция $F_{mn}(g_{ik})$ являлась нелинейной функцией от компонент g_{ik}, их первых и вторых производных по координатам, линейно зависящей от вторых производных.

Тем самым однозначно фиксируем вид уравнений поля общей теории относительности, а именно приходим к уравнениям (5.11) с пока произвольными постоянными Λ и $\varkappa$.

Замечание 5.1. Требования 5° и 6° являются дальнейшей конкретизацией требований 1°—4°. А именно: наложив требования 5° и 6°, мы сузили класс G_l уравнений, удовлетворяющих требованиям

1°—4° до класса G_{II} уравнений, удовлетворяющих требованиям 5°, 6°:

$$G_I \supset C_{II}.$$

Вернемся снова к уравнениям поля (5.11), в которых постоянные Λ и $\varkappa$ оставались пока произвольными.

Эти постоянные можно определить с помощью условия 4°, используя данные, взятые из астрономических наблюдений и из сравнения с механикой Ньютона в пределе $\beta \to 0$. Так, из астрономических наблюдений следует, что величина Λ вещественна и должна быть чрезвычайно малой [73]:

$$|\Lambda| \leqslant 10^{-55} \; см^{-2}. \qquad (5.12)$$

При этом из сравнения с механикой Ньютона, как увидим в § 12, получается значение постоянной

$$\varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4},$$

где значение постоянной γ дается выражением (5.4).

В силу исчезающей малости величины Λ во многих практических случаях достаточно рассматривать уравнения поля (5.11) с $\Lambda = 0$:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn}R = -\varkappa T_{mn}, \qquad (5.13)$$

которые называются *уравнениями поля Эйнштейна.*

Уравнения (5.13) были получены А. Эйнштейном как уравнения теории тяготения, сформулированной им систематически в 1916 г. Теория тяготения Эйнштейна получила в его работах название «общая теория относительности», поскольку была разработана ее автором как расширение специальной теории относительности. Если в специальной теории относительности изучаются системы отсчета, движущиеся без ускорений и связанные между собой преобразованиями Лоренца (инерциальные системы), то теория тяготения Эйнштейна включает в рассмотрение произвольные движения системы отсчета и гравитацию, объединяя тем самым учение о пространстве — времени с теорией гравитационного поля.

В основе общей теории относительности лежит (слабый) принцип эквивалентности (содержащийся уже в законе «всемирного тяготения» Ньютона), состоящий в утверждении одинаковости ускорений, сообщаемых разным телам в заданном гравитационном поле. Иначе этот принцип формулируется как принцип строгой пропорциональности инертной и гравитационной масс. Из этого принципа эквивалентности вытекает, что в теории тяготения Эйнштейна для произвольного поля тяготения в любой заданной точке пространственно-временного континуума можно выбрать такую систему отсчета и систему координат в ней (геодезическую систему координат), что в этой системе координат движение всякого тяготеющего тела в окрестности этой точки будет (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) описываться уравнениями движения в пустоте. Иными словами, всякое поле тяготения подходящим выбором системы отсчета и системы координат в ней можно уничтожить в окрестности любой наперед заданной точки пространства — времени; это означает сохранение однородности пространства — времени локально, «в малом» для теории тяготения Эйнштейна.

Однако в общем случае никаким выбором системы отсчета и системы координат нельзя уничтожить поле тяготения «в большом», т. е. во всем пространстве — времени; это означает, что поле тяготения абсолютно, а не относительно и что пространство — время в теории тяготения Эйнштейна в общем случае неоднородно. По этой причине введенное А. Эйнштейном для его теории тяготения название «общая теория относительности» следует понимать в смысле «общая ковариантность», или «общее поле тяготения», но не в смысле «общая относительность», поскольку в теории тяготения Эйнштейна в общем случае нет ни полной относительности поля тяготения, ни полной однородности пространства — времени. Важно подчеркнуть, что вскоре после формулировки А. Эйнштейном его теории тяготения эта теория ошибочно понималась в смысле полной относительности поля тяготения, что и служило основным оправданием названия «общая теория относительности». Несмотря на то что со временем ошибочность такого первоначального толкования теории тяготения была понята, тем не менее в литературе прочно укоренилось название «общая теория относительности» для эйнштейновой торци тяготения.

Это не вполне удачное, но ставшее уже традиционным в литературе назвачие теории тяготения Эйнштейна будет преимущественно использоваться в нашей монографии.

В общей теории относительности искажение метрики пространственно-временного континуума по сравнению с псевдоевклидовой метрикой интерпретируется как проявление поля тяготения, или поля гравитации: гравитационное поле проявляется как искривление пространства — времени. (Подробнее об этом будет сказано ниже при изучении уравнений движения.) Поэтому уравнения поля в общей теории относительности называют еще *уравнениями гравитационного поля.*

5.2. Уравнения движения потока частиц в общей теории относительности. Рассмотрим поток большого числа частиц, который в идеализированном случае можно представить как поток непрерывно распределенных масс. Такая идеализация означает принятие *модели сплошной среды.*

Каждая частица потока описывает в пространственно-временном многообразии четырехмерную кривую (траекторию), которую можно параметризовать длиной ее дуги s. Причем потребуем, чтобы каждая из четырех координат $x^i(s)$ траектории была дважды непрерывно дифференцируемой функцией параметра s:

$$x^i = x^i(s) \in C^2(a, b), \quad (a, b) \subset (-\infty, \infty) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \quad (5.14)$$

Распределение массы в потоке сплошной тяготеющей среды охарактеризуем общековариантным скаляром ρ, определяемым как плотность массы данного элементарного объема движущейся сплошной среды, подсчитанной в системе координат x^0, x^1, x^2, x^3, относительно которой этот элементарный объем покоится (так называемая *собственная система координат*). Скаляр ρ называется *инвариантной плотностью массы.*

Тензор

$$u^i = \frac{dx^i(s)}{ds} \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \qquad (5.15)$$

контрвариантный один раз и составленный для кривой (5.14), называется *четырехмерным вектором скорости* частицы.

Рассмотрим только такой поток частиц, для которого частицы в процессе движения не испытывают никаких превращений, масса покоя каждой из них остается без изменения, так что суммарная масса покоя удовлетворяет *закону сохранения массы*, записанному в виде *уравнения непрерывности*:

$$\nabla_n (\rho u^n) = 0. \tag{5.16}$$

Дважды контрвариантный симметричный тензор энергии — импульса для потока тяготеющей сплошной среды в случае пылевидной материи имеет вид

$$T^{mn} = c^2 \rho u^m u^n. \tag{5.17}$$

Согласно требованию 3°, в общей теории относительности этот тензор должен удовлетворять условию

$$\nabla_n T^{mn} = 0. \tag{5.18}$$

Для движения потока сплошной среды, удовлетворяющей уравнению непрерывности и условию (5.18) и движущейся только под действием сил тяготения, получаем в качестве уравнений движения уравнения геодезических в соответствии со следующей леммой.

Лемма 5.2. *Пусть в пространственно-временном многообразии задано поле четырехмерного вектора скорости* (5.15), (5.14) *и поле инвариантной плотности массы* ρ, *а также выполняются условия* (5.16) — (5.18).

Тогда четырехмерная траектория всякой частицы из такого потока описывается уравнениями геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{5.19}$$

Для доказательства леммы подставим выражение (5.17) в соотношение (5.18) и воспользуемся условием (5.16) с учетом правил абсолютного дифференцирования тензорной алгебры. Таким образом, получаем соотношение

$$\rho \frac{Du^i}{ds} = 0,$$

откуда для всякой точки пространственно-временного многообразия, в которой есть тяготеющая масса (т. е. для всякой точки, где $\rho \neq 0$), удовлетворяются уравнения геодезических (5.19).

Тем самым лемма 5.2 доказана.

5.3. Псевдоевклидова метрика и специальная теория относительности. Рассмотрим один важный случай риманова пространства V_4. А именно рассмотрим случай, когда в римановом пространстве V_4 можно выбрать систему координат x^i таким образом, чтобы все компоненты метрического тензора g_{ij} были постоянными для M, принадлежащих связной области изменения Ω:

$$g_{ij}(M) = \text{const}, \quad M \in \Omega. \tag{5.20}$$

Указанная специальная система координат будет аффинной, а само риманово пространство V_4 в области Ω может быть отождествлено с псевдоевклидовым пространством E_4 с метрикой (5.20). Псевдоевклидово пространство, как следует из § 2, совпадает со своим касательным аффинным пространством.

В указанном случае интервал для $x^i \in \Omega$ принимает вид

$$ds^2 = g'_{ik} dx'^l dx'^k, \tag{5.21}$$

причем, согласно определению риманова пространства,

$$g = \det [g'_{ik}] \neq 0.$$

Введем обозначения

$$g_1 \equiv g_{33}, \quad g_2 \equiv \begin{vmatrix} g'_{22} & g'_{23} \\ g'_{32} & g'_{33} \end{vmatrix}, \quad g_3 \equiv \begin{vmatrix} g'_{11} & g'_{12} & g'_{13} \\ g'_{21} & g'_{22} & g'_{23} \\ g'_{31} & g'_{32} & g'_{33} \end{vmatrix}. \tag{5.22}$$

В линейной алгебре * доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. *Существует такой базис в евклидовом пространстве E_4, в котором квадратичная форма* (5.21) *имеет диагональный вид*

$$ds^2 = \frac{g_3}{g}(dx^0)^2 + \frac{g_2}{g_3}(dx^1)^2 + \frac{g_1}{g_2}(dx^2)^2 + \frac{1}{g_1}(dx^3)^2 \equiv \sum_{i=0}^{3} g_{ii}(dx^i)^2. \tag{5.23}$$

Следствие 5.2. Пусть метрический тензор в (5.21) таков, что для определителей (5.22) справедливы неравенства

$$g_1 < 0, \quad g_2 > 0, \quad g_3 < 0, \quad g < 0. \tag{5.24}$$

Тогда совокупность знаков при квадратах в (5.23), называемая *сигнатурой квадратичной формы* (5.21), в силу (5.23), (5.24) такова

$$(+, -, -, -),$$

а поэтому соответствующее евклидово пространство будет именно *псевдоевклидовым*. Выбором масштаба измерения координат x^0, x^1, x^2, x^3 можно добиться того, что метрика (5.23), (5.24) примет следующий вид:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{5.25}$$

Интервал (5.25) является интервалом пространственно-временного многообразия *специальной теории относительности*. При этом точка пространственно-временного многообразия называется *событием*, ее координата x^0 — *временной координатой*, а координаты x^1, x^2, x^3 — *пространственными координатами*.

Для псевдоевклидового пространства (5.25), очевидно, связность и тензор кривизны в силу (2.22), (2.25) тождественно равны нулю:

$$\Gamma^i_{jk} \equiv 0, \quad R^i_{jk,l} \equiv 0, \quad x^i \in \Omega. \tag{5.26}$$

Отметим в этой связи более общий результат римановой геометрии, который можно сформулировать в виде следующей приводимой без доказательства теоремы.

---

* См., например, книгу И. М. Гельфанда [47].

Теорема 5.2. *Для того чтобы риманово пространство было евклидовым в связной области Ω, необходимо и достаточно, чтобы в этой области тензор кривизны был равен нулю*:

$$R^i_{jk,l}(M) = 0, \quad M \in \Omega. \tag{5.27}$$

В силу (5.26) в специальной теории относительности уравнения движения (5.19) принимают вид

$$\frac{d^2x^i(s)}{ds^2} = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \tag{5.28}$$

а условие (5.18) для тензора энергии — импульса записывается в виде

$$\frac{\partial T^{kn}}{\partial x^k} = 0. \tag{5.29}$$

Как уже отмечалось выше, группой вещественных преобразований пространственно-временного многообразия, оставляющих инвариантной квадратичную форму (5.25), является группа Пуанкаре, или неоднородная группа Лоренца, а преобразования этой группы называются преобразованиями Лоренца. Система отсчета, для которой интервал в любой точке пространственно-временного многообразия имеет вид (5.25), называется *инерциальной системой отсчета*. Все инерциальные системы отсчета физически равноправны в смысле определения 1.1 из § 1.

Множество всех преобразований Лоренца включает в себя, в частности, преобразование от координат x^i в одной инерциальной системе отсчета к координатам x'^i другой инерциальной системы отсчета, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Такие преобразования образуют подгруппу группы Пуанкаре, называемую *собственной группой Лоренца*.

Очевидно, самое общее преобразование Лоренца имеет вид ($x^0 = ct$)

$$x^{i'} = b^i + b_{i0}x^0 + \sum_{\alpha=1}^{3} b_{i\alpha}x^\alpha, \tag{5.30}$$

где коэффициенты b_{ik} удовлетворяют соотношениям

$$b_{0k}b_{0l} - \sum_{\alpha=1}^{3} b_{\alpha k}b_{\alpha l} = \delta^k_l = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ +1, & k = l = 0, \\ -1, & k = l \geqslant 1, \end{cases} \tag{5.31}$$

$$b_{k0}b_{l0} - \sum_{\alpha=1}^{3} b_{k\alpha}b_{l\alpha} = \delta^k_l.$$

Пусть t, $\vec{x}$—четырехмерная координата точки M пространства—времени в первой инерциальной системе координат и t', $\vec{x}'$ — четырехмерная координата точки M во второй инерциальной системе координат, причем пусть вторая система координат движется со скоростью $\vec{v}$ относительно первой системы координат. Оказывается, что при этом старые и новые координаты точки M связаны с помощью формул

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\frac{\vec{v}}{v^2}(\vec{v}\vec{x} - v^2 t),$$

$$t' = \left(t - \frac{\vec{x}\vec{v}}{c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v^2 \equiv (\vec{v})^2. \tag{5.32}$$

Четырехмерный вектор скорости в специальной теории относительности вводится посредством формул

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{5.33}$$

а поскольку

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2, \quad x^0 = ct,$$

то

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где

$$v^\alpha \equiv \frac{dv^\alpha}{dt}.$$

Четырехмерный вектор плотности тока определяется посредством выражений

$$j = \{j^0, \vec{j}\}, \quad j^0 = \rho, \quad j^\alpha = \rho u^\alpha, \tag{5.34}$$

где ρ — инвариантная плотность массы.

Закон преобразования (2.4) всякого контрвариантного вектора B^i в точке M при переходе от одной инерциальной системы координат x^i к некоторой другой инерциальной системе координат x'^i имеет вид

$$B'^i(M) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} B^k(M) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} B^0(M) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} B^\alpha(M), \tag{5.35}$$

а закон преобразования всякого ковариантного вектора B_i в точке M при этом запишется в виде

$$B'_i(M) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} B_k = \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} B_0(M) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} B_\alpha(M). \tag{5.36}$$

С помощью введенного четырехмерного вектора плотности тока уравнение непрерывности (5.16) можно записать в ковариантной форме:

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial j^k(x)}{\partial x^k} = 0, \qquad (5.37)$$

или

$$\frac{\partial j^0(x)}{\partial x^0} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial j^\alpha(x)}{\partial x^\alpha} = 0.$$

На этом мы закончим изложение тех следствий, которые вытекают из формул общей теории относительности для случая специальной теории относительности. Дальнейшие результаты специальной теории относительности, включая многочисленные примеры и физические приложения, можно найти в обширной учебной литературе по этим вопросам, из которой назовем работы [21, 34, 100, 99, 175, 196, 98].

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ N ТЯГОТЕЮЩИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ОТКЛОНЕНИЯ АРГУМЕНТА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 6. Постановка задачи

В этой главе будем рассматривать уравнения поля только в форме Эйнштейна (5.13). С учетом (2.22), (2.25), (2.29), (2.30) эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\Gamma^p_{mp}}{\partial x^n} - \frac{\partial\Gamma^p_{mn}}{\partial x^p} + \Gamma^l_{mp}\Gamma^p_{ln} - \Gamma^l_{mn}\Gamma^p_{lp} -$$

$$- \frac{1}{2} g_{mn} g^{ls}\left(\frac{\partial\Gamma^p_{lp}}{\partial x^s} - \frac{\partial\Gamma^p_{ls}}{\partial x^p} + \Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{ks}\right) = -\varkappa T_{mn}, \qquad (6.1)$$

где

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \qquad (6.2)$$

Таким образом, если задана правая часть в (6.1), то уравнения поля (6.1) являются системой квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно компонент метрического тензора g_{mn}.

Для уравнения (6.1) можно поставить задачу Коши в общем виде.

Определение 6.1. *Задачей Коши в общем виде для уравнения второго порядка* (6.1) *с известной правой частью* назовем задачу о нахождении таких функций $\{g_{mn}(x)\}^3_{m,n=0}$, которые определены и непрерывны вместе со вторыми частными производными в некоторой области $D \subset V_4$, удовлетворяют в области D уравнению (6.1) и предельным условиям на некоторой гиперповерхности $\Sigma \subset D$:

$$\begin{aligned} &g_{mn}(x)\big|_{x\in\Sigma} = \varphi_{mn}(u), \quad u \in \Sigma \subset D, \\ &\frac{\partial g_{mn}(x)}{\partial n}\bigg|_{x\in\Sigma} = \varphi_{mn}(u), \end{aligned} \qquad (6.3)$$

где $\frac{\partial g_{mn}}{\partial n}$ означает производную по нормали к гиперповерхности Σ от функции g_{mn}.

При этом гиперповерхность Σ должна удовлетворять некоторым *условиям гладкости и условию регулярности поверхности* *, а начальные функции φ_{mn}, ψ_{mn}—некоторым *условиям гладкости на гиперповерхности* Σ; эти условия гладкости самой гиперповерхности Σ и функций φ_{mn}, ψ_{mn} должны быть такими, чтобы обеспечить выполнение условий существования решения задачи Коши в общем виде (6.1), (6.3).

При решении уравнений поля (6.1) совместно с уравнениями движения возможна такая постановка задачи.

А. Отыскать такое частное решение уравнений поля (6.1) и такой частный случай распределения значений тензора энергии — импульса T^{mn}, для которых квадратичная форма в выражении для интервала

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \quad x \in D \subset V_4$$

в некоторой специальной системе координат обладает заданными свойствами симметрии и удовлетворяет заданным предельным условиям.

Из указанных требований находят все компоненты метрического тензора g_{mn}.

Далее, определив все функции g_{mn}, можно перейти к отысканию решения системы уравнений движения потока частиц в некоторой области $D_1 \subset D$, имеющих вид уравнений геодезических:

$$\frac{d^2x^i_J(s_J)}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}(x_J)\frac{dx^k_J}{ds}\cdot\frac{dx^l_J}{ds} = 0, \qquad (6.4)$$

где x^i_J — координаты J-й частицы потока ($J = 1, 2, 3, \ldots, J_0$; $J_0 \leqslant \infty$), удовлетворяющего начальным условиям

$$\begin{aligned} &x^i_J(s_0) = \xi^i_J \quad (i = 0, 1, 2, 3), \\ &\frac{dx^i_J(s_0)}{ds} = \eta^i_J \quad (J = 1, 2, 3, \ldots, J_0),\ J_0 \leqslant \infty. \end{aligned} \qquad (6.5)$$

При выполнении условий существования и единственности решения задачи Коши (6.4), (6.5) находим траектории потока частиц в области $D_1 \subset D \subset V_4$.

Пусть известно далее, что решение задачи в указанной постановке обладает следующим свойством: в области $x \in D_1 \subset D \subset V_4$ величина

$$\left|\frac{d\vec{x}_J(s)}{ds}\right| \equiv \sqrt{\left(\frac{dx^1(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^3(s)}{ds}\right)^2}$$

---

* Это означает, что если гиперповерхность задана параметрическими уравнениями

$$x^i = f^i(u^1, \ldots, u^3), \quad u = \{u^1, \ldots, u^3\} \in \Omega \subset V_3,$$

то функции f_i должны быть достаточно гладкими функциями от u^l, $l = 1, 2, 3$, в некоторой области определения $u \in \Omega \subset V_3$ и удовлетворять условию регулярности поверхности (гл. I, § 2, формула (2, 6)) $\operatorname{rang}\left[\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right] = m$.

ограничена для всех J при всех $\frac{1}{c} \in [-c_0^{-1}, c_0^{-1}]$ постоянной $v_{\max}$, которая много меньше скорости света в вакууме c_0:

$$\left|\frac{d\vec{x}_J(s)}{ds}\right| < v_{\max} \ll c_0 \quad (J = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда величина $\frac{v_{\max}}{c}$ будет безразмерным малым параметром. В таком случае можно ввести параметр β, меняющийся в интервале $\left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$.

При этом будет полезно следующее определение.

Определение 6.2. Пусть известны все функции $g_{mn}(x)$ в области $D \subset V_4$. Тогда решение системы уравнений (6.4) в области $D \subset V_4$ с начальными условиями (6.5) будем называть решением класса (k, ε) с заданным малым $\varepsilon = \varepsilon(D, v_{\max}) > 0$ и целым k, если существует совокупность $4J_0(k+1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по соответствующему параметру s_J в области

$$s_J \in S_J = (s_J \| x_J^j(s_J) \in D \subset V_4,\ j = 0, 1, 2, 3) \subset R^1$$

функций

$$z_{J,q}^j(s_J) \in C^2(S_J) \quad (j = 0, 1, 2, 3;\quad J = 1, 2, 3, \dots, J_0),$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, k,$$

таких, что при всех $s_J \in S_J$ и при всех $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s_J^l}\left[\underset{[\xi,\eta]}{x_J^i}(s_J) - \sum_{q=0}^{k} \beta^q \underset{[\xi,\eta]}{z_{J,q}^i}(s_J)\right]\right| < \underset{[\xi,\eta]}{d_{l,J}}\, |\beta|^{k+1} \qquad (6.6)$$

$$(l = 0, 1, 2;\quad J = 1, 2, 3, \dots, J_0),$$

где

$$S_J = (s_J \| x_J^i(s_J) \in D,\quad i = 0, 1, 2, 3) \subset R^1$$

с некоторыми постоянными $\left\{\underset{[\xi,\ \eta]}{d_{l,J}}\right\}$ $(l = 0, 1, 2;\ J = 1, 2, \dots, J_0)$, зависящими только от ξ и η и не зависящими от β и удовлетворяющими условиям *

$$\max_{J}\ \sup_{\beta\in\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]}\left(\frac{\underset{[\xi,\eta]}{d_{l,J}}\ |\beta|^{k+1}}{\sup\limits_{s_J\in S_J}\left|\frac{\partial^l}{\partial s_J^l}\sum\limits_{q=0}^{k}\beta^q \underset{[\xi,\eta]}{z^i_{J,q}}(s_J)\right|}\right)<$$

$$<\varepsilon(D,\ v_{\max}),\quad l=0,\ 1,\ 2. \tag{6.7}$$

Аналогичное определение будет полезно ввести и для решения задачи Коши в общем виде (6.1) — (6.3).

Определение 6.3. Решение $g_{mn}(x)$ задачи Коши в общем виде (6.1)—(6.3) в области $D\subset V_4$ с известной правой частью $T_{mn}(x)$ будем называть решением класса $(k,\ \varepsilon)$ с заданным малым $\varepsilon(D,\ v_{\max})>0$ и целым k, если существует совокупность $10\,(k+1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x^i в некоторой области $D\subset V_4$ функций

$$\underset{[\varphi,\psi]}{y_{nm,q}}(x)=\underset{[\varphi,\psi]}{y_{mn,q}}(x)\in C^2(D)\quad (q=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ k;\ m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

таких, что при всех $x\in D$ и при всех $\beta\in\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\left[\underset{[\varphi,\psi]}{g_{m,n}}(x)-\sum_{q=0}^{k}\beta^q\underset{[\varphi,\ \psi]}{y_{mn,q}}(x)\right]\right|<\underset{[\varphi,\psi]}{C_l}\ |\beta^{k+1}|,$$

$$\forall x\in D\subset V_4,\quad \forall\beta\in\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right] \tag{6.8}$$

$$(l=0,\ 1,\ 2;\ j_1,\ \dots,\ j_l=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

с некоторыми постоянными $\left\{\underset{[\varphi,\ \psi]}{C_l}\right\}_{l=0}^{2}$, не зависящими от β и удовлетворяющими условиям

$$\max_{m,n}\ \sup_{\beta\in\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]}\left(\frac{\underset{[\varphi,\ \psi]}{C_l}|\beta|^{k+1}}{\max\limits_{j_1,\dots,j_l}\sup\limits_{x\in D}\left|\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\sum\limits_{q=0}^{k}\beta^q\underset{[\varphi,\ \psi]}{y_{mn,q}}(x)\right|}\right)<$$

$$<\varepsilon(D,\ v_{\max})\quad (l=0,\ 1,\ 2). \tag{6.9}$$

При постановке задачи о решении уравнений поля совместно с уравнениями движения наряду с постановкой А могут быть использованы следующие три альтернативные постановки задачи.

---

* Из формулы (6.7) видно, что $\varepsilon(D,\ v_{\max})$ — гарантированная точность аппроксимации функций $x_J^i(s_J)$ и их производных полиномами по степеням параметра $\beta\in\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ порядка k для заданных D и $v_{\max}$. Из той же формулы видно, что $\varepsilon(D,\ v_{\max})$ есть малая величина порядка малости $\frac{v_{\max}}{c_0}$.

Б. Отыскать совместное решение всей системы уравнений (6.1), (6.2), (6.4) из класса (k, ε) $(k \geqslant 1)$ в некоторой области $D \subset V_4$. При этом заданы следующие дополнительные условия:

а) предельные условия для g_{mn} при $|\vec{x}| \to \infty$ в некоторой специальной системе координат;

б) значения тензора энергии — импульса для решений класса (k, ε) при $\beta \to 0$:

$$T_{mn}|_{\beta=0} = T^0_{mn};$$

в) начальные условия (6.5) для уравнений движения (6.4).

Определение 6.4. Решением системы уравнений (6.1), (6.2), (6.4) из класса (k, ε) в области $D \subset V_4$ с заданным целым k и заданным малым $\varepsilon = \varepsilon(D, v_{\max}) > 0$ назовем решение системы уравнений (6.1), (6.2), (6.4) с начальными условиями (с некоторыми $\Delta_J \geqslant 0$, $J = 1, 2, \ldots, J_0$)

$$x^i_J(s_J) = \xi^i_J(s_J) \in C[s^0_J - \Delta_J, s^0_J], \quad s_J \in [s^0_J - \Delta_J, s^0_J],$$

$$\frac{dx^i_J(s_J)}{ds_J} = \eta^i_J(s_J) \in C[s^0_J - \Delta_J, s^0_J], \quad s_J \in [s^0_J - \Delta_J, s^0_J] \tag{6.10}$$

(где функции $\xi^i_J(s_J)$, $\eta^i_J(s_J)$ могут зависеть от параметра $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$) и предельными условиями на начальном множестве $\mathfrak{R} \subset V_4$ (соприкасающемся с областью $D \subset V_4$) *

$$g_{mn}(x) = \varphi_{mn}(x) \in C(\mathfrak{R}), \quad x \in \mathfrak{R} \subset V_4, \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial g_{mn}(x)}{\partial x^l} = \psi_{mn,l}(x) \in C(\mathfrak{R}), \quad x \in \mathfrak{R} \subset V_4, \quad l, m, n = 0, 1, 2, 3$$

(где функции $\varphi_{mn}(x)$, $\psi_{mn,l}(x)$ могут зависеть от параметра $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$), для которого существует $4J_0(k+1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по соответствующему параметру s_J в области

$$s_J \in S_J = (s_J \| x^i_J(s_J) \in D \subset V_4, \quad i = 0, 1, 2, 3) \subset R^1$$

функций

$$\underset{[\xi,\eta]}{z^j_{J,q}}(s_J) \in C^2(S_J), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad J = 1, 2, \ldots, J_0; \quad J_0 \ll \infty,$$

$$q = 0, 1, 2, \ldots, k \tag{6.12}$$

---

* Необходимость задавать начальные условия (6.10) на начальном множестве $s_J \in [s^0_J - \Delta_J, s^0_J]$, $J = 1, 2, \ldots, J_0$, и начальные условия (6.11) на начальном множестве $\mathfrak{R} \subset V_4$, соприкасающемся с областью $D \subset V_4$, связана с тем, что уравнения (6.1), (6.2), (6.4) для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, принимают вид системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (как увидим ниже, в § 12 и 13).

и 10 ($k+1$) штук дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x^l в области D функций

$$\underset{[\varphi,\psi]}{y_{mn,q}}(x)=\underset{[\varphi,\psi]}{y_{nm,q}}(x)\in C^2(D),\quad m,n=0,1,2,3;\ q=0,1,2,\ \ldots,\ k \tag{6.13}$$

таких, что при всех $s_J \in S_J$ и при всех $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ выполняются неравенства (6.6) и при всех $x \in D$ и всех $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ выполняются неравенства (6.8) с некоторыми постоянными $\underset{[\xi,\eta]}{d_{l,J}}$ и $\underset{[\varphi,\psi]}{C_l}$, не зависящими от β и удовлетворяющими условиям (6.7), (6.9) *.

Решения из класса (k, ε) будут нами существенно использоваться в дальнейшем.

Укажем еще две возможные постановки задачи.

В. Пусть известны все компоненты тензора энергии — импульса T_{mn} в некоторой области $D \subset V_4$, а тем самым известно распределение и движение вещества в области $D \subset V_4$.

Тогда при решении уравнений поля (6.1) с известной правой частью можно поставить задачу Коши в общем виде (6.1) — (6.3) для некоторой гиперповерхности Σ такой, что $D \cap \Sigma \neq \varPhi$. Если выполнены условия существования и единственности решения поставленной задачи, то все компоненты метрического тензора g_{mn} в области $D \subset V_4$ могут быть найдены.

Г. Отыскивается совместное решение системы уравнений (6.1), (6.2), (6.4), (6.5), принадлежащее классу (k, ε) ($k \geqslant 1$), такое, что функции $g_{mn}(x)$ в специальной системе координат удовлетворяют заданным предельным условиям при $|\vec{x}| \to \infty$, а функции $x_J^l(s_J)$ имеют некоторый простой вид (например, $x_J^l(s_J)$ близки в определенном смысле к некоторым решениям механики Ньютона). Затем исследуется устойчивость этих решений $x_J^l(s_J)$ относительно возмущений начальных данных.

---

* Здесь, как и выше, $\varepsilon=\varepsilon(D,\ v_{\max})$— гарантированная точность аппроксимации искомых функций $x_J^l(s_J)$, $g_{mn}(x)$; $J=1,2,\ldots,J_0$; $i,m,n=0,1,2,3$ и их производных полиномами по степеням параметра $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ порядка k.

Из формул (6.7), (6.9) видно, что $\varepsilon(D, v_{\max})$ при заданных k и D есть малая величина порядка $\frac{v_{\max}}{c_0}$. Поэтому, чтобы повысить точность аппроксимации, при заданном k можно уменьшать $v_{\max}$, либо уменьшать высоту T цилиндра $Ц=(x^0,\vec{x}\,\|\,x^0 \in [x_0^0,\ x_0^0+T],\ \forall\ \vec{x}\in R^3)\supset D$, содержащего область D, либо уменьшать одновременно $v_{\max}$ и T.

При подходе к той или иной конкретной задаче общей теории относительности ниже будет использована одна из четырех перечисленных выше постановок.

В следующем § 7 этой главы будет рассмотрена задача об отыскании метрики центрально-симметрического гравитационного поля и при решении этой задачи будет использована постановка А.

Для последующего сравнения с постановкой и решением задачи двух тел в общей теории относительности в § 8 приводится постановка и решение задачи двух гравитирующих тел в механике Ньютона в удобной для указанной цели форме. По существу это — задача о решении уравнений (6.1) в постановке А в пределе $c \to \infty$.

Найденные в § 7 выражения для метрики внешнего центрально-симметрического гравитационного поля используются в § 9 для исследования движения пробного тела в центрально-симметрическом гравитационном поле и, в частности, для исследования устойчивости такого движения. Эта задача в § 9 решается также в постановке А.

§ 10—13 этой главы посвящены выводу уравнений движения N тел для решения класса (k, ε) $(k \geqslant 1)$ в общей теории относительности.

Сделаем несколько замечаний по поводу уравнений движения N тел.

I. При получении уравнений движения N гравитирующих тел необходимо отыскивать совместное решение системы уравнений поля (6.1), (6.2) с учетом некоторых предельных условий, т. е. решать задачу в постановке Б. При этом, в принципе, можно идти одним из двух основных путей.

1. Первый и более простой путь состоит в том, чтобы, задавшись видом тензора энергии — импульса в пределе $c \to \infty$, получить в качестве уравнений движения системы N тел уравнения геодезических. На таком пути для случая достаточно удаленных друг от друга тел можно попытаться далее использовать модель N точечных тел. При написании уравнений движения первого тела используют метрику гравитационного поля, создаваемого совместным влиянием всех остальных тел, начиная со второго, т. е. поступают так, как будто бы первое тело является пробным телом по сравнению с остальными. Это означает следующее:

$$m_1 \ll m_j, \quad j = 2, 3, \ldots, N. \tag{6.14}$$

При написании уравнений движения второго тела используют метрику гравитационного поля, создаваемого совместным действием первого, третьего и т. д. до N-го тела, считая при этом

$$m \ll m_j, \quad j = 1, 3, 4, \ldots, N, \tag{6.15}$$

и т. д.

Поскольку, по существу, именно так получаются уравнения движения N тел в механике Ньютона, то можно ожидать, что указанный формальный метод написания уравнений движения N тел в общей теории относительности для решений класса (k, ε) $(k \geqslant 1)$

(первый путь) должен дать правильный результат. Но, с другой стороны, попытка прямого использования системы N неравенств (6.14), (6.15), ..., очевидно, немедленно приводит к противоречию. Таким образом, указанный первый путь нуждается в более тонком обосновании.

2. Второй путь восходит к методу, предложенному В. А. Фоком [193, 194, 195, 196], и состоит в том, чтобы отыскивать решение сразу в гармонической системе координат, удобной тем, что в ней уравнения поля существенно упрощаются. Для решений класса (k, ε) $(k \gg 1)$ в гармонической системе координат в качестве уравнений движений N тел получаются некоторые интегро-дифференциальные соотношения, имеющие смысл дифференциально-функциональных уравнений, связывающих координаты центров масс каждого из тел. При получении таких уравнений движения для достаточно удаленных друг от друга тел при учете пространственной протяженности каждого из N тел в § 10—12 получены уравнения движения N тел. Далее в § 13 проведен расчет с помощью первого, более простого пути. При этом результаты, полученные в § 12 и 13, совпадают для случая достаточно удаленных друг от друга тел, что может служить, в свою очередь, обоснованием правильности формальных методов первого из вышеописанных путей.

II. Важно подчеркнуть, что получающиеся уравнения движения для решений класса (k, ε) $(k \gg 1)$ в задаче N тел имеют вид именно *дифференциально-функциональных уравнений*, а не просто дифференциальных уравнений. Причина этого обусловлена глубокими физическими принципами, определяющими природу сил гравитационного взаимодействия. А именно эта причина состоит в том, что гравитационное взаимодействие от одного тела к другому передается с конечной скоростью, равной скорости света для достаточно маломассивных N тел. Из-за указанной конечности скорости передачи взаимодействия сила, действующая на i-е тело в данный момент времени со стороны j-го тела, зависит от положения j-го тела в момент времени, предшествующий данному на величину запаздывания, равную пространственному расстоянию между телами, деленному на скорость распространения взаимодействия. Тем самым приходим к дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом в качестве уравнений движения N тел в общей теории относительности или, иными словами, к дифференциально-функциональным уравнениям.

III. Несмотря на принципиальную важность учета отклонения аргумента при получении релятивистских уравнений движения системы N тел, до самого недавнего времени в существующей литературе отсутствовал последовательный подход к указанной задаче, в котором отклонение аргумента в уравнениях учитывалось бы непосредственно. В имеющихся учебниках по общей теории относительности при получении уравнений движения N релятивистских тел применяются методы, использующие ряды теории возмущений по обратным степеням скорости света c. Это — метод, интерпретирующий материальные тела как особенности поля и развитый школой А. Эйнштейна [208, 231, 232, 233, 75, 251], метод приближенной функции Лагранжа [97] и метод, развиваемый В. А. Фоком и сотрудниками [193, 194, 195, 196, 140, 26].

В упомянутых выше подходах по обратным степеням скорости света раскладываются все величины, фигурирующие в уравнениях поля, в том числе и отклонение аргумента. Однако из теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом хорошо известно, что раскладывать в ряд по малому отклонению аргумента Δ с последующим отбрасыванием членов высшего порядка малости по Δ в общем случае нельзя, поскольку получающиеся на таком пути уравнения движения могут иметь *очень мало общего с истинными*. Например, на таком пути нередко можно установить, что физически интересное решение как решение приближенного уравнения обладает устойчивостью относительно малых возмущений начальных данных, тогда как полное уравнение, содержащее отклонение (пусть даже малое) аргумента, приводит к сильной неустойчивости того же физически интересного решения. Примеры подобных уравнений, когда нельзя раскладывать в ряды по малому отклонению аргумента, приведены в § 13 главы II.

Релятивистские уравнения задачи N электрически заряженных и тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента из уравнений общей теории относительности были получены впервые автором в недавних работах [151, 152, 153]. Более подробно эти результаты изложены в главах II, III.

Следует отметить, что, по-видимому, первые попытки непосредственно учесть отклонение аргумента в уравнениях движения двух тяготеющих тел в механике Ньютона, приходящее от конечности скорости распространения взаимодействия, были сделаны в работах В. Р. Петухова [141] и П. П. Логинова [103, 104, 105]. Интересно отметить, что впервые проблема учета конечности скорости передачи взаимодействия в уравнениях движения N тяготеющих тел рассматривалась П. Лапласом [261], что привело к появлению в литературе известного «парадокса Лапласа» как следствия тех больших трудностей, с которыми столкнулся Лаплас при изучении упомянутой проблемы *. Проблема физически и математически последовательного учета конечности скорости передачи взаимодействия упоминалась еще совсем недавно в числе важнейших нерешенных проблем теории и приложений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, перечисленных в известных обзорах А. Д. Мышкиса и Л. Э. Эльсгольца [125, 210].

В связи с этим следует отметить работы Дж. Синга [299] и Р. Драйвера [228, 229] по релятивистской электродинамике специальной теории относительности, в которых использование потен-

---

* Обзор различных попыток уточнить закон всемирного тяготения Ньютона и, в частности, попыток избавиться от предположения о бесконечной скорости распространения гравитационного взаимодействия можно найти в книге А. Ф. Богородского [19].

циалов Лиенара — Вихерта приводит к уравнениям движения электрически заряженных тел, сходным по структуре с уравнениями движения N релятивистских гравитирующих тел, полученными в главах II, III.

§ 7. Центрально-симметрическое поле тяготения

В этом параграфе будет решена одна важная для дальнейшего изложения задача, которую можно рассматривать как пример задачи в постановке А (см. § 6).

Предположим, что можно выбрать такую систему отсчета y^i, в которой соблюдаются следующие условия.

1. Метрическая квадратичная форма

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dy^i dy^j \tag{7.1}$$

инвариантна относительно всевозможных ортогональных преобразований над координатами y^1, y^2, y^3 при $y^0 = \text{const}$.

2. Координаты метрического тензора $\tilde{g}_{ik}$ не зависят от времени y^0:

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(y^1, y^2, y^3), \qquad \forall y^i \in R^4 \tag{7.2}$$

(статическое поле тяготения).

Поле тяготения, удовлетворяющее этим двум условиям, будем называть *центрально-симметрическим.*

7.1. Интервал для центрально-симметрического поля тяготения. Переходя к «сферическим» координатам r, θ, φ по формулам

$$y^1 = r \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y^2 = r \sin\theta \sin\varphi,$$

$$y^3 = r \cos\theta$$

и выбирая надлежащим образом начало отсчета времени в каждой точке пространства R^3, можно записать, как нетрудно убедиться, метрическую квадратичную форму (7.1) в виде

$$ds^2 = X^2(r)(dy^0)^2 - Y^2(r)(dr)^2 - Z^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \equiv$$

$$\equiv X^2(r)(dy^0)^2 - a_{rr}(dr)^2 - a_{\theta\theta}(d\theta)^2 - a_{\varphi\varphi}(d\varphi)^2 \equiv X^2(r)(dy^0)^2 - dl^2 \tag{7.3}$$

с зависящими только от r вещественнозначными функциями X, Y, Z.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 7.1. *В системе координат, в которой метрика пространства событий имеет вид* (7.3), *внутри пространственной об-*

ласти $D_1 \subset R^3$, в которой $T_{mn} = 0$, уравнения поля (6.1), (6.2) *эквивалентны системе трех уравнений:*

$$\frac{2XY}{Z}\cdot\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{Y}\cdot\frac{dZ}{dr}\right)+\frac{d^2}{dr^2}X-\frac{1}{Y}\left(\frac{dY}{dr}\right)\frac{dX}{dr}=0, \qquad (7.4)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{ZX}{Y}\cdot\frac{dZ}{dr}\right)-XY=0, \qquad (7.5)$$

$$V\left[\frac{d^2x}{dr^2}-\frac{1}{Y}\left(\frac{dY}{dr}\right)\frac{dX}{dr}+\frac{2}{Z}\left(\frac{dX}{dr}\right)\frac{dZ}{dr}\right]=0. \qquad (7.6)$$

Для доказательства леммы составим символы Кристоффеля (связность) для квадратичной формы:

$$dl^2 = a_{rr}(dr)^2 + a_{\theta\theta}(d\theta)^2 + a_{\varphi\varphi}(d\varphi)^2. \qquad (7.7)$$

Ковариантный метрический тензор $a_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = r$, θ, φ) согласно (7.3) имеет следующий вид:

$$a_{rr} = Y^2, \quad a_{\theta\theta} = Z^2, \quad a_{\varphi\varphi} = Z^2\sin^2\theta, \qquad (7.8)$$

$$a_{\theta\varphi} = 0, \quad a_{\varphi r} = 0, \quad a_{r\theta} = 0,$$

а контрвариантный метрический тензор $a^{\alpha\beta}$ имеет следующие компоненты:

$$a^{rr} = \frac{1}{Y^2}, \quad a^{\theta\theta} = \frac{1}{Z^2}, \quad a^{\varphi\varphi} = \frac{1}{Z^2\sin^2\theta}, \qquad (7.9)$$

$$a^{\theta\varphi} = 0, \quad a^{\varphi r} = 0, \quad a^{r\theta} = 0.$$

При получении формул (7.9) был использован тот легко проверяемый факт, что контрвариантный метрический тензор g^{lm} всякого риманова пространства V_n может быть выражен через соответствующий ковариантный метрический тензор g_{ik} этого пространства по формуле

$$g^{lm} = \frac{A_{lm}}{g},$$

где A_{lm} — алгебраическое дополнение элемента (l, m) матрицы $[g_{ik}]$, а $g = |g_{ik}|$.

С учетом (7.8), (7.9) получим выражение для символов Кристоффеля, составленных по общим формулам (2.22) для трехмерного пространства с интервалом (7.7) (эти символы Кристоффеля будем обозначать через $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\delta}$ в отличие от символов Кристоффеля Γ^{l}_{kl} четырехмерного пространства событий (7.3)):

$$\tilde{\Gamma}^{r}_{rr} = \frac{Y'}{Y}, \quad \tilde{\Gamma}^{r}_{\theta\theta} = -\frac{ZZ'}{Y^2}, \quad \tilde{\Gamma}^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{ZZ'}{Y^2}\sin^2\theta,$$

$$\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \tilde{\Gamma}^{\theta}_{r\theta} = \frac{Z'}{Z}, \quad \tilde{\Gamma}^{\varphi}_{rr} = \frac{Z'}{Z}, \quad \tilde{\Gamma}^{\varphi}_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta. \qquad (7.10)$$

а остальные символы Кристоффеля $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\delta}$ для формы (7.7) равны нулю; в формулах (7.10) «штрих» означает производную по r.

Вычисляя по общей формуле (2.25) тензор кривизны $R^{\alpha}_{\beta,\delta\rho}$ для трехмерного пространства (7.7), с учетом формул (7.8) получаем для тензора Риччи R_{ik} и скалярной кривизны R четырехмерного пространства с метрикой (7.3) и для тензора Риччи $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ трехмерного пространства с метрикой (7.7) следующие соотношения:

$$R_{0\beta} = 0, \quad R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{V_{\alpha\beta}}{X},$$

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = -X a^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{00} R, \tag{7.11}$$

$$R = -\frac{2}{X} a^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta},$$

$$V_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 X}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} - \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta} \frac{\partial X}{\partial y^\delta},$$

где все греческие индексы принимают значения r, θ, φ.

Отсюда находим, что уравнения поля Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik} \tag{7.12}$$

могут быть записаны для пространства событий с метрикой (7.3) в виде системы

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\varkappa T_{\alpha\beta} \quad \text{(для пространственных компонент)}, \\ 0 = -\varkappa T_{\alpha 0} \quad \text{(для смешанных компонент)}, \\ -X a^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{00} R = -\varkappa T_{00} \quad \text{(для (0, 0)-компоненты)}, \\ \qquad (\alpha, \beta = r, \theta, \varphi). \end{cases} \tag{7.13}$$

Далее для свободного от вещества пространства (т. е. в области D_2 пространства V_3 с метрикой (7.7), где $T_{mn} = 0$) получаем из (7.10) — (7.12) систему уравнений

$$X\tilde{R}_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = r, \theta, \varphi), \tag{7.14}$$

$$X a^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} = 0, \quad (y^1, y^2, y^3) \in D_2 \subset V_3, \tag{7.15}$$

поскольку из уравнений Эйнштейна в этой области получаем

$$R = T^i_i = 0, \quad (y^1, y^2, y^3) \in D_2 \subset V_3.$$

И, наконец, используя выражения для компонент тензора кривизны $\tilde{R}^{\alpha}_{\beta,\delta\rho}$ трехмерного пространства с метрикой (7.7), убеждаемся, что система независимых уравнений, вытекающих из системы (7.14), (7.15), имеет именно вид системы уравнений (7.4)—(7.6), что и доказывает утверждение леммы 7.1.

Перейдем теперь к решению системы уравнений (7.4) — (7.6).

Систему уравнений (7.4) — (7.6) в области, где $X \neq 0$, можно переписать в виде

$$\frac{XY^2}{Z} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{Z'}{XY}\right) = 0, \tag{7.16}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{ZX}{Y} Z'\right) - XY = 0, \tag{7.17}$$

$$\frac{Y}{Z^2} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{X'Z^2}{Y}\right) = 0. \tag{7.18}$$

Общий интеграл уравнения (7.16) в области, где $\frac{XY^2}{Z} \neq 0$, имеет вид

$$\frac{Z'}{XY} = C_1. \tag{7.19}$$

Для определения значения постоянной C_1 потребуем выполнения предельных условий при $r \to \infty$:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{Z(r)}{r} = 1, \quad \lim_{r\to\infty} Y(r) = 1, \quad \lim_{r\to\infty} X(r) = 1. \tag{7.20}$$

Предельные условия (7.20) физически означают требование, чтобы при достаточно большом удалении от вещества метрика пространственно-временного многообразия переходила в псевдоевклидову метрику специальной теории относительности (5.25).

Из (7.20) находим

$$C_1 = 1. \tag{7.21}$$

Подставляя (7.19), (7.21) в уравнение (7.5), после интегрирования и повторного использования выражений (7.19), (7.21) получаем

$$Z(X^2 - 1) = C_2. \tag{7.22}$$

Для определения постоянной C_2 потребуем, чтобы при больших расстояниях r величина X^2 совпадала с результатом, даваемым в теории тяготения Ньютона, т. е. потребуем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{X^2}{(g_{00})_H} = 1, \tag{7.23}$$

где $(g_{00})_H = 1 - \frac{2\gamma\mu}{rc_0^2}$, μ — масса центрального тела, c_0 — скорость света в вакууме. Из (7.23) находим

$$C_2 = -\frac{2\gamma\mu}{c_0^2}.$$

Таким образом, получим

$$X^2 = 1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}. \tag{7.24}$$

Пока были использованы лишь первые два уравнения полученной системы (7.16) — (7.18) вместе с предельными условиями (7.20), 7.23). Вместе с тем прямой подстановкой можно убедиться, что найденное решение (7.24), (7.19), (7.21) удовлетворяет и третьему уравнению этой системы, а именно уравнению (7.18). Таким образом, полученное решение (7.24), (7.19), (7.21), которое еще можно переписать в виде

$$X^2 = 1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}, \quad Y^2 dr^2 = \frac{dZ^2}{1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}}, \tag{7.25}$$

является решением системы уравнений (7.16) — (7.18), удовлетворяющим предельным условиям (7.20), (7.23).

Подставляя найденное решение (7.25) в (7.3), можем записать выражение для интервала центрально-симметрического поля в виде

$$ds^2 = X^2 (dy^0)^2 - \frac{dZ^2}{X^2} - Z^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{7.26}$$

где $X^2 = 1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}$, $Z = Z(r)$ — пока произвольная функция, удовлетворяющая предельному условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{Z(r)}{r} = 1. \tag{7.27}$$

Таким образом, с учетом леммы 7.1 получаем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть в некоторой системе координат* y^i *пространства событий* V_4 *реализуется центрально-симметрическое поле тяготения и пусть для всех* $y^0 \in R^1$

$$D_1 = \bigcup_{m,n} \operatorname{supp} T_{mn}$$

— ограниченная область в трехмерном пространстве V_3 *с метрикой* (7.7), *содержащая начало координат пространства* V_3.

Тогда в области $D_2 = V_4 \setminus Ц$, *где* $Ц = (y^i \| y^\alpha \in D_1, \ \alpha = 1,2,3; \ \forall y^0 \in R^1)$, *в этой системе координат интервал, удовлетворяющий уравнениям поля* (7.12) *и предельным условиям* (7.20), (7.23), *имеет вид*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}\right)(dy^0)^2 - \frac{dZ^2}{1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc_0^2}} - Z^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{7.28}$$

с некоторой непрерывно дифференцируемой в области D_2 *функцией* $Z(r)$, *удовлетворяющей предельному условию* (7.27).

7.2. Гармоническая система координат. Итак, возвращаясь к сформулированным в начале этого параграфа условиям, заключаем, что существуют такие системы координат y^i, в которых в области, свободной от вещества, реализуется центрально-симметрическое поле тяготения, т. е. реализуется пространство, метрика которого удовлетворяет условиям 1 и 2 настоящего параграфа. Причем подобные системы координат y^i, как следует из формул (7.26), (7.27), образуют некоторый класс, и каждая из таких координатных систем y^i может быть охарактеризована своей функцией $Z(r)$, удовлетворяющей предельному условию (7.27).

Сам факт существования неоднозначности в выборе системы координат, в которой реализуется центрально-симметрическое поле тяготения, является проявлением более общего обстоятельства, вытекающего из самой постановки физической задачи. Дело в том, что из-за явной ковариантности уравнений поля Эйнштейна выбор системы координат при рассмотрении многих конкретных задач общей теории относительности может быть сделан, вообще говоря, с большой степенью произвола. Зафиксировать же однозначно систему координат следует из некоторых дополнительных требований. Во многих случаях в качестве такой «привилегированной» системы координат полезно рассмотреть гармоническую систему координат.

Определение 7.1. *Гармонической системой координат* в пространственно-временном многообразии будем называть такую, в которой

$$\hat{\Box} x^l \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial x^l}{\partial x^k}\right) = 0 \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \quad (7.29)$$

Условие (7.29) называют *условием гармоничности*.

Привилегированность гармонической системы координат состоит в том, что она в общем случае определяется с точностью до преобразований группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ (3,1) (преобразований Лоренца), являющейся группой движений специальной теории относительности. В. А. Фоком в книге [196] показано, что в случае изолированной системы масс существует координатная система, а именно гармоническая, которая определяется наложением условий (7.29) однозначно, с точностью до преобразований Лоренца.

Определим функцию $Z(r)$ из выражений для интервала (7.26) в гармонической системы координат.

Для метрики (7.28) оператор $\hat{\Box}$, действующий на произвольную функцию Ψ, имеет вид

$$\hat{\Box}\Psi = \frac{1}{X^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^{0^2}} - \frac{1}{Z^2}\left\{\frac{1}{XY} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{XZ^2}{Y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \Delta^* \Psi\right\}, \quad (7.30)$$

где

$$\Delta^* \Psi \equiv \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}.$$

Из представления (7.30) очевидно, что координата y^0 удовлетворяет условию гармоничности. Вычисления показывают, что для выполнения остальных условий гармоничности $\hat{\Box} y^\alpha = 0$ ($\alpha = 1,\ 2,\ 3$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{1}{XY} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{XZ^2}{Y}\right) - 2r = 0. \quad (7.31)$$

Решая это уравнение с учетом предельных условий (7.20) для интервала (7.28), находим в качестве единственного решения в области $Z \geqslant \frac{\gamma\mu}{c_0^2}$ следующее:

$$Z(r) = r + \frac{\gamma\mu}{c_0^2} \equiv r + \alpha.$$

Таким образом, гармоническая система координат допускает центрально-симметрическое поле тяготения, причем интервал при этом определяется в гармонической системе координат в области вне вещества единственным образом и имеет вид

$$ds^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)(dy^0)^2 - \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha}\right)dr^2 - (r+\alpha)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta dy^2), \quad (7.32)$$

$$y \in D_2 = V_4 \setminus [\bigcup_{m,n} \operatorname{supp} T_{mn}(y)],$$

где $\alpha = \frac{\gamma\mu}{c_0^2}$.

Возвращаясь к постановке задачи А из § 6 о решении уравнений движения совместно с уравнениями поля в общей теории относительности, отметим, что решение уравнений поля в виде центрально-симметрического поля (7.32) как раз является решением *уравнений Эйнштейна* (7.12) в постановке А. Решения же *уравнений движения* для найденного интервала (7.32) в постановке А будут исследованы ниже, в § 9.

В связи с постановкой задачи Б и определением 6.4 из § 6 заметим, что найденное решение (7.32) уравнений поля является решением класса $(\infty, 0)$ по параметру $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ в гармонической системе координат $\Big($поскольку величина $\frac{\gamma\mu}{r}$ является величиной порядка $v_{\max}^2$, а в области D_2 имеем $r > \alpha\Big)$.

Наряду с гармонической системой координат можно выбрать иную систему координат, совместную с центрально-симметрическим полем тяготения. Например, можно выбрать такую систему координат, в которой реализуется центрально-симметрическое поле тяготения (7.28) с функцией $Z(r)$, равной r тождественно. Тогда в этой системе координат интервал (7.28) примет следующий вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma\mu}{rc_0^2}\right)(dy^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\gamma\mu}{rc_0^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.33)$$

$$y \in D_2 = V_4 \setminus [\bigcup_{m,n} \operatorname{supp} T_{mn}(y)].$$

Выражение для интервала (7.33) называется *внешним решением Шварцшильда.*

7.3. Пробное тело в центрально-симметрическом поле тяготения. В общей теории относительности *пробным телом* (или *пробной частицей*) называют материальное тело, обладающее столь малой массой и столь малым зарядом (электрическим, магнитным и иным зарядом, связанным с любым физически существующим полем), что, будучи помещенным в некоторую область пространственно-временного многообразия с некоторой метрикой, такое тело вызовет лишь пренебрежимо малое искажение этой метрики.

Движущееся пробное тело можно рассматривать как принадлежащую некоторому потоку частицу. В § 5 для такой частицы были получены уравнения движения, и эти уравнения оказались уравнениями геодезических (5.19). В § 5 уравнения движения пробной частицы были получены из закона сохранения

$$\nabla_k T^{kl} = 0.$$

С тем же успехом уравнения движения пробной частицы (5.19) могут быть получены в общей теории относительности из вариационного принципа наименьшего действия:

$$\delta \int ds = \delta \int \mathrm{L}\, dt = 0, \quad x^0 = c_0 t, \tag{7.34}$$

как уравнения движения Эйлера для некоторой функции Лагранжа L. Соответствующий вывод можно найти в любом учебнике по общей теории относительности.

В тех задачах общей теории относительности, в которых известен точный вид функции Лагранжа L, проблема может быть решена стандартными методами механики. А именно по функции Лагранжа можно получить как сами уравнения движения, так и соответствующие законы сохранения, а затем исследовать решения полученных уравнений движения.

Центрально-симметрическое поле тяготения является именно такой задачей общей теории относительности, когда известен точный вид функции Лагранжа.

Действительно, для случая центрально-симметрического поля тяготения в качестве функции Лагранжа, фигурирующей в (7.34), как следует из формул (7.28), (7.32), (7.33), может быть взято выражение

$$\mathrm{L} = \sqrt{\left(1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc^2}\right) c^2 - \frac{dZ^2}{1 - \frac{2\gamma\mu}{Zc^2}} - Z^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]}, \tag{7.35}$$

причем $Z = r + \frac{\gamma\mu}{c_0^2}$ в гармонической системе координат и $Z = r$ для внешнего решения Шварцшильда.

Таким образом, движение всякого пробного тела (рассматриваемого как материальная точка), помещенного в центрально-симметрическое гравитационное поле, может быть полностью описано с помощью лагранжевого формализма с функцией Лагранжа, даваемой выражением (7.35).

Тем самым задача о решении уравнений движения общей теории относительности для случая центрально-симметрического поля тяготения сводится к задаче механики с известной функцией Лагранжа.

Прежде чем исследовать решения такой задачи общей теории относительности, приведем решение задачи механики Ньютона о движении системы двух тел.

§ 8. Задача двух тел в механике Ньютона

При решении задачи двух тел в общей теории относительности нам будет необходимо проводить сравнение с механикой Ньютона как при самой постановке задачи, так и при ее решении и обсуждении результатов. С этой целью ниже изложим схему решения задачи двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил в механике Ньютона. Для такой задачи известна функция Лагранжа. Изложение проведем в форме, наиболее удобной для последующего сравнения с постановкой и решением задачи двух тел в общей теории относительности.

8.1. Постановка задачи, выбор системы координат. В механике Ньютона задача двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил, решается с помощью лагранжева формализма. При этом функция Лагранжа двух тел с массами m_1 и m_2 имеет следующий вид:

$$\mathrm{L} = \frac{m_1 \dot{\vec{x}}_1^{\,2}(t)}{2} + \frac{m_2 \vec{x}_2^{\,2}(t)}{2} - U(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i}{2} (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\varphi}_i^2 \sin^2 \theta_i + r_i^2 \dot{\theta}_i^2) -$$

$$- U\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 [\sin\theta_1 \, \sin\theta_2 \, \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\theta_1 \, \cos\theta_2]}\right), \tag{8.1}$$

где декартовы координаты $\vec{x}_i = \vec{x}_i(t) = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} \in R^3$ $(i = 1, 2)$ выражаются через сферические координаты посредством соотношений

$$x_i^1 = r_i \cos\varphi_i \sin\theta_i,$$

$$x_i^2 = r_i \sin\varphi_i \sin\theta_i,$$

$$x_i^3 = r_i \cos\theta_i, \quad r_i \in [0, \infty), \quad \varphi_i \in [0, 2\pi), \quad \theta_i \in [0, \pi) \quad (i = 1, 2), \tag{8.2}$$

$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| = \sqrt{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}$; точка сверху означает дифференцирование по переменной $t \in (-\infty, \infty)$; $U(\xi)$ — вещественнозначная кусочно-непрерывная функция аргумента $\xi \in R^1$, называемая *потенциальной энергией взаимодействия* тел.

Переходя от декартовых координат x_i^α $(i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3)$ к новым переменным

$$x^\alpha \equiv x_1^\alpha - x_2^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{8.3}$$

называемым *относительными координатами*, и величинам

$$R^\alpha \equiv \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (m_1 x_1^\alpha + m_2 x_2^\alpha), \tag{8.4}$$

называемым *координатами центра масс* системы двух тел, можем переписать выражение (8.1) в виде

$$\mathrm{L} = \frac{m_1^2 m_2^2 \dot{\vec{R}}^2}{2(m_1 + m_2)^3} + \frac{m_1 m_2 \dot{\vec{x}}^2}{2(m_1 + m_2)} - U(|\vec{x}|). \tag{8.5}$$

Выражение (8.5) записано в произвольной декартовой системе координат.

С целью получить как можно более наглядные выражения выберем далее всюду в этом параграфе систему координат, в которой центр масс системы двух тел неподвижен и находится в начале координат:

$$R^\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{8.6}$$

Система трех уравнений (8.6) относительно переменных r_i, θ_i, φ_i имеет следующие (и только такие) решения:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi, \quad \theta_1 + \theta_2 = \pi, \quad r_1 = \frac{m_2 r_2}{m_1}. \tag{8.7}$$

Поэтому в системе координат, в которой центр масс неподвижен, выражение (8.1) принимает вид

$$L \equiv \mathrm{L}/_{\vec{R}=0} = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - U(|\vec{x}|) =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}_1^2 \sin^2\theta_1 + r^2 \dot{\theta}_1^2) - U(r), \quad r = \sqrt{\vec{x}^2}, \tag{8.8}$$

где $m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется приведенной массой двух тел.

Очевидно, что функция Лагранжа (8.8) инвариантна при произвольных вращениях трехмерного пространства и не зависит явно от t. Поэтому по теореме Нётter * получаем четыре интеграла движения, а именно *интеграл момента количества движения*

$$\vec{M} = [\vec{x} \times \vec{p}] = \mathrm{const}, \tag{8.9}$$

---

* См., например, работы Фока В. А. [196], Боголюбова Н. Н. и Ширкова Д. В. [18], Ландау Л. Д. и Лифшица Е. М. [97].

где

$$p^{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{8.10}$$

и *интеграл энергии*

$$E = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L = \mathrm{const}. \tag{8.11}$$

Наличие интеграла $\vec{M}$, очевидно, означает, что движение происходит в плоскости. В качестве такой плоскости удобно выбрать координатную плоскость

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = 0.$$

При таком выборе функция Лагранжа (8.8) примет вид

$$\mathcal{L} \equiv \mathrm{L}/_{\substack{\vec{R}=0\\ \theta_1=\frac{\pi}{2}=\mathrm{const}}} = \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}_1^2) - U(r). \tag{8.12}$$

Таким образом, задача двух тел с массами m_1 и m_2, взаимодействующих посредством центральных сил в механике Ньютона, сводится к задаче о движении некоторой частицы с приведенной массой $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в поле силового центра и характеризуется функцией Лагранжа (8.12).

8.2. Интегралы движения. Используя вытекающие из вариационного принципа наименьшего действия

$$\delta A = \int \mathcal{L} dt = 0$$

уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \quad q_1 = r, \quad q_2 = \varphi_1 = \varphi) \tag{8.13}$$

для обобщенной координаты $q_2 = \varphi$, получаем интеграл движения

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}, \tag{8.14}$$

называемый *интегралом площадей*.

В выбранной системе координат $\left(\text{где } \vec{R} = 0,\ \theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \dot{\theta}_1 = 0\right)$, очевидно, справедливы равенства $M = M_3$, $M_2 = M_1 = 0$, т. е. интеграл площадей является в данном случае интегралом момента количества движения.

Второй интеграл, а именно интеграл энергии (8.11) для функции Лагранжа (8.12), принимает вид

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \mathrm{const}. \tag{8.15}$$

Второе из уравнений движения (8.13), а именно уравнение Эйлера для $q_1 = r$, принимает вид

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{dU(r)}{dr}. \qquad (8.16)$$

После домножения слева и справа на $\dot{r}$ последнее уравнение с учетом (8.14) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)\right] = 0,$$

что после интегрирования дает в точности закон сохранения энергии (8.15).

Таким образом, уравнения движения (8.13) для функции Лагранжа (8.12) могут быть записаны в виде двух законов сохранения:

$$\begin{gathered} M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \\ E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \text{const}. \end{gathered} \qquad (8.17)$$

Последние соотношения можно записать в виде

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}, \qquad (8.18)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}. \qquad (8.19)$$

Из выражения (8.19) видно, что $\varphi(t)$ — монотонная функция от времени t, и выбором направления отсчета угла φ можно получить, что $\varphi(t)$ всегда растет с ростом t.

Используя выражение (8.18), можно установить, что при заданных $E = \bar{E}$, $M \geqslant 0$ область $\mathcal{R}$ допустимых значений величины r при движении частицы массы m определяется следующим образом:

$$\mathcal{R} = \left(r \,\|\, \mathcal{P}(r;\ M, E) \equiv E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \geqslant 0\right) \subset R^1. \qquad (8.20)$$

Обозначим через $Q(M, E)$ множество всех неотрицательных корней $\{\dots r_i \dots\}_{i=1}^{J}$ функции $\mathcal{P}(r;\ M,\ E) \equiv E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}$ (в частности, возможно $r_J = \infty$). Тогда можно сказать, что в зависимости от начальных условий движение при всех $t \in R^1$ происходит в некоторой области

$$r \in [r_i, r_{i+1}] \cap \mathcal{R} = \mathfrak{P}_i, \quad r_i \in Q(M, E) \quad (i = 1, 2, \dots, J-1).$$

Очевидно, $\bigcup\limits_{i=1}^{J-1} \mathfrak{P}_i = \mathcal{R}$.

Интегрируя уравнения (8.18), (8.19), находим

$$t = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + C_1 \quad (r_0 \in [r_i, r_{i-1}] \cap \mathcal{R} = \mathfrak{P}_i)$$

$$(r \in \mathfrak{P}_i), \quad (i = 1, 2, \dots, J-1) \qquad (8.21)$$

и формулу орбиты

$$\varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + C_2 \qquad (r_0 \in \mathfrak{P}_i; r \in \mathfrak{P}_i),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, J - 1), \tag{8.22}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Выясним, при каких условиях радиус r траектории не зависит от t. Для этого необходимо, очевидно, чтобы выполнялись два соотношения: $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Последние условия с учетом (8.16), (8.18) принимают вид системы двух уравнений:

$$E - U_{\text{э}}(r) = 0, \tag{8.23}$$

$$\frac{d}{dr} U(r) = 0, \tag{8.24}$$

где $U_{\text{э}}(r) \equiv \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$ — эффективная потенциальная энергия.

Итак, (8.23), (8.24) — необходимые условия того, что $r = \text{const}$.

В частности, если в некоторой точке $r = r_m$ функция $U_{\text{э}}(r)$ имеет минимум и $E = U_{\text{э}}(r_m)$, то движение происходит с постоянным радиусом $r = r_m$.

8.3. Ньютоновское гравитационное притяжение. Далее в этом параграфе рассмотрим конкретный вид потенциальной энергии:

$$U(r) = \frac{-\varkappa}{r}, \quad \varkappa > 0, \tag{8.25}$$

отвечающий гравитационному ньютоновскому притяжению либо кулоновскому притяжению. При этом функция $E - U_{\text{э}}(r) = E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\varkappa}{r}$ имеет единственный минимум $\left(\text{в точке } r = \frac{M^2}{m\varkappa}\right)$ и два нуля в области $r \geqslant 0$ таких, что при $E \geqslant 0$ второй нуль лежит в точке $r_2 = \infty$ (движение инфинитно), при $E < 0$ оба этих нуля лежат в конечной области (движение финитно), а при $E = -\frac{m\varkappa^2}{2M^2}$ функция $E - U_{\text{э}}(r)$ имеет один двукратный нуль в точке $r = \frac{M^2}{m\varkappa}$ $\left(\text{движение финитно, с постоянным радиусом } r = \frac{M^2}{m\varkappa}\right)$. Выполняя интегрирование в (8.22), получаем

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\varkappa}{M}}{\sqrt{2mE - \frac{m^2\varkappa^2}{M^2}}} + C_2. \tag{8.26}$$

Последнюю формулу можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(\varphi - C_2), \tag{8.27}$$

где $p \equiv \frac{M^2}{m\varkappa}$, $e \equiv \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\varkappa^2}}$ — параметр и эксцентриситет орбиты.

Ясно, что если $E < 0$, то $e < 1$, что соответствует эллиптической орбите. В частности, для минимально допустимого значения энергии $E = -\frac{m\varkappa^2}{2M^2}$ получаем $e = 0$, т. е. эллипс обращается в окружность радиуса $r = p$.

Если $E > 0$, то $e > 1$ и уравнение (8.27) дает уравнение гиперболы с $r_{\min} = a(e - 1)$. Для $E = 0$ эксцентриситет $e = 1$, т. е. частица движется по параболе с $r_{\min} = \frac{p}{2}$.

Для эллиптической орбиты ($e < 1$) зависимость r от t, даваемая выражением (8.21), может быть представлена для потенциальной энергии (8.25) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^3}{\varkappa}}(\psi - e\sin\psi) + C_1 \quad (e < 1), \\ r &= a(1 - e\cos\psi), \end{aligned} \tag{8.28}$$

где $\psi \in (-\infty, \infty)$, $a \equiv \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\varkappa}{2|E|}$.

8.4. Устойчивость решения задачи Коши. Исследуем теперь вопрос об устойчивости (по Ляпунову) решения начальной задачи Коши для уравнений (8.16), (8.14).

Уравнения движения (8.16), (8.14) можно записать как систему четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= w, \\ \dot{r} &= v, \\ \dot{v} &= rw^2 - \frac{1}{m} \cdot \frac{dU(r)}{dr}, \\ \dot{w} &= -\frac{2vw}{r}, \end{aligned} \tag{8.29}$$

относительно компонентов четырехмерного вектора

$$\vec{F}(t) = \left\{ r(t), T_0\frac{dr}{dt}, r_0\varphi(t), r_0T_0\frac{d\varphi}{dt} \right\} \equiv \{F_1, F_2, F_3, F_4\} \in E^4, \tag{8.29a}$$

принадлежащего вещественному евклидовому пространству E^4, где r_0, T_0 — некоторые постоянные размерности длины и времени соответственно.

Для постановки начальной задачи Коши для этой системы уравнений необходимо задать начальные условия:

$$r(t_0) = \xi_0 = \bar{\xi}_0, \quad \frac{dr(t_0)}{dt} = \dot{r}(t_0) = \xi_1 = \bar{\xi}_1,$$
$$\varphi(t_0) = \eta_0 = \bar{\eta}_0, \quad \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = \dot{\varphi}(t_0) = \eta_1 = \bar{\eta}_1, \tag{8.30}$$

причем ξ_0, ξ_1, η_0, η_1 должны быть совместными с условиями существования соответствующего решения задачи Коши (8.29), (8.30).

Начальные условия для системы уравнений (8.29) можно задавать иначе, а именно задавая вместо четырех чисел (8.30) другие четыре числа:

$$r(t_0) = \xi_0 = \bar{\xi}_0, \quad \frac{m\dot{r}^2(t_0)}{2} + U_э(r(t_0)) = E = \bar{E},$$
$$\varphi(t_0) = \eta_0 = \bar{\eta}_0, \quad mr^2(t_0)\dot{\varphi}(t_0) = M \geqslant 0, \tag{8.31}$$

подчинив выбор этих чисел дополнительному условию

$$E - U_э(r(t_0)) \geqslant 0$$

и выбирая определенный знак для $\frac{dr(t_0)}{dt}$.

Третья альтернативная возможность задавать начальные условия задачи Коши (эквивалентная двум упомянутым выше) состоит в задании двух аддитивных констант C_1 и C_2 в выражениях (8.21), (8.22) и двух констант $E = \bar{E}$ и $M \geqslant 0$, подчинив выбор этих чисел условиям существования соответствующего решения задачи Коши.

Для начальной задачи Коши (8.29), (8.31), (8.25) можно поставить задачу о технической устойчивости движения в соответствии с определением 3.4а из § 3. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 8.1. Решение начальной задачи Коши (8.29), (8.31) с потенциальной энергией (8.25) для заданных начальных значений E, M, ξ_0, η_0 из области

$$D = \left(E, M, \xi_0, \eta_0 \| E < 0, M \geqslant 0, \xi_0 > 0, \eta_0 = \bar{\eta}_0, E + \frac{\varkappa}{\xi_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{M^2}{2m\xi_0^2} \geqslant 0\right) \tag{8.32}$$

устойчиво технически на всяком конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, но не асимптотически.

Для доказательства утверждения воспользуемся представлением решения начальной задачи Коши (8.29), (8.31), (8.25) в виде (8.17); (8.26), (8.28).

Обозначим через $\vec{F}_1(t)$ значение вектора (8.29а), вычисленное по формулам (8.17), (8.26), (8.28) для начальных данных $\xi_0 + \delta\xi_0$, $\eta_0 + \delta\eta_0$, $E + \delta E$, $M + \delta M$, принадлежащих области D. Полагая $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, δE, δM бесконечно малыми, вычислим значения компонент вектора $\vec{F}_1(t)$ с точностью до членов $O(\delta^2)$, квадратичных по бесконечно малым.

В частности, находим ($E < 0$, $0 \leqslant \left[\frac{T_0^2}{mr_0} |\delta E| + \frac{T_0}{mr_0} |\delta M| + |\delta\xi_0| + r_0 |\delta\eta_0|\right] \equiv \Phi(\delta E, \delta M, \delta\xi_0, \delta\eta_0) \leqslant \Delta$, где Δ достаточно мало)

$$\delta r_1 \equiv \delta r /_{\delta E = \delta M = \delta\eta_0 = \delta t_0 = 0; \delta\xi_0 \neq 0} = -\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_э(r))}\, \delta\xi_0 + O(\delta^2),$$

откуда

$$|\delta r_1| < \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{m\varkappa^2}{2M^2}\right)}\, \delta\xi_0;$$

$$\delta r_2 \equiv \delta r /_{\delta E = \delta M = \delta t_0 = \delta\xi_0 = 0; \delta\eta_0 \neq 0} = O(\delta^2);$$

$$\delta r_3 \equiv \delta r /_{\delta M = \delta\xi_0 = \delta\eta_0 = \delta t_0 = 0;\ \delta E \neq 0} = \left\{\frac{\alpha}{2E^2}(1 - e\cos\psi) + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha}{2E}\left[+ \frac{M^2}{m\varkappa^2 e}\cos\psi - \frac{e\sin\varphi}{1 - e\cos\psi}\left(\frac{M^2}{m\varkappa^2 e}\sin\psi - \frac{3(e\sin\psi - \psi)}{2E}\right)\right]\right\} \times$$
$$\times\, \delta E + O(\delta^2) = C(\psi, E, M)\, \delta E + O(\delta^2),$$

откуда

$$|\delta r_3| < C_3(E, M) |\delta E|,$$

где $C_3(E, M) = 2\max\limits_{t \in [t_0, t_0 + T]} |C(\psi, E, M)|$.

Проделывая аналогичные оценки при $\delta E = \delta\eta = \delta\xi_0 = \delta t_0 = 0$; $\delta M \neq 0$ для δr и $\delta\dot{r}$, $\delta\varphi$, $\delta\dot{\varphi}$ и учитывая непрерывную зависимость ξ_0 от C_1 в области $E < 0$, вытекающую из (8.28), получаем для $\{E, M, \xi_0, \eta_0\} \in D$, $\{E + \delta E, M + \delta M, \xi_0 + \delta\xi_0, \eta_0 + \delta\eta_0\} \in D$, $0 \leqslant \Phi(\delta E, \delta M, \delta\xi_0, \delta\eta_0) \leqslant \Delta$

$$|\vec{F}(t) - \vec{F}_1(t)| \leqslant H_1(E, M, \xi_0, \eta_0; T, T_0, r_0) |\delta E| +$$
$$+ H_2(E, M, \xi_0, \eta_0; T, T_0, r_0) |\delta M| + H_3(E, M, \xi_0, \eta_0; T, T_0, r_0) |\delta\xi_0| +$$
$$+ H_4(E, M, \xi_0, \eta_0; T, T_0, r_0) |\delta\eta_0| \leqslant H_5(T, T_0, r_0) \times$$
$$\times [|\delta E| + \rho_1 |\delta M| + \rho_2 |\delta\xi_0| + \rho_3 |\delta\eta_0|], \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{8.33}$$

где неотрицательные ограниченные постоянные H_1, H_2, H_3, H_4 зависят от E, M, ξ_0, η_0, T, T_0, r_0, $\varkappa$, m, Δ, а постоянные H_5, ρ_1, ρ_2, ρ_3 зависят только от $\varkappa$, m, T и Δ.

Аналогично устанавливаем

$$|\vec{F}(t_0) - \vec{F}_1(t_0)| \leqslant B_1(E, M, \xi_0, \eta_0; T_0, r_0) |\delta E| +$$
$$+ B_2(E, M, \xi_0, \eta_0; T_0, r_0) |\delta M| + B_3(E, M, \xi_0, \eta_0; T_0, r_0) |\delta\xi_0| +$$
$$+ B_4(E, M, \xi_0, \eta_0; T_0, r_0) |\delta\eta_0| \leqslant B_5(T_0, r_0) [|\delta E| + \rho_1 |\delta M| +$$
$$+ \rho_2 |\delta\xi_0| + \rho_3 |\delta\eta_0|], \tag{8.34}$$

где неотрицательные ограниченные постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 зависят от E, M, ξ_0, η_0, T_0, r_0, $\varkappa$, m, Δ, постоянная B_5 зависит только от T_0, r_0, $\varkappa$, m, Δ, а постоянные ρ_1, ρ_2, ρ_3 зависят только от $\varkappa$ и m.

Выберем теперь при заданном $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ величины δE, δM, $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$ такими, чтобы

$$|\delta E| + \rho_1 |\delta M| + \rho_2 |\delta\xi_0| + \rho_3 |\delta\eta_0| < \frac{\varepsilon}{H_5}, \tag{8.35}$$

и обозначим $\frac{\varepsilon}{H_5} \cdot B_5 \equiv \delta(\varepsilon, T)$. Тогда получим из (8.33), (8.35)

$$|\vec{F}(t) - \vec{F}_1(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \tag{8.36}$$

поскольку

$$|\vec{F}(t_0) - \vec{F}_1(t_0)| < \delta(\varepsilon, T). \tag{8.37}$$

Предложение 8.1 доказано; при этом в соответствии с определением 3.4а из § 3 получаем $A \equiv \varepsilon$; $\lambda \equiv \delta(\varepsilon, T)$; $J \equiv [t_0, t_0 + T]$.

Из этого утверждения и формулы (8.22) вытекает орбитальная устойчивость траектории $r = r(\varphi)$, соответствующей решению начальной задачи Коши (8.29), (8.31), (8.25) на бесконечном интервале $t \in [t_0, \infty)$ с начальными данными из области (8.32).

Можно показать, что в общем случае потенциальной энергии $U(r)$, обеспечивающей минимум величины $U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ в некоторой точке $r = r_m > 0$, существуют такие конечные постоянные $\rho > 0$, $\mu > 0$, что решение всякой начальной задачи Коши (8.29), (8.31) с начальными значениями E, M, ξ_0, η_0 из области

$$D_1 = \left(E, M, \xi_0, \eta_0 \,\middle\|\, \begin{array}{l} E = \bar{E},\ M > 0,\ \xi_0 > 0,\ \eta = \bar{\eta}_0,\ E - U(\xi_0) - \\ - \dfrac{M^2}{2m\xi_0^2} \geqslant 0, \\ -\rho \leqslant \xi_0 - r_m \leqslant \rho,\ \ 0 \leqslant E - U(r_m) - \dfrac{M^2}{2mr_m^2} \leqslant \mu \end{array} \right)$$

на всяком конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T] \equiv J$ является технически устойчивым, а соответствующая траектория $r = r(\varphi)$ является орбитально устойчивой на интервале $t \in [t_0, \infty)$.

Подчеркнем еще раз, что в механике по известной функции Лагранжа можно установить как точные уравнения движения, так и точные законы сохранения, а тем самым решить соответствующую задачу механики о взаимном движении масс.

§ 9. Движение пробного тела в центрально-симметрическом поле тяготения

Вернемся к задаче о решении уравнений движения пробного тела в центрально-симметрическом поле тяготения.

9.1. Постановка задачи, интегралы движения. В § 7 было установлено, что движение пробного тела в центрально-симметрическом поле тяготения может быть охарактеризовано функцией Лагранжа

$$\mathrm{L} = \sqrt{\nu_1(r)\,c^2 - \frac{1}{\nu_1(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \nu_2(r)\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]}, \tag{9.1}$$

причем вид функций $\nu_1(r)$ и $\nu_2(r)$ зависит от выбора системы координат. В частности, для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат получили

$$\nu_1(r) = \frac{r-\alpha}{r+\alpha}, \quad \nu_2(r) = (r+\alpha)^2, \quad \alpha \equiv \frac{\gamma\mu}{c^2}, \quad x^0 = ct, \tag{9.2}$$

а для внешнего решения Шварцшильда

$$\nu_1(r) = 1 - \frac{2\alpha}{r}, \quad \nu_2(r) = r^2. \tag{9.3}$$

Обычными методами механики, описанными в § 8, убеждаемся, что поскольку функция Лагранжа (9.1) не зависит явно от t и обладает сферической симметрией, то сохраняется трехмерный вектор момента количества движения $\vec{M} = [\vec{y} \times \vec{p}]$, где $p^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Отсюда вытекает, что траектория тела лежит в одной плоскости. Без ограничения общности можно выбрать в качестве такой плоскости координатную плоскость

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{9.4}$$

Тогда функция Лагранжа (9.1) примет вид

$$\mathcal{L} \equiv L/_{\theta=\frac{\pi}{2}=\mathrm{const}} = \sqrt{\nu_1(r)c^2 - \frac{1}{\nu_1(r)}\dot{r}^2 - \nu_2(r)\dot{\varphi}^2}, \tag{9.5}$$

где точка сверху, как и раньше, означает дифференцирование по t. Очевидно, функция Лагранжа (9.5) является релятивистским обобщением функции Лагранжа (8.12) частицы в поле центральных сил с потенциальной энергией $U(r) = -\frac{\varkappa}{r}$ с $\varkappa = \gamma m\mu$.

Поскольку функция Лагранжа (9.5) не зависит от t, φ и от $\dot{\theta}$, то получаем два интеграла движения:

$$-\mathcal{E} = \dot{r}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \mathcal{L} = -\frac{c^2\nu_1(r)}{\mathcal{L}} = \mathrm{const}, \tag{9.6}$$

$$\mathcal{M} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = -\frac{\dot{\varphi}\nu_2(r)}{\mathcal{L}} = \mathrm{const}, \tag{9.7}$$

которые соответствуют обычному *интегралу энергии* и *интегралу площадей*, причем в выбранной системе координат справедливо

$$M_1 = M_2 = 0, \quad M_3 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \mathcal{M} = \mathrm{const}.$$

Определим *собственное время* τ частицы, движущейся по траектории

$$x^i = x^i(s) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{9.8}$$

с помощью следующего выражения:

$$ds = c\,d\tau. \tag{9.9}$$

Тогда с учетом вытекающей из (7.28), (7.35) для функции Лагранжа этой частицы формулы

$$ds^2 = \mathcal{L}^2 dt^2 = c^2 \nu_1(r)\, dt^2 - dl^2 \tag{9.10}$$

можем переписать соотношения (9.6), (9.7) в виде

$$c\nu_1(r)\frac{dt}{d\tau} = \mathcal{E} \equiv c + \frac{E}{mc} = \text{const}, \tag{9.11}$$

$$\nu_2(r)\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{M}{m} = \text{const}, \qquad \frac{M^2}{m^2c^2} \equiv \mathcal{M}^2. \tag{9.12}$$

Величина E в пределе $c \to \infty$ переходит в полную энергию нерелятивистской частицы массы m:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m\gamma\mu}{r} + O\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

где $\quad v^2 = \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2.$

Из (9.11), (9.12) с учетом (7.28) получаем

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - c^2\nu_1(r) - \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2\nu_2(r)}. \tag{9.13}$$

Исключая τ из уравнений (9.12), (9.13), находим уравнение орбиты пробного тела:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 m^2 \nu_2^2(r)}{M^2} - \frac{c^2m^2\nu_1(r)\,\nu_2^2(r)}{M^2} - \nu_1(r)\,\nu_2(r) \equiv f(r,\, M,\, \mathcal{E}). \tag{9.14}$$

Уравнения (9.11) — (9.13) представляют собой систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трех функций $r(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $t(\tau)$. Из этих уравнений указанные функции могут быть найдены с помощью квадратур.

При этом формула орбиты записывается следующим образом:

$$\varphi = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{\mathcal{E}^2 m^2}{M^2}\nu_2^2(r) - \frac{c^2m^2\nu_1(r)\,\nu_2^2(r)}{M^2} - \nu_1(r)\,\nu_2(r)}} + C_2. \tag{9.15}$$

Для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат и для внешнего решения Шварцшильда выражение (9.15) принимает вид эллиптических интегралов, как это вытекает из формул (9.2) и (9.3).

Область $\mathcal{R}$ допустимых значений величины r при движении частицы массы m определяется как

$$\mathcal{R} = \left(r \,\|\, f(r;\, M,\, \mathcal{E}) \equiv \frac{\mathcal{E}^2 m^2}{M^2}\nu_2^2(r) - \frac{c^2m^2}{M^2}\nu_1(r)\,\nu_2^2(r) - \nu_1(r)\,\nu_2(r) \geqslant 0\right). \tag{9.16}$$

Выражение $f(r;\ M,\ \mathscr{E})$ имеет для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат нули в точках

$$r_1 = -\alpha, \quad r_2 = \alpha + \frac{8\alpha^2 \varkappa m}{M^2} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \tag{9.17а}$$

$$r_{3,4} = \frac{\varkappa}{2E} \mp \sqrt{\frac{\varkappa^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

Для внешнего решения Шварцшильда выражение $f(r;\ M,\ \mathscr{E})$ имеет нули в точках

$$r_1 = 0; \quad r_2 = 2\alpha + \frac{8\alpha^2 \varkappa m}{M^2} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \tag{9.17б}$$

$$r_{3,4} = \frac{\varkappa}{2E} \mp \sqrt{\frac{\varkappa^2}{4E^2} + \frac{M^2}{2mE}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

При этом как в гармонической системе координат, так и для решения Шварцшильда, если $E < 0$, то наибольший корень $r_4 < \infty$ и положителен, а поэтому движение с $r \geqslant r_3$ финитно; если же $E > 0$, то $r_3 < 0$ и движение с $r \geqslant r_4$ инфинитно; а если $E = 0$, то $r_4 = \infty$ и движение с $r \geqslant r_3$ также инфинитно.

9.2. Решение класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$. Исследуем более подробно формулу орбиты (9.15) для решений, принадлежащих на конечном интервале $\varphi \in [\varphi_0,\ \varphi_0 + \Phi]$ классу $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$. (Согласно результатам § 6 подобные решения будут реализовываться при таких и только таких начальных условиях, которые обеспечивают при заданном малом $\varepsilon > 0$ необходимую малость величин $\frac{E}{m} \ll c^2$ и $\frac{m^2}{M^2} \ll c^2$.) Для этих целей удобно исходить не из формулы орбиты (9.15), а непосредственно из уравнения (9.14), которое путем перехода от переменной r к новой переменной $u = \frac{1}{r}$ приводится к виду

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^4 \left[\frac{\mathscr{E}^2 m^2 \nu_4^2(u)}{M^2} - \frac{c^2 m^2 \nu_3(u)\, \nu_4^2(u)}{M^2} - \nu_3(u)\, \nu_4(u)\right] \equiv f(u),$$

где

$$\nu_1(r) = \nu_1\left(\frac{1}{u}\right) \equiv \nu_3(u), \qquad \nu_2(r) = \nu_2\left(\frac{1}{u}\right) \equiv \nu_4(u). \tag{9.18}$$

Для отыскания решения уравнения (9.18), принадлежащего классу $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, на конечном интервале $\varphi \in [\varphi_0,\ \varphi_0 + \Phi]$, воспользуемся методикой, эквивалентной методу усреднения для обыкновенного дифференциального уравнения * и весьма близкой к методике, изложенной в книге Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [17].

В силу результатов § 8, решение уравнения (9.18), соответствующее решению класса $(2k,\ \varepsilon)$, $k > 1$, задачи Коши (6.4), (6.5), на

---

* Детальное изложение метода усреднения в нелинейной механике и его многочисленные приложения можно найти в книге Ю. А. Митропольского [117].

конечном интервале $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \Phi]$ можно представить в виде

$$\frac{1}{r} = u = a_0 + a_1 \cos\psi + \sum_{l=1}^{k} \frac{u_l(a_0, a_1, \psi)}{c^{2l}} + O\left(\frac{1}{c^{2k+2}}\right),$$
$$\frac{d\psi}{d\varphi} = 1 + \sum_{l=1}^{k} \frac{b_l}{c^{2l}} + O\left(\frac{1}{c^{2k+2}}\right). \tag{9.19}$$

В частности, подставляя (9.19) для $k = 1$ в (9.18), после несложных вычислений получим следующие два утверждения.

Предложение 9.1. Для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат (7.32) решение уравнения (9.18), соответствующее решению класса $(1, \varepsilon)$ задачи Коши (6.4), (6.5), на конечном интервале $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \Phi]$ допускает представление в виде

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{p_1} + \frac{e_1}{p_1}\cos\psi, \tag{9.20}$$
$$\psi = \psi_0 + \left[1 - \frac{3\gamma\mu}{c^2 p} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right]\varphi, \qquad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \Phi],$$

где

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} + \frac{2\gamma\mu(e^2 + 2)}{c^2 p^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$
$$\frac{e_1}{p_1} = \frac{e}{p} + \frac{\gamma\mu(5e^2 + 1)}{c^2 p^2 e} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$
$$p = \frac{M^2}{\varkappa m}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{(\mathcal{E}^2 - c^2)M^2}{\varkappa^2}},$$

а ψ_0 — произвольная постоянная, которая связана с произволом в выборе начала отсчета угла φ.

Предложение 9.2. В системе координат, в которой реализуется внешнее решение Шварцшильда (7.33), решение уравнения (9.18), соответствующее решению класса $(1, \varepsilon)$ задачи Коши (6.4), (6.5), на конечном интервале $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \Phi]$ допускает представление в виде

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{p_2} + \frac{e_2}{p_2}\cos\psi, \tag{9.21}$$
$$\psi = \psi_0 + \left[1 - \frac{3\gamma\mu}{c^2 p} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right]\varphi, \qquad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \Phi],$$

где

$$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} + \frac{3\gamma\mu(e^2 + 2)}{2c^2 p^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$
$$\frac{e_2}{p_2} = \frac{e}{p} + \frac{\gamma\mu(3e^2 + 1)}{c^2 p^2 e} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$
$$p = \frac{M^2}{\varkappa m}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{(\mathcal{E}^2 - c^2)M^2}{\varkappa^2}},$$

а ψ_0 — произвольная постоянная.

В пределе $c \to \infty$ уравнения орбиты (9.20) и (9.21) совпадают и имеют вид

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \psi. \tag{9.22}$$

Это как раз случай механики Ньютона, рассмотренный в § 8. Таким образом, для тех начальных условий, при которых $\frac{E}{m} \ll c^2$, $\frac{m^2}{M^2} \ll c^2$ (слабо релятивистский случай), движение в области $r \gg r_3$ происходит по кривой, близкой к эллипсу или к гиперболе в зависимости от того, будет ли эксцентриситет $e_{1,2} < 1$ или $e_{1,2} > 1$.

При этом для движения с $e_{1,2} < 1$ орбита для решения класса (1, ε) имеет вид искаженного эллипса, большая полуось которого медленно вращается в прямом направлении так, что за один полный оборот частицы большая полуось поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \frac{3\gamma\mu}{c^2 p} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)} - 2\pi = \frac{6\pi\gamma\mu}{c^2 p} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{9.23}$$

Этот результат получается одинаковым для центрально-симметрического поля как в гармонической системе координат, так и для решения Шварцшильда, что очевидно из формул (9.20), (9.21).

Использование формулы (9.23) для объяснения наблюдаемого отклонения параметров орбит планет солнечной системы от ньютоновских параметров предсказывает для орбиты Меркурия значение неньютонового угла поворота большой полуоси 42,9 $\frac{\textit{угл.сек}}{\textit{столетие}}$, что хорошо согласуется с экспериментальным значением, равным $(42{,}56 \pm 0{,}91)\frac{\textit{угл.сек}}{\textit{столетие}}$.

Для остальных планет солнечной системы формула (9.23) предсказывает весьма малые значения, также согласующиеся с астрономическими данными. Подробнее об этом будет сказано ниже, в § 16, п. 6.1.

Более детальное исследование орбит (9.15) при различных значениях $\mathcal{E}$ и M для внешнего решения Шварцшильда можно найти в книге А. Ф. Богородского [19].

9.3. Техническая устойчивость движения . Исследование устойчивости движения будем проводить по схеме, использованной в § 8, п. 8.4.

В силу формул (9.11) — (9.13) можно рассматривать координаты x^i траектории движущегося пробного тела как функции только от t:

$$x^\alpha = x^\alpha(s(\tau)) = x^\alpha(s(\tau(t))) \equiv \hat{x}^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

поскольку

$$ct = x^0(s(\tau)) = \hat{x}^0(\tau).$$

Поэтому при исследовании устойчивости решений уравнений движения (9.11) — (9.13) можно перейти к уравнениям движения в форме дифференциальных уравнений по переменной t. Тогда результаты по устойчивости движения могут быть сформулированы в форме, близкой к формулировке устойчивости движения тела, движущегося в поле ньютоновских гравитационных сил, рассмотренного в § 8. Из (9.11) — (9.13), очевидно, следует

$$\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M\nu_1(r)}{\mathscr{E}\nu_2(r)}, \tag{9.24}$$

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = c\nu_1(r)\sqrt{1 - \frac{c^2\nu_1(r)}{\mathscr{E}^2} - \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2\nu_2(r)\mathscr{E}^2}}, \tag{9.25}$$

где $\mathscr{E} = c + \frac{E}{mc}$.

Из выражений (9.2), (9.3), (9.24) вытекают следующие два утверждения.

Замечание 9.1. Для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат (7.32) при движении в области $r > \frac{\gamma\mu}{c^2}$, $M > 0$ функция $\varphi(t)$ монотонно зависит от t и выбором направления отсчета угла φ можно установить, что при $r > \frac{\gamma\mu}{c^2}$, $M > 0$ $\varphi(t)$ всегда растет с ростом t.

Замечание 9.2. Для внешнего решения Шварцшильда (7.33) при движении в области $r > \frac{2\gamma\mu}{c^2}$, $M > 0$ функция $\varphi(t)$ монотонно зависит от t и выбором направления отсчета угла φ можно установить, что при $r > \frac{2\gamma\mu}{c^2}$, $M > 0$ величина φ всегда растет с ростом t.

Область $\mathcal{R}$ допустимых значений величины r определяется, согласно выражениям (9.16), (9.11), (9.25), в виде

$$\mathcal{R} = \left(r \,\|\, E \geqslant mc^2\left(-1 + \sqrt{\nu_1(r) + \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2c^2\nu_2(r)}}\right) \equiv U_э(r), \quad r > \hat{r}_0\right), \tag{9.26}$$

где $\hat{r}_0 = \frac{\gamma\mu}{c^2}$ для интервала (7.32) и $\hat{r}_0 = \frac{2\gamma\mu}{c^2}$ для интервала (7.33).

При переходе от формулы (9.16) к формуле (9.26) знак перед радикалом был выбран так, чтобы обеспечить в пределе $c \to \infty$ обращение выражения (9.26) в выражения (8.20), (8.25).

Фигурирующая в выражении (9.26) функция

$$U_э(r) = mc^2\left(-1 + \sqrt{\nu_1(r) + \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2c^2\nu_2(r)}}\right) \tag{9.27}$$

может быть названа *эффективной потенциальной энергией пробного тела в центрально-симметрическом гравитационном поле.* Она является релятивистским обобщением рассмотренной в § 8 эффективной потенциальной энергии $\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\varkappa}{r}$ нерелятивистской частицы массы m в поле центральных сил.

Подстановкой формулы (9.2) либо (9.3) в (9.26) и последующими простыми вычислениями устанавливаем, что справедливы два следующих ниже утверждения.

Предложение 9.3. Для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат (7.32) эффективная потенциальная энергия (9.27) в области $r \geqslant 0$ при $M > 2\sqrt{3}\,\alpha mc$ обладает следующими свойствами:

1) $U_{\text{э}}(r)$ имеет нули в точках

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha} - \alpha - \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \\ r_2 &= \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha} - \alpha + \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{M^2}{2m\varkappa} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ r_3 &= \infty; \end{aligned} \tag{9.28}$$

2) $U_{\text{э}}(r)$ имеет максимум в точке

$$r_{\max} = \frac{M^2}{2m\varkappa} - \alpha - \frac{M^2}{2m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{12\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{2\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{9.28а}$$

причем

$$U_{\text{э}}(r_{\max}) = mc^2\left[-1 + \sqrt{\left(\frac{r_{\max} - \alpha}{r_{\max} + \alpha}\right)\left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2(r_{\max} + \alpha)^2}\right)}\right] =$$

$$= mc^3\left[\frac{M}{3\sqrt{3}\varkappa} + O\left(\frac{1}{c}\right)\right];$$

3) $U_{\text{э}}(r)$ имеет минимум в точке

$$r_{\min} = \frac{M^2}{2m\varkappa} - \alpha + \frac{M^2}{2m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{12\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{M^2}{m\varkappa} - \frac{3\gamma\mu}{c^2} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{9.28б}$$

причем

$$U_{\text{э}}(r_{\min}) = mc^2\left[-1 + \sqrt{\left(\frac{r_{\min} - \alpha}{r_{\min} + \alpha}\right)\left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2(r_{\min} + \alpha)^2}\right)}\right] =$$

$$= -\frac{\varkappa^2m}{2M^2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right); \tag{9.29}$$

4) $U_{\text{э}}(r)$ монотонна на интервалах

$$(0, r_1),\ (r_1, r_{\max}),\ (r_{\max}, r_2),\ (r_2, r_{\min}),\ (r_{\min}, \infty),$$

причем справедливо

$$0 \leqslant r_1 < r_{\max} < r_2 < r_{\min} < \infty.$$

Предложение 9.4. Для внешнего решения Шварцшильда (7.33) эффективная потенциальная энергия (9.27) в области $r \geqslant 0$ при $M > 2\sqrt{3}\alpha mc$ обладает следующими свойствами:

1) $U_э(r)$ имеет нули в точках

$$r_1 = \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha} - \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{2\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$r_2 = \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha} + \frac{M^2}{4m^2c^2\alpha}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}} = \frac{M^2}{m\varkappa} - \frac{2\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right),$$

$$r_3 = \infty; \tag{9.30}$$

2) $U_э(r)$ имеет максимум в точке

$$r_{\max} = \frac{M^2}{2m\varkappa} - \frac{M^2}{2m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{12c^2\alpha^2m^2}{M^2}} = \frac{3\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{9.30а}$$

причем

$$U_э(r_{\max}) = mc^2\left[-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{2\alpha}{r_{\max}}\right)\left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r_{\max}^2}\right)}\right] =$$

$$= mc^3\left[\frac{M}{3\sqrt{3}\varkappa} + O\left(\frac{1}{c}\right)\right];$$

3) $U_э(r)$ имеет минимум в точке

$$r_{\min} = \frac{M^2}{2m\varkappa} + \frac{M^2}{2m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{12c^2\alpha^2m^2}{M^2}} = \frac{M^2}{m\varkappa} + \frac{3\gamma\mu}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{9.30б}$$

причем

$$U_э(r_{\min}) = mc^2\left[-1 + \sqrt{\left(1 - \frac{2\alpha}{r_{\min}}\right)\left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r_{\min}^2}\right)}\right] =$$

$$= -\frac{m\varkappa^2}{2M^2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right); \tag{9.31}$$

4) $U_э(r)$ монотонна на интервалах

$$(0, r_1),\ (r_1, r_{\max}),\ (r_{\max}, r_2),\ (r_2, r_{\min}),\ (r_{\min}, \infty),$$

причем справедливо

$$0 \leqslant r_1 < r_{\max} < r_2 < r_{\min} < \infty.$$

Из предложений 9.3, 9.4 следует, что вид кривой $U_э(r)$ качественно одинаков для внешнего решения Шварцшильда и для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат, причем кривые $U_э(r)$ в обоих случаях в пределе $c \to \infty$ совпадают с кривой $\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{m\gamma\mu}{r}$, описывающей эффективную потенциальную энергию тела массы m в поле центральных сил.

Уравнения движения (9.24), (9.25) можно записать как систему четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\nu_1(r)}{\sqrt{\nu_1 c^2 - \frac{v^2}{\nu_1} - \nu_2 w^2 \frac{c^2}{m^2}}}\right] = 0, \\
\frac{d}{dt}\left[\frac{\nu_2(r)\, w}{\sqrt{\nu_1 c^2 - \frac{v^2}{\nu_1} - \nu_2 w^2 \frac{c^2}{m^2}}}\right] = 0, \\
\frac{d\varphi}{dt} = w, \\
\frac{dr}{dt} = v,
\end{gathered} \tag{9.32}$$

относительно компонентов четырехмерного вектора

$$\vec{F}(t) = \left\{r(t),\ T_0 \frac{dr}{dt},\ r_0\varphi(t),\ r_0 T_0 \frac{d\varphi}{dt}\right\} \equiv \{F_1, F_2, F_3, F_4\} \in E^4,$$

принадлежащего вещественному евклидовому пространству E^4, где r_0, T_0 — некоторые постоянные размерности длины и времени соответственно.

Чтобы поставить начальную задачу Коши для системы уравнений (9.32), необходимо задать начальные условия

$$\begin{gathered}
r(t_0) = \xi_0 = \bar{\xi}_0, \qquad \frac{dr(t_0)}{dt} \equiv \dot{r}(t_0) = \xi_1 = \bar{\xi}_1, \\
\varphi(t_0) = \eta_0 = \bar{\eta}_0, \qquad \frac{d\varphi(t_0)}{dt} \equiv \dot{\varphi}(t_0) = \eta_1 = \bar{\eta}_1,
\end{gathered} \tag{9.33}$$

где значения чисел ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 должны быть совместными с условиями существования решения задачи Коши (9.32), (9.33).

Начальные условия для системы уравнений (9.32) можно задавать иначе, а именно задавая вместо четырех чисел (9.33) другие четыре числа ξ_0, η_0, E, M:

$$\begin{gathered}
r(t_0) = \xi_0 = \bar{\xi}_0, \quad \frac{\nu_1(\xi_0) m c^3}{\sqrt{\nu_1(\xi_0)\, c^2 - \nu_1^{-1}(\xi_0)\left(\frac{dr(t_0)}{dt}\right)^2 - \nu_2(\xi_0)\left(\frac{d\varphi(t_0)}{dt}\right)^2 \frac{c^2}{m^2}}} - \\
- mc^2 = E = \bar{E},
\end{gathered} \tag{9.34}$$

$$\begin{gathered}
\varphi(t_0) = \eta_0 = \bar{\eta}_0, \quad \frac{\nu_2(\xi_0)\, \frac{d\varphi(t_0)}{dt}\, c^2}{\sqrt{\nu_1(\xi_0)\, c^2 - \nu_1^{-1}(\xi_0)\left(\frac{dr(t_0)}{dt}\right)^2 - \nu_2(\xi_0)\left(\frac{d\varphi(t_0)}{dt}\right)^2 \frac{c^2}{m^2}}} = \\
= M \geqslant 0,
\end{gathered}$$

выбирая определенный знак для $\frac{dr(t_0)}{dt}$ и подчинив выбор чисел ξ_0, η_0, E, M дополнительному условию

$$E + mc^2 - mc^2 \sqrt{\nu_1(r_{\min}) + \frac{M^2 \nu_1(r_{\min})}{m^2 c^2 \nu_2(r_{\min})}} \geqslant 0, \tag{9.35}$$

где $r_{\min}$ дается выражением (9.28б) для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат и выражением (9.30 б)—для внешнего решения Шварцшильда.

Для начальной задачи Коши (9.32), (9.34) можно поставить задачу об устойчивости движения в соответствии с определениями 3.2— 3.4а из § 3.

Получаемый из (9.25) интеграл

$$t = C_1 + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{c\nu_1(r)\sqrt{1 - \frac{c^2\nu_1(r)}{\mathcal{E}^2} - \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2\mathcal{E}^2\nu_2(r)}}} \tag{9.36}$$

$$r \in \mathcal{R},\ r_0 \in \mathcal{R},$$

как для внешнего решения Шварцшильда (7.33), так и для центрально-симметрического поля в гармонической системе координат (7.32) выражается в силу (9.2), (9.3) через эллиптические интегралы и элементарные функции. Соответственно r (t) выражается через эллиптические функции и элементарные функции от t и непрерывно зависит от t, ξ_0, η_0, E, M из области

$$D = \left(\xi_0, \eta_0, E, M \,\middle\|\, \begin{array}{l} -1 + \sqrt{\nu_1(r_0) + \frac{M^2\nu_1(r_0)}{m^2c^2\nu_2(r_0)}} > \frac{E}{mc^2} \geqslant -1 + \\ + \sqrt{\nu_1(\xi_0) + \frac{M^2\nu_1(\xi_0)}{m^2c^2\nu_2(\xi_0)}}\,, \\ E < 0,\ M > 2\sqrt{3}\,\alpha mc,\ \xi_0 \geqslant r_0,\ \eta = \bar{\eta}_0 \end{array} \right), \tag{9.37}$$

где

$$r_0 = \begin{cases} \max\left[\frac{M^2}{4m\varkappa} - \frac{\gamma\mu}{c^2} + \frac{M^2}{4m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}},\ \frac{\gamma\mu}{c^2}\right] \\ \text{для центрально-симметрического поля в гармоничес-} \\ \text{кой системе координат (7.32);} \\ \max\left|\frac{M^2}{4m\varkappa} + \frac{M^2}{4m\varkappa}\sqrt{1 - \frac{16\alpha^2m^2c^2}{M^2}},\ \frac{2\gamma\mu}{c^2}\right| \quad \text{для} \\ \text{внешнего решения Шварцшильда (7.33).} \end{cases} \tag{9.38}$$

Аналогично из (9.15) получаем как для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат, так и для решения Шварцшильда, что r (φ) можно выразить через эллиптические и элементарные функции от φ, которые непрерывно зависят от φ, ξ_0, η_0, E, M в области (9.37).

Используя замечания 9.1 и 9.2, непрерывную зависимость r (t) и $\frac{dr(t)}{dt}$ от t, ξ_0, η_0, E, M в области (9.37) и непрерывную зависимость r (φ) и $\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}$ от φ, ξ_0, η_0, E, M в области (9.37) как для внешнего решения Шварцшильда, так и для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат и приводя оценки, аналогичные оценкам (8.33) — (8.37) из § 8, устанавливаем справедливость следующего предложения.

Предложение 9.5. Для центрально-симметрического поля тяготения в гармонической системе координат (7.32) и для внешнего решения Шварцшильда (7.33) решение начальной задачи Коши (9.32), (9.34) при заданных начальных значениях ξ_0, η_0, E, M из области (9.37) технически устойчиво на всяком конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, но не асимптотически, а соответствующая этому решению траектория орбитально устойчива на бесконечном интервале.

9.4. Круговые орбиты. Исследуем теперь круговые орбиты. Эти орбиты важны в физических приложениях.

Уравнение орбиты пробного тела в центрально-симметрическом гравитационном поле (9.14) можно переписать с учетом формулы (9.27) в следующем виде:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\nu_2^2(r)\, m^2}{M^2}\left[\mathcal{E}^2 - c^2\left(1 + \frac{U_{\text{э}}(r)}{mc^2}\right)^2\right], \tag{9.39}$$

где

$$U_{\text{э}}(r) \equiv mc^2\left[-1 + \sqrt{\nu_1(r) + \frac{M^2\nu_1(r)}{m^2c^2\nu_2(r)}}\,\right], \quad \mathcal{E} = c + \frac{E}{mc}.$$

Воспользуемся функцией

$$\varepsilon(\xi) \equiv -1 + 2\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ -1, & \xi < 0 \end{cases}$$

и с ее помощью перепишем уравнение орбиты (9.39) в следующей форме:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\nu_2(r)\, m}{M}\sqrt{\mathcal{E}^2 - c^2\left(1 + \frac{U_{\text{э}}(r)}{mc^2}\right)^2} \cdot \varepsilon\left(\frac{dr}{d\varphi}\right). \tag{9.40}$$

Для круговых орбит необходимо и достаточно

$$\frac{dr}{d\varphi} \equiv 0, \quad \forall\varphi \in R^1.$$

Чтобы найти радиусы круговых орбит, необходимо во всяком случае исследовать *точки поворота*, т. е. те точки, в которых

$$\frac{dr}{d\varphi} = 0.$$

Из (9.40) находим для точек поворота

$$\mathcal{E}^2 - c^2\left(1 + \frac{U_{\text{э}}(r)}{mc^2}\right)^2 = 0,$$

т. е. в точке поворота r_n для пробной частицы выполняется

$$\mathcal{E} = c\left(1 + \frac{U_{\text{э}}(r_0)}{mc^2}\right). \tag{9.41}$$

В окрестности точки поворота r_n получаем $r = r_n + \delta r$ и далее

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{d\delta r}{d\varphi}\right)\frac{[\nu_2(r_n) + O(\delta r)]\, m}{M} \times$$
$$\times \sqrt{-\frac{2}{m}\left(1 + \frac{U_{\text{э}}(r_n)}{mc^2}\right)\frac{\partial U_{\text{э}}(r_n)}{\partial r}\delta r + O[(\delta r)^2]}\,. \tag{9.42}$$

Отсюда получим уравнение первого приближения (т. е. уравнение, получаемое из (9.42) при сохранении только членов наименьшего порядка по δr):

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = \frac{\nu_2(r_n)m}{M}\sqrt{-\frac{2}{m}\left(1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2}\right)\frac{\partial U_э(r_n)}{\partial r}\,\delta r}\cdot\varepsilon\left(\frac{d\delta r}{d\varphi}\right).$$

Общее решение этого уравнения, очевидно, можно записать в виде

$$\delta r(\varphi) = \frac{\nu_2^2(r_n)\,m^2}{M^2}\left(-\frac{1}{2m}\right)\left(1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2}\right)\frac{\partial U_э(r_n)}{\partial r}(\varphi-\varphi_0)^2.$$

Из последней формулы видно, что для того чтобы точка поворота r_n стала *стационарной точкой* (т. е. радиусом круговой орбиты), необходимо

$$\frac{\partial U_э(r_n)}{\partial r} = 0.$$

Рассмотрим теперь именно такую точку r_n, т. е. точку, в которой выполняются два соотношения

$$\begin{aligned} &а)\ \mathscr{E} = c\left(1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2}\right),\\ &б)\ \frac{\partial U_э(r_n)}{\partial r} = 0. \end{aligned} \qquad (9.43)$$

Точку r_n, в которой выполняются оба условия (9.43), назовем *квазистационарной точкой*. Будем теперь интересоваться отклонениями орбиты от квазистационарной точки. При этом уравнение орбиты в окрестности квазистационарной точки получим из (9.40), подставляя значение $r = r_n + \delta r$, отбрасывая члены высшего порядка малости по δr и отбрасывая члены порядка $\delta\mathscr{E}$. Таким образом, находим

$$\frac{d(\delta r)}{d\varphi} = \varepsilon\left(\frac{d\delta r}{d\varphi}\right)\frac{\nu_2(r_n)\sqrt{m}}{M}\sqrt{-\left(1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2}\right)\frac{\partial^2 U_э(r_n)}{\partial r^2}\,\delta r}. \qquad (9.44)$$

Решение этого уравнения есть

$$\delta r(\varphi) = \\ = C\exp\left[\varepsilon\left(\frac{d\delta r}{d\varphi}\right)\frac{\nu_2(r_n)\sqrt{m}}{M}\sqrt{-\left(1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2}\right)\frac{\partial^2 U_э(r_n)}{\partial r^2}}\,(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Вместе с тем из предложений 9.3 и 9.4 вытекает, что как центрально-симметрическое поле в гармонической системе координат (7.32), так и внешнее решение Шварцшильда (7.33) имеет ровно две квазистационарные точки

$$r_n = r_{\max} \text{ и } r_n = r_{\min},$$

где $r_{\max}$ дается формулами (9.28а) и (9.30а), а $r_{\min}$ дается формулами (9.28б) и (9.30б), причем во всех этих случаях

$$1+\frac{U_э(r_n)}{mc^2} > 0.$$

Поэтому знак подкоренного выражения в правой части формулы (9.44) определяется знаком выражения $\frac{\partial^2 U_э(r_n)}{\partial r^2}$. Отсюда с помощью формул (9.24), (9.25) получаем, что квазистационарная точка $r_n = r_{\max}$ неустойчива по Ляпунову (на бесконечном интервале времени) по первому приближению, а поэтому неустойчива по Ляпунову на бесконечном интервале времени.

Аналогично заключаем, что квазистационарная точка $r_n = r_{\min}$ устойчива по первому приближению по Ляпунову (на бесконечном интервале времени). Но поскольку реальное движение всегда происходит только в области

$$\mathcal{R} = (r \| E \geqslant U_э(r), \quad r > r_0),$$

то отсюда с помощью формул (9.24), (9.25) устанавливаем, что устойчивые по Ляпунову (на бесконечном интервале времени) круговые орбиты реализуются лишь в области (9.37).

Таким образом, справедливы следующие два предложения.

Предложение 9.6. Для пробной частицы в центрально-симметрическом гравитационном поле в гармонической системе координат (7.32) устойчивые по Ляпунову (на бесконечном интервале времени) круговые орбиты реализуются тогда и только тогда, когда начальные данные ξ_0, η_0, E, M принадлежат области вида

$$D_Г = \left(\xi_0, \eta_0, E, M \middle\| \begin{array}{l} -1+\sqrt{\frac{r_0-\alpha}{r_0+\alpha}+\frac{M^2(r_0-\alpha)}{m^2c^2(r_0+\alpha)^3}} > \frac{E}{mc^2} \geqslant -1+ \\ +\sqrt{\frac{\xi_0-\alpha}{\xi_0+\alpha}+\frac{M^2(\xi_0-\alpha)}{m^2c^2(\xi^0+\alpha)^3}}, \\ E<0,\ M>2\sqrt{3}\alpha mc,\ \xi_0 \geqslant r_0,\ \eta=\bar{\eta}_0 \end{array} \right),$$

где r_0 дается формулой (9.38).

При этом радиус устойчивой круговой орбиты равен $r_{\min}$, определяемому формулой (9.28б).

Квазистационарная орбита радиуса $r = r_{\max}$, где $r_{\max}$ определяется формулой (9.28а), неустойчива по Ляпунову на бесконечном интервале времени.

Предложение 9.7. Для пробной частицы в системе координат, в которой реализуется внешнее решение Шварцшильда (7.33), устойчивые по Ляпунову (на бесконечном интервале времени) круговые орбиты реализуются тогда и только тогда, когда начальные данные ξ_0, η_0, E, M принадлежат области вида

$$D_Ш = \left(\xi_0, \eta_0\ E, M \middle\| \begin{array}{l} -1+\sqrt{\left(1-\frac{2\alpha}{r_0}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2}\right)} > \frac{E}{mc^2} \geqslant -1+ \\ +\sqrt{\left(1-\frac{2\alpha}{\xi_0}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2}\right)}, \\ E<0,\ M>2\sqrt{3}\alpha mc,\ \xi_0 \geqslant r_0,\ \eta=\bar{\eta}_0 \end{array} \right),$$

где r_0 дается формулой (9.38).

При этом радиус устойчивой круговой орбиты равен $r_{\min}$, определяемому формулой (9.30б).

Квазистационарная орбита радиуса $r = r_{\max}$, где $r_{\max}$ определяется формулой (9.30а), неустойчива по Ляпунову на бесконечном интервале времени.

