МАКС ПЛАНК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОБЩАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ИСПРАВЛЕННОЕ ПО ЧЕТВЕРТОМУ
НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Перевод с немецкого
Под редакцией
проф. Н. П. КАСТЕРИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

MAX PLANK

EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK

I

EINFÜHRUNG IN DIE ALLGEMEINE MECHANIK

Vierte Auflage

LEIPZIG S. HIRZEL 1928

ЧИТАТЕЛЬ! Сообщите отзыв об этой книге (ваши замечания о ее недостатках и желательных изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Ильинка, проезд Владимирова, 4, Государственному технико-теоретическому издательству (в секцию организационно-массовой работы).

Редакционная работа проведена *П. Н. Успенским.* Изданне оформлено *С. Л. Дыман.* Корректуру *держал М. К. Саталкин.* Наблюдал за выпуском. *В. П. Петров.* Рукопись сдана в производство 23/III, листы подписаны к печати 17/VI, книга вышла в свет 26/VII—32 г. в количестве 5000 экз. Бумага формата $62\times94^{1}/_{16}$, типографских знаков в книге 629000, печатных листов $12^{1}/_{2}$, заказ № 3504. ГТТИ № 264. Уполномоченный Главлита Б-21312.

5-я тип. «Пролетарское слово» треста «Полиграфкнига». Москва, Каланчевский тупик, дом 3/5.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

И в новом издании характер книги не изменен. В особенности я стремился при выводе какого-либо закона итти не формально кратчайшим путем, а применял наиболее подходящий способ, который по большей части совпадал с историческим развитием науки. Ведь благодаря сжатости какой-нибудь формулы иногда возможно яснее выявить выраженную ею зависимость, чем это имеет место в действительности, — это проистекает от того обстоятельства, что по существу затруднения скрыты в определениях. Но по моему мнению при первоначальном введении в какую-либо науку существенным образом является, чтобы основные определения не выдвигались сразу как нечто окончательно установленное, но чтобы их полезность и необходимость выявлялись только по мере изложения науки при трактовании определенных проблем.

Относительно незначительных сделанных мною исправлений отмечу здесь только, что я употребил для обозначения лагранжевой функции (кинетического потенциала) вместо применявшегося мною до сих пор гельмгольцева обозначения через H более употребительное теперь L, а для гамильтоновой функции—H. Но я не мог решиться обозначать здесь кинетическую энергию, которую до сих пор согласно с Больтцманом я обозначал через L при помощи общеупотребительного T. Эту букву надо сохранить для температуры, которая часто, в особенности в статистической термодинамике появляется в связи с кинетической энергией. Более подходящим знаком для кинетической энергии является K, которое едва ли вызывает какие-либо недоразумения.

Берлин—Грюневальд,
март 1928.

АВТОР

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Новое увеличение числа вышедших в прежнее и недавнее время, частью превосходных, учебников по механике требует некоторых пояснений. В моей продолжительной преподавательской деятельности опыт всегда показывал, что затруднения, с которыми начинающему приходится бороться при первых шагах в области теоретической физики, часто относятся не столько к математической форме, сколько к физическому содержанию излагаемого хода мыслей. Не обращение с уравнениями, а их составление и интерпретирование — вот что более всего затруднительно начинающему; помочь ему в этом отношении и составляет главную цель предлагаемого руководства. Оно предназначается специально для таких новичков в науке, которые обладают уже некоторым математическим образованием: знакомы с элементами аналитической геометрии и с исчислением бесконечно-малых. Особым отличием примененного метода является то, что я поставил себе задачей представить читателю научное здание механики не как нечто окончательно готовое, представляющееся законченным, но как нечто строящееся, шаг за шагом. Мне не хотелось, так сказать, тянуть вперед читателя в определенном проложенном классиками науки направлении. Я предпочитаю служить ему только в решительных поворотных пунктах как проводник своим советом и подчас предостережением, чтобы у него сохранился хотя сколько-нибудь тот особый интерес, который испытывает каждый независимо мыслящий человек при самостоятельном продвижении в новой для него области.

При этом способе трактования предмета проходится тот же путь, который наука совершила при своем развитии в действительности: это ясно каждому, кто, как я, склоняется к убеждению, что история точного знания не уклоняется слишком от его логического построения. Само собой понятно, что это верно только в главном и в целом; ибо довольно часто внешние обстоятельства, в особенности такие, которые коренятся в личной оригинальности пролагающего путь исследователя, приводили к окольным и даже ошибочным путям, проделывать которые все post factum еще раз было бы излишне и даже вредно для поставленной здесь цели. Однако я нисколько не старался для вывода какого-либо положения отыскивать каждый раз кратчайший и наиболее изящный способ, но применял всегда такой, который мне представлялся наиболее подходящим и наиболее прозрачным. Я не стремился представить ни то, как теорема была действительно найдена, ни то, как она всего непосредственнее впоследствии может быть доказана, но как она всего проще могла бы быть найдена; при этом, конечно, нельзя отрицать, что здесь открывается обширное поле для личных усмотрений.

На полноту изложения предмета в каком-либо отношении я и не думаю претендовать ввиду элементарного характера труда, на что указывает уже заглавие; в этом отношении нужно указать на более пространные учебники по механике и на текущую специальную литературу. С другой стороны, однако, часто я пользовался подходящим случаем, чтобы доказанное уже прежде положение вывести еще раз по новому способу. Не существует лучшего средства выявить в правильном освещении особенность проблемы и мощность примененного для ее решения метода, как трактование той же самой задачи различными способами.

Приведенное в конце алфавитное сопоставление всех данных определений и важнейших теорем, надеюсь, облегчит пользование книжкой.

Берлин — Грюневальд,
август 1916.

АВТОР

ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ МЕХАНИКУ

§ 1. Механика есть наука о законах движения материальных тел. Движение есть изменение места с временем. Но в понятии о движении содержится кроме понятий о месте и времени еще понятие о том, что движется, и это последнее может и не быть, вообще говоря, материальным телом. Например, говорят о движении гребня волны по водной поверхности, что, естественно, надо отличать от движения самих частиц воды, или о движении тени по освещенной поверхности, или о движении силовых линий в магнитном поле. Здесь то, что движется, не материя, но некоторое вполне определенное „состояние“. Поэтому для более определенной характеристики движение материальных тел обыкновенно называют также „корпускулярным“ или „конвективным“ движением. Только с этими корпускулярными движениями и имеет дело механика, причем не исключено, что корпускулярное движение, как в вышеупомянутом примере водяной волны, может быть трактовано вместе с тем как движение волновое. Воззрение, что все физические изменения, следовательно, также все виды движений, можно свести к корпускулярным движениям, называют механическим воззрением на природу. Вопрос об его обосновании мы оставим здесь, однако, совершенно открытым.

§ 2. Простейшее материальное тело представляет материальная точка, т. е. тело, все пространственные протяжения которого исчезающе малы по сравнению со всеми протяжениями, которые играют роль при ее движении. Может ли быть принято какое-нибудь определенное материальное тело за точку, — это зависит, таким образом, от рода рассматриваемого движения. Так, землю в ее движении около солнца можно рассматривать как материальную точку, но не при вращении около ее оси, как и вообще всякое тело, вращающееся около проходящей через него оси, по отношению к этому вращению не может быть рассматриваемо как материальная точка.

Конечно, надо отличать материальную точку от геометрической. Последняя вполне характеризуется местом своего нахождения, тогда как первая еще, кроме того,—свойством ее материи: материальные точки надо вообще считать различными не только количественно, но и качественно, ибо нельзя дать наперед общую меру для количества материи. Количественное сравнение можно установить для различных веществ, например для железа и свинца, всегда только по отношению к какому-либо частному свойству.

Всякое материальное тело может быть всегда представлено состоящим из таких малых частей, что каждая из них может быть принята за материальную точку, и соответственно с этим каждое движение тела, как бы оно сложно ни было, может быть сведено к движениям материальных точек, из которых оно состоит. Поэтому мы рассмотрим сначала отдельную материальную точку, разделив всю механику на две части: на механику материальной точки и на механику системы материальных точек.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ГЛАВА I

ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ ЛИНИИ

§ 3. Сначала мы рассмотрим прямолинейное движение материальной точки само по себе, как мы его непосредственно наблюдаем, не задаваясь вопросом о его причинах. (Учение о движении, независимо от причин, его производящих, называется также „кинематикой“ или „форономией“.) Если какая-нибудь точка изменяет свое место с временем, то движение ее определено, если известно ее положение для всякого произвольного момента времени, т. е. если дано положение в зависимости от времени как функция времени. Положение характеризуется геометрической точкой P, а эта последняя — своим расстоянием x от начала O координат, точки пространства, принимаемой за неподвижную (черт. 1). Величину x, абсциссу точки P, мы считаем положительной или отрицательной, смотря по тому, лежит ли P справа или слева от O. Для $x = 0$ P совпадает с O. Траекторией точки P является ось x или ось абсцисс. Направление, в котором x возрастает, мы называем направлением этой оси; оно на черт. 1 обозначено стрелкой. Чтобы можно было выражать расстояние x определенным числом, мы должны ввести какую-нибудь определенную единицу длины; обыкновенно за таковую принимается 1 *см*, сотая доля длины нормального метра, хранящегося в Париже, и который весьма близок к одной десятимиллионной четверти земного меридиана. Тогда величина x есть число сантиметров, которое укладывается на отрезке OP.

Черт. 1.

Совершенно так же, как определенное положение характеризуется геометрической точкой x, всякое определенное время характеризуется моментом времени, т. е. продолжительностью времени t, которое протекало от какого-нибудь принимаемого за начало счета момента времени. Эта продолжительность измеряется при помощи достаточно правильно идущих часов. Временную координату t мы считаем положительной или отрицательной, смотря по тому, позже или раньше лежит рассматриваемый момент, чем начальный момент, для которого $t = 0$. За направление временной оси мы принимаем направление от более ранних к более поздним моментам времени. За единицу времени, как правило, считаем секунду; это есть $^1/_{86400}$ часть средних солнечных суток. Тогда величина t есть число секунд, протекших с момента времени $t = 0$.

Движение материальной точки определено, если дано ее положение как функция времени, т. е. если

$$x = t(f), \tag{1}$$

где предполагается, что функция f действительная, однозначная и непрерывная, ибо материальная точка в каждый момент занимает определенное положение и не перескакивает внезапно с одного места на другое.

Если решить уравнение (1) относительно t:

$$t = \varphi(x),$$

то получим ответ на вопрос, в какой момент точка находится в каком-нибудь определенном месте. Нет необходимости, чтобы функция φ была действительной или однозначной: может произойти, что точка вообще никогда не достигнет какого-нибудь определенного места x или достигает его неоднократно в различные моменты времени, как, например, в случае периодического движения.

§ 4. В качестве примера рассмотрим сначала частный случай, когда функция $f(t)$ линейная, т. е.

$$x = at + b, \tag{2}$$

где a и b — постоянные.

Физическое значение постоянной b просто: она обозначает положение точки для $t = 0$. Значение постоянной a вытекает из следующего рассмотрения. Зададим себе вопрос, как велик путь, пройденный точкой в какой-нибудь промежуток времени $t' - t = \Delta t$. Для него получается величина $x' - x$, если

$$x' = at' + b;$$

следовательно,

$$x' - x = \Delta x = a(t' - t) = a \cdot \Delta t.$$

Для рассматриваемого случая, следовательно, каждый пройденный отрезок Δx пропорционален необходимому для этого времени Δt, или: в равные времена проходятся равные отрезки. Постоянное отношение пройденного отрезка к необходимому для этого времени и представляет величину a:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = a. \tag{3}$$

Это отношение называется *скоростью* движущейся точки. Она представляет путь, пройденный за единицу времени, положительный или отрицательный, смотря по тому, возрастает ли x с увеличением t или убывает. Рассмотренное здесь движение (2), при котором скорость постоянна, называется поэтому „равномерным“ движением.

Предположим теперь общий случай произвольного движения: $x = f(t)$ и зададим опять себе вопрос, какой отрезок пройдет движущаяся точка в какой-нибудь промежуток времени $t' - t = \Delta t$. Для него, аналогично, получится $x' - x$, если $x' = f(t')$, т. е.

$$x' - x = \Delta x = f(t') - f(t) = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Отсюда снова находим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Это отношение пройденного отрезка к необходимому для этого времени называется **средней скоростью** движущейся точки для промежутка времени от t до $t + \Delta t$. Средняя скорость зависит, таким образом, как от t, так и от Δt.

Если станем принимать промежуток времени все меньшим и меньшим, то в конце концов в пределе получим:

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \dot{f}(t), \qquad (4)$$

и эту производную называют **скоростью** u движущейся точки в момент времени t. Она сама зависит от времени.

Для равномерно движущейся точки мы получим из (2) для скорости опять: $u = \frac{dx}{dt} = a$; для покоящейся точки: $x = \text{const}$, $u = 0$.

§ 5. Для выражения величины скорости каким-нибудь определенным числом необходимо, конечно, установить единицы для длины и времени. Смотря по выбору этих единиц, изменяется физическое значение числа, служащего для выражения скорости. Поэтому говорят, что скорость не есть „чистое" число, но она имеет „размерность", именно размерность длины, деленной на время:

$$\left[\frac{l}{t}\right].$$

С помощью этого введенного **Максвеллом** символа для размерности становится ясным, как изменяется числовая величина, выражающая какую-нибудь определенную скорость, если изменяется единица длины или времени или обеих вместе.

Если, например, мы пожелали бы скорость

$$20\left[\frac{см}{сек}\right]$$

выразить, принимая за единицы метр и минуту, то нужно только написать:

$$1\,[см] = \frac{1}{100}\,[м], \quad 1\,[сек.] = \frac{1}{60}\,[мин.]$$

и с этими символами поступать, как с математическими величинами. Подстановка дает затем искомый результат:

$$20\left[\frac{см}{сек}\right]=12\left[\frac{м}{мин}\right].$$

Совершенно так же можно поступать со всеми производными величинами, если известна формула их размерности.

§ 6. После равномерного движения $u=\text{const}$ мы рассмотрим сначала частный случай, когда скорость движущейся точки зависит от времени линейно, т. е.

$$u=a_1t+b_1, \tag{5}$$

где a_1 и b_1 — постоянные. Постоянная b_1 означает скорость точки для момента $t=0$, значение постоянной a_1 вытекает из следующего соображения.

Спросим себя, каково изменение скорости за какой-нибудь промежуток времени $t'-t=\Delta t$. Оно равняется $u'-u$, если

$$u'=a_1t'+b_1;$$

следовательно,

$$u'-u=\Delta u=a_1(t'-t)=a_1\Delta t.$$

В рассматриваемом движении (5) изменение скорости, таким образом, всегда пропорционально времени. Постоянное отношение изменения скорости к необходимому для этого времени есть как раз величина a_1:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=a_1 \tag{6}$$

и называется *ускорением* движущейся точки. Это есть увеличение скорости за единицу времени, положительное или отрицательное, смотря по тому, возрастает скорость u с увеличением t или убывает. Рассмотренное здесь движение (5), при котором ускорение постоянно, называется поэтому „равномерно ускоренным“ движением.

Возьмем общий случай произвольного движения, т. е. по (4):

$$u=\dot f(t)$$

и спросим опять, каково изменение скорости Δu за промежуток времени $t'-t=\Delta t$. Оно равняется соответственно $u'-u$, если $u'=\dot f(t')$; следовательно, деля еще на $t'-t$, находим:

$$\frac{u'-u}{t'-t}=\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\dot f(t+\Delta t)-\dot f(t)}{\Delta t}.$$

Это отношение изменения скорости к необходимому для этого времени называется *средним ускорением* движущейся точки за промежуток времени от t до $t+\Delta t$. Среднее ускорение зависит, таким образом, как от t, так и от Δt.

Если станем брать все меньшие и меньшие промежутки времени, то в пределе получим, наконец:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \dot{u} = \ddot{x} = \ddot{f}(t). \tag{7}$$

Эту величину называют ускорением движущейся точки в момент времени t. Оно само зависит от времени.

Для равномерного движения, а также для покоящейся точки ускорение $\dot{u} = 0$.

Размерность ускорения, как видно из (7),

$$\left[\frac{l}{t^2}\right].$$

Поэтому, например (ср. § 5), ускорение:

$$20\left[\frac{см}{сек^2}\right] = 720\left[\frac{м}{мин^2}\right].$$

Конечно, по указанному пути можно итти еще далее и определить „ускорения высшего порядка". Однако последние играют в физике только незначительную роль.

Если одна из величин x, u, $\dot{u}$ задана как функция t, то две остальные могут быть найдены диференцированием или соответственно интегрированием по t. Так, например, при равномерно ускоренном движении (5) координата x зависит от второй степени времени t.

§ 7. До сих пор мы говорили о движении, не обращая внимания на его причины. Теперь мы рассмотрим также и последние.

Для этой цели нам придется снова обратиться к опытным фактам. С ними нас знакомят движения самого разнообразного рода, например брошенного мяча, падающего камня, колеблющегося маятника. В каждом случае мы замечаем, что можно указать одну определенную причину для данного рода движения: для брошенного мяча — напряжение мускулов нашей собственной руки, для падающего камня — землю, для колеблющегося маятника кроме того — привес. Этим выражается только то, что если бы названные тела (рука, земля, привес) не существовали, то соответствующие движения не происходили бы так, как мы это наблюдаем. Главная задача механики состоит в том, чтобы по заданным причинам отыскать движения.

Первый вопрос, на который мы дадим ответ, заключается в следующем: как движется материальная точка независимо от ее предыдущего движения, если устранены все прежде действовавшие причины ее движения, если она, следовательно, бесконечно долго совершенно от всего изолирована, находится в бесконечном удалении от всех других тел в безвоздушном пространстве? Конечно, понятно само собою, что подобного опыта (в чистом виде) нельзя произвести; даже сомнительно, имеет ли поставленный вопрос какой-либо физический смысл. Ибо никогда нельзя с уверенностью сказать, не находятся ли еще на огромных расстояниях бесконечно большие тела, которые влияют заметно на движение точки.

Но, с другой стороны, при каком угодно частном случае движения все же возможно (и, принципиально говоря, совершенно неограниченно) уменьшить влияние тел, являющихся причинами движения. Так, можно брошенный шар предоставить самому себе, нить маятника можно обрезать и т. п. Конечно, нельзя устранить землю, но ее действие можно исключить таким способом, чтобы материальная точка двигалась по неизменной, точно горизонтально установленной плоскости, например по поверхности огромного бильярдного стола. При таких условиях опыт обнаруживает, что материальная точка, например бильярдный шар, движется прямолинейно с постепенно убывающей скоростью. Но убыль в скорости происходит тем медленнее, чем менее шероховата поверхность стола; в случае совершенно ровной ледяной поверхности убыль в скорости уже гораздо меньше, чем на покрытом сукном бильярде. Из этого можно заключить, что на абсолютно плоской поверхности, для которой исключены явления, обусловленные шероховатостью и связанными с последней выглаживанием и нагреванием, уменьшение скорости свелось бы к нулю, т. е. скорость была бы постоянной. Поэтому на поставленный выше вопрос мы ответим, что изъятая от всех действий материальная точка движется равномерно и прямолинейно, по уравнению (2). (Принцип инерции или косности материи—первая аксиома Ньютона).

Предыдущие умозаключения ни в коем случае не представляют доказательства принципа инерции; они должны только наметить тот путь, по которому можно притти к установлению этого принципа. Доказательство принципа можно найти единственно и исключительно в тех подтверждениях, которые получаются при его бесчисленных приложениях. Его значение в том и заключается, что он выражает в одном только положении всю сумму приобретенных в этой области наших опытных познаний.

С другой стороны, не следует рассматривать принцип инерции как нечто само собой понятное или как простое определение, ибо он содержит известное физическое утверждение, справедливость которого может быть проверена на опыте с очень высокой степенью точности.

§ 8. Разберем теперь случай, когда первоначально совершенно изолированная, следовательно движущаяся равномерно и прямолинейно материальная точка, например шар на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, получает вследствие какой-либо причины ускорение или замедление в направлении своего движения. Если мы производим изменение скорости при помощи наших мускулов, например в случае положительного ускорения, толкая шар сзади, или в случае отрицательного ускорения, задерживая шар спереди, то мы испытываем ощущение напряжения, которое как наше непосредственное чувство ближе неопределимо, но его интенсивность, несомненно, стоит в причинной связи с величиной производимого ускорения.

Поэтому мы воспользуемся ощущением нашего мускульного чувства как мерой для причины ускорения и соответственно этому причину ускорения обозначим как „силу" X, которую мы прилагаем к шару. Опыт далее показывает нам, что более сильному мускульному ощущению, т. е. большей силе X, соответствует большее ускорение $\dot{u}$ и что направление ускорения изменяется на обратное с обращением направления силы. Для $X=0$ $\dot{u}=0$, по принципу инерции.

Мы не можем итти дальше в установлении связи между силой и ускорением экспериментальным путем: наше мускульное ощущение слишком неопределенно и обманчиво, чтобы служить точным мерилом для производимой силы. Вместо этого мы восполним пробел более точным определением. Именно мы *полагаем силу X пропорциональной по величине и знаку производимому ею ускорению* $\dot{u}$ (вторая аксиома Ньютона); мы можем это сделать потому, что это новое утверждение, поскольку вообще возможна опытная поверка, согласуется с уже ранее принятым, выведенным из мускульного ощущения соотношением между X и $\dot{u}$. Кроме того, получается преимущество, которым мы сейчас и воспользуемся: именно, это соотношение можно непосредственно применить в общем случае, когда ускорение вызывается не благодаря нашим мускулам, а каким-нибудь другим телом, так что о каком-нибудь ощущении не приходится и говорить. Таким образом мы называем вообще при всяком движении причину движения силой и полагаем величину ее пропорциональной производимому ею ускорению. Она соответствует тому напряжению мускулов, которое мы испытывали бы, если бы мы то же движение вместо тел, его производящих, произвели при помощи наших мускулов.

Здесь напрашивается вопрос, не было бы проще и поэтому рациональнее определять силу прямо через ускорение и не делать обхода при помощи мускульного ощущения? Но против этого можно заметить, что понятие о силе есть все же нечто другое, чем понятие об ускорении, и что к содержанию этого понятия мы подойдем ближе, если его поставим в соотношение с мускульным чувством, а не с ускорением. Это выяснится как в ближайших параграфах, так и в дальнейшем, например при изучении относительного движения (§ 57).

Кроме того способ определения основного физического понятия так, что сначала его сводят к чувственному ощущению, и затем первое примитивное определение заменяют вторым, более точным и тонким, этот способ—в физике общераспространенный и даже единственно возможный. Так определяют, например, степень нагретости тела при помощи теплового ощущения, цвет какого-нибудь светового луча сначала при помощи цветовых ощущений. Для точных применений, однако, эти определения нужно усовершенствовать; для этого их сводят всегда к таким явлениям, которые допускают точные измерения: для случая теплоты — к изменению объема (термометр), для случая цвета—к длине волны (полосы интерференции). Если бы определять силу прямо через ускорение, тепло—по изменению объема или цвета непосредственно длиною волны, то эти понятия потеряли бы как раз то значение, которое делает их ценными при точном исследовании и которое, что еще важнее, открывает путь для дальнейшего развития физических теорий.

И на самом деле, определение силы, основанное на ускорении, еще не окончательное; оно способно к дальнейшему усовершенствованию и обобщению, как мы это увидим ниже (§ 124).

§ 9. Очевидно, что было бы всего проще положить силу X не только пропорциональной, но прямо равной ускорению $\dot{u}$. Но этим самым мы впали бы в противоречие с первичным, основанным на мускульном чувстве определением силы, ибо тогда какая-нибудь определенная сила должна была бы при всяких условиях вызывать определенное ускорение. Возьмем два шара, один из дерева, другой из железа, приблизительно одинаковой величины, и пусть они движутся по гладкой горизонтальной плоскости с одинаковой постоянной скоростью.

Тогда опыт показывает, что требуется большее напряжение, чтобы ускорить или замедлить определенным образом железный шар, чем деревянный. Поэтому мы говорим, что железный шар имеет бо́льшую инерцию, чем деревянный, и должны в соотношении между силою и ускорением принимать еще множитель пропорциональности (положительный) m:

$$X = m\dot{u} = m\frac{du}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{8}$$

который определяется свойствами движущейся материальной точки (§ 2). Для более инертного шара требуется бо́льшая сила для получения определенного ускорения; поэтому для него m больше; вообще m мы называем и н е р т н о й м а с с о й материальной точки. Она, конечно, для всех разнообразных движений точки и для разного рода сил, на нее действующих, одинакова.

За единицу массы m мы принимаем массу некоторого совершенно определенного образцового тела, именно тысячную долю массы хранящегося в Париже нормального куска платины, и называем ее 1 *г* (грамм). Она очень близка к массе одного кубического сантиметра воды при 4° С.

Единицей массы, конечно, определяется по (8) и единица силы, а именно сила имеет размерность:

$$\left[\frac{ml}{t^2}\right]. \tag{8a}$$

Единица силы в системе CGS называется д и н или д и н а.

§ 10. Как первое применение основного уравнения (8) разберем движение материальной точки, брошенной вертикально вверх в безвоздушном пространстве. После того как точка брошена и предоставлена самой себе, на нее действует только притяжение земли, которое мы обозначим как „вес" G точки и будем считать постоянным и направленным вертикально вниз. Если расположим положительную ось x-ов по направлению вверх, то

$$X = -G; \tag{9}$$

вставляя в (8), получаем:

$$m\frac{du}{dt} = -G.$$

Интегрируя, имеем:

$$mu = -Gt + C.$$

Постоянная интеграции C может быть вычислена, если известна для какого-нибудь определенного момента времени t, например для начального момента $t = 0$, скорость u. Если обозначим начальную (положительную) скорость через u_0, то из последнего уравнения для $t = 0$ и $u = u_0$ следует:

$$mu_0 = C;$$

следовательно, после подстановки

$$mu = -Gt + mu_0,$$

или

$$u = -\frac{G}{m}t + u_0 = \frac{dx}{dt}. \tag{10}$$

Таким образом скорость равномерно убывает с возрастанием времени t. Для $t = \frac{mu_0}{G}$ она делается равной нулю и затем отрицательной, т. е. материальная точка падает обратно вниз. После повторного интегрирования мы получаем из (10):

$$x = -\frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2 + u_0 t + C',$$

и если для $t = 0$, $x = x_0$, то

$$x = x_0 + u_0 t - \frac{1}{2}\frac{G}{m}t^2. \tag{11}$$

Этим выражением движение вполне определено.

Наибольшая достигнутая высота x_m (x—maximum) получается, если в (11) вставить для t величину, соответствующую моменту изменения знака скорости:

$$x_m = \frac{1}{2}\frac{m}{G}u_0^2 + x_0. \tag{12}$$

Исключая t из (10) и (11), получаем ответ на вопрос, какой скоростью u обладает движущаяся точка в каком-нибудь определенном месте x:

$$u^2 - u_0^2 = \frac{2G}{m}(x_0 - x). \tag{13}$$

u для $x > x_m$ мнимо, как и надо ожидать; для $x = x_m$, $u = 0$ и для $x < x_m$ u имеет два равных и противоположных значения, из которых положительное соответствует поднятию, а отрицательное—опусканию. Нисходящее движение происходит, следовательно, вполне симметрично восходящему.

Если x_0 и u_0 неизвестны, то в уравнениях движения обе постоянные C и C' остаются неопределенными. Поэтому обе эти величины, которые дают начальное положение точки и ее начальную скорость, объединяют под общим названием „начальное состояние"; пользуясь этим, можно сказать, что движение во всех подробностях определяется действующей силой и начальным состоянием. Вообще под „состоянием" материальной точки подразумевают совокупность данных о ее положении и скорости.

Предыдущий закон падения впервые экспериментально был установлен Галилеем. Он, кроме того, нашел, что отношение $\frac{G}{m}$ для всех материальных точек одинаково, что, следовательно, если положить

$$\frac{G}{m} = g, \tag{14}$$

то величина g, ускорение тяжести, не зависит от m. Наоборот, в различных местах g несколько различно, а именно g возрастает от экватора к полюсу от 978 $\left[\frac{см}{сек^2}\right]$ до 983,2 $\left[\frac{см}{сек^2}\right]$.

Поэтому и вес $G = mg$ какой-нибудь определенной материальной точки в различных местах земли различен. Вес 1 *г* на экваторе составляет 978 дин, а на полюсе 983,2 дины.

§ 11. То обстоятельство, что ускорение тяжести g материальной точки не зависит от ее массы, предоставляет нам очень точный метод для измерения масс.

Представим себе, что к двум концам шнура, перекинутого через неподвижный блок, привязаны два совершенно равных сосуда и что в один сосуд положена материальная точка с массой m, а в другой налито некоторое количество воды с массой m'.

Тогда блок станет вращаться в ту сторону, на которой шнур сильнее натянут, на которую, следовательно, по определению § 8, действует большая сила; блок останется неподвижным, если силы равны, т. е. если вес G материальной точки равен весу G' налитой воды, или, по (14), если

$$m = m'.$$

Но m' по § 9 равно объему воды в $см^3$; таким образом получается положение: масса материальной точки равна объему воды, ее уравновешивающему. Величина ускорения тяжести g здесь не имеет значения: материальная точка везде весит одно и то же число грамм, так как вес G точки изменяется от места к месту в том же самом отношении, как вес G' соответствующего объема воды. Чтобы доказать изменчивость G, можно было бы, например, для описанного опыта воспользоваться эластичным растяжимым шнуром. Тогда обе стороны шнура на северном полюсе земли были бы сильнее растянуты теми же телами, т. е. более удлинены, чем на экваторе.

§ 12. Особый интерес для физики представляют те силы, которые проявляются как притяжения или отталкивания и величина которых зависит только от расстояний между точками, между которыми они действуют,—так называемые „центральные силы".

Поэтому мы разберем здесь случай прямолинейного движения материальной точки, которая притягивается к неизменному центру с силой, пропорциональной ее расстоянию от центра.

Примем центр за начало координат. Тогда расстояние подвижной точки P от центра равно x, и сила притяжения по величине и направлению

$$X = -cx \quad (c > 0).$$

Отсюда уравнение движения (8):

$$m\frac{du}{dt} = -cx. \tag{15}$$

В начальном состоянии, для $t = 0$, пусть

$$x = 0 \text{ и } u = u_0 \, (>0). \tag{16}$$

Чтобы интегрировать уравнение движения, умножим обе его части на $\frac{dx}{dt} = u$, тогда получим:

$$m \cdot u \cdot \frac{du}{dt} = -cx\frac{dx}{dt},$$

или, интегрируя по t:

$$\frac{1}{2}mu^2 = -\frac{c}{2}x^2 + C,$$

и так как для $x = 0$

$$u = u_0, \text{ то}$$

$$mu^2 = mu_0^2 - cx^2 = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{17}$$

Отсюда видно, между прочим, что скорость u никогда не будет больше u_0, и что расстояние x никогда не будет больше, чем $u_0\sqrt{\frac{m}{c}}$.

Для производства второго интегрирования напишем последнее уравнение в следующей форме:

$$dt = \frac{dx \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{mu_0^2 - cx^2}};$$

интегрируя, получим:

$$t = \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{u_0}\sqrt{\frac{c}{m}}\right) + C'.$$

Из начального условия (16) следует, что $C' = 0$, и поэтому

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t\right). \qquad (18)$$

Таким образом движение будет периодическим около неподвижного центра.

Постоянный множитель перед синусом называется „амплитудой", изменяющийся со временем угол под знаком синуса — „фазой", постоянный множитель при t — „частотой" колебаний (число колебаний в 2π секунд). Продолжительность одного колебания $2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ не зависит, таким образом, так же как и частота, от начальной скорости u_0 и от начального положения; случай произвольного начального положения x_0 может быть непосредственно сведен к здесь разобранному случаю тем, что начало времени t переносят в такой момент, когда $x = 0$.

§ 13. Найденный здесь частный закон движения играет в физике важную роль, а именно он имеет вообще место для малых прямолинейных колебаний точки около положения ее устойчивого равновесия, как это можно легко доказать.

Пусть покоящаяся в начале точка выведена каким-нибудь толчком, например ударом, сообщающим ей начальную скорость u_0, из своего положения равновесия; если это положение устойчивое, то на точку действует в каждый момент сила, стремящаяся вернуть ее в положение равновесия; пусть эта сила зависит както от ее положения, т. е.

$$X = f(x).$$

При этом $x = 0$ обозначает положение равновесия.

Если теперь колебания достаточно малы, то $f(x)$ можно разложить в ряд:

$$X = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

в котором первая постоянная $c_0 = 0$, так как для $x = 0$, $X = 0$, а вторая постоянная c_1 отрицательна, так как равновесие должно быть устойчивым. Опуская остальные члены ряда высшего порядка малости, получаем в точности движение, рассмотренное в предыдущем параграфе, и вместе с тем также общее положение, что периоды малых прямолинейных колебаний около положения устойчивого равновесия независимы от характера возмущающих сил. Такое же положение имеет силу и для непрямолинейных колебаний, как мы это увидим позже в § 70.

§ 14. Если на какую-нибудь материальную точку одновременно действуют в одинаковом или в противоположных направлениях несколько сил, которые по величине и направлению представляются через X_1, X_2, X_3..., то эти силы эквивалентны одной силе X, которая по величине и направлению представляется их суммой:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots \tag{19}$$

В этом случае говорят, что отдельные силы складываются в „результирующую" силу X. Если $X = 0$, отдельные силы уравновешиваются между собою, и материальная точка во всех отношениях ведет себя так, как если бы на нее совсем не действовали силы.

§ 15. Рассмотрим в виде примера случай прямолинейного движения материальной точки, которая, как в § 12, притягивается к началу координат с силой $-cx$, но при этом одновременно задерживается в своем движении трением или вследствие другой демпфирующей причины, с силой, величина которой пропорциональна скорости u. Тогда, по (19), результирующая сила:

$$X = X_1 + X_2,$$

где:

$$X_1 = -cx \quad \text{и} \quad X_2 = -\varrho\frac{dx}{dt}$$

(ϱ — постоянный коэфициент трения).

Уравнение движения (8) имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \varrho\frac{dx}{dt}, \tag{19a}$$

или, если положить для сокращения

$$\frac{c}{m} = a \quad \text{и} \quad \frac{\varrho}{2m} = w,$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2w\frac{dx}{dt} + ax = 0. \tag{20}$$

Пусть опять, как в § 12, для начального состояния

$$x = 0, \; u = u_0 \, (> 0),$$

Частный интеграл диференциального уравнения (20)

$$x = Ae^{\alpha t},$$

где постоянная A произвольна, а постоянная α должна удовлетворять уравнению:

$$\alpha^2 + 2w\alpha + a = 0.$$

Если, следовательно, через α и β мы обозначим два корня этого квадратного уравнения, так что;

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = -w \pm \sqrt{w^2 - a}, \tag{21}$$

то выражение

$$x = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} \tag{22}$$

будет также интегралом уравнения (20), и именно общим интегралом, так как оно содержит две произвольных постоянных A и B.

Из (22) получается диференцированием:

$$\frac{dx}{dt} = u = A\alpha e^{\alpha t} + B\beta e^{\beta t}. \tag{23}$$

Значения постоянных A и B определяются из начального состояния, ибо для $t = 0$ из (22) и (23) следует:

$$0 = A + B \quad \text{и} \quad u_0 = A\alpha + B\beta.$$

Следовательно, вычисляя A и B и подставляя их в (22) и (23), имеем:

$$x = \frac{u_0}{\alpha - \beta}(e^{\alpha t} - e^{\beta t}), \tag{24}$$

$$u = \frac{u_0}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha t} - \beta e^{\beta t}). \tag{25}$$

Этими формулами, в соединении с (21), движение вполне определено. Для более близкого исследования его особенностей мы рассмотрим последовательно случаи, когда корень квадратный в (21) действителен, нуль или мнимый.

1. Пусть $w^2 > a$. Тогда α и β оба отрицательны, и конечно, $-\beta > -\alpha$. Поэтому x для всех времен t положительно; при $t = \infty$, $x = 0$. Движение — апериодическое, движущаяся точка достигает своего наибольшего отклонения (элонгации), т. е. максимальной величины x, для $u = 0$, и

$$t = \frac{\ln \frac{\beta}{\alpha}}{\alpha - \beta},$$

и затем возвращается прямо в свое положение равновесия.

2. Пусть $w^2 = a$. Тогда, по (21),

$$\alpha = \beta = -w.$$

Так как для этого случая выражение для x в формуле (24) принимает вид $\frac{0}{0}$, то истинную величину его находят, полагая $w^2 - a = \varepsilon^2$, т. е.

$$\alpha = -w + \varepsilon, \quad \beta = -w - \varepsilon.$$

Подставляют это в (24) и переходят к пределу $\varepsilon = 0$. Тогда получается:

$$x = u_0 t e^{-wt}, \quad u = u_0 e^{-wt} (1 - wt). \tag{26}$$

Движение — опять апериодическое, элонгация постоянно положительна, ее максимум $\frac{u_0}{ew}$, который достигается в момент $t = \frac{1}{w}$.

3. Пусть $w^2 < a$. Тогда по (21) α и β — сопряженные комплексные величины, именно:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = -w \pm i\sqrt{a-w^2}, \quad i = \sqrt{-1},$$

и подстановка в (24) дает:

$$x = \frac{u_0}{\sqrt{a-w^2}} \cdot e^{-wt} \cdot \sin\left(t\sqrt{a-w^2}\right). \tag{27}$$

Материальная точка совершает затухающие колебания и для $t = \infty$ останавливается.

Для $t = \frac{n \cdot \pi}{\sqrt{a-w^2}}$ (n — произвольное целое число) точка проходит через положение равновесия, если n четное, — в положительном направлении, если n нечетное, — в отрицательном. Продолжительность периода есть время, которое протекает между двумя последующими одинаково направленными прохождениями через положение равновесия, т. е.

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a-w^2}};$$

оно возрастает при увеличении сопротивления w, но оно, как и при незатухающем колебании, не зависит от начального состояния.

Скорость u выразится:

$$u = u_0 \cdot e^{-wt} \left\{\cos\left(t\sqrt{a-w^2}\right) - \frac{w}{\sqrt{a-w^2}} \sin\left(t\sqrt{a-w^2}\right)\right\}. \tag{28}$$

При прохождении через положение равновесия в положительном направлении:

$$u = u_0 e^{-\frac{2n\pi w}{\sqrt{a-w^2}}}. \tag{29}$$

Эти скорости убывают при последующих прохождениях ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) в геометрической прогрессии, т. е. натуральные логарифмы этих скоростей убывают в арифметической прогрессии; именно, каждый раз на величину

$$\frac{2\pi w}{\sqrt{a-w^2}}.$$

Поэтому это число называется „логарифмическим декрементом" колебания, и так как он постоянен, то эти колебания называются равномерно затухающими.

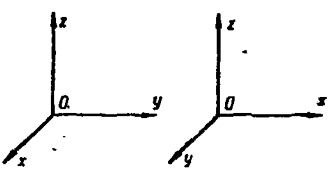
Амплитуды колебаний, т. е. максимальные элонгации, получают не из (27), если в нем положить $\sin = 1$, но из (28), если в нем положить $u = 0$. Для них логарифмический декремент тот же, что и для скоростей (29) при прохождении через положение равновесия.

Для $w = 0$ колебания становятся чисто периодическими, и уравнения движения тождественны с выведенными в § 12. Для $w = \sqrt{a}$ (27) и (28) переходят опять в уже рассмотренный предельный случай (26).

ГЛАВА II

ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 16. Сначала мы разберем движение материальной точки в пространстве с чисто кинематической точки зрения, как мы это сделали для прямолинейного движения в § 3, не обращая внимания на причины движения. Пространственное движение точки определено, если задано ее положение как функция времени. Для определения положения точки в трехмерном пространстве необходимы три координаты, которые мы будем считать взаимно перпендикулярными, и положительные направления которых мы обозначим через x, y, z.



Черт. 2a. Черт. 2b.

Но этим природа системы координат еще не определена, еще остается двузначность, которая иллюстрируется двумя чертежами (2a и 2b). Системы координат, изображенные на этих чертежах, очевидно, не могут быть приведены к полному совпадению перемещением и вращением, они относятся друг к другу, как правая рука к левой. Но, конечно, всякая другая система прямоугольных координат может быть приведена к полному совпадению или с системой a или с системой b перемещением и вращением.

Поэтому все системы координат распадаются на две группы a и b, которые можно характеризовать следующим образом: если представить себе, что большой палец руки, вытянутый в сторону, представляет направление x, вытянутый указательный палец — направление y, средний палец перпендикулярно к этим обоим — направление z, то правая рука представит систему группы a, левая рука — систему группы b. Поэтому система a называется правой, а система b—левой. Мы будем здесь пользоваться всегда правой системой, как на черт. 2а, если не будет определенно указано на противоположное.

§ 17. Вместо координат x, y, z положение точки P в пространстве может быть также охарактеризовано, если дано ее расстояние r от начала O и углы ξ, η, ζ, которые составляют направление от O к P с положительными осями. Тогда $OP = r$ есть диагональ прямоугольного параллелепипеда с длиною ребер x, y, z (черт. 3), и мы имеем:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{30}$$

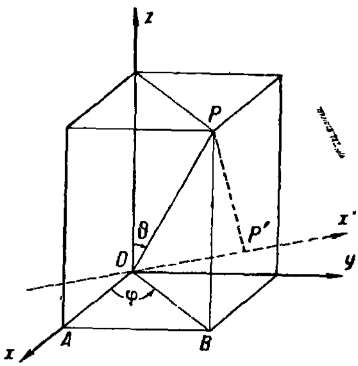
$$\cos\xi = \frac{x}{r}, \quad \cos\eta = \frac{y}{r}, \quad \cos\zeta = \frac{z}{r}. \tag{31}$$

Величину r мы считаем всегда положительной, а углы ξ, η, ζ всегда заключающимися между 0 и π. Отрицательным координатам, следовательно, соответствуют всегда тупые углы. Тогда величинами x, y, z значения r, ξ, η, ζ определяются однозначно, и обратно. Однако углы ξ, η, ζ не независимы между собою. Они должны на основании последних двух равенств удовлетворять тождественно равенству:

$$\cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1. \tag{32}$$

Тогда по (31)

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = x : y : z. \tag{33}$$



Черт. 3.

Эти три косинуса, сумма которых равна единице, называют для краткости также „косинусами направления", а их отношения — „отношениями направления".

Отрезок OP, отложенный в направлении (ξ, η, ζ), которым определяется однозначно положение точки P в пространстве, называют „направленной величиной" или „вектором"; мы будем обозначать его, как и все векторы, буквами, отпечатанными жирным шрифтом, здесь через $\mathbf{r}$. Тогда числовая величина r представляет „абсолютное значение", или „величину" вектора $\mathbf{r}$:

$$r = |\mathbf{r}|. \tag{34}$$

r и $\mathbf{r}$ нужно строго различать друг от друга. Если, например, у нас имеются две точки P и P', то уравнение $r = r'$ означает, что P и P' отстоят от O на одинаковое расстояние; уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ означает, что P и P' совпадают, уравнение $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$, — что P и P' находятся на равном расстоянии от O, но с противоположных сторон.

Величины x, y, z, определяемые (31), называются „компонентами" вектора $\mathbf{r}$ в направлении осей координат. Это—проекции отрезка OP на координатные оси.

Вообще компонент x' вектора $\mathbf{r}$ в каком-нибудь произвольном направлении определяется проекцией отрезка $(\mathbf{r}) = r$ на это направление, т. е.

$$x' = r \cos \delta, \tag{35}$$

если δ означает (острый или тупой) угол, который образует направление x' с направлением $\mathbf{r}$.

Если углы ξ', η', ζ' направления x' с осями заданы, то компонент x' (и необозначенный на черт. 3 угол δ) вычисляются также следующим образом: вместо того, чтобы проектировать отрезок $r = OP$ прямо на направление x', проектируют сначала отрезок $OA = x$ (черт. 3), затем отрезок $AB = y$ и, наконец, отрезок $BP = z$ на направление x', т. е. предоставляют какой-нибудь точке перемещаться прямолинейно из O через A и B в P и опускают из каждого ее положения перпендикуляр на направление x'. Тогда проекция перемещающейся точки, т. е. основание перпендикуляра, опишет в целом прямолинейный отрезок от O до P' проекции P. Алгебраическая сумма трех спроектированных на x' отрезков равна, следовательно, расстоянию начальной точки O от P'; поэтому

$$x \cdot \cos \xi' + y \cdot \cos \eta' + z \cdot \cos \zeta' = x'. \tag{36}$$

Отсюда также по (31) и (35):

$$\cos \delta = \cos \xi \ \cos \xi' + \cos \eta \ \cos \eta' + \cos \zeta \ \cos \zeta'. \tag{37}$$

По уравнению (35) компонент вектора $\mathbf{r}$ в его собственном направлении ($\delta = 0$) равен r, в противоположном направлении ($\delta = \pi$) равен $-r$, в каком-нибудь направлении, составляющем прямой угол $\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$, равен нулю.

Уравнение (36) указывает, что компонент x' вектора $\mathbf{r}$ в каком-нибудь направлении ξ', η', ζ' можно получить и таким образом: берут вместо абсолютной величины вектора $\mathbf{r}$ три его компонента x, y, z, образуют из каждого такого компонента компонент в направлении (ξ', η', ζ') и полученные таким образом величины складывают алгебраически. Следовательно, и в этом отношении три прямоугольные компонента x, y, z вполне эквивалентны самому вектору $\mathbf{r}$.

§ 18. Движение точки P в пространстве определено, если заданы три ее координаты x, y, z как функции времени t:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{38}$$

причем функции f, φ и ψ предполагаются действительными, однозначными и непрерывными. Конечно, ими определяется и путь точки, т. е. некоторая пространственная кривая, уравнение которой получается, если исключить время t из трех уравнений (38).

Далее, определим, как в § 4, три величины:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = u, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = v, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z} = w, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

и назовем их „компонентами скорости в направлении осей координат“ точки P в момент t. Это суть скорости, с которыми движутся прямолинейно проекции точки P по осям координат. Таким же способом, соблюдая последовательность, определим вообще через диференцирование (36) как компонент скорости P в каком-нибудь направлении (ξ', η', ζ') скорость:

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x}' = u' = u\cos\xi' + v\cos\eta' + w\cos\zeta', \tag{40}$$

с которой в этом направлении прямолинейно движется проекция точки P.

На основании этого определения мы можем доказать, что скорость представляет вектор. Ибо, если положим:

$$u^2 + v^2 + w^2 = q^2, \tag{41}$$

$$\frac{u}{q} = \cos\lambda, \quad \frac{v}{q} = \cos\mu, \quad \frac{w}{q} = \cos\nu, \tag{42}$$

при дополнительном условии, что q положительно и что углы λ, μ, ν заключаются между 0 и π, то по (40):

$$u' = q(\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\eta' + \cos\nu\cos\zeta'),$$

и по (37)

$$u' = q\cos\varepsilon, \tag{42a}$$

где ε означает угол между направлением (ξ', η', ζ') и (λ, μ, ν). Компонент u' представляет, следовательно, проекцию отрезка q в направлении (λ, μ, ν) на направление x'.

Эту направленную величину мы называем „вектором скорости“ и обозначим ее через букву, напечатанную жирным шрифтом:

$$\mathbf{q} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{43}$$

Таким образом производная вектора $\mathbf{r}$ по времени обозначает вовсе не производную от его абсолютной величины, но она обозначает вектор, компоненты которого являются производными компонента вектора $\mathbf{r}$.

Вектор $\mathbf{q}$ имеет очень наглядное геометрическое значение. Именно, приняв во внимание (39), имеем из (41) и (42):

$$q^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \tag{44}$$

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\nu = \frac{dz}{ds}, \tag{45}$$

где ds означает элемент дуги кривой пути, принимаемый положительным в направлении движения. Направление $\mathbf{q}$, следовательно, совпадает с направлением элемента дуги или касательной к траектории, и величина $q = (\mathbf{q})$ есть скорость движения по этой кривой. Согласно (41) и (42) вектор $\mathbf{q}$ по величине и направлению представляет собой диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами u, v, w.

§ 19. Далее, мы определим, как в § 6, три величины:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \ddot{x} = \frac{du}{dt} = \dot{u}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \ddot{z} = \frac{dw}{dt} = \dot{w}, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

и назовем их „компонентами ускорения в направлении осей координат“ точки P в момент t. Это — ускорения, с которыми прямолинейно двигаются проекции P по осям координат. Таким же образом, соблюдая последовательность, вообще определим, через диференцирование (40), как компонент ускорения P в каком-нибудь направлении (ξ', η', ζ') ускорение

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \ddot{x}' = \frac{du'}{dt} = \dot{u}' = \dot{u}\cos\xi' + \dot{v}\cos\eta' + \dot{w}\cos\zeta', \tag{47}$$

с которым прямолинейно движется проекция точки P на это направление.

На основании этого определения можно доказать, что ускорение есть вектор. Ибо если положить:

$$\dot{u} + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 = p^2, \tag{48}$$

$$\frac{\dot{u}}{p} = \cos\alpha, \quad \frac{\dot{v}}{p} = \cos\beta, \quad \frac{\dot{w}}{p} = \cos\gamma, \tag{49}$$

с дополнительным условием, что p положительно и что углы α, β, γ заключаются между 0 и π, то по (47):

$$\dot{u}' = p(\cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta'),$$

и по (37)

$$\dot{u}' = p\cos\vartheta, \tag{50}$$

где ϑ обозначает угол между направлениями (ξ', η', ζ') и (α, β, γ). Компонент $\dot{u}'$ есть, следовательно, проекция отрезка p в направлении (α, β, γ) на направление x'. Эту направленную величину мы назовем, по аналогии с (43), „вектором ускорения“:

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{r}}. \tag{51}$$

Согласно (48) и (49) он представляет по величине и направлению диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами

$$\dot{u}, \quad \dot{v}, \quad \dot{w}.$$

§ 20. Термин „ускорение“ иногда вовлекает в ошибку начинающих, смешивающих величину $(\dot{\mathbf{q}}) = p$ с величиною

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}.$$

Это такая же ошибка, как если бы приравнять q, равное $(\dot{\mathbf{r}})$, $\frac{dr}{dt}$.

Поэтому исследуем состав величин p и $\dot{q}$ несколько ближе. По (41) диференцированием по времени получаем:

$$q\dot{q} = u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w},$$

таким образом по (49) и (42):

$$\dot{q} = p(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu)$$

и по (37)

$$\dot{q} = p\cos(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}). \tag{52}$$

Сравнивая с (50), находим таким образом, что $\dot{q}$ есть компонент вектора ускорения в направлении скорости. Так как направления $\dot{\mathbf{q}}(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\mathbf{q}(\lambda, \mu, \nu)$ совершенно друг от друга независимы, то $\dot{q}$ может иметь всевозможные значения между $+p$ и $-p$. Только в том случае, когда оба эти направления совпадают, как при прямолинейном движении, $\dot{q} = p$. Но если, например, ускорение перпендикулярно к скорости, то $\dot{q} = 0$, т. е. величина скорости q постоянна, между тем как величина ускорения p может иметь какое угодно (положительное) значение.

§ 21. Для ближайшей иллюстрации установленных определений и положений сосредоточим наше внимание на частном простом случае, именно на равномерном круговом движении точки P. Подобное движение представляется уравнениями:

$$x = r\cos\omega t, \quad y = \sin\omega t, \quad z = 0, \tag{53}$$

где r — радиус круга, $\omega(>0)$ — угловая скорость или частота (черт. 4). Круговой путь получается через исключение t из (53):

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = 0,$$

компоненты же скорости по (39), если для сокращения положим $\omega t = \varphi$:

$$u = -\omega r \sin\varphi, \quad v = \omega r \cos\varphi, \quad w = 0.$$

Величина и направление скорости PA по (41) и (42):

$$q = \omega r,$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \mu = \varphi, \quad \nu = \frac{\pi}{2};$$

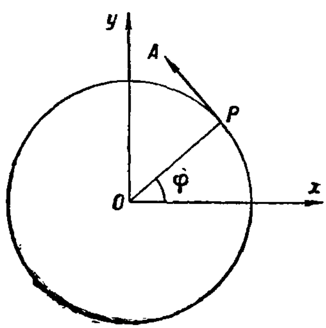
компоненты ускорения по (46):

$$\dot{u} = -\omega^2 r \cos\varphi, \quad \dot{v} = -\omega^2 r \sin\varphi, \quad \dot{w} = 0;$$

наконец, величина и направление ускорения по (48) и (49):

$$p = \omega^2 r,$$

$$\alpha = \pi - \varphi, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{54}$$



Черт. 4.

Таким образом вектор ускорения направлен от P к центру O, и мы здесь имеем пример упомянутого в конце предыдущего параграфа случая, когда направление ускорения перпендикулярно к направлению скорости, чем обусловливается постоянство q.

§ 22. Только теперь обратимся мы к вопросу о причине движения и введем силу, которая производит движение. Само собой понятно, что определение силы при пространственном движении должно включать в себе, как частный случай, понятие о силе при прямолинейном движении. Поэтому мы принуждены в связи с (8) положить:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\dot{u} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \\ Y &= m\dot{v} = m\frac{d^2y}{dt^2}, \\ Z &= m\dot{w} = m\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

где m опять обозначает независящую от рода движения инертную массу материальной точки P; далее, в связи с (47):

$$X' = m\dot{u}' = X\cos\xi' + Y\cos\eta' + Z\cos\zeta'. \tag{56}$$

Следовательно, мы определяем вообще компонент силы в каком-нибудь направлении (ξ', η', ζ') как произведение массы на компонент ускорения в этом направлении. Отсюда следует, что сила есть вектор, направление которого совпадает с направлением ускорения и величина которого отличается от величины ускорения на множитель m. В самом деле, если мы, как это принято в электродинамике, обозначим вектор силы через $\mathbf{F}$, т. е. положим.

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{q}} = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{57}$$

то для абсолютной величины F этого вектора из (55) и (48) получается:

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = m^2p^2, \tag{58}$$

а для направления вектора, по (49) и (55):

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = X : Y : Z, \tag{59}$$

и для компонента в произвольном направлении (ξ', η', ζ'), которое составляет с направлением силы угол ϑ, по (56) и (50) получается:

$$X' = F \cdot \cos\vartheta. \tag{60}$$

Вектор силы $\mathbf{F}$, из (58) и (59), по величине и направлению представляет диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами X, Y, Z. Так как эти три компонента, как показывает сравнение (56) и (60), вполне заменяют вектор $\mathbf{F}$, и обратно, то они вполне ему эквивалентны и в том, что касается причины движения: можно три действующие в направлении координатных осей силы X, Y, Z сложить по закону параллелепипеда в одну силу, величина которой F определяется (58), а направление (α, β, γ) — (59). Точно так же можно всякую произвольно направленную силу по тому же закону разложить на три действующие по направлениям осей координат силы.

§ 23. Уравнения (55) или (57) содержат основной закон механики материальной точки. Им можно воспользоваться или для того, чтобы, если известно движение, определить силу, производящую движение, или обратно, если известна сила, то определить движение, которое производится силой. Первая задача, как видим, есть задача диференциального исчисления, вторая—интегрального исчисления, вообще математически более сложная задача.

