МАКС ПЛАНК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНЕТИЗМА

Перевод со второго
немецкого издания
под редакцией
проф. Н. П. КАСТЕРИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933 ЛЕНИНГРАД

Т 45-5-2

Редакционную работу по этой книге провел П. Н. Успенский. Издание оформила С. Л. Дыман. Корректуру держал С. Ф. Морошкин. Наблюдал за выпуском А. В. Малов. Рукопись сдана в производство 9/X 1932 г., листы подписаны к печати 27/IV—1933 г., книга вышла в свет в мае 1933 г. в количестве 5000 экз. на бумаге формата $62 \times 94^1/_{16}$. Печатных знаков в книге 58 000 листов в книге $11^1/_2$. Заказ тип. № 3527, 1 ТТИ 643. Уполномоченный Главлита Б-29598.

Книга отпечатана в Москве, в 5-й типографии

„Пролетарское слово“ треста „Полиграфкнига“, Москва, Каланч. тупик, д. 3/5.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

План книги, а также выбор и расположение излагаемого материала остались в новом издании неизмененными. При этом я вполне признаю односторонность моего изложения, поскольку в нем не везде использованы простейшие и для практики наиудобнейшие обозначения и формулировки. Но я не думаю, чтобы вследствие этого моей книге можно было сделать серьезный упрек, ибо при многообразии явлений, рассматриваемых в теории электричества и магнетизма, требования практики в различных отделах совершенно различны. Это обнаруживается хотя бы в том, что в электростатике более удобна иная система единиц, чем в электродинамике. По моему мнению, при систематическом введении в предмет вопрос об удобстве обозначений должен отступить перед требованием, чтобы все устанавливаемые понятия и положения имели одну единственную общую основу. Раз только связь их однажды ясно обоснована, то затем достаточно сравнительно ничтожного усилия, чтобы при разрешении какой-либо специальной задачи вводить каждый раз именно те упрощения, которые подходят к данному случаю наиболее, как, например, отбрасывание множителя 4π или множителя c, или замена линий индукции силовыми линиями и т. д. Способа обозначений, который был бы самым удобным для всех случаев, не существует. С этим обстоятельством надо примириться, ибо это лежит в природе вещей. С другой стороны, отказ от этого позволяет разработать значительно основательнее образование понятий, чем это было бы возможно, если бы исходить из единичных фактов, а в особенности же — провести резкое разделение между тем, что является определением, и тем, что представляет собой результат опыта. Чем яснее выявляется произвольность, лежащая в основе какого-либо определения, тем глубже вкореняется понимание его значения.

Если усвоить указанную точку зрения, то не может быть никакого сомнения в том, что для изложения имеется налицо только единственное твердое и верное исходное положение именно, понятие и принцип энергии. Ведь, в конечном счете, к понятию об энергии сводятся все электрические и магнитные системы единиц, и на основе принципа сохранения энергии без труда выводятся все законы этой области науки. Это послужило для меня основанием к тому, чтобы выдвинуть на первый план понятия о плотности энергии и о потоке энергии, Эти понятия делают возможным не только исчерпывающее исследование различных систем единиц, но приводят также и к удобному выводу максвелловых уравнений электромагнитного поля. Из этого возможно вывести все остальное, специализируя подходящим образом условия.

Само собою понятно, что при новой переработке я с искренней благодарностью использовал многочисленные советы и критические указания.

Вимпфен,
Апрель 1928 г. *Автор.*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый здесь третий том моего „Введения в теоретическую физику" содержит изложение электрических и магнитных явлений. Понятно, что и здесь при непрерывно возрастающем фактическом материале не может быть никаких претензий на полноту представленного содержания. Это обязывало уделить особенно значительное внимание наглядному и последовательному связыванию тех идей, из которых складывается система электромагнитиых теорем, чтобы читатель без труда мог указать каждому не рассмотренному здесь случаю его место в ряду разнообразных, описанных в книге, явлений и при надобности обратиться к специальной литературе.