Замечание 9.3. Подчеркнем, что как в центрально-симметрическом гравитационном поле в гармонической системе координат (7.32), так и для внешнего решения Шварцшильда (7.33) в силу формул (9.24), (9.25) и предложений 9.3 и 9.4 траектория пробной частицы существенно отличается от ньютонианской в следующих двух важных случаях:

а. При $E > U_э(r_{\max}(M)), \quad \frac{dr(t_0)}{dt} < 0$

получаем

$$r - r_г \to 0, \quad t \to \infty,$$

где $r_г$, называемый *радиусом гравитационной поверхности* (или *гравитационным радиусом*), равен

$$r_г = \begin{cases} \alpha \text{ — для решения (7.32)}, \\ 2\alpha \text{ — для решения Шварцшильда (7.33)}. \end{cases}$$

При этом разность $r - r_г$ монотонно уменьшается с ростом t, оставаясь всегда неотрицательной. Происходит так называемый *гравитационный захват пробной частицы* — явление, не имеющее места в механике Ньютона.

б. Если $E = U_э(r_{\max}(M)) - \delta E, \quad \frac{dr(t_0)}{dt} < 0,$

где $\delta E > 0$ достаточно мало, то пробная частица, двигаясь к центральному телу, создающему поле, сделает достаточно большое число оборотов вокруг центрального тела вблизи значения $r = r_{\max}$, оставаясь в области $r > r_{\max}$, после чего уйдет на бесконечно большое расстояние r от центрального тела. Очевидно, это — существенно не ньютонианская орбита.

§ 10. Метрический тензор для системы N тяготеющих тел

Вернемся к исследованию уравнений поля Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\varkappa T^{ik}, \qquad \varkappa = \frac{8\pi\gamma}{c^4}. \tag{10.1}$$

Входящий в левую часть этих уравнений тензор Риччи R^{ik} может быть представлен в виде

$$R^{ik} = g^{il} g^{sk} R^{m}_{l,ms} = -\frac{1}{2} g^{ls} \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} - \Gamma^{ik} + \Gamma^{i,ls}\Gamma^{k}_{ls}, \tag{10.2}$$

где

$$\Gamma^{ik} \equiv \frac{1}{2}\left(g^{ip}\frac{\partial\Gamma^k}{\partial x^p} + g^{kp}\frac{\partial\Gamma^i}{\partial x^p} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^p}\Gamma^p\right), \qquad (10.3)$$

$$\Gamma^{i,ls} = g^{lp}g^{sq}\Gamma^i_{pq},$$

$$\Gamma^m \equiv g^{ik}\Gamma^m_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,g^{ml}). \qquad (10.4)$$

Уравнения поля (10.1) можно переписать в следующем виде:

$$R^{ik} = -\varkappa\left(T^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}T\right), \qquad (10.1а)$$

где

$$T \equiv T^{ik}g_{ik}.$$

Дальнейшее рассмотрение произвольной системы координат при исследовании решений уравнения (10.1) было бы не удобно из-за большой сложности получаемых при этом выражений. Вместе с тем из физических соображений целесообразно сузить класс рассматриваемых координатных систем для того, чтобы получить уравнения движения в более простой и физически наглядной форме.

В качестве такого сужения класса координатных систем удобно перейти к таким и только таким координатным системам, которые являются гармоническими системами координат. Определение гармонической системы координат было дано в § 7. Там было отмечено, что с помощью условия гармоничности

$$\hat{\Box}x^l \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial x^l}{\partial x^k}\right) = \Gamma^l = 0 \quad (l = 0, 1, 2, 3) \qquad (10.5)$$

гармоническая система координат определяется однозначно с точностью до произвольных преобразований Лоренца.

Всюду ниже в этом параграфе будем рассматривать именно гармоническую систему координат, если противное не оговорено особо.

В гармонической системе координат выражение (10.2) в силу (10.3), (10.5) примет вид

$$R^{ik} = -\frac{1}{2}g^{ls}\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l\partial x^s} + \Gamma^{i,ls}\Gamma^k_{ls}. \qquad (10.6)$$

Рассмотрим систему N тел, обладающих распределенными некоторым образом в пространстве массами и конечными размерами. Наличие таких масс приведет к отклонению метрики пространственно-временного многообразия от псевдоевклидовой метрики

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \equiv (g_{ik})_\infty dx^l dx^k, \qquad (10.7)$$

т. е. приведет к гравитационному полю. В свою очередь такое гравитационное поле будет определять движение каждого из N тел в нем.

Таким образом, чтобы описать движение N тяготеющих тел, необходимо совместно решать уравнения поля и уравнения движения.

Более конкретно для указанной системы N тел поставим задачу Б из § 6. А именно будем отыскивать совместное решение системы уравнений (6.1), (6.3), (6.4), (6.5) из класса (k, ε), $k \gg 1$, в области $x \in D \subset V_4$. При этом зададим ряд дополнительных условий, о которых будет сказано ниже.

10.1. Предельные условия первого и второго рода. Как мы помним, в пространственно-временной области D, находящейся на достаточно большом пространственном удалении от вещества, приближенно реализуется псевдоевклидово пространство с интервалом (10.7). При этом для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, разность $\psi_{mn} = g_{mn}(x) - (g_{mn})_\infty$ из физических соображений должна с ростом r при всех временах убывать не хуже чем $\frac{1}{r}$, и быть ограниченной функцией при всех x^0 и $\vec{x}$.

Эти физические соображения продиктованы тем, что на достаточно большом пространственном удалении r от области, занятой веществом, движущимся с не слишком высокими скоростями, для решения класса (k, ε), $k \gg 1$, метрика должна асимптотически при $r \to \infty$ совпадать с метрикой $(g_{ik})_{\text{ц-с}}$ центрально-симметрического поля (7.32), которая в свою очередь обладает очевидным свойством:

$$(g_{mn})_{\text{ц-с}} - (g_{mn})_\infty = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty \quad (m, n = 0, 1, 2, 3).$$

Кроме того, из физических соображений следует потребовать, чтобы для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, при больших r величина $\psi_{mn}(x)$ имела вид расходящейся сферической волны, т. е.

$$\psi_{mn}(x) \to \frac{1}{r} f_{mn}(x^0 - r, \vec{n}), \quad r \to \infty \; (m, n = 0, 1, 2, 3), \qquad (10.8)$$

где

$$n^\alpha = \frac{x^\alpha}{r} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Действительно, поскольку в нашей постановке задачи все вещество сосредоточено при всех x^0 в ограниченной области $D_1 \subset V_3$, то тем самым имеем изолированную систему. Это означает, что никакие волны извне на эту систему не падают. Всякая волна может иметь своим источником только какие-либо материальные объекты из области D_1. Поэтому на достаточно большом «расстоянии» r от этой области всякая волна должна иметь вид (10.8). Отметим, что последнее рассуждение восходит к В. А. Фоку.

Таким образом, из физических соображений для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, следует подчинить разность $g_{mn}(x) - (g_{mn})_\infty$ $(m, n = 0, 1, 2, 3)$ некоторым требованиям, которые можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Предложение 10.1. Пусть гравитационное поле создается движущимся с не слишком высокими скоростями веществом, занимающим при всех x^0 конечную область D_1 трехмерного пространства V_3, находящуюся на конечном «расстоянии» $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ от начала координат.

Тогда для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, уравнений поля разность

$$\psi_{mn}(x) = g_{mn}(x) - (g_{mn})_\infty \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

должна удовлетворять следующим свойствам:

а) $|\psi_{mn}(x)| < B_0 \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \quad \forall x \in V_4,$ (10.9а)

б) $|\psi_{mn}(x)| < \frac{B_1}{r}, \quad r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1,$ (10.9б)

в) $\left|\frac{\partial \psi_{mn}(x)}{\partial x^l}\right| < \frac{B_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1 \quad (m,\ n,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$ (10.9в)

с некоторыми положительными постоянными B_0, B_1, B_2; и существует такая функция $f_{mn}(\xi_0,\ \vec{\xi}) \in C^1(R^4)$, что

г) $\lim\limits_{r \to \infty} [r\psi_{mn}(x) - f_{mn}(x^0 - r,\ \vec{n}_x)] = 0$ (10.9г)

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по

$$\vec{n}_x = \left\{\frac{x^1}{r},\ \frac{x^2}{r},\ \frac{x^3}{r}\right\} \in (\vec{n}_x \| \vec{n}_x \in R^3,\quad \vec{n}_x^{\,2} = 1).$$

Условия (10.9а) — (10.9г) назовем *предельными условиями первого рода* *.

Кроме этих предельных условий, которым должно удовлетворять всякое решение из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, уравнений поля при $r \to \infty$, необходимо установить предельные условия, которым должно удовлетворять всякое решение из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, уравнений поля при $c \to \infty$.

Потребуем, чтобы использовались такие и только такие системы координат, в которых для всякого решения из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, уравнений поля выполняются предельные условия

$$g^{lm}(x) - (g^{lm})_\infty = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad \forall (x^0,\ \vec{x}) \in V_4. \tag{10.10}$$

Предельные условия (10.10) будем называть *предельными условиями второго рода.*

---

* Обратим внимание на то, что точное решение уравнений поля для случая центрально-симметрического поля (7.32) не удовлетворяет условию (10.9а), так как пространственные компоненты метрического тензора имеют полюс в точке $r = \alpha$. Однако в нашем рассмотрении в главах I, II мы отвлекаемся от квантовых эффектов, которые по глубоким физическим причинам становятся весьма существенными на расстоянии порядка малой величины α. Поэтому формула (7.32) имеет физический смысл лишь для расстояний, много бóльших величины α. Но при таких расстояниях для решения (7.32) справедливо неравенство

$$|g_{mn}(x) - (g_{mn})_\infty| < B_0 \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

с некоторой положительной постоянной B_0.

Отметим, что предельным условиям второго рода (10.10) удовлетворяют все известные точные решения уравнений поля (10.1), соответствующие метрике, погруженной в псевдоевклидову метрику (10.7). В том числе предельным условиям второго рода (10.10) удовлетворяет решение уравнений (10.1) для поля вращающегося шара, полученное Керром и имеющее в сферических координатах следующий вид *:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 - \frac{2\alpha r\,(dx^0 + a\sin^2\theta\, d\varphi)^2}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)} -$$

$$- (r^2 + a^2\cos^2\theta)\left(\frac{dr^2}{r^2 - 2\alpha r + a^2} + d\theta^2\right), \tag{10.11}$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma\mu}{c^2}, \tag{10.12}$$

μ — масса тела, создающего поля **, и

$$a = -\frac{R^2\omega}{5c} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{10.13}$$

а R и ω — радиус и угловая частота вращения тела, создающего гравитационное поле (10.11).

Предельным условиям второго рода (10.10) удовлетворяют точные решения для центрально-симметрического поля тяготения (7.32) и (7.33), описанные выше ***.

10.2. Тензор энергии — импульса. Зададимся видом тензора энергии — импульса T^{mn} для решений из класса $(k\ ,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$. Так, для решений класса $(k\ ,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, в силу предельных условий второго рода (10.10) справедливы следующие формулы:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{10.14}$$

$$g_{00} = 1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad g_{0\alpha} = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

---

* Точное решение уравнений поля (10.1) для поля вращающегося шара было найдено впервые в работе П. Керра [258], а в форме (10.11) это решение было получено в работе Р. Бойера и Р. Линдквиста [217].

** Формулы (10.12), (10.13) могут быть получены из сравнения решения Керра (10.11) с формулой (46) § 3 гл. 7 книги В. А. Брумберга [26] для метрики внешнего гравитационного поля, создаваемого N вращающимися сферическими телами в гармонической системе координат для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнений поля.

*** Предельным условиям второго рода (10.10) удовлетворяет также внешнее гравитационное поле заряженного шара, описываемого метрикой Рейсснера — Нордстрёма (см., например, Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. [73, гл. 4, § 6, стр. 172]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma\mu}{c^2 r} + \frac{\gamma\varepsilon^2}{c^4 r^2}\right)(dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2\gamma\mu}{c^2 r} + \frac{\gamma\varepsilon^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где ε — заряд шара. Подобная метрика реализуется как внешнее поле тела, обладающего не только гравитационной массой, но и электрическим зарядом. Подробно этот случай будет рассмотрен ниже, в гл. III.

Поэтому для главных членов разложения по $\frac{1}{c}$ справедливы следующие асимптотические при $c \to \infty$ формулы:

$$
\begin{aligned}
\frac{ds^2}{(dx^0)^2} &= 1 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^3}{(dx^0)^2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\
u^0 &= \frac{dx^0(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\
u^\alpha &= \frac{dx^\alpha(s)}{ds} = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + O\left(\frac{1}{c^2}\right),
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

где

$$
v^\alpha \equiv c\frac{dx^\alpha}{dx^0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),
$$

$$
v^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2.
$$

Следовательно, в случае пылевидной материи тензор энергии — импульса для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, в силу (5.17) примет вид

$$
T^{lm} = \begin{cases}
c^2\left[\rho + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right], & l = m = 0, \\
c^2\left[\frac{\rho v^\alpha}{c} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right], & l = 0, \quad m = \alpha, \\
c^2\left[\frac{\rho v^\alpha v^\beta}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right], & l = \alpha, \quad m = \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)
\end{cases}
\tag{10.16}
$$

и тогда выражение $T^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}T$ для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, запишется в форме

$$
T^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}T = \begin{cases}
c^2\left[\frac{\rho}{2} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right], & i = k = 0, \\
c^2\left[\frac{\rho v^\alpha}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right], & i = 0, \quad k = \alpha, \\
c^2\left[\frac{1}{2}\rho\delta_{\alpha\beta} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right], & i = \alpha, \quad k = \beta \\
& (\alpha, \beta = 1, 2, 3).
\end{cases}
\tag{10.17}
$$

Если имеем не пылевидную материю, а релятивистскую жидкость в поле тяготения (релятивистское обобщение уравнений гидродинамики идеальной жидкости), то вместо выражения (5.17) для тензора энергии — импульса для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, следует взять следующую формулу *:

$$\frac{1}{c^2} T^{lm} = \begin{cases} \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\pi - \rho U\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad l = m = 0, \\ \frac{\rho v^\alpha}{c} + \frac{1}{c^3} v^\alpha \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho(\Pi - U) + \rho\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), l = \theta, \ m = \alpha, \\ \frac{1}{c^2}(\rho v^\alpha v^\beta + p\delta_{\alpha\beta}) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \ l = \alpha, \ m = \beta \ (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \end{cases} \tag{10.18}$$

где Π — упругая энергия единицы массы покоя жидкости, p — изотропное давление, U — ньютонов потенциал.

Таким образом, в случае релятивистской жидкости, так же как и в случае пылевидной материи, выражение $T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T$ для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, может быть записано в форме (10.17).

Уравнения поля (10.1a) в гармонической системе координат можно записать в виде

$$-\frac{g^{ls}\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} = -2\Gamma^{i,ls}\Gamma^k_{ls} - 2\varkappa\left(\mathrm{T}^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik}\mathrm{T}\right). \tag{10.19}$$

Тогда для решений этих уравнений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, удовлетворяющих предельным условиям первого рода (10.9а) — — (10.9г), эти уравнения в области достаточно больших rc будут неоднородными уравнениями гиперболического типа с медленно меняющимися коэффициентами.

В силу указанных предельных условий первого и второго рода получаем в области $D_2 \subset V_4$, не содержащей особенностей метрики, следующие асимптотические оценки при $c \to \infty$ для слагаемых в левой и правой частях уравнений (10.19):

$$\frac{g^{ls}\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} = O\left(\frac{1}{c^2}\right) O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$2\Gamma^{i,ls}\Gamma^k_{ls} = O\left(\frac{1}{c^4}\right) O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$2\varkappa\left(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T\right) = \begin{cases} \frac{8\rho\pi\gamma}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad i = k = 0, \\ \frac{16\rho v^\alpha \pi\gamma}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad i = \alpha, \quad k = 0, \\ \frac{8\delta_{\alpha\beta}\rho\pi\gamma}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \quad i = \alpha, \quad k = \beta \\ \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases}$$

---

* Вывод формулы (10.18) для тензора энергии — импульса для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, можно найти в книге В. А. Фока [196], гл. II, § 33, 66.

Таким образом, для решений уравнений (10.19) из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, для главного члена в асимптотическом разложении тензора $g^{ik}(x)$ при $c \to \infty$ получаем уравнения

$$(g^{ls})_{\infty} \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} H^{ik}, \tag{10.20}$$

где

$$H^{ik} \equiv \begin{cases} \frac{\rho}{2}, & i = k = 0, \\ \frac{\rho v^{\alpha}}{c}, & i = 0, \quad k = \alpha, \\ \frac{1}{2} \rho \delta_{\alpha\beta}, & i = \alpha, \quad k = \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Таким образом, каждое из уравнений (10.20) имеет вид неоднородного волнового уравнения:

$$\Box u(x^0, \vec{x}) \equiv \left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^{\alpha})^2} \right] u(x^0, \vec{x}) = f(x^0, \vec{x}), \tag{10.21}$$

где правая часть $f(x^0, \vec{x})$ в данном случае имеет смысл пространственной плотности массы вещества либо пространственной плотности импульса вещества, создающего поле, а $u(x^0, \vec{x})$ имеет смысл компонента метрического тензора.

В ряде случаев нам будет полезна модель точечных N тел. В таких случаях функция $f(x^0, \vec{x})$, согласно формулам (10.20), будет в любой момент x^0 отличной от нуля лишь в конечном числе точек $\vec{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. В этом случае такая функция $f(x^0, \vec{x})$ не может быть корректно определена как функция в обычном смысле, но может быть определена как обобщенная функция в смысле § 4 главы I, т. е. как линейный непрерывный функционал над пространством $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций.

В последнем случае уравнение (10.21), согласно результатам § 4, п. 4.6 главы I, надо понимать в смысле обобщенных функций на $\mathcal{D}$, т. е. как выражение

$$(u(x^0, \vec{x}), \Box\varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{10.22}$$

Иными словами, поставлена задача об отыскании обобщенного решения уравнения (10.21) во всей области R^4, в соответствии с определением 4.5 из § 4 главы I.

При этом, если $f(x^0, \vec{x}) \in C(R^4)$ и решение $u(x^0, \vec{x}) \in C^2(R^4)$, то в соответствии с леммой 4.6 из § 4 главы I это обобщенное решение $u(x^0, \vec{x})$ является и классическим решением уравнения (10.21) в R^4.

Таким образом, для случая функции $f(x^0, \vec{x})$ общего вида необходимо ставить задачу об отыскании обобщенного решения уравнения (10.21). В частности, если $f(x^0, \vec{x})$ непрерывна в R^4 и предельные условия, наложенные на $u(x^0, \vec{x})$, таковы, что это решение оказывается дважды непрерывно дифференцируемым по всем x^i ($i = 0, 1, 2, 3$) в R^4, то это обобщенное решение $u(x^0, \vec{x})$ является одновременно и обычным (классическим) решением уравнения (10.21).

10.3. Метрический тензор для решений класса (k, ε), k ≥ 1. Общее решение уравнения (10.21) в $\mathscr{D}'$ (т. е. в смысле обобщенных функций) имеет, согласно формуле (4.12), следующую форму:

$$u(x^0, \vec{x}) = (G^{\mathrm{ret}} * f)(x^0, \vec{x}) + u_0(x^0, \vec{x}) =$$
$$= \int\int\int\int G^{\mathrm{ret}}(x^0 - \xi^0, \vec{x} - \vec{\xi}) f(\xi^0, \vec{\xi})\, d\xi^0 d\vec{\xi} + u_0(x^0, \vec{x}), \qquad (10.23)$$

где $u_0(x^0, \vec{x})$ — общее решение волнового уравнения

$$\Box u_0(x^0, \vec{x}) = 0, \qquad (10.24)$$

а $G^{\mathrm{ret}}(x^0, \vec{x})$ — запаздывающая функция Грина волнового уравнения, являющаяся фундаментальным решением волнового оператора в $\mathscr{D}'$:

$$\Box G^{\mathrm{ret}}(x^0, \vec{x}) = \delta(x^0, \vec{x}). \qquad (10.25)$$

Согласно формуле (4.10)

$$G^{\mathrm{ret}}(x^0, \vec{x}) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi}\delta(x^{0^2} - \vec{x}^2), \qquad (10.26)$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

а $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, имеющая, согласно результатам § 4 главы I, смысл обобщенной функции над основным пространством $\mathscr{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Таким образом, общее решение неоднородного волнового уравнения (10.21) в $\mathscr{D}'$ можно представить в виде

$$u(x^0, \vec{x}) = u_4(x^0, \vec{x}) + u_0(x^0, \vec{x}), \qquad (10.27)$$

где

$$u_{\text{ч}}(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\int\int\int \theta(x^0 - \xi^0)\,\delta[(x^0 - \xi^0)^2 -$$
$$- (\vec{x} - \vec{\xi})^2] f(\xi^0, \vec{\xi})\, d\xi^0 d\vec{\xi}. \qquad (10.28)$$

Напомним теперь несколько определений. Замыкание множества тех точек, где кусочно-непрерывная функция $\psi(x)$, $x \in R^n$, отлична от нуля, называется носителем кусочно-непрерывной функции $\psi(x)$ и обозначается через $\operatorname{supp}\psi(x)$. Если $\operatorname{supp}\psi(x)$ — ограниченное множество, то функция $\psi(x)$ называется финитной.

Обратим теперь внимание на то, что формула (10.28) имеет наглядную физическую интерпретацию.

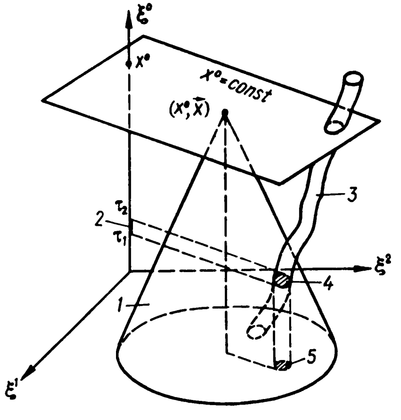


Рис. 3. Область интегрирования в правой части формулы (10.28) (третья пространственная ось не изображена):

1—нижняя пола светового конуса $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$, имеющего вершину в точке $(x^0, \vec{x})$; *2* —область интегрирования в формуле (10.28) по временной переменной $\xi^0 \in [\tau_1, \tau_2]$; *3*—носитель S_f функции $f(\xi^0, \vec{\xi})$; *4* — область $B_f(x^0, \vec{x})$ пересечения носителя S_f с нижней полой светового конуса; *5* — область интегрирования в формуле (10. 28) по пространственным компонентам $\vec{\xi}$.

Если вещество в любой момент x^0 занимает некоторую ограниченную область $D_{x^0} \subset R^3$, то носитель функции $f(x^0, \vec{x})$ * (совпадающей в данном случае с плотностью массы вещества либо с плотностью импульса вещества) будет в пространстве—времени иметь вид некоторого многообразия S_f, пересечение которого D_{x^0} со всякой гиперповерхностью $x^0 = \text{const}$ представляет ограниченную область в R^3. Причем, как следует из формулы (10.28), интегрирование в правой части соотношения (10.28) проводится по той части $B_f(x^0, \vec{x})$ пространства — времени, которая является пересечением нижней полы светового конуса $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$ с центром в точке $x^0, \vec{x}$ с носителем функции $f(\xi^0, \vec{\xi})$:

$$B_f(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap S_f.$$

Область интегрирования *4* в правой части (10.28) на рис. 3 заштрихована.

Таким образом, значение функции $u_ч(x^0, \vec{x})$ определяется значениями функции $f(\xi^0, \vec{\xi})$ в моменты времени $\frac{\xi^0}{c}$, предшествующие моменту наблюдения $t = \frac{x^0}{c}$ на величину запаздывания τ, равного расстоянию от точки $\vec{x}$ до точки $\vec{\xi} \in B_f(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap S_f$, занятой веществом в момент времени $\frac{x^0 - \tau}{c}$, деленному на скорость света.

---

* Определение понятия носителя обобщенной функции было нами сделано в п. 4.3 § 4 главы I.

Формулу (10.28) можно переписать далее, если воспользоваться формулой (4.6б) для функции $F(y)$, $y \in R^1$, дифференцируемой при всех $y \in R^1$ и имеющей n нулей y_j, каждый из которых простой:

$$\delta(F(y)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta(y - y_j)}{|F'(y_j)|}, \tag{10.29}$$

где y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — корни алгебраического уравнения $F(y) = 0$.

Таким способом получаем

$$u_{\text{ч}}(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \int\int\int\int \frac{\theta(x^0 - \xi^0)}{2|\xi^0 - x^0|} [\delta(\xi^0 - x^0 + |\vec{x} - \vec{\xi}|) + \\ + \delta(\xi^0 - x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|)] f(\xi^0, \vec{\xi})\, d\xi^0 d\vec{\xi} = \frac{1}{4\pi} \int\int\int \frac{f(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}. \tag{10.30}$$

Это — известное представление решения через *запаздывающий потенциал.*

Таким образом, установили следующие две леммы.

Лемма 10.1. *Пусть* $f(\xi^0, \vec{\xi})$ *— непрерывная вместе со вторыми частными производными во всей области* $(\xi^0, \vec{\xi}) \in R^4$ *функция, пересечение носителя* supp f *которой со всякой гиперповерхностью* $\xi^0 = \text{const}$ *есть ограниченная область в* R^3.

Тогда всякое решение $u(x^0, \vec{x})$ *из класса* $C^2(R^4)$ *уравнения* (10.21) *имеет вид*

$$u(x^0, \vec{x}) = u_0(x^0, \vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int\int\int \frac{f(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}, \tag{10.31}$$

где $u_0(x^0, \vec{x})$ *— общее решение волнового уравнения* (10.24).

Лемма 10.2. *Пусть* $f(\xi^0, \vec{\xi})$ *— обобщенная функция на* $\mathcal{D}$, *пересечение носителя* S_f *которой со всякой гиперповерхностью* $\xi^0 = \text{const}$ *есть ограниченная область в* R^3.

Тогда всякое обобщенное решение уравнения (10.21) *имеет вид* (10.31), *где* $u_0(x^0, \vec{x})$ *— произвольное обобщенное решение волнового уравнения* (10.24).

Замечание 10.1. Всюду ниже будем под решением $u(x^0, \vec{x})$ неоднородного уравнения (10.21) в R^n понимать обобщенное решение этого уравнения в R^4, если не выполняются условия $f(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$, $u(x^0, \vec{x}) \in C^2(R^4)$, и будем понимать классическое решение этого уравнения в R^4 в случае, если $f(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$, $u(x^0, \vec{x}) \in C^2(R^4)$, поскольку, согласно теореме 4.6, в последнем случае обобщенное решение почти везде совпадает с классическим.

Из лемм 10.1 и 10.2 получаем следствие, которое с помощью замечания 10.1 можно сформулировать в следующем виде.

Следствие 10.1. Пусть плотность массы $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ вещества имеет носитель, пересечение которого со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \mathrm{const}$ есть ограниченная область в R^3.

Тогда общее решение уравнений (10.20) имеет вид

$$g^{00}(x) = \frac{2\gamma}{c^2}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi} + \varphi^{00}(x) \equiv \Phi^{00}(x) + \varphi^{00}(x), \tag{10.32}$$

$$g^{0\alpha}(x) = \frac{4\gamma}{c^3}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, v^{\alpha}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi} + \varphi^{0\alpha}(x) \equiv \Phi^{0\alpha}(x) + \varphi^{0\alpha}(x), \tag{10.33}$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = \frac{2\gamma}{c^2}\,\delta_{\alpha\beta}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} + \varphi^{\alpha\beta}(x) \equiv \Phi^{\alpha\beta}(x) + \varphi^{\alpha\beta}(x), \tag{10.34}$$

где $\varphi^{ik}(x)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ — общее решение волнового уравнения

$$\Box\varphi^{ik}(x) = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{10.35}$$

Далее произвольные решения $\varphi^{ik}(x)$ волнового уравнения должны быть выбраны так, чтобы обеспечить выполнение предельных условий первого и второго рода для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнений поля.

Покажем прежде всего, что если $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$ и, кроме того, в любой момент x^0 пересечение носителя функции $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ с нижней полой светового конуса $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$ лежит в конечной области трехмерного пространства, то все функции $\Phi^{ik}(x)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ из формул (10.32) — (10.34) удовлетворяют условиям б)— г) предложения 10.1. А именно справедливо следующее предложение.

Предложение 10.2. Пусть $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_{\rho}(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp}\rho$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^3}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда каждая функция $\Phi^{ik}(x)$ $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ из формул (10.32) — (10.34) удовлетворяет следующим неравенствам с некоторыми постоянными $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $B_\Lambda > 0$:

$$\text{а)}\ |\Phi^{ik}(x)| < B_\Lambda, \quad \forall x \in [R^4 \setminus \bigcup_{\eta \in \operatorname{supp}\rho} (\xi \parallel |\xi - \eta| \leqslant \lambda)], \quad \lambda > \Lambda > 0; \tag{10.36а}$$

$$\text{б)}\ |\Phi^{ik}(x)| < \frac{B_1}{r}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1; \tag{10.36б}$$

$$\text{в)}\ \left| \frac{\partial \Phi^{ik}(x)}{\partial x^l} \right| < \frac{B_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1 \quad (i,\ k,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ 3); \tag{10.36в}$$

и найдутся такие функции $f^{ik}(\eta^0, \vec{\eta}) \in C^1(R^4)$ $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$, что

$$\text{г)}\ \lim_{r \to \infty} [r\Phi^{ik}(x) - f^{ik}(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0, \quad \vec{n}_x = \frac{\vec{x}}{r}, \tag{10.36г}$$

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по $\vec{n}_x \in (\vec{n}_x \parallel \vec{n}_x^{\,2} = 1,\ \vec{n}_x \in R^3)$.

Доказательство. Действительно, из условий предложения тривиально вытекают неравенства (10.36а)—(10.36в) и следующее асимптотическое при $r \to \infty$ соотношение для величины $\vec{x} - \vec{\xi}|$ из выражений (10.32) — (10.34):

$$|\vec{x} - \vec{\xi}| = r\left[1 - \frac{(\vec{n}_x \vec{\xi})}{r} + O\left(\frac{|\vec{\xi}|^2}{r^2}\right)\right] r \to \infty, \quad \vec{\xi} \in B_\rho(x^0, \vec{x}).$$

Используя последнее соотношение, получаем

$$\lim_{r \to \infty} \Phi^{00}(r) = \frac{2\gamma}{c^2} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho\left[x^0 - r + (\vec{n}_x \vec{\xi}) + O\left(\frac{|\vec{\xi}|^2}{r}\right), \vec{\xi}\right]}{r\left|1 - \frac{(\vec{n}_x \vec{\xi})}{r} + O\left(\frac{|\vec{\xi}|^2}{r^2}\right)\right|} d\vec{\xi}$$

и аналогичные соотношения для $\Phi^{0\alpha}$, $\Phi^{\alpha\beta}$, откуда вытекает справедливость соотношения (10.36г). Предложение доказано.

Справедливо также предложение, аналогичное предложению 10.2, но с заменой условия $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$ на такое условие: $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ — обобщенная функция на $\mathcal{D}$, носитель которой при всяком $x^0 \in R^1$ сосредоточен в конечном числе точек $\vec{\xi}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Предложение 10.3. Пусть $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ — обобщенная функция на $\mathcal{D}$, пересечение носителя которой со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \text{const}$ состоит из конечного числа точек $\vec{\xi}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B\rho(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp}\rho$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R_1)$, где $D_1 \in \in R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» r от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда каждой обобщенной функции Φ^{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ из формул (10.32) — (10.34) по формуле

$$(\Phi^{ik}, \varphi) = \int \Phi^{ik}(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(R^4 \setminus \operatorname{supp}\rho) \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

соответствует единственная функция $\Phi^{ik}(x) \in C(R^4 \setminus \operatorname{supp}\rho)$.

Для случая

$$\rho(\xi^0, \vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)]$$

с некоторыми функциями $a_j^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$ $(\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, \ldots, N)$ такими, что $\left|\frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1$ для всех $\xi^0 \in R^1$, эти функции $\Phi_т^{ik}(x)$ имеют следующий вид:

$$\Phi_т^{00}(x) = \frac{2\gamma}{c^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{|\vec{x} - \vec{\xi}_j| - \frac{1}{c} \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (x^\alpha - \xi_j^\alpha)\, v_j^\alpha (x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_j|)}; \quad (10.37а)$$

$$\Phi_т^{0\alpha}(x) = \frac{4\gamma}{c^3} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j v_j^\alpha (x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_j|)}{|\vec{x} - \vec{\xi}_j| - \frac{1}{c} \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (x^\alpha - \xi_j^\alpha)\, v_j^\alpha (x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_j|)}; \quad (10.37б)$$

$$\Phi_т^{\alpha\beta}(x) = \frac{2\gamma\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{|\vec{x} - \vec{\xi}_j| - \frac{1}{c} \sum\limits_{\alpha=1}^{3} (x^\alpha - \xi_j^\alpha)\, v_j^\alpha (x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_j|)}, \quad (10.37в)$$

где $\vec{\xi}_j = \vec{\xi}_j(x^0, \vec{x})$ — решение функционального уравнения

$$\vec{\xi}_j - \vec{a}_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_j|) = 0, \quad (10.38)$$

а

$$v_j^\alpha(\eta^0) \equiv c\,\frac{da_j^\alpha(\eta^0)}{d\eta^0}.$$

Функции (10.37а)—(10.37в) удовлетворяют неравенствам (10.36а)—(10.36в) с некоторыми постоянными $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $B_\Lambda > 0$ и существуют такие функции $f^{ik}(\eta^0, \vec{\eta}) \in C^1(R^4)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, что справедливо соотношение (10.36г).

Доказательство предложения 10.3 проводится аналогично доказательству предложения 10.2 с учетом лемм 4.4, 4.6 из § 4.

В силу результатов п. 10.1 решение каждого из уравнений (10.21) $g^{ik}(x) = \Phi^{ik}(x) + \varphi^{ik}(x)$ должно удовлетворять предельным условиям первого рода, т. е. удовлетворять всем четырем требованиям предложения 10.1. Поэтому из предложений 10.2, 10.3 и формулы (10.35) получаем следующее следствие.

Следствие 10.2. Пусть функции $|\Phi^{is}(x)|$ из (10.32) — (10.34) ограничены при всех $x \in R^4$ и всех i, $s = 0, 1, 2, 3$. Тогда при условиях предложений 10.1 и 10.2 функции $\varphi^{ik}(x) - (g^{ik})_\infty$, $k=0, 1, 2, 3$, из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (10.32) — (10.34), в силу формул (10.9а) — (10.9г), удовлетворяют условиям а)—г) предложения 10.1 и волновому уравнению (10.35).

В этом пункте нам будет полезна одна теорема о единственности решения волнового уравнения, доказанная в конце этой главы, в § 15. Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 10.1. *Пусть функция* $f(x)$, $x = (x^0, \vec{x}) \in R^4$:

1) *обладает непрерывными частными производными до второго порядка включительно во всей области* $x \in R^4$:

$$f(x) \in C^2(R^4);$$

2) *удовлетворяет во всей области* $x \in R^4$ *волновому уравнению*

$$\Box f(x^0, \vec{x}) = 0, \quad x \in R^4,$$

3) *удовлетворяет следующим неравенствам с некоторыми положительными постоянными* B_0, B_1, B_2:

а) $|f(x^0, \vec{x})| < B_0, \quad \forall x \in R^1;$

б) $|f(x^0, \vec{x})| < \dfrac{B_1}{r}, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1;$

в) $\left|\dfrac{\partial f(x^0, \vec{x})}{\partial x^l}\right| < \dfrac{B_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1 \quad (l = 0, 1, 2, 3);$

4) *существует такая функция* $\psi(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^1(R^4)$, *что справедливо*

$$\lim_{r\to\infty} [rf(x^0, \vec{x}) - \psi(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0,$$

равномерно по всем $\vec{n}_x = \dfrac{\vec{x}}{r} \in (\vec{n}_x \| \vec{n}_x^2 = 1, \; \vec{n}_x \in R^3)$ *и по* $x^0 \in R^1$.

Тогда такая функция $f(x)$ *тождественно равна нулю:*

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in R^4.$$

Из этой теоремы и следствия 10.2 немедленно получаем, что если $\Phi^{ik}(x) \in C^2(R^4)$, то все функции φ^{ik} $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (10.32), (10.33), (10.34), равны $(g^{ik})_\infty$ тождественно при всех $x \in R^4$. Достаточные условия, обеспечивающие принадлежность запаздывающих потенциалов $\Phi^{il}(x)$ из формул (10.32) — (10.34) к классу функций $C^2(R^4)$, согласно теореме 4.3 и свойствам свертки, можно взять в виде $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $v^\alpha(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $\alpha = 1, 2, 3$; $\operatorname{supp}\rho \subset Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \| \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — ограниченная область. В результате получим из следствия 10.1 два нижеследующих утверждения.

Следствие 10.3. Пусть плотность массы вещества $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $v^\alpha(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $\alpha = 1, 2, 3$, и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\rho(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp}\rho$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R_1)$, где $D_1 \subset$ $\subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда решение g^{il} $(i, \; l = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$ уравнения (10.20), удовлетворяющее предельным условиям первого рода (10.9а) — (10.9г), существует, оно единственно и имеет вид

$$g^{00}(x) = 1 + \frac{2\gamma}{c^2} \int\int\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|} d\vec{\xi}, \qquad (10.39а)$$

$$g^{0\alpha}(x) = \frac{4\gamma}{c^3} \int\int\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|} d\vec{\xi}, \quad (10.39б)$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{2\gamma}{c^2} \delta_{\alpha\beta} \int\int\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|} d\vec{\xi} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

$$(10.39в)$$

Следствие 10.4. Пусть $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ — обобщенная функция на $\mathcal{D}$, имеющая вид

$$\rho(\xi^0, \vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta[\vec{\xi} - a_j(\xi^0)],$$

с некоторыми функциями $a_j^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$ $(\alpha = 1, 2, 3; \; j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\rho(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp} \rho$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset$ $\subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда обобщенное решение уравнения (10.20) существует и ему соответствует по формуле

$$(g^{ik}, \varphi) = \int g^{ik}(x) \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^4 \setminus \operatorname{supp} \rho) \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

единственное решение $g^{ik}(x) = \Phi_{\text{т}}^{ik}(x) + \varphi^{ik}(x)$ из класса $C^2(R^4 \setminus \operatorname{supp} \rho)$, удовлетворяющее предельным условиям (10.9б)—(10.9г), условиям

$$\left| \frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0} \right| < 1, \quad \forall \xi^0 \in R^1 \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

и условиям $\varphi^{ik}(x) \in C^2(R^4)$; $\square\, \varphi^{ik}(x) = 0$. Это единственное решение имеет вид

$$g^{ik}(x) = \Phi_{\text{т}}^{ik}(x) + (g^{ik})_\infty \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

где $\Phi_{\text{т}}^{ik}(x)$ даются формулами (10.37а) — (10.37в).

§ 11. Некоторые вспомогательные теоремы

11.1. Следствия из предельных условий первого рода. Рассмотрим произвольную систему координат (в частном случае это может быть гармоническая система координат, для которой в силу формул(10.4), (10.5) справедливо $\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial [\sqrt{-g} g^{ik}(x)]}{\partial x^k} = 0$). Изучим, какими свойствами обладает величина $G^{ik} = \sqrt{-g} g^{ik}$ в произвольной системе координат, но такой, в которой для решения класса (1, ε) выполняются условия $g^{ik}(x) \in C^3(R^4)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ и все условия предложения 10.1 из § 10.

Легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Предложение 11.1. Пусть для решения класса (1, ε) выполняются свойства а) — г) предложения 10.1 и пусть это решение обладает свойством

$$g^{ik}(x) \in C^3(R^4) \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда величины $G^{ik} \equiv \sqrt{-g}\, g^{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, составленные для такого решения из класса (1, ε), удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{а)} \quad \lim_{r \to \infty} [rG^{ik}(x) - r(g^{ik})_\infty - f^{ik}(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0, \tag{11.1}$$

$$r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

с некоторой функцией $f^{ik}(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$ равномерно по

$$x^0 \in R^1, \; \vec{n}_x \equiv \frac{\vec{x}}{r} \in (\vec{n}_x \| \vec{n}_x^2 = 1, \; \vec{n} \in R^3);$$

$$\text{б)} \quad \left| \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k} \right| < \frac{M_1}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1; \tag{11.2}$$

$$\text{в)} \quad \left| \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^l \partial x^k} \right| < \frac{M_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1; \tag{11.3}$$

$$\text{г)} \quad \left| \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k} \right| < M_3, \quad \forall x \in R^4 \tag{11.4}$$

с некоторыми положительными ограниченными постоянными M_1, M_2, M_3.

11.2. Связь тензора масс и условий гармоничности. Всякое точное решение уравнений поля (10.1), согласно результатам § 5, удовлетворяет соотношению

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \tag{11.5}$$

В гармонической системе координат, согласно результатам § 7, для всякого точного решения уравнений поля, помимо уравнений

(11.5) (выполняющихся автоматически), должно выполняться точно условие гармоничности

$$\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k} = 0, \quad \forall\, x \in V_4. \tag{11.6}$$

Если же отыскивается некоторое приближенное решение уравнений поля (10.1), например решение класса (k, ε), $k \geqslant 1$, то для таких решений уравнения поля должны выполняться лишь с точностью до слагаемых, имеющих порядок $\frac{1}{c^{k+1}}$ по отношению к главным. С такой же точностью в гармонической системе координат должны выполняться соотношения (11.6) и (11.5) для этих приближенных решений.

Поскольку в § 10 вычисления проводились в гармонической системе координат, то, очевидно, необходимо прежде всего установить, выполняются ли условия гармоничности для найденных в § 10 решений (10.39) уравнений поля из класса (k, ε), $k \geqslant 1$. Эти решения можно при условиях следствий 10.3 либо 10.4 переписать в виде свертки правой части уравнения (10.20) с функцией Грина (10.26) волнового уравнения:

$$g^{00}(x) = 1 + \frac{8\pi\gamma}{c^2}(G^{\text{ret}} * \rho)(x) \equiv 1 + \frac{2U(x)}{c^2}, \tag{11.7а}$$

$$g^{0\alpha}(x) = \frac{16\pi\gamma}{c^3}(G^{\text{ret}} * \rho v^\alpha)(x), \tag{11.7б}$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = -\delta_{\alpha\beta} + \frac{8\pi\gamma\delta_{\alpha\beta}}{c^2}(G^{\text{ret}} * \rho)(x), \tag{11.7в}$$

и при этом, очевидно

$$g = |g_{ik}| = -1 - \frac{4U(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{11.8}$$

где

$$U(x) \equiv 4\pi\gamma(G^{\text{ret}} * \rho)(x) = \gamma \iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}.$$

Прямой подстановкой выражений (11.7), (11.8) в левую часть условий гармоничности для нулевой компоненты находим

$$\frac{\partial G^{0k}}{\partial x^k} = \frac{\partial[\sqrt{-g}g^{0k}]}{\partial x^k} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\left[c\frac{\partial}{\partial x^0}(G^{\text{ret}} * \rho)(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(G^{\text{ret}} * \rho v^\alpha)(x)\right] + O\left(\frac{1}{c^4}\right) =$$

$$= \frac{16\pi\gamma}{c^3}\left(G^{\text{ret}} * \left(c\frac{\partial\rho}{\partial x^0} + \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right)\right)(x) + O\left(\frac{1}{c^4}\right) = O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

в силу свойства свертки (4.6 д) и с учетом уравнения непрерывности (5.16).

Подставим теперь решения (11.7), (11.8) в левую часть условия гармоничности (11.6) для пространственных компонент. Получим при этом

$$\frac{\partial G^{\alpha k}}{\partial x^k} = \frac{\partial\left[\sqrt{-g}\, g^{\alpha k}\right]}{\partial x^k} = \frac{16\pi\gamma}{c^3}\left(G^{\text{ret}} * \frac{\partial(\rho v^\alpha)}{\partial x^0}\right)(x) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\delta_{\alpha\beta}\left(-1+\frac{2U}{c^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{c^4}\right) = O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Таким образом, с требуемой точностью условия гармоничности (11.6) для решений (11.7) выполняются.

Итак, мы нашли выражение для метрического тензора g^{ik} для решений класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, в гармонической системе координат. Это решение дается формулами (11.7а) — (11.7в), оно удовлетворяет предельным условиям первого и второго рода и условиям гармоничности.

Теперь необходимо найти уравнения движения, из которых можно было бы получить закон распределения вещества в пространстве—времени, т. е. получить в качестве решения значения тензора энергии — импульса T^{ik} для решений класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, уравнений поля.

Уравнения движения в гармонической системе координат получим из ковариантного обобщения закона сохранения энергии—импульса

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \qquad (11.8\text{а})$$

и из требования выполнения условий гармоничности (11.6) с необходимой точностью.

С этой целью перепишем уравнения поля Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T^{ik} \qquad (11.9)$$

в более удобной форме.

С помощью формул (6.1), (6.2) левую часть уравнений поля (11.9) можно переписать в произвольной системе координат в следующем виде:

$$R^{ls} - \frac{1}{2} g^{ls} R = \frac{1}{2g} G^{ik} \frac{\partial^2 G^{ls}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{N^{ls}}{g} + \frac{1}{2} g^{ls} B - B^{ls} \qquad (11.10)$$
$$(l,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где

$$B^{ls} = \Gamma^{ls} + \frac{1}{2}\left(y^l \Gamma^s + y^s \Gamma^l\right),$$
$$B = g_{lk} B^{lk} = \Gamma + \Gamma^k y_k, \qquad (11.11)$$
$$G^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}, \quad y_k = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{kl},$$

$$\Gamma^{ls} = \frac{1}{2}\left(g^{lk}\frac{\partial \Gamma^{s}}{\partial x^{k}} + g^{sk}\frac{\partial \Gamma'}{\partial x^{k}} - \Gamma^{k}\frac{\partial g^{ls}}{\partial x^{k}}\right),$$

$$\Gamma^{s} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial G^{sk}}{\partial x^{k}},$$

$$\Gamma = g_{ls}\Gamma^{ls},$$

$$N^{ls} = (-g)\left|\Pi^{l,ik}\Pi^{s}_{ik} - \frac{1}{2}y^{l}y^{s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{g^{ls}}{\sqrt{-g}}\Pi^{n}_{ik}\frac{\partial G_{ik}}{\partial x^{n}} + \frac{1}{4}y_{k}y^{k}g^{ls}\right|, \qquad (11.12)$$

$$\Pi^{l,ik} = \frac{1}{2g}\left(G^{in}\frac{\partial G^{lk}}{\partial x^{n}} + G^{kn}\frac{\partial G^{li}}{\partial x^{n}} - G^{ln}\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^{n}}\right).$$

Для решений класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$, соотношение (11.10) можно переписать в следующем виде:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = \frac{1}{2cg}\left[\frac{\partial^{2}}{(\partial x^{0})^{2}} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^{2}}{(\partial x^{\alpha})^{2}}\right]G^{ik} +$$

$$+ \frac{N^{ik}}{g} + \frac{1}{2}g^{ik}B - B^{ik} + O\left(\frac{v^{5}_{\max}}{c^{5}}\right). \qquad (11.13)$$

Доказательство соотношений (11.10), (11.13) можно найти в книге В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения», § 68 и приложение Г.

Дифференцируя левую и правую части уравнений поля (11.9) с учетом (11.13), получаем для решений из класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$, в произвольной системе координат

$$\left[\frac{\partial}{(\partial x^{0})^{2}} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^{2}}{(\partial x^{\alpha})^{2}}\right]\frac{\partial G^{ik}}{\partial x^{k}} = \frac{16\pi\gamma}{c^{3}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(-gT^{ik} + \frac{c^{2}}{8\pi\gamma}N^{ik}\right) +$$

$$+ 2c\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(gB^{ik} - \frac{1}{2}gg^{ik}B\right) + O\left(\frac{v^{4}_{\max}}{c^{4}}\right). \qquad (11.14)$$

С другой стороны, выражение для пространственных компонент расходимости тензора энергии — импульса $\nabla_{k}T^{\alpha k}$, имеющее вид в произвольной системе координат

$$\nabla_{k}T^{\alpha k} = \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{0\beta}T^{0\beta} + y_{0}T^{0\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma}T^{\beta\sigma} + y_{\beta}T^{\alpha\beta}, \qquad (11.15)$$

можно для решений класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 7$, переписать в виде

$$\nabla_{k}T^{\alpha k} = \frac{1}{g}\left|\frac{\partial}{\partial x^{0}}\left(gT^{\alpha 0} - \frac{c^{2}}{8\pi\gamma}N^{\alpha 0}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(gT^{\alpha\beta} - \frac{c^{2}}{8\pi\gamma}N^{\alpha\beta}\right)\right] + O\left(\frac{v^{8}_{\max}}{c^{8}}\right). \qquad (11.16)$$

Доказательство соотношения (11.16) для решений класса $(k,\ \varepsilon)$, $0 \leqslant k \leqslant 7$, можно также найти в книге В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения», § 69.

Из сравнения выражений (11.14) и (11.16) получаем для решений класса $(k,\ \varepsilon)$, $0 \leqslant k \leqslant 4$, в произвольной системе координат

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\beta)^2}\right] \frac{\partial G^{\alpha k}(x)}{\partial x^k} - Q^\alpha(x) =$$

$$= -\frac{16\pi\gamma}{c^3} g\nabla_k T^{\alpha k}(x) + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3), \quad (11.17)$$

где

$$\begin{aligned} Q^l(x) \equiv 2c \frac{\partial}{\partial x^k}\left(gB^{lk} - \frac{1}{2} gg^{lk}B\right) = c\frac{\partial}{\partial x^s}\ g\Bigg\{ & \frac{G^k}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial g^{ls}}{\partial x^k} - \\ & - g^{lk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{G^s}{\sqrt{-g}}\right) - g^{sk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{G^l}{\sqrt{-g}}\right) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{-g}}(G^s y^l + G^l y^s) + g_{nm}g^{ls}\Bigg[g^{nk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{G^m}{\sqrt{-g}}\right) + \\ & + g^{mk}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{G^n}{\sqrt{-g}}\right) - \frac{G^k}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial g^{nm}}{\partial x^k}\Bigg] + 2\frac{g^{ls}}{\sqrt{-g}} G^k y_k\Bigg\}, \quad (11.18) \end{aligned}$$

$$G^l \equiv \frac{\partial G^{lk}}{\partial x^k} \qquad (i,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Аналогично из уравнения (11.14) для нулевой компоненты для решений класса $(k,\ \varepsilon)$, $0 \leqslant k \leqslant 4$, получаем в произвольной системе координат

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] \frac{\partial G^{0k}(x)}{\partial x^k} - Q^0(x) =$$

$$= -\frac{16\pi\gamma}{c^3} g\nabla_k T^{0k}(x) + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right). \qquad (11.19)$$

Входящие в левые и правые части уравнений (11.17), (11.19) операторы содержат дифференцирование по координатам. Если тензор $T^{ik} \in C^2(R^4)$, то эти уравнения имеют обычный смысл. В том же случае, когда $T^{ik} \overline{\in} C^2\ (R^4)$, то T^{ik} является обобщенной функцией на $\mathcal{D}$, а уравнения (11.17), (11.19) следует понимать в смысле обобщенных функций, т. е. в соответствии с результатами § 4 главы I.

Как подчеркивалось выше, всякое точное решение уравнений поля в области $D \subset V_4$ должно точно удовлетворять условию

$$\nabla_k T^{ik}(x) = 0, \qquad \forall x \in D. \qquad (11.20)$$

В гармонической системе координат, кроме того, всякое точное решение уравнений поля в области $D \subset V_4$ должно удовлетворять точно еще и условию гармоничности

$$G^i \equiv \frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k} = 0, \qquad \forall x \in D. \tag{11.21}$$

Если же рассматривать приближенное решение уравнений поля в области $D \subset V_4$ (например, решение из класса (k, ε), $k \geqslant 0$) в гармонической системе координат, то условия (11.20) и (11.21) в области $x \in D$ будут выполняться лишь приближенно — с точностью, с которой отыскивается само решение уравнений поля. Причем точность, с которой должны выполняться соотношения (11.20), должна быть согласована с той точностью, с которой выполняются соотношения (11.21) в области $D \subset V_4$ для искомого решения.

Например, решение задачи N тел может отыскиваться в гармонической системе координат в приближенном виде как непрерывное по параметру $\sigma \equiv \frac{l_{\max}}{R_{\min}}$ в точке $\sigma = 0$ ($l_{\max}$ — максимальный из размеров N тел, а $R_{\min}$ — минимальное из попарных расстояний $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ между N телами в области $x \in D$) и принадлежащее классу (k, ε), $k \geqslant 1$. Тогда каждое из соотношений (11.20), (11.21) должно выполняться с точностью до

$$O\left(\frac{l_{\max}}{R_{\min}}\right) \cdot O\left(\frac{v_{\max}^{k+1}}{c^{k+1}}\right).$$

Для решений из класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$, уравнений поля взаимосвязь между той точностью, с которой выполняются условия гармоничности (11.21), и той точностью, с которой выполняются условия (11.20) в гармонической системе координат, устанавливается уравнениями (11.17), (11.19). В частности, для решений класса $(4, \varepsilon)$ получаем, что уравнения (11.17), (11.19) удовлетворяются с требуемой точностью, если с точностью до $O\left(\frac{v_{\max}^5}{c^5}\right)$ удовлетворяются условия гармоничности (11.21) и условия (11.20).

11.3. Уравнения движения N тел в интегральной форме. Уравнения (11.17), (11.19) могут быть использованы для получения в гармонической системе координат уравнений движения для решений из класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$.

Чтобы получить уравнения движения в гармонической системе координат для решения из класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$, из уравнений (11.17), (11.19), можно в принципе действовать следующим образом. Сначала представить левую часть в виде линейного дифференциального оператора второго порядка в произвольной системе координат, действующего на вектор-функцию

$$G^i = \frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k},$$

и тем самым получить линейное неоднородное уравнение относительно вектор-функции G^i с правой частью, имеющей вид

$$-\frac{16\pi\gamma}{c^3} g\nabla_k T^{kl}.$$

Затем решить это уравнение относительно G^i с учетом предельных условий а) — г) предложения 11.1, т. е. получить $G^i(x)$ в виде вектор-функции F^i от x, зависящей функционально от величины $\nabla_k T^{kl}$:

$$G^i(x) = F^i(x;\ \nabla_k T^{kl}). \qquad (11.22)$$

Наконец, требуя, чтобы выполнялись условия гармоничности $G^i(x) = 0$ с необходимой точностью, получить из (11.22) уравнения движения в виде системы дифференциально-функциональных уравнений вида

$$F^i(x;\ \nabla_k T^{kl}) = 0. \qquad (11.23)$$

Однако непосредственно воспользоваться таким путем для получения уравнений движения в гармонической системе координат из условия (11.8 а) представляется затруднительным из-за сложной структуры всей левой части уравнений (11.17), (11.19). По этой причине мы проделаем указанный путь не весь сразу, а по частям — в два шага.

А именно в качестве первого шага мы сузим класс рассматриваемых координатных систем с произвольных до принадлежащих некоторому вспомогательному классу координатных систем, который назовем классом субгармонических координатных систем. Этот класс будет определен ниже и он включает, в частности, все гармонические координатные системы. В классе субгармонических систем координат уравнения (11.17), (11.19) для решений класса (k, ε), $0 \leqslant k \leqslant 4$, существенно упростятся и примут вид неоднородных волновых уравнений относительно вектор-функции $G^i = \frac{\partial G^{ik}}{\partial x^k}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ с правой частью, зависящей от тензора энергии — импульса.

В качестве второго шага мы решим полученное из (11.17), (11.19) уравнение относительно вектор-функции G^i с учетом предельных условий а) — г) предложения 11.1 (т. е. получим G^i в виде (11.22)), после чего потребуем выполнения условий гармоничности $G^i = 0$ с необходимой точностью. Тем самым получим уравнения движения в форме (11.23).

Определение 11.1. *Субгармонической системой координат* назовем всякую такую систему координат, для которой выполняется при всех $x \in R^4$ соотношение

$$\frac{1}{2c} Q^i(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\left(gB^{ik} - \frac{1}{2} gg^{ik}B\right) = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (11.24)$$

где B^{ik} и B даются формулами (11.11).

Из формул (11.11), (11.18) видно, что частным случаем субгармонической системы координат является гармоническая система координат. В субгармонической системе координат уравнения (11.17), (11.19) принимают с точностью до $O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right)$ следующий вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right]\frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k}=-\frac{16\pi\gamma}{c^3}g\nabla_k T^{ki}. \qquad (11.25)$$

Эти уравнения имеют вид (10.21), а поэтому к ним применимы леммы 10.1 и 10.2 из предыдущего параграфа.

Согласно замечанию 10.1, будем под решением $G^i \equiv \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k}$ неоднородного уравнения (11.25) в R^4 понимать обобщенное решение этого уравнения R^4, если не выполняется условие $g_{\nabla_k}T^{ki}(x) \in C(R^4)$, $G^i(x) \in C^2(R^4)$, и будем понимать классическое решение этого уравнения в R^4 в случае, если $g_{\nabla_k}T^{ki}(x) \in C(R^4)$, $G^i(x) \in C^2(R^4)$.

С учетом этого можно вытекающее из лемм 10.1 и 10.2 для уравнения (11.25) следствие сформулировать в следующем виде.

Следствие 11.1. Пусть тензор энергии — импульса $T^{ik}(\xi^0, \vec{\xi})$ вещества имеет носитель, пересечение которого со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \mathrm{const}$ есть ограниченная область в R^3. Тогда общее решение уравнений (11.25) имеет вид

$$G^i(x) = -\frac{4\gamma}{c^3}\iiint\frac{(g\nabla_k T^{ki})(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}|,\ \vec{\xi})}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}d\vec{\xi}+\varphi^i(x)\equiv G^i_{\text{ч}}(x)+\varphi^i(x) \qquad (11.26)$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где $\varphi^i(x)$ — общее решение волнового уравнения:

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right]\varphi^i(x)=0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (11.27)$$

В выражении (11.26) приняты обозначения

$$(g\nabla_k T^{ki})(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}|,\ \vec{\xi})\equiv g(\xi^0,\vec{\xi})\nabla_k T^{ki}(\xi^0,\ \vec{\xi})\,|_{\xi^0=x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}|}$$

Первое слагаемое в правой части выражения (11.26) убывает при $r \to \infty$, если для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ пересечение носителя тензора T^{ki} с нижней полой светового конуса $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$ содержится в $\text{Ц} = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1,\ \xi^0 \in R_1)$, где D_1 — некоторая ограниченная область, лежащая на конечном расстоянии от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Аналогично предложениям 10.2, 10.3 устанавливаем два следующих утверждения.

Предложение 11.2. Пусть $(g\nabla_k T^{ik})(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$, $g^{ik}(\xi) \in C^2(R^4)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_T(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \left[\bigcup_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik}\right]$$

содержится в цилиндре Ц $= (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда каждая функция $G^i_ч(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ из формулы (10.26) удовлетворяет следующим неравенствам с некоторыми постоянными $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $B_3 > 0$:

$$\text{а)} \quad |G^i_ч(x)| < \frac{B_1}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1, \tag{11.28а}$$

$$\text{б)} \quad \left|\frac{\partial G^i_ч(x)}{\partial x^l}\right| < \frac{B_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1 \quad (i, l = 0, 1, 2, 3), \tag{11.28б}$$

$$\text{в)} \quad |G^i_ч(x)| < B_3, \quad \forall x \in R^4 \tag{11.28в}$$

и найдутся такие функции $f^i(\eta^0, \vec{\eta}) \in C^1(R^4)$, $i = (0, 1, 2, 3)$, что справедливо

$$\text{г)} \quad \lim_{r \to \infty} [rG^i_ч(x) - f^i(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0, \tag{11.28 г}$$

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по $\vec{n}_x \in (\vec{n}_x \| \vec{n}_x^2 = 1, \ \vec{n}_x \in R^3)$, где $\vec{n}_x \equiv \dfrac{\vec{x}}{r}$.

Предложение 11.3. Пусть $(g\nabla_k T^{ik})(\xi^0, \vec{\xi})$ — обобщенная функция на $\mathcal{D}$, пересечение носителя которой со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \text{const}$ состоит из конечного числа точек $\vec{\xi}_j$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N)$, и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_{gT}(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap [\bigcup_i \operatorname{supp}(g\nabla_k T^{ik})]$$

содержится в цилиндре Ц $= (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» r от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда каждая обобщенная функция $G^i_ч(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ из формулы (10.26) является регулярной обобщенной функцией, которой по формуле

$$(G^i_ч, \varphi) = \int G^i_ч(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^4 \setminus [\bigcup_i \operatorname{supp}(g\nabla_k T^{ik})]) \ (i = 0, 1, 2, 3)$$

соответствует единственная функция $G^i_ч(x) \in C^2(R^4 \setminus [\bigcup\limits_i \operatorname{supp} g\nabla_k T^{ik}])$, и все эти функции $G^i_ч(x)$ удовлетворяют неравенствам (11.28а), (11.28б) с некоторыми постоянными $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ и существуют такие функции $f^i(\eta_0, \vec{\eta}) \in C^1(R^4)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, что справедливо соотношение (11.28г).

В силу предложения 11.1 решение каждого из уравнений (11.25) $G^i(x) = G^i_ч(x) + \varphi^i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$ должно удовлетворять предельным условиям первого рода, т. е. удовлетворять всем свойствам а)—г) предложения 10.1. Поэтому из предложений 11.1 — 11.3 и формулы (11.27) получаем следующее утверждение.

Следствие 11.2. Пусть функции $|G^i(x)|$ из (11.26) ограничены при всех $x \in R^4$ и всех $i = 0, 1, 2, 3$. Тогда при условиях предложений 11.1 и 11.2 функции $\varphi^i(x)$ из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (10.26), удовлетворяют всем условиям теоремы 10.1.

При условиях следствия 11.2 получаем тогда из теоремы 10.1 о единственности решения волнового уравнения, что функции $\varphi^i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (10.26), тождественно равны нулю.

В результате получим из следствия 11.2 два следующих ниже утверждения.

Следствие 11.3. Пусть $(g\nabla_k T^{ik})(\xi) \in C^2(R^4)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_T(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap [\bigcup_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik}]$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1,\ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset$ $\subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» r от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда решение $G^i(x) = \dfrac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$ уравнения (11.25), удовлетворяющее предельным условиям (11.1) — (11.4), существует, это решение единственно и имеет вид

$$G^i(x) = -\frac{4\gamma}{c^3}\iiint \frac{(g\nabla_k T^{ki})(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|,\ \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi} \qquad (11.29)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3).$$

Следствие 11.4. Пусть $(g\nabla_k T^{ik})(\xi^0, \vec{\xi})$ — обобщенная функция на $\mathcal{D}$, пересечение носителя которой со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \mathrm{const}$ состоит из конечного числа точек $\vec{\xi}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_{gT}(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap [\bigcup_i \operatorname{supp}(g\nabla_k T^{kl})]$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \parallel \vec{\xi} \in D_1, \ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset \subset R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» r^0 от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда обобщенное решение $G^i(x) = \frac{\partial G^{ik}(x)}{\partial x^k}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ уравнения (11.25) существует и ему соответствует по формуле $(G^i, \varphi) = \int G^i(x)\varphi(x)\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(R^4 \setminus [\bigcup_i \operatorname{supp} g\nabla_k T^{ki}])$ $(i=0, 1, 2, 3)$ единственное решение $G^i(x) = G^i_ч(x) + \varphi^i(x)$ из класса C^2 $(R^4 \setminus [\bigcup_i \operatorname{supp} g\nabla_k T^{ik}])$, удовлетворяющее предельным условиям (11.1) — (11.4) и условиям $\varphi^i(x) \in C^2(R^4)$, $\Box \varphi^i(x) = 0$, и это единственное решение имеет вид (11.29).

Итак, в качестве первого шага при получении уравнений движения из условий гармоничности (11.21) и условия равенства нулю расходимости тензора энергии — импульса (11.20) мы перешли к субгармоническим координатным системам, в которых решение уравнений (11.17), (11.19) приняло простой вид (11.29).

В качестве второго шага потребуем выполнения условий гармоничности $G^i(x) = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ в формуле (11.29) с необходимой точностью, что приведет к уравнениям движения в интегральной форме.

Рассмотрим систему N тел в той области значений переменной x^0, при которых отсутствуют столкновения между какими-либо телами этой системы. В таком случае соотношение (11.29) в гармонической системе координат примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{N} \iiint\limits_{(j)} \frac{(g\nabla_k T^{ki})(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} = 0, \tag{11.30}$$

где $\iiint\limits_{(j)}$ означает интегрирование по той области значений переменной интегрирования $\vec{\xi}$, которая занята j-м телом.

Установим теперь более точно, в окрестности каких значений переменного $\vec{\xi}$ отличен от нуля вклад подынтегральной функции в каждом из N слагаемых левой части формулы (11.30).

11.4. Модель точечных тел. Рассмотрим с этой целью модель, в которой каждое из N тел принимается сосредоточенным в одной точке — своей для каждого тела в фиксированный момент x^0. Это модель N точечных тел, т. е. в точечной модели для плотности массы вещества надо взять выражение

$$\rho(\xi^0, \vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)] \tag{11.31}$$

с некоторыми функциями $a_j^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \ldots, N$), имеющими смысл координат центра массы j-го тела в момент ξ^0.

В такой модели для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, с учетом формул (10.16) для тензора энергии — импульса получим для функций $g\nabla_k T^{ki}(\xi^0, \vec{\xi})$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ следующее выражение:

$$g\nabla_k T^{ki}(\xi^0, \vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} b^i_{j,s,p_s}(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right]^{p_s} \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)] \tag{11.32}$$

с известными функциями $b^i_{j,s,p_s}(\xi) \in C^2(R^4 \setminus \operatorname{supp} \rho)$, выражающимися через m_j и $v_j^\alpha(\xi^0, \vec{\xi})$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, \ldots, N$) с помощью подстановки выражений (10.39а)—(10.39в), (10.37) и (10.16) в выражение для $g\nabla_k T^{ki}(\xi^0, \vec{\xi})$.

Сейчас надо будет установить, в окрестности каких именно значений переменного $\vec{\xi}$ отличен от нуля вклад подынтегральной функции в каждом из N слагаемых в левой части формулы (11.30). Для этого будет *достаточно рассмотреть выражение* (11.32) *с бесконечно гладкими функциями* $b^i_{j,s,p_s}(\xi) \in C^\infty(R^4)$ *для* $\vec{x} \in D_1$, с областью $D_1 \subset R^3$, фигурирующей в условиях следствия 11.4.

В этом случае, подставляя (11.32) в соотношения (11.29), приводим последние в гармонической системе координат к виду

$$\sum_{j=1}^{N} \iiint\limits_{(j)} \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} b^i_{j,s,p_s}(\xi) \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right]^{p_s} \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)]}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} \Bigg|_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} = 0.$$

По правилам дифференцирования обобщенных функций получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \iiint\limits_{(j)} \delta[\vec{\xi} - a_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|)] \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right]^{p_s} \times$$

$$\times \frac{b^i_{j,s,p_s}(\xi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\Bigg]_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} = 0. \tag{11.33}$$

Вычислим теперь интеграл

$$I^i_j = \iiint\limits_{(j)} \delta[\vec{\xi} - a_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|)] \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} \left\{\left[-\frac{\partial}{\partial \xi^s}\right]^{p_s} \frac{b^i_{j,s,p_s(\xi)}}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\right\}_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi}, \tag{11.34}$$

фигурирующий в формуле (11.33). С этой целью перейдем от переменных интегрирования ξ^α ($\alpha = 1, 2, 3$) в каждом слагаемом в левой части соотношения (11.33) к новым переменным $\mathscr{L}_j^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) по формулам

$$\vec{\mathscr{L}}_j = \vec{\xi} - \vec{a}_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|). \tag{11.35}$$

Отсюда в каждом выражении I_j^i можно выразить ξ^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ через $\mathcal{L}_j^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ как решение функционального уравнения (11.35). Обозначим решения уравнения (11.35) для заданной функции $\vec{a}_j(\xi^0)$ через $\vec{\xi}_{\sigma j}(\vec{\mathcal{L}})$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, J)$. Очевидно,

$$d\vec{\xi} \equiv d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \frac{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3)} d\mathcal{L}^1 d\mathcal{L}^2 d\mathcal{L}^3 =$$

$$= \frac{d\mathcal{L}^1 d\mathcal{L}^2 d\mathcal{L}^3}{1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \frac{[\xi^\alpha(\vec{\mathcal{L}}) - x^\alpha]\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}(\vec{\mathcal{L}})|)}{c\,|\vec{x} - \vec{\xi}(\vec{\mathcal{L}})|}},$$

где

$$v^\alpha(\xi^0) = c\,\frac{da^\alpha(\xi^0)}{d\xi^0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

С помощью последнего соотношения получаем

$$I_j^i = \sum_{\sigma=1}^{J} \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial\xi^s}\right)^{p_s} \frac{b^i_{j,s,p_s}(\xi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{\sigma j}(0)|}\right]_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_{\sigma j}|}(0)| \times$$

$$\times \frac{1}{1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \frac{[\xi^\alpha_{\sigma j}(0) - x^\alpha]\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_{\sigma j}(0)|)}{c\,|\vec{x} - \vec{\xi}_{\sigma j}(0)|}}, \qquad (11.35а)$$

где $\vec{\xi}_{\sigma j}(0)$ — корень уравнения

$$\vec{\xi} - \vec{a}_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|) = 0. \qquad (11.36)$$

При условии, что $\left|\frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1$, уравнение (11.36) имеет единственный корень. Это очевидно уже из геометрической интерпретации уравнения (11.36). Действительно, уравнение (11.36) определяет те значения $\vec{\xi}$, которые являются пересечением носителя $\operatorname{supp}\rho_j$ плотности массы j-го тела (это кривая $\vec{a}_j(\xi^0)$ как функция параметра ξ^0 в пространственно-временном континууме) с нижней полой светового конуса $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$, имеющего центр в точке $(x^0, \vec{x})$. Если $\left|\frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1$ для всех $\xi^0 \in R^1$, т. е. если скорость j-го тела меньше скорости света (что справедливо всегда в нашем рассмотрении), то $\operatorname{supp}\rho_j$ имеет ровно одну точку пересечения со световым конусом $\Gamma^-(x^0, \vec{x})$. Таким образом, при условии $\left|\frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1$ уравнение (11.36) имеет ровно один корень, т. е. в формуле (11.35а) $J = 1$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 11.4. Пусть функции a_j^α (ξ^0) $(\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, \ldots, N)$ непрерывны вместе с первой производной во всей области

$$a_j^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

и пусть выполняются условия

$$\left| \frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0} \right| < 1, \quad \forall \xi^0 \in R^1.$$

Тогда каждое из уравнений (11.36) имеет ровно одно решение, которое обозначим через $\vec{\xi}_{0j} \equiv \vec{\xi}_{1j}(0)$.

При условиях предложения 11.4 соотношение (11.35а) примет вид

$$I_j^i = \sum_{s=0}^{3} \sum_{p_s=0}^{1} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial \xi^s} \right)^{p_s} \frac{b_{j,s,p_s}^i(\xi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\ |} \right]_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\ |} \times$$
$$\times \frac{1}{1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \dfrac{[\xi_{0j}^\alpha\ - x^\alpha]\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\ |)}{c\,|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\ |}}. \qquad (11.37)$$

Итак, в модели N точечных тел область интегрирования в каждом слагаемом в левой части выражения (11.30) состоит из бесконечно малой окрестности точки $\vec{\xi}_{0,j}$, являющейся при условиях предложения 11.4 единственным решением функционального уравнения (11.36).

11.5. Общий случай протяженных тел. В общем случае протяженных в пространстве N тел интегрирование в j-м слагаемом в левой части выражения (11.30) проводится по конечной окрестности точки $\vec{\xi}_{0j}$, являющейся при условиях предложения 11.4 единственным решением функционального уравнения (11.36).

Получим теперь асимптотическое представление выражения (11.30) в той пространственной области, в которой размер каждого из тел много меньше, чем расстояние от точки наблюдения $\vec{x}$ до центра массы каждого из тел. В этой области величины $|\vec{x} - \vec{\xi}|$, $|\vec{x} - \vec{\xi}|^{-1}$ в каждом слагаемом в левой части соотношения (11.30) имеют следующее асимптотическое представление для малых $\dfrac{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_{0j}|}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}|}$:

$$|\vec{x} - \vec{\xi}| = |\vec{x} - \vec{\xi}_{0j} + \vec{\xi}_{0j} - \vec{\xi}| = |\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}| + \frac{(\vec{x} - \vec{\xi}_{0j})(\vec{\xi}_{0j} - \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}|} +$$
$$+ \frac{(\vec{\xi}_{0j} - \vec{\xi})^2}{2\,|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}|} - \frac{1}{4} \frac{[(\vec{x} - \vec{\xi}_{0j})(\vec{\xi}_{0j} - \vec{\xi})]^2}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}|^3} + O\left(\frac{|\vec{\xi}_{0j} - \vec{\xi}|^3}{|\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}|^2} \right),$$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}-\frac{(\vec{x}-\vec{\xi}_{0j})(\vec{\xi}_{0j}-\vec{\xi})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{3}}-\frac{(\vec{\xi}_{0j}-\vec{\xi})^{2}}{2(\vec{x}-\vec{\xi}_{0j})^{3}}+$$
$$+\frac{5}{4}\frac{[(\vec{x}-\vec{\xi}_{0j})(\vec{\xi}_{0j}-\vec{\xi})]^{2}}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{5}}+O\left(\frac{|\vec{\xi}_{0j}-\vec{\xi}|^{3}}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{4}}\right). \qquad (11.38)$$

С учетом этого представления в области, где размер каждого из тел много меньше, чем расстояние от точки наблюдения $\vec{x}$ до центра массы каждого из тел, соотношение (11.30) допускает следующее асимптотическое представление:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^i(x^0,\ \vec{x})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\mu_{j,\alpha}^i(x^0,\ \vec{x})(x^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{2}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\mu_{j,\alpha\beta}^i(x^0,\ \vec{x})(x^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})(x^{\beta}-\xi_{0j}^{\beta})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{3}}+$$
$$+O\left(\frac{\vec{\xi}-\vec{\xi}_{0j}^{3}}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{4}}\right)+O\left(\frac{\vec{\xi}-\vec{\xi}_{0j}^{3}}{\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}^{3}}\right)=0, \qquad (11.39)$$

где

$$\mu_j^i(x^0,\ \vec{x})\equiv\iiint\limits_{(j)}(g\nabla_k T^{ki})(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|,\ \vec{\xi})\,d\vec{\xi}; \qquad (11.40)$$

$$\mu_{j,\alpha}^i(x^0,\ \vec{x})\equiv\iiint\limits_{(j)}\frac{(g\nabla_k T^{ki})(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0i}|,\ \vec{\xi})(\xi^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})\,d\vec{\xi}}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}+$$
$$+\iiint\limits_{(j)}\left[\frac{\partial(g\nabla_k T^{ki})(\xi)}{\partial\xi^0}\right]_{\xi^0=x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}(\xi^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})\,d\vec{\xi}; \qquad (11.41)$$

$$\mu_{j,\alpha\beta}^i(x^0,\ \vec{x})\equiv\iiint\limits_{(j)}(g\nabla_k T^{ki})(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|,\ \vec{\xi})\left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{5}{4}\frac{(\xi^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})(\xi^{\beta}-\xi_{0j}^{\beta})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}\right]d\vec{\xi}+\iiint\limits_{(j)}\left[\frac{\partial(g\nabla_k T^{ik})(\xi)}{\partial\xi^0}\right]_{\xi^0=x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}\times$$
$$\times\left[-\frac{\delta_{\alpha\beta}|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}{2}+\frac{5}{4}\frac{(\xi^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})(\xi^{\beta}-\xi_{0j}^{\beta})}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}\right]d\vec{\xi}+$$
$$+\frac{1}{2}\iiint\limits_{(j)}\left[\frac{\partial^2(g\nabla_k T^{ki})(\xi)}{(\partial\xi^0)^2}\right]_{\xi^0=x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|}(\xi^{\alpha}-\xi_{0j}^{\alpha})(\xi^{\beta}-\xi_{0j}^{\beta})\,d\vec{\xi}. \qquad (11.42)$$

Таким образом, устанавливаем следующее утверждение.

Предложение 11.5. Пусть выполняются все условия следствия 11.3 и предложения 11.4. Тогда для того чтобы для решений из класса (к, ε), $1 \leqslant к \leqslant 4$, выполнялось условие гармоничности в области, где размер l_j каждого из тел много меньше, чем расстояние от точки наблюдения $\vec{x}$ до центра массы $\vec{\xi}_{0j}$ каждого из тел, с точностью до $O\left(\frac{l_j^{k+1}}{|\vec{x}-\vec{\xi}_{0j}|^{k+1}}\right)$, необходимо, чтобы выполнялось $2N\,(3^{k+1}-1)$ соотношение

$$\mu^i_j(x^0, \vec{\xi}_{0j}) = O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right), \qquad (11.43а)$$

$$\mu^i_{j,\alpha_1}(x^0, \vec{\xi}_{0j}) = O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right), \qquad (11.43б)$$

. . . .

$$\mu^i_{j,\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k}(x^0, \vec{\xi}_{0j}) = O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right), \qquad (11.43в)$$

$(j = 1, 2, \ldots, N;\quad \alpha_l = 1, 2, 3;\quad l = 1, 2, \ldots, k;\quad i = 0, 1, 2, 3),$

где величины $\mu^i_{j,\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k}(x^0, \vec{x})$ даются формулами (11.30), (11.38) — (11.42) и т. д.

$4N$ уравнений (11.43а) будем называть *уравнениями движения внешней задачи N тяготеющих тел.* Остальные уравнения (11.43б), (11.43в) будем называть *уравнениями движения внутренней задачи N тяготеющих тел.*

Причины, по которым принимаются такие определения, станут ясны из дальнейшего изложения, где будет показано, что из соотношений (11.43а) получаются уравнения движения N тел, каждое из которых рассматривается как целое, тогда как из соотношений (11.43б), (11.43в) выводятся уравнения движения внутри каждого тела.

§ 12. Уравнения внешней задачи N тяготеющих тел

12.1. Вспомогательная лемма. Рассмотрим уравнения движения внешней задачи N тяготеющих тел (11.43а), которые с учетом (11.40) принимают следующий вид:

$$\iiint\limits_{(j)} (g\nabla_k T^{ki})(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) = 0. \qquad (12.1)$$

Распишем фигурирующее под знаком интеграла в левой части (12.1) выражение. Составляя расходимость для симметричного дважды контравариантного тензора энергии — импульса по общей формуле (2.24), получаем

$$\nabla_k T^{ki} = \frac{\partial T^{ki}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}T^{kl} + \Gamma^k_{kl}T^{li}. \qquad (12.2)$$

Прежде всего, по общей формуле для дважды ковариантного метрического тензора

$$g_{ik}(x) = \frac{A^{ik}(x)}{\hat{g}}, \tag{12.3}$$

где $A^{ik}(x)$ — алгебраическое дополнение элемента g^{ik} матрицы $[g^{ik}]$, а $\hat{g} = |g^{ik}|$, получаем для решений класса (k, ε), $k \gg 1$, с помощью выражений (10.39а) — (10.39в)

$$g^{00}(x) = 1 + \frac{2U(x)}{c^2} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.4а}$$

$$g^{\alpha 0}(x) = + \frac{4U^{\alpha}(x)}{c^3} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.4б}$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\left[-1 + \frac{2U(x)}{c^2}\right] + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.4в}$$

$$U(x) \equiv \gamma \iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}, \tag{12.5}$$

$$U^{\alpha}(x) = \gamma \iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, v^{\alpha}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi} \tag{12.6}$$

$$(\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3)$$

следующие выражения для дважды ковариантного метрического тензора $g_{ik}(x)$ для решений класса (k, ε), $k \gg 1$:

$$g_{00}(x) = 1 - \frac{2U(x)}{c^2} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.7а}$$

$$g_{0\alpha}(x) = -\frac{4U^{\alpha}(x)}{c^3} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.7б}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}\left[-1 - \frac{2U(x)}{c^2}\right] + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right), \tag{12.7в}$$

$$\frac{1}{\hat{g}} = g = |g_{ik}| = -1 - \frac{4U(x)}{c^2} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right). \tag{12.8}$$

С учетом этих выражений по общей формуле

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

получаем для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, следующее представление для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{00}^{0} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^0} + O\left(\frac{v_{\max}^4}{c^4}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{4}{c^3} \cdot \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial x^0} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),\\
&\Gamma^{0}_{0\alpha} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right), \qquad\qquad (12.9)\\
&\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^0} - \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),\\
&\Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^0} + \frac{2}{c^3}\left(\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial U_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),\\
&\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} = \frac{\delta_{\rho\beta}}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\rho}} - \frac{\delta_{\alpha\rho}}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\beta}} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),\\
&\Gamma^{k}_{0k} = \Gamma^{0}_{00} + \Gamma^{\beta}_{0\beta} = \frac{2}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^0} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),\\
&\Gamma^{k}_{\alpha k} = \Gamma^{0}_{\alpha 0} + \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} = -\frac{4}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right).
\end{aligned}
$$

Поэтому с помощью последних соотношений с учетом (10.16) и (12.4) получаем из выражения (12.2) для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, следующее представление для пространственных компонент расходимости тензора энергии — импульса:

$$
\begin{aligned}
\nabla_k T^{k\alpha} &= \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{00}T^{00} + 2\Gamma^{\alpha}_{0\beta}T^{0\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}T^{\beta\rho} + \Gamma^{s}_{0s}T^{0\alpha} +\\
&+ \Gamma^{s}_{\beta s}T^{\beta\alpha} = \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{c^2}\left[\frac{c\,\partial(\rho v^{\alpha})}{\partial x^0} - \rho\frac{\partial U}{\partial x^{\alpha}}\right] + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) \qquad (12.10)\\
&\qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}
$$

Поскольку для решений класса (k, ε), $k \geqslant 1$, в силу формулы (10.16) справедливо

$$
T^{\alpha\beta}(x) = \frac{\rho v^{\alpha}(x)\, v^{\beta}(x)}{c^2} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right),
$$

то с помощью (12.8), (12.10) уравнения движения внешней задачи N тяготеющих тел (12.1) можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{(i)}\left[\frac{c\,\partial(\rho(\xi)\, v^{\alpha}(\xi))}{\partial \xi^0} - \rho(\xi)\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi^{\alpha}}\right]_{\xi^0 = x^0} d\vec{\xi} -\\
&- \iiint\limits_{(i)}\left[\frac{\partial T^{\beta\alpha}(\xi)}{\partial \xi^{\beta}}\right]_{\xi^0 = x^0} d\vec{\xi} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) = 0. \qquad (12.11)
\end{aligned}
$$

С помощью теоремы Гаусса — Остроградского устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 12.1. Пусть задан тензор энергии — импульса $T^{ik}(\xi) \in C^1(R^4)$ и пусть носитель $\bigcup\limits_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik}$ содержится в цилиндре Ц $= (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область. Пусть, кроме того, $G \subset R^3$ — ограниченная пространственная область, $G \supset D_1$ и граница области G есть замкнутая непрерывная поверхность в R^3, не имеющая с D_1 общих точек.

Тогда для всякого фиксированного $x \in R^4$ для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, равен нулю интеграл

$$\iiint\limits_{G} \left[\frac{\partial T^{\beta\alpha}(\xi)}{\partial \xi^\beta}\right]_{\xi^0 = x^0} d\vec{\xi} = 0, \qquad x \in R^4. \tag{12.12}$$

Таким образом, с учетом предложения 12.1 получаем следующую лемму.

Лемма 12.1. *Пусть*

а) *тензор энергии—импульса* $T^{ik}(\xi)$ *непрерывен вместе с первой производной при всех* $\xi \in R^4$:

$$T^{ik}(\xi) \in C^1(R^4);$$

б) *носитель* $\bigcup\limits_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik}$ *содержится в цилиндре* Ц $= (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — *некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии»* r *от начала координат;*

в) *носитель тензора энергии—импульса состоит из* N *областей, не имеющих между собой общих точек:*

$$\bigcup_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik} = \bigcup_{j=1}^{N} S_j, \quad S_j \cap S_{j'} = \varnothing, \quad j \neq j', \tag{12.13}$$

и обозначим

$$\rho_j(\xi) \equiv \begin{cases} \rho(\xi), & \xi \in S_j \\ 0, & \xi \bar{\in} S_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{12.14}$$

Тогда для всякого фиксированного $x \in R^4$ *для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 1$, *уравнения внешней задачи* N *тел* (12.1) *примут вид*

$$\iiint \left\{\frac{c\partial[\rho_j(\xi)\, v^\alpha(\xi)]}{\partial\xi^0} - \rho_j(\xi)\frac{\partial U(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right\}_{\xi^0 = x^0} d\vec{\xi} = O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \tag{12.15}$$

$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

Очевидно из определения величины (12.14), что для фиксированных $x \in R^4$ интегрирование в (12.15) по $\vec{\xi}$ проводится по ограниченной пространственной области

$$(\xi^0 \,\|\, \xi^0 = x^0) \cap S_j. \tag{12.16}$$

Иными словами, лемма 12.1 означает, что в том случае, если все компоненты тензора энергии — импульса $T^{ik}(\xi)$ непрерывны вместе со своими первыми производными при всех $\xi \in R^4$ и если отсутствуют столкновения в системе N тел, то уравнения движения внешней задачи N тел (12.1) для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, принимают вид системы N уравнений (12.15), причем интегрирование в левой части j-го уравнения проводится по пространственному объему (12.16), являющемуся окрестностью точки $\vec{\xi}_{0j}$.

В дальнейшем нам будет удобно ввести в рассмотрение пространственный шар $Ш_j\,(x;\,hl)$ с центром в точке $\vec{\xi}_{0j}$ и радиусом hl, где h— некоторая положительная постоянная размерности длины, равная по порядку величины минимальному расстоянию между центрами тяжести тел на рассматриваемом интервале времени, а l — неотрицательный параметр. Постоянную hl выберем так, чтобы при всяком заданном $x \in R^4$ носитель S_j плотности $\rho_j\,(\xi)$ j-го тела полностью содержался в шаре с радиусом hl с центром, помещенным в центре массы $\xi_{0j}\,(x)$ N-го тела,

$$Ш_j\,(x;\;hl) \equiv (\vec{\xi}\,\|\,[(\vec{\xi}-\vec{\xi}_{0j}\,(x))^2 \leqslant h^2l^2] \supset [S_j\,\cap\,(\xi^0\,\|\,\xi^0 = x^0 - |\,\vec{x}\,-$$

$$-\vec{\xi}_{0j}\,|\,)]), \quad S_j \equiv \operatorname{supp}\rho_j \qquad (j = 1,\;2,\;\ldots,\;N), \quad (12.17)$$

где $\vec{\xi}_{0j}$ — решение функционального уравнения

$$\vec{\xi}_{0j} - \vec{a}_j\,(x^0 - |\,\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\,|\,) = 0, \qquad (12.18)$$

где $\vec{a}_j(\xi^0) \equiv \iiint \vec{\xi}\rho_j\,(\xi^0,\;\vec{\xi})\,d\vec{\xi}$ — координаты центра массы j-го тела в момент ξ^0. Причем для hl выберем наименьшее из всех возможных значений таких, чтобы выполнялись N неравенств (12.17) при всех $x \in R^4$. Более точно

$$h = \min_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N\\ 1 \leqslant j \leqslant N\\ (i \neq j)}} \left\{\inf_{x^0}\left[\inf_{\substack{\vec{x}\in S_i/x^0=\text{const}\\ \vec{y}\in S_j/x^0=\text{const}}} \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(x^\alpha - y^\alpha)^2}\right]\right\}, \qquad (12.19)$$

$$l = \max_{1 \leqslant j \leqslant N}\,\{\sup_x \inf_{l'}\,(l'\,\|\,Ш_j\,(x;\;hl') \supset$$

$$\supset [S_j\,\cap\,(\xi^0\,\|\,\xi^0 = x^0 - |\,\vec{x} - \vec{\xi}_{0j}\,|\,)])\}. \qquad (12.20)$$

Замечание 12.1. Если расстояния между телами на рассматриваемом интервале изменения переменной x^0 много больше размеров каждого из N тел, то $l \ll 1$.

В частности, в пределе $l \to 0$ приходим к модели точечных тел, где

$$\rho_j\,(\xi) = m_j\delta\,[\vec{\xi} - \vec{a}_j\,(\xi^0)] \equiv \rho_j^0\,(\xi), \qquad j = 1,\;2,\;\ldots,\;N. \quad (12.21)$$

В этом случае можно говорить об асимптотическом при $l \to 0$ представлении функционала $(\rho_j,\;\varphi)$ для всякой основной функци $\varphi \in \mathcal{D}$

в смысле слабой сходимости в $\mathcal{D}'$:

$$(\rho_j,\ \varphi) = m_j(\delta,\ \varphi) + (1,\ \varphi)\cdot O(l),\quad l \to 0,\quad \varphi \in \mathcal{D} \tag{12.22}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

что физически означает *пренебрежение размерами тел.*

При этом будем считать в дальнейшем, что для всякого фиксированного $x \in R^4$ плотность массы и скорость вещества в точке $\xi \in R^4$ непрерывны вместе с первыми производными во всякой области $Ш_j(x;\ hl)$ (это *модель сплошной среды*).

$$\rho_j(\xi) \in C^1(Ш_j(x;\ hl)),\quad v^{\alpha}(\xi) \in C^1(Ш_j(x;\ hl)). \tag{12.23}$$

С учетом формул (12.5), (12.14) уравнения (12.15) при условиях леммы 12.1 можно переписать в виде:

$$\iiint c\left[\frac{\partial(\rho_j(\xi)\, v^{\alpha}(\xi))}{\partial \xi^0}\right]_{\xi^0 = x^0} d\vec{\xi} + 0\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) =$$
$$= \gamma \sum_{i=1}^{N} \iiint d\vec{\xi} \iiint d\vec{\xi}' \left[\rho_j(\xi)\frac{(\xi'^{\alpha} - \xi^{\alpha})}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}\cdot\frac{\partial\rho_i(\xi^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|,\ \vec{\xi}')}{\partial(\xi^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|)}\right]_{\xi^0 = x^0} +$$
$$+ \gamma \sum_{i=1}^{N} \iiint d\vec{\xi} \iiint d\vec{\xi}' \left[\rho_j(\xi)\frac{(\xi'^{\alpha} - \xi^{\alpha})}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^3}\rho_i(\xi^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|,\ \vec{\xi}')\right]_{\xi^0 = x^0} \equiv$$
$$\equiv \gamma \sum_{i=1}^{N} I^{\alpha}_{ji}(x). \tag{12.24}$$

Это уравнения внешней задачи N тяготеющих тел.

12 2 Вычисление некоторых интегралов. Исследуем теперь слагаемое $I^{\alpha}_{jj}(x)$ из правой части соотношений 12.24, играющее особую роль, поскольку это слагаемое представляет собой интеграл, для которого подынтегральная функция содержит (простой) полюс в точке $\vec{\xi} = \vec{\xi}'$. Сформулируем прежде одно полезное утверждение, доказательство которого тривиально.

Предложение 12.2. При условиях предложения 11.4 единственное решение $\vec{\xi}_{0j}$ функционального уравнения

$$\vec{\xi} - \vec{a}_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|) = 0 \tag{12.25}$$

для решений класса $(k\ ,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, имеет вид

$$\vec{\xi}_{0j} = \vec{a}_j(x^0 - |\vec{x} - \vec{a}_j(x^0)|) + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right). \tag{12.26}$$

В этом параграфе нас будут интересовать лишь уравнения внешней задачи N тел, т. е. уравнения движения тел, каждое из которых рассматривается как целое. Для таких целей будет достаточно вычислить главные члены в асимптотическом при $l \to 0$ разложении всех слагаемых в уравнении (12.24).

Исследуем выражения для областей интегрирования по $\vec\xi$ и по $\vec\xi'$ в формуле для $I^\alpha_{jj}(x)$ из соотношения (12.24).

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 12.3. Пусть выполняются все условия леммы 12.1, условие

$$\left|\frac{d\vec a_j(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1, \quad \forall \xi^0 \in R^1 \tag{12.27}$$

и пусть x зафиксировано R^4.

Тогда для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в выражении для $I^\alpha_{jj}(x)$ из (12.24) подынтегральное выражение отлично ог нуля лишь при значениях $\vec\xi$ из области вида

$$(\vec\xi \,\|\, [\vec\xi - \vec a_j(x^0)]^2 \leqslant h^2 l^2) \tag{12.28}$$

и при значениях $\vec\xi'$ из области вида

$$\left(\vec\xi' \,\middle\|\, \left\{\vec\xi' - \vec a_j(x^0) + \frac{1}{c}\vec v_j(x^0)\cdot|\vec\xi_{0j} - \vec\xi| + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right)\right\}^2 \leqslant h^2 l^2\right), \tag{12.29}$$

где $\vec\xi_{0j}$ — решение функционального уравнения (12.25), представимое в виде (12.26).

Доказательство. При условиях леммы 12.1, так же, как в пункте 12.3 из § 12 получаем, что область, в которой отлично от нуля подынтегральное выражение в $I^\alpha_{jj}(x)$, определяется двумя неравенствами:

$$[\vec\xi - \vec a_j(x^0)]^2 \leqslant h^2 l^2, \tag{12.30}$$

$$[\vec\xi - \vec\zeta_{0j}(x)]^2 \leqslant h^2 l^2, \tag{12.31}$$

где $\vec\zeta_{0j}$ — решение функционального уравнения

$$\vec\zeta_{0j} - \vec a_j(x^0 - |\vec\xi - \vec\zeta_{0j}|) = 0, \tag{12.32}$$

в котором $\vec\xi$ принадлежит области (12.30).

При условиях предложения 12.3, согласно предложению 11.4, уравнение (12.32) имеет единственное решение, которое для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, можно представить в следующем виде:

$$\vec\zeta_{0j} = \vec a_j(x^0) - \frac{1}{c}\vec v_j(x^0)\cdot|\vec\xi - \vec a_j(x^0)| + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right). \tag{12.33}$$

Подстановка последнего выражения в (12.31) убеждает в справедливости сделанного утверждения. Предложение 12.3 доказано.

Замечание 12.2 Из предложения 12.3 вытекает, что если выполняются условия леммы 12.1 и условие (12.27), то для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, переменные интегрирования $\vec\xi$ и $\vec\xi'$ под знаком интеграла в выражении для $I^\alpha_{jj}(x)$ меняются с точностью до членов порядка $O\left(\frac{hlv_{\max}}{c}\right)$ независимо друг от друга в области

$$\Delta_l \equiv (\vec{\xi} \,\|\, (\vec{\xi} - \vec{a}_j)^2 \leqslant h^2 l^2), \tag{12.34}$$

$$\Delta'_l \equiv (\vec{\xi}' \,\|\, (\vec{\xi}' - \vec{a}_j)^2 \leqslant h^2 l^2). \tag{12.35}$$

Рассмотрим слагаемое из правой части соотношения (12.24) с $i = j$ вида

$$I^{\alpha}_{jj}(x) \equiv \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} \iiint \frac{\vec{\xi}'^{\alpha} - \xi^{\alpha}}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^3} \Bigg[\rho_j(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}') +$$

$$+ |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| \frac{\partial \rho_j (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')}{\partial (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|)} \Bigg] d\vec{\xi}'. \tag{12.36}$$

В этом выражении для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, в силу замечания 12.2 величина $\sup\limits_{\vec{\xi}, \vec{\xi}'} |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|$ не превышает величины

$$hl \left[2 + \frac{1}{c} |\vec{v}_j(x^0)| \right] + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2} \right).$$

При условиях леммы 12.1 выражения

$$\rho_j(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}') \quad \text{и} \quad \frac{\partial \rho (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| \vec{\xi}')}{\partial \xi^0}$$

из (12.36) можно представить в виде рядов Пеано по переменной x^0:

$$\rho_j(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}') + |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| \frac{\partial \rho (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')}{\partial \xi^0} =$$

$$= \rho_j(x^0, \vec{\xi}') - \frac{1}{2} |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2 \frac{\partial^2 \rho_j(x^0, \vec{\xi}')}{(\partial x^0)^2} + O\left(\frac{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^3}{c^3} \right). \tag{12.37}$$

При этом в асимптотической области $x^0 \gg hl$ величина $\frac{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|}{x^0}$, очевидно, мала. В выражении (12.37) при условиях леммы 12.1 величина $\frac{\partial^2 \rho_j(x^0, \vec{\xi})}{(\partial x^0)^2}$ может иметь на конечном интервале значений x^0 конечное число разрывов первого рода.

При условиях леммы 12.1 для случая протяженных тел потребуем выполнения условий нормировки:

$$\iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} = m_j(x^0), \quad \forall\, x^0 \in R^1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{12.38}$$

Можно показать (см., например, работу В. А. Фока [196], § 10, 90), что для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 0$, для системы несталкивающихся тяготеющих тел из соотношения

$$\nabla_k T^{ki}(x) = 0$$

вытекает закон сохранения массы в виде

$$\frac{dm_j(x^0)}{dx^0} = O\left(\frac{\gamma}{c^p} \right), \quad p = \min[6, k+1] \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{12.39}$$

Для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, при условиях леммы 12.1 соотношение (12.36) с учетом формул (12.37) — (12.39) можно переписать в виде

$$I^{\alpha}_{jj}(x) = \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi}')\, \frac{(\xi'^{\alpha} - \xi^{\alpha})}{|\vec{\xi}' - \vec{\xi}|^3}\, d\vec{\xi}' +$$
$$+ \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} \iiint \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\, \rho_j(x^0, \vec{\xi}')\, d\vec{\xi}'. \tag{12.40}$$

Интегрирование по $\vec{\xi}$ и по $\vec{\xi}'$ проводится в (12.40) по тождественно совпадающим областям (12.34) и (12.35) соответственно.

В силу антисимметрии относительно одновременной замены $\xi^{\alpha} \to \xi'^{\alpha}$, $\xi'^{\alpha} \to \xi^{\alpha}$ в подынтегральном выражении для первого слагаемого из правой части (12.40) это слагаемое тождественно равно нулю. При условиях леммы 12.1 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, получаем для второго слагаемого в правой части соотношения (12.40) в силу (12.38), (12.39)

$$\iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi}) \iiint \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\, \rho_j(x^0, \vec{\xi}')\, d\vec{\xi}\, d\vec{\xi}' =$$
$$= m_j(x^0)\, \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}\, m_j(x^0) = O\left(\frac{\gamma}{c^{p+1}}\right), \quad p = \min[6,\ k+1].$$

Таким образом, установим справедливость следующего утверждения.

Предложение 12.4. При условиях леммы 12.1 и предложения 12.3 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, получаем для выражения (12.36) из соотношения (12.24)

$$I^{\alpha}_{jj}(x) = O\left(\frac{\gamma}{c^{p+1}}\right), \quad p = \min[6,\ k+1]. \tag{12.41}$$

Таким образом, при условиях леммы 12.1 и предложения 12.3 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в правых частях уравнений внешней задачи N тяготеющих тел (12.24) слагаемые с $i = j$ являются величинами высшего порядка малости по параметру $\frac{v_{\max}}{c}$, и эти уравнения тогда принимают следующую форму:

$$\iiint c\, \frac{\partial}{\partial x^0}\, [\rho_j(x_0, \vec{\xi})\, v^{\alpha}(x^0, \vec{\xi})]\, d\vec{\xi} =$$
$$= \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}\, \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \iiint d\vec{\xi}'\, \frac{\rho_i(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|,\ \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|} +$$
$$+ O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{12.42}$$

Запишем теперь уравнение (12.42) для случая, когда на рассматриваемом интервале значений x^0 минимальное расстояние между центрами масс тел много больше размеров каждого из N тел. С помощью обозначений, введенных в замечании 12.1, такой случай соответствует достаточно малым значениям параметра l, т. е. $l \ll 1$.

Для такого случая применима модель точечных тел в том смысле, что для всякой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}$ справедливо в смысле слабой сходимости в $\mathcal{D}'$ при $l \to 0$ следующее:

$$(\rho_j,\ \varphi) - (\rho_j^0,\ \varphi) = O(l)\cdot(1,\ \varphi),\quad l \to 0,\quad \varphi \in \mathcal{D},$$

где

$$\rho_j^0(\xi^0,\ \vec{\xi}) = m_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)] \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{12.42a}$$

Левая часть соотношения (12.42) принимает в точечной модели следующий вид:

$$\iiint c \frac{\partial}{\partial x^0} \rho_j^0(x^0,\ \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0,\ \vec{\xi})\, d\vec{\xi} =$$
$$= c \frac{\partial}{\partial x^0} m_j v^\alpha(x^0,\ \vec{a}(x^0)) = c m_j \frac{dv_j^\alpha(x^0)}{dx^0}, \tag{12.43}$$

поскольку $v^\alpha(x^0,\ \vec{a}_j(x^0)) = v_j^\alpha(x^0)$.

Правая часть соотношения (12.42) в точечной модели записывается в форме

$$\gamma \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} \iiint \rho_j^0(x^0,\ \vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left[\iiint d\vec{\xi}' \frac{\rho_i^0(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|,\ \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|} \right] d\vec{\xi} =$$
$$= \gamma \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} m_i \iiint \rho_j^0(x^0,\ \vec{\xi}) \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{1}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'_{0i}| + \frac{1}{c} \sum\limits_{\beta=1}^{3} (\xi_{0i}'^\beta - \xi^\beta)\, v_i^\beta(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'_{0i}|)} \right] d\vec{\xi}, \tag{12.44}$$

где $\vec{\xi}'_{0i} = \vec{\xi}'_{0i}(x^0,\ \vec{\xi};\ \vec{a}_i)$ есть решение функционального уравнения

$$\vec{\xi}' - \vec{a}_i(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|) = 0. \tag{12.45}$$

Из (12.45) находим

$$\frac{\partial \xi_{0i}'^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \frac{1}{c} \left[\frac{-\xi^\beta + \xi_{0i}'^\beta}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'_{0i}|} + \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{(\xi^\sigma - \xi_{0i}'^\sigma)}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'_{0i}|} \cdot \frac{\partial \xi_{0i}'^\sigma}{\partial \xi^\beta} \right] \times$$
$$\times v_i^\alpha(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'_{0i}|). \tag{12.46}$$

12. 3. Уравнения внешней задачи N тяготеющих тел. С помощью (12.46) устанавливаем справедливость следующих двух утверждений.

Предложение 12.5. Пусть $a_i^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$, $\left|\dfrac{da_i^\alpha(\xi^0)}{d\xi^0}\right| < 1$ $(\alpha = 1, 2, 3), \forall \xi^0 \in R^1$. Тогда для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, справедливо асимптотическое при $\dfrac{v_{\max}}{c} \to \infty$ соотношение

$$\frac{d\xi_{0i}^{\prime\alpha}}{\partial \xi^\beta} = \frac{1}{c} v_i^\alpha (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{a}_i(x^0)|) \cdot \frac{[a_i^\beta(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{a}_i(x^0)|) - \xi^\beta]}{|\vec{a}_i(x^0 - |\vec{\xi} - \vec{a}_i(x^0)|) - \vec{\xi}|} + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right). \tag{12.47}$$

С учетом леммы 12.1, предложения 12.4, формул (12.43), (12.44), (12.47), (12.42а) получаем следующую лемму.

Лемма 12.2. *При условиях леммы* 12.1 *и предложения* 12.5 *для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 0$, *уравнения* (12.42) *принимают в модели точечных тел следующий вид:*

$$c^2 m_j \frac{d^2 a_j^\alpha(x^0)}{(dx^0)^2} = \gamma m_j \sum_{\substack{i=1\\(i \neq j)}}^{N} m_i \left[\frac{R_{ij}^\alpha(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v_i^\alpha(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} - 3\frac{(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji}) \cdot \vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4} R_{ij}^\alpha(\tau_{ji}) \right] + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right), \tag{12.48}$$

где

$$\tau_{ji} \equiv x^0 - |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|, \tag{12.49}$$

$$R_{ij}^\alpha(\tau_{ji}) \equiv a_i^\alpha(\tau_{ji}) - a_j^\alpha(x^0),$$

$$v_i^\alpha(\xi^0) = \frac{c\,da_i^\alpha(\xi^0)}{d\xi^0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\quad i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

С помощью лемм 12.1, 12.2 и предложений 12.2, 12.3 устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 12.1. *Пусть*

а) *тензор энергии—импульса* $T^{ik}(\xi)$ *непрерывен вместе со вторыми производными при всех* $\xi \in R^4$:

$$T^{ik}(\xi) \in C^2(R^4);$$

б) *носитель тензора энергии — импульса* $\bigcup\limits_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik}$ *содержится в цилиндре* $\text{Ц} = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1,\ \xi^0 \in R^1)$, *где* $D_1 \subset R^3$ — *некоторая ограниченная (пространственная) область, лежащая на конечном «расстоянии»* r *от начала координат;*

в) *носитель тензора энергии — импульса состоит из* N *областей, не имеющих между собой общих точек:*

$$\bigcup_{i,k} \operatorname{supp} T^{ik} = \bigcup_{j=1}^{N} S_j, \quad S_j \cap S_i = \varnothing, \quad i \neq j,$$

и обозначим $\rho_j(\xi) \equiv \begin{cases} \rho(\xi), & \xi \in S_j \\ 0, & \xi \bar{\in} S_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, N);$

г) *для координат* $a_i^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$ $(\alpha = 1,\ 2,\ 3)$ *центра массы, описываемой плотностью* $\rho_j(\xi)$, *справедливо*

$$\left| \frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0} \right| < 1, \ \forall\ \xi^0 \in R^1.$$

Тогда для заданного $\mathfrak{F} > 0$ *для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 0$, *при достаточно больших* $\frac{R_{\min}}{hl}$, *где*

$$R_{\min} \equiv \inf_{x^0 \in (-\infty, \mathfrak{T})} \min_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} [\inf_{\substack{\vec{x}_i \in S_i \\ \vec{x}_j \in S_j}} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|]_{x^0 = \mathrm{const}},$$

а hl *определено соотношениями* (12.19), (12.20), *уравнения внешней задачи* N *тел* (12.1) *примут следующий асимптотический вид*:

$$\frac{c^2 d^2 a_j^\alpha(x^0)}{(dx^0)^2} = \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} m_i \left[\frac{R_{ij}^\alpha(\tau_{ij})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v_i^\alpha(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} - \right.$$

$$\left. -3\,\frac{(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji}) \cdot \vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4}\, R_{ij}^\alpha(\tau_{ji}) \right] + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{hl}{R_{\min}}\right), \quad (12.50)$$

$$x^0 = ct \in (-\infty,\ \mathfrak{F}) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Замечание 12.3. В частности, при $c \to \infty$ для $k = 0$ уравнения (12.50) принимают вид уравнений механики Ньютона для системы N материальных точек:

$$\frac{d^2 \mathrm{a}_j^\alpha(t)}{dt^2} = \gamma \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} m_i \frac{\mathrm{a}_i^\alpha(t) - \mathrm{a}_j^\alpha(t)}{|\vec{\mathrm{a}}_i(t) - \vec{\mathrm{a}}_j(t)|^3}, \ \mathrm{a}_j^\alpha(t) \equiv a_j^\alpha(ct) \quad (12.51)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Таким образом, для той области значений временной переменной x^0, для которой отсутствуют столкновения между N распределенными в пространстве телами, уравнения внешней задачи N тел (12.1) в гармонической системе координат для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 0$, имеют асимптотический вид (12.50). Уравнения (12.50) являются *релятивистским обобщением уравнений ньютоновской механики системы N материальных точек.*

Чтобы в гармонической системе координат определить внутреннее движение в каждом из N тел, необходимо учесть, кроме уравнений (12.50), еще и уравнения внутреннего движения (11.43в) для $k = 1, 2, \ldots, K$ с некоторым конечным целым K. Количество этих уравнений K должно определяться требуемой точностью описания рассматриваемой системы тел.

Для использования этих уравнений необходимо задаться определенной моделью для описания внутреннего движения в j-м теле (уравнения состояния вещества в модели твердого тела, либо в модели жидкого тела, либо в модели пылевидной материи и т. п.).

Если движение внутри каждого из N тел происходит не с очень высокими скоростями, то для получения этих уравнений можно обобщить технику В. А. Фока [196] так же, как это было сделано в § 11 для уравнений внешней задачи N тел. Учет внутреннего движения в неточечной модели N тяготеющих и электрически заряженных тел применительно к уравнениям внешней задачи N тел (11.43а) проведен ниже, в гл. III, § 18, п. 18. 3, 18.4. На этом закончим обсуждение вопросов, связанных с уравнениями внутренней задачи N тяготеющих тел, поскольку оно уводит за рамки задач, рассматриваемых в этой книге.

В следующем параграфе приведем другой вывод уравнений внешней задачи N тяготеющих тел (12.50), отличный от приведенного в § 11—12. А именно, в § 13 уравнения внешней задачи N тяготеющих тел будут получены в точечной модели методом геодезических.

§ 13. Вывод уравнений внешней задачи N тяготеющих тел методом геодезических

13.1. Вывод уравнений методом геодезических. Согласно сказанному в § 5, п. 5.2 при описании системы тел мы приняли модель сплошной среды. Это означает, что рассматривается поток большого числа частиц, который идеализированно представляем как поток непрерывно распределенных масс.

Рассматриваем только такой поток частиц, для которого в процессе движения частицы не испытывают никаких превращений, масса покоя каждой из них остается без изменения, так что суммарная масса покоя удовлетворяет закону сохранения, имеющему вид уравнения непрерывности (5.16).

При этом каждая из частиц потока описывает в пространственно-временном континууме четырехмерную кривую (траекторию), которую удобно параметризовать длиной ее дуги s. Требуем, чтобы каждая из четырех координат x^i (s) траектории была дважды непрерывно дифференцируемой функцией параметра s:

$$x^i = x^i(s) \in C^2(a,\ b), \quad (a,\ b) \in (-\infty,\ \infty) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (13.1)$$

Согласно лемме 5.2, для случая пылевидной материи четырехмерная траектория всякой частицы из потока описывается уравнениями геодезических

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\cdot\frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (13.2)$$

В уравнении (13.2) символы Кристоффеля Γ^i_{kl} должны быть взяты в той точке, где находится данная частица в рассматриваемый момент, т. е. в рассматриваемой точке x^i (s) траектории (13.1). Символы Кристоффеля в заданной точке M пространственно-временного континуума вычисляются, согласно формуле (2.22), через значения метрического тензора g_{ik} и его производных по координатам в заданной точке M.

В модели сплошной среды, выбранной нами, частица потока рассматривается как материя, заключенная в бесконечно малый элемент пространственного объема, т. е. такая частица обладает бесконечно малой массой. Следовательно, такую частицу потока можно рассматривать как пробную частицу, находящуюся в поле, создаваемом всеми остальными частицами потока. Чтобы вычислить это поле в общей теории относительности, воспользуемся уравнениями поля в форме Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T^{ik}. \tag{13.3}$$

Из физических соображений, согласно § 10, п. 10.1, для решений из класса $(k\ ,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, уравнений поля (13.3) следует потребовать выполнения предельных условий первого и второго рода (10.9а) — (10.9г), (10.10). Тогда в гармонической системе координат для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, удовлетворяющих предельным условиям второго рода, главные члены в асимптотическом разложении тензора $g^{ik}(x)$ при $c \to \infty$ удовлетворяют, согласно результатам § 10, следующему уравнению:

$$(g^{ls})_\infty \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} H^{ik}, \tag{13.4}$$

где

$$H^{ik} = \begin{cases} \frac{\rho}{2}, & i = k = 0, \\ \frac{\rho v^\alpha}{c}, & i = 0, \quad k = \alpha, \\ \frac{1}{2}\rho\delta_{\alpha\beta}, & i = \alpha, \quad k = \beta \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3). \end{cases} \tag{13.5}$$

Решение уравнений (13.4), удовлетворяющее предельным условиям первого рода (10.9а) — (10.9г), можно построить с помощью следствия 10.3, полученного в § 10.

Следствие 10.3а. Пусть плотность вещества $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$ $v^\alpha(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4), \alpha = 1, 2, 3$, и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\rho(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp} \rho$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1,\ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r = \sqrt{(\xi')^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда решение g^{ij} $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ из класса $C^2(R^4)$ уравнения (13.4), (13.5), удовлетворяющее предельным условиям первого рода (10.9а) — (10.9г), существует, это решение единственно и имеет вид

$$g^{00}(x) = 1 + \frac{2\gamma}{c^2}\iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \equiv$$

$$\equiv 1 + \frac{2U(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad (13.6\text{а})$$

$$g^{0\alpha}(x) = \frac{4U_\alpha(x)}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \qquad (13.6\text{б})$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{2\delta_{\alpha\beta}U(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \qquad (13.6\text{в})$$

где

$$U(x) = \gamma\iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}, \qquad (13.6\text{г})$$

$$U_\alpha(x) = \gamma\iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}. \qquad (13.6\text{д})$$

Движение всякого элементарного объема рассматриваемого потока сплошной тяготеющей среды мы описывали четырехмерной траекторией этого элементарного объема, параметризованной длиной дуги s траектории:

$$x^i = x^i(s) \subset C^2(a, b) \quad (a, b) \subset (-\infty, \infty) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \qquad (13.7)$$

Напомним, что все четыре координаты x^0, x^1, x^2, x^3 рассматриваемого элементарного объема потока есть координаты относительно выбранной системы отсчета (системы материальных тел, снабженной часами и называемой базисом).

Если при этом для рассматриваемой траектории функция $x^0 = x^0(s)$ является монотонно возрастающей функцией от s на рассматриваемом интервале $s \in (a, b)$, то можно параметризовать траекторию не длиной дуги s, а величиной координаты x^0, поскольку при этом $s = s(x^0) = x^{0-1}[x^0(s)]$.

В таком случае справедливо

$$\frac{dx^\alpha(s)}{ds} = \frac{dx^\alpha(s(x^0))}{ds} = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)\frac{dx^\alpha}{dx^0}, \qquad (13.8)$$

$$\frac{d^2x^\alpha(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^\alpha}{ds}\right) = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} + \left(\frac{dx^\alpha}{dx^0}\right)\frac{d^2x^0}{ds^2} \qquad (13.9)$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

С учетом этих формул уравнения геодезических (13.2) для нулевого компонента принимают вид

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = -\Gamma^0_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\cdot\frac{dx^k}{dx^0}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2. \qquad (13.10)$$

При этом уравнения геодезических (13.2) для пространственных компонентов запишутся с учетом (13.8)—(13.10) в форме

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \Gamma^0_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\cdot\frac{dx^k}{dx^0}\cdot\frac{dx^\alpha}{dx^0} + \Gamma^\alpha_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\cdot\frac{dx^k}{dx^0} = 0 \qquad (13.11)$$

$$(\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Используя обозначения

$$\frac{dx^\alpha}{dx^0} \equiv \frac{v^\alpha}{c} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3),$$

переписываем соотношение (13.11) в следующем виде:

$$\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \frac{1}{c}\Gamma^0_{00}v^\alpha - 2\Gamma^0_{0\beta}\frac{v^\alpha v^\beta}{c^2} - \Gamma^0_{\nu\beta}\frac{v^\beta v^\nu v^\alpha}{c^3} +$$

$$+ \Gamma^\alpha_{00} + 2\Gamma^\alpha_{0\beta}\frac{v^\beta}{c^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\frac{v^\nu v^\beta}{c^2} = 0. \qquad (13.12)$$

Отсюда для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, в силу формул (12.9) получаем $(x^0 = ct)$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \qquad (13.13)$$

Таким образом, установили справедливость следующего утверждения.