Рассмотрим сначала задачу первого рода и определим силу, которая производит рассмотренное в § 21 равномерное круговое движение. Она получится непосредственно из комбинации уравнений (54) и (59):

$$F = m\omega^2 r \tag{61}$$

и направлена, как и ускорение от P, к центру круга. Ее можно осуществить при помощи нитки, на которой материальная точка двигается по кругу. Тогда F представит натяжение нитки. Уравнение (61) можно также написать:

$$F = \frac{mq^2}{r}, \tag{62}$$

откуда получаем хороший пример для утверждения, что вопрос: „сила F при равномерном круговом движении прямо или обратно пропорциональна расстоянию r" не имеет никакого смысла, пока не задано, принимается ли при этом постоянным ω или q. Подобное положение имеет место для каждой величины, которая зависит более чем от одной переменной.

При применениях теории к процессам природы по большей части дело идет о второй задаче, о нахождении движения по заданной силе. Тогда нужно произвести интегрирование трех диференциальных уравнений второго порядка, причем войдут шесть постоянных интеграций. Они определяются по „начальному состоянию" (§ 10) материальной точки, т. е. по ее положению и скорости для момента $t = 0$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0, \tag{63}$$

которые как раз представляют шесть требующихся условий. Вообще под термином „состояние" материальной точки в какой-нибудь момент t подразумевают совокупность шести величин, определяющих вектор положения и вектор скорости для этого момента.

Возьмем в качестве первого примера простейший случай, когда сила $\mathbf{F} = 0$. Тогда из (55) следует после однократного интегрирования, если воспользоваться начальными условиями (63):

$$\frac{dx}{dt} = u = u_0, \quad \frac{dy}{dt} = v = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = w = w_0,$$

и после второго интегрирования:

$$x = u_0 t + x_0, \quad y = v_0 t + y_0, \quad z = w_0 t + z_0. \tag{64}$$

Траектория:

$$\frac{x - x_0}{u_0} = \frac{y - y_0}{v_0} = \frac{z - z_0}{w_0}$$

есть прямая, которая задается по начальному положению и по направлению начальной скорости и проходится с равномерной скоростью, как это соответствует принципу инерции. Отсюда следует, что всякое отклонение движения материальной точки, даже при равномерной скорости, указывает на наличие некоторой силы. Для равномерного кругового движения мы убедились в этом из предыдущего.

§ 24. Если одновременно действуют на материальную точку несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$,..., то их можно заменить одной силой $\mathbf{F}$, ибо при всяком движении точки ее ускорение, очевидно, имеет одно определенное значение. Эту „результирующую" силу $\mathbf{F}$ находят, разлагая отдельные силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$,.. по (58) и (59) на их компоненты:

$$X_1 = F_1 \cos\alpha_1, \quad Y_1 = F_1 \cos\beta_1, \quad Z_1 = F_1 \cos\gamma_1, \tag{65}$$

и затем по (19) складывают алгебраически компоненты, соответствующие одному определенному координатному направлению. Тогда получают три компонента:

$$X = \Sigma X_1, \quad Y = \Sigma Y_1, \quad Z = \Sigma Z_1 \tag{66}$$

для результирующей силы **F**. В векторном исчислении обозначают это сложение кратко следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \Sigma \mathbf{F}_1, \quad (67)$$

обозначая через „сумму векторов" или „векториальную" сумму вектор, компоненты которого суть алгебраические суммы компонентов отдельных векторов. Абсолютную величину этой суммы F, которая представляет величину результирующей силы, само собою понятно, надо отличать от суммы величин F_1, F_2, F_3 отдельных сил.

§ 25. Прежде чем перейти к дальнейшим применениям, мы представим общую причинную связь между силой и движением еще несколько нагляднее. Пусть на находящуюся в каком-либо движении точку, скорость которой задана вектором **q**, действует заданная по величине и направлению произвольная сила **F**. Какое влияние производит эта сила на следующее затем движение? Если сила $\mathbf{F} = 0$, то точка двигалась бы с равномерной скоростью по прямой линии далее, но это только в таком случае. Отсюда следует, что **F** стоит в определенной связи с отклонением движения от равномерности и от прямолинейности.

Какая доля **F** производит отклонение от равномерности, т. е. изменение абсолютной величины $(\mathbf{q}) = q$, и какая доля — отклонение от прямолинейности, т. е. изменение направления (λ, μ, ν) **q**?

Ответ на это получается всего проще из следующего вычисления. Если мы в уравнениях (55) заменим величины u, v, w по (42) и (45) через $q\frac{dx}{ds}$, $q\frac{dy}{ds}$, $q\frac{dz}{ds}$, то по выполнении диференцирования по t находим:

$$\left.\begin{aligned} X &= m\frac{dq}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} + mq^2\frac{d^2x}{ds^2}, \\ Y &= m\frac{dq}{dt}\cdot\frac{dy}{ds} + mq^2\frac{d^2y}{ds^2}, \\ Z &= m\frac{dq}{dt}\cdot\frac{dz}{ds} + mq^2\frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Обозначим теперь первые слагаемые в этих уравнениях через X_1, Y_1, Z_1, а вторые—через X_2, Y_2, Z_2; в таком случае мы можем по (67) рассматривать **F** как результирующую двух отдельных сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, компоненты которых представляются шестью названными выражениями, т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (69)$$

Первая сила имеет абсолютную величину:

$$F_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = m\left(\frac{dq}{dt}\right), \quad (70)$$

и ее направление совпадает с направлением элемента кривой ds или скорости $\mathbf{q}$.

Вторая сила $\mathbf{F}_2$ имеет абсолютную величину:

$$F_2 = mq^2 \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}, \tag{71}$$

и ее направление характеризуется отношениями:

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2}. \tag{72}$$

Обе силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ взаимно перпендикулярны, ибо;

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \tag{73}$$

как это следует из диференцирования тождества:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \tag{73a}$$

Следовательно, мы разложили здесь силу $\mathbf{F}$ на два компонента $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, из которых первый действует в направлении движения, а второй—в перпендикулярном к нему направлении; при этом между всеми нормалями к кривой направление (72) есть направление „главной нормали" или той нормали, которая лежит в „плоскости кривизны" или в „соприкасающейся" плоскости кривой, т. е. в той плоскости, которая имеет с кривой общими три бесконечно близкие смежные точки. Эти три точки определяют также круг, который возможно ближе совпадает с кривой и радиус которого поэтому называется радиусом ϱ кривизны кривой. Его обратная величина равна корню квадратному в формуле (71):

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{74}$$

Все эти выводы мы можем формулировать физически следующим образом: чтобы найти влияние, которое производит какая-либо произвольно заданная сила $\mathbf{F}$ на движущуюся с какой-либо произвольно заданной скоростью $\mathbf{q}$ материальную точку, надо разложить силу $\mathbf{F}$ на два компонента —параллельно и перпендикулярно к направлению скорости. Первый компонент, „тангенциальная" сила $\mathbf{F}_1$, дает по (70) по своей абсолютной величине F_1 изменение величины скорости:

$$\frac{dq}{dt} = \pm \frac{F_1}{m}, \tag{74a}$$

где знак плюс или минус имеет место смотря по тому, одинаково ли направление $\mathbf{F}_1$ с направлением скорости, или противоположно. Второй компонент, „нормальная" сила $\mathbf{F}_2$, дает своим направлением главную нормаль траектории и тем самым плоскость кривизны, а своей абсолютной величиной F_2 по (81) и (74) — радиус кривизны:

$$\varrho = \frac{mq^2}{F_2}. \tag{75}$$

Так как нормальная сила направлена к центру круга кривизны, „центру кривизны“, то она часто называется „центростремительной“. Это название, однако, небезупречно, потому что оно легко вызывает представление о том, как будто бы эта сила действует в направлении наперед заданной цели, к центру кривизны. Но положение дела как раз обратное: первоначально заданной является сила $\mathbf{F}_2$, а кривизна производится силой, как нечто вторичное, — она зависит по (75) кроме силы также еще от скорости движущейся точки. Чем быстрее движется точка, тем больше ϱ и тем меньше кривизна.

Для того, кто не освоился с употребленными здесь аналитическими соотношениями, касающимися главной нормали и радиуса кривизны пространственной кривой, можно вывести приведенные выше математические положения также следующим, более геометрическим путем. Из (56) получается путем диференцирования по t, если принять во внимание (42a):

$$X' = m\frac{d}{dt}(q\cos\varepsilon) = m\cdot\frac{dq}{dt}\cos\varepsilon - mq\sin\varepsilon\,\frac{d\varepsilon}{dt}, \tag{76}$$

где X' означает компонент силы $\mathbf{F}$ в произвольно выбранном постоянном направлении x', а ε — угол, который образует это направление с направлением скорости $\mathbf{q}$.

Смотря по тому, совпадает ли постоянное направление x' с касательной ($\varepsilon = 0$), или с главной нормалью $\left(\varepsilon = \frac{\pi}{2},\ d\varepsilon = -\frac{ds}{\varrho}\right)$, или с „бинормалью“ $\left(\varepsilon = \frac{\pi}{2},\ d\varepsilon = 0\right)$ траектории в какой-либо определенной точке, из (76) получается тангенциальная сила, или нормальная, или нуль, и тем самым все предыдущие выводы.

Связь между тангенциальной силой и компонентом ускорения $\frac{dq}{dt}$, очевидно, есть обобщение закона (8) для прямолинейного движения, связь между нормальной силой и радиусом кривизны есть обобщение закона (62) для равномерного кругового движения.

§ 26. Теперь мы рассмотрим движение материальной точки под действием одной только силы тяжести, т. е. ту же задачу, что и в § 10, только с тем различием, что теперь начальная скорость точки q_0 может быть направлена и не вертикально, а под каким угодно углом λ_0 $\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ к горизонту. Очевидно, движение происходит в той вертикальной плоскости, которая определяется направлением начальной скорости. Если, следовательно, мы расположим, как обычно, ось z-ов по направлению вверх, ось x-ов — в плоскости движения и начало координат—в начальном положении точки, то полные уравнения движения (55) будут иметь вид:

$$X = 0 = m \cdot \frac{du}{dt}, \quad Z = -mg = m \cdot \frac{dw}{dt} \tag{76a}$$

с начальными условиями для $t = 0$:

$$x_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad u_0 = q_0 \cos \lambda_0, \quad w_0 = q_0 \sin \lambda_0.$$

Первая интеграция дает, если принять во внимание начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = q_0 \cos \lambda_0, \\ w &= \frac{dz}{dt} = -gt + q_0 \sin \lambda_0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Вторая интеграция дает:

$$\left.\begin{aligned} x &= q_0 \cos \lambda_0 \cdot t, \\ z &= -\frac{1}{2} gt^2 + q_0 \sin \lambda_0 \cdot t. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Исключая отсюда t, получаем уравнение траектории:

$$z = -\frac{g}{2q_0^2 \cos^2 \lambda_0} \cdot x^2 + \operatorname{tg} \lambda_0 \cdot x, \tag{79}$$

т. е. параболу, ось которой параллельна оси z-ов (черт. 5).

Ее вторая точка пересечения с осью x-ов дает „дальность полета":

$$OA = \frac{q_0^2 \sin(2\lambda_0)}{g},$$

ее максимум $\left(\frac{dz}{dx} = 0\right)$ дает „высоту поднятия":

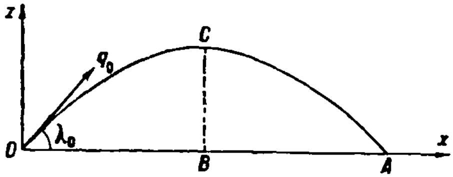
$$BC = \frac{q_0^2 \sin^2 \lambda_0}{2g}.$$

Если принять, что q_0 постоянно, а λ_0 переменно, то наибольшая дальность полета получится для $\lambda_0 = \frac{\pi}{4}$, наибольшая высота поднятия—для $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$.

Чтобы попасть в определенную цель (x_1, z_1), нужно так выбрать λ_0, чтобы уравнение (79) удовлетворялось значениями $x = x_1$ и $z = z_1$. Это дает для $tg\,\lambda_0$ квадратное уравнение, т. е. для λ_0 существуют или два значения или ни одного действительного, за исключением предельного случая. Таким образом при заданной начальной скорости можно попасть в цель двумя различными путями или, если она очень удалена, вообще нельзя в нее попасть.

Замечательно еще соотношение, которое дает величину скорости q точки в определенном месте (x, z). Оно получается исключением t из (77) и (78) и выражается очень просто:

$$q^2 + 2gz = q_0^2. \qquad (80)$$



Черт. 5.

Скорость q зависит, следовательно, только от высоты z, и парабола расположена не только симметрично по отношению к ее оси, но и движение по ней происходит симметрично, так как в двух точках, для которых z получает одинаковое значение, величина скорости также одинакова.

§ 27. Чтобы принять в расчет сопротивление воздуха, нужно кроме тяжести ввести еще вторую силу, которая для каждого момента направлена против скорости в этот момент и величина которой W зависит некоторым образом от q. Тогда уравнения движения представятся в следующем виде, если принять во внимание (66):

$$\left.\begin{aligned} X &= -W\frac{dx}{ds} = -W\frac{u}{q} = m\frac{du}{dt}, \\ Z &= -mg - W\frac{dz}{ds} = -mg - W\frac{w}{q} = m\frac{dw}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Интегрирование их может быть произведено только, если известна W в функции от q. Для малых скоростей W пропорциональио q (ср. § 13), для больших скоростей из опыта известно, что W изменяется с q быстрее, чем это требует простая пропорциональность. Траектория уже будет не параболой, а „баллистической кривой". Обратно, измерение ее может служить для того, чтобы определить W как функцию от g.

ГЛАВА III

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ СИЛЫ. ПОТЕНЦИАЛ

§ 28. Прежде чем перейти к интегрированию уравнений движения материальной точки, нужно раньше всего изучить силу, которая на нее действует; этой задаче и посвящена настоящая глава. Из всех сил природы наилучшим образом изучены центральные силы (§ 12), а из них важнейшими являются те, величина которых изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, как в случае ньютонова тяготения. Поэтому с них мы и начнем наше изучение. Вопрос о происхождении тяготения мы можем оставить здесь совершенно в стороне; значение закона тяготения зависит не от того, каков будет ответ на этот вопрос; дело в том, что закон тяготения в очень простом и очень точном выражении охватывает в тончайших деталях все движения небесных тел.

По ньютонову закону тяготения всякая материальная точка с массой m притягивается другой материальной точкой с массой μ, находящейся на расстоянии r, с силой:

$$F = f \cdot \frac{m\mu}{r^2}\,. \tag{82}$$

При этом f означает гравитационную постоянную, абсолютную или универсальную константу, числовая величина которой, конечно, зависит от единиц, принятых для массы, длины и времени; размерность f по (8а):

$$\left[\frac{l^3}{mt^2}\right]. \tag{83}$$

(Числовое значение f в *см, г, сек* мы вычислим позже, см. § 34.)

Если бы мы не приняли уже произвольного определения для единицы массы, то не было бы никаких препятствий для того, чтобы определить единицу массы таким образом, чтобы

$$f = 1.$$

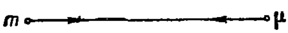
Тогда гравитационная постоянная была бы отвлеченным числом, а масса была бы не независимой величиной, а имела бы размерность:

$$\left[\frac{l^3}{t^2}\right].$$

Определенная таким образом единица массы употребляется благодаря некоторым удобствам в астрономии и поэтому называется „астрономической единицей массы". Из этого снова ясно, что размерность какой-либо физической величины не есть свойство, связанное с существом ее, но представляет просто некоторую условность, определяемую выбором системы измерений. Если бы на эту сторону вопроса достаточно обращали внимания, то физическая литература, в особенности касающаяся системы электромагнитных измерений, освободилась бы от массы бесплодных разногласий.

§ 29. Выражение (82) дает не только силу, с которой точка m притягивается точкой μ, но оно представляет также силу, с которой точка μ притягивается точкой m, как, впрочем, можно заключить из симметричного состава этого выражения. Это представляет частный случай третьей аксиомы Ньютона—принципа действия и противодействия, который вообще утверждает, что каждой силе, с которой одна материальная точка действует на вторую, соответствует равновеликая ей обратно направленная сила, с которой вторая точка действует на первую. Камень, падающий на землю, притягивает землю с той же силой, с которой он сам притягивается землей. То обстоятельство, что земля не движется заметно по направлению к камню, происходит от непомерно большой массы земли по сравнению с массой камня, вследствие чего по (8) земля получает исчезающе малое ускорение под действием силы веса камня.

Третья аксиома Ньютона в самом общем виде может быть сведена к другим принципам (ср. § 129). Для настоящего частного случая достаточно следующего соображения. Вообразим себе, что две материальные точки m и μ соединены друг с другом неизменно, например укреплены на концах несжимаемого и нерастяжимого стержня, совершенно свободного в своих движениях, с бесконечно малою массой. Тогда, если бы производимые двумя точками друг на друга силы притяжения, изображенные на черт. 6 стрелками, не были равными, то вся система должна бы двигаться в сторону большой силы, и так как при этом расстояние r, а следовательно и силы остаются постоянными, то их разность оставалась бы постоянной, и поэтому скорость системы с течением времени возросла бы безгранично. Но ничего подобного в природе произойти не может.



Черт. 6.

§ 30. Обозначим координаты точки m (черт. 6) через x, y, z, координаты точки μ — через ξ, η, ζ; тогда слагающие силы тяготения, действующей на m, будут равны:

$$\left.\begin{aligned} X &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\xi-x}{r}, \\ Y &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\eta-y}{r}, \\ Z &= f\frac{m\mu}{r^2}\cdot\frac{\zeta-z}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

где
$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2. \tag{85}$$

Как легко можно убедиться из рассмотрения простых частных случаев, эти выражения верно дают знак слагающих для всех положений обеих точек, если r считать всегда положительным.

Если точка m притягивается одновременно несколько другими точками с массами μ_1, μ_2, μ_3,..., то слагающие результирующей силы, действующей на нее, по (66) и (84) равны:

$$X = fm\cdot\sum\frac{\mu_1(\xi_1-x)}{r_1{}^3} \tag{86}$$

и т. д., причем суммирование распространяется на все индексы 1, 2, 3,...

§ 31. Теперь мы предположим, что притягивающие массы заполняют сплошь некоторый конечный объем, т. е. мы вычислим действие тяготения, производимого конечным материальным телом на материальную точку. Эта задача может быть сведена к предыдущей, если разложить материальное тело при помощи бесконечного числа плоскостей, параллельных координатным плоскостям, на бесконечное число элементарных объемов, каждый с массой μ, которые могут быть рассматриваемы как материальные точки. Чтобы найти μ, представим себе сначала, что тело „однородно", т. е. содержит в равных объмах одинаковые массы. Тогда отношение какой-либо части массы к объему, в котором она содержится, есть постоянная величина, равная частному от деления массы M всего тела на его объем V:

$$\frac{M}{V} = k.$$

Постоянная k есть плотность тела.

Но если тело неоднородно, то отношение какой-либо части массы ΔM к объему ΔV, в котором она содержится, принимают за „среднюю плотность" тела в рассматриваемом объеме. Средняя плотность вообще зависит от положения, величины и формы соответственного объема. Если теперь представить себе, что объем ΔV безгранично уменьшается до бесконечно малого элемента объема dV, причем и содержащаяся в нем масса сокращается до массы материальной точки μ, то средняя плотность перейдет в местную плотность:

$$\frac{\mu}{dV} = k, \tag{87}$$

которая зависит только от места точки (ξ, η, ζ), но не от величины и формы элемента объема:

$$dV = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta. \tag{88}$$

Если k дано в функции ξ, η, ζ, то распределение массы во всем теле совершенно определено. Масса всего тела по (87) равна:

$$M = \Sigma\mu = \int k\, dV. \tag{89}$$

Подстановка значения μ из (87) в (86) дает слагающие силы притяжения, которую испытывает материальная точка m со стороны сплошного материального тела данной плотности k:

$$X = fm \int \frac{(\xi - x)\, k\, dV}{\mathrm{r}^3} \text{ и т. д.,} \tag{90}$$

где

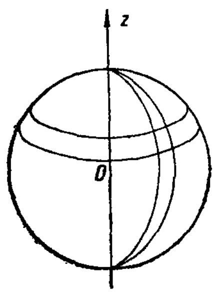
$$\mathrm{r} = +\sqrt{(x-\xi)^2 + (^2(y-\eta + (z-\zeta)^2}. \tag{91}$$

Интеграция распространяется на все точки ξ, η, ζ тела, причем k представляет заданную функцию от ξ, η, ζ, тогда как величины x, y, z при интегрировании остаются постоянными.

§ 32. Вычислим в качестве примера притяжение, которое оказывает материальный шар заданной плотности k на материальную точку m. Для выполнения интеграции в (90) целесообразно ввести вместо прямолинейных координат ξ, η, ζ полярные координаты ϱ, ϑ, φ, значение которых можно уяснить себе из черт. 3 § 17. Если полярные координаты ϱ, ϑ, φ относятся к точке P, то ϱ (положительное) представляет отрезок OP, ϑ (между 0 и π) — угол между осью z-ов и направлением OP, φ (между 0 и 2π) — угол между xz плоскостью AOZ и плоскостью BOZ, содержащей точку P, считая в направлении от плоскости xz к плоскости yz.

Поэтому между полярными координатами и прямолинейными (ξ, η, ζ) точки P получаются однозначные соотношения:

$$\xi = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi,\quad \eta = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi, \zeta = \varrho \cos\vartheta. \tag{92}$$



Черт. 7.

Соответственно с введенными полярными координатами мы произведем и подразделение тела на элементарные объемы dV. Прежде всего мы разделим весь шар на бесконечно тонкие концентрические шаровые слои, один из которых пусть имеет внутри радиус ϱ, а вне радиус $\varrho + d\varrho$. Вычислим притяжение, оказываемое массой, содержащейся в этом шаровом слое, на точку m, т. е. распространим интегрирование в (90) только на элементы объема dV этого шарового слоя. Тогда ϱ и $d\varrho$ при этом интегрировании останутся постоянными, и нам нужно интегрировать только по ϑ и φ. Чтобы выразить dV в полярных координатах, мы разделим, далее, шаровой слой на части бесконечно большим числом бесконечно близких поверхностей $\vartheta = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$. Первые суть простые конусы вращения около оси Z с вершиной в O, последние полуплоскости, ограниченные осью z-ов. Два соседние конуса ϑ и $\vartheta + d\vartheta$ вырезают на шаре ϱ два параллельных круга широты, а две соседние плоскости φ и $\varphi + d\varphi$ вырезают два полукруга долготы (меридианы) (черт. 7). Таким образом ограничивается четырехугольный элемент поверхности, площадь которого представляется произведением элемента дуги на круге долготы $\varrho\, d\vartheta$ на элемент дуги на круге широты $\varrho \sin\vartheta d\varphi$. Отсюда получается через умножение на $d\varrho$ элемент объема шарового слоя:

$$dV = \varrho^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot d\varrho. \tag{93}$$

Чтобы облегчить выполнение вычислений, предположим, что притягиваемая точка m находится на оси z-ов (положительной), что, конечно, не вносит никакого ограничения относительно общности рассматриваемого физического явления, т. е.

$$x = 0,\ y = 0,\ z > 0. \tag{94}$$

Тогда, как легко усмотреть из физических оснований, $X=0$, $Y=0$, и все притяжение сводится к слагающей Z, которая на основании (90), (92) и (93) выразится следующим образом:

$$Z=fm\varrho^2\,d\varrho\cdot\int\int\frac{\varrho\cos\vartheta-z}{r^3}\cdot k\sin\vartheta\cdot d\vartheta\cdot d\varphi.$$

Предположим, что шаровой слой однороден, т. е, плотность k не зависит от ϑ и φ. Тогда можно k вынести за знак интеграла и произвести интегрирование по φ от 0 до 2π:

$$Z=2\pi fmk\,\varrho^2\,d\varrho\cdot\int\limits_0^\pi\frac{\varrho\cos\vartheta-z}{r^3}\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Последний интеграл легко вычисляется, если принять r за переменное при интеграции. При этом по (91), (92) и (94) имеем:

$$r^2=\varrho^2+z^2-2\varrho z\cos\vartheta. \tag{95}$$

Отсюда при постоянном ϱ и z:

$$r\,dr=\varrho z\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{96}$$

Следовательно, после введения r и dr вместо ϑ и $d\vartheta$:

$$Z=2\pi fmk\varrho\,d\varrho\cdot\int\limits_{r_0}^{r_1}\left(\frac{\varrho^2+z^2-r^2}{2z}-z\right)\cdot\frac{dr}{zr^2}.$$

Здесь r_0 и r_1 — значения r для $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$, следовательно по (95), так как $r>0$:

$$r_0=(z-\varrho),\quad r_1=z+\varrho. \tag{97}$$

Выполнение интегрирования дает:

$$Z=-\frac{\pi fmk\varrho\,d\varrho}{z^2}\cdot\left\{r_1-r_0-(\varrho^2-z^2)\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)\right\}.$$

Чтобы можно было задать значение для r_0, нужно различать два случая.

1. Случай, когда $z>\varrho$, т. е. точка m находится вне шарового слоя.

Тогда

$$r_0=z-\varrho,$$

и

$$Z=-\frac{4\pi fmk\varrho^2 d\varrho}{z^2}=-\frac{fm\cdot dM}{z^2}, \tag{97a}$$

если обозначить через dM массу шарового слоя. Притяжение однородным шаровым слоем материальной точки, лежащей вне его, таково, как если бы масса слоя была сосредоточена в центре шара.

2. Случай, когда $z < \varrho$, т. е. точка m находится внутри полого пространства.

Тогда

$$r_0 = \varrho - z,$$
$$Z = 0. \tag{97b}$$

Притяжение однородным шаровым слоем материальной точки внутри него, таким образом, равно нулю.

§ 33. Результаты, полученные для притяжения однородного бесконечно тонкого шарового слоя можно непосредственно применить для вычисления притяжения шарового слоя конечной толщины, причем, как частный случай, включается полый шар. Нужно только предполагать, что плотность k не зависит от углов ϑ и φ, между тем как k может зависеть от радиуса вектора ϱ как угодно.

Мы ограничимся здесь рассмотрением однородного полого шара с радиусами ϱ_1 и $\varrho_2 > \varrho_1$, и вычислим его притяжение на точку m на расстоянии r_0 от центра шара. Тогда нужно различать три случая.

1. Случай, когда m лежит вне полого шара:

$$r_0 > \varrho_2.$$

В этом случае каждый из концентрических бесконечно тонких шаровых слоев действует так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре шара. Следовательно, таким же образом действует и вся масса полого шара:

$$M = \frac{4}{3}\pi\left(\varrho_2^3 - \varrho_1^3\right)\cdot k,$$

и притяжение будет:

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi f m k \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{r_0^2}. \tag{98}$$

2. Случай, когда точка m лежит где-либо во внутреннем полом пространстве:

$$r_0 < \varrho_1.$$

Тогда притяжение:

$$F_2 = 0. \tag{99}$$

3. Случай, когда точка m лежит внутри слоя:

$$\varrho_2 > r_0 > \varrho_1.$$

Тогда проведем через точку m концентрическую шаровую поверхность радиуса r_0, которая разделит весь полый шар на две части: внутренний полый шар с радиусами ϱ_1 и r_0, и внешний полый шар с радиусами r_0 и ϱ_2. Притяжение последнего по (99) равно нулю, следовательно, остается только притяжение первого, которое по (98) выражается:

$$F_3 = \frac{4}{3}\pi f m k \cdot \frac{r_0^3 - \varrho_1^3}{r_0^2}. \tag{100}$$

Интересно исследовать, как изменяется величина силы притяжения F, если притягиваемая точка m из бесконечного удаления $(r_0 = \infty)$ приближается к полому шару и проникает через слой внутрь полого пространства до $r_0 = 0$. Вначале имеет место формула (98), затем — формула (100) и, наконец, — формула (99). При этом особенно важно, что для предельных случаев $r_0 = \varrho_2$ и $r_0 = \varrho_1$ формулы, дающие решение, приводят каждый раз к одной и той же величине, именно для $r_0 = \varrho_2$:

$$F_1 = F_2 = \frac{4}{3}\pi fmk \cdot \frac{\varrho_2{}^3 - \varrho_1{}^3}{\varrho_2{}^2}, \qquad (101)$$

а для $r_0 = \varrho_1$:

$$F_3 = F_2 = 0.$$

Сила притяжения F изменяется, следовательно, везде непрерывно с изменением положения точки m, даже если она проходит через поверхность притягивающей массы. Это положение, очевидно, имеет общее значение также и для случая нешарообразной массы, ибо если бы притяжение F на поверхности какой-либо притягивающей массы было прерывным, т. е. по обе стороны имело различные величины, то такой скачок мог бы происходить только от притяжения тех лежащих на поверхности частей массы, которые расположены вблизи точки m; а эти последние с достаточной здесь точностью могут быть принимаемы за часть однородного шара соответственной плотности, для какового случая непрерывность доказана выше.

Для целого шара радиуса R, $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = R$, и притяжение точки m на расстоянии $r_0 < R$ от центра по (100):

$$F = \frac{4}{3}\pi fmkr_0, \qquad (102)$$

т. е. притяжение, оказываемое однородным шаром на материальную точку внутри него, прямо пропорционально ее расстоянию от центра и не зависит от радиуса шара. Наибольшей величины это притяжение достигает на поверхности шара.

§ 34. Важный пример для найденных положений представляет действие тяготения земли на материальную точку m на ее поверхности; это действие дает вес $G = mg$ материальной точки (§ 10). Конечно, земля, наверное, неоднородна, но ее плотность k зависит, собственно говоря, только от ϱ, но не от направления (ϑ, φ), так что земной шар можно себе представить разложенным на концентрические бесконечно тонкие однородные шаровые слои. Поэтому притяжение его на точку m на его поверхности будет:

$$\frac{fmM}{R^2} = mg,$$

где R означает радиус, а M — массу земли, или

$$\frac{f \cdot M}{R^2} = g. \qquad (103)$$

Здесь g и R можно считать непосредственно измеренными; по ним тогда определяется величина fM. Но оба множителя в fM нельзя разделить без особых измерений. Таким образом задача об определении массы земли по существу тождественна с задачей об определении гравитационной постоянной f. Этого достигают, измеряя действия тяготения какой-либо известной массы, например горы определенной формы и плотности или известной массы свинца. Массу земли M обыкновенно выражают таким образом, что приводят ее среднюю плотность:

$$k_m = \frac{M}{V} = 5{,}5\left[\frac{г}{см^3}\right]. \tag{104}$$

Так как плотность расположенных на поверхности земли горных пород составляет только около 2,5, то плотность земли сильно растет по мере углубления к ее центру.

Числовая величина (104) соответствует по (103) величине гравитационной постоянной:

$$f = 6{,}7 \cdot 10^{-8}\left[\frac{см^3}{г \cdot сек^2}\right] \tag{105}$$

§ 35. Мы возвратимся теперь к общему случаю произвольных центральных сил, причем рассмотрим результирующее притяжение произвольно расположенной системы масс на какую-нибудь отдельную материальную точку P. Действующие материальные точки, координаты которых пусть будут опять ξ, η, ζ, мы будем считать неподвижными, а, наоборот, точку P, на которую производится действие и которую поэтому мы будем называть „точкою воздействия“, будем считать перемещающейся, и потому ее координаты x, y, z переменными. Вопрос заключается в том, как изменяется по величине и направлению притяжение, если точка воздействия P как-либо перемещается.

Для общности мы предположим, что притяжение действует не по ньютоновскому закону тяготения, а по какому-либо другому закону, причем величину притяжения, которое точка ξ, η, ζ производит на точку P, мы положим равным какой-либо функции расстояния $f(r)$. Для ньютоновского закона тяготения $f(r)$ переходит тогда в (82).

Для общего случая слагающие результирующего притяжения системы материальных точек ξ, η, ζ на точку P выражаются по образцу выражений (84) и (86) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma f(r_1)\cdot\frac{\xi_1 - x}{r_1}, \\ Y &= \Sigma f(r_1)\cdot\frac{\eta_1 - y}{r_1}, \\ Z &= \Sigma f(r_1)\cdot\frac{\xi_1 - z}{r_1}. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Суммирование распространяется на притягивающие массы 1, 2, 3... Из этих выражений можно получить и отталкивающие силы, для этого нужно только принять f отрицательным. Если действующие массы распределены непрерывно в каком-либо конечном пространстве, то вместо сумм войдут интегралы, как это было выше в § 31. Для этого случая имеют место нижеследующие соображения.

§ 36. Чтобы установить влияние смещения точки воздействия P на величину и направление действующей на нее силы притяжения, мы можем исследовать компоненты X, Y, Z результирующей силы как функции координат x, y, z точки воздействия. При этом получается важный результат, что три функции X, Y, Z могут быть всегда сведены к одной только функции. Именно положим:

$$\int f(r)\cdot dr = F(r) \tag{107}$$

$$U = F(r_1) + F(r_2) + \ldots = \Sigma F(r_1), \tag{108}$$

тогда получается, если мы продиференцируем таким образом определенную функцию U по x:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum \frac{\partial F(r_1)}{\partial r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x} = \sum f(r_1)\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x}.$$

Но из (85), взяв частную производную по x, имеем:

$$r_1\frac{\partial r_1}{\partial x} = x - \xi_1. \tag{109}$$

Вставив это в последнее уравнение и приняв во внимание (106), мы получим соотношение:

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ \text{а также}\quad Y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ и } Z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

Функция U, производные которой по x, y, z, взятые с отрицательным знаком, представляют слагающие силы, называется **потенциалом** действующих на точку P масс. Вследствие неопределенности нижнего предела в интеграле (107) постоянная в потенциале остается неопределенной. Эта постоянная, очевидно, не имеет никакого физического значения.

Для частного случая ньютонова тяготения $f(r)$ переходит в (82); поэтому по (107):

$$F(r) = -f\frac{m\mu}{r},$$

и гравитационный потенциал имеет вид, по (108):

$$U = -fm\sum\frac{\mu_1}{r_1}. \tag{111}$$

Здесь постоянная для простоты определена так, что U обращается в нуль, когда точка воздействия P удаляется на бесконечное расстояние от всех притягивающих масс.

Введением потенциала трактование всей задачи о притяжении необычайно упрощается, так как приходится вместо трех функций исследовать только одну. Кроме того, потенциал по сравнению с силою представляет еще несколько выгод: например, он имеет простое и симметричное строение, и при сложении действий нескольких масс потенциалы их складываются, тогда как силы должны быть прежде разложены на составляющие. Подобные величины, как потенциал U и масса m, не обладающие направлением, но определяемые вполне одной только численной величиной, называются в отличие от векториальных величин „скалярными“.

Если притягивающие массы распределены в пространстве непрерывно с плотностью k, являющейся заданной функцией от ξ, η, ζ, то по (87) сумма (111) превращается в интеграл:

$$U = -fm\int\frac{kdV}{r}. \tag{112}$$

Здесь dV представляется выражением (88), а r — (91), интегрирование распространяется на все точки ξ, η, ζ пространства, заполненного притягивающей массой. Так как $r>0$ везде, то гравитационный потенциал U — существенно отрицательная величина.

§ 37. Чтобы сделать ясными выгоды введения потенциала, мы разберем теперь случай, как выше—в § 32: притяжение бесконечно тонким однородным шаровым слоем точки воздействия, находящейся на положительной оси z-ов, при помощи потенциала. Обозначения остаются те же, как там. Тогда по (111) и (93):

$$U = -fmk\varrho^2 d\varrho\iint\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{r}.$$

Интегрирование по φ от 0 до 2π можно произвести непосредственно. Вместо ϑ введем по (95) и (96) опять r как переменное интеграции и тогда легко получим:

$$U = -2\pi fmk\varrho d\varrho\cdot\frac{r_1-r_0}{z},$$

где r_0 и r_1 даются (97).

Опять мы должны различать два случая.

1. Случай, когда $z>\varrho$, т. е. точка воздействия находится вне шарового слоя. Тогда

$$r_0 = z-\varrho,$$

$$U = -\frac{4\pi fmk\varrho^2\, d\varrho}{z} = -f\frac{m\cdot dM}{z}, \tag{113}$$

где dM снова обозначает массу шарового слоя. Таким образом потенциал однородного шарового слоя в точке вне его лежащей таков, как если бы вся масса слоя была сосредоточена в центре шара, и сила притяжения по (110) равна:

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -f\frac{m \cdot dM}{z^2}$$

в согласии с (97a).

2. Случай, когда $z < \varrho$, т. е. точка воздействия находится внутри полого пространства. Тогда $r_0 = \varrho - z$, и

$$U = -4\pi f m k \varrho \, d\varrho = -f \cdot \frac{m \cdot dM}{\varrho}. \tag{114}$$

Таким образом потенциал однородного шарового слоя в точке внутри полого пространства не зависит от ее расстояния z от центра и такой же величины, как если бы точка находилась в центре. В самом деле, тогда она одинаково удалена от всех масс слоя, и потенциал, как сумма отдельных потенциалов, получается простым делением всей массы dM всех элементов на общее расстояние ϱ.

Для силы притяжения получается опять по (107):

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

в согласии с (97b).

§ 38. Вычислим теперь также потенциал однородного полого шара с радиусами ϱ_1 и $\varrho_2 > \varrho_1$ в точке m на расстоянии r_0 от центра. Здесь мы снова должны, как в § 33, различать три случая.

1. Случай, когда m лежит вне полого шара:

$$r_0 > \varrho_2.$$

Тогда каждый концентрический бесконечно тонкий шаровой слой действует так же, как если бы его масса была сосредоточена в центре. Следовательно, так же действует и вся масса полого шара и потенциал будет равен:

$$U_1 = -\frac{4\pi}{3} f m k \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{r_0}. \tag{115}$$

2. Случай, когда m лежит где-либо внутри полого пространства:

$$r_0 < \varrho_1.$$

Тогда потенциал не зависит от r_0 и по величине равен потенциалу в центре шара; интегрируя по (114) по всем шаровым слоям, имеем:

$$U_2 = -4\pi f m k \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varrho \, d\varrho,$$

$$U_2 = -2\pi f m k (\varrho_2^2 - \varrho_1^2). \tag{116}$$

3. Случай, когда m лежит внутри слоя:

$$\varrho_2 > r_0 > \varrho_1.$$

В этом случае проведем через точку m концентрическую шаровую поверхность радиуса r_0, которая разделит весь полый шар на две части — внутренний полый шар с радиусами ϱ_1 и r_0 и внешний полый шар с радиусами r_0 и ϱ_2. Потенциал внутреннего полого шара получается из (115), потенциал внешнего — из (116), с соответственной заменой радиусов; таким образом искомый потенциал как сумма обоих отдельных потенциалов представится в виде:

$$U_3 = -\frac{2\pi}{3} f m k \left(3\varrho_2^2 - \frac{2\varrho_1^3}{r_0} - r_0^2\right). \tag{117}$$

Если точка воздействия, приближаясь из бесконечности ($r_0 = \infty$), подходит к полому шару и проникает через материальный слой внутрь полого пространства, то имеет место сначала формула (115), затем формула (117), и наконец формула (116). Для предельных случаев $r_0 = \varrho_2$ и $r_0 = \varrho_1$ формулы дают каждый раз ту же самую величину U, именно для $r_0 = \varrho_2$ величину:

$$U_1 = U_3 = -\frac{4\pi}{3} f m k \left(\varrho_2^2 - \frac{\varrho_1^3}{\varrho_2}\right)$$

и для $r_0 = \varrho_1$ величину:

$$U_3 = U_2 = -2\pi f m k (\varrho_2^2 - \varrho_1^2). \tag{118}$$

Следовательно, потенциал U изменяется везде непрерывно с изменением положения точки воздействия m даже и в том случае, если она проходит через поверхность притягивающих масс; легко можно усмотреть путем таких же рассуждений, как в § 33, что это положение имеет место также для случая нешарообразной и неоднородной массы.

Для целого шара радиуса R, $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = R$, и гравитационный потенциал для точки m на расстоянии $r_0 < R$ от центра будет по (117):

$$U = -\frac{2\pi}{3} f m k (3R^2 - r_0^2). \tag{119}$$

§ 39. Теперь мы рассмотрим несколько ближе физическое значение потенциала, при этом не будем ограничиваться тяготением, а в соответствии с выражением (108) предположим произвольный закон притяжения. Каждой точке x, y, z пространства, рассматриваемой как точка воздействия, можно приписать определенное значение потенциала U, и по (110) каждый из трех компонентов силы действует в ту сторону, в которую U убывает; например, если U возрастает в сторону положительных x, то X отрицательно. При этом компонент силы тем больше, чем сильнее изменяется U по соответственной координате: сила равна „падению потенциала" в соответственном направлении. Это можно выразить также следующим образом: сила притяжения стремится уменьшить потенциал U.

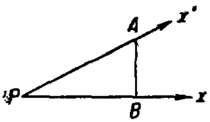
Так как каждое направление может быть выбрано за ось координат, то для всякого направления x' имеет место:

$$X' = -\frac{dU}{dx'}. \tag{120}$$

Чтобы убедиться в этом более аналитическим путем, составим производную:

$$\frac{dU}{dx'} = -\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx'} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx'} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx'}. \tag{120a}$$

Здесь вторые множители в трех произведениях суть косинусы углов ξ', η', ζ', которые образует с осями координат направление x', как можно видеть из черт. 8, где $PA = dx'$, $PB = dx$ и угол при $P = \xi'$. Следовательно, принимая в расчет (110):



Черт. 8.

$$\frac{dU}{dx'} = -(X \cos \xi' + Y \cos \eta' + Z \cos \zeta'),$$

откуда по (56) непосредственно вытекает (120).

Приведенное соображение вместе с тем обнаруживает совершенно общим образом, что производные какой-нибудь скалярной функции U от x, y, z по различным направлениям пространства всегда представляют компоненты вектора, который обозначают как пространственный „градиент U“: grad U. Поэтому выражение (110) мы можем написать коротко в векториальном обозначении:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U. \tag{121}$$

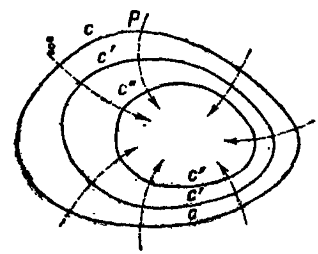
§ **40.** Наилучшее представление о том, как сила притяжения $\mathbf{F}$ зависит по величине и направлению от положения точки воздействия, дает графическое представление. Представим себе, что в каждой точке воздействия отмечается соответствующее ее положению значение потенциала U, и объединим теперь все те точки воздействия, в которых потенциал имеет определенное значение c. Тогда координаты таких точек удовлетворяют уравнению:

$$U = c,$$

т. е. точки образуют поверхность, которая называется „поверхностью постоянного потенциала“ или „поверхностью уровня“. Каждому значению постоянной c соответствует определенная поверхность уровня; изменением c между $-\infty$ и $+\infty$ можно получить все возможные поверхности уровня, которые заполняют все бесконечное пространство. При этом поверхность уровня может также состоять из нескольких совершенно друг от друга отделенных полостей; но две различные поверхности уровня никогда не могут пересекаться.

Если все действующие массы лежат на конечном расстоянии и потенциал массы в бесконечно удаленной точке воздействия равен нулю, как при тяготении, то для всех бесконечно удаленных точек воздействия $U=0$, т. е. бесконечно удаленная сфера есть поверхность уровня. Тогда ни одна из остальных поверхностей уровня не уходит в бесконечность; все они представляют собою замкнутые поверхности (черт. 9), форма которых, естественно, зависит от положения действующих масс.

Изображение поверхностей уровня дает непосредственно наглядное представление о характеристических свойствах силового поля, т. е. о величине и направлении силы **F** в каждой произвольной точке воздействия. Именно допустим, что поверхность уровня $U=c$ проходит через точку воздействия P (черт. 9), и проведем в ней касательную плоскость к поверхности, так что, если dx' означает бесконечно малое смещение точки воздействия в касательной плоскости:



Черт. 9.

$$\frac{dU}{dx'}=0,$$

и по (120): $X'=0$, т. е. слагающая силы **F** в каком-либо направлении в касательной плоскости к поверхности уровня равна нулю, или сила направлена перпендикулярно к касательной плоскости. Если, следовательно, n обозначает нормаль к поверхности уровня, взятую по направлению **F**, то компонент **F** в направлении n представляет полную силу:

$$F=-\frac{dU}{dn}. \tag{122}$$

Величина F в различных точках поверхности уровня различна. Также и в этом отношении изображение поверхностей уровня дает наглядное представление. Рассмотрим две бесконечно близко друг к другу расположенные поверхности уровня $U=c$ и $U=c'$, причем пусть c' немного меньше c. Тогда сила **F** во всех точках P поверхности c действует в направлении от c к c', и величина силы по (122):

$$F=\frac{c-c'}{\Delta},$$

где

$$\Delta=dn,$$

означает расстояние (положительное) обеих поверхностей, т. е. величина силы обратно пропорциональна расстоянию обеих поверхностей. Чем теснее расположены поверхности друг к другу, тем больше сила.

Таким образом поверхности уровня стоят в тесной аналогии с представляемыми на метеорологических картах кривыми изотермами или изобарами, причем там место потенциала занимает температура или давление, отрицательный градиент которых дает величину и направление тока теплопроводности или силы давления.

Кривые, пересекающие систему поверхностей уровня c, c', c' перпендикулярно (на черт. 9 изображены пунктиром), и притом в направлении убывающих потенциалов, называются „силовыми линиями" поля, так как они в каждой своей точке дают направление действующей там силы. Так, например, для действующего по закону тяготения однородного шара поверхности уровня — концентрические сферы, силовые линии — прямые, направленные извне к центру. Если шар имеет внутри концентрическое шарообразное полое пространство, то все это полое пространство представляет своеобразную поверхность уровня, в котором ход силовых линий неопределенный.

Вообще уравнения силовых линий по (110):

$$dx : dy : dz = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{123}$$

Силовая линия не может быть замкнутой, но должна или итти в бесконечность или оканчиваться в особой точке. Силовая линия всегда идет в направлении убывающего потенциала, потенциал же, по его определению (108), в каждой точке пространства имеет единственное вполне определенное значение (если опустить не имеющую значение аддитивную константу); таким образом исключается возможность возвращения силовой линии к ее началу.

§ 41. Рассмотрим, наконец, еще частный случай, когда точка воздействия P находится в равновесии, например в середине между двумя одинаково притягивающими массами; тогда по (110):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \tag{124}$$

т. е. направление силовой линии, проходящий через P, неопределенно. Такая точка равновесия, которую мы обозначим через P_0, есть, следовательно, особая точка в системе поверхностей уровня и силовых линий. Это по (124), например, имеет место, если в P_0 функция U имеет абсолютный максимум или минимум. Тогда легко видеть, что в первом случае равновесие абсолютно неустойчивое, во втором случае равновесие абсолютно устойчивое. Ибо если сместить точку воздействия P немного из ее положения равновесия P_0, то уравнения (124) уже не будут иметь места, и точка придет в движение под влиянием действующей на нее силы в направлении убывающего потенциала.

Если в P_0 потенциал максимум, то вследствие этого для движущейся точки невозможно вернуться в точку равновесия, т. е. равновесие неустойчиво. Обратное произойдет, если в P_0 потенциал минимум.

Однако уравнения (124) могут также иметь место и в том случае, когда U не максимум и не минимум; тогда ответ на вопрос, вернется ли в положение равновесия смещенная точка, зависит от того, в каком направлении происходит смещение.

В этом случае равновесие называется условно неустойчивым или условно устойчивым.

Если, наконец, U внутри конечного пространства постоянно, как в рассмотренном § 38 внутреннем пространстве полого шара, то уравнения (124) имеют место во всем этом пространстве. Тогда равновесие вообще не нарушается при смещении точки воздействия и поэтому называется индиферентным.

§ 42. Предшествующие положения, начиная с § 39, имеют место для всякого произвольного закона притяжения. Теперь мы снова займемся специально ньютоновым законом тяготения. В выражении ньютонового потенциала U, который представляется выражением (111) или (112), смотря по тому, идет ли дело о точечной массе или о массе, распределенной по объему, существенной, характеристичной составной частью является функция, умножаемая на $-fm$, которая поэтому часто называется „потенциальной функцией“ φ в отличие от потенциала U. Выражение этой функции для обоих указанных случаев таково:

$$\varphi = \sum \frac{\mu_1}{r_1} \tag{125}$$

$$\varphi = \int \frac{k dV}{r}. \tag{126}$$

Важнейшее различие обоих этих выражений для потенциальной функции состоит в том, что если точка воздействия x, y, z окажется в одной из действующих масс ξ, η, ζ, то первое выражение вместе со всеми производными бесконечно велико, тогда как второе выражение, как мы видели в § 38, внутри действующих масс конечно и даже при переходе через поверхность остается непрерывным.

Зададим себе вопрос также о производных потенциальной функции φ в (126) по x, y, z. Первые производные дают компоненты силы притяжения, следовательно, они по § 33 везде конечны и непрерывны. Их значения получаются из (126) диференцированием, если вспомнить, что k зависит только от ξ, η, ζ, а не от x, y, z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \frac{(\xi - x) k dV}{r^3} \quad \text{и т. д.,} \tag{127}$$

согласно с (90).

Величина $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ конечна также для внутренней точки, несмотря на r^3 в знаменателе; в этом можно убедиться непосредственно, если выразить dV в полярных координатах с точкой воздействия x, y, z в начале координат. Ибо тогда множитель ϱ^2 в выражении (93) для dV перейдет в r^3, и в (127) останется наряду с заведомо конечными величинами множитель $\frac{\xi - x}{r}$, который меньше единицы.

§ 43. Мы встретимся с иными соотношениями, если перейдем ко вторым производным φ по x, y, z. Ибо если мы снова продифференцируем (127) по x:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\int\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}\right) k dV, \tag{128}$$

то это выражение только тогда имеет определенный смысл, когда r всюду отлично от нуля, т. е. когда точка воздействия лежит вне всех действующих масс. Если x, y, z совпадают с одними из значений ξ, η, ζ, то $r=0$, и введение полярных координат, как в конце предыдущего параграфа, обнаруживает, что каждый член разности в (128) логарифмически бесконечен, вследствие чего величина разности принимает неопределенный вид $\infty - \infty$.

Поэтому мы ограничимся сначала рассмотрением случая, когда точка воздействия лежит вне. Путем аналогичного вычисления $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ и сложения этих трех интегралов, если принять во внимание (85), получится важное, характеристичное для ньютоновой потенциальной функции соотношение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0, \tag{129}$$

которое называется уравнением Л а п л а с а.

§ 44. Теперь перейдем к вопросу о значении $\Delta\varphi$ для точки воздействия внутри действующих масс. Для этого случая выражение (128) непригодно; несмотря на это $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, равно как φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, имеет также внутри масс определенное конечное значение.

Возьмем, например, простой случай однородного шара с радиусом R и с началом координат в центре; для точки x, y, z внутри него по (119):

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} k(3R^2 - x^2 - y^2 - z^2), \tag{130}$$

как это следует из приведенного там выражения для потенциала U, если опустить множитель $-fm$ и принять во внимание, что r_0 представляет расстояние точки воздействия от центра шара. Отсюда следует:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3} k = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

и

$$\Delta\varphi = -4\pi k, \tag{131}$$

независимо от радиуса шара; это уравнение называется уравнением П у а с с о н а.

Мы можем легко обобщить уравнение Пуассона на случай неоднородной массы произвольной формы. Для этой цели вообразим себе вокруг точки воздействия, расположенной внутри массы, очень малый шар, массу которого обозначим через 1 в отличие от остальной массы 2.

Тогда потенциальная функция φ всей массы равна сумме потенциальных фунций для массы 1 и для массы 2: $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ и также $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$.

Но по (129) $\Delta\varphi_2 = 0$, потому что по отношению к массе 2 точка воздействия есть внешняя точка; следовательно остается $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$. Так как шар очень мал, то его без заметной ошибки можно считать однородным и той плотности, которую действующая масса имеет как раз в том месте, где иаходится точка воздействия. Она получится если в $k_{\xi,\eta,\zeta}$, вставить для ξ, η, ζ значение x, y, z. Таким образом отсюда по (131) следует:

$$\Delta\varphi = -4\pi k_{x,y,z}. \tag{132}$$

Уравнение Пуассона можно считать обобщением уравнения Лапласа в следующем смысле: представим себе действующие массы заполняющими без промежутков все пространство с плотностью k, которая в некоторых местах нуль, в других отлична от нуля. Тогда точка воздействия всегда расположена внутри масс, и всюду имеет место уравнение (132). Там, где нет реальных масс, $k = 0$, и вместо пуассонова имеет место лапласово уравнение. Вместе с тем при таком представлении дела ясно, что скачок, который испытывают вторые производные от φ при переходе точки воздействия через поверхность, покрытую массамн, обусловлен скачком, который испытывает при этом переходе плотность k.

§ 45. С математической точки зрения мы видим, что если потенциальная функция φ каких-либо распределенных в пространстве масс задана во всех точках x, y, z пространства, то плотность k этих масс может быть вычислена путем простого однозначного диференцирования, тогда как обратная задача, по плотности k найти потенциальную функцию, есть задача интегрального исчисления. Другими словами, выражение (126):

$$\varphi = \int \frac{k_{\xi,\eta,\zeta} \cdot dV}{r},$$

в котором k для бесконечно удаленной точки ξ, η, ζ принимается за нуль, есть интеграл диференциального уравнения (132), однако не общий интеграл, но такой частный интеграл, который ограничен условием, что φ исчезает, если точка воздействия переместится в бесконечность.

Общее выражение однозначной и вместе с первыми производными непрерывной функции φ, удовлетворяющей диференциальному уравнению (132), имеет вид:

$$\varphi = \int \frac{k dV}{r} + \varphi_0, \tag{133}$$

где φ_0 удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_0 = 0$ во всем бесконечном пространстве; φ_0 всегда можно принимать за потенциальную функцию масс, которые целиком лежат в бесконечности. Так, например, частное значение

$$\varphi_0 = \text{const},$$

которое, очевидно, удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi_0 = 0$, представляет потенциальную функцию однородного шарового слоя бесконечно большого радиуса (ср. § 37).

§ 46. Вычислим еще потенциальную функцию для частного случая, когда плотность действующих масс не зависит от одной из координат, например от ζ. Этот случай осуществляется, если массы распределены цилиндрически параллельно оси z-ов таким образом, что в каждом бесконечно тонком цилиндре плотность постоянна.