Необходимые для этого единство и законченность изложения могут быть достигнуты только при преимущественно дедуктивной форме изложения. Поэтому я избрал ее и здесь, как и в механике. В то же время введенные здесь понятия и положения я постоянно стремился развивать возможно нагляднее, обращаясь с этой целью к специальным, взятым из повседневного опыта, примерам. Изложение введения в электродинамику всюду исходит из представления о материи, непрерывно распределенной в пространстве, что также соответствует методу, примененному мною в механике. Сообразно с этим в основу изложения положена так называемая классическая, основанная Максвеллом и завершенная Герцем, теория, понятно, с указанием характеристических границ ее применимости.

Так как между всеми положениями физики нет ни одного, которое было бы так универсально и в то же время так наглядно, как принцип энергии, то я и на этот раз выдвигаю его на первый план. Благодаря этому достигается и то преимущество, что введение различных электрических и магнитных систем единиц, которые все коренятся в принципе энергии, происходит само собою. В интересах наглядности лежит также подчеркивание формальной аналогии между электрическим и магнитным векторами, хотя эта аналогия, скорее, внешнего характера. Так же как аналогия между поступательным и вращательным движением, она обязана своим существованием только тому, в известном смысле чисто случайному, обстоятельству, что наше пространство имеет как раз три измерения. Однако как, с одной стороны, несомненно, что эта аналогия сыграла выдающуюся роль в историческом развитии максвелловой теории, так, с другой стороны, конечно, нельзя не признать, что она еще и теперь чрезвычайно удобна для „введения в теорию“ и, во всяком случае, дает полезные мнемонические правила. С этим связано также то обстоятельство, что я здесь везде применяю гауссову систему единиц, которая выделяется среди применяемых в теоретической литературе рациональных систем единиц своим близким родством с практической системой. Сравнительное сопоставление выраженных в различных системах единиц числовых значений некоторых величин, так же как и алфавитный указатель всех определений и важнейших положений, находится в конце книги.

Существенных сокращений в изложении можно было достигнуть при помощи ссылок на известные теоремы механики, выводы которых содержатся в двух первых уже вышедших томах. Так, ссылка *1*, (132) означает уравнение (132) в „Общей механике“; ссылка *2*, § 15 означает § 15 „Механики деформируемых тел“. Тот, кто до некоторой степени освоился с принципами механики, конечно, в подобных указаниях не нуждается.

Берлин-Грунсвальд,
Март 1922.

Автор.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие ко второму изданию 5

Предисловие к первому изданию 6

Введение 9

Часть первая

Общие уравнения электромагнитного поля в покоящихся телах

Глава I. Напряжение электрического и магнитного поля 11

Глава II. Законы электромагнитного поля 14

Часть вторая

Статические и стационарные состояния

Глава I. Электростатическое поле в отсутствии контактной разности потенциалов 29

Глава II. Электростатическое поле в случае контактной разности потенциалов 53

Глава III. Магнитостатическое поле 70

Глава IV. Пондеромоторные действия в статическом поле 81

Глава V. Стационарное электромагнитное поле 95

Глава VI. Молекулярные и пондеромоторные действия в стационарном поле 118

Часть третья

Квазистационарные и динамические процессы

Глава I. Квазистационарные процессы при замкнутых токах 131

Глава II. Квазистационарные процессы при незамкнутых токах 143

Глава III. Динамические процессы в покоящихся телах 150

Глава IV. Динамические процессы в движущихся телах. Границы электродинамики Максвелла-Герца 169

Сравнительная таблица выраженных в различных системах единиц числовых значений некоторых величин 181

Указатель определений и важнейших положений 182

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНЕТИЗМА

§ 1. Механическим явлениям, или движениям материальных точек противостоит как нечто единое, ясно от них отграниченное целое, вся совокупность электрических и магнитных, или электродинамических, явлений. Этими двумя областями исчерпывается вся физика, так как все остальные ее части—акустика, оптика и теплота—могут быть вполне сведены на механику и электродинамику. Окончательное же объединение этих двух последних классов явлений, что представило бы собой увенчание здания теоретической физики, еще приходится предоставить будущему.