Лемма 13.1. *Пусть движение всякого элементарного объема потока сплошной тяготеющей среды может быть описано четырехмерной траекторией этого элементарного объема, параметризованной длиной дуги* s *траектории*

$$x^i = x^i(s) \in C^2(a,\ b), \quad (a,\ b) \subset (-\infty,\ \infty) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

обладающей свойством

$$\frac{dx^0(s)}{ds} > 0, \quad s \in (a,\ b). \qquad (13.13\text{а})$$

Пусть, кроме того, для такого потока выполняются все условия леммы 5.2 *и следствия* 10.3.

Тогда пространственные компоненты x^1, x^2, x^3 *траектории элементарного объема потока для решений из класса* $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, *в гармонической системе координат удовлетворяют следующим уравнениям*:

$$\frac{d^2x^\alpha(s(x^0))}{(dx^0)^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial U(x)}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) = 0, \qquad (13.14)$$

где $U(x)$ *дается формулой* (13.6г).

Замечание 13.1. Пусть выполняются все условия леммы 13.1 и, кроме того, пусть выполняются все условия леммы 12.1.

Тогда, домножая уравнение (13.14) слева и справа на $\rho_j(x^0, \vec{x})$

и интегрируя по всем $\vec{x}$ при $x^0 = \text{const}$, получим соотношение

$$c^2 \iiint \frac{d^2\xi^\alpha(x^0(s))}{(dx^0)^2} \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi} =$$

$$= \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi}) \frac{\partial U(x^0, \vec{\xi})}{\partial \xi^\alpha} d\vec{\xi} + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) \tag{13.15}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \ldots, N).$$

Это уравнение, в силу уравнения непрерывности (5.16), в точности совпадает с уравнениями внешней задачи N тяготеющих тел (12.15), поскольку

$$\frac{c d\xi^\alpha(s(x^0))}{dx^0} \rho_j(x^0, \vec{\xi}) = v^\alpha(x^0, \vec{\xi}) \rho_j(x^0, \vec{\xi}). \tag{13.16}$$

Таким образом, для случая, когда поток сплошной тяготеющей среды распадается на N потоков, не пересекающихся друг с другом (условия леммы 12.1), получаем с помощью метода геодезических в качестве уравнений движения для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в гармонической системе координат именно уравнения внешней задачи N тяготеющих тел (12.15), т. е. указанным вторым методом получаем точно те же уравнения движения, которые были получены в начале § 12 методом гармонической системы координат.

Дальнейшее упрощение полученной системы уравнений (13.15), (13.16) целесообразно проводить по схеме, использованной в § 12. В результате, согласно теореме 12.1, представляем уравнения движения (13.15), (13.16) в форме (12.50).

Итак, метод гармонической системы координат, использованный в § 12, и метод геодезических, использованный в § 13, дают для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в гармонической системе координат одни и те же уравнения движения внешней задачи N тяготеющих тел (12.15), записываемые при условиях теоремы 12.1 в форме (12.50).

Замечание 13.2. При условиях теоремы 12.1 N уравнений внешней задачи N тяготеющих тел (12.15) можно получить непосредственно из соотношений (11.8а) для пространственных компонентов

$$\nabla_k T^{k\alpha}(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{13.17}$$

путем интегрирования этих соотношений по $\vec{x}$ при $x^0 = \text{const}$ по N различным областям

$$[\xi^0 = x^0] \cap \operatorname{supp} \rho_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

По существу, это — *третий* способ получения уравнений движения внешней задачи (12.15) тяготеющих тел для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$.

13.2. Уравнения внешней задачи N тяготеющих тел в «сферических» координатах. В п. 13.1 были получены уравнения геодезических для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в «прямоугольных декартовых» координатах x^0, x^1, x^2, x^3.

Ниже мы получим уравнения геодезических для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, в «сферических» координатах x^0, r, θ, φ.

При условиях следствия 10.4 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, выражение для интервала в силу формул (10.39а) — (10.39в), (12.7а) — (12.7в) в «прямоугольных декартовых» координатах с точностью до $O\left(\frac{1}{c^4}\right)$ принимает вид

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 -$$

$$- \frac{4U_\alpha}{c^3} dx^0 dx^\alpha - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2], \qquad (13.18)$$

где U и U_α даются формулами (13.6г), (13.6д).

Перейдем к «сферическим» координатам по формулам

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ x^2 &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ x^3 &= r \cos\theta. \end{aligned} \qquad (13.19)$$

В «сферических» координатах выражение для интервала (13.18) запишется в виде ($\xi \equiv \{x^0, r, \theta, \varphi\} \equiv \{\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\}$)

$$ds^2 = \hat{g}_{ik}d\xi^i d\xi^k = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(dx^0)^2 -$$

$$- \frac{4}{c^3}(U_1 \cos\varphi \sin\theta + U_2 \sin\varphi \sin\theta + U_3 \cos\theta)\, dx^0 dr -$$

$$- \frac{4}{c^3}(U_1 r \cos\varphi \cos\theta + U_2 r \sin\varphi \cos\theta - U_3 r \sin\theta)\, dx^0 d\theta -$$

$$- \frac{4}{c^3}(U_2 r \cos\varphi \sin\theta - U_1 r \sin\varphi \sin\theta)\, dx^0 d\varphi -$$

$$- \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + dr^2). \qquad (13.20)$$

Символы Кристоффеля для интервала (13.20) вычисляются по формуле

$$\hat{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\hat{g}^{sl}\left(\frac{\partial \hat{g}_{ks}}{\partial \xi^l} + \frac{\partial \hat{g}_{ls}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial \hat{g}_{kl}}{\partial \xi^s}\right) \quad (i, k, l = 0, 1, 2, 3). \qquad (13.21)$$

В «сферических» координатах движение всякого элементарного объема рассматриваемого потока описывается четырехмерной траекторией $\xi^i(s)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ этого элементарного объема, параметризованной длиной дуги s траектории, причем будем рассматривать только такой случай, когда все $\xi^i(s)$ непрерывны вместе со вторыми производными на рассматриваемом интервале изменения величины s

$$\xi^i = \xi^i(s) \subset C^2(a, b), \quad (a, b) \subset (-\infty, \infty) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \qquad (13.22)$$

При этом, если для рассматриваемой траектории функция $x^0(s)$ является монотонно возрастающей функцией от s на рассматриваемом интервале $s \in (a, b)$, то можно параметризовать траекторию такого элементарного объема не длиной дуги s, а величиной координаты x^0, поскольку при этом $s = s(x^0) = x^{0^{-1}}[x^0(s)]$.

В этом случае справедливо

$$\frac{d\xi^\alpha(s)}{ds} = \frac{d\xi^\alpha(s(x^0))}{ds} = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)\frac{d\xi^\alpha}{dx^0},$$

$$\frac{d^2\xi^\alpha(s)}{ds^2} = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2\frac{d^2\xi^\alpha}{(dx^0)^2} + \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^0}\right)\frac{d^2x^0}{ds^2} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \quad (13.23)$$

Уравнения геодезических в «сферических» координатах записываются, очевидно, в форме

$$\frac{d^2\xi^i(s)}{ds^2} + \hat{\Gamma}^i_{kl}\frac{d\xi^k(s)}{ds}\cdot\frac{d\xi^l(s)}{ds} = 0 \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \quad (13.24)$$

В частности, для нулевого компонента эти уравнения с учетом (13.23) примут вид

$$\frac{d^2x^0(s)}{ds^2} = -\hat{\Gamma}^0_{ik}\frac{d\xi^i}{dx^0}\cdot\frac{d\xi^k}{dx^0}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2. \quad (13.25)$$

С учетом этого соотношения уравнения геодезических (13.24) для пространственных компонентов в силу формул (13.23) можно представить так:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{(dx^0)^2} - \hat{\Gamma}^0_{ik}\frac{d\xi^i}{dx^0}\cdot\frac{d\xi^k}{dx^0}\cdot\frac{d\xi^\alpha}{dx^0} + \hat{\Gamma}^\alpha_{ik}\frac{d\xi^i}{dx^0}\cdot\frac{d\xi^k}{dx^0} = 0 \quad (13.26)$$

$$(\alpha = 1,2,3).$$

Вычисляя теперь символы Кристоффеля $\hat{\Gamma}^i_{kl}$ в «сферических» координатах для интервала (13.20) с помощью формул (13.21), представляем уравнения геодезических (13.26) для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, в следующем виде:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\theta + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) = 0, \quad (13.27а)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin 2\theta - \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta} + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) = 0, \quad (13.27б)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} - 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\operatorname{ctg}\theta +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi} + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) = 0, \quad (13.27в)$$

где U дается формулой (13.6г).

Таким образом, установили справедливость следующего утверждения.

Предложение 13.1. Пусть движение всякого элементарного объема потока сплошной тяготеющей среды может быть описано четырехмерной траекторией этого элементарного объема, параметризованной длиной дуги s траектории

$$\xi^i = \xi^i(s) \in C^2(a,\ b), \quad (a,\ b) \subset (-\infty,\ \infty) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

$$\xi \equiv \{x^0,\ r,\ \theta,\ \varphi\} \equiv \{\xi^0,\ \xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3\}, \qquad (13.28)$$

обладающей свойством

$$\frac{dx^0(s)}{ds} > 0, \quad s \in (a,\ b).$$

Пусть, кроме того, для такого потока выполняются все условия леммы 5.2 и следствия 10.4.

Тогда пространственные компоненты r, θ, φ траектории элементарного объема потока для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, удовлетворяют системе уравнений (13.27а) — (13.27в).

Замечание 13.3 Предложение 13.2 вытекает из леммы 13.1. Действительно, из формул (13.19) получаем

$$\sin\theta\cos\varphi\left(\frac{d^2x^1}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^1}\right) + \sin\theta\sin\varphi\left(\frac{d^2x^2}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^2}\right) + \\ + \cos\theta\left(\frac{d^2x^3}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^3}\right) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\theta - \\ - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \qquad (13.29а)$$

$$\cos\theta\cos\varphi\left(\frac{d^2x^1}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^1}\right) + \cos\theta\sin\varphi\left(\frac{d^2x^2}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^2}\right) - \\ - \sin\theta\left(\frac{d^2x^3}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^3}\right) = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} - \\ - \frac{r}{2}\sin 2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \qquad (13.29б)$$

$$\sin\theta\sin\varphi\left(\frac{d^2x^1}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x^1}\right) - \sin\theta\cos\varphi\left(\frac{\partial^2x^2}{\partial t^2} - \frac{\partial U}{\partial x^2}\right) = \\ = -2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta - r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin^2\theta - r\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\sin 2\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}. \qquad (13.29в)$$

Подставляя в формулы (13.29а) — (13.29в) выражения (13.13), получаем систему уравнений (13.27а) — (13.27в). Тем самым устанавливаем справедливость предложения 13.1 как следствие из леммы 13.1.

Вместе с этим предложение 13.1 можно доказать и независимо от леммы 13.1, подставляя для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, символы Кристоффеля (13.21) для интервала (13.20) в уравнения геодезических (13.26), что уже отмечалось выше, после формулы (13.26).

Из полученной в предыдущем параграфе теоремы 12.1 вытекает следующее следствие.

Следствие 13.1. При условиях теоремы 12.1 и предложения 13.1 уравнения внешней задачи N тяготеющих тел для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, принимают в «сферических» координатах $r,\ \theta,\ \varphi$ с точностью до $O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) + O\left(\frac{hl}{R_{\min}}\right)$ следующий вид:

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} = r_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \sin^2\theta_j + r_j \left(\frac{d\theta_j}{dt}\right)^2 +$$

$$+ \gamma \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} m_i \left[Q^1_{ij}(\tau_{ji}) \sin\theta_j \cos\varphi_j + Q^2_{ij}(\tau_{ji}) \sin\theta_j \sin\varphi_j + \right.$$

$$\left. + Q^3_{ij}(\tau_{ji}) \cos\theta_j\right], \qquad (13.30\text{а})$$

$$\frac{d^2\theta_j}{dt^2} = -\frac{2}{r_j} \cdot \frac{d\theta_j}{dt} \cdot \frac{dr_j}{dt} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\gamma}{r_j} \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} m_i \left[Q^1_{ij}(\tau_{ji}) \cos\theta_j \cos\varphi_j + Q^2_{ij}(\tau_{ji}) \cos\theta_j \sin\varphi_j - \right.$$

$$\left. - Q^3_{ij}(\tau_{ji}) \sin\theta_j\right], \qquad (13.30\text{б})$$

$$\frac{d^2\varphi_j}{dt^2} = -\frac{2}{r_j} \cdot \frac{dr_j}{dt} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} - 2 \frac{d\theta_j}{dt} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} \operatorname{ctg}\theta_j +$$

$$+ \frac{\gamma}{r_j} \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{N} m_i \left[- Q^1_{ij}(\tau_{ji}) \frac{\sin\varphi_j}{\sin\theta_j} + Q^2_{ij}(\tau_{ji}) \frac{\cos\varphi_j}{\sin\theta_j}\right], \qquad (13.30\text{в})$$

где

$$Q^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv \frac{R^\alpha_{ij}(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v^\alpha_i(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} -$$

$$- \frac{3(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji}) \cdot \vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4} R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3;\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N) \qquad (13.31)$$

$$\tau_{ji} \equiv x^0 - |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|, \quad x^0 = ct, \quad a^\alpha_j(\xi^0) \equiv \iiint \xi^\alpha \rho_j(\xi^0\ \vec{\xi})\, d\vec{\xi},$$

$$R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv a^\alpha_i(\tau_{ji}) - a^\alpha_j(x^0),\ \ v^\alpha_j(x^0) = \frac{c\,da^\alpha_j(x^0)}{dx^0}, \qquad (13.32)$$

$$a^1_j = r_j \sin\theta_j \cos\varphi_j, \quad a^2_j = r_j \sin\theta_j \sin\varphi_j, \quad a^3_j = r_j \cos\theta_j.$$

Справедливость следствия 13.1 устанавливается с помощью формул (13.19), (13.29а) — (13.29в) для выбора в качестве $x^\alpha\ (x^0)$ величин $a^\alpha\ (x^0)$, фигурирующих в теореме 12.1.

Замечание 13.4. Система уравнений (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) является системой дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа относительно $6N$-мерной вектор-функции

$$X(t) = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, \ldots, r_N, \theta_N, \varphi_N; \dot{r}_i, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \dot{r}_N, \dot{\theta}_N, \dot{\varphi}_N\}, \tag{13.33}$$

где $\dot{f}(t) \equiv \frac{df}{dt}$.

Поэтому основная начальная задача для этой системы уравнений, согласно результатам § 3, задается при $t > t_0$ системой уравнений (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) с начальными условиями

$$X(t) = \Phi(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \quad t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \tag{13.34}$$

$$X(t) = \Psi(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \quad t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0]$$

и дополнительными условиями (3.36), где

$$\Delta_{t_0} = \max_{i,j} |\vec{a}_i(ct_0) - \vec{a}_j(ct_0)|, \tag{13.35}$$

если

$$\max_{i,j} \left| \frac{d}{dx^0} |\vec{a}_i(x^0) - \vec{a}_j(x^0)| \right| < 1, \quad x^0 \geqslant ct_0 > 0. \tag{13.36}$$

Последнее условие для не очень высоких скоростей движения выполняется всегда.

Необходимость задавать для постановки основной начальной задачи для уравнений движения (13.30а) — (13.30в) значения $6N$-мерной вектор-функции $X(t)$ (и ее производных по времени $\dot{X}(t)$) на *начальном интервале* $t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0]$ (а также задавать дополнительные условия (3.36)), представляет собой *принципиальное отличие от постановки основной начальной задачи для уравнений движения механики Ньютона* (12.51) (записанных в сферических координатах), когда достаточно задавать начальные значения вектор-функции $X(t)$ *только в начальной точке* $t = t_0$.

Замечание 13.5. Система дифференциальных уравнений нейтрального типа (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) обладает частным многообразием решений вида

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_N = \frac{\pi}{2} = \mathrm{const}, \tag{13.37}$$

что соответствует тому случаю, когда все N тел двигаются в одной (экваториальной) плоскости.

13.3. Устойчивость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. *Сингулярно возмущенными дифференциальными уравнениями* называются такие уравнения, которые содержат малый параметр при старшей производной.

В качестве примера таких уравнений можно привести обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) + g\frac{d^3y(t)}{dt^3} = 0, \tag{13.38}$$

где $g = \bar{g}$ — малый параметр.

Другим примером сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений является полученная выше система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32), являющихся уравнениями движения N умеренно релятивистских тяготеющих тел. В данном случае сингулярное возмущение вносится малым отклонением аргумента t, равным $\frac{|\vec{a}_j(ct) - \vec{a}_i(ct)|}{c}$, где c — скорость света.

Таким образом, на многообразии решений, аналитически зависящих от t, система уравнений (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) может быть записана как система дифференциальных уравнений бесконечного порядка с малым параметром при производных по t порядка выше второго.

Ниже, в § 14 будет исследована устойчивость круговых орбит задачи двух тяготеющих тел, описываемых уравнениями движения с отклоняющимся аргументом (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32).

Но прежде, чем перейти к этой задаче, изложим здесь основные качественные особенности решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, связанные с применимостью теории возмущений по малому параметру и устойчивостью таких решений. Эти вопросы принципиально важны с точки зрения физического содержания задач, описываемых такими сингулярно возмущенными уравнениями, поскольку системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений возникают весьма часто в различных разделах теоретической физики при попытках разумно упростить исходные, более сложные уравнения задачи до более простых и обозримых.

Так, при построении решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр (например, при старшей производной либо при нелинейном члене в уравнении) среди физиков чрезвычайно популярны методы теории возмущений по малому параметру g, входящему в уравнение. При этом методами теории возмущений по параметру g отыскивается формальное решение исходного уравнения, обращающееся при $g = 0$ в некоторое решение вырожденного уравнения (т. е. уравнения, получаемого из исходного при $g = 0$), представляющее физический интерес. Этим нередко исчерпывается «исследование» решения соответствующего сингулярно возмущенного дифференциального уравнения, игнорируя при этом важные вопросы о самой применимости теории возмущений по параметру g (даже на уровне асимптотических рядов по g) и вопросы устойчивости получаемого при этом решения соответствующей начальной задачи.

Здесь важно подчеркнуть, что подобная чисто формальная теория возмущений по малому параметру g при исследовании решений сингулярно возмущенных уравнений *далеко не всегда дает математически и физически корректный результат* по двум причинам:

а) далеко не всякое решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения непрерывно зависит от параметра g в точке $g = 0$;

б) далеко не всегда непрерывное по параметру g в точке $g = 0$ решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения является устойчивым относительно возмущений на начальном множестве, т. е. далеко не всегда таким решением может быть описана соответствующая физическая система.

Ниже, в п. 13.3 проиллюстрируем действие этих двух факторов на ряде конкретных примеров сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Сначала рассмотрим простой пример без сингулярного возмущения, но с малым параметром; этот пример нам будет полезен для последующего сравнения с сингулярно возмущенными случаями.

Пример 1. Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = gy(t), \quad \omega > 0, \quad g = \bar{g}. \tag{13.39}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1 \exp\{i\sqrt{\omega^2 - g}\, t\} + C_2 \exp\{-i\sqrt{\omega^2 - g}\, t\}. \tag{13.40}$$

Очевидно, что для всякого $t = \mathrm{const}$ при $\omega = \mathrm{const} \neq 0$ всякое решение (13.40) является аналитическим по параметру g в точке $g = 0$.

Если $\omega^2 > g$, то все решения этого уравнения, очевидно, устойчивы по Ляпунову на бесконечном интервале времени t (в соответствии с определением 3.2 из § 3).

Пример 2. Рассмотрим линейное сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) + g\,\frac{d^3y(t)}{dt^3} = 0, \qquad \omega > 0, \quad g = \bar{g}. \tag{13.41}$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$s^2 + \omega^2 + gs^3 = 0.$$

Из теории ветвления нелинейных уравнений [27] получаем, что это уравнение имеет три (характеристических) корня:

а) аналитический по g в точке $g = 0$ корень

$$s_1 = s_1(g) = i\omega + \frac{g\omega^2}{2} + O(g^2);$$

б) аналитический по g в точке $g = 0$ корень

$$s_2 = s_2(g) = -i\omega + \frac{g\omega^2}{2} + O(g^2);$$

в) сингулярный по g в точке $g = 0$ корень

$$s_3 = s_3(g) = -\frac{1}{g} + \frac{g\omega^2}{3} + O(g^{1+\alpha}), \qquad \mathrm{Re}\,\alpha > 0.$$

Общее решение уравнения (13.41) имеет вид

$$y(t) = \sum_{j=1}^{3} C_j \exp\{s_j(g)\, t\}. \tag{13.42}$$

Поэтому всякое частное решение уравнения (13.41) вида

$$y_0(t) = A \exp\{s_1(g)\, t\} + B \exp\{s_2(g)\, t\} \tag{13.43}$$

при $t = \mathrm{const}$ является аналитической функцией переменного g в точке $g = 0$ и обращается для $g = 0$ в (периодическое) решение $y_0(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ порождающего уравнения

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0. \tag{13.44}$$

В случае общего решения (13.42) при $t = \mathrm{const}$ это решение не является аналитическим по g в точке $g = 0$, так что теория возмущений по g для решения уравнения (13.41) общего вида не применима.

Всякое решение уравнения (13.41), в том числе и аналитическое по g в точке $g = 0$ решение (13.43), не будет устойчивым для малого $g < 0$, поскольку при этом корень s_3 имеет достаточно большую вещественную часть, если $-g > 0$ достаточно мало.

Таким образом, хотя решение частного вида (13.43) при малых $|g| > 0$ и можно искать методом теории возмущений по малому параметру g (на конечном интервале времени), получаемое при этом решение (в приближенной форме) для малых $-g > 0$ сильно неустойчиво, а поэтому может реализоваться лишь с исчезающе малой вероятностью. Тем самым такое решение не может быть рассматриваемо как физически приемлемое.

Пример 3. Разберем другой пример сингулярно возмущенного дифференциального уравнения. А именно рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка запаздывающего типа

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) - gy(t - \Delta) = 0, \quad \omega > 0, \quad \Delta > 0, \quad g = \bar{g}. \tag{13.45}$$

Это уравнение можно переписать в виде двух уравнений

$$\begin{gathered} \frac{du_1(t)}{dt} = u_2(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} = -\omega^2 u_1(t) + gu_1(t - \Delta), \\ u(t) \equiv \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{13.46}$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$s^2 + \omega^2 - ge^{-s\Delta} = 0. \tag{13.47}$$

Все корни характеристического уравнения (13.47), в соответствии с результатами § 3, можно разделить на две группы:

а) пара корней, аналитически зависящих от параметра g в точке $g = 0$:

$$s_{1,2} = s_{1,2}(g) = \pm i\left(\omega - \frac{g}{\omega} e^{\mp i\omega\Delta}\right) + O(g^2);$$

б) цепочка корней запаздывающего типа, лежащих слева от прямой $\mathrm{Re}\, s = C_1$, где постоянная C_1 для достаточно малых $|g\Delta^2|$ имеет асимтотический вид

$$C_1 = \frac{1}{\Delta}[\ln|g\Delta^2| + O(\ln|\ln|g\Delta^2||)].$$

Все корни $s_1, s_2, s_3, \ldots$ — простые, если $\Delta > 0$ достаточно мало.

В соответствии с результатами § 3 (теоремы 3.7, 3.8) решение всякой начальной задачи для системы уравнений (13.46) при $t > 0$ с начальными условиями

$$u(t) = \varphi(t) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0],$$

при $t > \Delta$ имеет вид

$$u(t) = \lim_{l\to\infty} \sum_{C_l} \mathrm{res}\,[e^{st}H^{-1}(s)\,p(s)] = \lim_{l\to\infty} \sum_{C_l} e^{s_r t}B_r, \tag{13.48}$$

где

$$p(s) = \begin{pmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix} + \int\limits_0^\Delta \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1(t) - \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) + \omega^2\varphi_1(t) \end{pmatrix} e^{-st}dt - ge^{-s\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1(0) \end{pmatrix}, \quad (13.48а)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} s & , -1 \\ \omega^2 - ge^{-s\Delta}, & s \end{bmatrix},$$

а контуры C_l выбираются в соответствии с теоремой 3.7.

Рассмотрим частное семейство решений уравнения (13.45), отвечающее паре корней s_1 и s_2:

$$u_1^0(t) \equiv y_0(t) = Ae^{s_1(g)t} + Be^{s_2(g)t}. \quad (13.49)$$

Каждое решение из этого семейства при $t = \text{const}$ аналитично по g в точке $g = 0$ и для $g = 0$ обращается в (периодическое) решение порождающего уравнения (13.44). Тем самым всякое решение вида (13.49) для малых $|g|$ может быть получено на конечном интервале значений t методом теории возмущений по параметру g.

Решение (13.49), очевидно, отвечает начальным условиям

$$y(t) = \varphi_0(t) \equiv Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \in C^1[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0]. \quad (13.50)$$

Рассмотрим теперь другое решение $y(t) \equiv y(t;\, \varphi_1)$ уравнения (13.45) при $t > 0$ с начальными условиями

$$y(t) = \varphi_1(t) \in C^1[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0], \quad (13.51)$$

мало отличающимися от начальных условий (13.50):

$$\sup_{t\in[-\Delta,0]} |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| < \delta. \quad (13.52)$$

Тогда в силу (13.48) получаем, что разность этих двух решений $z(t) \equiv y(t;\, \varphi_1) - y_0(t)$ для $t > \Delta$ (являющаяся решением уравнения (13.45) с начальными условиями

$$z(t) = [\varphi_1(t) - \varphi_0(t)] \in C^1[-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0])$$

имеет вид

$$z(t) = \lim_{l\to\infty} \sum_{C_l} e^{s_r t} B_r, \quad (13.53)$$

где B_r есть постоянные, являющиеся малыми величинами порядка величины δ. Отсюда получаем, что если $\Delta > 0$ достаточно мало, то в сумме (13.53) два характеристических корня s_1, s_2 имеют достаточно малую положительную вещественную часть, а все остальные характеристические корни имеют достаточно большую отрицательную вещественную часть. Но по аналогии с определениями 3.4а, 3.8 это означает, что для малых $\Delta > 0$ всякое решение вида (13.50) уравнения (13.45) является технически устойчивым (на конечном интервале значений t по отношению к возмущениям на начальном множестве $[-\Delta, 0]$).

Пример 4. В качестве последнего примера рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка опережающего типа, содержащее запаздывающий и опережающие аргументы:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = g[y(t-\Delta) + y(t+\Delta)], \quad \omega > 0, \quad g = \bar{g}, \quad \Delta > 0. \quad (13.54)$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$s^2 + \omega^2 - ge^{-s\Delta} - ge^{s\Delta} = 0. \quad (13.55)$$

Согласно результатам § 3, все корни этого уравнения можно разделить на три группы корней:

а) пара корней, аналитически зависящих от параметра g в точке $g = 0$:

$$s_{1,2} = s_{1,2}(g) = \pm i\omega + O(g);$$

б) цепочка корней запаздывающего типа;

в) цепочка корней опережающего типа.

Все эти корни — простые, если $\Delta > 0$ достаточно мало.

Рассмотрим опять частное семейство решений уравнения (13.54), имеющих вид (13.49). Каждое решение из этого семейства, как и в предыдущем случае, при $t = \mathrm{const}$ является аналитическим по параметру g в точке $g = 0$ и при $g = 0$ обращается в (периодическое) решение порождающей системы (13.44). Поэтому решение вида (13.49) при малых $|g|$ на конечном интервале t может быть получено методом теории возмущений по параметру g.

Однако, в отличие от предыдущего случая, такое решение сильно неустойчиво по отношению к возмущениям на начальном множестве $t \in [-2\Delta, 0]$, поскольку имеется цепочка характеристических корней опережающего типа, содержащих характеристические корни со сколь угодно большой положительной вещественной частью. (Поэтому при любом сколь угодно малом δ и для любого заданного $a \gg \omega$ найдутся такие решения $z(t; \varphi)$, что $z(t; \varphi) = y_0(t) + Ce^{\alpha t}$, $\mathrm{Re}\,\alpha = a \gg \omega$, хотя и справедливо на начальном интервале

$$|\varphi(t) - y_0(t)| < \delta, \quad t \in [-2\Delta, 0]).$$

Таким образом, на приведенных выше примерах мы проиллюстрировали два простых, но весьма важных (и нередко игнорируемых физиками) факта, состоящих в том, что, во-первых, далеко не всякое решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения непрерывно зависит от соответствующего (малого) параметра g в точке $g = 0$ и, во-вторых, отнюдь не всегда непрерывное по параметру g в точке $g = 0$ решение сингулярно возмущенного дифференциального уравнения является устойчивым по отношению к возмущениям на начальном множестве, а тем самым физически приемлемым решением этого уравнения.

В каждом конкретном случае (т. е. для конкретного уравнения и конкретного решения этого уравнения) следует специально исследовать применимость теории возмущений по малому параметру и устойчивость соответствующего решения.

Применительно к рассматриваемой в этой и следующей главах проблеме многих тел в общей теории относительности применимость теории возмущений по малому параметру $\left(\text{в данном случае — по параметру } \frac{v_{\max}}{c}\right)$ была достигнута выбором решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, уравнений гравитационного поля. А поскольку уравнения (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) записаны как раз для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, то тем самым обеспечена применимость в этих уравнениях теории возмущений по малому параметру $\frac{v_{\max}}{c}$ до k-го порядка включительно.

Что же касается явной проверки устойчивости физически интересных решений уравнений проблемы многих тел (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32), то в следующем, четырнадцатом, параграфе, как раз и будет исследоваться устойчивость круговых орбит задачи двух тел, описываемых этими уравнениями.

Совершенно очевидно, что устойчивость круговых орбит задачи двух тел является пробным камнем для всякой релятивистской теории тяготения, претендующей на правильное релятивистское обобщение ньютонового закона «всемирного тяготения», поскольку круговые орбиты задачи двух тел небесной механики (разновидность кеплеровых орбит небесной механики), как показывают астрономические наблюдения, являются *устойчивыми относительно возмущений на начальном множестве* (во всяком случае, на достаточно большом конечном интервале времени $t \in [0, T]$, где T много больше периода вращения по орбите).

В § 14 будет показано, что устойчивость релятивистских орбит, наиболее близких к круговым, для уравнений (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32), $N = 2$ по первому приближению на конечном интервале времени не хуже, чем устойчивость соответствующих круговых орбит уравнений ньютоновой механики.

Этот факт является чрезвычайно важным, так как показывает, что уравнения движения N умеренно релятивистских тел (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) *вполне пригодны в качестве релятивистского обобщения уравнений движения механики Ньютона; эти уравнения вытекают из уравнений гравитационного поля Эйнштейна и тем самым учитывают автоматически конечность скорости распространения гравитационного взаимодействия N тел.*

§ 14. Устойчивость кругового движения в задаче двух тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента

В этом параграфе рассмотрим внешнюю задачу двух тяготеющих тел для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, причем ограничимся здесь рассмотрением движения тел в одной плоскости

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}. \tag{14.1}$$

Для такого случая целесообразно воспользоваться уравнениями внешней задачи двух тяготеющих тел в «сферических» координатах (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32), полученными в предыдущем параграфе для случая, когда размеры тел много меньше минимального расстояния между телами.

Эти уравнения для случая $N = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}$, очевидно, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r_j}{dt^2} &= r_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 + \gamma m_j \left[Q^1_{ij}(\tau_{ji}) \cos\varphi_j + Q^2_{ij}(\tau_{ji}) \sin\varphi_j\right], \\ \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} &= -\frac{2}{r_j} \cdot \frac{dr_j}{dt} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} + \frac{\gamma}{r_j} m_j \left[-Q^1_{ij}(\tau_{ji}) \sin\varphi_j + \right. \\ &\quad \left. + Q^2_{ij}(\tau_{ji}) \cos\varphi_j\right] \qquad (i,\ j = 1,\ 2;\quad i \neq j), \end{aligned} \tag{14.2}$$

где

$$\tau_{ji} \equiv x^0 - |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|, \quad x^0 = ct,$$

$$R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv a^\alpha_i(\tau_{ji}) - a^\alpha_j(x^0) \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3),$$

$$v^\alpha_j(x^0) = \frac{c\,da^\alpha_j(x^0)}{dx^0}, \tag{14.3}$$

$$a^1_j(ct) = r_j(t)\cos\varphi_j(t), \quad a^2_j(ct) = r_j(t)\sin\varphi_j(t), \quad a^3_j = 0,$$

$$Q^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv \frac{R^\alpha_{ij}(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v^\alpha_i(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} -$$

$$- \frac{3(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})\cdot\vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4} R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \quad (\alpha = 1,\ 2), \quad Q^3_{ij}(\tau_{ji}) = 0.$$

Отыскиваем решение системы дифференциальных уравнений нейтрального типа (14.2), (14.3) при $x^0 = ct > ct_0 > 0$ с начальными условиями

$$\frac{d^l r_j(t)}{dt^l} = R_{jl}(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0},\ t_0],\ t \in [t_0 - \Delta_{t_0},\ t_0], \tag{14.4}$$

$$\frac{d^l \varphi_j(t)}{dt^l} = \Phi_{jl}(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0},\ t_0],\ t \in [t_0 - \Delta_{t_0},\ t_0] \quad (j = 1,\ 2;\ l = 0,1,2),$$

где
$$\Delta_{t_0} = |\vec{a}_1(ct_0) - \vec{a}_2(ct_0)|. \tag{14.5}$$

При этом считаем выполненным условие

$$\left|\frac{d}{dx^0}|\vec{a}_1(x^0) - \vec{a}_2(x^0)|\right| < 1, \quad x^0 \geqslant ct_0 > 0.$$

14.1. Решения, близкие к круговым орбитам. Найдем все решения системы уравнений (14.2), (14.3) из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, *близкие к круговым орбитам*. А именно будем отыскивать такие решения из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, которые имеют в сферических координатах на конечном интервале $t \in [t_0,\ t_0 + T]$, $T < \infty$, следующий вид:

$$\begin{gathered} r_1(t) = r^0_1 + \frac{1}{c}\rho_1(t) + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ r_2(t) = r^0_2 + \frac{1}{c}\rho_2(t) + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \varphi_1(t) = \omega t + \varphi_0 + \frac{\psi_1(t)}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \varphi_2(t) = \omega t + \varphi_0 - \pi + \frac{\psi_2(t)}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ t \in [t_0,\ t_0 + T],\quad T < \infty, \end{gathered} \tag{14.6}$$

где $0 < r^0_1 = \mathrm{const}$, $0 < r^0_2 = \mathrm{const}$.

Справедливо следующее предложение, касающееся решений вида (14.6) уравнений внешней задачи (14.2), (14.3) и вытекающее из теоремы 12.1 и определения 6.2.

Предложение 14.1. Пусть выполняются все условия теоремы 12.1 и предложения 13.1 и пусть $N = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \mathrm{const}$ (откуда вытекает справедливость уравнений (14.2), (14.3) в качестве уравнений внешней задачи двух тяготеющих тел).

Тогда для того чтобы функции (14.6) с независящими от параметра c величинами $r_i^0 > 0$, $\rho_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, были решениями из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, уравнений (14.2), (14.3) на конечном интервале $t \in [t_0, t_0+T]$ с некоторым заданным $0<T<\infty$ и с некоторым малым $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два соотношения

$$r_2^0\omega^2 = \frac{\gamma m_1}{(r_1^0 + r_2^0)^2}, \tag{14.7а}$$

$$r_1^0\omega^2 = \frac{\gamma m_2}{(r_1^0 + r_2^0)^2} \tag{14.7б}$$

и четыре соотношения

$$\frac{d^2\rho_1(t)}{dt^2} = \frac{2\gamma m_2}{(r_1^0 + r_2^0)^3}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + \omega^2\rho_1(t) + 2r_1^0\omega\frac{d\psi_1(t)}{dt}, \tag{14.8а}$$

$$\frac{d^2\rho_2(t)}{dt^2} = \frac{2\gamma m_1}{(r_1^0 + r_2^0)^3}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + \omega^2\rho_2(t) + 2r_2^0\omega\frac{d\psi_2(t)}{dt}, \tag{14.8б}$$

$$\frac{d^2\psi_1(t)}{dt^2} = \frac{\gamma m_2 r_2^0}{r_1^0(r_1^0 + r_2^0)^3}[\omega(r_1^0 + r_2^0) + \psi_1(t) - \psi_2(t)] - \frac{2\omega}{r_1^0}\cdot\frac{d\rho_1(t)}{dt}, \tag{14.8в}$$

$$\frac{d^2\psi_2(t)}{dt^2} = \frac{\gamma m_1 r_1^0}{r_2^0(r_1^0 + r_2^0)^3}[\omega(r_1^0 + r_2^0) + \psi_2(t) - \psi_1(t)] - \frac{2\omega}{r_2^0}\cdot\frac{d\rho_2(t)}{dt}. \tag{14.8г}$$

Замечание 14.1. Из соотношений (14.7а), (14.7б) вытекает

$$r_1^0 m_1 = r_2^0 m_2 \tag{14.9а}$$

и

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma m_1}{r_2^0(r_1^0 + r_2^0)^2}} = \sqrt{\frac{\gamma m_1^3}{(r_2^0)^3(m_1 + m_2)^2}} = \sqrt{\frac{\gamma m_2^3}{(r_1^0)^3(m_1 + m_2)^2}}. \tag{14.9б}$$

Если для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, ввести величину

$$R_{\text{н}}^{\alpha}(t) \equiv \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}(m_1 a_1^{\alpha}(ct) + m_2 a_2^{\alpha}(ct))\big|_{c=\infty}, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

то для решений (14.6), (14.7) получим, очевидно,

$$R_{\text{н}}^{\alpha}(t) \equiv 0,$$

в силу того, что решение (14.6), (14.7) соответствует случаю

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \mathrm{const}, \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t) + \pi + \frac{\psi_1(t) - \psi_2(t)}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

В соответствии с результатами § 8 и формулой (8.4) это означает, что координаты ньютоновского центра масс системы двух тел для решения (14.6), (14.7) постоянны и равны нулю.

Перейдем от переменной t и искомых функций ω, $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ к соответствующим безразмерным переменной τ и искомым функциям Ω, $y_1(\tau)$, $y_2(\tau)$, $y_3(\tau)$, $y_4(\tau)$ по формулам

$$\tau=\frac{t}{T_0},\quad T_0\equiv\frac{r_1^0+r_2^0}{v_{\max}},\quad \Omega=\omega T_0,$$
$$y_1(\tau)=\frac{T_0\rho_1(\tau T_0)}{(r_1^0+r_2^0)^2},\quad y_2(\tau)=\frac{T_0\rho_2(\tau T_0)}{(r_1^0+r_2^0)^2},\tag{14.10}$$
$$y_3(\tau)=\frac{T_0\psi_1(\tau T_0)}{r_1^0+r_2^0},\quad y_4(\tau)=\frac{T_0\psi_2(\tau T_0)}{r_1^0+r_2^0}.$$

В результате систему уравнений (14.8а) — (14.8г) можно записать как следующую систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}=\sum_{k=1}^{8}a_{ik}y_k(\tau)+f_i,\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 8,\tag{14.11}$$

где матрица $A=[a_{ik}]$ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$A=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
\Omega^2+2h_2 & 2h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2R_1^0\Omega & 0\\
2h_1 & \Omega^2+2h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2R_2^0\Omega\\
0 & 0 & h_1 & -h_1 & -\frac{2\Omega}{R_1^0} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -h_2 & h_2 & 0 & -\frac{2\Omega}{R_2^0} & 0 & 0
\end{bmatrix},\tag{14.12}$$

$$h_1=\frac{\Omega^2m_1}{m_1+m_2},\quad h_2=\frac{\Omega^2m_2}{m_1+m_2},$$
$$R_1^0=\frac{r_1^0}{r_1^0+r_2^0},\quad R_2^0=\frac{r_2^0}{r_1^0+r_2^0},\tag{14.12a}$$

а свободный член в (14.11) имеет вид

$$f_i=\begin{cases} h_1\Omega, & i=7,\\ h_2\Omega, & i=8,\\ 0, & i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6.\end{cases}\tag{14.13}$$

Для отыскания общего решения системы уравнений (14.11) — (14.13) удобно воспользоваться преобразованием Лапласа. С этой целью домножим левые и правые части соотношений (14.11) на $e^{-p\tau}$ и проинтегрируем по τ в пределах от нуля до бесконечности. Обозначая затем через $F_i(p)$ изображение по Лапласу функции $y_i(\tau)$:

$$F_i(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} y_i(\tau)\, d\tau \doteqdot y_i(\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8), \qquad (14.14)$$

по известным формулам операционного исчисления (3.84) — (3.86), приведенным в § 3, п. 3.7, получаем для изображений $F_j(p)$, $j = 1, 2, \ldots, 8$, по Лапласу из соотношений (14.11) следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{8} (\delta_{lk} p - a_{ik}) F_i(p) = \frac{f_i}{p} + y_i(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8), \qquad (14.15)$$

где $y_l(0)$ определяется как значение функции $y_i(\tau)$ в точке $\tau = +0$

Значение оригиналов $F_i(p)$ теперь можно определить из системы линейных неоднородных уравнений (14.15) по известным формулам Крамера, если определитель этой системы $\Delta(p)$ отличен от нуля.

Простым вычислением с помощью формулы (14.12) получаем для определителя системы (14.15)

$$\Delta(p) = |\delta_{ik} p - a_{ik}| = p^2 (p^2 + \Omega^2)^3. \qquad (14.16)$$

В результате из соотношений (14.15), (14.16) получаем, что изображения $F_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, по Лапласу вычисляются по формулам

$$F_i(p) = \frac{\Delta_i(p)}{p^2 (p^2 + \Omega^2)^3}, \qquad (14.17)$$

где $\Delta_i(p)$ — определитель матрицы, полученной из матрицы $[p\delta_{ik} - a_{ik}]$ заменой i-го столбца на столбец $\left\{\frac{f_j}{p} + y_j(0)\right\}_{j=1}^{8}$.

В результате каждое изображение $F_i(p)$, вычисляемое по формуле (14.17), можно представить в следующем виде:

$$F_i(p) = \frac{1}{(p^2 + \Omega^2)^3} \sum_{l=0}^{7} \left[\sum_{k=1}^{8} b_{ikl} p^{l-2} y_k(0) + \Omega (h_1 b_{i7l} + h_2 b_{i8l}) p^{l-3} \right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, 8, \qquad (14.18)$$

где

$$[b_{ikl}] = \Omega^{6-l} \times$$

$$\times \begin{bmatrix}
\Omega C_{11} & \Omega C_{12} & \Omega R_1^0 C_{13} & \Omega R_1^0 C_{14} & C_{15} & C_{16} & R_1^0 C_{17} & R_1^0 C_{18} \\
\Omega C_{21} & \Omega C_{22} & \Omega R_1^0 C_{23} & \Omega R_1^0 C_{24} & C_{25} & C_{26} & R_1^0 C_{27} & R_1^0 C_{28} \\
\frac{\Omega}{R_1^0} C_{31} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{32} & \Omega C_{33} & \Omega C_{34} & \frac{1}{R_1^0} C_{35} & \frac{1}{R_1^0} C_{36} & C_{37} & C_{38} \\
\frac{\Omega}{R_1^0} C_{41} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{42} & \Omega C_{43} & \Omega C_{44} & \frac{1}{R_1^0} C_{45} & \frac{1}{R_1^0} C_{46} & C_{47} & C_{48} \\
\Omega^2 C_{51} & \Omega^2 C_{52} & \Omega^2 R_1^0 C_{53} & \Omega^2 R_1^0 C_{54} & \Omega C_{55} & \Omega C_{56} & \Omega R_1^0 C_{57} & \Omega R_1^0 C_{58} \\
\Omega^2 C_{61} & \Omega^2 C_{62} & \Omega^2 R_1^0 C_{63} & \Omega^2 R_1^0 C_{64} & \Omega C_{65} & \Omega C_{66} & \Omega R_1^0 C_{67} & \Omega R_1^0 C_{68} \\
\frac{\Omega^2}{R_1^0} C_{71} & \frac{\Omega^2}{R_1^0} C_{72} & \Omega^2 C_{73} & \Omega^2 C_{74} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{75} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{76} & \Omega C_{77} & \Omega C_{78} \\
\frac{\Omega^2}{R_1^0} C_{81} & \frac{\Omega^2}{R_1^0} C_{82} & \Omega^2 C_{83} & \Omega^2 C_{84} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{85} & \frac{\Omega}{R_1^0} C_{86} & \Omega C_{87} & \Omega C_{88}
\end{bmatrix}, \tag{14.19}$$

а $[C_{ik}]$ — известная матрица с коэффициентами, зависящими только от безразмерной величины $\frac{m_1}{m_2}$. Эта матрица $[C_{ik}]$ такова, что, например, для изображения $F_1(p)$ формула (14.18) записывается в виде

$$\begin{aligned}
F_1(p) &= \frac{\Delta_1(p)}{p^2(p^2+\Omega^2)^3} = \frac{1}{p^1(p^2+\Omega^2)^3}\Bigg\{\Bigg[2p^2(p^2+4\Omega^2)h_2 + \\
&+ p^2\Omega^2(\Omega^2+2h_1) + 4h_2\Omega^2(\Omega^2+2h_1) - 8\Omega^2 h_2^2 \frac{R_2^0}{R_1^0}\Bigg] y_1(0) + \\
&+ 2\left[(p^2+4\Omega^2)(p^2-h_2)h_2 - p^2h_2^2 + \frac{2\Omega^2 R_1^0}{R_2^0}(\Omega^2+2h_1)\right] y_2(0) + \\
&+ 2\,[ph_1\Omega R_1^0(p^2-2h_1+3\Omega^2) - 2ph_2^2\Omega R_2^0]\, y_3(0) + \\
&+ 2\,[2ph_2^2\Omega R_2^0 - ph_1\Omega R_1^0(p^2+3\Omega^2-2h_1)]\, y_4(0) + \\
&+ [p^3(p^2+3\Omega^2) - 4ph_1\Omega^2]\, y_5(0) + 4ph_1\Omega^2\frac{R_1^0}{R_2^0}\, y_6(0) + \\
&+ 2\,[(p^4-p^2h_1+2p^2\Omega^2+h_2\Omega^2+2h_1h_2)\Omega R_1^0 - 2h_2^2\Omega R_2^0] \times \\
&\times \left[y_7(0) + \frac{h_1\Omega}{p}\right] - 2p^2h_1\Omega R_1^0\left[y_8(0) + \frac{h_2\Omega}{p}\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{14.20}$$

где h_1, h_2, R_1^0, R_2^0 даются формулами (14.12а).

Аналогичные соотношения для остальных величин $F_i(p)$, $i = 2, 3, \ldots, 8$, не будем выписывать в таком развернутом виде, поскольку соответствующие громоздкие выражения нам не понадобятся.

Вернемся теперь от изображений $F_i(p)$ по Лапласу к соответствующим оригиналам $f_i(\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, с помощью следующей теоремы, приведенной в § 3.

Теорема 3.22. *Пусть изображение* $F(p)$ *по Лапласу представляет собой дробно-рациональную функцию*

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k p^k}{\sum\limits_{l=0}^{n} b_l p^l} \qquad (m < n) \tag{14.21}$$

и пусть корни знаменателя $\Psi(p)$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$, *будут кратными с кратностями, соответственно равными* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, *причем* $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s = n$. *Тогда соответствующий оригинал находится по формуле*

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} \doteqdot f(\tau) = \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{\mu_l} \frac{B_l^{(\mu_l - j)}(p_l)}{(\mu_l - l)!} \frac{\tau^{j-1}}{(j-1)!} e^{p_l \tau}, \tag{14.22}$$

где

$$B_l(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} (p - p_l)^{\mu_l} = \sum_{j=1}^{\mu_l} A_{jl} (p - p_l)^{(\mu_l - j)} + N(p - p_l)^{\mu_l}. \tag{14.23}$$

Применяя к изображению (14.17) эту теорему, получаем выражение для соответствующего оригинала $y_i(\tau)$, после чего с помощью формул (14.10) устанавливаем справедливость следующей леммы.

Лемма 14. 1. *Общее решение системы линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами* (14.8а) — (14.8г) *имеет вид*

$$\begin{aligned}
\rho_1(t) &= \rho_1(\tau T_0) = \frac{(r_1^0 + r_2^0)^2}{T_0} y_1(\tau),\\
\rho_2(t) &= \rho_2(\tau T_0) = \frac{(r_1^0 + r_2^0)^2}{T_0} y_2(\tau),\\
\psi_1(t) &= \psi_1(\tau T_0) = \frac{r_1^0 + r_2^0}{T_0} y_3(\tau),\\
\psi_2(t) &= \psi_2(\tau T_0) = \frac{r_1^0 + r_2^0}{T_0} y_4(\tau), \quad T_0 = \frac{r_1^0 + r_2^0}{v_{\max}},
\end{aligned} \tag{14.24}$$

где

$$\begin{aligned}
y_j(\tau) = \sum_{l=0}^{7} \sum_{k=1}^{8} b_{jkl} y_k(0) \Bigg\{ &(\delta_{l,1} + \tau\delta_{01}) \frac{1}{\Omega^6} + \\
+ \frac{e^{l\Omega}(i\Omega)^{l-7}}{16} &[l^2 - 8l + 24 + i(2l - 7)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] + \\
+ \frac{e^{-i\Omega}(-i\Omega)^{l-7}}{16} &[l^2 - 8l + 24 - i(2l - 7)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] \Bigg\} +
\end{aligned}$$

$$+\Omega^3 \sum_{l=0}^{7} \frac{m_1 b_{j7l} + m_2 b_{j8l}}{m_1 + m_2} \left\{ \left(\delta_{l,2} + \tau\delta_{l,1} + \frac{\tau^2}{2} \delta_{l,0} \right) \frac{1}{\Omega^6} + \right.$$

$$+ \frac{e^{i\Omega} (i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - 10l + 24 + i(2l-9)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] +$$

$$\left. + \frac{e^{-i\Omega} (-i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - 10l + 24 - i(2l-9)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] \right\}, \quad (14.25)$$

$$j = 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$y_k(0)$ — произвольные постоянные, а элементы матрицы $[b_{jkl}]$ даются формулами (14.19).

Нас прежде всего будут интересовать те из решений (14.6), (14.24), (14.25), которые наиболее близки на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ с заданным $T > 0$ к равномерному вращению по окружностям радиусов r_1^0 и r_2^0 для первого и второго тел соответственно. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 14.2. Наиболее близкие по абсолютной величине на заданном конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, к равномерному вращению по окружностям радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ (для первого и второго тел соответственно) решения вида (14.6) системы уравнений (14.2), (14.3), принадлежащие классу (k, ε), $k \geqslant 1$, получаются при следующем выборе начальных значений:

$$v_{\max} y_1(0) = \omega(r_1^0 + r_2^0) a_1, \qquad v_{\max} y_2(0) = \omega(r_1^0 + r_2^0) a_2,$$

$$\frac{v_{\max}}{r_1^0 + r_2^0} y_3(0) = \omega a_3, \qquad \frac{v_{\max}}{r_1^0 + r_2^0} y_4(0) = \omega a_4, \quad (14.26)$$

$$\frac{v_{\max}^2}{r_1^0 + r_2^0} y_5(0) = \omega^2 (r_1^0 + r_2^0) a_5, \qquad \frac{v_{\max}^2}{r_1^0 + r_2^0} y_6(0) = \omega^2 (r_1^0 + r_2^0) a_6,$$

$$\frac{v_{\max}^2}{(r_1^0 + r_2^0)^2} y_7(0) = \omega^2 a_7, \qquad \frac{v_{\max}^2}{(r_1^0 + r_2^0)^2} y_8(0) = \omega^2 a_8$$

с безразмерными произвольными постоянными $a_1, \ldots, a_8$, абсолютная величина которых по порядку величины не превышает единицы, и такими, которые обеспечивают вещественность правых частей соотношений (14.25). При таком выборе начальных данных все величины

$$\rho_i(t), \quad \psi_i(t), \quad \frac{d\rho_i(t)}{dt}, \quad \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \qquad i = 1,\ 2,$$

фигурирующие в формулах (14.6), будут пропорциональны (малой) постоянной $\omega = \sqrt{\frac{\gamma m_1^3}{(r_2^0)^3 (m_1 + m_2)^2}}$.

Решения (14.6), (14.24) — (14.26) будем называть *наиболее близкими к круговым орбитам заданных радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$. Очевидно, при фиксированных r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ наиболее близкие к круговым орбитам решения образуют восьмипараметрическое семейство решений из класса $(k, \varepsilon(T))$, $k \gg 1$, на заданном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$.

Предложение 14.2 вытекает из леммы 14.1 и того обстоятельства, что все слагаемые в правых частях формул (14.25) для $i = 1, 2, 3, 4$, не содержащие начальных значений $\{y_i(0)\}_{i=1}^{8}$, в силу (14.19) пропорциональны величине $\Omega = \frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{v_{\max}}$.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденных решений (14.6), (14.24) — (14.26) системы уравнений (14.2), (14.3), принадлежащих классу (k, ε), $k \gg 1$.

14.2. *Устойчивость решений, наиболее близких к круговым орбитам.* Рассмотрим прежде всего случай, когда вследствие некоторого малого изменения начальных данных решение $X_i^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, системы уравнений (14.2), (14.3) из класса (k, ε), $k \gg 1$, принадлежащее семейству наиболее близких к двум круговым орбитам $\left(\text{радиусов } r_1^0 \text{ и } r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}\right)$, отклонилось на малую величину $\delta X_i(t)$, причем такую, что справедливо

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{8} |X_i^0(t)|^2} \equiv |\vec{X}^0(t)| \gg |\delta\vec{X}(t)| \gg \frac{v_{\max}}{c}, \qquad (14.27)$$
$$t \in [t_0, t_0 + T_1].$$

Для того чтобы изучить развитие во времени, т. е. при $t \in [T_1, T]$, $T > T_1$, малого отклонения $\delta X_i(t)$ (и тем самым исследовать устойчивость решения $X_i^0(t)$ для случая (14.27)), удобно исследовать устойчивость тривиального решения для случая (14.27) соответствующей системы уравнений первого приближения, получаемой из системы уравнений (14.2), (14.3). Для получения системы уравнений первого приближения, как известно, необходимо из левых и правых частей соотношений (14.2), (14.3), записанных для

$$X_i^0(t) + \delta X_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, 8,$$

вычесть левые и правые части соответствующих соотношений (14.2), (14.3), записанных для величины $X_i^0(t)$, и в полученных выражениях отбросить члены высшего порядка малости по отношению к величинам $\delta X_i(t)$ с учетом (14.27).

Таким образом, получаем в качестве системы уравнений первого приближения для отклонения $\delta X_i(t)$ от решения $X_i^0(t)$ следующую систему линейных однородных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\frac{d}{dt}\delta r_1(t) = \delta r_3(t),$$

$$\frac{d}{dt}\delta r_2(t) = \delta r_4(t),$$

$$\frac{d}{dt}\delta \varphi_1(t) = \delta \varphi_3(t),$$

$$\frac{d}{dt}\delta \varphi_2(t) = \delta \varphi_4(t),$$

$$\frac{d}{dt}\delta r_3(t) = (\omega^2 + 2H_2)\,\delta r_1(t) + 2H_2\delta r_2(t-\sigma_1) + 2r_1^0\omega\delta\varphi_3(t),$$

$$\frac{d}{dt}\delta r_4(t) = (\omega^2 + 2H_1)\,\delta r_2(t) + 2H_1\delta r_1(t-\sigma_1) + 2r_2^0\omega\delta\varphi_4(t),$$

$$\tag{14.28}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\varphi_3(t) = -\frac{2\omega}{r_1^0}\delta r_3(t) + H_1\delta\varphi_1(t) - H_1\delta\varphi_2(t-\sigma_1),$$

$$\frac{d}{dt}\delta\varphi_4(t) = -\frac{2\omega}{r_2^0}\delta r_4(t) + H_2\delta\varphi_2(t) - H_2\delta\varphi_1(t-\sigma_1),$$

где $H_1 = \frac{\omega^2 m_1}{m_1 + m_2}$, $H_2 = \frac{\omega_2 m_2}{m_1 + m_2}$, $\sigma_1 = \frac{r_1^0 + r_2^0}{c}$.

Перейдем в уравнениях (14.28) к безразмерной переменной $\tau = \frac{t}{T_0}$ и безразмерным искомым функциям $Y_i(\tau)$ по следующим формулам:

$$Y_1(\tau) \equiv \frac{\delta r_1(\tau T_0)}{r_1^0 + r_2^0}, \qquad Y_2(\tau) \equiv \frac{\delta r_2(\tau T_0)}{r_1^0 + r_2^0},$$

$$Y_3(\tau) \equiv \delta\varphi_1(\tau T_0), \qquad Y_4(\tau) \equiv \delta\varphi_2(\tau T_0), \tag{14.29}$$

$$Y_5(\tau) \equiv \frac{T_0}{r_1^0 + r_2^0}\delta r_3(\tau T_0), \qquad Y_6(\tau) \equiv \frac{T_0}{r_1^0 + r_2^0}\delta r_4(\tau T_0),$$

$$Y_7(\tau) = T_0\delta\varphi_3(\tau T_0), \qquad Y_8(\tau) = T_0\delta\varphi_4(\tau T_0).$$

Ищем решение системы (14.28) при $\tau > \tau_0 = \frac{t_0}{T_0}$ с начальными условиями

$$Y_i(\tau) = \Phi_i(\tau) \in C\left(\left[\frac{t_0-\sigma_1}{T_0}, \frac{t_0}{T_0}\right]\right), \quad \tau \in \left[\frac{t_0-\sigma_1}{T_0}, \frac{t_0}{T_0}\right], \tag{14.29 a}$$

$$i = 1, 2, \ldots, 8.$$

Домножим левые и правые части соотношений (14.28) на $e^{-p\tau}$ и проинтегрируем по τ от нуля до бесконечности с учетом (14.29).

Обозначая при этом через $F_i(p)$ изображение по Лапласу функции $Y_i(\tau)$:

$$F_i(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} Y_i(\tau)\, d\tau \doteqdot Y_i(\tau), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8, \tag{14.30}$$

получаем из (14.28) (14.29) по формулам операционного исчисления (3.86), (3.90) следующую систему линейных неоднородных уравнений относительно изображений по Лапласу $F_i(p)$:

$$\sum_{k=1}^{8} (p\delta_{ik} - b_{ik}) F_k(p) = Y_i(0), \tag{14.31}$$

где

$$[b_{ik}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Omega^2 - 2h_2 & -2e^{-p\sigma}h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R_1^0\Omega & 0 \\ -2e^{-p\sigma}h_1 & -\Omega^2 - 2h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2R_2^0\Omega \\ 0 & 0 & -h_1 & h_1 e^{-p\sigma} & \dfrac{2\Omega}{R_1^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 e^{-p\sigma} & h_2 & 0 & \dfrac{2\Omega}{R_2^0} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \omega T_0, \quad T_0 = \frac{r_1^0 + r_2^0}{v_{\max}}, \tag{14.32}$$

$$h_1 = \frac{\Omega^2 m_1}{m_1 + m_2}, \quad h_2 = \frac{\Omega^2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad R_1^0 = \frac{r_1^0}{r_1^0 + r_2^0}, \quad R_2^0 = \frac{r_2^0}{r_1^0 + r_2^0}.$$

Согласно теореме 3.23 из § 3, для исследования устойчивости тривиального решения системы линейных уравнений (14.28) необходимо в (14.31) положить $Y_1(0) = \ldots = Y_8(0) = 0$ и найти нули определителя $\Delta(p, c)$ полученной таким образом однородной системы линейных алгебраических уравнений (14.31), т. е. найти корни характеристического уравнения

$$\Delta(p,\ c) = 0. \tag{14.33}$$

Непосредственным вычислением устанавливаем, что это характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\Delta(p,\ c) \equiv |p\delta_{ik} - b_{ik}| \equiv p^2 (p^2 + \Omega^2)^3 + \frac{m_1 m_2 \Omega^4}{(m_1 + m_2)^2} \times$$

$$\times \left[5p^4 + 8p^2\Omega^2 + 3\Omega^4 + \frac{4m_1 m_2 \Omega^4}{(m_1 + m_2)^2}(1 - e^{-2p\sigma})\right](1 - e^{-2p\sigma}) = 0,$$

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{T_0} = \frac{v_{\max}}{c}. \tag{14.34}$$

Как следствие из леммы 3.4 и теоремы 3.4 из § 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 14.1. Существует такая постоянная $C = \bar{C} < \infty$, что для всякого корня p_i уравнения (14.34) $\operatorname{Re} p_i < C$. При этом все асимптотические корни (т. е. корни с достаточно большим $|p|$) уравнения (14.34) принадлежат одной из цепей корней запаздывающего типа.

Замечание 14.2. Корни уравнения (14.34), принадлежащие какой-либо запаздывающей цепи, лежат в области

$$\operatorname{Re} p < C_1, \tag{14.35}$$

где постоянная $C_1 = \bar{C}_1 < C$.

Для того чтобы оценить величину постоянной C_1, фигурирующей в неравенстве (14.35) для достаточно больших значений параметра c в уравнении (14.34), домножим левую и правую части уравнения (14.34) на $\sigma^8 e^{4p\sigma}$ и введем обозначение $s \equiv \sigma p$. Тогда полученное уравнение для асимптотически больших корней $|s| \gg 1$ примет вид

$$s^8 e^{4s}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right] - 5s^4 e^{2s}\left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right]\frac{m_1 m_2 \Omega^4 \sigma^4}{(m_1 + m_2)^2} + \\ + \frac{4m_1^2 m_2^2 \Omega^8 \sigma^8}{(m_1 + m_2)^4} = 0. \tag{14.36}$$

Для такого уравнения как следствие из теоремы 3.4 получаем следующее утверждение.

Следствие 14.2. Корни уравнения (14.36) с достаточно большими модулями принадлежат одной из цепей корней, имеющих вид

$$s = m\left(\ln\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c} + \frac{1}{4}\ln\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - \right. \\ \left. - \ln\left|2\pi r m \pm m \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{39}}{5} \mp \frac{m\pi}{2}\right|\right) + o(s) + \\ + im\left[2r\pi \pm \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{39}}{5} \mp \frac{\pi}{2}\right] + io(s), \tag{14.37}$$

где $o(s)$ означает $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{o(s)}{|s|} = 0$, $m = 2{,}4$; r — натуральные числа.

Замечание 14.3. Поскольку в силу следствия 14.1 все корни уравнения (14.34) с большими модулями принадлежат одной из цепей корней запаздывающего типа, то в силу следствия 14.2 устанавливаем, что для достаточно малых $\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c} \ll 1$ все такие корни лежат в области

$$\operatorname{Re} p\sigma < 2\ln\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c} + \frac{1}{2}\ln\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} + \\ + o\left(\ln\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c}\right) = C_1. \tag{14.38}$$

Тем самым получим оценку для постоянной C_1, фигурирующей в замечании 14.2.

Сравнивая уравнение (14.34) с уравнением

$$\Delta(p,\ \infty) \equiv p^2 (p^2 + \Omega^2)^3 = 0, \tag{14.39}$$

полученным из соотношения (14.34) при $c = \infty$, с помощью следствий 14.1, 14.2 и замечания 14.4 получаем следующую лемму.

Лемма 14.1. *Все корни характеристического уравнения* (14.34) *при* $\frac{1}{c} \to 0$ *могут быть объединены в две группы:*

а) *цепочки корней запаздывающего типа, описываемые формулой* (14.37), *лежащие в области*

$$\operatorname{Re} p < \frac{c}{v_{\max}} \left[2 \ln \frac{\omega (r_1^0 + r_2^0)}{c} + \frac{1}{2} \ln \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} + {} \right.$$
$$\left. {} + o\left(\ln \frac{\omega (r_1^0 + r_2^0)}{c} \right) \right]; \tag{14.40}$$

б) *k корней кратности соответственно* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k = 8$, *каждый из которых зависит от* $\frac{1}{c}$ *непрерывно вместе с первой производной в точке* $\frac{1}{c} = 0$.

Замечание 14.4. В силу свойств корней группы б), описанной в лемме 14.1, каждый из k таких корней допускает единственное представление в виде

$$p_j = p_j^0 + \frac{\alpha_{j1}}{c} + o\left(\frac{\omega}{c}\right), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k, \tag{14.41}$$

где p_j^0 — один из корней уравнения (14.39).

Подстановкой выражений (14.41) в характеристическое уравнение (14.34) получаем, что группа б) корней этого уравнения состоит из таких четырех различных корней:

$$p_1 = 0 + \frac{0}{c} + o\left(\frac{1}{c^1}\right) \text{ (простой корень),}$$

$$p_2 = T_0 \left[- \frac{6\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c (m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right) \right] \text{(простой корень),}$$

$$p_3 = T_0 \left[+ i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c (m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right) \right] \text{ (трехкратный корень),}$$

$$p_4 = T_0 \left[- i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c (m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right) \right] \text{ (трехкратный корень).}$$

Лемма 14.1 с помощью замечания 14.4 принимает вид следующего утверждения.

Лемма 14.2. *Все корни характеристического уравнения* (14.34) *при* $\frac{1}{c} \to 0$ *могут быть объединены в три группы:*

а) *цепочки корней запаздывающего типа, описываемые формулой* (14.37), *лежащие в области* (14.40);

б) *два простых корня*

$$p_1(c) = 0 + \frac{0}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right), \quad \mu_1 = 1,$$

$$p_2(c) = T_0\left[-\frac{6\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right], \quad \mu_2 = 1;$$

в) *два трехкратных корня*

$$p_3 = T_0\left[i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right], \quad \mu_3 = 3,$$

$$p_4 = T_0\left[-i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right], \quad \mu_4 = 3.$$

Замечание 14.5. В силу теоремы 3.8 и леммы 14.2 всякое непрерывное решение начальной задачи (14.28), (14.29), (14.29а) можно представить в виде

$$\delta r_j(t) = (\beta_{j0} + \beta_{j1} t\omega + \beta_{j2} t^2\omega^2)\exp\left\{\left[i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + (\beta_{j3} + \beta_{j4} t\omega + \beta_{j5} t^2\omega^2)\exp\left\{\left[-i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + \beta_{j6}\exp\left\{\left[-\frac{6\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + \beta_{j7} + K_j(t, c); \tag{14.42}$$

$$\delta\varphi_j(t) = (\varkappa_{j0} + \varkappa_{j1} t\omega + \varkappa_{j2} t^2\omega^2)\exp\left\{\left[i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + (\varkappa_{j3} + \varkappa_{j4} t\omega + \varkappa_{j5} t^2\omega^2) \times \exp\left\{\left[-i\omega + \frac{2\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + \varkappa_{j6}\exp\left\{\left[-\frac{6\omega^2 m_1 m_2 (r_1^0 + r_2^0)}{c(m_1 + m_2)^2} + o\left(\frac{\omega^2}{c}\right)\right]t\right\} + \varkappa_{j7} + L_j(t, c) \quad (j = 1, 2) \tag{14.43}$$

с некоторыми постоянными $\beta_{j,k}$, $j = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$, где функции $K_j(t, c)$ и $N_j(t, c)$ удовлетворяют оценкам

$$|K_j(t, c)| \leqslant M_j e^{C_1 t}, \tag{14.44}$$

$$|L_j(t, c)| \leqslant N_j e^{C_1 t}, \qquad t > t_0,$$

с не зависящими от t постоянными M_j, N_j и постоянной C_1, даваемой для достаточно малых $\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c}$ формулой (14.38).

В механике Ньютона уравнения первого приближения для отклонения функций $r_j(t)$, $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2$, от решений в виде равномерного вращения по окружностям радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, очевидно, могут быть получены из системы уравнений (14.28) при $c = \infty$. Они имеют вид следующей системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta r_1}(t) = \widehat{\delta r_3}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta r_2}(t) = \widehat{\delta r_4}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta \varphi_1}(t) = \widehat{\delta \varphi_3}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta \varphi_2}(t) = \widehat{\delta \varphi_4}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta r_3}(t) = (\omega^2 + 2H_2)\widehat{\delta r_1}(t) + 2H_2\widehat{r_2}(t) + 2r_1^0\omega\widehat{\delta\varphi_3}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta r_4}(t) = (\omega^2 + 2H_1)\widehat{\delta r_2}(t) + 2H_1\widehat{r_1}(t) + 2r_2^0\omega\widehat{\delta\varphi_4}(t),\\
&\frac{d}{dt}\delta\varphi_3(t) = -\frac{2\omega}{r_1^0}\widehat{\delta r_3}(t) + H_1\widehat{\delta\varphi_1}(t) - H_1\widehat{\delta\varphi_2}(t),\\
&\frac{d}{dt}\widehat{\delta\varphi_4}(t) = -\frac{2\omega}{r_2^0}\widehat{\delta r_4}(t) + H_2\widehat{\delta\varphi_2}(t) - H_2\widehat{\delta\varphi_1}(t).
\end{aligned}
\tag{14.45}
$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$\Delta(p,\ \infty) = p^2(p^2 + \Omega^2)^3 = 0$$

имеет, очевидно, один двукратный корень

$$p_1 = 0, \quad \mu_1 = 2$$

и два трехкратных корня

$$p_3 = i\Omega \equiv i\omega T_0, \qquad \mu_3 = 3,$$

$$p_4 = -i\Omega \equiv -i\omega T_0, \quad \mu_4 = 3.$$

Замечание 14.6. Поэтому общее решение системы уравнений (14.45) имеет вид

$$\delta r_j(t) = (\widehat{\beta}_{j0} + \widehat{\beta}_{j1}t\omega + \widehat{\beta}_{j2}t^2\omega^2)e^{i\omega t} + (\widehat{\beta}_{j3} + \widehat{\beta}_{j4}t\omega + \widehat{\beta}_{j5}t^2\omega^2)e^{-i\omega t} + \\ + (\widehat{\beta}_{j6} + \beta_{j7}t\omega), \tag{14.46}$$

$$\delta\varphi_j(t) = (\widehat{\varkappa}_{j0} + \widehat{\varkappa}_{j1}t\omega + \widehat{\varkappa}_{j2}t^2\omega^2)e^{i\omega t} + (\widehat{\varkappa}_{j3} + \widehat{\varkappa}_{j4}t\omega + \widehat{\varkappa}_{j5}t^2\omega^2)e^{-i\omega t} + \\ + (\widehat{\varkappa}_{j6} + \widehat{\varkappa}_{j7}t\omega) \qquad (j = 1,\ 2) \tag{14.47}$$

с произвольными постоянными $\widehat{\beta}_{j,k}, \widehat{\varkappa}_{j,k}$ ($j = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$).

Замечание 14.7. Из предложения 14.2 и замечаний 14.5, 14.6 вытекает, что *на конечном интервале* $t \in [t_0,\ t_0 + T]$, $T > 0$, *устойчивость по первому приближению решения системы уравнений* (14.2), (14.3), *наиболее близкого к двум круговым орбитам* $\left(\text{радиусов } r_1^0 \text{ и } r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}\right)$, *не хуже, чем устойчивость по первому приближению* *решения системы уравнений* (14.2), (14.3) *для $c = \infty$ в виде равномерного вращения по окружностям* $\left(\text{радиусов } r_1^0 \text{ и } r_2^0 = \dfrac{r_1^0 m_1}{m_2}\right)$ в следующем смысле.

Для всякого набора комплекснозначных постоянных $\{\beta_{j,0}, \ldots, \beta_{j,7}; \varkappa_{j,0}, \ldots, \varkappa_{j,7}\}$, $j = 1, 2$, можно указать такой набор комплекснозначных постоянных $\{\hat\beta_{j,0}, \ldots, \hat\beta_{j,7}; \hat\varkappa_{j,0}, \ldots, \hat\varkappa_{j,7}\}$, $j = 1, 2$, что для общих решений $\delta r_j(t)$, $\delta\varphi_j(t)$ и $\delta\hat r_j(t)$, $\delta\hat\varphi_j(t)$, $j = 1, 2$, соответствующих уравнений первого приближения, составленных по формулам (14.42), (14.43) и (14.46), (14.47), на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ справедливо

$$|\delta r_j(t) - \widehat{\delta r_j}(t)| \leqslant M_j e^{C_1 t}, \tag{14.48}$$

$$|\delta\varphi_j(t) - \widehat{\delta\varphi_j}(t)| \leqslant N_j e^{C_1 t}, \quad j = 1, 2, \ldots, 8, \tag{14.49}$$

$$t \in [t_0, t_0 + T], \quad T > 0,$$

где постоянные M_j и N_j, не зависящие от t,— те же, что и в соответствующих формулах (14.44), а постоянная C_1 дается при $\frac{1}{c} \ll 1$ формулой (14.38).

Рассмотрим теперь второй случай. А именно когда вследствие некоторого малого изменения начальных данных решение $X_i^0(t)$ системы уравнений (14.2), (14.3) из класса (k, ε), $k \gg 1$, принадлежащее семейству решений, наиболее близких к круговым орбитам $\left(\text{радиусов } r_1^0 \text{ и } r_2^0 = \dfrac{r_1^0 m_1}{m_2}\right)$, отклонилось на величину $\delta X_i(t)$ такую, что

$$\frac{v_{\max}}{c} \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{8} |X_i^0(t) - [X_i^0(t)]_{c=\infty}|^2} \gg |\delta\vec{X}(t)|, \quad t \in [t_0 - \sigma, t_0 + T_1],$$
$$0 < T_1 \leqslant T. \tag{14.50}$$

Для того чтобы изучить развитие во времени этого малого отклонения $\delta X_i(t)$ (и тем самым исследовать устойчивость решения $X_i^0(t)$ системы уравнений (14.2), (14.3) для начальных отклонений вида (14.50)), удобно, как и в первом случае, исследовать устойчивость тривиального решения системы уравнений первого приближения для отклонения (14.50), получаемого из системы уравнений (14.2), (14.3).

В качестве уравнений первого приближения на конечном интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T_1]$, $0 < T_1 \leqslant T$, получаем для данного случая, очевидно, систему уравнений (14.8а) — (14.8г).

Общее решение этой системы уравнений, согласно лемме 14.1, имеет вид (14.24), (14.25), (14.19). Из последних формул видно, что при соответствующих начальных данных $y_1(0), \ldots, y_8(0)$ это решение может представлять собой осциллирующую с ростом t функцию с достаточно быстро растущей амплитудой осцилляций. Тем самым интервал $t \in [t_0, t_0 + T_1]$, на котором обеспечивается условие

$$\sup_{t\in[t_0,t_0+T_1]} |\vec{X}^0(t) - [\vec{X}^0(t)]_{c=\infty}| \gg \sup_{t\in[t_0,t_0+T_1]} |\delta X(t)|, \qquad (14.51)$$

для таких решений может быть достаточно малым и соответствующее отклонение $\delta X_i(t)$ от решения $X_i^0(t)$ системы уравнений (14.2), (14.3) при дальнейшем росте $t > t_0 + T_1$ станет следующего порядка:

$$|\vec{X}^0(t)| \gg |\delta\vec{X}(t)| \gg \frac{v_{\max}}{c}, \quad t > t_0 + T_1. \qquad (14.52)$$

Замечание 14.8. При реализации соотношения (14.52) снова приходим к первому случаю (14.27), рассмотренному в начале § 14, п. 14.2. Но согласно изложенному выше и замечанию 14.7 получаем, что и в случае начальных отклонений вида (14.50) устойчивость по первому приближению решения $X^0(t)$ системы (14.2), (14.3), наиболее близкого к круговым орбитам радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, на конечном интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ будет не хуже, чем устойчивость по первому приближению решения в виде равномерного вращения по окружностям тех же радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ системы уравнений ньютоновской механики (получаемых из системы (14.2), (14.3) при $c = \infty$).

Таким образом, в общем случае справедлива следующая теорема, вытекающая из лемм 14.1, 14.2 и замечаний 14.6—14.8.

Теорема 14.1. *Устойчивость по первому приближению решения системы уравнений* (14.2), (14.3), *наиболее близкого к двум круговым орбитам радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, *на конечном интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, *не хуже, чем устойчивость по первому приближению на конечном интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *решения системы уравнений* (14.2), (14.3) *для* $c = \infty$ *в виде равномерного вращения по окружностям радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ *в следующем смысле.*

Для всякого отклонения $\delta X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, *от решения* $X_i^0(t)$, *наиболее близкого к двум круговым орбитам радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, *системы уравнений* (14.2), (14.3) *можно указать такое отклонение* $\delta\hat{X}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, *от решения системы* (14.2), (14.3) *для* $c = \infty$ *в виде двух круговых орбит тех же радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, *для которых на конечном интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *справедливо по первому приближению*

$$|\delta X_i(t) - \delta\hat{X}_i(t)| < Q_i e^{C_1 t}, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \qquad i = 1, 2, \ldots, 8,$$

где постоянные Q_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, *не зависят от* t, *а постоянная* C_1 *дается для достаточно малых* $\frac{\omega(r_1^0+r_2^0)}{c}$ *формулой* (14.38).

Установленный в теореме 14.1 факт о том, что устойчивость по первому приближению релятивистских орбит задачи двух тел, наиболее близких к круговым, для уравнений (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) с $N = 2$ не хуже, чем устойчивость на конечном интервале времени соответствующих круговых орбит (разновидность кеплеровых орбит небесной механики) задачи двух тел механики Ньютона, имеет важное принципиальное значение.

Действительно, этот факт показывает, что уравнения движения N умеренно релятивистских тел (13.30а) — (13.30в), (13.31), (13.32) *вполне пригодны в качестве релятивистского обобщения уравнений движения механики Ньютона*; эти уравнения были получены в главе II как *вытекающие из уравнений общей теории относительности, и они учитывают конечность скорости гравитационного взаимодействия* N *тел.*

Результаты главы II показывают, что уравнения общей теории относительности действительно содержат в себе уравнения механики Ньютона в качестве нулевого, наиболее грубого, приближения. Более тонкий анализ, проведенный в главе II, показывает, что уравнения общей теории относительности содержат *релятивистское обобщение ньютонового закона всемирного тяготения,* учитывающее конечность скорости передачи гравитации, причем это обобщение ньютонового закона всемирного тяготения полностью согласуется с принципом макропричинности и, согласно теореме 14.1, обеспечивает такие свойства устойчивости кеплеровых орбит задачи двух тел небесной механики, которые вполне согласуются с данными астрономических наблюдений.

Таким образом, полученные в главе II уравнения движения N умеренно релятивистских тяготеющих тел качественно и количественно правильно описывают динамику тел релятивистской небесной механики и свободны от главной, принципиальной трудности классической небесной механики Ньютона, заключающейся в предположении бесконечной скорости распространения гравитационного взаимодействия.

§ 15. Теорема единственности решения волнового уравнения

Докажем, следуя близко В. А. Фоку, теорему 10.1, приведенную выше, в § 10, без доказательства *.

Пусть D — открытая связная область в R^3, ограниченная по-

---

* Из условия 4) теоремы 10.1 вытекает условие излучения В. А. Фока (формула (92.07), § 92 книги [196]):

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\partial(rf)}{\partial r}+\frac{\partial(rf)}{\partial x^0}\right\}=0, \qquad (15.9)$$

верхностью S. Тогда всякая функция $f(x^0, \vec{x})$, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{D} = D \cup S$ и удовлетворяющая при всех $x \in R^4$ волновому уравнению $\Box f(x^0, \vec{x}) = 0$ при всех $x^0 \in R^1$, может быть представлена по формуле Кирхгофа в виде интеграла по поверхности S:

$$f(x^0, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \oiint_S \left\{ \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} \cdot \frac{\partial f(\xi^0, \vec{\xi})}{\partial n} + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} \cdot \frac{\partial f(\xi^0, \vec{\xi})}{\partial n} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial |\vec{x} - \vec{\xi}|}{\partial n} - f(\xi^0, \vec{\xi}) \frac{\partial \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} \right)}{\partial n} \right\}_{\xi^0 = x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|} dS, \qquad (15.1)$$

где $\vec{\xi}$ — текущая точка поверхности S, через $\frac{\partial F}{\partial n}$ обозначена производная по внешней нормали к поверхности S от функции $F(\xi^0, \vec{\xi})$:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha} \cos(n\xi^\alpha), \qquad (15.2)$$

а $\cos(n\xi^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности в точке $\vec{\xi}$.

В силу условий 1), 2) теоремы для функции $f(x^0, \vec{x})$ справедлива формула (15.1).

Возьмем в качестве поверхности S сферу радиуса $|\vec{x} - \vec{\xi}|$ с центром в некоторой точке $\vec{x}$. При этом получим

$$dS = |\vec{x} - \vec{\xi}|^2 \, d\Omega, \qquad (15.3)$$

$$\cos(n\xi^\alpha) = \frac{\xi^\alpha - x^\alpha}{|\vec{\xi} - \vec{x}|}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (15.4)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Для такого выбора поверхности S

$$\frac{\partial |\vec{x} - \vec{\xi}|}{\partial n} = 1,$$

а поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial |\vec{x} - \vec{\xi}|}. \qquad (15.5)$$

как это будет показано ниже (см. формулу (15.9)). Условие 4) имеет наглядный физический смысл и состоит в требовании, чтобы при всех x^0 при достаточно большом удалении r от области, занятой веществом, решение волнового уравнения принимало асимптотический при $r \to \infty$ вид расходящейся сферической волны, приходящей из области, где сосредоточено вещество, и имеющей амплитуду, убывающую как $\frac{1}{r}$.

С учетом (15.3) — (15.5) получаем в обозначениях $|\vec{x}-\vec{\xi}\,| \equiv R$

$$f(x^0,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{R=\mathrm{const}} \left\{\frac{\partial[Rf(\xi^0,\vec{\xi})]}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial\xi^0}[Rf(\xi^0,\vec{\xi})]\right\}_{\xi^0=x^0-R} d\Omega. \quad (15.6)$$

Выражение под знаком интеграла может быть представлено в виде

$$\left[\frac{\partial(Rf(\xi^0,\vec{\xi}))}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial\xi^0}(Rf(\xi^0,\vec{\xi}))\right]_{\xi^0=x^0-R} =$$

$$= \left[f(\xi^0,\vec{\xi}) + \sum_{\alpha=1}^{3}(\xi^\alpha - x^\alpha)\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^\alpha} + R\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^0}\right]_{\xi^0=x^0-R} =$$

$$= f(x^0-R,\vec{\xi}) + f_1 + f_2 + f_3,$$

где

$$f_1(x^0,\vec{x},\vec{\xi}) \equiv \left[\sum_{\alpha=1}^{3}\xi^\alpha\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^\alpha} + |\vec{\xi}|\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^0}\right]_{\xi^0=x^0-R},$$

$$f_2(x^0,\vec{x},\vec{\xi}) \equiv -\left[\sum_{\alpha=1}^{3}x^\alpha\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^\alpha}\right]_{\xi^0=x^0-R},$$

$$f_3(x^0,\vec{x},\vec{\xi}) \equiv (|\vec{x}-\vec{\xi}|-|\vec{\xi}|)\left[\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^0}\right]_{\xi^0=x^0-R}.$$

Поскольку

$$||\vec{x}-\vec{\xi}|-|\vec{\xi}|| \leqslant |\vec{x}|,$$

то в силу условий 3в), 4) теоремы получаем при всяком фиксированном $(x^0, \vec{x})$

$$|f_2| < \frac{|\vec{x}|}{|\vec{\xi}|}B_1, \quad |f_3| < \frac{|\vec{x}|}{|\vec{\xi}|}B_2, \; |\vec{\xi}| \to \infty. \quad (15.7)$$

Вычислим величину

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\xi^\alpha\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^\alpha} + |\vec{\xi}|\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^0}$$

при $|\vec{\xi}| \to \infty$. В силу условий теоремы получаем для $\forall\xi^0 \in R^1$

$$\lim_{|\vec{\xi}|\to\infty}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\xi^\alpha\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^\alpha} + |\vec{\xi}|\frac{\partial f(\xi^0,\vec{\xi})}{\partial\xi^0}\right] =$$

$$= \lim_{|\vec{\xi}|\to\infty}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\xi^\alpha}{|\vec{\xi}|}\cdot\frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\vec{n}_\xi)}{\partial\xi^\alpha} + \frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\vec{n}_\xi)}{\partial\xi^0} -\right.$$

$$\left. - \frac{\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\vec{n}_\xi)}{|\vec{\xi}|}\right] = \lim_{|\vec{\xi}|\to\infty}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3}\xi^\alpha\left[-\frac{\xi^\alpha}{|\vec{\xi}|^3}\cdot\frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\vec{n}_\xi)}{\partial\xi^0} + \right.\right.$$

$$+\frac{\delta^{\alpha\beta}}{|\vec{\xi}|^2}\cdot\frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\ \vec{n}_\xi)}{\partial n_\xi^\beta}-\frac{\xi^\alpha\xi^\beta}{|\vec{\xi}|^4}\cdot\frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\ \vec{n}_\xi)}{\partial n_\xi^\beta}\Bigg]-$$

$$\left.-\frac{\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\ \vec{n}_\xi)}{|\vec{\xi}|}+\frac{\partial\psi(\xi^0-|\vec{\xi}|,\vec{n}_\xi)}{\partial\xi^0}\right\}=0,\quad n_\xi^\alpha\equiv\frac{\xi^\alpha}{|\vec{\xi}|}.$$

Поскольку последний результат в силу условия 4) справедлив при $\forall\xi^0\in R^1$, то

$$\lim_{|\vec{\xi}|\to\infty} f_1(x^0,\ \vec{x},\ \vec{\xi})=0 \tag{15.8}$$

для любого фиксированного $(x^0,\ \vec{x})\in R^4$.

Далее, для того чтобы $f\ (x^0,\ \vec{x})$ была равна нулю в точке $(x^0,\ \vec{x})$, достаточно, чтобы при $R\equiv|\vec{x}-\vec{\xi}|\to\infty$ выражение под знаком интеграла в (15.6) стремилось к нулю, т. е. достаточно, чтобы

$$|f(x^0-R,\ \vec{\xi})+f_1+f_2+f_3|\to 0, \tag{15.9}$$

$$R\equiv|\vec{x}-\vec{\xi}|\to\infty.$$

Но из условия 3б) теоремы и соотношений (15.6), (15.7) получаем

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{\xi}|\to\infty} f_i(x^0,\ \vec{x},\ \vec{\xi})=0,\qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{\xi}|\to\infty} f(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}|,\ \vec{\xi})=0$$

при любом фиксированном $(x^0,\ \vec{x})\in R^4$.

Тем самым достаточное условие (15.9) выполняется. Теорема доказана.

§ 16. Общая теория относительности: экспериментальная проверка, новые идеи и перспективы

Выше были изложены основы математического аппарата общей теории относительности и исследована проблема многих тел в общей теории относительности. Вопросы экспериментальной проверки общей теории относительности, которых мы пока почти не касались, а также очерк состояния иных аспектов общей теории относительности и смежных с нею разделов теоретической физики будет дан в этом параграфе.

Общая теория относительности, основы которой были созданы А. Эйнштейном в период с 1905 по 1915 г., представляет собой теорию, чьи законы, по признанию большинства исследователей, являются наиболее стройными и красивыми из всех современных законов физики. Эта теория является релятивистской теорией тяготения и утверждает, что тяготение есть проявление кривизны пространства — времени. После 1905 г. выдвигался ряд других релятивистских теорий тяготения, как правило, менее простых и привлекательных, чем общая теория относительности. Большинство из них были опровергнуты экспериментально. Вместе с этим существуют некоторые другие релятивистские теории тяготения, конкурирующие с общей теорией относительности, и так же, как и она, совместимые на сегодня со всеми экспериментальными проверками.

Основным конкурентом является скалярно-тензорная теория, созданная К. Брансом и Р. Дикке [62, 218, 224]. Если в общей теории относительности гравитационная сила полностью обусловлена кривизной пространства — времени, то в теории Бранса — Дикке гравитационная сила обусловлена двумя факторами: кривизной пространства — времени и дополнительным гипотетическим скалярным полем. Отношение гравитации, производимой кривизной, к гравитации, производимой скалярным полем, Бранс и Дикке обозначают буквой ω. Если ω бесконечна, то теория Бранса — Дикке переходит в общую теорию относительности, однако при конечной ω эти теории не совпадают. Эксперименты в последние годы систематически улучшают совпадение с предсказаниями общей теории относительности и оставляют все меньше места для возможной примеси скалярного взаимодействия: значение величины ω для согласования с опытом надо брать довольно большим и таким, чтобы кривизна пространства — времени обуславливала около 85% гравитационной силы, тогда как скалярному взаимодействию приписывается не более 15% всей гравитационной силы.

Ниже, во-первых, укажем известные эксперименты, в которых можно осуществить проверку некоторых важных теоретических предсказаний общей теории относительности. Во-вторых, отметим ряд косвенных подтверждений общей теории относительности как теории, претендующей на достаточно адекватное отображение реального физического мира. И, в-третьих, изложим ряд новых идей в общей теории относительности, относящихся к фундаментальным проблемам теории гравитации, физики элементарных частиц, астрофизики и космологии.

16.1. Прямая экспериментальная проверка предсказаний общей теории относительности. Опытная проверка частной формы общей теории относительности — специальной теории относительности — производилась неоднократно и вполне успешно. Все предпосылки специальной теории относительности — постоянство скорости света (опыты Майкельсона), зависимость массы от скорости, дефект массы и его связь с энергией системы (на примере массы ядер атомов), замедление времени при быстром движении (на примере распада элементарных частиц) — подтверждены опытом. Специальная теория относительности вошла в практику инженерных расчетов, и в правильности этой теории (в известной области значения параметров), по-видимому, никаких сомнений нет [21, 98, 175].

Вместе с этим количество экспериментов по проверке такой, казалось бы, всеобъемлющей теории, как общая теория относительности, пока невелико. Причина, по-видимому, прежде всего в том, что для проверки выводов, которые эта теория делает в отношении поддающихся наблюдению явлений, требуется чрезвычайно высокая точность измерений.

Перечислим те эксперименты, где точность современных измерительных средств оказывается достаточной, чтобы обнаружить эти эффекты.

1. Прецезионные эксперименты по проверке эквивалентности гравитационной и инертной масс, необходимые для обоснования всякой теории гравитации.

2. Релятивистское вращение перигелия (ближайшей к Солнцу точки на орбите) Меркурия.

3. Искривление лучей света, проходящих вблизи массивной звезды.

4. Красное смещение спектральных линий, если они испускаются при двух различных значениях гравитационного потенциала.

5. Опыт Шапиро: зависимость скорости распространения электромагнитных волн от величины гравитационного потенциала вдоль луча.

Обсудим, к каким результатам привели эти экспериментальные проверки предсказаний общей теории относительности.

1. Общая теория относительности существенно базируется на так называемом (слабом) принципе эквивалентности, состоящем в утверждении одинаковости ускорений, сообщаемых разным телам. Иначе этот принцип формулируется как принцип строгой пропорциональности инертной и гравитационной масс. Последняя формулировка особенности действия поля гравитации на различные тела эквивалентна предыдущей. Действительно, если в уравнениях движения тела в поле тяжести

$$m_{\text{и}} \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m_{\text{г}}\vec{\nabla}U$$

для любых тел инерционная масса $m_{\text{и}}$ пропорциональна гравитационной $m_{\text{г}}$:

$$m_{\text{и}} = \alpha m_{\text{г}},$$

то масса справа и слева сокращается, и мы приходим к закону движения, в который масса *не входит вообще*.

Равенство инертной и гравитационной масс измерялось с высокой точностью. При выборе единиц измерения, для которых $\alpha = 1$, в классических опытах Р. Этвеша [234] было получено, что $m_{\text{и}} = m_{\text{г}}$ с точностью до 10^{-7}. Эти эксперименты затем были повторены Р. Дикке [225], что позволило повысить точность до 10^{-11} и, наконец, В. Б. Брагинским и В. И. Пановым [23], получившими значение

$$\frac{m_{\text{и}}}{m_{\text{г}}} = 1 \pm 10^{-12}.$$

Таким образом, слабый принцип эквивалентности выполняется экспериментально с точностью до 10^{-12}. Из слабого принципа эквивалентности вытекает, что всякое материальное тело, на которое действуют лишь гравитационные силы, движется по пространственно-временной траектории, не зависящей от массы тела, но зависящей лишь от гравитационного потенциала вдоль траектории. Мы видели в § 5, что в общей теории относительности такими траекториями являются геодезические.

2. Второй, третий и четвертый из указанных эффектов общей теории относительности, поддающихся наблюдению, были теоретически предсказаны А. Эйнштейном и носят название «трех знаменитых эффектов» общей теории относительности.

Таблица 16.1

	Эксперимент	Теория (формула (9.23))
Меркурий	42,56±0,91	42,9
Венера	8,4±4,8	8,6
Земля	4,6±2,7	3,84
Марс	—	1,35

Расчет эффекта вращения перигелия орбиты пробного тела в поле массивного центра в общей теории относительности был дан выше в § 9.

Простейший расчет двух других «знаменитых эффектов», основанный на общей теории относительности, можно найти в любом учебнике по общей теории относительности (см., например, [98, 196, 34, 167, 19]).

Используя формулу (9.23) для расчета предсказываемого общей теорией относительности вращения перигелия Меркурия, получаем $\Delta\varphi_т = 42{,}9\ \frac{угл.\ сек}{столетие}$, тогда как из эксперимента получаем следующее значение:

$$\Delta\varphi_э = (42{,}56 \pm 0{,}91)\ \frac{угл.\ сек}{столетие}.$$

Для других планет солнечной системы соответствующие теоретические предсказания для $\Delta\varphi$ (основанные на формуле (9.23)) и экспериментальные данные приведены в помещенной выше табл. 16.1, взятой из работы М. Тонелла [179]. Все данные в этой таблице приведены в единицах $\frac{угл.\ сек}{столетие}$.

3. Расчет третьего из указанных эффектов, а именно расчет отклонения луча света, идущего от далекой звезды и проходящего вблизи Солнца, дает для угла отклонения от прямой следующее значение (см., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [98]):

$$\Delta\alpha_т = 1{,}761'',$$

тогда как по последним экспериментальным данным, согласно работе Г. Силстада, Р. Срамека и К. Уилера [287], получено значение

$$\Delta\alpha_э = (1{,}77 \pm 0{,}20)''.$$

Здесь точность измерений не позволяет сделать выбор между общей теорией относительности и теорией Бранса — Дикке.

4. Четвертый эффект общей теории относительности, состоящий в изменении частоты электромагнитного излучения из-за различия между гравитационными потенциалами при испускании и при поглощении сигнала, также поддается экспериментальной проверке.

Отношение измеренного экспериментального сдвига частоты $\Delta\nu_э$ к расчетному сдвигу частоты $\Delta\nu_т$ для линии поглощения натрия в фотосфере Солнца, согласно данным работы Бролта [219], составил

$$\frac{\Delta\nu_э}{\Delta\nu_т} = 1{,}05 \pm 0{,}05.$$

Использование эффекта Мессбауэра для измерения соответствующего отношения сдвига частоты γ-излучения изотопа железа в гравитационном поле Земли, убывающем с высотой, согласно данным Р. Паунд и Г. Ребка [273], дало следующий результат:

$$\frac{\Delta\nu_э}{\Delta\nu_т} = 1{,}05 \pm 0{,}10.$$

5. Согласно общей теории относительности, скорость света зависит от величины гравитационного потенциала вдоль луча. Шапиро предложил следующий эксперимент по проверке этого следствия теории.

Если в тот момент, когда Солнце находится между Землей и Венерой (либо Меркурием) и эти три небесных тела находятся практически на одной прямой, произвести радиолокацию поверхности одной из указанных планет с Земли, то электромагнитный луч (помимо слабого эффекта отклонения от прямой) замедлится из-за большого гравитационного поля Солнца на величину порядка $2 \cdot 10^{-4}$ *сек*, что вполне доступно измерению современными средствами. Теория этого эффекта изложена в работах И. Шапиро [290] и Г. Мак-Витти [266]. Этот эксперимент проводился в 1966—1967 г. И. Шапиро и сотрудниками [289] для Меркурия и для Венеры. Согласно полученным данным предсказания теории подтвердились с точностью до 20%. По методике Шапиро были обработаны данные по наблюдению за искусственными спутниками «Маринер-6» и «Маринер-7» (отчеты NASA *, ноябрь 1970 г.), что позволило вычислить эффект, согласующийся с предсказаниями общей теории относительности с точностью до 2%.

Таким образом, все имеющиеся экспериментальные данные, относящиеся к проверке наблюдаемых следствий общей теории относительности, подтверждают в рамках погрешности опыта эту теорию, как достаточно адекватную физическому миру.

---

* NASA (National Asademy of Sciense, astronautics) — Национальная академия наук США, секция астронавтики.

16.2. Косвенные подтверждения общей теории относительности. Ниже перечислим те следствия из общей теории относительности, которые показывают диапазон применимости этой теории и объясняют многие новые физические явления, для описания которых была бессильна предшествовавшая ей ньютоновская теория гравитации в евклидовом плоском пространстве. В число таких следствий включим также те, которые показывают преемственность общей теории относительности в отношении правильного описания всех тех явлений, которые верно описывались в старой теории Ньютона. Вот эти следствия из общей теории относительности.

1. Уравнения общей теории относительности в нерелятивистском пределе $c \to \infty$ содержат все многообразие решений механики Ньютона. В этом мы убедились в § 12, где уравнения движения задачи N тел (12.50) в пределе $c \to \infty$ превратились в уравнения (12.51) механики Ньютона.

2. Уравнения общей теории относительности при наличии электромагнитного поля в нерелятивистском пределе $c \to \infty$ содержат все многообразие решений нерелятивистской электродинамики. В этом мы убедимся в § 17, где уравнения движения N электрически заряженных тяготеющих тел (17.68) в пределе $c \to \infty$ превращаются в уравнения (17.71) нерелятивистской электродинамики.

3. Устойчивость круговых орбит релятивистской задачи двух тяготеющих тел с учетом конечности скорости распространения гравитации. Это нами было продемонстрировано в § 14.

4. Устойчивость круговых орбит релятивистской задачи двух электрически заряженных тел с учетом конечности скорости света, что будет продемонстрировано нами в § 18.

5. Общая теория относительности открывает новые пути подхода к решению вопросов, связанных со свойствами мира в космических масштабах. Эти возможности связаны с неевклидовостью пространства — времени в общей теории относительности.

В плоском евклидовом пространстве ньютоновской механики можно быстро придти к абсурдным результатам при попытке описать бесконечное пространство, заполненное равномерно веществом, так как ньютонов потенциал от такого распределения масс в плоском евклидовом пространстве обращается в каждой точке в бесконечность (парадокс Зеелигера).

В общей теории относительности можно указать такие точные решения, которые, во-первых, приводят к неевклидовому пространству, во-вторых, применимы в принципе к огромным масштабам пространства — времени, в-третьих, снимают противоречия, свойственные механике Ньютона в евклидовом пространстве и, в-четвертых, приводят к теоретическим предсказаниям о поведении видимой части Вселенной, полностью согласующимся с результатами астрономических наблюдений.

Астрономические данные показывают, что распределение галактик в доступном наблюдению мировом пространстве, вплоть до расстояний в несколько миллиардов световых лет, в среднем равномерно.

А. А. Фридманом [240, 196, 98, 19] было найдено точное решение уравнений поля Эйнштейна, соответствующее изотропному пространству с равномерной плотностью масс. Оно может быть взято в качестве фона при рассмотрении огромных областей пространства, включающих в себя много галактик. Пространственно-временное многообразие, метрика g^{ik} которого дается решением Фридмана, называется *пространством Фридмана — Лобачевского,* либо *миром Фридмана.* Это — пространство постоянной отрицательной кривизны *(открытая изотропная модель)* либо пространство постоянной положительной кривизны *(закрытая изотропная модель).*

Для мира Фридмана наблюдатель, находящийся в любой пространственной точке, будет видеть разбегание далеких галактик (тем большее, чем дальше галактика), что проявляется в красном смещении спектральных линий излучения этих галактик. Мир Фридмана может расширяться бесконечно долго (открытая изотропная модель) либо сначала расширяться, а затем сжиматься (закрытая изотропная модель). Расширение либо расширение — сжатие будет наблюдаться в любой точке мира Фридмана — такова интересная особенность этого решения уравнений общей теории относительности.

Наиболее замечательно для решения Фридмана то, что явление красного смещения в спектрах галактик было обнаружено экспериментально Хабблом для всех далеких галактик [249, 19, 73]! Причем оказалось, что все линии в спектрах галактик смещены в красную сторону, и это смещение тем больше, чем дальше от нас галактика. Если исходить из гипотезы, что наблюдаемая нами часть Вселенной описывается решением Фридмана, то получим космологическую модель, согласованную с данными астрономических наблюдений. Согласно этой модели, наша Вселенная сейчас расширяется во все стороны изотропно. Величина смещения частоты спектральной линии $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ (допплеровское красное смещение) для решения Фридмана принимает вид

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \mathcal{R}\frac{h}{c}, \tag{16.1}$$

где $\mathcal{R}$ — расстояние от излучающего объекта до наблюдателя.

Постоянную h (называемую постоянной Хаббла) можно определить по астрономическим данным о величине красного смещения для тех астрономических объектов, расстояние до которых известно с достаточной точностью. Оказывается, по данным фотометрических наблюдений для многих таких объектов получается величина, постоянная в широких пределах изменения величины $\mathcal{R}$ и равная

$$h \cong 2 \cdot 10^{-18}\ сек^{-1}. \tag{16.2}$$

Таким образом, из формул (16.1), (16.2) в рамках рассматриваемой модели Вселенной можно вычислить расстояние $\mathcal{R}$ до любого видимого объекта, если использовать данные о красном смещении его линий спектра. Отметим, что указанная модель Вселенной Фридмана является практически общепринятой в астрономии.

16.3. Новые идеи и перспективы общей теории относительности. Укажем сначала те направления, в которых ведутся поиски новых экспериментальных подтверждений общей теории относительности.

1. *Экспериментальный поиск гравитационных волн.* Из уравнений общей теории относительности для поля, создаваемого движущимися материальными телами, в приближении слабого поля получается волновое уравнение с источником [208, 98, 34, 70], откуда вытекает теоретическое указание на существование поперечных гравитационных волн, аналогичных поперечным электромагнитным волнам и распространяющихся со скоростью, близкой к скорости света. Дж. Вебером [306, 307, 35] был опубликован ряд сообщений об экспериментальной регистрации какого-то направленного излучения, интерпретируемого им как гравитационное излучение ядра нашей Галактики. Чтобы объяснить это излучение, необходимо было бы предположить существование каких-то катастрофических процессов, происходящих в ядре Галактики и связанных с релятивистским движением масс порядка 10^{10} солнечных масс. Расчет показывает, что если бы такие катастрофические процессы действительно происходили, то они сопровождались бы не менее мощным излучением в рентгеновском диапазоне электромагнитных волн. В работах В. Чармана и др. [221] сообщается о попытках наблюдений всплесков радиоизлучения из центра Галактики. Результат этих наблюдений отрицателен: мощность регистрируемого радиоизлучения на 19 порядков ниже, чем в опытах Дж. Вебера. Такие отрицательные результаты легли в основу критического отношения к интерпретации Дж. Вебером регистрируемого им излучения в качестве гравитационных волн.

Однако проблема экспериментального обнаружения гравитационных волн, теоретически предсказываемых в общей теории относительности, остается по-прежнему актуальной [34, 24, 25, 70].

2. *Попытки измерения не обнаруженного до сих пор общерелятивистского эффекта типа процессии Лензе — Тирринга для гироскопа в гравитационном поле вращающейся Земли* [98, 54]. Этот эффект, согласно расчетам, составляет около $0{,}4\ \frac{\textit{угл. сек}}{\textit{год}}$.

3. *Наблюдения за новыми объектами астрофизики — квазарами и пульсарами, которые являются по всем признакам существенно релятивистскими объектами* [51, 72, 73, 180]. Весьма перспективны методы рентгеновской астрономии в этой связи. Уже обнаружено более 120 источников сильного рентгеновского излучения во Вселенной, из которых по крайней мере один является нейтронной звездой, один — квазаром и один, по предположению,— «черной дырой» [285].

Для создания теоретических моделей этих объектов несомненно необходимо будет привлечь общую теорию относительности.

4. *Повышение точности радиоастрономических наблюдений* (до 10 *м*) *и привлечение лазерной техники* позволит значительно точнее проверить «три знаменитых эффекта» общей теории относительности, описанных выше в § 16, п. 16.1 [180]. В частности, можно будет сделать окончательный вывод о пригодности теории Бранса — Дикке.

5. *Изучение нестационарных объектов во Вселенной типа распада и рассеяния звездных ассоциаций, взрывов сверхновых звезд, постоянного рождения молодых звезд в различных частях Вселенной.* Систематический теоретический анализ и обработка данных наблюдений, проведенные В. А. Амбарцумяном [3, 4, 5], показывают, что наша Галактика, в противоположность общепринятым ранее представлениям, является системой, в которой происходят бурные и подчас весьма быстрые изменения. Для описания столь бурных релятивистских изменений в нашей Галактике, по-видимому, существенно необходимо привлечение общей теории относительности.

Перечислим теперь некоторые фундаментальные проблемы общей теории относительности, относящиеся к принципиальным вопросам теоретической физики.

1°. Открытие квазизвездных источников (квазаров) в 1963 г. породило революцию во взглядах астрономов. Вселенная оказалась мощнее, чем думали раньше. До сих пор неясно, какова природа излучения энергии огромной мощности у квазаров. Трудно поверить, что необходимую фантастически большую мощность может дать ядерное деление или ядерный синтез, играющий доминирующую роль в обычных звездах типа Солнца. Есть два более мощных источника — аннигиляция материи и антиматерии и гравитационный коллапс (катастрофическое сжатие тела под действием сил соответственного тяготения).

Если на ранних стадиях гравитационный коллапс вполне описывался ньютоновской теорией, то на поздних критических стадиях сжатия релятивистские эффекты становились преобладающими и ньютоновская теория не годилась. Теоретические расчеты, основанные на общей теории относительности Эйнштейна, помогли проанализировать процесс гравитационного коллапса [185, 186, 73]. Теория предсказала: когда коллапсирующий объект достигнет своего гравитационного радиуса (равного 3 *км* для Солнца и миллиардам километров — для квазара), он как бы исчезнет во Вселенной, оставляя за собой в пространстве гравитирующую «черную дыру», поскольку огромное поле тяготения не выпускает излучение. Впоследствии материя может падать в «черную дыру», увеличивая ее гравитационное воздействие на другие тела, однако выйти назад уже не может. Реальное существование «черных дыр» во Вселенной пока не установлено однозначно астрономическими наблюдениями [73, 180, 285].

2°. Аномально большая наблюдаемая величина красного смещения света квазаров не получила пока однозначного объяснения. Если, что наиболее вероятно, красное смещение — космологическое по происхождению, т. е. вызвано расширением Вселенной (см. п. 16.2, модель Вселенной по Фридману), то квазары находятся в десять раз дальше, чем самые далекие из наблюдаемых галактик. Вместе с тем аномальное красное смещение может оказаться гравитационным по происхождению, т. е. вызванным интенсивными гравитационными полями квазаров, либо аномальное красное смещение может оказаться допплеровским по происхождению, т. е. вызванным тем, что квазары выброшены со скоростями, близкими к скорости света, из внутренних областей ближайших галактик. В любом случае имеем существенно релятивистский объект, к которому не применима ньютоновская теория [73, 19, 180]. Возможно, для теоретического описания таких объектов понадобится использовать решения общей теории относительности, не являющиеся непрерывными по параметру $\beta = \frac{v_{\max}}{c}$, в отличие от решений, рассмотренных в главах I—III настоящей монографии.

3°. Сверхмассивные звезды, релятивистские звездные скопления и «черные дыры», изученные теоретиками в связи с квазарами, могут играть существенную роль в ядрах галактик. Астрономам известны галактики, в которых сильные взрывы могут происходить почти каждый день. Причины взрывов пока не известны. Здесь необходим глубокий теоретический анализ имеющихся данных наблюдений на основе общей теории относительности [185, 180, 154].

4°. Принципиально важным вопросом теоретической физики является вопрос о поздних стадиях эволюции сверхмассивных небесных тел (после того, как в них выгорает все ядерное горючее). Этот вопрос возникает в следующем аспекте. Проследим, что будет с системой, состоящей из A нуклонов, на которые действуют гравитационные силы, если рассматривать системы с очень большим числом A [186, 73, 87].

Если твердое тело имеет число нуклонов $A \leqslant 10^{49}$, то даже в центре такого тела гравитационное давление не может преобладать над силами связи кристаллической решетки (химические, валентные силы, обусловленные электронными связями).

Если тело имеет число нуклонов $A \sim 10^{52}$, то в центре системы гравитационное поле уже будет преобладать над валентными силами (переломная точка Чандрасекара). Электроны атомов начинают вступать в реакцию с протонами ядер, обратную β-распаду. Атомные электроны как бы «вдавливаются» в ядра.

Если еще более увеличить число нуклонов $A > A_{\text{крит}} \sim 10^{57}$, то давление в центре системы увеличится настолько, что гравитационные силы преодолеют не только валентные (химические) силы, но и ядерные (переломная точка Ландау — Оппенгеймера — Волкова). Рушится ядерное вещество. Система сжимается. Возникает проблема в области, граничащей между общей теорией относительности и физикой элементарных частиц [73, 74, 185, 186].

В двух последних случаях, пока не выгорит все ядерное горючее, звезда не будет сжиматься.

Теоретический анализ показывает, что звезды с массой, меньше 1,2 массы Солнца, после выгорания всего ядерного горючего сжимаются до размеров в несколько тысяч километров и становятся «белыми карликами», в то время как более массивные звезды могут сжаться «до размеров в 10 *км* и превратиться в нейтронные звезды» или подвергнуться релятивистскому коллапсу и исчезнуть во Вселенной, оставив после себя «черные дыры» размером в несколько километров. Согласно теоретическим представлениям, сжатие, которое образует сверхплотную нейтронную звезду или «черную дыру», может вызвать яркое оптическое проявление, которое астрономы называют «сверхновой», а также генерировать выбросы нейтрино и гравитационных волн. Эти предсказания особенно интригующи, поскольку «черные дыры» и гравитационные волны не существуют в ньютоновской теории. Если звезда, превратившаяся в нейтронную звезду в результате сжатия, обладала вращающимся моментом, то из-за вращения нейтронной звезды могут происходить периодические выбросы вещества, сопровождающиеся огромным выделением электромагнитной энергии (и видимого света). Это пульсары, открытые недавно. Теоретические рассмотрения, относящиеся к пульсарам, можно найти в обзоре В. Л. Гинзбурга [51]. Если удастся достоверно зарегистрировать гравитационные волны, то есть надежда связать их источники с сверхплотными нейтронными звездами и «черными дырами» [24, 180].

5°. Решения уравнений общей теории относительности можно использовать в качестве моделей элементарных частиц и на таком пути связать фундаментальные космологические константы со спектром масс элементарных частиц. К этим проблемам относятся работы М. А. Маркова [109, 110, 111, 263], В. А. Березина и М. А. Маркова [13], М. К. Станюковича [173, 174].

6°. Проблема квантования общей теории относительности (квантование гравитации). Несмотря на то что гравитационное поле в земных условиях в макромасштабе весьма слабое, тем не менее при изучении микроявлений «в непосредственной близости от элементарных частиц», а также вблизи сверхмассивных небесных тел гравитационные силы могут быть доминирующими над электромагнитными и даже ядерными силами. В свою очередь, в силу квантовой природы элементарных частиц, создающих также и гравитационное поле, можно прийти к аргументации существования квантовой природы гравитации, чтобы не вступать в противоречие с принципами квантовой физики, описывающей известные элементарные частицы (см. по этому поводу работы Дж. Андерсона [6] и Н. В. Мицкевича [119]). При квантовании гравитации необходимо, вообще говоря, учитывать существенную нелинейность гравитационного поля, вытекающую из существенной нелинейности уравнений общей теории относительности. В этом состоит принципиальное отличие проблемы квантования гравитации от аналогичной проблемы в электродинамике, в которой достаточно использовать методы теории возмущений [9, 18]. Современное состояние вопроса о квантовании гравитации можно найти в работах Дж. Андерсона [6], Л. Д. Фаддеева [188], Т. Киббла [86], Н. В. Мицкевича [119, 268]*.

7°. Изучение структуры пространства — времени на малых расстояниях и проблема элементарной длины. С точки зрения общей теории относительности эта проблема анализировалась в работах Р. Пенроуза [136], Дж. Уилера [309]. Уилер полагает, что происхождение свойств элементарных частиц и их разнообразие, возможно, связаны с разнообразием топологических свойств пространства — времени в малых масштабах. С иных точек зрения проблема элементарной длины и структуры прсстранства — времени малых масштабов изучалась в работах Д. И. Блохинцева [15], И. Е. Тамма [178], И. Е. Тамма и В. Д. Вологодского [177], Г. Снайдера [291], В. Г. Кадышевского [79, 80].

По-видимому, три последние проблемы следует рассматривать как взаимосвязанные, в силу глубоких физических принципов, пока не вполне ясных.

---

* См. также сборник статей «Квантовая гравитация и топология» под ред. Д. Иваненко. «Мир», М., 1973.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ N ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЯГОТЕЮЩИХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ОТКЛОНЕНИЯ АРГУМЕНТА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В предыдущей главе были рассмотрены и исследованы уравнения задачи N тел, взаимодействующих посредством чисто гравитационных полей в общей теории относительности.

В этой главе будет рассмотрен более общий случай задачи N тел, а именно будет исследована задача N тел, взаимодействующих между собой посредством электромагнитных и гравитационных полей в общей теории относительности.

Так же, как и для случая тяготеющих электрически нейтральных тел, введем в рассмотрение поток большого числа электрически заряженных частиц, обладающих массой. Для наших дальнейших целей целесообразно встать на путь макроскопического описания такого потока частиц, а поэтому в идеализированном случае этот поток заряженных частиц можно рассматривать как поток с непрерывно распределенными массой и электрическим зарядом. Такая идеализация означает *принятие модели сплошной электрически заряженной тяготеющей среды.*

§ 17. Уравнения поля и уравнения движения N тел в релятивистской электродинамике *

17.1. Исходные уравнения. В принятой модели сплошной заряженной тяготеющей среды каждая частица рассматриваемого потока описывает в пространственно-временном многообразии четырехмерную кривую (траекторию), которую будем параметризовать длиной ее дуги s, причем потребуем, чтобы каждая из четырех координат x^i (s) траектории была дважды непрерывно дифференцируемой функцией параметра s:

$$x^i = x^i(s) \in C^2(a, b), \quad (a, b) \subset (-\infty, \infty), \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{17.1}$$

---

* Содержание § 17 является более подробным изложением работы [152].