Тогда потенциальная функция зависит только от x и y, но не от z, и мы можем поэтому, не нарушая общности, принимать, что точка воздействия лежит в плоскости xy, $z = 0$, почему r^2 переходит в

$$r^2 = \zeta^2 + \varrho^2,$$

где для сокращения положено:

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2. \tag{134}$$

ϱ есть расстояние точки воздействия от той параллели оси z-ов, которая проходит через точку ξ, η. Если воспользуемся еще для dV его выражением (88) и обозначим для сокращения сечение бесконечно тонкого цилиндра:

$$d\xi d\eta = d\sigma, \tag{135}$$

то для искомой потенциальной функции получается по (126):

$$\varphi = \int\int \frac{k_{\xi,\eta}\, d\sigma \cdot d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \varrho^2}}. \tag{136}$$

Выполним сначала интегрирование по ζ. Тогда получим:

$$\varphi = \int k d\sigma \cdot \lg \left[\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \varrho^2} \right]_{-l}^{+l}$$

Здесь l означает половину длины бесконечно тонкого цилиндра, которая принимается настолько большой, что дальнейшее ее увеличение не имеет никакого физического значения. Если примем во внимание, что для достаточно большого l:

$$\lg \frac{l + \sqrt{l^2 + \varrho^2}}{-l + \sqrt{l^2 + \varrho^2}} = \lg \frac{4l^2}{\varrho^2} = 2\lg \frac{2l}{\varrho},$$

то выходит:

$$\varphi = \int k d\sigma \cdot 2\lg \frac{2l}{\varrho} = \text{const} - 2 \int k \lg \varrho \cdot d\sigma.$$

Хотя const бесконечно велика, но ее числовое значение не имеет никакого физического значения (§ 36). Поэтому мы напишем потенциальную функцию в форме:

$$\varphi = -2\int \varkappa_{\xi,\eta} \lg \varrho \cdot d\sigma, \tag{137}$$

и заметим, что в этом выражении исчезло все относящееся к z-направлению, так что его значение относится исключительно к плоскости; поэтому можно φ истолковывать как потенциальную функцию некоторых воображаемых масс, распределенных на плоскости xy с поверхностной плотностью $2k = \varkappa$ для элемента поверхности $d\sigma$ относительно находящейся в той же плоскости точки воздействия, расстояние которой от $d\sigma$ есть ϱ. Закон действия силы будет, однако, уже не ньютонов.

Для компонентов силы имеем, независимо от не имеющего значения множителя:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\int \frac{\varkappa}{\varrho}\,\frac{x-\xi}{\varrho}\cdot d\sigma, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\int \frac{\varkappa}{\varrho}\,\frac{y-\eta}{\varrho}\cdot d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

откуда выходит [ср. (90)], что сила притяжения обратно пропорциональна расстоянию ϱ.

Ньютонов потенциал представляет для пространства то же, что для плоскости логарифмический потенциал:

$$\varphi = -\int \varkappa_{\xi,\eta} \lg \varrho \cdot d\sigma. \tag{139}$$

В частности, для него имеет место уравнение Пуассона (132):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -2\pi\varkappa_{x,y}, \tag{140}$$

которое для точки вне масс переходит в

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{141}$$

как можно в этом убедиться непосредственно диференцированием (138) по x и y.

Для логарифмического потенциала имеют место еще следующие теоремы, которые можно вывести из уравнения (138) таким же образом, как теоремы для притяжения однородного шарового слоя по ньютонову закону тяготения из уравнения (90).

Притяжение равномерно покрытой массою кольцеобразной, ограниченной двумя концентрическими кругами поверхности в точке во вне таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре круга; напротив, для точки, находящейся внутри малого круга, притяжение равно нулю. Из этого получается затем также тем же самым путем, как в § 38, выражение для потенциальной функции этого однородного кругового кольца, если R_1 и R_2 — радиусы внутренней и внешней границы, и ϱ_0 означает расстояние точки воздействия от центра.

Для $\varrho_0 > R_2$:

$$\varphi = -\pi\varkappa(R_2^2 - R_1^2)\lg \varrho_0. \tag{142}$$

Для $R_2 > \varrho_0 > R_1$:

$$\varphi = \frac{\pi\varkappa}{2}(R_2^2 - \varrho_0^2) - \pi\varkappa R_2^2 \lg R_2 + \pi\varkappa R_1^2 \lg \varrho_0. \tag{143}$$

Для $\varrho_0 < R_1$:

$$\varphi = \frac{\pi\varkappa}{2}(R_2^2 - R_1^2) - \pi\varkappa R_2^2 \lg R_2 + \pi\varkappa R_1^2 \lg R_1. \tag{144}$$

Легко убедиться, что φ вместе с своими первыми производными ϱ_0 везде непрерывно, тогда как для $\Delta\varphi$ имеют место уравнения (140) и (141).

Для целого круга с радиусом R, $R_1 = 0_1$, $R_2 = R$, и потенциальная функция в точке на расстоянии $\varrho_0 < R$ от центра будет по (143):

$$\varphi = \frac{\pi\varkappa}{2}(R^2 - \varrho_0^2) - \pi\varkappa R^2 \lg R, \tag{145}$$

тогда как для внешней точки ($\varrho_0 > R$) потенциальная функция имеет значение:

$$\varphi = -\mu \lg \varrho_0, \tag{146}$$

если $\mu = \pi\varkappa R^2$ обозначает всю притягивающую массу.

ГЛАВА IV

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 47. Задача об определении движения материальной точки под действием заданных сил требует интегрирования уравнений движения (55), что можно непосредственно произвести только в том случае, когда компоненты силы постоянны или представляют собою функции от времени t. Но большею частью компоненты силы зависят от положения точки или от ее скорости, и тогда выполнение интегрирования требует особой обработки уравнений движения. Подобные методы, которые в некоторых случаях допускают интегрирование, будут изложены в последующем.

Если умножить уравнения (55) последовательно на u, v, w и сложить, то получится:

$$m(u\dot{u} + v\dot{v} + w\dot{w}) = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt};$$

умножив на dt, по (41), имеем:

$$d\left(\frac{1}{2}mq^2\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{147}$$

Величина $\frac{1}{2}mq^2$ по Лейбницу называется, хотя несколько нецелесообразно, „живою силой“ точки воздействия, а диференциальное выражение в правой части — „работою“ A, которую совершает сила $\mathbf{F}$, когда точка воздействия переходит из положения x, y, z в положение $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$. Пользуясь соотношениями (60) и (45), можно работу представить также в виде:

$$A = F\cdot ds(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu) =$$
$$= F\cdot ds\cdot\cos(\mathbf{F},\ ds), \tag{148}$$

т. е. работа равна произведению из силы, величины перемещения и косинуса угла между ними. Если угол тупой, то работа отрицательна, если угол прямой, то работа равна нулю.

В векторном исчислении величина (148) называется произведением обоих векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}$:

$$A = \mathbf{F}\ d\mathbf{r}, \tag{149}$$

именно скалярным произведением, ибо работа относится к скалярным величинам (§ 36). Единица работы в абсолютной *CGS* системе, т. е. работа силы в 1 дину при перемещении точки воздействия на 1 *см* в направлении силы, называется эргом.

Если на точку воздействия действуют несколько сил, то при бесконечно малом перемещении последней работа результирующей силы, как легко видеть из (66) и (147), равна сумме работ отдельных сил.

§ 48. Значение уравнения (147), которое вообще выражает, что изменение живой силы точки воздействия равно совершенной действующей силой работе, основывается на том, что оно во многих важных случаях допускает непосредственное интегрирование. Вообще, конечно, интегрирование невозможно; ибо если даже слагающие силы X, Y, Z известны как функции x, y, z, то, не всегда возможно задать функцию от x, y, z, диференциал которой равен A; так, например, если

$$X = y^2,\ Y = x^2,\ Z = 0,$$

т. е.

$$A = y^2\,dx + x^2\,dy,$$

то A называется „неполным диференциалом“. В подобном случае интегрирование уравнений движения должно производиться другим путем, а не составлением A.

Но если, в частности, действующая сила — центральная сила, производимая покоящейся точкой, то по (110) существует потенциал U, и работа будет:

$$A = -dU, \tag{150}$$

т. е. работа силы равна убыли U. Подстановкою в (147) и интегрированием получаем в этом случае:

$$\frac{1}{2}mq^2 - \frac{1}{2}mq_0^2 = U_0 - U, \tag{151}$$

где q_0 и U_0 — значения q и U для момента $t = 0$. Поэтому скорость q зависит только от потенциала U. Если, следовательно, в течение всего движения точка проходит через определенную поверхность уровня $U = \text{const}$, в каком бы месте это ни было, по какому бы направлению и в какое бы то ни было время, она всегда обладает определенной скоростью. Из (150) выясняется также физическое значение потенциала U. Это есть работа, которую совершает центральная сила, если точка воздействия перемещается каким-либо образом из места, где потенциал равен U, в место, где потенциал — нуль. Уравнение (151) носит название „принципа живой силы".

Мы уже часто применяли на деле принцип живой силы, не обращая на это внимания.

Так, для тяжелой точки с массой m:

$$X = 0,\ U = 0,\ Z = -mg.$$

Отсюда по (110):

$$U = +mgz + \text{const}, \tag{152}$$

и если для $t = 0$, $z = 0$, то по (151):

$$\frac{1}{2}mq^2 - \frac{1}{2}mq_0^2 = -mgz, \tag{152a}$$

что вполне согласуется с (80).

Далее, для разобранного в § 12 случая:

$$X = -cx,$$

откуда по (110):

$$U = \frac{1}{2}cx^2 + \text{const}, \tag{153}$$

и так как для $t = 0$, $x = 0$, то (151):

$$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu_0^2 = -\frac{1}{2}cx^2,$$

в точном согласии с (17).

Если приходится учитывать трение, как в разобранном в § 15 случае, то принцип живой силы неприменим, ибо трение не центральная сила, и работа трения не представляет поэтому полного диференциала.

§ 49. Судя по тому, что мы видели, механический принцип живой силы находит себе только ограниченную область применения. Но если не ограничиваться только областью механики, то ему можно дать более общую формулировку, выражающую универсальный, имеющий без исключения силу по всей области физических и химических явлений закон: принцип сохранения энергии. Основанием этого принципа служит добытое путем многовековых испытаний убеждение, что никаким способом нельзя устроить perpetuum mobile, т. е. такое приспособление, при помощи которого можно было бы непрестанно производить какое-либо действие, не вызывая тем какого-либо другого действия, компенсирующего первое, или, другими словами, что в природе существует некоторая величина $Э$, которую можно рассматривать как „запас“ производительности и которая имеет ту особенность, что она так же, как и имеющийся в природе запас материи, может проявляться в самых разнообразных формах и испытывать различные превращения, но никогда не может измениться по своей величине и навсегда неизменно сохраняется: $Э = \text{const}$.

Решающим при формулировании принципа энергии является соответствующее существу дела определение $Э$; именно относительно этого пункта, а не относительно годности принципа самого по себе, было много различных мнений и недоразумений.

Единственный путь для решения этого вопроса состоит в том, что сначала исходят из частных случаев и изыскивают соотношения, выражающие факты, которые можно истолковывать как $Э = \text{const}$. Следовательно, если мы в области рассматриваемой здесь механики материальной точки станем искать подобное соотношение, то нужно прежде всего помнить, что $Э$ кроме координат и скоростей не должно содержать явно времени t, потому что $Э$ как запас производительности может зависеть только от мгновенного физического состояния точки, т. е. от ее положения и скорости. Но тогда не остается более места для сомнения. Единственное из найденных нами соотношений, которые не содержат времени, это — выражения (17), (80) и более общее (151). Из этого вытекает, что выражение (151), или принцип живой силы:

$$\frac{1}{2} mq^2 + U = \frac{1}{2} mq_0^2 + U_0 = \text{const}, \tag{154}$$

можно истолковывать как применение принципа сохранения энергии к чисто механическим процессам и что при этом механическую энергию можно положить равною:

$$Э = \frac{1}{2} mq^2 + U = K + U. \tag{155}$$

Механическая энергия состоит, таким образом, из двух частей: живой силы K, или кинетической энергии (энергии движения), и потенциала U, или потенциальной энергии (энергии положения). Их сумма при всех чисто механических процессах постоянна.

Так как по § 48 принцип живой силы имеет место только для таких сил, которые обладают потенциалом, то только для сил этого рода механическая энергия сохраняется; поэтому такие силы называются „консервативными“. Для неконсервативных сил, как например трение, механическая энергия изменяется, и универсальность принципа сохранения энергии требует, чтобы процесс в этом случае не был чисто механическим, но чтобы он влек за собою возникновение энергии другого рода в эквивалентном количестве, например теплоты. Тогда выражение (154) обобщается следующим образом:

$$(K-K_0)+(U-U_0)+W=0, \tag{156}$$

где W обозначает образовавшееся за время от 0 до t тепло, измеренное в механической мере. Так, например, уравнение (19a) дает, если его умножить на $\frac{dx}{dt}$ и проинтегрировать по t от 0 до t, соотношение:

$$(K-K_0)+(U-U_0)+\varrho\int_0^t\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=0. \tag{157}$$

Последний интеграл есть произведенная теплота.

Другим примером неконсервативной силы представляется случай, когда сила является какой-либо функцией времени, как, например, когда мы действуем при помощи наших мускулов на какую-нибудь материальную точку с известным ритмом. Тогда, конечно, мы можем изменять механическую энергию точки совершенно по нашему произволу, но принцип энергии требует, чтобы изменение механической энергии точно компенсировалось эквивалентной величиной мускульной энергии.

§ 50. Интегрирование уравнений движения (55) возможно всегда в том случае, когда направление силы F, при произвольной величине, всегда проходит через неподвижный центр. Тогда траектория точки воздействия лежит в плоскости, которая определяется центром, начальным положением и начальной скоростью точки воздействия. Если мы выберем эту плоскость за плоскость xy и центр за начало координат, то $z=0$, $Z=0$, и

$$X:Y=x:y.$$

Подставив это в (55), получаем:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right), \tag{157a}$$

и отсюда, интегрируя, имеем:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c'. \tag{158}$$

Это уравнение получает наглядный смысл, если ввести плоские полярные координаты r и φ при помощи соотношений:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{159}$$

Именно тогда:

$$\left.\begin{aligned} dx &= dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

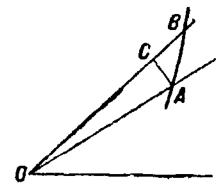
и уравнение (158) переходит в следующее:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c'. \tag{161}$$

После интегрирования получим:

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} r^2\, d\varphi = c't. \tag{162}$$

Но $r^2 d\varphi$ есть с точностью до бесконечно-малых второго порядка удвоенная площадь бесконечно узкого треугольника AOB (черт. 10), который образован радиусами-векторами OA и OB для моментов t и $t+dt$ и элементов пути AB. Таким образом на основании уравнения (162) площадь, которая ограничена радиусами-векторами для моментов 0 и t и траекторией точки воздействия, пропорциональна времени t, или другими словами, радиус-вектор описывает в равные времена равные площади. Поэтому уравнение (161) или (158) называется также законом площадей.



Черт. 10.

§ 51. Более широкое применение закон площадей находит себе в случае, когда направление силы **F** проходит не через неподвижный центр, а через неподвижную в пространстве прямую. Если примем эту прямую за ось z-ов, то, конечно, z и Z не равны нулю, но все же $X : Y = x : y$, и отсюда следуют, как в § 50, уравнения (161) и (162). Поэтому в этом случае закон площадей имеет место не для движения самой точки воздействия, но для движения проекции ее на плоскость xy, т. е. для движения точки, координаты которой x, y, 0.

§ 52. Теперь мы применим выведенные положения к частному, в особенности важному в природе случаю и выберем для этого движение материальной точки m, которая притягивается неподвижным центром μ по закону тяготения Ньютона, как планета солнцем.

Тогда движение, как ясно без дальнейших объяснений, плоское и требует поэтому для своего определения только два уравнения, в качестве которых мы воспользуемся законом живой силы и законом площадей, причем плоскость движения мы примем за плоскость xy.

Закон живой силы по (154), если вставить из (111) значение гравитационного потенциала для одного центра и разделить еще на $\frac{m}{2}$, дает:

$$q^2 - \frac{2f\mu}{r} = c. \tag{163}$$

Закон площадей выражается (161). Значения постоянных c и c' определяются по начальному состоянию, и именно, если мы значения q для $t=0$ отметим значком ($_0$):

$$c = q_0^2 - \frac{2f\mu}{r_0}. \tag{164}$$

Постоянная c' зависит также еще от направления начальной скорости. Целесообразнее выразить ее не при помощи угла, образуемого с осью x-ов, потому что этот угол никакого физического значения не имеет, но при помощи угла, образуемого с радиусом-вектором, α_0; и при этом мы получим ту выгоду, что выбор оси x-ов остается еще совершенно произвольным. Но в прямоугольном треугольнике ABC (черт. 10):

$$AB = ds, \quad AC = r d\varphi, \quad \sphericalangle B = \alpha.$$

Следовательно,

$$r d\varphi = ds \cdot \sin\alpha,$$

и, разделив на dt, имеем:

$$r\frac{d\varphi}{dt} = q\sin\alpha.$$

Таким образом для начального состояния, по (161):

$$c' = r_0 q_0 \sin\alpha_0. \tag{165}$$

§ 53. Уравнения движения (161) и (163) дают после исключения времени t путь планеты. Естественно, в настоящем случае рекомендуется воспользоваться полярными координатами.

Тогда по (160):

$$q^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{166}$$

и по (163):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \frac{2f\mu}{r} = c; \tag{167}$$

исключение dt из (166) и (167) дает диференциальное уравнение траектории:

$$d\varphi = \frac{c'dr}{r\sqrt{cr^2 + 2f\mu r - c'^2}}. \tag{168}$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi = \arccos \frac{c'^2 - f\mu r}{r\sqrt{f^2\mu^2 + cc'^2}} + c''. \tag{168a}$$

Интеграционная постоянная c'' определяется величиною φ_0, которую φ принимает для $r = r_0$. Так как мы направление оси x-ов еще не выбрали, то, не нарушая общности, положим $c''=0$, соответственно направляя ось x-ов.

Тогда мы получим:

$$\cos\varphi = \frac{c'^2 - f\mu r}{r\sqrt{f^2\mu^2 + cc'^2}}. \tag{169}$$

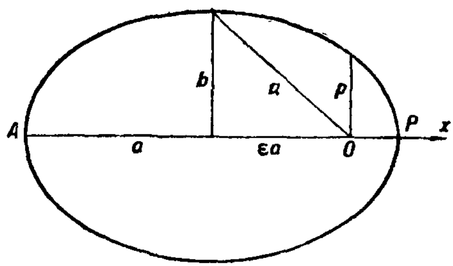
Если решить это уравнение относительно r и если положить для сокращения:

$$\sqrt{1 + \frac{cc'^2}{f^2\mu^2}} = \varepsilon, \tag{170}$$

$$\frac{c'^2}{f\mu} = p, \tag{171}$$

то получится:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{172}$$



Черт. 11.

Это уравнение конического сечения (черт. 11) с началом координат в фокусе, с большой осью по x, с параметром p (ордината в фокусе) и числовым эксцентриситетом:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{173}$$

Величины полуосей:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \text{ и } b^2 = pa. \tag{174}$$

Все эти постоянные получаются из начальных условий r_0, q_0 и α_0 по (170) и (171), если принять во внимание значения c и c' в (164) и (165), следующим образом:

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{r_0 q_0^2}{f\mu} - 1\right)^2 \sin^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0, \quad p = \frac{r_0^2 q_0^2 \sin^2\alpha_0}{f\mu}, \tag{175}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{q_0^2}{f\mu}, \quad b^2 = \frac{r_0^2 \sin^2\alpha_0}{\frac{2f\mu}{r_0 q_0^2} - 1}. \tag{176}$$

Коническое сечение представляет эллипс, параболу или гиперболу, смотря по тому, меньше, равен или больше единицы эксцентриситет ε или, по (170), смотря по тому, c отрицательно, нуль или положительно. В самом деле, по (163) $\sqrt{c}$ означает скорость в бесконечности; она для эллиптической траектории — мнимая величина. Для начального состояния отсюда следует, по (164), как условие, определяющее вид конического сечения:

$$q_0^2 \lesseqgtr \frac{2f\mu}{r_0}. \tag{177}$$

Замечательно, что вид конического сечения, равно как и длина большой полуоси a, совсем не зависит от направления начальной скорости, а только от знака постоянной c в выражении для энергии.

Эллиптический вид пути планеты, с солнцем в фокусе, составляет содержание первого из трех найденных эмпирически законов Кеплера, второй выражает закон площадей, третий будет выведен в ближайшем параграфе.

Для орбиты земли эксцентриситет составляет около $\frac{1}{60}$, параметр p—около $148 \cdot 10^6$ *км*, скорость q—в среднем около 30 *км/сек*, угловая же скорость таким образом около:

$$\frac{q}{p} = 2 \cdot 10^{-7}. \tag{178}$$

Условие, что орбита круговая, гласит: $\varepsilon = 0$. Следовательно, для начального состояния, по (175), так как ε^2 представляет сумму двух квадратов:

$$\cos\alpha_0 = 0 \text{ и } q_0^2 = \frac{f\mu}{r_0},$$

т. е., во-первых, скорость должна быть перпендикулярна к радиусу-вектору и, во-вторых, должна иметь как раз ту величину, которая дает соотношение (62), имеющее силу для равномерного кругового движения; последнее очевидно, если припомнить, что здесь сила $F = f\frac{m\mu}{r^2}$.

§ 54. Для зависимости координат r и φ от времени t имеют место довольно сложные соотношения, которые возможно для задач астрономии выразить только при помощи рядов. Мы здесь вычислим только, в предположении эллиптической орбиты, время обращения T. Это всего проще сделать при помощи уравнения (162) закона площадей, если выполнить интегрирование от $t = 0$ до $t = T$, т. е. от $\varphi = \varphi_0$ до $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$. Тогда слева получится удвоенная площадь эллипса, т. е.

$$2ab\pi = c'T.$$

Если исключить отсюда c' при помощи (171) и b при помощи (174), то получится:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{f\mu}, \tag{179}$$

т. е. при определенном μ (солнце) квадрат времени обращения пропорционален кубу большой оси. (Третий закон Кеплера.)

Таким образом три закона Кеплера, в своей первоначальной формулировке не имеющие никакой внутренней связи, являются общими следствиями закона тяготения Ньютона. Но значение последнего закона заключается не в одном только том, что он позволяет вывести законы Кеплера. Он обнимает также законы земной тяжести. Ибо мы можем уравнение (179) применить также к земле как центру притяжения с массой μ, если для T принять время обращения луны, и для a — радиус лунной орбиты. Следующее отсюда значение для $f\mu$ по (103) равно $R^2 g$, если R — радиус земли, g — ускорение тяжести на земной поверхности. Таким образом

$$g = \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2}. \tag{180}$$

Если положить здесь:

$$a = 60{,}1\ R,$$
$$R = 637 \cdot 10^6\ см,$$
$$T = 1\ \text{месяцу} = 236 \cdot 10^4\ \text{сек.},$$

то получается $g = 981$, в достаточном согласии с земными измерениями (§ 10).

Это вычисление дало Ньютону прочное основание для его теории всемирного тяготения.

Однако ньютонов закон тяготения дает еще значительно больше,—он не только связывает между собой в одной общей формуле земную тяжесть и кеплеровы законы. Как оказалось впоследствии, из него получаются также возмущения (пертурбации), причиняемые взаимным тяготением планет, а также ряд других небесных явлений в полном согласии с наблюдениями (движения комет, двойных звезд и т. п.), таким образом он не только проще, но также и точнее кеплеровых законов.

Возможность столь плодотворной гипотезы, очевидно, не может быть приписана случайности, поэтому позволительно заключить, что установление закона тяготения Ньютона не было только целесообразным изобретением, как полагают некоторые натурфилософы, но должно оцениваться как истинное научное открытие.

ГЛАВА V

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 55. В предыдущей главе, при выводе планетных движений мы принимали, что центр притяжения — солнце, остается в покое. Однако, это, конечно, недопустимо уже потому, что солнце совершенно свободно в своем движении и притягивается по закону тяготения каждой из планет. Таким образом, строго говоря, необходимо принимать в расчет также это движение солнца.

Но, кроме того, нужно обратить внимание еще на другое обстоятельство. То, что мы наблюдаем и измеряем и что мы поэтому можем положить в основу испытания теории, это — не абсолютное движение солнца и планет, а то движение, каким оно кажется нам, жителям земли. У нас не имеется покоящейся системы координат; та система координат, к которой мы относим движения всех тел, также и небесных, движется вместе с землей вокруг солнца и даже вращается в течение дня по разным направлениям.

Поэтому мы теперь поставим более общую задачу и спросим себя, каковы законы движения материальной точки для наблюдателя, который сам движется определенным образом.

С этой целью вообразим себе кроме до сих пор употребляемой покоящейся системы координат x, y, z (вопрос о реализации таковой мы можем оставить совершенно в стороне) другую прямоугольную правую систему координат x', y', z', которая движется определенным заданным образом, и в начале O' этой системы координат вообразим себе неизменно с ним связанного наблюдателя B', например, в таком положении, что для него ось z' направлена вверх, ось x' — вправо и, следовательно, ось y' — вперед.

Вопрос заключается в том: какой вид примут уравнения механики для наблюдателя B' взамен уравнений (55) соответственно (57)?

Ответ на этот вопрос мы получим, если выразим, с одной стороны, компоненты ускорения $\ddot{\mathbf{r}}$, с другой стороны, компоненты силы $\mathbf{F}$ через компоненты соответствующих величин $\ddot{\mathbf{r}}'$ и $\mathbf{F}'$, относящихся к движущемуся наблюдателю B', и эти значения вставим в (55).

§ 56. Задача о выражении $\ddot{\mathbf{r}}'$ через $\ddot{\mathbf{r}}$ или обратно есть чисто кинематическая задача. Так как движение системы координат, отмеченной значком $'$, предполагается известным, то координаты x_0, y_0, z_0 начала O', а также косинусы углов, определяющих направления трех осей x', y', z', суть известные функции времени t: мы назовем их через α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, причем буквы α, β, γ соответствуют осям x, y, z, а цифры 1, 2, 3 выбираются соответственно осям x', y', z'. Тогда из (36) легко получается путем обобщения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 (x-x_0) + \beta_1 (y-y_0) + \gamma_1 (z-z_0), \\ y' &= \alpha_2 (x-x_0) + \beta_2 (y-y_0) + \gamma_2 (z-z_0), \\ z' &= \alpha_3 (x-x_0) + \beta_3 (y-y_0) + \gamma_3 (z-z_0). \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

С этими тремя уравнениями находятся в соответствии уравнения, которые получаются из того соображения, что косинусы углов, образуемых осями x, y, z с осями x', y', z', суть: α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0 &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y-y_0 &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z-z_0 &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

Чтобы найти соотношения между слагающими скоростей u', v', w' материальной точки, как они представляются наблюдателю B', и слагающими u, v, w относительно покоящейся системы, нужно только диференцировать уравнения (181) и (182) по времени t, причем необходимо обратить внимание, что косинусы направлений вообще зависят от времени t.

Второе диференцирование по времени t дает соотношения между компонентами ускорения $\dot{u}'$, $\dot{v}'$, $\dot{w}'$, с одной стороны, и $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ — с другой, и вместе с тем задача о выражении вектора $\ddot{\mathbf{r}}'$ через вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ совершенно разрешается.

§ 57. Труднее с физической стороны определить силу $\mathbf{F}'$ для наблюдателя B'. Здесь с первого взгляда представляются два различные пути, являющиеся оба обобщением уравнения (56). Именно, можно представлять себе, что сила $\mathbf{F}'$ вообще равна массе, умноженной на ускорение $\dot{\mathbf{q}}'$, следовательно, и X' равно $m\dot{u}'$; или можно вообще положить X' равным $\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$. Оба эти определения друг другу противоречат, так как вообще $m\dot{u}'$ отлично от $\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z$, в чем легко можно убедиться, если, с одной стороны, продиференцировать дважды по t первое из уравнений (181), и, с другой стороны, использовать значения из (55).

Выход из этой альтернативы можно найти только, если мы обратимся к изложенным в § 8 основным соображениям о происхождении понятия силы, по которому силу следует представлять не как ускорение, а как причину движения. Именно, если бы наблюдатель B' положил вообще силу равной произведению массы на ускорение, то он был бы принужден допустить, что если действующая на материальную точку сила $\mathbf{F}' = 0$, то скорость точки $\mathbf{q}'$ по величине и направлению постоянна.

Но существует случай, когда для всякого наблюдателя сила, без сомнения, нуль именно тогда, когда материальная точка совершенно изолирована, находится на бесконечном расстоянии от всех других тел, в пустом пространстве (§ 7). Ибо тогда не существует никакой причины для движения, следовательно нет и силы. Но в этом случае для наблюдателя B' скорость точки ни в коем случае не постоянна по величине и направлению, как показывает простейший опыт, но она вполне зависит от того, как движется наблюдатель или как он вращается. Поэтому $\dot{\mathbf{q}}'$ вообще не исчезает вместе с $\mathbf{F}'$, и принятое определение силы несостоятельно. С другой стороны, только что приведенные соображения показывают, что $\mathbf{F}'$ всегда исчезает одновременно с $\mathbf{F}$, и это условие ведет ко второму из указанных определений силы $\mathbf{F}'$, именно надо положить вообще:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z, \\ Y' &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z, \\ Z' &= \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned}\right\} \qquad (183)$$

и обратно:

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 X' + \alpha_2 Y' + \alpha_3 Z', \\ Y &= \beta_1 X' + \beta_2 Y' + \beta_3 Z', \\ Z &= \gamma_1 X' + \gamma_2 Y' + \gamma_3 Z'. \end{aligned}\right\} \tag{184}$$

Таким путем задача об относительном движении по существу разрешена. Ибо если, с одной стороны, определить компоненты силы $\mathbf{F}$ по (184), а, с другой стороны, ускорения $\dot{\mathbf{q}}$ по (182) и эти величины вставить в (55), то получится соотношение между $\mathbf{F}'$ и $\dot{\mathbf{q}}'$.

Но при выполнении этого вычисления мы для простоты ограничимся некоторыми частными особо важными случаями.

§ 58. Простейший случай, когда координатная система x', y', z' неизменно связана с координатной системой x, y, z, т. е. когда как x_0, y_0, z_0, так и косинусы углов, определяющих направления осей, не зависят от времени t.

Тогда диференцирование (181) и (182) дает простые соотношения:

$$u' = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \ldots, \tag{185}$$

$$u = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w, \ldots, \tag{186}$$

$$\dot{u}' = \alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w}, \ldots, \tag{187}$$

$$\dot{u} = \alpha_1 \dot{u}' + \alpha_2 \dot{v}' + \alpha_3 \dot{w}', \ldots \tag{188}$$

Отсюда, если принять во внимание (183) и (55), следует:

$$X' = m\dot{u}', \ Y' = m\dot{v}', \ Z' = m\dot{w}', \tag{189}$$

т. е. для системы координат x', y', z' имеют место те же самые уравнения движения, какие и для системы x, y, z, или уравнения движения по отношению к этому преобразованию системы координат „инвариантны". Также скорость и ускорение сохраняют свои величины, между тем как компоненты их изменяются.

§ 59. Пусть начало O' системы координат x', y', z' движется как угодно, но направления осей x', y', z' остаются все время параллельными осям x, y, z. Тогда x_0, y_0, z_0 зависят от времени, а

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 = 1, \ \beta_1 = 0, \ \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \ \beta_2 = 1, \ \gamma_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \ \beta_3 = 0, \ \gamma_3 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{190}$$

В этом случае уравнения (181) переходят в следующие:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_0, \ldots, \\ u' &= u - u_0, \ldots, \\ \dot{u}' &= \dot{u} - \dot{u}_0, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{191}$$

а уравнения (183) в

$$X' = X, \ Y' = Y, \ Z' = Z. \tag{192}$$

так что по (55) получаются уравнения движения в виде:

$$m\dot{u}' = X' - m\dot{u}_0, \ldots, \tag{193}$$

в отличие от уравнений (55) для покоящейся системы координат. Так как уравнения движения можно проверять на опыте, то таким образом наблюдатель B' получает средство узнать кое-что о своем движении относительно покоящейся системы координат.

Однако он может измерять только ускорения $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, $\dot{w}_0$, но не компоненты скоростей u_0, v_0, w_0.

В самом деле, предположим, что подвижная система движется равномерно, т. е.

$$x' = x - u_0 t,\ y' = y_0 - v_0 t,\ z' = z_0 - w_0 t, \tag{194}$$

где u_0, v_0, w_0 — постоянны, тогда из (193) получаются опять уравнения (189), т. е. уравнения механики инвариантны по отношению к преобразованию (194), которое называется по имени открывшего закон инерции также галилеевым преобразованием. Таким образом равномерно движущийся наблюдатель B' никогда не сможет при помощи механических измерений узнать что-нибудь о скорости своего движения, и вообще нет возможности указать такую точку в мировом пространстве, относительно которой можно было бы утверждать, что она находится в абсолютном покое. Более того, в величине каждой скорости остается неопределенной и неопределимой аддитивная постоянная. Это положение называется классическим принципом относительности [его надо, конечно, отличать от новейшего принципа относительности Эйнштейна, который объединяет с одной более общей точки зрения инвариантность уравнений движения относительно разобранного в предыдущем параграфе (вращения системы координат) с инвариантностью относительно равномерного движения начала коородинат].

Замечательно, что вместе со скоростью также и кинетическая энергия материальной точки только относительно определима; в выражении кинетической энергии остается неопределенной не только аддитивная постоянная, но, так как энергия квадратична относительно скорости, совершенно неопределенна даже линейная функция скорости! Из этого ясна необходимость точно характеризовать при всех вычислениях с механическими величинами принятую систему координат; как только это сделано, естественно, всякая неопределенность исчезает.

§ 60. Мы применим далее уравнения (193) для случая движения планет, причем мы рассматриваем, как отмечено в § 55, солнце свободным в своем движении с координатами x_0, y_0, z_0 и исследуем движение планеты относительно наблюдателя B', находящегося на солнце. Направления осей координат x', y', z' пусть будут параллельны координатам x, y, z. Конечно, здесь x_0, y_0, z_0 не представляют заданных наперед функций от времени, но мы можем легко найти эти величины при помощи уравнений движения для солнца. Ибо, по принципу равенства действия и противодействия, сила притяжения планетою m солнца μ равна и противоположна силе X, Y, Z, производимой солнцем на планету; таким образом:

$$\mu \dot{u}_0 = -X, \ldots$$

и после подстановки этого в (193)

$$m\dot{u}' = X' + X \cdot \frac{m}{\mu}, \ldots$$

и по (192)

$$mu' = X \cdot \frac{\mu + m}{\mu}, \ldots \tag{195}$$

А по (84) и (191):

$$X = -f \cdot \frac{m\mu}{r^2} \cdot \frac{x'}{r}, \ldots,$$

где

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

следовательно, уравнения для относительного движения имеют вид:

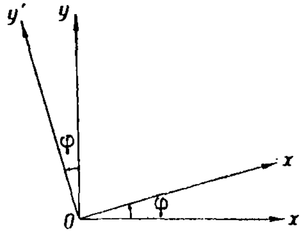
$$m\dot{u}' = -f \cdot \frac{m(\mu + m)}{r^2} \cdot \frac{x'}{r}, \ldots \tag{196}$$

Это есть движение материальной точки с массой m, которая притягивается покоящейся, расположенной в начале координат массой $(\mu + m)$ по закону тяготения.

По этой теореме законы относительного движения планет сводятся к выведенным в § 52—54 законам абсолютного движения планет. То обстоятельство, что вместо множителя μ входит больший множитель $\mu + m$, вследствие чего сила притяжения солнца оказывается большей, чем в действительности, проистекает, конечно, из того, что планета несколько ближе подходит к солнцу, если солнце свободно движется, чем в том случае, когда оно неподвижно.

Но мы можем сделать еще шаг дальше. Ничто не препятствует точно такое же вычисление и те же соображения применить к движению солнца относительно наблюдателя, находящегося на планете, ибо относительно величин масс m и μ мы не делали никаких ограничительных предположений. Поэтому можно без доказательств установить следующее положение: для наблюдателя, находящегося на планете, солнце движется по эллипсу (эклиптика), в одном из фокусов которого находится планета, сообразно принципу площадей, совершенно так, как если бы планета была неподвижна и имела массу $\mu + m$. Этот эллипс по величине и форме, конечно, такой же, как и эллипс траектории планеты относительно солнца.

§ 61. Чтобы подойти еще ближе к земным условиям, с которыми мы при всех наших наблюдениях связаны, исследуем теперь уравнения движения материальной точки относительно системы координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, предполагая, что начало O' вращающейся системы совпадает с началом O, а также, что ось вращения z' совпадает с осью z покоящейся системы. Если φ — угол между осью x' и осью x, то получим черт. 12):



Черт. 12.

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 = \cos\varphi, & \beta_1 = \sin\varphi, & \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 = -\sin\varphi, & \beta_2 = \cos\varphi, & \gamma_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, & \beta_3 = 0, & \gamma_3 = 1, \end{array}\right\} \tag{197}$$

причем можно положить

$$\varphi = \omega t. \tag{198}$$

Тогда из уравнений (181) получается:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z, \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

и диференцируя:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u\cos\varphi + v\sin\varphi + \omega y', \\ v' &= -u\sin\varphi + v\cos\varphi - \omega x', \\ w' &= w. \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

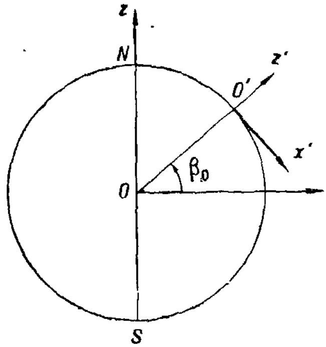
Также:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}' &= \dot{u}\cos\varphi + \dot{v}\sin\varphi + 2\omega v' + \omega^2 x', \\ \dot{v}' &= -\dot{u}\sin\varphi + \dot{v}\cos\varphi - 2\omega u' + \omega^2 y', \\ \dot{w}' &= \dot{w}. \end{aligned}\right\} \tag{201}$$

Если эти уравнения умножить на m, то, принимая во внимание (55) и (183), получим искомые уравнения движения, в которых мы все значки $'$ опустим, так как теперь в них входят только отмеченные величины:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{u} &= X + 2m\omega v + m\omega^2 x, \\ m\dot{v} &= Y - 2m\omega u + m\omega^2 y, \\ m\dot{w} &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{202}$$

Уравнения механики испытывают, таким образом, для вращающегося наблюдателя изменение, которое можно характеризовать тем, что к истинной силе, компоненты которой X, Y, Z и которая, например, может быть произведена при помощи мускулов (§ 8), здесь присоединяются еще две „кажущиеся“ силы с компонентами $m\omega^2 x$, $m\omega^2 y$, 0 и $2m\omega v$, $-2m\omega u$, 0. Первая добавочная сила, которая зависит только от положения точки воздействия, по § 25, равна по величине и прямо противоположна по направлению центростремительной силе при движении точки воздействия около оси вращения с угловой скоростью ω; поэтому она называется „центробежной силой". Вторая добавочная сила, которая зависит только от скорости точки воздействия в движущейся системе, „сила Кориолиса", перпендикулярна к оси вращения z и к скорости $\mathfrak{q}$; в этом можно убедиться из сложения компонентов ее, умноженных соответственно на u, v, w,—именно она образует с $\mathfrak{q}$ и z правую (§ 16) систему, которая вообще, конечно, не прямоугольная; т. е. если наблюдатель, для которого ось z направлена вверх, смотрит в направлении $\mathfrak{q}$, то для него сила Кориолиса действует вправо. Величина этой силы равна удвоенному произведению массы m точки воздействия, угловой скорости ω и компонента скорости $\mathfrak{q}$, перпендикулярного к оси вращения.



Черт. 13.

§ 62. Мы перенесем, наконец, теперь начало координат подвижной системы из точки O оси вращения (центр земли) в точку O' шаровой поверхности (поверхности земли) с радиусом R (радиусом земли), которая вращается вместе с рассмотренной ранее системой. Для простоты мы примем, что O' находится в плоскости (x, z), в плоскости черт. 13. Ось z' направим по земному радиусу, наружу, ось y' расположим параллельно оси y (на чертеже по направлению назад, за чертеж); тогда ось x' расположится в плоскости чертежа. Преобразование к новой отмеченной штрихом системе даст нам тогда уравнения механики для наблюдателя B', который расположен на земной поверхности таким образом, что для него ось z' идет вверх, ось y' — на восток и ось x' — на юг.

Так как новая система связана неизменно со старой, то для этого преобразования имеют место простые соотношения от (185) до (188). Если теперь через β_0 обозначить угол радиуса земли OO' с осью x (экватором), положительный для северного полушария, отрицательный для южного, то координаты точки O' выразятся в прежней системе так:

$$x_0 = R\cos\beta_0,\quad y_0 = 0,\quad z_0 = R\sin\beta_0. \tag{203}$$

Далее, косинусы углов отмеченных осей по отношению к неотмеченным:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin\beta_0, & \beta_1 &= 0, & \gamma_1 &= -\cos\beta_0,\\ \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= 1, & \gamma_2 &= 0,\\ \alpha_3 &= \cos\beta_0, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= \sin\beta_0, \end{aligned}\right\} \tag{204}$$

следовательно по (187):

$$\dot{u}' = \dot{u}\sin\beta_0 - \dot{w}\cos\beta_0,$$
$$\dot{v}' = \dot{v},$$
$$\dot{w}' = \dot{u}\cos\beta_0 + \dot{w}\sin\beta_0.$$

Умножим эти уравнения на m и вставим для $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ их значения из уравнений движения (202). Наконец, выразим все неотмеченные величины через отмеченные знаком $'$, именно по (182):

$$x = R\cos\beta_0 + x'\sin\beta_0 + z'\cos\beta_0,$$
$$y = y',$$

по (186):

$$u = u'\sin\beta_0 + w'\cos\beta_0,$$
$$v = v',$$

а по (184):

$$X = X'\sin\beta_0 + Z'\cos\beta_0,$$
$$Y = Y',$$
$$Z = -X'\cos\beta_0 + Z'\sin\beta_0.$$

Тогда получаются уравнения движения для наблюдателя, находящегося на земной поверхности, в следующей форме, без всяких приближений, если мы опять опустим все значки $'$:

в южном направлении:

$$m\dot{u} = X + 2m\omega v\sin\beta_0 + m\omega^2\sin\beta_0(R\cos\beta_0 + x\sin\beta_0 + z\cos\beta_0),$$

в восточном:

$$m\dot{v} = Y - 2m\omega\,(u\sin\beta_0 + w\cos\beta_0) + m\omega^2 y, \tag{205}$$

вверх:

$$m\dot{w} = Z + 2m\omega v\cos\beta_0 + m\omega^2\cos\beta_0(R\cos\beta_0 + x\sin\beta_0 + z\cos\beta_0).$$

Если расстояние точки воздействия от местоположения наблюдателя мало по сравнению с радиусом земли, то можно пренебречь членами с x, y, z по сравнению с R, и тогда получится проще:

южное движение:

$$m\dot{u} = X + 2m\omega v\sin\beta_0 + m\omega^2 R\sin\beta_0\cos\beta_0,$$

восточное:

$$m\dot{v} = Y - 2m\omega\,(u\sin\beta_0 + w\cos\beta_0), \tag{206}$$

вверх:

$$m\dot{w} = Z + 2m\omega v\cos\beta_0 + m\omega^2 R\cos^2\beta_0.$$

§ 63. Рассмотрим теперь сначала случай, когда точка воздействия подвержена действию только своего собственного веса. Тогда действующая на нее сила $X=0$, $Y=0$, $Z=-mg_0$, где g_0 — ускорение тяжести для неподвижного наблюдателя по (103) имеет величину $\frac{fM}{R^2_1}$. Если, следовательно, предоставить точке свободно падать с нулевой начальной скоростью, то пока скорости u, v, w_0 еще очень малы, имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= \omega^2 R \sin\beta_0 \cos\beta_0, \\ \dot{v} &= 0, \\ \dot{w} &= -g_0 + \omega^2 R \cos^2\beta_0. \end{aligned}\right\} \tag{207}$$

Таким образом ускорение постоянно, но его величина и направление отличны от g_0. Квадрат ускорения равен:

$$g^2 = \dot{u}^2 + \dot{w}^2 = g_0^2 - 2g_0\omega^2 R\cos^2\beta_0 + \omega^4 R^2 \cos^2\beta_0.$$

Третий член не играет здесь заметной роли, так как отношение $\frac{\omega^2 R}{g_0}$ для:

$$\omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} = 7{,}272\cdot 10^{-5}\ \text{сек}^{-1},$$

$$R = 637\cdot 10^6\ \textit{см},$$

$$g_0 = 983\ \textit{см/сек}^2 \left(\text{измеренное ускорение на полюсе, при } \beta_0 = \frac{\pi}{2}\right)$$

имеет величину 0,00343. Ускорение, таким образом, приблизительно равно:

$$g = g_0 - \omega^2 R\cos^2\beta_0 = 983 - 3{,}37\ \cos^2\beta_0, \tag{208}$$

тогда как точнейшие измерения с маятником дают:

$$g = 983 - 5{,}2\ \cos^2\beta_0. \tag{209}$$

Уменьшение ускорения тяжести при приближении к экватору значительно сильнее в действительности, чем по развитой здесь теории; это происходит от того, что земля не точно шарообразна, а имеет по оси вращения сжатие.

Направление ускорения тяжести, т. е. направление отвеса или вертикали, которой определяется зенит наблюдателя, не совпадает по (207) с осью z или земным радиусом, но имеет перпендикулярную к нему слагающую. Угол δ с радиусом земли, так как он очень мал, составляет:

$$\delta = \frac{\omega^2 R\sin\beta_0\cos\beta_0}{g_0} = \frac{\omega^2 R\sin 2\beta_0}{2g_0}. \tag{210}$$

Для полюсов и на экваторе: $\delta = 0$, в северном полушарии δ положительно, в южном — отрицательно, т. е. в первом случае отвес отклонен от направления радиуса к югу, во втором — к северу. Максимальной величины δ достигает для $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$, именно:

$$\delta_{\max} = \frac{\omega^2 R}{2g_0} = 0{,}00171 = 5{,}9'. \tag{211}$$

Вертикалью определяется географическая широта β наблюдателя как угол между вертикалью и экватором.

Для него, таким образом, имеет место соотношение:

$$\beta - \beta_0 = \delta. \tag{212}$$

§ 64. Уравнения движения тяжелой точки несколько упрощаются, если выбрать за ось z-ов не радиус земли, а вертикаль, т. е. если в формулах (204) заменить угол β_0 через β, ибо тогда, очевидно, в уравнениях (207) южный компонент ускорения выпадет, и уравнения (206) дают для этого случая:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{южное движение:} & \dot{u} = 2\omega v \sin\beta, \\ \text{восточное:} & \dot{v} = -2\omega\,(u \sin\beta + w\cos\beta), \\ \text{зенитное:} & \dot{w} = -g + 2\omega v\cos\beta. \end{array}\right\} \tag{213}$$

Проследим теперь движение материальной точки также в случае больших скоростей, когда она, например, падает с начальной нулевой скоростью с высокой башни, с высоты h. И в этом случае наше исследование мы можем значительно упростить, используя особенности этого случая.

Из трех компонентов ускорения $\dot{w}$ по порядку выше, чем $\dot{u}$ и $\dot{v}$: поэтому мы можем пренебречь также u и v по сравнению с w, и получим просто:

$$\dot{u} = 0,$$
$$\dot{v} = -2\omega w\cos\beta = -2\omega\cos\beta\cdot\frac{dz}{dt},$$
$$\dot{w} = -g.$$

При начальных условиях ($t = 0$):

$$x = 0,\ y = 0,\ z = h,$$
$$u = 0,\ v = 0,\ w = 0;$$

первое и третье уравнения по интеграции дают:

$$u = 0,\ x = 0,$$
$$w = -gt,\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h,$$

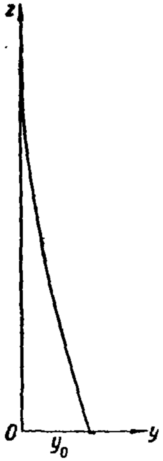
а второе:

$$v = -2\omega\cos\beta\cdot(z-h) = \omega g\cos\beta\cdot t^2,$$
$$y = \frac{1}{3}\,\omega g\cos\beta\cdot t^3.$$

Траекторию свободно падающей материальной точки мы получим, таким образом, исключив t:

$$y = \frac{\omega}{3}\cos\beta\cdot\sqrt{\frac{8\,(h-z)^3}{g}}; \tag{214}$$

это так называемая парабола Нейля (Neil) (черт. 14), расположенная в вертикальной плоскости, в восточном направлении.



Черт. 14.

Отклонение от вертикали, проходящей через шпиц башни ($z=h$), составляет у ее основания ($z=0$):

$$y = \frac{\omega}{3}\cos\beta\cdot\sqrt{\frac{8h^3}{g}},$$

т. е., например, для $\beta = \frac{\pi}{4}$ и $h = 10^4$ *см:*

$$y_0 = 1{,}5 \text{ см},$$

в согласии с многочисленными измерениями.

Если на материальную точку кроме тяжести действует еще другая сила с компонентами X, Y, Z, то уравнение движения (213) обобщается таким образом:

южное направление:

$$m\dot{u} = X + 2m\omega v\sin\beta,$$

восточное:

$$m\dot{v} = Y - 2m\omega\,(u\sin\beta + w\cos\beta),$$

зенитное:

$$m\dot{w} = Z - mg + 2m\omega v\cos\beta. \tag{215}$$

ГЛАВА VI

НАЛОЖЕННЫЕ СВЯЗИ

§ 65. До сих пор мы принимали, что рассматриваемая материальная точка воздействия не подвергается никакому другому действию кроме некоторых сил, каждая из которых стремится привести ее в движение по определенному, считаемому заданным, закону. Но бывают случаи, когда на движение точки влияют еще другие причины, кроме заданных наперед сил; так, например, когда точка принуждена оставаться на заданной поверхности или на заданной кривой—вообще, когда на движение точки наложены некоторые наперед заданные условия, и возникает вопрос, какими основами надо руководиться при разработке подобных случаев.

Для разрешения этой задачи вернемся еще раз к первоначальному выводу понятия о силе (§ 8). Если мы согласимся с тем, что всякое влияние на движение точки всегда производится некоторой силой, то мы должны заключить, что и наложенная связь может оказать действие физически только таким образом, что она реализуется некоторой силой. Если мы эту силу присоединим к остальным заданным силам, то точка будет двигаться совершенно так же, как рассмотренная до сих пор так называемая „свободная" точка. Конечно, введенная таким образом сила обладает свойствами, существенно отличными от тех, которые рассмотрены до сих пор, как можно убедиться уже из того, что величина ее не задается непосредственно, но зависит от остальных сил.

Поэтому подобную силу мы обозначим подходящим названием „силы связи" $\mathbf{Z}$, в противоположность до сих пор исключительно рассматриваемых „действующих сил" $\mathbf{F}$, которые мы и впредь будем считать заданными.

По сказанному, уравнения движения (57) примут более общий вид:

$$m\mathfrak{q} = \mathbf{F} + \mathbf{Z}, \tag{216}$$

где $\mathbf{F}$ обозначает результирующую всех действующих сил, $\mathbf{Z}$— результирующую всех сил связи. Полная результирующая $\mathbf{F} + \mathbf{Z}$ называется также „движущей силой", или „эффективной силой".

Однако ясно, что уравнений (216) недостаточно для определения движения, так как в эти уравнения входят три новых неизвестных компонента $\mathbf{Z}$. Таким образом нам нужно еще три другие уравнения, и поэтому мы должны искать других связей. Прежде всего мы имеем наложенные связи, относительно которых примем, что они могут быть представлены одним или несколькими уравнениями между координатами x, y, z точки воздействия. Одно уравнение означает, что точка принуждена оставаться на заданной поверхности; два уравнения означают, что точка может двигаться только по заданной кривой. Этим исчерпываются все возможности; ибо при трех уравнениях точка неподвижна, и поэтому ее положение непосредственно задано на все время.

Но наложенные связи сами по себе еще недостаточны; нам нужны другие свойства силы связи $\mathbf{Z}$, и их мы можем найти только, если мы вообразим себе, что наложенные связи как-нибудь материально реализованы. Если, например, точка воздействия принуждена оставаться на заданной кривой, то мы представим себе, что она двигается в неизменной очень узкой трубке или насажена на подходящим образом изогнутую тонкую, но очень крепкую проволоку, по которой она может скользить;

в обоих случаях, конечно, трение исключается, ибо сила связи не позволяет только покидать кривую, тогда как на движение по кривой она совершенно не влияет. Из этого соображения непосредственно следует, что сила связи не может иметь компонента в направлении касательной к кривой, ни ускоряющего, ни замедляющего,—она направлена по нормали к кривой; совершенно так же мы должны заключить, что сила связи, проистекающая от заданной поверхности, действует всегда нормально к поверхности.

Легко видеть, что это положение, определяющее направление силы связи, вместе с наложенными условиями дает в каждом случае как раз три уравнения, которые мы нашли необходимыми выше в качестве дополнения к общим уравнениям движения (216), чтобы найти как движения точки воздействия, так и величину и направление силы связи. Ибо при заданной кривой мы имеем два наложенных условия и в качестве третьего уравнения то, которое выражает, что сила связи действует нормально к кривой; при заданной поверхности мы имеем, конечно, только одно наложенное условие, но зато, кроме того, два уравнения, которые выражают, что сила связи совпадает с нормалью к поверхности, т. е. имеет вполне определенное направление. Для полноты мы можем присоединить сюда еще оба предельные случая совершенно свободной и совершенно неподвижной точки. В первом случае—три дополнительных уравнения, это уравнения $\mathbf{Z} = 0$, во втором—уравнения $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Из (216) следует тогда в первом случае движение точки, во втором случае—величина и направление силы связи $\mathbf{Z}$, которая ее удерживает.

Чем больше число уравнений для наложенных связей, тем меньше число независимо изменяющихся, так называемых свободных координат. Поэтому уместно говорить о большей или меньшей свободе движения точки, и число свободных координат полагают равным числу ее степеней свободы. Точка имеет 3, 2, 1, 0 степеней свободы, смотря по тому, свободна она или движется по поверхности или по кривой, или же неподвижна.

Предыдущими разъяснениями теория движения несвободной точки в принципе закончена. Теперь дело идет только о наиболее важных ее применениях.

§ 66. Общие уравнения движения (216) часто пишут в более симметричной форме так:

$$\mathbf{F} + \mathbf{Z} - m\dot{\mathbf{q}} = 0 \qquad (217)$$

и выражают это такой теоремой: если представить себе, что на точку воздействия кроме действующей силы $\mathbf{F}$ и силы связи $\mathbf{Z}$ действует еще третья сила $-m\dot{\mathbf{q}}$, то эти три силы уравновешиваются. Как ни незначительной кажется эта перестановка, однако вследствие наглядности и удобства при ее применении она сделалась настолько важной, что получила поэтому особое наименование: „принцип д'Аламбера“ [1]. Это уравнение сводит совершенно общим образом законы движения к законам равновесия, но по существу, понятно, оно ничего не прибавляет к ньютоновым уравнениям. Фиктивная сила $-m\dot{\mathbf{q}}$ обыкновенно называется „сопротивлением инерции“.

Вместо разложения силы по неизменным направлениям осей координат x, y, z можно, конечно, разлагать ее, как в § 25, в направлении касательной τ, главной нормали ν и бинормали β траектории точки воздействия; в этом случае выражение для принципа д'Аламбера получится, если принять во внимание (74а) и (75), а также и то обстоятельство, что сила связи не имеет тангенциальной составляющей, в следующем виде:

$$\mathbf{F}_\tau - m\frac{dq}{dt} = 0, \qquad (218)$$

$$\mathbf{F}_\nu + \mathbf{Z}_\nu - \frac{mq^2}{\varrho} = 0, \qquad (219)$$

$$\mathbf{F}_\beta + \mathbf{Z}_\beta = 0. \qquad (220)$$

При этом τ взято в направлении скорости, ν—в направлении к центру кривизны.