Однако уже теперь налицо целый ряд мостов, ведущих из первой области во вторую. Первым и важнейшим из них является принцип сохранения энергии (*1*, § 49), который поэтому мы здесь и выдвигаем на первый план. Понятно, однако, что этот принцип сам по себе еще не дает достаточного руководства, с помощью которого можно было бы построить определенную теорию электричества. Даже более: различные теории, основанные все на принципе сохранения энергии, с течением времени пришли к противоречащим результатам. Для излагаемой в этой книге теории, основанной Максвеллом, характерно проведение второй основной идеи: принципа близкодействия. По этому принципу в природе не существует действия на расстоянии, т. е. не может случиться так, чтобы действие какого-либо местного события тотчас же проявлялось в каком-нибудь более или менее отдаленном месте, минуя тела межлежащие. Напротив, всякое действие распространяется в пространстве от точки к точке и при том с конечной скоростью. Отсюда следует, что все происходящее в каком-либо определенном месте и в определенный момент вполне и однозначно определяется теми событиями, которые происходили в непосредственной близости от этого места в непосредственно предшествовавший момент времени.

Так как в этом положении заключается существенное ограничение имеющихся налицо возможностей для способа действия физических причин, то принципы дальнодействия и близкодействия нельзя рассматривать как принципы равнозначные. Принцип действия на расстоянии надо признать более общим, а принцип близкодействия — более специальным. В связи с этим и стоит то обстоятельство, что в электродинамике существовало несколько различных теорий, основанных на принципе действия на расстоянии, и только одна единственная теория, основанная на принципе близкодействия, именно, максвелловская. То, что эта теория в конце концов взяла перевес над всеми другими, произошло, по существу, не от большей ее „верности", но, главным образом, от ее большей определенности и простоты. Ведь по этой теории при *вычислении процессов* в каком-либо месте нет, в сущности, никакой надобности заботиться о том, что происходит в каком-либо другом, находящемся на конечном расстоянии, месте, — достаточно ограничиться рассмотрением происходящего в непосредственной близости. Между тем, по принципу действия на расстоянии в подобном случае, строго говоря, необходимо исследовать всю вселенную, чтобы убедиться, что нигде не существует ничего такого, что могло бы заметно повлиять на предвычисляемое явление.

И здесь снова оправдывается положение, что не та теория наилучшая, которая наиболее обща. Напротив, чем специальнее теория, чем более определенные ответы дает она на все касающиеся ее вопросы, тем лучше она разрешает свою задачу. Последняя заключается в том, чтобы дать однозначное, чуждое всякой неопределенности, предсказание ожидаемых явлений, — пункт, который при теоретических построениях, к сожалению, иногда упускают из виду. Чем менее неопределенных постоянных содержит теория, тем более она производительна.

Если, таким образом, мы принуждены при последующем развитии теории с самого начала принципиально отказаться от всяких представлений о действии на расстоянии, то этим все же не исключается, что впоследствии иногда окажется удобным и целесообразным формулировать окончательный вывод сообразно с представлениями о непосредственном действии на расстоянии. В этом нет никакого противоречия с принципом близкодействия. Ведь мы говорим, например, о восходе и заходе солнца, ничуть не утверждая этим, что солнце обращается вокруг земли. Точно так же мы будем впоследствии говорить, что электрически заряженное тело притягивает или отталкивает другое заряженное тело, или что гальванический ток отклоняет компасную стрелку, соединяя с этими выражениями тот смысл, что эти видимые проявления представляют простой конечный результат многочисленных сложных процессов, разыгрывающихся в пространстве между рассматриваемыми телами.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПОКОЯЩИХСЯ ТЕЛАХ

ГЛАВА I

НАПРЯЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 2. Если сильно потереть кошачьим мехом палочку из сургуча или эбонита, то она получает способность притягивать к себе небольшие легкие тела, например обрезки бумаги или бузинные шарики. Чтобы истолковать этот опытный факт научно, мы не станем представлять себе, что натертая палочка воздействует на тело с притягивательной силой, но будем исходить из точки зрения близкодействия и скажем: натертая палочка, прежде всего, образует в окружающем ее воздухе *электрическое поле*, которое характеризуется в каждой его точке определенными местными его свойствами. Это электрическое поле, со своей стороны, оказывает действие на всякое находящееся в нем тело, и действие это зависит исключительно от свойств поля как раз в том месте, где находится тело. При этом совершенно не нужно заботиться о том, как возникло электрическое поле или каково оно в других местах. Электрические поля можно создавать самыми разнообразными способами во всех веществах, и в жидких и в твердых телах. Каждое вещество поэтому следует рассматривать как „диэлектрик". Разумеется, в различных веществах электрические поля обнаруживают различные свойства. В особенности, это относится к их изменчивости во времени.