Распределение массы в потоке сплошной электрически заряженной тяготеющей среды будем характеризовать общековариантным скаляром ρ, определяемым по-прежнему как плотность массы данного элементарного объема движущейся сплошной среды, подсчитанной в системе координат x^0, x^1, x^2, x^3, относительно которой этот элементарный объем покоится (собственная система координат). Этот скаляр ρ по-прежнему будем называть *инвариантной плотностью массы*. Распределение электрического заряда в потоке сплошной заряженной тяготеющей среды будем характеризовать общековариантным скаляром σ, определяемым как плотность электрического заряда данного элементарного объема движущейся сплошной среды, подсчитанной в собственной системе координат. Этот скаляр σ назовем *инвариантной плотностью (электрического) заряда*.

Как и выше, будем рассматривать только такой поток, для которого частицы не испытывают никаких превращений, масса покоя каждой из них остается без изменения, так что суммарная масса покоя удовлетворяет закону сохранения, который запишем в виде уравнения непрерывности массы:

$$\nabla_n(\rho u^n) = 0, \qquad (17.2)$$

где $u^n = \frac{dx^n(s)}{ds}$, $n = 0, 1, 2, 3,$— контравариантный тензор, составленный для кривой (17.1) и называемый четырехмерным вектором скорости частицы.

При движении электрически заряженной среды, как известно, возникает электромагнитное поле. Это поле описывается *уравнениями Максвелла — Лоренца*, имеющими в общековариантной записи следующий вид:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0 \quad (i, j, l = 0, 1, 2, 3), \qquad (17.3)$$

$$\nabla_k F^{lk} = 4\pi\sigma u^l, \qquad (17.4)$$

где F^{lk} — дважды контравариантный тензор, антисимметричный относительно перестановок своих индексов, называемый *тензором электромагнитного поля*. Этот тензор конструируется из компонентов некоторого четырехмерного вектора A^l, называемого *вектор-потенциалом*, следующим образом:

$$F^{kl} = \frac{\partial A^l}{\partial x_k} - \frac{\partial A^k}{\partial x_l} \equiv \nabla^k A^l - \nabla^l A^k = -F^{lk}. \qquad (17.5)$$

Выбором (17.5) все уравнения (17.3), очевидно, удовлетворяются тождественно.

В макроскопической теории электромагнитного поля в среде компоненты тензора электромагнитного поля F^{kl} могут быть выражены непосредственно через *трехмерный вектор напряженности электрического поля* $\vec{E}$ в среде и через *трехмерный вектор магнитной* *индукции* $\vec{B}$ в среде следующим образом (так называемая *хронометрически инвариантная* форма записи для тензора F^{kl}):

$$E_\alpha = \frac{F_{\alpha 0}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad B_\alpha = -\frac{1}{2} E_{\alpha\beta\nu} F^{\beta\nu} \tag{17.6}$$

для ковариантных векторов и

$$E^\alpha = \frac{F^{\alpha}_{\cdot, 0}}{\sqrt{g_{00}}},$$

$$B^\alpha = -\frac{1}{2} E^{\alpha\beta\nu} \left[F_{\beta\nu} + \frac{1}{g_{00}} (F_{0\beta} g_{0\nu} - F_{0\nu} g_{0\beta}) \right] \tag{17.7}$$

$$(\alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3)$$

для контравариантных векторов, где *аксиальный тензор Леви — Чивиты трехмерного мира* $E_{\alpha\beta\nu}$ равен

$$E_{\alpha\beta\nu} = \frac{\sqrt{-g}\, \varepsilon_{0\alpha\beta\nu}}{\sqrt{g_{00}}} = a_{\alpha\beta}\ \varepsilon_{\alpha\beta\nu}, \tag{17.8}$$

$a = |\ a_{\alpha\beta}\ |$ — детерминант трехмерного метрического тензора, $a_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha}\, g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}$, а $\varepsilon_{\alpha\beta\nu}$ и ε_{ijkl} — абсолютные антисимметричные по всем индексам тензоры третьего и четвертого рангов соответственно, нормированные соотношениями $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{0123} = 1$.

При наличии одновременно электромагнитного и гравитационного полей уравнения движения бесконечно малого элемента объема сплошной тяготеющей среды имеют вид

$$\rho \frac{du_l}{ds} + \rho \Gamma_{l,ik} u^i u^k = -\frac{\sigma}{c^2} F_{lk} u^k, \tag{17.9}$$

где ρ и σ — инвариантные плотности соответственно массы и заряда для рассматриваемого элементарного объема среды. В уравнении (17.9) левая часть является общековариантным четырехмерным ускорением рассматриваемого элементарного объема среды, умноженным на инвариантную плотность массы, а правая часть является общековариантным обобщением силы Лоренца, действующей со стороны электромагнитного поля на элементарный объем заряженной среды.

Уравнения (17.3), (17.4), (17.6), (17.7), (17.8), (17.2), (17.9) являются обобщением получаемых в специальной теории относительности уравнений Максвелла — Лоренца, уравнения непрерывности и уравнений движения элементарного объема сплошной заряженной среды в электромагнитном поле на криволинейные координаты.

Покажем, что из уравнений (17.4) вытекает уравнение непрерывности для четырехмерного вектора тока зарядов $j^k = \sigma u^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, имеющее вид

$$\nabla_k (\sigma u^k) = 0 \tag{17.10}$$

и выражающее *закон сохранения электрического заряда.*

Действительно, подействуем на левую и правую части соотношения (17.4) оператором ковариантного дифференцирования ∇_l и просуммируем по l от нуля до трех. Результат, очевидно, можно записать с учетом (17.5) в следующем виде:

$$\sum_{\substack{i,k\\(i\neq k)}} (\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)\, F^{ik} = 8\pi\nabla_k(\sigma u^k). \tag{17.11}$$

Далее, с помощью правил абсолютного дифференцирования (2.24) k раз контравариантного и s раз ковариантного тензора $a^{l_1,\ldots,l_k}_{m_1,\ldots,m_s}$ можно получить следующее выражение:

$$(\nabla_p\nabla_q - \nabla_q\nabla_p)\, a^{l_1,\ldots,l_k}_{m_1,\ldots,m_s} = -\sum_{i=1}^{k} a^{l_1,\ldots,l_{i-1},n,l_{i+1},\ldots,l_k}_{m_1,\ldots,m_s} R^{l_i}_{n,pq} +$$

$$+\sum_{j=1}^{s} a^{l_1,\ldots,l_k}_{m_1,\ldots,m_{j-1},n,m_{j+1},\ldots,m_s} R^{n}_{m_j,pq}. \tag{17.12}$$

С учетом (17.12) левую часть выражения (17.11) можно записать в таком виде:

$$\sum_{\substack{i,k\\(i\neq k)}} (\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)\, F^{ik} = -\sum_{\substack{i,k\\(i\neq k)}} g^{in}R_{ns,ik}F^{sk} +$$

$$+\sum_{\substack{i,k\\(i\neq k)}} g^{kn}R_{ns,ik}F^{si} \equiv \sum_{\substack{l,s\\(l\neq s)}} g^{ls}A_{ls}.$$

Непосредственным вычислением с учетом свойств симметрии тензора кривизны

$$R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = -R_{ij,lk} = R_{kl,ij}$$

легко устанавливаем, что

$$A_{l,s} \equiv 0, \quad l,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{17.13}$$

Тем самым устанавливаем, что левая часть соотношения (17.11) равна нулю, т. е. справедливо уравнение непрерывности тока зарядов (17.10).

Метрика четырехмерного риманова пространственно-временного многообразия определяется распределением материи, т. е. определяется тензором энергии — импульса T^{ik} (включая и электромагнитное поле).

Для описания этой связи в общей теории относительности используем уравнения (гравитационного) поля Эйнштейна, полученные в § 5:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}T^{ik}, \qquad i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{17.14}$$

где тензор энергии — импульса материи, включая электромагнитное поле, должен удовлетворять условию 3° из § 5:

$$\nabla_k T^{ik} = 0, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{17.15}$$

Отметим, что уравнения электромагнитного поля (17.3) — (17.5), уравнения движения (17.9) и условие равенства нулю расходимости тензора энергии — импульса (17.15) могут быть получены из вариационного принципа минимума интеграла действия

$$S=\int\left(c^2\rho-\frac{\sigma}{c}u^kA_k+\frac{1}{16\pi}F^{ik}F_{ik}\right)\sqrt{-g}\,dx, \tag{17.16}$$

где интегрирование проводится по некоторой четырехмерной области, на границе которой все независимые вариации δA_k и δx_i исчезают.

Вычисляя вариацию δS интеграла действия (17.16) из-за произвольных вариаций δA_l вектор-потенциала, произвольных вариаций координат $\delta_1 x_i \equiv \xi_i$, связанных с вариацией начальных условий для потока среды, и произвольных вариаций координат $\delta_2 x_i \equiv \eta_i$, связанных с переходом к новой системе отсчета, получим в результате следующее выражение:

$$\delta S=-\int\left(\rho\frac{du_l}{ds}+\rho\Gamma_{l,kl}u^ku^l+\frac{\sigma}{c^2}F_{ik}u^k\right)\xi^l\sqrt{-g}\,dx+$$
$$+\int\left(-\sigma u^k+\frac{1}{4\pi}\nabla_lF^{kl}\right)\delta A_k\sqrt{-g}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\nabla_k\left(c^2\rho u^iu^k+T^{ik}_{\text{эм}}\right)\eta_i\sqrt{-g}\,dx,$$

где

$$T^{ik}_{\text{эм}}=-\frac{1}{4\pi}g_{ls}F^{il}F^{ks}+\frac{1}{16\pi}g^{ik}F_{ls}F^{ls} \tag{17.17}$$

— *тензор энергии — импульса электромагнитного поля.*

Приравнивая, согласно принципу наименьшего действия, нулю правую часть соотношения (17.17), в силу произвольности вариаций ξ^i, δA_k и η_i получаем уравнения движения (17.9), уравнения Максвелла — Лоренца (17.4) и условие

$$\nabla_k\left(c^2\rho u^iu^k+T^{ik}_{\text{эм}}\right)=0,\quad i=0,1,2,3. \tag{17.18}$$

С другой стороны, заряженная сплошная среда в электромагнитном поле для случая пылевидной материи описывается тензором энергии — импульса следующего вида:

$$T^{ik}=c^2\rho u^iu^k+T^{ik}_{\text{эм}}, \tag{17.19}$$

где $T^{ik}_{\text{эм}}$ дается выражением (17.17).

С учетом этого уравнение (17.18) можно переписать в виде (17.15). Таким образом, полученное из вариационного принципа уравнение (17.18) как раз совпадает с требованием 3°, которое согласно результатам § 5 должно выполняться в общей теории относительности, и это требование состоит в равенстве нулю расходимости тензора энергии — импульса (17.15).

Легко проверить, что условие равенства нулю тензора энергии — импульса (17.18) действительно выполняется в силу уравнений Максвелла — Лоренца (17.4), уравнений движения (17.9) и уравнения непрерывности (17.2).

Уравнения (17.9) и формулы (17.19) в отсутствии электрических зарядов ($\sigma \equiv 0$) переходят в уравнения движения (5.19) и в выражение (5.17) для тензора энергии — импульса электрически нейтральной тяготеющей сплошной среды в модели пылевидной материи, рассмотренной в предыдущей главе.

В отсутствии тяготеющих масс ($\rho \equiv 0$) тензор энергии — импульса (17.19) обращается в тензор энергии — импульса электромагнитного поля (17.17), а само электромагнитное поле при этом по-прежнему будет описываться уравнениями Максвелла — Лоренца (17.4), (17.5).

Таким образом, для описания движения потока сплошной электрически заряженной и тяготеющей среды в общей теории относительности получили систему уравнений электромагнитного поля (17.4), (17.5), уравнения гравитационного поля (17.14), уравнения движения (17.9) и уравнение непрерывности (17.2). Присоединим к этим уравнениям дополнительно так называемое условие Лоренца, записываемое в общековариантном виде следующим образом:

$$\nabla_k A^k(x) = 0. \tag{17.19a}$$

Это условие всегда накладывается для физических полей в электродинамике и позволяет устранить известную неоднозначность в выборе вектор-потенциала, связанную с так называемой градиентной инвариантностью второго рода уравнений Максвелла — Лоренца.

Необходимо найти решение системы полученных уравнений, удовлетворяющее тем или иным дополнительным условиям, вытекающим из рассматриваемой конкретной постановки задачи.

Ниже будет поставлена (и решена) задача о решении указанной системы уравнений в постановке, являющейся обобщением постановки Б и Г из § 6 на случай электрически заряженной сплошной тяготеющей среды.

17.2. Постановка задачи. Уравнения (гравитационного) поля Эйнштейна (17.14) согласно результатам § 6 можно переписать в виде системы квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка (6.1), (6.2). Если известен тензор энергии — импульса T^{ik}, то для такой системы можно поставить задачу Коши в общем виде в соответствии с определением 6.1 как задачу об отыскании решения этой системы уравнений в некоторой области $D \subset V_4$, удовлетворяющей предельным условиям на некоторой гиперповерхности $\Sigma \subset D$:

$$\begin{gathered} g_{mn}(x)\big|_{x\in\Sigma} = \varphi_{mn}(u), \qquad u \in \Sigma \subset D, \\ \left.\frac{\partial g_{mn}(x)}{\partial n}\right|_{x\in\Sigma} = \varphi_{mn}(u), \end{gathered} \tag{17.20}$$

где $\frac{\partial g_{mn}(x)}{\partial n}$ означает производную по нормали к гиперповерхности Σ от функции g_{mn}.

При этом гиперповерхность Σ должна удовлетворять некоторым условиям гладкости и условию регулярности поверхности, а начальные функции φ_{mn}, ψ_{mn} — некоторым условиям гладкости на гиперповерхности Σ. Эти условия гладкости должны обеспечить выполнение условий существования решения задачи Коши в общем виде (17.14), (17.20).

Далее, определив все компоненты метрического тензора g_{mn}, при условии, что известно поле тензора F^{lk}, можно перейти к отысканию решения системы уравнений движения потока частиц в некоторой области $D_1 \subset D$, получаемых из уравнений (17.9):

$$\rho \frac{d^2 x^i_J(s)}{ds^2} + \rho \Gamma^i_{kl}(x_J) \frac{dx^k_J}{ds} \cdot \frac{dx^l_J}{ds} + \frac{\sigma}{c^2} F^i_{.,k}(x_J) \frac{dx^k_J(s)}{ds} = 0, \tag{17.21}$$

где x^i_J — координаты J-й частицы потока ($J = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ J_0$; $J_0 \leqslant \infty$), удовлетворяющего начальным условиям

$$x^i_J(s_0) = \xi^i_J,$$

$$\frac{dx^i_J(s_0)}{ds} = \eta^i_J, \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad J = 1, 2, 3, \ldots, \quad J_0; \quad J_0 \leqslant \infty. \tag{17.22}$$

При выполнении условий существования и единственности решения задачи Коши (17.21), (17.22) находим траектории потока частиц в области $D_1 \subset D \subset V_4$.

Пусть известно далее, что решение системы уравнений движения (17.21) в такой постановке обладает следующим свойством.

В области $x \in D_1 \subset D$ величина

$$\left| \frac{d\vec{x}_J(s)}{ds} \right| \equiv \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} \left| \frac{dx^\alpha_J(s)}{ds} \right|^2}$$

ограничена для всех $\frac{1}{c} \in [-c_0^{-1},\ c_0^{-1}]$ постоянной $v_{\max}$, которая много меньше скорости света в вакууме c_0:

$$\left| \frac{d\vec{x}_J(s)}{ds} \right| < v_{\max} \ll c_0 \quad (J = 1, 2, 3, \ldots). \tag{17.23}$$

В таком случае, по аналогии с § 6, удобно ввести в рассмотрение безразмерный малый параметр β, меняющийся в интервале $\left[-\frac{v_{\max}}{c_0},\ \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$, и определение, аналогичное определению 6.2 из § 6.

Определение 17.1. Пусть известны все функции $g_{mn}(x)$ в области $D \subset V_4$. Тогда решение системы уравнений (17.21), (17.4), (17.5), (17.19а) в области D с начальными условиями (17.22) и предельными условиями на некоторой гиперповерхности $\Sigma \subset D$:

$$A^i(x)\,|_{x \in \Sigma} = a^i(u), \quad u \in \Sigma \subset D,$$

$$\left. \frac{\partial A^i(x)}{\partial n} \right|_{x \in \Sigma} = b^i(u), \tag{17.24}$$

будем называть *решением из класса* (k, ε) *с заданным малым* $\varepsilon = \varepsilon(D, v_{\max}) > 0$ *и целым* k, если существует совокупность $4J_0\,(k+1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по соответствующему параметру s_J в области

$$s_I \in S_J = (s_J \| x_J^j(s_J) \in D \subset V_4, \quad j = 0, 1, 2, 3) \in R^1$$

функций

$$z_{J,q}^j(s_J) \in C^2(s_J), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad J = 1, 2, \ldots, J_0; \quad q = 0, 1, \ldots, k$$

и $4\,(k+1)$ функций

$$\hat{A}_q^j(x) \in C^2(D) \quad (j = 0, 1, 2, 3; \quad q = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

таких, что при всех $x_J \in S_J$, $x \in D$, и при всех $\beta \in \left[-\frac{c_2}{c_0}, \frac{c_2}{c_0}\right]$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s_J^l}\left[\underset{[\xi,\eta]}{x_J^i}(s_J) - \sum_{q=0}^{k} \beta^q \underset{[\xi,\eta]}{z_{J,q}^i}(s_J)\right]\right| < \underset{[\xi,\eta]}{d_{l,J}}\left|\beta^{k+1}\right|, \tag{17.25}$$

$$l = 0, 1, 2; \quad J = 1, 2, 3, \ldots, J_0;$$

$$\left|\frac{\partial^{j_0+\cdots+j_3}}{(\partial x^0)^{j_0} \ldots (\partial x^3)^{j_3}}\left[\underset{[a^i,b^i]}{A^i}(x) - \sum_{q=0}^{k} \beta^q \underset{[a^i,b^i]}{\hat{A}'_q}(x)\right]\right| < \underset{[a^i,b^i]}{h_{j_0+\cdots+j_3}}\beta^{k+1},$$

$$j_0 + \cdots + j_3 = 0, 1, 2,$$

с некоторыми постоянными $d_{l,J}$, зависящими только от ξ, η, и постоянными $h_{j_0+\ldots+j_3}$, зависящими только от a^i, b^i (и не зависящими от β) и удовлетворяющими условиям

$$\sup_J \sup_{\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]} \left(\frac{\underset{[\xi,\eta]}{d_{l,J}}\,|\beta|^{k+1}}{\sup\limits_{s_J \in S_J}\left|\frac{\partial^l}{\partial s_J^l}\sum\limits_{q=0}^{k} \beta^q \underset{[\xi,\eta]}{z_{J,q}^l}(s_J)\right|}\right) < \varepsilon(D, v_{\max})$$

$$(l = 0, 1, 2),$$

$$\sup_{\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]} \left(\frac{\underset{[a^i,b^i]}{h_{j_0+\cdots+j_3}}}{\sup\limits_{x \in D}\left|\frac{\partial^{j_0+\cdots+j_3}}{(\partial x^0)^{j_1} \ldots (\partial x^3)^{j_3}}\sum\limits_{q=0}^{k} \beta^q \underset{[a^i,b^i]}{\hat{A}_q^l}(x)\right|}\right) < \varepsilon(D, v_{\max})$$

$$(j_0 + \cdots + j_3 = 0, 1, 2). \tag{17.26}$$

При решении задачи Коши в общем виде (17.14), (17.20) для уравнений поля Эйнштейна можно ввести понятие решения класса (k, ε) с заданным $\varepsilon = \varepsilon(D, v_{\max}) > 0$ и целым k по аналогии с определением 6.3 из § 6.

Определение 17.2. Решением системы уравнений (17.14), (17.21), (17.4), (17.5), (17.19а) из класса (k, ε) в области $D \subset V_4$ с заданным целым k и заданным малым $\varepsilon = \varepsilon(D, v_{\max}) > 0$ назовем решение этой системы уравнений с начальными условиями (с некоторыми $\Delta_J > 0$, $J = 1, 2, \ldots, J_0$; $J_0 \leqslant \infty$)

$$x^i_J(s_J) = \xi^i_J(s_J) \in C[s^0_J - \Delta_J, s^0_J], \quad s_J \in [s^0_J - \Delta_J, s^0_J],$$

$$\frac{dx^i_J(s_J)}{ds_J} = \eta^i_J(s_J) \in C[s^0_J - \Delta_J, s^0_J], \quad s_J \in [s^0_J - \Delta_J, s^0_J]$$

$\Big($где функции $\xi^i_J(s_J)$ и $\eta^i_J(s_J)$ могут зависеть от параметра $\beta \in$ $\in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]\Big)$и предельными условиями на начальных множествах $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_1$ (соприкасающихся с областью $D \subset V_4$)

$$\begin{gathered} g_{mn}(x) = \varphi_{mn}(x) \in C(\mathfrak{R}), \quad x \in \mathfrak{R} \subset V_4, \\ \frac{\partial g_{mn}(x)}{\partial x^l} = \psi_{mn,l}(x) \in C(\mathfrak{R}), \quad x \in \mathfrak{R} \subset V_4, \\ A^i(x) = a^i(x) \in C(\mathfrak{R}_1), \quad x \in \mathfrak{R}_1 \subset V_4, \\ \frac{\partial A^i(x)}{\partial x^l} = b^i_l(x) \in C(\mathfrak{R}_1), \quad x \in \mathfrak{R}_1 \subset V_4, \\ l, m, n = 0, 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{17.27}$$

$\Big($где функции $\varphi_{mn}(x)$, $\psi_{mn,l}(x)$, $a^i(x)$, $b^i_l(x)$ могут зависеть от параметра $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]\Big)$, для которого существует $4J_0(k + 1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по соответствующему параметру s_J в области

$$s_J \in S_J = (s_J \| x^i_J(s_J) \in D \subset V_4, \quad i = 0, 1, 2, 3) \subset R^1$$

функций

$$\underset{[\xi,\eta]}{z^j_{J,q}}(s_J) \in C^2(S_J), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad J = 1, 2, \ldots, J_0;$$
$$J_0 \leqslant \infty, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

10 $(k + 1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x^l в области D функций

$$\underset{[\varphi,\psi]}{y_{mn,q}}(x) = \underset{[\varphi,\psi]}{y_{nm,q}}(x) \in C^2(D), \quad m, n = 0, 1, 2, 3; \quad q = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

и 4 $(k + 1)$ штук дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x^i в области D функций

$$\underset{[a,b]}{\hat{A}^i_q}(x) \in C^2(D), \quad i = 0, 1, 2, 3; \; q = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

таких, что при всех $s_J \in S_J$ и при всех $\beta \in \left[-\frac{v_{\max}}{c_0}, \frac{v_{\max}}{c_0}\right]$ выполняются неравенства (17.25), (17.26) и неравенства (6.8), (6.9).

Такие решения из класса (k, ε) будут нами существенно использоваться далее, в § 17, 18.

Ниже в этом параграфе будет использоваться следующая постановка задачи о решении системы уравнений (17.4), (17.5), (17.14), (17.9), (17.2).

Постановка задачи. Отыскивается совместное решение системы уравнений (17.4), (17.5), (17.14), (17.9), (17.2), принадлежащее классу (k, ε), $k \geqslant 1$, такое, что функции $g_{mn}(x)$ и $A^i(x)$ в специальной системе координат удовлетворяют заданным предельным условиям при $|\vec{x}| \to \infty$, а функции $x^l_J(s_J)$ имеют некоторый простой вид (близкий в определенном смысле по форме к некоторым решениям нерелятивистской электродинамики).

17.3. Система координат и предельные условия. Конкретизируем сейчас специальную систему координат и те предельные условия, которые будут наложены на функции $g_{mn}(x)$ и $A^i(x)$ при $|\vec{x}| \to \infty$ в этой системе координат в рамках упомянутой выше постановки задачи.

А именно: выберем в качестве координатной системы гармоническую координатную систему, определенную в § 7, как такую систему координат, в которой справедливо условие гармоничности

$$\hat{\Box} x^l \equiv -\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial x^l}{\partial x^k}\right) = 0 \quad (l = 0, 1, 2, 3). \quad (17.28)$$

Условие (17.28) определяет гармоническую систему однозначно с точностью до произвольного преобразования Лоренца.

Ниже в этом и следующем за ним параграфе будем рассматривать только гармоническую систему координат. Из физических соображений, изложенных в § 10, компоненты метрического тензора $g_{mn}(x)$ должны быть подчинены предельным условиям, вполне аналогичным сформулированным в предложении 10.1.

Предложение 17.1. Пусть гравитационное поле создается движущимся с не слишком высокими скоростями электрически заряженным тяготеющим веществом, занимающим при всех x^0 конечную область D_1 трехмерного пространства V_3, находящуюся на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ от начала координат.

Тогда для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, уравнений поля (17.14) разность

$$\psi_{mn}(x) = g_{mn}(x) - (g_{mn})_\infty, \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \qquad (17.29)$$

должна удовлетворять следующим свойствам с некоторыми положительными постоянными B_0, B_1, B_2:

а) $|\psi_{mn}(x)| < B_0, \quad m, n = 0, 1, 2, 3; \quad \forall x \in R^4;$ (17.29а)

б) $|\psi_{mn}(x)| < \frac{B_1}{r}, \quad r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \to \infty,$

$\forall x^0 \in R^1,$ (17.29б)

в) $$\left|\frac{\partial\psi_{mn}(x)}{\partial x^k}\right| < \frac{B_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1, \tag{17.29в}$$

г) существуют такие функции $f_{mn}(\xi_0, \vec{\xi}) \in C^1(R^4)$, что

$$\lim_{r\to\infty}[r\psi_{mn}(x) - f_{mn}(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0 \tag{17.29г}$$

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по $\vec{n}_x \in (\vec{n}_x \,\|\, \vec{n}_x^2 = 1, \ \vec{n}_x \in R^3)$, где $\vec{n}_x = \frac{\vec{x}}{r}$, а

$$(g_{ik})_\infty = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{17.30}$$

Так же как и в § 10, условия (17.29а) — (17.29г) будем и в данном случае называть предельными условиями первого рода.

Потребуем также использования таких и только таких (гармонических) координатных систем, в которых для всякого решения из класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнений поля выполняются предельные условия второго рода:

$$g^{lm}(x) - (g^{lm})_\infty = O\left(\frac{1}{c^2}\right), \forall (x^0, \vec{x}) \in V_4 \quad (m, n = 0, 1, 2, 3). \tag{17.31}$$

С помощью тех же физических соображений, из которых в § 10 были получены предельные условия первого рода для метрического тензора g_{mn}, можно получить аналогичные предельные условия для вектор-потенциала $A^i(x)$ электромагнитного поля.

Рассмотрим случай, когда гравитационное и электромагнитное поля создаются только движущимся с не слишком высокими скоростями электрически заряженным и тяготеющим веществом, занимающим при всех x^0 конечную область D_1 трехмерного пространства, находящегося на конечном «расстоянии» r от начала координат. В такой модели отсутствуют внешние источники гравитационных и электромагнитных полей (поля иной природы в этом параграфе не рассматриваем вообще), а тем самым имеем изолированную систему. Это означает, что никакие волны извне на эту систему не падают. Любая электромагнитная волна может иметь своим источником лишь какие-либо материальные объекты из области D_1. Поэтому на достаточно большом «расстоянии» r от этой области всякая электромагнитная волна должна иметь вид расходящейся затухающей сферической волны и, в частности, для вектор-потенциала A^i эта волна должна иметь вид

$$\frac{1}{r}a^i(x^0 - r, \vec{n}_x), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где $n_x^\alpha = \frac{x^\alpha}{r}$, $\quad \alpha = 1, 2, 3.$

Из физических соображений для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, следует потребовать выполнения также некоторых свойств гладкости (и, в частности, ограниченности) компонентов вектор-потенциала A^i.

Установленные требования на вектор-потенциал можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Предложение 17.2. Пусть гравитационное и электромагнитное поля создаются движущимся с не слишком высокими скоростями электрически заряженным тяготеющим веществом, занимающим при всех x^0 конечную область D_1 трехмерного пространства V_3, находящуюся на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ от начала координат.

Тогда для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, уравнений поля и уравнений движения (17.4), (17.5), (17.19а), (17.14), (17.9) компоненты вектор-потенциала $A_i(x)$ должны удовлетворять следующим свойствам с некоторыми положительными постоянными H, H_s, $s = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$\text{а)}\ |A_i(x)| < H_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \forall x \in V_4; \tag{17.32а}$$

$$\text{б)}\ |A_i(x)| < \frac{H}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1; \tag{17.32б}$$

$$\text{в)}\ \left|\frac{\partial A_i(x)}{\partial x^k}\right| < \frac{H_4}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1; \tag{17.32в}$$

г) существуют такие функции $a_i(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^1(R^4)$, $i = 0, 1, 2, 3$, что

$$\lim_{r \to \infty} [rA_i(x) - a_i(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{17.32г}$$

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по $\vec{n}_x \in (\vec{n}_x \parallel \vec{n}_x^{\,2} = 1,\ \vec{n}_x \in R^3)$, где $\vec{n}_x = \dfrac{\vec{x}}{r}$.

Предложение 17.2 дает предельные условия, которым должен удовлетворять вектор-потенциал $A_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$, в гармонической системе координат для изолированной системы масс и электрических зарядов.

17.4. Решение уравнений Максвелла — Лоренца с учетом условий Лоренца. Рассмотрим уравнения Максвелла — Лоренца

$$\nabla^k F^{l}_{\cdot\cdot\, k} = 4\pi\sigma u^l, \quad l = 0, 1, 2, 3. \tag{17.33}$$

Эти уравнения с учетом (17.5) принимают следующий вид:

$$F^{lk} = \nabla^l A^k - \nabla^k A^l,$$

$$\nabla^k \nabla_k A^l - \nabla^k \nabla^l A_k = -4\pi\sigma u^l. \tag{17.34}$$

В силу условий Лоренца (17.19а)

$$\nabla_k A^k(x) = 0$$

и формулы (17.12) уравнения (17.34) можно переписать в такой форме:

$$\nabla_k \nabla^k A^l - g^{ks} g^{ln} A_q R^q_{k,sn} = -4\pi\sigma u^l \quad (l = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (17.35)$$

Для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, уравнений поля Эйнштейна и уравнений Максвелла — Лоренца в силу предельных условий первого и второго рода, которым должны удовлетворять все компоненты метрического тензора g_{ik} (формулы (17.29а) — (17.29г) и (17.31)), левая часть уравнений (17.35) может быть представлена в следующем виде:

$$\nabla_k \nabla^k A^l - g^{ks} g^{ln} A_q R^q_{k,sn} = \left\{\left[-1 + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right] \frac{\partial^2}{\partial x^{0 2}} + \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \left[\delta_{\alpha\beta} + \right.\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{c^2}\right)\right] \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta} + \sum_{\alpha=1}^{3} O\left(\frac{1}{c^3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^0\, \partial x^\alpha} +$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right\} A^l(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] A^l(x) + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \qquad (17.36)$$

поскольку тензор кривизны $R^q_{k,sn}$ выражается через символы Кристоффеля и метрический тензор посредством формул (2.29) и (2.22).

Правая часть уравнений (17.35) для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, может быть представлена в таком виде:

$$-4\pi\sigma u^l = \begin{cases} -4\pi\sigma + O\left(\frac{1}{c^2}\right), & l = 0, \\ -4\pi\sigma \frac{v^\alpha}{c} + O\left(\frac{1}{c^3}\right), & l = \alpha, \end{cases} \qquad (17.37)$$

$$\alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

Из выражений (17.35) с помощью (17.36), (17.37) для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла — Лоренца для главного члена в асимптотическом разложении вектор-потенциала $A^i(x)$ при $c \to \infty$ получаем следующие уравнения:

$$\Box A^i(x) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] A^i(x) = -4\pi\sigma \mathcal{K}^i(x), \qquad (17.38)$$

где

$$\mathcal{K}^i(x) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \frac{v^\alpha(x)}{c}, & i = \alpha, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

В общем случае в правых частях уравнений (17.38) плотность заряда σ — непрерывная функция либо обобщенная функция над пространством $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций. В обоих случаях общее решение уравнений (17.38) может быть получено с помощью лемм 10.1 и 10.2. Соответствующее утверждение, вытекающее из этих лемм, можно сформулировать с помощью замечания 10.1 в виде такого следствия.

Следствие 17.1. Пусть плотность заряда $\sigma(\xi^0, \vec{\xi})$ вещества имеет носитель, пересечение которого со всякой гиперповерхностью $\xi^0 = \text{const}$ есть ограниченная область в R^3.

Тогда общее решение уравнений (17.38) имеет вид

$$A^0(x) = -\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + A_0^0(x) \equiv A_\text{ч}^0(x) + A_0^0(x), \tag{17.39а}$$

$$A^\alpha(x) = -\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + A_0^\alpha(x) \equiv$$

$$\equiv A_\text{ч}^\alpha(x) + A_0^0(x), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{17.39б}$$

где $A_0^i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3,$ — общее решение волнового уравнения

$$\Box A_0^i(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{17.40}$$

Ниже эти произвольные решения $A_0^i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, будут выбраны так, чтобы обеспечить выполнение предельных условий (17.32а) — (17.32г) для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, уравнений Эйнштейна и уравнений Максвелла — Лоренца.

Покажем прежде всего, что для рассматриваемой изолированной системы при некоторых условиях гладкости плотности зарядов σ функции $A_\text{ч}^i(x)$ из формул (17.39а), (17.39б) удовлетворяют условиям б) — г) предложения 17.2. А именно справедливо следующее предложение.

Предложение 17.3. Пусть $\sigma(\xi^0, \vec{\xi}) \in C(R^4)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\sigma(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp} \sigma$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1,\ \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — некоторая ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» r от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда каждая функция $A_\text{ч}^i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, из формул (17.39а), (17.39б) удовлетворяет следующим неравенствам с некоторыми постоянными $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$:

а) $|A_\text{ч}^i(x)| < \dfrac{M}{r}$, $r \to \infty$, $\forall x^0 \in R^1$, $i = 0, 1, 2, 3$; (17.41а) б) $\left|\frac{\partial A^i_{\text{ч}}(x)}{\partial x^k}\right| < \frac{M_2}{r}, \quad r \to \infty, \quad \forall x^0 \in R^1, \; i = 0, 1, 2, 3;$ (17.41б)

в) $|A^i_{\text{ч}}(x)| < M_3, \quad \forall x \in (R^4 \setminus \operatorname{supp} \sigma);$ (17.41в)

г) найдутся такие функции $f^i(\eta^0, \vec{\eta}) \in C^1(R^4)$, $i = 0, 1, 2, 3$, что справедливо

$$\lim_{r \to \infty} [rA^i_{\text{ч}}(x) - f^i(x^0 - r, \vec{n}_x)] = 0 \qquad (17.41\text{г})$$

равномерно по $x^0 \in R^1$ и по $\vec{n}_x \in (\vec{n}_x \,\|\, \vec{n}_x^2 = 1, \; \vec{n}_x \in R^3)$, где $\vec{n}_x \equiv$ $\equiv \frac{\vec{x}}{r}$.

Доказательство предложения 17.3 проводится совершенно аналогично доказательству предложения 10.2.

Поскольку для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, при условиях предложения 17.2 вектор-потенциал

$$A^i(x) = A^i_{\text{ч}}(x) + A^i_0(x), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

должен удовлетворять предельным условиям (17.32а) — (17.32г), то из предложений 17.2, 17.3 и формулы (17.40) получаем такое следствие.

Следствие 17.2. При условиях предложения 17.3 в силу формул (17.32а) — (17.32г), (17.40) функции $A^i_0(x)$ из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (17.39а), (17.39б), удовлетворяют всем условиям теоремы 15.1.

Замечание 17.1. При условиях предложения 17.2 в силу следствия 17.2 из теоремы 15.1 вытекает, что все функции $A^i_0(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, из класса $C^2(R^4)$, фигурирующие в формулах (17.39а), (17,39б), равны нулю тождественно при всех $x \in R^4$.

В результате из следствий 17.1, 17.2 с помощью замечания 17.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 17.3. Пусть плотность заряда вещества $\sigma(\xi^0, \vec{\xi}) \in$ $\in C^2(R^4)$, скорость $v^\alpha(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $\alpha = 1, 2, 3$, и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\sigma(x^0, \vec{x}) = \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap \operatorname{supp} \sigma$$

содержится в цилиндре Ц $= (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1, \; \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset$ $\subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда решение $A^i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, из класса $C^2(R^4)$ уравнений (17.38), удовлетворяющее предельным условиям (17.32а) —

(17.32г), существует, это решение единственно и имеет вид

$$A^0(x) = -\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi}, \qquad (17.42)$$

$$A^\alpha(x) \equiv -\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}|}\, d\vec{\xi},$$

$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Формулы (17.42) называются *представлением через запаздывающие потенциалы*. Непосредственной проверкой можно убедиться, что запаздывающие потенциалы (17.42) в силу уравнения непрерывности заряда (17.10) и формулы (4.6д) удовлетворяют условию Лоренца (17.19а) с требуемой точностью.

Замечание 17.2. В точечной модели

$$\sigma(\xi^0, \vec{\xi}) = e\delta\,[\vec{\xi} - \vec{a}(\xi^0)]$$

при условии

$$a^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1), \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\left| \frac{d\vec{a}(\xi^0)}{d\xi^0} \right| < 1$$

в силу предложения 11.4 и с учетом теоремы 4.1 о свертке обобщенных функций на $\mathcal{D}$ формулы (17.42) принимают следующий вид:

$$A^0(x) = -\frac{e}{|\vec{x} - \vec{\xi}_0| + \frac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{3} [\xi_0^\beta - x^\beta]\, v^\beta(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_0|)},$$

$$A^\alpha(x) = -\frac{e v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_0|)}{|\vec{x} - \vec{\xi}_0| + \frac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{3} [\xi_0^\beta - x^\beta]\, v^\beta(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_0|)}, \qquad (17.42а)$$

где $\vec{\xi}_0$ — (единственное) решение функционального уравнения

$$\vec{\xi}_0 - \vec{a}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}_0|) = 0,$$

а

$$v^\beta(x^0) = c\,\frac{da^\beta(x^0)}{dx^0}.$$

Формулы (17.42а) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*. Используя полученные решения уравнений Максвелла — Лоренца (17.42) из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, приступим к построению решений уравнений поля Эйнштейна (17.14), принадлежащих классу (k, ε), $k \geqslant 1$, т. е. к построению соответствующего метрического тензора g_{ik}.

17.5. Решение уравнений поля Эйнштейна из класса (k, ε), $k \geqslant 1$. Выше было построено решение (17.42) уравнений Максвелла — Лоренца с учетом дополнительного условия Лоренца, принадлежащее классу (k, ε), $k \gg 1$, для случая электрически заряженной тяготеющей сплошной среды, движущейся с не слишком высокими скоростями в ограниченной пространственной области $D_1 \subset V_3$ в гармонической системе координат. Поскольку для сплошной электрически заряженной тяготеющей среды в выбранной модели пылевидной материи известен вид тензора энергии — импульса (формулы (17.19), (17.17)) и для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, известен вид вектор-потенциала $A^k(x)$ (формулы (17.42)), то в уравнениях (гравитационного) поля Эйнштейна

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T^{ik} \tag{17.43}$$

для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, правая часть известна. Поэтому можно построить решения из класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнений гравитационного поля (17.43) теми же методами, которые были использованы в § 11, 12 для отыскания соответствующего метрического тензора g_{ik}. Уравнения гравитационного поля (17.43) можно переписать в следующей форме:

$$R^{ik} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T\right), \tag{17.44}$$

где $T \equiv T^{ik} g_{ik}$.

С учетом формул (17.19), (17.17), (17.5), (17.42) и в силу предельных условий второго рода (17.31) правая часть уравнений (17.44) для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, принимает следующий вид:

$$-\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T\right) = \begin{cases} -\dfrac{2\rho\pi\gamma}{c^2} + O\left(\dfrac{1}{c^4}\right), & i = k = 0; \\ -\dfrac{4\rho v^\alpha \pi\gamma}{c^3} + O\left(\dfrac{1}{c^4}\right), & i = \alpha, \quad k = 0; \\ -\dfrac{2\delta_{\alpha\beta}\rho\pi\gamma}{c^2} + O\left(\dfrac{1}{c^4}\right), & i = \alpha, \quad k = \beta \\ & (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{17.45}$$

Расписывая левую часть уравнения (17.44) с помощью известного представления (10.2), (10.3):

$$R^{ik} = -\frac{1}{2} g^{ls} \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^l \partial x^s} - \Gamma^{ik} + \Gamma^{i,ls}\Gamma^k_{ls},$$

получаем так же, как в § 10, что для решений уравнений (17.44), (17.45) из класса (k, ε), $k \gg 1$, в гармонической системе координат главный член в асимптотическом разложении тензора $g_{ik}(x)$ при $c \to \infty$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] g^{ik} = \frac{16\pi\gamma}{c^2} H^{ik}, \tag{17.46}$$

$$H^{ik} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2}, & i = k = 0; \\ \rho v^\alpha, & i = 0, \quad k = \alpha; \\ \dfrac{1}{2}\rho\delta_{\alpha\beta}, & i = \alpha, \quad k = \beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Решение уравнения (17.46), удовлетворяющее предельным условиям первого рода, дается следствием 10.3 из § 10.

Следствие 10.3а. Пусть плотность массы вещества $\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, скорость $v^\alpha(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$, $\alpha = 1, 2, 3$, плотность заряда вещества $\sigma(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4)$ и пусть для всякой точки $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ область

$$B_\rho(x^0, \vec{x}) \equiv \Gamma^-(x^0, \vec{x}) \cap [\operatorname{supp} \rho \cup \operatorname{supp} \sigma]$$

содержится в цилиндре $Ц = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \vec{\xi} \in D_1, \xi^0 \in R^1)$, где $D_1 \subset R^3$ — ограниченная пространственная область, лежащая на конечном «расстоянии» $r \equiv \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$ от начала координат $\vec{\xi} = 0$.

Тогда решение g^{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) из класса $C^2(R^4)$ уравнений (17.46), удовлетворяющее предельным условиям первого рода (17.29а) — (17.29г), существует, это решение единственно и имеет следующий вид:

$$g^{00}(x) = 1 + \frac{2\gamma}{c^2} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi}, \tag{17.47а}$$

$$g^{0\alpha}(x) = \frac{4\gamma}{c^3} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})\, v^\alpha(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi}, \tag{17.47б}$$

$$g^{\alpha\beta}(x) = -\delta_{\alpha\beta} + \frac{2\gamma\delta_{\alpha\beta}}{c^2} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}, \tag{17.47в}$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

17.6. Уравнения движения (17.21) для задачи N тел. Рассмотрим теперь уравнения движения (17.21) элементарного объема электрически заряженной и тяготеющей сплошной среды

$$\rho \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \rho \Gamma^i_{lk} \frac{dx^l}{ds} \cdot \frac{dx^k}{ds} = -\frac{\sigma}{c^2} F^i_{\cdot,k} \frac{dx^k}{ds}, \tag{17.48}$$

где ρ и σ — инвариантные плотности массы и электрического заряда среды соответственно,

$$F_{ik} \equiv \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{17.49}$$

— тензор электромагнитного поля,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \tag{17.50}$$

— символы Кристоффеля.

В уравнении (17.48) символы Кристоффеля, плотности ρ и σ и тензор электромагнитного поля F_{ik} должны быть взяты в той точке пространственно-временного многообразия, где находится элементарный объем среды в рассматриваемый момент, т. е. в рассматриваемой точке $x^i\,(s)$ траектории (17.1).

В силу формул (13.8), (13.9) уравнения движения (17.48) для нулевого компонента принимают вид

$$\rho \frac{d^2x^0}{ds^2} + \rho \Gamma^0_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = - \frac{\sigma}{c^2} F^0_{\cdot,k} \frac{dx^k}{dx^0} \cdot \frac{dx^0}{ds} \tag{17.51}$$

и для пространственных компонентов уравнения движения (17.48) записываются в форме

$$\rho \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} + \rho \left(\frac{dx^\alpha}{dx^0} \right) \frac{d^2x^0}{ds^2} + \tag{17.52}$$

$$+ \rho \Gamma^\alpha_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = - \frac{\sigma}{c^2} F^\alpha_{\cdot,k} \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^0}{ds} \quad (\alpha = 1,\, 2,\, 3).$$

С учетом соотношения (17.51) соотношение (17.52) переписывается в следующем виде:

$$\rho \frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \rho \Gamma^0_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \cdot \frac{dx^\alpha}{dx^0} + \rho \Gamma^\alpha_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} =$$

$$= \frac{\sigma}{c^2} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \cdot \frac{ds}{dx^0} \left(F^0_{\cdot,k} \frac{dx^\alpha}{dx^0} - F^\alpha_{\cdot,k} \right). \tag{17.53}$$

Для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, левая часть соотношений (17.53) с учетом формул (17.47а) — (17.47в), (17.50), (13.12) может быть представлена в следующей форме ($x^0 = ct$):

$$\rho \frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \rho \Gamma^0_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \cdot \frac{dx^\alpha}{dx^0} + \rho \Gamma^\alpha_{ik} \frac{dx^i}{dx^0} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} =$$

$$= \rho \frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \frac{\rho}{c^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4} \right), \tag{17.54}$$

где

$$U \equiv \gamma \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho\,(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|,\, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi}.$$

Правая часть соотношений (17.53) для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, с учетом формул (17.47а)— (17.47в), (17.42) записывается в такой форме:

$$\frac{\sigma}{c^2} \cdot \frac{dx^k}{dx^0} \cdot \frac{ds}{dx^0}\left(F^{0}_{\cdot,k}\frac{dx^\alpha}{dx^0} - F^{\alpha}_{\cdot,k}\right) =$$

$$= \frac{-\sigma}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right). \qquad (17.55)$$

В результате с помощью следствий 10.3, 17.1 и соотношений (17.48), (17.53) — (17.55) получаем следующую лемму.

Лемма 17.1. Пусть движение всякого элементарного объема потока электрически заряженной тяготеющей среды может быть описано четырехмерной траекторией этого элементарного объема, параметризованной длиной дуги s *траектории*

$$x^i = x^i(s) \in C^2(a, b), \quad (a, b) \subset (-\infty, \infty) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \qquad (17.56)$$

обладающей свойством

$$0 < \frac{dx^0(s)}{ds} < M, \qquad s \in (a, b),$$

с некоторой (положительной) постоянной $M < \infty$. *Пусть, кроме того, для потока выполняются все условия следствий* 10.3 *и* 17.1.

Тогда уравнения движения (17.48) *элементарного объема среды для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 1$, *для пространственных компонентов примут следующий вид*:

$$\rho(x)\frac{d^2x^\alpha}{(dx^0)^2} - \gamma\frac{\rho(x)}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint \frac{\rho(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi} +$$

$$+ \frac{\sigma(x)}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\iiint \frac{\sigma(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}\,|, \vec{\xi})}{|\vec{x} - \vec{\xi}\,|}\, d\vec{\xi} + O\left(\frac{v^4_{\max}}{c^4}\right) = 0, \qquad (17.57)$$

$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Уравнения внешней задачи N тел, взаимодействующих посредством гравитационных и электромагнитных полей, получаем из уравнений (17.57) с помощью следующей леммы.

Лемма 17.2. Пусть выполняются все условия леммы 17.1. Пусть, кроме того, выполняются следующие условия:

а) *инвариантная плотность массы* $\rho(\xi^0, \vec{\xi})$ *непрерывна вместе со второй производной при всех* $(\xi^0, \vec{\xi}) \in R^4$:

$$\rho(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4);$$

б) *инвариантная плотность электрического заряда* $\sigma(\xi^0, \vec{\xi})$ *непрерывна вместе со второй производной при всех* $(\xi^0, \vec{\xi}) \in R^4$:

$$\sigma(\xi^0, \vec{\xi}) \in C^2(R^4);$$

в) *объединение носителя инвариантной плотности массы* supp ρ *и носителя инвариантной плотности электрического заряда* supp σ *состоит из N областей, не имеющих между собой общих точек*:

$$[\operatorname{supp} \rho \bigcup \operatorname{supp} \sigma] = \bigcup_{j=1}^{N} S_j,\ S_j \cap S_{j'} = \varnothing, \quad j \neq j'. \tag{17.58}$$

Обозначим

$$\rho_j(\xi) \equiv \begin{cases} \rho(\xi), & \xi \in S_j, \\ 0, & \xi \,\bar{\in}\, S_j \ (j = 1, 2, \ldots, N), \end{cases} \tag{17.59}$$

$$\sigma_j(\xi) \equiv \begin{cases} \sigma(\xi), & \xi \in S_j, \\ 0, & \xi \,\bar{\in}\, S_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \end{cases} \tag{17.60}$$

Тогда уравнения движения внешней задачи N заряженных и тяготеющих тел для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, *примут вид следующей системы интегро-дифференциальных уравнений* $(x^0 = ct)$:

$$\iiint \left\{ c\rho_j(\xi) \frac{dv^\alpha(\xi^0)}{d\xi^0} - \rho_j(\xi) \frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi^\alpha} + \sigma_j(\xi) \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \right\} d\vec{\xi} =$$

$$= O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{17.61}$$

где

$$U(\xi) = \gamma \iiint \frac{\rho(\xi^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')\, d\vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|}, \tag{17.62}$$

$$W(\xi) = \iiint \frac{\sigma(\xi^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')\, d\vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|}, \quad v^\alpha(\xi^0) = \frac{dx^\alpha(\xi^0)}{d\xi^0}. \tag{17.63}$$

Справедливость леммы 17.2 устанавливается путем интегрирования левых и правых частей соотношений (17.57) при условиях (17.58) по каждой из трехмерных областей S_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, фигурирующих в формуле (17.58).

Замечание 17.3. Поскольку всякое тело, обладающее электрическим зарядом, обладает и массой покоя (экспериментальный факт), то справедливо при условиях леммы 17.2

$$S_j = \operatorname{supp} \rho_j \supset \operatorname{supp} \sigma_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{17.64}$$

(Вместе с тем тяготеющее (массивное) тело может иметь нулевой электрический заряд. Этот экспериментальный факт также отражен в формуле (17.64).)

Запишем теперь уравнения (17.61) для одного важного случая, когда на рассматриваемом интервале значений x^0 минимальное расстояние между центрами масс тел много больше размеров каждого из N тел. С помощью замечания 12.1 и с учетом замечания 17.3 такой случай соответствует достаточно малым ($l \ll 1$) значениям параметра l.

Для такого случая применима модель точечных тел (рассмотренная для электрически нейтральных тел в § 12) в том смысле, что для всякой основной функции φ из пространства $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций справедливо в смысле слабой сходимости в $\mathcal{D}'$ при $l \to 0$

$$\begin{aligned} &(\rho_j, \varphi) - (\rho_j^0, \varphi) = O(l) \cdot (1, \varphi), \ l \to 0, \ \varphi \in \mathcal{D}, \\ &(\sigma_j, \varphi) - (\sigma_j^0, \varphi) = O(l) \cdot (1, \varphi), \ l \to 0, \ \varphi \in \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{17.65}$$

где

$$\begin{aligned} &\rho_j^0(\xi^0, \vec{\xi}) = m_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)], \\ &\sigma_j^0(\xi^0, \vec{\xi}) = e_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)] \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{17.66}$$

Переход к пределу $l \to 0$ в смысле выражений (17.65) физически означает пренебрежение размерами тел.

С помощью следствия 10.4 совершенно аналогично доказательству теоремы 12.1 для соотношений (17.61) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 17.1. *Пусть выполняются все условия лемм* 17.1 *и* 17.2. *Пусть, кроме того, для координат центра массы* $a_j^\alpha(\xi^0) \in C^1(R^1)$, $\alpha = 1, 2, 3$, *описываемой плотностью* $\rho_j(\xi)$, *справедливо*

$$\left| \frac{d\vec{a}_j(\xi^0)}{d\xi^0} \right| < 1. \tag{17.67}$$

Тогда для заданного $\mathfrak{T} > 0$ *для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 1$, *при достаточно больших* $\dfrac{R_{\min}}{hl}$ *(где*

$$R_{\min} \equiv \inf_{x^0 \in (-\infty, \mathfrak{T})} \ \min_{\substack{i, j \\ (i \neq j)}} \ [\inf_{\substack{\vec{x}_i \in S_i \\ \vec{x}_j \in S_j}} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|]_{x^0 = \text{const}},$$

а hl *определено соотношением (12.18)) уравнения внешней задачи* N *электрически заряженных и гравитирующих тел* (17.61)— (17.63) *примут следующий асимптотический вид:*

$$\begin{aligned} m_j \frac{c^2 d^2 a_j^\alpha(x^0)}{(dx^0)^2} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} (\gamma m_i m_j - e_i e_j) \left[\frac{R_{ij}^\alpha(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \right. \\ \left. + \frac{v_i^\alpha(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} - 3\,\frac{(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})\,\vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4}\, R_{ij}^\alpha(\tau_{ji}) \right] + \\ + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{hl}{R_{\min}}\right), \ x^0 = ct \in (-\infty, \mathfrak{T}), \ \alpha = 1, 2, 3; \\ j = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{17.68}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{ji} \equiv x^0 - |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|, \quad m_j a_j^\alpha(\xi^0) = \iiint \rho_j(\xi^0, \vec{\xi})\, \xi^\alpha \, d\vec{\xi}, \\ R_{ij}^\alpha(\tau_{ji}) \equiv a_i^\alpha(\tau_{ji}) - a_j^\alpha(x^0), \ \alpha = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{17.69}$$

m_j *и* e_j *— инвариантная масса и заряд j-го тела, определяемые посредством формул* *

$$m_j = \iiint \rho_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi},$$
$$e_j = \iiint \sigma_j(x^0, \vec{\xi})\, d\vec{\xi}. \qquad (17.70)$$

Замечание 17.4. В частности, при $c \to \infty$ для $k = 0$ соотношения (17.68), (17.69) принимают вид уравнений движения для системы N материальных электрически заряженных точек, взаимодействующих по классическому закону «всемирного притяжения» Ньютона и по закону Кулона:

$$m_j \frac{d^2 a_j(t)}{dt^2} = \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}}^{N} (\gamma m_i m_j - e_i e_j) \frac{a_i^\alpha(t) - a_j^\alpha(t)}{|\vec{a}_i(t) - \vec{a}_j(t)|^3},$$
$$a_j^\alpha(t) \equiv a_j^\alpha(ct) \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \qquad (17.71)$$

Таким образом, для той области значений временной переменной x^0, для которой отсутствуют столкновения между N распределенными в пространстве телами, уравнения внешней задачи N тел (17.61) в гармонической системе координат для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, имеют асимптотический вид (17.68), (17.69). Уравнения (17.68), (17.69) являются *релятивистским обобщением уравнений классической механики и нерелятивистской электродинамики N материальных электрически заряженных точек.*

Замечание 17.5. Уравнения внешней задачи N электрически заряженных и тяготеющих тел (17.68), (17.69) могут быть формально получены из уравнений внешней задачи N электрически нейтральных тяготеющих тел (12.50) с помощью следующей замены в j-м уравнении (12.50) под знаком суммирования по i:

$$\gamma m_i \to \gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}, \quad m_j > 0, \qquad (17.72)$$

причем такую замену надо сделать в каждом из N уравнений (12.50).

Для того чтобы в уравнениях движения N заряженных тяготеющих тел в гармонической системе координат учесть внутреннее движение этих тел, можно воспользоваться методами, вполне аналогичными тем, которые были описаны в конце § 12 для случая электрически нейтральных N тел. Такой учет внутреннего движения в уравнениях внешней задачи сделан ниже, в § 18, п. 18.3 и 18.4.

---

* Уравнения, аналогичные нашим уравнениям (17.68), для частного случая $m_1 = m_2 = \ldots = m_N = 0$ в электродинамике специальной теории относительности были получены Дж. Сингом [299]. Уравнения, полученные Дж. Сингом, как и наши уравнения (17.68), имеют вид дифференциальных уравнений нейтрального типа. Существование и единственность решений основной начальной задачи для дифференциальных уравнений нейтрального типа Дж. Синга в частном случае двумерного «пространства — времени» (т. е. $(x^0, \vec{x}) \in R^2$) изучались *Р.* Драйвером [228, 229].

17.7. Уравнения внешней задачи N заряженных и тяготеющих тел в «сферических» координатах. Выше были получены уравнения внешней задачи не сталкивающихся между собой электрически заряженных и тяготеющих тел в гармонической системе координат в «прямоугольных декартовых» координатах x^0, x^1, x^2, x^3.

Вместе с тем для наших дальнейших целей эти уравнения движения будет полезно записать в «сферических» координатах x^0, r, θ, φ, связанных с «прямоугольными декартовыми» координатами x^0, x^1, x^2, x^3 посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} x_j^1 &= r_j \sin\theta_j \cos\varphi_j; \\ x_j^2 &= r_j \sin\theta_j \sin\varphi_j; \\ x_j^3 &= r_j \cos\theta_j. \end{aligned} \tag{17.73}$$

Из следствия 13.1 и замечания 17.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 17.4. Пусть выполняются все условия теоремы 17.1. Тогда уравнения внешней задачи не сталкивающихся между собой N электрически заряженных и гравитирующих тел (17.68), (17.69) для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, принимают в «сферических» координатах r, θ, φ с точностью до $O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{hl}{R_{\min}}\right)$ следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{d^2 r_j}{dt^2} = r_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 \sin^2\theta_j + r_j \left(\frac{d\theta_j}{dt}\right)^2 + \\ + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \left(\gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}\right) [Q_{ij}^1(\tau_{ji}) \sin\theta_j \cos\varphi_j + Q_{ij}^2(\tau_{ji}) \sin\theta_j \sin\varphi_j + \\ + Q_{ij}^3(\tau_{ji}) \cos\theta_j], \end{gathered} \tag{17.74а}$$

$$\begin{gathered} \frac{d^2\theta_j}{dt^2} = -\frac{2}{r_j} \cdot \frac{d\theta_j}{dt} \frac{dr_j}{dt} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_j \left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 + \\ + \frac{1}{r_j} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \left(\gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}\right) [Q_{ij}^1(\tau_{ji}) \cos\theta_j \cos\varphi_j + \\ + Q_{ij}^2(\tau_{ji}) \cos\theta_j \sin\varphi_j - Q_{ij}^3(\tau_{ji}) \sin\theta_j], \end{gathered} \tag{17.74б}$$

$$\begin{gathered} \frac{d^2\varphi_j}{dt^2} = -\frac{2}{r_j} \cdot \frac{dr_j}{dt} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} - 2 \frac{d\theta_j}{dt} \cdot \frac{d\varphi_j}{dt} \operatorname{ctg}\theta_j + \\ + \frac{1}{r_j} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \left(\gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}\right) \left[- Q_{ij}^1(\tau_{ji}) \frac{\sin\varphi_j}{\sin\theta_j} + Q_{ij}^2(\tau_{ji}) \frac{\cos\varphi_j}{\sin\theta_j}\right], \end{gathered} \tag{17.74в}$$

где

$$Q_{ij}^{\alpha}(\tau_{ji}) \equiv \frac{R_{ij}^{\alpha}(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v_i^{\alpha}(\tau_{ji})}{c|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} - \frac{3(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})\vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4} R_{ij}^{\alpha}(\tau_{ji})$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \ldots, N) \tag{17.75}$$

$$\tau_{ji} \equiv x^0 - |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|, \quad x^0 = ct,$$

$$R_{ij}^{\alpha}(\tau_{ji}) \equiv a_i^{\alpha}(\tau_{ji}) - a_j^{\alpha}(x^0), \tag{17.76}$$

$$v_j^{\alpha}(x^0) = \frac{cda_j^{\alpha}(x^0)}{dx^0},$$

$$a_j^1 = r_j \sin\theta_j \cos\varphi_j, \ a_j^2 = r_j \sin\theta_j \sin\varphi_j, \ a_j^3 = r_j \cos\theta_j.$$

Замечание 17.6. Уравнения (17.74а) — (17.74в), (17.75), (17.76) являются системой дифференциальных уравнений первого порядка нейтрального типа относительно $6N$-мерной вектор-функции

$$X(t) = \{r_1, \theta_1, \varphi_1, \ldots, r_N, \theta_N, \varphi_N; \dot{r}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1, \ldots, \dot{r}_N, \dot{\theta}_N, \dot{\varphi}_N\}, \tag{17.77}$$

где $f(t) \equiv \frac{df}{dt}$. Поэтому основная начальная задача для этой системы уравнений, согласно результатам § 3, задается при $t > t_0$ системой уравнений (17.74а) — (17.74в), (17.75), (17.76) с начальными условиями

$$X(t) = \Phi(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \ t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0],$$

$$\dot{X}(t) = \Psi(t) \in C[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \ t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0] \tag{17.78}$$

и дополнительными условиями (3.36), где

$$\Delta_{t_0} = \max_{i,j} |\vec{a}_i(ct_0) - \vec{a}_j(ct_0)|,$$

если

$$\max_{i,j} \left| \frac{d}{dx^0} |\vec{a}_i(x^0) - \vec{a}_j(x^0)| \right| < 1, \ x^0 \geqslant ct_0 > 0. \tag{17.79}$$

Условие (17.79) для не очень высоких скоростей движения выполняется всегда.

Необходимость задавать при постановке основной начальной задачи для уравнений движения (17.74а) — (17.74в) значения $6N$-мерной вектор-функции $X(t)$ (и ее производных по времени $\dot{X}(t)$) *на начальном интервале* $t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0]$ представляет собой, как и в рассмотренном в § 12, 13 случае, *принципиальное отличие от постановки основной начальной задачи для уравнений движения механики Ньютона и нерелятивистской электродинамики* (17.71) (записанных в сферических координатах), когда достаточно задавать начальные значения вектор-функции X (t) *только в начальной точке* $t = t_0$.

Замечание 17.7. Система дифференциальных уравнений нейтрального типа (17.74а) — (17.74в), (17.75), (17.76) обладает частным многообразием решений вида

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_N = \frac{\pi}{2} = \text{const}, \tag{17.80}$$

что соответствует тому случаю, когда все N тел двигаются в одной (экваториальной) плоскости.

§ 18. Устойчивость кругового движения в задаче двух электрически заряженных и тяготеющих тел

В этом параграфе рассмотрим внешнюю задачу двух электрически заряженных и тяготеющих тел для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, причем ограничимся рассмотрением движения тел в одной плоскости:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}. \tag{18.1}$$

Для такого случая удобно будет воспользоваться уравнениями внешней задачи заряженных и тяготеющих тел в «сферических» координатах (17.74а) — (17.74в), (17.75), (17.76), полученными выше для случая, когда размеры рассматриваемых тел много меньше минимального расстояния между телами.

Для случая $N = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}$ эти уравнения, очевидно, принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 r_j}{dt^2} = r_j\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)^2 + \left(\gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}\right)[Q^1_{ij}(\tau_{ji})\cos\varphi_j + Q^2_{ij}(\tau_{ji})\sin\varphi_j],$$

$$\frac{d^2\varphi_j}{dt^2} = -\frac{2}{r_j}\cdot\frac{dr_j}{dt}\cdot\frac{d\varphi_j}{dt} + \frac{1}{r_j}\left(\gamma m_i - \frac{e_i e_j}{m_j}\right) \times$$

$$\times [-Q^1_{ij}(\tau_{ji})\sin\varphi_j + Q^2_{ij}(\tau_{ji})\cos\varphi_j] \qquad (i, j = 1, 2;\ i \neq j), \tag{18.2}$$

где

$$\tau_{ji} \equiv |\vec{a}_j(x^0) - \vec{a}_i(x^0)|,\ x^0 = ct,$$

$$R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv a^\alpha_i(\tau_{ji}) - a^\alpha_j(x^0),\ \alpha = 1, 2; \quad R^3_{ij}(\tau_{ji}) = 0,$$

$$v^\alpha_j(x^0) \equiv c\,\frac{da^\alpha_j(x^0)}{dx^0}, \tag{18.3}$$

$$a^1_j(ct) = r_j(t)\cos\varphi_j(t),\ a^2_j(ct) = r_j(t)\sin\varphi_j(t),\ a^3_j = 0,$$

$$Q^\alpha_{ij}(\tau_{ji}) \equiv \frac{R^\alpha_{ij}(\tau_{ji})}{|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^3} + \frac{v^\alpha_i(\tau_{ji})}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^2} - \frac{3(\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})\cdot\vec{v}_i(\tau_{ji}))}{c\,|\vec{R}_{ij}(\tau_{ji})|^4}R^\alpha_{ij}(\tau_{ji}),$$

$$\alpha = 1,\ 2,$$

$$Q^3_{ij}(\tau_{ji}) = 0.$$

Отыскиваем решение системы дифференциальных уравнений нейтрального типа (18.2), (18.3) при $x^0 = ct > ct_0 > 0$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} r_j(t) &= \mathcal{R}_j(t) \in C^1[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \ t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \\ \varphi_j(t) &= \Phi_j(t) \in C^1[t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \ t \in [t_0 - \Delta_{t_0}, t_0], \end{aligned} \tag{18.4}$$

где

$$\Delta_{t_0} = |\vec{a}_1(ct_0) - \vec{a}_2(ct_0)|; \tag{18.5}$$

при этом считаем выполненным соотношение

$$\left| \frac{d}{dx^0} |\vec{a}_1(x^0) - \vec{a}_2(x^0)| \right| < 1, \ x^0 \geqslant ct_0 > 0.$$

18.1. Решения, близкие к круговым орбитам. Так же, как и в § 14, поставим теперь задачу отыскания всех решений системы уравнений (18.2), (18.3) из класса (k, ε), $k \gg 1$, близких к круговым орбитам. А именно будем отыскивать такие решения из класса (k, ε), $k \gg 1$, которые в сферических координатах на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T < \infty$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= r_1^0 + \frac{1}{c}\rho_1(t) + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ r_2(t) &= r_2^0 + \frac{1}{c}\rho_2(t) + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \varphi_1(t) &= \omega t + \varphi_0 + \frac{\psi_1(t)}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ \varphi_2(t) &= \omega t + \varphi_0 - \pi + \frac{\psi_2(t)}{c} + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ & t \in [t_0, t_0 + T], \ T < \infty, \end{aligned} \tag{18.6}$$

где $0 < r_1^0 = \text{const}$, $0 < r_2^0 = \text{const}$.

Справедливо следующее предложение, касающееся решений вида (18.6) уравнений внешней задачи двух тел (18.2), (18.3) и вытекающее из теоремы 17.1 и определения 17.1.

Предложение 18.1. Пусть выполняются все условия теоремы 17.1 и следствия 17.3 и пусть $N = 2$, $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} = \text{const}$ (откуда вытекает справедливость уравнений (18.2), (18.3) в качестве уравнений внешней задачи двух заряженных и тяготеющих тел).

Тогда для того чтобы функции (18.6) с не зависящими от параметра c величинами $r_i^0 > 0$, $\rho_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, были решениями из класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнений (18.2), (18.3) на конечном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ с некоторым заданным $0 < T < \infty$ и малым $\varepsilon = \varepsilon(T) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось два соотношения

$$r_2^0\omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2 - e_1 e_2}{m_2 (r_1^0 + r_2^0)^2}, \tag{18.7а}$$

$$r_1^0\omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2 - e_1 e_2}{m_1 (r_1^0 + r_2^0)^2} \tag{18.7б}$$

и четыре соотношения

$$\frac{d^2\rho_1(t)}{dt^2}=\frac{2(\gamma m_1m_2-e_1e_2)}{m_1(r_1^0+r_2^0)^3}[\rho_1(t)+\rho_2(t)]+\omega^2\rho_1(t)+2r_1^0\omega\frac{d\psi_1(t)}{dt},\tag{18.8а}$$

$$\frac{d^2\rho_2(t)}{dt^2}=\frac{2(\gamma m_1m_2-e_1e_2)}{m_2(r_1^0+r_2^0)^3}[\rho_1(t)+\rho_2(t)]+\omega^2\rho_2(t)+2r_2^0\omega\frac{d\psi_2(t)}{dt},\tag{18.8б}$$

$$\frac{d^2\psi_1(t)}{dt^2}=\frac{r_2^0(\gamma m_1m_2-e_1e_2)}{m_1r_1^0(r_1^0+r_2^0)^3}[\omega(r_1^0+r_2^0)+\psi_1(t)-\psi_2(t)]-\\-\frac{2\omega}{r_1^0}\cdot\frac{d\rho_1(t)}{dt},\tag{18.8в}$$

$$\frac{d^2\psi_2(t)}{dt^2}=\frac{r_1^0(\gamma m_1m_2-e_1e_2)}{m_2r_2^0(r_1^0+r_2^0)^3}[\omega(r_1^0+r_2^0)+\psi_2(t)-\psi_1(t)]-\\-\frac{2\omega}{r_2^0}\cdot\frac{d\rho_2(t)}{dt}.\tag{18.8г}$$

Замечание 18.1. Для того чтобы соотношения (18.7а), (18.7б) имели решения $r_2^0>0$, $r_1^0>0$, $\omega>0$ для значений $m_1>0$, $m_2>0$, $\gamma>0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\gamma m_1m_2-e_1e_2>0.\tag{18.9}$$

При выполнении условия (18.9) система соотношений (18.7а), (18.7б) имеет единственное решение и это решение записывается в следующем виде:

$$\omega=\frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{\gamma m_1m_2-e_1e_2}{(r_2^0)^3m_2}}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{\gamma m_1m_2-e_1e_2}{(r_1^0)^3m_1}},\tag{18.10а}$$

$$r_1^0m_1=r_2^0m_2.\tag{18.10б}$$

Если для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k\geqslant 1$, ввести величину

$$R_{\text{Н}}^{\alpha}(t)\equiv\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}[m_1\mathrm{a}_1^{\alpha}(t)+m_2\mathrm{a}_2^{\alpha}(t)]_{c=\infty},$$

$$\mathrm{a}_j^{\alpha}(t)\equiv a_j^{\alpha}(ct),\quad j=1,\ 2,\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

то для решений (18.6) получим, очевидно,

$$R_{\text{Н}}^{\alpha}(t)\equiv 0$$

в силу того, что (18.6) соответствует случаю

$$\theta_1=\theta_2=\frac{\pi}{2}=\text{const},\ \varphi_1(t)=\varphi_2(t)+\pi+\frac{\psi_1(t)-\psi_2(t)}{c}+O\left(\frac{1}{c^2}\right).$$

В соответствии с результатами § 8 и формулой (8.4) это означает, что координаты ньютоновского центра масс системы двух тел для решения (18.6) постоянны и равны нулю.

Общее решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (18.8а) — (18.8г) можно построить, например, с помощью изображений по Лапласу. Таким путем в полной аналогии с рассмотрением, проведенным в § 14, получим следующую лемму.

Лемма 18.1. Общее решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (18.8а) — (18.8г) *имеет вид*

$$\rho_1(t) = \frac{(r_1^0+r_2^0)^2}{T_0} y_1(\tau), \quad \rho_2(t) = \frac{(r_1^0+r_2^0)^2}{T_0} y_2(\tau),$$

$$\psi_1(t) = \frac{r_1^0+r_2^0}{T_0} y_3(\tau), \quad \psi_2(t) = \frac{r_1^0+r_2^0}{T_0} y_4(\tau), \quad T_0 = \frac{r_1^0+r_2^0}{v_{\max}}, \tag{18.11}$$

$$\begin{aligned} y_j(\tau) = \sum_{l=0}^{7} \sum_{k=1}^{8} b_{jkl} y_k(0) \Bigg\{ & (\delta_{l,1} + \tau\delta_{l,0}) \frac{1}{\Omega^6} + \\ & + \frac{e^{i\Omega}(i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - 8l + 24 + i(2l-7)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] + \\ & + \frac{e^{-i\Omega}(-i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - \quad l + 24 - i(2l-7)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] + \\ & + \Omega^3 \sum_{l=0}^{7} \frac{m_1 b_{j7l} + m_2 b_{j8l}}{m_1+m_2} \left\{ \left(\delta_{l,2} + \tau\delta_{l,1} + \frac{\tau^2}{2}\delta_{l,0} \right) \frac{1}{\Omega^6} + \right. \\ & + \frac{e^{i\Omega}(i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - 10l + 24 + i(2l-9)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] + \\ & \left. + \frac{e^{-i\Omega}(-i\Omega)^{l-7}}{16} [l^2 - 10l + 24 - i(2l-9)\tau\Omega - \tau^2\Omega^2] \right\}, \end{aligned} \tag{18.12}$$

$$j = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \quad \Omega = \frac{\omega(r_1^0+r_2^0)}{v_{\max}},$$

$y_j(0)$ — произвольные постоянные, элементы матрицы $[b_{jkl}]$ даются формулами (14.19), а величина ω дается формулой (18.10а).

Будем интересоваться прежде всего теми из решений вида (18.6), (18.11), (18.12), которые наиболее близки на конечном интервале $t \in [t_0, t_0+T]$ с заданным $T > 0$ к равномерному вращению по окружностям радиусов r_1^0 и r_2^0 для первого и второго тел соответственно.

Теми же способами, которыми была установлена справедливость предложения 14.2, устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 18.2. Наиболее близкие по абсолютной величине на заданном конечном интервале $t \in [t_0, t_0+T]$, $T > 0$, к равномерному вращению по окружностям радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ (для первого и второго тел соответственно) решения (18.6) системы уравнений (18.2), (18.3), принадлежащие классу (k, ε), $k \geqslant 1$, получаются при следующем выборе начальных значений:

$$v_{\max} y_1(0) = \omega(r_1^0 + r_2^0)\, a_1, \quad v_{\max} y_2(0) = \omega(r_1^0 + r_2^0)\, a_2,$$

$$\frac{v_{\max}}{r_1^0 + r_2^0}\, y_2(0) = \omega a_3, \quad \frac{v_{\max}}{r_1^0 + r_2^0}\, y_4(0) = \omega a_4, \tag{18.13}$$

$$\frac{v_{\max}^2}{r_1^0 + r_2^0}\, y_5(0) = \omega^2(r_1^0 + r_2^0)\, a_5, \quad \frac{v_{\max}^2}{r_1^0 + r_2^0}\, y_6(0) = \omega^2\,(r_1^0 + r_2^0) a_6,$$

$$\frac{v_{\max}^2}{(r_1^0 + r_2^0)^2}\, y_7(0) = \omega^2 a_7, \quad \frac{v_{\max}^2}{(r_1^0 + r_2^0)^2}\, y_8(0) = \omega^2 a_8,$$

с безразмерными произвольными постоянными $a_1, \ldots, a_8$, абсолютная величина которых по порядку величины не превышает единицы, и такими, которые обеспечивают вещественность правых частей соотношений (18.12). При таком выборе начальных данных все величины

$$\rho_i(t), \ \psi_i(t), \ \frac{d\rho_i(t)}{dt}, \ \frac{d\psi_i(t)}{dt}, \ i = 1, 2,$$

фигурирующие в формулах (18.6), будут пропорциональны (малой) постоянной $\omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{\gamma m_1 m_2 - e_1 e_2}{(r_2^0)^3\, m_2}}$.

Решения (18.6), (18.11) —(18.13), будем называть *наиболее близкими к круговым орбитам заданных радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$. Очевидно, при фиксированных r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ наиболее близкие к круговым орбитам решения образуют восьмипараметрическое семейство решений из класса $(k, \varepsilon(T))$, $k \geqslant 1$, на заданном интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$.

Перейдем теперь к исследованию устойчивости найденных решений (18.6), (18.11) — (18.13) системы уравнений (18.2), (18.3), принадлежащих классу (k, ε), $k \geqslant 1$.

18.2. Устойчивость решений, наиболее близких к круговым орбитам. Рассмотрим случай, когда вследствие некоторого малого изменения начальных данных решение $X_i^0(t), i = 1, 2, \ldots, 8$, системы уравнений (18.2), (18.3) из класса $(k\ \varepsilon)$, $k \geqslant 1$, принадлежащее семейству наиболее близких к двум круговым орбитам (радиусов r_1^0 и $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$), отклонилось на малую величину $\delta X_i(t)$, причем такую, что справедливо

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{8} |X_i^0(t)|} \equiv |\vec{X}_i^0(t)| \gg |\delta \vec{X}(t)|, \tag{18.14}$$

$$t \in [t_0, t_0 + T_1], \quad T_1 > 0.$$

Для того чтобы изучить развитие во времени (т. е. при $t \in [T_1, T]$, $T > T_1$) этого малого отклонения $\delta X_i(t)$ (и тем самым исследовать устойчивость решения $X_i^0(t)$), удобно исследовать устойчивость тривиального решения соответствующей системы уравнений первого приближения, получаемой из системы уравнений (18.2), (18.3).

Рассматривая последовательно сначала случай начального отклонения (18.14) вида

$$|\vec{X}^0(t)| \gg |\vec{\delta X}(t)| \gg \frac{v_{\max}}{c}, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1], \tag{18.15}$$

а затем — случай начального отклонения формы

$$\frac{v_{\max}}{c} \simeq |\vec{X}^0(t) - [\vec{X}^0(t)]_{c=\infty}| \gg |\delta\vec{X}(t)|, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1], \tag{18.16}$$

и переходя к изображениям по Лапласу, получаем методами § 14 в силу следствий 14.1, 14.2, лемм 14.1 и 14.2 и теоремы 14.1 следующую теорему.

Теорема 18.1. *Устойчивость по первому приближению решения системы уравнений* (18.2), (18.3), *наиболее близкого к двум круговым орбитам радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ *на конечном интервале времени* $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, *не хуже, чем устойчивость по первому приближению на конечном интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$, *решения системы уравнений* (18.2), (18.3) *для* $c = \infty$ *в виде равномерного вращения по двум окружностям радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ *в следующем смысле.*

Для всякого отклонения $\delta X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, *от решения* $X_i^0(t)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, *наиболее близкого к двум круговым орбитам радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$ *системы уравнений* (18.2), (18.3), *можно указать такое отклонение* $\delta\hat{X}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, *от решения системы* (18.2), (18.3) *для* $c = \infty$ *в виде равномерного вращения по двум окружностям радиусов* r_1^0 *и* $r_2^0 = \frac{r_1^0 m_1}{m_2}$, *что на конечном интервале* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *справедливо по первому приближению*

$$|\delta X_i(t) - \delta\hat{X}_i(t)| < Q_i e^{C_1 t}, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \tag{18.17}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 8),$$

где постоянные Q_i, $i = 1, 2, \dots, 8$, *не зависят от* t, *а постоянная* C_1 *для достаточно малых* $\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c}$ *дается формулой*

$$C_1 = 2\ln\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c} + \frac{1}{2}\ln\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} + o\left(\ln\frac{\omega(r_1^0 + r_2^0)}{c}\right), \tag{18.18}$$

где

$$\omega = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{\gamma m_1 m_2 - e_1 e_2}{(r_2^0)^3 m_2}}\,.$$

18.3. Уравнения задачи N тел с модельным распределением массы и заряда. Вернемся теперь к рассмотрению уравнений внешней задачи N электрически заряженных тяготеющих тел (17.61):

$$c \iiint \rho_j (x^0, \xi) \frac{dv^\alpha (x^0)}{dx^0} d\vec{\xi} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \gamma \iiint \rho_j (x^0, \vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \iiint \frac{\rho_i (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|} d\vec{\xi} d\vec{\xi}' -$$

$$- \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \iiint \sigma_j (x^0, \vec{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \iiint \frac{\sigma_i (x^0 - |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|} d\vec{\xi} d\vec{\xi}' + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N), \tag{18.19}$$

где плотность массы $\rho_j (\xi)$ и плотность электрического заряда $\sigma_j (\xi)$ j-го тела нормированы следующим образом:

$$\iiint \rho_j (\xi^0, \vec{\xi}) d\vec{\xi} = m_j, \tag{18.20}$$

$$\iiint \sigma_j (\xi^0, \vec{\xi}) d\vec{\xi} = e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

В уравнениях (18.19) преобразуем левую часть с помощью уравнения непрерывности (17.2). Для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнение непрерывности (17.2) в силу формул (12.9) принимает следующий вид:

$$c \frac{\partial \rho (x^0)}{\partial x^0} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial [\rho (x^0, \vec{\xi}) v^\beta (x^0)]}{\partial \xi^\beta} = O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \tag{18.21}$$

откуда при условиях теоремы 17.1 получаем N уравнений:

$$c \frac{\partial \rho_j (x^0)}{\partial x^0} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial [o_j (x^0, \vec{\xi}) v^\beta (x^0)]}{\partial \xi^\beta} = O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) \tag{18.22}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N)$$

Для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, представим теперь левые части соотношений (18.19) в виде двух алгебраических слагаемых, после чего во втором из них воспользуемся уравнением непрерывности (18.22) и проинтегрируем в этом же слагаемом по частям:

$$c \iiint \rho_j (x^0, \vec{\xi}) \frac{\partial v^\alpha (x^0)}{\partial x^0} d\vec{\xi} = c \frac{\partial}{\partial x^0} \iiint \rho_j (x^0, \xi) v^\alpha (x^0) d\vec{\xi} +$$

$$+\iiint v^{\alpha}(x^0)\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\,[\rho_j(x^0,\vec{\xi})\,v^{\beta}(x^0)]}{\partial\xi^{\beta}}\,d\vec{\xi}=$$

$$=c\,\frac{\partial}{\partial x^0}\iiint \rho_j(x^0,\vec{\xi})\,v^{\alpha}(x^0)\,d\vec{\xi}+O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \tag{18.23}$$

поскольку

$$u^{\alpha}(s)=\frac{dx^{\alpha}(s)}{ds}=\frac{dx^{\alpha}(s(x^0))}{dx^0}\cdot\frac{dx^0}{ds}=\frac{v^{\alpha}(x^0)}{c}\,\frac{dx^0}{ds}=$$

$$=\frac{v^{\alpha}(x^0)}{c}\left[1+O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right)\right].$$

Координаты центра массы j-го тела в момент x^0 определяются следующими соотношениями:

$$\iiint \rho_j(x^0,\vec{\xi})\,\xi^{\alpha}d\vec{\xi}=m_j a^{\alpha}_j(x^0),\quad \alpha=1,2,3. \tag{18.24}$$

Для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k\gg 1$, продифференцируем левую и правую части соотношений (18.24) по x^0 и воспользуемся уравнением непрерывности (18.22). В результате получим для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k\gg 1$,

$$\iiint \rho_j(x^0,\vec{\xi})\,v^{\alpha}(x^0)\,d\vec{\xi}=c\,\frac{d}{dx^0}\,[m_j a^{\alpha}_j(x^0)]+O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \tag{18.25}$$

$$j=1,2,\ \ldots,\ N;\quad \alpha=1,2,3.$$

С помощью соотношений (18.24), (18.25) для решений из класса $(k,\ \varepsilon)$, $k\gg 1$, представим левые части соотношений (18.19) в следующем виде:

$$c\iiint \rho_j(x^0,\vec{\xi})\,\frac{\partial v^{\alpha}(x^0)}{\partial x^0}\,d\vec{\xi}=c^2\,\frac{d^2}{(dx^0)^2}\,[m_j a^{\alpha}_j(x^0)]+O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \tag{18.26}$$

$$j=1,2,\ \ldots,\ N;\quad \alpha=1,2,3.$$

Поскольку в уравнения (18.19) плотности массы и заряда входят только под знаком интеграла по пространственным переменным, то для описания распределения массы и заряда в уравнениях (18.19) в широком классе случаев достаточно воспользоваться следующей моделью для $\rho_j(\xi)$ и $\sigma_j(\xi)$:

$$\begin{aligned}\rho_j(\xi^0,\vec{\xi})&=\sum_{s=1}^{n_j} m_{js}\,\delta\,[\vec{\xi}-\vec{a}_{js}(\xi^0)],\\ \sigma_j(\xi^0,\vec{\xi})&=\sum_{s=1}^{n_j} e_{js}\,\delta\,[\vec{\xi}-\vec{a}_{js}(\xi^0)],\end{aligned} \tag{18.27}$$

где $\delta(\vec{\xi})$ — дельта-функция Дирака.

Эта модель соответствует формально такому случаю, когда масса и заряд j-го тела сосредоточены в n_j точках трехмерного пространства, причем s-я точка ($s = 1, 2, \ldots, n_j$) в момент времени ξ^0 находится в точке $\vec{a}_{js}(\xi^0)$.

Из условий нормировки (18.20) для величин $\{m_{js}\}$, $\{e_{js}\}$ получаем два следующих отношения:

$$\sum_{s=1}^{n_j} m_{js} = m_j; \quad \sum_{s=1}^{n_j} e_{js} = e_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{18.28}$$

Замечание 18.2. В частном случае $n_j = 1$; $j = 1, 2, \ldots, N$ соотношения (18.27) сводятся к модели N точечных тел:

$$\begin{aligned} \rho_j(\xi^0, \vec{\xi}) &= m_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)], \\ \sigma_j(\xi^0, \vec{\xi}) &= e_j \delta[\vec{\xi} - \vec{a}_j(\xi^0)]. \end{aligned} \tag{18.29}$$

Подставляя соотношения (18.27) в левую и правую части соотношений (18.19), получаем с помощью выражений (11.34), (11.35а) методами § 11, п. 11.4, следующую лемму.

Лемма 18.3. *Пусть выполняются все условия предложения* 17.2, *условие* (17.56) *леммы* 17.1 *и условие в) леммы* 17.2. *Тогда для внешней задачи N электрически заряженных тяготеющих тел с модельным распределением массы и заряда* (18.27), (18.28) *с функциями* $a_{js}^{\alpha}(x^0) \in C^1(R^1)$, $\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \ldots, N$; $s = 1, 2, \ldots, n_j$, *удовлетворяющими соотношениям*

$$\left| \frac{d\vec{a}_{js}(x^0)}{dx^0} \right| < 1, \quad \forall x^0 \in R^1, \quad j = 1, 2, \ldots, N; \tag{18.30}$$

$$s = 1, 2, \ldots, n_j,$$

уравнения движения (18.19), (18.26) *для решений из класса* (k, ε), $k \geqslant 1$, *принимают следующий вид с точностью до* $O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right)$:

$$c^2 \frac{d^2}{(dx^0)^2}[m_j \cdot a_j^{\alpha}(x^0)] = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{N} \sum_{s=1}^{n_j} \sum_{s'=1}^{n_i} (\gamma m_{js} m_{is'} - e_{js} e_{is'}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{a_{is'}^{\alpha}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - a_{js}^{\alpha}(x^0)}{|\vec{a}_{is'}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - \vec{a}_{js}(x^0)|^3} + \right.$$

$$+ \frac{\partial a_{is}^{\alpha}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|)}{\partial x^0} \times$$

$$\times \frac{1}{|\vec{a}_{is'}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)| - \vec{a}_{js}(x^0)|^2} -$$

$$- 3 \sum_{\beta=1}^{3} \frac{a_{is'}^{\beta}(x^0 - |\vec{a}_{js'}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - a_{js}^{\beta}(x^0)}{|\vec{a}_{is}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - \vec{a}_{js}(x^0)|^4} \times$$

$$\times \frac{\partial a^{\beta}_{is'}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|)}{\partial x^0} [a^{\alpha}_{is'}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) -$$

$$- a^{\alpha}_{js}(x^0)] + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, N; \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (18.31)$$

В дальнейшем будет удобно в функциях $a^{\alpha}_{js}(x^0)$, фигурирующих в формулах (18.27) и соотношениях (18.31), выделять явным образом координаты центра масс $a^{\alpha}_{j}(x^0)$, определяемые посредством соотношений (18.24). С этой целью представим функции $a^{\alpha}_{js}(x^0)$ в следующем виде:

$$a^{\alpha}_{js}(x^0) = a^{\alpha}_{j}(x^0) + \Delta^{\alpha}_{js}(x^0), \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \ldots, N; \quad (18.32)$$
$$s = 1, 2, \ldots, n_j.$$

Таким образом, в функциях $a^{\alpha}_{js}(x)$ выделено движение центра массы j-го тела, описываемое координатами центра массы $a^{\alpha}_{j}(x^0)$ этого тела, и внутреннее движение, описываемое функциями $\Delta^{\alpha}_{js}(x^0)$.

Вообще говоря, чтобы замкнуть систему N уравнений (18.31), необходимо дописать еще $\left(\sum\limits_{j=1}^{N} n_j\right)$ уравнений, характеризующих внутреннее движение в каждом из N тел, и учесть уравнение непрерывности (17.2). Подчеркнем при этом, что при получении уравнений движения (18.31) были учтены лишь силы тяготения и силы электромагнитного взаимодействия N заряженных тел, которые для решений из класса (k, ε) проявляют себя как *дальнодействующие силы.* Вместе с тем в реальных физических ситуациях на малых расстояниях в игру вступают так называемые *короткодействующие силы* той или иной природы, в зависимости от конкретной физической ситуации. Эти силы проявляются внутри каждого из N рассматриваемых тел. В качестве таких короткодействующих сил могут проявляться силы межмолекулярного взаимодействия, особенно существенные в твердых и жидких телах, либо даже короткодействующие ядерные силы, определяющие взаимодействие внутри атомных ядер, либо силы иной природы.

В свою очередь, эти короткодействующие силы определяют вид уравнений состояния вещества для описания внутреннего движения в каждом из N рассматриваемых тел. Это могут быть уравнения движения твердого тела, если j-е тело двигается в целом как твердое тело, либо уравнения гидродинамики, если j-е тело двигается в целом как жидкость, либо та или иная феноменологическая модель ядра (коллективная, гидродинамическая, обобщенная и т. п.*), если j-е тело ведет себя в целом как существенно ядерная материя, и т. д.

---

* Подробное описание феноменологических моделей ядра можно найти в монографиях А. С. Давыдова [61], О. Бора и Б. Моттельсона [22] и В. Г. Соловьева [172].

В предлагаемом ниже подходе мы не будем конкретизировать природы сил, определяющих внутреннее движение в каждом из N тел, но будем считать, что на движение внутри каждого из N тел дальнодействующие силы, описываемые уравнениями внешней задачи (18.31), влияют пренебрежимо мало. Как результат действия внутренних сил получаем некоторый определенный вид функций

$$\{\Delta_{js}(x^0)\}_{s=1}^{n_j} \text{ при данном разбиении } \{e_{js}\}_{s=1}^{n_j}. \tag{18.33}$$

Но если известны функции (18.33), то система уравнений (18.31) замкнута и представляет собой систему $3N$ дифференциальных уравнений второго порядка нейтрального типа с отклоняющимся аргументом относительно $3N$ искомых функций $a_j^\alpha(x^0)$, $j = 1, 2, \ldots, N$; $\alpha = 1, 2, 3$. Дополненная начальными условиями на начальном интервале, эта система уравнений приводит к постановке основной начальной задачи для этой системы уравнений.

18.4. Уравнения задачи двух тел с модельным распределением массы и заряда. Рассмотрим теперь один важный частный случай задачи двух тел, когда гравитационное взаимодействие двух тел пренебрежимо мало по сравнению с электромагнитным взаимодействием тел:

$$\gamma m_1 m_2 \ll |e_1 e_2|. \tag{18.34}$$

Пренебрегая тогда в правой части соотношений (18.31) слагаемыми, пропорциональными гравитационной постоянной γ, для случая $N = 2$ с учетом (18.32) для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, переписываем систему уравнений (18.31) с точностью до $O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O\left(\frac{\gamma m_1 m_2}{e_1 e_2}\right)$:

$$c^2 \frac{d^2}{(dx^0)^2}[m_j a_j^\alpha(x^0)] =$$

$$= -\sum_{s=1}^{n_j}\sum_{s'=1}^{n_l} e_{js}e_{is'}\left\{\frac{a_{is'}^\alpha(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - a_{js}^\alpha(x^0)}{|\vec{a}_{is'}(x^0 - |\vec{a}_{js}(x^0) - \vec{a}_{is'}(x^0)|) - \vec{a}_{js}(x^0)|^3} + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial a_{is}^\alpha(x^0)}{\partial x^0}\right)\frac{1}{|\vec{a}_{is'}(x^0) - \vec{a}_{js}(x^0)|^2} -$$

$$-3\sum_{\beta=1}^{3}\frac{a_{is'}^\beta(x^0) - a_{js}^\beta(x^0)}{|\vec{a}_{is'}(x^0) - \vec{a}_{js}(x^0)|}\left(\frac{\partial a_{is'}^\beta(x^0)}{\partial x^0}\right)\times$$

$$\times [a_{is'}^\alpha(x^0) - a_{js}^\alpha(x^0)], \qquad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \tag{18.35}$$

где $a_{js}^\alpha(\xi^0) = a_j^\alpha(\xi^0) + \Delta_{js}^\alpha(\xi^0)$, $\alpha = 1, 2, 3$.

При условиях леммы 18.3 движение первого и второго тел происходит в ограниченной пространственной области D_1. Поэтому координаты «центра масс» двух тел, определяемые соотношением

$$R^{\alpha}(x^0) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,[m_1 a_1^{\alpha}(x^0) + m_2 a_2^{\alpha}(x^0)], \qquad (18.36)$$

для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, постоянны, во всяком случае, с точностью до величин порядка $\frac{v_{\max}}{c}$.

В результате получаем следующее утверждение.

Предложение 18.3. При условиях леммы 18.3 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, координаты «центра масс» двух тел (18.36) удовлетворяют следующему соотношению:

$$\frac{dR^{\alpha}(x^0)}{dx^0} = O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right). \qquad (18.37)$$

Если $m_1 = m_2$ и движение внутри каждого тела происходит с невысокими скоростями, то в силу предложения 18.3 для решений из класса (k, ε), $k \gg 1$, уравнения (18.35) можно с точностью до $O\left(\left|\frac{\partial\vec{\Delta}_{ls'}}{\partial x^0}\right|\right) + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right)$ переписать только через относительные координаты, определяемые посредством формул

$$a_{12}^{\alpha}(x^0) \equiv a_1^{\alpha}(x^0) - a_2^{\alpha}(x^0), \quad \alpha = 1, 2, 3. \qquad (18.38)$$

Соответствующий результат дается следующей леммой, вытекающей из леммы 18.3 и предложения 18.3.

Лемма 18.4. Пусть выполняются все условия леммы 18.3, *условия* (18.30), *условие* (18.34), $N = 2$, и $m_1 = m_2 = m$.

Тогда для внешней задачи двух электрически заряженных и тяготеющих тел с модельным распределением массы и заряда (18.27), (18.28) *с функциями* $a_{js}^{\alpha}(x^0) \in C^1(R^1)$, $\alpha = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$; $s = 1, 2, \ldots, n_j$, *удовлетворяющими соотношениям* (18.32), *уравнения движения* (18.31) *для решений из класса* (k, ε), $k \gg 1$, *принимают следующий вид с точностью до* $O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O\left(\left|\frac{\partial\vec{\Delta}_{ls}}{\partial x^0}\right|\right) + O\left(\frac{\gamma m_1 m_2}{e_1 e_2}\right)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\,[m a_{12}^{\alpha}(x^0)] = \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2} e_{1,s}e_{2,s'} \times$$

$$\times \left\{ \frac{a_{12}^{\alpha}(x^0 - |\vec{a}_{12} + \vec{\Delta}_{1s} - \vec{\Delta}_{2s'}|) + a_{12}^{\alpha}(x^0) + 2\Delta_{1s}^{\alpha}(x^0) - 2\Delta_{2s'}^{\alpha}(x^0)}{\left|\frac{1}{2}\vec{a}_{12}(x^0 - |\vec{a}_{12} + \vec{\Delta}_{1s} - \vec{\Delta}_{2s'}|) + \frac{1}{2}\vec{a}_{12}(x^0) + \vec{\Delta}_{1s}(x^0) - \vec{\Delta}_{2s'}(x^0)\right|^3} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial a_{12}^{\alpha}(x^0)}{\partial x^0}\right) \frac{1}{|\vec{a}_{12}(x^0) + \vec{\Delta}_{1s}(x^0) - \vec{\Delta}_{2s'}(x^0)|^2} -$$

$$-3\sum_{\beta=1}^{3}\frac{[a_{12}^{\beta}(x^0)+\Delta_{1s}^{\beta}(x^0)-\Delta_{2s'}^{\beta}(x^0)]\left(\dfrac{\partial a_{12}^{\beta}(x^0)}{\partial x^0}\right)}{|\vec{a}_{12}(x^0)+\vec{\Delta}_{1s}(x^0)-\vec{\Delta}_{2s'}(x^0)|^4}\times$$

$$\left.\times\,[a_{12}^{\alpha}(x^0)+\Delta_{1s}^{\alpha}(x^0)-\Delta_{2s'}^{\alpha}(x^0)]\right\}\equiv\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}e_{1s}e_{2s'}\boldsymbol{R}_{ss'}^{\alpha}(x^0),\quad(18.39)$$

где $\vec{a}_{12}\equiv\vec{a}_{12}(x^0)$, $\vec{\Delta}_{ls''}\equiv\vec{\Delta}_{ls''}(x^0)$ $\qquad(\alpha=1,2,3)$.

Для доказательства леммы надо из левых и правых частей соотношений (18.35) для $j=1$ вычесть левые и правые части соотношений (18.35) для $j=2$, после чего воспользоваться условиями леммы.

Особый интерес представляет случай движения в плоскости, т. е. случай, когда

$$a_{12}^{3}(x^0)\equiv 0,\qquad(18.40)$$

$$\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}e_{1s}e_{2s'}\mathbf{R}_{ss'}^{3}(x^0)\equiv 0.\qquad(18.41)$$

Замечание 18.4. В сферических координатах

$$\begin{aligned}a_{12}^{1}&=r_{12}\sin\theta_{12}\cos\varphi_{12},\\ a_{12}^{2}&=r_{12}\sin\theta_{12}\sin\varphi_{12},\\ a_{12}^{3}&=r_{12}\cos\theta_{12}\end{aligned}\qquad(18.42)$$

условие (18.40), очевидно, примет вид

$$\theta_{12}=\frac{\pi}{2}=\mathrm{const},\qquad(18.43)$$

т. е. движение происходит в «экваториальной плоскости».

Система уравнений (18.39) для случая (18.41) — (18.43) примет вид системы следующих двух уравнений:

$$\frac{d^2r_{12}}{dt^2}=r_{12}\left(\frac{d\varphi_{12}}{dt}\right)^2+\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}\frac{e_{1s}e_{2s'}}{m}(\mathbf{R}_{ss'}^{1}\cos\varphi_{12}+\mathbf{R}_{ss'}^{2}\sin\varphi_{12}),\qquad(18.44а)$$

$$\frac{d^2\varphi_{12}}{dt^2}=-\frac{2}{r_{12}}\cdot\frac{dr_{12}}{dt}\cdot\frac{d\varphi_{12}}{dt}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}\frac{e_{1s}e_{2s'}}{m}(-\mathbf{R}_{ss'}^{1}\sin\varphi_{12}+\mathbf{R}_{ss'}^{2}\cos\varphi_{12}).\qquad(18.44б)$$

Проанализируем систему уравнений (18.44а), (18.44б). Исследуем условия, при которых реализуется решение системы уравнений (18.44а), (18.44б) в виде равномерного вращения по окружности радиуса r_{12}^{0}. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 18.4. Система уравнений (18.44а), (18.44б) имеет решение в виде равномерного вращения по окружности радиуса r_{12}^0

$$r_{12}(t) = r_{12}^0 = \text{const},$$
$$\varphi_{12}(t) = \Phi_{12} + \omega t \equiv \varphi_{12}^0;\quad \Phi_{12} = \text{const};\quad \omega = \text{const} \qquad (18.45)$$

тогда и только тогда, когда выполняются два соотношения

$$\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2} e_{1s}e_{2s'}\,(\mathbf{R}^1_{ss'}\cos\varphi_{12}^0 + \mathbf{R}^2_{ss'}\sin\varphi_{12}^0) = \text{const} < 0, \qquad (18.46\text{а})$$

$$\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2} e_{1s}e_{2s'}\,(-\,\mathbf{R}^1_{ss'}\sin\varphi_{12}^0 + \mathbf{R}^2_{ss'}\cos\varphi_{12}^0) \equiv 0. \qquad (18.46\text{б})$$

При выполнении условий (18.46а), (18.46б) частота вращения ω связана с радиусом окружности r_{12}^0 посредством формулы

$$\omega^2 = \frac{-1}{m r_{12}^0}\sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2} e_{1s}e_{2s'}\,(\mathbf{R}^1_{ss'}\cos\varphi_{12}^0 + \mathbf{R}^2_{ss'}\sin\varphi_{12}^0). \qquad (18.47)$$

Замечание 18.5. Из определения величин $\mathbf{R}^\alpha_{ss'}(x^0)$ видно, что в точечной модели (18.29) левая часть соотношения (18.46а) постоянна с точностью до членов порядка величины $\frac{v_{\max}}{c}$, а левая часть соотношений (18.46б) в точечной модели (18.29) равна нулю с точностью до членов порядка величины $\frac{v_{\max}}{c}$.

Рассмотрим теперь случай малых отклонений решений системы уравнений (18.44а), (18.44б) от решения в виде равномерного вращения по окружности радиуса r_{12}^0, описанного в предложении 18.4.

Предложение 18.5. Пусть величины $\{e_{1s}\}_{s=1}^{n_1}$, $\{e_{2s'}\}_{s'=1}^{n_2}$ и функции $\{\Delta_{1s}(x^0)\}_{s=1}^{n_1}$, $\{\Delta_{2s'}(x^0)\}_{s'=1}^{n_2}$ таковы, что для некоторых начальных условий система уравнений (18.44а), (18.44б) имеет решение

$$r_{12}(x^0) = r_{12}^0 + \delta r_{12}(x^0),\quad \varphi_{12}(x^0) = \varphi_{12}^0(x^0) + \delta\varphi_{12}(x^0), \qquad (18.48)$$

близкое к равномерному вращению по окружности радиуса r_{12}^0, описываемому формулами (18.45) — (18.47) с малыми $\delta r_{12}(x^0)$, $\delta\varphi_{12}(x^0)$, причем такими, что $\delta\varphi_{12}(x^0)$ есть величина порядка $[\delta r_{12}(x^0)]^q$:

$$\max_{x^0\in[x_0^0,\,T]}|\delta\varphi_{12}(x^0)| \simeq \max_{x^0\in[x_0^0,\,T]}|\delta r_{12}(x^0)|^q, \qquad (18.49)$$

с некоторым натуральным $q \gg 1$, и такими, что уравнение (18.44б) для решения (18.48) выполняется с точностью до величин высшего порядка малости по δr_{12} и по $\delta\varphi_{12}$.

Тогда для решений из класса $(k.\ \varepsilon)$, $k \gg 1$, с точностью до $O\left(\delta r_{12}\frac{\partial\delta r_{12}}{\partial x^0}\right) + O\left(\frac{v_{\max}^2}{c^2}\right) + O(|\delta r_{12}|^q)$ из системы двух уравнений

(18.44а), (18.44б) получаем следующее уравнение относительно величины $\delta r_{12}(x^0)$ *:

$$\frac{d^2[\delta r_{12}(x^0)]}{dt^2} + \varkappa\delta r_{12}(x^0) = \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}\frac{e_{1s}e_{2s'}}{m}\left\{\sum_{j=1}^{q-1} A_{ss',j}(x^0)[\delta r_{12}(x^0)]^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{q-1} B_{ss',j}(x^0)[\delta r_{12}(x^0 - |\vec{a}_{12}(x^0) + \vec{\Delta}_{1s}(x^0) - \vec{\Delta}_{2s'}(x^0)|)]^j\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right) + O\left(\delta r_{12}\frac{\partial\delta r_{12}}{\partial x^0}\right) + O([\delta r_{12}]^q), \qquad (18.50)$$

где $\{A_{ss',j}\}_{j=1}^{q-1}$, $\{B_{ss',j}\}_{j=1}^{q-1}$ — известные функции от r^0_{12}, ω, $\{\Delta_{1,s}(x^0)\}_{s=1}^{n_1}$, $\{\Delta_{2,s'}(x^0)\}_{s'=1}^{n_2}$.

Замечание 18.6. В частности, если функции $|\vec{a}^{\,0}_{12} + \vec{\Delta}_{1s} - \vec{\Delta}_{2s'}|$ не зависят от x^0 и $\varkappa = \omega^2 > 0$, то уравнение (18.50) с точностью до $O\left(\delta r_{12}\frac{\partial\delta r_{12}}{\partial x^0}\right) + O([\delta r_{12}]^q) + O\left(\frac{v^2_{\max}}{c^2}\right)$ принимает вид дифференциального квазилинейного уравнения второго порядка с постоянными распределенными запаздываниями аргумента (т. е. получаем уравнение движения для нелинейного нелокального осциллятора):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = \sum_{s=1}^{n_1}\sum_{s'=1}^{n_2}\frac{e_{1s}e_{2s'}}{m}\left\{\sum_{j=1}^{q-1} A_{ss',j}[y(t)]^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{q-1} B_{ss',j}\left[y\left(t - \frac{|\vec{a}^{\,0}_{12} + \vec{\Delta}_{1s} - \vec{\Delta}_{2s'}|}{c}\right)\right]^j\right\}, \qquad (18.51)$$

где

$$\vec{a}^{\,0}_{12} \equiv \{r^0_{12}\cos\varphi^0_{12},\ r^0_{12}\sin\varphi^0_{12},\ 0\},\quad y(t) \equiv \delta r_{12}(ct).$$

§ 19. Проблема квантования задачи двух тел в релятивистской электродинамике

Хорошо известно, что попытка применить классическую механику и электродинамику для объяснения атомных явлений приводит к результатам, которые, как правило, находятся в резком противоречии с экспериментальными данными. Глубокое противоречие классической теории с экспериментом при попытке описать атомные яв-

---

* По аналогии с § 9 устанавливаем, что в уравнении (18.50) случай $\varkappa > 0$ реализуется тогда, когда эффективная потенциальная энергия взаимодействия двух тел $U_{\text{э}}$ имеет минимум при $r_{12}(t) = r^0_{12}$, $\varphi_{12}(t) = \omega t + \Phi_{12}$, а случай $\varkappa < 0$ реализуется тогда, когда $U_{\text{э}}$ имеет максимум при $r_{12}(t) = r^0_{12}$, $\varphi_{12}(t) = \omega t + \Phi_{12}$.

ления — явления, происходящие с частицами очень малой массы в очень малых участках пространства,— привели к необходимости построения специальной теории, которая зарекомендовала себя вполне удовлетворительно при описании атомных явлений невысоких энергий. Такая теория, как известно, получила название *квантовой механики.*

Изложению математических основ квантовой механики и ее многочисленным приложениям, возникшим за период времени, начиная с первых основополагающих работ Л. де Бройля, Н. Бора, В. Гейзенберга, Э. Шредингера, М. Борна и В. Паули и до настоящего времени, посвящено очень большое количество оригинальных работ и прекрасных учебников, список наиболее интересных из которых составил бы тысячи наименований. Из этих работ и учебников укажем лишь работы [63, 64, 96, 127, 190].

Ниже в этом параграфе изложим основную логическую схему построения квантовой механики невысоких энергий, называемую нерелятивистской квантовой механикой, и укажем те проблемы, которые возникают при попытке обобщения нерелятивистской квантовой механики на случай высоких энергий, т. е. с учетом эффектов, связанных с конечностью скорости света, а также попытаемся наметить некоторые пути, позволяющие решить часть этих проблем.

19.1. Формулировка нерелятивистской квантовой механики. Обычная формулировка нерелятивистской квантовой механики основывается прежде всего на постулате, что вся необходимая информация о системе может быть получена, если известна функция состояния физической системы Ψ. Эта функция является вектором в некотором комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В качестве базиса в этом гильбертовом пространстве выбираются собственные функции Ψ_n некоторого самосопряженного оператора H, называемого *оператором Гамильтона* или *гамильтонианом* системы, определенного в области D; при этом выполняется соотношение

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n, \quad \Psi_n \in D, \tag{19.1}$$

называемое *уравнением Шредингера без времени.*

Уравнению (19.1) можно сопоставить уравнение следующего вида:

$$i\hbar \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t), \tag{19.2}$$

где $\hbar$— постоянная Планка, равная 1,054 · 10^{-27} *эрг · сек*, оператор H — тот же, что и в уравнении (19.1), а функция $\psi(t)$ имеет вид

$$\psi(t) = \chi(t)\Psi, \tag{19.3}$$

где $\Psi \in \mathcal{H}$.

Уравнение (19.1) называется *уравнением Шредингера со временем.*

Оператор Гамильтона H для рассматриваемой физической системы строится следующим образом. Пусть рассматриваемая классическая система является гамильтоновой, т. е. классические уравнения движения этой системы могут быть получены из вещественнозначной функции Гамильтона $H(q^i(t), p^i(t))$, зависящей от *обобщенных координат* $q^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, и канонически сопряженных с ними *обобщенных импульсов*

$$p^i(t) = \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{dq^i(t)}{dt}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{19.4}$$

как уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p^i}, \\ \dfrac{dp^i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{19.5}$$

Тогда оператор Гамильтона H получается из этой функции Гамильтона так. Считают q^i и p^i операторами в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве и подчиняют их так называемым *каноническим перестановочным соотношениям*

$$q^l p^j - p^j q^l \equiv [q^l, p^j] = i\hbar\delta_{lj}, \quad [q^l, q^j] = [p^l, p^j] = 0. \tag{19.6}$$

Для квантовомеханической системы с построенным указанным образом оператором Гамильтона не существует иных независимых перестановочных соотношений для операторов системы, кроме перестановочных соотношений (19.6) между операторами обобщенных координат q^i и операторами обобщенных импульсов p^i. При этом всякий оператор выражается через операторы q^i и p^i. Построение сепарабельного гильбертова пространства, в котором определены самосопряженные операторы обобщенных координат q^i и обобщенных импульсов p^i, оператор Гамильтона и выполняются соотношения (19.6), называется *представлением Шредингера коммутационных соотношений*.

Наряду с представлением Шредингера можно пользоваться иными представлениями коммутационных соотношений, например так называемым *представлением Гейзенберга*.

Переход к представлению Гейзенберга в общем случае осуществляется с помощью унитарного преобразования, при котором вектор состояния $\psi(t)$, фигурирующий в уравнении Шредингера (19.2), преобразуется по формуле

$$\Phi = V^{-1}(t)\,\psi(t) = \psi(0), \tag{19.7}$$

где Φ — волновая функция (вектор состояния) в представлении Гейзенберга.

Подставляя (19.7) в уравнение Шредингера со временем (19.2), получаем для случая, когда оператор H не зависит от t явно, что

$$V(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}, \tag{19.8}$$

где экспонента понимается в смысле разложения в соответствующий степенной ряд. Поскольку оператор H самосопряжен, то оператор $V(t)$ унитарен:

$$V^{+}(t)\,V(t) = 1. \tag{19.9}$$

С учетом (19.8) для не зависящего явно от t оператора H закон преобразования (19.7) принимает вид

$$\Phi = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,\psi(t). \tag{19.10}$$

Всякий оператор $F(p, q)$, заданный в представлении Шредингера, при переходе к представлению Гейзенберга в силу (19.8) будет иметь в гейзенберговском представлении (обозначим его через $F_H(t)$), согласно общим правилам теории представлений, следующий вид:

$$F_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,F e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \tag{19.11}$$

В начальный момент времени $t = 0$ выражения как для векторов состояния, так и для операторов в обоих представлениях совпадают. При этом оператор H в представлении Гейзенберга будет тот же, что и в представлении Шредингера:

$$H_H = H, \tag{19.12}$$

что уже вытекает непосредственно из формулы (19.11).

Уравнения движения в гейзенберговском представлении получим, дифференцируя (19.11) по t:

$$\frac{\partial F_H}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[H, F_H]. \tag{19.13}$$

Коммутационные соотношения (19.6) сохраняют свою форму и в представлении Гейзенберга:

$$[q_H^i, p_H^j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [q_H^i, q_H^j] = [p_H^i, p_H^j] = 0, \tag{19.14}$$

в чем можно убедиться, действуя на левые и правые части соотношений (19.6) слева оператором $e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$, справа оператором $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ и применяя формулы (19.11).

Таким образом, для не зависящего явно от t оператора H в представлении Шредингера все операторы не зависят от времени, тогда как вектор состояния $\psi(t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением движения (19.2). В гейзенберговском представлении оператор $H_H = H$ и вектора состояния Φ не зависят от t, тогда как операторы эволюционируют со временем в соответствии с уравнением движения (19.13).

Рассмотрим два примера классических гамильтоновых систем и их квантование. Эти примеры понадобятся нам ниже.

Пример 1. Эволюция во времени системы двух точечных зарядов e_1 и e_2 в рамках нерелятивистской электродинамики может быть описана в относительных координатах $\vec{x}_{12}(t)$ уравнением, полученным формально из уравнения (18.39) при $\frac{1}{c} = 0$ в точечной модели (18.29) и имеющим вид

$$\frac{d^2}{dt^2} m x_{12}^{\alpha}(t) = -e_1 e_2 \frac{\partial}{\partial x_{12}^{\alpha}} \frac{1}{|\vec{x}_{12}|} \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{19.15}$$

Эта система двух точечных нерелятивистских зарядов является гамильтоновой и уравнение (19.5) для нее можно получить из функции Гамильтона системы

$$H(q^i,\ p^i) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{q^{1^2} + q^{2^2} + q^{3^2}}},\quad q^i = x_{12}^i \tag{19.16}$$

с помощью уравнений движения в форме Гамильтона (19.5).

Рассмотрим теперь квантовомеханическую задачу для системы двух точечных нерелятивистских зарядов в представлении Шредингера.

Квантовомеханический оператор Гамильтона для системы двух точечных нерелятивистских зарядов имеет вид (19.16), но теперь величины p^i и q^i являются операторами в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ векторов состояний Ψ. Операторы p^i и q^i подчиняем каноническим перестановочным соотношениям (19.6).

В частности, в координатном представлении коммутационных соотношений (т. е. в таком гильбертовом пространстве, в котором можно выбрать базис из собственных векторов операторов координат q^i) оператор импульса p^i имеет следующее представление (удовлетворяющее всем коммутационным соотношениям (19.6)):

$$p^i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i},\quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{19.17}$$

Оператор Гамильтона, согласно изложенному выше, в координатном представлении в силу (19.17) принимает следующий вид:

$$H = H(q^i,\ p^i) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{q^{1^2} + q^{2^2} + q^{3^2}}}, \tag{19.18}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial q^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial q^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial q^{3^2}}.$$

Соответствующее уравнение Шредингера без времени для оператора Гамильтона в координатном представлении запишется в форме

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{e_1 e_2}{\sqrt{q^{1^2} + q^{2^2} + q^{3^2}}}\right]\Psi = E\Psi. \tag{19.19}$$

Перейдем теперь к гейзенберговскому координатному представлению. Уравнения движения (19.13) для данного случая примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_H^j}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H,\ q_H^j], \\ \frac{\partial p_H^j}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H,\ p_H^j] \qquad (j = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned} \tag{19.20}$$

или с учетом (19.16), (19.14)

$$\frac{\partial q_H^j(t)}{\partial t} = \frac{p_H^j}{m},$$

$$\frac{\partial p_H^j(t)}{\partial t} = -e_1 e_2 \frac{\partial}{\partial q_H^j} \frac{1}{\sqrt{q_H^{1^2} + q_H^{2^2} + q_H^{3^2}}}.$$

Эти два уравнения можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 q_H^j(t)}{\partial t^2} = \frac{-e_1 e_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial q_H^j} \frac{1}{\sqrt{{q_H^1}^2 + {q_H^2}^2 + {q_H^3}^2}}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3, \tag{19.21}$$

что в точности совпадает по форме с классическим уравнением движения (19.15) для относительных классических координат x_{12}^j, $j = 1, 2, 3$.