Часто возникал и горячо обсуждался вопрос, представляет ли сопротивление инерции или соответственно ее компонент—центробежная сила—„действительную“ силу. Ответ на этот вопрос легко дать, как только мы условимся относительно произвольного по существу определения силы. Если, как мы это сделали в § 9, положить силу одинаково направленной и пропорциональной ускорению, тогда сопротивление инерции не представляет действительной силы, ибо сопротивление инерции не направлено по ускорению, хотя и пропорционально ему. Но если, против чего нельзя ничего возразить, определение силы модифицировать так, что все силы всегда уравновешиваются, то можно сопротивление инерции считать также за силу. Суть дела не в названии, но в уравнениях (217), а эти последние не содержат никакой неопределенности.

§ 67. Сейчас мы выясним важное свойство силы связи. Так как компонент силы связи в направлении скорости равен нулю, то и работа силы связи (§ 47) равна нулю, и разумеется, это имеет место также для обоих предельных случаев свободной и неподвижной точки, потому что в первом случае $\mathbf{Z} = 0$, во втором $\mathbf{q} = 0$. Из этого проистекает ряд важных следствий. Вообразим себе сначала точку воздействия в покое, находящейся на неподвижной поверхности или кривой, и пусть она подвержена действующей силе $\mathbf{F}$.

---

[1] Часто под принципом д'Аламбера подразумевают уравнение (383), получающееся из комбинации (217) с принципом возможных перемещений (321).

Вообще она станет двигаться именно в направлении равнодействующей $\mathbf{F}+\mathbf{Z}$. Поэтому совершенная при начальном перемещении $d\mathbf{r}$ всеми силами работа положительна:

$$(\mathbf{F}+\mathbf{Z})\, d\mathbf{r} > 0.$$

Но так как $\mathbf{Z} \cdot d\mathbf{r} = 0$, то следовательно:

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} > 0, \tag{221}$$

т. е. если свободная или несвободная покоящаяся точка приходит в движение под влиянием дествующей силы, то работа действующей силы положительна, или первоначальное смещение образует с действующей силой острый угол.

Если действующая сила имеет потенциал U, то мы имеем, принимая во внимание (150):

$$dU < 0, \tag{222}$$

т. е. при возникновении движения потенциал убывает. Из этого тотчас следует достаточное условие для равновесия. Именно, если при всех направлениях перемещения, которые возможны для подвижной точки воздействия в силу наложенных на нее условий, нет ни одного, для которого потенциал убывает, то не может возникнуть никакого движения, и точка воздействия должна остаться в покое.

Это происходит, если точка воздействия находится в таком месте своей поверхности или кривой, где потенциал U—максимум или минимум, ибо тогда для каждого возможного перемещения $\delta U = 0$, т. е. неравенство (222) невыполнимо. Следовательно, точка воздействия находится здесь в равновесии. Но также ясно, далее, что если U—максимум, то равновесие неустойчиво, ибо если точку воздействия немного переместить из положения равновесия и затем предоставить ее самой себе, то она, естественно, начнет двигаться; но так как движение по (222) происходит в сторону убывания потенциала, то для точки воздействия невозможно вернуться в положение равновесия, соответствующее максимуму U. Обратно, равновесие устойчиво, если U—минимум. Но если потенциал остается для конечных перемещений постоянным, то равновесие безразличное, ибо тогда точка воздействия в каждом месте в равновесии, потому что у нее нет никакой возможности удовлетворить условиям (222), необходимым для возникновения движения.

Наглядный пример для этого положения представляет тяжелая точка на неподвижной поверхности или кривой. Здесь U дается формулой (152), и условие (222) переходит в

$$dz < 0. \tag{223}$$

Таким образом движение всегда наступает по направлению вниз. Если поверхность или кривая имеет по высоте максимум или минимум, то точка воздействия находится там в неустойчивом или устойчивом равновесии; если она идет на некотором протяжении горизонтально, то там тяжелая точка находится в безразличном равновесии.

Если мы теперь перейдем от первоначально покоящейся к движущейся с произвольной скоростью точке воздействия, то и для нее имеет место положение, что работа силы связи равна нулю и что поэтому остается только работа действующей силы.

Поэтому и для этого случая сохраняет силу уравнение (147) живых сил так же, как если бы сила связи и наложенные условия совсем не существовали, и если действующая сила имеет потенциал, то имеет место также интегральный закон (151) живых сил.

Тяжелая точка, находящаяся на какой-нибудь неизменной поверхности или кривой, обладает таким образом на определенной высоте всегда также определенной скоростью, совершенно безразлично, когда, откуда и по какому пути она достигла этой высоты. Чем больше высота, тем меньше скорость.

Все выведенные в этом параграфе теоремы возможно значительно обобщить, о чем будет речь во второй главе второй части; поэтому они представляют хорошее подспорье для понимания последней.

Мы перейдем теперь к рассмотрению частного случая и начнем с простейшего: с одной степени свободы.

§ 68. *Неизменная кривая.* К уравнениям движения (217) прибавляются здесь еще оба уравнения кривой и условие, что сила связи направлена перпендикулярно к кривой:

$$\mathbf{Z}_x\frac{dx}{ds}+\mathbf{Z}_y\frac{dy}{ds}+\mathbf{Z}_z\frac{dz}{ds}=0, \tag{224}$$

причем косинус направления элемента кривой ds принимается заданным.

Зададим сначала себе вопрос о том условии, при котором точка воздействия под влиянием заданной действующей силы $\mathbf{F}$ остается в равновесии. Тогда ускорение равно нулю; исключая $\mathbf{F}$ из (217) и (224), получаем условие равновесия:

$$\mathbf{F}_x\cdot\frac{dx}{ds}+\mathbf{F}_y\cdot\frac{dy}{ds}+\mathbf{F}_z\cdot\frac{dz}{ds}=0. \tag{225}$$

Таким образом нет необходимости, чтобы действующая сила была равна нулю, как для равновесия свободной точки, но достаточно, чтобы она была перпендикулярна к кривой.

Спросим, затем, о движении точки воздействия в случае, когда действующая сила равна нулю. Тогда следует из (218):

$$q=\text{const},$$

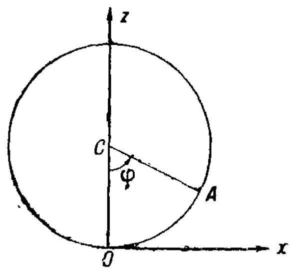
т. е. скорость постоянна, и из (219) и (220):

$$\mathbf{Z}_\beta=0 \text{ и } \mathbf{Z}_\nu=\frac{mq^2}{\varrho},$$

т. е. сила связи совпадает с центростремительной силой. Для неизменной прямой сила связи — нуль.

§ 69. Мы рассмотрим теперь движение тяжелой точки по неизменной вертикальной дуге круга, т. е. случай кругового маятника. Всего проще это осуществляется при помощи твердого невесомого стержня, вращающегося в вертикальной плоскости около неизменного центра и на свободном конце которого находится тяжесть.

Примем вертикаль, как обыкновенно, за ось z-ов, плоскость описываемого маятником круга — за плоскость xz и расположим начало координат O в самой низкой точке круга. Его радиус — длина маятника — пусть будет l (черт. 15).



Черт. 15.

Тогда уравнения круга:

$$y = 0$$

и

$$x^2 + z^2 = 2lz. \qquad (226)$$

Так как точка воздействия обладает только одной независимой координатой, то для вычисления скорости достаточно одного интегрирования уравнений движения. Для этого воспользуемся всего лучше, по § 67, принципом живой силы (152a):

$$q^2 + 2gz = q_0^2, \qquad (227)$$

где q_0 означает скорость для $z = 0$.

Так как каждой высоте z соответствует определенная скорость, то движение периодическое. Но оно обладает совершенно различным характером, смотря по тому, достаточна ли скорость q_0, с которой точка воздействия покидает свое положение устойчивого равновесия, для того, чтобы привести ее в положение неустойчивого равновесия: $z = 2l$, или нет. В первом случае колебания маятника происходят все время в одном и том же направлении, во втором случае маятник уже на высоте $z < 2l$ останавливается, и колебания происходят попеременно в ту и другую сторону.

В предельном случае начальная скорость q_0 как раз достаточна для того, чтобы могла быть достигнута наибольшая высота $z = 2l$ со скоростью $q = 0$, т. е. по (227):

$$q_0 = 2\sqrt{lg}; \qquad (228)$$

тогда точка воздействия останется наверху. Но если

$$q_0 < 2\sqrt{lg}, \qquad (229)$$

тогда маятник уже на высоте

$$z = \frac{q_0^2}{2g} \, (< 2l) \qquad (230)$$

остановится и затем станет двигаться в обратном направлении.

Сила связи $\mathbf{Z}$ при этом движении представляется тягой внутрь или давлением во-вне, которое стержень производит на точку воздействия A; оно положительно, если действует по направлению к центру кривизны C, т. е. внутрь. В самом деле в формуле (220) направление β, бинормаль, совпадает с y, и, так как $F_y = 0$, то и $Z_y = 0$, и вся сила связи действует по направлению радиуса.

Так как, далее, ϱl и $F_\nu = -mg\frac{l-z}{l}$ есть компонент силы тяжести по направлению к C, то из (219) следует:

$$Z_\nu = \frac{mq^2}{l} + mg\frac{l-z}{l}.$$

Положительную величину Z_ν можно осуществить при помощи нерастяжимой нити вместо твердого стержня. Но если для Z_ν получится отрицательное значение, то нить более недостаточна для получения неизменной связи, и нужно брать несжимаемый стержень. Последнее уравнение показывает, что для $z < l$, т. е. в нижней половине круга Z_ν всегда положительно. Здесь, таким образом, достаточна при всех обстоятельствах нить. Вообще мы получаем через исключение q из (227):

$$Z_\nu = \frac{m}{l}[q_0^2 + g\,(l-3z)]. \tag{231}$$

При возрастании z Z_ν убывает.

Возьмем еще раз рассмотренный предельный случай (228), в котором точка воздействия достигает как раз наивысшего положения.

Тогда

$$Z_\nu = \frac{mg}{l}(5l-3z), \tag{232}$$

т. е. сила связи остается положительной до высоты $z = \frac{5}{3}l$; начиная с этого положения, тяга обращается в давление, и, когда точка воздействия достигает высоты $2l$ со скоростью нуль, давление становится $-mg$, соответственно весу неподвижной теперь массы.

Для очень больших значений начальной скорости q_0 по (231) Z_ν остается всегда положительной; следовательно, достаточно нити, чтобы маятник колебался. Наименьшее допустимое при этом значение q_0 получается из условия, что Z_ν в наивысшей точке, для $z = 2l$, где она принимает минимальную величину, есть нуль:

$$q_0^2 = 5lg, \tag{233}$$

что, естественно, несколько больше, чем предельное значение (228).

Но также при достаточно малых значениях начальной скорости q_0, при перемежающемся движении, достаточно нити вместо стержня, именно в том случае, когда q_0 меньше, чем та начальная скорость, при которой Z_v в наивысшем положении (230) равно нулю. Это предельное значение по (231) есть:

$$q_0^2 = 2lg. \tag{234}$$

Таким образом только в том случае, когда q_0^2 лежит между пределами (233) и (234), необходим стержень, чтобы точка двигалась по круговой траектории. Во всех остальных случаях достаточно нити.

§ 70. Теперь обратимся к вопросу о соотношении между положением точки на ее траектории и временем. Для этого необходимо второе интегрирование, для которого целесообразно ввести угол отклонения φ (черт. 15), при помощи уравнения:

$$q = \pm l \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{l - z}{l} = \cos\varphi; \tag{235}$$

тогда из (224) легко получается:

$$t = \int_0^\varphi \frac{l \cdot d\varphi}{\sqrt{q_0^2 - 4lg \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}, \tag{236}$$

причем для $\varphi = 0$ положено $t = 0$.

Этот эллиптический интеграл приводится к элементарной функции только для предельного случая (228), в котором начальная скорость q_0 как раз достаточна, чтобы привести маятник в неустойчивое равновесие ($\varphi = \pi$). Время, потребное для этого, получается из (236) логарифмически бесконечным, что вытекает из того, что скорость в конце исчезающе мала.

Далее, мы исследуем более важный случай перемежающихся колебаний, т. е. примем, что неравенство (229) удовлетворено. Тогда маятник по (230) останавливается для угла отклонения φ_1, если по (230) и (235):

$$\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{q_0^2}{4lg}, \tag{237}$$

φ_1 — амплитуда колебания. Если ввести в (236) φ_1 вместо q_0, то следует:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \tag{238}$$

Так как φ с возрастанием времени периодически то увеличивается, то уменьшается, то корень квадратный нужно брать попеременно то положительным, то отрицательным. Поэтому мы ограничимся теперь рассмотрением первого поднятия маятника, т. е. первой четверти колебания. Тогда корень положителен, также и φ.

Чтобы привести интеграл к его нормальной форме, введем вместо φ переменное интеграции ϑ при помощи соотношения:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k \cdot \sin\vartheta, \tag{239}$$

причем для сокращения положим:

$$\sin\frac{\varphi_1}{2} = k; \tag{240}$$

тогда из (238) получается:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int\limits_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} . \tag{241}$$

Здесь можно разложить в ряд обратную величину из квадратного корня; ряд сходится тем лучше, чем меньше амплитуда; затем произведем интегрирование почленно. Если ограничить ряд членом с k^2, то приближенная формула будет:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\vartheta + \frac{k^2}{4}\left(\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right)\right\} . \tag{242}$$

Первая четверть колебания заканчивается, если $\varphi = \varphi_1$, и поэтому $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, если T обозначает время полного колебания, мы имеем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right),$$

и по (240), так как в первом приближении можно синус заменить дугой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_1{}^2}{16}\right) . \tag{243}$$

Для бесконечно малой амплитуды время колебания, таким образом, не зависит от амплитуды; но и для амплитуд в несколько градусов член с φ_1 очень мал.

Если бы мы с самого начала ограничились бесконечно малыми амплитудами, то при выводе закона колебаний проще исходить из уравнения (218), которое в применении к данному случаю по (235) дает:

$$g\sin\varphi + l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \tag{244}$$

Если заменить здесь $\sin\varphi$ через φ, то получим в точности диференциальное уравнение (15), и полученные там результаты можно прямо перенести на этот случай.

Найденные законы бесконечно малых колебаний кругового маятника допускают простое обобщение на случай колебаний тяжелого маятника по любой находящейся в вертикальной плоскости неизменной кривой около его положения устойчивого равновесия. При этих колебаниях точка воздействия удаляется из своего положения равновесия только бесконечно мало, и поэтому приходится рассматривать только бесконечно близкие точки кривой; здесь имеют место законы кругового маятника, только вместо радиуса круга l входит радиус кривизны кривой в ее низшей точке. При конечных колебаниях, напротив, имеет влияние и дальнейший ход кривой. Если радиус кривизны l везде постоянен, то по (243) время колебания возрастает вместе с амплитудой. Если же кривизна кривой возрастает с высотой, т. е. если кривая круче, чем круг кривизны в ее низшей точке, то время колебания меньше, чем для круга, и можно подходящим выбором кривизны достигнуть того, что время колебания даже при конечных колебаниях независимо от амплитуды. (Эта кривая, так называемая „таутохрона“, представляет циклоиду, образованную качением круга радиуса $\frac{l}{4}$.)

§ 71. *Неизменная поверхность.* Для материальной точки, которая принуждена оставаться на заданной неизменной поверхности, к уравнениям движения (217) прибавляются по § 65 еще, во-первых, уравнение поверхности:

$$f(x,\ y,\ z) = 0, \tag{245}$$

и, во-вторых, условие, что сила связи перпендикулярна к поверхности, т. е. действует в направлении нормали к ней:

$$Z_x : Z_y : Z_z = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{246}$$

Из этого можно вывести все законы движения, включительно до величины и направления силы связи.

Сначала мы опять зададим себе вопрос об условии для того, чтобы точка воздействия находилась в равновесии под влиянием заданной действующей силы. Тогда ускорение — нуль, и через исключение $\mathbf{Z}$ из (217) и (246) получается как условие равновесия:

$$\mathbf{F}_x : \mathbf{F}_y : \mathbf{F}_z = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{247}$$

т. е. два уравнения, тогда как для равновесия точки на неизменной кривой необходимо только одно условие (225) для равновесия.

Если прибавим еще к этому, что в предельном случае свободной точки три уравнения сводятся к $\mathbf{F} = 0$ и что для противоположного предельного случая неподвижной точки совсем нет надобности в каких-либо условиях, то станет ясным, что в каждом из всех названных случаев число уравнений связи для равновесия как раз согласуется с числом степеней свободы точки (§ 65), — положение, которое впоследствии будет значительно обобщено.

Для движения точки по неизменной поверхности, в случае, когда действующая сила $\mathbf{F} = 0$, мы получаем сначала из (218):

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad q = \text{const}, \tag{248}$$

и из (219) и (220):

$$|\mathbf{Z}| = \frac{mq^2}{\varrho}, \tag{249}$$

как раз то же, что для свободного движения по кривой. Но существенное различие в том, что здесь наперед неизвестны вообще ни радиус кривизны ϱ, ни траектория, — они должны быть еще определены. Ибо начальным состоянием задаются только положение и касательная к траектории; дальнейший ход кривой на поверхности $f = 0$ нужно вычислять особо.

Если принять во внимание то обстоятельство, что сила связи здесь является единственной движущей силой, то для этой цели можно воспользоваться уравнениями (246), которые дают по (68) и (248):

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{250}$$

т. е. главная нормаль в какой-нибудь точке траектории совпадает с нормалью к поверхности в этой точке. Это есть особое свойство кривой, которым обладает не каждая кривая, проведенная на поверхности, ибо, например, на поверхность шара главная нормаль какого-нибудь круга сечения есть радиус этого круга, тогда как нормаль к поверхности есть радиус шара. Кривая, обладающая особым свойством (250), называется „геодезической линией“ поверхности; название происходит от другого, впоследствии (§ 111) имеющего быть выведенным, важного свойства этих кривых. Для шара, таким образом, по сказанному, геодезические линии суть большие круги, для плоскости—прямые линии, ибо нормаль к плоскости есть перпендикулярное к плоскости направление, тогда как для каждой плоской кривой, если это не прямая, главная нормаль расположена в плоскости.

Материальная точка без действующей силы движется, таким образом, по неизменной поверхности по геодезической линии с постоянной скоростью. Начальное состояние определяет траекторию, ибо через определенную точку с определенной касательной на поверхности существует только одна геодезическая кривая. Это сделается всего яснее, если вспомнить, что первым элементом кривой и известной нормалью к поверхности в конце элемента определяется плоскость кривизны кривой, а точки пересечения ее с поверхностью дают второй элемент кривой, и так далее в такой же последовательности.

На шаре, поэтому, материальная свободная точка движется по тому же большому кругу, на плоскости — по той же прямой, которые определяются направлением начальной скорости.

Величина силы связи получается в каждом случае из (249).

§ 72. Рассмотрим теперь движение тяжелой точки по неизменной шаровой поверхности, т. е. сферический маятник. Это можно всего проще осуществить при посредстве твердого невесомого стержня, который свободно вращается около неподвижной точки по всем направлениям и на другом конце несет тяжесть. Направление силы связи совпадает по (246) с радиусом шара. Если эта сила действует в направлении к центру шара, то твердый стержень может быть заменен нерастяжимой нитью.

Мы ограничимся в последующем определением движения маятника. Если мы расположим опять начало координат в низшей точке шара и ось z-ов направим вертикально вверх, то уравнение шара радиуса l будет:

$$x^2+y^2+(l-z)^2=l^2. \tag{251}$$

К этому добавляется по § 67 и (152а) уравнение живой силы:

$$q^2+2gz=c. \tag{252}$$

Кроме того, нам нужен здесь еще второй интеграл уравнений движения, в качестве которого мы по § 51 можем воспользоваться принципом площадей в его более широком смысле, ибо полная сила, действующая на точку воздействия, т. е. результирующая из силы тяжести и силы связи, хотя и не проходит через неизменный центр, но проходит через неизменную прямую, именно через вертикаль в центре шара. Поэтому для проекции точки воздействия на плоскость xy имеет место уравнение (161):

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=c', \tag{253}$$

где

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi. \tag{254}$$

Для определения траектории введем везде вместо прямолинейных координат x, y, z цилиндрические координаты r, φ, z. Тогда из (251) имеем:

$$r^2+z^2=2lz, \tag{255}$$

из (252), принимая во внимание (166):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2gz=c. \tag{256}$$

Далее, исключаем dt при помощи (253), а также r^2 и rdr при помощи (255) и получаем отсюда диференциальное уравнение:

$$rdr = (l - z)\,dz, \tag{257}$$

которое дает следующее соотношение между φ и z:

$$d\varphi = \frac{l \cdot c' \cdot dz}{(2l - z) \cdot z \cdot \sqrt{(c - 2gz) \cdot (2l - z) \cdot z - c'^2}}. \tag{258}$$

Это соотношение приводит вообще к эллиптическому интегралу. Так как по (253) φ изменяется всегда в одном смысле с t, то мы можем, не ограничивая существенно общности, предполагать, что φ постоянно возрастает и, следовательно, c', а также c, положительны. Напротив, z попеременно то возрастает, то убывает, и соответственно с этим нужно считать корень квадратный то положительным, то отрицательным. Обращение корня в нуль дает наивысшее и наинизшее положение маятника. Уравнение для этого случая, конечно, кубическое по отношению к z; следовательно, оно имеет три корня, но легко убедиться, что один из корней больше $2l$, и поэтому не имеет никакого физического смысла, ибо выражение под корнем изменяет знак, если изменять z от $2l$ до ∞.

Конечно, z периодично относительно φ. Но траектория только тогда замкнута, когда период φ и 2π относятся как целые числа, т. е. если отношение этого периода к π рационально.

Если максимум и минимум z совпадают, или же оба рассматриваемые корня указанного кубического уравнения равны между собою, то маятник остается постоянно на той же высоте z и совершает горизонтальные круговые колебания; тогда также r и $\frac{d\varphi}{dt}$ постоянны. Эти величины получаются, если продиференцировать в (258) подкоренное выражение по z и положить результат равным нулю:

$$(c - 2gz)\,(l - z) - g(2lz - z^2) = 0$$

или по (252) и (255):

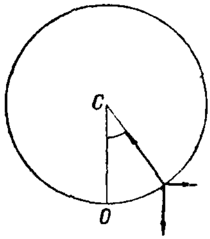
$$q^2(l - z) - gr^2 = 0. \tag{259}$$

Это уравнение выполняется для каждого произвольного значения z между 0 и l, следовательно, на нижней половине шара. Соответствующее r получается из (155), затем q и угловая скорость из (259):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{q}{r} = \sqrt{\frac{g}{l - z}}. \tag{260}$$

Для $z = l$ угловая скорость бесконечна, для бесконечно малого z она принимает определенную конечную величину, как раз ту, которая соответствует продолжительности колебания (243) кругового маятника с бесконечно малой амплитудой.

Сила связи, т. е. натяжение нити маятника, уравновешивается по § 66 центробежной силой $\frac{mq^2}{r}$ и тяжестью mg. В самом деле, результирующая обеих последних сил проходит через центр шара, так как их отношение по (259) равно тангенсу угла отклонения: $\frac{r}{l-z}$ (черт. 16).



Черт. 16.

Величина натяжения:

$$m\sqrt{\frac{q^4}{r^2}+g^2}=\frac{mlg}{l-z}; \tag{261}$$

она для $z=0$ равна mg, для $z=l$ бесконечна.

§ 73. Если мы возвратимся теперь еще к рассмотрению бесконечно малых колебаний сферического маятника вообще, то мы можем при этом снова исходить из (258) и ввести там те упрощения, которые характеризуют бесконечно малые колебания. В этих видах примем, что для начального состояния как r, отклонение, так и q, скорость,—величины бесконечно малые первого порядка, между тем как φ и $\frac{d\varphi}{dt}$ могут быть конечны. Тогда, по (255), высота z, и по (252) и (253), также константы c и c'— бесконечно-малые второго порядка, а из этого следует, что в продолжение всего движения все эти величины останутся того же порядка.

Кривая точки воздействия совпадает, таким образом, до величин второго порядка малости с ее проекцией на плоскость xy, т. е. она приблизительно лежит в горизонтальной плоскости и уравнение (255) упрощается следующим образом:

$$r^2=2lz. \tag{262}$$

Если теперь мы рассмотрим диференциальное уравнение (258), учитывая принятые ограничивающие упрощения, то оказывается, что в нем можно с большим приближением заменить множитель $2l-z$ через $2l$. Но это есть единственное допустимое упрощение, ибо в остальном во всех суммах и разностях отдельные члены имеют один и тот же порядок. Таким образом для бесконечно малых колебаний мы получаем теперь диференциальное уравнение:

$$d\varphi=\frac{c'dz}{2z\sqrt{2lz(c-2gz)-c'^2}}.$$

Интегрируя, находим:

$$\varphi=\frac{1}{2}\arccos\frac{lcz-c'^2}{z\sqrt{l^2c^2-4lgc'^2}}, \tag{263}$$

где интеграционная постоянная положена равной нулю на том же основании, как при интегрировании (168).

Так как кривая идет приблизительно в плоскости xy, то введем в (263) вместо φ и z прямоугольные координаты x и y по (262) и (254), и тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{x_2}{a_2}+\frac{y_2}{b_2}=1, \tag{264}$$

где a^2 и b^2 — два значения, которые принимают выражение:

$$\frac{2lc'^2}{lc\pm\sqrt{l^2c^2-4lgc'^2}} \tag{265}$$

смотря по тому, какой знак берется при квадратном корне. Таким образом кривая представляет эллипс с полуосями a и b. Чтобы определить, в каком смысле происходит по этому эллипсу движение, положим:

$$x=a\cos\vartheta,\ y=b\sin\vartheta; \tag{266}$$

этими значениями уравнение (264) тождественно удовлетворяется; отыщем зависимость вспомогательного угла ϑ от t. Для нее из (253) получается:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=ab\frac{d\vartheta}{dt}=c',$$

т. е.

$$\vartheta=\frac{c'}{ab}\cdot t; \tag{267}$$

если для $t=0$ положим $\vartheta=0$, мы получаем, следовательно, очень простое соотношение. Внося значения a и b из (265), получим:

$$\vartheta=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t,$$

и, вставляя это в (266), имеем:

$$x=a\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\ \text{и}\ y=b\sin t\sqrt{\frac{q}{l}}. \tag{268}$$

Этим движение определяется во всех деталях, ибо a и b даются (265), z—(262). Время колебания не зависит от a и b и опять такое же, как при круговом маятнике при бесконечно малой амплитуде.

Интересно заметить, что найденные здесь движения совершенно совпадают с тем, которое совершает свободная материальная точка, которая находится в плоскости xy под действием некоторой исходящей из начальной точки O центральной силы, ибо такое движение, как мы видели в § 52, определяется двумя уравнениями принципа площадей и принципа живой силы. Первое здесь по (253) удовлетворяется; можно видеть также, что удовлетворяется и второе уравнение, если мы напишем (252), приняв во внимание (262), в таком виде:

$$\frac{mq^2}{2} + \frac{mgr^2}{2l} = \text{const}, \tag{269}$$

и если, с другой стороны, примем в соображение, что для принятого центрального движения принцип живой силы напишется в следующей вытекающей из (151), (109) и (108) форме:

$$\frac{1}{2}\, mq^2 + \int f(r)\, dr = \text{const},$$

где $f\,(r)$ по величине и знаку обозначает притягивающую силу. Сравнение с (269) дает:

$$f\,(r) = \frac{mg}{l} \cdot r, \tag{270}$$

т. е. силу, притягивающую и пропорциональную расстоянию от O. Этот закон притяжения приводит к уравнениям движения (268) и, конечно, не только для бесконечно малых, но для произвольно больших колебаний, что, очевидно, можно вывести непосредственно.

§ 74. Теперь мы исследуем еще влияние вращения земли на колебания сферического маятника. Для этого служат уравнения (215), которые выражают для наблюдателя, находящегося на земной поверхности под широтою β, законы движения материальной точки m, на которую кроме ее веса действует еще сила с компонентами X, Y, Z. Если теперь S—натяжение нити, то

$$X = -S \cdot \frac{x}{l}, \quad Y = -S \cdot \frac{y}{l}, \quad Z = -S \cdot \frac{z-l}{l},$$

и уравнения движения выражаются так:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{южное:} & m\dot{u} = -S \cdot \frac{x}{l} + 2m\omega v \sin\beta, \\ \text{восточное:} & m\dot{v} = -S \cdot \frac{y}{l} - 2m\omega\,(u \sin\beta + w\cos\beta), \\ \text{зенитное:} & m\dot{w} = -S \cdot \frac{z-l}{l} - mg + 2m\omega\, v\cos\beta. \end{array}\right\} \tag{271}$$

Эти уравнения совместно с (251) содержат полное решение задачи.

Спросим теперь себя, имеют ли еще место здесь принципы живой силы и площадей. С этой целью умножим, как в § 47, уравнения движения по порядку на u, v, w, сложим и проинтегрируем. Тогда выпадут как члены с S, так и члены с ω, первые потому, что уравнение (251) имеет место для всех времен, следовательно, также может быть диференцируемо по t, и принцип живых сил имеет место в точности в форме (252), Остается еще принцип площадей. Умножим, как в § 50, первое уравнение движения на y, второе на x и вычтем; тогда получается:

$$x\dot{v} - y\dot{v} = -2\omega\,(xu \sin\beta + xw\cos\beta + yv\sin\beta).$$

Теперь предположим опять бесконечно малые колебания. Тогда w — бесконечно малая величина второго порядка по сравнению с u и v; опуская член с w, получаем по интеграции:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = -\omega r^2 \sin\beta + \text{const}. \tag{272}$$

Таким образом принцип площадей здесь места не имеет. Однако мы можем при помощи простой подстановки получить наглядное представление о движении. Именно положим

$$\varphi' = \varphi + \omega\sin\beta\cdot t; \tag{273}$$

тогда (272) перейдет в

$$r^2\cdot\frac{d\varphi'}{dt} = \text{const}, \tag{274}$$

т. е. принцип площадей удовлетворяется для системы координат, которая вращается около оси z, вертикали, с угловой скоростью— $\omega\sin\beta$, ибо для постоянного φ':

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega\sin\beta.$$

Если, следовательно, мы отнесем колебания маятника к этой вращающейся системе координат, то оказывается, что тогда вообще имеют место совершенно те же законы, как те, которые были выведены в § 73 для абсолютно покоящейся системы. Чтобы доказать это, необходимо еще вывести, что принцип живых сил имеет место для вращающейся системы, ибо он вместе с принципом площадей определяет однозначно движение по шаровой поверхности. Если напишем теперь (269) в полярных координатах, опуская w^2:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{gr^2}{l} = \text{const}, \tag{275}$$

и введем здесь по (273) φ' вместо φ, то получается:

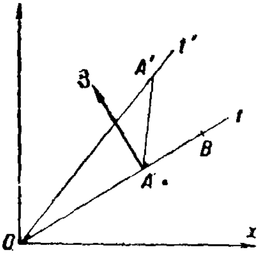
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)^2 - 2\omega\sin\beta\, r^2\frac{d\varphi'}{dt} + r^2\left(\omega^2\sin^2\beta + \frac{g}{l}\right) = \text{const}.$$

Если принять во внимание (274), то это соотношение имеет в точности форму (275), только вместо φ стоит φ', и константы несколько изменены.

Поэтому мы можем высказать положение, что относительно вращающейся земли колебания маятника бесконечно малой амплитуды происходят в точности так же, как относительно покоящейся земли, т. е. по эллипсу; только оси эллипса вращаются с угловой скоростью — $\omega \sin\beta$, т. е. в северном полушарии ($\beta > 0$) в направлении юг—запад—север—восток, в южном полушарии— в обратном направлении. На экваторе явление совершенно исчезает, на полюсах достигает максимума. Подтверждение теории дает знаменитый опыт Фуко.

§ 75. В заключение исследуем еще случай, когда наложенные связи зависят от времени, т. е. точка воздействия принуждена оставаться на кривой или поверхности, которая движется заданным образом.

Тогда уравнения $f=0$ и $\varphi=0$ содержат, кроме координат x, y, z точки воздействия, еще явно время t. Задача—при заданной действующей силе $\mathbf{F}$ определить движение точки воздействия—может быть трактована совершенно на тех же основаниях, о которых была речь в § 65, и получается в точности тот же результат, т. е. движение определено тремя уравнениями движения (216), соответственно принципу д'Аламбера (217), в соединении с дальнейшими тремя уравнениями, которые выражают наложенные связи, а также положением, что сила связи Z перпендикулярна к кривой или поверхности.



Черт. 17.

Напротив, теоремы, выведенные в позднейших параграфах (66 и 67), здесь теряют свою применимость. В частности нельзя более утверждать, что сила связи Z перпендикулярна к касательной траектории точки воздействия, ибо траектория вообще имеет другую касательную, чем заданная кривая или поверхность.

Всего яснее это будет из простого примера. Пусть точка воздействия принуждена оставаться на прямой, которая с заданной угловой скоростью вращается в (горизонтальной) плоскости. Пусть Ot—положение прямой для момента времени t, Ot'—для бесконечно близкого момента времени t' (черт. 17); точка воздействия находится в момент времени t в A, в момент t'—в A'. Тогда касательная к траектории—AA', напротив касательная к заданной кривой—AB, и эти два направления вообще образуют между собою конечный угол. Так как сила связи Z действует перпендикулярно к AB, то она вообще образует с AA' острый или тупой угол. Из этого следует, что работа связи не нуль, как в § 67, и также, что принцип живой силы вообще не удовлетворен, даже если действующая сила имеет потенциал.

Произведем вычисление для указанного простого примера в предположении, что угловая скорость ω постоянна и что нет действующей силы. Пусть центр O вращения будет началом координат, плоскость вращения — плоскость xy. Тогда по (216) уравнения движения:

$$m\dot{u} = Z_x, \quad m\dot{v} = Z_y, \tag{276}$$

уравнения наложенной связи:

$$y = x \operatorname{tg}(\omega t), \tag{277}$$

и теорема о направлении силы связи дает:

$$xZ_x + yZ_y = 0. \tag{278}$$

Этим и начальным состоянием движение определено. Во-первых, через исключение Z_x и Z_y имеем:

$$x\dot{u} + y\dot{v} = 0; \tag{278a}$$

вводя полярные координаты r и φ по (254) и принимая во внимание (277), находим:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0. \tag{278b}$$

Это уривнение возможно интегрировать почленно, если умножить его на $\dot{r}$; тогда получается:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = \text{const}.$$

Примем, что в начальном состоянии $r = a$ и $\dot{r} = 0$, тогда определится значение интеграционной постоянной, и вместе с тем диференциальное уравнение принимает вид:

$$dt = \frac{dr}{\omega\sqrt{r^2 - a^2}},$$

из интегрирования которого следует:

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right). \tag{279}$$

Таким образом точка воздействия отбрасывается наружу со скоростью, которая все более и более увеличивается; это легко объясняется тем обстоятельством, что, как можно видеть из черт. 17, сила связи постоянно совершает положительную работу. Траектория получается из (279) и (277):

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right); \tag{280}$$

это—логарифмическая спираль, форма которой не зависит от ω.

Механический принцип живой силы здесь нарушен; поэтому само собою напрашивается вопрос о том, как обстоит дело в этом примере с универсальным принципом сохранения энергии. Последний принцип (§ 49) сохраняет, конечно, и здесь свою силу; в самом деле, живая сила точки воздействия возникает отнюдь не из ничего, она образуется благодаря работе того источника силы, который производит вращение прямой, ибо, чтобы осуществить наложенную связь—сохранение постоянной угловой скорости вращения—необходима сила, которая должна быть произведена извне и которая тем больше, чем дальше продвигается масса наружу. Работа этой силы по принципу энергии в точности равна увеличению живой силы материальной точки воздействия.

Общее мы можем сказать, что в каждом случае, когда наложенная связь содержит явно время t, необходимо затратить некоторую внешнюю работу, чтобы осуществить ее, тогда как независящие от времени связи не требуют никакого совершения внешней работы для их осуществления, сообразно тому, что работа силы связи в этих случаях всегда нуль (§ 67).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МЕХАНИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 76. В природе мы имеем дело не с материальными точками, а с материальными телами конечных протяжений. Но мы можем каждое тело рассматривать как комплекс очень многих материальных точек, и разнообразие в механических свойствах тел свести к тому, что их отдельные точки действуют друг на друга с различными силами. В таком случае вопрос о законах движения материальных тел сводится к механике системы материальных точек.

С этой точки зрения в природе не существует вообще никаких других механических сил, кроме сил между материальными точками. Каждая материальная точка движется сообразно результирующей тех сил, с которыми на нее действуют все остальные точки вселенной. Если когда-нибудь будет речь о силе, которую производит тело в целом или которой оно подвержено, то это не следует понимать дословно, но только как сокращенный оборот речи. В действительности только отдельные точки тела могут быть, с одной стороны, началом сил, с другой стороны—точками приложения сил. Каждая сила действует от одной определенной материальной точки A на другую определенную материальную точку B.

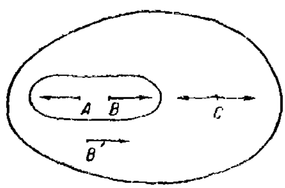
Поэтому все силы природы возможно координировать друг с другом попарно, поскольку каждой отдельной силе, исходящей от точки A, соответствует другая сила, производимая второй точкой B на первую точку A; каждые две такие соответствующие силы, по принципу действия, равного противодействию (§ 29), равны по величине и противоположны по направлению.

ГЛАВА I

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 77. Мы займемся сначала специально механикой покоящейся системы точек, т. е. статикой, и выберем для исследования прежде всего такую систему, точки которой вследствие действующих между ними сил сохраняют все время постоянными взаимные расстояния; такая система по этой причине называется „твердым телом". Твердое тело во всех своих частях абсолютно неизменно, но как целое оно может быть приведено в движение ничтожнейшей силой. Совершенно твердых тел в природе не существует, но приблизительно они осуществляются телами в „твердом" состоянии. Но не одним этим обусловливается важность твердого тела для теории, важно то, что механика произвольной системы точек может быть сведена к механике твердого тела (ср. ниже § 130).

Задача, разрешению которой должна быть посвящена эта глава, состоит в следующем. Пусть дано покоящееся твердое тело произвольных размеров, на которое в определенных заданных точках, в „точках приложения", действуют силы определенной величины и направления. Спрашивается, при каком условии эти силы уравновешиваются, или если это условие не выполняется, то какую или какие силы нужно еще приложить, чтобы достигнуть равновесия.



Черт. 18.

Мы решим задачу, сводя заданные силы к возможно простому случаю, и будем переходить при этом от частных случаев к общему. Простейшим является случай, когда действуют только две силы. Для того, чтобы две силы уравновешивались на твердом теле, очевидно, необходимо, чтобы они были равны по величине и противоположны по направлению. Но этого еще не достаточно. Для равновесия нужно еще, кроме того, чтобы прямая, соединяющая точки приложения сил AB (черт. 18), совпадала с их направлением, ибо если бы, например, вторая сила была приложена не в B, а в B', то равновесия не существовало бы,—произошло бы вращательное движение.

Указанное условие относительно направления AB достаточно в действительности для равновесия. При этом совершенно безразлична длина AB или форма тела. Последнее легко усмотреть, если сначала представить себе, что тело совершенно симметрично относительно соединительной линии AB и также относительно плоскости, делящей пополам отрезок AB (черт. 18). Никто не усомнится, что в этом случае равновесие будет. Но это равновесие невозможно нарушить, если к телу присоединить произвольные массы, на которые не действуют никакие силы.

Из развитого положения тотчас следует, что физическое значение силы, приложенной к твердому телу, не изменится, если переместить точку ее приложения в направлении силы на любой отрезок, ибо во всяком случае возможно, ничего не нарушая, в произвольной точке C, лежащей на прямой AB, приложить две равные и противоположные силы F (черт. 18). Так как теперь действующая в C вправо сила уравновешивается силой, действующей в A влево, то обе эти силы можно отбросить и получится, таким образом, вместо силы в A, действующей влево, сила в C, действующая влево. Нельзя, однако, перемещать точку притяжения силы в каком либо другом направлении, кроме направления силы (или ему противоположном), не меняя при этом физического значения силы. Отсюда видно, что кроме величины и направления играет некоторую характеристическую роль и точка приложения силы и поэтому она всегда должна быть особо задана, при вполне определенной силе.

Само собой понятно, что перемещение точки приложения силы допускается без дальнейших пояснений только внутри тела. Но можно распространить перемещение и за пределы тела, если только принять меры к тому, чтобы точка приложения силы была связана с телом неизменно.

§ 78. Если на какое-нибудь твердое тело действуют несколько сил, направления которых все пересекаются в одной точке, то нетрудно соединить их в одну результирующую силу. Для этого придется сначала перенести точки приложения в общую точку пересечения, которую, если она придется вне тела, можно вообразить себе неизменно с телом соединенной; затем силы, действующие в этой единственной точке, надо сложить, по § 24, в одну результирующую F; точка приложения результирующей силы может быть перенесена произвольно в направлении F.

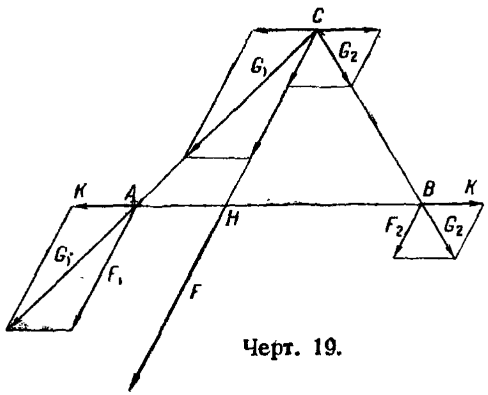
Рассмотрим в виде примера притяжение, которое испытывает твердый однородный шар по ньютонову закону тяготения со стороны вне его расположенной материальной точки P. Это притяжение представляет результирующую сил, которые точка P производит на все элементы массы шара и направления которых все проходят через P. Поэтому сначала все эти силы перенесем в P и сложим их там в одну результирующую F. Это производится очень просто, если принять в соображение, что сила притяжения P на элемент массы шара равна и противоположна притяжению элемента массы на P; по § 33, сила F поэтому равна и противоположна силе, которую производит на точку P масса шара, если ее сосредоточить в его центре. Теперь мы можем точку приложения F опять перенести из P внутрь шара, например в его центр, и таким образом приходим к выводу, что притяжение, испытываемое твердым однородным шаром со стороны материальной точки, таково, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

Но это положение имеет силу только по отношению к твердому шару; оно неприменимо, например, в отношении жидкого шара, ибо для последнего случая недопустим примененный нами способ рассуждения, при котором мы оперировали с переносом точек приложения отдельных сил, что справедливо только для твердого тела. Имеется существенная разница между силами, которые тело производит, и силами, которые тело испытывает. Первые, если они действуют на одну определенную точку, могут быть без дальнейших рассуждений сложены в одну результирующую, все равно, какими бы свойствами ни обладало тело: последние могут быть сложены без оговорок только в том случае, когда тело твердое.

В самом деле, притяжение, которое вследствие тяготения испытывает жидкий шар, не может быть, вообще говоря, заменено одной силой,—шар будет деформироваться (приливы и отливы).

Если действующие на твердое тело силы все лежат в одной плоскости, то вообще они могут быть также соединены в одну результирующую таким образом, что сначала выбирают какие-нибудь две из них, строят в точке их пересечения равнодействующую, и этот способ продолжают далее. Исключение представляет случай параллельных сил, который мы поэтому исследуем отдельно.

Если среди большого числа сил найдутся хотя бы только две, направления которых не лежат в одной плоскости, то указанный здесь способ сложения сил неприменим, потому что силы не могут быть перенесены в общую точку приложения. Для разрешения этого более общего случая необходимо поэтому расширение теории. Сначала мы рассмотрим простой случай параллельных сил.



Черт. 19.

§ 79. *Параллельные силы.* Примем за плоскость чертежа (черт. 19) плоскость, проходящую через обе точки приложения заданных сил F_1 и F_2, одинаково направленных, и через направление их. Так как направления F_1 и F_2 не пересекаются, то введем две равные между собою и противоположные добавочные силы K, которые приложены в A и B в направлении AB и взаимно компенсируют одна другую. Тогда в A сила F_1 складывается с K в силу G_1, в B сила F_2 с K дает G_2, и теперь уже можно легко построить результирующую G_1 и G_2, перенося точки приложения A и B в точку пересечения C (см. чертеж).

Сложение G_1 и G_2 всего проще производится таким образом, что сначала как G_1, так и G_2 разлагают опять на их компоненты F_1 и K, соответственно F_2 и K, что сводится просто к перемещению параллелограма сил из A и B в C. Тогда обе силы K взаимно сокращаются, и остается сила:

$$F = F_1 + F_2, \tag{281}$$

которая параллельна силам F_1 и F_2 и имеет точку приложения в C или также в какой-нибудь другой точке по ее направлению, например в точке пересечения H с прямой AB. Эта точка H выделяется из всех других точек прямой CH тем, что ее положение зависит только от величины и точек приложения сил F_1 и F_2, но не от их направления.

Это получается, если принять в соображение, что треугольник, образуемый силами F_1, K, G_1 (половина параллелограма сил), подобен треугольнику ACH, и поэтому

$$AH : HC = K : F_1,$$

также

$$BH : HC = K : F_2;$$

следовательно,

$$F_1 \cdot AH = F_2 \cdot BH, \tag{281a}$$

или

$$AH = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot AB \cdot \tag{282}$$

Следовательно, если параллельные силы F_1 и F_2 вращаются, сохраняя неизменной свою величину, около их точек приложения A и B, то вращается и результирующая F, также сохраняя свою величину около ее точки приложения H.

Для $F_2 = 0$, H совпадает с A, для $F_2 = F_1$, H лежит естественно в середине между A и B, в общем случае H лежит где-нибудь между A и B.

Для перехода к произвольному числу параллельных сил обратимся к аналитическому выражению. Пусть x_1, y_1, z_1 координаты A, $x_2, y_2 z_2$ — координаты B; тогда уравнение прямой AB:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Координаты x_0, y_0, z_0 точки H определяются тем, что, во-первых, они удовлетворяют только что написанному уравнению и, во-вторых, уравнению (282), т. е.:

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_0 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{AH}{AB} = \frac{F_2}{F_1 + F_2}.$$

Из этого следует, если принять во внимание (281):

$$\left.\begin{aligned} x_0\ (F_1 + F_2) &= x_0F = x_1F_1 + x_2F_2, \\ y_0\ (F_1 + F_2) &= y_0F = y_1F_1 + y_2F_2, \\ z_0\ (F_1 + F_2) &= z_0F = z_1F_1 + z_2F_2, \end{aligned}\right\} \tag{283}$$

т. е. произведение результирующей силы F на какую-либо из координат точки ее приложения равно сумме произведений компонентов на соответствующие координаты их точек приложения.

Этот результат легко обобщить на произвольное число параллельных сил.

Если мы имеем, например, три силы F_1, F_2, F_3, то представим себе сначала, что F_1 и F_2 заменены одной равнодействующей F', величина которой $F_1 + F_2$ и точка приложения которой x_0', y_0', z_0' дается (283).

Тогда искомая сила F есть результирующая из F' и F_3; поэтому ее величина по (281) равна:

$$F = F' + F_3 = F_1 + F_2 + F_3,$$

и ее точка приложения по (283) определится тем, что произведение x_0F равно сумме x_3F_3 и $x_0{}^1F'$.

Но последнее произведение опять по (283) равно

$$x_1F_1 + x_2F_2,$$

следовательно,

$$x_0F = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3$$

и также для координат y и z.

Таким образом для произвольного числа параллельных, действующих в одну сторону сил F_1, F_2, $F_3, \ldots$ с точками приложения x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, $z_2, \ldots$ для величины результирующей окончательно получается:

$$F = \Sigma F_1, \tag{284}$$

и для места точки приложения x_0, y_0, z_0:

$$x_0F = \Sigma x_1F_1;\ y_0F = \Sigma y_1F_1;\ z_0F = \Sigma z_1F_1, \tag{285}$$

причем точка приложения может быть еще произвольно перемещена в направлении F.

§ 80. *Применение к тяжести.* Разберем теперь как особенно важное применение найденных положений вопрос о результирующей всех сил, которые земля производит по закону тяготения на твердое тело. На элемент массы m_1 тела земля действует с силой m_1g по направлению к ее центру (§ 34). Если размеры тела исчезающе малы по сравнению с его расстоянием от центра земли, то силы притяжения на все отдельные элементы массы m_1, $m_2, \ldots$ тела могут быть рассматриваемы как параллельные и соединены в одну, одинаково с ними направленную, равнодействующую F, величина которой по (184) выражается:

$$F = g \cdot \Sigma m_1, \tag{286}$$

причем она приложена в точке x_0, y_0, z_0, если по (285)

$$x_0 \Sigma m_1 = \Sigma m_1x_1, \ldots \tag{287}$$

Определяемая этими уравнениями точка x_0, y_0, z_0 называется центром тяжести тела. Его положение не зависит ни от направления силы тяжести, ни от величины ускорения тяжести g, оно зависит только от расположения элементов массы тела. Поэтому центр тяжести имеет более общее значение, а не только служит точкой приложения равнодействующей сил тяжести, и было бы правильнее называть его центром инерции.

Часто оказывается целесообразным говорить о центре тяжести элементов массы даже в том случае, когда последние совершенно не связаны между собою неизменно, например о центре тяжести системы свободно двигающихся материальных точек с массами m_1, $m_2, \ldots$, представляя себе, что центр тяжести их для каждого момента определяется уравнениями (287). Естественно, в этом случае значение центра тяжести как точки приложения равнодействующей совершенно отпадает.

Если задача состоит в том, чтобы найти центр тяжести системы тел, то часто бывает целесообразным суммирование в (287) не распространять прямо на все элементы массы всех тел, но сначала определить для каждого тела в отдельности его центр тяжести, затем представить себе, что в этом центре тяжести сосредоточена масса тела, и затем опять отыскивать центр тяжести полученных таким образом материальных точек.

Такой прием всегда ведет к правильным результатам. В этом всего проще можно убедиться, если представить себе, что все тела соединены между собою неизменно и подвержены тяжести. Тогда результирующая силы тяжести всей неизменяемой системы во всяком случае получится правильно, если сначала найти результирующую тяжести для каждого тела в отдельности и найденные таким образом силы сложить опять в одну результирующую.

Если масса тела распределена в пространстве непрерывно, то элемент объема dV содержит массу $k\,dV$ (§ 31), где плотность k может зависеть от координат x, y, z, а суммы превратятся в интегралы. Тогда из (287) получается для положения центра тяжести:

$$x_0 \int k\,dV = \int kx\,dV, \ldots \tag{288}$$

Если, в частности, тело однородно, т. е. k постоянно, то k совершенно выпадает, и получается:

$$x_0 \int dV = \int x\,dV, \ldots \tag{289}$$

В этом смысле говорят также о центре тяжести объема, а также о центре тяжести поверхности или линии, представляя себе, что рассматриваемый геометрический образ покрыт однородной массой, плотность которой затем всегда выпадает.

Вычислим в виде примера положение центра тяжести для площади кругового сектора радиуса r и с отверстием a.

Тогда легко получается по схеме (289), если ϱ и φ—полярные координаты:

$$x_0 \iint \varrho\,d\varrho\,d\varphi = \iint \varrho\cos\varphi \cdot \varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

и

$$y_0 \iint \varrho\,d\varrho\,d\varphi = \iint \varrho\sin\varphi \cdot \varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

с пределами 0 и r для ϱ и $-\frac{a}{2}$ и $+\frac{a}{2}$ для φ.

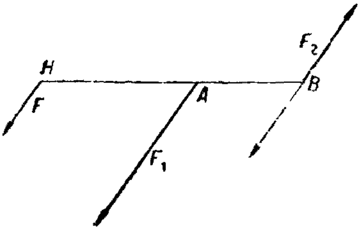
Отсюда:

$$x_0 = \frac{4}{3a}\sin\frac{a}{2}\cdot r,\quad y_0 = 0. \tag{290}$$

Для $a = 2\pi$ мы имеем полный круг; тогда $x_0 = 0$. Но для $a = 0$, $x_0 = \frac{2}{3}r$, как это соответствует центру тяжести площади бесконечно узкого треугольника, основание которого отстоит от вершины на r.

Конечно, нужно различать центр тяжести площади треугольника от центра тяжести периметра треугольника, который всего проще определяется на основании вышеуказанного положения таким образом, что сначала находят центр тяжести для каждой из его сторон в отдельности (середина стороны) и представляют себе, что в каждой из этих точек сосредоточена масса, равная массе соответственной стороны (измеряемая ее длиной).

§ 81. *Параллельные силы, противоположно направленные.* Рассмотрим теперь две приложенные в точках A и B силы F_1 и F_2, которые направлены в прямо противоположные стороны. Пусть $F_1 > F_2$ (черт. 20).



Черт. 20.

Тогда равнодействующая сила всего проще получается следующим образом. Разложим бо̀льшую силу F_1 на две параллельные, действующие в одинаковом направлении силы, из которых одна приложена в B и равна и прямо противоположна F_2, а другая, F—приложена в точке H по другую сторону от A. Это всегда возможно, если только позаботиться о том, чтобы F_1 была результирующей этих двух сил, т. е. чтобы по (281):

$$F_1 = F + F_2 \tag{291}$$

и по (281а):

$$F \quad HA = F_2 \cdot BA. \tag{292}$$

Заменим теперь силу F_1 ее двумя компонентами F и F_2. Тогда обе силы F_2 в B уничтожатся, и останется только сила F, как равнодействующая; величина ее по (291) определяется из:

$$F = F_1 - F_2, \tag{293}$$

а направление совпадает с направлением большей силы F_1, точка же ее приложения H лежит вне отрезка AB со стороны большей силы F_1, именно по (292) на расстоянии:

$$AH = AB \cdot \frac{F_2}{F} \tag{294}$$

от точки приложения A.

Уравнения (293) и (294) могут быть также рассматриваемы как обобщения уравнений (281) и (282), выведенных для параллельных сил, так как они получаются из последних, если принять F_2 отрицательным. Тогда отрицательная величина для AH указывает вместе с тем на то, что H лежит в стороне от A, противоположной положению точки B.

Чем более величина F_2 приближается к величине F_1, тем далее отодвигается H, и когда $F_2 = F_1$, то прием, предложенный для определения равнодействующей, становится неприменимым. Две равные противоположно направленные параллельные силы вообще не могут быть соединены в одну результирующую силу, они образуют особый тип силы и называются **парой сил**.

Если на какое-нибудь неизменяемое тело действует произвольно большое число параллельных сил как одинаково направленных, так и противоположно, то вообще их можно заменить одной равнодействующей силой. Простое соображение, основанное на результатах, полученных для двух противоположно направленных параллельных сил, обнаруживает, что формулы (284) и (285) для равнодействующей системы параллельных сил остаются и тогда применимыми, когда силы частью действуют в противоположных направлениях. Нужно только эти последние силы вводить в уравнения с противоположным знаком. Тогда алгебраическая сумма всех сил ΣF_1 дает, кроме величины, также направление равнодействующей.

Однако исключение представляет тот случай, когда $\Sigma F_1 = 0$. Тогда теряют свой смысл уравнения (285), служащие для определения точки приложения x_0, y_0, z_0 равнодействующей и вся система сил сводится или к паре сил или взаимно уравновешивается.