Главным вопросом является для нас теперь следующий: какой величиной можно охарактеризовать в определенном месте электрическое поле, каким бы способом и в каком бы веществе оно ни было образовано. Чтобы ответить на этот вопрос, введем в соответствующее место поля небольшое, соответственным образом подготовленное, „пробное тело", например подвешенный на тонкой шелковинке бузинный шарик, предварительно приведенный в соприкосновение с натертой эбонитовой палочкой или же с употребленным для натирания палочки кошачьим мехом, и измерим механическую силу, которая на него в поле действует. Если мы исследуем таким способом все поле, производя во всех его точках означенное измерение, то такое поле мы будем рассматривать как вполне известное и определенное. Если сила окажется во всех точках поля одинаковой, то такое поле мы назовем „однородным". Но, вообще, сила может варьировать от точки к точке как по величине, так и по направлению. Сила изображается вектором. Поэтому электрическое поле в каждой его точке мы будем характеризовать вектором **E**, который назовем „напряжением электрического поля", или просто „электрическим напряжением".

При этом надо принять в соображение, что измеряемая механическая сила зависит не только от свойств поля, но также и от свойств употребленного для измерения пробного шарика, и притом не только по величине, но и по направлению. Именно, сила тем больше, чем сильнее была натерта эбонитовая палочка, служившая для подготовки шарика. Далее, она действует в двух противоположных направлениях, смотря по тому, был ли пробный шарик в соприкосновении с палочкой или с мехом.

Условились (целесообразнее было бы обратное) определять как направление **E** то, по которому действует сила в том случае, когда пробный шарик был в соприкосновении с кошачьим мехом.

Не так просто определение абсолютной величины $|\mathbf{E}|$ электрического напряжения. Чтобы получить ее, прибегнем к понятию об энергии поля. Что электрическое поле содержит некоторый запас энергии, следует из того обстоятельства, что поле может привести в движение тело. Действительно, живая сила движения по закону сохранения энергии может быть получена только за счет электрической энергии, равно как движения упругого тела происходят за счет энергии деформации. Отношение электрической энергии, содержащейся в бесконечно малой части объема, занятого полем, к объему этой части называется „плотностью электрической энергии". Эта величина выражается в механических единицах, она положительна, если принять энергию электрически нейтрального поля за нуль. На ней мы основываем определение абсолютной величины электрического напряжения, полагая плотность электрической энергии пропорциональной квадрату напряжения электрического поля $\mathbf{E}^2$, а также пропорциональной положительному множителю, зависящему только от свойств среды (например воздух), ε, „диэлектрической постоянной", определение которой мы дадим ниже (ср. далее, § 7).

Более целесообразно было бы положить плотность электрической энергии равной $\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2$. Так и поступают в так называемой рациональной системе единиц, которой, в особенности, пользуются в теоретической физике. Историческое развитие учения об электричестве привело к употреблению практической системы единиц. В этой системе плотность электрической энергии выражается следующей величиной:

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2 \tag{1}$$

и так как эта система единиц обыкновенно употребляется теперь как в экспериментальной, так и в технической физике, то и мы будем ею здесь пользоваться. Особые ее преимущества, между прочим, выяснятся только впоследствии (в конце § 41).

Величиной и направлением электрического напряжения **E** определяются компоненты этого вектора $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$, $\mathbf{E}_z$ относительно правой системы взаимно перпендикулярных осей координат. Согласно этому полная энергия любого электрического поля в однородном теле с диэлектрической постоянной ε равна:

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\int d\tau\,(\mathbf{E}_x^2+\mathbf{E}_y^2+\mathbf{E}_z^2), \tag{2}$$

где $d\tau$ обозначает элемент объема тела.