Пример 2. Уравнение движения нелинейного нелокального осциллятора (18.51) в точечной модели (18.29) в обозначениях $\delta r_{12}(ct) \equiv y(t)$ для случая $\frac{1}{c} = 0$ принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = \sum_{j=2}^{q-1} b_j(t)\,[y(t)]^j. \tag{19.22}$$

В частном случае не зависящих от времени коэффициентов $\frac{db_j}{dt} \equiv 0$ это уравнение движения автономного нелинейного осциллятора перепишем еще раз $(q - 1 = l)$:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = \sum_{j=2}^{l} b_j\,[y(t)]^j. \tag{19.23}$$

Автономный нелинейный осциллятор также представляет собой гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j q^{j+1}}{j+1}. \tag{19.24}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что уравнение (19.23) может быть получено из функции Гамильтона (19.24) в качестве уравнений движения в форме Гамильтона (19.5).

Квантовомеханический оператор Гамильтона получаем из выражения (19.24) заменой величин q и p на соответствующие квантовомеханические операторы координаты и импульса соответственно. Так, например, в координатном представлении оператор импульса принимает вид

$$p = -i\hbar \frac{d}{dq},$$

поэтому оператор Гамильтона в данном случае запишется в форме:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j q^{j+1}}{j+1}. \tag{19.25}$$

Соответствующее уравнение Шредингера без времени принимает следующую форму:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - \sum_{j=1}^{l} \frac{b_j q^{j+1}}{j+1}\right]\Psi = E\Psi. \tag{19.26}$$

Рассмотрим теперь представление Гейзенберга. В этом представлении уравнения движения (19.13) для гамильтониана (19.25) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_H(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H, q_H], \\ \frac{\partial p_H(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H, p_H], \end{aligned} \tag{19.27}$$

или с учетом (19.24) получаем

$$\frac{\partial q_H(t)}{\partial t} = p_H(t),$$

$$\frac{\partial p_H(t)}{\partial t} = -\omega^2 q_H + \sum_{j=1}^{l} b_j q_H^j,$$

что окончательно можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 q_H(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q_H(t) - \sum_{j=1}^{l} b_j q_H^j = 0. \tag{19.28}$$

Это гейзенберговское уравнение по форме в точности совпадает с классическим уравнением движения (19.23) относительно координаты $y(t)$.

Два рассмотренных выше примера иллюстрируют важный результат, справедливый в более общем случае.

А именно для системы, обладающей не зависящим явно от t оператором Гамильтона вида

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{s} (p^i)^2 + V(q^1, \ldots, q^s), \tag{19.29}$$

гейзенберговские уравнения движения (19.13) примут в координатном представлении, как нетрудно убедиться, следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_H^j(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H, q_H^j] = \frac{p_H^j}{m}, \\ \frac{\partial p_H^j(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}[H, p_H^j] = -\frac{\partial V}{\partial q_H^j}, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \end{aligned} \tag{19.30}$$

т. е. эти гейзенберговские уравнения движения по форме в точности совпадают с уравнениями движения в форме Гамильтона (19.5) для соответствующей классической системы с функцией Гамильтона, получаемой из (19.29) заменой операторов координат q^j и импульсов p^j на соответствующие классические обобщенные координаты и импульсы.

19.2. Проблемы, возникающие при попытке проквантовать систему, описываемую дифференциально-функциональными уравнениями движения. Весь аппарат нерелятивистской квантовой механики приспособлен к постановке квантовой задачи только для таких физических систем, которым соответствуют классические дифференциальные уравнения движения, не содержащие отклонения аргумента (такие системы будем называть локальными). Это обстоятельство в некоторой мере было продемонстрировано нами в настоящем параграфе выше.

Вместе с этим при описании многих явлений, происходящих с очень быстрыми частицами очень малой массы в очень малых областях пространства (многие атомные явления, свойства и законы взаимодействия элементарных частиц), необходимо последовательно учитывать конечность скорости света. В частности, для этого необходимо обобщить нерелятивистскую квантовую механику на случай высоких энергий, сохранив при этом те принципиальные преимущества, которые имеет квантовая механика перед классической механикой и классической физикой при описании явлений, происходящих в микромире.

Необходимость такого обобщения нерелятивистской квантовой механики на релятивистский случай была ясна сразу же после создания Л. Де Бройлем, Н. Бором, В. Гейзенбергом, Э. Шредингером, М. Борном и В. Паули основ нерелятивистской квантовой механики. Было установлено опытным путем, что столкновения элементарных частиц высоких энергий сопровождаются рождением и уничтожением большого числа других элементарных частиц. В связи с этим основное направление, в котором были обращены усилия исследователей по релятивистскому обобщению квантовой механики, было введением явным образом в аппарат теории так называемых операторов рождения и уничтожения (метод вторичного квантования), что должно было непосредственно отразить множественность актов рождения и уничтожения элементарных частиц, внутренне присущую физическим процессам взаимодействия «элементарных объектов» в микромире. При этом уравнения движения новой теории формулировались в форме, ковариантной относительно группы Пуанкаре, являющейся группой движения специальной теории относительности.

Использование метода вторичного квантования совместно с пуанкаре — ковариантной формулировкой теории привело к релятивистскому обобщению квантовой механики, названному *квантовой теорией поля*. Наибольший успех квантовой теории поля выпал квантовой электродинамике, описывающей электромагнитное взаимодействие электронов и позитронов, где константа связи весьма мала ($\alpha \cong \frac{1}{137}$). При описании так называемых неперенормируемых взаимодействий и сильных взаимодействий (где константа связи велика $g \cong 10$) успех квантовой теории значительно скромнее: здесь используется теория возмущений для получения лишь некоторой полезной информации для нескольких своих нижайших порядков.

Но в том и другом случае квантовой теории присущ ряд принципиальных трудностей, в числе которых — появление математически бессмысленных выражений типа расходящихся интегралов. Изложению аппарата квантовой теории поля и ее многочисленным приложениям посвящено большое число оригинальных работ, монографий и прекрасных учебников, из которых укажем лишь работы [18, 16, 9, 28, 76, 176, 201, 247, 248, 253, 264, 265]. В достаточно строгой форме сформулирована *локальная квантовая теория поля*, т. е. квантовая теория, в которой все уравнения движения являются квазилинейными дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа без отклонения аргумента.

Вместе с этим наличие в локальной квантовой теории принципиальных трудностей типа появления расходящихся интегралов побудило ряд исследователей попытаться выйти за рамки локальных теорий в надежде усовершенствовать квантовую теорию поля и создать ее вариант, свободный от трудностей, присущих локальным теориям. Часть таких попыток приводит к рассмотрению так называемых *нелокальных теорий*, в которых уравнения движения имеют вид квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа с отклоняющимся аргументом. Существуют также веские аргументы, по которым при описании явлений микромира следует исследовать теории, где, во-первых, элементарная частица не считается сосредоточенной в одной точке и, во-вторых, последовательно учитывается конечность скорости света. Неточечная модель элементарной частицы, как правило, приводит в конечном итоге к необходимости рассмотрения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Помимо общей диалектико-материалистической точки зрения о «неисчерпаемости вглубь» материи (и элементарных частиц, в частности), приведем следующие доводы в пользу необходимости исследовать такие уравнения нелокальных теорий поля.

1. Прямые эксперименты по изучению структуры элементарных частиц доказывают наличие у последних определенной пространственной структуры [65, 189, 209].

2. С нелокальными теориями связывается надежда построить квантовую теорию без специфических расходимостей [181, 114, 280].

3. Точечная материальная частица противоречит в принципе основным положениям и самому духу общей теории относительности (наличие гравитационного радиуса $r_{гр} = \frac{\gamma m}{c^2} > 0$ у частицы массы $m > 0$ и т. п. *). Это обстоятельство неоднократно подчеркивалось В. А. Фоком [194, 196] и М. А. Марковым [109, 110, 111]. С такой

---

* Указанный гравитационный радиус частицы массы $r_{гр}$ означает лишь теоретическую нижнюю границу размера этой частицы. Размер же элементарных частиц (устанавливаемый в прямых экспериментах по изучению их структуры) определяется не гравитационным радиусом, а квантовыми эффектами, что дает по порядку величины $r_{кв} = \frac{\hbar}{mc}$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Для протона, например, $r_{кв} \simeq 10^{-14}$ *см* $\gg r_{гр} \simeq 10^{-52}$ *см*; последнее неравенство выполняется для всех элементарных частиц.

В вопросе о размере сильно взаимодействующей элементарной частицы (адрона) проявляется более общее обстоятельство: для «не чрезмерно высоких» энергий столкновения адронов их поведение, в основном, описывается сильными взаимодействиями, на фоне которых гравитационные эффекты исчезающе малы. Вместе с этим, для очень малых расстояний, сравнимых с $r_{гр}$ (т. е. для очень высоких энергий столкновения адронов) можно ожидать, что вклад гравитационых взаимодействий будет сравним с вкладом сильных взаимодействий; например, по соотношению неопределенности Гейзенберга для соответствующих энергий получаем величину порядка $E \geqslant \frac{\hbar c}{r_{гр}} \simeq 10^{38}$ *Гэв*. В этой связи интересна предложенная М. А. Марковым [110, 111] теоретическая модель протяженной микрочастицы, основанная на учете эффектов общей теории относительности совместно с квантовыми эффектами. В частности, в этой модели вклад эффектов общей теории относительности в структуру микрочастицы проявляется уже на расстояниях порядка $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar \gamma}{c^3}} \simeq 10^{-32}$ *см*, что значительно больше, чем гравитационный радиус.

точки зрения при попытке описывать элементарные частицы необходимо с самого начала идейно исходить не из специальной теории относительности (как это делается, например, в локальной квантовой теории поля), а из общей теории относительности. В частности, в общей теории относительности можно последовательно учесть конечность скорости света.

В связи со вторым из указанных аргументов отметим, что ряд вопросов, связанных с теориями поля, в которых уравнения движения имеют вид дифференциально-функциональных уравнений, исследуются в главах IV и V монографии. Что касается уравнений движения, согласованных с общей теорией относительности, то такие уравнения для задачи многих тел были получены выше, в главах II и III. Полученные в этих главах уравнения (12.15), (17.61), (18.31) были выведены из уравнений поля общей теории относительности и согласованы с требованиями последней в двух важных аспектах: а) неточечность рассматриваемых тел, б) учет конечности скорости света.

Полученные в главах II, III уравнения движения (12.15), (17.61), (18.31) имеют вид дифференциальных уравнений с распределенным отклонением аргумента *.

С точки зрения необходимости построить релятивистское обобщение квантовой механики, согласованной с требованиями общей теории относительности, представляет интерес исследовать возможность проквантовать уравнения движения (18.31) **.

---

* Отметим, что в локальной квантовой теории поля при получении уравнений релятивистской проблемы двух тел, исходя из лоренц-ковариантного интегрального уравнения типа уравнения Липпмана — Швингера, также возникают уравнения с отклоняющимся аргументом, а именно разностные уравнения (см., например, В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков.— В кн.: Проблемы физики элементарных частиц атомного ядра. Атомиздат, М., 1972, 2, 3, 635).

** Мы не будем в этом параграфе обсуждать различные варианты обобщений локальной квантовой теории поля на случай общей теории относительности методом замены в уравнениях поля метрического тензора специальной теории относительности $(g^{ik})_{\infty}$ на метрический тензор общего риманова пространства с интервалом

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k .$$

Эти варианты обобщения квантовой теории, развиваемые С. Гуптой [58], Р. Лиас [101], И. Пийром [142], Т. Кимурой [259, 260], Н. В. Мицкевичем [267], Р. Фейнманом [191] и изложенные в монографии Н. В. Мицкевича [119], так же, как метод Р. Арновитта, С. Дезера, С. Мисснера [213], опираются на процедуру квантования гравитационного поля в представлении взаимодействия. Эти подходы можно считать прямым перенесением методов локальной квантовой теории (изложенных, например, в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [18]) на физические поля в общей теории относительности. В частности, эти методы приводят к принципиальным трудностям, свойственным всем неперенормируемым взаимодействиям и связанным с необходимостью проводить бесконечное число перенормировок. Общая схема этих подходов к проблеме квантовой метрики g_{ik} будет приведена ниже, в § 27. Там же будет изложена отличная от традиционной (С. Гупта [58] и др.) схема подхода к проблеме квантовой метрики, основанная на вторичном квантовании

Такой путь в принципе можно считать одним из возможных релятивистских обобщений квантовой механики, в связи с чем возникает необходимость исследовать, *в какой мере* этот путь окажется эффективным с физической и математической точек зрения.

Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом является разновидностью дифференциального уравнения бесконечного порядка, т. е. описывает систему с бесконечным числом степеней свободы. В связи с этим рассмотрим проблему квантования системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением N-го порядка, переходя затем формально к пределу $N \to \infty$.

Рассмотрим сначала постановку задачи (точного) квантования автономной голономной (в которой не налажено дополнительных связей) механической системы с N степенями свободы, описываемой лагранжианом

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, x^{(N)}(t)) \tag{19.31}$$

в представлении Шредингера.

Из условия стационарности интеграла действия

$$A = \int \mathscr{L}(x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(N)}(t))dt$$

получаем уравнение движения для системы, описываемой лагранжианом (19.31):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\dot{x})} + \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (\ddot{x})} - \cdots + (-1)^N \frac{d^N}{dt^N} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (x^{(N)})} = 0. \tag{19.32}$$

Как известно,* уравнение (19.32) может быть записано в виде дифференциальных уравнений в форме Гамильтона:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r}, \tag{19.33}$$

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_r}, \qquad r = 1, 2, \ldots, N,$$

где обобщенные координаты Q_r и обобщенные импульсы P_r определяются как

$$Q_r = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} x(t),$$

$$P_r = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^{(r)}} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial [x^{(r+1)}]} + \cdots + (-1)^{N-r} \frac{d^{N-r}}{dt^{N-r}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial [x^{(N)}]}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, N), \tag{19.34}$$

физического поля и последующем учете уравнений гравитационного поля методом теории возмущений по гравитационной постоянной; такой подход к проблеме квантовой метрики, с нашей точки зрения, является физически более привлекательным, чем традиционный, поскольку явно учитывает уравнения гравитационного поля.

* См., например, Б. Т. Уиттекер [187].

а функция Гамильтона H имеет вид

$$H = P_1Q_2 + P_2Q_3 + \cdots + P_{N-1}Q_N + P_N\dot{Q}_N - \mathcal{L}; \qquad (19.35)$$

причем в выражении (19.35) $\dot{Q}_N \equiv \frac{dQ_N}{dt}$ должна быть выражена через P_j, Q_j с помощью (19.33).

При квантовании обобщенные импульсы и гамильтониан становятся операторами в соответствии с подстановкой

$$P_l \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial Q_j} = \hat{P}_j, \qquad (19.36)$$

$$[\hat{Q}_j, \hat{P}_l] = i\hbar\delta_{jl}, \quad [\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = [\hat{P}_i, \hat{P}_l] = 0, \qquad l, j = 1, 2, \ldots, N$$

(в представлении, в котором операторы обобщенных координат диагональны, т. е. в координатном представлении).

При этом, согласно основным принципам квантовой механики, состояние квантовомеханической системы, соответствующей классической функции Гамильтона (19.35), можно охарактеризовать в координатном представлении вектором Ψ комплексного сепарабельного гильбертова пространства, зависящим от N переменных Q_1, Q_2, ..., Q_N. В представлении Шредингера в качестве базиса этого гильбертова пространства выбираются собственные функции оператора Гамильтона H:

$$H(Q_1, \ldots, Q_N)\Psi_\beta(Q_1, \ldots, Q_N) = E_\beta\Psi_\beta(Q_1, \ldots, Q_N). \qquad (19.37)$$

Обратимся теперь к нелинейному нелокальному автономному осциллятору, уравнение движения которого имеет вид квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными распределенными запаздываниями аргумента (18.51), которое перепишем в следующем виде:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) + \sum_{k=2}^{l} b_k\int_{-1}^{0} d\eta_k(\xi, \Delta)[x(t+\xi\Delta)]^k = 0, \qquad (19.38)$$

где $\eta_k(\xi, \Delta)$ — известные функции ограниченной вариации, заданные на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывные справа, аналитически зависящие от аргумента $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \mathrm{const}$ и нормированные с помощью соотношения

$$\int_{-1}^{0} d\eta_k(\xi, \Delta)\,d\xi = 1, \quad k = 2, \ldots, l, \qquad \forall\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]. \qquad (19.39)$$

Для уравнения (18.51) параметр Δ из (19.38) равен $\frac{1}{c}\max\limits_{s,s'}|\vec{a}^{\,0}_{12} + \vec{\Delta}_{1s} - \vec{\Delta}_{2s'}|$.

Уравнение (19.38) — дифференциальное уравнение *бесконечного порядка*, а поэтому его можно толковать как уравнение движения некоторой *механической системы с бесконечным числом степеней свободы*. Если пытаться действовать в соответствии с изложенной после формулы (19.31) методикой для случая $N \to \infty$, то необходимо было бы восстановить сначала вид классической функции Гамильтона по уравнению движения (19.38), подбирая, например, соответствующие Q_j и P_j для (19.35).

Технически это вряд ли представляет собой реализуемую задачу *. Но даже если бы удалось указать гамильтониан вида (19.35) (с $N \to \infty$), приводящий к уравнениям движения (19.38), то после подстановки (19.36) решать уравнение Шредингера (19.37) с бесконечным числом независимых переменных $Q_1, \ldots, Q_N$ ($N \to \infty$) было бы делом чрезвычайной сложности даже при приближенном решении этой задачи.

Отметим, что указанная программа квантования дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом была частично осуществлена для специального класса таких уравнений А. Пайсом и Г. Уленбеком [272]. Для изученных ими классов систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями движения с отклоняющимся аргументом и обладающих классической функцией Гамильтона, при проведении указанной процедуры квантования в представлении Шредингера собственные значения оператора Гамильтона не являются положительными. Этот результат находится в противоречии с общепринятыми представлениями квантовой механики. Тем самым формальное решение задачи квантования для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, предпринятое в работе [272], нельзя считать физически удовлетворительным.

Вместе с тем, согласно результатам предыдущих глав о близости решений классических уравнений общей теории относительности, содержащих отклонение аргумента, к соответствующим решениям уравнений ньютоновской механики и нерелятивистской электродинамики представляет особый интерес исследовать такие схемы квантования дифференциально-функциональных уравнений релятивистской классической физики, которые были бы *максимально близки к соответствующей схеме нерелятивистской квантовой механики.*

Ниже изложим так называемую *минимальную схему формального квантования* квазилинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом на примере квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка со стационарными распреде-

---

* При этом интересно отметить, что для лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{(\dot{x})^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \frac{1}{2l+2} \int\limits_{-1}^{0} d\eta\,(\xi,\,\Delta)\,[x\,(t + \xi\Delta)]^{2l+2} \equiv$$

$$\equiv \mathcal{L}\,(x,\,\dot{x},\,\ddot{x},\,\dddot{x},\,\ldots),\quad \dot{f} \equiv \frac{\partial f\,(t)}{dt},$$

уравнения движения (19.34) (с $N \to \infty$) принимают вид

$$\frac{d^2x\,(t)}{dt^2} + \omega^2 x\,(t) + \int\limits_{-1}^{0} d\eta\,(\xi,\,\Delta)\,[x\,(t)]^{2l+1} = 0.$$

ленными отклонениями аргумента (19.38). *Минимальность* излагаемой схемы квантования состоит в том, что по уравнению движения (19.38) восстанавливается оператор Гамильтона, зависящий от минимального числа обобщенных координат и импульсов, а именно *от одной координаты и одного импульса* (т. е. зависит от такого же количества координат и импульсов, что и для случая уравнения (19.38) без отклонения аргумента,— с $\Delta \equiv 0$).

19.3. Минимальная схема формального квантования квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка со стационарными запаздываниями аргумента. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка со стационарными распределенными запаздываниями аргумента (19.38):

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) + \sum_{k=2}^{l} b_k \int_{-1}^{0} d\eta_k(\xi, \Delta)\,[x(t+\xi\Delta)]^k = 0, \tag{19.40}$$

где $\eta_k(\xi, \Delta)$ — известные функции ограниченной вариации, заданные на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывные справа, аналитически зависящие от аргумента $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$, $\Delta_0 > 0$, в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \mathrm{const}$, и такие, что сходятся абсолютно и равномерно по $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ ряды

$$\int_{-1}^{0} d\eta_k(\xi, \Delta) = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta^s \int_{-1}^{0} d\eta_{k,s}(\xi), \quad \Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0], \quad k = 2, 3, \ldots, l, \tag{19.41}$$

и выполняются условия нормировки

$$\int_{-1}^{0} d\eta_{k,0}(\xi) = 1, \quad k = 2, 3, \ldots, l; \tag{19.42}$$

b_k, $k = 2, 3, \ldots, l$,— заданные ограниченные постоянные. Сформулируем нашу схему формального квантования уравнений (19.40) — (19.42).

С этой целью постулируем следующее.

1°. Все операторы наблюдаемых величин для рассматриваемой квантовомеханической системы выражаются через два независимых оператора, а именно через оператор координаты $x(t)$ и через оператор импульса $p(t)$.

2°. Для операторов $x(t) \equiv x_H \equiv x$ и $p(t) \equiv p_H \equiv p$ выполняются гейзенберговские перестановочные соотношения

$$[x(t), p(t)] = i\hbar. \tag{19.43}$$

3°. Для всякого оператора наблюдаемой величины F выполняются гейзенберговские уравнения движения

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}[H, F(t)]. \tag{19.44}$$

4°. В уравнениях (19.44) оператор H, называемый *квазигамильтонианом* системы, не зависит от t и имеет следующий вид:

$$H(x,\ p;\ \Delta) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \sum_{k=2}^{l} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} H_s(x,\ p)\,\Delta^s \equiv \sum_{s=0}^{\infty} H_s(x,\ p)\,\Delta^s, \qquad \Delta \in [-\Delta_0,\ \Delta_0], \quad (19.45)$$

где оператор $H_s\ (x,\ p)$ для всякого конечного s является полиномом по переменным x и p степени, соответственно не выше N_s и M_s:

$$H_s(x,\ p) = \sum_{k=0}^{N_s} \sum_{r=0}^{M_s} h_{skr} p^k x^r. \qquad (19.46)$$

5.° Уравнение (19.40) — (19.42) рассматривается как гейзенберговское уравнение движения для оператора координаты x, понимаемое как уравнение следующего вида:

$$-\frac{1}{\hbar^2}[H,\ [H,\ x]] + \omega^2 x + \sum_{k=2}^{l} b_k \int_{-1}^{0} d\eta\,(\xi,\ \Delta) \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \underbrace{[H,[H,\ldots[H}_{s},\ x^k]\ \ldots\ ]]\left(\frac{i\xi\Delta}{\hbar}\right)^s = 0, \qquad \Delta \in [-\Delta_0,\ \Delta_0].$$
$$(19.47)$$

6°. Операторы x, p и оператор H, получаемый по формуле (19.45), определены как самосопряженные операторы в некотором комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ векторов состояния Φ, не зависящих от времени t.

В такой системе с помощью формул (19.43) — (19.47) можно восстановить вид квазигамильтониана H, не зависящего от t. Восстановив вид квазигамильтониана H, можно от описанного в нашей схеме представления коммутационных соотношений (это представление, по аналогии с обычной квантовой механикой, можно назвать представлением Гейзенберга) перейти к соответствующему представлению Шредингера с помощью обычного унитарного оператора

$$V = e^{-\frac{i}{\hbar}H}. \qquad (19.48)$$

Займемся теперь восстановлением квазигамильтониана H, исходя из сформулированной выше схемы формального квантования.

Установим справедливость следующего утверждения.

Предложение 19.1. Для того чтобы формальный ряд (19.45) удовлетворял уравнению (19.47) для всех $\Delta \in [-\Delta_0,\ \Delta_0]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось счетное число соотношений следующего вида:

$$-\frac{1}{\hbar^2}[H_0,\ [H_0,\ x]] + \omega^2 x + \sum_{k=2}^{l} b_k x^k = 0, \qquad (19.49)$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}[H_0, [H_1, x]] - \frac{1}{\hbar^2}[H_1, [H_0, x]] +$$

$$+\sum_{k=2}^{l} b_k x^k \int_{-1}^{0} d\eta_{k,1}(\xi) + \frac{i}{\hbar}\sum_{k=2}^{l} b_k [H_0, x^k] \int_{-1}^{0} \xi d\eta_{k,0}(\xi) = 0, \quad (19.50)$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\sum_{m=0}^{s} [H_m, [H_{s-m}, x]] +$$

$$+\sum_{n=0}^{s}\sum_{q_1=0}^{n}\sum_{q_2=0}^{n-q_1}\cdots\sum_{q_{n-1}=0}^{n-q_1-\cdots-q_{n-2}}\sum_{k=2}^{l} b_k \frac{1}{n!}[H_{q_1}, [H_{q_2}, \ldots [H_{q_{n-1}},$$

$$[H_{n-q_1-\ldots-q_{n-1}}, x^k]] \ldots]] \int_{-1}^{0} \left(\frac{i\xi}{\hbar}\right)^n d\eta_{k,\, s-n}(\xi) = 0,$$

$$s = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \quad (19.51)$$

Легко видеть, что соотношение (19.49) для H_0, даваемого формулой (19.45), выполняется в силу (19.43) тождественно.

Теперь, фиксируя значения чисел N_s, M_s, $s = 1, 2, 3, \ldots$, выберем некоторый частный класс представлений квазигамильтониана (19.46) и в рамках выбранного класса построим соответствующее выражение для квазигамильтониана в виде формального ряда (19.45).

Пример 1. Выберем $N_1 = 2$. Тогда

$$H_1(x, p) = h_{120}p^2 + \sum_{k=0}^{N_2} h_{11k}px^k + \sum_{k=0}^{N_2} h_{10k}x^k. \quad (19.52)$$

Для такого случая справедливо следующее утверждение.

Предложение 19.2. Для того чтобы выражение (19.52) с некоторым $N_2 \geqslant 0$ удовлетворяло соотношениям (19.50), (19.43) с H_0, равным

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \sum_{k=2}^{l} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad (19.53)$$

где $b_k \neq 0$, $k = 2, \ldots, l$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно следующие соотношения:

$$h_{111} = h_{120} = 0,$$

$$h_{11k} = \begin{cases} -b_k \int_{-1}^{0} \xi d\eta_{k,0}(\xi), & 2 \leqslant k \leqslant l, \\ 0 & k \geqslant l+1, \end{cases} \quad (19.54)$$

$$-\int_{-1}^{0} d\eta_{k,1}(\xi) = 0, \qquad 2 \leqslant k \leqslant l,$$

и если $k \geqslant l+1$, то $\int_{-1}^{0} d\eta_{k,1}(\xi)$ и $\int_{-1}^{0} \xi d\eta_{1,0}(\xi)$ произвольны.

Аналогично задавая в форме (19.46) числа N_2 и M_2 так, чтобы для (19.52) при выполнении условий (19.54) существовало решение соотношения (19.50), можно построить выражение для H_2, затем для H_3 и т. д.

Построив всю последовательность $\{H_s\}_{s=1}^{\infty}$, можно исследовать условия, при которых *сходится ряд* (19.45) по двум комплексным переменным p и x, а также исследовать условия, при которых построенный формальный ряд после подстановки в него вместо p оператора $-i\hbar\,\frac{d}{dx}$ даст *самосопряженное дифференциальное выражение*

$$H\left(x,\ -i\hbar\,\frac{d}{dx};\ \Delta\right)=-\frac{\hbar^2}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\omega^2x^2}{2}+$$
$$+\sum_{k=2}^{l}b_k\frac{x^{k+1}}{k+1}+\sum_{s=1}^{\infty}H_s\left(x,\ -i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Delta^s.$$

Замечание 19.1. Схема формального квантования, изложенная выше для квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка со стационарными распределенными запаздываниями аргумента (19.40) (нелинейный нелокальный осциллятор), может быть перенесена на уравнение проблемы двух тел в электродинамике, содержащее распределенное отклонение аргумента.

Так, уравнение (18.39) проблемы двух тел равных масс в электродинамике для случая не зависящих от времени x^0 отклонений аргумента и $n_1=\infty$, $n_2=\infty$ может быть записано в форме

$$m\,\frac{d^2a_{12}^{\alpha}(x^0)}{dx^{0\,2}}=\int\limits_{|\vec{\xi}|<\frac{1}{2}}\ \int\limits_{|\vec{\zeta}|<\frac{1}{2}}d\eta\,(\vec{\xi},\ \vec{\zeta};\ b)\ \times$$
$$\times\left\{\frac{a_{12}^{\alpha}(x^0-|\vec{b}+b\vec{\xi}-b\vec{\zeta}\,|)+a_{12}^{\alpha}(x^0)+2b\,(\xi^{\alpha}-\zeta^{\alpha})}{\left|\frac{1}{2}\,\vec{a}_{12}(x^0-|\vec{b}+b\vec{\xi}-b\vec{\zeta}|)+\frac{1}{2}\,\vec{a}_{12}(x^0)+b\vec{\xi}-b\vec{\zeta}\,\right|^3}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial a_{12}^{\alpha}(x^0)}{\partial x^0}\right)\frac{1}{|\vec{a}_{12}(x^0)+b\vec{\xi}-b\vec{\zeta}\,|^2}-$$
$$\left.-3\sum_{\beta=1}^{3}\frac{[a_{12}^{\beta}(x^0)+b\xi^{\beta}-b\zeta^{\beta}]\left(\dfrac{\partial a_{12}^{\beta}(x^0)}{\partial x^0}\right)}{|\vec{a}_{12}(x^0)+b\vec{\xi}-b\vec{\zeta}\,|}\,[a_{12}^{\alpha}(x^0)+b\xi^{\alpha}-b\zeta^{\alpha}]\right\},$$
$$\alpha=1,\ 2,\ 3,\tag{19.55}$$

где η, $(\vec{\xi},\ \vec{\zeta};\ b)$ — функция ограниченной вариации, заданная в области $|\vec{\xi}|<\frac{1}{2}$, $|\vec{\zeta}\,|<\frac{1}{2}$, нормированная посредством соотношения (вытекающего из (18.28) для $n_1=\infty$, $n_2=\infty$)

$$\int\limits_{|\vec{\xi}|<\frac{1}{2}}\ \int\limits_{|\vec{\eta}|<\frac{1}{2}}d\eta\,(\vec{\xi},\ \vec{\eta};\ b)=e_1e_2,\tag{19.56}$$

аналитически зависящая от параметра b в точке $b=0$ при $\vec{\xi}=\mathrm{const}$, $\vec{\zeta}=\mathrm{const}$; при этом e_1, e_2 — электрические заряды первого и второго тел, $\vec{b}$ — известный трехмерный вещественный вектор, длина которого $b \equiv |\vec{b}| \equiv \sqrt{\sum\limits_{\alpha=1}^{3} b^{\alpha^2}}$ имеет смысл максимального размера каждого из двух тел.

Для системы двух тел, описываемых уравнениями (19.55), (19.56), можно сформулировать минимальную схему формального квантования векторного уравнения (19.55), (19.56), постулируя с этой целью утверждения, аналогичные утверждениям 1°—6° из § 19, п. 3, но с двумя отличиями:

а) имеется не одна, а три пары операторов обобщенных координат и импульсов $\overset{\alpha}{a}_{12} = x^{\alpha} \equiv q^{\alpha}$, p^{α}, $\alpha = 1, 2, 3$, удовлетворяющих гейзенберговским перестановочным соотношениям $[x^{\alpha}(t), p^{\beta}(t)] = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta}$;

б) для $\Delta \equiv b$ в формуле (19.45) оператор H_0 имеет вид (19.16), а не (19.24). Дальнейшее построение и обоснование минимальной схемы формального квантования уравнения (19.55), (19.56) проводится аналогично случаю нелинейного нелокального осциллятора (19.40) — (19.42).

19.4. Другая математическая схема, допускающая интерпретацию в качестве нелокального квантового осциллятора, асимптотически при $t \to \infty$ близкого к локальному квантовому осциллятору. Рассмотрим одну математическую схему, основанную на решении дифференциального уравнения второго порядка со стационарными запаздываниями аргумента в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Каждое решение такого уравнения асимптотически при $t \to \infty$ приближается к некоторому решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (т. е. без отклонения аргумента). Эта задача допускает интерпретацию в качестве нелокального квантового осциллятора в представлении Гейзенберга, асимптотически при $t \to \infty$ близкого к соответствующему локальному квантовому осциллятору.

В дальнейшем изложении будем близко следовать нашим работам [144, 150].

1. Исследуем сначала соответствующую классическую задачу. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка со стационарными запаздываниями аргумента

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = g \int\limits_{-1}^{0} x(t + \xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta), \qquad (19.57)$$

где $\eta(\xi, \Delta)$ — функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывная справа, аналитически зависящая от аргумента $\Delta \geqslant 0$ в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \text{const}$ и нормирования с помощью соотношения

$$\int\limits_{-1}^{0} d\eta(\xi, \Delta) = 1, \qquad \Delta \in [0, \Delta_0]. \qquad (19.57\text{a})$$

Ищем решение уравнения (19.57) при $t > 0$ с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t) \in C^1[-\Delta, 0], \qquad t \in [-\Delta, 0]. \tag{19.58}$$

Определение 19.1. Будем говорить, что функция $x(t) = x(t, \varphi)$ является решением начальной задачи (19.57), (19.58) на интервале $t \in [0, T)$, если существует при заданном $T > 0$ такая комплексно-значная функция $x(t, \varphi)$, которая непрерывна вместе с первой производной на интервале $t \in [-\Delta, T)$, удовлетворяет уравнению (19.57) на этом интервале и начальному условию (19.58) на интервале $t \in [-\Delta, 0]$:

Теорема 19.1. *Пусть характеристическое уравнение для* (19.57)

$$s^2 + \omega_0^2 - g \int_{-1}^{0} e^{\xi s \Delta} d\eta(\xi, \Delta) = 0 \tag{19.59}$$

обладает парой чисто мнимых сопряженных корней

$$s_{1,2}(g, \Delta) = \pm i\omega(g, \Delta), \tag{19.60}$$

таких, что

$$\lim_{g \to 0} \omega(g, \Delta) = \omega_0.$$

Тогда для достаточно малых $|g|$ *и* $\Delta > 0$ *все характеристические корни уравнения* (19.59) *можно объединить в две группы:*

а) *пара чисто мнимых сопряжений корней* (19.60);

б) *счетное число корней, образующих цепочку корней запаздывающего типа и лежащих в левой полуплоскости*

$$\operatorname{Re} s_i \leqslant C \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots), \tag{19.61}$$

где постоянная C удовлетворяет оценке

$$C \leqslant \frac{1}{\Delta} [\ln |\Delta^2 g| + O(\ln |\ln |\Delta^2 g||)]. \tag{19.62}$$

Все эти корни простые.

Замечание 19.2. С помощью доказанных в § 21 леммы 21.2 и теоремы 21.1 устанавливаем, что для выполнения условий теоремы 19.1 необходимо и достаточно, чтобы для параметров правой части уравнения (19.57) выполнялось счетное число соотношений, находимых, например, методом неопределенных коэффициентов; эти соотношения имеют вид:

$$\int_{-1}^{0} (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \quad h_1 \int_{-1}^{0} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, \xi \Delta d\eta(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\frac{h_1^2 \omega_0}{2} \int_{-1}^{0} \xi^2 \Delta^2 (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) + (h_2 - h_1^2) \int_{-1}^{0} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, \xi \Delta d\eta(\xi, \Delta) = 0, \tag{19.63}$$

. . . .

При этом входящие в левые части соотношений (19.63) величины h_1, h_2, h_3, ... находятся также методом неопределенных коэффициентов и имеют вид

$$h_1 = \frac{1}{\omega_0} \int\limits_{-1}^{0} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta\, (\xi, \Delta),$$

$$h_2 = \frac{3h_1^2}{2} + \frac{h_1}{2\omega_0} \int\limits_{-1}^{0} \xi\Delta\, (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta\, (\xi, \Delta), \tag{19.64}$$

$$h_3 = \frac{5}{2} h_1^3 + \frac{7}{4\omega_0} h_1^2 \int\limits_{-1}^{0} \xi\Delta\, (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta\, (\xi, \Delta) +$$

$$+ \frac{h_1^2}{4\omega_0^2} \left[\int\limits_{-1}^{0} \xi\Delta\, (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta\, (\xi, \Delta) \right]^2 - \frac{h_1^2}{4} \int\limits_{-1}^{0} \xi^2 \Delta^2 (\cos^2 \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta\, (\xi, \Delta),$$

. . . .

При выполнении условий (19.63) величина ω (g, Δ) из формулы (19.60) выражается через h_1, h_2, h_3, ... следующим образом:

$$\omega\, (g, \Delta) = \omega_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k h_k\right]^{-1}. \tag{19.65}$$

Ниже, в § 21, п. 2, построена такая функция ограниченной вариации η (ξ, Δ), которая удовлетворяет счетному числу соотношений (19.57а), (19.63), (19.64).

Обозначим двумерный вектор с компонентами $\varphi\,(t)$ и $\dot{\varphi}\,(t)\,\omega_0^{-1}$ через $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varphi}\,(t) \equiv \{\varphi\,(t),\ \dot{\varphi}\,(t)\,\omega_0^{-1}\} \equiv \begin{pmatrix} \varphi\,(t) \\ \dot{\varphi}\,(t)\,\omega_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

С помощью теоремы 3.8 получаем следующую теорему.

Теорема 19.2. *Существует ровно одно решение начальной задачи* (19.57), (19.58) *для заданной начальной функции* $\varphi\,(t) \in C\,[-\Delta, 0]$ *с* $T = \infty$; *это решение для* $t > \Delta$ *имеет вид*

$$x\,(t) = \lim_{l \to \infty} \sum_{C_l} \operatorname{res}\, [e^{st} H^{-1}(s)\, p\,(s)]_1 = \lim_{l \to \infty} \sum_{C_l} e^{s_r t} B_r, \tag{19.66}$$

где

$$\vec{p}\,(s) \equiv \begin{pmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \end{pmatrix} = \vec{\varphi}\,(0) + \int\limits_{0}^{\Delta} \left[\vec{\varphi}\,(t') + \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\,(t') \\ \omega_0 \varphi\,(t') \end{pmatrix} \right] e^{-st'} dt' -$$

$$- \frac{g}{\omega_0} \int\limits_{-1}^{0} e^{\xi s \Delta} \int\limits_{0}^{(1+\xi)\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi\,(t') \end{pmatrix} e^{-st'} dt'\, d\eta\, (\xi, \Delta),$$

$$H\,(s) = \begin{bmatrix} s & \omega_0 \\ \omega_0 - \dfrac{g}{\omega_0} \displaystyle\int\limits_{-1}^{0} e^{s\xi\Delta} d\eta\, (\xi, \Delta) & s \end{bmatrix};$$

$e^{s_r t}B_r$ — *вычет функции* $[e^{st}H^{-1}(s)\,p(s)]_1$ *в нуле* s_r *определителя* $\det H(s)$; *выбор последовательности контуров* C_l *описан в теореме* 3.7.

Замечание 19.3. При условиях теоремы 19.1 линейное уравнение (19.57) обладает семейством периодических решений вида

$$B_1 e^{i\omega(g,\Delta)t} + B_2 e^{-i\omega(g,\Delta)t}, \qquad (19.67)$$

где B_1, B_2 — произвольные постоянные с периодом $T(g, \Delta) = \frac{2\pi}{\omega(g,\Delta)}$, обращающимся в $\frac{2\pi}{\omega_0}$ при $g = 0$.

При условиях теоремы 19.1 из теоремы 19.2 вытекает при достаточно малых $|g|$ и $\Delta > 0$ устойчивость всякого периодического решения относительно начальных возмущений в банаховом пространстве функций из $C^1[t - \Delta, t]$, но не асимптотическая.

Введем в пространстве функций $\psi(t + \theta) \in C^1[t - \Delta, t]$ норму по формуле

$$\|\psi(t)\|_t = \sup_{\theta\in[-\Delta,0]} \sqrt{|\psi(t+\theta)|^2 + |\dot\psi(t+\theta)|^2\omega_0^{-2}}.$$

Из теоремы 19.1 с помощью теоремы 6.7 из [12] вытекает такое следствие.

Следствие 19.1. При условиях теоремы 19.1 для достаточно малых $|g|$ и $\Delta > 0$ решение всякой начальной задачи (19.57), (19.58) при $t \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_t$ стремится к своей периодической составляющей, так что справедлива оценка

$$\|x(t) - B_1 e^{i\omega(g,\Delta)t} - B_2 e^{-i\omega(g,\Delta)t}\|_t \leqslant M m_\varphi e^{Ct}, \qquad (19.68)$$

где $m_\varphi = \|\varphi(0)\|_0$, C — постоянная, удовлетворяющая оценке (19.62), а M—неотрицательная постоянная, не зависящая от t и φ.

Следствие 19.2. При условиях теоремы 19.1 функция

$$H(t) = \frac{|\dot x(t)|^2}{2} + \frac{\omega^2(g, \Delta)}{2}|x(t)|^2 \qquad (19.69)$$

при $t \to \infty$ для решения всякой начальной задачи (19.57), (19.58) стремится к константе

$$\omega^2(g, \Delta)\cdot(|B_1|^2 + |B_2|^2), \qquad (19.70)$$

в соответствии с оценками (19.68); постоянные B_1 и B_2 в (19.70) определяются из формулы (19.67) и соответствуют периодическому слагаемому вида (19.67) в формуле (19.66). В силу указанных свойств функции (19.69) последняя может быть интерпретирована как асимптотический при $t \to \infty$ интеграл движения классической системы, описываемой уравнением движения (19.57).

2. Рассмотрим теперь квантовую задачу. С точки зрения проблемы обобщения квантовой механики на системы, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями движения, представляет интерес задача о решении уравнения (19.57), когда $x(t)$ — линейный оператор в некотором бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ в следующем смысле.

Определение 19.2. Будем говорить, что линейный оператор $\hat{x}(t)$ в $\mathcal{H}$ с плотной областью определения $D \subset \mathcal{H}$ является решением в слабом смысле операторного уравнения (с постоянными $\omega_0 = \bar{\omega}_0$; $g = \bar{g}$)

$$\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} + \omega_0^2\hat{x}(t) - g\int_{-1}^{0}\hat{x}(t+\xi\Delta)\,d\eta(\xi, \Delta) = 0 \tag{19.71}$$

на интервале $t \in G = [a, b] \subset (-\infty, \infty)$ с начальными условиями

$$\hat{x}(t) = \hat{\varphi}(t), \quad t \in [a-\Delta, a],$$

где оператор $\hat{\varphi}(t)$ определен в плотной области $D \subset \mathcal{H}$, если справедливы соотношения

$$(\Psi, \hat{A}\Phi_k) \equiv \left(\psi, \left[\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) - g\int_{-1}^{0}\hat{x}(t+\xi\Delta)\,d\eta(\xi, \Delta)\right]\Phi_k\right) = 0, \tag{19.72}$$

$$(\Psi, \hat{\varphi}(t)\Phi_k) \in C^1[a-\Delta, a], \quad t \in [a-\Delta, a] \tag{19.73}$$

для всякого фиксированного базисного вектора $\Phi_k \in D$ и $\Psi \in \mathcal{H}$. Через (Ψ, Φ) обозначено скалярное произведение двух векторов Ψ и Φ в $\mathcal{H}$; в выражениях (19.71), (19.72) $\eta(\xi, \Delta)$ — функция ограниченной вариации, определенная так же, как в (19.57).

Теорема 19.3. *Пусть для параметров уравнения* (19.71) *выполняются все условия теоремы* 19.1.

Тогда можно построить сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, *натянутое на базисные векторы*

$$\Phi_n = \frac{\overbrace{\hat{c}^{\dagger}\ldots\hat{c}^{\dagger}}^{n}}{\sqrt{n!}}\,\Phi_0\cdot \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{19.74}$$

сконструированные с помощью ортонормированного вектора Φ_0 *и взаимосопряженных операторов* $\hat{c}$ *и* $\hat{c}^{\dagger}$, *действующих по формулам*

$$\hat{c}\Phi_0 = 0, \quad [\hat{c}, \hat{c}^{\dagger}] = \mathrm{I}, \tag{19.75}$$

в котором для достаточно малых $|g|$ *и* $\Delta \in [0, \Delta_0]$ *в плотной области при* $t \in (-\infty, \infty)$ *определен самосопряженный оператор*

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(g, \Delta)}}\left[\hat{c}^{\dagger}e^{i\omega(g,\Delta)t} + \hat{c}e^{-i\omega(g,\Delta)t}\right] \tag{19.76}$$

с функцией $\omega(g, \Delta)$, *представленной формулой* (19.65), *удовлетворяющий в слабом смысле операторному дифференциально-функциональному уравнению* (19.71) *при* $t \in (-\infty, \infty)$ *и каноническому перестановочному соотношению*

$$\left[\hat{x}(t), \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\right] = iI. \tag{19.77}$$

При этом решение в слабом смысле уравнения (19.71), *определяемое оператором* (19.76), *является при достаточно малых* Δ_0 *устойчивым относительно начальных возмущений в банаховом пространстве функций из* $C^1[t-\Delta, t]$.

Замечание 19.4. Взаимосопряженные операторы $\hat{c}$ и $\hat{c}^{+}$ из теоремы 19.3, действующие по формулам (19.75), называются в квантовой теории поля соответственно операторами уничтожения и рождения, а ортонормированный вектор $\Phi_0 \in \mathcal{H}$ называется вектором состояния вакуума.

Теорема 19.4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 19.3. *Тогда в сконструированном в теореме* 19.3 *сепарабельном гильбертовом пространстве для достаточно малых* $|g|$ *и* $0 \leqslant \Delta \leqslant \Delta_0$ *определен при* $t \in (-\infty, \infty)$ *самосопряженный оператор*

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d\hat{x}(t)}{dt} \cdot \frac{d\hat{x}(t)}{dt} + \frac{\omega^2(g, \Delta)}{2} \hat{x}(t)\hat{x}(t), \qquad (19.78)$$

где $\hat{x}(t)$ — *оператор* (19.76). *Оператор* (19.78) *диагонален и стационарен во времени в базисе* (19.74), (19.75) *и имеет в этом базисе спектр (совпадающий с точностью до мультипликативной константы* $\frac{\omega(g,\Delta)}{\omega_0}$ *со спектром гамильтониана свободного осциллятора)*

$$\hat{H}\Phi_n = \omega(g, \Delta)\left(n + \frac{1}{2}\right)\Phi_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (19.79)$$

где Φ_n — *произвольный базисный вектор* (19.75), (19.78).

Замечание 19.5. При условиях теоремы 19.1, 19.3, 19.4 оператор (19.78) является операторным аналогом функции (19.69), являющейся асимптотическим при $t \to \infty$ интегралом движения системы (19.57), (19.57а).

ГЛАВА IV

КЛАССИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ, АСИМПТОТИЧЕСКИ БЛИЗКИЕ К СИСТЕМАМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

(НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, БЛИЗКИЕ К ЛОКАЛЬНЫМ)

§ 20. Задачи теории поля, приводящие к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными и с отклоняющимся аргументом

В предыдущих главах мы рассматривали случай, когда гравитационное поле создавалось тяготеющей и электрически заряженной материей. В соответствии с этим в правой части уравнений гравитационного поля Эйнштейна фигурировала сумма тензора энергии-импульса тяготеющих масс и тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Исключая из получаемой системы уравнений метрический тензор g_{ik} с помощью уравнений поля Эйнштейна, приходим к уравнениям движения материи, содержащим отклонение аргумента.

Вполне аналогичные результаты получаются для тех случаев, когда нет тяготеющих масс и поле тяготения создается только благодаря наличию физических полей (например, чисто электромагнитного поля, либо скалярного поля, либо фермионного поля, либо системы таких полей). Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим случай нелинейного скалярного вещественного поля, создающего гравитационное поле. Обобщение такого случая на систему физических полей, преобразующихся как некоторые общековариантные тензоры заданных валентностей, не представляет особого труда.

20.1. Существенно нелинейные нелокальные уравнения вещественного скалярного поля в общей теории относительности. Итак, введем в рассмотрение классическое нелинейное скалярное физическое поле $\varphi(x)$. Пусть нелинейность скалярного поля имеет полиномиальный характер, так что тензор энергии — импульса такого поля имеет вид

$$T_{ik}(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k} +$$
$$+\left[\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) - \frac{1}{2}g^{ls}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^s} + \sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x)\right]g_{ik}(x), \quad (20.1)$$

а плотность лагранжиана такого поля

$$L = -\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) - \frac{1}{2}g^{ls}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^s} + \sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x)\right], \tag{20.2}$$

где $b_s = \bar{b}_s$, $s = 3, 4, \ldots, N$,— заданные постоянные, $g_{ik}(x)$ — метрический тензор пространственно-временного континуума, $g = |g_{ik}|$. Уравнения такого вещественного скалярного поля *с известным метрическим тензором* $g_{ik}(x)$ имеют вид

$$-\frac{\partial L}{\partial\varphi(x)} + \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^l}\right]}\right\} = 0, \quad \sqrt{-g}\left[\mu^2\varphi(x) + \sum_{s=3}^{N}b_s\varphi^{s-1}(x)\right] + \frac{\partial}{\partial x^l}\left[\sqrt{-g}\,g^{lk}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k}\right] = 0. \tag{20.3}$$

Рассмотрим один важный случай. А именно, пусть рассматриваемое скалярное поле таково, что его тензор энергии — импульса (20.1) непрерывен и ограничен по модулю постоянной v при всех $x \in V_4$:

$$T_{ik}(x) \in C(V_4), \tag{20.3a}$$

$$\max_{i,k}\sup_x|T_{ik}(x)| < v,$$

и поле $\varphi(x)$ отлично от нуля при всех x^0 лишь в некоторой (достаточно большой) ограниченной области D_1 трехмерного пространства, лежащей на конечном «расстоянии» $r = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}}$ от начала координат:

$$\varphi(x^0, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in D_1 \subset V_3, \quad \forall\, x^0 \in R^1.$$

Для такого случая покажем, что в гармонической системе координат (см. определение 7.1) в силу уравнений гравитационного поля общей теории относительности уравнения нелинейного скалярного поля (20.3) становятся существенно нелинейными и нелокальными (т. е. содержащими отклонение аргумента). Для получения метрики пространства — времени будем исходить из уравнений гравитационного поля в форме Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{ik}, \tag{20.4}$$

где T_{ik} имеет в данном случае вид (20.1).

В гармонической системе координат, согласно результатам § 10, эти уравнения можно переписать в виде

$$-\frac{1}{2}g^{ls}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l\partial x^s} + \Gamma_i^{ls},\ \Gamma_{k,ls} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right), \tag{20.5}$$

$$T = g^{ls}T_{ls}.$$

В рассматриваемом случае, когда скалярное поле $\varphi(x)$ исчезает при достаточно больших r, физически целесообразно поставить задачу об отыскании решения уравнений гравитационного поля (20.5) из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, т. е. имеющего вид

$$g_{il}(x) = (g_{il})_\infty + \gamma\psi_{il}(x),$$

где функция $\psi_{il}(x)$ удовлетворяет условиям (10.9а) — (10.9г), (10.10), сформулированным в § 10, а

$$(g_{il})_\infty = \begin{cases} 1, & i = l = 0, \\ -1, & i = l = 1, 2, 3, \\ 0, & i \neq l. \end{cases}$$

Для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, получаем по определению

$$g_{il}(x) = (g_{il})_\infty + \sum_{s=1}^{k} \beta^s [g_{il}(x)]_s + O(\beta^{k+1}), \tag{20.6}$$

где β — параметр, меняющийся в интервале $\beta \in \left[-\frac{\gamma v_1}{c_0^4}, \frac{\gamma v_1}{c_0^4}\right]$, v_1 — некоторая положительная постоянная, не меньшая чем v:

$$v_1 = v_1(v) \geqslant v > 0,$$

и такая, что условие (20.3а) выполняется для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, при всех $\beta \in \left[-\frac{\gamma v_1}{c_0^4}, \frac{\gamma v_1}{c_0^4}\right]$, где c_0 — скорость света в вакууме.

Для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, в силу (20.6) получаем

$$g^{il}(x) = (g^{il})_0 - \beta (g_{i'l'})_1 h^{i'i} h^{l'l} + O(\beta^2), \tag{20.7}$$

$$g(x) = |g_{il}(x)| = -1 - \beta g_1 + \beta^2 \left[-\frac{g_1^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{l,\, s=0 \\ l \leqslant s}}^{3} (g_{ls})_1 (g_{l's'})_1 h^{ll'} h^{ss'} - g_2\right] + O(\beta^3), \tag{20.8}$$

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\beta}{2} g_1 + \beta^2 \left[\frac{g_2}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{l,s=0 \\ l \leqslant s}}^{3} (g_{ls})_1 (g_{l's'})_1 h^{l'l} h^{s's} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8} g_1^2\right] + O(\beta^3), \tag{20.9}$$

$$g_s = (g_{il})_s h^{il} = (g_{00})_s - (g_{11})_s - (g_{22})_s - (g_{33})_s,$$
$$h_{il} \equiv (g_{il})_\infty.$$

Из требования того, чтобы уравнение (20.5) выполнялось для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, при всех $\beta \in \left[-\frac{\gamma v_1}{c_0^4}, \frac{\gamma v_1}{c_0^4}\right]$, получаем с учетом (20.1), (20.7), (20.8) последовательность уравнений (обозначим $\partial_l \varphi(x) \equiv \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^l}$, $l = 0, 1, 2, 3$)

$$-\frac{1}{2}h^{ls}\frac{\partial^2(g_{ip})_1}{\partial x^l\partial x^s}=-\frac{8\pi}{v_1}\Bigg[\partial_i\varphi\partial_p\varphi(x)-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x)h_{ip}-$$

$$-\sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x)h_{ip}\Bigg]\equiv f_{ip}^{(1)}(x^0,\vec{x};\ \varphi),\qquad(20.10)$$

$$-\frac{1}{2}h^{ls}\frac{\partial^2(g_{ip})_2}{\partial x^l\partial x^s}=\frac{8\pi}{v_1}\Bigg|\frac{1}{2}(g_{ip})_1\mu^2\varphi^2(x)+$$

$$+(g_{ip})_1\sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x)\Bigg]-\frac{1}{2}(g_{ls})_1h^{ll'}\times$$

$$\times h^{ss'}\frac{\partial^2(g_{ip})_1}{\partial x^{l'}\partial x^{s'}}-\frac{1}{4}h^{ll'}h^{ss'}\left[\frac{\partial(g_{s'l})_1}{\partial x^{l'}}+\frac{\partial(g_{l'l})_1}{\partial x^{s'}}-\frac{\partial(g_{l's'})_1}{\partial x^{i}}\right]\Bigg[\frac{\partial(g_{lp})_1}{\partial x^{s}}+$$

$$+\frac{\partial(g_{sp})_1}{\partial x^{l}}-\frac{\partial(g_{ls})}{\partial x^{p}}\Bigg]\equiv-\frac{8\pi}{v_1}f_{ip}^{(2,1)}(x^0,\vec{x};\ \varphi)+f_{ip}^{(2,2)}(x^0,\vec{x};\ \varphi)\equiv$$

$$\equiv f_{ip}^{(2)}(x^0,\vec{x};\ \varphi),\qquad(20:11)$$

. . . .

$$-\frac{1}{2}(g^{ls})_0\frac{\partial^2(g_{ip})_q}{\partial x^l\partial x^s}=-\frac{8\pi}{v_1}f_{ip}^{(q,1)}(x^0,\vec{x};\ \varphi)+f_{ip}^{(q,2)}(x^0,\vec{x};\ \varphi)\equiv$$

$$\equiv f_{ip}^{(q)}(x^0,\vec{x};\ \varphi),$$

$$q=3,4,\ldots,k.\qquad(20.12)$$

Все функции $f_{ip}^{(s)}(x^0,\vec{x};\varphi)$, $s=1,2,\ldots,k$, являются функционалами от скалярного поля φ. Функции $f_{ip}^{(1)}$, $f_{ip}^{(s,1)}$, $s=2,3,\ldots,k$, являются финитными функциями от $\vec{x}$ при $x^0=\mathrm{const}$, а функции $f_{ip}^{(s,1)}$, $s=2,\ldots,k$, при $x^0=\mathrm{const}$ являются функциями от $\vec{x}$ с некомпактным носителем.

Методами § 10 устанавливаем справедливость следующей леммы.

Лемма 20.1. *Пусть* $\mathrm{supp}\,\varphi(x)\in D_1$, *где* D_1 — *ограниченная область в* R^3, *и пусть* $f_{ip}^{(1)}(x^0,\vec{x};\varphi)\in C^2(R^4)$.

Тогда решение неоднородного волнового уравнения (20.10), *принадлежащее классу* $C^2(R^4)$ *и удовлетворяющее предельным условиям* (10.9а) — (10.9г), *существует, единственно и имеет вид*

$$[g_{il}(x)]_1=-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{f_{il}^{(1)}(x^0-|\vec{x}-\vec{\xi}|,\vec{\xi};\varphi)\,d\vec{\xi}}{|\vec{x}-\vec{\xi}|}.\qquad(20.13)$$

Поскольку наша конечная цель состоит в получении уравнений скалярного поля на конечном интервале времени $x^0\in(0,T)$, то нам будет удобно наряду с величинами $[g_{il}(x^0,\vec{x})]_q$ рассматривать новые величины

$$[\tilde{g}_{il}(x^0,\vec{x})]_q=\theta(x^0)[g_{il}(x^0,\vec{x})]_q,\qquad q=2,3,\ldots,k,\qquad(20.14)$$

где $\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 1, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда, а $[g_{il}(x^0, \vec{x})]_q$ — решение уравнения (20.12). Функции $[\tilde{g}_{il}(x^0, \vec{x})]_q$, $q = 2, 3, \ldots, k$; $i, l = 0, 1, 2, 3$, являются обобщенными функциями над пространством $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, т. е. $[\tilde{g}_{il}(x^0, \vec{x})]_q \in \mathcal{D}'$. По правилам дифференцирования обобщенных функций, описанным в § 4, получаем, что если $[g_{il}(x^0, \vec{x})]_q$ удовлетворяет уравнению (20.12), то соответствующая обобщенная функция $[\tilde{q}_{il}(x^0, \vec{x})]_q$ удовлетворяет следующему уравнению $\mathcal{D}'$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}}\right] [\tilde{g}_{il}(x^0, \vec{x})]_q = -2\theta(x^0) f_{il}^{(q)}(x^0, \vec{x}; \varphi) + \delta(x^0) \frac{\partial [g_{il}(0, \vec{x})]_q}{\partial x^0} + \delta'(x^0) [g_{il}(0, \vec{x})]_q. \tag{20.15}$$

Из теорем 4.3, 4.4 получаем для уравнения (20.15) такое следствие.

Следствие 20.1. Решение уравнения (20.15) с начальными возмущениями

$$\begin{gathered} [g_{il}(0, \vec{x})]_q = \Psi_{il;q}(\vec{x}) \in \mathcal{D}'(R^3), \\ \frac{\partial [g_{il}(0, \vec{x})]_q}{\partial x^0} = \Phi_{il,q}(\vec{x}) \in \mathcal{D}'(R^3) \end{gathered} \tag{20.15a}$$

и с правой частью $-2\theta(x^0) f_{il}^{(q)}(x^0, \vec{x}; \varphi) \in \mathcal{D}'(R^4)$ существует в $\mathcal{D}'(R^4) \equiv \mathcal{D}'$, это решение единственно в классе обобщенных функций из $\mathcal{D}'(R^4)$, обращающихся в нуль при $x^0 < 0$, и имеет вид

$$[\tilde{g}_{il}(x^0, \vec{x})]_q = -2G^{\mathrm{ret}} * \theta(x^0) f_{il}^{(q)}(x^0, \vec{x}; \varphi) + G^{\mathrm{ret}} * \delta(x^0) \Phi_{il;q}(\vec{x}) + G^{\mathrm{ret}} * \delta'(x^0) \Psi_{il;q}(\vec{x}). \tag{20.16}$$

Далее из лемм 4.7, 4.9 получаем такое следствие.

Следствие 20.2. Если $f_{il}^{(q)}(x^0, \vec{x}; \varphi)$, $i, l = 0, 1, 2, 3$; $q = 2, 3, \ldots, k$, являются локально интегрируемыми в R^4 функциями, а функции $\Phi_{il,q}(x)$, $\Psi_{il,q}(x)$, $i, l = 0, 1, 2, 3$; $q = 2, 3, \ldots, k$, являются локально интегрируемыми в R^3 функциями, то единственное в классе исчезающих в полупространстве $x^0 < 0$ обобщенных функций решение (20.16) уравнения (20.15) локально интегрируемо в R^4 и имеет вид

$$[\tilde{g}_{il}(x^0, \vec{x})]_q = -\frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{U(\vec{x}; x^0)} \frac{f_{il}^{(q)}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi}; \varphi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + \frac{\theta(x^0)}{4\pi x^0} \iint\limits_{S(\vec{x}; x^0)} \Phi_{il,q}(\vec{\xi}) dS + \frac{\theta(x^0)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\frac{1}{x^0} \iint\limits_{S(\vec{x}; x^0)} \Psi_{il;q}(\xi) dS\right], \tag{20.17}$$

где для $x^0 \geqslant 0$ $U(\vec{x}; x^0) = (\vec{\xi} \parallel |\vec{x} - \vec{\xi}| < x^0)$, $S(\vec{x}; x^0) = (\vec{\xi} \parallel |\vec{x} - \vec{\xi}| = x^0)$ — соответственно шар и сфера радиуса x^0 с центром в точке $\vec{x}$, а функции $f_{il}^{(q)}(\xi^0, \vec{\xi}; \varphi)$, $i, l = 0, 1, 2, 3$; $q = 2, 3, \ldots, k$,— суть правые части соотношений (20.11), (20.12).

Замечание 20.1. При условиях следствия 20.2 для выражения (20.17) при $\forall x^0 \in (0, T)$ при $|\vec{x}| > T$ получаем $[\tilde{q}_{il}(x^0, \vec{x})]_q = 0$. Тем самым на конечном интервале времени $x^0 \in (0, T)$ каждая функция $[\tilde{q}_{il}(x^0, \vec{x})]_q$, $q = 2, 3, \ldots, k$, дает нулевой вклад в асимптотику $g_{il}(x^0, \vec{x})$ при $|\vec{x}| \to \infty$. Таким образом, установили теорему.

Теорема 20.1. *Для локально интегрируемых* $f_{il}^{(q)}(\xi^0, \vec{\xi}; \varphi)$, $\Phi_{il,q}(\vec{\xi})$, $\Psi_{il,q}(\vec{\xi})$, $i, l = 0, 1, 2, 3$; $q = 2, 3, \ldots, k$, *решение уравнений поля* (20.5) *из класса* (k, ε), $k \geqslant 1$, *в гармонической системе координат при* $x^0 > 0$, *удовлетворяющее на конечном интервале* $x^0 \in (0, T)$ *предельным условиям* (10.9а) — (10.9г) *и начальным условиям* (20.15а), *единственно с точностью до* $O(\beta^{k+1})$ *и с этой точностью имеет вид*

$$g_{il}(x) = (g_{il})_\infty - \frac{\beta}{2\pi} \iiint \frac{f_{il}^{(1)}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi}; \varphi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + \sum_{s=2}^{k} \beta^s \times$$
$$\times \left\{ -\frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{U(\vec{x}; x^0)} \frac{f_{il}^{(q)}(x^0 - |\vec{x} - \vec{\xi}|, \vec{\xi}; \varphi)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + \frac{1}{4\pi x^0} \iint\limits_{S(\vec{x}; x^0)} \Phi_{il,q}(\vec{\xi})\, dS + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\frac{1}{x^0} \iint\limits_{S(\vec{x}; x^0)} \Psi_{il,q}(\vec{\xi})\, dS \right] \right\} + O(\beta^{k+1}), \tag{20.18}$$

где величины $f_{il}^{(q)}(\xi^0, \vec{\xi}; \varphi)$, $i, l = 0, 1, 2, 3$; $q = 1, 2, \ldots, k$, *выражаются известным образом через производные от скалярного поля* φ *посредством формул* (20.10) — (20.12); $U(\vec{x}; x^0)$, $S(\vec{x}; x^0)$ — *соответственно шар и сфера радиуса* x^0 *с центром в точке* $\vec{x}$ *в* R^3.

Замечание 20.2. Формулу (20.18) можно записать компактнее:

$$g_{ip}(x) = (g_{ip})_\infty +$$
$$+ \beta \left\{ \int \left[\partial\varphi\partial\varphi + \sum_{n=2}^{N} B_n^{(1)} \varphi^n \right] (\xi)\, d\eta^{(1)}(\xi; x) \right\}_{ip} + \beta^2 \left\{ \int \left[\partial\varphi\partial\varphi + \right. \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{N} B_n^{(2)} \varphi^n \right] (\xi)\, d\eta_1^{(2)}(\xi; x) \int \left[\partial\varphi\partial\varphi + \sum_{m=2}^{N} B_m^{(1)} \varphi^m \right] (\xi')\, d\eta^{(1)}(\xi'; \xi) +$$
$$+ \int d\eta_2^{(2)}(\xi; x) \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \int \left(\partial\varphi\partial\varphi + \sum_{n=2}^{N} B_n^{(1)} \varphi^n \right) (\xi')\, d\eta^{(1)}(\xi'; \xi) \right] \times$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \int \left(\partial\varphi\partial\varphi + \sum_{m=2}^{N} B_m^{(1)} \varphi^m \right) (\xi'')\, d\eta^{(1)}(\xi''; \xi) \right] + \int \left[\partial\varphi\partial\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{n=2}^{N} B_n^{(1)} \varphi^n \Big] (\xi)\, d\eta_3^{(2)} (\xi; x) \frac{\partial^2}{\partial\xi \partial\xi} \int \Big[\partial\varphi\partial\varphi + \sum_{m=2}^{N} B_m^{(1)} \varphi^m \Big] (\xi')\, d\eta^{(1)} (\xi'; \xi) \Big\}_{ip} +$$

$$+ O(\beta^3) \qquad (20.19)$$

с известными тензорными коэффициентами $B_n^{(s)} \equiv B_{n,l, \ldots, m}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, \ldots, k$, известными мерами $d\eta_j^{(s)} (\xi; x) \equiv d\eta_{j, l, \ldots, m}^{(s)} (\xi; x)$, сосредоточенными при $0 < x^0 < \infty$ в ограниченной области $\xi \in \in D \subset R^4$, зависящими от x как от параметра и зависящими функционально от начальных возмущений $\{\Phi_{lr,q}\}$, $\{\Psi_{lr,q}\}$, $q = 2, 3, \ldots \ldots, s - 1$. В формуле (20.19) в фигурных скобках подразумевается суммирование по тензорным индексам так, чтобы образовать формально дважды ковариантный тензор $\{\cdot\}_{ip}$ с индексами i, p.

Итак, решение уравнений гравитационного поля в гармонической системе координат (20.5) для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, имеет вид (20.18), (20.19), или в символическом виде:

$$g_{ip}(x) = (g_{ip})_\infty + \sum_{s=1}^{k} \beta^s [\mathcal{P}_{n_s, Ns,2s}^{(s)} (x; \partial, \varphi, \partial\varphi)]_{ip} + O(\beta^{k+1}), \qquad (20.20)$$

где $[\mathcal{P}_{n_s, Ns,2s}^{(s)} (x; \partial, \varphi, \partial\varphi)]_{ip}$ — известный нелинейный интегро-дифференциальный оператор, полиномиальный степени Ns по φ, полиномиальный степени $2s$ по $\partial\varphi$ и содержащий, кроме того, дифференцирование по координатам (под знаком интеграла) до n_s-го порядка включительно.

При этом, как вытекает из формул (20.10) — (20.12), (20.19), для нижайших значений s имеем $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, для высших значений s получаем

$$n_s = \max_{\substack{j_1=0,1, \ldots, s-1 \\ j_2=0,1, \ldots, s-1 \\ j_3=0,1, \ldots, s-1 \\ j_4=0,1, \ldots, s-1 \\ (j_1+j_2+j_3+j_4=s)}} [n_{j_1} + n_{j_2} + n_{j_3} + n_{j_4}], \quad n_0 = 0.$$

Найдя выражение метрического тензора $g_{ip}(x)$ для решений из класса (k, ε), $k \geqslant 1$, вернемся к уравнениям нелинейного скалярного поля (20.3) в римановом пространстве V_4 с известной метрикой $ds^2 = g_{ip}(x)\, dx^i dx^p$.

Эти уравнения с учетом (20.19) становятся существенно нелинейными и нелокальными (т. е. содержащими отклонение аргумента) на конечном интервале $x^0 \in (0, T)$ в соответствии с нижеследующим следствием, вытекающим из теоремы 20.1.

Следствие 20.3. Уравнения нелинейного скалярного поля (20.3) для метрики (20.18) на конечном интервале времени $x^0 \in (0, T)$ принимают вид следующей системы уравнений:

$$\sqrt{-g(x)} \Big[\mu^2 \varphi(x) + \sum_{s=3}^{N} b_s \varphi^{s-1}(x) \Big] + \frac{\partial}{\partial x^l} \Big[\sqrt{-g(x)}\, g^{lp}(x) \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^p} \Big] = 0,$$

$$(20.21)$$

$$g_{ip}(x) = (g_{ip})_\infty + \sum_{s=1}^{k} \beta^s \, [\mathcal{P}^{(s)}_{n_s, Ns, 2s}(x;\ \partial,\ \varphi,\ \partial\varphi)]_{ip} + O(\beta^{k+1}),$$

$$g(x) = |g_{ik}(x)|$$

с известными интегро-дифференциальными нелинейными операторами $\mathcal{P}^{(s)}_{n_s,\, Ns, 2s}$, описанными выше после формулы (20.20).

Замечание 20.3. При $k \to \infty$ получаем в (20.20) полиномиальный по φ и по $\partial\varphi$ оператор $\mathcal{P}$ степени $m \to \infty$. При этом нелокальные уравнения скалярного поля (20.21) становятся существенно нелинейными и нелокальными.

Укажем еще одну задачу теории поля, приводящую к нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными и с отклонением аргумента.

20.2. *Регуляризованные уравнения нелинейной квантовой теории поля.* В течение двух последних десятилетий фундаментальной проблемой квантовой теории поля (или релятивистской квантовой механики) является построение такого решения уравнения относительно операторнозначной функции $\varphi(x)$:

$$\Box\varphi(x) + m^2\varphi(x) = g\sum_{s=2}^{N} d_s\,[\varphi(x)]^s, \qquad x = (x^0, \vec{x}) \in R^4,$$

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}}, \tag{20.22}$$

которое обладало бы следующими свойствами ($[A, B] \equiv AB - BA$);

1) $$\left[\frac{\partial\varphi(x^0, \vec{x})}{\partial x^0},\ \varphi(x^{0'}, \vec{x}')\right]_{x^0 = x^{0'}} = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \tag{20.23}$$

2) $$[\varphi(x^0, \vec{x}),\ \varphi(x^0, \vec{x}')] = 0, \tag{20.24}$$

3) выполняются основные постулаты общей квантовой теории поля.

В классическом случае проблема изучалась К. Юргенсом [255] И. Сигалом [288], Ф. Браудером и В. Штрауссом [220], С. Моравцом и В. Штрауссом [270], Ж.-Л. Лионсом [102] и изучается нами в IV главе.

Квантовый случай ставит новые трудности, связанные с интерпретацией функции $\varphi(x^0, \vec{x})$ как операторной функции над некоторым гильбертовым пространством, которая в силу коммутационного соотношения (20.23) становится операторнозначной обобщенной функцией.

При этом дополнительная сингулярность задачи возникает за счет нелинейных членов $[\varphi(x^0, \vec{x})]^s$, поскольку они представляют собой степени обобщенных операторных функций, взятых в одной точке. Эта сингулярность задачи является следствием требования локальности модели.

Общим свойством всех подходов к решению проблемы является введение граничных условий, называемых в данном случае «обрезающими факторами», или «формфакторами», и тем самым достигается ослабление сингулярности задачи. Введение «обрезающего фактора» означает по существу замену выражения $[\varphi(x^0, \vec{x})]^s$ выражением

$$[\varphi_{\text{reg}}(x)]^s = \int\limits_{\Omega} dx_1 \int\limits_{\Omega} dx_2 \ldots \int\limits_{\Omega} dx_s K_\alpha (x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_s) \times$$

$$\times \varphi(x_1)\varphi(x_2) \ldots \varphi(x_s), \qquad x = (x^0, \vec{x}) \in R^4, \tag{20.25}$$

где Ω — некоторая конечная область в R^4, а $K_\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ — гладкое ядро и $K_\alpha \underset{\alpha \to 0}{\to} \delta(x - x_1)\, \delta(x - x_2) \ldots \delta(x - x_s)$ в слабом смысле. (В некоторых подходах область интегрирования Ω в формуле (20.25) является областью в четырехмерном комплексном пространстве C^4.)

Теперь уравнение движения принимает вид

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = g \sum_{s=2}^{N} d_s [\varphi_{\text{reg}}(x)]^s. \tag{20.26}$$

Обычно физики используют теорию возмущений по параметру g, хотя получаемые при этом ряды заведомо расходятся. На таком пути получены лишь предварительные результаты, тогда как сама поставленная проблема пока весьма далека от решения [247, 253, 166].

20.3. Трудности, возникающие при переходе от локальных к нелокальным уравнениям поля. 1. Обратим внимание на значительные новые принципиальные трудности, возникающие в теории поля при переходе от уравнения движения (20.22), имеющего вид квазилинейного дифференциального уравнения гиперболического типа, к уравнению движения (20.26), имеющему вид дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом (ДУОА) (т. е. дифференциально-функционального уравнения). Главные из этих трудностей таковы:

а) множество решений ДУОА существенно больше, чем для обычных дифференциальных уравнений, что, например, для линейных ДУОА приводит к появлению бесконечного множества фундаментальных решений, отвечающих бесконечному числу корней соответствующего характеристического уравнения (вместо n фундаментальных решений для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, например);

в связи с этим обстоятельством появляется второе усложнение:

б) необходимо для полного определения начальной задачи Коши задавать начальные значения, вообще говоря, не в одной точке

$t = t_0$, а на целом интервале $t \in [t_0 - \Delta, \ t_0]$ длиной в максимальное отклонение аргумента в ДУОА, согласно результатам § 3.

Вторoе из указанных обстоятельств, очевидно, немедленно приводит к серьезным трудностям обычной постановки задачи квантования такого дифференциально-функционального уравнения. Действительно, задача вторичного квантования (20.22) — (20.24) оператора поля в принципе сводится к отысканию корректного решения начальной задачи Коши для уравнений поля с учетом квантовомеханического принципа соответствия (см., например, С. Швебер [201]). Но для уравнения поля, имеющего вид дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, начальная задача Коши задается самим уравнением и двумя начальными условиями в начальной точке $t = t_0$ (условимся называть соответствующую задачу квантования, задаваемую двумя начальными условиями квантования (20.23), (20.24), *задачей квантования в обычном виде*).

В то же время для ДУОА в частных производных (как разновидности дифференциального уравнения бесконечного порядка) при постановке начальной задачи Коши надо задавать по существу бесконечное число начальных условий для производных всех порядков, что эквивалентно заданию начальной функции на интервале длиной в максимальное отклонение аргумента в ДУОА. Поэтому постановка задачи квантования в обычном виде для ДУОА, как правило, не возможна.

Такие изменения в постановке основной начальной задачи в классическом случае и в квантовом случае, имеющие, вообще говоря, место при переходе от дифференциального уравнения без отклонения аргумента к дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом, связаны по существу с тем, что при таком переходе появляются дополнительные степени свободы, число которых бесконечно.

В этой главе прежде всего рассмотрим указанную проблему применительно к обыкновенным квазилинейным дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом.

2. Изучению решений классических обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом посвящено большое количество работ, значительная часть которых обобщена в ряде монографий и обзорных статей [123, 182, 124, 125, 210, 81, 71, 121, 122, 118, 29, 30, 31, 32, 33, 134, 201, 205, 206, 162, 163, 128, 129, 242, 243, 161, 192, 203, 204, 118, 113]. Проведенные в этих работах исследования показывают, что введение отклонения аргумента в обыкновенное дифференциальное уравнение приводит для решений к большому количеству эффектов, новых по сравнению с решениями соответствующих обыкновенных уравнений без отклонения аргумента. Так, при введении отклонения аргумента в обыкновенное дифференциальное уравнение у последнего могут появиться новые, неосциллирующие решения; могут появиться решения, растущие при $t \to \infty$ экспоненциально со сколь угодно высоким ти-

пом; могут исчезнуть периодические решения; возможно появление эффекта слипания решений без нарушения теоремы о единственности решения; многие теоремы, относящиеся к теории осцилляций решений обыкновенных дифференциальных уравнений, оказываются несправедливыми для соответствующих дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и др.

Таким образом, переход от обыкновенного дифференциального уравнения к дифференциальному уравнению с отклонением аргумента *приводит в общем случае к существенному изменению как в самой постановке начальной задачи, так и к значительному изменению всей качественной картины решений рассматриваемого уравнения.* При этом для наших дальнейших целей будет целесообразно выделить такие три большие группы обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

1°) обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом, для которых при постановке основной начальной задачи начальные условия задаются, вообще говоря, на начальном интервале, и асимптотическое при $t \to \infty$ поведение решений этих уравнений качественно отлично от асимптотического при $t \to \infty$ поведения решений соответствующих обыкновенных уравнений, получаемых из исходных при нулевом значении отклонения аргумента (т. е. дополнительные степени свободы, упоминавшиеся выше, для таких уравнений существенно проявляются при всех значениях аргумента t);

2°) обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом, для которых при постановке основной начальной задачи начальные данные достаточно задавать в начальной точке, т. е. задаются не начальные функции, а начальные значения

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

(тем самым система, описываемая таким ДУОА, ведет себя эффективно как система с конечным числом степеней свободы);

3°) обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом, для которых при постановке начальной задачи начальные условия задаются на начальном интервале и асимптотическое при $t \to \infty$ поведение решений качественно близко́ к асимптотическому при $t \to \infty$ поведению решений соответствующих обыкновенных уравнений, получаемых из исходных при нулевом значении отклонения аргумента * (т. е. такая система ведет себя асимптотически при $t \to \infty$ как система с конечным числом степеней свободы).

Для наших дальнейших целей будут представлять интерес ДУОА, принадлежащие группе 3°), а также группе 2°).

---

* Важность изучения дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, принадлежащих классу 3°), неоднократно подчеркивалась в работах А. Д. Мышкиса и Л. Э. Эльсгольца [124, 125, 210].

В работах А. Д. Мышкиса [121, 122] и Ю. А. Рябова [162, 163] исследованы специальные классы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, относящиеся к группе 3°). В этих работах исследованы уравнения, обладающие при малых запаздываниях решением $x_1(t)$ таким, что для любого решения $x(t)$ разность $x(t) - cx_1(t)$ при некотором постоянном c будет при $t \to \infty$ асимптотически подчинена $x_1(t)$. При весьма малом запаздывании эта разность как угодно быстро по шкале экспонент стремится к нулю, и при этом $x_1(t)$ по асимптотическому поведению близко́ к решению соответствующего уравнения без запаздывания. Этот факт был обобщен в работах Ю. А. Рябова [162], К. Г. Валеева и Н. А. Кулеско [29, 33], М. И. Иманалиева и П. С. Панкова [250, 135] для некоторых слабо нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Вместе с тем изучение существующей математической литературы привело нас к выводу, что подобные вопросы для дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью и малым постоянным запаздыванием (класс ДУОА, важный для наших целей) остаются неисследованными до настоящего времени.

Уравнения с отклоняющимся аргументом, принадлежащие группе 2°), изучены значительно меньше. В работах В. Файта [238], С. Досса и С. Насра [227], П. И. Романовского [160], В. П. Скрипника [168], С. Сугиямы [298], Дж. Блаша [215], Т. Длотко и М. Кужмы [226], Д. Андерсона [212] и А. Б. Нерсесяна [131] исследован класс обыкновенных нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом относительно вектор-функции $\vec{x}(t)$, для которых при определенных условиях на правую часть существование и единственность непрерывного решения обеспечивается заданием начальных данных в начальной точке (а не на начальном интервале):

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

К уравнениям, относящимся к группе 2°), приводит изучение специального класса дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, появляющихся при изучении проблемы двух тел в классической релятивистской электродинамике. Р. Драйвер [228, 229] для двумерного пространства — времени установил достаточные условия, при наличии которых существование и единственность решения таких уравнений также обеспечивается заданием начальных данных в начальной точке. (В частности, эти условия включают требование, чтобы пространственно-временные координаты двух тел в начальный момент были разделены пространственно-подобным интервалом.) Исследование таких ДУОА, для которых начальные данные достаточно задавать в начальной точке, особенно важно с точки зрения проблемы квантования систем, описываемых дифференциально-разностными уравнениями движения. К более детальному обсуждению этого вопроса вернемся ниже.

Условимся во всех случаях, когда это не приведет к недоразумениям, называть физическую систему нелокальной, если она описывается дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом, и называть систему локальной в том случае, если она описывается дифференциальными уравнениями без отклонения аргумента.

3. Как уже отмечалось в п. 2, вопрос исследования общих нелинейных ДУОА, для которых многообразие решений является асимптотически при $t \to \infty$ качественно близким к многообразию решений соответствующего уравнения без отклонения аргумента, до настоящего времени остается открытым. Вместе с тем именно такие уравнения представляют наибольший интерес потому, что они описывают системы с бесконечным числом степеней свободы, которые ведут себя асимптотически при $t \to \infty$ как системы с конечным числом степеней свободы; среди таких систем, как показано в главе IV, имеются системы, которые хотя вообще и не являются консервативными, но становятся консервативными асимптотически при $t \to \infty$. Последнее обстоятельство важно потому, что последовательно проквантовать, как известно, можно лишь консервативные и близкие к таковым системы.

В главе IV рассмотрены некоторые частные классы систем, описываемых дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом из группы 3°). А именно исследованы уравнения колебания возмущенного осциллятора с отклоняющимся аргументом и полиномиальной правой частью:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = gf(x), \tag{20.27}$$

где $f(x)$ — некоторый нелинейный функционал от x, являющийся полиномиальной функцией от $N - 1$ аргумента z_l; $z_l(t) \equiv \int\limits_{-\theta_l}^{0} x(t + \xi\Delta)\; dy_l(\xi, g, \Delta)$, $l = 2, \ldots, N$; $\eta_l(\xi, g, \Delta)$ — функции ограниченной вариации, заданные на интервале $\xi \in [-\theta_l, 0]$, непрерывные справа и при $\xi = \mathrm{const}$ аналитически зависящие от g в области $|g| < g_0$ с некоторым $g_0 > 0$ и аналитически зависящие от Δ в области $|\Delta| < \Delta_0$ с некоторым $\Delta_0 > 0$. Ниже в § 21, п. 21.3, найдены достаточные условия на параметры правой части уравнения (20.27), при наличии которых уравнение (20.27) относится к группе 3°) классификации п. 2 (т. е. изучены такие нелокальные классические системы, описываемые уравнениями движения (20.27), которые асимптотически при $t \to \infty$ близки к соответствующим локальным системам). При этих условиях уравнение (20.27) при малом запаздывании обладает асимптотическим интегралом энергии, описывает асимптотически при $t \to \infty$ консервативную систему и имеет многообразие всех решений, которое асимптотически при $t \to \infty$ близко́ к многообразию решений соответствующего уравнения без отклонения аргумента. Уравнения (20.27) интересны как одномерный аналог нелокальных нелинейных уравнений поля (20.26) с полиномиальным членом взаимодействия. Очевидно, уравнение (20.27) описывает нелинейный осциллятор в поле нелокального потенциала.

§ 21. Классический нелинейный осциллятор в поле нелокального потенциала, асимптотически при $t \to \infty$ близкий к осциллятору в поле локального потенциала

Вопросы асимптотической при $t \to \infty$ аппроксимации решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (т. е. вопросы асимптотической при $t \to \infty$ аппроксимации нелокальной физической системы локальной системой) изучались в литературе для отдельных классов таких уравнений с различных точек зрения.

Так, изучение и построение конечномерных асимптотически устойчивых многообразий для некоторых типов дифференциальных уравнений с запаздыванием проводилось в работах Ю. А. Митропольского и В. И. Фодчука [118], В. И. Фодчука [192], Дж. Хейла [242, 243], Ю. И. Неймарка и Л. З. Фишмана [128, 129].

Задача аппроксимации при $t \to \infty$ произвольных решений некоторых специальных линейных систем дифференциальных уравнений с малым запаздыванием аргумента более простыми решениями (например, близкими к решениям некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений) изучались для линейных уравнений А. Д. Мышкисом [121, 122], Ю. А. Рябовым [163], а для слабо нелинейных уравнений — Ю. А. Рябовым [162], К. Г. Валеевым и Н. А. Кулеско [29], К. Г. Валеевым [30], М. И. Иманалиевым и П. С. Панковым [250, 135].

В данном параграфе эти результаты обобщаются на один класс квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка со стационарными запаздываниями аргумента и полиномиальной правой частью. Эти уравнения описывают эволюцию во времени нелинейного осциллятора, который находится в поле нелокального потенциала (нелинейный нелокальный осциллятор).

Для таких уравнений ниже построены специальные периодические решения и установлены достаточные условия, связывающие параметры правой части уравнения, при наличии которых такие специальные решения определяются однозначно заданием начальных значений, а не начальных функций, и покрывают всю заданную конечную область фазовой плоскости. Эти специальные периодические решения являются двусторонними по терминологии работ [121, 163]. Установлены достаточные условия, при которых специальные периодические решения обладают асимптотическим при $t \to \infty$ свойством (21.49) и существует приближенный интеграл движения системы, описываемой исходным уравнением. Исследованы конкретные примеры уравнений из рассматриваемого класса, для которых построена функция ограниченной вариации, обеспечивающая существование специальных периодических решений и их асимптотического свойства (21.49).

При изложении материала этого параграфа будем следовать в основном нашим работам [145, 150].

21.1. Постановка задачи. Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка со стационарными запаздываниями аргумента и полиномиальной правой частью:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \int_{-\varkappa_{kl}}^{0} [x(t + \xi\Delta)]^l \, d\eta_{kl}(\xi, \Delta), \quad (21.1)$$

где $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; \ l = 2, 3, \ldots, n_k)$ — функции ограниченной вариации, заданные на интервале $\xi \in [-\varkappa_{kl}, 0]$, непрерывные справа, аналитически зависящие от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \text{const}$ и нормированные с помощью соотношений

$$\int_{-\varkappa_{kl}}^{0} d\eta_{kl}(\xi, \Delta) = 1;$$

$\varkappa_{kl}$ — заданные постоянные из интервала $[0, 1]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; \ l = 2, 3, \ldots, n_k)$; $n_0, n_1, n_2, \ldots$ — заданные натуральные числа; Δ — параметр из интервала $[0, \Delta_0]$, $\Delta_0 > 0$;

$$\max_{\substack{0 \leqslant k < \infty \\ 2 \leqslant l \leqslant n_k}} |d_{kl}| = d_0 < \infty, \quad \max_{0 \leqslant k < \infty} n_k = n < \infty, \quad d_{kl} = \bar{d}_{kl}.$$

Пусть при этом функция

$$f(g, \ldots, z_{kl}, \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} (z_{kl})^l$$

— аналитическая функция первого аргумента в комплексной окрестности $G = (g \parallel |g| < g_0)$ точки $g = 0$ при фиксированных остальных аргументах из области

$$D = (z_{02}, \ldots, z_{kl}, \ldots \parallel |z_{kl}| < M; \ k = 0, 1, 2, \ldots; \ l = 2, 3, \ldots, n_k). \quad (21.2)$$

Отыскиваем решение уравнений (21.1) при $t > 0$ с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t) \in C^1 [-\Delta, 0], \quad t \in [-\Delta, 0]. \quad (21.3)$$

Напомним некоторые определения, которые были даны в § 3.

Определение 3.1. Будем говорить, что функция $x(t) = x(t, \varphi)$ является решением начальной задачи (21 1), (21.3) на интервале $t \in [0, T]$, если существует при заданном $T > 0$ такая вещественнозначная функция $x(t, \varphi)$, которая непрерывна вместе с первой производной на интервале $t \in [0, T]$, удовлетворяет уравнению (21.1) на этом интервале и начальному условию (21.3) на начальном множестве $t \in [-\Delta, 0]$.

Тем самым такое решение по формуле

$$x(t + \xi, \varphi) \equiv x(t + \xi) = x_t(\xi), \quad \xi \in [\Delta, 0]$$

для фиксированного $t \in [0, T]$ определяет элемент пространства $C^1 [-\Delta, 0]$.

Выберем норму $\| \cdot \|$ в пространстве C^1 $[-\Delta, 0]$ с помощью соотношения

$$\|\varphi\| = \sup_{\xi \in [-\Delta, 0]} \sqrt{|\varphi(\xi)|^2 + |\dot{\varphi}(\xi)|^2 \omega_0^{-2}}. \qquad (21.4)$$

Нетрудно доказать (см., например, работу [12] и § 3 настоящей монографии), что для любого заданного конечного $T > 0$ можно указать такое m_φ, что если $\| \varphi \| < m_\varphi$, то существует решение начальной задачи (21.1), (21.3) на интервале $t \in [0, T]$, принадлежащее области (21.2), причем такое решение будет единственным для заданного $\varphi(t)$.

При этом, если уравнение (21.1) имеет некоторое периодическое решение $x(t)$, то последнее единственным образом определяется начальной функцией $\varphi(t)$, являющейся продолжением этого периодического решения $x(t)$ на начальное множество. В пространстве C^1 $[-\Delta, 0]$ с помощью введенной по формуле (21.4) топологии введем обычные понятия устойчивого по отношению к возмущениям на начальном множестве решения начальной задачи (21.1), (21.3) и понятие асимптотически при $t \to \infty$ устойчивого решения начальной задачи (21.1), (21.3) (определения 3.8 и 3.10). Наряду с пространством C^1 $[-\Delta, 0]$ введем в рассмотрение для решений уравнения (21.1) также обычную фазовую плоскость как плоскость с координатами $(x, \dot{x})$ и с фазовой траекторией L_φ, соответствующей решению $x(t, \varphi)$ начальной задачи (21.1), (21.3) на интервале $t \in [0, T]$.

Определим топологию на фазовой плоскости с помощью нормы $|||\cdot|||$:

$$|||x||| = \sqrt{|x|^2 + |\dot{x}|^2 \omega_0^{-2}}$$

и с помощью этой топологии введем обычное определение ρ-окрестности $u_\rho(A)$ ограниченного множества A на фазовой плоскости.

Определение 3.3. Будем говорить, что фазовая траектория L_φ, соответствующая решению $x(t, \varphi)$ начальной задачи (21.1), (21.3) на интервале $t \in [0, T]$, является орбитально устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любой начальной функции $\psi(t) \in C^1$ $[-\Delta, 0]$ из неравенства на начальном интервале

$$\|\varphi - \psi\| < \delta(\varepsilon), \quad t \in [-\Delta, 0]$$

вытекает соотношение

$$L_\psi \subset u_\varepsilon(L_\varphi), \quad t \in [0, T].$$

Всякое периодическое по t решение начальной задачи (21.1), (21.3) может быть единственным образом распространено на всю ось $-\infty < t < \infty$. Для таких решений можно единственным образом ввести понятие фазовой траектории, соответствующей решению $x(t, \varphi)$ начальной задачи (21.1), (21.3) на интервале $t \in [0, \infty]$.

21.2. Специальные периодические решения уравнения (21.1). Построим некоторые специальные периодические решения уравнений (21.1) с помощью метода неопределенных коэффициентов. С этой целью заменой переменных и искомых функций по формулам

$$t = \frac{\tau}{\omega_0} \sum_{l=0}^{\infty} h_l g^l, \ h_0 = 1, \ \sigma(g, \Delta) \equiv \frac{\omega_0 \Delta}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p g^p},$$

$$x(t) = x\left(\frac{\tau}{\omega_0} \sum_{l=0}^{\infty} h_l g^l\right) \equiv y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k y_k(\tau) \qquad (21.5)$$

приводим уравнение (21.1) к виду

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + \left(\sum_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right)^2 y(\tau) =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k g^k\right)^2}{\omega_0^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^{s+1}}{s!} \sum_{l=2}^{n_s} d_{sl} \int\limits_{-\varkappa_{sl}}^{0} [y(\tau + \xi\sigma(g, \Delta))]^l \, d\eta_{sl}(\xi, \Delta). \qquad (21.6)$$

Общее решение уравнения нулевого по g приближения, получаемого из (21.6):

$$y_0(\tau) = a \cos(\tau - \varphi_0), \qquad (21.7)$$

зависит от двух произвольных параметров a и φ_0, значение которых может быть определено из начальных условий.

Уравнение первого по g приближения, получаемого из (21.6):

$$\frac{d^2 y_1(\tau)}{d\tau^2} + y_1(\tau) = -2h_1 y_0(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{l=2}^{n_0} d_{0l} \int\limits_{-\varkappa_{0l}}^{0} [y(\tau + \xi\sigma(0, \Delta))]^l \, d\eta_{0l}(\xi, \Delta),$$

с учетом (21.7) принимает вид

$$\frac{d^2 y_1(\tau)}{d\tau^2} + y_1(\tau) = -2h_1 a \cos(\tau - \varphi_0) +$$

$$+ a^2 \sum_{r=0}^{n_0} \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q L_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) \cos(r\tau - r\varphi_0) +$$

$$+ a^2 \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{q=0}^{n_0-2} a^2 M_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) \sin(r\tau - r\varphi_0), \qquad (21.8)$$

где через Ω_s обозначена совокупность всех заданных параметров $\{d_{sl}\}$ с фиксированным индексом s:

$$\Omega_s \equiv (\ldots \ d_{sl} \ \ldots \ \| l = 2, 3, \ \ldots, \ n_s) \qquad (s = 0, 1, 2, \ \ldots),$$

$L_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \ \Delta)$, $M_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \ \Delta)$ — известные целые функции каждого своего аргумента из совокупности Ω_0 и аналитические функции аргумента Δ в точке $\Delta = 0$.

Для существования периодического решения уравнения (21.1) с периодом $\frac{2\pi}{\omega_0}[1 + g\beta(g)]$, $|\beta(0)| < \infty$, обращающегося при $g = 0$ в решение

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t - \varphi_0), \tag{21.9}$$

необходимо, чтобы правая часть уравнения (21.8) была ортогональна к частным решениям уравнения, сопряженного с однородным уравнением для (21.8), т. е. необходимо, чтобы выполнялись следующие два соотношения:

$$Q_1(h_1, a) \equiv -2h_1 a + a^2 \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q L_{1q}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) = 0, \tag{21.10}$$

$$Q_2(h_1, a) \equiv a^2 \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q M_{1q}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) = 0. \tag{21.11}$$

Если алгебраическое уравнение (21.10) относительно a имеет вещественные ненулевые корни $a^{(r)}$ ($r = 1, 2, \ldots, s$; $s \leqslant n_0 - 2$), то для построения периодического решения с $a = a^{(r)}$ полезна следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.10, § 3.

Теорема 3.10а. *Если постоянные* $h_1^{(r)}$ *и* $a^{(r)}$ *удовлетворяют уравнениям* (21.10), (21.11) *и справедливо условие*

$$\left.\frac{\partial(Q_1, Q_2)}{\partial(a, h_1)}\right|_{(a=a^{(r)};\, h_1=h_1^{(r)})} \neq 0, \tag{21.12}$$

то уравнение (21.1) *допускает единственное решение периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}[1 + g\beta(g)]$ *с* $|\beta(0)| < \infty$, *которое при* $g = 0$ *обращается в порождающее решение* (21.9) *периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

При выполнении условий теоремы 3.10а можно построить соответствующее периодическое решение уравнения (21.1) методами, аналогичными изложенным С. Н. Шимановым в работе [205].

Ниже будем интересоваться такими уравнениями (21.1), для которых алгебраическое уравнение (21.11) не имеет иных вещественных корней $a^{(r)}$, помимо тривиального корня $a = 0$. А именно рассмотрим случай таких $\{d_{0l}\}$, для которых коэффициенты $M_{1q}^{(1)}$ равны нулю тождественно:

$$M_{1,q}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) \equiv 0 \quad (q = 1, 2, \ldots, n_0 - 2), \quad \Delta \in [0, \Delta_0]. \tag{21.13}$$

При выполнении условий (21.13) решение системы (21.10), (21.11) для $a \neq 0$ будет иметь вид

$$h_1 \equiv h_1(\Delta) = \frac{a}{2} \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q L_{1q}^{(1)}(\Omega_0, \Delta), \tag{21.14}$$

$$M_{10}^{(1)}(\Omega_0, \Delta) \equiv 0, \quad \Delta \in [0, \Delta_0], \tag{21.15}$$

при этом a — произвольное (вещественное) число.

При этом, очевидно, теорема 3.10а не применима, поскольку не выполняется условие (21.12).

Но справедлива следующая лемма.

Лемма 21.1. *Если выполняются условия* (21.13) *и* (21.15), *то уравнение* (21.1) *допускает периодические решения периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} h_k g^k\right)$, *обращающиеся при* $g=0$ *в порождающее решение* (21.9) *периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}$ *с произвольным неотрицательным* $a < M$. *При этом* $h_1 = h_1(\Delta)$ *определяется через* a *и параметры уравнения* (21.1) *однозначно с помощью* (21.14).

При выполнении условий леммы 21.1 всякое периодическое решение, описанное в лемме 21.1, имеет с точностью до $O(g^2)$ вид

$$y_0(\tau) + gy_1(\tau) = a\cos(\tau - \varphi_0) + gd_1\cos(\tau - \varphi_0) + \\ + gd_2\sin(\tau - \varphi_0) + gy_1^*(\tau) + O(g^2), \qquad (21.16)$$

где d_1 и d_2 — произвольные вещественные постоянные, а $y_1^*(\tau)$ — какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d^2y_1(\tau)}{d\tau^2} + y_1(\tau) = a^2 \sum_{\substack{r=0\\(r\neq 1)}}^{n_0} \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q L_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \Delta)\cos(r\tau - r\varphi_0) + \\ + a^2 \sum_{r=2}^{n_0} \sum_{q=0}^{n_0-2} a^q M_{rq}^{(1)}(\Omega_0, \Delta)\sin(r\tau - r\varphi_0).$$

Выпишем уравнение k-го приближения, получаемое из уравнения (21.6):

$$\frac{d^2y_k(\tau)}{d\tau^2} + y_k(\tau) = -2h_k a\cos(\tau - \varphi_0) + \\ + \sum_{r=0}^{n^k} P_r^{(k)}(a, d_1, d_2, \ldots, d_{2k-3}d_{2k-2}, \Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta) \times \\ \times \cos(r\tau - r\varphi_0) + [R_1^{(k)}(a, d_1, \ldots, d_{2k-2}, \Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta) + \\ + a^{r_k}M^{(k)}(\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta)]\sin(\tau - \varphi_0) + \\ + \sum_{r=2}^{n^k} R_r^{(k)}(a, d_1, \ldots, d_{2k-2}; \Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta)\sin(r\tau - r\varphi_0) \quad (21.17)$$

с некоторым $2 \leqslant r_k \leqslant n^k$, где $P_r^{(k)}$, $R_r^{(k)}$ ($r = 0, 1, 2, \ldots, n^k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$) — известные функции, полиномиальные по первым $2k - 1$ аргументам общей степени $\max(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})$, являющиеся целыми функциями каждого из аргументов совокупностей $\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}$ и аналитическими функциями аргумента Δ в точке $\Delta = 0$; функции $M^{(k)}(\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) — известные функции, являющиеся целыми функциями каждого из аргументов совокупностей $\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}$ и аналитическими функциями аргумента Δ в точке $\Delta = 0$.

Лемма 21.2. *Пусть совокупность параметров* $\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}$ *уравнения* (21.1) *и функции* $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; l = 2, 3, \ldots, n_k)$ *таковы, что*

$$R_1^{(k)}(a, d_1, \ldots, d_{2k-2}; \Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta) \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{21.18}$$

при произвольных $a, d_1, \ldots, d_{2p-2}$ *и* $\Delta \in [0, \Delta_0]$.

Тогда если выполняются условия

$$M^{(k)}(\Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{21.19}$$
$$\Delta \in [0, \Delta_0],$$

то уравнение (21.1) *допускает периодическое решение периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}[1 + g\beta(g)]$, $|\beta(0)| < \infty$, *обращающееся при* $g = 0$ *в порождающее решение* (21.9) *с произвольными заданными конечными вещественными числами* $a > 0$, $d_1, \ldots, d_{2p-2}$. *При этом величины* $h_1, h_2, \ldots, h_p$ *определяются через* $a, d_1, \ldots, d_{2p-2}$, *параметры* $\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}$, Δ *и функции* $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$ *однозначно с помощью рекуррентных формул:*

$$h_k \equiv h_k(\Delta) = \frac{1}{2a} P_1^{(k)}(a, d_1, \ldots, d_{2k-2}; \Omega_0, \ldots, \Omega_{k-1}, \Delta), \tag{21.20}$$

$$y_k(\tau) = d_{2k-1}\cos(\tau - \varphi_0) + d_{2k}\sin(\tau - \varphi_0) + \overset{*}{y}_k(\tau) \tag{21.21}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

где $\overset{*}{y}_k(\tau)$ — *какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения* (21.17) *при условиях* (21.18) — (21.21).

Замечание 21.1. Если выполняются условия леммы 21.2, то все функции $h_k = h_k(\Delta)$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$, даваемые формулами (21.20), являются аналитическими функциями переменного Δ в точке $\Delta = 0$ при фиксированных конечных $a > 0$, $d_1, \ldots, d_{2p-2}$ и фиксированных совокупностях параметров $\Omega_0, \ldots, \Omega_{p-1}$

В конце параграфа будут указаны частные примеры уравнения (21.1), для которых функции $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots; l = 2, 3, \ldots, n_k)$ выбираются так, чтобы удовлетворить счетное число условий (21.18), (21.19) с $p = \infty$.

21.3. Достаточные условия существования специальных периодических решений уравнения (21.1). Для того чтобы установить достаточные условия, при которых ряды (21.5) для периодических решений уравнения (21.1), описанных в лемме 21.2, сходятся, будет удобно выразить параметры $a, d_1, d_2, \ldots, d_{2k}, \ldots$ некоторого фиксированного периодического решения через значения такого решения и его производной по времени $x(+0)$, $\frac{dx(+0)}{dt}$ в точке $t = +0$.

С этой целью рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) = \theta(t)\, x(t), \tag{21.22}$$

где $\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда, а $x(t)$ — решение уравнения (21.1) с начальными условиями (21.3).

Функция (21.22) является обобщенной функцией над пространством $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций в смысле определения 4.2 § 4, т. е. $\tilde{x}(t) \in \mathcal{D}'$.

Применительно к уравнению (21.1) определение обобщенного решения дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом можно сформулировать следующим образом.

Определение 21.1. Назовем *обобщенным решением уравнения* (21.1) *с начальными условиями* (21.3) функцию (21.22), где $x(t)$ — решение уравнения (21.1) с начальными условиями (21.3). Справедлива следующая лемма.

Лемма 21.3. *Обобщенное решение* $\tilde{x}(t)$ *уравнения* (21.1) *с начальными условиями* (21.3) *удовлетворяет в* $\mathcal{D}'$ *следующему уравнению:*

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x}(t) + \omega_0^2\tilde{x}(t) = \delta'(t)\,x(+0) + \delta(t)\frac{dx(+0)}{dt} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g^{k+1}}{k!}\sum_{l=2}^{n_k} d_{kl}\int_{-\varkappa_{kl}}^{0}[\tilde{x}(t+\xi\Delta)]^l\,d\eta_{kl}(\xi, \Delta) +$$
$$+ g\theta(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}\sum_{l=2}^{n_k} d_{kl}\int_{-\varkappa_{kl}}^{0}\theta(-t-\xi\Delta)\,[\varphi(t+\xi\Delta)]^l\,d\eta_{kl}(\xi, \Delta). \quad (21.23)$$

Замечание 21.2. Обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ уравнения (21.1), соответствующее по формуле (21.22) какому-либо периодическому решению $x(t)$ уравнения (21.1), удовлетворяет в $\mathcal{D}'$ уравнению

$$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{x}(t) = \delta'(t)\,x(+0) + \delta(t)\frac{dx(+0)}{dt} +$$
$$+ g\theta(t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}\sum_{l=2}^{n_k} d_{kl}\int_{-\varkappa_{kl}}^{0}[x(t+\xi\Delta)]^l\,d\eta_{kl}(\xi, \Delta). \quad (21.24)$$

Определение 21.2. Под $\mathcal{D}'_>$ будем понимать множество всех тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, которые имеют ограниченный слева носитель:

$$\mathcal{D}'_> = (f \,\|\, \operatorname{supp} f \subset (C_f, \infty),\ C_f > -\infty,\ f \in \mathcal{D}').$$

Пусть периодическое решение уравнения (21.1) удовлетворяет условиям

$$x(+0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^k \equiv u_0(g), \quad (21.25)$$

$$\frac{dx(+0)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k g^k \equiv u_1(g), \quad a_k = \bar{a}_k, \quad b_k = \bar{b}_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где функции $u_0(g)$ и $u_1(g)$ аналитичны в области $|g| \leqslant g_1$.

Сделаем в (21.24) замену переменного и искомых функций по формулам (21.5) и формуле

$$\tilde{y}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{y}_k(\tau) g^k, \text{ где } \tilde{y}(\tau) = \theta(\tau) y(\tau). \tag{21.26}$$

Тогда с учетом (21.25) уравнение (21.24) примет вид

$$\frac{d^2\tilde{y}(\tau)}{d\tau^2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k g^k\right)^2 \tilde{y}(\tau) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k g^k}{\omega_0} u_1(g)\,\delta(\tau) +$$

$$+ \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} u_0(g) + g\theta(\tau) \frac{\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right)^2}{\omega_0^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^s}{s!} \sum_{l=2}^{n_s} d_{sl} \int\limits_{-\varkappa_{sl}}^{l} y^l(\tau - \xi\sigma(g, \Delta))\,d\eta_{sl}. \tag{21.27}$$

При $\Delta = 0$ уравнения (21.1) и (21.23) обращаются соответственно в уравнения

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = g f_1(g, z(t)), \tag{21.28}$$

$$\frac{d^2 \tilde{z}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \tilde{z}(t) = \delta'(t)\, x(+0) + \delta(t) \frac{dx(+0)}{dt} + g f_1(g, \tilde{z}(t)), \tag{21.29}$$

где $\tilde{z}(t) = \theta(t)\, z(t)$, а

$$f_1(g, z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} z^l$$

— аналитическая функция аргумента g в некоторой комплексной окрестности $G = (g \,\|\, |g| < g_0)$ точки $g = 0$ при фиксированном z из области $|z| < M$.

Для уравнений вида (21.28), (21.29) в следующем параграфе будет доказана такая теорема.

Теорема 21.1. *Пусть в уравнениях* (21.28), (21.29) *функция* $f_1(g, z)$ *обладает следующими свойствами:*

1) *функция* $f_1(g, z)$ *является аналитической функцией аргумента* g *в некоторой комплексной окрестности* $G = (g \,\|\, |g| < g_0)$ *точки* $g = 0$ *с полиномиальными коэффициентами в разложении в ряд по* g:

$$f_1(g, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} z^l, \tag{21.30}$$

где

$$\max_{\substack{0 \leqslant k < \infty \\ 2 \leqslant l \leqslant n_k}} |d_{kl}| = d_0 < \infty, \quad d_{kl} = \bar{d}_{kl}, \quad \max_{0 \leqslant k < \infty} n_k = n < \infty, \quad n \geqslant 2;$$

2) *функция* $f_1(g, z)$ *такова, что для любого заданного* $0 < g_1 < g_2 < g_0$ *можно указать вещественную постоянную* $B(\omega_0, g_1)$ *такую, что в области фазовой плоскости*

$$R_{g_1} = (z, \dot{z} \parallel \sqrt{|z|^2 + |\dot{z}|^2 \omega_0^{-2}}) \leqslant B(\omega_0, g_1) \tag{21.31}$$

все фазовые траектории уравнения (21.28) *для* $g \in [-g_1, g_1]$ *имеют вид циклов, охватывающих начало координат* $z = \dot{z} = 0$.

Пусть, кроме того, функции $u_0(g)$, $u_1(g)$ — *аналитические функции переменного* g *в области* $|g| \leqslant g_1$, *где сходятся ряды*

$$u_0(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k a_k,\quad u_1(g) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k b_k,\quad a_k = \bar{a}_k,\quad b_k = \bar{b}_k \tag{21.32}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots),$$

и пусть также

$$(u_0(g_1),\ u_1(g)) \in R_{g_1} \text{ для } \forall g \in [-g_1, g_1].$$

Тогда решение уравнения (21.29) *с начальными возмущениями* (21.25), (21.32), *принадлежащее множеству* $\mathcal{D}'_>$, *периодическое по* t *при* $t > 0$ *такое, для которого все произведения коэффициентов ряда* (21.26)

$$\prod_{j=1}^{r} [\tilde{y}_{p_j}]^{l_j} \qquad (p_j = 0, 1, 2, \ \ldots\ ; \ r = 1, 2, 3, \ \ldots\ ),$$

где $l_1 + l_2 + \ldots + l_r \leqslant n$, l_j — *натуральные числа, определены в* $\mathcal{D}'$ *как обобщенные функции, существует, это решение единственно в* $\mathcal{D}'_>$ *и может быть получено в виде ряда* (21.26) *как сумма периодических по* τ *при* $\tau > 0$ *решений из* $\mathcal{D}'_>$ *последовательности уравнений, получаемых формально подстановкой выражений* (21.5), (21.26), (21.30) *в уравнение* (21.29) *и приравниванием членов при одинаковых степенях* g. *Построенное решение непрерывно зависит от начальных возмущений* u_0, u_1 *в смысле слабой топологии в* $\mathcal{D}'$.

Замечание 21.3. Построенное в теореме 21.1 обобщенное решение при $t > 0$ совпадает с обычным решением уравнения (21.28) с начальными условиями (21.32)

$$z(+0) = u_0(g),\quad \frac{dz(+0)}{dt} = u_1(g), \tag{21.33}$$

единственным при условиях теоремы 21.1.

С помощью метода последовательных приближений устанавливаем, что это решение уравнения (21.28) с начальными условиями (21.32), (21.33) допускает аналитическое продолжение по g во весь круг $|g| < g_1$ в плоскости комплексного переменного g для достаточно малых g_1.

Лемма 21.4. *Пусть выполняются условия* (21.18), (21.19) *леммы* 21.2 *при* $p = \infty$. *Пусть* $u_0(g)$, $u_1(g)$ — *аналитические функции переменного* g *в области* $|g| \leqslant g_1$, *где сходятся ряды* (21.32).

Тогда если для достаточно малых $g \in [-g_1, g_1]$ *существует периодическое решение уравнения* (21.1) *периода* $\frac{2\pi}{\omega_0}[1 + g\beta(g)]$ *с* $|\beta(0)| < \infty$, *удовлетворяющее при* $t = +0$ *условиям* (21.25), *то соответствующее ему по формуле* (21.22) *обобщенное решение может быть представлено в виде единственного ряда* (21.26), (21.5) *как сумма периодических по* τ *при* $\tau > 0$ *решений из* $\mathscr{D}'_{>}$ *последовательности уравнений, получаемых формально подстановкой выражений* (21.32) *в уравнение* (21.27) *и приравниванием членов при одинаковых степенях* g. *При этом каждый член* $\tilde{y}_k(\tau)$ *ряда* (21.26) *является аналитической функцией переменного* Δ *в точке* $\Delta = 0$ *при фиксированных* $\tau > 0$, $g \in [-g_1, g_1]$ *и фиксированных* a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *из формул* (21.32).

Замечание 21.4. При условиях леммы 21.4 коэффициенты h_1, h_2, ... из формулы (21.5), возникающие при построении описанного в лемме 21.4 периодического решения, определяются однозначно через функции $u_0(g)$, $u_1(g)$ по формулам (21.20); при этом коэффициенты $d_1, \ldots, d_{2p-2}, \ldots$ в формулах (21.20) также однозначно выражаются через функции $u_0(g)$, $u_1(g)$.

С помощью лемм 21.2, 21.4 и теоремы 21.1 как следствие теоремы о существовании неявной функции получаем следующую теорему.

Теорема 21.2. *Пусть правая часть уравнения* (21.1) *обладает следующими свойствами:*

1) *функция*

$$f_1(g, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} z^l$$

удовлетворяет условиям 1) *и* 2) *теоремы* 21.1 *с некоторыми постоянными* $g_0 > g_2 > g_1 > 0$ *и постоянной* $B(\omega_0, g_1) > 0$;

2) *выполняются условия* (21.18), (21.19) *леммы* 21.3 *при* $p = \infty$.

Тогда для достаточно малых $g_1 > 0$ *и* $\Delta_0 > 0$ *найдется такая не зависящая от* Δ_0 *постоянная* $c(\omega_0, g_1)$, *что при всех* $g \in [-g_1, g_1]$, $\Delta \in [0, \Delta_0]$ *существует периодическое решение уравнения* (21.1) *с периодом* $\frac{2\pi}{\omega_0}[1 + g\beta(g)]$, $|\beta(0)| < \infty$, *удовлетворяющее при всех* $g \in [-g_1, g_1]$ *начальному условию*

$$x(+0) = v_0 = \bar{v}_0, \quad \frac{dx(+0)}{dt} = v_1 = \bar{v}_1,$$

где

$$\Delta_0 c(\omega_0, g_1) + \sqrt{|v_0|^2 + |v_1|^2 \omega_0^{-2}} < B(\omega_0, g_1) \tag{21.34}$$

и

$$|v_0|^2 + |v_1|^2 \omega_0^{-2} \neq 0.$$

Это решение единственно, дается при $t > 0$ *леммой* 21.4 *в виде ряда* (21.5), (21.26), *сходящегося при* $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ *равномерно по* t *для любого* $t = \mathrm{const} > 0$ *и фиксированного* $g \in [-g_1, g_1]$.

Всякое такое периодическое решение обладает следующими свойствами:

а) *аналитичностью по* Δ *в точке* $\Delta = 0$ *при* $t = \text{const}$, $g = \text{const} \in [-g_1, g_1]$;

б) *аналитичностью по* g *в точке* $g = 0$ *при* $t = \text{const}$, $\Delta = \text{const} \in [-\Delta_0, \Delta_0]$.

Подчеркнем, что, как следует из леммы 21.2, наличие распределенного запаздывания в уравнении (21.1) позволяет обеспечить существование специальных периодических решений, покрывающих всю конечную область (21.34) фазовой плоскости. При этом для каждой конкретной формы нелинейной правой части уравнения (21.1), задаваемой выбором коэффициентов $\{d_{kl}\}$, счетное число условий (21.18), (21.19) леммы 21.2 может быть удовлетворено, вообще говоря, для многих различных наборов функций ограниченной вариации $\eta_{k,l}(\xi, \Delta)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$; $l = 2, 3, \ldots, n_k$). В таком случае условиям леммы 21.2 удовлетворяют уравнения вида (21.1), образующие некоторый класс.