Когда происходит первое, а когда—второе, это показывает следующее рассмотрение. Сначала сложим все силы, которые действуют в одну какую-нибудь сторону: F_1', F_2', F_3', ... в одну равнодействующую F', затем—силы, действующие в противоположную сторону: F_1'', F_2'', F_3'', ... (считая положительными), заменим их результирующей F''.

Тогда по предположению:

$$\Sigma F_1' = \Sigma F_1''. \tag{295}$$

Далее

и

$$\left.\begin{aligned} x_0' \Sigma F_1' &= \Sigma x_1' F_1', \dots \\ x_0'' \Sigma F_1'' &= \Sigma x_1'' F_1'', \dots \end{aligned}\right\} \tag{296}$$

Исследуем теперь, совпадает ли линия, соединяющая точки приложения обеих равных и противоположно направленных параллельных результирующих F' и F'', с их направлением или нет.

В первом случае они уравновешиваются взаимно, во втором случае мы имеем пару сил. Первый случай требует существования условия:

$$(x_0'' - x_0') : (y_0'' - y') : (z_0'' - z_0') = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma,$$

если α, β, γ — углы, определяющие направление силы.

Подставим в это выражение значения (296), примем во внимание (295) и введем обозначение F (положительное или отрицательное) для величины и направления силы; тогда получим как необходимое и достаточное условие для уравновешивания системы параллельных сил, одинаково и противоположно направленных, такие выражения:

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma F_1 = 0 \\ \text{и} \\ \Sigma x_1 F_1 : \Sigma y_1 F_1 : \Sigma z_1 F_1 = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma. \end{array}\right\} \qquad (297)$$

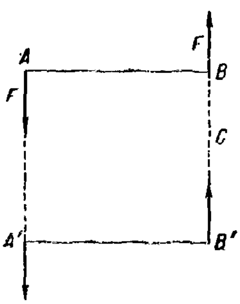
Если, например, силы параллельны или противоположно направлены с осью z, то

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\quad \beta = \frac{\pi}{2},\ \gamma = 0,$$

и условие уравновешивания:

$$\Sigma F_1 = 0,\ \Sigma x_1 F_1 = 0,\ \Sigma y_1 F_1 = 0.$$

Координаты z точек приложения вообще не играют при этом никакой роли, как естественно ожидать, так как каждая сила может быть в направлении оси z произвольно перемещена.



Черт. 21.

§ 82. *Пары сил.* Займемся теперь ближе парами сил. Примем за плоскость чертежа плоскость одной пары, состоящей из двух противоположно направленных параллельных сил F, и переместим точку приложения одной из сил F по ее направлению настолько, чтобы линия, соединяющая обе точки приложения AB, стала перпендикулярной к F. Тогда AB называется плечом пары.

Прежде всего легко видеть, что пара сил, без изменения ее физического значения, может быть произвольно далеко перемещена по направлению одной из ее сил, например в $A'B'$ (черт. 21). Ибо, по § 77, что имеет место по отношению к каждой силе в отдельности, то применимо также к совокупности двух сил.

До некоторой степени само собой напрашивающееся возражение против этого положения, даже его опровержение, может быть выражено в форме такого маленького диалога.

„Как могут быть эквивалентными пары сил AB и $A'B'$, ведь вращение тела около середины AB не то же самое, что вращение около середины $A'B'$?“ Конечно, оба указанные вращения не тождественны. Но не было сказано, и это совсем неверно, что пара сил производит вращение тела около середины ее плеча.

„Но по § 76 каждая точка движется по направлению силы, которая к ней приложена. Следовательно, если пара сил приложена в точках A и B, то движутся точки A и B, которые раньше покоились, в направлении их сил F, и так как силы равны, то это движение представляет вращение около середины AB!“

По § 76 каждая точка движется сообразно с результирующей сил, которые производятся всеми остальными точками вселенной.

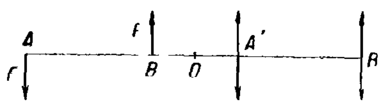
В данном случае мы имеем не две изолированные точки A и B, но неизменяемое тело, к которому принадлежат точки A

и B. Эти точки находятся, таким образом, под действием сил, которые производятся на них другими точками тела, именно лежащими в непосредственной близости, и эти-то силы делают тело неизменяемым. Эти внутренние силы нужно также принимать во внимание, если дело идет о движении точек A и B, а не только силы F.

„Но внутренние силы не могут привести в движение тело, они взаимно уравновешиваются и поэтому могут быть опущены".

Действительно, внутренние силы неизменяемого тела уравновешиваются взаимно, если их сложить в одну равнодействующую. Это следует, по § 76, из принципа — действие равно противодействию. Но здесь дело идет не о результирующей всех внутренних сил тела, а о результирующей тех внутренних сил, которые действуют на точку A (или на точку B).

Эти последние отнюдь не всегда уравновешиваются, это всего легче видеть, если рассмотреть какую-нибудь произвольную другую точку C тела (черт. 21).



Черт. 22.

Если тело приводится в движение парой сил, то также ведь начнет двигаться и точка C. Какая сила приводит ее в движение? Да только результирующая из тех внутренних сил, которые на нее действуют, ибо это единственные силы, которым она подвержена. Таким образом раз внутренние силы действуют с конечной равнодействующей на C, то вообще они будут также действовать и на A и B, и сообразно с этой результирующей и силой F определится движение A и B. Поэтому пара сил не вращает тело около середины ее плеча, и возражения относительно полной эквивалентности пар сил AB и $A'B'$ неосновательны.

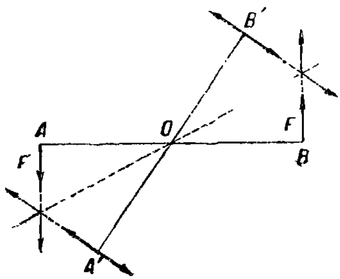
„Но как движется все же тело в действительности под действием пары сил, если оно не вращается около середины ее плеча?".

Этот вопрос здесь еще не может быть разобран. Но он будет вполне выяснен далее (§ 149).

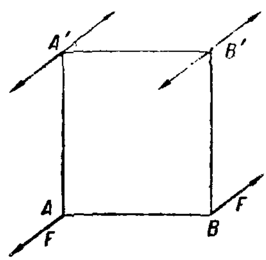
Пара сил может быть также произвольно перемещена в направлении своего плеча, не изменяя своего значения.

Именно, приложим в точках A' и B', расположенных на прямой AB (причем $A'B' = AB$) по две противоположные силы, равные первоначальным F; это не нарушит системы сил, так как они попарно уничтожаются (черт. 22). Далее, сложим силу F в A с параллельной ей силой F в B' в параллельную им равнодействующую $2F$ с точкой приложения в O, середине AB'. Также сложим противоположные параллельные силы в B и A' в параллельную им результирующую $2F$, с точкой приложения в середине BA', т. е. также в O. Эти две равнодействующие, таким образом, уничтожатся, и останется только пара сил в $A'B'$, которая представляет не что иное, как перемещенную первоначальную пару силу.

Далее, возможно также плечо пары произвольно поворачивать около его середины O в плоскости пары, т. е. в плоскости чертежа. Чтобы доказать это, представим себе, что к повернутому на произвольный угол плечу $A'B'$ опять приложены по две равные и противоположные силы F перпендикулярно к $A'B'$ (черт. 23), которые не нарушают системы сил, и сложим, с одной стороны, первоначальную силу в A с силой в A', направленной к A, с другой стороны,—первоначальную силу в B с силой в B', направленной к B, в одну равнодействующую, перенося обе слагаемые каждый раз в точку их пересечения (см. чертеж).



Черт. 23.



Черт. 24.

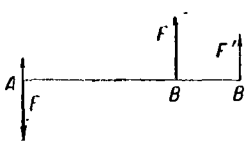
Вследствие равенства сил равнодействующие будут направлены по направлению равноделящей угла между плечами, и так как они равны и противоположны по направлению, то они уничтожатся. Следовательно, останется только первоначальная пара сил, но с повернутым плечом. Если повернуть плечо на угол π, то получится прежняя пара сил.

Таким образом ясно, что путем последовательных поступательных перемещений и вращений можно пару сил перенести в ее плоскости во всякое произвольное положение, не изменяя ее физического значения.

Но можно итти еще далее. Пара сил может быть перемещена также во всякую другую параллельную плоскость. Чтобы это доказать, представим себе, что плоскость пары в перспективе горизонтальна (черт. 24), сила F в A направлена наружу, сила в B — назад. Затем приложим в точках A' и B', расположенных прямо по вертикали над точками A и B на одинаковой высоте, опять по две равные и противоположные силы F, что не вызывает никаких нарушений.

Теперь сила в A наружу с параллельной ей силой в B' наружу дает результирующую $2F$, которая равна и противоположна результирующей сил в B назад и в A' назад и которая приложена в той же самой точке, ибо середина отрезка AB' есть также середина отрезка BA'. Следовательно, останется только перенесенная в верхнюю плоскость первоначальная пара сил, которая в своей новой плоскости опять может быть произвольно перемещена.

Наконец, можно также произвольно изменять и длину плеча AB, не изменяя значения пары сил. Именно, разложим приложенную в B силу на два параллельных компонента, из которых один, F', приложен в произвольной точке B' прямой AB, а другой, $F-F'$, приложен в A (черт. 25); тогда вместо силы в B мы можем взять ее два компонента; если по (281а):



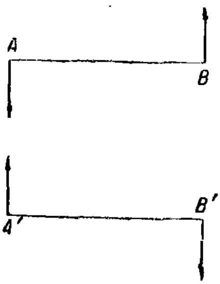
Черт. 25.

$$F' \cdot B'B = (F - F') \cdot AB, \qquad (298)$$

тогда в A останется сила $F-(F-F') = F'$, а в B' — равная и параллельная сила F', противоположно направленная, т. е. пара сил с силой F' и плечом AB', причем по (298):

$$F' \cdot AB' = F \cdot AB, \qquad (299)$$

т. е. произведение из силы на длину плеча у новой пары то же самое, что и у старой. Если мы назовем это произведение **моментом** пары сил, то получим теорему, что две лежащие в той же плоскости или в параллельных плоскостях пары сил с равными моментами тождественны.

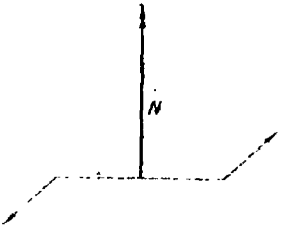


Черт. 26.

§ 83. После того как мы познакомились с большой способностью пары сил к преобразованиям, мы можем теперь дать ответ на вопрос, чем вообще характеризуется пара сил. На основании предыдущих теорем, пара сил, очевидно, определяется, во-первых, ее моментом, во-вторых, положением ее плоскости и далее, в-третьих, ее направлением вращения. На черт. 26 изображены две пары сил, которые имеют тот же момент и лежат в той же плоскости, но однако не тождественны, ибо они уравновешиваются, следовательно, прямо противоположны. Это заставляет нас приписывать паре сил также определенное направление, а это последнее тотчас же можно установить, если обратить внимание на вращение, которое задается направлениям обеих сил. Чтобы иметь возможность однозначно определить направление вращения, мы припишем каждому вращению **определенно направленную ось вращения** и установим раз навсегда, что вращение системы координат около ее начала, при котором положительная ось x-ов движется по направлению к положительной оси y-ов, имеет осью вращения **положительную** ось z-ов. Обратное вращение имеет осью вращения отрицательную ось z-ов. Так как мы всегда пользуемся правой системой координат (§ 16), то это утверждение равносильно следующим: ось вращения стрелки часов имеет направление от зрителя к циферблату, или: ось вращения пробуравливающего штопора есть то направление, в котором штопор продвигается в неподвижной пробке, или: ось вращения земли имеет направление от южного к северному полюсу.

Поэтому на черт. 26 ось пары сил AB направлена от чертежа к зрителю, ось пары сил $A'B'$ — от зрителя к чертежу. Принятое определение дает нам возможность представлять пару сил, подобно силе, простым геометрическим символом, именно при посредстве отрезка определенного направления, длина которого означает момент N, а направление — ось пары. Однако, чтобы исключить смешивание с символом силы, мы будем направление оси отмечать двойной стрелкой.

Поэтому на черт. 27 двойная (вертикальная) стрелка означает такую пару сил, момент которой N равен длине двойной стрелки, плоскость (горизонтальная) которой перпендикулярна ее направлению и ось которой направлена к концу двойной стрелки. (Соответствующие силы изображены в перспективе пунктиром.) Этот символ может быть без дальнейших рассуждений произвольно перемещаем также в сторону, только бы он оставался равным и параллельным; „точка приложения" пары сил не имеет, таким образом, в противоположность точке приложения сил, ни малейшего физического значения.



Черт. 27.

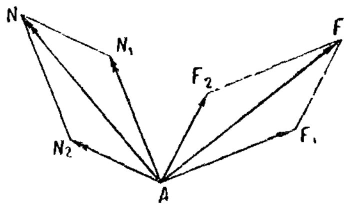
§ 84. *Сложение пар сил.* Введение указанного символа для пары сил позволяет формулировать очень просто законы, по которым складываются пары сил.

Рассмотрим сначала систему произвольно большого числа пар сил N_1, N_2, N_3, с параллельными осями. Они могут быть все перенесены в одну плоскость и в ней приведены к одному и тому же плечу. Тогда на один конец плеча все силы действуют в том же самом направлении, перпендикулярно к плечу, следовательно, там они просто складываются в одну равнодействующую, которой соответствует на другом конце плеча равная результирующая, параллельная ей и направленная противоположно. Таким образом в результате получается единственная пара сил, момент которой представляется произведением длины плеча на сумму отдельных сил, т. е. суммой всех моментов N_1, N_2, N_3, и ось которой есть общая ось. Если при этом имеются пары сил противоположного направления, то нужно только принимать моменты их отрицательными, и тогда алгебраическим сложением всех моментов определяется направление вращения и величина результирующего момента.

Рассмотрим теперь две пары сил N_1 и N_2, оси которых образуют произвольный угол. Мы приводим опять пары сил к общему плечу AB на прямой, по которой пересекаются плоскости обеих пар. Плоскость черт. 28 пусть проходит через точку A перпендикулярно к плечу, так что другой конец плеча B лежит сзади плоскости чертежа. Тогда силы F_1 и F_2, приложенные в A, лежат в плоскости чертежа; в той же плоскости лежат оси N_1 и N_2 и они повернуты на 90° по отношению к силам, как указано на чертеже. Силы F_1 и F_2 складываются по параллелограму сил в результирующую F, которой в B соответствует равная, параллельная и противоположно направленная сила, а в результате получается пара сил с моментом N, причем направление N перпендикулярно к F, а отношение:

$$\frac{N}{F} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_2}{F_2} = AB.$$

Четырехугольник, образуемый отрезками N, есть параллелограм, ибо он подобен параллелограму сил F и повернут относительно последнего на прямой угол. Таким образом получается теорема, что любые пары сил, если характеризовать их символами, складываются и разлагаются, как силы, т. е. по правилу параллелограма, или, другими словами: пары сил представляют собой векторы. Это заставляет нас ввести для пары сил обозначение **N**. Абсолютная величина



Черт. 28.

вектора, **N** есть момент N, его направление есть ось пары сил. Произвольно большое число пар сил $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_3$ для случая неизменяемого тела складывается вообще по правилам векториального сложения в результирующую пару сил:

$$\mathbf{N} = \Sigma\, \mathbf{N}_1, \tag{300}$$

или, выражая это при помощи компонентов, если λ, μ, ν означают углы оси пары:

$$\left.\begin{aligned} N\cos\lambda &= \Sigma N_1 \cos\lambda_1 = \Sigma\, \mathbf{N}_x, \\ N\cos\mu &= \Sigma N_1 \cos\mu_1 = \Sigma\, \mathbf{N}_y, \\ N\cos\nu &= \Sigma N_1 \cos\nu_1 = \Sigma\, \mathbf{N}_z. \end{aligned}\right\} \tag{301}$$

§ 85. *Сложение произвольных сил.* Мы можем теперь вернуться к задаче, разрешение которой было отложено в § 78, так как теперь мы ознакомились со сложением пар сил в самых общих случаях; кроме того, как сейчас будет обнаружено, при помощи введения подходящей пары сил легко удается совершенно произвольно перемещать точку приложения любой силы.

Пусть у нас имеется сила F с точкой приложения в P (черт. 29); приложим, кроме того, в какой-нибудь произвольной точке O неизменяемого тела две равные силы F, направленные в противоположные стороны и, следовательно, взаимно уничтожающиеся.

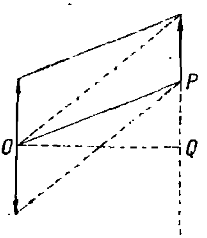
Тогда в результате мы получим, во-первых, перемещенную в O силу F и, во-вторых, пару сил, состоящую из первоначальной силы F и направленной в противоположную сторону силы в O.

Вычислим ее момент и направление оси. Величина момента равна произведению F на длину OQ, длину перпендикуляра, опущенного из O на направление первоначальной проходящей через P силы; она представляется площадью параллелограма со сторонами OP и F.

Эта величина называется также „(статическим) моментом приложенной в P силы F относительно точки O".

Если точка O лежит в направлении PF, то момент обращается в нуль. Ось момента перпендикулярна к плоскости OPF и на черт. 29 направлена от изображения к зрителю.

Теперь непосредственно ясно, как можно складывать произвольные силы с произвольными точками приложения: все их переносят только что описанным способом в общую точку приложения, например в начало координат, где они складываются в одну результирующую. Затем получают при переносе еще пары сил, которые также складываются по § 84 в одну результирующую пару сил.



Черт. 29.

§ 86. Выполняя этот план путем вычислений, рассмотрим сначала перемещение силы $\mathbf{F}$ с точкой приложения $\mathbf{r}$ в начало O, и вычислим компоненты возникающей при этом пары сил. Впоследствии при сложении различных пар мы этими вычислениями и воспользуемся. При этом целесообразно обратиться к черт. 3 (§ 17) и рассмотреть три компонента $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ приложенной в P силы $\mathbf{F}$ в отдельности; начнем с компонента $\mathbf{F}_z$. Этот компонент возможно без дальнейших рассуждений перенести из точки P в точку B плоскости xy, потому что BP лежит в направлении силы. Но если переместить $\mathbf{F}_z$ далее из B в точку A оси x-ов, то при этом возникает пара сил, параллельная плоскости yz, с моментом $AB \cdot \mathbf{F}_z = y\mathbf{F}_z$, ось которой—ось положительных x-ов, а если переместить, наконец, $\mathbf{F}_z$ из A в O, то при этом возникнет пара сил, параллельная плоскости xz, с моментом $AO \cdot \mathbf{F}_z = x\mathbf{F}_z$, ось которой—ось отрицательных y-ов.

Смещение обоих других компонентов $\mathbf{F}_x$ и $\mathbf{F}_y$ из P в O можно получить циклической заменой букв в полученных результатах. Таким образом перемещение $\mathbf{F}_x$ дает две пары сил с моментами $z\mathbf{F}_x$ и $y\mathbf{F}_x$, оси которых—положительная ось y-ов и отрицательная ось z-ов, а смещение $\mathbf{F}_y$—две пары сил с моментами $x\mathbf{F}_y$ и $z\mathbf{F}_y$, оси которых—положительная ось z-ов и отрицательная ось x-ов.

По (301) эти шесть пар складываются в одну пару сил $\mathbf{N}$, причем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_x &= y\,\mathbf{F}_z - z\,\mathbf{F}_y, \\ \mathbf{N}_y &= z\,\mathbf{F}_x - x\,\mathbf{F}_z, \\ \mathbf{N}_z &= x\,\mathbf{F}_y - y\,\mathbf{F}_x. \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

§ 87. Вектор $\mathbf{N}$, получающийся из двух векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ по (302), называется „векториальным произведением" $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ в противоположность скалярному произведению

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = x\mathbf{F}_x + y\mathbf{F}_y + z\mathbf{F}_z$$

(§ 47); его мы обозначим:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}\ \mathbf{F}] = -[\mathbf{F}\ \mathbf{r}]. \tag{303}$$

По § 85 абсолютная величина векториального произведения $\mathbf{q}$ и $\mathbf{F}$ равна площади построенного из векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ параллелограма, а направление вектора определяется нормалью к параллелограму, притом так, что направления $\mathbf{N}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$, или $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}$, или $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{r}$ образуют правую систему, которая для случая $\mathbf{r} \perp \mathbf{F}$ также прямоугольна.

Конечно, эти заключения могут быть выведены также непосредственно из (302): что $\mathbf{N}$ перпендикулярно к $\mathbf{r}$ и к $\mathbf{F}$, в этом можно убедиться, перемножив отдельные уравнения (302) на компоненты $\mathbf{r}$ или компоненты $\mathbf{F}$ и сложив их; для квадрата абсолютной величины $\mathbf{N}$ получаем, возводя в квадрат и складывая (302):

$$(y\mathbf{F}_z - z\mathbf{F}_y)^2 + (z\mathbf{F}_x - x\mathbf{F}_z)^2 + (x\mathbf{F}_y - y\mathbf{F}_x)^2 = \tag{304}$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (\mathbf{F}_x^2 + \mathbf{F}_y^2 + \mathbf{F}_z^2) - (x\mathbf{F}_x + y\mathbf{F}_y + z\mathbf{F}_z)^2 =$$

$$= r^2\ \mathbf{F}^2 - r^2\ \mathbf{F}^2 \cos^2(\mathbf{r}, \mathbf{F}) =$$

$$= \mathbf{r}^2\ \mathbf{F}^2 \sin^2(\mathbf{r}, \mathbf{F}), \tag{305}$$

т. е. квадрат параллелограма из $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$.

Величины $\mathbf{N}_x$, $\mathbf{N}_y$, $\mathbf{N}_z$, определяемые выражениями (302), называются также (статическими) моментами приложенной в P силы $\mathbf{F}$ относительно трех координатных осей. Поэтому момент силы относительно какой-либо прямой в пространстве равен произведению перпендикулярного к этой прямой компонента силы на ее расстояние от этой прямой. Справедливость этого положения вытекает из того, что момент $\mathbf{N}_z$ приложенной в точке (x, y, z) силы $(\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)$ относительно оси z-ов по (302) равен моменту приложенной в точке $(x, y, 0)$ силы $(\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, 0)$ относительно начала координат (§ 85).

§ 88. Теперь мы уже можем, сообразно с изложенными в конце § 85 соображениями, написать прямо результат сложения произвольных сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3, \ldots$ с точками приложения $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3, \ldots$ Получается:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F} &= \Sigma\, \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{N} &= \Sigma\, [\mathbf{r}_1\ \mathbf{F}_1]. \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

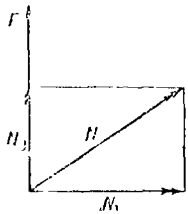
На словах: если на неизменяемое тело действуют какие-либо силы, то всегда их можно сложить в одну равнодействующую $\mathbf{F}$, приложенную в начале координат, и одну пару сил $\mathbf{N}$, причем $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$ составляются из заданных сил по (306). В этих уравнениях содержатся, как частные случаи, все выведенные до сих пор теоремы, а также и правила сложения параллельных как одинаково, так и противоположно направленных сил. Если припомним, что из двух сил результирующей пары $\mathbf{N}$ одна может быть представлена приложенной в начале координат и сложена там с равнодействующей силой $\mathbf{F}$ в новую результирующую, то ясно, что самый общий случай системы сил, действующих на неизменяемое тело, может быть также сведен к двум силам.

Для того чтобы система сил, действующих на неизменяемое тело, взаимно уравновешивалась, достаточно, а также и необходимо, чтобы исчезали как равнодействующая сила **F**, так и результирующая пара сил **N**. Это дает по (306).

$$\Sigma \mathbf{F}_i = 0, \quad \Sigma [\mathbf{r}_i \; \mathbf{F}] = 0. \tag{306a}$$

Получается шесть уравнений, связывающих компоненты сил и координаты точек приложения.

§ 89. В изложенном нами приведении произвольной системы сил к одной результирующей и к одной паре содержится некоторый произвол постольку, поскольку произвольно выбирается точка приложения результирующей; возникает вопрос, изменяется ли и как результат, если все силы перенести вместо точки O в другую какую-либо точку O_0. В особенности интересно исследовать, нельзя ли подходящим выбором точки O_0 получить более простой результат при приведении системы сил. На этот вопрос всего удобнее ответить переносом результирующей **F** и пары **N**, представляющих всю систему сил, прямо из точки приложения O в точку приложения O_0. Тогда при смещении **F** возникает новая пара **N'**, ось которой перпендикулярна к **F** и к OO_0; эта пара сложится с **N** в одну пару $\mathbf{N}_0$.



Черт. 30.

Мы получим таким образом в результате равнодействующую **F** и пару сил $\mathbf{N}_0$, из чего прежде всего явствует, что результирующая сила **F** системы сил совершенно не зависит от положения ее точки приложения, между тем как сопутствующая ей пара, напротив, связана с O_0. Нельзя ли O_0 выбрать так, чтобы **N'** и **N** взаимно сокращались, т. е. чтобы $\mathbf{N}_0 = 0$? Очевидно, что, вообще говоря, нельзя; ибо тогда **N'**, должна бы быть равной и противоположной **N**, между тем как **N'** связана условием $\mathbf{N}' \perp \mathbf{F}$, что не имеет места относительно **N**.

Но, однако, всегда возможно достигнуть следующего упрощения. Если разложить **N** на один компонент $\mathbf{N}_0 \parallel \mathbf{F}$ и один компонент $\mathbf{N}_1 \perp \mathbf{F}$ (черт. 30), то можно выбрать новую точку приложения O_0 так, чтобы пара, появляющаяся вследствие смещения **F** в O_0, $\mathbf{N}' = -\mathbf{N}_1$.

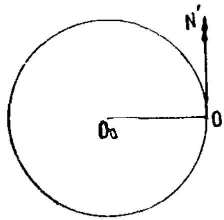
Нужно только взять O_0 на нормали к плоскости (чертежа), образуемой **F** и **N** (на задней стороне) и сделать отрезок OO_0 $\dfrac{N}{F}$.

Тогда в O_0 останется только сила **F** и пара сил $\mathbf{N}_0$, и мы получим теорему, что *всякая система сил, действующих на неизменяемое тело, может быть сведена к одной силе и одной паре, ось которой совпадает с направлением силы.*

Чтобы получить теперь в удобной форме обзор соотношений в самом общем случае, вообразим себе, что в каждой точке O тела построена приложенная в ней результирующая F и принадлежащая к ней пара N. Очевидно, что достаточно тогда рассмотреть все точки O плоскости, перпендикулярные F, ибо для каждой прямой, параллельной **F** во всех точках **F** и **N**—одинаковы.

Подобную плоскость мы выберем за плоскость черт. 31. Пусть O_0 — та точка плоскости, в которой ось соответственной пары $\mathbf{N}_0$ совпадает с $\mathbf{F}$, т. е., как и $\mathbf{F}$, перпендикулярна к плоскости. Силу $\mathbf{F}$ будем представлять себе направленной к зрителю.

Если теперь перейдем к какой-нибудь другой точке O плоскости, то возникнет вследствие смещения силы $\mathbf{F}$ из O_0 в O пара сил с моментом $\mathbf{N}' = O_0O \cdot F$, ось которой в плоскости чертежа направлена перпендикулярно к O_0O. Эта пара сложится с $\mathbf{N}_0$ (не изображенной на чертеже) в результирующую пару $\mathbf{N}$ в O, момент которой



Черт. 31.

$$N^2 = N_0^2 + N'^2 = N_0^2 + O_0O^2 \cdot F^2, \tag{307}$$

и ось которой лежит в плоскости, перпендикулярной OO_0 наклонно к плоскости чертежа под углом ϑ, тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{N_0}{N'}. \tag{308}$$

Если перемещать точку O по кругу около O_0, то N', N и ϑ остаются постоянными; но с увеличением расстояния OO_0, N' и N возрастают безгранично, между тем как угол ϑ безгранично уменьшается. Если мы с точкой O выйдем из плоскости чертежа в пространство, то все точки O с определенным моментом N образуют бесконечный круговой цилиндр, радиус которого с возрастающим N также возрастает до бесконечности. Общая ось всех этих круговых цилиндров, место всех точек O_0, называется **центральной осью** системы сил; для нее результирующая пара N получает наименьшее значение N_0.

§ 90. Кроме самого общего случая рассмотрим еще вкратце несколько важных частных случаев.

Если $N_0 = 0$, то пара сил N, соответствующая точке приложения O силы $\mathbf{F}$, сводится к N' (черт. 31). Тогда вообще не существует на центральной оси никакой пары сил, т. е. система сил сводится к одной силе $\mathbf{F}$, приложенной в какой-либо точке центральной оси.

Условие, что система сил сводится к одной только силе, заключается не в том, что результирующая пара сил $N = 0$ (при произвольном вообще начале координат O), но в том, что $N \perp F$, или по (306) в векториальном обозначении:

$$\Sigma \mathbf{F}_i \cdot \Sigma [\mathbf{r}_i \ \mathbf{F}_i] = 0. \tag{309}$$

В самом деле, тогда можно всегда подходящим выбором точки приложения результирующей уничтожить пару сил $\mathbf{N}$.

Если, с другой стороны, исчезает $\mathbf{F}$, то центральная ось отпадает. Тогда система сил сведется к определенной паре сил $\mathbf{N}$ с произвольной точкой приложения. Этот случай, например, реализуется при действии земного магнетизма на твердый магнит.

Если, наконец, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$ оба исчезают, то мы имеем равновесие, и здесь выбор начала координат не играет роли.

§ 91. *Тело с ограниченной свободой движения.* Условия равновесия (306а) относятся к свободному телу. Но если движение тела подчинено некоторым ограничениям благодаря внешним силам связи, то уравнения (306а) представляют, конечно, достаточные, но отнюдь не необходимые условия равновесия, и возникает вопрос, как выражаются последние в каждом отдельном случае.

Рассмотрим сначала тело, в котором закреплена какая-нибудь прямая, под действием произвольной системы сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{r}_1, \ldots$; подобное тело представляет самый общий случай рычага. Затем примем закрепленную прямую за ось z-ов и приведем прежде всего систему сил к результирующей силе $\mathbf{F}$, приложенной в начале координат, и соответственной паре сил $\mathbf{N}$. Для равновесия нет необходимости, чтобы $\mathbf{F}=0$, ибо сила связи действует в начале координат так же, как в каждой точке оси z-ов, и она при всех обстоятельствах нейтрализует действующие на эту точку движущие силы.

Что касается, далее, пары сил $\mathbf{N}$, то ее компонент $\mathbf{N}_x$ может быть представлен двумя параллельными, взаимно противоположно направленными силами, действующими в направлении оси y-ов, и поэтому они уничтожаются внешней связью. Подобное же имеет место по отношению к компоненту $\mathbf{N}_y$, у которого силы могут быть приняты как приложенные к точкам оси z-ов в направлении оси x-ов. Только компонент $\mathbf{N}_z$ не может быть уничтожен сопротивлением оси. Поэтому для равновесия достаточно и необходимо, чтобы

$$\mathbf{N}_z = \Sigma(x_1 \mathbf{F}_{y1} - y_1 \mathbf{F}_{x1}) = 0, \tag{310}$$

т. е. одно уравнение между компонентами движущей силы и координатами точки приложения. Если $\mathbf{N}_z$ отлично от нуля, то движущие силы производят движение т. е. в данном случае вращение тела около оси z-ов. Поэтому статический момент $\mathbf{N}_z$ системы сил относительно оси z-ов называется также „моментом вращения“ около этой оси.

Итак, из шести уравнений равновесия (306а) свободного неизменяемого тела в рассмотренном здесь случае находит применение только одно, а остальные пять необходимы для ответа на вопрос о сопротивлении, которое может оказать неизменная ось, т. е. о той силе связи, которую нужно произвести на оси, чтобы она оставалась в покое, если бы обладала полной свободой движения. Эта сила связи, очевидно, должна обладать такими свойствам и, чтобы она как раз уничтожала действие, по (306а), движущей силы; она состоит из силы, приложенной в начале координат, $-\mathbf{F}$ и из пары с компонентами $-\mathbf{N}_x$ и $-\mathbf{N}_y$.

Пара сил с осью z-ов, как осью пары не может, конечно, доставить связи, так как все силы связи проходят через точки оси z-ов. Как легко видеть, для закрепления оси z-ов достаточно закрепить какие-либо две ее точки: например, начало координат и еще какую-нибудь другую точку.

Поэтому в этом случае всегда возможно силы связи свести к двум силам, которые приложены в этих двух точках.

Если тело, кроме того, что оно может вращаться около оси z-ов, может также скользить вдоль этой оси (вообразите себе тело, проткнутое неизменным гладким стержнем), то уравнений (310) не достаточно для равновесия, нужно еще к ним присоединить:

$$\Sigma \mathbf{F}_z = 0, \tag{311}$$

ибо в этом случае силы связи не могут дать никакой слагающей в направлении оси z-ов.

Вообще легко усмотреть, что чем больше свободы движения имеет тело, чем меньше силы связи, тем больше число условий равновесия, которые должны удовлетворить движущие силы в случае равновесия. Это приводит нас к замечанию, сделанному уже в первой части § 71 для движения материальной точки. Неизменяемое тело, вращающееся около неизменной оси, имеет одну степень свободы, ибо его положение определяется одной переменной, углом вращения. Соответственно с этим достаточно одного уравнения для равновесия. Если тело вместе с тем может скользить вдоль оси вращения, то сюда прибавляется вторая степень свободы и с ней второе условие равновесия. Так идет вообще и далее, как мы увидим в ближайшей главе.

Если тело свободно вращается около неизменной точки, то примем эту точку за начало координат. Тогда приложенная в O результирующая сила $\mathbf{F}$ уничтожается силами связи, и для равновесия достаточно и необходимо условие:

$$\mathbf{N} = \Sigma\, [\mathbf{r}_1\ \mathbf{F}_1] = 0. \tag{312}$$

Это дает три уравнения между компонентами движущих сил и координатами их точек приложения.

Мы увидим, что подобное тело обладает также тремя степенями свободы. Если $\mathbf{N}$ отлично от нуля, то движущие силы производят вращение тела около O. Поэтому статический момент $\mathbf{N}$ системы сил относительно какой-либо точки O также называется „моментом вращения" сил около этой точки.

ГЛАВА II

СТАТИКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

§ 92. Мы обобщим теперь законы статики неизменяемого тела на случай произвольной системы материальных точек и с этой целью поставим себе прежде всего задачу определить условия равновесия системы n материальных точек, на которые действуют заданные движущие силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3, \ldots, \mathbf{F}_n$ и движения которых наперед подчинены некоторым ограничениям. Эти ограничения мы вообразим себе представленными определенным числом p уравнений между координатами точек. Тогда как частный случай сюда войдет, конечно, статика одной материальной точки, которую мы разработали в первой части, а также статика неизменяемого тела, так как последнее тело есть не что иное, как система точек, расстояния между которыми удерживаются постоянными.

Рассматриваемая система обладает $3n-p$ степенями свободы, ибо из всех $3n$ координат только $3n-p$ могут свободно изменяться, остальные p определены наперед заданными условиями. Число p не может быть больше $3n$. В пределе $p=3n$ все точки закреплены, так как их положения определены уже условиями; в противоположном случае $p=0$ — все точки свободны.

Для решения поставленной задачи мы последуем той же схеме соображений, которая привела нас к цели в случае одной материальной точки: мы выразим при вычислениях физическое влияние наперед заданных связей тем, что введем силы связи, которые представляют это влияние; иначе они вообще не могут быть выражены. После введения сил связи мы должны рассматривать точки как свободные и получим, как условия равновесия системы точек, $3n$ уравнений между компонентами сил:

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{Z}_1=0, \ldots \tag{313}$$

Здесь $\mathbf{Z}_1$ обозначает результирующую всех сил связи, которые обусловлены всеми p условиями для точки 1. Если, в частности, одно из уравнений связи не содержит координат точки 1, то оно, конечно, ничего не прибавит также и к $\mathbf{Z}$.

Форма условий равновесия (313) до тех пор ничего не дает, пока неизвестно ничего более определенного относительно введенных сил связи. Но она получает тем большее содержание, чем определеннее можно высказаться о силах связи. Мы попробуем теперь, стало быть, установить возможно общее характеристическое свойство сил связи. В механике одной материальной точки с ограниченной свободой движения мы нашли, что сила связи действует всегда перпендикулярно к неизменной кривой или неизменной поверхности и, что работа силы связи при каждом происходящем движении точки равна нулю. В первой форме обобщение для рассматриваемой здесь системы точек неподходяще, так как наперед заданные условия могут быть совершенно иными, чем неизменные кривые и поверхности. Но возможно в совершенно общем виде установить положение, что при каком угодно движении системы точек под действием произвольных движущих сил работа всех сил связи, взятая для всех точек, всегда равна нулю, или

$$\Sigma \mathbf{Z}_1\, d\mathbf{r}_1=0, \tag{314}$$

где $d\mathbf{r}_1$, как в (149), означает векториальный отрезок, на который переместилась за время dt точка 1.

§ 93. Уравнение (314) представляет основу всей статики системы несвободных точек. Чтобы доказать его, мы должны ближе вникнуть в физическое значение p уравнений связей для координат точек, а это мы можем сделать только, если мы вообразим себе, что эти уравнения каким-нибудь образом реализованы физически. Избежать подобных рассмотрений вообще нельзя, ибо уравнения сами по себе не могут производить какие-либо силы связи; они вообще только тогда получают физический смысл, когда их можно рассматривать как обобщающее выражение для способа действия некоторых реальных механизмов.

Мы приведем сначала доказательство уравнения (314) для некоторых более простых случаев. Для одной точки ($n=1$, $p=0$, 2, 3) существование этого уравнения подробно уже установлено в главе VI первой части (§ 67).

Возьмем теперь, следовательно, две точки и рассмотрим сначала частный случай, когда обе точки связаны друг с другом неизменной невесомой прямой длины l, но в остальных отношениях свободны. Тогда между координатами существует соотношение:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l^2. \tag{315}$$

Что известно нам в этом случае при произвольном движении обеих точек под действием произвольных движущих сил относительно сил связей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$, которые вследствие неизменности прямой приложены к обеим точкам 1 и 2?

Если ввести $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ как особые силы, то необходимо, при неизменности движения, рассматривать обе точки свободными. Но в этом, конечно, нет надобности; если таким образом точки остаются соединенными неизменно, то они движутся под действием движущих сил в точности таким же образом, независимо от того, введены ли особые силы связей $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ или нет. Поэтому эти обе силы взаимно уравновешиваются для неизменяемой системы, что требует, чтобы они были равны и противоположны и чтобы их направление совпадало с линией, соединяющей обе точки, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Z}_{x1}&=S\cdot\frac{x_2-x_1}{l}, & \mathbf{Z}_{x2}&=-S\cdot\frac{x_2-x_1}{l},\\ \mathbf{Z}_{y1}&=S\cdot\frac{y_2-y_1}{l}, & \mathbf{Z}_{y2}&=-S\cdot\frac{y_2-y_1}{l},\\ \mathbf{Z}_{z1}&=S\cdot\frac{z_2-z_1}{l}, & \mathbf{Z}_{z2}&=-S\cdot\frac{z_2-z_1}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{316}$$

где S — натяжение неизменяемой прямой означает величину силы связи — положительную, если прямая реагирует на растяжение, — отрицательную, если она сопротивляется сжатию.

Полная работа сил связей по (316):

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}_{x1}\,dx_1+\mathbf{Z}_{y1}\,dy_1+\mathbf{Z}_{z1}\,dz_1+\mathbf{Z}_{x2}\,dx_2+\mathbf{Z}_{y2}\,dy_2+\mathbf{Z}_{z2}\,dz_2=\\ &=-\frac{S}{l}\Big\{(x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)+\\ &\qquad+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)\Big\}, \end{aligned} \tag{317}$$

и это выражение обращается в нуль для всякого момента времени, как можно в этом убедиться диференцированием по времени (315)

Теперь мы примем, что обе неизменно соединенные точки более не свободны, но что они в своем движении еще стеснены тем, что каждая из них принуждена оставаться на какой-нибудь определенной кривой.

Тогда уравнение (314) сохраняет свое значение, ибо полная работа всех сил связей есть сумма работ каждой отдельной силы связи, каковыми здесь, кроме натяжения неизменяемой прямой, являются еще сопротивления заданных кривых, для которых положение уже было доказано.

Таким же образом решается задача для более общего случая ряда материальных точек, из которых каждая движется по заданной кривой и, кроме того, как с предыдущей, так и с последующей точкой связана неизменяемой невесомой прямой (исключая первую и последнюю точки, которые друг с другом не связаны). И здесь при всяком происходящем движении полная работа всех сил связей равна нулю.

Последняя из рассмотренных систем точек обладает одной степенью свободы, ибо движение первой точки по ее кривой, которое зависит от одной переменной, вполне определяет движения всех остальных точек, как можно тотчас убедиться, если, исходя от первой точки, определять положение второй, третьей и так далее точек и принять в соображение, что каждая последующая точка лежит кроме своей кривой еще также на поверхности шара, описанного около предыдущей точки определенным радиусом, равным длине соединительной линии.

§ 94. После этих подготовительных замечаний займемся систематически доказательством уравнения (314), прежде всего для системы точек с одной степенью свободы.

Случай $n = 1$ уже разрешен (одна материальная точка на заданный кривой). Случай $n = 2$ соответствует двум материальным точкам и пяти уравнениям связи между шестью координатами.

Чтобы уравнения связи имели какой-нибудь физический смысл, мы должны их реализовать при помощи какого-нибудь механизма; это можно сделать следующим образом. Если мы исключим из пяти уравнений связи координаты второй точки, то получим для координат первой точки два уравнения, которые представляют заданную кривую, на которой точка принуждена оставаться. Представим себе, что эта кривая реализована в действительности (материальная кривая) и что точка 1 удерживается на ней (ср. § 65). Также реализуем материально вычисленную из уравнений связи заданную кривую для точки 2. Тогда дело идет только о том, чтобы при помощи подходящего механизма принудить точку 2 двигаться по ее кривой вполне определенным образом, вытекающим из уравнений связи, в том случае, когда точка 1 движется каким-либо известным образом.

Если бы обе точки были неизменно соединены, то это условие было бы слишком специальным, оно не достигало бы своей цели. Но к цели приведет следующее построение. Мы прикрепим к материальным точкам 1 и 2 по неизменяемой невесомой прямой, произвольной, но не слишком короткой длины l_1, соответственно l_2, и скрепим другие концы этих обеих прямых таким образом друг с другом, чтобы они могли в их точке встречи P свободно вращаться одна относительно другой. Если затем материальные точки 1 и 2 движутся каким-нибудь образом сообразно пяти уравнениям связи, то точка P может еще двигаться по самым разнообразным кривым. Между этими кривыми выберем какую-либо совершенно произвольную, реализуем ее материально и принудим точку P оставаться на ней. Тогда три точки 1, P 2, образуют механическую систему с одной степенью свободы, вроде рассмотренной в предыдущем параграфе, у которой только материальные точки 1 и 2 подчинены пяти заданным уравнениям связи. Эта механическая система представляет, таким образом, материальную реализацию заданных уравнений связи и физически совершенно им эквивалента. Если не признавать этого заключения, то нельзя приписывать уравнениям связи вообще никакого физического значения.

Уже в предыдущем параграфе была доказана применимость уравнения (314) для сил связи в системе точек рассматриваемого рода; следовательно, оно имеет место и вообще для сил связи, обусловленных пятью уравнениями между точками 1 и 2. Что касается особо введенной точки P, то в ней также, конечно, действуют силы связи, которые проистекают от ее заданной кривой и от неизменяемых прямых l_1 и l_2. Но результирующая $\mathbf{Z}$ этих сил, и поэтому также ее работа, по уравннению (217) для каждого произвольного движения точки P равна нулю, потому что точка P имеет массу $m = 0$ и потому, что приложенная к ней движущая сила $\mathbf{F} = 0$.

Если мы имеем случай $n = 3$, т. е. три материальных точки с восемью уравнениями связи между их координатами, то мы реализуем эти уравнения опять при помощи механизма описанного рода, причем материальные точки 1, 2, 3 будут перемещаться по заданным кривым, а между точками 1 и 2, так же, как между точками 2 и 3, введем, как раньше, по одной точке P. Тогда те же самые соображения приведут к тому же результату; так же разрешится случай произвольного числа n материальных точек с одной степенью свободы.

Остается еще рассмотреть систему точек с многими степенями свободы. Если подобная система под действием каких-либо движущих сил производит некоторое движение, то возможно, очевидно, предполагая движение известным, к существующим p уравнениям связей между координатами присоединить в качестве новых заданных связей еще произвольное число произвольных уравнений между координатами, лишь бы они не нарушали движения. Последние уравнения связи играют только чисто формальную роль, так как по существу они излишни.

Представим себе, что введено $3n-p-1$ подобных новых уравнений связи, тогда общее число уравнений связи составит $3n-1$, и система точек имеет одну степень свободы; уравнение (314), таким образом, выполняется для полной работы сил связей, проистекающих от всех условий. Но так как силы всех вновь введенных связей равны нулю, то выражение для полной работы сведется к работе сил связей, реально существующих, и тем самым уравнение (314) доказано в совершенно общем виде. Можно его выразить такими словами: силы связей могут, конечно, производить работу в отдельности, но никогда в своей совокупности. Эта теорема связана теснейшим образом с принципом сохранения энергии, ибо поскольку постоянное поддерживание механически реализованных заданных связей не требует расхода или выигрыша работы, постольку не может также в результате их действия получаться какой-либо выигрыш или исчезновение работы (ср. с этим § 75).

§ 95. На основании уравнения (314) мы можем теперь для произвольной системы точек развить совершенно те же следствия, как в § 67 для одной точки. Так как здесь дело идет совершенно о таких же соображениях, как там, то достаточно привести результаты. Если первоначально покоившаяся система точек, координаты которых ограничены некоторым числом заданных связей, приводится в движение действующими на нее движущими силами, то каждая отдельная материальная точка движется, по § 76, в направлении результирующей из действующей на нее движущей силы $\mathbf{F}$ и силы связи $\mathbf{Z}$. Поэтому для происходящего в первый элемент времени бесконечно малого смещения точки:

$$\Sigma(\mathbf{F}_1+\mathbf{Z}_1)d\mathbf{r}>0, \tag{318}$$

и, принимая во внимание (314):

$$\Sigma\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1>0, \tag{319}$$

т. е. при возникновении движения движущие силы совершают в общем положительную работу. Таким образом движение в покоящейся системе точек может возникнуть только в том случае, когда точки могут совершать перемещение, для которого работа движущих сил положительна. Если заданные условия таковы, что для точек невозможно никакое смещение, при котором движущие силы совершают положительную работу, то вообще не может возникнуть никакого движения, и вся система пребывает в покое, т. е. в равновесии. Тем самым мы получаем достаточное для равновесия системы точек условие, что для всякого совместимого с заданными связями бесконечно малого перемещения системы:

$$\Sigma\,\mathbf{F}_1\delta\mathbf{r}_1\leqq 0. \tag{320}$$

Здесь, $\delta\mathbf{r}_1$ обозначает совершенно произвольное перемещение, — одно из всех совместимых с заданными связями перемещений точки, поэтому оно называется также возможным перемещением, в противоположность с происходящим в элемент времени dt действительным перемещением $d\mathbf{r}$; соответственно с этим уравнение (320) называется принципом возможных перемещений, или возможной работы. Его установил Иоганн Бернулли (1717).

В рассматриваемых здесь случаях выражение этого принципа возможно еще значительно упростить. Так как наложенные связи выражаются здесь равенствами (а не неравенствами) между координатами точек, то для каждой системы возможных перемещений $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2, \cdots$ возможна и прямо противоположная система перемещений $-\delta\mathbf{r}_1, -\delta\mathbf{r}_2, \ldots$ Если же точки находятся в положении, для которого возможна система перемещений с совершением отрицательной работы, то существует, наверное, также система возможных перемещений с совершением положительной работы, именно прямо противоположная, и тогда может произойти в требуемом направлении движение. Поэтому равновесие только тогда со всех сторон обеспечено, когда для всякой системы возможных перемещений

$$\Sigma\mathbf{F}_1\,\delta\mathbf{r}_1 = \Sigma\mathbf{F}_{x1}\,\delta x_1 + \Sigma\mathbf{F}_{y1}\,\delta y_1 + \Sigma\mathbf{F}_{z1}\,\delta z_1 = 0. \qquad (321)$$

§ 96. Значение принципа возможных перемещений заключается прежде всего в том, что для того, чтобы найти условия равновесия, нет необходимости сколько-нибудь входить в механизм, при помощи которого наложенные связи реализуются, и в проистекающие из связей силы. Совершенно достаточно знать все виды перемещений, которые наложенные связи допускают для подчиненных им точек. Далее, принцип имеет важное практическое преимущество в том, что он соединяет в одно уравнение всю совокупность всех условий равновесия, — это происходит от того, что это не обыкновенное уравнение, но вариационное, имеющее место не для определенных, а для произвольных величин, ибо ясно, что содержание подобного вариационного уравнения тем богаче, связи, которое оно налагает, тем обширнее, чем произвольнее можно распоряжаться выбором вариаций, которые ему подчинены.

Если, например, вариации $\delta\mathbf{r}_1$, $\delta\mathbf{r}_2, \ldots$, все совершенно произвольны, т. е. все точки свободны, то (321) только тогда выполняется, когда:

$$\mathbf{F}_1 = 0,\ \mathbf{F}_2 = 0, \ldots,$$

ибо тогда нет никаких препятствий принять все вариации всех координат равными нулю, за исключением одной, например δx_1. Тогда останется от всей возможной работы только член $\mathbf{F}_{x1}\ \delta x_1$, и так как возможная работа должна быть равна нулю, то в приведенном произведении первый множитель $\mathbf{F}_{x1}$ должен быть нулем. Таким образом при помощи принципа возможной работы получаются известные условия равновесия системы свободных точек.

Противоположный предельный случай — когда все точки зафиксированы, т. е. их координаты заданы уже наложенными связями; тогда доступные перемещения $\delta\mathbf{r}$ все равны нулю, и условие равновесия (321) удовлетворяется тождественно для каждой произвольной величины движущей силы, так что равновесие существует при всех обстоятельствах, как этого требует очевидность.

В общем случае, для произвольного числа p наложенных связей между $3n$ координатами точек, т. е. для системы с $3n-p$ степенями свободы, переходят от вариационного уравнения (321) к конечным условиям равновесия между компонентами сил и координатами точек; для этого сначала $3n$ вариации δx_1, δy_1, δz_1, $\delta x_2, \ldots$, при помощи p данных уравнений связи, которые мы обозначим через $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0, \ldots$, приводят к $3n-p$ произвольно выбранным вариациям, которые в таком случае совершенно независимы друг от друга. Это достигается разрешением p однородных линейных уравнений связи:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f}{\partial y_2}\delta y_2+\ \ldots=0,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial p}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\delta y_2+\ \ldots=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(322)$$

относительно тех p вариаций, которые должны рассматриваться зависящими от остальных $3n-p$.

Подстановкой этих значений в (321) получают тогда возможную работу в виде линейной однородной функции $3n-p$ независимых друг от друга вариаций; на основании уже вышеприведенных рассуждений для системы с независимыми вариациями обращение в нуль возможной работы требует, чтобы каждый отдельный коэфициент каждой не зависящей от остальных вариаций равнялся нулю.

Таким образом получается столько уравнений связи между компонентами сил и координатами точек, сколько существует независимых вариаций, т. е. степеней свободы, именно $3n-p$. Тем самым обобщена теорема, которую мы уже доказали как для одной материальной точки (§ 71), так и для неизменяемого тела (§ 91).

§ 97. Производство вычислений по намеченному прямому пути приводит вообще к очень не наглядным операциям. Поэтому приобретает большое значение метод исключения Лагранжа, который ведет к цели не прямым, но очень наглядным путем.

Именно умножим варируемые уравнения связи (322) по порядку на некоторые величины λ, μ, $\nu, \ldots$, выбор которых пока оставим неопределенным, и прибавим затем их к уравнению (321). Тогда получается как условие равновесия:

$$\Sigma\left(\mathbf{F}_{x1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial \psi}{\partial x_1}+\ \ldots\right)\delta x_1=0;\qquad(323)$$

оно распространяется на все $3n$ координаты и имеет место для всех произвольных возможных перемещений и всех произвольных значений p величин λ, μ, $\nu, \ldots$

Теперь выберем эти p величин так, чтобы коэфициенты, стоящие в скобках, для первых p вариаций, начиная с δx_1, исчезали,

Тогда возможная работа (323) сведется к линейной однородной функции $3n - p$ остальных вариаций, и так как мы можем рассматривать их как совершенно не зависящие друг от друга, то вариационное уравнение требует точно так же, как и выше, чтобы коэфициенты этих $3n - p$ вариаций равнялись нулю в отдельности.

Таким образом все в конце концов сводится к тому, что все $3n$ коэфициента выражения (323) приравниваются нулю:

$$\left.\begin{aligned} F_{x1} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \ldots &= 0, \\ F_{y1} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \nu\frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ 0 \end{aligned}\right\} \tag{324}$$

для всех точек и координат.

Действительно, после исключения λ, μ, $\nu, \ldots$, получаются $3n-p$ уравнений связей между компонентами сил и координатами точек, т. е. искомые условия равновесия в симметричной и наглядной форме.

§ 98. Из условий равновесия (324) можно теперь при помощи сравнения с условиями равновесия (313) прямо получить значения для величин сил связей; таким образом, например, для компонента по оси x-ов результирующей всех сил связей, которые действуют на точку 1:

$$Z_{x1} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \ldots \tag{325}$$

Отдельные слагаемые относятся к силам связи, проистекающим от отдельных связей. Если координата какой-либо точки вовсе не входит в уравнение связи, то связь не дает никакого соответственного компонента для силы связи, действующей на точку.

Если, с другой стороны, задать себе вопрос о различных силах связи, которые производятся в зависимости от определенной связи, например $f = 0$, на различные точки, то их компоненты находятся в отношении:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial y_1} : \frac{\partial f}{\partial z_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial y_2} \ldots, \tag{326}$$

что представляет обобщение выражения (246), имеющего место для одной материальной точки на заданной поверхности.

§ 99. Теперь мы применим принцип возможной работы к равновесию свободного или несвободного тела. Правда, этот случай мы уже выше разбирали, но, во-первых, всегда интересно применить новый метод к уже решенной иначе задаче, потому что только таким путем уясняются свойственные ему особенности, а затем мы придем по этому пути к ответам на ряд новых вопросов, которые нам пригодятся впоследствии при разборе других задач.

Неизменяемое тело есть система материальных точек, расстояния между которыми остаются постоянными; существуют ли эти точки в конечном числе или они как бесконечно малые элементы массы заполняют пространство непрерывно, — это безразлично.

Мы займемся прежде всего вопросом об условии равновесия неизменяемого тела, могущего вращаться около неизменной оси, на которое в определенных точках приложения действуют движущие силы.

Если бы мы пожелали написать все уравнения связи $f = 0$, $\varphi = 0, \ldots$ и применить вышеуказанный лагранжев метод, то это привело бы нас к длинным вычислениям. Гораздо удобнее применить намеченный раньше в § 96 прием и вариации всех координат точек свести к стольким независимым вариациям, сколько имеется степеней свободы.