§ 3. Аналогично электрическому полю, хотя и отлично от него по своей природе, магнитное поле. Магнитное поле также может быть создано самыми различными способами. Мы займемся прежде всего лишь вопросом о характерных свойствах какого-либо имеющегося магнитного поля, а не о том способе, с помощью которого оно создано. Для исследования поля в качестве пробного тела мы употребим маленькую, свободно вращающуюся вокруг своего центра тяжести, магнитную стрелку. Действующий со стороны поля на магнитную стрелку механический момент вращения дает нам средство определить „напряжение магнитного поля" **H**. Если этот момент вращения везде одинаков, то мы называем магнитное поле „однородным"; в общем случае за направление вектора **H** мы принимаем то направление, в котором устанавливается пробная стрелка, а именно, считая от ее южного конца к северному. Поэтому, например, в поле на поверхности земли, в так называемом „земном магнитном поле", направление магнитного напряжения приблизительно совпадает с географическим меридианом. Абсолютная величина напряжения магнитного поля **H** не может быть определена из величины механического момента вращения пробной стрелки, так как эта величина зависит от свойств стрелки. Поэтому мы определим ее при помощи энергии поля, полагая „плотность магнитной энергии" равной:

$$\frac{\mu}{8\pi}\mathbf{H}^2, \tag{3}$$

где μ — „магнитная проницаемость вещества" и означает некоторый положительный коэфициент пропорциональности, смысл которого будет выяснен позже.

Величиною и направлением магнитного поля определяются компоненты этого вектора $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z$ относительно правой системы взаимно перпендикулярных осей координат. Полная энергия любого магнитного поля в теле с постоянной магнитной проницаемостью μ отсюда равна:

$$\frac{\mu}{8\pi}\int d\tau\,(\mathbf{H}_x^2+\mathbf{H}_y^2+\mathbf{H}_z^2). \tag{4}$$

Вообще, поле может производить как электрические, так и магнитные действия. Такое поле мы называем поэтому электромагнитным. В каждой точке поля электромагнитное состояние характеризуется обоими векторами **E** и **H**, которые совершенно независимы друг от друга; ими определяется и полная энергия электромагнитного поля как сумма выражений (2) и (4). В этом смысле вся вселенная представляет, в целом, одно электромагнитное поле, и все электрические и магнитные явления суть не что иное, как изменения этого поля. Общая задача теории сводится, в конечном счете, к тому, чтобы предвычислить изменения со временем электрического и магнитного напряжения во всех точках пространства, если заданы значения их для какого-нибудь одного момента времени. Так как два вектора **E** и **H** определяются шестью независимыми друг от друга величинами, то для вычисления их изменений со временем необходимы шесть уравнений. Эти шесть уравнений, составляющих ядро максвелловой теории, мы установим в следующей главе.

ГЛАВА II

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 4. Понятно, что диференциальные уравнения электромагнитного поля нельзя получить чисто дедуктивным путем. Однако они получаются сравнительно просто, если исходить из требования, которое можно этим уравнениям поставить наперед: что они должны, во-первых, удовлетворять принципу сохранения энергии и, во-вторых, принципу близкодействия. Итак, рассмотрим любую часть однородного, все время находящегося в покое, тела, в котором образовано электромагнитное поле. По принципу сохранения энергии электромагнитная энергия этой части тела может измениться только потому, что или происходит обмен энергией с внешними телами, или внутри ее энергия превращается в другие формы. Мы рассмотрим сначала первый процесс, т. е. приток энергии из окружающего пространства или отдачу ему энергии. По принципу близкодействия электромагнитная энергия ни в каком случае не может перескочить прямо из какого-либо места окружающего пространства в какое-либо место внутри рассматриваемого поля,—она может проникать снаружи внутрь только через поверхность рассматриваемой части пространства непрерывным сплошным потоком. Обмен энергией с окружающим пространством регулируется таким образом потоком энергии, аналогичным потоку жидкости, через поверхность этой части пространства, и этот электромагнитный поток вполне определяется в каждой его точке местным электромагнитным состоянием, т. е. значениями **E** и **H** в данном месте. Количество энергии, протекающей в элемент времени dt через элемент поверхности $d\sigma$ по нормали ν в направлении этой нормали, пропорционально $d\sigma$ и dt; его мы положим поэтому равным:

$$S_\nu \cdot d\sigma \cdot dt \qquad (5)$$

и назовем конечную величину S_ν слагающей потока энергии по направлению ν. Можно легко обнаружить, что S есть вектор. Именно, применим принцип сохранения энергии к бесконечно-малому тетраэдру, боковые грани которого параллельны трем координатным плоскостям, и притом внутренние их нормали совпадают с положительными направлениями осей координат, четвертая грань в качестве внутренней нормали имеет направление ν (совершенно так же, как в § 17). Полное количество энергии, втекающей в элемент времени dt извне внутрь тетраэдра через его поверхность, по (5) равно:

$$(S_x d\sigma_x + S_y d\sigma_y + S_z d\sigma_z + S d_\nu \sigma) dt, \tag{6}$$

причем площади граней:

$$d\sigma_x = -d\sigma \cdot \cos(\nu,x),\ d\sigma_y = -d\sigma \cdot \cos(\nu,y),\ d\sigma_z = -d\sigma \cdot \cos(\nu,z), \tag{7}$$

Выражение (6) представляет на основании принципа сохранения энергии происшедшее за время dt изменение всей содержащейся в тетраэдре энергии. Но, так как эта последняя, во всяком случае, пропорциональна объему тетраэдра, который по своим пространственным размерам является величиной бесконечно малой третьего порядка, между тем как каждый член суммы (6)—величина бесконечно малая второго порядка, то отсюда следует, что сумма (6) равна нулю или на основании (7):

$$S_\nu = S_x \cos(\nu,x) + S_y \cos(\nu,y) + S_z \cos(\nu,z), \tag{8}$$

т. е. по *1*, (40) величина S_ν представляет компонент в направлении ν вектора S, который определяется своими компонентами по осям координат S_x, S_y, S_z. Этот вектор S, вектор электромагнитного потока энергии, определяется в каждой точке поля по теории близкодействия значениями векторов **E** и **H** в данном месте.

§ 5. О зависимости потока энергии S от напряжений поля **E** и **H** можно заключить на основании опыта. Оказывается, эта зависимость выражается очень простым законом, который мы и поставим во главу вывода уравнений электромагнитного поля как обобщение всех сделанных до сих пор в этом отношении опытов, именно, законом Пойнтинга, который утверждает, что поток энергии S пропорционален векторному произведению (*1*, § 87) **E** и **H**, т. е.

$$S = \frac{C}{4\pi}[\mathbf{E}\,\mathbf{H}], \tag{9}$$

или, что означает то же самое,

$$S_x = \frac{C}{4\pi}(E_y H_z - E_z H_y),\quad S_y = \frac{C}{4\pi}(E_z H_x - E_x H_z), \tag{10}$$

где C — некоторый коэфициент пропорциональности, величина которого зависит от выбора единиц для **E** и **H**.

Из этих соотношений, как мы увидим дальше, простым путем и без привлечения каких-либо особых опытных фактов выводятся определенные количественные закономерности для всех электрических и магнитных процессов. Этим с избытком покрывается тот недостаток, что, как можно заметить, соотношения эти не обладают никаким непосредственно наглядным содержанием.

§ 6. На основании принятых нами до сих пор положений мы теперь в состоянии окончательно условиться относительно единиц, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Припомним прежде всего в применении к какому-нибудь определенному электромагнитному полю в какой-нибудь определенной среде установленные нами определения. В каждом месте этого поля мы имеем определенную плотность электрической энергии (1), определенную плотность магнитной энергии (3) и определенный поток энергии (9). Хотя эти три величины и не измеряются непосредственно, они представляют собой, однако, совершенно точно определяемые величины, которые выражаются в механической мере. Они содержат кроме обоих переменных напряжений поля **E** и **H** еще три коэфициента пропорциональности ε, μ и C, в отношении величины которых мы ничем не связаны. Отсюда следует, что две из этих трех констант мы в праве задать совершенно произвольно, тогда как три остальные величины, именно, оба напряжения поля **E** и **H** и третья константа, вполне определяются тремя выражениями для энергии. Это определение может быть высказано для каждой отдельной среды совершенно независимо от других сред.