Принципиально важным при этом является вопрос о том, существует ли для заданного набора $\{d_{kl}\}$ такой набор функций ограниченной вариации $\{\eta_{kl}(\xi, \Delta)\}$, который удовлетворяет условиям, сформулированным после формулы (21.1), и счетному числу условий (21.18), (21.19) с $p = \infty$. Это вопрос о разрешимости счетной системы функциональных соотношений (21.18), (21.19) в классе функций ограниченной вариации $\{\eta_{kl}(\xi, \Delta)\}$, аналитически зависящих от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$.

В конце параграфа рассмотрены частные примеры уравнения (21.1), для которых строятся функции $\{\eta_{kl}(\xi, \Delta)\}$ некоторым специальным образом так, чтобы удовлетворять счетному числу условий (21.18), (21.19) леммы 21.2 с $p = \infty$ и условиям, сформулированным после формулы (21.1).

21.4. Исследование устойчивости специальных периодических решений уравнения (21.1). В этом пункте будем рассматривать только такие уравнения (21.1), для которых выполняются условия леммы 21.2, и интересоваться такими периодическими решениями этих уравнений, алгоритм построения которых описан в лемме 21.2 и существование которых гарантируется этой леммой.

Исследуем поведение решений уравнения (21.1) вблизи одного из описанных выше периодических решений $x_{\text{пер}}(t)$. С этой целью представим решение начальной задачи (21.1), (21.3) в следующем виде:

$$x(t) = x_{\text{пер}}(t) + z(t),$$

в результате чего уравнение (21.1) можно переписать в такой форме:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \int\limits_{-\varkappa_{kl}}^{0} \sum_{q=1}^{l} \frac{l!}{q!\,(l-q)!} \times$$

$$\times [x_{\text{пер}}(t + \xi\Delta)]^q \, [z(t + \xi\Delta)]^{l-q} \, d\eta_{kl}(\xi, \Delta).$$

Уравнение первого приближения, получаемое отсюда отбрасыванием членов высшего порядка малости по z, имеет следующий вид:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \int_{-\varkappa_{kl}}^{0} l\,[x_{\text{пер}}(t+\xi\Delta)]^{l-1} \times$$

$$\times\, z(t+\xi\Delta)\, d\eta_{kl}(\xi, \Delta). \qquad (21.35)$$

Таким образом, задача исследования устойчивости по первому приближению одного из специальных периодических решений $x_{\text{пер}}(t)$ уравнения (21.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения линейного уравнения с периодическими коэффициентами (21.35).

Для исследования устойчивости нулевого решения уравнения (21.35) воспользуемся методом преобразования Лапласа, изложенным в § 3 главы I.

Пусть $x_{\text{пер}}(t)$ — одно из периодических решений, описанных в лемме 21.2, которое имеет период $\frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k h_k\right)$, где h_k однозначно выражаются через параметры уравнения (21.1) и начальные условия (21.25), соответствующие этому периодическому решению.

С помощью замены переменного

$$t = \frac{\tau+\varphi_0}{\omega_0} \sum_{p=0}^{\infty} h_p g^p,$$

$$z(t) = z\left(\frac{\tau+\varphi_0}{\omega_0} \sum_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right) \equiv \hat{z}(\tau) \qquad (21.36)$$

с известными $h_1, h_2, \ldots$; $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{u_1(0)}{\omega_0 u_0(0)}$ и формул (21.5), (21.21) такое периодическое решение $x_{\text{пер}}(t)$ можно представить в виде

$$x_{\text{пер}}(t) = x_{\text{пер}}\left(\frac{\tau+\varphi_0}{\omega_0} \sum_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right) \equiv y_{\text{пер}}(\tau) = a\cos\tau +$$

$$+ gq_1\cos\tau + gq_2\sin\tau + g\overset{*}{y}_{\text{пер}}(\tau+\varphi_0) + \sum_{k=2}^{\infty} g^k y_k(\tau) \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s(g)\, e^{is\tau} = \sum_{s=-n^r}^{n^r} C_s(g)\, e^{is\tau} + O(g^{r+1}), \qquad (21.37)$$

где постоянные a, q_1, q_2 и функции $\overset{*}{y}_{\text{пер}}(\tau)$, $y_k(\tau)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ определяются однозначно из начальных условий (21.25).

Тогда в переменных (21.36) уравнение (21.35) для достаточно малых g примет следующий вид:

$$\frac{d^2\hat{z}(\tau)}{d\tau^2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k g^k\right)^2 \hat{z}(\tau) = \frac{\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right)}{\omega_0^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \times$$

$$\times \int_{-\varkappa_{kl}}^{0} \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_{ls}(g)\, e^{is\,(\tau+\sigma(g,\Delta)\,\xi)}\; \hat{z}(\tau+\sigma(g,\Delta)\,\xi)\, d\eta_{kl}(\xi,\Delta), \quad \tau > 0, \tag{21.38}$$

где $b_{ls}(g)$ — известные функции от g, определяемые с помощью соотношения

$$l\left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\tau} C_s(g)\right]^{l-1} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{is\tau} b_{ls}(g) \qquad (l = 2, \ldots, n_k).$$

Ищем решение уравнения (21.38) с начальными условиями

$$\hat{z}(\tau) = \frac{d\hat{z}(\tau)}{d\tau} \equiv 0, \quad \tau \in \left[-\frac{\omega_0 \Delta}{\sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p g^p},\ 0\right],$$

$$\hat{z}(+0) = 0, \quad \frac{d\hat{z}(+0)}{d\tau} = 1. \tag{21.39}$$

Из результатов предыдущего пункта вытекает, что ряды $\left(\sum\limits_{p=0}^{\infty} h_p g^p\right)^2$ и $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} b_{ls}(g)\, e^{+is\,(\tau+\sigma\,(g,\Delta)\,\xi)}$ сходятся для достаточно малых g и Δ. Поэтому в силу (21.37) все решения уравнения (21.38) с точностью до $O\,(g^{r+2})$ совпадают с решениями уравнения

$$\frac{d^2\hat{z}(\tau)}{d\tau^2} + \left(\sum_{p=0}^{r+1} h_p g^p\right)^2 \hat{z}(\tau) = \frac{\left(\sum\limits_{p=0}^{r} h_p g^p\right)^2}{\omega_0^2} \sum_{k=0}^{r} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \times$$

$$\times \int_{-\varkappa_{kl}}^{0} \sum_{s=-n^r(n-1)}^{n^r(n-1)} b_{ls}(g)\, e^{is\,(\tau+\sigma\,(g,\Delta)\,\xi)} \hat{z}(\tau+\sigma(g,\Delta)\,\xi)\, d\eta_{kl}(\xi,\Delta). \tag{21.40}$$

Домножим уравнение (21.40) на $e^{-p\tau}$ и проинтегрируем по τ от 0 до ∞. Тогда с помощью обозначений $\hat{z}(\tau) \fallingdotseq F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-p\tau}\, \hat{z}(\tau)\, d\tau$ получаем из (21.40) по известным формулам операционного исчисления

$$\sum_{q=-(n-1)\,n^r}^{(n-1)\,n^r} L_q(p+iq)\, F(p+iq) \equiv$$

$$\equiv p^2F(p)+\left(\sum_{k=0}^{r+1}h_kg^k\right)^2F(p)-\frac{\left(\sum\limits_{p=0}^{r}h_pg^p\right)^2}{\omega_0^2}\sum_{k=0}^{r}\frac{g^{k+1}}{k!}\sum_{l=2}^{n_k}d_{kl}\times$$

$$\times\int\limits_{-\varkappa_{kl}}^{0}\sum_{q=-(n-1)n^r}^{(n-1)n^r}b_{lq}(g)\,e^{-p\sigma(g,\Delta)\xi}F(p+iq)\,d\eta_{kl}(\xi,\Delta)=1. \quad (21.41)$$

Все величины $L_q(p)$ $(q=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm(n-1)n^r)$ являются целыми функциями переменного p, аналитическими по g в точке $g=0$ при фиксированных p и Δ и аналитическими по Δ в точке $\Delta=0$ при фиксированных p и g.

Составим величины

$$K_q(p)=-\frac{L_q(p+iq)}{L_0(p)} \qquad (q=\pm 1,\pm 2,\ \ldots,\ \pm(n-1)n^r). \quad (21.42)$$

Введем матрицу

$$S_{00}^0(p)=\sum_{\rho=1}^{\infty}\ \sum_{q_1,\ \ldots,\ q_\rho}{}' K_{q_1}, K_{q_2},\ \ldots,\ K_{q_\rho}, \quad (21.43)$$

где

$$K_{q_1}\equiv K_{q_1}(p),\ K_{q_2}\equiv K_{q_2}(p+iq_1),\ \ldots,\ K_{q_\rho}\equiv$$
$$\equiv K_{q_\rho}(p+i(q_1+\cdots+q_{\rho-1}))$$
$$(q_1=\pm 1,\pm 2,\ \ldots,\ \pm(n-1)n^r;\ \ldots;\ q_\rho=$$
$$=\pm 1,\pm 2,\ \ldots,\ \pm(n-1)n^r),$$

а $\sum\limits_{q_1,\ \ldots,\ q_\rho}{}'$ означает суммирование только по таким $q_1,\ \ldots,\ q_\rho$, для которых всегда $q_1+\ldots+q_\rho=0$. Как следствие из леммы 3.3 § 3 получаем следующую лемму.

Лемма 21.5. *Нули уравнения*

$$L_0(p)-L_0(p)S_{00}^0(p)=0 \quad (21.44)$$

являются характеристическими показателями решений уравнения (21.40).

В силу свойств функций $L_q(p)$ устанавливаем методами теории ветвления решений нелинейных уравнений [27] следующую лемму.

Лемма 21.6. *Пусть выполняются все условия леммы* 21.2, *пусть* $x_{\text{пер}}(t)$ — *какое-либо из периодических решений уравнения* (21.1), *описанных в лемме* 21.2 *с* $a=\sqrt{v_0^2+v_1^2\omega_0^{-2}}\neq 0$, *и пусть уравнение* (21.44) *составлено по формулам* (21.35) — (21.43) *для этого периодического решения.*

Тогда для достаточно малых g и Δ все корни уравнения (21.44), *составленного для выражений* (21.41) — (21.43), *объединяются в две группы:*

а) *пара корней*

$$p_1 = i + 0(g);$$
$$p_2 = -i + 0(g); \qquad (21.45)$$

б) *цепочка корней запаздывающего типа*

$$p_k(g, \Delta) \quad (k = 3, 4, \ldots) \text{ с } \operatorname{Re} p_k(g, \Delta) < C_1(g, \Delta), \qquad (21.46)$$

причем для $|\Delta| \ll \frac{1}{\omega_0}$

$$C_1(g, \Delta) = \frac{1}{\Delta}[\ln|g\Delta^2| + 0(\ln|\ln|g\Delta^2||)].$$

Все эти корни простые.

Замечание 21.5. Поскольку при условиях леммы 21.6 всякое выражение

$$C_3 \frac{dx_{\text{пер}}(t)}{dt}$$

с произвольной постоянной C_3 является решением уравнения (21.35), то уравнение (21.44), (21.41) в пределе $r \to \infty$ имеет пару корней:

$$\overset{0}{p}_{1,2} = \pm i. \qquad (21.47)$$

Следовательно, в формуле (21.45) в пределе $r \to \infty$ получаем

$$p_1 = \overset{0}{p}_1 = i, \; p_2 = \overset{0}{p}_2 = -i. \qquad (21.48)$$

Замечание 21.6. Из формулы (21.46) и лемм 21.5, 21.6 вытекает, что при условиях леммы 21.2 все специальные периодические решения уравнения (21.1), описанные в теореме 21.1, для $a \neq 0$ при достаточно малых $|g|$ и Δ являются устойчивыми по первому приближению, но не асимптотически, а траектория, соответствующая каждому такому периодическому решению, является при достаточно малых $|g|$ и Δ орбитально устойчивой.

21.5. Асимптотические при $t \to \infty$ свойства специальных периодических решений. С помощью лемм 21.2, 21.6, замечаний 21.5 и 21.6, используя методы разделения пространства всех решений уравнения (21.1) на подпространство, соответствующее решениям, близким к решениям невозмущенного уравнения, и ортогональное к нему подпространство [91, 192, 197, 206], устанавливаем следующую теорему.

Теорема 21.3. *Пусть параметры уравнения* (21.1) *таковы, что*

1) *выполняются условия* (21.18), (21.19) *леммы* 21.2 *при* $p = \infty$ *и условие* 1) *теоремы* 21.2;

2) *при некотором* $g_3 > 0$ *для всех* $g \in [-g_3, 0]$ *вся фазовая плоскость уравнения* (21.28) *покрыта семейством циклов, охватывающих начало координат;*

3) *выполняются при* $g \in [-g_3, 0]$, $\Delta \in [0, \Delta_0]$ *обычные условия асимптотической устойчивости тривиального решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dY_1(t)}{dt} = Y_2(t),$$

$$\frac{dY_2(t)}{dt} = -\omega_0^2 Y_1(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \int_{-\varkappa_{kl}}^{0} \Big[Y_1(t) \cos \omega_0 \xi \Delta -$$

$$- \frac{Y_2(t)}{\omega_0^2} \sin \omega_0 \xi \Delta \Big]^l d\eta_{kl}(\xi, \Delta)$$

с теми же параметрами в правой части, что и в уравнении (21.1).

Тогда при достаточно малых $\Delta \in [0, \Delta_1]$, $\Delta_1 < \Delta_0$, *для всякого решения* $x(t, \varphi)$ *начальной задачи* (21.1), (21.3) *можно указать такое специальное решение* $x_c(t)$, *даваемое леммой* 21.2, *либо тривиальное, что справедливо*

$$\lim_{t \to \infty} | x(t, \varphi) - x_c(t) | = 0. \qquad (21.49)$$

Замечание 21.7. При условиях теоремы 21.2 для достаточно малых $\Delta > 0$ функция

$$H(x, \dot{x}) = \frac{[\dot{x}(t)]^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} [x(t)]^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \frac{[x(t)]^{l+1}}{l+1} \qquad (21.50)$$

при $t \to \infty$ приближается для всякого решения $x(t, \varphi)$ начальной задачи (21.1), (21.3) к некоторой постоянной E_φ с точностью до малых периодических членов порядка малости Δ; постоянная E_φ для данного уравнения (21.1) зависит только от специального решения $x_c(t)$, соответствующего решению $x(t, \varphi)$ по формуле (21.49).

При условиях теоремы 21.2 функцию (21.50) можно интерпретировать как *асимптотический приближенный интеграл энергии системы,* описываемой уравнением (21 1).

Теорема 21 2 является обобщением результатов А. Д. Мышкиса [121, 122], Ю. А. Рябова [162, 163], К. Г. Валеева и Н. А. Кулеско [29], К. Г. Валеева [30], М. И. Иманалиева и П. С. Панкова [250, 135] на случай квазилинейного уравнения со стационарными малыми запаздываниями аргумента и полиномиальной правой частью.

Замечание 21.8. Аналогично теореме 21.3 устанавливается теорема 21.3а, отличающаяся от теоремы 21.3 только тем, что при формулировке условий 2) и 3) теоремы формула $g \in [-g_3, 0]$ заменяется формулой $g \in [0, g_3]$.

21.6. Примеры. *Первый частный случай.* Рассмотрим, например, линейное уравнение с распределенным стационарным запаздыванием аргумента:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = g \int_{-1}^{0} x(t + \xi\Delta) \, d\eta(\xi, \Delta), \qquad (21.51)$$

где $\eta(\xi, \Delta)$ — функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывная справа, аналитически зависящая от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$ при фиксированном ξ и нормированная с помощью соотношения

$$\int_{-1}^{0} d\eta(\xi, \Delta) = 1. \qquad (21.52)$$

Ищем решение уравнения (21.51) с начальными условиями (21.3).

Для существования специальных периодических решений уравнения (21.51), описанных в теореме 21.3, необходимо, чтобы выполнялось счетное число соотношений (21.18), (21.19) на функцию $\eta(\xi, \Delta)$, имеющих для данного примера вид

$$\begin{gathered} M^{(1)}(\Delta) \equiv \int_{-1}^{0} (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \\ M^{(2)}(\Delta) \equiv h_1 \int_{-1}^{0} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \\ M^{(3)}(\Delta) \equiv \frac{h_1^2 \omega_0 \Delta^2}{2} \int_{-1}^{0} \xi^2 (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) + (h_2 - h_1^2)\, \Delta \times \\ \times \int_{-1}^{0} \xi (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{21.53}$$

где

$$h_1 \equiv \frac{1}{2\omega_0} \int_{-1}^{0} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta),$$

$$h_2 \equiv \frac{3h_1^2}{2} + \frac{h_1 \Delta}{2\omega_0} \int_{-1}^{0} \xi (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta).$$

Заметим, что для того чтобы некоторая функция ограниченной вариации $\eta(\xi, \Delta)$ удовлетворяла счетному числу соотношений (21.52), (21.53), достаточно, чтобы удовлетворялось счетное число (более простых) соотношений

$$\tilde{M}_k(\Delta) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{21.54}$$

где $\tilde{M}_0(\Delta) \equiv \int_{-1}^{0} d\eta(\xi, \Delta)$,

$$\tilde{M}_k(\Delta) \equiv \begin{cases} \int_{-1}^{0} \xi^{k-1} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta), & k = 2m + 2, \\ \int_{-1}^{0} \xi^{k-1} (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta(\xi, \Delta), & k = 2m + 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Покажем, что нетривиальное решение для функции ограниченной вариации $\eta(\xi, \Delta)$, аналитически зависящей от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$ и удовлетворяющей счетному числу условий (21.52), (21.53), можно получить, например, как предел при $n \to \infty$ последовательности функций ограниченной вариации $\eta_n(\xi, \Delta)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) специального вида. А именно каждая функция $\eta_n(\xi, \Delta)$ из такой последовательности удовлетворяет первым $n + 2$ соотношениям (21.52), (21.54) и является аналитической функцией аргумента Δ в точке $\Delta = 0$.

Действительно, выберем последовательность функции $\{\eta_n(\xi, \Delta)\}$ в виде

$$\eta_n(\xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{J_n} a_j(\Delta)\,\theta(\xi - \xi_j),\ \xi_j \in [-1, 0]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, J_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{21.55}$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда, и потребуем, чтобы для функции (21.55) с заданным n выполнялись первые $n + 1$ соотношений (21.54) и соотношение (21.52).

Так, для $n = 1$ выберем $J_1 = 4$ и потребуем, чтобы выполнялись три соотношения:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{3} a_j = 1 - a_4 \equiv b_{1,1},\\ \sum_{j=1}^{3} a_j \sin\omega_0\xi_j\Delta = -a_4 \sin\omega_0\xi_4\Delta \equiv b_{1,2},\\ \sum_{j=1}^{3} a_j\xi_j \cos\omega_0\xi_j\Delta = -a_4\xi_4 \cos\omega_0\xi_4\Delta \equiv b_{1,3}.\end{gathered} \tag{21.56}$$

Отсюда a_1, a_2 и a_3 выражаем через a_4, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 с помощью формул

$$a_j = a_j(\Delta) = \frac{D_{1,j}(\Delta)}{D_1(\Delta)} \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{21.57}$$

где

$$D_1(\Delta) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\omega_0\xi_1\Delta & \sin\omega_0\xi_2\Delta & \sin\omega_0\xi_3\Delta \\ \xi_1\cos\omega_0\xi_1\Delta & \xi_2\cos\omega_0\xi_2\Delta & \xi_3\cos\omega_0\xi_3\Delta \end{vmatrix} \tag{21.58}$$

— определитель системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (21.56) относительно величин a_1, a_2, a_3, а $D_{1,j}(\Delta)$ $(j = 1, 2, 3)$ — определитель, полученный из $D_1(\Delta)$ заменой j-го столбца на столбец

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1,2} \\ b_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\dfrac{\partial^r D_1(0)}{\partial\Delta^r} = \dfrac{\partial^r D_{1,j}(0)}{\partial\Delta^r} \equiv 0\ (j = 1, 2, 3;\ r = 0, 1, 2)$.

Налагаем, помимо условий (21.56), на величины a_4, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 три дополнительных условия:

а) $\xi_i \neq \xi_j$, если $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$;

б) $\left|\dfrac{\partial^3 D_1(0)}{\partial\Delta^3}\right| \geqslant \varepsilon\omega_0^3$ с некоторыми заданными $\varepsilon > 0$;

в) $\dfrac{\partial^3\mu_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4;\ a_4,\ 0)}{\partial\Delta^3} = 0,$

где $\mu_1 (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; a_4, \Delta) \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} a_j \xi_j^2 \sin \omega_0 \xi_j \Delta$. Непосредственной проверкой легко установить, что справедливо

$$\frac{\partial^r \mu_1 (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4; a_4, 0)}{\partial \Delta^r} \equiv 0 \qquad (r = 0, 1, 2).$$

При условиях а) — в) получаем, что $a_j = a_j (\Delta)$ $(j = 1, 2, 3)$ — аналитические функции переменного Δ в точке $\Delta = 0$ при заданных фиксированных $a_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Для произвольного натурального $n \geqslant 2$ выберем $J_n = \frac{7n + n^2}{2}$ и обозначим

$$F_k (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; n_1, n_2) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \int\limits_{-1}^{0} \xi^{k-1} (\cos \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta_n (\xi, \Delta) \big|_{a_j = 0,\, j \overline{\in} [n_1, n_2]}, & k = 2m + 2, \\ \int\limits_{-1}^{0} \xi^{k-1} (\sin \omega_0 \xi \Delta)\, d\eta_n (\xi, \Delta) \big|_{a_j = 0,\, j \overline{\in} [n_1, n_2]}, & k = 2m + 1 \\ \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), & \end{cases} \tag{21.59}$$

$$\vec{\xi}_n = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{J_n}\}, \ \vec{a}_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{J_n}\} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Для заданного натурального $n \geqslant 2$ подчиним величины $a_1, a_2, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots$ из (21.55) следующей системе соотношений:

$$\sum_{j=J_{n-1}+1}^{J_n - 1} a_j = -a_{J_n} \equiv b_{n,1},$$

$$F_k (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; J_{n-1} + 1, J_n - 1) = -F_k (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; J_n, J_n) \equiv b_{n,k+1} \tag{21.60}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, J_n - J_{n-1} - 3),$$

$$F_{n+1} (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; J_{n-1} + 1, J_n - 1) =$$

$$= -F_{n+1} (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; J_n, J_n) - F_{n+1} (\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, \Delta; 1, J_n) \equiv b_{n,n+2}.$$

Система соотношений (21.60) является системой линейных неоднородных уравнений относительно величин

$$a_{J_{n-1}+1} (\Delta), a_{J_{n-1}+2} (\Delta), \ldots, a_{J_n - 1} (\Delta).$$

Обозначим определитель системы (21.60) через $D_n (\Delta)$, а через $D_{n,j} (\Delta)$ $(j = 1, 2, \ldots, n + 2)$ обозначим определитель, полученный из $D_n (\Delta)$ заменой j-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ \vdots \\ b_{n,n+2} \end{pmatrix}$.

Подчиним выбор величин $\xi_j \in [-1,\ 0]$ $(j = J_{n-1} + 1,\ J_{n-1} + 2, \dots, J_n)$ пяти дополнительным условиям:

г) $\xi_i \neq \xi_j$, если $i \neq j$ $\quad (i, j = 1, 2, \dots, J_n)$;

д) $\left| \dfrac{\partial^l D_n(0)}{\partial \Delta^l} \right| \geqslant \varepsilon \omega_0^l$ с некоторым заданным ε, не зависящим от n и l, где

$$l = \begin{cases} 3, & n = 1, \\ 5p - 4, & n = 2p - 2, \\ 5p - 2, & n = 2p - 1 \qquad (p = 2, 3, \dots); \end{cases} \tag{21.61}$$

е) $\dfrac{\partial^r}{\partial \Delta^r} F_n(\vec{\xi}_n, \vec{a}_n, 0;\ 1, J_n) = 0 \quad \left(r = \dfrac{(-1)^{n+1} + 1}{2},\ \dfrac{(-1)^{n+1} + 3}{2} \right)$;

ж) точки $\xi_{J_{n-1}+1}, \xi_{J_{n-1}+2}, \dots, \xi_{J_n}$ выбираются так, что отсутствуют сгущения при $n \to \infty$ точек ξ_j в выделенных локальных областях интервала $[-1,\ 0]$;

з) выбираем $a_{J_1} = \bar{a}_{J_1} \neq 0$ произвольно и положим далее

$$a_{J_n} = \frac{a_{J_1}}{(J_n - J_{n-1})!\, f(n)} = \frac{a_{J_1}}{(n + 3)!\, f(n)} \qquad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

где $f(n)$ — неубывающая функция, получаемая из оценки

$$V_n \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant n+2} \frac{\left| \dfrac{\partial^l D_{n,j}(0)}{\partial \Delta^l} \right|}{\left| \dfrac{\partial^l D_n(0)}{\partial \Delta^l} \right|} \leqslant \frac{Cf(n)}{\varepsilon},\quad f(1) = 1, \tag{21.62}$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от n, и с величинами l и ε из (21.61).

Легко убедиться, что для любого натурального $n \geqslant 1$ условия а) — з) могут быть удовлетворены подходящим выбором величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{J_n}$. В частности, удовлетворить условиям г) — з) можно, если на n-м шаге $(n = 1, 2, 3, \dots)$ две точки ξ_{α_n} и ξ_{β_n} $(\alpha_n,\ \beta_n \in [J_{n-1} + 1,\ J_n]$ выбрать на двух различных наибольших промежутках $[\xi_l, \xi_k] \subset [-1, 0]$ $(l, k \in [1,\ J_{n-1}])$, не содержащих прочих точек ξ_j $(j \in [1,\ J_{n-1}])$.

Заметим, что при условиях а) — з) выполняются соотношения

$$\frac{\partial^r D_n(0)}{\partial \Delta^r} = \frac{\partial^r D_{n,j}(0)}{\partial \Delta^r} \equiv 0$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots, l - 1;\quad j = 1, 2, \dots, n - 2),$$

где l определено в (21.61).

Решая последовательно системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (21.56), (21.60) относительно величин $a_{J_{n-1}+1}$, $a_{J_{n-1}+2}, \dots, a_{J_n-1}$ при выбранных фиксированных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{J_n}$

для $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, получаем последовательно все величины a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ с помощью формул

$$a_{J_{n-1}+j} \equiv a_{J_{n-1}+j}(\Delta) = \frac{D_{n,j}(\Delta)}{D_n(\Delta)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+2) \qquad (21.63)$$

и условия з).

В силу соотношений г) — з) получаем, что все функции a_j $(j = 1, 2, \ldots)$ являются аналитическими функциями аргумента Δ в точке $\Delta = 0$.

Оценим при этом $|\eta_n(\xi, 0)|$ при $n \to \infty$.

В силу соотношений г) — з) получаем

$$\lim_{n\to\infty} |\eta_n(\xi, 0)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{j=J_{p-1}+1}^{J_p} a_j(0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{J_1 |a_{J_1}| V_1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_{J_1}| V_n}{2(J_n - J_{n-1} - 1)!\, f(n)} < \frac{|a_{J_1}| C}{\varepsilon} \left(2 + \frac{1}{4!}\right).$$

При этом модуль разности $\eta_k(\xi, 0) - \eta_p(\xi, 0)$ быстро стремится к нулю при $\min(k, p) \to \infty$ для $\xi = \mathrm{const} \in [-1, 0]$ в соответствии с оценкой

$$|\eta_k(\xi, 0) - \eta_p(\xi, 0)| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|a_{J_1}| V_n}{2(J_n - J_{n-1} - 1)!} < \frac{|a_{J_1}| C}{\varepsilon (m+3)!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

где $m = \min(k, p)$.

Поскольку, кроме того, для функций $a_j(\Delta)$ из (21.55), (21.63) в силу (21.62) справедлива цепочка неравенств

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{J_n} |a_j(0)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=J_{l-1}+1}^{J_l} |a_j(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a_{J_1}| C}{\varepsilon} \left[J_1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{(l+2)!} \right] < \left(4 + \frac{2}{4!}\right) \frac{|a_{J_1}| C}{\varepsilon},$$

то получим, что функция

$$\eta(\xi, \Delta) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\xi, \Delta)$$

есть функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывная справа, аналитически зависящая от параметра Δ в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \mathrm{const}$. При этом для произвольной заданной функции $\varphi(\xi)$ из пространства $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций получаем, что для достаточно малых $|\Delta|$ существует линейный непрерывный функционал:

$$\left(\frac{d\eta_n}{d\xi}, \varphi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_n(\xi, \Delta)\, \varphi(\xi) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=J_{l-1}+1}^{J_l} a_j(\Delta)\, \varphi(\xi_j), \qquad (21.64)$$

т. е. $\frac{d\eta_n}{d\xi}$ — обобщенная функция из пространства $\mathcal{D}'$, сопряженного с пространством $\mathcal{D}$; носитель обобщенной функции $\frac{d\eta_n}{d\xi}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) сосредоточен на интервале $\xi \in [-1, 0]$.

Для достаточно малых $|\Delta| < \Delta_0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta_n(\xi, \Delta)\, \varphi(\xi) \right| \leqslant \max_{\xi\in[-1,0]} |\varphi(\xi)| \cdot |a_{J_1}| \frac{C_1(\Delta_0)}{\varepsilon} \left(2 + \frac{1}{4!}\right)$$

с некоторой постоянной C_1, зависящей только от Δ_0, и выполняется соотношение

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta_k(\xi, \Delta)\, \varphi(\xi) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta_p(\xi, \Delta)\, \varphi(\xi) \right| \leqslant \tag{21.65}$$

$$\leqslant \max_{\xi\in[-1,0]} |\varphi(\xi)| \frac{|a_{J_1}|\, C_1(\Delta_0)}{\varepsilon\,(m+3)!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

где $m = \min(k, p)$, т. е. последовательность функционалов $\left(\frac{d\eta_1(\xi, \Delta)}{d\xi}, \varphi\right)$, $\left(\frac{d\eta_2(\xi, \Delta)}{d\xi}, \varphi\right)$, ... сходится равномерно по отношению к $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ с достаточно малым Δ_0.

Поэтому в силу полноты пространства $\mathcal{D}'$ * существует такая (единственная) обобщенная функция $\frac{d\eta(\xi, \Delta)}{d\xi} \in \mathcal{D}'$, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{d\eta_n(\xi, \Delta)}{d\xi}, \varphi\right) = \left(\frac{d\eta(\xi, \Delta)}{d\xi}, \varphi\right), \ \varphi \in \mathcal{D},\ \Delta = \mathrm{const} \in [-\Delta_0, \Delta_0].$$

Иными словами, существует слабая сходимость последовательности обобщенных функций $\frac{d\eta_n}{d\xi}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) в $\mathcal{D}'$. При этом носитель обобщенной функции $\frac{d\eta}{d\xi}$ сосредоточен на интервале $\xi \in [-1, 0]$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 21.4. Пусть в выражении (21.55) *для каждого* $n \geqslant 1$ *величины* $a_j(\Delta)$ *вычисляются по формулам* (21.63) *и условию* з), *а* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{J_n}$ *фиксируются так, чтобы удовлетворить соотношениям* г) — з).

Тогда для любого натурального $n \geqslant 1$ *функция* (21.55) *является аналитической функцией переменного* Δ *в точке* $\Delta = 0$ *при фиксированном* $\xi \in [-1, 0]$ *и существует предел*

$$\eta(\xi, \Delta) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\xi, \Delta) \tag{21.66}$$

равномерно по $\xi \in [-1, 0]$ *и по* $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ *для достаточно малого* Δ_0.

---

* См., например, § 4 настоящей монографии.

Существует слабая сходимость в $\mathcal{D}'$ последовательности обобщенных функций $\frac{d\eta_n}{d\xi}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *для фиксированного* $\Delta = \mathrm{const} \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ *с достаточно малым* Δ_0. *При этом для любой заданной функции* $\varphi(\xi) \in \mathcal{D}$ *последовательность функционалов* $\left(\frac{d\eta_n(\xi, \Delta)}{d\xi}, \varphi\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta_n(\xi, \Delta)\varphi(\xi)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *сходится равномерно по* $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ для *достаточно малого* Δ_0 *к обобщенной функции* $\frac{d\eta}{d\xi} \in \mathcal{D}'$. *Носитель обобщенной функции* $\frac{d\eta}{d\xi}$ *сосредоточен на интервале* $\xi \in [-1, 0]$.

Построенная функция $\eta(\xi, \Delta)$ является функцией ограниченной вариации, заданной на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывной справа, аналитически зависящей от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$ при фиксированном $\xi \in [-1, 0]$ и удовлетворяет счетному числу соотношений (21.53) и условию нормировки (21.52).

Построенный в теореме 21.4 пример показывает, что существуют такие функции ограниченной вариации $\eta(\xi, \Delta) \neq \mathrm{const}$, заданные на интервале $\xi \in [-1,0]$, непрерывные справа и аналитически зависящие от переменного Δ в точке $\Delta = 0$, которые удовлетворяют счетному числу соотношений (21.53).

При условиях теоремы 21.4 для достаточно малых $|g|$, $\Delta > 0$ к уравнению (21.51), очевидно, применима теорема 21.3.

При условиях теорем 21.3, 21.4 множество характеристических корней уравнения (21.51) содержит два чисто мнимых корня

$$s_{1,2} = \pm i\omega(g, \Delta), \quad \omega(0, \Delta) = \omega_0.$$

Остальные характеристические корни s_i $(i = 3, 4, \ldots)$ лежат при достаточно малых $|g|$, $\Delta > 0$ в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, s < b_1, b_1 < 0$. В соответствии с этим выделение колебательной части для всякого решения начальной задачи (21.51), (21.3) при условиях теорем 21.3, 21.4 для достаточно малых $|g|$ и $\Delta > 0$ тривиально проводится в соответствии с результатами § 3, так что для всякого решения $x(t, \varphi)$ начальной задачи (21.51), (21.3) имеем, в частности,

$$|x(t, \varphi) - C_1 e^{i\omega(g,\Delta)} - C_2 e^{-i\omega(g,\Delta)}| < M_\varphi e^{b_1 t}, \quad t > 0, \tag{21.67}$$

с некоторыми зависящими только от φ постоянными C_1, C_2, M_φ.

При условиях теорем 21.3, 21.4 асимптотический приближенный интеграл энергии (21.50) принимает в данном случае вид

$$H(x, \dot{x}) = \frac{[\dot{x}(t)]^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2}[x(t)]^2 - \frac{g[x(t)]^4}{2}. \tag{21.68}$$

Второй частный случай. Рассмотрим квазилинейное уравнение с распределенным стационарным запаздыванием аргумента

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = g\int\limits_{-1}^{0} [x(t + \xi\Delta)]^3 d\eta(\xi, \Delta), \quad t > 0, \tag{21.69}$$

где $\eta(\xi, \Delta)$ — функция ограниченной вариации, заданная на интервале $\xi \in [-1, 0]$, непрерывная справа, аналитически зависящая от аргумента Δ в точке $\Delta = 0$ при фиксированном ξ и нормированная с помощью соотношения

$$\int_{-1}^{0} d\eta(\xi, \Delta) = 1. \tag{21.70}$$

Ищем решение уравнения (21.69) с начальными условиями (21.3).

Пусть для уравнения (21.69) выполняются условия теоремы 21.3, тогда уравнение (21.69), как убедились выше, обладает периодическими по t решениями, описанными в теореме 21.3. Однако эти периодические решения, очевидно, не исчерпывают множества всех решений дифференциально-функционального уравнения (21.69).

С целью отделить периодические решения уравнения (21.69) от всех прочих удобно разложить все пространство решений уравнения (21.69) на подпространство, соответствующее решениям, близким к решениям невозмущенного уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0, \tag{22.71}$$

и ортогональное к нему подпространство с помощью методов, изложенных в работах [90, 206, 242, 243, 192].

Для этого введем ряд удобных обозначений и определений. Запишем уравнение (21.69) в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -\omega_0^2 x_1(t) + g\displaystyle\int_{-1}^{0} [x_1(t + \xi\Delta)]^3 d\eta(\xi, \Delta), \quad t > 0. \end{cases} \tag{21.72}$$

Ищем решение системы уравнений (21.72) с начальными условиями

$$\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\} = \vec{\varphi}(t) \in C([-\Delta, 0), E^2) \equiv C[-\Delta, 0], \tag{21.73}$$

причем будем брать $\vec{\varphi}(t) \equiv \{\varphi_1, \varphi_2\} = \{\varphi_1, \dot{\varphi}_1\}$, где $C([-\Delta, 0], E^2)$ — пространство непрерывных на интервале $[-\Delta, 0]$ функций со значениями в двумерном евклидовом пространстве E^2. В пространстве $C[-\Delta, 0]$ введем норму $\|\cdot\|$ соотношением

$$\|\vec{\varphi}\| = \sup_{\theta \in [-\Delta, 0]} \sqrt{|\varphi_1(\theta)|^2 + \frac{1}{\omega_0^2}|\varphi_2(\theta)|^2}.$$

Пусть $\vec{u}(t)$ — некоторая вектор-функция, непрерывная на интервале $t \in [-\Delta, \infty]$ со значениями в E^2. Тогда для любого фиксированного $t \geqslant 0$ под u_t будем понимать элемент пространства $C[-\Delta, 0]$, заданный функцией $u_t(\theta) \equiv u(t + \theta)$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, т. е. при каждом фиксированном $t > 0$ u_t есть сужение функции $u(t)$ на $[t - \Delta, t]$, сдвинутое на $[-\Delta, 0]$.

Решением системы уравнений (21.72) на интервале $t \in [0, T]$ с начальной функцией $\vec{\varphi}$ при $t = 0$ будем называть функцию

$$\vec{x}_t(\theta;\ \vec{\varphi}) \equiv \vec{x}_t(\vec{\varphi}),\ \vec{x}_t(\vec{\varphi}) \in C[-\Delta, 0], \quad t \in [0, T],$$

которая удовлетворяет при $t \in [0, T]$ системе уравнений (21.72), а при $t = 0$ условию $\vec{x}_0(\theta,\ \vec{\varphi}) \equiv \vec{x}_0(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi}(\theta)$.

Оператор $U(t)$ сдвига по траекториям невозмущенной системы

$$\frac{d\vec{z}(t)}{dt} = \vec{A}z(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -\omega_0^2, & 0 \end{pmatrix}, \tag{21.74}$$

соответствующей системе (21.72), определим по формуле $\vec{z}(t) = \overrightarrow{U(t)\, z(0)}$, откуда следует $U(t) = e^{At}$.

Следовательно, система уравнений (21.72) эквивалентна интегральному уравнению в векторной форме:

$$(x_t(\theta))_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} (e^{At})_{\alpha\beta} (x_0(\theta))_\beta + g \int_0^t \sum_{\beta,\gamma=1}^{2} (e^{A(t-\tau)})_{\alpha\beta} (e^{A\theta})_{\beta\gamma} F_\gamma(x_\tau)\, d\tau,$$
$$t \geqslant 0,\ \alpha = 1, 2;\ \theta \in [-\Delta, 0], \tag{21.75}$$

где вектор F определен как

$$F_\alpha = \left\{0,\ \int_{-1}^{0} [x_1(t + \xi\Delta)]^3\, d\eta(\xi, \Delta)\right\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{21.76}$$

Поскольку характеристическое уравнение для невозмущенной системы (21.76) имеет (простые) корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, то, согласно [90, 206, 242, 192], можно выделить в пространстве $C[-\Delta, 0]$ базис $(\Phi_1(\theta))_\alpha$, $(\Phi_2(\theta))_\alpha$, который будет базисом в пространстве решений системы (21.74), а с другой стороны, будет базисом некоторого подпространства R в пространстве $C[-\Delta, 0]$. В соответствии с этим можно разложить, притом единственным образом [90, 206, 242, 192], все пространство $C[-\Delta, 0]$ в ортогональную сумму двух подпространств R и Q:

$$C[-\Delta, 0] = R \oplus Q. \tag{21.77}$$

Обозначим через P_R и P_Q операторы проектирования, определенные равенствами

$$\vec{P}_R\varphi = \vec{\varphi}^R \in R, \quad \vec{P}_Q\varphi = \vec{\varphi}^Q \in Q$$

для всякого $\vec{\varphi} \in C[-\Delta, 0]$. Операторы P_R и P_Q обладают свойствами

$$P_R e^{At} = e^{At} P_R, \quad P_Q e^{At} = e^{At} P_Q. \tag{21.78}$$

В соответствии с (21.77) всякое решение x_t возмущенной системы (21.72) можно (единственным образом) представить в виде

$$\vec{x}_t(\theta) = \vec{\Phi}_1(\theta)\, y_1(t) + \vec{\Phi}_2(\theta)\, y_2(t) + \vec{\vartheta}_t(\theta) \tag{21.79}$$

с некоторыми $y \equiv \{y_1,\ y_2\} \in E^2$ и $\vec{\vartheta}_t \in Q$.

Нас будут интересовать вещественные решения системы (21.72). В соответствии с этим будет удобно выбрать базис $\{\vec{\Phi}_1(\theta), \vec{\Phi}_2(\theta)\}$ в виде

$$\Phi(\theta) \equiv \{\vec{\Phi}_1(\theta), \vec{\Phi}_2(\theta)\} \equiv \{\Phi_{11}(\theta), \Phi_{12}(\theta), \Phi_{21}(\theta), \Phi_{22}(\theta)\} =$$
$$= \left\{\cos\omega_0\theta, \frac{\sin\omega_0\theta}{\omega_0}, -\omega_0\sin\omega_0\theta, \cos\omega_0\theta\right\},$$

который еще можно представить так:

$$\Phi_{\alpha a}(\theta) = \sum_{\beta=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}\Phi_{\beta b}(0)\left(e^{B\theta}\right)_{ba}\delta_{\alpha\beta}, \text{ где } (B)_{ba} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}_{ba},$$
$$\text{и } \Phi_{\alpha a}(0) = (1, 0, 0{,}1), \qquad \alpha = 1, 2; \quad a = 1, 2.$$

При этом легко установить, что

$$\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}\delta_{ab}A_{\alpha\beta}\Phi_{\beta b}(\theta) = \sum_{\beta=1}^{2}\sum_{b=1}^{2}\Phi_{\beta b}(\theta)\,\delta_{\alpha\beta}B_{ba}.$$

В новых переменных (21.77), (21.79) интегральное уравнение (21.75), эквивалентное системе (21.72), можно представить в другой эквивалентной форме как систему трех интегро-дифференциальных уравнений [90, 206, 242, 192]:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t),$$
$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\omega_0^2 y_1(t) + g\int_{-1}^{0}\left[y_1(t)\cos\omega_0\xi\Delta - \frac{y_2(t)}{\omega_0}\sin\omega_0\xi\Delta + \right.$$
$$\left. + \mathcal{V}_t(+\xi\Delta)\right]^3 d\eta(\xi, \Delta), \tag{21.80}$$
$$(\mathcal{V}_t)_\alpha = \sum_\beta\left(e^{At}\right)_{\alpha\beta}(\mathcal{V}_0)_\beta + g\int_0^t\sum_\beta\left(e^{A(t-\tau)}\right)_{\alpha\beta}\left(X_0^Q\right)_{\beta 1}\int_{-1}^{0}\left[y_1(t)\cos\omega_0\tau\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{y_2(t)}{\omega_0}\sin\omega_0\tau\xi + \mathcal{V}_t(t)\right]^3 d\eta(\xi, \Delta)\,d\tau,$$

где $X_0^Q \equiv P_Q e^{A\theta}$.

Поскольку характеристическое уравнение для невозмущенной системы (21.71) не имеет корней с положительными вещественными частями, то для любых достаточно малых g и Δ можно указать такие положительные постоянные K и α, что справедливо [90, 206, 243]

$$\|e^{At}\mathcal{V}_0\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\|\mathcal{V}_0\|, \quad t \geqslant 0,$$

для всех $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0(\theta) \in Q$ и

$$\left\|\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(e^{At}X_0^Q\right)_{\alpha\beta}\right\| \leqslant Ke^{-\alpha t}\left\|\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(X_0^Q\right)_{\alpha\beta}\right\|, \quad t \geqslant 0.$$

Полагая в (21.80) $\mathcal{V}_t \equiv 0$, получаем укороченную систему, уже не содержащую запаздывания аргумента:

$$dy_1(t) = y_2(t),$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -\omega_0^2 y_1(t) + g\int_{-1}^{0}\left[y_1(t)\cos\omega_0\Delta - \frac{y_2(t)}{\omega_0}\sin\omega_0\xi\Delta\right]^3 d\eta(\xi, \Delta). \tag{21.81}$$

Эта система, согласно [90, 243], пригодна для аппроксимации решения всей системы (21.80) с начальными условиями $\mathcal{V}_0(\theta) = 0$, $\theta \in [-\Delta, 0]$ лишь с точностью до $O(g^2)$, причем на конечном интервале времени t. Легко установить, что с этой точностью на конечном интервале времени решение системы (21.81) при выполнении условий (21.18), (21.19) с $p = \infty$ периодично по t и совпадает с некоторым периодическим решением системы (21.72), описанным в теореме 21.3. В этом смысле замена переменных (21.79) позволяет выделить колебательную часть решения $\vec{\Phi}_1(\theta)\, y_1(t) + \vec{\Phi}_2(\theta)\, y_2(t)$ из всего решения системы (21.72) с запаздывающим аргументом.

Такое выделение колебательной части для решения нелинейного дифференциально-функционального уравнения (21.69) аналогично соответствующему выделению колебательных решений для линейных дифференциально-функциональных уравнений (см., например, предыдущий пример и § 3). Однако в последнем случае эта процедура проводится значительно проще в силу выполнения принципа суперпозиции для линейных операторов.

Обсудим теперь те условия, которые необходимо выполнить для существования специальных периодических решений уравнения (21.69).

Для существования специальных периодических решений уравнения (21.69), описанных в теореме 21.3, необходимо, чтобы выполнялось счетное число соотношений

$$M^{(1)}(\Delta) \equiv \int_{-1}^{0} (\sin\omega_0\xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \tag{21.82}$$

$$M^{(2)}(\Delta) \equiv \frac{9}{32\omega_0}\int_{-1}^{0}(\cos\omega_0\xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\int_{-1}^{0}(\cos\omega_0\xi'\Delta)\,\xi'\Delta\, d\eta(\xi', \Delta) +$$

$$+\frac{3}{128\omega_0^2}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta)\sin(\omega_0\xi\Delta + 3\omega_0\xi'\Delta) = 0, \tag{21.83}$$

$$M^{(3)}(\Delta) \equiv -\frac{3}{4\omega_0}\int_{-1}^{0}\xi\Delta(\cos\omega_0\xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\left[\frac{3\hat{h}_1^2}{2} + \frac{3\hat{h}_1}{8\omega_0}\int_{-1}^{0}\xi'\Delta\, \times\right.$$

$$\times(\sin\omega_0\xi'\Delta)\, d\eta(\xi', \Delta) - \frac{3}{256\omega_0^2}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0}\xi'\xi''\Delta^2\cos(\omega_0\xi'\Delta + 3\omega_0\xi''\Delta)\, \times$$

$$\times d\eta(\xi', \Delta)\, d\eta(\xi'', \Delta)\Bigg] - \frac{3\hat{h}_1^2}{8}\int_{-1}^{0} \xi^2\Delta^2 (\sin \omega_0 \xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) +$$

$$+ \frac{3\hat{h}_1}{128\omega_0^3}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \xi\Delta \cos(\omega_0\xi\Delta + 3\omega_0\xi'\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta) -$$

$$- \frac{51\hat{h}_1}{512\omega_0^4}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \sin(3\omega_0\xi\Delta + \omega_0\xi'\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta) +$$

$$+ \frac{9\hat{h}_1}{128\omega_0^2}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} \xi\Delta \cos(3\omega_0\xi\Delta + \omega_0\xi'\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta) +$$

$$+ \frac{9}{2048\omega_0^4}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} [\sin \omega_0\Delta(\xi + 3\xi' + 3\xi'')]\, d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta)\, d\eta(\xi'', \Delta) -$$

$$- \frac{3\hat{h}_1^2}{4\omega_0}\int_{-1}^{0} \xi\Delta(\cos \omega_0\xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta) = 0, \qquad (21.84)$$

. . . .

где

$$\hat{h}_1 = \frac{3}{8\omega_0^2}\int_{-1}^{0} (\cos \omega_0\xi\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta).$$

Заметим, что при выполнении условий (21.82) — (21.84) условия (21.18) леммы 21.2 для $k = 1, 2, 3$ выполняются тождественно.

Условия 1) теоремы 21.2 для уравнения (21.69), очевидно, будут удовлетворены, если в качестве постоянных g_1 и $B(\omega_0, g_1)$, фигурирующих в условиях теоремы, взять

$$0 < g_1 < \frac{\omega_0^4}{2}, \quad B(\omega_0, g_1) < \frac{\omega_0}{\sqrt{3g_1}}.$$

Для уравнения (21.69) можно так же, как в предыдущем примере, построить такую последовательность функций ограниченной вариации $\eta_n(\xi, \Delta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, которая сходится равномерно по $\xi \in [-1, 0]$ и по $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ с достаточно малым Δ_0 к функции ограниченной вариации $\eta(\xi, \Delta)$, для которой выполняется счетное число соотношений (21.82) — (21.84), и справедливо условие нормировки (21.70).

Действительно, выберем последовательность функций $\{\eta_n(\xi, \Delta)\}$ в соответствии с формулой (21.55) и подчиним величины $a_1(\Delta)$, $a_2(\Delta)$, ... и ξ_1, ξ_2, ... следующим соотношениям.

Для $n = 1$ выберем $J_1 = 5$ и потребуем

$$\int_{-1}^{0} d\eta_1(\xi, \Delta) = 1,$$

$$\int_{-1}^{0} (\sin \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_1(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} \xi(\cos \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_1(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} (\sin 3\omega_0\xi\Delta)\, d\eta_1(\xi, \Delta) = 0;$$

для $n = 2$ выберем $J_2 = 12$ и потребуем, чтобы выполнялись следующие шесть соотношений:

$$\int_{-1}^{0} d\eta_2(\xi, \Delta) = 1,$$

$$\int_{-1}^{0} (\sin \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_2(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} \xi(\cos \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_2(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} (\sin 3\omega_0\xi\Delta)\, d\eta_2(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} \xi^2(\sin \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_2(\xi, \Delta) = 0,$$

$$\int_{-1}^{0} \xi(\sin \omega_0\xi\Delta)\, d\eta_2(\xi, \Delta) = 0$$

и т. д.

Дальнейшее построение последовательности функций ограниченной вариации $\eta_n(\xi, \Delta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ можно провести по схеме, аналогичной использованной в предыдущем примере. Тогда функция ограниченной вариации $\eta(\xi, \Delta)$, удовлетворяющая условиям, сформулированным после формулы (21.69), и счетному числу условий (21.70), (21.82), (21.83), (21.84), ..., получается как предел последовательности этих функций $\eta_n(\xi, \Delta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ при $n \to \infty$.

Подчинив последовательность функций $\eta_n(\xi, \Delta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, кроме первых n условий (21.82), (21.83), (21.84), ... и условия (21.70), еще дополнительному условию, получаемому методами § 3: .

$$\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{0} (\sin 3\omega_0\xi\Delta)(\cos \omega_0\xi'\Delta)\, d\eta(\xi, \Delta)\, d\eta(\xi', \Delta) > 0, \tag{21.85}$$

получим последовательность функций ограниченной вариации $\eta_n(\xi, \Delta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, сходящуюся к функции $\eta_n(\xi, \Delta)$ такой, для которой уравнение (21.69) удовлетворяет всем условиям теоремы 21.3. В этом случае специальные периодические решения уравнения (21.69) обладают асимптотическим при $t \to \infty$ свойством (21.49).

При условиях теоремы 21.3 асимптотический приближенный интеграл энергии (21.50) имеет для уравнения (21.69) вид

$$H(x, x^0) = \frac{[\dot{x}(t)]^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2}[x(t)]^2 - g\frac{[x(t)]^4}{4}. \tag{21.86}$$

§ 22. Две теоремы о решении обобщенной задачи Коши для квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения

В этом параграфе докажем теорему 21.1, приведенную без доказательства в предыдущем параграфе. При изложении будем следовать в основном нашей работе [148].

Рассмотрим обыкновенное автономное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = gf(g, x(t)), \tag{22.1}$$

где $\omega_0 = \overline{\omega}_0$; $f(g, z)$ — аналитическая функция аргумента g в некоторой комплексной окрестности $G = (g \,\|\, |g| < g_0)$ точки $g = 0$ с полиномиальными по z коэффициентами в разложении в ряд по g:

$$f(g, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} z^l,$$

$$d_{kl} = \overline{d_{kl}}, \quad \max_{\substack{0 \leqslant k < \infty \\ 2 \leqslant l \leqslant n_k}} |d_{kl}| = d_0 < \infty, \quad \max_{0 \leqslant k < \infty} n_k = n < \infty.$$

Предположим, что для заданного малого $g_1 > 0$ существует такое число $B(g_1, \omega_0)$, что в области фазовой плоскости

$$R_{g_1} = \left(x, x \,\|\, \sqrt{|x|^2 + |\dot{x}|^2 \omega_0^{-2}} \leqslant B(\omega_0, g_1)\right) \tag{22.2}$$

все фазовые траектории для уравнения (22.1) при $-g_1 \leqslant g \leqslant g_1$ имеют вид циклов, охватывающих начало координат $x = x = 0$.

Рассмотрим сначала задачу Коши для линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + a^2 u(t) = F(t), \tag{22.3}$$

$$u(t_0 + 0) = u_0, \quad u'(t_0 + 0) = u_1,$$

где $F \in C\,[t_0, \infty]$. Продолжим решение $u\,(t)$ этой задачи и функцию $F\,(t)$ нулем при $t < t_0$ $(t > t_0)$, продолженные функции обозначим через $\tilde{u}$ и $\tilde{F}$ $(\tilde{\tilde{u}}$ и $\tilde{\tilde{F}})$ соответственно. Функции $\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}}$, $\tilde{F}$ и $\tilde{\tilde{F}}$ являются обобщенными функциями из пространства $\mathcal{D}'\,(R^1) \equiv \mathcal{D}'$, сопряженного с пространством всех финитных бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{D}(R^1) \equiv \mathcal{D}$, и удовлетворяют согласно формуле (4.6а) из § 4 следующим уравнениям в $\mathcal{D}'$:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + a^2\tilde{u} = \tilde{F}\,(t) + u_0\delta'\,(t - t_0) + u_1\delta\,(t - t_0), \tag{22.4}$$

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}}{dt^2} + a^2\tilde{\tilde{u}} = \tilde{\tilde{F}}\,(t) - u_0\delta'\,(t - t_0) - u_1\delta\,(t - t_0). \tag{22.5}$$

Определение 22.1. *Обобщенной задачей Коши вправо (влево) от точки* t_0 *для обыкновенного линейного дифференциального уравнения* (22.3) *с источником* $f \in \mathcal{D}'$ *и начальными (конечными) возмущениями* u_0 и u_1 назовем задачу о нахождении обобщенной функции $\tilde{u} \in \mathcal{D}'$ $(\tilde{\tilde{u}} \in \mathcal{D}')$, обращающейся в нуль при $t < t_0$ $(t > t_0)$ и удовлетворяющей уравнению (22.4) (уравнению (22.5)).

Определение 22.2. *Обобщенной задачей Коши вправо (влево) от точки* t_0 *для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения* (22.1) *с начальными (конечными) возмущениями* u_0 и u_1 назовем задачу о нахождении обобщенной функции $\tilde{y} \in \mathcal{D}'$ $(\tilde{\tilde{y}} \in \mathcal{D}')$, для которой определена в $\mathcal{D}'$ обобщенная функция $f\,(g, \tilde{y})$ $(f\,(g, \tilde{\tilde{y}}))$, обращающейся в нуль при $t < t_0$ $(t > t_0)$ и удовлетворяющей в $\mathcal{D}'$ уравнению (22.6) (уравнению (22.7)):

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{y} - gf\,(g, \tilde{y}) = u_0\delta'\,(t - t_0) + u_1\delta\,(t - t_0), \tag{22.6}$$

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{y}}}{dt^2} = \omega_0^2\tilde{\tilde{y}} - gf\,(g, \tilde{\tilde{y}}) = -u_0\delta'\,(t - t_0) - u_1\delta\,(t - t_0). \tag{22.7}$$

Определение 22.3. *Запаздывающей (опережающей) функцией Грина* $G^{\text{ret}}\,(t)$ $(G^{\text{adv}}\,(t))$ *для обыкновенного линейного дифференциального уравнения*

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) z\,(t) = 0 \tag{22.6а}$$

будем называть обобщенную функцию из $\mathcal{D}'$, обращающуюся в нуль при $t > 0$ $(t < 0)$ и удовлетворяющую в $\mathcal{D}'$ уравнению

$$\frac{d^2 z\,(t)}{dt^2} + \omega_0^2 z\,(t) = \delta\,(t). \tag{22.6б}$$

Напомним определение множества $\mathcal{D}'_>$ из § 21 и введем аналогичное ему определение множества $\mathcal{D}'_<$.

Определение 22.4. Под $\mathcal{D}'_{>}$ будем понимать множество всех тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, которые имеют ограниченный слева носитель:

$$\mathcal{D}'_{>} = (f \parallel \operatorname{supp} f \subset (C_f, \infty),\ C_f > -\infty,\ f \in \mathcal{D}').$$

Определение 22.5. Под $\mathcal{D}'_{<}$ будем понимать множество всех тех обобщенных функций из $\mathcal{D}'$, которые имеют ограниченный справа носитель:

$$\mathcal{D}'_{<} = (f \parallel \operatorname{supp} f \subset (-\infty, C_f),\ C_f < \infty,\ f \in \mathcal{D}').$$

Рассмотрим теперь уравнение (22.6).

Множество решений уравнения (22.6) в $\mathcal{D}'$, вообще говоря, не совпадает с $x(t)\,\theta(t-t_0)$, где $x(t)$ — вещественное решение уравнений (22.1) с начальными условиями (с любыми вещественными u_0, u_1),

$$x(t_0+0) = u_0 = \bar{u}_0,\ x(t_0+0) = u_1 = \bar{u}_1, \tag{22.8}$$

а

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases} \tag{22.8a}$$

Ниже построим решение обобщенной задачи Коши вправо от точки t_0 для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (22.1) с начальными возмущениями u_0, u_1, принадлежащее множеству $\mathcal{D}'_{>}$, периодическое по t при $t > t_0$; такое решение существует и является единственным при условиях теоремы 21.1.

Напомним использованную выше, в § 21, замену переменных и искомых функций, необходимую для формулировки и доказательства теоремы 21.1:

$$t = \frac{\tau}{\omega_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k B_k} = \frac{\tau}{\omega_0}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k h_k\right), \tag{22.9}$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}\left(\frac{\tau}{\omega_0 + \Sigma g^k B_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k \tilde{y}_k(\tau), \tag{22.10}$$

$$\tilde{\tilde{y}}(t) = \tilde{\tilde{y}}\left(\frac{\tau}{\omega_0 + \Sigma g^k B_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k \tilde{\tilde{y}}_k(\tau). \tag{22.11}$$

Доказательство теоремы 21.1. Используем для доказательства теоремы 21.1 метод неопределенных коэффициентов. Из (22.9) получаем с помощью формулы (4.6б) из § 4 в смысле обобщенных функций на $\mathcal{D}$

$$\delta(t-t_0) = \delta\left(\frac{\tau-\tau_0}{\omega_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k B_k}\right) = \left(\omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k B_k\right)\delta(\tau-\tau_0), \tag{22.12}$$

$$\frac{d\delta(t-t_0)}{dt} = \left[\omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k B_k\right]^2 \frac{d\delta(\tau-\tau_0)}{d\tau}, \tag{22.13}$$

где

$$\tau_0 = \tau(t_0).$$

Подставляя формулы (22.9) — (22.13) в уравнение (22.4), получаем в классе тех решений, для которых определены в $\mathcal{D}'$ все произведения $\prod_{j=1}^{r} [\tilde{y}_{p_j}(\tau)]^{l_j}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots;\ p_j = 0, 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ l_1 + \ldots + l_r \leqslant n;\ l_j > 0$ — натуральные числа), с помощью разложения в ряды (пока формальные) по g

$$F_0(\tau;\ y_0) + \sum_{R=1}^{\infty} g^R F_R(\tau;\ y_0, y_1, \ldots, y_l) \equiv$$

$$\equiv \omega_0^2 \left[\frac{d^2\tilde{y}(t)}{d\tau^2} + \tilde{y}_0(\tau)\right] + g\left\{\omega_0^2 \frac{d^2\tilde{y}_1(\tau)}{d\tau^2} + \right.$$

$$\left. + \omega_0^2\tilde{y}_1(\tau) + 2B_1\omega_0 \frac{d^2\tilde{y}_0(\tau)}{dt^2} - \sum_{k=2}^{n_k} d_{0k}[\tilde{y}_0(\tau)]^k\right\} +$$

$$+ g^2\left\{\omega_0^2 \frac{d^2\tilde{y}_2(\tau)}{d\tau^2} + \omega_0^2\tilde{y}_2(\tau) + 2B_1\omega_0 \frac{d^2\tilde{y}_1(\tau)}{d\tau^2} + \right.$$

$$+ (B_1^2 + 2\omega_0 B_2) \frac{d^2\tilde{y}_0(\tau)}{d\tau^2} - \sum_{k=2}^{n_1} d_{1k}[\tilde{y}_0(\tau)]^k -$$

$$\left. - \sum_{k=2}^{n_0} d_{0k}k\,[y_0\ (\tau)]^{k-1}\,\tilde{y}_1(\tau)\right\} + \cdots = \{a_0\omega_0^2 + g(a_1\omega_0^2 + 2a_0B_1) +$$

$$+ g^2[\omega_0^2 a_2 + 2a_1B_1 + a_0(B_1^2 + 2\omega_0B_2)] + \cdots\} \frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} +$$

$$+ \{\omega_0 b_0 + g(\omega_0 b_1 + b_0B_1) + g^2(\omega_0 b_2 + b_1B_1 + b_0B_2) + \cdots\}\,\delta(\tau - \tau_0) \equiv$$

$$\equiv \left[C_0(a_0) + \sum_{l=1}^{\infty} g^l C_l(a_0, a_1, \ldots, a_l;\ B_1, \ldots, B_l)\right] \frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} +$$

$$+ \left[h_0(b_0) + \sum_{l=1}^{\infty} g^l h_l(b_0, b_1, \ldots, b_l;\ B_1, \ldots, B_l)\right] \delta(\tau - \tau_0). \quad (22.14)$$

Уравнение (22.14) понимается в смысле обобщенных функций на $\mathcal{D}$, т. е. для всякой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_0(\tau;\ y_0)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \sum_{l=1}^{\infty} g^l \int_{-\infty}^{\infty} F_l(\tau;\ y_0, y_1, \ldots, y_l)\,\varphi(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv (F_0, \varphi) + \sum_{l=1}^{\infty} g^l (F_l, \varphi) = \left[C_0(a_0) + \sum_{l=1}^{\infty} g^l C_l(a_0, a_1, \ldots, a_l;\right.$$

$$\left. B_1, \ldots, B_l)\right](\delta', \varphi) + \left[h_0(b_0) + \sum_{l=1}^{\infty} g^l h_l(b_0, b_1, \ldots, b_l;\right.$$

$$\left. B_1, \ldots, B_l)\right](\delta, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}, \qquad (22.15)$$

где в силу условий теоремы функционалы (F_j, φ) $(j = 1, 2, \ldots)$ и (δ', φ), (δ, φ) являются линейными непрерывными функционалами на пространстве $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Таким образом, для любой функции $\varphi(\tau) \in \mathcal{D}$ равенство (22.15) означает равенство двух формальных рядов по g. Но чтобы это равенство выполнялось для любого $\varphi(\tau) \in \mathcal{D}$ и для любого $g \in [-g_1, g_1]$, $g_1 > 0$, должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях g в левой и правой частях соотношения (22.15):

$$(F_0, \varphi) = C_0(a_0)(\delta', \varphi) + h_0(b_0)(\delta, \varphi);$$

$$(F_1, \varphi) = C_1(a_0, a_1;\ B_1)(\delta', \varphi) + h_1(b_0, b_1;\ B_1)(\delta, \varphi),$$

. . . .

$$(F_l, \varphi) = C_l(a_0, a_1, \ldots, a_l;\ B_1, \ldots, B_l)(\delta', \varphi) +$$
$$+ h_l(b_0, b_1, \ldots, b_l;\ B_1, \ldots, B_l)(\delta, \varphi)$$

и т. д. для любого $\varphi(\tau) \in \mathcal{D}$, или

$$\frac{d^2\tilde{y}_0(\tau)}{d\tau^2} + \tilde{y}_0(\tau) = a_0\frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} + \frac{b_0}{\omega_0}\delta(\tau - \tau_0), \qquad (22.16)$$

$$\frac{d^2\tilde{y}_1(\tau)}{d\tau^2} + \tilde{y}_1(\tau) = -\frac{2B_1}{\omega_0}\cdot\frac{d^2\tilde{y}_0(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{k=2}^{n_0} d_{0k}[\tilde{y}_0(\tau)]^k +$$
$$+\left(a_1 + \frac{2a_0B_1}{\omega_0^2}\right)\frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} + \left(\frac{b_1}{\omega_0} + \frac{b_0B_1}{\omega_0^2}\right)\delta(\tau - \tau_0), \qquad (22.17)$$

. . . .

причем все уравнения (22.16), (22.17), ... понимаются в смысле обобщенных функций на $\mathcal{D}$. Рассмотрим первое из этих уравнений, а именно уравнение (22.16). Решение уравнения (22.16) в множестве $\mathcal{D}'_>$ существует в силу теоремы 4.3 из § 4, это решение единственно и дается сверткой запаздывающей функции Грина уравнения (22.6а) для $\omega_0 = 1$

$$G^{\mathrm{ret}}(\tau) = \theta(\tau)\sin\tau \qquad (22.18)$$

с правой частью уравнения (22.16).

Решение $\tilde{y}_0(\tau)$ является регулярной обобщенной функцией, которой в силу леммы 4.4 соответствует по формуле

$$(\tilde{y}_0, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_0(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int_{\tau_0}^{\infty} y_0(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

единственная функция из класса $C[\tau_0, \infty]$, эта функция является периодической по τ при $\tau > \tau_0$ и имеет вид

$$y_0(\tau) = \frac{b_0}{\omega_0}\sin(\tau - \tau_0) + a_0\cos(\tau - \tau_0). \qquad (22.19)$$

Рассмотрим теперь уравнение (22.17). Это уравнение с учетом (22.16) и в силу того, что

$$\tilde{y}_0(\tau) = [a_0 \cos(\tau - \tau_0) + \frac{b_0}{\omega_0} \sin(\tau - \tau_0)]\, \theta(\tau - \tau_0) =$$
$$= \sqrt{a_0^2 + b_0^2 \omega_0^{-2}} \cos(\tau - \tau_0 - \theta_0)\, \theta(\tau - \tau_0), \qquad (22.20)$$

где $\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{b_0}{a_0 \omega_0}$, может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d^2 \tilde{y}_1(\tau)}{d\tau^2} + \tilde{y}_1(\tau) = \left\{ \frac{2B_1}{\omega_0} \sqrt{a_0^2 + b_0^2 \omega_0^{-2}} \cos(\tau - \tau_0 - \theta_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{k=2}^{n_0} d_{0k} [\cos(\tau - \tau_0 - \theta_0)]^k \right\} \theta(\tau - \tau_0) + a_1 \frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} +$$
$$+ \left(\frac{b_1}{\omega_0} - \frac{b_0 B_1}{\omega_0^2} \right) \delta(\tau - \tau_0) \equiv \left[\left(\frac{2B_1}{\omega_0} + A_1^{(1)} \right) \cos(\tau - \tau_0 - \theta_0) + \right.$$
$$\left. + A_0^{(1)} + \sum_{l=2}^{n_0} A_l^{(1)} \cos l(\tau - \tau_0 - \theta_0) \right] \theta(\tau - \tau_0) +$$
$$+ a_1 \frac{d\delta(\tau - \tau_0)}{d\tau} + \left(\frac{b_1}{\omega_0} - \frac{b_0 B_1}{\omega_0^2} \right) \delta(\tau - \tau_0), \qquad (22.21)$$

где $A_r^{(1)} = A_r^{(1)}(a_0, b_0, d_{02}, \ldots, d_{0n_0})$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n_0)$ — известные полиномиальные функции своих аргументов.

Решение уравнения (22.21) в $\mathcal{D}'_>$ существует, единственно и это решение дается сверткой запаздывающей функции Грина уравнения (22.6а) для $\omega_0 = 1$

$$G^{\text{ret}}(\tau) = \theta(\tau) \sin \tau$$

с правой частью уравнения (22.21)

$$\tilde{y}_1(\tau) = \left\{ \left(\frac{b_1}{\omega_0} - \frac{b_0 B_1}{\omega_0^2} \right) \sin(\tau - \tau_0) + a_1 \cos(\tau - \tau_0) + A_0^{(1)} [1 - \cos(\tau - \tau_0)] + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{l=2}^{n_0} A_l^{(1)} \left[+ \frac{\cos(l\tau - l\tau_0 - l\theta_0)}{1 - l} - \frac{\cos(\tau - \tau_0 - l\theta_0)}{1 - l} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos(\tau - \tau_0 + l\theta_0)}{1 + l} + \frac{\cos(l\tau - l\tau_0 - l\theta_0)}{1 + l} \right] +$$
$$+ \left[\frac{B_1}{\omega_0} + \frac{A_1^{(1)}}{2} \right] \left[(\tau - \tau_0) \sin(\tau - \tau_0 - \theta_0) + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1}{2} \cos(\tau - \tau_0 + \theta_0) - \frac{1}{2} \cos(\tau - \tau_0 - \theta_0) \right] \right\} \theta(\tau - \tau_0). \qquad (22.22)$$

Это регулярная обобщенная функция и ей по формуле

$$(\tilde{y}_1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_1(\tau) \varphi(\tau)\, d\tau = \int_{\tau_0}^{\infty} y_1(\tau) \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \qquad (22.23)$$

соответствует единственная функция $y_1(\tau)$ из класса $C[\tau_0, \tau_0+\tau_1]$, где $\tau_1 > 0$ — любое конечное число. Чтобы эта функция $y_1(\tau)$ была периодична по τ при $\tau > \tau_0$, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$B_1 = -\frac{\omega_0}{2} A_1^{(1)}(a_0, b_0;\ d_{02}, \ldots, d_{0n_0}). \tag{22.24}$$

Таким образом, установлено, что уравнение (22.21) имеет единственное решение из $\mathcal{D}'_>$ такое, что соответствующая ему по формуле (22.23) единственная функция $y_1(\tau)$ из класса $C[\tau_0, \tau_0+\tau_1]$ ($\tau_1 > 0$ — любое конечное число) периодична по τ при $\tau > \tau_0$, и это решение из $\mathcal{D}'_>$ имеет вид (22.22) при условии (22.24).

Аналогично получим уравнения для функций $\tilde{y}_2(\tau)$, $\tilde{y}_3(\tau)$ и т. д.

Рассмотрим общий случай уравнения на функцию $\tilde{y}_s(\tau)$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$). Это уравнение с учетом леммы 21.2 и формул (22.20), (22.22), (22.24) и т. д. принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{d^2\tilde{y}_s(\tau)}{d\tau^2} + \tilde{y}_s(\tau) = \left(\frac{2B_s}{\omega_0} + A_1^{(s)}\right)\cos(\tau-\tau_0-\theta_0)\,\theta(\tau-\tau_0) + \\ + a_s\frac{d\delta(\tau-\tau_0)}{d\tau} + \left(\frac{b_s}{\omega_0} + H_s\right)\delta(\tau-\tau_0) + \\ + \theta(\tau-\tau_0)\left[A_0^{(s)} + \sum_{l=2}^{n^s} A_l^{(s)}\cos l(\tau-\tau_0-\theta_0) + \sum_{l=2}^{n^s} Q_l^{(s)}\sin l(\tau-\tau_0-\theta_0)\right],\end{gathered} \tag{22.25}$$

где $H_s, A_l^{(s)}, Q_l^{(s)}$ ($l = 0, 1, 2, \ldots, n^s$) — известные полиномиальные функции переменных $a_0, \ldots, a_{s-1}, b_0, \ldots, b_{s-1}, d_{00}, \ldots, d_{s-1,n_{s-1}}$.

Совершенно аналогично предыдущему устанавливаем, что уравнение (22.25) имеет единственное решение из $\mathcal{D}'_>$ такое, что соответствующая ему по формуле

$$(\tilde{y}_s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}_s(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int_{\tau_0}^{\infty} y_s(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{22.26}$$

единственная функция $y_s(\tau)$ из класса $C[\tau_0, \tau_0+\tau_1]$ ($\tau_1 > 0$ — любое конечное число) периодична по τ при $\tau > \tau_0$, это решение имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{y}_s(\tau) = \theta(\tau-\tau_0)\Bigg[\left(\frac{b_s}{\omega_0} + H_s\right)\sin\tau + a_s\cos\tau + \\ + A_0^{(s)}[1-\cos(\tau-\tau_0)] + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{n^s} A_l^{(s)}\Bigg(+\frac{\cos(l\tau-l\tau_0-l\theta_0)}{1-l} + \\ + \frac{\cos(\tau-\tau_0-l\theta_0)}{l-1} - \frac{\cos(\tau-\tau_0+l\theta_0)}{1+l} + \frac{\cos(l\tau-l\tau_0-l\theta_0)}{1+l}\Bigg) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{n^s} Q_l^{(s)}\Bigg(\frac{\sin(l\tau-l\tau_0-l\theta_0)}{1-l} - \frac{\sin(\tau-\tau_0-l\theta_0)}{1-l} + \\ + \frac{\sin(\tau-\tau_0+l\theta_0)}{1+l} + \frac{\sin(l\tau-l\tau_0-l\theta_0)}{1+l}\Bigg)\Bigg]\end{gathered} \tag{22.27}$$

и при этом должно выполняться

$$B_r = -\frac{\omega_0}{2} A_1^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{22.28}$$

При выполнении соотношений (22.28) для $s = \infty$ получаем, что решение уравнения (22.6) в классе $\mathcal{D}'_>$ можно представить в виде единственных формальных рядов

$$\tilde{x}(t) \equiv \tilde{Y}(t\omega(g)) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g^k \tilde{y}_k (t\omega(g)), \tag{22.29}$$

где

$$\tau = t\left(\omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k B_k\right) \equiv t\omega(g), \quad \omega(g) = \omega(g, u_0, u_1).$$

Очевидно, формальный ряд (22.29) при $\tau > \tau_0$ дает по формуле

$$(\tilde{x}, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{t_0}^{\infty} x(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

решение обыкновенного дифференциального уравнения (22.1) с начальными условиями (22.8), (22.10) в виде единственного формального ряда

$$x(t) \equiv Y(t\omega(g)) = \sum_{k=0}^{\infty} g^k y_k (t\omega(g)), \tag{22.30}$$

где $y_k(\tau)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ при $\tau > \tau_0$ совпадает почти везде с $\tilde{y}_k(\tau) \in \mathcal{D}'_>$.

Покажем, что ряд $\omega(g) = \omega_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} g^k B_k$ сходится при условиях теоремы 21.1, а ряд (22.30) сходится равномерно по t в области $t \in (-\infty, \infty)$.

Так, сначала установим, что существует решение уравнения (22.1) с начальными условиями

$$x(t_0) = u_0(g),\ \dot{x}(t_0) = u_1(g),\ (u_0(g), u_1(g)) \in R_{g_1},\ g \in [-g_1, g_1]. \tag{22.31}$$

С этой целью перепишем уравнение (22.1) в виде системы уравнений

$$\dot{\vec{w}} = \vec{F}(w_1, w_2), \tag{22.32}$$

где $\vec{w}$, $\vec{F}$ — векторы банахова пространства B,

$$\begin{gathered} \vec{w}(t) = \left\{x(t), \frac{y(t)}{\omega_0}\right\}, \\ \vec{F}(t) = \left\{y(t), -\omega_0 x(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=2}^{n_k} d_{kl} \left[\frac{x(t)}{\omega_0}\right]^l \omega_0^{l-1}\right\}. \end{gathered} \tag{22.33}$$

Выберем в B норму с помощью формулы

$$\|\vec{w}\| = \sup_{t \in [t_0, t_1]} |w_1(t)| + \sup_{t \in [t_0, t_1]} |w_2(t)|.$$

Построим решение системы уравнений (22.32), (22.33) с начальными условиями (22.31) методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered}\vec{w}_n = \vec{w}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{F}(w_{n-1}(\xi))\,d\xi \equiv A(w_{n-1}),\\ \vec{w}_0 = \left\{u_0(g),\ \frac{u_1(g)}{\omega_0}\right\} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\end{gathered} \tag{22.34}$$

Легко установить, что в области $N_c = (\vec{w} \,\|\, |w_1| + |w_2| < C)$ оператор F в правой части (22.34) непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$K_c = \omega_0 + \frac{|g|}{\omega_0} e^{|g|} d_0 (n-1) C^{n-1}. \tag{22.35}$$

Оператор A будет сжимающим в области $\vec{w} \in N_c$, если

$$\omega_0 |t - t_0| K_c < 1.$$

При этом последовательные приближения (22.34) сходятся, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{w}_n\| \leqslant \|\vec{w}_0\| \sum_{l=0}^{n} |t - t_0|^l \omega_0^l K_c^l < \infty,\ \vec{w}_0 \in N_c,\ \omega_0 |t - t_0| K_c < 1.$$

Следовательно, решение обыкновенного дифференциального уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31) существует, единственно на интервале

$$t \in (t_0 - M_c,\ t_0 + M_c),$$

где $M_c = \dfrac{1}{\omega_0 K_c}$.

Далее, в силу условия 2) теоремы 21.1 через всякую точку $(u_0(g),\ u_1(g)) \in R_{g_1}$ проходит единственная фазовая траектория, имеющая вид цикла, охватывающего начало координат. Поскольку каждый такой цикл из области R_{g_1} не содержит особых точек, то решение уравнения (22.1) с начальными условиями (22.21) является периодическим по t с периодом $\dfrac{2\pi}{\omega(g;\, u_0, u_1)}$. Поэтому за конечное число шагов можно методом последовательных приближений построить (периодическое) решение уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31) на всем интервале $t \in \left[t_0,\ t_0 + \dfrac{2\pi}{\omega(g;\, u_0, u_1)}\right]$.

С другой стороны, по теореме Коши—Ковалевской (§ 3, теорема 3.1) получаем, что решение уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31) аналитически зависит от g в области $|g| < g_1$. Поэтому построенное решение уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31) может быть представлено, и притом единственным образом, в виде рядов по g (22.30) с

$$\omega(g;\, u_0,\, u_1) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k B_k(u_0,\, u_1), \tag{22.36}$$

где $B_k \equiv B_k(u_0,\, u_1)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, следовательно, вычисляются по формулам (22.28). При этом ряд (22.36) сходится равномерно по

$g \in [-g_1, g_1]$, а ряд (22.30) сходится равномерно по $g \in [-g_1, g_1]$ и по $t \in (-\infty, \infty)$. Поэтому сходится ряд (22.29) в $\mathcal{D}'$ и он представляет единственное решение из $\mathcal{D}'_>$ уравнения (22.6), (22.8) такое, которому по формуле

$$(\tilde{y}(t), \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{t_0}^{\infty} y(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

соответствует единственная периодическая при $t > t_0$ функция из класса $C[t_0, \infty)$.

Теорема 21.1 доказана *.

Замечание 22.1. Построенное в теореме 21.1 обобщенное решение при $t > t_0$ совпадает с решением уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31), единственным при условиях теоремы 21.1.

С помощью первой теоремы Абеля устанавливаем, что это решение уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31) допускает аналитическое продолжение по g во весь круг $|g| < g_1$ в плоскости комплексного переменного g для достаточно малых g_1.

Для уравнения (22.7) доказывается теорема 22.1, аналогичная теореме 21.1.

Теорема 22.1. *Пусть выполняются все условия теоремы* 21.1. *Тогда решение уравнения* (22.7) *с конечными возмущениями* (22.31), *принадлежащее множеству* $\mathcal{D}'_<$, *периодическое по* t *при* $t < t_0$ *такое, для которого все произведения коэффициентов ряда* (22.11):

$$\prod_{j=1}^{r} [\tilde{\tilde{y}}_{p_j}]^{l_j}$$

$(r = 1, 2, 3, \ldots;\ p_j = 0, 1, 2, \ldots;\ 1 \leqslant j \leqslant r;\ l_1 + \ldots + l_r \leqslant n,$ $0 \leqslant l_j$ — *натуральные числа), определены в* $\mathcal{D}'$ *как обобщенные функции, существует, это решение единственно в* $\mathcal{D}'_<$ *и может быть получено в виде ряда* (22.11) *как сумма периодических по* t *при* $t < t_0$ *решений из* $\mathcal{D}'_<$ *последовательности обобщенных задач Коши влево от точки* t_0 *для уравнений, получаемых формально подстановкой выражений* (22.9) — (22.13) *в уравнение* (22.7) *и приравниванием членов при одинаковых степенях* g.

Построенное решение непрерывно зависит от начальных возмущений u_0, u_1 *в смысле слабой топологии в* $\mathcal{D}'$.

Замечание 22.2. Построенное в теореме 22.1 обобщенное решение при $t < t_0$ совпадает с решением уравнения (22.1) с конечными условиями

$$\begin{aligned} x(t_0 - 0) &= u_0(g) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^k, \\ \dot{x}(t_0 - 0) &= u_1(g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k g^k \end{aligned} \tag{22.37}$$

и с продолженным на всю ось $t \in (-\infty, \infty)$ решением уравнения (22.1) с начальными условиями (22.31), единственным при услови-

---

[*] В § 21 теорема 21.1 сформулирована для случая $t_0 \equiv 0$.

ях теоремы 22.1. Из замечания 22.1 при этом заключаем, что указанное решение допускает аналитическое продолжение по g во весь круг $|g| < g_1$ в плоскости комплексного переменного g для достаточно малых g_1.

Из теорем 21.1, 22.1 вытекает следующее следствие.

Следствие 22.1. Существует целое семейство периодических решений уравнения (22.1) с периодами $T_j(g) = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + g\beta_j(g))$, $|\beta_j(0)| < \infty$, обращающихся при $g = 0$ в решение

$$x_0(t) = C_0 \cos \omega_0 t + \frac{C_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

порождающего уравнения

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z(t) = 0;$$

каждое решение этого семейства является решением задачи Коши для уравнения (22.1) с начальными условиями вида (22.31):

$$\begin{aligned} x(t_0 + 0) &= u_0^{(j)}(g) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k a_k^{(j)}, \\ \dot{x}(t_0 + 0) &= u_1^{(j)}(g) = C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k b_k^{(j)}. \end{aligned} \tag{22.38}$$

В заключение этого параграфа отметим, что целесообразность использования обобщенного решения уравнения (22.1) вида $x(t)\,\theta(t - t_0)$ состоит в двух аспектах. Во-первых, на таком пути при использовании метода неопределенных коэффициентов (примененного в доказательстве теорем 21.1 и 22.1) приходим к алгоритму, весьма удобному при построении «обычного» решения обыкновенного уравнения (22.1) с начальными данными (22.31), имеющими вид аналитических по g в точке $g = 0$ функций. Во-вторых, этот алгоритм построения решения задачи Коши (22.1), (22.31) допускает простое обобщение на случай построения периодических специальных решений дифференциальных квазилинейных уравнений с запаздывающим аргументом и удобен для доказательства существования таких специальных решений, рассмотренных в § 21.

ГЛАВА V

КЛАССИЧЕСКАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. КОНКРЕТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

В этой главе мы вернемся к рассмотрению уравнений с частными производными (а также с отклонением аргумента), возникающих в нелинейной теории поля и, в частности, в общей теории относительности.

Изучаемые ниже классы нелинейных дифференциально-функциональных уравнений возникают не только в теории поля, но и во многих задачах физики плазмы [52, 59], теории электромагнитных и спиновых волн в твердых телах [10, 115, 256], в задачах гидродинамики при исследовании волновых процессов в сплошных средах с дисперсией [78, 130, 69, 199, 156, 268, 269], в теории упругости [45, 68] и в теории источников, предложенной Ю. Швингером [202] для описания взаимодействующих элементарных частиц.

Поэтому предлагаемые в этой главе методы исследования и построения решений таких уравнений представляют несомненный практический интерес не только для нелинейной теории поля и общей теории относительности, но и в указанных разделах теории сплошных сред.

§ 23. Квазилинейные уравнения гиперболического типа нелинейной теории поля

23.1. Общековариантные уравнения нелинейной теории поля в субпроективных пространствах. Уравнения (20.3) вещественного скалярного физического поля $\varphi(x)$, рассмотренного в § 20, п. 20.1, в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{23.1}$$

можно переписать в виде

$$g^{ls}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^l dx^s} - \left(\frac{g^{ls}}{2g}\cdot\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{lp}g^{ps} + \Gamma^s_{lp}g^{lp}\right)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^s} + \\ + \mu^2\varphi(x) + \sum_{s=3}^{N} b_s\varphi^{s-1}(x) = 0. \tag{23.2}$$

Используя выражение для оператора Лапласа — Бельтрами второго рода на метрике (23.1)

$$\Delta_2 \varphi (x) \equiv g^{ls} \nabla_l \nabla_s \varphi (x) = \left[g^{il} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^l} - g^{ls} \Gamma^l_{ls} \frac{\partial}{\partial x^l} \right] \varphi(x), \qquad (23.3)$$

можно уравнение (23.2) представить в следующей форме:

$$\Delta_2 \varphi (x) - \left[\frac{g^{ls}}{2g} \cdot \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{lp} g^{ps} \right] \frac{\partial \varphi (x)}{\partial x^s} + \mu^2 \varphi (x) + \\ + \sum_{s=3}^{N} b_s \varphi^{s-1} (x) = 0. \qquad (23.4)$$

Рассмотрим другой пример. А именно рассмотрим задачу о движении электрически заряженных тел в общей теории относительности, исследованную в гл. III. Электромагнитное поле в общей теории относительности описывается уравнениями Максвелла — Лоренца (17.34)

$$\nabla_k \nabla^k A^l - \nabla_k \nabla^l A^k = -4\pi\sigma u^l, \qquad (23.5)$$

где A^l — вектор-потенциал электромагнитного поля, σ — инвариантная плотность электрического заряда среды, а u^l — четырехмерный вектор скорости элементарного объема среды.

В силу условий Лоренца

$$\nabla_k A^k = 0$$

и формулы (17.12) уравнения (23.5) принимают следующий вид:

$$\nabla_k \nabla^k A^l - g^{ks} g^{ln} A_q R^q_{k,sn} = -4\pi\sigma u^l, \qquad (23.6)$$

или, с помощью оператора Лапласа — Бельтрами второго рода (23.3), представимы в форме $(\Delta_2 A^l(x) \equiv g^{ks} \nabla_k \nabla_s A^l(x))$

$$\Delta_2 A^l (x) - g^{km} g^{ln} g_{sq} R^q_{k,mn}) = -4\pi\sigma u^l.$$

Другие примеры систем гиперболических нелинейных уравнений поля дает теория источников полей и частиц, предложенная Ю. Швингером для описания взаимодействующих элементарных частиц [202]. Так, широкий класс задач, описывающих в теории источников взаимодействие элементарных частиц, изображаемых n различными полями Φ, Ψ, ..., Σ, преобразующимися как тензоры или спиноры заданных рангов при произвольных преобразованиях группы движений риманова пространства (23.1) (например, при произвольных преобразованиях группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ (3,1), являющейся группой движений четырехмерного пространства Минковского с метрикой $ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}$), приводит к системе нелинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\Delta_2\Phi + A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + B_1\Phi + F_1(\Phi, \Psi, \ldots, \Sigma) = 0, \\ &\Delta_2\Psi + A_2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + B_2\Psi + F_2(\Phi, \Psi, \ldots, \Sigma) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta_2\Sigma + A_n\frac{\partial\Sigma}{\partial x} + B_n\Sigma + F_n(\Phi, \Psi, \ldots, \Sigma) = 0, \end{aligned} \qquad (23.7)$$

где каждое из уравнений имеет заданную тензорную или спинорную структуру. При этом коэффициенты A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, зависят только от компонентов метрического тензора g_{ls} и их производных, $F_i(\Phi, \Psi, \ldots, \Sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— заданные полиномиальные функции аргументов Φ, Ψ, ..., Σ, зависящие от компонентов метрического тензора и их производных. Вводя векторные величины

$$\Xi = \{\Phi, \Psi, \ldots, \Sigma\},\ A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\},\ B = \\ = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\},\ F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\},$$

можно записать систему уравнений (23.7) в векторной форме:

$$\Delta_2\Xi + A\frac{\partial\Xi}{\partial x} + B\Xi + F(\Xi) = 0. \qquad (23.8)$$

Очевидно, уравнение скалярного поля (23.4) и уравнение электромагнитного поля (23.6) в области четырехмерного пространства, свободной от электрических зарядов, можно также представить в форме (23.8).

Таким образом, многие задачи нелинейной теории поля, и в частности общей теории относительности, приводят к необходимости исследовать решения системы дифференциальных уравнений (23.8), в которой вектор $\Xi = \{\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n\}$ представляет собой систему n полей, каждое из которых преобразуется при произвольных преобразованиях группы движений соответствующего риманова пространства с интервалом (23.1) как тензор или спинор заданного ранга, вектор-функция F имеет вид

$$F(\Xi) = \sum_{s_1=0}^{N} \cdots \sum_{s_n=0}^{N} f_{s_1,\ldots,s_n} \prod_{j=1}^{n} [\Xi_j]^{s_j}, \qquad (23.9)$$

а все векторные коэффициенты $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,

$$B = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\},\ f_{s_1,\ldots,s_n} = \{f_{s_1,\ldots,s_n,1}, \ldots, f_{s_1,\ldots,s_n,n}\}$$

зависят только от компонентов метрического тензора g_{ik} и его производных по координатам.

Для системы уравнений (23.8), (23.9) из результатов § 2, п. 2.9, вытекает такое следствие.

Следствие 23.1. Пусть G_s — группа движений четырехмерного риманова пространства с интервалом

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \qquad (23.9\text{a})$$

X_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$ — инфинитезимальные генераторы группы G_s, реализованные в этом пространстве, а $\Delta_2 \equiv \nabla_s \nabla^s$— оператор Лапласа — Бельтрами, отвечающий этому риманову пространству.

Тогда система уравнений (23.8), (23.9), составленных для метрики (23.9а), может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta_2 \Xi + \sum_{\alpha=1}^{s} A^\alpha X_\alpha \Xi + \sum_{\beta=1}^{p} a^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta} + B\Xi + F(\Xi) = 0, \qquad (23.10)$$

где зависящие только от компонентов g_{ik} и их производных по координатам коэффициенты $A^\alpha = \{A_1^\alpha, A_2^\alpha, \ldots, A_n^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, .., s$, $a^\beta = \{a_1^\beta, a_2^\beta, \ldots, a_n^\beta\}$, $\beta = 1,2, \ldots, p$, определяются единственным образом для данного выбора генераторов $\{X_\alpha\}_{\alpha=1}^{s}$, а $y^\beta = y^\beta(x^i)$, $\beta = 1,2, \ldots, q$; $1 \leqslant q \leqslant 3$,— криволинейные координаты, не затрагиваемые преобразованиями группы G_s.

В случае общего риманова пространства с метрикой (23.1) коэффициенты A_j^α, a_j^β, B_j, $f_{s_1, \ldots, s_n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, \ldots, s$; $\beta = 1,2, \ldots, p$, в уравнении (23.10) оказываются зависящими от всех четырех координат x^0, x^1, x^2, x^3, поскольку все эти коэффициенты зависят от метрического тензора $g_{ik}(x)$ и его производных по координатам

$$H_a = H_a\left(g_{ik}(x), \frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^l}, \frac{\partial^2 g_{ik}(x)}{\partial x^l \partial x^s}\right) \equiv \tilde{H}_a(x^q), \qquad a = 1, 2, \ldots, p,$$

$$H = \{H_1, H_2, \ldots, H_p\} \equiv \{A_1^1, \ldots, A_n^1, A_1^2, \ldots$$
$$\ldots, A_n^2, \ldots, A_n^s; \; B_1, \ldots, B_n, \; f_{00\ldots01}, \ldots, f_{NN\ldots Nn}\}.$$

Особую роль в данном случае играет один важный класс римановых пространств, на котором вид уравнений (23.10) существенно упрощается. А именно рассмотрим так называемые субпроективные пространства Кагана [77].

Определение 23.1. Будем говорить, что два n-мерных риманова пространства V_n и $\tilde{V}_n$ *изометричны,* если существует такое невырожденное вещественное преобразование, которое преобразует метрику пространства V_n в метрику пространства $\tilde{V}_n$.

Определение 23.2. Риманово пространство V_n называется *субпроективным,* если оно допускает такое изометрическое отображение на евклидово пространство E_n, при котором всем геодезическим пространства V_n соответствуют в E_n кривые, лежащие в двумерных плоскостях, содержащих начало координат.

В субпроективном пространстве существует такая система координат, в которой выражение для интервала (23.1) принимает особенно простой вид, а в выражении для оператора Лапласа — Бельтрами второго рода Δ_2 разделяются переменные. Соответствующий результат дается следующей теоремой, доказательство которой можно найти в монографии [77].

Теорема 23.1. *В субпроективном пространстве V_n существует такая система координат (y^1, y^2, y^3, y^4), в которой метрика V_n принимает вид*

$$ds^2 = g_{11}(y^1)\,dy^{1^2} + \sigma(y^1)\,ds_0^2(y^2, y^3, y^4), \qquad (23.11)$$

где ds_0^2 — метрика трехмерного пространства постоянной кривизны *.

В системе координат (y^1, y^2, y^3, y^4) оператор Лапласа — Бельтрами второго рода Δ_2, действующий на тензор $u(y)$ валентности $0+0$, *имеет вид*

$$\Delta_2 u(y) = \left[\frac{1}{g_{11}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^{12}} + \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{g_{11}\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dy_1} - \frac{1}{2g_{11}^2}\cdot\frac{dg_{11}}{dy^1}\right)\frac{\partial}{\partial y^1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma}\Delta_2^{(0)}\right]u(y) \equiv \left[\frac{1}{g_{11}}\mathcal{P}_2\left(y^1, \frac{\partial}{\partial y^1}\right) + \frac{1}{\sigma}\Delta_2^{(0)}\right]u(y), \quad (23.12)$$

где $\Delta_2^{(0)}$ — оператор Лапласа — Бельтрами второго рода на метрике ds_0^2 пространства постоянной кривизны K.

Важен частный случай субпроективных пространств, а именно таких, для которых в системе координат $y = (y^1, y^2, y^3, y^4)$, фигурирующей в теореме 23.1, все коэффициенты A_j, a^β, B_j, $f_{s_1, \ldots, s_n}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\beta = 1, 2, \ldots, p$, для заданной системы уравнений (23.10), (23.9) зависят только от переменной y^1. В этом случае если все компоненты $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$ вектора Ξ являются тензорами валентности $0+0$, то система уравнений (23.10), (23.9) примет вид

$$\left[\mathcal{P}_2\left(y^1, \frac{\partial}{\partial y^1}\right) + \frac{g_{11}(y^1)}{\sigma}\Delta_2^{(0)}\right]\Xi(y) + g^{11}(y^1)\sum_{\alpha=1}^{s} A^\alpha(y^1)X_\alpha\Xi(y) +$$

$$+ g^{11}(y^1)\sum_{\beta=1}^{p} a^\beta(y^1)\,\Xi(y) + g^{11}(y^1)B(y^1)\,\Xi(y) +$$

$$+ g^{11}(y^1)\sum_{s_1=0}^{N}\cdots\sum_{s_2=0}^{N} f_{s_1,\ldots,s_n}(y^1)\prod_{j=1}^{n}[\Xi_j(y)]^{s_j} = 0, \qquad (23.13)$$

где величины g_{11}, σ, $\mathcal{P}_2\left(y^1, \frac{\partial}{\partial y^1}\right)$ даются формулами (23.11), (23.12).

Приводимость системы нелинейных уравнений (23.10), (23.9) в субпроективных пространствах к виду (23.13) в общем случае не исследована. Можно указать лишь один частный результат в этом направлении, относящийся к линейному однородному уравнению вида (23.8). Этот результат принадлежит И. И. Тугову [183, 184] и формулируется в виде следующей теоремы.

---

* Необходимое и достаточное условие того, чтобы риманово пространство V_n, $n \geqslant 3$, с метрикой (23.1) было пространством постоянной кривизны, имеет вид

$$R_{ij,kl} = K\cdot(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

где $R_{ij,kl}$ — тензор кривизны, а $K = \mathrm{const}$ для данного V_n. Легко видеть, что для пространства постоянной кривизны скалярная кривизна

$$R = g^{im}g^{kn}R_{ik,\,nm} = -12K = \mathrm{const}.$$

Теорема 23.2. *Если в уравнении*

$$F(u) \equiv a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + b^i \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + c(x)\,u(x) = 0 \qquad (23.14)$$

относительно тензора $u(x)$ *валентности* $0+0$ *выполнено для* $a^i \equiv b^i + a^{kl}\,\Gamma^i_{kl}$ *условие*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i} = 0, \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad (23.15)$$

то уравнение (23.14) *эквивалентно уравнению* ($a_i = a_{ij} \cdot a^j$)

$$\Delta_2 u + \frac{n-1}{4n}\tilde{R}u = \pm u, \qquad (23.16)$$

где оператор Лапласа — Бельтрами второго рода Δ_2 *и скалярная кривизна* $\tilde{R}$ *определены на метрике* $\widetilde{ds}^2 = B ds^2$, *где*

$$B = c - \frac{n-1}{4n}R - \frac{1}{4}a^i a_i - \frac{1}{2}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} - \frac{1}{2}a^j\Gamma^i_{ji} \neq 0,$$

пространства $\tilde{V}_n$, *изометричного пространству* V_n *с метрикой* $ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ *и с символами Кристоффеля* Γ^i_{jk}; $a_{ij}a^{il} = \delta_{li}$.

Замечание 23.1. Если теперь пространство с метрикой $\widetilde{ds}^2 = Bds^2$ является пространством постоянной кривизны, то $\tilde{R} = \text{const}$. Таким образом, в силу теоремы 23.1 в системе координат (y^1, y^2, y^3, y^4) из этой теоремы уравнение (23.16) примет вид (23.13).

Нелинейные уравнения в субпроективных пространствах, приводящиеся к виду (23.13), допускают полное разделение переменных при отыскании решений $\Xi(y)$ в подходящем гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$, где Ω — поверхность транзитивности для рассматриваемой группы движений G_s этого субпроективного пространства. Действительно, пусть $\{Y_{\lambda lm}(y^2, y^3, y^4)\}$ — полная ортогональная система функций в таком пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$, являющихся собственными функциями оператора $\Delta_2^{(0)}$:

$$\Delta_2^{(0)} Y_{\lambda lm} = \lambda Y_{\lambda lm}, \qquad (23.17)$$

и представляющих базис неприводимого представления группы G_s, реализованного на Ω (такие функции называются гиперсферическими). Тогда, представляя искомую функцию $\Xi(y)$ в виде ряда (интеграла) Фурье по полной системе функций $\{Y_{\lambda lm}\}$ для случая компактной (некомпактной) группы G_s и подставляя это разложение в левую часть системы уравнений (23.13), с помощью соотношений ортогональности для гиперсферических функций достигаем полного разделения переменных в рассматриваемой системе уравнений (23.13).

В этом параграфе ниже рассмотрим частный класс систем уравнений (23.10) в субпроективном пространстве, приводящихся к виду системы уравнений (23.13). А именно будут рассмотрены квазилинейные лоренц-инвариантные волновые уравнения относительно скалярной функции $\varphi(x)$ в четырехмерном пространстве Минковского, имеющие вид (23.13). Пространство Минковского с метрикой

$$ds^2 = dx^{0 2} - dx^{1 2} - dx^{2 2} - dx^{3 2}$$

является субпроективным пространством, а поэтому к квазилинейным волновым уравнениям применимы все результаты, изложенные выше в этом параграфе.

Ниже в § 23 будут приведены теоремы существования таких квазилинейных волновых уравнений, а в § 24 и 25 будут построены конкретные многообразия решений этих уравнений методом, основанным на разделении переменных и описанным схематически выше в этом параграфе.

23.2. Задача Коши для квазилинейных волновых уравнений в функциональных пространствах. В §20 предыдущей главы были указаны два примера задач теории поля, приводящих к квазилинейным волновым уравнениям с отклоняющимся аргументом: вещественное нелинейное нелокальное физическое скалярное поле в общей теории относительности и регуляризованные уравнения нелинейной квантовой теории поля (релятивистской квантовой механики). Регуляризованные уравнения квантовой теории поля, а также уравнения нелинейного нелокального вещественного скалярного поля в общей теории относительности в модельном случае могут быть представлены в общем виде:

$$\left[-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2} - m^2\right] \varphi(x) = g \sum_{s=2}^{N} \int \dots \int \varphi(x + \xi_1) \dots$$

$$\dots \varphi(x + \xi_s)\, d\eta_s(\xi_1;\ g, \Delta) \ \dots \ d\eta_s(\xi_s;\ g, \Delta),\ x \in R^{n+1}, \quad (23.18)$$

где $\eta_s(\xi;\ g, \Delta)$, $s = 2, 3, \dots, N$,— мера, носитель которой — конечная область Ω в комплексном $n + 1$-мерном пространстве C^{n+1}; мера $\eta_s(\xi;\ g, \Delta)$ зависит от параметров $g \in [-g_1, g_1]$ и $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$. В квантовой теории поля интересен случай, когда $d\eta_s(\xi;\ g, \Delta) \to \delta(\xi)\, a_s(g)$ при $\Delta \to 0$ в смысле слабой сходимости в пространстве, сопряженном с пространством основных функций.

В теории поля представляет большой интерес как классический случай, когда ищется решение уравнения (23.18) в виде вещественнозначной (или комплекснозначной) функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей в заданной области $D \times [0, T] \subset R^{n+1}$ уравнению (23.18) и некоторым граничным условиям, так и квантовый случай, описанный в § 20, когда ищется решение уравнения (23.18) на операторнозначную обобщенную функцию $\varphi(x)$ над некоторым гильбертовым пространством, удовлетворяющую уравнению (23.18) при всех $x \in R^{n+1}$, коммутационным соотношениям (20.23), (20.24) и основным постулатам общей квантовой теории поля.

В первых трех параграфах этой главы будем интересоваться только классическим случаем. Квантовый случай будет рассматриваться в последних параграфах этой главы.

В предыдущей главе уже изучались некоторые специальные классы уравнений (23.18) для случая $x \in R^1$. В этой главе продолжим рассмотрение уравнений типа (23.18) теперь уже для $n \geqslant 1$.

Для уравнений, относящихся к некоторым конкретным, интересным для нас классам, приведем сначала теоремы существования и единственности глобальных решений.

В частности, нас будет интересовать случай уравнений (23.18) без отклонений аргумента для $n \geqslant 1$ такого вида:

$$\left[-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}-m^2\right]\varphi(x)=g\,|\varphi(x)|^\rho\varphi(x). \qquad (23.19)$$

Прежде чем точно сформулировать возникающую в теории поля задачу о решении уравнения, введем ряд необходимых обозначений.

Обозначим через D область в пространстве R^n точек $x=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть ∂D — граница области D. Всегда будем считать, что граница ∂D «достаточно регулярна»; по мере надобности свойство регулярности границы ∂D будет уточняться.

Условимся обозначать через Q цилиндр в $R_x^n \times R_t$:

$Q=D\times[0, T]$, T — конечно, а через Σ — его боковую границу:

$$\sum=\partial D\times[0, T].$$

В теории поля возникает следующая задача. Найти вещественную функцию $\varphi(x)=\varphi(x^0, \vec{x})$, $\vec{x}\in D\subset R^n$, $x^0\in[0, T]$, являющуюся решением уравнения

$$\left[-\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}-m^2\right]\varphi(x)-g\,|\varphi(x)|^\rho\,\varphi(x)=f(x),$$

$$\vec{x}\in D,\quad x^0\in[0, T]. \qquad (23.20)$$

При этом задано $\rho>0$, $g=\bar{g}$; искомая функция $\varphi(x)$ должна дополнительно удовлетворять краевым и начальным условиям:

$$\varphi(x)=0,\quad x\in\sum, \qquad (23.21)$$

$$\varphi(0, \vec{x})=\varphi_0(\vec{x}),\quad \frac{\partial\varphi(0, \vec{x})}{\partial x^0}=\varphi_1(\vec{x}),\quad \vec{x}\in D, \qquad (23.22)$$

где φ_0, φ_1 — заданные функции.

Задача (23.20) — (23.22) изучалась в работах Л. Шиффа [281], К. Юргенса [255], И. Сигала [288], Ж.-Л. Лионса [102], Дж. Келлера [257], Ф. Браудера и В. Штраусса [220], С. Моравеца, В. Штраусса [270]. Чтобы точнее сформулировать задачу и найти средства для ее решения, нам понадобится ввести несколько функциональных пространств.

Подчеркнем, что при решении краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных *выбор функциональных про-*

странств, в которых решается задача, *играет абсолютно решающую роль.*

Для постановки и решения начальной задачи Коши либо краевой для квазилинейных волновых уравнений (23.19), (23.20) нам понадобятся некоторые функциональные пространства, введенные выше в § 4.

Будем искать решение задачи (23.20)—(23.22) в пространстве $\mathcal{L}_\infty(0, T; V_\rho(\Omega))$. Для этого надо будет определить производную $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ в этом пространстве. Определим ее в более общем случае для $f \in \mathcal{L}_p(0, T; B)$.

Обозначим через $\mathcal{D}'(0, T; B)$ пространство обобщенных функций на $\mathcal{D}([0, T])$ со значениями в банаховом пространстве B. Это означает, что если $f \in \mathcal{D}'(0, T; B)$, то линейный непрерывный функционал

$$(f, \varphi)(x) = \int_0^T f(x^0, x)\varphi(x^0)\,dx^0 \in B \tag{23.23}$$

для любой функции $\varphi(x^0) \in \mathcal{D}([0, T])$.

Если $f \in \mathcal{D}'(0, T; B)$, то производная в смысле обобщенных функций определяется из равенства

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x^0}\right), \quad \forall \varphi(x^0) \in \mathcal{D}([0, T]). \tag{23.24}$$

Каждому элементу $f \in \mathcal{L}_p(0, T; B)$ можно сопоставить обобщенную функцию (также обозначаемую через f) на $[0, T]$ со значениями в B по формуле (23.23). Кроме того, можно с помощью (23.24) определить $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ как элемент пространства $\mathcal{D}'(0, T; B)$. Легко устанавливается следующая лемма.

Лемма 23.1. *Если* $f \in \mathcal{L}_p(0, T; B)$ *и* $\frac{\partial f}{\partial x^0} \in \mathcal{L}_p(0, T; B)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *то* f *после, быть может, изменения на множестве меры нуль (из отрезка* $[0, T]$*) будет непрерывным отображением* $[0, T] \to B$.

Теперь можно точно сформулировать задачу (23.20)—(23.22).

23.3. *Теоремы существования и единственности глобальных решений уравнения (23.20) с $m \equiv 0$.* Сформулируем одну теорему существования, доказанную Ж.-Л. Лионсом [102], которая показывает, в каком именно смысле может быть решена задача (23.20)—(23.22).

Теорема 23.3. *Пусть* Ω *— ограниченная область и пусть заданы функции* f, u_0, u_1, *причем*

$$f \in \mathcal{L}_2(Q), \quad Q = \Omega \times [0, T],$$

$$u_0 \in H^1_{20}(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega), \quad p = \rho + 2,$$

$$u_1 \in \mathcal{L}_2(\Omega).$$

Тогда существует функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$u \in \mathcal{L}_\infty (0, T;\ H^1_{20}(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega)), \tag{23.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \in \mathcal{L}_\infty (0, T;\ \mathcal{L}_2(\Omega)), \tag{23.26}$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2} u + |u|^\rho u = f \quad \textit{в} \quad Q = \Omega \times [0, T]; \tag{23.27}$$

$$u(0, \vec{x}) = u_0\ (\vec{x}), \tag{23.28}$$

$$\frac{\partial u(0, \vec{x})}{\partial x^0} = u_1(\vec{x}). \tag{23.29}$$

Замечание 23.2. Из включений (23.25), (23.26) леммы 23.1 следует, что функция из теоремы 23.3, осуществляющая отображение интервала $[0, T]$ в пространство $\mathcal{L}_2(\Omega)$, является непрерывной функцией, так что (23.28) имеет смысл. Аналогично можно убедиться, что благодаря лемме 23.1 функция $\frac{\partial u}{\partial x^0}$, осуществляющая отображение интервала $[0, T]$ в пространство $H^{-1}(\Omega) + \mathcal{L}_p(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, будет непрерывной функцией, так что (23.29) также имеет смысл.

Замечание 23.3. В силу определения пространства $H^1_{2,0}(\Omega)$ и $V_\rho(\Omega) = H^1_{2,0}(\Omega) \cap \mathcal{L}_p(\Omega)$ получаем при условиях теоремы 23.3 $u = 0$, $x \in \Sigma$, т. е. условие (23.21) включено в (23.25).

При условиях теоремы 23.3 решение уравнения (23.27), вообще говоря, не единственно. Единственность решения гарантируется при выполнении некоторых дополнительных условий, даваемых следующей теоремой (Ж.-Л. Лионс [102]).

Теорема 23.4. *Пусть выполняются все условия теоремы* 23.3 *и, кроме того, пусть*

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2}, \qquad n \neq 2, \tag{23.30}$$

ρ *произвольно и конечно при* $n = 2$.

Тогда решение $u(x)$, *полученное в теореме* 23.3, *единственно.*

В том случае, если на начальные данные накладываются дополнительные условия гладкости, полезна еще одна теорема, доказанная Ж.-Л. Лионсом [102].

Теорема 23.5. *Пусть в условиях теоремы* 23.3

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} \in \mathcal{L}_2(Q), \quad Q = \Omega \times [0, T],$$

$$u_0 \in H^1_{2,0}(\Omega) \cap H^2_2(\Omega),$$

$$u_1 \in H^1_{2,0}(\Omega),$$

$$\rho \leqslant \frac{2}{n-2} \text{ при } n \neq 2, \qquad (23.31)$$

ρ произвольно и конечно при n = 2.

Тогда существует решение, и притом единственное, задачи (23.27) — (23.29), удовлетворяющее условиям

$$u \in \mathcal{L}_\infty(0, T;\ H^1_{2,0}(\Omega) \cap H^2_2(\Omega)), \qquad (23.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^0} \in \mathcal{L}_\infty(0, T;\ H^1_{2,0}(\Omega)), \qquad (23.33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} \in \mathcal{L}_\infty(0, T;\ \mathcal{L}_2(\Omega)). \qquad (23.34)$$

Замечание 23.4. Для трехмерного пространства $\vec{x} \in R^3$ условие (23.30) теоремы 23.4 и условие (23.31) теоремы 23.5 имеет вид

$$\rho \leqslant 2. \qquad (23.35)$$

Теоремы 23.3—23.5 относятся к случаю уравнения (23.20) с $m \equiv 0$. Для уравнений (23.20) с $m \neq 0$ справедливы аналогичные результаты.

23.4. Теоремы существования и единственности глобальных решений уравнения (23.20) с $m \neq 0$. Прежде чем сформулировать эти результаты, введем несколько обозначений.

Обозначим через Ш $(\vec{x};\ \sigma) \subset R^3$ трехмерный пространственный шар с центром в точке $\vec{x}$ и радиусом $\sigma > 0$.

Область четырехмерного пространства — времени, ограниченную нижней полой светового конуса $\Gamma^-(\sigma, \vec{x})$ с центром в точке $(\sigma, \vec{x})$ и основанием Ш $(\vec{x};\ \sigma)$, обозначим через K (Ш $(x;\ \sigma)$):

$$K(Ш(\vec{x};\ \sigma)) = (\xi^0, \vec{\xi} \,\|\, \xi^0 \geqslant 0,\ |\vec{\xi} - \vec{x}| + \xi^0 < \sigma).$$

Если $G \subset R^3$ — любое открытое множество, то обозначим через $K(G)$ объединение:

$$K(G) = \bigcup_{Ш(\vec{x}, \sigma) \subset G} K(Ш(\vec{x}, \sigma)). \qquad (23.35а)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] u(x^0, \vec{x}) + F'(|u(x^0, \vec{x})|^2)\, u(x^0, \vec{x}) = 0 \quad (23.36)$$

при $x^0 > 0$, где $u(x^0, \vec{x})$ — комплекснозначная искомая функция, $F(s) \in C^3([0, \infty))$ реальнозначна и удовлетворяет условиям нормировки $F(0) = 0$; $F'(s) \equiv \frac{dF(s)}{ds}$.

Поставим задачу Коши для уравнения (23.36) с начальными условиями

$$u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}),$$

$$\frac{\partial u(0, \vec{x})}{\partial x^0} = u_1(\vec{x}). \tag{23.37}$$

Теорема существования глобального решения задачи Коши формулируется следующим образом (К. Юргенс [255]).

Теорема 23.6. *Пусть функция* $F(s) \in C^3([0, \infty))$, $F(0) = 0$, *реальнозначна и пусть, кроме того, выполняются неравенства*

$$A + F(s) > 0, \quad \left|\frac{dF(s)}{ds}\right| \leqslant a[A + F(s)]^{\alpha}$$

для $\forall s \in [0, \infty)$ *с некоторыми положительными* a, A *и* $\alpha < \frac{2}{3}$.

Тогда для всякой открытой области $G \subset R^3$ *и для произвольных начальных данных* $u_0(\vec{x}) \in C^3(G)$, $u_1(\vec{x}) \in C^2(G)$ *имеется одно и только одно решение* $u(x^0, \vec{x}) \in C^2(K(G))$ *задачи Коши* (23.36), (23.37).

При некоторых дополнительных условиях полученное в теореме 23.6 решение непрерывно зависит от начальных данных. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем в пространстве $H_2^1(G) \cap C^2(K(G))$ норму посредством соотношения

$$\left\{\int \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x^0}\right|^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left|\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}\right|^2 + |f|^2\right] d\vec{x}\right\}^{1/2} = \|f(x^0)\|. \tag{23.38}$$

Непрерывная зависимость решений уравнения (23.35) дается следующей теоремой [255].

Теорема 23.7. *Пусть*

а) *выполняются все условия теоремы* 23.6;

б) *выполняются неравенства*

$$F(s) \geqslant 0 \ \text{и} \ \left|\frac{\partial^2 F(s)}{\partial s^2}\right| \leqslant b, \ \forall s \in [0, \infty)$$

с некоторой конечной неотрицательной постоянной b;

в) *начальные данные*

$$u_{0,1}(\vec{x}) \in C^3(R^3) \ \text{и} \ u_{1,1}(\vec{x}) \in C^2(R^3) \tag{23.39}$$

имеют компактные носители в области* $G \subset R^3$;

г) *начальные данные*

$$u_{0,2}(\vec{x}) \in C^3(R^3) \ \text{и} \ u_{1,2}(\vec{x}) \in C^2(R^3) \tag{23.40}$$

имеют компактные носители в области $G \subset R^3$;

---

* Пусть A и B — множества в линейном топологическом пространстве Φ. Множество A называется компактным в B, если A ограничено и замыкание $\bar{A}$ множества A содержится в B.