Очевидно, неизменяемое тело с неизменной осью имеет только одну степень свободы, ибо его положение определено, если известен угол, который составляет какая-нибудь закрепленная в теле плоскость, проходящая через ось вращения, с какой-нибудь также проходящей через ось плоскостью, неподвижной в пространстве.

Можно поэтому все возможные перемещения выразить через одну вариацию, именно через бесконечно малый угол вращения.

Всего проще это сделать при помощи цилиндрических координат: ϱ, φ, z, причем мы, как и прежде, примем ось вращения за ось z-ов.

Тогда для какой-нибудь точки неизменяемого тела:

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = \varrho_1 \sin \varphi_1, \quad z = z_1,$$

и вариации координат, так как ϱ_1 и z_1 остаются постоянными при вращении тела около оси z-ов:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_1 &= -\varrho_1 \sin \varphi_1 \, \delta\varphi_1, \\ \delta y_1 &= \varrho \cos \varphi_1 \, \delta\varphi_1, \\ \delta z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{326a}$$

Но $\delta\varphi_1$ для всех точек тела одинаково, именно равно углу вращения; его мы обозначим через ζ, следовательно,

$$\delta x_1 = -y_1 \cdot \zeta, \quad \delta y_1 = x \cdot \zeta, \quad \delta z_1 = 0. \tag{326b}$$

Вставим эти величины в (321); тогда работа, совершенная движущими силами при бесконечно малом вращении тела ζ:

$$\zeta \cdot \Sigma (x_1 \mathbf{F}_{y1} - y_1 \mathbf{F}_{x1}) = \zeta \cdot \mathbf{N}_z. \tag{327}$$

По § 91 это соответствует произведению из угла вращения на момент вращения движущих сил около оси z-ов. Если движущие силы приводят в движение тело, которое раньше покоилось, то по (319) работа движущих сил положительна, т. е. вращение происходит в направлении момента вращения.

Если, таким образом, момент вращения равен нулю, то движущие силы не могут произвести никакой положительной работы, и тело должно оставаться в покое. Таким образом мы получаем в качестве условия равновесия опять уравнение (310), но формально более простым путем, чем прежде.

Если тело может еще скользить вдоль оси вращения (ср. § 91), то его смещение зависит от двух вариаций: угла вращения ζ и общего для всех точек тела отрезка скольжения w, соответственно двум степеням свободы. Вариации координат точки тогда будут:

$$\delta x_1 = -y_1 \cdot \zeta, \quad \delta y_1 = x_1 \cdot \zeta, \quad \delta z_1 = w,$$

и принцип возможной работы (321) дает:

$$\zeta \cdot \Sigma(x_1 F_{y1} - y_1 F_{y1}) + w \cdot \Sigma F_{z1} = 0, \tag{328}$$

и следовательно, так как ζ и w независимы друг от друга, получаются оба условия равновесия (310) и (311).

§ 100. Теперь мы примем, что в неизменяемом теле закреплена только одна точка, около которой тело может свободно вращаться, и спросим, прежде всего о числе степеней свободы этой системы. Чтобы характеризовать положение тела, недостаточно задать положение какой-либо его движущейся точки; поэтому введем, как в § 56, вторую прямоугольную правую систему координат x', y', z', которая, скреплена с телом и может вместе с ним двигаться. Начало координат пусть совпадает с лежащим в закрепленной точке началом покоящейся системы координат x, y, z. Тогда положение тела определяется положением „отмеченной" системы и, следовательно, зависит только от девяти косинусов направления $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ (§ 56).

В самом деле в уравнениях преобразования:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_1 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned}\right\} \tag{329}$$

отмеченные штрихом координаты для какой-нибудь определенной материальной точки тела, независимы от положения тела, и поэтому вариации неотмеченных координат:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= x'\,\delta\alpha_1 + y'\,\delta\alpha_2 + z'\,\delta\alpha_3, \\ \delta y &= x'\,\delta\beta_1 + y'\,\delta\beta_2 + z'\,\delta\beta_3, \\ \delta z &= x'\,\delta\gamma_1 + y'\,\delta\gamma_2 + z'\,\delta\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

Но вариации косинусов направления еще не представляют независимые вариации, ибо они, равно как самые косинусы направления, связаны друг с другом рядом соотношений.

Прежде всего по (32):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2&=1,\\ \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2&=1,\\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2&=1, \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

и, кроме того, отмеченные оси образуют прямоугольную систему; поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2&=0,\\ \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3&=0,\\ \alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1&=0. \end{aligned}\right\} \tag{332}$$

В общем это дает шесть соотношений, из которых выходит, что из девяти косинусов направления только три произвольны, а остальные шесть определяются через них. Движущееся тело обладает, таким образом, тремя степенями свободы, и соответственно с этим нужно предполагать три условия для равновесия. Чтобы найти их, сведем вариации координат (330) к трем независимым, общим для всех точек тела вариациям.

Но было бы нецелесообразным из девяти вариаций $\delta\alpha_1, \ldots$ выбрать какие-либо три произвольно за независимые, потому что этим нарушилась бы симметрия уравнений. Мы применим лучше косвенный прием, заменяя сначала в (330) отмеченные координаты опять через неотмеченные, по уравнениям (181). Тогда получается:

$$\begin{aligned} \delta x&=(\alpha_1\delta\alpha_1+\alpha_2\delta\alpha_2+\alpha_3\delta\alpha_3)x+(\beta_1\delta\alpha_1+\delta\beta_2\alpha_2+\beta_3\delta\alpha_3)y+\\ &\quad+(\gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3)z;\\ \delta y&=(\alpha_1\delta\beta_1+\alpha_2\delta\beta_2+\alpha_3\delta\beta_3)x+(\beta_1\delta\beta_1+\beta_2\delta\beta_2+\beta_3\delta\beta_3)y+\\ &\quad+(\gamma_1\delta\beta_1+\gamma_2\delta\beta_2+\gamma_3\delta\beta_3)z;\\ \delta z&=(\alpha_1\delta\gamma_1+\alpha_2\delta\gamma_2+\alpha_3\delta\gamma_3)x+(\beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3)y+\\ &\quad+(\gamma_1\delta\gamma_1+\gamma_2\delta\gamma_2+\gamma_3\delta\gamma_3)z. \end{aligned}$$

Здесь получаются значительные упрощения на основании соотношений, существующих между косинусами направлений и их вариациями.

Прежде всего легко чисто геометрическим путем усмотреть, что соотношения (331) и (332) сохранят свое значение, если в них переместить цифры 1, 2, 3 с буквами α, β, γ, т. е. заменить отмеченные оси координат неотмеченными. Тогда получатся аналогичные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^2+\alpha_2^2=\alpha_3^2&=1,\\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2&=1,\\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2&=1, \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3&=0,\\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3&=0,\\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3&=0, \end{aligned}\right\} \tag{334}$$

которые, естественно, не дают ничего по существу нового и содержатся уже в (331) и (332). Вариация их дает:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\,\delta\alpha_1+\alpha_2\,\delta\alpha_2+\alpha_3\,\delta\alpha_3=0,\\ \beta_1\,\delta\beta_1+\beta_2\,\delta\beta_2+\beta_3\,\delta\beta_3=0,\\ \gamma_1\,\delta\gamma_1+\gamma_2\,\delta\gamma_2+\gamma_3\,\delta\gamma_3=0, \end{aligned}\right\} \qquad (335)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\,\delta\beta_1+\alpha_2\,\delta\beta_2+\alpha_3\,\delta\beta_3=-(\beta_1\,\delta\alpha_1+\beta_2\,\delta\alpha_2+\beta_3\,\delta\alpha_3)=\zeta,\\ \beta_1\,\delta\gamma_1+\beta_2\,\delta\gamma_2+\beta_3\,\delta\gamma_3=-(\gamma_1\,\delta\beta_1+\gamma_2\,\delta\beta_2+\gamma_3\,\delta\beta_3)=\xi,\\ \gamma_1\,\delta\alpha_1+\gamma_2\,\delta\alpha_2+\gamma_3\,\delta\alpha_3=-(\alpha_1\,\delta\gamma_1+\alpha_2\,\delta\gamma_2+\alpha_3\,\delta\gamma_3)=\eta, \end{aligned}\right\} \qquad (336)$$

если мы для сокращения введем бесконечно малые величины ξ, η, ζ, которые по обозначению соответствуют буквам α, β, γ, соответственно неотмеченным координатам x, y, z.

Тогда вышеприведенные вариации для координат представятся просто:

$$\left.\begin{aligned} \delta x=\eta z-\zeta y,\\ \delta y=\zeta x-\xi z,\\ \delta z=\xi y-\eta x, \end{aligned}\right\} \qquad (337)$$

и в этой форме они действительно оказываются сведенными к трем друг от друга независимым, общим для всех точек тела вариациям ξ, η, ζ.

Подставляя в (321), получаем возможную работу движущих сил, если воспользуемся сокращением (306):

$$\xi\cdot\mathbf{N}_x+\eta\cdot\mathbf{N}_y+\zeta\cdot\mathbf{N}_z, \qquad (338)$$

и условие равновесия состоит в обращении в нуль всех трех компонентов $\mathbf{N}$, как в (312).

§ 101. Уравнения (337) для самого общего смещения точек неизменяемого тела с неизменным началом координат могут быть также представлены по (303) в векториальной форме:

$$\delta\mathbf{r}=]\mathbf{o}\;\mathbf{r}[, \qquad (339)$$

если под $\mathbf{o}$ будем подразумевать вектор, компоненты которого суть бесконечно малые величины ξ, η, ζ. Простота этой формулы наводит на мысль, что вектор $\mathbf{o}$ имеет важное кинематическое значение. Мы исследуем теперь это подробнее.

Для частного случая $\xi=0$, $\eta=0$ уравнения (337) переходят в:

$$\delta x=-\zeta y,\quad \delta y=\zeta x,\quad \delta z=0. \qquad (340)$$

Это в точности соответствует выражениям (326b) для вариаций координат при вращении неизменяемого тела около оси z-ов на бесконечно малый угол ζ. Уравнения:

$$\delta x=0,\quad \delta y=-\xi z,\quad \delta z=\xi y, \qquad (341)$$

$$\delta x=\eta z,\quad \delta y=0,\quad \delta z=-\eta x \qquad (342)$$

представляют соответственно вращения тела около осей x-ов и y-ов на бесконечно малые углы ξ и соответственно η.

Теперь легко усмотреть, что наиболее общее смещение (337) получается, если сложить вариации (340), (341) и (342) для каждой отдельной координаты, т. е. если подвергнуть тело трем указанным вращениям — одно за другим — в произвольном порядке. Однако при этом необходимо принять во внимание, что, если, например, первое вращение производится около оси z-ов, то материальная точка, находившаяся вначале в положении x, y, z, получает теперь координаты $x - \zeta y$, $y + \zeta x$, z, и что поэтому эти значения, а не значения x, y, z надо вставлять в уравнения (341) для второго вращения, если желательно определить, в какую точку пространства переместится после трех произведенных друг за другом вращений материальная точка, бывшая вначале в положении x, y, z. Но непосредственным вычислением можно убедиться, что ошибка, происходящая вследствие пренебрежения последним обстоятельством, представляет величину высшего порядка малости, ибо более точные уравнения для двух вращений совместно дают:

$$\delta x = -\zeta y, \quad \delta y = \zeta x - \xi z, \quad \delta z = \xi (y + \zeta x).$$

Здесь член с $\xi\zeta$ — бесконечно малая величина второго порядка, и поэтому им можно пренебречь. Соответственно то же имеет место и по отношению к третьему вращению.

Во всяком случае из этого рассмотрения явствует, что при вращениях на конечные углы результат произведенных одно за другим вращений уже не является независимым от порядка, в котором вращения были произведены. Это представляет частный случай общего закона независимости сложения бесконечно малых процессов, который в конечном счете вытекает из математической теоремы, что функция нескольких переменных, пока последние бесконечно малы, линейна по отношению к ним.

Займемся теперь конечным положением тела, которое оно займет после трех вращений ξ, η, ζ; мы получим очень наглядное представление о нем, если вычислим смещение, которое претерпела материальная точка, находившаяся вначале на прямой:

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta. \tag{343}$$

Эта прямая проходит через начало координат и образует вообще конечные углы с осями координат. Уравнения (337) дают для смещения:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

т. е. точка в конце вращения находится в том же самом положении, как в начале. Поэтому все смещение ξ, η, ζ представляет просто вращение тела около прямой (343), и мы получаем теорему, что самым общим бесконечно малым перемещением неизменяемого тела с неподвижной точкой является вращение около прямой, проходящей через эту точку. Естественно, что как направление прямой, так и величина соответствующего угла вращения вполне определяются значениями ξ, η, ζ, — именно по (343) направление прямой есть направление вектора **о**. Величина угла вращения получается, если составить по (337) величину смещения:

$$(\delta\mathbf{r}) = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$$

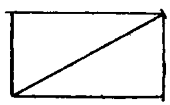
и разделить на расстояние точки x, y, z от оси вращения:

$$r \cdot \sin(\mathbf{r}, \mathbf{o}).$$

Вычисление даст тогда, точно так же как в (304) и (305), для угла вращения величину:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

т. е. абсолютную величину (**о**) вектора **о**. Поэтому также говорят: „три вращения ξ, η, ζ складываются по величине и направлению в одно результирующее вращение по правилу параллелепипеда". Но, конечно, это имеет только тот смысл, что вращения, произведенные одно за другим в произвольном порядке, приводят тело в такое конечное положение, которое может быть также достигнуто и одним единственным вращением с указанными особенностями, ибо о действии сил при всех этих рассмотрениях нет и речи.



Черт. 32.

На основании этих теорем можно вполне символизировать всякое бесконечно малое вращение и сложение нескольких таких вращений графически при помощи выходящего из неподвижной точки O направленного отрезка, длина которого дает величину угла вращения, в подходящем масштабе, а направление указывает ось вращения в определенном в § 83 смысле. Конец отрезка можно отметить, в отличие от символа силы, вместо стрелки закруглением (черт. 32). С этими символами можно оперировать совершенно так же, как с силами, в частности несколько вращений около этой же самой оси просто складываются алгебраически в одно результирующее вращение, как можно в этом убедиться непосредственно, если представить себе, что вращения производятся одно за другим.

Из этого тотчас получается ответ на вопрос, какое положение займет тело, если подвергнуть его ряду произвольного числа заданных (бесконечно малых) вращений — одно за другим. Если $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{o}_3, \ldots$ — отдельные заданные вращения, то конечный результат есть единственное вращение:

$$\mathbf{o} = \Sigma \mathbf{o}_1, \tag{344}$$

точно так же, как в уравнении (67).

Условие, что конечное положение тела совпадает с его начальным или что все вращения взаимно компенсируются, есть $\mathbf{o} = 0$.

§ 102. Все выведенные в предыдущем параграфе теоремы относятся к неизменяемому телу с неподвижной точкой; поэтому оси всех до сих пор рассматриваемых вращений проходят через эту точку. Но теперь возникает сам собой вопрос, как складываются бесконечно малые вращения, оси которых не пересекаются. Для ответа на этот вопрос мы должны, конечно, с этих пор представлять себе неизменяемое тело совершенно свободным.

Здесь обнаруживается своеобразная выгода метода, примененного нами в предыдущей главе при сложении сил, ибо хотя здесь нет и речи о силах, а только о смещениях, однако формально разбираемая здесь проблема сводится к прежней, что можно усмотреть из полного совпадения как исходного пункта, так и из употребляемых для разрешения вспомогательных средств.

Прежде всего ясно, что символ вращения (черт. 32) — без какого-либо изменения его кинематического значения — можно произвольно перемещать в его собственном направлении, если только начало отрезка будет оставаться на оси вращения. Это вполне соответствует переносу точки приложения силы по направлению силы. Напротив, нельзя перемещать начало отрезка вбок, ибо вращения около параллельных осей совсем не идентичны, равно как не тождественны параллельные силы.

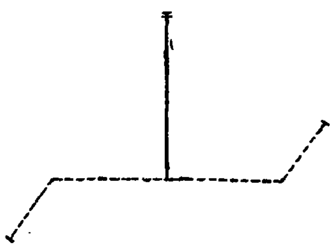
Если вспомним теперь, что при развитии всей теории сил для неизменяемого тела, § 78—90, мы не пользовались никакими другими основаниями, кроме тех, которые имеют место также и для бесконечно малых вращений, то тотчас станет ясным, что мы здесь для случая вращений тем же путем придем к тому же самому результату, как там для случая сил; поэтому вполне достаточно прямо указать результаты, а во всем остальном сослаться на прежние рассуждения. Мы можем, следовательно, без дальнейшего рассмотрения высказать следующие положения, которые, разумеется, все относятся только к бесконечно малым вращениям.

Вращения около параллельных осей складываются, если они происходят в одну сторону, путем сложения углов поворота в одно вращение относительно параллельной им оси.

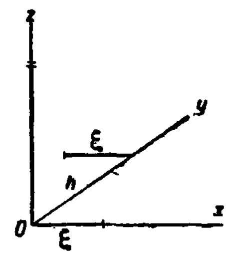
Но если входят также и противоположно направленные вращения, то в результате путем алгебраического сложения углов поворота получается вообще также одно только вращение. Однако исключение представляет случай, когда алгебраическая сумма углов поворота равна нулю. Тогда вращения или взаимно компенсируются или, в более общем случае, остаются два равных взаимно противоположных параллельных вращения, которые обозначаются как „пары вращения“ (§ 81). Пара вращения представляет, таким образом, перемещение тела, которое нельзя принимать за вращательное. Это есть вектор **q**, абсолютная величина которого равна „моменту“ пары вращения, т. е. произведению угла поворота на расстояние двух осей вращения; направление его перпендикулярно к определяемой этими осями плоскости пары вращения в смысле, обусловливаемом обоими направлениями вращений. Этот вектор можно символизировать посредством отрезка, снабженного на одном конце двойным закруглением, как на черт. 33, где изображены также оба вращения в перспективе пунктиром. В противоположность символу простого вращения символ пары вращения может быть произвольно перемещаем также и вбок — без изменения его кинематического значения (§ 83). Если подвергнуть тело различным совершенно произвольным парам вращения $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3, \ldots$, то в результате всегда получится опять пара вращения $\mathfrak{q}$ путем векториального сложения:

$$\mathfrak{q} = \Sigma\, \mathfrak{q}_1. \tag{344a}$$

Простота свойств пары вращения заставляет уже предполагать, что пара вращения имеет простое кинематическое значение; его легко можно установить, если спросить себя о том



Черт. 33.



Черт. 34.

перемещении, которое получает тело вследствие двух равных противоположных параллельных вращений. Возьмем одну из осей вращения за ось x-ов, плечо h пары вращения за ось y-ов (черт. 34); тогда достаточно вычислить смещение, которое испытывает точка тела, вначале находившаяся в одной из координатных плоскостей, вследствие двух одно за другим происходящих вращений. Для точки плоскости xy ($z=0$), например, смещение направлено в каждом случае параллельно оси z-ов, именно для одного вращения $\delta_1 z = \xi y$, для другого вращения $\delta_2 z = -\xi\,(y-h)$, а вместе:

$$\delta z = \delta_1 z + \delta_2 z = \xi h. \tag{345}$$

Следовательно, смещение для всех точек плоскости xy и поэтому также для всех точек тела одинаково и одинаково направлено. Подобное смещение тела называется *поступательным*. Таким образом мы имеем совершенно общее положение, что пара вращения $\mathfrak{q}$ представляет не что иное, как поступательное движение, величина которого есть по (345) момент ($\mathfrak{q}$) пары вращения и направление которого совпадает с осью пары вращения.

Уравнения (344a) относительно сложения различно направленных пар вращения или соответственно поступательных движений приобретают теперь новое наглядное значение, так же как и положение, что вектор пары вращения может быть произвольно перемещаем в сторону, ибо при поступательном перемещении тела, в противоположность вращению или действию силы, все прямые, параллельные направлению вектора, равнозначны.

Далее, имеет место следующая теорема (§ 85). Вращение $\mathbf{o}$ около оси, проходящей через какую-либо точку $\mathbf{r}$, кинематически равнозначно вращению $\mathbf{o}$ около параллельной оси, проходящей через начало координат, сложенному с поступательным перемещением:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{r}\ \mathbf{o}], \tag{346}$$

которое по величине и направлению совпадает со смещением, испытываемым началом координат вследствие принятого вначале вращения (§ 87).

Наконец, мы можем дать общий ответ (§ 88) на поставленный в начале этого параграфа вопрос о сложении произвольных вращений. Если свободное неизменяемое тело подвержено в произвольном порядке произвольно большому числу бесконечно малых вращений $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$, $\mathbf{o}_3, \ldots$, оси которых проходят через точки $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3, \ldots$, то результирующее смещение тела эквивалентно одному вращению $\mathbf{o}$ около начала координат, соединенному с поступательным перемещением $\mathbf{q}$, если:

$$\mathbf{o} = \Sigma\,\mathbf{o}_1,\quad \mathbf{q} = \Sigma\,[\mathbf{r}_1\ \mathbf{o}_1]. \tag{347}$$

При этом $\mathbf{o}$ не зависит от выбора начала координат, тогда как $\mathbf{q}$ зависит.

§ 103. Прежде чем итти далее, убедимся еще, что смещение тела, выражаемое формулой (347), является *самым общим* бесконечно малым смещением, которое тело вообще может претерпевать. В самом деле: каково бы ни было смещение тела, ясно, что всегда можно произвести смещение при помощи поступательного движения, которое приводит начало координат (точнее: материальную точку, которая лежит первоначально в начале координат) в его конечное положение, и последующего за сим вращения относительно неподвижной начальной точки. Происходит ли это вращение относительно (покоящегося в пространстве) начала координат или относительно материальной точки, которая до поступательного перемещения лежала в начале координат, — это сказывается на результате только бесконечно малой разницей, так как точки, которые лежат бесконечно близко к оси вращения, испытывают благодаря вращению только бесконечно малые смещения высшего порядка.

По выяснении этого мы можем применить непосредственно принцип возможной работы к установлению условий равновесия свободного неизменяемого тела. Пусть в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2, \ldots$ тела приложены движущие силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots$ Затем представим себе, что телу сообщено самое общее возможное перемещение вращением $\mathbf{o}$ около начальной точки и поступательным перемещением $\mathbf{q}$. Смещение точки тела по (339) выразится:

$$\delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{q} + [\mathbf{o}\ \mathbf{r}_1], \tag{348}$$

причем $\mathbf{q}$ и $\mathbf{o}$ входят без индекса, так как они одинаковы для всех точек тела. Если вставить эту величину в выражение (321) возможной работы, то после легкого преобразования получится условие равновесия в форме:

$$\Sigma \mathbf{F}_1 \, \delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{q} \, \Sigma \mathbf{F}_1 + \mathbf{o} \, \Sigma [\mathbf{r}_1 \, \mathbf{F}_1] = 0, \tag{349}$$

и так как $\mathbf{q}$ и $\mathbf{o}$ совершенно произвольны, то отсюда вытекают уравнения (306а), соответственно шести степеням свободы системы.

§ 103а. Возвратимся еще раз к кинематическим соображениям § 102 и проследим аналогию системы вращений с системой сил еще несколько далее, в смысле § 88—90. Тогда тотчас же мы сможем установить следующие положения.

Самое общее бесконечно малое перемещение свободного неизменяемого тела можно также представить как результат двух вращений около осей, которые не пересекаются. Далее: всегда возможно так выбрать начало координат O_0, чтобы полное смещение (347) тела представилось одним вращением $\mathbf{o}$ около O_0 и поступательным смещением $\mathbf{q}_0$, направленным по оси вращения. Эта специальная, проходящая через O_0, ось $\mathbf{o}$ называется „центральной осью" вращений, которые производят перемещение (347). Соответствующее поступательное смещение $\mathbf{q}_0$ есть н а и м е н ь ш е е между всеми поступательными смещениями $\mathbf{q}$, которые соответствуют другим начальным точкам O. Подобное смещение ($\mathbf{o}$, $\mathbf{q}_0$) называется „винтовым". Поэтому возможно всякое бесконечно малое перемещение неизменяемого тела трактовать как винтовое. В частных случаях винтовое движение обращается в простое вращение ($\mathbf{q}_0 = 0$) или в простое поступательное перемещение ($\mathbf{o} = 0$).

§ 104. До сих пор мы принимали всегда движущую силу $\mathbf{F}$ как заданную и не делали никаких ближайших предположений относительно ее свойств. Но само собою понятно, насколько важно иметь возможность сделать какие-нибудь общие предположения относительно этих сил; поэтому мы теперь займемся несколько этим вопросом.

В механике отдельной материальной точки мы уже видели (§ 36), что если результирующая движущая сила $\mathbf{F}$ представляет центральную силу, то ее слагающие — производные от одной определенной функции, потенциала со знаком минус — U, по координатам точки, или, что то же самое, работа движущей силы представляет полный диференциал — U. Совершенно то же самое можно утверждать в случае произвольной системы точек, когда силы производятся неподвижными центрами, и также в том случае, когда движущиеся точки действуют взаимно друг на друга с центральными силами.

Для доказательства этого положения примем в соображение, что полная работа движущих сил при каком-либо движении системы точек есть сумма работ всех отдельных сил, и поэтому рассмотрим в отдельности члены этой суммы. В отношении сил, происходящих от неподвижных центров, ясно без всяких рассуждений, что их работа для каждой из движущих точек 1, 2, 3,... в отдельности представляется полным диференциалом $-dU_1$, $-dU_2$, $-dU_3$,... согласно приведенному в § 36. Относительно взаимодействий движущихся точек вообразим себе также полную работу разложенной на работы сил, которые производят друг на друга две точки, например точки 1 и 2. Эта работа выражается в виде:

$$X_{12}\,dx_1 + Y_{12}\,dy_1 + Z_{12}dz_1 + X_{21}dx_2 + Y_{21}\,dy_2 + Z_{21}\,dz_2, \tag{350}$$

где первый из обоих указателей означает ту точку, на которую действует слагающая сила, второй — точку, от которой это действие проистекает. Если обозначим величину силы через $f(r_{12})$ и будем считать ее положительной для случая притяжения, причем:

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \tag{351}$$

то для шести компонентов силы имеют место уравнения (106), и выражение (350) для работы будет:

$$-\frac{f(r_{12})}{r_{12}}\Big\{(x_2 - x_1)\ (dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)\ (dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)\ (dz_2 - dz_1)\Big\} = -f\ (r_{12})\ dr_{12} = -dF\ (r_{12}), \tag{352}$$

по введенному уже в (107) обозначению.

Если поэтому мы положим потенциал сил:

$$U = \sum_1 U_1 + \sum_{1,2} F(r_{12}), \tag{353}$$

причем вторая сумма распространяется на все попарно взятые комбинации точек, то работа, совершаемая при каком-либо смещении точек всеми центральными силами:

$$\Sigma\ \mathbf{F}_1\ d\mathbf{r}_1 = -dU, \tag{354}$$

а отрицательная производная от U по какой-либо координате представляет соответствующий результирующий компонент силы.

Если мы вообразим, что вся система точек разложена на две части, то из уравнения (353) ясно, что потенциал всей системы вовсе не равен сумме потенциалов отдельных систем, но что к этим потенциалам, „потенциалам систем самих на себя", еще прибавляется „потенциал одной системы на другую". Соответственное имеет место при разложении на большее число частей.

§ 105. Если мы применим теперь положения § 95 к случаю, когда движущая сила $\mathbf{F}$ имеет потенциал U, то придем к заключениям, которые представляют обобщение уже полученных в § 67. Прежде всего по (354) и (319):

$$dU < 0, \tag{355}$$

т. е. если покоящаяся вначале, связанная произвольными заданными условиями система точек приводится в движение централь ными силами, то потенциал при этом убывает. Это можно выразить и таким образом: „силы стремятся уменьшить потенциал“. Но если по смыслу (320) для каждого возможного воображаемого смещения:

$$\delta U \geqq 0, \tag{356}$$

то может быть только равновесие, ибо, если силам не предоставлено возможности уменьшить потенциал, то они не могут также произвести никакого изменения положения системы точек.

Можно итти еще далее. Если для некоторого положения системы точек функция U имеет наименьшее значение, которое она вообще может принимать при заданных связях, тогда система в этом положении находится в устойчивом равновесии, ибо тогда имеет место не только условие равновесия $\delta U = 0$, но система, выведенная немного из положения равновесия и затем предоставленная самой себе, по (355), возвращается даже в положение равновесия, так как потенциал не может быть уменьшен каким-либо другим смещением. Обратно, для максимума U равновесие неустойчивое, потому что система точек, выведенная из этого положения, по (355), не может в него вернуться. Но если U совсем не зависит от координат точек, то также $\delta U = 0$, т. е. будет равновесие, но это равновесие безразличное, т. е. существует при всяком положении точек.

§ 106. В качестве простого примера для выведенных здесь теорем рассмотрим систему отдельных или непрерывно распределенных тяжелых материальных точек $m_1, m_2, m_3, \ldots$, подчиненных произвольным заданным связям, т. е., например, частью неизменно связанных друг с другом или неподвижных и т. д. Так как тяжесть есть центральная сила, то движущая сила обладает здесь потенциалом, который по (354) и (76а), если принять ось z направленной вертикально вверх, получается из уравнений:

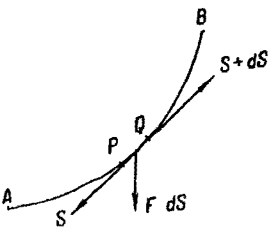
$$\Sigma \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 = -g \Sigma m_1 \, dz_1 = -dU,$$

и по (287):

$$U = g z_0 \cdot \Sigma m_1 + \text{const}, \tag{357}$$

т. е. потенциал тяготения системы точек представляет (оставляя в стороне не имеющую значения аддитивную постоянную) произведение из ускорения тяжести, общей массы системы и высоты центра тяжести. Так как в этом произведении высота центра тяжести z_0 есть единственная переменная величина, то на основании предыдущего параграфа мы получаем общую теорему, что всякий переход подобной системы точек из покоя в движение связан с опусканием центра тяжести и что максимум, минимум или неизменность высоты центра тяжести означает неустойчивое, устойчивое или безразличное равновесие. В некоторых случаях справедливость этой теоремы ясна непосредственно, как, например, когда для какого-нибудь твердого тела с неподвижной точкой вращения центр тяжести лежит выше, ниже или совпадает с точкой вращения. Но в других случаях она приводит к следствиям, которые не кажутся наперед очевидными. Например, если мы подвесим тяжелую цепь какого-нибудь рода, с одинаковыми или неодинаковыми звеньями, к двум неподвижным точкам и предоставим ей свободно висеть между ними, то цепь принимает при устойчивом равновесии между всеми возможными положениями всегда такое, при котором ее центр тяжести лежит всего ниже. Из этого условия можно вычислить равновесную форму цепи.

§ 107. После твердого тела трех измерений рассмотрим еще другой пример системы точек, отчасти несвободных: *нерастяжимую совершенно гибкую нить*. Она представляет бесконечный ряд линейных бесконечно малых твердых материальных элементов, из которых каждый связан с предыдущим и последующим элементом так, что он может относительно них свободно вращаться. Только начальный и конечный элементы ни с чем не связаны и подчинены особым условиям. На нить могут действовать заданные движущие силы. Мы предположим, что они распределены непрерывно по ее элементам, причем сила, действующая на элемент дуги нити ds, имеет компоненты:



Черт. 35.

$$\mathbf{F}_x ds, \quad \mathbf{F}_y ds, \quad \mathbf{F}_z ds. \tag{358}$$

Обе конечные точки нити пусть будут закреплены. Спрашивается, какова будет форма равновесия нити?

Мы решим эту задачу опять двумя методами, с которыми уже познакомились, причем каждый имеет свои особые преимущества: сначала при помощи введения сил связи, затем при помощи принципа возможной работы.

Что касается сил связи, которые обусловливают нерастяжимость нити, то сила связи, приложенная в какой-либо точке P нити, определяется тем, что она представляет силу, которую нужно приложить в точке P с тем, чтобы механическое состояние рассматриваемой системы точек никоим образом не нарушалось, если представить себе, что нить в этой точке перерезана. Очевидно, для этого в точке P нужно приложить две силы, которые представляют силы связи, с которыми действуют друг на друга оба встречающиеся в P элемента нити. Они по принципу действия и противодействия по величине равны, по направлению противоположны и называются „натяжением" S нити в точке P.

Величина S вообще меняется от точки к точке. Направление S совпадает в каждой точке с направлением касательной к нити, так как связи действуют только против удлинения, а не против изгибания.

Равновесие установится в том случае, когда каждый элемент нити будет находиться в равновесии. Рассмотрим поэтому подобный элемент нити PQ длиною ds (черт. 35). На него действуют три силы: во-первых, натяжение S в точке P, во-вторых, натяжение $S+dS$ в точке Q, в-третьих, движущая сила $\mathbf{F}\cdot ds$. Составим слагающие по x от этих трех сил и положим их сумму равной нулю. Натяжение в P действует на элемент нити тангенциально в направлении убывающей S, если положить для концов всей нити A и B: $s=0$ и $s=l$ (длина нити). Таким образом искомый компонент равен $-S\dfrac{dx}{ds}$. Натяжение в Q имеет другую величину и другое направление, чем в P, даже независимо от противоположного знака. Поэтому ее компонент:

$$\left(S\frac{dx}{ds}\right)_{s+ds}=S\frac{dx}{ds}+\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right)\cdot ds. \tag{359}$$

Таким образом суммирование трех компонентов, если опустить общий множитель ds, дает:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right)+\mathbf{F}_x=0,\\
\text{также}\quad&\frac{d}{ds}\left(S\frac{dy}{ds}\right)+\mathbf{F}_y=0,\\
\text{и}\quad&\frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right)+\mathbf{F}_z=0.
\end{aligned}\right\} \tag{360}$$

Этим задача решается совершенно, ибо эти три уравнения дают не только, после исключения S, два уравнения кривой равновесия нити, но также и величину натяжения S в каждой точке. Особого условия равновесия для конечных точек нити A и B не требуется, так как эти точки закреплены.

§ 108. Теперь решим ту же задачу по методу возможных перемещений. Для этого мы должны составить самые общие выражения для возможных перемещений всех точек x, y, z нити. Так как все отдельные элементы длины неизменны, то вариация ds или $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ равна нулю, т. е.

$$dx\cdot\delta dx+dy\cdot\delta dy+dz\cdot\delta dz=0. \tag{361}$$

Чтобы вполне выяснить смысл этого выражения, мы можем представить себе, что координаты x, y, z зависят кроме параметра s еще от второго, совершенно произвольно выбранного конечного параметра p. Определенному значению p соответствует тогда определенная форма (кривая) нити, измененному значению $p+\delta p$ — определенная бесконечно близкая кривая, которая представляет положения измененных точек нити. При этом $\delta x=\dfrac{\partial x}{\partial p}\delta p$, и т. д. Операции d и δ, которые представляют изменения ds и δp, совершенно независимы друг от друга и поэтому переместимы: $\delta dx=d\delta x$, и т. д.

Уравнение (361) представляет бесконечно большое число неизменных связей вида (322). Мы применим к ним указанный в § 97 лагранжев метод исключения, умножив их на неопределенный сначала множитель, различный для различных уравнений, затем сложим их, прибавим к выражению возможной работы, и затем будем рассматривать вариации δx, δy, δz как независимые друг от друга. Этим путем мы получим сначала из (361):

$$\int_0^l \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d\delta z}{ds} \right) \cdot \lambda \cdot ds = 0,$$

где λ может быть совершенно произвольной функцией от S; затем, присоединяя к возможной работе движущих сил (358), имеем:

$$\int_0^l \left(\mathbf{F}_x \delta x + \lambda \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} + \ldots \right) ds = 0.$$

Чтобы свести эти выражения к независимым вариациям δx, δy, δz, необходимо еще преобразование, так как δx входит в члены с λ не явно, а под знаком производной. Этого можно достигнуть интегрированием по частям:

$$\int_0^l \lambda \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\delta x}{ds} ds = \left[\lambda \frac{dx}{ds} \cdot \delta x \right]_0^l - \int_0^l \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) \cdot \delta x \cdot ds, \qquad (362)$$

причем первый член справа пропадает, потому что конечные точки нити закреплены. Поэтому мы получаем в конце концов условие равновесия в виде:

$$\int_0^l \left[\mathbf{F}_x - \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x \, ds + \ldots = 0,$$

и, приравнивая нулю коэфициенты всех отдельных вариаций для каждого элемента нити, имеем:

$$\mathbf{F}_x - \frac{d}{ds} \left(\lambda \frac{dx}{ds} \right) = 0 \ldots \qquad (363)$$

Исключение λ из этих трех уравнений дает, очевидно, ту же самую кривую, как в (360), и таким образом результаты решений одинаковы.

Преимущество принципа возможной работы состоит, как всегда, в независимости этого метода от специальных механических представлений. Зато, с другой стороны, он не дает никакого представления о механических соотношениях, ибо физическое значение λ получается только путем сравнения с уравнениями (360), которые показывают, что λ представляет отрицательное натяжение.

§ 109. Выведем прежде всего из уравнений (360) несколько следствий общего характера. Если написать их в виде:

$$\frac{dS}{ds}\frac{dx}{ds}+S\frac{d^2x}{ds^2}+\mathbf{F}_x=0,\ldots, \tag{364}$$

умножить на косинус угла бинормали кривой с осями (§ 25) и сложить, то становится ясным, что направление $\mathbf{F}$ расположено в плоскости кривизны кривой нити, как это необходимо вытекает из простых физических соображений.

А если умножить их на косинусы углов элемента дуги ds с осями и сложить, то получается по (73) и (73a):

$$\frac{dS}{ds}+\mathbf{F}_x\frac{dx}{ds}+\mathbf{F}_y\frac{dy}{ds}+\mathbf{F}_z\frac{dz}{ds}=0, \tag{365}$$

т. е. изменение натяжения по длине нити измеряется компонентом $\mathbf{F}$ в направлении нити. Если сила $\mathbf{F}$ направлена везде перпендикулярно к кривой нити, то натяжение везде одинаково:

Если сила $\mathbf{F}$ имеет потенциал, то:

$$\frac{dS}{ds}-\frac{dU}{ds}=0, \qquad S=U+\mathrm{const}, \tag{366}$$

т. е. натяжение равно (отнесенному к единице длины) потенциалу, если оставить в стороне аддитивную постоянную.

§ 110. Предположим теперь, что движущая сила есть тяжесть и что нить однородна; тогда форма равновесия нити представляет обычную ц е п н у ю линию. Если масса всей нити M, то масса элемента нити $M\cdot\frac{ds}{l}$, и компоненты (358) действующей на него силы:

$$\mathbf{F}_x=0,\ \mathbf{F}_y=0,\ \mathbf{F}_z ds=-M\cdot\frac{ds}{l}\cdot g. \tag{367}$$

Потенциал силы $\mathbf{F}$ поэтому равен:

$$U=\frac{M}{l}gz+\mathrm{const}. \tag{368}$$

По § 109 кривая нити расположена в вертикальной плоскости, которая определяется конечными точками A и B нити. Примем эту плоскость за плоскость xz; тогда уравнения (360) сведутся к:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dz}{ds}\right)-\frac{Mg}{l}=0.$$

Интегрируя, имеем:

$$S\frac{dx}{ds}=\frac{Mg}{l}c, \tag{369}$$

$$S\frac{dz}{ds}=\frac{Mg}{l}(s+c_1), \tag{370}$$

где c и c_1 — две постоянные с размерностью длины.

Ценно также соотношение, вытекающее из (366) и (368):

$$S=\frac{Mg}{l}(z+c_2). \tag{371}$$

Для составления уравнения кривой в прямоугольных координатах всего удобнее исключить S из (369) и (371):

$$\frac{dx}{ds}=\frac{c}{z+c_2}.$$

Подставляя вместо $ds^2=dx^2+dz^2$, получаем диференциальное уравнение:

$$dx=\frac{cdz}{\sqrt{(z+c_2)^2-c^2}},$$

интеграл его:

$$x=c\lg\left\{\frac{z+c_2}{c}+\sqrt{\left(\frac{z+c_2}{c}\right)^2-1}\right\}+c_3, \tag{372}$$

или, решая относительно z, находим:

$$z=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_3}{c}}+e^{-\frac{x-c_3}{c}}\right)-c_2. \tag{373}$$

Четыре постоянных c, c_1, c_2, c_3 определяются из двух уравнений (359) и из двух связей, выражающих, что заданные точки A и B лежат на кривой.

Самую простую форму уравнение обычной цепной линии принимает, если выбрать начало координат в точке $x=c$, $z=-c_2$. Тогда оно имеет вид:

$$z=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right). \tag{374}$$

Кривая симметрична относительно оси z, она быстро поднимается вверх для возрастающих или убывающих x и имеет свой минимум в точке $\frac{dz}{dx}=0$, или $x=0$, $z=c$.

Вместо точек A и B можно, конечно, в качестве точек закрепления выбрать какие-либо две другие точки кривой, по различным сторонам или даже по одну и ту же сторону от минимума, не изменяя этим формы кривой. Натяжение S тогда по (371) выразится просто:

$$S = \frac{Mg}{l} z; \tag{375}$$

следовательно, минимальная его величина $\frac{Mg}{l} c$.

§ **111.** Рассмотрим еще равновесие нити, натянутой на неизменной поверхности $f(x, y, z) = 0$, причем мы будем иметь в виду частный случай, когда движущая сила $\mathbf{F}$ действует только на конец B нити. Можно представить себе, что это осуществлено таким образом, что нить в точке A прикреплена к поверхности, а в точке B продета через небольшое укрепленное там кольцо и сильно натянута силой $\mathbf{F}$. Конечно, неизменная поверхность обращена выпуклой стороной к нити; иначе бы нить не могла к ней прилегать. Уравнение (360) будет тогда:

$$\frac{d}{ds}\left(S\frac{dx}{ds}\right) + Z_x = 0, \ldots, \tag{376}$$

где компоненты силы связи $\mathbf{Z}$, производимой неизменной поверхностью на единицу длины нити, удовлетворяют условию (246). Из этого условия и из уравнения поверхности $f = 0$, или, в диференциальной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0, \tag{377}$$

получается уравнение кривой для нити, натяжение S нити и действующая на нее сила связи Z, которая, по принципу действия и противодействия, представляет вместе с тем также давление, которое поверхность испытывает со стороны нити.

Если умножить уравнение (376) на $\frac{dx}{ds}$ и т. д. и сложить, то получается, если принять во внимание (246) и (377):

$$\frac{dS}{ds} = 0,\ S = \text{const}, \tag{378}$$

т. е. натяжение нити везде одинаково и равно по величине движущей силе F, так как оно в точке B уравновешивается ею,— результат, которой вытекает также непосредственно из (365), если обратить внимание на то, что сила связи Z везде перпендикулярна к кривой нити. Вследствие этого уравнение (376) упрощается:

$$F \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \mathbf{Z}_x = 0, \tag{379}$$

откуда получается величина силы связи:

$$(\mathbf{Z})^2 = F^2 \cdot \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 \right\},$$

или по (74):

$$(\mathbf{Z}) = \frac{F}{\varrho}, \tag{380}$$

т. е. величина производимого нитью на поверхность давления на единицу длины равна отношению натягивающей силы к радиусу кривизны кривой нити. Чем сильней искривлена кривая, тем больше это давление; для прямой линии оно совершенно исчезает.

Так как направление **Z** дается (246), то из (376) вытекают для кривой нити уравнения (250), которые говорят, что нить в равновесии принимает форму геодезической линии на поверхности, которая проходит через точки A и B.

Из этого следует на основании принципа возможной работы новое важное свойство геодезической линии. Именно, по указанному принципу нить находится в устойчивом равновесии в том случае, если она представляет кратчайшую линию из всех линий, которые можно провести между A и B на поверхности, ибо иначе движущая сила **F**, единственная, которая вообще существует в данном случае, могла бы произвести положительную работу при продергивании нити через кольцо (§ 95). Поэтому каждая кривая кратчайшей длины на поверхности есть вместе с тем ее геодезическая линия. Этой особенностью обусловливается самое название геодезической линии, так как расстояние двух пунктов на земной поверхности измеряется по кратчайшей соединительной линии.

На шаре кратчайшие линии—большие круги, на плоскости — прямые.

Но это положение вообще нельзя обратить, т. е. геодезическая линия не всегда является кратчайшей между двумя ее точками, так же как уравнение $\delta s = 0$ представляет, конечно, необходимое, но не всегда достаточное условие для минимума s. В самом деле, отрезок дуги большого круга на шаре теряет свое свойство быть кратчайшей соединительной линией между его конечными точками, если длина отрезка дуги больше половины окружности круга. В этом случае натянутая на нем нить, конечно, находится еще в равновесии, но это уже более не устойчивое равновесие.

§ 112. Во всех наших рассуждениях мы принимали до сих пор движущие силы как заданные. Но в действительности часто приходится иметь дело с задачами, в которых играют роль движущие силы сложного и трудно определимого характера, в особенности если они действуют внутри тела. Поэтому очень важно располагать принципом, который приводит в самых сложных случаях к простым и удобоприменяемым условиям равновесия. Для вывода такого принципа вернемся к сделанным во введении к этой части (§ 76) рассуждениям. Прежде всего на основании изложенных там соображений все действующие в системе материальных точек силы можно разделить на внутренние и внешние: внутренние силы — те, которые происходят от точек самой системы, внешние — это те, которые происходят от точек вне системы. Принадлежит ли какая-либо рассматриваемая сила к внутренним или внешним, это можно решить только тогда, когда произведем отбор, совершенно произвольный, точек системы. Можно каждую внутреннюю силу сделать внешней, исключив точку, от которой она происходит, из системы, и обратно.

Это разделение сил на внутренние и внешние не совпадает, конечно, с разделением их на движущие и на силы связи. Существуют внутренние и внешние движущие силы, и существуют внутренние и внешние силы связи. В случае тяжелого твердого тела с неподвижной точкой вращения, например, молекулярные силы — внутренние силы связи. Закрепление неподвижной точки есть внешняя сила связи, тяжесть есть внешняя движущая сила. Но если включить землю в эту систему, то все эти силы станут внутренними силами.

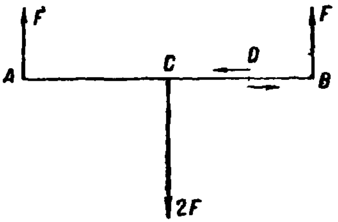
Плодотворность различения внутренних сил и внешних заключается в том обстоятельстве, что внутренние силы системы входят попарно; по величине они равны, а по направлению—противоположны (§ 76).

Это обстоятельство в связи с непосредственно очевидным заключением, что всякое положение равновесия какой-либо системы точек не изменится, если вообразить себе, что все точки системы неизменно связаны друг с другом, приводит к фундаментальной теореме: если система точек находится в равновесии, то внешние силы уравновешиваются, как если бы система отвердела. В самом деле вследствие того, что внутренние силы в твердой системе взаимно попарно сокращаются, их можно совершенно оставить в стороне и достигнуть, таким образом, упрощения, которое тем значительнее, что внутренние силы во многих случаях являются как раз наименее известными.

Так как выбор системы точек совершенно произволен, то приведенный принцип влечет довольно многочисленные следствия, о разнообразии которых могут дать некоторое представление несколько частных примеров.

§ 113. Возьмем простой случай твердого прямого стержня, который находится в равновесии под действием двух равных параллельных сил F на его концах A и B и параллельной им, но противоположно направленной силы $2F$, приложенной в его середине C. Теперь будем считать часть стержня, например AD (черт. 36), за систему точек. Тогда внешние силы — сила F в A, сила $2F$ в C и силы, с которыми часть стержня DB действует в D на часть стержня AD. Так как внешние силы в сумме уравновешиваются, то действие части стержня DB на AD сводится к силе F с точкой приложения в D и к паре сил с моментом $F \cdot BD$, ось которой расположена перпендикулярно к плоскости чертежа (на черт. 36 она направлена от чертежа к наблюдателю).

Эта пара сил может быть осуществлена только благодаря тому, что в различных точках сечения стержня в D действуют разные силы (на черт. 36 на верхней половине — справа налево, на нижней—слева направо, как обозначено маленькими стрелками). При бесконечно тонком сечении, соответственно в случае гибкой нити, это было бы невозможно; но при конечном сечении на одной стороне существует давление (сжатие), на другой стороне—тяга (растяжение).



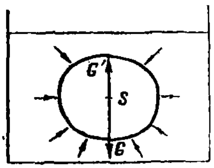
Черт. 36.

Таким путем наш принцип дает возможность сделать заключение о соотношении сил внутри тела.

Конечно, указанному действию одной части тела на другую соответствует всегда равное и противоположное действие второй части тела на первую.

§ 114. Другой пример мы заимствуем из области жидкостей. Представим себе большое количество тяжелой жидкости в состоянии равновесия и выберем часть ее произвольной формы, окруженную со всех сторон жидкостью, за систему наших точек, тогда внешними силами явятся вес жидкости системы: G_f и силы давления прилегающей к системе жидкости (на черт. 37 они обозначены стрелками) с результирующей F. По теореме в § 112 должно быть поэтому:

$$F = -G_f. \tag{381}$$



Черт. 37.

Силы давления, следовательно, создают результирующую, которая равна весу жидкой системы и противоположно направлена; она называется „подъемной силой".

Представим себе теперь далее, что вместо рассматриваемой системы точек мы имеем какое-либо неизменное тело точно той же формы, которое тяжелее жидкости и удерживается от падения благодаря тому, что оно подвешено на нити. Выберем это неизменное тело за систему точек; тогда внешними силами будут его вес G, силы давления прилегающей жидкости с результирующей F и тяга, производимая нитью вверх, дающая „кажущийся вес" G' тела в жидкости. Поэтому мы имеем:

$$G + F - G' = 0,$$

или по (381);

$$G' = G - G_f, \tag{382}$$

т. е. кажущийся вес тела в жидкости равен действительному весу без веса вытесненной жидкости — закон Архимеда.

§ 115. Наконец, сделаем еще одно применение для случая газообразного тела, именно в случае равновесия атмосферы. Рассмотрим вертикальный воздушный цилиндр с сечением в единицу и вообразим, что из него выделен двумя горизонтальными сечениями слой воздуха, который мы выберем в качестве нашей системы точек. Внешние силы тогда будут, во-первых, вес воздушного слоя, во-вторых, давление окружающего воздуха, которое направлено на верхнем основании вниз, на нижнем—вверх и на боковой поверхности цилиндра—горизонтально внутрь. Наш принцип § 112 требует, чтобы вес воздушного слоя был равен разности давлений на нижнем и на верхнем сечениях.

Если взять бесконечно тонкий слой воздуха, то его вес пропорционален плотиости воздуха на рассматриваемой высоте, и, введя общее соотношение между плотностью и давлением, получим тогда диференциальное уравнение для вычисления падения давления воздуха с высотой.

Так вытекают из общих условий равновесия твердого тела также основные теоремы гидростатики и аэростатики.

ГЛАВА III.

ДИНАМИКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

§ 116. Теперь мы настолько уже подготовлены, что можем развить общие законы, которые обнимают как частные случаи законы механики отдельной материальной точки и законы статики произвольной системы точек.

Задача заключается в определении движения системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots$, на которые действуют заданные движущие силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ и свобода движений которых стеснена p условиями, выражаемыми уравнениями $f=0$, $\varphi=0, \ldots$ между координатами и временем t.

Решение этой задачи получается непосредственно из применения принципа д'Аламбера (§ 66), по которому система точек во всякое время t находится в равновесии, если к действующим на нее силам вообразить прибавленными для всех отдельных точек еще сопротивления инерции $-m_1\dot{q}_1, -m_2\dot{q}_2, \ldots$

Этим динамика сразу сводится к статике, и мы можем прямо применить принцип возможных перемещений (321):

$$\Sigma(\mathbf{F}_1 - m_1\dot{\mathbf{q}}_1)\delta\mathbf{r}_1 = 0 \tag{383}$$

или также уравнения Лагранжа (324):

$$F_{x1} - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \ldots = 0 \tag{384}$$

и т. д. для всех координат и точек. Если умножить уравнения (384) в отдельности на соответственные вариации координат $\delta x_1, \ldots$ и сложить, то получится опять (383), если принять во внимание уравнения связей (322) для вариаций.

Исключение p величин $\lambda, \mu, \ldots$ из (384) дает $3n-p$ линейных уравнений между ускорениями и движущими силами, которые вместе с p заданными условиями позволяют однозначно определить ускорения.

§ 117. Особого замечания требует еще случай, когда время t явно входит в уравнение связи $f=0,\ldots$, как, например, если точка принуждена оставаться на движущейся каким-либо определенным образом поверхности. В этом случае наперед неизвестно, какому условию должны удовлетворять возможные перемещения, так как уравнения связи ведь содержат переменный параметр t. Уравнения (322), которые по вышесказанному и здесь должны иметь место, показывают, что при вариации координат время t остается невариируемым, так что, например, в случае точки, находящейся на движущейся поверхности, возможное перемещение для времени t то же, как если бы поверхность покоилась в том положении, которое она занимает в момент t.

Наглядное представление о значении этого обстоятельства дает разобранный в § 75 случай прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, с черт. 17. Здесь возможное перемещение надо считать вдоль покоящейся в момент времени t прямой, т. е. в направлении AB, а не в направлении AA'; в самом деле, только тогда возможная работа силы связи равна нулю. Поэтому уравнения (277) связи дают при варьировании их при постоянном t:

$$\delta y = \operatorname{tg}(\omega t)\cdot \delta x,$$

а это в связи с принципом (383):

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y = 0$$

приводит к тем же уравнениям движения (278а), что и раньше.

§ 118. Уравнение (383) имеет место для всякой произвольной системы бесконечно малых изменений координат $\delta x_1,\ldots$, которые удовлетворяют уравнениям связи (322). Если, напротив, мы станем рассматривать те бесконечно малые изменения координат $dx_1\ldots$, которые действительно происходят за бесконечно малый элемент времени dt при движении точки, то эти последние удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \qquad (385)$$

которые существенно отличаются от уравнений (322) тем, что они содержат еще члены с $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t},\ldots$ Поэтому действительные смещения $dx_1,\ldots$ не принадежат вообще к системе возможных перемещений, и нельзя в (383) заменить $\delta\mathfrak{r}$ через $d\mathfrak{r}$.

Но если заданные связи $f=0$, $\varphi=0,\ldots$ не содержат явно времени, что теперь мы будем предполагать, то члены, обусловливающие различие между (322) и (385), исчезнут, и действительные смещения будут частным случаем возможных перемещений. Поэтому тогда имеет место (383):

$$\Sigma(\mathbf{F}_1 - m_1\dot{\mathbf{q}}_1)d\mathbf{r}_1 = 0,$$

или, если написать иначе,

$$dK = \Sigma\mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1, \tag{386}$$

полагая здесь

$$K = \frac{1}{2}\Sigma m_1 q_1^2 = \frac{1}{2}\Sigma m_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2). \tag{387}$$

Так как величина K есть живая сила системы точек, то уравнение (386) выражает, что *изменение живой силы системы точек равно общей работе движущих сил*, совершенно аналогично с уравнением (147), причем совсем не принимаются во внимание заданные связи, как в § 67.