д) *ограничены величины*

$$E_i = \frac{1}{2} \int \left[|u_{1,i}|^2 + \sum_{\alpha=1}^{3} \left| \frac{\partial u_{0,i}}{\partial x^\alpha} \right|^2 + F(|u_{0,i}|^2) \right] d\vec{x} \leqslant \hat{E} \qquad (23.41)$$

$$(i = 1,\ 2)$$

с некоторой конечной (неотрицательной) постоянной $\hat{E}$.

Тогда для решения $u_1(x^0, \vec{x})$ *задачи Коши* (23.36), (23.37) *с начальными данными* (23.39) *и для решения* $u_2(x^0, \vec{x})$ *задачи Коши* (23.36), (23.37) *с начальными данными* (23.40) *справедливо неравенство в смысле нормы* (23.38):

$$\|u_1(x^0) - u_2(x^0)\|^2 \leqslant 5[1 + (x^0)^2]\, e^{K[1+(x^0)^4]} \|u_1(0) - u_2(0)\|^2,$$

с некоторой постоянной K, *зависящей только от* $\hat{E}$ *и от функции* $F(s)$.

Большой интерес для теории поля представляют уравнения (23.36) с полиномиальной по s функцией $F(s)$. В связи с этим отметим следующее.

Замечание 23.5. Чтобы удовлетворить условия теоремы 23.6 в классе функций $F(s) = \sum\limits_{k=k_{\min}}^{k=k_{\max}} b_k s^k$, $k_{\min} > -\infty$, $k_{\max} < +\infty$, необходимо $k_{\min} > 0$; $k_{\max} < \frac{3}{5}$, $0 < b_{k_{\max}} < \left(\frac{a}{k_{\max}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Очевидно, применительно к уравнениям (23.36) с полиномиальным нелинейным членом все изложенные выше теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных глобальных решений задачи Коши относятся к уравнениям вида

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2} + m^2 \right] u(x^0, \vec{x}) + g \sum_{s=2}^{N-1} d_s [u(x^0, \vec{x})]^s + g [u(x^0, \vec{x})]^N = 0 \qquad (23.42)$$

с $g \geqslant 0$.

Вместе с тем для уравнений (23.42) с $g < 0$ аналогичные теоремы, касающиеся существования и единственности глобальных решений задачи Коши для любых достаточно гладких начальных данных, уже не будут иметь места.

23.5. Примеры, когда нет теоремы существования глобальных решений. Приведем примеры достаточно гладких начальных данных, для которых соответствующее решение задачи Коши для уравнения вида (23.42) с $g < 0$ становится бесконечным внутри области $K(G)$.

Один из таких примеров дается следующей теоремой (Дж. Келлер [257]).

Теорема 23.8. *Пусть* $u(x^0, \vec{x})$ *будет решением при* $x^0 > 0$ *уравнения*

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}\right] u(x^0, \vec{x}) = f(u(x^0, \vec{x})),\ f(s) \in C^2(-\infty, \infty) \tag{23.43}$$

с начальными условиями

$$u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}) \in C^3(R^3),$$

$$\frac{\partial u(0, \vec{x})}{\partial x^0} = u_1(\vec{x}) \in C^2(R^3). \tag{23.44}$$

Пусть существует непрерывная по Липшицу функция $f_1(s)$ *и две постоянные* α *и* β *такие, что*

$$f(u) \geqslant f_1(u_1),\ \text{если}\ u \geqslant u_1, \tag{23.45}$$

$$u_0(\vec{x}) = \alpha,\ u_1(\vec{x}) \geqslant \beta\ \text{для}\ |\vec{x} - \vec{x}_0| \leqslant T,$$

и такие, что справедливо

$$\beta \geqslant 0,\ \beta^2 + \int_\alpha^z f_1(s)\,ds > 0\ \text{для}\ z > \alpha \tag{23.46}$$

и сходится интеграл

$$T = \int_\alpha^\infty \left[\beta^2 + \int_\alpha^z f_1(s)\,ds\right]^{-1/2} dz < \infty, \tag{23.47}$$

либо такие, что справедливо

$$\beta < 0,\ \beta^2 + \int_\alpha^z f_1(s)\,ds > 0\ \text{для}\ z > \nu_m, \tag{23.48}$$

где ν_m *— наибольший корень (меньший чем* α*) уравнения*

$$\beta^2 + \int_\alpha^{\nu_m} f_1(s)\,ds = 0, \qquad \nu_m < \alpha,$$

и сходится интеграл

$$T = t_m + \int_{\nu_m}^\infty \left[\beta^2 + \int_\alpha^z f_1(s)\,ds\right]^{-1/2} dz < \infty, \tag{23.49}$$

$$t_m = -\int_\alpha^{\nu_m} \left[\beta^2 + \int_\alpha^z f_1(s)\,ds\right]^{-1/2} dz.$$

Тогда $u(x^0, \vec{x})$ *становится бесконечным в области*

$$K(Ш(\vec{x}_0;\ T)) = (x^0, \vec{x} \| x^0 \geqslant 0,\ |\vec{x} - \vec{x}_0| + x^0 < T).$$

Рассмотрим, в каких случаях реализуются условия этой теоремы для квазилинейных волновых уравнений с нелинейным членом, имеющим вид полинома по искомой функции $u(x^0, \vec{x})$. Легко устанавливается справедливость следующих ниже утверждений, вытекающих из теоремы 23.8.

Следствие 23.2.

А°. Для выбора в качестве правой части уравнения (23.43) выражения

$$f(s) = \sum_{k=1}^{2p} b_k s^k + g s^{2p+1}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots; \quad g \neq 0, \qquad (23.50)$$

где b_k — комплексные постоянные, при $g > 0$ можно указать такие начальные данные (23.44) (удовлетворяющие условиям (23.45) — (23.47) либо условиям (23.45), (23.48), (23.49)), что решение соответствующей задачи Коши (23.43), (23.44) становится бесконечным в области

$$K(Ш(\vec{x}_0, T)) = (x^0, \vec{x}\|, \; x^0 \geqslant 0, \; |\vec{x} - \vec{x}_0| + x^0 < T), \qquad (23.51)$$

где T дается формулой (23.47) либо формулой (23.49).

Б°. Для выбора (23.50) в качестве правой части в уравнении (23.43) с $g < 0$ не существует таких постоянных α и β, которые бы удовлетворяли условиям теоремы 23.8.

В°. Не все глобальные решения задачи Коши (23.43), (23.44), (23.50) с $g = \bar{g}$ являются голоморфными функциями константы связи g.

Следствие 23.3. Для выбора в качестве правой части уравнения (23.43) выражения

$$f(s) = \sum_{k=1}^{2p-1} b_k s^k + g s^{2p}, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (23.52)$$

где b_k — комплексные постоянные, при $g \neq 0$ можно указать такие начальные данные (23.44) (удовлетворяющие условиям (23.45) — (23.47) при $g < 0$ и условиям (23.45), (23.48), (23.49) при $g > 0$), что соответствующее решение задачи Коши (23.43), (23.44), (23.52) становится бесконечным в области $K(Ш(\vec{x}_0; T))$, определяемой формулой (23.51).

Таким образом, при рассмотрении задачи Коши (23.43), (23.44) с правой частью, имеющей вид полинома нечетной степени по искомой функции $u(x^0, \vec{x})$, существование глобальных решений задачи Коши в конической области $K(Ш(\vec{x}_0; \rho))$ четырехмерного пространства $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ критически зависит от знака коэффициента при старшей степени от функции $u(x^0, \vec{x})$.

Пример 1. В частности, для уравнения мезонной теории с «кубическим членом взаимодействия», рассмотренного Л. Шиффом [281]:

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}+m^2\right]u(x^0,\vec{x})+\eta^2|u(x^0,\vec{x})|^2u(x^0,\vec{x})=0, \quad (23.53)$$

в силу теорем 23.6, 23.8 получим, что для произвольных начальных данных

$$u(0,\vec{x})=u_0(\vec{x})\in C^3(G),$$

$$\frac{\partial u(0,\vec{x})}{\partial x^0}=u_1(\vec{x})\in C^2(G), \quad (23.54)$$

где G — произвольная открытая область $G\subset R^3$, существует одно и только одно решение $u(x^0,\vec{x})\in C^2(K(G))$ задачи Коши (23.36), (23.37), где

$$K(G)=\bigcup_{Ш(\vec{x};\rho)\in G}K(Ш(\vec{x};\rho)).$$

§ 24. Периодические и частицеподобные решения уравнений нелинейной теории поля

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что при рассмотрении задачи Коши для уравнения (23.36) с правой частью, имеющей вид полинома нечетной степени по искомой функции $u(x^0,\vec{x})$

$$\square\, u(x^0,\vec{x})=-m^2u(x^0,\vec{x})+g\sum_{l=1}^{N}a_lu(x^0,\vec{x})|u(x^0,\vec{x})|^{2l}+$$

$$+g\sum_{l=1}^{N}b_l|u(x^0,\vec{x})|^{2l}\equiv\mathcal{F}(u(x^0,\vec{x})), \quad (24.1)$$

(где $g\in[-g_0,g_0]$ — вещественный параметр; a_j, b_j, $j=1,2,\ldots,N$,— постоянные коэффициенты) и с произвольными начальными условиями вида

$$u(0,\vec{x})=u_0(\vec{x})\in C^3(G),$$

$$\frac{\partial u(0,\vec{x})}{\partial x^0}=u_1(\vec{x})\in C^2(G), \quad (24.2)$$

существование глобальных решений в конической области $K(G)$ четырехмерного пространства $(x^0,\vec{x})\in R^4$ критически зависит от знака коэффициента ga_N при старшей степени от функции $u(x^0,\vec{x})$ в правой части уравнения. А именно если этот коэффициент отрицателен, то для $N=1$, согласно теореме 23.6, глобальное решение задачи Коши (24.1), (24.2) с произвольными (достаточно гладкими) начальными данными $u_0(\vec{x})$ и $u_1(\vec{x})$ существует во всей конической области $K(G)$, определяемой формулой (23.35а); если же указанный коэффициент в уравнении (24.1) положителен, то, согласно теореме

23.8 и следствиям 23.2, 23.3, среди достаточно гладких начальных данных (24.2) найдутся такие, для которых соответствующее решение задачи Коши (24.1), (24.2) обращается в бесконечность во всяком случае в некоторых точках конической области K (G).

В связи с этим обстоятельством представляет особый интерес исследовать более тонкими способами, при каких именно начальных данных как для случая положительного, так и для случая отрицательного коэффициента ga_N в правой части уравнения (24.1) глобальные решения задачи Коши все же будут существовать. Как будет показано ниже, подобные глобальные решения существуют независимо от знака коэффициента ga_N. В частности, они могут иметь вид периодических по x^0 и по $\vec{x}$ решений.

Исследованием таких периодических решений задачи Коши (24.1), (24.2) мы сейчас и займемся.

С этой целью искомое решение задачи Коши (24.1), (24.2) целесообразно представить в неявном виде как решение нелинейного интегрального уравнения

$$u(x^0, \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x^0}\left[\frac{x_0}{4\pi}\int\limits_{|\vec{\xi}|=1} u_0(\vec{x} + x^0\vec{\xi})\, d\vec{\xi}\right] + \frac{x^0}{4\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{|\vec{\xi}|=1} u_1(\vec{x} + x^0\vec{\xi})\, d\vec{\xi} - \int\limits_0^{x_0} \frac{(x^0 - \tau)}{4\pi}\, d\tau \int\limits_{|\vec{\xi}|=1} \mathcal{F}(u(\tau, \vec{x} + x^0\vec{\xi} - \tau\vec{\xi}))\, d\vec{\xi}. \quad (24.3)$$

Задача Коши (24.1), (24.2) *эквивалентна интегральному уравнению* (24.3) в том смысле, что всякое непрерывно дифференцируемое решение задачи Коши (24.1), (24.2) является решением интегрального уравнения, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой выражения (24.3) в левую часть уравнения (24.1).

24.1. Проекционно-итеративные методы построения решения интегрального уравнения. Одним из эффективных методов построения периодических решений нелинейного интегрального уравнения (24.3) является проекционно-итеративный метод решения интегральных уравнений. Основы этого метода были заложены в работах М. А. Красносельского [88, 89, 90], Л. В. Канторовича [82, 83], Р. Эрмана [230], И. Шмидта [283, 284]. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах Ю. Д. Соколова [171], И. П. Мысовских [120], А. Ю. Лучки [106], Н. С. Курпеля [94] и др.

Проекционно-итеративный метод применим к решению интегральных уравнений общего вида

$$u = Tu, \quad (24.4)$$

где T — нелинейный интегральный оператор. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть u — элемент некоторого банахова пространства B, а T — нелинейный оператор, действующий из B в B. Рассмотрим наряду с уравнением (24.4) другое уравнение, имеющее вид

$$u_n = P_n T u_n, \tag{24.5}$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования исходного пространства B на его подпространство B_n, порожденное первыми n элементами базиса $\{\varphi_i\}$ пространства B.

В качестве приближенного решения уравнения (24.4) рассматривается решение близкого уравнения (24.5). Оказывается, что при определенных условиях на оператор T и определенных свойствах решения u_* исходного интегрального уравнения (24.4) решение u_* может быть построено в качестве предела при $n \to \infty$ последовательности решений уравнения (24.5). Для того чтобы строго изложить те условия, при которых возможна указанная аппроксимация, сформулируем ряд необходимых определений и теорем, доказательства которых можно найти, например, в книге Н. С. Курпеля [94].

Рассмотрим *абстрактное гильбертово пространство* $\mathcal{H}$ *с нормой* элемента $u \in \mathcal{H}$, определяемой равенством

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

где символом (u, v) обозначено *скалярное произведение элементов* u, $v \in \mathcal{H}$.

Важный класс операторов в гильбертовом пространстве образуют так называемые операторы ортогонального проектирования.

Определение 24.1. *Оператором ортогонального проектирования* (или *проектором*) называется такой проекционный оператор ($P = P^2$), проектирующий исходное пространство $\mathcal{H}$ на его подпространство $\mathcal{H}_p$, что для любого $u \in \mathcal{H}$ элементы Pu и Qu, где $Q = I - P$ (I — тождественный оператор), ортогональны, т. е.

$$(Pu, Qu) = 0. \tag{24.6}$$

Теорема 24.1. *Для того чтобы линейный оператор P в $\mathcal{H}$ был проектором, необходимо и достаточно, чтобы*

1) P был самосопряженным оператором, т. е.

$$(Pu, v) = (u, Pv)$$

для любых u, $v \in \mathcal{H}$;

2) для каждого $u \in \mathcal{H}$ выполнялось равенство $P(Pu) = Pu$.

Теорема 24.2. *Пусть T — некоторый (нелинейный) оператор, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, и пусть в некоторой выпуклой области* * *D гильбертова пространства $\mathcal{H}$ уравнение*

$$u = Tu \tag{24.7}$$

имеет решение u, а уравнение

$$v = PTv \tag{24.8}$$

---

* Множество D векторного пространства V называется *выпуклым*, если это множество целиком содержит отрезок $\alpha u + (1 - \alpha)v$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, определяемый любыми двумя элементами u, $v \in D$.

имеет решение v, *где* P — *проектор пространства* $\mathcal{H}$ *на его п д-пространство* $\mathcal{H}_p$. *Пусть, кроме того, операторы* PT *и* QT (*где* $Q = I - P$) *удовлетворяют условию Липшица*

$$\| PTu - PTv \| \leqslant q_{PT} \| u - v \|, \tag{24.9}$$

$$\| QTu - QTv \| \leqslant q_{QT} \| u - v \| \tag{24.10}$$

для любых u, $v \in D$.

Если выполняется неравенство

$$q_{PT}^2 + q_{QT}^2 < 1, \tag{24.11}$$

то оценка погрешности приближенного решения $\| u - v \|$ *выражается неравенством*

$$\| u - v \| \leqslant \left(\sqrt{1 - q_{PT}^2} - q_{QT} \right)^{-1} \| QTv \|. \tag{24.12}$$

Используя теорему 24.2 для оценки погрешности приближенного решения исходного уравнения (24.7), можно построить различные итерационные процессы для конструирования решения исходного уравнения методом ортогонального проектирования. Один из таких итерационных процессов дается следующей теоремой.

Теорема 24.3. *Пусть* T — *оператор, действующий из* $\mathcal{H}$ *в* $\mathcal{H}$, *а* P — *проектор пространства* $\mathcal{H}$ *на его подпространство* $\mathcal{H}_p$, *и* $Q = I - P$.

Если операторы T, PT *и* QT *удовлетворяют условию Липшица с постоянными* q_T, q_{PT}, q_{QT} *в выпуклой области* $D \subset \mathcal{H}$ *и выполняется условие*

$$\min \left\{ q_T^2 \sum_{j=1}^{k-1} q_{QT}^{2j},\ q_{PT}^2 + q_{QT}^2 \right\} < 1, \tag{24.13}$$

то последовательные приближения u_n, *определяемые однозначно из уравнений*

$$u_n = R_k (PTu_n, QTu_{n-1}) \qquad (u_0 \in \mathcal{H},\ n = 1, 2, \ldots), \tag{24.14}$$

$$R_1 (PTu;\ QTv) \equiv PTu + QTv,$$

$$R_i (PTu;\ QTv) \equiv PTu + QTR_{i-1} (PTu;\ QTv),$$

$$i = 2, 3, \ldots, k \tag{24.15}$$

(k — *фиксированное натуральное число*), *при любых* $u_0 \in \mathcal{H}$ *сходятся к единственному в* $\mathcal{H}$ *решению уравнения* $u = Tu$, *причем справедливы следующие оценки погрешности*:

$$\| u - u_n \| \leqslant N_k (1 - \varepsilon_k)^{-1} \varepsilon_k^{n-p} \| QTu_p - QTu_{p-1} \|$$
$$(1 \leqslant p \leqslant n), \tag{24.16}$$

где

$$N_k = q_{QT}^{k-1} \left(1 - q_{PT}^2 \sum_{j=0}^{k-1} q_{QT}^{2j} \right)^{-1/2}, \tag{24.17}$$

$$\varepsilon_k = \min \left\{ q_T q_{QT}^{k-1},\ q_{QT}^k \left(1 - q_{PT}^2 \sum_{j=0}^{k-1} q_{QT}^{2j} \right)^{-1/2} \right\} < 1.$$

При этом $\varepsilon_m < \varepsilon_k$ *при* $m > k$, *если* $q_{QT} \neq 0$.

Рассмотрим следующий пример, касающийся решения нелинейного интегрального уравнения (24.3).

Пример 1. Пусть уравнение (24.7) имеет вид интегрального уравнения (24.3), которому эквивалентна задача Коши для гиперболического уравнения (24.1) с начальными условиями (24.2). Пусть, кроме того, коническая область

$$K(G) = \bigcup_{Ш(\vec{x},\sigma)\subset G} K(Ш(\vec{x}, \sigma))$$

содержит некоторый четырехмерный параллелепипед

$$\mathcal{P}_g = [0, T(g)] \times [0, l_1(g)] \times [0, l_2(g)] \times [0, l_3(g)] \subset K(G), \tag{24.18}$$

где $T(g) > 0$; $l_j(g) > 0$, $j = 1, 2, 3$,— заданные функции параметра $g \in [-g_0, g_0]$; $\bigcup\limits_{g \in [-g_0, g_0]} \mathcal{P}_g \equiv \Omega$.

Пусть известно, что существует непрерывно дифференцируемое решение u задачи Коши (24.1), (24.2) в параллелепипеде (24.18) (а поэтому существует непрерывно дифференцируемое решение соответствующего интегрального уравнения (24.3), (24.2) в этом параллелепипеде). Поэтому такое решение принадлежит функциональному пространству Соболева $H_2^2(\Omega)$. В этом пространстве функций $H_2^2(\Omega)$ в соответствии с результатами § 23 можно ввести скалярное произведение двух элементов $f_1(x)$, $f_2(x) \in H_2^2(\Omega)$, $x \in \Omega \subset R^4$, посредством формулы

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{\Omega} \bar{f}_1(x) f_2(x)\, dx + \sum_{i=0}^{4} \int\limits_{\Omega} \overline{\frac{\partial f_1}{\partial x^i}} \frac{\partial f_2}{\partial x^i}\, dx, \tag{24.19}$$

превращающим это пространство в сепарабельное гильбертово пространство, в котором счетномерный базис $\{\varphi_n(x)\}$ можно выбрать следующим образом:

$$\varphi_s(x) = \exp\left[\frac{is^0x^02\pi}{T(g)} + i\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{s^\alpha x^\alpha 2\pi}{l_\alpha(g)}\right], \tag{24.20}$$

$$s = \{s^0, s^1, s^2, s^3\}, \qquad s^j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$j = 0, 1, 2, 3.$$

При этом пополнение по норме скалярного произведения (24.19) пространства, натянутого на базисные векторы

$$\varphi_s(x), \; |s| \equiv \sum_{j=0}^{3} |s^j| \leqslant n, \tag{24.21}$$

будет гильбертовым пространством со скалярным произведением (24.19) и с конечномерным базисом (24.21); это пространство обозначим через $\mathcal{H}_n$. Оператор ортогонального проектирования пространства $\mathcal{H}$ на подпространство $\mathcal{H}_n$ обозначим через P_n.

Обозначая правую часть интегрального уравнения (24.3) через Fu, перепишем все уравнение (24.3) так:

$$u = Fu. \tag{24.22}$$

Теперь, поскольку оператор F может быть определен как оператор, действующий в пространстве функций $H_2^2(\Omega) = \mathcal{H}$, и операторы F, $P_n F$, $Q_n F$ ($Q = I - P_n$) удовлетворяют условию Липшица в выпуклой области $D \subset \mathcal{H}$ с постоянными Липшица q_F, q_{PF}, q_{QF}, то (единственное) решение u уравнения (24.2), (24.3) можно построить проекционно-итеративным методом, описанным в теореме 24.3. При этом оценка погрешности дается формулой (24.16).

Замечание 24.1. Если это единственное решение u периодично по переменным x^0, x^1, x^2, x^3 с периодами $T(g)$, $l_1(g)$, $l_2(g)$, $l_3(g)$ соответственно, то построенное по теореме 24.3 решение будет, очевидно, являться решением уравнения (24.3) во всем пространстве — времени R^4*.

Ниже будут точно указаны некоторые частные случаи, при которых имеется решение задачи Коши (24.1), (24.2) (а тем самым и решение интегрального уравнения (24.3)), периодическое по всем координатам x^i.

24.2. Периодические решения типа бегущих волн. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (24.1)

$$\Box u(x^0, \vec{x}) = -m^2 u(x^0, \vec{x}) + g\sum_{l=1}^{N} a_l u(x^0, \vec{x})\,|u(x^0, \vec{x})|^{2l} + $$
$$+ g\sum_{l=1}^{N} b_l |u(x^0, \vec{x})|^{2l} \tag{24.23}$$

с начальными условиями

$$u(0, \vec{x}) = u_0(\vec{x}) \in C^3(G), \tag{24.24}$$
$$\frac{\partial u(0, \vec{x})}{\partial x^0} = u_1(\vec{x}) \in C^2(G).$$

Исследуем уравнение (24.23) на многообразии решений частного вида

$$u(x^0, \vec{x}) = w(\omega x^0 - \vec{x}\cdot\vec{k}) \equiv w(\xi),\quad \xi = \omega x^0 - \vec{x}\cdot\vec{k}, \tag{24.25}$$

где $\vec{k} = (k^1, k^2, k^3)$ и ω — вещественные параметры. На многообразии (24.25) уравнение в частных производных (24.23) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} + m^2 w(\xi) = g\sum_{l=1}^{N} a_l w(\xi)\,|w(\xi)|^{2l} +$$
$$+ g\sum_{l=1}^{N} b_l |w(\xi)|^{2l}. \tag{24.26}$$

Решения вида (24.25) называются *решениями типа бегущих волн*.

Отыщем решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (24.26) с начальными условиями

$$w(0) = w_0 = \bar{w}_0,$$
$$\frac{dw(0)}{d\xi} = w_1 = \bar{w}_1. \tag{24.27}$$

Если интересоваться только вещественными решениями типа бегущих волн (24.25), то известными качественными методами ана-

---

* Условия, необходимые для существования некоторых решений задачи Коши (24.1), (24.2), периодических по пространственным и временной переменным, исследовались в наших работах [147, 143].

лиза систем, описываемых автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями, можно полностью исследовать качественный характер решения задачи Коши (24.26), (24.27) для различных вещественных начальных данных w_0, w_1. В частности, этими методами можно однозначно установить, при каких именно значениях начальных данных w_0, w_1 решение задачи Коши (24.26), (24.27) будет периодично по ξ и при каких именно значениях начальных данных решение соответствующей задачи Коши может становиться неограниченным.

Качественными методами исследования решений уравнения (24.26) устанавливаем справедливость двух следующих утверждений.

Лемма 24.1. *Пусть полином*

$$P(z) \equiv -m^2 z + g \sum_{l=1}^{N} a_l z^{2l+1} + g \sum_{l=1}^{N} b_l z^{2l} \tag{24.28}$$

с $a_N \neq 0$, *составленный из коэффициентов уравнения* (24.26), *имеет* $2s+1$ *вещественных нулей,* $s \leqslant N$. *Все эти нули простые и пусть* $\omega^2 - \vec{k}^2 \neq 0$. *Тогда на фазовой плоскости* $(\dot{w}, w)$ *уравнения* (24.26) *будет ровно* $2s+1$ *особых точек, каждая из которых будет лежать на оси абсцисс* $\dot{w} = 0$.

Для случая $\omega^2 - \vec{k}^2 > 0$ *эти* $(2s+1)$ *особые точки таковы:*

а) *особая точка* $\dot{w} = w = 0$ — *типа центр;*

б) $n_с$ *особых точек — типа седло с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$, *где* $s \leqslant n_с \leqslant s+1$;

в) $2s - n_с$ *особых точек — типа центр с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$.

Для случая $\omega^2 - \vec{k}^2 < 0$ *эти* $(2s+1)$ *особых точек таковы:*

а) *особая точка* $\dot{w} = w = 0$ — *типа седло;*

б) $n_ц$ *особых точек — типа центр с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$, *где* $s \leqslant n_ц \leqslant s+1$;

в) $2s - n_ц$ *особых точек — типа седло с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$.

Если число точек типа седло равно двум или более, то такие особые точки будут соединяться между собой сепаратриссой; между каждыми двумя соседними седловыми точками находится одна и только одна особая точка типа центр, и между каждыми двумя соседними особыми точками типа центр находится одна и только одна особая точка типа седло.

Если полином (24.28) имеет единственный вещественный нуль $(z = 0)$, *то решение всякой задачи Коши* (24.26), (24.27) *периодично по* ξ. *Если число седловых особых точек уравнения* (24.26) *равно двум и более, то решение задачи Коши* (24.26), (24.27) *для начальных данных* (w_1, w_0) *из области, находящейся между двумя соседними седловыми точками и ограниченной двумя ветвями сепаратриссы, является периодическим по* ξ.

Если количество седловых точек уравнения (24.26) равно четному числу, то уравнение (24.26) будет обладать вещественными неограниченно возрастающими при $|\xi| \to \infty$ решениями.

Пример 2. В качестве примера на применение леммы 24.1 рассмотрим уравнение (24.23) для случая $N = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $g > 0$

$$(\square + m^2)\, u(x^0, \vec{x}) = g\, |u(x^0, \vec{x})|^2\, u(x^0, \vec{x}).$$

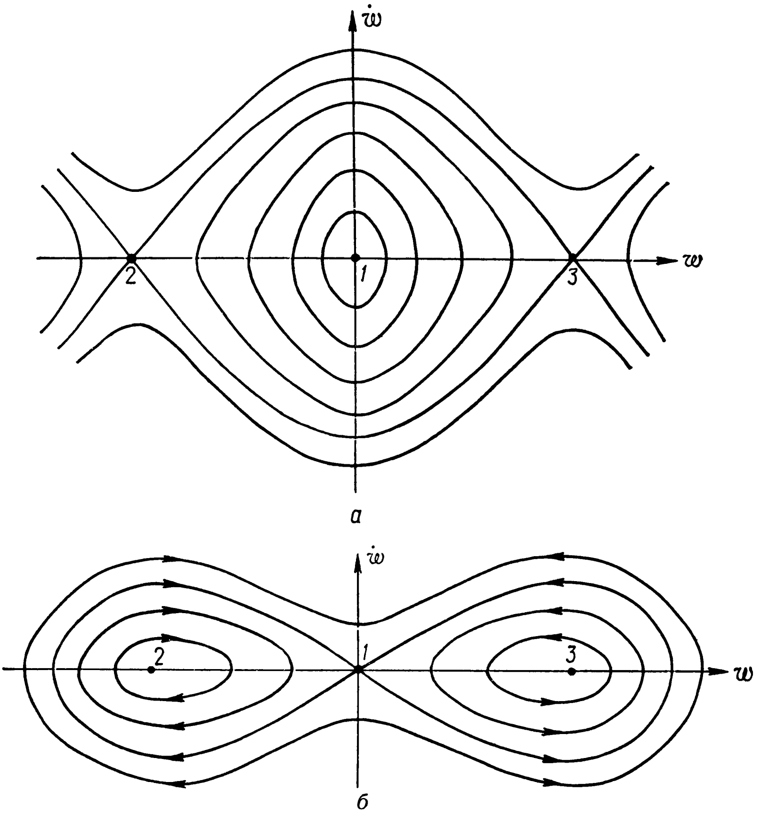


Рис. 4. Фазовая плоскость для уравнения (24.26а) с $g > 0$ и $\omega^2 \neq \vec{k}^2$ для двух случаев: *а*—для $\omega^2 > \vec{k}^2$; *б*—для $\omega^2 < \vec{k}^2$.

На многообразии решений типа бегущих волн (24.25) это уравнение запишется в виде

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\, \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} + m^2 w(\xi) = g\, |w(\xi)|^2\, w(\xi). \qquad (24.26а)$$

Из леммы 24.1 получаем, что на фазовой плоскости уравнения (24.26а) имеется ровно три особых точки.

Для случая $\omega^2 > \vec{k}^2$ эти особые точки таковы:

1) центр $(\dot{w} = w = 0)$; 2) седло $\left(\dot{w} = 0,\ w = \frac{-\omega}{\sqrt{g}}\right)$; 3) седло $\left(\dot{w} = 0,\ w = \frac{\omega}{\sqrt{g}}\right)$.

Фазовая плоскость уравнения (24.26a) для этого случая изображена на рис. 4, *а*.

Для случая $\omega^2 < \vec{k}^2$ эти особые точки таковы:

1) седло $(\dot{w} = w = 0)$; 2) центр $\left(\dot{w} = 0,\ w = \frac{-\omega}{\sqrt{g}}\right)$; 3) центр $\left(\dot{w} = 0,\ w = \frac{\omega}{\sqrt{g}}\right)$.

Фазовая плоскость уравнения (24.26a) для такого случая изображена на рис. 4, *б*.

Для случая $g \leqslant 0$, $\omega^2 > \vec{k}^2$ фазовая плоскость уравнения (24.26a) изображена на рис. 5.

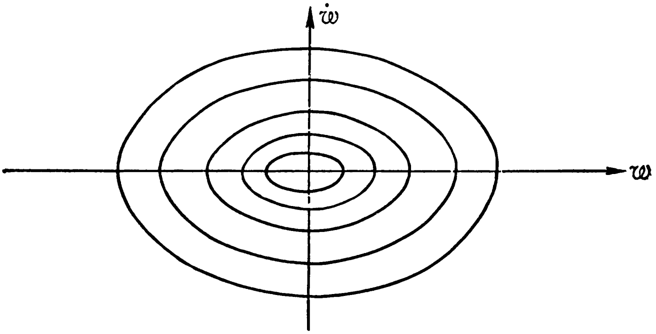


Рис. 5. Фазовая плоскость для уравнения (24.26a) с $g \leqslant 0$ и $\omega^2 > \vec{k}^2$.

Лемма 24.2. *Пусть полином*

$$P(z) = -m^2 z + g \sum_{l=1}^{N-1} a_l z^{2l+1} + g \sum_{l=1}^{N} b_l z^{2l}$$

с $b_N \neq 0$, *составленный из коэффициентов уравнения* (24.26), *из которых* $a_N \equiv 0$, *имеет* $2s$ *вещественных нулей,* $s \leqslant N$, *все эти нули простые и пусть* $\omega^2 - \vec{k}^2 \neq 0$.

Тогда на фазовой плоскости $(\dot{w}, w)$ *уравнения* (24.26) *будет ровно* $2s$ *особых точек, каждая из которых будет лежать на оси абсцисс* $\dot{w} = 0$.

Для случая $\omega^2 - \vec{k}^2 > 0$ *эти* $2s$ *особых точек таковы:*

а) *особая точка* $\dot{w} = w = 0$ — *типа центр;*

б) s *особых точек — типа седло с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$;

в) $(s - 1)$ *особых точек — типа центр с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$.

Для случая $\omega^2 - \vec{k}^2 < 0$ *эти* $2s$ *особых точек таковы:*

а) *особая точка* $\dot{w} = w = 0$ — *типа седло;*

б) s *особых точек — типа центр с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$;

в) $(s - 1)$ *особых точек — типа седло с* $\dot{w} = 0$, $w \neq 0$.

Если число особых точек типа седло равно двум и более, то такие особые точки будут соединяться между собой сепаратриссой; между каждыми двумя соседними седловыми точками находится одна и *только одна особая точка типа центр, и между каждыми двумя соседними особыми точками типа центр лежит одна и только одна особая точка типа седло.*

Решение задачи Коши (24.26), (24.27) для начальных данных (w_1, w_0) из области, находящейся между двумя соседними седловыми точками и ограниченной двумя ветвями сепаратриссы, является периодическим по ξ.

Уравнение (24.26) всегда обладает вещественными неограниченно возрастающими при $|\xi| \to \infty$ решениями.

Пример 3. В качестве примера на применение леммы 24.2 рассмотрим уравнение (24.23) для случая $N = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $g \neq 0$:

$$(\Box + m^2)\, u(x^0, \vec{x}) = g\, |u(x^0, \vec{x})|^2.$$

На многообразии решений типа бегущих волн (24.25) это уравнение принимает вид

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\,\frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} + m^2 w(\xi) = g\, |w(\xi)|^2. \tag{24.26б}$$

Из леммы 24.2 получаем, что на фазовой плоскости уравнения (24.26б) имеется ровно две особые точки.

Для случая $\omega^2 > \vec{k}^2$ эти особые точки таковы:

1) центр $(\dot{w} = w = 0)$; 2) седло $\left(\dot{w} = 0,\ w = -\dfrac{m^2}{g}\right)$.

Для случая $\omega^2 < \vec{k}^2$ особые точки следующие:

1) седло $(\dot{w} = w = 0)$; 2) центр $\left(\dot{w} = 0,\ w = -\dfrac{m^2}{g}\right)$.

Замечание 24.2. Если решение $w(\xi)$ задачи Коши (24.26), (24.27) периодично по ξ с периодом $T(g;\ w_1, w_0)$ и соответствующая ему (замкнутая) фазовая траектория охватывает начало координат $\dot{w} = w = 0$ фазовой плоскости, то такое периодическое решение задачи Коши может быть построено в соответствии с теоремой 21.1 из § 21 и это решение $w(\xi)$, согласно теореме 21.1, аналитически зависит от параметра g в точке $g = 0$. Тем самым получаем в качестве периодического по x^0, x^α, $\alpha = 1, 2, 3$ (с периодами $\frac{T(g)}{\omega}$, $\frac{T(g)}{k^\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$, соответственно) решения гиперболического уравнения (24.1) выражение вида $w(\omega x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}) = u(x^0, \vec{x})$, где $w(\xi)$ — периодическое решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (24.26) с начальными условиями (24.27).

Пример 4. Укажем пример квазилинейного волнового уравнения (24.23), для которого можно найти точное выражение для семейства решений типа бегущих волн.

А именно рассмотрим уравнение вида

$$\Box\, u(x^0, \vec{x}) + m^2\, u(x^0, \vec{x}) + g u^3(x^0, \vec{x}) = 0. \tag{24.28а}$$

Этому уравнению удовлетворяет семейство решений типа бегущих волн

$$u(x^0, \vec{x}) = \mathrm{cn}\left(x^0\sqrt{m^2 + g + \vec{p}^2} - \vec{x}\cdot\vec{p};\ \sqrt{\frac{g}{2(m^2+g)}}\right), \tag{24.28б}$$

где $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$ — вещественные параметры, а $\mathrm{cn}\,(U;\ k)$ — эллиптический косинус переменного U и модуля k. В том, что семейство (24.28б) действительно удовлетворяет уравнению (24.28а), нетрудно убедиться, если учесть, что косинус эллиптический удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению вида [11]

$$\frac{\partial^2 \mathrm{cn}\,(U;\ k)}{\partial U^2} + (1 - 2k^2)\,\mathrm{cn}\,(U;\ k) + 2k^2\,\mathrm{cn}^3\,(U;\ k) = 0.$$

Замечание 24.3. Если решение $w\,(\xi)$ задачи Коши (24.26), (24.27) периодично по ξ, но соответствующая ему фазовая траектория не охватывает начала координат $w = w = 0$ фазовой плоскости, то соответствующее этому решению $w\,(\xi)$ решение $u\,(x^0, \vec{x}) = w\,(\omega x^0 - \vec{k}\vec{x})$ может быть построено проекционно-итеративным методом с помощью теоремы 24.3 для интегрального уравнения, которому эквивалентна задача Коши (24.26), (24.27).

Замечание 24.4. Таким образом, множество периодических по всем координатам x^i решений нелинейного гиперболического уравнения (24.1) содержит, во всяком случае, множество периодических решений типа бегущих волн. В общем случае периодического решения задачи Коши (24.1), (24.2) это решение может быть построено проекционно-итеративными методами с помощью теоремы 24.3 для соответствующего нелинейного интегрального уравнения (24.3).

Отметим, что решения типа бегущих волн (в частности, периодические решения такого типа) квазилинейных уравнений с частными производными гиперболического типа встречаются во многих нелинейных задачах физики плазмы [52, 59], теории электромагнитных и спиновых волн в твердых телах [10, 115, 256], в задачах гидродинамики при изучении волновых явлений в диспергирующих средах [78, 130, 69, 199, 156, 268, 269] и в теории упругих волн в твердых телах [45, 68]. Все эти физические задачи допускают непосредственное экспериментальное наблюдение протекающих процессов. Соответствующие уравнения, возникающие в этих задачах, весьма близки по форме к уравнениям поля вида (24.23). Последнее обстоятельство весьма важно с точки зрения возможности придать определенный физический смысл тем или иным решениям уравнений нелинейной теории поля (24.23).

Дело в том, что непосредственная экспериментальная проверка тех или иных теоретических предсказаний классической нелинейной теории поля, основанной на рассмотрении пуанкаре — инвариантных уравнений (24.23), пока довольно затруднительна, тогда как указанные только что явления физики плазмы, гидродинамики и теории упругости, описываемые близкими по форме к (24.23) уравнениями, допускают прямую экспериментальную проверку.

Помимо описанных выше периодических решений типа бегущих волн уравнений (24.23) представляют особый интерес другие решения типа бегущих волн, в частности так называемые частицеподобные решения таких уравнений.

24.3. *Частицеподобные решения типа бегущих волн.*

Определение 24.2. *Частицеподобными решениями* квазилинейных уравнений в частных производных гиперболического типа называются решения, удовлетворяющие следующим свойствам.

1. Непрерывность и ограниченность при всех $x \in R^4$;
2. Решение принадлежит $\mathcal{L}_2\,(R^4)$;
3. Экспоненциальное затухание решения с ростом временной переменной x^0 при $\vec{x} = \mathrm{const} \in R^3$. Такие решения интерпретируются как сгустки поля.

Некоторые необходимые условия существования частицеподобных решений для простейших систем квазилинейных гиперболических уравнений, имеющих определенную тензорную структуру относительно преобразований группы Пуанкаре (поля со спином 0 и $^1/_2$), рассматривались в работах Р. Финкельштейна и др. [236, 237], К. Б. Чепурных [198], Е. П. Жидкова, В. П. Ширикова [67], Б. В. Гисина [53].

Для некоторых видов уравнения (24.23) можно указать точные решения, имеющие вид частицеподобных решений.

Пример 5. Уравнение

$$\Box\, u\,(x^0\ \vec{x}) + m^2 u\,(x^0,\,\vec{x}) - g\,|\,u\,(x^0,\,\vec{x})\,|^2 = 0 \qquad (24.28\text{в})$$

имеет частное решение вида

$$u_0\,(x^0,\,\vec{x}) = \frac{3m^2}{2g\,\mathrm{ch}^2\left[\dfrac{m\,(\omega x^0 - \vec{k}\,\vec{x})}{2\sqrt{\vec{k}^2 - \omega^2}}\right]}. \qquad (24.29)$$

Очевидно, это решение принадлежит семейству решений уравнения (24.28в) типа бегущих волн (24.25).

Если $\omega^2 < \vec{k}^2$, то решение (24.29) является, очевидно, частицеподобным решением и описывает распространяющуюся в трехмерном пространстве в направлении волнового вектора $\vec{k}$ со скоростью $\dfrac{c\omega}{|\,\vec{k}\,|} < c$ *уединенную волну*. Такое решение называют еще *солитоном* и это решение может быть интерпретировано как сгусток поля, распространяющийся в трехмерном пространстве со скоростью, меньшей скорости света c.

На фазовой плоскости уравнения (24.26), получаемого из (24.28) подстановкой (24.25), решение (24.29) соответствует сепаратриссе.

Пример 3. Уравнение

$$\Box u\,(x^0,\,\vec{x}) + m^2 u\,(x^0,\,\vec{x}) + g u\,(x^0,\,\vec{x})\,|\,u\,(x^0,\,\vec{x})\,|^2 = 0 \qquad (24.30)$$

обладает частным семейством решений следующей формы:

$$u_0\,(x^0,\,\vec{x}) = \pm\,\frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{g}\,\mathrm{ch}\left[\dfrac{m\,(x^0\omega - \vec{k}\,\vec{x})}{\sqrt{\vec{k}^2 - \omega^2}}\right]}, \qquad (24.31)$$

где ω, $\vec{k}$ — произвольные параметры.

Решения (24.31) принадлежат семейству решений (24.25) типа бегущих волн, Очевидно, если $g > 0$ и $\vec{k}^2 > \omega^2$, то решение (24.31) имеет вид частицеподобного решения типа уединенной волны или солитона, распространяющегося в трехмерном пространстве со скоростью $\frac{c\omega}{|\vec{k}|} < c$ в направлении волнового вектора $\vec{k}$. На фазовой плоскости уравнения (24.26), получаемого из (24.28) подстановкой (24.25), решение (24.31) соответствует сепаратриссе. Решение (24.31) было получено и исследовано в работе А. С. Давыдова и др. [222].

Отметим, что решения в виде уединенных волн возникают при изучении спиновых волн в твердых телах [10, 256], в физике плазмы и в гидродинамике [78, 138, 268, 269].

24.4. Периодические решения одного класса нелинейных нелокальных уравнений поля (гиперболических уравнений с частными производными и с отклоняющимся аргументом). В § 20 было показано, что при рассмотрении нелинейных физических полей в общей теории относительности и при регуляризации уравнений нелинейной квантовой теории возникают квазилинейные волновые уравнения с отклоняющимся аргументом. Это уравнения вида (20.21) и (20.26).

В качестве модели уравнений из такого класса квазилинейных волновых уравнений с отклоняющимся аргументом рассмотрим квазилинейное уравнение с частными производными и с отклоняющимся аргументом следующего вида *:

$$\Box u(x^0, \vec{x}) - m^2 u(x^0, \vec{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=1}^{N_k} \times$$

$$\times \int_{P} d\eta_{kl}(\xi, \Delta)\, [b_{kl} u(x^0 + \xi^0\Delta, \vec{x} + \vec{\xi}\Delta)\, |u(x^0 + \xi^0\Delta, \vec{x} +$$

$$+ \vec{\xi}\Delta)|^{2l} + d_{kl}\, |u(x^0 + \xi^0\Delta, \vec{x} + \vec{\xi}\Delta)|^{2l}] \equiv Fu, \qquad (24.32)$$

где $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$, $k = 0, 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, N_n < \infty$,— функции ограниченной вариации, заданные в четырехмерном параллелепипеде

$$\xi \in P = [-1, 0] \times [-1, 0] \times [-1, 0] \times [-1, 0],$$

непрерывные справа по каждой переменной и аналитически зависящие от переменного $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$ в точке $\Delta = 0$ при $\xi = \mathrm{const} \in P$.

Ищем решение начальной задачи для уравнения (24.32) с начальными условиями:

$$u(x^0, \vec{x}) = \varphi(x^0, \vec{x}) \in C^1(G + P), \quad (x^0, \vec{x}) \in G + P \subset R^4.$$

---

* Переписывая уравнение поля (24.32) в виде

$$\Box\, u(x^0, \vec{x}) + m_0^2 u(x^0, \vec{x}) = (m^2 + m_0^2)\, u(x^0, \vec{x}) + Fu, \qquad (24.32a)$$

приходим к обычной интерпретации правой части уравнения (24.32a) в качестве нелокального самодействия скалярного поля с затравочной массой m_0.

Рассмотрим уравнение (24.32) на многообразии решений частного вида (решения типа бегущих волн):

$$u(x^0, \vec{x}) = w(\omega x^0 - \vec{k}\vec{x}) \equiv w(z), \quad z = \omega x^0 - \vec{k}\vec{x}, \tag{24.33}$$

где ω, k^1, k^2, k^3 — вещественные параметры.

На многообразии (24.33) уравнение (24.32) принимает вид дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом

$$(\omega^2 - \vec{k}^2)\frac{d^2 w(z)}{dz^2} - m^2 w(z) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+1}}{k!} \sum_{l=1}^{N_k} \int\limits_P d\eta_{kl}(\xi, \Delta)\,[b_{kl} w(z + \omega\xi^0\Delta -$$
$$- \vec{k}\vec{\xi}\Delta)\,|w(z + \omega\xi^0\Delta - \vec{k}\vec{\xi}\Delta)|^{2l} + d_{kl}\,|w(z + \omega\xi^0\Delta - \vec{k}\vec{\xi}\Delta)|^{2l}]. \tag{24.34}$$

Пусть функции ограниченной вариации $\eta_{kl}(\xi, \Delta)$ имеют следующий вид:

$$\eta_{kl}(\xi, \Delta) = \rho_{kl}(\vec{\xi}, \Delta)\,\theta(\xi^0 - |\vec{\xi}|\,a_{kl}), \tag{24.35}$$

где a_{kl}, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, N_k$, — положительные постоянные, а $\theta(\eta)$ — функция Хевисайда.

Тогда для тех $\vec{k}$, для которых $\frac{|\vec{k}|}{\omega} < \max\limits_{\substack{k \geqslant 0 \\ 1 \leqslant l \leqslant N_k}} a_{kl}$, уравнение (24.34), (24.35) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с запаздывающим аргументом.

К уравнению (24.34), (24.35) для фиксированных значений параметров ω и $\vec{k}$, удовлетворяющих условию

$$1 < \frac{|\vec{k}|}{\omega} < \max_{\substack{k \geqslant 0 \\ 1 \leqslant l \leqslant N_k}} a_{kl}, \tag{24.36}$$

применимы все результаты главы IV о существовании периодических по z решений и их асимптотических при $z \to \infty$ свойствах.

В частности, справедливы такие следствия из теорем 21.1 и 21.2.

Следствие 24.1. Пусть для правой части уравнения (24.34), (24.35), (24.36) выполняются все условия теоремы 21.1.

Тогда гиперболическое уравнение (24.32) при $\omega = \mathrm{const}$, $\vec{k} = \mathrm{const}$ обладает двупараметрическим семейством специальных периодических по x^0 и по x^α, $\alpha = 1, 2, 3$, решений. Каждое из таких специальных решений аналитически зависит от переменного g в точке $g = 0$.

Следствие 24.2. Пусть для правой части уравнения (24.34), (24.35), (24.36) выполняются все условия теоремы 21.1 и теоремы 21.2.

Тогда описанные в следствии 24.1 и теореме 21.1 специальные периодические решения обладают асимптотическим при $z \to \infty$ свойством (21.49).

24.5. *Модель „самоквантующегося“ нелинейного поля.* Рассмотрим инвариантное относительно преобразований группы Пуанкаре квазилинейное гиперболическое уравнение (24.28)

$$\Box u(x^0, \vec{x}) + m^2 u(x^0, \vec{x}) - g\,|u(x^0, \vec{x})|^2 = 0. \qquad (24.37)$$

Это уравнение описывает классическое самодействующее скалярное поле с затравочной массой m и с константой самодействия g. Запишем еще раз частное семейство решений этого уравнения, имеющих вид уединенных волн:

$$u(x^0, \vec{x}) = \frac{3m^2}{2g\,\mathrm{ch}^2\left[\dfrac{m(\omega x^0 - \vec{k}\vec{x})}{2\sqrt{\vec{k}^2 - \omega^2}}\right]} \equiv$$

$$\equiv u(x^0, \vec{x};\ m, g, \vec{k}, \omega) \equiv \frac{A_{m,g}}{\mathrm{ch}^2\left[\dfrac{m(\omega x^0 - \vec{k}\vec{x})}{2\sqrt{\vec{k}^2 - \omega^2}}\right]}, \qquad (24.38)$$

где k^1, k^2, k^3, ω — вещественные параметры.

Если $\vec{k}^2 > \omega^2$, то решение (24.38) описывает уединенную волну амплитуды $A_{m,g} = \frac{3m^2}{2g}$ с плоским фронтом, распространяющуюся в трехмерном пространстве вдоль волнового вектора $\vec{k}$ со скоростью $\frac{\omega c}{|\vec{k}|}$, где c — скорость света.

Замечательно следующее обстоятельство.

Если рассматривать семейство уравнений вида (24.37) для различных полей u_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, характеризуемых различными значениями затравочной массы $m = m_j$ и константы самодействия $g = g_j$, то можно указать такое уравнение в частных производных гиперболического типа, которое будет обладать семейством решений вида (24.38) с различными значениями затравочных масс m, констант самодействия g и с различными значениями параметров $\vec{k}$, ω, принимающими (вообще говоря, непрерывные) значения из некоторых областей $\mathfrak{M}$, G, K_α, Ω, $\alpha = 1, 2, 3$:

$$m \in \mathfrak{M},\ g \in G,\ k^\alpha \in K_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3,\ \omega \in \Omega.$$

А именно уравнение, содержащее в качестве своих частных решений семейство (24.38) с различными значениями величин m, g, k^1, k^2, k^3, ω, имеет вид

$$\frac{\partial u(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} + u\,\frac{\partial u(x^0, \vec{x})}{\partial x^1} + \beta\,\frac{\partial^3 u(x^0, \vec{x})}{(\partial x^1)^3} = 0, \qquad (24.39)$$

где β — постоянный вещественный коэффициент.

Уравнение (24.39) называется *уравнением Кортвега — де Вриза.* Непосредственной подстановкой выражения (24.38) в уравнение (24.39) устанавливаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 24.1. Для того чтобы выражение (24.38) удовлетворяло уравнению (24.39), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\vec{k} = (k, 0, 0), \ \beta = \frac{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}{2g}, \ \frac{c\omega}{k} = \frac{m^2}{2g}. \qquad (24.40)$$

Используя предложение 24.1, предложим одну модель поля. Уравнение поля (24.39) интерпретируется как уравнение «первичного поля», индуцирующего «независимые поля» вида (24.38), $k = (k, 0, 0)$, зависящие от четырех непрерывных параметров m, g, k, ω, меняющихся в некоторых областях $\mathfrak{M}$, G, K, Ω соответственно (при заданном $\beta=\mathrm{const}$ из четырех параметров m, g, k, ω независимы лишь два,— в силу (24.40)).

Далее, из формулы (24.38) вытекает, что если начальное условие (или начальное возмущение) для уравнения (24.39) имеет вид

$$u(0, \vec{x}) = \frac{3m^2}{2g\,\mathrm{ch}^2\left|\frac{mx^1k}{2\sqrt{k^2-\omega^2}}\right]} \qquad (24.41)$$

с некоторыми m, g, k, ω, $k^2 > \omega^2$, то решение задачи Коши для уравнения (24.39) с начальным условием (24.41) имеет вид «независимого поля» (24.38) с теми же значениями параметров m, g, k, ω, что и в формулах (24.41), (24.39).

Такой случай естественно интерпретировать как случай отсутствия взаимодействия между «независимыми полями» u_i, в результате чего «первичное поле» индуцирует единственное «независимое поле» (24.38).

Если же начальное возмущение $u(0, \vec{x})$ для уравнения (24.39) отлично от выражения $\frac{A}{\mathrm{ch}^2(Bx^1)}$ с некоторыми вещественными величинами A и B, то решение соответствующей задачи Коши для уравнения (24.39) будет, вообще говоря, раскладываться по многим «независимым полям» вида (24.38). Это случай взаимодействия «независимых полей».

Особый интерес представляет случай, когда начальное возмущение $u(0, \vec{x}) \underset{|\vec{x}| \to \infty}{\to} 0$ для уравнения (24.39). Случай исчезающих при $x^1 \to \pm\infty$ начальных возмущений для уравнения Корвега — де Вриза (24.39) изучался достаточно подробно в связи с задачами о распространении волн в плазме и в жидкости и описан в работах [256, 78, 268, 269, 241]. С помощью полученных в этих работах результатов можно установить следующее.

Решение задачи Коши для уравнения (24.39) с начальными возмущениями, исчезающими достаточно быстро при $x^1 \to \pm\infty$, имеет вид суммы некоторого числа солитонов вида (24.38) («независимые поля»), каждый из которых имеет свою амплитуду и свою скорость распространения, и слаболинейного волнового пакета («хвост»), амплитуда которого много меньше амплитуды каждого солитона.

При этом для всякого решения задачи Коши для уравнения (24.39) с исчезающим достаточно быстро при $x^1 \to \pm\infty$ начальным возмущением амплитуды солитонов строго кореллированы между собой и определяются уровнями энергии некоторой краевой задачи Штурма — Лиувилля, имеющей вид *квантовомеханического уравнения Шредингера.*

Соответствующий результат сформулируем в виде двух теорем. Прежде чем сформулировать этот результат, преобразуем уравнение (24.39) к безразмерным величинам.

Напишем начальное условие в виде

$$u(0, \vec{x}) = u_0 \varphi\left(\frac{x_1}{\Delta}\right), \tag{24.42}$$

где u_0 и Δ — характерные амплитуда и величина начального возмущения, а $\varphi(\xi)$ — безразмерная функция, описывающая его профиль.

Переходя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x_1}{\Delta}, \quad \tau = \frac{x^0 u_0}{\Delta}, \quad y(\xi, \tau) = \frac{u}{u_0}, \tag{24.43}$$

получаем уравнение Корвега — де Вриза и начальное условие в виде

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} + y\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3} = 0, \tag{24.44}$$

$$y(\xi, 0) = \varphi(\xi), \tag{24.45}$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{u_0}{\beta}}\,\Delta$.

Из (24.44) следует, что решения с одинаковыми σ и $\varphi(\xi)$ должны быть подобны между собой. В частности, как увидим ниже, число солитонов, образующихся в результате эволюции во времени начального возмущения, отношения амплитуд солитонов и т. п. однозначно определяются величиной σ и формой начального профиля $\varphi(\xi)$. Поэтому величину σ можно назвать *параметром подобия.*

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \Psi(\xi;\ \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{\sigma^2}{6}\left[E(\tau) + y(\xi, \tau)\right]\Psi(\xi;\ \tau) = 0, \tag{24.46}$$

где потенциал $y(\xi, \tau)$, собственные значения $E(\tau)$ и волновые функции $\Psi(\xi;\ \tau)$ зависят от времени τ как от параметра, причем эта зависимость определяется тем, что $y(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению Корвега — де Вриза в форме (24.44) с начальным условием $y(\xi, 0) = \varphi(\xi)$. $\Bigl($Роль величины $\frac{2m}{\hbar^2}$ в уравнении Шредингера (24.46) играет величина $\frac{\sigma^2}{6}\Bigr)$.

Теорема 24.4. *Пусть в уравнении Шредингера* (24.46) *потенциал* $y(\xi, \tau)$ *при* $\xi = \mathrm{const} \in (-\infty, \infty)$ *является решением уравнения* (24.44) *с начальным условием*

$$\eta(\xi, 0) = \varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\to} 0.$

Тогда собственные значения $E(\tau)$ *уравнения Шредингера* (24.46) *не зависят от времени, т. е.* $E(\tau) = E(0) = E$ *являются собственными значениями следующей краевой задачи:*

$$\frac{d^2\Psi(\xi;\ 0)}{d\xi^2} + \frac{\sigma^2}{6}[E + \varphi(\xi)]\Psi(\xi, 0) = 0, \tag{24.47}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi, 0)|^2 d\xi < \infty, \quad \Psi(\xi, 0) \underset{\xi \to \pm\infty}{\to} 0. \tag{24.48}$$

Теорема 24.5. *Пусть задана функция* $\varphi(\xi) \in C(R^1)$, *удовлетворяющая условиям*

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, d\xi > 0;$

б) $\varphi(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\to} 0.$

Тогда решение задачи Коши для уравнения Корвега — де Вриза (24.39) *с начальным условием*

$$u(0, \vec{x}) = u_0\varphi\left(\frac{x^1}{\Delta}\right), \tag{24.49}$$

где u_0, Δ — *вещественные постоянные, имеет следующий вид* $\left(\text{при } t \gg \frac{\Delta}{u_0}\right)$:

$$u(t, x^1) = \sum_{j=1}^{N} A_j \operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{m_j(\omega x^0 - \vec{x}\vec{k})}{2\sqrt{\vec{k}^2 - \omega^2}}\right] + u_{\text{п}}(t, x^1), \tag{24.50}$$

где $u_{\text{п}}(t, x^1) = o\left(\sum\limits_{j=1}^{N} |A_j|\right)$, *а для амплитуд* $\{A_j\}_{j=1}^N$ *солитонов имеют место соотношения:*

$$A_j = -2u_0 E_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{24.51}$$

где E_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, — *все собственные значения дискретной части спектра уравнения* (24.47) *с потенциалом* $\varphi(\xi)$.

Таким образом, для случая начального возмущения $\varphi(\xi)$, локализованного в конечной части одномерного пространства $x^1 \in R^1$ «первичное поле» индуцирует при $t \gg \frac{\Delta}{u_0}$ определенное число «независимых полей» (солитонов), *самоквантующихся* в том смысле, что *амплитуды образовавшихся солитонов относятся друг к другу как соответствующие уровни энергии дискретной части спектра квантовомеханического уравнения Шредингера с потенциалом* $\varphi(\xi)$.

§ 25. Разложение решений квазилинейных волновых уравнений по базисным функциям унитарных представлений группы вращений и группы Лоренца

В большом числе конкретных случаев при исследовании решений задачи Коши для квазилинейных волновых уравнений с полиномиальной правой частью

$$\Box\varphi(x^0, \vec{x}) + m^2\varphi(x^0, \vec{x}) = g\sum_{l=1}^{N} a_l\varphi(x^0, \vec{x})\,|\varphi(x^0, \vec{x})|^{2l} +$$

$$+ g\sum_{l=0}^{N} b_l\,|\varphi(x^0, \vec{x})|^{2l} \equiv F(\varphi(x^0, \vec{x}),\ \bar{\varphi}(x^0, \vec{x})) \qquad (25.1)$$

(а также для систем таких уравнений) возникает представление таких решений в виде разложений Фурье по некоторой полной системе функций.

Так, в § 24, п. 24.1 при построении решений уравнения (25.1) в четырехмерном параллелепипеде

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \in [0, T(g)] \times [0, l_1(g)] \times [0, l_2(g)] \times$$

$$\times [0, l_3(g)] \equiv \mathcal{P}_g \qquad (25.1\text{a})$$

с помощью проекционных методов решение задачи Коши (25.1), (24.2) представлялось в виде разложения по конечной системе функций

$$\varphi_s(x) = \exp\left[\frac{is^0x^02\pi}{T(g)} + i\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{s^\alpha x^\alpha 2\pi}{l_\alpha(g)}\right], \qquad (25.2)$$

$$s \equiv \{s^0, s^1, s^2, s^3\}, \quad s^j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$|s| \equiv \sum_{j=0}^{3} |s^j| \leqslant n,$$

полной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$.

Проекционно-итеративные методы, изложенные в § 24, п. 24.1, позволяют построить итерационный процесс, сходящийся при $n \to \infty$ к решению задачи Коши (25.1), (24.2) в параллелепипеде $\mathcal{P}_g$.

В этом параграфе продолжим построение многообразий решений квазилинейных волновых уравнений (25.1) с помощью разложения Фурье искомого решения по полным ортогональным системам функций, связанным с представлениями тех или иных групп симметрии.

Как уже отмечалось выше в § 20 и в § 23, п. 23.1, квазилинейные волновые уравнения (25.1) и системы таких уравнений возникают в качестве динамических уравнений нелинейного физического поля в специальной теории относительности, в теории источников, предложенной Ю. Швингером для описания взаимодействующих элементарных частиц [202], в нелинейной квантовой теории поля [253, 166], в теории нелинейных волновых процессов в физических сплошных средах [78, 130, 52, 59, 199, 137].

Здесь будет важно подчеркнуть, что в большинстве задач физики первостепенный интерес представляют те решения соответствующих динамических уравнений, которые обладают определенной симметрией, связанной с той или иной группой симметрии G, реализующейся для данной задачи. В свою очередь, эти симметричные решения представляются в виде разложений Фурье по базисным функциям представлений соответствующей группы симметрии G, образующим полную ортогональную систему функций в подходящем однородном пространстве с группой транзитивности G. Подобная полная система функций возникает как система собственных функций дифференциального оператора динамического уравнения задачи, порожденного краевыми условиями, отражающими симметрию задачи.

Так, в § 24, п. 24.1, такой полной системой функций была система функций (25.2), по которой разлагалось приближенное решение уравнения (25.1) в параллелепипеде (25.1а).

Разложение решений лоренц-ковариантных линейных уравнений Максвелла — Лоренца, обладающих определенными трансформационными свойствами относительно группы трехмерных вращений SO (3), по матричным элементам унитарного неприводимого представления этой группы дано в книге И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса и З. Я. Шапиро [48] (см. также выше, § 2, п. 2.10, пример 1).

Разложение решений линейных лоренц-ковариантных уравнений Максвелла — Лоренца и уравнений типа Дирака по матричным элементам представлений собственной группы Лоренца было получено в работах Й. А. Вердиева с сотрудниками [1, 8] (см. также выше, § 2, п. 2.11, пример 3).

Полные системы функций, связанные с группами Лоренца и Пуанкаре, используются в качестве базиса для разложения физически интересных величин в квантовой теории поля. Так, в работах М. Толлера [301, 302], Я. А. Смородинского и сотрудников [42, 43, 169], Р. Делбурго, А Салама [223], Й. А. Вердиева с сотрудниками [8, 38, 303] и др. были получены разложения волновых функций, описывающих состояние из N-частиц в релятивистской механике и разложения амплитуд вероятности перехода между двумя такими состояниями, по матричным элементам унитарных неприводимых представлений групп Лоренца и Пуанкаре. Подробный обзор таких работ можно найти в статье Г. Фельдмана и П. Метьюза [235]. Разложения операторов поля, удовлетворяющих нелинейным (дифференциальным) уравнениям поля специальных классов, на группе Пуанкаре исследовались в работах Р. Рончка [274, 275, 276].

Получаемые при этом разложения N-частичных состояний и амплитуд вероятности перехода по матричным элементам представлений групп Лоренца и Пуанкаре используются для получения важной физической информации (например, информация об особых точках в комплексной области, об асимптотике исследуемых величин при высоких энергиях и т. п. [216, 2, 264, 265, 235, 254]). В отдельных случаях подобные разложения имеют формальный характер, но тем не менее извлекаемая из них физическая информация согласуется с экспериментом.

Ниже получим разложения Фурье решений квазилинейных волновых уравнений типа (25.1) по матричным элементам неприводимых представлений группы вращений и собственной группы Лоренца.

25.1. Разложение статических решений квазилинейных $(n+1)$-мерных волновых уравнений (25.1) по базисным функциям квазирегулярного представления группы $SO(n)$. Статическими решениями уравнения (25.1) в области $(x^0, \vec{x}) \in D \subset R^{n+1}$ будем называть не зависящие от x^0 решения, т. е. такие, для которых выполняется

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^0} \equiv 0, \qquad (x^0, \vec{x}) \in D.$$

Для статических решений квазилинейное волновое уравнение (25.1) принимает вид квазилинейного уравнения Гельмгольца

$$-\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}} \varphi(\vec{x}) + m^2\varphi(\vec{x}) = g\sum_{l=1}^{N} a_l \varphi(\vec{x})\,|\varphi(\vec{x})|^{2l} + $$

$$+ g\sum_{l=1}^{N} b_l\,|\varphi(\vec{x})|^{2l} \equiv F(\varphi(\vec{x}),\ \overline{\varphi(\vec{x})}),\ \vec{x} \in R^n. \qquad (25.3)$$

Ниже будем рассматривать более общий случай нелинейного уравнения Гельмгольца вида

$$(\Delta_{(n)} + \varkappa)\,\varphi(\vec{x}) = gf(g,\ \varphi(\vec{x}),\ \overline{\varphi(\vec{x})}), \qquad (25.4)$$

где $\Delta_{(n)} \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}}$, $\varkappa = \bar{\varkappa} \neq 0$, $\vec{x}$ — точка n-мерного евклидова пространства E^n, или в сферических координатах:

$$\vec{x} = \{r,\ \theta_1,\ \ldots,\ \theta_{n-1}\},\ \vec{x}^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} x^{\alpha^2} = r^2,$$

$f(g,\ z,\ \bar{z})$ — аналитическая функция переменного g в некоторой комплексной окрестности $G = (g\,\|\,|g| < g_0)$ точки $g = 0$ для $|z| < M$ с полиномиальными по z и $\bar{z}$ коэффициентами в разложении в ряд по g:

$$f(g,\ z,\ \bar{z}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^s}{s\,!} \sum_{p_1=1}^{N_s} \sum_{p_2=1}^{N_s} d_{s,p_1,p_2} z^{p_1} \bar{z}^{p_2}, \qquad (25.5)$$

причем $d_{s,p_1,p_2} = \overline{d_{s,p_1,p_2}}$, $s = 0, 1, 2, \ldots;$ $p_1 = 1, 2, \ldots, N_s;$ $p_2 = 1, 2, \ldots, N_s$,

$$\max_{\substack{0 \leqslant s < \infty \\ 1 \leqslant p_1 \leqslant N_s \\ 1 \leqslant p_2 \leqslant N_s}} | d_{s,p_1,p_2} | = d_0 < \infty, \ \max_{0 \leqslant s < \infty} N_s = N^{(0)} < \infty.$$

Ниже, в § 25, п. 25.1, будем следовать, в основном, нашей работе [146]. При этом будет построено многообразие решений квазилинейного n-мерного уравнения Гельмгольца (25.4), (25.5) как решений соответствующих задач Коши в общем виде для этого уравнения с предельными условиями, задаваемыми на сфере радиуса $r_1 > 0$ в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Поскольку евклидово пространство E^n является субпроективным пространством, в котором интервал можно записать в виде

$$ds^2 = dr^2 + r^2 ds_0^2 (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}),$$

где ds^2 — интервал на сфере S^{n-1} единичного радиуса:

$$ds_0^2 = d\theta_{n-1}^2 + \sin^2 \theta_{n-1} d\theta_{n-2}^2 + \sin^2 \theta_{n-1} \sin^2 \theta_{n-2} d\theta_{n-3}^2 + \cdots + $$
$$+ \sin^2 \theta_{n-1} \sin^2 \theta_{n-2} \ldots \sin^2 \theta_2 d\theta_1^2,$$

а r, θ_1, ..., θ_{n-1} — сферические координаты в E^n, то при построении решений квазилинейного n-мерного уравнения Гельмгольца (25.4), (25.5) удается разделить переменные в уравнении при использовании полной системы собственных функций угловой части Δ_0 оператора Лапласа $\Delta_{(n)}$. При этом используется метод, описанный в общем случае в § 23, п. 23.1.

Поскольку сфера единичного радиуса S^{n-1} в E^n является симметрическим пространством компактного типа по отношению к преобразованиям группы n-мерных вращений SO (n), то разложение решения уравнения (25.4), (25.5) по полной системе собственных функций оператора Δ_0 имеет вид ряда Фурье.

Введем строгое определение решения квазилинейного уравнения Гельмгольца (25.4), (25.5).

Определение 25.1. Решением уравнения (25.4), (25.5) в области

$$(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; \ g) \in D \times (-g_1, g_1), \qquad g_1 < g_0, \tag{25.6}$$

где $D \subset E^n$ — ограниченная область в E^n, будем называть функцию $\varphi (x_1, \ldots, x_n; \ g) \equiv \Phi (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; \ g)$ от n независимых переменных и одного параметра g, непрерывную вместе с частными производными до второго порядка включительно по n переменным r, θ_1, ..., θ_{n-1} в области (25.6) и удовлетворяющую в этой области дифференциальному уравнению в частных производных (25.4), (25.5).

Замечание 25.1. Выбирая в качестве ограниченной области D в (25.6) шаровой слой

$$(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \in D = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \times \underbrace{[0, \pi] \times \cdots \times [0, \pi]}_{n-2} \equiv$$
$$\equiv \text{Ш}_n [r_1, r_2], \qquad (25.7)$$
$$r_2 > r_1 > 0,$$

получаем, что всякое решение уравнения (25.4), (25.5) при фиксированном $r \in [r_1, r_2]$ является функцией, квадратично интегрируемой по мере, сосредоточенной на сфере $r = \text{const} \in [r_1, r_2]$ n-мерного евклидового пространства E^n, и, тем самым, с точностью до известной замены переменных при $r = \text{const} \in [r_1, r_2]$ является функцией, квадратично интегрируемой на единичной сфере S^{n-1}, т. е. если $\varphi(x_1, \ldots, x_n; g) \equiv \Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; g)$ — решение уравнения (25.4), (25.5) в области $\text{Ш}_n [r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$, то

$$\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; g) \Big|_{\substack{r = \text{const} \in [r_1, r_2], \\ g = \text{const} \in (-g_1, g_1)}} \in \mathcal{L}_2(S^{n-1}),$$

где $\mathcal{L}_2(S^{n-1}) \equiv L_2(S^{n-1})$ — множество измеримых функций $f(\xi)$, удовлетворяющих условию

$$\| f \| = \int\limits_{S^{n-1}} | f(\xi) |^2 \, d\xi < \infty, \qquad (25.8)$$

а $d\xi$ — нормированная евклидова мера на единичной сфере.

Как отмечалось в § 2, п. 2.11, множество $\mathcal{L}_2(S^{n-1})$ образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{S^{n-1}} f_1(\xi) \overline{f_2(\xi)} \, d\xi.$$

Из следствия 2.4 получаем для данного случая такое утверждение.

Следствие 25.1. Решение $\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; g)$ уравнения (25.4), (25.5) в области (25.6), (25.7) разлагается в сходящийся в среднем (по норме (25.8)) ряд

$$\Phi(r; \xi; g) \equiv \Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; g) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{K} a_K^{(l)}(r; g) \, \Xi_K^l(\xi), \qquad (25.9)$$

где $\xi = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ — точка на единичной сфере S^{n-1}, причем коэффициенты Фурье ряда (25.9) вычисляются однозначно по формуле

$$a_K^{(l)}(r; g) = \int\limits_{S^{n-1}} \Phi(r, \xi; g) \overline{\Xi_K^l(\xi)} \, d\xi, \qquad (25.10)$$

а $\{\Xi_K^l(\xi)\}$ — базис квазирегулярного представления группы $SO(n)$, описанный в § 2, п. 2.11, пример 2; l — целые числа, а K означает последовательность целых чисел $(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$, таких, что $l = k_0 \geqslant k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_{n-2} \geqslant 0$.

Лемма 25.1. *Произведение любого конечного числа p функций $\Xi^l_K(\xi)$ можно разложить в сходящийся в среднем* (по норме (25.8)) *ряд*

$$\prod_{i=1}^{p_1}\prod_{j=1}^{p_2}\Xi^{l_i}_{K_i}(\xi)\overline{\Xi^{l'_j}_{K'_j}}(\xi)=$$

$$=\sum_l\sum_K\Xi^l_K c^{lK}_{l_1,\dots,l_{p_1};\,l'_1,\dots,l'_{p_2};\,K_1,\dots,K_{p_1};\,K'_1,\dots,K'_{p_2}},\tag{25.11}$$

где

$$c^{lK}_{l_1,\dots,l_{p_1};\,l'_1,\dots,l'_{p_2},\,\dots\,;K_1,\,\dots,\,K_{p_1};K'_1,\,\dots,\,K'_{p_2}}=$$

$$=\int\limits_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^{p_1}\prod_{j=1}^{p_2}\Xi^{l_i}_{K'_i}(\xi)\,\overline{\Xi}^{l'_j}_{K'_j}(\xi)\,\overline{\Xi^l_K(\xi)}\,d\xi.\tag{25.12}$$

Для доказательства леммы 25.1 заметим, что произведение любого конечного числа p функций $\Xi^l_K(\xi)$ принадлежит множеству $\mathscr{L}_2(S^{n-1})$

$$\prod_{i=1}^{p_1}\Xi^{l_i}_{K_i}\prod_{j=1}^{p_2}\overline{\Xi^{l'_j}_{K'_j}(\xi)}\in\mathscr{L}_2(S^{n-1}),\tag{25.13}$$

что вытекает из представления функций $\Xi^l_K(\xi)$ в форме (2.94). В свою очередь из формулы (25.13) с помощью следствия 2.4 получаем утверждение леммы 25.1.

В сферических координатах (r, θ_1, ..., θ_{n-1}) n-мерный оператор Лапласа $\Delta_{(n)}$ имеет вид

$$\Delta_{(n)}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_0,\tag{25.14}$$

причем зависящий только от угловых переменных θ_1, ..., θ_{n-1} оператор Δ_0 имеет функции $\Xi^l_K(\xi)=\Xi^l_K(\theta_1,\,\dots,\,\theta_{n-1})$ в качестве своих собственных функций:

$$\Delta_0\Xi^l_K(\xi)=-l(l+n-2)\,\Xi^l_K(\xi).\tag{25.15}$$

С помощью следствия 25.1, леммы 25.1 и формул (25.14), (25.15) устанавливаем следующую теорему.

Теорема 25.1. *Решение* $\Phi(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1};g)\equiv\varphi(\vec{x};g)$ *квазилинейного n-мерного уравнения Гельмгольца* (25.4) *в области* $Ш_n[r_1, r_2]\times(-g_1, g_1)$ *можно представить в виде сходящегося в среднем* (по норме (25.8)) *ряда* (25.9) *с коэффициентами* $a^l_K(r;g)$, *являющимися решением счетной системы обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\left[\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+n-2)}{r^2}+\varkappa\right]a^{(l)}_K(r;\;g)=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{g^{s+1}}{s!}\sum_{p_1=1}^{N_s}\sum_{p_2=1}^{N_s}d_{s_1,p_1,p_2}\sum_{l_1}\cdots\sum_{l_{p_1}}\sum_{l'_1}\cdots\sum_{l'_{p_2}}\sum_{K_1}\cdots\sum_{K_{p_1}}\cdots\tag{25.16}$$

$$\ldots \sum_{K_1'} \ldots \sum_{K_{p_2}'} c^{lK}_{l_1, \ldots, l_{p_1};\, l_1', \ldots, l_{p_2}';\; K_1, \ldots, K_{p_1};\, K_1', \ldots, K_{p_2}'} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{p_1} \prod_{j=1}^{p_2} a^{(l_i)}_{K_l}(r;\ g)\, \overline{a^{(l_j')}_{K_j'}(r;\ g)},$$

где $l = 0, 1, 2, \ldots$; *K означает все возможные последовательности целых чисел* $(k_1, \ldots, \pm k_{n-2})$, *таких, что* $l = k_0 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant k_{n-2} \geqslant 0$.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения Гельмгольца (25.4), (25.5) в общем виде:

найти решение уравнения (25.4), (25.5) в области (25.6), (25.7), удовлетворяющее на сфере $r_1 = \mathrm{const}$ предельным условиям

$$\begin{aligned} &\Phi(r_1, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1};\ g) = \sum_l \sum_K A_{lK}(g)\, \Xi^l_K(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}), \\ &\frac{\partial \Phi(r_1, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1};\ g)}{\partial r} = \sum_l \sum_K B_{lK}(g)\, \Xi^l_K(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}), \end{aligned} \tag{25.17}$$

где $A_{lK}(g)$, $B_{lK}(g)$ — заданные функции, аналитически зависящие от аргумента g в точке $g = 0$, так что для достаточно малых $|g|$ абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$\begin{aligned} A_{lK}(g) &= \sum_{s=0}^{\infty} g^s \alpha^{(s)}_{lK}, \\ B_{lK}(g) &= \sum_{s=0}^{\infty} g^s \beta^{(s)}_{lK}. \end{aligned} \tag{25.18}$$

Поскольку задача Коши в общем виде для уравнения (25.4), (25.5) (с правой частью, аналитически зависящей от параметра g в области $G = (g \| |g| < g_0)$ для $|\varphi| \equiv |\Phi| < M$ и полиномиальной по φ и по $\overline{\varphi}$) с предельными условиями (25.17), (25.18) (являющимися аналитическими функциями переменных $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ и переменной g в точке $g = 0$) по теореме 3.1 Коши—Ковалевской имеет аналитическое решение по переменным r, g, $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ в некоторой окрестности сферы $x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2} = r_1^2 > 0$ в точке $g = 0$ и притом единственное в классе аналитических функций, то это решение в области $Ш_n\,[r_1, r_2] \times (-g_2, g_2)$ с некоторыми конечными $r_2 > r_1 > 0$, $g_2 > 0$ можно представить единственным образом в виде рядов (25.9) с коэффициентами $a^{(l)}_K(r; g)$, разлагающимися единственным образом посредством следующих формул:

$$a^{(l)}_K(r;\ g) = \sum_{s=0}^{\infty} g^s a^{(l)}_{K,s}(r). \tag{25.19}$$

Подстановка рядов (25.19) в левые и правые части системы (25.16) приводит к последовательности систем уравнений; в частности, уравнение для коэффициентов порядка g^0 в левой и правой части уравнения (25.16) имеет вид

$$\left[\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+n-2)}{r^2}+\varkappa\right]a_{K,0}^{(l)}(r)=0. \tag{25.20}$$

Из предельных условий (25.17), (25.18) для исходного уравнения (25.4), (25.5) получаем из (25.20) выражение для

$$a_{K,0}^{(l)}(r)=b_{K,0}^{(l)}y_{l1}(r)+c_{K,0}^{(l)}y_{l2}(r), \tag{25.21}$$

где $y_{l1}(r)$, $y_{l2}(r)$ — два линейно независимых решения уравнения (25.20), а коэффициенты $b_{K,0}^{(l)}$ и $c_{K,0}^{(l)}$ определяются из соотношений

$$b_{K,0}^{(l)}=\begin{vmatrix}\alpha_{lK}^{(0)}, & y_{l2}(r_1)\\ \beta_{lK}^{(0)}, & \frac{d}{dr}y_{l2}(r_1)\end{vmatrix}W_l^{-1}(r_1), \tag{25.22}$$

$$c_{K,0}^{(l)}=\begin{vmatrix}y_{l1}(r_1), & \alpha_{lK}^{(0)}\\ \frac{d}{dr}y_{l1}(r_1), & \beta_{lK}^{(0)}\end{vmatrix}W_l^{-1}(r_1),$$

а

$$W_l(r)=W[y_{l1},y_{l2}](r)\equiv y_{l1}(r)\frac{dy_{l2}(r)}{dr}-y_{l2}(r)\frac{dy_{l1}(r)}{dr} \tag{25.23}$$

—вронскиан двух линейно независимых решений уравнения (25.20).

Уравнения g^s-го порядка, получаемые из (25.16), имеют вид

$$\left[\frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+n-2)}{r^2}+\varkappa\right]a_{K,s}^{(l)}(r)=R(r;\ l,\ K,\ s), \tag{25.24}$$

где

$$R(r;\ l,\ K,s)\equiv\sum_{q=0}^{s-1}\frac{1}{q\,!}\sum_{p_1=1}^{N_q}\sum_{p_2=1}^{N_q}d_{s,p_1,p_2}\sum_{l_1}\cdots\sum_{l_{p_1}}\times$$

$$\times\sum_{l'_1}\cdots\sum_{l'_{p_2}}\sum_{K_1}\cdots\sum_{K_{p_1}}\sum_{K'_1}\cdots\sum_{K'_{p_2}}c^{lK}_{l_1,\ldots,l_{p_1};\ l'_1,\ldots,l'_{p_2};\ K_1,\ldots,K_{p_1};K'_1,\ldots,K'_{p_2}}\times$$

$$\times\sum_{s_1=0}^{s-q-1}\cdots\sum_{s_{p_1}=0}^{s-q-1}\sum_{s'_1=1}^{s-q-1}\cdots\sum_{\substack{s'_{p_2}=0\\(s_1+\cdots+s_{p_1}+s'_1+\cdots+s'_{p_2}\ =s-q-1)}}^{s-q-1}\prod_{i=1}^{p_1}\prod_{j=1}^{p_2}a_{K_i,s_i}^{(l_i)}(r)\overline{a_{K'_j,s'_j}^{(l'_i)}}, \tag{25.25}$$

$$s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Решая последовательно системы уравнений (25.25) для $s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, с учетом предельных условий (25.17), (25.18) получаем для функций $a_{K,s}^{(l)}(r)$ следующие выражения:

$$a_{K,s}^{(l)}(r)=b_{K,s}^{(l)}y_{l1}(r)+c_{K,s}^{(l)}y_{l2}(r)+\int_{r_1}^{r}G_l(r,\ \xi)\,R(\xi;\ l,\ K,\ s)\,d\xi, \tag{25.26}$$

$$s=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ r>r_1>0,$$

где $G_l(r, \xi)\,\Theta(r-\xi)$ — запаздывающая функция Грина уравнения (25.20), которую можно представить в следующем виде:

$$G_l(r, \xi)\,\Theta(r-\xi) = \frac{y_{l1}(r)\,y_{l2}(\xi) - y_{l1}(\xi)\,y_{l2}(r)}{W_l(\xi)}\,\Theta(r-\xi), \tag{25.27}$$

$\Theta(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \geqslant 0, \\ 0, & \eta < 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда, $W_l(\xi)$ — вронскиан, даваемый выражением (25.23). Коэффициенты $b_{K,s}^{(l)}$, $c_{K,s}^{(l)}$ в формуле (25.26) даются соотношениями

$$\begin{aligned} b_{K,s}^{(l)} &= \begin{vmatrix} \alpha_{l,K}^{(s)}, & y_{l2}(r_1) \\ \beta_{l,K}^{(s)}, & \frac{d}{dr}\,y_{l2}(r_1) \end{vmatrix} W_l^{-1}, \\ c_{K,s}^{(l)} &= \begin{vmatrix} y_{l1}(r_1), & \alpha_{l,K}^{(s)} \\ \frac{d}{dr}\,y_{l1}(r_1), & \beta_{l,K}^{(s)} \end{vmatrix} W_l^{-1}. \end{aligned} \tag{25.28}$$

Окончательный результат о решении задачи Коши в общем виде (25.4), (25.5), (25.17), (25.18) можно сформулировать в виде следующей теоремы, доказываемой с помощью теоремы 25.1 и теоремы Коши — Ковалевской 3.1.

Теорема 25.2. *Решение* $\varphi(x_1, \ldots, x_n; g) \equiv \Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}; g)$ *уравнения* (25.4), (25.5) *в области* (25.6), (25.7), *удовлетворяющее предельным условиям* (25.17), (25.18) *на сфере* $r^2 = r_1^2 = \text{const} > 0$, *можно для достаточно малых* $|g|$ *представить единственным образом в виде рядов* (25.9), (25.19), *в которых функции* $a_{K,s}^{(l)}(r)$ *определяются из соотношений* (25.21) — (25.23), (25.25) — (25.28).

Ряды (25.19) *сходятся для достаточно малых* $|g|$, $r_2 - r_1 > 0$ *равномерно по отношению к* g, r *в области* $[r_1, r_2]$, *а ряды* (25.9) *для достаточно малых* $|g|$ *сходятся в среднем в области* (25.7) *по норме* (25.8).

Пример 1. Рассмотрим уравнение (25.4), (25.5) для $n = 3$

$$\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_0}{r^2} + \varkappa\right]\Phi(r, \theta, \varphi) = gf\left(g, \Phi(r, \theta, \varphi), \overline{\Phi(r, \theta, \varphi)}\right). \tag{25.29}$$

В частности, статические решения квазилинейного волнового уравнения (25.1) в четырехмерном пространстве-времени Минковского удовлетворяют уравнению (25.29) с $\varkappa = -m^2$ и с правой частью $gf(g, \Phi, \overline{\Phi}) = -F(\Phi, \overline{\Phi})$, где $F(z, \bar{z})$ дается выражением (25.1).

К уравнению (25.29) применимы теоремы 25.1 и 25.2. При этом базисные функции $\Xi_K^l(\xi)$ совпадают со сферическими гармониками $Y_l^k(\xi)$:

$$\Xi_K^l(\xi) = \Xi_K^l(\theta_1, \theta_2) = (-1)^{k_1}\sqrt{4\pi}\,Y_l^{\pm k_1}(\theta_2, \theta_1), \quad K = \pm k_1, \tag{25.30}$$

$$\theta_2 = \theta, \quad \theta_1 = \varphi,$$

$$d\xi = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

причем условие ортогональности (2.96), (2.97) принимает следующий вид:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_l^k(\theta, \varphi) \overline{Y_{l'}^{k'}(\theta, \varphi)} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{25.31}$$

а формула (25.11) для $p_1 = 2$, $p_2 = 0$ примет вид

$$Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) = \sum_{L=|l-l'|}^{l+l'} \sum_{M=-L}^{L} Y_L^M(\theta, \varphi) C_{l,l';mm'}^{LM}, \tag{25.32}$$

где

$$C_{l,l';mm'}^{LM} = (-1)^M \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)(2L+1)}{4\pi}\right]^{1/2} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ -M & m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ — известные 3_j-символы Вигнера (или коэффициенты векторного сложения, или коэффициенты Клебша — Гордона) для группы трехмерных вращений SO (3) [39, 279, 211].

Разложение решения уравнения (25.29) в области

$$(r, \theta, \varphi, g) \in Ш_3[r_1, r_2] \times (-g_2, g_2)$$

имеет вид

$$\Phi(r, \theta, \varphi; g) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^{L} Y_L^M(\theta, \varphi) \sum_{s=0}^{\infty} g^s a_{M,s}^{(L)}(r), \tag{25.33}$$

где функции $a_{M,s}^{(L)}(r)$ даются формулами (25.21) — (25.23), (25.25) — (25.28), причем в этих формулах в качестве двух линейно независимых решений обыкновенного дифференциального уравнения (25.20) удобно в данном случае выбрать следующие функции:

$$y_{l1}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\varkappa}), \quad y_{l2}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} N_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\varkappa}), \tag{25.34}$$

где $J_\nu(\xi)$, $N_\nu(\xi)$ — функция Бесселя и функция Неймана порядка ν.

Замечание 25.2. Теорема 25.2 дает представление решения задачи Коши в общем виде для уравнения (25.4), (25.5) с малым $|g|$ и аналитическими по g в точке $g = 0$ предельными условиями (25.17), (25.18).

Для случая сильной нелинейности в уравнении (25.4), (25.5), когда g — не мало, для построения решения задачи Коши в общем виде можно воспользоваться проекционно-итеративными методами, описанными в § 24, п. 1. При этом задача Коши в общем виде для дифференциального уравнения (25.4), (25.5) с предельными условиями на сфере $r^2 = r_1^2 = \text{const} > 0$ будет эквивалентна некоторому нелинейному интегральному уравнению. Выбирая в качестве функционального пространства пространство $\mathcal{L}_2(S^{n-1})$, описанное выше в § 25, п. 1, с помощью последовательности операторов проектирования $\{P_n\}$ этого пространства на подпространства $\mathcal{H}_n$ возрастающей размерности $n = n_1, n_2, n_3, \ldots$; $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \ldots$ и действуя операторами P_n на левую и правую части полученного нелинейного интегрального уравнения, построим итерационный процесс, сходящийся к искомому решению нелинейного интегрального уравнения, а тем самым, к решению задачи Коши в общем виде для нелинейного дифференциального уравнения (25.4), (25.5). При этом построенное решение примет вид ряда Фурье (25.9).

25.2. Разложение решений квазилинейных волновых уравнений (25.1) по базисным функциям унитарных неприводимых представлений собственной группы Лоренца Λ. Как мы убедились выше, при построении статических решений нелинейных уравнений поля (25.1) (квазилинейных волновых уравнений) возникают разложения Фурье этих решений по базисным функциям квазирегулярного представления группы трехмерных вращений SO (3). Эта система базисных функций обладает известными трансформационными свойствами относительно произвольных преобразований группы трехмерных вращений, являющейся подгруппой собственной группы Лоренца Λ.

Вместе с этим в лоренц-ковариантной теории поля представляет особую важность получение решений лоренц-ковариантных нелинейных уравнений поля типа (25.1) в виде разложений Фурье по полным системам функций, ковариантных (т. е. обладающих известными трансформационными свойствами) относительно произвольных преобразований собственной группы Лоренца Λ. Построением подобных разложений Фурье мы и займемся ниже в этом параграфе. Эти разложения Фурье будут разложением по матричным элементам унитарных неприводимых представлений основной серии группы Λ. Такие матричные элементы были описаны выше, в § 2, п. 2.11.

Рассмотрим квазилинейное волновое уравнение в четырехмерном пространстве — времени Минковского общего вида:

$$(\Box + m^2)\,\psi(x^0, \vec{x}) = -gf(g,\ \psi(x^0, \vec{x}),\quad \psi(x^0, \vec{x})), \tag{25.35}$$

где $\Box \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}}$, $\quad m = \overline{m} \neq 0, \quad (x^0, \vec{x}) \in R^4; \quad f(g, z, \overline{z})$ — аналитическая функция переменного g в некоторой комплексной окрестности $G = (\underline{g}\,\|\,|g| < g_0)$ точки $g = 0$ для $|z| < M$ с полиномиальными по z и $\overline{z}$ коэффициентами в разложении в ряд g:

$$f(g,\ z,\ \overline{z}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^s}{s\,!} \sum_{p_1=1}^{N_s} \sum_{p_2=1}^{N_s} d_{s,p_1,p_2} z^{p_1} \overline{z}^{p_2}, \tag{25.36}$$

причем

$$d_{s,p_1,p_2} = \overline{d}_{s,p_1,p_2}, \quad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$p_1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_s; \quad p_2 = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_s;$$

$$\max_{\substack{0 \leqslant s < \infty \\ 1 \leqslant p_1 \leqslant N_s \\ 1 \leqslant p_2 \leqslant N_s}} |d_{s,p_1,p_2}| = d_0 < \infty, \quad \max_s N_s = N^{(0)} < \infty.$$

Очевидно, квазилинейные волновые уравнения вида (25.1) принадлежат классу уравнений (25.35), (25.36).

Как отмечалось выше, в § 2, п. 2.11, точку $x = (x^0, \vec{x})$ внутри светового конуса можно задавать в сферических координатах следующим образом:

$$\begin{aligned} x^0 &= r \operatorname{ch} a, \\ x^1 &= r \operatorname{sh} a \sin\theta \cos\varphi, \\ x^2 &= r \operatorname{sh} a \sin\theta \sin\varphi, \\ x^3 &= r \operatorname{sh} a \cos\theta, \end{aligned} \tag{25.37}$$

$$r \in [0, \infty), \quad a \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

так что $x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = r^2 \geqslant 0$.

Точку $x = (x^0, \vec{x})$ вне светового конуса можно задавать в сферических координатах r, a, θ, φ таким путем:

$$\begin{aligned} x^0 &= r \operatorname{sh} a, \\ x^1 &= r \operatorname{ch} a \sin\theta \cos\varphi, \\ x^2 &= r \operatorname{ch} a \sin\theta \sin\varphi, \\ x^3 &= r \operatorname{ch} a \cos\theta, \end{aligned} \tag{25.38}$$

$$r \in [0, \infty), \quad a \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

так что $x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = -r^2 \leqslant 0$.

В дальнейшем изложении в этом параграфе будем, в основном, следовать нашим работам [143, 149].

Четырехмерное пространство — время Минковского является субпроективным пространством, в котором выражение для интервала, например, внутри светового конуса $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ можно записать в сферических координатах r, a, θ, φ в виде:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 ds_0^2(a, \theta, \varphi),$$

где $ds_0^2\,(a, \theta, \varphi)$ — длина дуги на единичном гиперболоиде

$$x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = r^2 = 1, \quad x^0 > 0 \quad (x^0 < 0).$$

Поэтому при построении решений квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) так же, как и в случае квазилинейного n-мерного уравнения Гельмгольца (25.4), (25.5), можно разделить переменные в уравнении при использовании полной системы собственных функций угловой части $\square_0$ волнового оператора $\square$.

При этом используется метод, описанный в общем случае в § 23, п. 23.1.

Поскольку каждая пола (Ω_+ и Ω_-) единичного двуполостного гиперболоида $\Omega_+ \cup \Omega_-$ в пространстве Минковского является симметрическим пространством некомпактного типа по отношению к преобразованиям собственной группы Лоренца Λ, то разложение решения уравнения (25.35), (25.36) по полной системе собственных функций оператора $\square_0$ имеет вид интеграла Фурье.

Введем строгое определение решения квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36).

Определение 25.2. Решением уравнения (25.35), (25.36) в области

$$(x;\ g) = (r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g) \in D \times (-g_1,\ g_2),\ g_1 < g_0, \tag{25.39}$$

где D — открытая область, лежащая целиком внутри либо вне светового конуса в четырехмерном пространстве Минковского, будем называть функцию $\psi(x^0,\ \vec{x};\ g) \equiv \Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)$ от четырех независимых переменных r, a, θ, φ и одного параметра g, непрерывную вместе с частными производными до второго порядка включительно по переменным r, a, θ, φ в области (25.39) и удовлетворяющую в этой области дифференциальному уравнению в частных производных (25.35), (25.36).

Таким образом, если $\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)$ — решение уравнения (25.35), (25.36) в области (25.39), то, по определению,

$$\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)\big|_{g=\mathrm{const}\in(-g_1, g_1)} \in C^2(D). \tag{25.40}$$

Далее нам понадобится еще более сузить функциональное пространство, в котором будем искать решение уравнения (25.35), (25.36) (более точно, искать решение задачи Коши в общем виде для уравнения (25.35), (25.36) с некоторыми предельными условиями, которые конкретизуем ниже).

С этой целью введем в рассмотрение верхнюю и нижнюю полы единичного гиперболоида по формулам

$$\begin{aligned} \Omega_+ &= (x \,\|\, x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = 1,\ x^0 > 0), \\ \Omega_- &= (x \,\|\, x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2} = 1,\ x^0 < 0) \end{aligned} \tag{25.41}$$

и для этих областей $\Omega_{\underset{(-)}{+}}$ введем функциональные пространства Соболева $H_2^2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$*

$$H_2^2(\Omega_{\underset{(-)}{+}}) = \left(v \,\|\, \frac{\partial^{q_1+q_2+q_3}}{(\partial a)^{q_1}(\partial\theta)^{q_2}(\partial\varphi)^{q_3}} v \in \mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}});\ v \in C^q(\Omega_{\underset{(-)}{+}}),\right. \tag{25.42}$$

$$\left. |q| = q_1 + q_2 + q_3 \leqslant 2\right),$$

где $\mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$ — множество всех измеримых в области $x \in \Omega_{\underset{(-)}{+}}$ функций ψ, удовлетворяющих условию

$$\|\psi\|_{\mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})} = \int\limits_{\Omega_{\underset{(-)}{+}}} |\psi(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Снабдим пространство $H_2^2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$ нормой

$$\left(\sum_{|q| \leqslant 2} \|v^{(q)}\|_{\mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})}\right)^{1/2} \equiv \|v\|_{H_2^2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})}. \tag{25.43}$$

---

* Ср. с § 4, п. 4.7.

Пространство $H_2^2(\Omega_{\substack{+\\(-)}})$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(v_1, v_2) = \int\limits_{\Omega_{\substack{+\\(-)}}} v_1(\xi)\,\overline{v_2(\xi)}\,d\xi. \tag{25.44}$$

Замечание 25.3. Выбирая в качестве D область

$$(r, a, \theta, \varphi) \in D = [r_1, r_2] \times \Omega_{\substack{+\\(-)}} \equiv G_{\substack{+\\(-)}}[r_1, r_2],\quad r_2 > r_1 > 0, \tag{25.45}$$

получаем, что всякое решение уравнения (25.35), (25.36), принадлежащее при любом $r = \mathrm{const} \in [r_1, r_2]$ функциональному пространству $H_2^2(\Omega_{\substack{+\\(-)}})$, является функцией, суммируемой с квадратом по мере, сосредоточенной на верхней (нижней) поле единичного гиперболоида, т. е. если $\psi(x^0, x^1, x^2, x^3; g) \equiv \Phi(r, a, \theta, \varphi; g)$ — решение уравнения (25.35), (25.36) в области $G_{\substack{+\\(-)}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$, то $\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)\Big|_{\substack{r=\mathrm{const}\in[r_1, r_2]\\ g=\mathrm{const}\in(-g_1,\, g_1)}} \in \mathcal{L}_2(\Omega_{\substack{+\\(-)}})$ и, кроме этого, справедливо более общее соотношение

$$\frac{\partial^{q_1+q_2+q_3}}{(\partial a)^{q_1}(\partial\theta)^{q_2}(\partial\varphi)^{q_3}}\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)\Big|_{\substack{r=\mathrm{const}\in[r_1, r_2]\\ g=\mathrm{const}\in(-g_1,\, g_1)}} \in$$

$$\in \mathcal{L}_2(\Omega_{\substack{+\\(-)}}),\quad |q| \equiv q_1 + q_2 + q_3 \leqslant 2. \tag{25.46}$$

В сферических координатах r, a, θ, φ внутри светового конуса волновой оператор (оператор Даламбера) примет следующий вид:

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}} = \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2\,\mathrm{sh}^2 a}\left[\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{sh}^2 a\,\frac{\partial}{\partial a} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \equiv \frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Box_0,$$

$$\Box_0 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\left[\frac{\partial}{\partial a}\,\mathrm{sh}^2 a\,\frac{\partial}{\partial a} + \Delta_0\right]$$

— угловая часть волнового оператора, Δ_0 — угловая часть трехмерного оператора Лапласа.

С помощью результатов § 2, п.2.11 устанавливаем для фигурирующих там функций $T^J_{M0}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$ следующее утверждение.

Предложение 25.1. Функции $T^J_{M0}(-\varphi, \theta, \varphi)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$, $J = 0, 1, 2, \ldots$; $M = -J, -J+1, \ldots, J$, $\rho \in [0, \infty)$ из формул (2.89), (2.105) являются собственными функциями угловой части $\Box_0$ волнового оператора с собственным значением $-\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right)$:

$$\Box_0 T^J_{M0}(-\varphi, \theta, \varphi)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a) = -\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right)T^J_{M0}(-\varphi, \theta, \varphi)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a). \tag{25.48}$$

Для доказательства предложения 25.1 заметим прежде всего, что матричные элементы представления группы трехмерных вращений T^J_{M0} $(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)$ связаны со сферическими функциями Y^M_J $(\theta,\ \varphi)$, фигурирующими в формуле (2.101), посредством следующей формулы:

$$T^J_{M0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}}\, e^{\frac{iM\pi}{2}}\, Y^M_J(\theta,\ \varphi). \tag{25.49}$$

Поэтому в силу формул (2.98а), (2.101), (25.49) получаем:

$$\Delta_0 T^J_{M0}\ (-\varphi,\ \theta,\ \varphi) = -J\,(J+1)\, T^J_{M0}\ (-\varphi,\ \theta,\ \varphi). \tag{25.50}$$

Теперь из формулы (2.104) при $m = L = 0$ в силу (25.50) получаем утверждение предложения 25.1.

Далее с помощью следствия 2.5 из § 2 и используя предложение 25.1 устанавливаем справедливость следующей леммы.

Лемма 25.2. *Пусть функция* $\psi\ (x;\ g) \equiv \Phi\ (r, a, \theta, \varphi; g)$ *четырех координат* r, a , θ, φ *и одного параметра* $g \in (-g_1,\ g_1)$ *обладает следующими свойствами:*

а) *преобразуется по неприводимому (одномерному) представлению* ($l_0 = 0,\ l_1 = 1$) *собственной группы Лоренца* Λ *при произвольных преобразованиях этой группы (т. е. является скалярной функцией по отношению к группе* Λ);

б) *является решением квазилинейного волнового уравнения* (25.35), (25.36) *в области* $G_{\underset{(-)}{+}}$ $[r_1,\ r_2] \times (-g_1,\ g_1)$;

в) *принадлежит при всех* $r = \mathrm{const} \in [r_1, r_2]$, $g = \mathrm{const} \in (-g_1,\ g_1)$ *функциональному пространству* $H^2_2\ (\Omega_{\underset{(-)}{+}})$.

Тогда для этой функции существует интегральное представление

$$\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} a^{(\rho)}_{J,M}(r;\ g)\, T^J_{M0}\ (-\varphi,\ \theta,\ \varphi) \times \\ \times \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho, \tag{25.51}$$

$$\Box_0 \Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g) = -\sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right) a^{(\rho)}_{J,M}(r,\ g) \times \\ \times T^J_{M0}\ (-\varphi,\ \theta,\ \varphi)\, \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho, \tag{25.52}$$

в котором ядра $a^{(\rho,0)}_{J,M}$ $(r;\ g)$ *вычисляются по формуле*

$$a^{(\rho)}_{J,M}(r;\ g) = \frac{2J+1}{4\pi N^{(\rho,0)}_{J,0}} \int_0^{2\pi} \Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)\, \overline{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)} \times \\ \times \overline{T^J_{M0}\ (-\varphi,\ \theta,\ \varphi)}\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \mathrm{sh}^2\, a da, \tag{25.53}$$

а $N^{(\rho,0)}_{J,0}$ *дается формулой* (П.4) *из приложения.*

Ряд (25.51) *и ряд* (25.52) *сходятся в среднем в области* $(r, a, \theta, \varphi; g) \in G_{\underset{(-)}{+}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$ *по норме* (25.43), (*несобственный*) *интеграл в* (25.53) *сходится равномерно по* $r \in [r_1, r_2]$ *и по* $g \in (-g_1, g_1)$, *а функции* $a^{(\rho)}_{J,M}(r; g)$ *из* (25.53) *при всяком* $g = \text{const} \in (-g_1, g_1)$ *дважды непрерывно дифференцируемы по* r *в области* $r \in [r_1, r_2]$.

Справедлива еще одна лемма.

Лемма 25.3. *Пусть выполняются все условия леммы* 25.2. *Тогда всякое произведение*

$$[\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)]^{p_1}[\overline{\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)}]^{p_2}$$

с конечными целыми $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_1 + p_2 \geqslant 1$ *обладает интегральным представлением*

$$[\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)]^{p_1}[\overline{\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)}]^{p_2} =$$

$$= \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} A^{(\rho,0)}_{J,M;p_1,p_2}(r; g)\, T^J_{M,0}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho, \quad (25.54)$$

где ядра $A^{(\rho)}_{J,M;\,p_1,p_2}(r; g)$ *вычисляются по формуле*

$$A^{(\rho)}_{J,M;p_1,p_2}(r; g) = \frac{2J+1}{4\pi N^{(\rho,0)}_{J,0}} \int_0^{2\pi} [\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)]^{p_1} \times$$

$$\times [\overline{\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)}]^{p_2}\, \overline{T^J_{M,0}(-\varphi, \theta, \varphi)}\, \overline{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)}\, d\varphi \times$$

$$\times \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\infty} \operatorname{sh}^2 a da. \quad (25.55)$$

Ряд (25.54) *сходится в среднем в области* $(r, a, \theta, \varphi; g) \in G_{\underset{(-)}{+}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$ *по норме* (25.43), *а интеграл* (25.55) *сходится равномерно по* $(r, g) \in [r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$.

Справедливость леммы 25.3 устанавливается из свойств при $a \to \infty$ меры на единичном двуполостном гиперболоиде и свойств функции $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$ при $a \to \infty$, выводимых в приложении к этой главе.

Аналогично лемме 25.2 устанавливается следующая лемма.

Лемма 25.4. *Пусть выполняются все условия леммы* 25.2 *и пусть, кроме того, описанная в лемме* 25.2 *функция* $\Phi(r, a, \theta, \varphi; g)$ *вместе со своими вторыми частными производными по* r *при всех* $r = \text{const} \in [r_1, r_2]$, $g = \text{const} \in (-g_1, g_1)$ *принадлежит функциональному пространству* $\mathcal{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$.

Тогда можно продифференцировать по параметру r *в области* $r \in [r_1, r_2]$ *под знаком интеграла правую часть выражения* (25.51)

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r, a, \theta, \varphi; g) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} a^{(\rho)}_{J,M}(r; g)\right] T^J_{M,0}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho \quad (25.56)$$

и дифференцировать под знаком интеграла по $\rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho_1', \ldots, \rho_{p_2}'$ *в правой части выражения* (25.55)

$$A^{(\rho)}_{\tilde{J},\tilde{M};p_1,p_2}(r;\ g) = \frac{2\tilde{J}+1}{4\pi N^{(\rho,0)}_{\tilde{J},0}} \int\limits_0^{2\pi} [\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)]^{p_1} \times$$

$$\times \overline{[\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)]^{p_1}}\, \overline{T^{\tilde{J}}_{\tilde{M},0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)}\, \overline{\Phi^{(\rho,0)}_{\tilde{J},0,0}(a)}\, d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \operatorname{sh}^2 a da = \frac{2\tilde{J}+1}{4\pi N^{(\rho,0)}_{\tilde{J},0}} \sum_{J_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{J_{p_1}=0}^{\infty} \cdot \sum_{J_1'=0}^{\infty} \cdots \sum_{J_{p_2}'=0}^{\infty} \sum_{M_1=-J_1}^{J_1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{M_{p_1}=-J_{p_1}}^{J_{p_1}} \sum_{M_1'=-J_1'}^{J_1'} \cdots \sum_{M_{p_2}'=-J_{p_2}'}^{J_{p_2}} \int\limits_0^{\infty} d\rho_1 \ldots \int\limits_0^{\infty} d\rho_{p_1} \int\limits_0^{\infty} d\rho_1' \ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{\infty} d\rho_{p_2}' I^{\tilde{J}}_{J_1,\ \ldots,\ J_{p_1},\ J_1',\ \ldots,\ J_{p_2}'}(\rho;\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_{p_1},\ \rho_1',\ \ldots,$$

$$\ldots,\ \rho_{p_2}')\, C^{\tilde{J},\tilde{M}}_{J_1,\ \ldots,\ J_{p_1}, J_1',\ \ldots,\ J_{p_2}';\ M_1,\ \ldots,\ M_{p_1}, M_1',\ \ldots,\ M_{p_2}'} \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} a^{(\rho_\alpha)}_{J_\alpha M_\alpha}(r;\ g) \times$$

$$\times \overline{a^{(\rho_\beta')}_{J_\beta', M_\beta'}(r;\ g)}, \tag{25.57}$$

где

$$I^{\tilde{J}}_{J_1,\ \ldots,\ J_{p_1}, J_1',\ \ldots,\ J_{p_2}'}(\rho;\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_{p_1},\ \rho_1',\ \ldots,\ \rho_{p_2}') =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} \Phi^{(\rho_\alpha,0)}_{J_\alpha,0,0}(a)\, \overline{\Phi^{(\rho_\beta',0)}_{J_\beta',0,0}(a)}\, \overline{\Phi^{(\rho,0)}_{\tilde{J},0,0}(a)} \operatorname{sh}^2 a da, \tag{25.58}$$

$$C^{\tilde{J}\tilde{M}}_{(J),(J'),(M),(M')} \equiv C^{\tilde{J}\tilde{M}}_{J_1,\ \ldots,\ J_{p_1}, J_1',\ \ldots,\ J_{p_2}';\ M_1,\ \ldots,\ M_{p_1}, M_1',\ \ldots,\ M_{p_2}'} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} T^{J_\alpha}_{M_\alpha,0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)\, \overline{T^{J_\beta'}_{M_\beta',0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)} \times$$

$$\times \overline{T^{\tilde{J}}_{\tilde{M},0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)} \sin\theta\, d\theta. \tag{25.59}$$

Существование выражения $C^{\tilde{J}\tilde{M}}_{(J),(J'),(M),(M')}$ устанавливается тривиально из представления (25.49), а существование выражения

$$I^{\tilde{J}}_{J_1,\ \ldots,\ J_{p_1},\ J_1',\ \ldots,\ J_{p_2}'}(\rho;\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_{p_1}, \rho_1',\ \ldots,\ \rho_{p_2}')$$

при фиксированных конечных $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, $p_1 + p_2 \geqslant 1$, $J_1, \ldots, J_{p_1}, J_1', \ldots, J_{p_2}'$ и фиксированных неотрицательных $\rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho_1', \ldots, \rho_{p_2}'$ устанавливается в приложении к этой главе; оценки последнего выражения при $\rho \to \infty$ найдены там же, формула (П.10а).

С помощью лемм 25.2, 25.3, 25.4 устанавливаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 25.3. *Пусть функция* $\psi(x;\ g) \equiv \Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)$ *четырех координат* r, a, θ, φ *и одного параметра* $g \in (-g_1,\ g_1)$ *обладает следующими свойствами:*

а) *преобразуется по неприводимому (одномерному) представлению* ($l_0 = 0$, $l_1 = 1$) *собственной группы Лоренца* Λ *при произвольных преобразованиях этой группы;*

б) *является решением квазилинейного волнового уравнения* (25.35), (25.36) *в области* $\underset{(-)}{G_+}\ [r_1,\ r_2] \times (-g_1,\ g_1)$;

в) *принадлежит вместе со своими вторыми частными производными по* r *при всех* $r = \text{const} \in [r_1,\ r_2]$, $g = \text{const}\ (-g_1,\ g_1)$ *функциональному пространству* $H_2^2(\underset{(-)}{\Omega_+})$.

Тогда для этой функции существует интегральное представление в виде ряда

$$\Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} a_{J,M}^{(\rho)}(r;\ g)\, T_{M,0}^{J}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi) \times$$

$$\times\ \Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\, d\rho, \qquad (25.60)$$

сходящегося в среднем в области $(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g) \in \underset{(-)}{G_+}\ [r_1,\ r_2] \times (-g_1,\ g_1)$ *по норме* (25.43), *в котором ядра* $a_{J,M}^{(\rho)}(r;\ g)$ *удовлетворяют системе обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений*

$$\left[\frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right) + m^2\right] a_{J,M}^{(\rho)}(r;\ g) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^{s+1}}{s!} \sum_{p_1=1}^{N_s} \sum_{p_2=1}^{N_s} d_{s,p_1,p_2} \sum_{J_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{J_{p_1}=0}^{\infty} \sum_{J_1'=0}^{\infty} \cdots \sum_{J_{p_2}'=0}^{\infty} \times$$

$$\times \sum_{M_1=-J_1}^{J_1} \cdots \sum_{M_{p_1}=-J_{p_1}}^{J_{p_1}} \sum_{M_1'=-J_1'}^{J_1'} \cdots \sum_{M_{p_2}'=-J_{p_2}'}^{J_{p_2}'} \int_0^{\infty} d\rho_1 \ldots \int_0^{\infty} d\rho_{p_1} \int_0^{\infty} d\rho_1' \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\infty} d\rho_{p_2}' I_{J_1, \ldots, J_{p_1}, J_1', \ldots, J_{p_2}'}^{J}(\rho;\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_{p_1},\ \rho_1',\ \ldots,\ \rho_{p_2}') \times$$

$$\times\ C_{J_1, \ldots, J_{p_1}, J_1', \ldots, J_{p_2}';\ M_1, \ldots, M_{p_1}, M_1', \ldots, M_{p_2}'}^{J\,M} \times$$

$$\times \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} a_{J_\alpha M_\alpha}^{(\rho_\alpha)}(r;\ g)\, \overline{a_{J_\beta' M_\beta'}^{(\rho_\beta')}(r;\ g)}. \qquad (25.61)$$

Пока мы не накладывали никаких предельных условий на решение квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36). Это будет сделано ниже. А именно поставим следующую задачу Коши в общем виде для уравнения (25.35), (25.36):

отыскивается решение квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) в области

$$(r,\ a, \theta, \varphi;\ g) \in G_{\underset{(-)}{+}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1),$$

удовлетворяющее следующим предельным условиям на гиперболоиде $r = r_1 > 0$:

$$\Phi(r_1, a, \theta, \varphi;\ g) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \int_0^{\infty} \alpha_{J,M}^{(\rho)} T_{M,0}^{J}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\, d\rho \in$$

$$\in \mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}}), \tag{25.62}$$

$$\frac{\partial \Phi(r_1, a, \theta, \varphi;\ g)}{\partial r} = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \beta_{J,M}^{(\rho)} T_{M,0}^{J}(-\varphi, \theta, \varphi)\, \Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\, d\rho \in$$

$$\in \mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}}), \tag{25.63}$$

где ряды в правых частях выражений (25.62), (25.63) сходятся равномерно по $(a, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi)$ по норме (25.43).

Если при заданных предельных условиях (25.62), (25.63) на границе области из $G_{\underset{(-)}{+}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$ решение задачи Коши в общем виде для квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) внутри этой области удовлетворяет условиям теоремы 25.3, то такое решение задачи Коши, согласно теореме 25.3, имеет интегральное представление (25.51), ядра которого $a_{J,M}^{(\rho)}$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (25.61).

Но даже в этом случае нельзя указать общего конструктивного метода построения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25.61), обеспечивающего выполнение предельных условий (25.62), (25.63) для $g \in (-g_1, g_1)$ с произвольным заданным $g_1 > 0$.

Однако в одном важном для приложений частном случае значений $g \in (-g_1, g_1)$ такое решение можно построить.

А именно, пусть известно, что для заданных предельных условий на гиперболоиде (25.62), (25.63) решение задачи Коши в общем виде для квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) в области $(r, a, \theta, \varphi;\ g) \in G_{\underset{(-)}{+}}[r_1, r_2] \times (-g_1, g_1)$ для достаточно малого $g_1 > 0$ с этими предельными условиями удовлетворяет всем условиям теоремы 25.3 и, кроме того, является непрерывным вместе с k частными производными по параметру g в точке $g = 0$. В этом случае такое решение задачи Коши в общем виде (25.35), (25.36), (25.62), (25.63) можно представить с помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\Phi(r, a, \theta, \varphi;\ g) = \sum_{s=0}^{k} g^s \Phi_s(r, a, \theta, \varphi) + O(g^{k+1}). \tag{25.64}$$

С другой стороны, такое решение обладает интегральным представлением (25.51), в котором ядра имеют вид:

$$a^{(\rho)}_{J,M}(r;\ g) = \sum_{s=0}^{k} g^s a^{(\rho,s)}_{J,M}(r) + O(g^{k+1}). \qquad (25.65)$$

В данном случае можно построить формальное решение (25.65), удовлетворяющее системе обыкновенных дифференциальных уравнений (25.61).