Это простое соотношение, естественно, вытекает потому, что полная работа сил связей равна нулю не только при каждом возможном, но и при действительном перемещении системы точек в элемент времени dt. Этого не было бы, если бы заданные условия связей содержали время t явно, как это можно было выяснить ближе на простом примере в § 75.

§ 119. Для сил, имеющих потенциал U, по (354) и (386), интеграцией по времени t получаем:

$$K + U = \text{const} = K_0 + U_0, \tag{388}$$

и если мы опять, как в § 49, величину:

$$K + U = E \tag{389}$$

назовем *энергией* системы точек как сумму *кинетической энергии* K и *потенциальной энергии* U, то уравнение (388) выражает закон *сохранения энергии*. Про обобщение его на случай немеханических процессов было уже подробно говорено в § 49.

Уравнение (388) дает нам также возможность осветить в соображениях, развитых в § 105, еще другую сторону. Там было, показано, что минимуму потенциала U соответствует устойчивое положение равновесия системы точек. Мы доказали это тем соображением, что система точек, если ее вывести немного из положения равновесия и затем предоставить самой себе, может двигаться только в направлении убывания U, т. е. к минимуму U. Теперь небольшое нарушение равновесия можно произвести также еще более общим способом, именно таким, что прежде, чем предоставлять точки системы самим себе, можно сообщить им небольшие начальные скорости.

Тогда в начальном состоянии наступающего движения K_0 есть небольшая положительная величина, а U_0 равно $U_{\min} + U_0'$, где U_0' также мало и положительно. Следовательно, по (388) в продолжение всего движения:

$$K + U - U_{\min} = K_0 + U_0' \tag{390}$$

мало и положительно. Так как, во-первых, K состоит из существенно положительных членов и, во-вторых, $U - U_{\min}$ положительно, то скорости всех точек все время остаются малыми и система точек пребывает вблизи положения равновесия, т. е. равновесие устойчиво. То же имеет место для максимума U.

§ 120. Вообще движущие силы, действующие на систему точек, не консервативны (§ 49), именно не консервативны в том случае, когда извне производятся на систему более или менее произвольные воздействия. Поэтому мы предположим теперь, что движущие силы двоякого рода: консервативные силы и внешние силы — неконсервативного характера, которые мы обозначим через $\mathbf{F}_a$. Тогда для работы движущих сил вообще имеет место соотношение:

$$\Sigma\, \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 = -dU + A, \tag{391}$$

где через

$$A = \Sigma \mathbf{F}_a d\mathbf{r} \tag{392}$$

мы обозначили работу внешних сил, или „внешнюю" работу, и уравнение энергии (386) будет:

$$d(K + U) = dE = A, \tag{393}$$

т. е. изменение энергии системы точек равно внешней работе, положительной или отрицательной, смотря по тому, совершается ли внешняя работа „против системы" или „системой". В первом случае присходит изменение в „направлении" внешней силы, во втором—против внешней силы.

Если включить точки или тела, от которых происходят внешние воздействия, в рассматриваемую систему, то все внешние силы исчезнут (ср. § 112), и система называется „совершенной", или „замкнутой" системой. Для совершенной системы закон энергии опять имеет форму (388), как закон с о х р а н е н и я энергии, и в этом смысле говорят о сохранении энергии всего мира как такой материальной системы, которая содержит в себе все способные действовать тела. Однако нужно заметить, что в действительности замкнутость системы в абсолютном смысле недоказуема вполне надежно и что поэтому нельзя оперировать с энергией „мира" как с определенной величиной.

Это, конечно, не препятствует тому, чтобы рассматривать, смотря по обстоятельствам, даже произвольно малую конечную систему точек, надлежащим образом изолированную, как замкнутую систему.

Если разложить совершенную систему на две частичные системы, то вследствие работы сил, производимых точками одной части системы на точки другой, энергии частичных систем изменяются, т. е. вследствие этой работы энергия от одной части системы передается другой, тогда как полная энергия остается постоянной. Но при этом нужно обратить внимание на то, что вообще потенциальная энергия всей системы не равна, как кинетическая, сумме энергий частей системы (§ 104).

§ 121. Чтобы получить наглядное представление о величине кинетической энергии системы точек, часто рекомендуется относить последнюю к подвижной системе координат, начало которой лежит в центре тяжести системы. Тогда уравнения преобразования (191) дают для величины (387) кинетической энергии выражение:

$$K=\frac{1}{2}\sum mq_1'^2+u_0\sum m_1u_1'+v_0\sum m_1v_1'+w_0\sum m_1w_1'+$$
$$+\frac{1}{2}q_0^2\sum m_1.$$

Но так как, диференцируя (287) по t, находим:

$$\Sigma m_1u_1'=\Sigma m_1(u_1-u_0)=0\ldots, \tag{394}$$

то кинетическая энергия сводится к выражению:

$$K=\frac{1}{2}q_0^2\sum m_1+\frac{1}{2}\sum m_1q_1'^2, \tag{394a}$$

т. е. кинетическая энергия системы точек слагается из кинетической энергии ее центра тяжести, если представить себе сосредоточенной в нем все массы (энергия „поступательного“ движения), и кинетической энергии относительно центра тяжести (энергия „колебательного“ движения, к которому, как частный случай, принадлежит также вращательное движение).

§ 122. Основной закон механики, который мы до сих пор формулировали в уравнениях (383) или также (384), можно выразить еще в нескольких других формулировках, которые с физической стороны имеют совершенно одно и то же содержание, но в применениях представляют очень разнообразные особенности. Важнейшая из формулировок есть п р и н ц и п н а и м е н ь ш е г о д е й с т в и я. Мы разовьем его здесь в форме, которую ему дал Г а м и л ь т о н.

Так как уравнение (383) принципа возможной работы имеет место для всякого момента времени t, то мы можем интегрировать его по t от t_0 до t_1 и таким образом получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\sum\left(\mathrm{F}_x-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x=0, \tag{395}$$

где суммирование распространяется на все координаты и точки системы. При этом не только координаты x, y, z, но и вариации $\delta x,\ldots$ рассматриваются как функции времени t. Чтобы ясно это видеть, представим себе всего лучше, что координаты всех точек зависят кроме t еще от второго, совершенно произвольно выбранного параметра p, точно так же, как это было сделано в § 108. Определенному значению p соответствует искомое, пока еще не известное, по предположению, движение системы точек, измененному значению $p+\delta p$—другое определенное, „бесконечно близкое" к действительному движению, но которое, конечно, не удовлетворяет уравнениям движения. Операции d и δ, которые соответствуют изменениям dt и δp, совершенно независимы друг от друга и поэтому переместимы:

$$\frac{d\delta x}{dt}=\delta\frac{dx}{dt},\ldots \tag{396}$$

Вариации $\delta x=\frac{\partial x}{\partial p}\delta p,\ldots$ для всякого времени t совершенно произвольны и подчинены только условиям (322), в которых функции f, $\varphi,\ldots$ могут содержать время t также явно.

Преобразовывая интеграл по времени (395), мы имеем прежде всего по (391) для возможной работы:

$$\Sigma\,\mathbf{F}_x\delta x=-\delta U+A, \tag{397}$$

где U—потенциал консервативных сил системы, а A обозначает возможную работу внешних сил. Внешняя сила, которая вместе с тем консервативна (например тяжесть), может быть по произволу отнесена или в $-\delta U$, или в A.

Далее путем интегрирования по частям получается член:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\delta x=\left[\frac{dx}{dt}\cdot\delta x\right]_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}, \tag{398}$$

и если мы теперь введем предположение, что вариации координат всех точек для $t=t_0$ и $t=t_1$ обращаются в нуль, то, принимая в соображение (396):

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\delta x=-\frac{1}{2}\delta\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \tag{399}$$

следовательно, подставляя в (395), на основании (387) получаем:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta L+A)=0, \tag{400}$$

где для сокращения обозначено:

$$L=K-U. \tag{401}$$

Уравнение (400) выражает принцип Гамильтона наименьшего действия. Функция L, которую не следует смешивать с энергией E, называется лагранжевой функцией или также кинетическим потенциалом. В противоположность с принципом д'Аламбера, по которому движение определяется начальным положением точки и ее начальной скоростью, по принципу наименьшего действия движение определяется по начальному ($t=t_0$) и конечному ($t=t_1$) положениям точки, ибо это есть то, что при всех сравниваемых бесконечно близких движениях остается неизменным, тогда как скорости, даже начальные скорости, могут быть произвольно варьируемы в пределах, допустимых заданными связями.

Исключительное значение принципа наименьшего действия для всей физики основывается, во-первых, на том, что входящие в его формулировку понятия о потенциале и внешней работе имеют значение также вне механики, и, кроме того, на том, что этот принцип не связан с какими-либо определенными координатами. Это обстоятельство делает возможным непосредственное его применение также в случае электрических и термодинамических процессов, где он имеет большое значение.

§ 123. Рассмотрим простой пример его применения. Как движется материальная точка без движущей силы по неизменной поверхности? По (400) и (401) для этого должно быть:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta K = 0,$$

или

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} K \cdot dt = 0. \tag{402}$$

На словах: между всеми возможными на поверхности движениями, благодаря которым точка из определенного начального положения в определенный промежуток времени $t_1 - t_0$ перемещается в определенное конечное положение, осуществляются в действительности те, которые обращают в минимум интеграл по времени от живой силы.

Одно это положение дает как форму кривой пути, так и скорость, с которой она проходится, ибо, вставляя

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

получаем из (402):

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot dt = 0,$$

или, производя варьирование и затем интегрируя по частям, имеем:

$$\left[\frac{ds}{dt}\,\delta s\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 s}{dt^2}\,\delta s\, dt = 0.$$

Так как δs для всякого интервала времени произвольна, то отсюда, во-первых, следует, что для всех времен $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, следовательно, скорость $\frac{ds}{dt} = \mathrm{const}$ (§ 71), и, во-вторых, что $\delta(s_1 - s_0) = 0$, где $s_1 - s_0$ означает длину кривой траектории. Таким образом траектория есть геодезическая линия поверхности (§ 111).

§ 124. Мы воспользуемся теперь удобной формой принципа Гамильтона для того, чтобы преобразовать уравнения движения системы точек относительно прямолинейных прямоугольных координат в уравнения в других произвольных координатах, ибо во многих случаях рекомендуется вместо прямолинейных координат выбирать такие, которые лучше подходят к заданиым связям системы, например при вращениях—угол вращения. Нужно только ввести столько координат, сколько имеется степеней свободы в системе, и тогда эти координаты, которые мы назовем через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, можно рассматривать как независимые друг от друга. Прямолинейные координаты $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ всегда являются определенными, наперед известными функциями от φ; если заданные связи зависят от времени, то эти функции содержат явно также время t. Если этого нет, то компонеиты скорости $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \ldots$ суть определенные однородные линейные функции от $\dot{\varphi}$, коэфициенты которых, однако, могут зависеть от φ.

Так как вариации $\delta x, \ldots$ во всяком случае однородные линейные функции $\delta\varphi$, то выражение возможной внешней работы A по (400) имеет вид:

$$A = \Phi_1 \delta\varphi_1 + \Phi_2 \delta\varphi_2 + \ldots, \tag{403}$$

где величины Φ задаются внешними силами и обозначаются как внешние обобщенные „компоненты сил", соответствующие общим координатам φ.

Это определение силы есть самое общее, которое вообще возможно дать; оно базируется на общем принципе работы, т. е. потенциала, и сохраняет свое значение для всякого рода изменения состояния, которое может быть охарактеризовано изменением одной переменной φ. При этом замечательно, что размерность обобщенной компоненты силы устанавливается по размерности φ. Если, например, φ есть угол, то Φ есть по (237) момент вращения.

Далее, что касается вариации кинетического потенциала, то L есть определенная предполагаемая известной функция второй степеии величин $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \ldots$, коэфициенты которой зависят от $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ и, возможно, от времени t. Поэтому, так как время t не варируется:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \delta \dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \delta \dot{\varphi}_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \delta\varphi_1 + \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} \delta\varphi_2 + \ldots \tag{404}$$

Теперь представим себе, что выражения (403) и (404) вставлены в (400) и все входящие вариации сведены к независимым вариациям $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2,\ldots$ Это достигается для величин $\delta\dot{\varphi} = \delta\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\delta\varphi}{dt}$ интегрированием по частям по схеме:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\,dt = -\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)\delta\varphi\cdot dt,$$

так как на пределах интеграции вариация $\delta\varphi$, так же как $\delta x,\ldots$, обращается в нуль.

После того как таким путем каждый член под интегралом в (400) преобразуется во множитель при вариациях $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2,\ldots$, уравнение (400) в связи с независимостью этих вариаций требует, чтобы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = \Phi_1,\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) - \frac{dL}{\partial\varphi_2} = \Phi_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{405}$$

Это так называемые **л а г р а н ж е в ы** уравнения движения „второго рода“, в противоположность уравнениям (384) первого рода.

§ 125. В качестве примера определим уравнения движения свободной точки в полярных координатах r, ϑ, φ. Внешняя работа:

$$A = R\,\delta r + \Theta\delta\vartheta + \Phi\,\delta\varphi, \tag{405a}$$

где R, Θ, Φ — соответственные компоненты силы. Кинетический потенциал, если потенциальной энергии нет, равен живой силе K, и поэтому на основании (92):

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2); \tag{405b}$$

следовательно, искомые уравнения движения (405):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = R,\\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\vartheta}) - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = \Theta,\\ &\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) \qquad\qquad = \Phi \end{aligned}\right\} \tag{405c}$$

простой результат, который непосредственно из (55) и (92) можно получить только путем утомительных выкладок.

Соответственно получаются уравнения движения в цилиндрических координатах ϱ, φ, z по (159):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{\varrho}) - m\varrho\dot{\varphi}^2 &= P, \\ \frac{d}{dt}(m\varrho^2\dot{\varphi}) &= \Phi, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{405d}$$

§ 126. Мы выведем теперь принцип живой силы непосредственно из лагранжевых уравнений второго рода и поэтому будем предполагать, что время t не входит явно в выражение кинетического потенциала L. Если умножить уравнения (405) последовательно на $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2, \ldots$ и сложить, то получится, что работа, произведенная внешними силами за время dt, выразится так:

$$\sum \Phi_1 \, d\varphi_1 = A = \sum \left[\dot{\varphi}_1 \cdot d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \cdot d\varphi_1 \right]. \tag{406}$$

Если сравним выражение на правой стороне уравнения с полным диференциалом:

$$dL = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \, d\dot{\varphi}_1 + \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} d\varphi_1\right),$$

то очевидно, что, сложив оба эти выражения, мы получим:

$$A + dL = \sum\left[\dot{\varphi}_1 d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \, d\dot{\varphi}_1\right],$$

а это есть полный диференциал от:

$$\sum \dot{\varphi}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1},$$

Поэтому получается $A = dE$, или уравнение живой силы, если положить:

$$E = \sum \dot{\varphi}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - L. \tag{407}$$

Согласие этого уравнения с определением кинетического потенциала, данным в (401), станет тотчас очевидным, если заменить E через $K + U$, L через $K - U$ и вспомнить, что U не зависит от $\dot{\varphi}$. Тогда выходит:

$$K = \frac{1}{2}\sum \dot{\varphi}_1 \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}_1}, \tag{407a}$$

соотношение, которое всегда имеет место, так как K есть однородная функция второй степени от $\dot{\varphi}$.

Полученная в (407) связь между энергией и кинетическим потенциалом имеет по существу более общее значение, чем выраженная в (401), ибо уравнение (407) сохраняет определенный смысл также в случае, когда энергия E совсем не может быть подразделена на кинетическую и потенциальную, как например при электродинамических процессах.

§ 127. Как мы видели в § 75 и в более общем виде в § 118, принцип живой силы неприменим, когда заданные связи содержат, кроме координат, еще явно время t. Но уравнения движения (405) сохраняют, как это вытекает из их вывода, свою пригодность также и в этом общем случае. Так, для уже рассмотренной не раз (§ 75 и § 117) задачи о движении точки по прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω,

$$L = K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2),$$

следовательно, по (405):

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\omega^2 = 0,$$

в согласии с (278b).

В качестве другого примера рассмотрим колебания маятника, происходящие в вертикальной плоскости, при условии, что длина его l определенным наперед заданным образом изменяется. Тогда l есть заданная функция времени, и следовательно, угол элонгации φ — единственная независимая координата, и мы получаем по § 70:

$$K = \frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2), \quad U = -mgl \cos\varphi + \text{const};$$

следовательно, по (401):

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{l}^2) + mgl\cos\varphi + \text{const},$$

и по (405) уравнение движения:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) + mgl\sin\varphi = 0,$$

или

$$2\dot{l}\dot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0, \tag{408}$$

уравнение, которое отличается от обычного уравнения (244) для маятника членом $2\dot{l}\dot{\varphi}$.

Можно ритм изменения длины выбрать так, что энергия колебаний будет подвержена увеличению преимущественно в определенном смысле. На этом обстоятельстве основывается возможность раскачивать себя самого как угодно высоко.

§ 128. Величины, входящие в уравнения Лагранжа (405) на первом месте:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = \psi_2, \ldots, \tag{409}$$

называются количествами движения, соответствующими общим координатам φ. Они представляют линейные однородные функции скоростей $\dot{\varphi}$, следовательно, могут быть просто выражены через них, и обратно. Прямолинейным координатам x, y, z соответствуют количества движения $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$, как непосредственно выходит из выражения L.

Часто бывает выгодно для характеристики состояния вместе с координатами φ вместо скоростей $\dot{\varphi}$ пользоваться количествами движения ψ. Тогда уравнения движения принимают особенно простой вид, если в качестве характеристичной функции введем энергию E вместо кинетического потенциала L. Если написать уравнение (406) для $A = dE$ в виде:

$$dE = \sum \left(\dot{\varphi}_1 d\psi_1 - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} \cdot d\varphi_1 \right)$$

и смотреть здесь на E как на функцию от φ и ψ [1], то отсюда непосредственно следует:

$$\frac{\partial E}{\partial \psi_1} = \dot{\varphi}_1, \quad \frac{\partial E}{\partial \psi_2} = \dot{\varphi}_2, \ldots \tag{410}$$

и

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}\right)_\psi = -\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\right)_{\dot{\varphi}}, \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_2}\right)_\psi = -\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\right)_{\dot{\varphi}}, \ldots \tag{411}$$

Прибавленные указатели должны указывать, что нужно диференцировать E при постоянном ψ, и L—при постоянном $\dot{\varphi}$.

Пользуясь последними соотношениями, можно уравнения (405) написать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial \psi_1}, & \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} + \Phi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial \psi_2}, & \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial E}{\partial \varphi_2} + \Phi_2, \end{aligned}\right\} \tag{412}$$

. . . .

Они называются в таком виде „гамильтоновыми каноническими уравнениями движения“. Если, кроме внешних сил, энергия E задана как функция φ и ψ, то из этих уравнений получаются

---

[1] Здесь, следовательно, φ и ψ рассматриваются не как функции от t, а как независимые переменные. Основание для этого вытекает из того обстоятельства что уравнение имеет место для всех возможных сил, следовательно для каждого произвольного изменения состояния системы точек.

все φ и ψ как функции времени t и тех постоянных, которые относятся к начальному состоянию.

Из уравнений (412) следует непосредственно опять принцип энергии, если составить с их помощью выражение для полного диференциала dE.

Если внешние силы даны как функции времени t, то уравнения движения (412) возможно еще упростить формально, вводя „гамильтонову функцию".

$$H = E - \Sigma \Phi_1 \cdot \varphi_1. \tag{412a}$$

Тогда уравнения (412) принимают вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \ldots \tag{412b}$$

Для замкнутой системы ($\Phi = 0$) уравнения движения (412) сводятся к:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \psi_1}, \ldots \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}, \ldots \tag{413}$$

§ 128a. Общий метод для интегрирования уравнений движения (413) для замкнутой системы можно получить, исследуя входящий в принцип Гамильтона „интеграл действия":

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt. \tag{414}$$

Эта величина имеет для действительного движения, при заданных начальном и конечном положении системы, вполне определенное значение, которое по (400) характеризуется тем, что для каждой вариации движения:

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = 0. \tag{415}$$

Зададим себе прежде всего вопрос, какое значение получает δW, если варировать начальное и конечное положения системы, т. е. начальные и конечные координаты φ_1, $\varphi_2, \ldots$, между тем как время t, как и прежде, остается неварируемым. Ответ на этот вопрос получится, если вычислить δW на основании уравнения (404), в точности указанным там способом, при помощи интегрирования по частям, причем нужно только принять во внимание то обстоятельство, что вариации $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ на пределах интеграции теперь не обращаются в нуль. Таким образом, если воспользоваться уравнениями (405) для замкнутой системы ($\Phi = 0$), то

$$\delta W = \sum \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \delta\varphi_1 \right]_{t_0}^{t_1} = \sum \left[\psi_1 \delta\varphi_1 \right]_{t_0}^{t_1}. \tag{416}$$

По вышесказанному мы можем W рассматривать как определенную функцию начальных координат, конечных координат и моментов времени t_0 и t_1. Обозначим начальные координаты через φ_1^0, $\varphi_2^0, \ldots$, конечные координаты для краткости просто через φ_1, $\varphi_2, \ldots$, тогда, так как время не варируется,

$$\delta W = \sum \frac{\partial W}{\partial \varphi_1^0} \delta\varphi_1^0 + \sum \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} \delta\varphi_1;$$

из сравнения с (416) следует:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = \psi_2, \ldots \tag{417}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1^0} = -\psi_1^0, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2^0} = -\psi_2^0 \ldots \tag{418}$$

Теперь мы рассмотрим также зависимость интеграла действия W от времени t_1, которое мы будем в дальнейшем обозначать просто через t. Из (414) для этой зависимости получаем:

$$\frac{dW}{dt} = L, \tag{419}$$

где берется „полная“ производная от W, т. е. так, что координаты φ_1, $\varphi_2, \ldots$ изменяются со временем t сообразно действительному движению, между тем как начальные координаты φ_1^0, $\varphi_2^0, \ldots$, так же как t_0, считаются постоянными, т. е.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 + \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2 + \ldots,$$

где $\frac{\partial W}{\partial t}$ — „частная“ производная при постоянных координатах.

Принимая во внимание (417) и (419), получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \psi_1\dot{\varphi}_1 + \psi_2\dot{\varphi}_2 + \ldots - L = 0,$$

или по (409) и (407):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E = 0.$$

Если рассматривать здесь энергию, как в (413), как известную функцию φ и ψ, что можно обозначить через $E_{\varphi,\psi}$, и затем если заменить в ней координаты ψ через их значения (417), то последнее соотношение примет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + E_{\varphi, \frac{\partial W}{\partial \varphi}} = 0. \tag{420}$$

Оно показывает, что интеграл действия как функция φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_1^0, \varphi_2^0, t, t_0$, удовлетворяет определенному диференциальному уравнению—уравнению Гамильтона-Якоби.

§ 128b. Аналогично тому, как из выражения интеграла действия W можно вывести, что диференциальное уравнение (420) имеет место для определенного движения, можно также, обратно, интегрированием (420) найти функцию W, которая представляет интеграл действия движения; при ближайшем рассмотрении оказывается, что каждый интеграл W этого диференциального уравнения, который, кроме переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, t$ и аддитивных постоянных интеграции, содержит еще столько постоянных интеграции $a_1, a_2 \ldots$, сколько рассматриваемая система имеет степеней свободы, представляет общий интеграл уравнений движения (413). Именно, если положить, предполагая, что такая функция W найдена, по (417):

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \psi_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi_2} = \psi_2, \ldots \tag{421}$$

и по (418):

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = \beta_2, \ldots, \tag{422}$$

то при n степенях свободы получится $2n$ уравнений, которые служат для того, чтобы вычислить $2n$ переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$ в функции времени t и $2n$ постоянных интеграции $a_1, a_2, \ldots, \beta_1, \beta_2$.

Что уравнения движения (413) действительно удовлетворятся, если имеют место уравнения (420), (421) и (422), можно показать непосредственно следующим образом. Возьмем „полную“ производную по времени t прежде всего от первого уравнения (422), получается:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) = 0, \quad \text{или:} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial t} + \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dt} = 0, \tag{423}$$

причем суммирование по i распространяется от 1 до n. Совершенно так же вытекают остальные n—1 уравнений, которые вместе с (423) позволяют вычислить однозначно n величин скорости $\dot{\varphi}$.

С другой стороны, диференцированием (420) по a_1, если воспользоваться (421), получается:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial t} + \sum_i \frac{\partial E}{\partial \psi_i} \frac{\partial^2 W}{\partial a_1 \partial \varphi_i} = 0, \tag{424}$$

и соответственно n—1 остальных уравнений, так что из этих n уравнений можно однозначно определить n величин $\frac{\partial E}{\partial \psi}$. Но коэфициенты в системе уравнений (423) и (424), вторые частные производные от W, совершенно тождественны. Из этого следует, что n корней уравнения также тождественны, т. е. что для каждого i:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \psi_i}, \tag{425}$$

и, таким образом, первая половина уравнений движения (413) удовлетворяется.

Что касается второй половины, то из диференцирования (420) по φ_1 следует:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_1 \partial t}+\frac{\partial E}{\partial\varphi_1}+\sum_i \frac{\partial E}{\partial\psi_i}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_i \partial\varphi_1}=0,$$

или по (425):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_1 \partial t}+\sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial\varphi_1 \partial\varphi_i}\,\frac{d\varphi_i}{dt}+\frac{\partial E}{\partial\varphi_1}=0,$$

или наконец:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi_1}\right)+\frac{\partial E}{\partial\varphi_1}=0;$$

из этого выходит по (421), что уравнения, о которых идет речь, имеют место.

Уравнения (422) хотя по форме и не отличаются от (418), однако они по существу более общи, чем последние, потому что постоянные α могут и не быть начальными значениями координат φ.

§ 128c. Так как в диференциальное уравнение (420) Гамильтона-Якоби время входит только как диференциал, то, интегрируя по t, имеем:

$$W=-\alpha_1 t+V, \tag{426}$$

где V зависит только от координат φ_1, $\varphi_2, \ldots$ и постоянных α_1, $\alpha_2, \ldots$ Тогда для функции V получается условие:

$$E_{\varphi,\frac{\partial V}{\partial\varphi}}-\alpha_1=0. \tag{427}$$

Здесь, следовательно, постоянная α_1 представляет полную энергию системы, Уравнения (421) и (422) переходят тогда в

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_1}=\psi_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_2}=\psi_2,\ldots \tag{428}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}=t+\beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\ldots \tag{429}$$

Интегрирование (427) иногда удается при помощи разделения переменных, именно тогда, когда можно представить левую часть уравнения как функцию n аргументов, из которых каждый зависит только от одной координаты φ_i и от соответственной производной $\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}$. Тогда можно каждый отдельный аргумент положить равным постоянной α, далее, можно принять, что

$$V=V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n, \tag{430}$$

где каждая из величин V_1, $V_2, \ldots$ зависит только от одной координаты φ_1, $\varphi_2, \ldots$, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial V_1}{\partial\varphi_1};\quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_2}=\frac{\partial V_2}{\partial\varphi_2},\ldots \tag{431}$$

и таким образом для каждой из этих функций получается отдельное диференциальное уравнение, которое разрешается квадратурой.

§ 128d. В качестве простого примера для применения диференциального уравнения Гамильтона-Якоби мы рассмотрим уже разобранное в § 52 и последующих движение планеты, пользуясь прежними обозначениями. В этом случае мы имеем две степени свободы:

$$\varphi_1 = r, \quad \varphi_2 = \varphi;$$

далее, энергия в функции координат и скоростей имеет вид:

$$E = K + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{fm\mu}{r}; \tag{432}$$

кинетический потенциал:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{fm\mu}{r}; \tag{433}$$

координаты—количества движения:

$$\psi_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \psi_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}; \tag{434}$$

энергия как функция координат и количеств движения:

$$E = \frac{1}{2m}\psi_1^2 + \frac{1}{2mr^2}\psi_2^2 - \frac{fm\mu}{r}. \tag{435}$$

Поэтому диференциальное уравнение (427) принимает здесь вид:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{fm\mu}{r} = \alpha_1. \tag{436}$$

Его можно проинтегрировать, положив по (430):

$$V = V_1 + V_2; \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = \alpha_2, \tag{437}$$

и следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sqrt{2m\alpha_1 + \frac{2fm^2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}.$$

Если опустить не имеющую значения аддитивную постоянную, то получаем:

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \alpha_2\varphi, \\ V_1 &= \int \sqrt{2m\alpha_1 r^2 + 2fm^2\mu r - \alpha_2^2} \cdot \frac{dr}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{438}$$

и из (428), (429), (434) и (437):

$$\psi_1 = m\dot{r} = \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sqrt{2ma_1 + \frac{2fm^2\mu}{r} - \frac{a_2^2}{r^2}}, \tag{439}$$

$$\psi_2 = mr^2\dot{\varphi} = \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} = a_2, \tag{440}$$

$$t + \beta_1 = \frac{\partial V_1}{\partial a_1} = \int \frac{mr \cdot dr}{\sqrt{2ma_1r^2 + 2fm^2\mu r - a_2^2}}, \tag{441}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial V_1}{\partial a_1} + \varphi = \varphi - \int \frac{a_2 \cdot dr}{r\sqrt{2ma_1r^2 + 2fm^2\mu r - a_2^2}} =$$

$$= \varphi - \arccos \frac{a_2^2 - fm^2\mu r}{r\sqrt{f^2m^4\mu^2 + 2ma_1a_2^2}}. \tag{442}$$

Эти четыре уравнения оказываются в формальном отношении совершенно одинаковыми с уравнениями § 53, если положить:

$$a_1 = \frac{mc}{2}, \quad a_2 = mc', \quad \beta_2 = c''.$$

§ 129. В действительности ни выражения для энергии, ни выражения для кинетического потенциала нам непосредственно не задаются. Поэтому для применения теории имеет большое значение, что существует еще принцип большого общего значения: принцип равенства действия и противодействия. До сих пор мы ввели и пользовались этим принципом только для покоящейся системы точек. Нельзя, однако, при помощи тех соображений, которые делают его приемлемым (§ 29), распространять его на произвольно движущиеся точки, расстояния между которыми меняются со временем, в особенности если входят неконсервативные силы, как трение.

Поэтому вдвойне важно убедиться в том, что принцип действия и противодействия стоит в тесной связи с универсальным принципом энергии, и именно при посредстве принципа относительности (§ 59).

Действительно, представим себе, что две материальные точки 1 и 2, между которыми действуют какие-либо силы, некоторым образом движутся. Тогда по (147) происходящее за элемент времени dt изменение суммы их живых сил:

$$dK = X_1dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1z_1 + X_2dx_2 + Y_2dy_2 + Z_2dz_2. \tag{443}$$

Принцип относительности утверждает, что эта величина dK остается неизменной, если перейти от покоящейся системы координат при помощи уравнений (194) к равномерно движущейся координатной системе, независимо от того, имеют ли силы потенциал или нет, ибо принцип относительности имеет место не только по отношению к механическим, но ко всем физическим процессам, например к превращению механической энергии в тепло, т. е. количество превращенной в тепло механической энергии независимо от равномерного движения системы координат.

Поэтому для указанного преобразования координат из (443) получается:

$$X_1 dx_1 + \ldots + X_2 dx_2 + \ldots = X_1' dx_1' + \ldots + X_2' dx_2' + \ldots$$

и, принимая во внимание (192) и (194):

$$X_1 dx_1 + \ldots X_2 dx_2 = X_1 (dx_1 - u_0 dt) + \ldots + X_2 (dx_2 - u_0 dt) + \ldots$$

или

$$(X_1 + X_2) u_0 + (Y_1 + Y_2) v_0 + (Z_1 + Z_2) w_0 = 0,$$

соотношение, которое при произвольных u_0, v_0, w_0 только тогда удовлетворяется, когда вообще:

$$X_1 = -X_2; \quad Y_1 = -Y_2; \quad Z_1 = -Z_2, \tag{444}$$

как это соответствует принципу равенства действия и противодействия.

§ 130. Свое полное значение и плодотворность последний принцип обнаруживает, если мы опять, как раньше в статике (§ 112), разделим все действующие в системе материальных точек силы на *внутренние и внешние силы*. Если присоединим еще сюда принцип *д'Аламбер* (§ 66), то можно установить без дальнейших пояснений следующее положение:

При всяком движении системы материальных точек в каждый момент внешние силы и сопротивления инерции уравновешиваются, как если бы система была твердой.

Чтобы выразить это положение аналитически, обозначим внешние силы (движущие силы или силы связи) через $\mathbf{F}_a$. Тогда сообразно условиям равновесия (306) неизменяемого тела:

$$\Sigma(\mathbf{F}_a - m\ddot{\mathbf{r}}) = 0. \tag{445}$$

$$\Sigma[\mathbf{r}, (\mathbf{F}_a - m\ddot{\mathbf{r}})] = 0. \tag{446}$$

Эти шесть уравнений составляют общий исходный пункт для всей механики неизменяемых, твердых, жидких и газообразных тел. Мы исследуем их содержание на нескольких приложениях общего значения.

§ 131. Уравнения (445) принимают очень простой вид, если по (287) ввести положение центра тяжести.

Именно тогда после двукратного диференцирования по времени t:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 \Sigma m = \Sigma m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{447}$$

и уравнение (445) даст:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 \Sigma m = \Sigma \mathbf{F}_a, \tag{448}$$

т. е. центр тяжести системы материальных точек движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и как если бы к нему были приложены все внешние силы. При движении центра тяжести таким образом, внутренние силы не играют вообще никакой роли.

Если бросить, например, какое-нибудь твердое или жидкое тело, то его центр тяжести движется по той параболе, которая соответствует начальным его условиям, до тех пор, пока на него не действует никакая другая внешняя сила кроме тяжести отдельных частей тела.

Даже взрыв тела не может изменить его параболической траектории, пока какой-нибудь из его обломков не наткнется на внешнее препятствие. Точно так же взрыв какой-нибудь планеты не помешает центру тяжести ее двигаться по ее эллиптической орбите около солнца.

Только внешняя сила может сообщить центру тяжести тела ускорение.

На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости даже самый сильный человек не может сдвинуться с места, если он вначале был неподвижен, или остановиться, если он двигался. Отсюда видно, какое большое значение имеет трение поверхности земли, уличной мостовой, железнодорожных рельсов при продвижении тяжелых грузов. Если лошадь везет повозку, то натяжение постромок действует с одинаковой силой (нисколько не сильнее) как на повозку по направлению вперед, так и на лошадь по направлению назад, но для повозки это единственная внешняя сила, тогда как для лошади еще имеет значение трение, которое испытывают ее упирающиеся в земную поверхность ноги; это трение действует по направлению вперед и по меньшей мере должно быть настолько значительно, чтобы преодолеть натяжение постромок.

Также поставленный раньше в § 82 и там оставшийся без ответа вопрос о том, какое движение покоящемуся твердому телу сообщает пара сил, находит здесь, в первой своей части, ответ, ибо по уравнению (448) центр тяжести тела остается в покое. Следовательно, движение есть вращение около центра тяжести. Но не следует думать, что ось вращения всегда совпадает с осью пары, об этом мы узнаем попозже (§ 149).

§ 132. Если не действуют никакие внешние силы или если внешние силы удовлетворяют уравнению $\Sigma \mathbf{F}_a = 0$, то по (448) $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, т. е. центр тяжести движется равномерно и прямолинейно (сохранение движения центра тяжести).

Можно это положение формулировать также при помощи количества движения (§ 128), если написать интеграл $\Sigma m \ddot{\mathbf{r}}' = 0$ в виде:

$$\Sigma m\mathbf{r} = \Sigma m\mathbf{q} = \text{const.} \tag{449}$$

Этот в настоящем случае постоянный по величине и направлению вектор называют „результирующим количеством движения“ системы точек. Он составляется из количеств движения отдельных точек точно так же, как результирующая сила — из отдельных сил. Уравнение (449) выражает, таким образом, теорему о сохранении количества движения (или величины импульса). Характерное отличие этого закона сохранения от закона сохранения энергии заключается в том, что количество движения есть вектор, а энергия — скалярная величина, поэтому сохранение количества движения выражается тремя уравнениями, тогда как сохранение энергии — одним.

Примером может служить отдача при выстреле из орудия, при котором снаряд и орудие движутся с равными и противоположными количествами движения, так как результирующее, количество движения было нулем и остается нулем до тех пор, пока на них не действует никакая внешняя сила.

§ 133. В виде другого примера для теоремы о сохранении количества движения рассмотрим законы удара двух движущихся по одной и той же прямой, оси x-ов, материальных точек 1 и 2. Координаты их пусть будут x_1 и $x_2 > x_1$, их скорости до удара u_1 и u_2. Для того чтобы удар вообще мог произойти, должно быть:

$$u_1 > u_2, \tag{450}$$

причем величины u могут быть как положительны, так и отрицательны.

Удар есть очень сложный процесс; при этом появляются очень значительные силы, но они длятся очень короткое время и зависят при этом в значительной мере от материальных особенностей точек. Тем важнее, что из общей механики можно вывести имеющие широкое значение закономерности относительно величины скоростей после удара.

При отсутствии какой-либо внешней силы имеет место для системы двух материальных точек по § 132 теорема о сохранении количества движения:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2', \tag{451}$$

если u_1' и u_2' означают скорости после удара. Для однозначного определения u_1' и u_2' этого одного уравнения, конечно, недостаточно; для этого нужно еще дальнейшее условие, которое выражается различно, смотря по материальным особенностям точек. Только следующее неравенство должно при всех обстоятельствах иметь место:

$$u_1' \leqslant u_2', \tag{452}$$

так как точки принимаются непроницаемыми.

Мы рассмотрим ниже среди всех возможных случаев те два, которые особенно интересны как идеальные предельные случаи.

§ 134. *Неупругий удар.* Вполне неупругим ударом называют такой, при котором две ударившиеся точки не отскакивают друг от друга, но движутся с общей скоростью по одному и тому же пути. Поэтому здесь имеет место:

$$u_1' = u_2' = u', \tag{453}$$

и по (451)

$$u' = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \tag{454}$$

Если массы равны, то скорость после удара есть средняя арифметическая скоростей до удара. Если количества движения равны и противоположны, то общая скорость равна нулю.

При неупругом ударе механическая энергия всегда исчезает. Вычислим количество этой потери. Разность живых сил обеих точек до и после удара равна:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - (m_1 + m_2) u'^2\right),$$

или по (454):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2, \tag{455}$$

т. е. действительно положительная величина.

По общему закону сохранения энергии получается вместо этого соотвественное количество молекулярной энергии в форме тепла, деформации, электричества.

То обстоятельство, что это превращение энергии всегда происходит односторонне, в смысле уменьшения живой силы движения, так же, как при трении, указывает уже здесь на существование чуждого принципу энергии универсального закона природы, точное выражение которого получается во „втором законе“ теории тепла.

§ 135. *Упругий удар.* Удар называется совершенно упругим, если обе материальные точки при ударе испытывают только преходящие, а не длительные изменения своих молекулярных свойств, а также нет ни нагревания, ни остающихся деформаций, ни каких-либо изменений молекулярной энергии.

Тогда по принципу сохранения энергии сумма живых сил точек как единственного вида энергии, которую нужно здесь принимать в расчет, после удара равна живой силе их до удара, т. е.

$$\frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2), \tag{456}$$

или

$$m_1 (u_1^2 - u'^2) = m_2 (u_2'^2 - u_2^2),$$

и после разделения на соответственным образом переписанное уравнение (451):

$$u_1 + u_1' = u_2' + u_2, \tag{457}$$

откуда тогда получаются при помощи (451) значения:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= \frac{(m_1-m_2)u_1+2m_2u_2}{m_1+m_2}, \\ u_2' &= \frac{2m_1u_1-(m_1-m_2)u_2}{m_1+m_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (458)$$

которые действительно удовлетворяют неравенству (452), если принять во внимание (450).

Если массы равны, то $u_1' = u_2$ и $u_2' = u_1$, т. е. скорости просто обмениваются. Если m_2 очень велико по сравнению с m_1 $(m_2 \gg m_1)$, то при разделении числителя и знаменателя на m_2 получаем:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= -u_1 + 2u_2, \\ u_2' &= u_2. \end{aligned}\right\} \qquad (459)$$

Этот случай соответствует упругому отражению материальной точки, которая ударяется со скоростью u_1 в стену, движущуюся со скоростью u_2. Если $u_2 = 0$, то точка отражается от неподвижной стены с той же скоростью u_1; если $u_2 = \frac{u_1}{2}$, то точка останавливается; если $u_2 > \frac{u_1}{2}$, то точка следует за стеной на все возрастающем расстоянии. Принцип сохранения энергии соблюдается при этом, несмотря на то, что скорость точки изменяется, тогда как скорость стены остается неизменной; это обеспечивается уравнением (456).

§ 136. Процесс удара дал повод для введения понятия о мгновенных силах. Это такие силы, которые только в течение бесконечно короткого времени τ отличны от нуля, но в этот промежуток времени они такой величины, что производят заметное изменение скорости. Чтобы найти характерный признак для мгновенных сил, примем в общих уравнениях (412) внешние компоненты сил $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ за мгновенные силы, которые действуют от момента t до $t+\tau$, и проинтегрируем относящиеся к координатам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ уравнения по t от t до $t+\tau$. Тогда, если обозначить значком вверху величины, относящиеся к моменту $t+\tau$, получаем:

$$\varphi_1' - \varphi_1 = 0, \quad \psi_1' - \psi_1 = \int\limits_t^{t+\tau} \Phi_1 \, dt, \text{ и т. д.} \qquad (460)$$

Действительно, вследствие малости τ исчезают те интегралы по времени, которые распространяются на конечные промежутки времени. Итак, в то время как самые координаты φ заметно мгновенными силами не изменяются, что непосредственно понятно, так как скорости всегда остаются конечными, количества движения (и с ними скорости) претерпевают скачок, величина которого представляется интегралом по времени соответственной мгновенной силы. Следовательно, этот интеграл характеризует действие мгновенной силы; он называется „импульсом" $i_1, i_2, \ldots$ силы.

Если, как указано в § 128, для характеристики системы точек, кроме координат φ вместо скоростей $\dot{\varphi}$, воспользоваться количествами движения ψ, то можно представить себе для наглядности, что эти количества движения произведены мгновенными силами, импульс которых тогда равен величинам ψ. Поэтому количества движения ψ иногда называют прямо также импульсивными координатами.

Для импульса имеет место, как для всех родов сил, принцип действия и противодействия, т. е. каждому импульсу, производимому материальной точкой на другую точку, соответствует равный и противоположный импульс со стороны второй точки по отношению к первой.

Вычислим теперь работу A, совершаемую мгновенными силами. Она равна изменению энергии E, или, что здесь то же самое, живой силы K, ибо потенциальная энергия мгновенными силами по (460) не изменяется заметно. Итак:

$$A = K' - K,$$

и по (407а) и (409)

$$A = \frac{1}{2}\,\Sigma\dot{\varphi}'\psi_1' - \frac{1}{2}\Sigma\dot{\varphi}_1\psi_1.$$

Но так как K есть однородная квадратичная функция от $\dot{\varphi}$ и от ψ), то по (409):

$$\Sigma\dot{\varphi}_1'\psi_1 = \Sigma\dot{\varphi}_1\psi_1', \tag{461}$$

следовательно, можно также написать:

$$A = \frac{1}{2}\sum(\dot{\varphi}_1' + \dot{\varphi}_1)\cdot(\varphi_1' - \psi_1),$$

или

$$A = \sum\frac{\dot{\varphi}_1' + \dot{\varphi}_1}{2}\cdot i_1, \tag{462}$$

т. е. работа мгновенных сил получается через умножение импульса на среднюю арифметическую скоростей до и после удара.

Преимущество введения мгновенных сил сказывается, например, при выводе закона упругого удара, разобранного в § 135, ибо для него по (462):

$$\frac{u_1' + u_1}{2}\,i_1 + \frac{u_2' + u_2}{2}\,i_2 = 0.$$

С другой стороны, по принципу реакции:

$$i_1 + i_2 = 0,$$

и отсюда следует уравнение (457) более простым путем, чем раньше.

§ 137. Теперь мы подвергнем более детальному рассмотрению также общее уравнение (446) и напишем его с этой целью в виде:

$$\Sigma\,[\mathbf{r}\; m\ddot{\mathbf{r}}] = \Sigma\,[\mathbf{r}\;\mathbf{F}_a]. \tag{463}$$

Предположим сначала частный случай, когда правая часть уравнения равна нулю, как если бы никакие внешние силы не действовали, следовательно:

$$\Sigma\,[\mathbf{r}\; m\ddot{\mathbf{r}}] = 0;$$

тогда это векторное уравнение можно интегрировать, как (157a), и получается:

$$\Sigma\,[\mathbf{r}\; m\dot{\mathbf{r}}] = \mathrm{const}. \tag{464}$$

Отдельные члены этой суммы называются „моментами количества движения“, или „моментами импульса“, соответственной материальной точки относительно начала координат, а вся сумма — „результирующим моментом“ всех количеств движения относительно этой точки. Название, закон образования и состав моментов количеств движения соответствуют по § 85—88 в точности положениям, относящимся к моментам сил. Направление вектора (464) называется соответственно „осью“ результирующего момента.

Наглядное кинематическое представление уравнение (464) получает, если обратить внимание на то, что по соображениям, изложенным в § 56, проекция результирующего момента на какую-нибудь, проходящую через начало координат плоскость, т. е. компонент вектора (464) в направлении нормали к этой плоскости равен алгебраической сумме умноженных на массы удвоенных „секториальных скоростей“ отдельных точек; эти скорости измеряются площадями, описываемыми радиусами-векторами точек в соответствующих плоскостях, положительными или отрицательными, смотря по направлению отдельных вращений. Если выбранная плоскость проходит через ось результирующего момента, то алгебраическая сумма умноженных на массы удвоенных секториальных скоростей равна нулю, потому что компонент вектора в направлении, перпендикулярном к его направлению, исчезнет, но если плоскость перпендикулярна к оси, то упомянутая сумма — максимум, именно равна абсолютной величине результирующего момента (464). Эта особая, на все времена неизменная в пространстве плоскость носит поэтому название „неизменяемой плоскости“, а положение, выражаемое уравнением (464), называется „принципом площадей“.

Если постоянная в (464) равна нулю, то результирующий момент для всех времен — нуль. Однако из этого нельзя, как выше в § 132 для количества движения, заключить о существовании закона сохранения, потому что это уравнение нельзя вообще интегрировать по времени. Поэтому, например, лицо, свободно стоящее на абсолютно гладкой поверхности, не может сообщить себе скорости вращения, но вполне может повернуться, например, таким образом, что оно сначала вытянет правую руку в сторону наружу, затем обведет ее по горизонтальному кругу кругом налево и затем снова ее согнет. Это движение, если повторить его достаточно часто, произведет вращение лица на произвольно большой угол направо. Сюда принадлежит также знаменитый кажущийся парадокс о брошенной кошке, которая всегда, падая на пол, становится на ноги.

§ 138. В общем случае уравнение (463) нельзя интегрировать, но часто оно очень упрощается, если ввести вместо неподвижных координат движущуюся систему координат с параллельными осями и с началом в центре тяжести, по уравнениям (191), которые в векторной форме имеют вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \dot{\mathbf{r}}_0, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}_0, \tag{465}$$

где вследствие (287):

$$\sum m\mathbf{r}' = 0, \quad \sum m\dot{\mathbf{r}}' = 0, \quad \sum m\ddot{\mathbf{r}}' = 0, \tag{466}$$

Так как, далее, по (192) $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_a'$, то уравнения (463) при введении отмеченных значком координат переходят в:

$$\sum \left[(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)\ m(\ddot{\mathbf{r}}' + \ddot{\mathbf{r}}_0)\right] = \sum \left[(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_0)\,\mathbf{F}_a'\right],$$

или

$$\sum\left[\mathbf{r}'\ \ m\ddot{\mathbf{r}}'\right] + \sum\left[\mathbf{r}_0\ \ m\ddot{\mathbf{r}}'\right] + \sum\left[\mathbf{r}'\ \ m\ddot{\mathbf{r}}_0\right] +$$
$$+ \sum\left[\mathbf{r}_0\ \ m\ddot{\mathbf{r}}_0\right] = \sum\left[\mathbf{r}'\ \mathbf{F}_a'\right] + \sum\left[\mathbf{r}_0\ \mathbf{F}_a'\right].$$

В этом уравнении исчезают на левой стороне второй и третий члены по (466), как можно в этом убедиться вычислением какого-нибудь компонента, а четвертый член по (448) равен второму на правой стороне уравнения, так что окончательно останется только:

$$\sum\left[\mathbf{r}'\ \ m\ddot{\mathbf{r}}'\right] = \sum\left[\mathbf{r}'\ \mathbf{F}_a'\right], \tag{467}$$

а это есть в точности уравнение (463) только с отмеченными значком величинами. Его особое значение заключается в том, что результирующий момент внешней силы относительно центра тяжести часто имеет более простое выражение, чем в отношении неподвижного в пространстве начала координат. Если он равен нулю, как например в случае тяжести, то для относительного движения системы точек относительно центра тяжести имеет место принцип площадей (464), как бы сложно ни двигался центр тяжести. Если, например, бросить каким-либо способом твердое тяжелое тело, то оно вращается около центра тяжести, если отвлечься от сопротивления воздуха, совершенно так же, как если бы центр тяжести покоился и никакие внешние силы на него не действовали; на основании этой теоремы в связи с теоремой § 131 о движении центра тяжести можно дать полный ответ на вопрос о движении тела. Аналогичное следствие можно вывести относительно вращения планеты около ее центра тяжести.

ГЛАВА IV.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 139. Теперь мы применим, наконец, общие положения динамики еще к движению твердого тела и прежде всего убедимся в том, что во всяком случае шести уравнений (445) и (446) как раз достаточно для полного решения задачи. В самом деле, если тело совершенно свободно, то оно обладает по § 103 шестью степенями свободы, соответственно шести уравнениям движения, в которых тогда нужно рассматривать все внешние силы $\mathbf{F}_a$ как заданные. Но если движение тела наперед ограничено наложенными связями, то часть внешних сил является как силы связей, и уравнения, которые содержат эти силы связей, не могут служить для определения движения. Но мы знаем уже из § 91, что для случая равновесия движущие силы одни должны удовлетворять всегда как раз стольким уравнениям, сколько имеется степеней свободы, и как раз эти уравнения, обобщенные введением сопротивлений инерции, содержат также законы движения. Если таким способом движение тела определено, то из остальных уравнений можно определить силы связей, которые необходимы для того, чтобы при этом движении соблюдались наложенные связи.

§ 140. Возьмем сначала тело, которое может вращаться около неизменной оси; оно обладает одной степенью свободы. Выберем ось вращения за ось z. Движущую силу мы предположим заданной, и по § 88 пусть она сводится к результирующей силе $\mathbf{F}$, приложенной в начале координат, и одной паре сил $\mathbf{N}$, а неизвестные наперед силы связи — к результирующей силе $\mathbf{F}$ и паре сил $\mathbf{N}'$.

Тогда из шести уравнеиий (445) и (446) только последнее не содержит никакого члена, зависящего от сил связи, ибо по § 91 силы, которые удерживают ось z-ов, не могут дать никакого момента вращения около этой оси. Поэтому для компонента по оси z-ов по (446) имеет место:

$$\Sigma m_1 \left(x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) = \mathbf{N}_z, \tag{468}$$

где суммирование распространяется на все отдельные материальные точки или элементы массы тела; и одного этого уравнения достаточно для определения движения. Нам нужно только еще выразить входящие в него переменные через одну независимую переменную, которая определяет положение тела и в качестве таковой мы примем угол φ, который образует произвольно выбранная, проходящая через ось z-ов, неизменная по отношению к телу плоскость с плоскостью xz. Тогда, введя цилиндрические координаты, так же как в (326а), найдем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\varrho_1 \sin\varphi_1 \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \varrho_1 \cos\varphi_1 \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dz_1}{dt} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{469}$$

если ϱ_1 означает постоянное расстояние точки 1 от оси z-ов, и повторным диференцированием получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\varrho_1 \cos\varphi_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \varrho_1 \sin\varphi_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -\varrho_1 \sin\varphi_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \varrho_1 \cos\varphi_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{469a}$$

следовательно, подстановкой в (468) находим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Sigma m_1 \varrho_1^2 = N_z. \tag{469b}$$

Это уравнение движения имеет совершенно ту же форму (8), что и уравнение движения материальной точки по прямой, только вместо ускорения здесь входит угловое ускорение, вместо силы — — момент вращения и вместо постоянной инертной массы — постоянная сумма $\Sigma m_1 \varrho_1^2$, которая поэтому называется моментом инерции J тела относительно оси z-ов.

Интегрирование уравнения совершается поэтому совершенно по тому же самому методу, как в случае прямолинейного движения.

Еще непосредственнее получается этот вывод, если воспользоваться лагранжевыми уравнениями второго рода. Работа внешней силы при смещении тела на $d\varphi$ по (327) равна:

$$A = \mathbf{N}_z \cdot d\varphi,$$

следовательно, компонент внешней силы по (403):

$$\Phi = N_z$$

С другой стороны, кинетический потенциал, если воспользоваться (469), выразится так:

$$L = K = \frac{1}{2}\sum m_1 q_1^2 = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2, \tag{470}$$

следовательно, по (405):

$$J\ddot{\varphi} = \mathbf{N}_z. \tag{471}$$

как и раньше.

§ 141. После того как движение при помощи (471) определенно, для результирующей силы и результирующих моментов вращения сил связи, которыми удерживается ось вращения, или, что то же самое, для сопротивления, которое должна оказывать ось вращения, получаются из (445) и (446) пять уравнений:

$$\mathbf{F}' = \sum m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}, \tag{472}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_x' &= \sum m_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) - \mathbf{N}_x, \\ N_y' &= \sum m_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) - \mathbf{N}_y. \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Мы рассмотрим здесь подробнее частный случай, когда все движущие силы равны нулю, и когда, следовательно, тело вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ около неподвижной оси z-ов. Тогда $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$ равны нулю, тогда как силы связи $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{N}'$ определяются последними уравнениями, если в них опустить члены с $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$.

Результирующая сила связи $\mathbf{F}'$ имеет наглядное значение, ибо если в (472) вставить для компонента $\ddot{\mathbf{r}}_1$ значение (469a), то, принимая во внимание, что $\ddot{\varphi} = 0$ и (287), найдем:

$$\mathbf{F}_x' = -\dot{\varphi}^2 \sum m_1 \varrho_1 \cos\varphi_1 = -\dot{\varphi}^2 \sum m_1 x_1 = -\dot{\varphi}^2 x_0 \sum m_1,$$

$$\mathbf{F}_y' = -\dot{\varphi}^2 y_0 \sum m,$$

$$\mathbf{F}_z' = 0,$$

т. е. результирующая сила связи равна и противоположна центробежной силе массы Σm_1, вращающейся с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ около оси вращения; это положение также выходит непосредственно из принципа движения центра тяжести (§ 131).

Если, далее, мы предположим, что ось вращения проходит через центр тяжести, то результирующая сила связи $\mathbf{F}'$ исчезнет, но моменты вращения силы связи $\mathbf{N}_x'$ и $\mathbf{N}_y'$ вообще отличны от нуля, именно:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{N}_x' &= \dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 y_1 z_1, \\ \mathbf{N}_y' &= -\dot{\varphi}^2 \Sigma m_1 x_1 z_1. \end{aligned}\right\} \tag{474}$$

Это означает, что также и в этом случае ось вращения должна удерживаться внешней силой, именно парой сил, если она должна оставаться в покое; если ось как-нибудь сделается свободной, то тело, несмотря на то, что никакая движущая сила на него не действует, и несмотря на то, что центр тяжести остается в покое, не будет сохранять более направление своего вращения. Вопрос о том, как тогда изменится ось вращения, относится к последующему исследованию движения около неизменной точки.

Только в том частном случае, когда:

$$\Sigma m_1 y_1 z_1 = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma m_1 x_1 z_1 = 0, \tag{475}$$

внешняя сила связи при рассматриваемом вращении совершенно отпадает, и ось z обладает свойством „свободной" или „перманентной" оси вращения.

§ 142. После того, как мы в § 140 пришли к понятию о моменте инерции $\Sigma m\varrho^2 = J$ тела относительно определенной оси, мы исследуем теперь ближе вопрос, по какому закону величина момента инерции определенного тела зависит от положения оси, ибо последняя может быть выбрана совершенно произвольно, она может даже лежать совершенно вне массы тела.

Рассмотрим сначала моменты инерции определенного тела относительно таких прямых, которые все проходят через одну точку, через начало координат. Положение такой прямой определяется косинусами λ, μ, ν углов ее с осями. Если x, y z — координаты материальной точки m, и r означает расстояние ее от O, то

$$\varrho' = r \cdot \sin\vartheta,$$

где ϑ — угол между радиусом-вектором r и прямой(λ, μ, ν); следовательно:

$$\cos\vartheta = \lambda \cdot \frac{x}{r} + \mu \cdot \frac{y}{r} + \nu \cdot \frac{z}{r}.$$

Поэтому момент инерции тела относительно прямой $(\lambda, \mu\ \nu)$ имеет величину:

$$J = \Sigma mr^2 \sin^2\vartheta = \Sigma mr^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - \cos^2\vartheta),$$

$$\begin{aligned} J = \lambda^2 \cdot \Sigma m(y^2 + z^2) + \mu^2 \cdot \Sigma m(z^2 + x^2) + \nu^2 \cdot \Sigma m(x^2 + y^2) - \\ - 2\mu\nu \cdot \Sigma myz - 2\nu\lambda \cdot \Sigma mzx - 2\lambda\mu \cdot \Sigma mxy. \end{aligned} \tag{476}$$

Если теперь изменить направление прямой, т. е. λ, μ, ν, то шесть сумм Σ останутся неизменными и поэтому оказываются характеристичными для величин моментов инерции относительно всех проходящих через O прямых. Три первые суммы суть моменты инерции J_x, J_y, J_z относительно трех осей координат. Три последние называют также „девиационными моментами".

Очень наглядно представляется зависимость величины J от λ μ ν, если на каждой проходящей через O прямой по направлению λ, μ, ν откладывать значение $\frac{1}{\sqrt{J}}$ в виде отрезка от точки O. Тогда концы ξ, η, ζ всех этих отрезков образуют поверхность, уравнение которой определяется соотношениями:

$$\xi=\frac{\lambda}{\sqrt{J}},\quad \eta=\frac{\mu}{\sqrt{J}},\quad \zeta=\frac{\nu}{\sqrt{J}}$$

в связи с (476).

Это даст по исключении λ, μ, ν уравнение поверхности в виде:

$$\xi^2 J_x+\eta^2 J_y+\zeta^2 J_z-2\eta\zeta\Sigma myz-2\zeta\xi\Sigma zx-2\xi\eta\Sigma mxy=1, \tag{477}$$

т. е. эллипсоид с началом O в центре, который называется „эллипсоидом инерции" тела относительно точки O.

Каждая точка в бесконечном пространстве может быть принята за центр подобного эллипсоида инерции, и момент инерции тела относительно какой-либо проходящей через эту точку прямой равен обратному квадрату соответствующей полуоси эллипсоида.

Так как величина момента инерции не зависит от выбора осей координат, то и вид эллипсоида инерции от этого не зависим.

Главные оси эллипсоида называются „главными осями инерции", и соответственные моменты инерции — „главными моментами инерции". Последние вместе с тем — обратные квадраты полуосей эллипсоида.

Уравнение эллипсоида принимает особенно простой вид, если оси координат совпадают с главными осями инерции, ибо тогда оно имеет вид:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

или, если P, Q, R означают главные моменты инерции:

$$P\xi^2+Q\eta^2+R\zeta^2=1. \tag{478}$$

Сравнение с общим уравнением (477) показывает, что в случае, когда за координатные оси приняты главные оси инерции, девиационные моменты исчезают:

$$\Sigma myz=0\quad \Sigma mzx=0\quad \Sigma mxy=0, \tag{479}$$

и отсюда опять следует по (476) для момента инерции тела относительно прямой, косинусы углов которой с главными осями инерции суть λ, μ, ν:

$$J=P\lambda^2+Q\mu^2+\nu R^2. \tag{480}$$

Наибольший из трех главных моментов инерции P, Q, R — тот, которому принадлежит наименьшая ось эллипсоида инерции, — представляет вместе с тем наибольший момент инерции, который вообще может быть для прямой проходящей через O и обратно. Если, в частности, $P=Q=R$, то и $J=P$, и эллипсоид инерции превращается в шар. Это имеет место, например, для точки симметрии однородного тела в форме шара или также куба.

Положение, величина и направление осей эллипсоида инерции изменяются, если перемещать центр эллипсоида. Вообще можно сказать, что размеры эллипсоида тем более сжимаются, чем дальше центр эллипсоида удален от тела.

Если сравнить уравнения (479) с (475), то оказывается, что те главные оси инерции, которые проходят через центр тяжести тела, вместе с тем обладают свойством свободной или перманентной оси вращения, и именно только они.

§ 143. Зададим себе, далее, вопрос о моментах инерции тела относительно двух прямых, которые не выходят из одной и той же точки, — именно сначала для двух параллельных прямых. Примем первую из них за ось z-ов, тогда вторую мы можем рассматривать как ось z'-ов отмеченной значком координатной системы с осями, параллельными осям без значка, и тогда получаем для двух сравниваемых моментов инерции:

$$J_z = \Sigma m(x^2 + y^2), \quad J_z' = \Sigma m(x'^2 + y'^2).$$

Не нарушая общности, мы можем, далее, принять плоскость, проходящую через z и z', за плоскость (xz), и начало координат O' пусть находится на оси x-ов.

Тогда уравнения преобразования напишутся просто в виде:

$$x' = x - h, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

где h означает расстояние двух параллельных линий, и момент инерции относительно оси z'-ов будет:

$$J_z' = \Sigma m(x^2 + y^2) - 2h\Sigma mx + h^2\Sigma m. \tag{481}$$

Если теперь ось z-ов проходит через центр тяжести тела, то $\Sigma mx = 0$, и последнее уравнение примет вид:

$$J_z' = J_z + h^2\Sigma m,$$

т. е. момент инерции тела относительно какой-либо прямой равен моменту инерции тела относительно параллельной прямой, проходящей через центр тяжести, плюс масса всего тела на квадрат расстояния прямой от центра тяжести. Между всеми прямыми, параллельными данному направлению, прямая, проходящая через центр тяжести, дает таким образом наименьший момент инерции, и остальные прямые группируются по их моментам инерции в коаксиальных круговых цилиндрах около этой прямой.

Вместе с тем решается общий вопрос о моменте инерции J тела относительно совершенно произвольной прямой. Именно, если M означает массу тела, P, Q, R — главные моменты инерции тела относительно его центра тяжести, то по (480) и (481):

$$J = P\lambda^2 + Q\mu^2 + R\nu^2 + Mh^2, \tag{482}$$

если λ, μ, ν означают косинусы углов, составляемых прямой с главными осями инерции, а h — ее расстояние от центра тяжести.

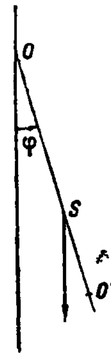
§ 144. Сделаем еще применение к движению тяжелого тела около горизонтальной оси вращения — так называемому „физическому“ маятнику, в отличие от разобранного в § 69 случая

„математического“ маятника. Пользуясь прежними обозначениями, мы определим положение тела углом φ, который образует плоскость, проходящую через ось вращения и центр тяжести S, с вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения; пусть плоскость чертежа (черт. 38) проходит через z и перпендикулярна к оси вращения, которая пересекает ее в точке O. Тогда движущая сила Mg с точкой приложения S, и ее момент вращения относительно неизменной оси:

$$-Mg\,h\sin\varphi,$$

где $h=SO$ — расстояние центра тяжести от оси. Поэтому на основании (471):

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-Mg\,h\sin\varphi. \tag{483}$$



Черт. 38.

Сравнение этого уравнения с (244) для математического маятника длиною l указывает на полную их тождественность, если принять:

$$l=\frac{J}{Mh}, \tag{484}$$

т. е. движение физического маятника происходит точно так же, как движение математического маятника с длиною l, определяемой (484). Поэтому эта величина называется также „приведенной длиною маятника“, а точка на прямой OS, удаленная от O на расстояние l, называется „центром качания“ O'.

Относительно зависимости отрезков l и h друг от друга дает разъяснение следующее соображение.

По (481)

$$J=J_0+Mh^2,$$

если J_0 означает момент инерции тела относительно прямой, параллельной оси вращения и проходящей через центр тяжести. Таким образом, подставляя в (484), находим:

$$l=h+\frac{J_0}{Mh}; \tag{485}$$

поэтому $l>h$, как обозначено на черт. 38. Если перенести ось вращения на другую ей параллельную прямую, то по (485) h и l изменяются, тогда как J_0 и M остаются постоянными.

Если h очень мало, а также если h очень велико (центр тяжести очень близко или очень далеко от оси вращения), то приведенная длина маятника l, а вместе с ней период колебаний принимают очень большие значения, — в последнем случае центр тяжести и центр качаний почти совпадают, как для математического маятника. Минимум l будет при $h=\sqrt{\frac{J_0}{M}}$, именно:

$$l=2\sqrt{\frac{J_0}{M}}=2h.$$

Предположим, что h имеет некоторую произвольную величину, которой соответствует известная величина l, и затем перенесем ось вращения параллельно самой себе в центр колебаний O', т. е.

$$h'=l-h=\frac{J_0}{Mh};$$

тогда получается новый центр качаний в такой точке, которая удалена от O' на расстояние:

$$l'=h'+\frac{J_0}{Mh}=l-h+h=l, \tag{486}$$

т. е. новый центр качаний совпадает с O, и приведенная длина маятника та же, что прежде. На этой теореме основывается значение о б о р о т н о г о м а я т н и к а.

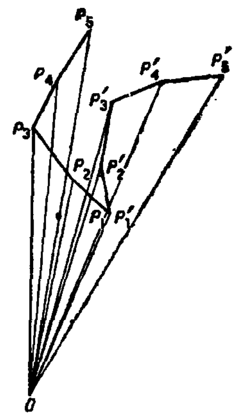
§ 145. Теперь мы перейдем к исследованию движения твердого тела около н е п о д в и ж н о й т о ч к и и познакомимся с совершенно новым родом явлений. Именно, тогда как вращение тела около неизменной прямой, как мы видели, оказывается аналогичным с движением точки по дуге круга (физический и математический маятник), движение около неизменной точки существенно сложнее, чем движение точки по поверхности шара, ибо здесь три степени свободы, тогда как там только две.

Поэтому мы сначала составим себе некоторое представление о природе такого вращения с чисто кинематической стороны.

Из § 101 мы знаем, что вращение около неподвижной точки O в каждый момент есть вращение около прямой, проходящей через O. Но эта прямая не одна и та же все время; она непрерывно меняет свое направление как в пространстсе, так и в теле, т. е. изменяются как углы, которые мгновенная ось вращения составляет с осями координат, так и те материальные точки, которые расположены на оси вращения.

Чтобы это было совершенно наглядно, можно сначала вообразить себе, что вращение происходит в течение конечного, но чрезвычайно короткого времени около временной оси вращения и затем сразу переходит на очень близкую соседнюю ось вращения.

Тогда направления, которые последовательно играли роль осей вращения, образуют семейство прямых в пространстве: OP_1, OP_2, OP_3,... (черт. 39). С другой стороны, те материальные прямые, около которых последовательно происходили вращения, образуют семейство прямых в теле: OP_1', OP_2', OP_3',...; их можно представить себе зафиксированными таким образом, что их точки пересечения P_1', P_2', P_3',... с поверхностью тела отмечены какими-либо значками. Если эти оба семейства прямых, неподвижных в пространстве и неизменно связанных с телом, известны, то получается непосредственно характер движения: это есть вращение тела, и вместе с тем также неизменно с телом связанных прямых OP', около той прямой, которая в данный момент является общей для обоих семейств, следовательно, в момент, соответствующий чертежу, около прямой OP_1; переход к ближайшей оси вращения всегда происходит как раз тогда, когда ближайшая прямая семейства OP' совпадает с ближайшей прямой семейства OP, — на чертеже, когда OP_2' совпадает с OP_2. Таким образом последовательно произойдут вращения около осей вращения OP_1, OP_2, OP_3,..., как только материальные прямые OP_1', OP_2', OP_3',... примут их направления.



Черт. 39.

Если, наконец, перейти от конечных малых промежутков времени и углов к бесконечно малым величинам их, то оба семейства прямых превратятся в два соприкасающихся по прямой конуса OP и OP', из которых первый неподвижен в пространстве, а второй — в теле, и движение тела около неподвижной точки O оказывается тождественным с катанием конуса, неизменно связанного с телом, по неподвижному в пространстве конусу, причем под „катанием" подразумевается движение, при котором прямая соприкосновения обоих конусов неподвижна.

Если один из конусов превратится в прямую, то и другой также станет прямой. Тогда вращение происходит около оси, неподвижной как в пространстве, так и относительно тела.

§ 146. Динамические законы движения содержатся всецело в трех уравнениях (463);

$$\Sigma[\mathbf{r}\, m\ddot{\mathbf{r}}] = \mathbf{N}, \qquad (487)$$

где $\mathbf{N}$ обозначает момент вращения движущих сил относительно неподвижной точки O.

Силы связи, которые делают эту точку неподвижной, не могут дать никакого вращательного момента около нее. Трудность задачи заключается единственно в том, чтобы свести сумму Σ к трем независимым переменным, от которых зависит положение тела, и к первым и вторым производным от них по времени. Мы решим эту задачу здесь непосредственно.

Что касается прежде всего положения тела, то мы введем, чтобы не потерять выгод симметрии, так же как в § 100, неподвижную относительно тела, отмеченную штрихом систему координат, при помощи уравнений (329). Тогда между девятью косинусами направления α_1 до γ_3 имеются шесть соотношений, которые, в случае надобности, могут быть выражены формулами (331), (332), (334); но кроме этих возможны также еще другие полезные формулировки. Важнейшие из них получаются, если уравнения (329) разрешить относительно x', y', z' и затем отождествить с теми уравнениями, которые получаются из (329), если в них просто взаимно заместить неотмеченные величины отмеченными штрихом и вместе с тем буквы α, β, γ — цифрами 1, 2, 3.

Тогда получится:

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2}{D}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2}{D}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{D} \text{ и т. д.,} \tag{488}$$

где D означает детерминант:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{489}$$

Этот детерминант имеет очень простое значение. Если три уравнения (488) возвести в квадрат и сложить, то получится по (331):

$$D^2 = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 + (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)^2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 =$$
$$= (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3)^2 = 1.$$

Следовательно,

$$D = \pm 1. \tag{490}$$

Вопрос о знаке определяется из рассмотрения какого-нибудь частного случая, ибо так как косинусы направления меняются непрерывно, то и D непрерывно и, по (490), постоянно. Если бы теперь ось x' и ось y' совпали с осью x и с осью y ($\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 1$), то совпала бы также ось z' с осью z, так как уже в § 100 предполагалось, что отмеченная штрихом система координат правая. Поэтому тогда детерминант (489):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{491}$$

и сохраняет это значение при всех положениях неподвижной по отношению к телу системы координат.

Вместе с этим уравнения (488) примут вид:

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \tag{492}$$

и аналогично для каждого из других девяти косинусов направления.

Закон образования этих девяти соотношений непосредственно ясен, если обратить внимание на то, что в правую часть уравнения входят только те буквы и цифры, которые отсутствуют слева.

Так, например:

$$\gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \text{ и т. д.}$$

§ 147. Обратимся теперь к скорости тела. И здесь мы используем выведенный во второй главе результат, что самое общее бесконечно малое смещение тела представляется компонентами вращения относительно трех координатных осей. Мы удержим также и обозначения § 100, но здесь под ξ, η, ζ мы будем подразумевать не самые бесконечно малые углы вращения, но конечные отношения этих углов к элементу времени dt, которые мы назовем соответственно компонентами угловых скоростей относительно осей координат x, y, z. Тогда вместо уравнений (336) мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \beta_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt} = -\left(\gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right),\\ \eta &= \gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt} = -\left(\alpha_1\frac{d\gamma_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\gamma_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right),\\ \zeta &= \alpha_1\frac{d\beta_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\beta_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\beta_3}{dt} = -\left(\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \tag{493}$$

между тем как вместо уравнений (335) войдут аналогичные:

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\alpha_3\frac{d\alpha_3}{dt}=0 \text{ и т. д.} \tag{494}$$

Отношения компонентов ξ, η, ζ определяют опять направления оси вращения, а абсолютная величина вектора — величину угловой скорости, т. е. отношение безконечно малого угла вращения к элементу времени dt:

$$\omega = +\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}. \tag{495}$$

Как для всякого вектора, так и для угловой скорости компонент ее в каком-нибудь произвольном направлении получается умножением трех величин ξ, η, ζ в отдельности на соответственные косинусы направления и сложением полученных произведений. По этому закону образования получаются также компоненты угловой скорости в тех направлениях, которые принимают в рассматриваемый момент отмеченные штрихом оси координат:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta &= \xi',\\ \alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta &= \eta',\\ \alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3\zeta &= \zeta'; \end{aligned}\right\} \tag{496}$$

или, как непосредственно отсюда следует:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1\xi'+\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta',\\ \eta &= \beta_1\xi'+\beta_2\eta'+\beta_3\zeta',\\ \zeta &= \gamma_1\xi'+\gamma_2\eta'+\gamma_3\zeta'. \end{aligned}\right\} \tag{497}$$

Обозначения опять выбраны так, что неотмеченные величины ξ, η, ζ соответствуют буквам α, β, γ, отмеченные — цифрам 1, 2, 3.

Обыкновенно называют ξ', η', ζ' компонентами скорости вращения тела относительно отмеченных штрихом осей координат. Но это название нужно употреблять осмотрительно, так как тело по отношению к отмеченной штрихом системе координат неподвижно и поэтому по отношению к ней все время угловая скорость равна нулю.

Введение компонентов угловой скорости доставляет то важное преимущество, что производные по времени всех девяти косинусов направления $\alpha_1,\ldots,\gamma_3$ удобно и симметрично можно выразить через эти три величины. Так, например, по (496) и (492);

$$\alpha_1\eta'-\alpha_2\xi'=\alpha_1\,(\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta)-\alpha_2\,(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)=$$
$$=\gamma_3\eta-\beta_3\zeta \tag{497a}$$

и, далее, по (493):

$$=\gamma_3\left(\gamma_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\gamma_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+\beta_3\left(\beta_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_2\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\alpha_3}{dt}\right)=$$
$$=-\alpha_1\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}+\alpha_3\alpha_2\frac{d\alpha_2}{dt}+(1-\alpha_3^2)\frac{d\alpha_3}{dt}=\frac{d\alpha_3}{dt}.$$

Поэтому

$$\frac{d\alpha_3}{dt}=\alpha_1\eta'-\alpha_2\xi', \tag{498}$$

и соответственно восемь других отношений, для которых характеристикой закона образования служит то, что в правую часть уравнения входят только те буквы, которые также стоят в левой части (здесь α), между тем как, наоборот, цифры (1 и 2) здесь как раз те, которые отсутствуют слева.

Этим девяти соотношениям по (497а) соответствуют другие девять, вида:

$$\frac{d\alpha_3}{dt}=\gamma_3\eta-\beta_3\zeta \text{ и т. д.}, \tag{499}$$

в которых буквы α, β, γ и цифры 1, 2, 3 обменялись своими ролями.

Глубокая аналогия между отмеченными штрихом и неотмеченными компонетами угловой скорости выражается также в соотношениях, при помощи которых ξ', η', ζ' выражаются через производные от α,β,γ. Они получаются комбинацией (496), (492) и (499):

$$\xi'=(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)\,\xi+(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)\,\eta+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\,\zeta=$$
$$=\alpha_2(\beta_3\zeta-\gamma_3\eta)+\beta_2(\gamma_3\xi-\alpha_3\zeta)+\gamma_2(\alpha_3\eta-\beta_3\xi);$$
$$\xi'=-\left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}+\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}\right)=\alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_3\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt} \tag{500}$$

и т. д., совершенно аналогично с (493).

Также трем уравнениям (494) соответствуют три следующие:

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_1}{dt}=0 \text{ и т. д.} \tag{501}$$

§ 148. Теперь мы подготовились к тому, чтобы произвести приведение трех уравнений движения (487) прямо к независимым переменным. Напишем первое из уравнений в форме:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\mathrm{N}_x, \tag{502}$$

и введем вместо неотмеченных координат x, y, z массы m отмеченные x', y', z', так как эти последние не зависят от времени. Это совершается при помощи уравнений (329) и их производных:

$$\frac{dx}{dt}=x'\frac{d\alpha_1}{dt}+y'\frac{d\alpha_2}{dt}+z'\frac{d\alpha_3}{dt}+\ldots \tag{503}$$

и дает для суммы в (502) некоторое число членов, в которых косинусы направления и их производные можно вынести за знак суммы Σ. Под знаком суммы останутся только шесть величин $\Sigma mx'^2$, $\Sigma my'^2$, $\Sigma mz'^2$, $\Sigma mx'y'$, $\Sigma my'z'$, $\Sigma mz'x'$, которые не зависят от времени.

Если мы теперь приведем в совпадение отмеченные оси координат с главными осями инерции тела по отношению к неподвижной точке O, то по (479) последние три суммы исчезают, и от (502) остается:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\beta_1\frac{d\gamma_1}{dt}-\gamma_1\frac{d\beta_1}{dt}\right)\Sigma mx'^2+\left(\beta_2\frac{d\gamma_2}{dt}-\gamma_2\frac{d\beta_2}{dt}\right)\Sigma my'^2+\right.$$
$$\left.+\left(\beta_3\frac{d\gamma_3}{dt}-\gamma_3\frac{d\beta_3}{dt}\right)\Sigma mz'^2\right\}=\mathrm{N}_x,$$

или, вводя ξ', η', ζ' по соотношению (498) и принимая во внимание (492), получаем:

$$\frac{d}{dt}\left\{(\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta')\Sigma mx'^2+(\alpha_3\zeta'+\alpha_1\xi')\Sigma my'^2+\right.$$
$$\left.+(\alpha_1\xi'+\alpha_2\eta')\Sigma mz'^2\right\}=\mathrm{N}_x.$$

Наконец, если мы опять, как § 142, обозначим главные моменты инерции через P, Q, R и положим соответственно отнесенные к главным осям инерции компоненты угловой скорости;

$$\xi'=p,\quad \eta'=q,\quad \zeta'=r, \tag{504}$$

тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1pP+\alpha_2qQ+\alpha_3rR\right)=\mathrm{N}_x,$$

также:

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1pP+\beta_2qQ+\beta_3rR\right)=\mathrm{N}_y \tag{505}$$

и

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1pP+\gamma_2qQ+\gamma_3rR\right)=\mathrm{N}_z$$

Эти три уравнения, конечно, очень просты и наглядной структуры, но имеют то неудобство что содержат девять косинусов направления. Можно от них освободиться, если эти уравнения последовательно умножить на косинусы направления и сложить, т. е. если уравнения движения отнести вместо неотмеченных координатных осей к отмеченным. Тогда после умножения на α_1, β_1, γ_1 и последующего сложения оказывается, что если принять во внимание (501), (500) и (504), то

$$\left.\begin{aligned} &P\frac{dp}{dt}-(Q-R)\,qr=\mathbf{N}_x', \\ \text{также}\quad &Q\frac{dq}{dt}-(R-P)\,rp=\mathbf{N}_y', \\ \text{и}\quad &R\frac{dr}{dt}-(P-Q)\,pq=\mathbf{N}_z'. \end{aligned}\right\} \tag{506}$$

Это так называемые эйлеровы уравнения движения. Характерен для них второй член в левой части, которым они отличаются от уравнения для вращения около неизменной оси и который обусловливает отклонения оси вращения.

§ 149. Теперь мы займемся некоторыми частными применениями, прежде всего случаем, когда тело сначала покоилось, т. е. когда начальные значения p_0, q_0, r_0 все равны нулю. Спрашивается: около какой прямой начнет оно вращаться под действием заданных сил?

Так как отношения направлений осей вращения относительно главных осей инерции вообще представляются отношениями $p:q:r$ и так как для достаточно малого времени t:

$$p=p_0+\left(\frac{dp}{dt}\right)_0\cdot t=\left(\frac{dp}{dt}\right)_0\cdot t,$$

то при начале движения:

$$p:q:r=\left(\frac{dp}{dt}\right)_0:\left(\frac{dq}{dt}\right)_0:\left(\frac{dr}{dt}\right)_0,$$

и по (506):

$$p:q:r=\frac{\mathbf{N}_x'}{P}:\frac{\mathbf{N}_y'}{Q}:\frac{\mathbf{N}_z'}{R}. \tag{507}$$

Этими уравнениями дается полный ответ на вопрос, который остался без ответа в конце § 131, относительно рода движения, которое будет совершать покоящееся вначале свободное твердое тело под действием пары сил. Там мы видели, что центр тяжести тела остается в покое, здесь мы узнаем направление начальной оси вращения. Она тогда только совпадает с осью пары сил $\mathbf{N}$, когда или три главных момента инерции равны или ось пары есть главная ось инерции. Тогда оба другие компонента $\mathbf{N}$ равны нулю.

Вообще связь между направлением оси пары сил и направлением начальной оси вращения удобно представить при помощи эллипсоида инерции. Именно, направление оси вращения по отношению к этому эллипсоиду есть сопряженный плоскости пары диаметр, т. е. тот диаметр эллипсоида, касательная плоскость в конце которого параллельна плоскости пары, ибо касательная плоскость к эллипсоиду (478) в конце диаметра $p:q:r$ имеет нормаль в направлении $Pp:Qq:Rr$, а это по (507) есть также направление оси пары сил **N**.

§ 150. Разберем, далее, частный случай, когда, при заданном начальном состоянии, момент вращения **N** внешних сил равен нулю, как, например, когда тело подперто в своем центре тяжести или когда вообще тяжесть не действует. Тогда уравнения Эйлера упрощаются:

$$P\frac{dp}{dt}-(Q-P)\,qr=0,\ldots \tag{507a}$$

Спросим, прежде всего, об условии для того, чтобы вращение происходило постоянно около одной и той же оси. Тогда эта ось лежит, как мы уже видели в § 145, как в пространстве, так и в теле неподвижно, и вращение происходит по принципу живой силы с постоянной скоростью, т. е. p, q, r постоянны, а из (507a) следует:

$$(Q-R)\,qr=0,$$

и два других уравнения. Эти три уравнения требуют или чтобы $P=Q=R$, т. е. чтобы центральный эллипсоид был шар, или, для произвольного тела, чтобы два компонента из p, q, r были нулями, т. е. чтобы вращение совершалось относительно главной оси инерции, — результат, который в точности совпадает с заключением, выведенным в § 142 более простым путем.

В общем случае, при произвольном начальном состоянии, три уравнения (507a) допускают два простых интегрирования. Именно, умножив на p, q, r и затем сложив, по интеграции, имеем:

$$Pp^2+Qq^2+Rr^2=c^2, \tag{508}$$

а умножив на Pp, Qq, Rr, тем же путем получаем:

$$P^2p^2+Q^2q^2+R^2r^2=c'^2. \tag{509}$$

Легко убедиться, что (508) выражает принцип живой силы, а (509) — принцип площадей, ибо по первому принципу живая сила вращения, как единственного рода движения, постоянна, т. е. по (470) и (480):

$$K=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}(P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2)\,\omega^2=$$

$$=\frac{1}{2}(Pp^2+Qq^2+Rr^2)=\frac{c^2}{2}, \tag{510}$$

и по принципу площадей уравнения (505) по интегрировании дают:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 pP + \alpha_2 qQ + \alpha_3 rR &= c'_x, \\ \beta_1 pP + \beta_2 qQ + \beta_3 rR &= c'_y, \\ \gamma_1 pP + \gamma_2 qQ + \gamma_3 rR &= c'_z. \end{aligned}\right\} \tag{511}$$

Постоянные c'_x, c'_y, c'_z, по § 137, суть компоненты результирующего момента количества движения относительно точки O, их отношения $c'_x : c'_y : c'_z$ дают неизменное в пространстве направление оси результирующего момента, перпендикулярного к неизменяемой плоскости, и сумма их квадратов есть по (511) и (509):

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = c_x'^2 + c_y'^2 + c_z'^2 = c'^2. \tag{512}$$

Чтобы определить угловые скорости вращения p, q, r в функции времени t, нужна кроме (508) и (509) еще третья интеграция, и таковую можно произвести, не нарушая симметрии, если из приведенных двух уравнений, в связи с тем, что $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$, вычислить значения p^2, q^2, r^2:

$$p^2 = \frac{QR\omega^2 - c^2(Q+R) + c'^2}{(P-Q)(P-R)}. \tag{513}$$

Если умножить теперь уравнения движения (507a) последовательно на $\frac{p}{P}$, $\frac{q}{Q}$, $\frac{r}{R}$ и сложить, то получится:

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} =$$

$$= \left(\frac{Q-R}{P} + \frac{R-P}{Q} + \frac{P-Q}{R}\right) pqr \tag{514}$$

и после подстановки значений p, q, r, из (513):

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\sqrt{(A-\omega^2)(B-\omega^2)(C-\omega^2)}, \tag{515}$$

где для сокращения положено:

$$A = \left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right)c^2 - \frac{1}{QR}c'^2,$$

$$B = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{P}\right)c^2 - \frac{1}{RP}c'^2,$$

$$C = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q}\right)c^2 - \frac{1}{PQ}c'^2.$$

Поэтому ω^2 есть эллиптическая функция от t, следовательно периодическая, а также по (513) и компонента угловой скорости вращения относительно главных осей инерции.

§ 151. Это несколько запутанное движение получает при геометрическом его представлении, по Пуансо, особую наглядность, именно если иметь в виду вместо самого тела его эллипсоид инерции, который неизменно связан с телом и поэтому вращается вместе с ним.

Пусть в какой-либо момент ось вращения есть OP', причем P'—точка ее пересечения с эллипсоидом, так называемый „полюс вращения“, с координатами x', y', z'. Тогда по (478):

$$Px'^2 + Qy'^2 + Rz'^2 = 1, \tag{516}$$

и косинусы направления оси вращения, отнесенные к осям эллипсоида, суть:

$$x' : y' : z' = p : q : r, \text{ причем } p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2.$$

Если мы положим, следовательно, длину полудиаметра $OP' = \varrho$, то выходит:

$$x' = \frac{p}{\omega} \cdot \varrho, \quad y' = \frac{q}{\omega} \cdot \varrho, \quad z' = \frac{r}{\omega} \cdot \varrho, \tag{517}$$

и из (516):

$$Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 = \frac{\omega^2}{\varrho^2}.$$

Это дает, если принять во внимание (508):

$$\omega = c\varrho, \tag{518}$$

т. е. угловая скорость вращения всегда пропорциональна длине полудиаметра, который представляет временную ось вращения.

Далее, по (478) нормаль эллипсоида в полюсе P' вращения имеет отношения для направлений:

$$Px' : Qy' : Rz' = Pp : Qq : Rr.$$

Самые косинусы направления поэтому, ввиду (509):

$$\frac{Pp}{c'}, \ \frac{Qq}{c'}, \ \frac{Rr}{c'}. \tag{519}$$

Нормаль эллипсоида в P' изменяет, таким образом, по отношению к главным осям эллипсоида вообще свое направление. Но если умножить эти три косинуса направления на a_1, a_2, a_3, то получается по (511) постоянная, т. е. угол, который эта нормаль составляет с неотмеченной, постоянной в пространстве осью x-ов, неизменен; то же самое имеет место относительно оси y-ов и z-ов. Поэтому направление нормали в пространстве остается постоянным,—именно по § 137 это не что иное, как нормаль к неизменяемой плоскости, а последняя параллельна посему тангенциальной плоскости к эллипсоиду в P'.

Более того. Тангенциальная плоскость к эллипсоиду инерции в полюсе P' вращения остается не только себе параллельной, но она остается также неизменной в пространстве.

Если вычислить ее расстояние h от точки вращения O (черт. 40), то для него получится:

$$h = \varrho \cdot \cos \delta,$$

причем δ означает угол между диаметром OP' и нормалью к эллипсоиду в P'. Следовательно, по (517) и (519):

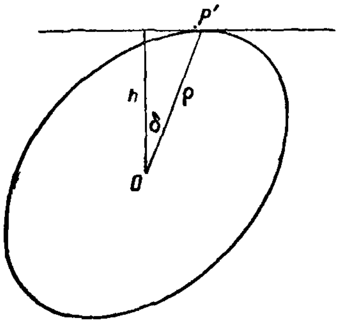
$$\cos \delta = \frac{p}{\omega} \cdot \frac{Pp}{c'} + \frac{q}{\omega} \cdot \frac{Qq}{c'} + \frac{r}{\omega} \cdot \frac{Rr}{c'},$$

и, принимая во внимание (508) и (518), находим:

$$h = \varrho \cdot \frac{c^2}{\omega c'} = \frac{c}{c'}, \tag{520}$$

т. е. постоянно.

Из этих положений в общем получается следующая простая картина движения: эллипсоид инерции вращается около своего неподвижного центра так, что он катится по определенной неподвижной тангенциальной плоскости (§ 145), причем угловая скорость вращения всегда пропорциональна расстоянию точки соприкосновения, т. е. полюса вращения, от центра.



Черт. 40.

При этом опять ясно, что ось вращения только тогда сохраняет постоянное направление, когда она совпадает с главной осью инерции, ибо во всяком другом случае характер кривизны поверхности эллипсоида заставляет ось вращения OP' переместиться всегда в новое положение.

Мы займемся еще несколько рассмотрением вопроса о положении оси вращения в данном случае в связи с соображениями в § 145. Очень наглядно представляются все соотношения, если мы вообразим, что неподвижная (неизменяемая) плоскость покрыта слегка сажей, так что след от соприкосновения ее с эллипсоидом отпечатывается на последнем. Тогда черные точки P' на эллипсоиде определят неизменно связанный с телом конус, белые же точки (свободные от сажи) P на неизменяемой плоскости дадут неподвижный в пространстве конус осей вращения.

Рассмотрим сначала точки P' на эллипсоиде; они образуют так называемую „полодию". Ее координаты удовлетворяют кроме уравнения (516), вследствие (517), (509), (518) и (520), также уравнению:

$$P^2x'^2 + Q^2y'^2 + R^2z'^2 = \frac{1}{h^2}. \tag{521}$$

Комбинируя оба уравнения, получаем:

$$P(Ph^2 - 1)\,x'^2 + Q(Qh^2 - 1)\,y'^2 + R(Rh^2 - 1)\,z'^2 = 0. \tag{522}$$

Это есть уравнение неизменно связанного с телом конуса осей вращения, который на эллипсоиде инерции дает полодию. Это есть конус второго порядка, следовательно, полодия есть замкнутая кривая простого вида. Вид конуса зависит для определенного тела от одного единственного параметра — от величины h^2, которая по (520), (508) и (509) имеет значение:

$$h^2 = \frac{Pp^2 + Qq^2 + Rr^2}{P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2}. \tag{523}$$

Чтобы фиксировать наши представления, выберем обозначения главных моментов инерции так:

$$P \geqq Q \geqq R, \tag{524}$$

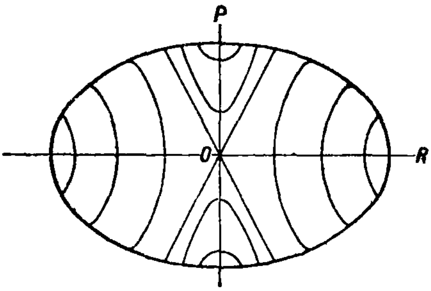
так что P соответствует самой короткой оси, а R — самой длинной оси эллипсоида инерции.

Тогда

$$Ph^2 \geqq 1,\ Qh^2 \gtreqqless 1,\ Rh^2 < 1, \tag{525}$$

как легко видеть из (523).

Следовательно, можно различать три случая, смотря по тому, больше ли h^2, меньше или равновелико $\frac{1}{Q}$.



Черт. 41.

Соответственные формы полодии изображены на черт. 41, где нужно представлять себе оси среднего главного момента инерции Q перпендикулярными к плоскости чертежа. Полодия состоит из двух отдельных частей, симметрично по обеим сторонам центра O. Смотря по тому, больше или меньше единицы Qh^2, полодия окружает R-ось, или P-ось, т. е. ось наименьшего или ось наибольшего момента инерции; но она никогда не окружает оси среднего главного момента инерции.

В предельном случае, при $Qh^2 = 1$, конус превращается (522) в две плоскости:

$$\frac{z'}{x'} = \pm\sqrt{\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)}}, \tag{526}$$

и полодия состоит из двух пересекающихся в конечных точках средней главной оси инерции эллипсов (на черт. 41 обозначенных прямыми); это суть точки соприкосновения эллипсоида с теми тангенциальными плоскостями, которые отстоят от центра на расстоянии $h = \frac{1}{\sqrt{Q}}$.

Изображенным геометрическим соотношениям соответствуют особенности физических процессов. При движении эллипсоида полюс вращения P' перемещается по определяемой начальным состоянием полодии, но, понятно, не в смысле обыкновенного движения материальной точки по кривой. То, что движется, представляет не матерню точки P', — ибо она как раз покоится в момент вращения,—но, так сказать, ее свойство — представлять полюс вращения. Мы здесь имеем опять хороший пример для разъяснения, как в § 1, общего понятия о движении.

Если полюс P' вначале находился на конце одной из главных осей инерции, то он там и останется на все время, соответственно уже неоднократно установленному свойству этих осей как свободных осей вращения. Но мы узнаем здесь более существенную разницу в поведении оси наибольшего и наименьшего моментов инерции по сравнению с поведением средней оси. Именно, если полюс P' совпадает не точно, а только приблизительно с концом оси P или оси R, то он останется все время вблизи этих точек, так как полодия окружает оси, как это видно на черт. 41; но если он хотя немного уклонится от конца оси Q, то полодия, по которой он движется, уведет его на большое расстояние от начального положения. Поэтому оси наибольшего и наименьшего главных моментов инерции называются „устойчивыми“ осями вращения, ось среднего главного момента инерции—„неустойчивой“.

Кривая, описываемая полюсом вращения P' на неизменяемой плоскости и определяющая неподвижный в пространстве конус осей вращения, называется „герполодией“; она более сложной формы и вообще не замкнута.

§ 152. Займемся опять рассмотрением общего случая произвольно заданных внешних сил и зададим себе вопрос не только об угловых скоростях вращения p, q, r, но также о положении тела в момент времени t. Часто бывает желательным это положение выразить не через девять косинусов направления, а непосредственно через три независимых друг от друга угла, причем, конечно, приходится пожертвовать симметрией формул.

Этого можно достигнуть следующим образом.

Прежде всего определим направление (положительной) оси z'-ов двумя полярными углами ϑ (между 0 и π) и φ (между 0 и 2π), как в § 32.

Тогда точка на оси z'-ов на расстоянии r от начала имеет координаты:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi = r \cdot \alpha_3,$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi = r \cdot \beta_3,$$
$$z = r \cos\vartheta \qquad = r \cdot \gamma_3;$$

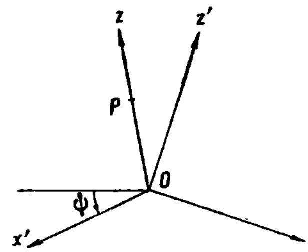
следовательно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= \sin\vartheta \cos\varphi, \\ \beta_3 &= \sin\vartheta \sin\varphi, \\ \gamma_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{527}$$

После того как ось z' таким образом установлена, можно отмеченную штрихом систему координат еще повернуть около этой оси. Поэтому мы определим направление (положительной) оси x' углом ψ (между 0 и 2π), который она составляет с неизменным направлением в плоскости $(x'\ y')$, именно с проекцией (положительной) оси z-ов на эту плоскость; угол считается в смысле положительного вращения около оси z' (черт. 42).

Тогда точка P на оси z на расстоянии r от начала имеет координаты:

$$
\begin{aligned}
x' &= r \sin \vartheta \cos \psi = r \cdot \gamma_1, \\
y' &= -r \sin \vartheta \sin \psi = r \cdot \gamma_2, \\
z' &= r \cos \vartheta \qquad\quad = r \cdot \gamma_3;
\end{aligned}
$$



Черт. 42.

следовательно:

$$
\left.
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sin \vartheta \cos \psi, \\
\gamma_2 &= -\sin \vartheta \sin \psi.
\end{aligned}
\right\} \tag{528}
$$

Этим определяются однозначно также остальные четыре косинуса направления, ибо из соотношений (492)

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \quad \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3$$

выходит:

$$\alpha_1(1 - \gamma_3^2) = -\gamma_1\gamma_3\ \alpha_3 - \gamma_2\beta_3,$$

или

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\
\beta_2 &= -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta,
\end{aligned}
\right.
$$

также

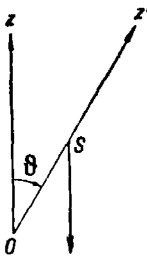
$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\
\beta_1 &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta.
\end{aligned}
\right\} \tag{529}
$$

Теперь также возможно выразить компоненты угловой скорости вращения ξ, η, ζ и соответственно ζ', η', ζ' непосредственно через независимые углы φ, ϑ, ψ и через их производные по t; например, при помощи соотношений (493) соответственно (500) получается:

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\vartheta}{dt}, \\
\eta &= \sin \vartheta \sin \varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\vartheta}{dt}, \\
\zeta &= \cos \vartheta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt},
\end{aligned}
\right\} \tag{530}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\xi' &= \sin\vartheta\cos\psi\frac{d\varphi}{dt} - \sin\psi\frac{d\vartheta}{dt},\\
\eta' &= -\sin\vartheta\sin\psi\frac{d\varphi}{dt} - \cos\psi\frac{d\vartheta}{dt},\\
\zeta' &= \cos\vartheta\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}\right\}\tag{531}$$

Каждым из выведенных в § 147 общих соотношений можно воспользоваться для проверки и испытания этих выражений.



Черт. 43.

Введение трех независимых углов φ, ϑ, ψ позволяет также непосредственно применить лагранжевы уравнения второго рода (405) или гамильтоновы канонические уравнения движения (412); однако они вследствие отсутствия симметрии имеют мало наглядный вид.

§ 153. Наконец, разберем еще пример, в котором действует заданная внешняя сила, и выберем для этого случай простого симметричного гироскопа, который подперт в какой-нибудь точке O его оси симметрии. Ось симметрии, на которой также лежит центр тяжести S, выберем за ось z'-ов (черт. 43), а за ось z-ов—вертикаль вверх.

Если обозначим затем через h расстояние центра тяжести S от неизменной точки O и через M массу всего гироскопа, то внешняя сила:

$$\mathbf{F}_x = 0,\ \mathbf{F}_y = 0,\ \mathbf{F}_z = -Mg,$$

точка ее приложения:

$$x_0 = h\alpha_3,\ y_0 = h\beta_3,\ z_0 = h\gamma_3,\tag{532}$$

и ее момент вращения:

$$\mathbf{N}_x = -Mgh\beta_3,\ \mathbf{N}_y = Mgh\alpha_3,\ \mathbf{N}_z = 0,$$

или

$$\mathbf{N}_x' = Mgh\gamma_2,\ \mathbf{N}_y' = -Mgh\gamma_1,\ \mathbf{N}_z' = 0.$$

Уравнения движения упрощаются значительно вследствие того, что по условиям симметрии гироскопа $P = Q$. Для полного их объинтегрирования нам нужно три независимых соотношения; выберем в качестве таковых простейшие, именно третье из уравнений (505), которое по интеграции дает:

$$(\gamma_1 p + \gamma_2 q)P + \gamma_3 rR = \text{const};\tag{533}$$

далее, третье из уравнений (506), которое дает:

$$r = \text{const};\tag{534}$$

наконец, принцип живой силы, который здесь по (510) и (357) имеет вид:

$$\frac{1}{2}(Pp^2 + Qq^2 + Rr^2) + Mgz_0 = \text{const},$$

или, по (532) и (534):

$$P(p^2+q^2)+2Mgh\gamma_3=\text{const}. \tag{535}$$

К этому присоединяются еще общие соотношения, которые связывают между собою величины p, q, r, и γ_1, γ_2, γ_3.

Пусть вначале гироскоп вращался только около своей оси симметрии, т. е. для $t=0$ пусть $p=0$, $q=0$, $r=r_0$, и пусть эта последняя образовала угол ϑ_0 с вертикалью, острый или тупой— смотря по тому, лежит ли центр тяжести S выше или ниже точки вращения O. Тогда три уравнения движения будут:

$$(\gamma_1 p+\gamma_2 q)P+\cos\vartheta\cdot r_0 R=\cos\vartheta_0\cdot r_0 R,$$

$$r=r_0,$$

$$P(p^2+q^2)+2Mgh\cos\vartheta=2Mgh\cos\vartheta_0.$$

Теперь мы приведем все переменные к трем независимым углам ϑ, φ, ψ, заменяя γ_1 и γ_2 через (528) и p, q, r — через (504) и (531). Тогда получится.

$$P\sin^2\vartheta\dot\varphi=Rr_0(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta); \tag{536}$$

$$\cos\vartheta\dot\varphi+\dot\psi=r_0; \tag{537}$$

$$P(\sin^2\vartheta\dot\varphi^2+\dot\vartheta^2)=2Mgh(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta). \tag{538}$$

Из первого и третьего уравнений можно вычислить ϑ и φ, затем из второго—ψ. Таким образом исключение $\dot\varphi$ из (536) и (538) дает:

$$\dot\vartheta^2=\frac{\cos\vartheta_0-\cos\vartheta}{P}\cdot\left(2Mgh-\frac{R^2r_0^2(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)}{P\sin^2\vartheta}\right), \tag{539}$$

и отсюда определится t как эллиптический интеграл от ϑ.

Мы проследим вычисление дальше для интересного для физики случая, когда угловая скорость вращения r_0 очень велика, или, точнее говоря, когда:

$$r_0^2 \gg \frac{MgPh}{R^2}, \tag{540}$$

ибо соотиошение величин только тогда и имеет физический смысл, когда оно независимо от выбора единиц для измерения.

Теперь положим:

$$\vartheta=\vartheta_0+\vartheta'. \tag{541}$$

Таким образом прежде всего следует, что ϑ' положительно, ибо по (538) $\vartheta_0<\vartheta$, т. е. ось симметрии гироскопа вначале направлена всего круче.

Поэтому, далее, на правой стороие (539) также второй множитель положителен, т. е.

$$\frac{R^2r_0^2(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)}{P\sin^2\vartheta}<2Mgh,$$

или, принимая во внимание (540):

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta \ll 1;$$

следовательно, ϑ' мал, и приблизительно:

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = \vartheta' \cdot \sin\vartheta_0.$$

Вставив это в (539), получаем:

$$\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 = \frac{\vartheta' \sin\vartheta_0}{P}\left(2Mgh - \frac{R^2 r_0^2 \vartheta'}{P \sin\vartheta_0}\right).$$

Интегрируя и принимая во внимание начальное состояние, имеем:

$$\vartheta' = \frac{2Mgh \sin\vartheta_0}{R^2 r_0^2} \sin^2\left(\frac{Rr_0 t}{2P}\right). \tag{542}$$

Таким образом угол наклона ϑ оси гироскопа по отношению к вертикали колеблется периодически между своим наименьшим значением ϑ_0 и между немногим отличающимся от него, с периодом, который не зависит от ускорения тяжести. Чем больше угловая скорость вращения гироскопа, тем быстрее и тем меньше эти колебания.

Если, далее, мы обратим внимание на угол φ, который образует проходящая через ось гироскопа вертикальиая плоскость с неизменной в пространстве вертикальной плоскостью, то для него получается из (536), (541) и (542):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2Mgh}{Rr_0} \sin^2 \frac{Rr_0 t}{2P}.$$

Интегрируя, имеем:

$$\varphi = \frac{Mgh}{Rr_0}\left(t - \frac{P}{Rr_0} \sin\frac{Rr_0 t}{P}\right) + \varphi_0, \tag{543}$$

т. е. ось гироскопа совершает „прецессию", причем его вертикальная плоскость непрестанно вращается в определенном смысле, с угловой скоростью, которая периодически изменяется между нулем и максимальным значеннем, независимо от угла наклона оси гироскопа к вертикали. И здесь колебания происходят тем быстрее, но тем меньше, чем больше скорость вращения, между тем как средняя угловая скорость с возрастающей скоростью вращения убывает.

Направление прецессионного движения соответствует знаку r_0. Если, следовательио, $r_0 > 0$, то центр тяжести S на черт. 43 движется назад. Независимо от выбора направления осей можно охарактеризовать связь между направлением тяжести, положением центра тяжести, направлением вращения гироскопа и направлением прецессионного движения простым положением, что при прецессионном движении положительное направление оси гироскопа приближается к положительному иаправлеиию оси момента вращения, производимого тяжестью. Последняя идет на черт. 43 спереди назад.

Эта связь, конечно, остается, если вместо тяжести Mg приложена какая-нибудь другая сила F, например удар в некоторой точке S оси гироскопа.

Наглядное представление содержания последних теорем доставляет наблюдение обыкновенного игрушечного детского волчка, который приведен в быстрое вращение и поставлен на острие на пол так, что его ось образует произвольный угол с вертикалью. Так как вследствие трения скорость вращения мало-помалу замедляется, то возникают постепенно соответствующие различным значением r_0 движения. Сначала кажется, что ось стоит почти неподвижно, между тем как на самом деле она совершает очень быстрые дрожания с малой амплитудой как по направлению к вертикали, так и перпендикулярно к ней; затем она начинает прецессировать очень медленно в указанном выше смысле. Вместе с тем начинает заметно колебаться ее наклон к вертикали, сначала мало и незаметно, затем сильнее и все более бурно, между тем как одновременно прецессионное движение делается все быстрее, пока, наконец, ось волчка не наклонится так сильно, что какая-нибудь точка его периферии коснется пола.

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАЖНЕЙШИХ ТЕОРЕМ.

	Стр.
Амплитуда	18
Астрономическая единица массы	36
Вектор	23
Векториальное произведение	112
Векториальное сложение	31
Вес	15
Внешние силы	145
Внешняя работа	150
Внутренние силы	145
Возможное перемещение	123
Вращение как вектор	129
Географическая широта	75
Геодезическая линия	87
Герполодия	192
Гироскоп	194
Главные оси инерции	177
Главный момент инерции	177
Градиент	48
Грамм	14
Движение планет	61
Движущая сила	77
Девиационный момент	176
Действие и противодействие	36
Дин	15
Диференциальное уравнение Гамильтона – Якоби	160
Живая сила	57
Закон инерции	12
Законы Кеплера	64
Замкнутая система	150
Зенит	74
Импульс	170
Импульсивные координаты	170
Инерция	14
Интеграл действия	159
Канонические уравнения движения	158
Кинематика	7
Кинетическая энергия	59
Кинетический потенциал	152
Количество движения	158
Компоненты	23
Консервативные силы	60
Кориолисова сила	72
Косинусы направления	23
Лагранжевы уравнения первого рода	147
Лагранжевы уравнения второго рода	155
Лапласово уравнение	52
Логарифмический декремент	22
Логарифмический потенциал	55
Масса	14
Математический маятник	82
Материальная точка	5
Маятник	82
Маятник Фуко	94
Мгновенные силы	169
Момент вращения относительно прямой	116
Момент вращения относительно точки	117
Момент инерции	174
Момент количества движения	171
Момент пары сил	109
Момент силы относительно прямой	112
Момент силы относительно точки	112
Начальное состояние	16
Неизменяемая плоскость	171
Ньютонова аксиома, первая;	12
ньютонова аксиома, вторая;	13
ньютонова аксиома, третья;	36
ньютонов потенциал	44
Обобщенные компоненты силы	154
Оборотный маятник	180
Однородное тело	38
Ось вращения	109
Ось пары сил	109
Относительное движение	65
Падение потенциала	49
Пара вращений	132
Пара сил	105
Перманентная ось вращения	176
Плечо пары сил	106
Плотность	38

Стр.

Поверхность уровня 48
Подъемная сила 146
Полодия 190
Полюс вращения 189
Полярные координаты на плоскости 60
Полярные координаты в пространстве 39
Поступательное движение 133
Потенциал 44
Потенциал тяготения 44
Потенциальная функция 51
Потенциальная энергия 59
Правая система координат . . . 23
Преобразование Галилея 68
Прецессия 196
Приведенная длина маятника . . . 179
Принцип Архимеда 146
Принцип возможной работы . . . 123
Принцип Гамильтона 151
Принцип д'Аламбера 79
Принцип действия и противодействия 36
Принцип живой силы 58
Принцип наименьшего действия . 151
Принцип относительности 69
Принцип площадей 61
Принцип сохранения количеств движения 167
Принцип сохранения энергии . . 59

Работа 57
Рычаг 116

Самопотенциал 136
Свобода движения 78
Свободная ось вращения 176
Секториальная скорость 171
Сила 13

Стр.

Силовая линия 50
Силы связей 77
Скаляр 45
Скалярное произведение 57
Скорость 8
Совершенная система . . . 150
Состояние 16,30
Сопротивление инерции 79
Статика 97
Статический момент 112
Степень свободы 75
Сферический маятник 88

Тангенциальная сила 32
Таутохрона 86
Твердое тело 97
Точка воздействия 43
Точка приложения 98
Тяготение 36

Уравнение Пуассона 52
Ускорение 10
Устойчивая ось вращения 192

Фаза 18
Физический маятник 178
Формула размерности 9

Центр инерции 112
Центр качаний 179
Центр тяжести 102
Центральная ось системы сил . . 115
Центральные силы 17,35
Центробежная сила 72
Центростремительная сила 33
Цепная линия 141

Частота 18

Эллипсоид инерции 177
Энергия 59
Эрг 57

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловия к первому и четвертому немецкому изданиям 3
В в е д е н и е 5

Ч А С Т Ь   П Е Р В А Я

Механика материальной точки

Г л а в а   I. Движение по прямой линии 7
Г л а в а   II. Движение в пространстве 22
Г л а в а   III. Центральные силы. Потенциал 35
Г л а в а   IV. Интегрирование уравнений движения 56
Г л а в а   V. Относительное движение 65
Г л а в а   VI. Наложенные связи 76

Ч А С Т Ь   В Т О Р А Я

Механика системы материальных точек

Г л а в а   I. Статика твердого тела 97
Г л а в а   II. Статика произвольной системы точек 117
Г л а в а   III. Динамика произвольной системы точек 147
Г л а в а   IV. Динамика твердого тела 173
Указатель определений и важнейших теорем 198