Обозначим

$$R(r;\ \rho,\ J,\ M,\ s) \equiv$$

$$\equiv \sum_{v=0}^{s-1} \frac{1}{v!} \sum_{p_1=1}^{N_v} \sum_{p_2=1}^{N_v} d_{v,p_1,p_2} \sum_{J_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{J_{p_1}=0}^{\infty} \sum_{J'_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{J'_{p_2}=0}^{\infty} \sum_{M_1=-J_1}^{J_1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{M_{p_1}=-J_{p_1}}^{J_{p_1}} \sum_{M'_1=-J'_1}^{J'_1} \cdots \sum_{M''_{p_2}=-J'_{p_2}}^{J'_{p_2}} \int_0^\infty d\rho_1 \ldots \int_0^\infty d\rho_{p_1} \int_0^\infty d\rho'_1 \ldots \int_0^\infty d\rho'_{p_2} \times$$

$$\times I^J_{J_1\,\ldots,\,J_{p_1},J'_1,\,\ldots,\,J'_{p_2}}(\rho_1,\ \ldots,\ \rho_{p_1},\ \rho'_1,\ \ldots,\ \rho'_{p_2}) \times$$

$$\times C^{JM}_{J_1,\,\ldots,\,J_{p_1},J'_1,\,\ldots,\,J'_{p_2};\,M_1,\,\ldots,\,M_{p_1},\,M'_1,\,\ldots,\,M'_{p_2}} \times$$

$$\times \sum_{q_1=0}^{-v-1} \cdots \sum_{q_{p_1}=0}^{s-v-1} \sum_{q'_1=0}^{s-v-1} \cdots \sum_{\substack{q'_{p_2}=0 \\ (q_1+\ \ldots+q_{p_1}+q'_1+\ldots+q'_{p_2}=s-v-1)}}^{s-v-1} \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} a^{(\rho_\alpha,q_\alpha)}_{J_\alpha,M_\alpha}(r)\, \overline{a^{(\rho'_\beta,q'_\beta)}_{J'_\beta,M'_\beta}(r)}. \qquad (25.66)$$

Рассмотрим прежде случай уравнения (25.35), (25.36) с $g = 0$. При этом система уравнений (25.61) становится «незацепляющейся»:

$$\left[\frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{\rho^2}{4}\right) + m^2\right] a^{(\rho)}_{J,M}(r) = 0. \qquad (25.67)$$

В этом случае решение задачи Коши в общем виде (25.35), (25.36), (25.62), (25. 63) с $g = 0$, удовлетворяющее условиям теоремы 25.3, дается следующей леммой.

Лемма 25.5. *Пусть функция* $\psi(x) = \Phi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi)$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 25.3 *для* $g_1 = 0$ *и пусть, кроме того, удовлетворяет предельным условиям* (25.62), (25.63).

Тогда эта функция имеет интегральное представление (25.51), *ядра которого имеют вид*

$$a^{(\rho)}_{J,M}(r) = \frac{A^{(\rho)}_{J,M}}{r} J_{\frac{i\rho}{2}}(mr) + \frac{B^{(\rho)}_{JM}}{r} J_{\frac{-i\rho}{2}}(mr), \qquad (25.68)$$

где $J_\nu(z)$ *— функция Бесселя порядка* ν,

$$A^{(\rho)}_{J,M} = \begin{vmatrix} \alpha^{(\rho)}_{J,M}, & \dfrac{1}{r_1}\cdot J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr_1) \\ \beta^{(\rho)}_{J,M}, & \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r_1}\cdot J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr_1)\right] \end{vmatrix} W_\rho^{-1}(r_1), \qquad (25.69)$$

$$B^{(\rho)}_{J,M} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r_1} J_{\frac{i\rho}{2}}(mr_1), & \alpha^{(\rho)}_{J,M} \\ \dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{1}{r_1} J_{\frac{i\rho}{2}}(mr_1)\right], & \beta^{(\rho)}_{J,M} \end{vmatrix} W_\rho^{-1}(r_1), \qquad (25.70)$$

$$W_\rho(r) \equiv \frac{1}{r^2}\left[J_{\frac{i\rho}{2}}(mr)\frac{dJ_{-\frac{i\rho}{2}}(mr)}{dr} - J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr)\frac{dJ_{\frac{i\rho}{2}}(mr)}{dr} \right] \qquad (25.71)$$

— вронскиан двух линейно независимых решений $\frac{1}{r} J_{\frac{i\rho}{2}}(mr)$ *и* $\frac{1}{r} J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr)$ *уравнения* (25.67).

Ряд (25.51) *сходится в среднем в области* $(r, a, \theta, \varphi) \in G\underset{(-)}{+} [r_1, r_2]$ *по норме* (25.43).

Рассмотрим теперь общий случай квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) с $g \in (-g_1, g_1)$, $0 < g_1 \ll 1$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 25.4. *Пусть функция* $\psi(x; g) \equiv \Phi(r, a, \theta, \varphi; g)$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 25.3 *для* $g_1 > 0$ *и пусть* а) *удовлетворяет, кроме того, предельным условиям* (25.62), (25.63) *и* б) *непрерывно зависит от параметра* g *вместе с* k *частными производными по* g *в точке* $g = 0$.

Тогда эта функция имеет интегральное представление (25.51), *ядра которого во всяком случае формально можно представить в виде* (25.65) *с функциями*

$$a^{(\rho,0)}_{J,M}(r) = \frac{1}{r} A^{(\rho)}_{J,M} J_{\frac{i\rho}{2}}(mr) + \frac{1}{r} B^{(\rho)}_{J,M} J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr), \qquad (25.72)$$

где коэффициенты $A^{(\rho)}_{J,M}$ *и* $B^{(\rho)}_{J,M}$ *определяются формулами* (25.69) — (25.71), *а остальные функции* $a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)$, $s = 1, 2, \ldots, k$, *определяются однозначно с помощью формул* (25. 66) *из рекуррентных соотношений*

$$a^{(\rho,s)}_{J,M}(r) = \int_{r_1}^{r} G_\rho(r, \xi) R(\xi;\ \rho, J, M, s)\, d\xi, \qquad (25.73)$$

$$s = 1, 2, \ldots, k; \qquad r \in [r_1, r_2],$$

где

$$G_\rho(r, \xi) = \frac{\xi}{r}\left[J_{\frac{i\rho}{2}}(mr) J_{-\frac{i\rho}{2}}(m\xi) - J_{\frac{i\rho}{2}}(m\xi) J_{-\frac{i\rho}{2}}(mr\right] \times$$

$$\times \left[J_{-\frac{i\rho}{2}}(m\xi)\frac{d}{d\xi}\cdot J_{\frac{i\rho}{2}}(m\xi) - J_{\frac{i\rho}{2}}(m\xi)\frac{d}{d\xi} J_{-\frac{i\rho}{2}}(m\xi)\right]^{-1}. \qquad (25.74)$$

Для доказательства теоремы подставим (25.65) в левые и правые части системы уравнений (25.61). Поскольку, по условию теоремы, полученная в результате этого система уравнений должна выполняться при всех $g \in (-g_1, g_1)$ (с малым $g_1 > 0$) с точностью до $O(g^{k+1})$, то отсюда получим последовательность уравнений

$$\left[\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{\rho^2}{4}\right)+m^2\right]a^{(\rho,s)}_{J,M}(r;\ g)=$$
$$=R(r;\ \rho,J,M,s),\qquad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k,\tag{25.75}$$

где $R(r;\ g,\ J,\ M,\ 0)\equiv 0$.

Решение однородного уравнения, получаемого из (25.75) при $s = 0$, обеспечивающее выполнение предельных условий (25.62), (25.63), имеет вид (25.72), (25.69) — (25.71). Решения же каждого из неоднородных уравнений (25.75) с возрастающим $s = 1, 2, \ldots, k$, обеспечивающие выполнение предельных условий (25.62), (25.63), имеют вид свертки запаздывающей функции Грина однородного уравнения (25.67) $G^{\text{ret}}_\rho(r,\ \xi) = \Theta(r-\xi)\,G_\rho(r,\ \xi)$ ($G_\rho(r,\ \xi)$ дается формулой (25.74), а $\Theta(\eta) = \begin{cases}1, & \eta\geqslant 0\\ 0, & \eta<0\end{cases}$ — функция Хевисайда) с известной правой частью $R(r;\ g,\ J,\ M,\ s)$ уравнения (25.75). Тем самым теорема 25.4 доказана.

При условиях теоремы 25.4 функция $\Phi(r,\ a, \theta,\ \varphi;\ g)$ имеет вид

$$\Phi(r,\ a;\ \theta,\ \varphi;\ g)=\sum_{s=0}^{k}g^s\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J}\int_0^{\infty}a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\times$$
$$\times T^J_{M,0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)\,d\rho+O(g^{k+1}).\tag{25.76}$$

Ниже будет доказано существование каждого слагаемого в правой части (25.76) с $s = 1,2, \ldots, k$ для частного случая $0 < r_1 < r_2 \ll l$, где l — некоторая постоянная размерности длины. Справедлива следующая лемма.

Лемма 25.6. *Пусть для* $s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ p\leqslant k-1$, *существуют интегралы*

$$\Phi_s(r,\ a,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{J=0}^{\infty}\sum_{M=-J}^{J}\int_0^{\infty}a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,T^J_{M,0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)\,d\rho,\tag{25.77}$$

где $a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)$ *имеет вид* (25.73), (25.66), *и пусть существует такое неотрицательное целое число* $J^{(p-1)}$, *что*

$$a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)\equiv 0,\ \text{если}\ J>J^{(p-1)},\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1.\tag{25.78}$$

Тогда суммирование в (25.77) *для* $s = 0, 1, 2, \ldots, k$ *проводится по конечному числу значений* J *и* M, *все интегралы в выражениях* (25.77), (25.73), (25.66) *для* $s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ *существуют при* $r \in [r_1,\ r_2]$, *во всяком случае для достаточно малых* $0 < r_1 < r_2 \ll l$ *(*l *— постоянная размерности длины), и при этом каждое выражение* (25.77) *для* $s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ *при* $r = \text{const} \in [r_1,\ r_2]$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$.

Доказательство. Оценим сначала абсолютную величину $|a^{(\rho,1)}_{J,M}(r)|$ при условиях леммы 25.6. С помощью (25.66) и неравенств (П.10а), (П.14) из приложения к этой главе получаем прежде всего для $\xi \in [r_1, r_2]$ при условиях леммы 25.6 следующую цепочку неравенств:

$$|R(\xi;\ \rho, J, M, 1)| \underset{\rho\to\infty}{\leqslant} C(J^{(0)}) \cdot [2(J^{(0)})^2]^{p_1+p_2}\rho^{2J+2} \times$$

$$\times \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant p_1\\ 1\leqslant l\leqslant p_2}} \max_{\substack{1\leqslant J_j\leqslant J^{(0)}\\ 1\leqslant J'_l\leqslant J^{(0)}}} \max_{\substack{-J_j\leqslant M_j\leqslant J_j\\ -J'_l\leqslant M'_l\leqslant J'_l}} \left| \int\limits_0^\infty d\rho_1 \ldots \int\limits_0^\infty d\rho_{p_1} \int\limits_0^\infty d\rho'_1 \ldots \times\right.$$

$$\times \int\limits_0^\infty d\rho'_{p_2} I^J_{J_1,\ldots,J_{p_1},J'_1,\ldots,J'_{p_2}}(\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho'_1, \ldots, \rho'_{p_2}) \times$$

$$\left.\times \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} a^{(\rho_\alpha,0)}_{J_\alpha,M_\alpha}(\xi)\, \overline{a^{(\rho'_\beta,0)}_{J'_\beta,M_\beta}}(\xi) \right| \leqslant C_1(J^{(0)}, p_1, p_2, r_1, r_2)\, \rho^{J+1-\varepsilon}, \quad (25.79)$$

$$\xi \in [r_1, r_2], \qquad \varepsilon > 0.$$

Тогда в силу (25.79), (П.14), (П.15) получим для достаточно малых $0 < r_1 < r_2 \ll l$:

$$|a^{(\rho,1)}_{J,M}(r)| = \left| \int\limits_{r_1}^{r} G_\rho(r, \xi)\, R(\xi;\ \rho, J, M, 1)\, d\xi \right| \underset{\rho\to\infty}{\leqslant}$$

$$\underset{\rho\to\infty}{\leqslant} C_2(J^{(0)}, p_1, p_2, r_1, r_2)\, \rho^{J-\varepsilon} |r - r_1| \leqslant C_3(J^{(0)}, p_1, p_2, r_1, r_2)\, \rho^{J-\varepsilon},$$

$$\varepsilon > 0. \qquad (25.80)$$

С учетом (25.80) получаем для $r \in [r_1, r_2]$ для достаточно малых $0 < r_1 < r_2 \ll 1$ в силу непрерывности функций $a^{(\rho,1)}_{J,M}(\xi)$, $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$ по ρ:

$$\left| \int\limits_0^\infty a^{(\rho,1)}_{J,M}(r)\, \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho \right| \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{C_4(J^{(0)}, p_1, p_2, r_1, r_2)\, d\rho}{\rho^{1+\varepsilon}} < \infty. \quad (25.81)$$

Аналогично получаем при условиях леммы 25.6 для $r \in [r_1, r_2]$ для достаточно малых $0 < r_1 < r_2 \ll l$

$$\left| \int\limits_0^\infty a^{(\rho,s)}_{J,M}(r)\, \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, d\rho \right| < \infty, \qquad \begin{array}{l} r \in [r_1, r_2], \\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k. \end{array} \quad (25.82)$$

Из условий (25.78) леммы 25.6 (означающих суммирование по конечному числу значений J и M в правой части (25.77) для $s = 0, 1, 2, \ldots, p$, $p \leqslant k - 1$) вытекает, что и для $s = p + 1$, $p + 2$, ..., k суммирование по J и M в правой части (25.77) будет проводиться лишь по конечному числу членов; последнее следствие легко выводится из свойств $3j$ — символов Вигнера [39, 279, 211] и формул (25. 32), (25.59).

Последнее следствие вместе с (25.81), (25.82) завершает доказательство леммы 25.6.

Замечание 25.4. Для выполнения условий леммы 25.6 достаточно выбрать такие предельные условия (25.62), (25.63), для которых существуют интегралы под знаком суммирования по J и по M

$$\left|\int_0^\infty \alpha_{J,M}^{(\rho)}\Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\,d\rho\right| < \infty,$$

$$\left|\int_0^\infty \beta_{J,M}^{(\rho)}\Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\,d\rho\right| < \infty, \qquad \begin{array}{l} J = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ M = -J,\ -J+1,\ \ldots,\ J \end{array} \tag{25.83}$$

и, кроме того, для которых существует такое целое число $J^{(0)} < \infty$, что справедливо

$$\begin{array}{ll} \alpha_{J,M}^{(\rho)} \equiv 0, & J > J^{(0)}, \\ \beta_{J,M}^{(\rho)} \equiv 0, & J > J^{(0)}. \end{array} \tag{25.84}$$

С помощью теоремы 25.4 и леммы 25.6 устанавливаем следующую теорему.

Теорема 25.5. *Пусть выполняются все условия теоремы* 25.4 *и пусть, кроме того, описанная в теореме* 25.4 *функция* Φ $(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)$ *является непрерывной вместе со своими* k *частными производными по параметру* g *в точке* $g = 0$ *и выполнены условия* (25.83), (25.84) *для предельных условий* (25.62), (25.63).

Тогда эта функция Φ $(r,\ a,\ \theta,\ \varphi;\ g)$ *имеет вид ряда* (25.76), *содержащего суммирование по конечному числу значений* J *и* M, *каждый член этого ряда для* $r \in [r_1,\ r_2]$ *существует во всяком случае при достаточно малых* $0 < r_1 < r_2 \ll l$ (l *— постоянная размерности длины**) *и при этом каждый член этого ряда представляет собой при* $r = \mathrm{const} \in [r_1,\ r_2]$ *функцию из пространства* $\mathcal{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$.

Иными словами, если выполнены условия теоремы 25.5, то описанное в этой теореме решение задачи Коши в общем виде (25.35), (25.36), (25.62), (25.63) с точностью до O (g^{k+1}) представляется в области $(r,\ a,\ \theta,\ \varphi) \in [r_1,\ r_2] \times \Omega_{\underset{(-)}{+}}$ функцией (25.76), которая при $r = \mathrm{const} \in [r_1,\ r_2]$ суммируема с квадратом по мере, сосредоточенной на верхней (либо нижней) поле двуполостного единичного гиперболоида $(a,\ \theta,\ \varphi) \in \Omega_{\underset{(-)}{+}}$.

Замечание 25.5. Результаты, полученные выше, в п. 25.2, относились к получению представления решения задачи Коши в общем виде для квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) внутри светового конуса. Поскольку спектр операторов Казимира собственной группы Лоренца Λ для квазирегулярного представления, связанного с двуполостным гиперболоидом (т. е. внутри светового конуса), чисто непрерывный, то соответствующие разложе-

---

* Можно выбрать $l = m^{-1}$ в силу формулы (П.14) из приложения.

ния решений уравнения (25.35), (25.36) по базисным функциям унитарных неприводимых представлений группы Λ имели вид интегралов Фурье (25.60), (25.76).

Совершенно аналогично можно получить представление решения задачи Коши в общем виде для квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) вне светового конуса. При этом поскольку спектр операторов Казимира группы Λ для квазирегулярного представления, связанного с однополостным гиперболоидом (т. е. вне светового конуса) состоит как из непрерывной, так и дискретной части (см. § 2, п. 11), то соответствующие разложения решений уравнения (25.35), (25.36), удовлетворяющих условию а) теоремы 25.3, по базисным функциям унитарных неприводимых представлений группы Λ будут иметь вид суммы интеграла Фурье (по функциям $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}\left(a+\frac{i\pi}{2}\right)$, $\rho\in[0,\infty)$ из формулы (2.118)) и ряда Фурье (по функциям $V^{(0,2k)}_{J,0,0}(a)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, из формулы (2.120)).

Замечание 25.6. Полученные выше для решений квазилинейного волнового уравнения (25.35), (25.36) результаты можно перенести на случай задачи Коши в общем виде для системы лоренц-ковариантных квазилинейных уравнений поля вида (23.7) в пространстве Минковского (в котором $\Delta_{(2)}=\Box$):

$$\begin{gathered}\Box\Phi+A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+B_1\Phi+F_1(\Phi,\Psi,\ldots,\Sigma)=0,\\ \Box\Psi+A_2\frac{\partial\Psi}{\partial x}+B_2\Psi+F_2(\Phi,\Psi,\ldots,\Sigma)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Box\Sigma+A_n\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+B_n\Sigma+F_n(\Phi,\Psi,\ldots,\Sigma)=0,\end{gathered}\tag{25.85}$$

где каждое из уравнений (25.85) имеет определенную тензорную или спинорную структуру, Φ, Ψ, ..., Σ — искомые функции (полевые функции) аргумента $(x^0, \vec{x})\in R^4$, преобразующиеся как тензоры или спиноры заданных рангов при произвольных преобразованиях собственной группы Лоренца.

§ 26. Операторные нелинейные уравнения поля. Проблема квантования на криволинейной гиперповерхности формальных решений операторных уравнений нелинейной теории поля

В предыдущем параграфе были рассмотрены уравнения классической нелинейной теории поля вида

$$\begin{gathered}(\Box+\mu^2)\hat{\psi}(x^0,\vec{x})=gf(g,\hat{\psi}(x^0,\vec{x}),\bar{\hat{\psi}}(x^0,\vec{x})),\\ x^0\in R^1,\ \vec{x}\in R^3,\ g=\bar{g},\ \mu^2>0,\end{gathered}\tag{26.1}$$

а $f(g, z, \bar{z})$ — аналитическая функция переменного g в некоторой комплексной окрестности $G = (g \| |g| < g_0)$ точки $g = 0$ с полиномиальными по z и $\bar{z}$ коэффициентами в разложении в ряд по g:

$$f(g, z, \bar{z}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g^s}{s!} \sum_{p_1=1}^{N_s} \sum_{p_2=1}^{N_s} d_{s,p_1,p_2} z^{p_1} |\bar{z}|^{p_2}, \tag{26.2}$$

причем

$$\max_{\substack{0 \leqslant s < \infty \\ 0 \leqslant p_1 \leqslant N_s \\ 1 \leqslant p_2 \leqslant N_s}} |d_{s,p_1,p_2}| = d_0 < \infty, \quad \max_{0 \leqslant s < \infty} N_s = N < \infty.$$

С помощью разложений по базисным функциям унитарного представления собственной группы Лоренца в § 25 были построены решения нелинейного уравнения (26.1) в виде асимптотических рядов по параметру g.

С точки зрения проблем квантовой теории поля, указанных в § 20, представляет большой интерес построение решений операторных нелинейных уравнений скалярного самодействующего поля вида (26.1), в которых $\hat{\varphi}(x^0, \vec{x})$ — оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Особенный интерес здесь представляет исследование возможности подчинить решение таких нелинейных операторных уравнений каноническим перестановочным соотношениям на криволинейной гиперповерхности.

Мы пока не затрагиваем вопросов, связанных с построением физического пространства состояний $\mathcal{H}$ и унитарного представления группы Пуанкаре.

Для того чтобы записать указанные перестановочные соотношения явно, необходимо от прямоугольных декартовых координат пространства Минковского $(x^0, \vec{x})$ перейти к криволинейным координатам, связанным с такой гиперповерхностью.

Пусть уравнение семейства гиперповерхностей в пространственно-временном многообразии $(x^0, \vec{x}) \in R^4$ имеет вид

$$\tau(x^0, \vec{x}) = C. \tag{26.3}$$

На фиксированной гиперповерхности $\tau = C = \mathrm{const}$ можно выбрать криволинейную трехмерную систему координат η^1, η^2, η^3.

Теперь всякую точку пространственно-временного многообразия можно характеризовать либо прямоугольными декартовыми координатами x^0, x^1, x^2, x^3, либо криволинейными координатами

$$\tau = \tau(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \eta^\alpha = \eta^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

либо, если

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^0} \neq 0, \quad \vec{x} = \mathrm{const} \in D \subset R^3,$$

то характеризовать точку для $\vec{x} \in D$ координатами

$$\tau, \; x^1, \; x^2, \; x^3.$$

(В последнем случае, выбирая в качестве семейства гиперповерхностей семейство гиперплоскостей с постоянным значением координаты x^0, приходим к прежним прямоугольным декартовым координатам x^i, $i = 0, 1, 2, 3$.)

Канонические перестановочные соотношения на криволинейной поверхности, выраженные в координатах τ, x^1, x^2, x^3, запишутся в виде $[\hat{\psi}(x^0, \vec{x}) = \hat{\psi}(x^0(\tau, \vec{x}), \vec{x}) \equiv \Psi(\tau, \vec{x})]$:

$$\left[\frac{\partial\Psi(\tau, \vec{x})}{\partial\tau},\ \Psi^{+}(\tau', \vec{x}')\right]_{\tau=\tau'} = i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,f(\vec{x}), \tag{26.4}$$

$$[\Psi(\tau, \vec{x}),\ \Psi^{+}(\tau', \vec{x}')]_{\tau=\tau'} = 0, \tag{26.5}$$

где Ψ^{+} означает оператор, эрмитовски сопряженный с оператором Ψ, а $f(\vec{x})$ — нормировочная функция, вид которой зависит от конкретного выбора семейства гиперповерхностей (26.3).

Отметим, что формальные решения нелинейных операторных уравнений поля исследовались для специальных классов уравнений в работах Р. Рончка [274, 275, 276], а проблема квантования на криволинейных поверхностях изучалась П. А. М. Дираком [63].

Без ограничения общности ограничимся ниже рассмотрением операторного уравнения (26.1) с правой частью вида

$$f(g, \hat{\psi}, \hat{\psi}^{+}) = -\hat{\psi}^{+}\hat{\psi}\hat{\psi}. \tag{26.6}$$

26.1. Формальное решение операторного нелинейного уравнения (26.7) внутри светового конуса. Операторное уравнение (26.1) с правой частью вида (26.6) перепишем в такой форме:

$$\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial x^{\alpha})^2} + \mu^2\right]\hat{\psi}(x^0, \vec{x}) =$$
$$= -g\hat{\psi}^{+}(x^0, \vec{x})\,\hat{\psi}(x^0, \vec{x})\,\hat{\psi}(x^0, \vec{x}). \tag{26.7}$$

Для точек $(x^0, \vec{x})$, лежащих внутри верхней полы светового конуса

$$(x^0, \vec{x}) \in \Gamma^{+}(0) = (x^0, \vec{x}\,\|\,x^{02} - \vec{x}^2 > 0,\ x^0 > 0),$$

перейдем к сферическим координатам на гиперболоиде

$$\begin{aligned} x^0 &= r\,\mathrm{ch}\,a, \\ x^3 &= r\,\mathrm{sh}\,a\cos\theta, \\ x^2 &= r\,\mathrm{sh}\,a\sin\theta\sin\varphi, \\ x^1 &= r\,\mathrm{sh}\,a\sin\theta\cos\varphi, \end{aligned} \tag{26.8}$$

$$0 \leqslant r < \infty;\quad 0 \leqslant a < \infty;\quad 0 \leqslant \theta < \pi;\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

В этой области в новых переменных уравнение (26.7) принимает вид

$$\left(-\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Box_{a,\theta,\varphi}-\mu^2\right)\psi(r,a,\theta,\varphi)=$$

$$=g\psi^{+}(r,a,\theta,\varphi)\psi(r,a,\theta,\varphi)\psi(r,a,\theta,\varphi); \qquad (26.9)$$

$$\hat{\psi}(x^0,\vec{x})\equiv\psi(r,a,\theta,\varphi),$$

$$\Box_0\equiv\Box_{a,\theta,\varphi}\equiv\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{sh}^2 a\frac{\partial}{\partial a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (26.10)$$

Будем искать решение уравнения (26.9) в области

$$(r,a,\theta,\varphi)\in[r_1,r_2]\times[0,\infty)\times[0,\pi)\times[0,2\pi), \qquad (26.11)$$

$$g\in[-g_1,g_1],\quad g_1<g_0.$$

Здесь нам понадобятся некоторые результаты, установленные в § 25 относительно свойств разложений по базисным функциям унитарного представления собственной группы Лоренца. Эти результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Предложение 26.1.

1. Всякая скалярная функция $\psi(r, a, \theta, \varphi)$, суммируемая с квадратом по мере, сосредоточенной на верхней поле гиперболоида $x^{0^2}-\vec{x}^2=r^2=\mathrm{const}>0$, допускает (притом единственное) представление

$$\psi(r,a,\theta,\varphi)=\sum_{J,M}\int_0^\infty a^{(\rho)}_{JM}(r)\,\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)\,d\rho \qquad (26.12)$$

в виде разложения по базисным функциям унитарного представления собственной группы Лоренца

$$\{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)\}, \qquad (26.13)$$

для которых выполняется условие ортогональности вида

$$\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\overline{Y_{JM}(\theta,\varphi)}\,Y_{J'M'}(\theta,\varphi)\,d\varphi=\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \qquad (26.14)$$

$$\int_0^\infty\overline{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)}\,\Phi^{(\rho',0)}_{J,0,0}(a)\,\mathrm{sh}^2 a\,da=N^{(\rho,0)}_{J,0}\,\delta(\rho-\rho'), \qquad (26.15)$$

где $Y_{JM}(\theta,\varphi)$ — обычные сферические функции, образующие базис унитарного неприводимого представления группы вращений SO(3) веса J на единичной сфере трехмерного пространства, функции $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$ определяются по формулам (П. 2) из приложения, а нормировочный множитель $N^{(\rho,0)}_{J0}$ дается формулой (П. 4) из приложения.

2. Функции (26.13) являются собственными функциями угловой части оператора Даламбера $\Box_{a,\theta,\varphi}$ внутри верхней полы светового конуса:

$$\Box_{a,\theta,\varphi}\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)=-\left(1+\frac{\rho^2}{4}\right)\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi). \qquad (26.16)$$

3. В силу соотношений ортогональности (26.14), (26.15) коэффициенты разложения (26.12) скалярной функции $\psi(r, a, \theta, \varphi)$, квадратично интегрируемой по мере, сосредоточенной на верхней поле гиперболоида $x^{0^2}-\vec{x}^2=r^2=\mathrm{const}>0$, вычисляются однозначно по формуле:

$$a^{(\rho)}_{JM}(r)=[N^{(\rho,0)}_{J,0}]^{-1}\int\limits_0^\infty da\,\psi(r, a, \theta, \varphi)\,\overline{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)}\times$$

$$\times\overline{Y_{JM}(\theta,\varphi)}\,\mathrm{sh}^2 a\int\limits_0^\pi d\theta\sin\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi. \qquad (26.17)$$

4. Произведение любого конечного числа функций

$$\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)\quad\text{и}\quad\overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J',0,0}(a)}\,\overline{Y_{J'M'}(\theta,\varphi)}$$

является функцией, квадратично интегрируемой по мере, сосредоточенной на верхней поле гиперболоида $x^{0^2}-\vec{x}^2=r^2=\mathrm{const}>0$; поэтому, в силу п. 1, справедливо (единственное) представление вида *

$$\prod_{\alpha=1}^{n}\prod_{\beta=1}^{m}\Phi^{(\rho_\alpha,0)}_{J_\alpha,0,0}(a)\,Y_{J_\alpha M_\alpha}(\theta,\varphi)\,\overline{\Phi^{(\rho'_\beta,0)}_{J'_\beta,0,0}(a)}\,\overline{Y_{J'_\beta M'_\beta}(\theta,\varphi)}=$$

$$=\sum_{J,M}\int\limits_0^\infty I^{\rho;\rho_1,\ldots,\rho_n;\rho'_1,\ldots,\rho'_m}_{J;J_1,\ldots,J_n;J'_1,\ldots,J'_m}\,C^{JM}_{J_1M_1,\ldots,J_nM_n;J'_1M'_1,\ldots,J'_mM'_m}\times$$

$$\times\frac{1}{N^{(\rho,0)}_{J0}}\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)\,d\rho \qquad (26.18)$$

с коэффициентами, вычисляемыми однозначно по формулам (26.17).

Будем искать формальное решение операторного нелинейного уравнения (26.7) в области (26.8), (26.11) для произвольных, но достаточно малых $g\in[-g_1, g_1]$ в виде разложения:

$$\psi(r, a, \theta, \varphi; g)\equiv\psi(r, a, \theta, \varphi)=$$

$$=\sum_{l=0}^\infty g^l\sum_{J,M}\int\limits_0^\infty\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(\alpha)\,Y_{JM}(\theta,\varphi)\,a^{(\rho,l)}_{JM}(r), \qquad (26.19)$$

где $a^{(\rho,l)}_{JM}(r)$ — искомые операторные коэффициенты, зависящие от r как от параметра.

---

* В настоящем параграфе через $I^{\rho;\,\rho_1,\ldots,\rho_n;\,\rho'_1,\ldots,\rho'_m}_{J;\,J_1,\ldots,J_n;\,J'_1,\ldots,J'_m}$ обозначена правая часть выражения (25.58).

Подставим выражение (26.19) в левую и правую части нелинейного операторного уравнения (26.7), воспользуемся сформулированным выше предложением 26.1 и приравняем формально коэффициенты одинакового порядка малости по g. В результате получим последовательность уравнений

$$\left[-\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{\rho^2}{4}\right)-\mu^2\right]a_{JM}^{(\rho,0)}(r)=0, \qquad (26.20)$$

$$\left[-\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\left(1+\frac{\rho^2}{4}\right)-\mu^2\right]a_{JM}^{(\rho,k)}(r)=$$

$$=\sum_{J_1M_1}\sum_{J_2M_2}\sum_{J_3M_3}I_{J;J_1,J_2,J_3}^{\rho;\rho_1,\rho_2;\rho_3}C_{J_1M_1;J_2M_2;J_3M_3}^{JM}\frac{1}{N_{J0}^{(\rho,0)}}\int\limits_0^\infty d\rho_1\int\limits_0^\infty d\rho_2\int\limits_0^\infty d\rho_3\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{k-1}\sum_{k_2=0}^{k-1}a_{J_1M_1}^{(\rho_1,k_1)\dagger}(r)\,a_{J_2M_2}^{(\rho_2,k_2)}(r)\,a_{J_3M_3}^{(\rho_3,k-1-k_1-k_2)}(r) \qquad (26.21)$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Общее решение операторного уравнения (26.20) имеет вид

$$a_{JM}^{(\rho,0)}(r)=A_{JM,\rho}^{(0)}\frac{1}{r}J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)+B_{JM,\rho}^{(0)}\frac{1}{r}J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r), \qquad (26.22)$$

где $A_{JM,\rho}^{(0)}$, $B_{JM,\rho}^{(0)}$ — пока произвольные операторы, а $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν.

С учетом (26.22) общее решение уравнения (26.21) с $k=1$ в области $r>r_1$ запишется в виде

$$a_{JM}^{(\rho,1)}(r)=A_{JM,\rho}^{(1)}\frac{1}{r}J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)+B_{JM,\rho}^{(1)}\frac{1}{r}J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)+$$

$$+\int\limits_{r_1}^{\infty}G_\rho^{\mathrm{ret}}(r,\ \xi)\,R_{JM}^{(\rho,1)}(\xi)\,d\xi, \qquad (26.23)$$

где

$$R_{JM}^{(\rho,1)}(\xi)\equiv\sum_{J_1M_1}\sum_{J_2M_2}\sum_{J_3M_3}I_{J;J_1,J_2,J_3}^{\rho;\rho_1,\rho_2,\rho_3}C_{J_1M_1,J_2M_2,J_3M_3}^{JM}\frac{1}{N_{J,0}^{(\rho,0)}}\int\limits_0^\infty d\rho_1\int\limits_0^\infty d\rho_2\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty d\rho_3 a_{J_1M_1}^{(\rho_1,0)\dagger}(\xi)\,a_{J_2M_2}^{(\rho_2 0)}(\xi)\,a_{J_3M_3}^{(\rho_3,0)}(\xi), \qquad (26.24)$$

$A_{JM,\rho}^{(1)}$, $B_{JM,\rho}^{(1)}$ — операторы, оставляемые пока произвольными ($a_{J_\alpha M_\alpha}^{(\rho_\alpha,0)}(\xi)$ дается формулой (26.22), а $G_\rho^{\mathrm{ret}}(r,\ \xi)$ — запаздывающая функция Грина однородного уравнения (26.20), имеющая при $r\gg\xi$ вид (25.74)).

Общее решение операторного уравнения (26.21) имеет вид

$$a_{JM}^{(\rho,k)}(r)=A_{JM,\rho}^{(k)}\frac{1}{r}J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)+B_{JM,\rho}^{(k)}\frac{1}{r}J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)+$$

$$+\int\limits_{r_1}^{\infty}G_\rho^{\mathrm{ret}}(r,\ \xi)\,R_{JM}^{(\rho,k)}(\xi)\,d\xi,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots, \qquad (26.25)$$

где $A^{(k)}_{JM,\rho}$, $B^{(k)}_{JM,\rho}$ — пока произвольные операторы, а $R^{(\rho,k')}_{JM}(r)$ означает правую часть уравнения (26.21) для фиксированного значения индекса $k = k'$ после подстановки в нее соотношений (26.25) с $k = 1, 2, \ldots, k'-1$.

Результат сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 26.1. Нелинейному операторному уравнению (26.7) *с произвольным, но достаточно малым* $g \in [-g_1, g_1]$ *удовлетворяет формальное решение*

$$\psi(r, a, \theta, \varphi; g) \equiv \psi(r, a, \theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} g^l \sum_{J,M} \int_0^{\infty} \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, Y_{JM}(\theta, \varphi)\, a^{(\rho,l)}_{JM}(r), \qquad (26.19)$$

где $a^{(\rho,l)}_{JM}(r)$ — *операторные функции, определяемые рекуррентными формулами* (26.22), (26.25), *в которых* $A^{(k)}_{JM,\rho}$, $B^{(k)}_{JM,\rho}$ — *произвольные операторы, а* $R^{(\rho,k')}_{JM}(r)$ *означает правую часть уравнения* (26.21) *для фиксированного значения индекса* $k = k'$ *после подстановки в нее соотношений* (26.25) *с* $k = 1, 2, \ldots, k'-1$.

Оставшиеся произвольными операторы $A^{(k)}_{JM,\rho}$, $B^{(k)}_{JM,\rho}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, s$, из формул (26.23), (26.25) попытаемся ниже подчинить требованию, чтобы построенное формальное решение (26.19), (26.25) для произвольных, но достаточно малых $g \in [-g_1, g_1]$ удовлетворяло каноническим перестановочным соотношениям (26.4), (26.5) на криволинейных гиперповерхностях конического вида

$$a = \text{const} \in [0, \infty),$$

где a — гиперболический угол поворота, фигурирующий в формулах (26.8). Последняя задача представляет значительный методический интерес.

26.2. Канонические перестановочные соотношения для формального решения операторного уравнения (26.7) с $g = 0$. Рассмотрим частный случай: $g = 0$. Формальное решение (26.19), (26.25) операторного уравнения (26.7) имеет вид

$$\psi(r, a, \theta, \varphi) = \sum_{J,M} \int_0^{\infty} \left[A^{(0)}_{JM,\rho} \frac{1}{r} J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r) + \right.$$

$$\left. + B^{(0)}_{JM,\rho} \frac{1}{r} J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r) \right] \Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)\, Y_{JM}(\theta, \varphi)\, d\rho, \qquad (26.26)$$

где $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ — операторы.

Потребуем, чтобы операторное выражение (26.26) удовлетворяло каноническим перестановочным соотношениям (26.4), (26.5) на криволинейной гиперповерхности конического вида:

$$\left[\frac{\partial \psi(r, a, \theta, \varphi)}{\partial a},\ \psi^{+}(r', a', \theta', \varphi') \right]_{a=a'} = i\delta(\vec{x} - \vec{x}')\, f(r, a), \qquad (26.27)$$

$$[\psi(r, a, \theta, \varphi),\ \psi^{+}(r', a', \theta', \varphi')]_{a=a'} = 0. \qquad (26.28)$$

Для того чтобы представить правую часть соотношения (26.27) в виде разложения по сферическим гармоникам $Y_{LM}(\theta, \varphi)$, воспользуемся известным соотношением вида

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \sum_{L,M} h_L(qx)\,\overline{Y_{LM}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right)}\,Y_{LM}\left(\frac{\vec{x}}{x}\right), \tag{26.29}$$

где функция

$$h_L(qx) = 2\pi^{3/2} i^L \frac{J_{L+1/2}(qx)}{\sqrt{qx}},$$

$$q \equiv |\vec{q}|, \quad x \equiv |\vec{x}|$$

обладает легко проверяемым свойством

$$\int_0^\infty q^2 dq h_L(qx)\,\overline{h_L(qx')} = \frac{(2\pi)^3}{x^2}\,\delta(x - x'). \tag{26.30}$$

С помощью соотношений (26.29), (26.30) с учетом соотношения ортогональности сферических функций (26.14) получаем следующее выражение:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}')}\,d\vec{q} =$$

$$= \sum_{L,M} Y_{LM}(\theta_{\vec{x}}, \varphi_{\vec{x}})\,\overline{Y_{LM}(\theta_{\vec{x}'}, \varphi_{\vec{x}'})}\,\frac{1}{r^2 \operatorname{sh}^3 a}\,\delta(r - r'). \tag{26.31}$$

Подставляя выражение (26.26) в левую, а выражение (26.31) в правую части перестановочного соотношения (26.27) с учетом того, что это перестановочное соотношение должно выполняться при произвольных $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ и $\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}$, получаем систему соотношений, вытекающих из (26.27) для оператора (26.26):

$$\int_0^\infty d\rho \int_0^\infty d\rho' \frac{1}{rr'} \{[A^{(0)}_{JM,\rho}, A^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')} +$$

$$+ [B^{(0)}_{JM,\rho}, A^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\,J_{\frac{-i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')} +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM,\rho}, B^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{-i\rho'}{2}}(\mu r')} +$$

$$+ [B^{(0)}_{JM,\rho}, B^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\,J_{\frac{-i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{-i\rho'}{2}}(\mu r')}\} \times$$

$$\times \frac{d\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)}{da}\,\overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J',0,0}(a)} = if(r, a)\,\frac{\delta(r - r')}{r^2 \operatorname{sh}^3 a}\,\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{26.32}$$

$$J, J' = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad M = -J,\ -J+1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ J-1,\ J; \quad M' = -J',\ -J'+1,\ \ldots,\ J'-1,\ J'.$$

Соотношениям (26.32) удовлетворяет, в частности, следующая система (более простых) соотношений:

$$
\begin{aligned}
&[A^{(0)}_{JM,\rho},\ \overset{+}{A}{}^{(0)}_{J'M',\rho'}] = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}F_{AA}(\rho,\ \rho',\ J),\\
&[A^{(0)}_{JM,\rho},\ \overset{+}{B}{}^{(0)}_{J'M',\rho'}] = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}F_{AB}(\rho,\ \rho',\ J),\\
&[B^{(0)}_{JM,\rho},\ \overset{+}{A}{}^{(0)}_{J'M',\rho'}] = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\overline{F_{AB}(\rho',\ \rho,\ J)},\\
&[B^{(0)}_{JM,\rho},\ \overset{+}{B}{}^{(0)}_{J'M',\rho'}] = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}F_{BB}(\rho,\ \rho',\ J)
\end{aligned}
\tag{26.33}
$$

с не зависящими от M, M' числовыми (т. е. не операторными) функциями F_{AA}, F_{AB}, F_{BB}, удовлетворяющими соотношению

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{rr'}\int\limits_0^\infty d\rho\int\limits_0^\infty d\rho'\ \{F_{AA}(\rho,\ \rho',\ L)\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&\qquad +F_{AB}(\rho,\ \rho',\ L)\,J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&\qquad +\overline{F_{AB}(\rho',\ \rho,\ L)}\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{-\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&+F_{BB}(\rho,\rho',\ L)\,J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{-\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\}\ \frac{d\Phi^{(\rho,0)}_{L00}(\alpha)}{d\alpha}\ \overline{\Phi^{(\rho',0)}_{L00}(\alpha)} =\\
&\qquad = if(r,\ \alpha)\,\frac{\delta(r-r')}{r^2\operatorname{sh}^3\alpha}\qquad (L = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).
\end{aligned}
\tag{26.34}
$$

Из второго перестановочного соотношения на криволинейной гиперповерхности конического вида (26.28) для выражения (26.26) с учетом (26.33) получаем следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty d\rho\int\limits_0^\infty d\rho'\ \{F_{AA}(\rho,\ \rho',\ L)\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&\qquad +F_{AB}(\rho,\ \rho',\ L)\,J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&\qquad +\overline{F_{AB}(\rho',\ \rho,\ L)}\,J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{-\frac{i\rho'}{2}}(\mu r')}\,+\\
&+F_{BB}(\rho,\ \rho',\ L)\,J_{-\frac{i\rho}{2}}(\mu r)\,\overline{J_{-\frac{i\rho'}{2}}(\mu r)}\}\ \Phi^{(\rho,0)}_{L00}(\alpha)\,\overline{\Phi^{(\rho',0)}_{L00}(\alpha)} = 0\\
&\qquad\qquad (L = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).
\end{aligned}
\tag{26.35}
$$

Результат сформулируем в виде следующей леммы:

Лемма 26.2. *Для того чтобы формальное решение* (26.26) *операторного уравнения* (26.7) *с* $g \equiv 0$ *удовлетворяло каноническим перестановочным соотношениям* (26.27), (26.28) *на конических гиперповерхностях* $a = \text{const}$, *лежащих внутри верхней полы светового конуса* $\Gamma^{+}(0)$, *достаточно, чтобы операторы* $A^{(0)}_{JM,\rho}$ *и* $B^{(0)}_{JM,\rho}$, *фигурирующие в формуле* (26.26), *удовлетворяли перестановочным соотношениям* (26.33) *с функциями* F_{AA}, F_{AB}, F_{BB}, *зависящими только от* ρ, ρ', L *и удовлетворяющими соотношениям* (26.34), (26.35).

Таким образом, в предложенной постановке вопрос о возможности подчинить решение операторного уравнения (26.7) с $g = 0$ перестановочным соотношениям (26.27), (26.28) свелась к задаче о разрешимости системы двух уравнений (26.34), (26.35) для ядер коммутаторов F_{AA}, F_{AB}, F_{BB} из формул (26.33).

26.3. Канонические перестановочные соотношения для формального решения операторного нелинейного уравнения (26.7) с $g \not\equiv 0$. Для общего случая $g \in [-g_1, g_1]$ формальное решение нелинейного операторного уравнения при достаточно малом $g_1 > 0$ дается леммой 26.1.

Потребуем выполнения коммутационных соотношений

$$\left[\frac{\partial\psi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi)}{\partial a},\ \psi^{+}(r',\ a',\ \theta',\ \varphi')\right]_{a=a'} = i\delta(\vec{x}-\vec{x}')\,f(r,\ a), \tag{26.36}$$

$$[\psi(r,\ a,\ \theta,\ \varphi),\quad \psi^{+}(r',\ a',\ \theta',\ \varphi')]_{a=a'} = 0 \tag{26.37}$$

для этого формального решения при произвольных, но достаточно малых $g \in [-g_1, g_1]$.

Коммутационные соотношения (26.36), (26.37) для построенного в лемме 26.1 формального решения операторного уравнения (26.7) с учетом формулы (26.31) запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sum_{JM}\sum_{J'M'}\int_0^\infty d\rho\int_0^\infty d\rho'\,[H^{(0)}_{JM,\rho,J'M'\rho'}(r,\ r') + \sum_{k=1}^{\infty} g^k H^{(k)}_{JM\rho;J'M'\rho'}(r,\ r')]\times\\ \times\,\frac{d\Phi^{(\rho,0)}_{J00}(a)}{da}\,\overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}}(a)\,Y_{JM}(\theta,\ \varphi)\,\overline{Y_{J'M'}(\theta',\ \varphi')} =\\ = i\sum_{l,m}Y_{lm}(\theta,\ \varphi)\,\overline{Y_{lm}\ (\theta',\ \varphi')}\,\frac{\delta(r-r')}{r^2\,\text{sh}^3\,a}\,f(r,\ a),\end{gathered} \tag{26.38}$$

$$\begin{gathered}\sum_{JM}\sum_{J'M'}\int_0^\infty d\rho\int_0^\infty d\rho'\left[H^{(0)}_{JM\rho,J'M'\rho'}(r,\ r') + \sum_{k=1}^{\infty} g^k H^{(k)}_{JM\rho;J'M'\rho'}(r,\ r')\right]\times\\ \times\,\Phi^{(\rho,0)}_{J00}(a)\,\overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}}(a)\,Y_{JM}(\theta,\ \varphi)\,\overline{Y_{J'M'}\ (\theta',\ \varphi')} = 0,\end{gathered} \tag{26.39}$$

где

$$H^{(0)}_{JM\rho;J'M'\rho'}(r,\ r') \equiv \frac{1}{rr'}\,\{[A^{(0)}_{JM,\rho},\ A^{(0)+}_{J'M',\rho'}]\,\mathcal{G}_\rho(r)\,\overline{\mathcal{G}_{\rho'}(r')} +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM,\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho}(r')} + [B^{(0)}_{JM,\rho},\quad A^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\mathscr{G}_{-\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho'}(r')} +$$

$$+ [B^{(0)}_{JM,\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J'M',\rho'}]\mathscr{G}_{-\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho'}(r')}\},$$

$$\mathscr{G}_{\rho}(r) \equiv J_{\frac{i\rho}{2}}(\mu r); \quad \mathscr{G}_{-\rho}(r) \equiv J_{\frac{-i\rho}{2}}(\mu r);$$

$$H^{(1)}_{JM\rho;J'M'\rho'}(r,\ r') \equiv \frac{1}{rr'}\{[A^{(0)}_{JM,\rho},\ A^{(1)\dagger}_{J'M',\rho'}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho'}(r')} +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM,\rho},\ B^{(1)\dagger}_{J'M'\rho'}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho'}(r')} + [B^{(0)}_{JM\rho},\ A^{(1)\dagger}_{J'M'\rho'}]\mathscr{G}_{-\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho'}(r')} +$$

$$+ [B^{(0)}_{JM\rho},\ B^{(1)\dagger}_{J'M'\rho'}]\mathscr{G}_{-\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho'}(r')}\Big\} + \{(0) \leftrightarrow (1)\} +$$

$$+ \Big\langle \sum_{J_1M_1}\sum_{J_2M_2}\sum_{J_3M_3}\int_{r_1}^{\infty}\frac{d\xi}{r\xi^3}G^{\mathrm{ret}}_{\rho'}(r',\ \xi)\,\overline{I^{\rho',\rho_1,\rho_2,\rho_3}_{J',J_1,J_2,J_3}}\,\overline{C^{J'M'}_{J_1M_1,J_2M_2,J_3M_3}} \times$$

$$\times\ \{[A^{(0}_{JM\rho},\ A^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}A^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}A^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{\rho_2}(\xi)} \times$$

$$\times \mathscr{G}_{\rho_1}(\xi) + [A^{(0)}_{JM\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}A^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}A^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho_3}(\xi)} \times$$

$$\times\overline{\mathscr{G}_{\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{\rho_1}(\xi) + [A^{(0)}_{JM\rho},\ A^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}B^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}A^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{-\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{\rho_1}(\xi) +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM\rho},\ A^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}A^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}B^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{-\rho_1}(\xi) +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}B^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}A^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{-\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{\rho_1}(\xi) +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}A^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}B^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{-\rho_1}(\xi) +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM\rho},\ A^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3}B^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}B^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{-\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{-\rho_1}(\xi) +$$

$$+ [A^{(0)}_{JM\rho},\ B^{(0)\dagger}_{J_3M_3\rho_3},\ B^{(0)\dagger}_{J_2M_2\rho_2}B^{(0)}_{J_1M_1\rho_1}]\mathscr{G}_{\rho}(r)\overline{\mathscr{G}_{-\rho_3}(\xi)}\,\overline{\mathscr{G}_{-\rho_2}(\xi)}\mathscr{G}_{-\rho_1}(\xi)\} +$$

$$+ \{\cdot\}_{(A^{(0)}_{JM\rho}\to B^{(0)}_{JM\rho};\ \mathscr{G}_{\rho}(r)\to\mathscr{G}_{-\rho}(r))}\Big\rangle + \langle\cdot\rangle^{\dagger}_{\substack{r\leftrightarrow r'\\ \rho\leftrightarrow\rho'\\ J\leftrightarrow J'}}.$$

Аналогичное соотношение получаем для $H^{(k)}_{JM\rho;\,J'M'\rho'}$, $(r,\ r')$, $(k = 2, 3, \ldots)$.

Попытаемся потребовать, чтобы коммутационные соотношения (26.38), (26.39) выполнялись для произвольных, но достаточно малых $g \in [-g_1,\ g_1]$, и для произвольных значений $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ и $\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}$. Для этого достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_0^\infty d\rho' H^{(0)}_{JM\rho, J'M'\rho'}(r, r') \dfrac{d\Phi^{(\rho,0)}_{J,00}(a)}{da} \overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}(a)} = \dfrac{i\delta(r - r')}{r^2 sh^3 a} f(r, a), \\ \int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_0^\infty d\rho' H^{(0)}_{JM\rho, J'M'\rho'}(r, r') \Phi^{(\rho,0)}_{J00}(a) \overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}(a)} = 0 \end{cases}$$

и (26.40)

$$\int\limits_0^\infty d\rho \int\limits_0^\infty d\rho' H^{(k)}_{JM\rho, J'M'\rho'}(r, r') \frac{d\Phi^{(\rho,0)}_{J00}(a)}{da} \overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}(a)} = 0,$$

$$\int\limits_0^\infty d\rho \int d\rho' H^{(k)}_{JM\rho, J'M'\rho'}(r, r') \Phi^{(\rho,0)}_{J00}(a) \overline{\Phi^{(\rho',0)}_{J'00}(a)} = 0 \tag{26.41}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Результат сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 26.3. *Для того чтобы формальное решение* (26.19), (26.25) *операторного нелинейного уравнения* (26.7), *описанное в лемме* 26.1 *для произвольных, но достаточно малых* $g \in [-g_1, g_1]$, *удовлетворяло коническим коммутационным соотношениям* (26.36), (26.37) *на конических гиперповерхностях* $a = \text{const}$, *лежащих внутри верхней полы светового конуса* $\Gamma^+(0)$, *достаточно, чтобы операторы* $A^{(k)}_{JM,\rho}$ *и* $B^{(k)}_{JM,\rho}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *фигурирующие в формуле* (26.25), *удовлетворяли перестановочным соотношениям* (26.33), *в которых функции* F_{AA}, F_{AB}, F_{BB} *удовлетворяют соотношениям* (26.34), (26.35), (26.41).

Таким образом, в предложенной постановке вопрос о возможности подчинить перестановочным соотношениям (26.36), (26.37) формальное решение операторного нелинейного уравнения (26.7), описанное в лемме 26.1, свелся к задаче о разрешимости системы уравнений (26.34), (26.35) для ядер коммутаторов F_{AA}, F_{AB}, F_{BB} из формул (26 33) и разрешимости системы аналогичных соотношений для ядер коммутаторов $[A^{(i)}, A^{(j)}]$, $[A^{(i)}, B^{(j)}]$, $[B^{(i)}, B^{(j)}]$, $i + j = 1, 2, 3, \ldots$, получаемых из (26.41).

Остается открытым вопрос о том, разрешима ли последняя система соотношений.

26.4. Формальное решение операторного нелинейного уравнения вне светового конуса и соответствующие канонические перестановочные соотношения.

Для точек $(x^0, \vec{x})$, лежащих вне светового конуса $(x^{0^2} - \vec{x}^2 < 0)$ в сферических координатах

$$x^0 = r\,\text{sh}\,a,$$
$$x^1 = r\,\text{ch}\,a \sin\theta \cos\varphi,$$
$$x^2 = r\,\text{ch}\,a \sin\theta \sin\varphi, \tag{26.42}$$

$$x^3 = r \operatorname{ch} a \cos \theta,$$

$$r \in [0, \infty), \quad a \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

операторное нелинейное уравнение (26.7) принимает вид (26.9), где угловая часть волнового оператора

$$\Box_0 \equiv \Box_{a,\theta,\varphi} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \\ + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \qquad (26.43)$$

Формальное решение операторного нелинейного уравнения (26.9), (26.43) в области

$$(r, a, \theta, \varphi, g) \in [r_1, r_2] \times [0, \infty) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \times [g_1, g_1] \qquad (26.44)$$

представим в виде разложения по полной системе функций в $\mathcal{L}_2(\Omega_0)$, где Ω_0 — однополостной единичный гиперболоид. Эта полная система функций состоит из функций

$$\sum_{M'=-j_0}^{j_0} \Phi^{(\rho,m)}_{J,M',L}\left(a + \frac{i\pi}{2}\right) T^J_{M,M'}(-\varphi, \theta, \varphi), \qquad (26.45)$$

$$\rho \in [0, \infty), \quad -j_0 \leqslant \frac{m}{2} \leqslant j_0 \equiv \min [J, L],$$

относящихся к непрерывному спектру операторов Казимира собственной группы Лоренца Λ, и функций

$$\sum_{M'=-j_0}^{j_0} V^{(0,2k)}_{J,M',L}(a) T^J_{M,M'}(-\varphi, \theta, \varphi), \qquad (26.46)$$

$$\frac{m}{2} = k \geqslant j_0 \equiv \min [J, L],$$

относящихся к дискретному спектру операторов Казимира группы Λ.

Подставляя соответствующие разложения формального решения операторного нелинейного уравнения (26.9), (26.43) в канонические перестановочные соотношения (26.27), (26.28) на конических гиперповерхностях $a = a'$, получаем систему соотношений для ядер коммутаторов, аналогичную системе соотношений (26.33), (26.34), (26.35), полученных для формальных решений внутри светового конуса. Вопрос о разрешимости полученной системы соотношений для ядер коммутаторов вне светового конуса методом теории возмущений по параметру g сведется к вопросу о разрешимости соответствующей (новой) системы соотношений для ядер коммутаторов, аналогичной системе соотношений (26.33), (26.34), (26.35), (26.41).

Вопрос о разрешимости последней системы соотношений остается открытым.

Отметим, что изучение канонических коммутационных соотношений для решений нелинейных операторных уравнений типа

(26.9) с точки зрения квантовой теории поля представляет вне конуса бо́льший интерес, чем внутри конуса, так как в первом случае коническая гиперповерхность $a=\mathrm{const}$ представляет собой пространственно-подобную гиперповерхность (т. е. нормаль к этой поверхности почти везде * лежит внутри светового конуса),— случай, представляющий физический интерес.

§ 27. Квантовый характер метрики гравитационного поля как следствие квантования физического поля

В этом параграфе, который примыкает идейно к § 19, § 20, п. 20.1 и к § 26, мы обсудим квантовый характер метрики гравитационного поля как следствие процедуры квантования физического поля в общей теории относительности.

Этот вопрос теснейшим образом связан, в свою очередь, с проблемой квантования гравитационного поля.

Детальное изложение математических основ квантования в теории волновых полей выходит за рамки настоящей монографии. Для понимания изложения этого параграфа требуется знание основ квантовой теории поля на уровне первых трех глав монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [18], где можно найти, в частности, строгое изложение общих принципов квантования волновых полей, типов перестановочных соотношений, операции нормального произведения, где описаны представления Шредингера, Гейзенберга и представление взаимодействия и их взаимосвязь, дается понятие матрицы рассеяния (S — матрица), лагранжиана взаимодействия и излагаются методы вычисления вероятности процессов упругого и неупругого рассеяния элементарных частиц, описываемых квантованными полями.

В общей теории относительности в силу уравнений гравитационного поля

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=-\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{ik} \qquad (27.1)$$

метрический тензор $g_{ik}=g_{ik}(x)$ (рассматриваемый как гравитационное поле) оказывается связанным с распределением всех прочих видов материи (описываемых тензором энергии — импульса $T_{ik}=T_{ik}(x)$).

Если же гравитационное поле создается физическим квантовым полем (например, нелинейным скалярным физическим полем с плотностью лагранжиана (20.2), где все произведения операторов понимаются в смысле нормальных произведений: A ... B:, либо электромагнитным и электрон-позитронным полем), то метрика пространства — времени также должна флуктуировать так, чтобы

---

* Т. е. за исключением множества точек, имеющих меру нуль, — в данном случае, за исключением начала координат $x^0=0$, $\vec{x}=0$.

не было противоречия с принципами квантовой физики (например, с соотношением неопределенности), т. е. метрика пространства — времени приобретает квантовый характер. Последнее обстоятельство, очевидно, имеет глубокие физические следствия, обсуждавшиеся неоднократно в специальной литературе по этим вопросам [132, 54, 119]*. Особенно значительно квантовый характер метрики должен проявляться на предельно малых пространственно-временных расстояниях.

Ниже мы обсудим некоторые количественные методы учета этих квантовых флуктуаций пространственно-временной метрики. Для определенности будем считать, что квантовые флуктуации метрики возникают из-за скалярного нелинейного физического поля с плотностью лагранжа (20.2) и тензором энергии — импульса (20.1) **

$$T_{ik}(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k} + \left[\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}g^{ls}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^l}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^s} + \sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x)\right]g_{ik}(x). \qquad (27.2)$$

27.1. *Независимое вторичное квантование физического поля и гравитационного поля.* Наиболее распространенный подход к проблеме квантовой метрики восходит к работам С. Гупты [58]. Он основан на формальной теории возмущений по малому параметру $\frac{\gamma}{c^4}$ и состоит в следующем алгоритме.

1. Метрический тензор представляют в виде суммы

$$\mathfrak{g}_{ik} \equiv \sqrt{-g}\, g_{ik} = (g_{ik})_0 - \frac{\gamma}{c^4}h_{ik}, \qquad (27.3)$$

где $(g_{ik})_0$ — метрический тензор пространства Минковского, γ — гравитационная постоянная, c — скорость света в вакууме.

2. В соответствии с (27.3) производят формальное разложение по малому параметру $\frac{\gamma}{c^4}$ тензора энергии — импульса (27.2)

$$T_{ik}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{c^4}\right)^s T_{ik,s}(x) \qquad (27.4)$$

и плотности лагранжиана (20.1)

$$L(x) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) - \frac{1}{2}(g^{ls})_0\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^l}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^s} +$$
$$+ \sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{c^4}\right)^k L_{(k)}(x) \equiv L_0(x) + \sum_{s=3}^{N}\frac{b_s}{s}\varphi^s(x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{c^4}\right)^k L_{(k)}(x) \equiv L_0(x) + L_{\text{int}}(x). \qquad (27.5)$$

---

* См. также «Квантовая гравитация и топология», под ред. Д. Иваненко. «Мир», М., 1973.

** Этот случай без труда может быть обобщен на произвольные системы нелинейных физических полей.

3. Уравнения гравитационного поля (27.1), (27.2) в первом неисчезающем приближении принимают простой вид

$$\Box h_{ik}(x) = 8\pi T_{ik,0}(x), \quad \Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha^2}}. \tag{27.6}$$

4. Производят вторичное квантование в представлении взаимодействия двух взаимодействующих полей: скалярного $\varphi(x)$, имеющего уравнение движения (получаемое из $L_0(x)$)

$$\Box \varphi(x) + \mu^2 \varphi(x) = 0, \tag{27.7}$$

и тензорного $h_{ik}(x)$, имеющего уравнение движения (получаемое из (27.6))

$$\Box h_{ik}(x) = 0. \tag{27.8}$$

Существо процедуры вторичного квантования двух взаимодействующих полей $\varphi(x)$ и $h_{ik}(x)$ состоит в придании этим величинам смысла операторов в пространстве векторов состояний (точнее, смысла операторнозначных обобщенных функций на некотором функциональном пространстве, называемом пространством основных функций), удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = -iD(x-y) \text{ (скалярные частицы)}, \tag{27.9}$$

$$[h_{ik}(x), h_{ln}(x)] = i(\delta_{ik}\delta_{ln} - \delta_{il}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{kl}) D(x-y) \text{ (гравитоны)}, \tag{27.10}$$

где $[A, B] \equiv AB - BA$, а $D(x)$ — перестановочная функция Паули — Йордана [18].

5. Для лагранжиана взаимодействия $L_{\text{int}}(x)$ из формулы (27.5), в котором все произведения операторов φ и h_{ik} понимаются в смысле нормальных произведений: ... :, можно обычными методами S-матрицы и теории возмущений рассчитать вероятности различных процессов рассеяния скалярных частиц и гравитонов друг на друга.

Этот подход, основанный на независимом вторичном квантовании физического поля и гравитационного поля, рассматривается в большом числе работ [58, 101, 142, 259, 260, 267, 119, 213, 191, 6, 86]; расчет конкретных эффектов рассеяния в этом подходе с помощью S-матрицы в представлении взаимодействия можно найти в работах [101, 142, 119].

Мы хотим здесь подчеркнуть, что указанный подход, представляющий несомненный методический интерес, тем не менее не учитывает непосредственно уравнений поля общей теории относительности (27.1),— используется лишь их формальный предел при $\frac{\gamma}{c^4} \to 0$, имеющий вид (27.8). Вся физическая информация, заложенная в высших по $\frac{\gamma}{c^4}$ порядках в уравнениях поля (27.1), при этом не используется.

27.2. Квантовый характер метрики как следствие квантования физического поля и уравнений гравитационного поля. В силу отмеченных трудностей вышеуказанного традиционного подхода к проблеме квантовой метрики мы хотим указать другой подход к этой проблеме, основанный на квантовании только физического поля и учете уравнений гравитационного поля (27.1).

Как и в § 27, п. 1, для определенности будем рассматривать физическое нелинейное скалярное поле $\varphi(x)$ с плотностью лагранжиана (20.1) и тензором энергии — импульса (27.2).

Основная идея предлагаемого подхода основана на том, что гравитационное поле, возникающее в силу уравнений поля (27.1) из-за квантового скалярного физического поля $\varphi(x)$, должно быть с необходимостью квантовым, в соответствии с общими принципами квантовой физики. Действительно, если материя, создающая поле, есть только квантовые скалярные частицы, то следует считать, что эти частицы являются источником гравитационного поля (в силу основных требований общей теории относительности). Если бы создаваемые или гравитационные поля были бы по-настоящему классическими, то, одновременно измеряя все компоненты этих полей, можно было бы определить тем самым и все координаты и скорости этих частиц, что противоречило бы принципу неопределенности Гейзенберга. Следовательно, гравитационное поле, создаваемое квантовыми частицами, должно быть с необходимостью также квантовым.

Этот физический вывод количественно может быть получен из уравнений общей теории относительности, если для «слабого» гравитационного поля воспользоваться теорией возмущений по малому параметру $\frac{\gamma}{c^4}$ в соответствии с таким алгоритмом.

1. Метрический тензор представляем в виде

$$g_{il}(x) = (g_{il})_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \beta^s \, [g_{il}(x)]_s, \tag{27.11}$$

где $\beta \in \left[-\frac{\gamma v_1}{c^4}, \frac{\gamma v_1}{c_4}\right]$, а v_1 — некоторая положительная постоянная размерности тензора энергии — импульса, фигурирующая в § 20, п. 20.1.

2. Разлагаем с помощью (27.11) все величины $g^{il}(x)$, $g \equiv |g_{il}|$, $\sqrt{-g}$, $L(x)$, $T_{il}(x)$ в ряды (20.6) — (20.9), (27.5), (27.4).

3. В качестве независимой величины подвергаем вторичному квантованию в представлении взаимодействия скалярное поле $\varphi(x)$ со свободным лагранжианом $L_0(x)$ из формулы (27.5), т. е. придаем величине $\varphi(x)$ смысл оператора, действующего в пространстве векторов состояния и удовлетворяющего коммутационным соотношениям

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = -iD(x-y).$$

4. Подставляя в левую и правую части уравнений гравитационного поля выражения (27.11), (27.4), в которых все величины $[g_{il}(x)]_s$ понимаем как операторы, а правые части (27.4) понимаем

в смысле нормальных произведений, и, приравнивая члены одинаковых порядков по степеням величины β, получаем систему уравнений (20.10), (20.11), (20.12) для $k=\infty$, причем левые и правые части этих уравнений также понимаем как нормальные произведения соответствующих «операторов-сомножителей».

5. Можно выписать формальные решения системы уравнений (20.10), (20.11), (20.12) для $k=\infty$, последовательно решая линейные неоднородные уравнения и подчиняя решение каждого такого уравнения некоторым предельным условиям, вытекающим из физических принципов.

Так, требуя, чтобы в получающихся формальных решениях указанной системы уравнений содержался именно причинный пропагатор скалярного поля

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ip^0x^0 - i\vec{p}\vec{x}}}{p^{02} - \vec{p}^2 - \mu^2 + i\varepsilon}\, dp^0 d\vec{p},$$

получим, что решение каждого такого уравнения имеет вид свертки причинного пропагатора $D_c(x)$ с правой частью уравнения

$$[g_{il}(x)]_s = \int D_c(x-y) f_{il}^{(s)}(y;\ \varphi)\, dy, \qquad s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \quad (27.12)$$

6. Подставляя теперь найденные решения (27.11), (27.12), записываемые в общей форме как (20.19), (20.20), в правую часть лагранжиана взаимодействия $L_{\text{int}}(x)$ из формулы (27.5), получим, что этот лагранжиан взаимодействия становится существенно нелинейным и нелокальным.

7. Для полученного лагранжиана взаимодействия $L_{\text{int}}(x)$ формальными методами теории возмущения для S-матрицы в представлении взаимодействия можно рассчитать вероятности различных процессов рассеяния скалярных частиц друг на друге.

Общие рамки этой монографии не позволяют войти в детали построения указанных решений уравнений общей теории относительности и обоснования существования таких решений, равно как и развить аппарат расчета конкретных эффектов рассеяния в указанной схеме. Изложению этих трудных и важных вопросов будет посвящено специальное исследование.

Подчеркнем, что указанный подход, в котором квантовый характер пространственно-временной метрики является следствием вторичного квантования физического поля, основан на непосредственном решении (хотя и на уровне формальной теории возмущений) уравнений гравитационного поля

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{ik}$$

и тем самым свободен от главного недостатка традиционного подхода к проблеме квантовой метрики, описанного выше, в § 27, п. 27.1.

Перечислим основные особенности нашего подхода к проблеме квантовой метрики.

а) Учитываются уравнения гравитационного поля.

б) Независимо квантуется лишь физическое поле; при этом метрика становится квантовой в силу уравнений гравитационного поля, т. е. «гравитон» состоит из виртуальных скалярных частиц.

в) «Затравочный» нелинейный лагранжиан взаимодействия

$$L_{\text{З}}(x) \equiv [L(x) - L_0(x)]_{g_{ik}=(g_{ik})_0}$$

становится существенно нелинейным и нелокальным.

г) Даже для физического поля без «затравочного взаимодействия» (т. е. для $L_{\text{З}}(x) \equiv 0$) сечение рассеяния двух скалярных частиц друг на друге отлично от нуля (в силу квантового характера метрики).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция $\Phi^{(\rho,m)}_{J,j,j}$ (a), фигурирующая для $j = m = 0$ в формуле (25.51) и далее, удовлетворяет дифференциальному уравнению [295, 36]

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + 2(j+1)\operatorname{cth} a\frac{d}{da} - \frac{J(J+1) - j(j+1)}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{im\rho}{2}\operatorname{cth} a + \right.$$
$$\left. + (j+1)^2 + \frac{\rho^2 - m^2}{4}\right]\Phi^{(\rho,m)}_{J,j,j}(a) = 0 \qquad (\Pi.1)$$

и имеет вид

$$\Phi^{(\rho,m)}_{J,j,j}(a) = i^{(J-j)}\left(1 - e^{-2a}\right)^{J-j}\exp\left\{-\left(j + 1 - \frac{m}{2} - \frac{i\rho}{2}\right)a\right\} \times$$
$$\times F\left(J + 1 - \frac{i\rho}{2},\ J + 1 - \frac{m}{2},\ 2J + 2;\ \ 1 - e^{-2a}\right). \qquad (\Pi.2)$$

Соотношение ортогональности для функций $\Phi^{(\rho,m)}_{J,\lambda,L}$ (a) записывается следующим образом [36, 303]:

$$\sum_{\lambda=-j_0}^{j_0}\int\limits_0^\infty \overline{\Phi^{(\rho',m')}_{J,\lambda,L}}\ (a)\,\Phi^{(\rho,m)}_{J,\lambda,L}\ (a)\operatorname{sh}^2 a da = N^{(\rho,m)}_{JL}\delta_{mm'}\delta(\rho - \rho'), \qquad (\Pi.3)$$

$$j_0 = \min(J,\ L),\ m = -2j_0,\ -2j_0 + 2,\ \ldots,\ 2j_0.$$

Постоянная нормировки в последней формуле записывается в форме

$$N^{(\rho,m)}_{J,s} = 2\pi\frac{(J-s)!\ [(2J+2)!]^2\left(s + \frac{|m|}{2}\right)!\left(s - \frac{|m|}{2}\right)!}{(J+s)!\left(J + 1 + \frac{|m|}{2}\right)!\left(J - \frac{|m|}{2}\right)!\left(J + 1 - \frac{|m|}{2}\right)!\,2s!} \times$$
$$\times\left|\frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + \frac{|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + J + 1\right)}\right|^2 h_{s,m},\ J \geqslant s, \qquad (\Pi.4)$$

где

$$h_{sm}=\begin{cases}1, & s<\frac{|m|}{2}+1;\\ \prod\limits_{k=\frac{|m|}{2}+1}^{s}\left(\frac{\rho^2}{4}+k^2\right), & s\geqslant\frac{|m|}{2}+1.\end{cases}$$

В частности, отсюда находим

$$N_{J,0}^{(\rho,0)}=\frac{2\pi\,[(2J+2)\,!]^2}{[(J+1)\,!]^2\,J\,!}\left|\frac{1}{\left(\frac{i\rho}{2}+J\right)\left(\frac{i\rho}{2}+J-1\right)\cdots\left(\frac{i\rho}{2}\right)}\right|^2. \qquad (\text{П.5})$$

Нам понадобятся некоторые асимптотические соотношения для $\Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)$. Так, с помощью формулы (14), гл. 2, § 3, из тома I справочника Бейтмена, Эрдейи [11] в принятых там обозначениях

$$F(a,\,b,\,c;\;z)=e^{-i\pi a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(bz)^{-a}\,[1+0\,(\,|bz|^{-1})]+$$

$$+\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{bz}(bz)^{a-c}\,[1+0\,(\,|bz|^{-1})], \qquad (\text{П.6})$$

где z, c, a — постоянные и $-\frac{3\pi}{2}<\arg bz<\frac{\pi}{2}$, получаем для нашего случая при $\rho\to\infty$

$$F\left(J+1-\frac{i\rho}{2},\;J+1,\;2J+2;\quad 1-e^{-2a}\right)=$$

$$=F\left(J+1,\;J+1-\frac{i\rho}{2},\;2J+2;\quad 1-e^{-2a}\right)\to$$

$$\to\frac{\Gamma(2J+2)}{\Gamma(J+1)}\left[\frac{i\rho}{2}(-1+e^{-2a})\right]^{-(J+1)}\left[e^{-i(J+1)\pi}+e^{\left(J+1-\frac{i\rho}{2}\right)(1-e^{-2a})}\right]. \qquad (\text{П.7})$$

Поэтому

$$\Phi_{J,0,0}^{(\rho,0)}(a)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}-i\,(1-e^{-2a})^J e^{\left(-1+\frac{i\rho}{2}\right)a}\frac{(2J+1)\,!}{J!\,2^{J+1}}\times$$

$$\times(-1+e^{-2a})^{-J-1}\rho^{-(J+1)}\left[e^{-i(J+1)\pi}+e^{\left(J+1-\frac{i\rho}{2}\right)(1-e^{-2a})}\right]. \qquad (\text{П.7а})$$

Используя функциональное соотношение для гипергеометрических функций [56]

$$F(\alpha,\,\beta,\,\gamma;\;1-e^{-2a})=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\,\beta,\,1+\alpha+$$

$$+\beta-\gamma;\;e^{-2a})+e^{-2(\gamma-\alpha-\beta)\,a}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}F(\gamma-\alpha,\;\gamma-\beta,$$

$$1-\alpha-\beta+\gamma;\quad e^{-2a}),$$

с учетом соотношения

$$F(\alpha, \beta, \gamma;\ 0) = 1$$

получаем из (П.2) асимптотическое при $a \to \infty$ поведение функции $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$:

$$\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a) \xrightarrow[a\to\infty]{} i^J e^{-a} \frac{(2J+1)!}{J!} \left[\frac{e^{\frac{i\rho a}{2}}}{\left(J + \frac{i\rho}{2}\right)\left(J - 1 + \frac{i\rho}{2}\right) \ldots \frac{i\rho}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{i\rho a}{2}}}{\left(J - \frac{i\rho}{2}\right)\left(J - 1 - \frac{i\rho}{2}\right) \ldots \left(-\frac{i\rho}{2}\right)} \right], \qquad (П.8)$$

и поведение этой функции при $a \to 0$:

$$\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a) \xrightarrow[a\to 0]{} i^J (1 - e^{-2a})^J e^{\left(-1 + \frac{i\rho}{2}\right)a} \left[1 + a\left(J + 1 - \frac{i\rho}{2}\right)\right]. \qquad (П.9)$$

Из выражений (П.8), (П.9) немедленно получаем существование интеграла в правой части формулы (25.58) из § 25 для $p_1 + p_2 \geqslant 2$:

$$| I^J_{J_1, \ldots, J_{p_1}, J'_1, \ldots, J'_{p_2}} (\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho'_1, \ldots, \rho'_{p_2}) | =$$

$$= \left| \int\limits_0^\infty \overline{\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)} \prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} \Phi^{(\rho_\alpha,0)}_{J_\alpha,0,0}(a) \overline{\Phi^{(\rho'_\beta,0)}_{J'_\beta,0,0}(a)} \operatorname{sh}^2 a\, da \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b(\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho'_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J_{p_1}, J'_1, \ldots, J'_{p_2})}{\rho^{J+1}} < \infty.$$

(П.10)

При фиксированных $\rho_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J'_{p_2}$ неотрицательная функция $b\,(\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J'_{p_2})$ ограничена сверху некоторой постоянной $C_1\,(\rho_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J'_{p_2})$, зависящей только от $\rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho'_1, \ldots, \rho'_{p_2}, J, J_1, \ldots, J_{p_1}, J'_1, \ldots, J'_{p_2}$:

$$b(\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho_{p_1}, \rho'_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J_{p_1}, J'_1, \ldots, J'_{p_2}) \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\rho_1, \ldots, \rho'_{p_2};\ J, J_1, \ldots, J'_{p_2}). \qquad (П.11)$$

Однако оценка (П.11) груба, ее можно уточнить, так как функция $b\,(\rho;\ \rho_1, \ldots, \rho'_{p_2}, J, J_1, \ldots, J'_{p_2})$ может убывать при $\rho \to \infty$ как положительная степень от ρ. Так, например, поскольку для $J = 0$ получаем $\Phi^{(\rho,0)}_{0,0,0}(a) = \dfrac{2 \sin \frac{\rho a}{2}}{\rho \operatorname{sh} a}$, то очевидно, что абсолютное значение интеграла

$$| I^{0}_{0,0}(\rho;\ \rho_1,\ \rho_2) | = \frac{8}{\rho} \left| \int\limits_0^\infty \frac{\sin\frac{\rho a}{2} \sin\frac{\rho_1 a}{2} \sin\frac{\rho_2 a}{2}}{\rho_1 \rho_2 \operatorname{sh} a} da \right|$$

убывает при $\rho \to \infty$ сильнее, чем ρ^{-1} из-за быстрых осцилляций подынтегральной функции при $\rho \to \infty$, $\rho_1 = \mathrm{const}$, $\rho_2 = \mathrm{const}$.

Из формулы (П.7а) видно, что и для $J > 0$ функция $\Phi^{(\rho,0)}_{J,0,0}(a)$ содержит множитель $e^{\frac{i\rho a}{2}}$, который приводит к быстрой осцилляции подынтегрального выражения в левой части (П.10) при $\rho \to \infty$; это приводит к тому, что левая часть (П.10) убывает с ростом ρ быстрее, чем ρ^{-J-1}.

В результате уточненная оценка для левой части (П.10) принимает вид

$$| I^{J}_{J_1,\ \dots\ ,J_{p_1},J'_1,\ \dots\ ,J'_{p_2}}(\rho;\ \rho_1,\ \dots,\ \rho_{p_1}, \rho'_1,\ \dots,\ \rho'_{p_2}) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b_1(\rho;\ \rho_1,\ \dots,\ \rho_{p_1}, \rho'_1,\ \dots,\ \rho'_{p_2};\ J,\ J_1,\ \dots\ J_{p_1},\ J'_1,\ \dots,\ J'_{p_2})}{\rho^{J+1+\varepsilon}}, \quad \text{(П.10а)}$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная, а $b_1(\rho;\ \rho_1,\ \dots,\ \rho_{p_1},\ \rho'_1,\ \dots,\ \rho'_{p_2};\ J,\ J_1,\ \dots,\ J_{p_1},\ J'_1,\ \dots,\ J'_{p_2})$ — неотрицательная функция от ρ, ограниченная сверху,

$$\max_{\substack{0 \leqslant J_1 \leqslant J_0 \\ \cdots\cdots \\ 0 \leqslant J'_{p_2} \leqslant J_0}} \ \sup_{\substack{\rho_1 \in [0,\infty) \\ \cdots\cdots \\ \rho'_{p_2} \in [0,\infty) \\ \rho \in [0,\infty)}} b_1(\rho;\ \rho_1,\ \dots\ ,\ \rho_{p_1}, \rho'_1,\ \dots\ ,\ \rho'_{p_2};\ \ J,\ J_1,\ \dots$$

$$\dots\ ,\ J_{p_1},\ J'_1,\ \dots\ ,\ J'_{p_2}) = C_4(J). \quad \text{(П.10б)}$$

Из (П.8), (П.9) получаем аналогично, что функция

$$\prod_{\alpha=1}^{p_1} \prod_{\beta=1}^{p_2} \Phi^{(\rho_\alpha,0)}_{J_\alpha,0,0}(a)\, \overline{\Phi^{(\rho'_\beta,0)}_{J'_\beta,0,0}(a)}\, T^{J_\alpha}_{M_\alpha,0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)\, \overline{T^{J'_\beta}_{M'_\beta,0}(-\varphi,\ \theta,\ \varphi)}$$

$$\text{с}\ \rho_\alpha \geqslant 0;\quad J_\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \dots;\quad M_\alpha = -J_\alpha,\ -J_\alpha + 1,\ \dots\ ,\ J_\alpha;$$

$$\rho'_\beta \geqslant 0;\quad J'_\beta = 0,\ 1,\ 2,\ \dots;\quad M'_\beta = -J'_\beta,\ -J'_\beta + 1,\ \dots\ ,\ J'_\beta$$

принадлежит функциональному пространству $\mathscr{L}_2(\Omega_{\underset{(-)}{+}})$, т. е. эта функция квадратично интегрируема на верхней (нижней) поле единичного гиперболоида $\Omega_{\underset{(-)}{+}}$. Из рекуррентных соотношений для цилиндрических функций [56]

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu-1}(z) \quad \text{(П.12)}$$

для фиксированных $|z| \ll 1$ при $|\nu| \to \infty$ получаем

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) \xrightarrow[|\nu| \to \infty]{} \frac{\nu}{z} J_\nu(z).$$

Отсюда получаем оценку поведения функции $G_\rho(r, \xi)$ из формулы (25.74) из § 25 для больших ρ $(m \equiv \mu)$:

$$G_\rho(r, \xi) = \frac{\xi}{r} [J_{i\rho/2}(\mu r) J_{-i\rho/2}(\mu\xi) - J_{i\rho/2}(\mu\xi) J_{-i\rho/2}(\mu r)] \times$$

$$\times \left[J_{-i\rho/2}(\mu\xi) \frac{d}{d\xi} J_{i\rho/2}(\mu\xi) - J_{i\rho/2}(\mu\xi) \frac{d}{d\xi} J_{-i\rho/2}(\mu\xi)\right]^{-1} \xrightarrow[\rho\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[\rho\to\infty]{} \frac{\xi^2\mu}{ri\rho}\left[\frac{J_{i\rho/2}(\mu r)}{J_{i\rho/2}(\mu\xi)} - \frac{J_{-i\rho/2}(\mu r)}{J_{-i\rho/2}(\mu\xi)}\right], \; 0 < \xi < r \ll \frac{1}{\mu}. \qquad \text{(П.13)}$$

Таким образом, при $r > \xi > 0$

$$|G_\rho^{\mathrm{ret}}(r, \xi)| \underset{\rho\to\infty}{\leqslant} \frac{C_2(r, \xi)}{\rho}, \quad 0 > \xi > r, \; r \ll \frac{1}{\mu}, \qquad \text{(П.14)}$$

где $C_2(r, \xi)$ — положительная константа, зависящая только от r и ξ, ограниченная в области $r \in [r_1, r_2]$, $\xi \in [r_1, r_2]$, $r_1 > 0$:

$$\sup_{\xi\in[r_1,r_2]} \sup_{r\in[r_1,r_2]} |C_2(r, \xi)| = C_3. \qquad \text{(П.15)}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агамалиев А. К., Атакишиев Н. М., Вердиев Й. А. Инвариантное разложение решений релятивистских уравнений.— Ядерная физика, 1969, 9 : 1, 201.

2. Альфаро В., Редже Т. Потенциальное рассеяние. «Мир», М., 1966.

3. Амбарцумян В. А.— Изв. Пулковской обсерватории, 1933, 13: 114, 1.

4. Амбарцумян В. А. Нестационарные объекты во Вселенной и их значение для исследования происхождения и эволюции небесных тел.— В кн.: Проблемы современной космогонии. Под ред. В. А. Амбарцумяна. «Наука», М., 1972, 5.

5. Амбарцумян В. А. К вопросу о динамике открытых скоплений.— Ученые записки ЛГУ. Сер. матем. наук, астрономия, 1938, 22, 4 : 19.

6. Андерсон Дж. Квантование общей теории относительности.— В кн.: Гравитация и относительность. «Мир», М., 1965.

7. Андронов А. А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. «Наука», М., 1966.

8. Атакишиев Н. М., Вердиев Й. А. Инвариантное разложение решений релятивистских уравнений типа Дирака.— Теоретическая и математическая физика, 1970, 4 : 3, 281.

9. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. «Наука», М., 1969.

10. Ахиезер И. А., Боровик А. Е.— ЖЭТФ, 1967, 52 : 2, 508.

11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. «Наука», М., 1963, 1967.

12. Беллман К., Кук Р. Дифференциально-разностные уравнения. ИЛ, М., 1967.

13. Березин В. А., Марков М. А. Оценки константы взаимодействия барионного поля Янга-Ли в свете существования реликтового излучения.— В кн.: Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма).«Наука», М., 1972.

14. Берендс Р. и др. Простые группы и симметрии сильного взаимодействия.— В кн.: Теория групп и элементарные частицы. «Мир», М., 1967.

15. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. «Наука», М., 1970.

16. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. «Наука», М., 1969.

17. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1963.

18. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., 1957.

19. Богородский А. Ф. Всемирное тяготение. «Наукова думка», К., 1971.

20. Богородский А. Ф. Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии. Изд-во Киевского ун-та, К., 1962.

21. Бом Д. Специальная теория относительности. «Наука», М., 1967.

22. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. «Мир», М., 1971.

23. Брагинский В. Б., Панов В. И. Проверка эквивалентности инертной и гравитационной масс.— ЖЭТФ, 1971, 61 : 9, 873.

24. Брагинский В. Б., Руденко В. Н. Релятивистские гравитационные эксперименты.— УФН, 1970, 100 : 3, 395.

25. Брагинский В. Б. Физические гравитационные эксперименты с пробными телами. «Наука», М., 1970.

26. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. «Наука», М., 1972.

27. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», М., 1969.

28. Вайтман А. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. «Наука», М., 1968.

29. Валеев К. Г., Кулеско Н. А. О конечно-параметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— УМЖ, 1968, 20 : 6, 739.

30. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента.— В кн.: Труды Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 2. Изд-во АН УССР, К., 1963, 100.

31. Валеев К. Г. Об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и запаздываниями аргумента.— Изв. АН УССР. ОТН, мех. и машиностр., 1963, 3, 161.

32. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— ПММ, 1960, 24 : 4, 585.

33. Валеев К. Г. Принцип сведения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— В кн.: Материалы Третьей всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1972.

34. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, М., 1962.

35. Вебер Дж. Экспериментальная проверка симметрии гравитационной радиации.—В кн.: Гравитация: проблемы, перспективы (сборник памяти А. З. Петрова). «Наукова думка», К., 1972.

36. Вердиев Й. А., Дадашев Л. А. Матричные элементы унитарного представления группы Лоренца.— Ядерная физика, 1967, 6 : 5, 1094.

37. Вердиев Й. А. Полная система функций на однополостном гиперболоиде.— Ядерная физика, 1969, 10, 6, 1282.

38. Вердиев Й. А. Релятивистски-инвариантное разложение спиральной амплитуды рассеяния.— ЖЭТФ, 1968, 55 : 5, 1773.

39. Вигнер Е. Теория групп. ИЛ, М., 1961.

40. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд.— ЖЭТФ, 1964, 46 : 5, 1793.

41. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. «Наука», М., 1965.

42. Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирж М. К теории четырехмерного момента количества движения.— Ядерная физика, 1965, 1, 163.

43. Винтерниц П., Фрис И.— Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца.— Ядерная физика, 1965, 1, 889.

44. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. «Наукова думка», К., 1967.

45. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. «Наука», М., 1972.

46. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Определение дифференциального уравнения по его спектральной функции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1951, 15, 309.

47. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. «Наука», М., 1971.

48. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.

49. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.

50. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.

51. Гинзбург В. Л. Пульсары (теоретические представления).— УФН, 1971, 103 : 3, 393.

52. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. «Наука», М., 1967.

53. Гисин Б. В. Исследование лагранжиана нелинейного спинорного и скалярного полей.— ЖЭТФ, 1967, 52 : 2, 502.

54. Гравитация и относительность. Под ред. Х. Цзю и В. Гофмана. «Мир», М., 1965.

55. Гравитация: проблемы, перспективы (сборник памяти А. З. Петрова). «Наукова думка», К., 1972.

56 Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.

57. Грановский Л., Пантюшин А. Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат., 1965, 2, 65.

58. Гупта С. Н. Квантование гравитационного поля. Общая теория.— В кн.: Новейшие проблемы гравитации. ИЛ, М., 1961.

59. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. «Наука», М., 1973.

60. Гюрши Ф. Введение в теорию групп.— В кн.: Теория групп и элементарные частицы. «Мир», М., 1967.

61. Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. Атомиздат, М., 1967.

62. Дикке Р. Возможные воздействия на Солнечную систему со стороны φ - волн (если они существуют).— В кн.: Гравитация и относительность. «Мир», М., 1965.

63. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. «Мир», М., 1968.

64. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. ИЛ, М., 1960.

65. Дрелл С., Захариазен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. ИЛ, М., 1962.

66. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. «Наука», М., 1970.

67. Жидков Е. П., Шириков В. П. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.—ЖВМ и МФ, 1964, 4, 804.

68. Зарембо Л. К., Красильников.В. А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах.— УФН, 1970, 102 : 4, 549.

69. Заславский Г. О рассеянии и трансформации нелинейных периодических волн в неоднородной среде.— ЖЭТФ, 1972, 62 : 2, 2129.

70. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. «Наука», М., 1972.

71. Зверкин А. М. и др. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд-во ун-та Дружбы народов, М., 1963, 2, 3.

72. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. «Наука», М., 1967.

73. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. «Наука», М., 1971.

74. Зельдович Я. Б. Рождение элементарных частиц.— В кн.: Будущее науки, 5. «Знание», М., 1972.

75. Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, М., 1962.

76. Йост Р. Общая теория квантовых полей. «Мир», М., 1967.

77. Каган В. Ф. Субпроективные пространства. ГИФМЛ, М., 1961.

78. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны.— УФН, 1971, 103 : 2, 193.

79. Кадышевский В. Г. Квантовая теория поля и импульсное пространство постоянной кривизны.— В кн.: Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма). «Наука», М., 1972.

80. Кадышевский В. Г. К теории квантованного пространства — времени.— ЖЭТФ, 1961, 41 : 6, 1885.

81. Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э. Некоторые направления развития теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд-во ун-та Дружбы народов, М., 1958, 6, 3.

82. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, М., 1959.

83. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— УМН, 1948, 356, 89.

84. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. ИЛ, М., 1949.

85. Картан Э. Геометрия римановых пространств. ОНТИ, М., 1936.

86. Киббл Т. Квантовая теория гравитации.— УФН, 1968, 96 : 3, 497.

87. Киржниц Д. А.— Экстремальные состояния вещества (сверхвысокие давления и температуры).— УФН, 1971, 104 : 3, 489.

88. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. «Наука», М., 1969.

89. Красносельский М. А. Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений.— ДАН СССР, 1950, 73 : 6, 1121.

90. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.

91. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1969.

92. Кручкович Г. И. Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений.— УФН, 1954, 9 : 1.

93. Кручкович Г. И. О движениях в римановых пространствах.— Мат. сб., 1957, 41 (83) : 2.

94. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. «Наукова думка», К., 1968.

95. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», М., 1965.

96. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. «Наука», М., 1963.

97. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. «Наука», М., 1963.

98. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. «Наука», М., 1962.

99. Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. I. «Наука», М., 1969.

100. Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. II. «Наука», М., 1969.

101. Лиас Р.— Труды Института физики и астрономии АН ЭССР, 1957, 5, 26.

102. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. «Мир», М., 1972.

103. Логинов П. П. Описание механики сил уравнениями с запаздывающим аргументом, I. Динамика точки.— ДАН УзССР, 1963, 4, 23.

104. Логинов П. П. Описание механики сил уравнениями с запаздывающим аргументом, II. Динамика системы.— ДАН УзССР, 1964, 3, 11.

105. Логинов П. П. Уравнения динамики в предположении запаздывания действия переменных сил.— Всесоюзная межвузовская конференция по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, 1965, 33.

106. Лучка А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. Изд-во АН УССР, К., 1963.

107. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.

108. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. «Наука», М., 1966.

109. Марков М. А. О возможном космологическом подходе к теории элементарных частиц.— В кн.: Вопросы теории элементарных частиц (Варна, 1968). Препринт ОИЯИ, Р2-4060. Дубна, 1968.

110. Марков М. А. О модели протяженной частицы в общей теории относительности.— В кн.: Материалы II совещания по нелокальным теориям поля (Азау, 1970). Препринт ОИЯИ, 2-5400. Дубна, 1970.

111. Марков М. А. Элементарные частицы максимально больших масс (кварки, максимоны).— ЖЭТФ, 1966, 51 : 3, 878.

112. Мартынюк А. А. Техническая устойчивость в динамике. «Техніка», К., 1973.

113. Мартынюк Д. И. Лекции по теории устойчивости решений систем с последствием. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1970.

114. Материалы II совещания по нелокальным теориям поля (Азау, 1970). Препринт ОИЯИ, 2-5400. Дубна, 1970.

115. Моносов Я. А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. «Наука», М., 1971.

116. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1969.

117. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. «Наукова думка», К., 1971.

118. Митропольский Ю. А., Фодчук В. И. Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием.— УМЖ, 1968, 20 : 6, 791.

119. Мицкевич Н. В. Физические поля в общей теории относительности. «Наука», М., 1969.

120. Мысовских И. П.— Вестник ЛГУ, 1962, 7, 78.

121. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. «Наука», М., 1972.

122. Мышкис А. Д. Об асимптотической оценке решений систем линейных однородных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— УМН, 1960, 15 : 4.

123. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— УМН, 1949, 4 : 5, 99.

124. Мышкис А. Д., Шиманов С. Н., Эльсгольц Л. Э.— В кн.: Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Изд-во АН УССР, К., 1963.

125. Мышкис А. Д., Эльсгольц Л. Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— УМН, 1967, 22 : 2, 21.

126. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.

127. Нейман И. Математические основы квантовой механики. «Наука», М., 1964.

128. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. «Наука», М., 1972.

129. Неймарк Ю. И., Фишман Л. Д. Структура пространства дифференциальных уравнений с последствием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12 : 7.

130. Нелинейная теория распространения волн. «Мир», М., 1970.

131. Нерсесян А. Б. Об одной задаче для дифференциально-функциональных уравнений.— ДАН АрмССР, 1963, 36, 193.

132. Новейшие проблемы гравитации. ИЛ, М., 1961.

133. Новиков И. Д.— В кн.: Будущее науки, 2. «Знание», М., 1968.

134. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. «Наука», М., 1965.

135. Панков П. С. Об асимптотическом представлении решений операторно-дифференциальных уравнений, близких к вырожденным.— Сборник трудов аспирантов и соискателей (физико-математические науки). Изд-во Киргизского ун-та, Фрунзе, 1971, 4, 94.

136. Пенроуз Р. Структура пространства — времени. «Мир», М., 1972.

137 Петриашвили В. И. Распад периодической волны в слабодиспергирующих средах.— ДАН СССР, 1971, 201 : 6, 1307.

138. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. «Наука», М., 1966.

139. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, М., 1961.

140. Петрова Н. М. Об уравнении движения и тензоре материи в общей теории относительности.— ЖЭТФ, 1954, 27, 563.

141. Петухов В. Р. К задаче двух тел классической механики.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, М., 1967, 4, 205.

142. Пийр И.—Труды Института физики и астрономии АН ЭССР, 1957, 5, 41.

143. Писаренко В. Г. Исследование нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений применительно к проблемам динамики в классической и квантовой теории поля, классической и квантовой механике.— Автореферат докторской диссертации. Институт математики АН УССР, К., 1971.

144. Писаренко В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом в квантовой механике.— В кн.: Аналитические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1972, 187.

145. Писаренко В. Г. Периодические решения одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.— В кн.: Аналитические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1972, 175.

146. Писаренко В. Г Построение некоторых приближенных решений квазилинейного n-мерного уравнения Гельмгольца асимптотическими методами.— ДАН УССР. Сер. А, 1971, 6, 514.

147. Писаренко В. Г. Построение некоторых приближенных решений квазилинейных волновых уравнений асимптотическими методами.— ДАН УССР. Сер. А, 1971, 5, 418.

148. Писаренко В. Г. Построение некоторых решений обобщенной задачи Коши для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.—УМЖ, 1971, 23, 4, 555.

149. Писаренко В. Г. Разложение решений квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными в субпроективных пространствах по полным системам функций, связанным с представлениями группы движений.— УМЖ, 1974, 26, 5.

150. Писаренко В. Г. Специальные периодические решения и асимптотические свойства одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента.— В кн.: Математическая физика, 13. «Наукова думка», К., 1973, 93.

151. Писаренко В. Г. Уравнения внешней задачи N тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента в общей теории относительности.— ДАН УССР. Сер. А, 1973, 9, 899.

152. Писаренко В. Г. Уравнения внешней задачи N электрически заряженных тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента в общей теории относительности.— ДАН СССР, 1974, 217.

153. Писаренко В. Г. Свойства кеплеровых круговых орбит как решений уравнений внешней задачи двух тяготеющих тел с учетом отклонения аргумента в общей теории относительности.— ДАН УССР. Сер. А, 1974, 2, 180.

154. Проблемы современной космогонии. Под ред. В. А. Амбарцумяна. «Наука», М., 1972.

155. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, М., 1947.

156. Рабинович М. И. Многоволновые взаимодействия в нелинейных распределенных системах.— В кн.: Математическая физика, 13. «Наукова думка», К., 1973, 124.

157. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. «Наука», М., 1967.

158. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. Гостехиздат, М., 1955.

159. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. «Наука», М., 1969.

160. Романовский П. И. Последовательные приближения для функциональных уравнений. — Труды Московского авиационного института, 1953, 24, 1.

161. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. «Наука», М., 1969.

162. Рябов Ю. А. Асимптотические свойства решений слабонелинейных систем с малым запаздыванием.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, М., 1967, 5, 213.

163. Рябов Ю. А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием во времени.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, М., 1965, 3, 153.

164. Рябов Ю. А. Применение метода малого параметра к исследованию систем автоматического регулирования с запаздыванием.— Автоматика и телемеханика, 1961, 21 : 6, 729.

165. Рябов Ю. А. Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием.— Инж. журнал, 1961, 1 : 2, 3.

166. Сигал И. Е.— В кн.: Труды Международного конгресса математиков. «Наука», М., 1968.

167. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.

168. Скрыпник В. П. Системы с преобразованным аргументом. Краевые задачи и задача Коши.— Математический сборник, 1963, 62, 385.

169. Смородинский Я. А., Хусар М. Унитарные представления группы Лоренца.— В кн.: Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1972, 3, 1, 223.

170. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд-во Ленинградского ун-та, Л., 1950.

171. Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967.

172. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. «Наука», М., 1971.

173. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. «Наука», М., 1965.

174. Станюкович К. П. К вопросу о соотношениях между космологическими и квантовыми константами. Препринт ИТФ-72-3Р, К., 1972.

175. Стаховский Г. М., Успенский А. В. Экспериментальная проверка теории относительности.— УФН, 1965, 86, 3.

176. Стритер Р., Вайтман А. РСТ, спин и статика и все такое. ИЛ, М., 1966.

177. Тамм И. Е., Вологодский В. Б.— Труды ФИАН, 1972, 57, 5.

178. Тамм И. Е.— Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий (Дубна, 1965); «Рос. Int. Conf. on Elem. particle», Kyoto, 1965.

179. Тонелл М. А. Эйнштейновский сборник. «Мир», М., 1970.

180. Торн К. С. Релятивистские теории тяготения.— В кн.: Будущее науки, 5. «Знание», М., 1972.

181. Труды Международного совещания по нелокальной квантовой теории поля (Дубна, 1967). Препринт ОИЯИ Р2-3590. Дубна, 1967.

182. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, М., 1962, т. 1; 1963, т. 2; 1965, т. 3; 1967, т. 4; 1967, т. 5; 1968, т. 6; 1970, т. 7; 1972, т. 8.

183. **Туров И. И.** Об одном классе эквивалентных уравнений.— Математические заметки, 1967, 2 : 6, 657.

184. **Тугов И. И.** О релятивистской задаче двух тел.— Ядерная физика, 1969, 9 : 1, 193.

185. **Уилер Дж.** и др. Теория гравитации и гравитационный коллапс. «Мир», М., 1967.

186. **Уилер Дж.** Сверхплотные звезды и критическое число нуклонов.— В кн.: Гравитация и относительность «Мир», М., 1965.

187 **Уиттекер Б Т** Аналитическая динамика. ОНТИ, М—Л., 1937.

188. **Фаддеев Л. Д.**— В кн.: Тезисы Международной конференции по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968.

189. **Федянин В. К.** Электромагнитная структура ядер и нуклонов. «Высшая школа», М., 1967.

190. **Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндис М.** Фейнмановские лекции по физике. Т 8, 9. «Мир», М., 1966—1967.

191. **Фейнман Р. П.**— Труды Международной конференции по гравитации и теории относительности (Варшава — Яблонна, 1962). Варшава — Париж, 1964.

192 **Фодчук В. И.** Интегральные многообразия для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— УМЖ, 1969, 21 : 5.

193 **Фок В А.** Об интегралах движения центра инерции двух конечных масс в общей теории относительности.— ДАН СССР, 1941, 32, 28.

194. **Фок В. А.** О движении конечных масс в общей теории относительности.— ЖЭТФ, 1939, 9 : 4, 375.

195. **Фок В. А.** Система Коперника и система Птоломея в свете общей теории относительности.— В кн.: Николай Коперник. Изд-во АН СССР, М., 1947.

196. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1961.

197 **Хельгасон С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. «Мир», М., 1964.

198. **Чепурных К. Б.**— Вестник МГУ Сер. 3, физика, астрономия, 1966, 2.

199. **Черкесов Л. В.** Поверхностные и внутренние волны. «Наукова думка», К., 1973.

200. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук. «Мир», М., 1965.

201. **Швебер С.** Введение в релятивистскую квантовую теорию. ИЛ, М., 1963.

202. **Швингер Ю.** Частицы, источники, поля. «Мир», М., 1973.

203. **Шевело В. Н.** О влиянии запаздывания аргумента на колеблемость решений дифференциальных уравнений высшего порядка.— В кн.: Труды Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. «Наукова думка», К., 1970.

204. **Шевело В. Н., Одарич О. Н.** Некоторые вопросы теории осцилляции (неосцилляции) решений дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом.— УМЖ, 1971, 23 : 4, 508.

205. **Шиманов С. Н.** Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, 3 : 3, 456.

206. **Шиманов С. Н.** Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последствием.— СМЖ, 1961, 2 : 3, 467.

207. **Штокало И. З.** Операционное исчисление. «Наукова думка», К., 1972.

208. **Эйнштейн А.** Сущность теории относительности. ИЛ, М., 1955.

209. Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц. «Мир», М., 1969.

210. **Эльсгольц Л. Э.** Некоторые проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, М., 1967, 5: 239.

211. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. «Наука», М., 1971.

212. Anderson D. R.— Society of Indust. and Appl. Math., 1966, 8, 359.

213. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W.— Gravitation. John Wiley and sons, N. Y., 1962, 7.

214. Bianchi L. Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di transformationi sperri, Pisa, 1918

215. Bl̃aż J.— Ann. Polon. Math., 1964, 15, 1.

216. Bottino A., Longoni A., Regge T. Potential Scattering for Complex Energy and Angular Momentum.— Nuovo Cimento, 1962, 23, 954.

217. Boyer R. H., Lindquist R. W. Maximal analitic extention of the Kerr metric.— J. Math. Phys., 1967, 8, 265.

218. Brans C., Dicke R.— Phys. Rev., 1961, 124, 925.

219. Brault J.— Bull. Am. Phys. Soc., 1963, 8, 28.

220. Browder F., Strauss W.— Pacific J. of Math., 1962, 13, 23.

221. Charman W. N. et al. Spaced receiver observations of radio pulses.— Nature, 1970, 228, 346.

222. Davydov A. S., Kislukha N. I. An example of self — localized nonlinear relativistic field.— Preprint ITP — 72 — 127 E, K., 1973.

223. Delburgo R., Salam A. Reggeization in supermultiplet theories.— Preprint ICTP — IC (69) 1, Trieste, 1969.

224. Dicke R. H. Gravitation and the Universe.— Tayne Lectures for Amer. Phil. Soc., Philadelphia, 1969.

225. Dicke R. H., — Scient. Amer., 1961, 205, 84.

226. Dl̃otko T., Kuczma M. Sur une equation différentielle fonctionnelle d‘ argument accelere.— Coll. Math., 1964, 12, 107.

227. Doss S., Nasr S. On the functional equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x), y(x + h)), h > 0$. — Am. J. Math., 1953, 75, 713.

228. Driver R. D. A two — body problem of classical electrodynamics: the one — dimentional case.— Ann. of Phys., 1963, 21, 122.

229. Driver R. D. A «Backwards» two — body problem of classical relativistic electrodynamics.— Phys. Rev., 1969, 178 : 5, 2051.

230. Ehrman H. Iterationsverfahren mit veränderlichen Operatoren.— Arch. Rathion. Mech. and Anal., 1959, 4 : 1,45.

231. Einstein A., Infeld L., Hoffman B. The gravitational equations and th problem of motion, I.— Ann. Math., 1938, 39 : 1, 65.

232. Einstein A., Infeld L. On the motion of particles in general relativity theory.— Canad. J. Math., 1949, 1, 209.

233. Einstein A., Infeld L. The gravitational equations and the problem of motion, II.— Ann. Math., 1940, 41, 455.

234. Etvös R., Pekar D., Fekete E.— Ann. dur Phys., 1922, 68, 11.

235. Feldman G., Matthews P. T. General expantion of a scattering amplitude.— Ann. of Phys., 1969, 55, 506.

236. Finkelstein P., Fronsdal C., Kaus P. Nonlinear spinor field.— Phys. Rev., 1956, 103, 1571.

237. Finkelstein R., Le Levier R., Ruderman M.— Phys Rev., 1951, 83, 326.

238. Fite W. B.— Trans. Am. Math. Soc., 1921, 22.

239. Fokker A. D.— Zeitsr. Phys., 1929, 58, 386.

240. Friedman A. A. Über die Krümmung des Raums.— Zs. f. Phys., 1922, 10, 377.

241. Gardner C. S. et al. Method for solving the Korteweg — de Vries equation.— Phys. Rev. Letts., 1967, 19 : 19, 1095.

242. Hale J. K. Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter.— J. Diff. Equat., 1966, 2 : 1.

243. Hale J. K.— Contrib. Diff. Equat., 1963, 2.

244. Harish — Chandra. Differential operators on a semi-simple Lie algebla.— Amer. J. Math., 1957, 79, 87.

245. Harish — Chandra. Representations of semisimple Lie groups, I, II, III.— Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, 185; 1954, 76, 26; 1954, 76, 234.

246. Helgason S. A duality for symmetric spaces with applications to group representations. Adv. in Math., 1970, 5, 1.

247. Hepp K.— In: High Energy Physics. «Naukova dumka», K., 1972.

248. Hepp K. Theorie de la renormalisation, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1969.

249. Hubble. Monthly Notices of Roy. Soc., 1953, 133, 658.

250. Imanaliev M. I., Pankov P. S. Sur les solutions communes aux equations differentielles operatorelles et differentielles ordinaires. Semaine de discussions sur les equations differentieles et fonctionnelles non lineares. — Centre national de la recherche scientifique, Marseille, 1970.

251. Infeld L., Michalska-Trautman R. The two — body problem and gravitational radiation.— Ann. of Phys., 1969, 55, 561.

252. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. Infinity suppression in gravity modified quantum electrodynamics. Preprint ICTP — IC (70) 131. Trieste, 1970.

253. Jaffe A. Progress in quntum field theory.— In: High Energy Physics. «Naukova dumka», K., 1972.

254. Jordan T., Macfarlane A., Sudershan E. C.— J. Math. Phys., 1969.

255. Jörgens K. Das Anfangwertproblem in Grossen fur eine Klasse nichtlinearen Wallengleichungen.— Math. Zeitschr., 1961, 77, 295.

256. Kay I., Moses H. Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials.— J. Appl. Phys., 1956, 27, 1503.

257. Keller J. B. On solutions of nonlinear wave equation.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1957, 10 : 4, 523.

258. Kerr P. R. Gravitational field of the spanning mass as an example of algebraically special metrics.— Phys. Rev. Letts., 1963, 11, 237.

259. Kimura T.— Progress Theoret. Phys., 1956, 16, 157.

260. Kimura T.— Progress Theoret. Phys., 1956, 16, 555.

261. Laplace P. S.— Mécanique céleste, 4, livre X, Paris, 1805.

262. Lie S., Theorie der Transformationsgruppen, I, II, III, Unter Mitwirkung von F. Engel, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

263. Marcov M. A. An the role of gravitation in the elementary particle theory.— In: Fundamental problems of the elementary particle theory. Preprint ITP, K., 1970.

264. Martin A. Construction of the scattering amplitude from the differential cross — section.— Nuovo Cimento, 1969, 59A, 131.

265. Martin A.— Scattering theory: Unitarity, analiticity and crossing. Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1969.

266. McVitte G.— Astrom. J., 1970, 15, 286.

267. Mitzkewicz N. W.— Ann. der. Phys., 1958, 1, 319.

268. Miura R. M. Korteweg — de Vries equation and generalizations, I, A remarkable explicit nonlinear transformation. — J. of Math. Phys., 1968, 9: 8, 1202.

269. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. Korteweg — de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion.— J. of Math. Phys., 1968, 9 : 8, 1204.

270. Morawetz C. S., Strauss W A.— Decay and scattering of solution of a nonlinear relativistic wave equation.— Comm. Pure and Appl. Math., 1972, 25, 1.

271. Nordström L.— Proc. Amsterdam Acad., 1918, 20, 1238.

272. Pais A., Uhlenbeck G. On field theories with non — localized action.— Phys. Rev., 1950, 79, 145.

273. Pound R. V., Rebka G. A. Jr. Apparent weight of photons.— Phys. Rev. Letts., 1960, 4, 337.

274. Rączka R.— Global solutions of non — linear equations for the sca-

lar quantum field for polinomial and non — polinomial interection. Preprint ICTP — IC (72) 106. Trieste, 1972.

275. Rączka R.— Lettere al Nuovo Cimento, 1972, 3 : 13, 575.

276. Rączka R.— Operator distributions in group representation theory and their applications. Preprint ICTP — IC (69) 54. Trieste, 1969.

277. Reissner H.—Ann. der Phys.,1916, 50, 106

278. Rzewusky J Field theory, part I. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.

279. Sack R A. Generalization of Laplace's expansion to arbitrary poweres and functions in spherical harmonics.— J. of Math Phys., 1964, 5, 252.

280. Salam A On renormalization constants and inter — relation on fundamental forces.—In: Fundamental problems of the elementary particle theory. Preprint, ITP, K., 1970.

281. Schiff L. I.— Phys. Rev., 1951, 84, 1.

282. Schild A., Schlosser J. Electromagnetic two-body problem for particles with spin.— J. Math Phys., 1968, 9 : 8, 913.

283. Schmidt J W Ein Vergleichssatz unter Verwendung höherer Ableitungen.— Zeitschr. Angew. Math. Mech., 1963, 43 : 1/2, 81.

284. Schmidt J W Zur Fehlerabschätzung näherungsweizer Lösungen von Gleichungen in halbgeordneten Roumen.— Arch. Math., 1963, 14 : 2, 130.

285. Schnopper H W., Delvaile J. P. The X-ray Sky.—Sci. Amer., 1972, 227 : 1.

286. Schwarts L. Theorie des distributions. V I, II, Paris, 1950—1951.

287. Seilstad G., Sramek R., Weiler K. Measurement of the detection of 9.602 — GHZ radiation from 3C279 in the Solar gravitational field.— Phys. Rev. Letts., 1970, 24 : 24, 1373.

288. Segal I. Non — linear semi — groups.—Ann. of Math., 1963, 78, 339.

289. Shapiro I. et al.— Fourth test of general relativity· preliminary results.— Phys. Rev Letts., 1968, 20 : 22, 1265.

290. Shapiro I.— Phys. Rev. Letts., 1964, 13, 26.

291. Snyder H.— Phys Rev., 1947, 71, 38.

292. Sobolev S. L. Meth. nouvelle a resoudre le probléme de Cauchy pour les equations linéares hyperb. norm. — Math. Zeitschr., 1936, 1 :43, 39.

293. Staruszkiewicz A.— Acta Phys Polon, 1965, 20, 112.

294. Staruszkiewicz A.— Annalen der Phys., 1970, 25, 362.

295. Ström S. On the matrix elements of a unitary representation of the homogenous Lorentz group. Ark. fys., 1965, 29 : 39, 467.

296. Ström S. A note on the matrix elements of unitary representation of the homogenous Lorentz group. Ark fys., 1965, 33 : 5, 465.

297. Ström S: Matrix elements of the supplementary series of unitary representation of SL (2, C), Ark fys., 1968, 38 : 4, 373.

298. Sugiyama S. Dependence properties of solitions of the retardation and initial values in the theory of difference — differential equation.— Kodai Math. Sem. Rep., 1963, 15, 67.

299. Synge J. L.— Proc. Roy Soc., 1940, A 177, 118.

300. Tetrode H.— Zeitsr Phys., 1922, 10, 317.

301. Toller M. An expantion of the scattering amplitude at vanishing four — momentum transfer using the representations of the Lorentz group.— Nuovo Cimento, 1968, 53 : 3, 171.

302. Toller M. On the group — theoretical approach to complex angular momentum and signature.— Nuovo Cimento, 1968, A54, 295.

303. Verdiev I. A.— Annals of Physics, 1972, 71 : 2.

304. Vermel H.— Gött. Narch., math.— phys. Kl., 1917, 334.

305. Volkov A.— Canad J. Phys., 1971, 49, 1697.

306. Weber J. Anisotropy and polarization in the gravitational radiation experiments.— Phys. Rev. Letts., 1970, 25, 180.

307. Weber J. Evidence for discovery of gravitational radiation.—Phys. Rev. Letts., 1969, 22, 1320.

308. Wheeler J. A., Feynman R.—Rev. Mod. Phys., 1945, 17, 157.

309. Wheeler J. A.— Rev. Mod. Phys., 1962, 34, 873.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВАЛЕРИЙ ГЕОРГИЕВИЧ ПИСАРЕНКО

ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ МНОГИХ ТЕЛ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Печатается по постановлению ученого совета
Института математики АН УССР

Редактор *Н. М. Игнатович*
Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Оформление художника *Б. И. Бродского*
Технический редактор *М. А. Притыкина*
Корректоры *Л. М. Тищенко, Р. С. Коган*

Сдано в набор 20.VIII 1973 г. Подписано к печати 14.V 1974 г. БФ 01383 Зак. № 3—2149. Изд. 130. Тираж 2200 Бумага № 1, формат $60 \times 90^1/_{16}$ Условн. печ. листов 29,0 Учетно-изд листов 32,55. Цена 3 руб. 50 коп

Издательство «Наукова думка». Киев, Репина, 3

Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3.