Что же касается различных сред, то оказалось целесообразным м н о ж и т е л ь   п р о п о р ц и о н а л ь н о с т и C в   в ы р а ж е н и и   д л я   п о т о к а   э н е р г и и   п р и н я т ь   о д и н а к о в ы м   д л я   в с е х   с р е д. Целесообразность этого условия тотчас же становится ясной из простоты той формы, которую принимают пограничные условия на границе раздела двух различных сред. Именно, рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$ на подобной границе раздела, расположив ось z по направлению одной из нормалей к $d\sigma$. Тогда из (5) по закону сохранения энергии следует, что слагающая по z потока энергии $\mathbf{S}_z$ должна иметь одинаковую величину по обе стороны границы раздела. Иначе энергия накапливалась бы в элементе поверхности $d\sigma$ и там уничтожалась бы или создавалась бы из ничего. Таким образом $\mathbf{S}_z = \mathbf{S}'_z$, или по (10), так как на основании принятого нами условия $C = C'$:

$$\mathbf{E}_x \mathbf{H}_y - \mathbf{E}_y \mathbf{H}_x = \mathbf{E}_x' \mathbf{H}_y' - \mathbf{E}_y' \mathbf{H}_x',$$

если штрихом мы отметим соответственные величины во второй среде.

Но, так как компоненты электрического и магнитного напряжения в каждой среде совершенно друг от друга не зависят, то эти уравнения могут быть удовлетворены общим образом только в том случае, если всегда:

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{E}'_x;\ \mathbf{E}_y = \mathbf{E}_y';\ \mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x',\ \mathbf{H}_y = \mathbf{H}_y',$$

или, короче, обозначая через τ направление какой-либо из касательных к поверхности раздела:

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E}_\tau', \ \mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_\tau'. \tag{11}$$

Отсюда общие пограничные условия на поверхности раздела двух различных сред можно выразить таким одним положением, что *тангенциальные составляющие электрического и магнитного напряжений непрерывны*.

§ 7. На основании только что полученного результата напряжения электрического и магнитного полей определены во всех различных средах, если это имеет место для какой-либо одной среды. Действительно, по величине тангенциальной составляющей определяется также величина нормальной составляющей, так как направление результирующего напряжения уже вполне установлено вначале. Нам теперь остается еще, чтобы завершить определения, задать по произволу две из констант ε, μ, C для какой-нибудь одной среды, произвольно избранной в качестве исходной. В качестве таковой мы изберем так называемую абсолютную пустоту, или „чистый эфир". Правда, в природе абсолютной пустоты не существует, ибо даже та среда, которая всего ближе к ней подходит—межзвездное небесное пространство—наверное всюду содержит следы весомой материи. Однако различного рода опыты совершенно твердо установили один из важнейших фактов электродинамики, что электромагнитные свойства пространства, бедного материей, стремятся ко вполне определенному, поддающемуся точному учету, пределу, не зависящему от качеств остающейся в пространстве материи, по мере того как пространство все более и более разрежается. Среду с такими предельными свойствами мы и будем называть абсолютной пустотой.

Обозначим диэлектрическую постоянную пустоты через ε_0, ее магнитную проницаемость через μ_0; постоянная C может остаться без индекса, так как она для всех сред одинакова. Из этих констант две можно фиксировать совершенно произвольно. Положим их поэтому равными 1. Тем самым будет фиксирована и третья постоянная. Смотря по тому, какие именно две константы из трех мы примем за единицы, налицо три возможности осуществить выбор. Эти три возможности ведут к трем классическим электромагнитным системам единиц.

1. *В гауссовой системе единиц принято* $\varepsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$. Тем самым C приобретает некоторое определенное значение c, измерение которого мы умеем производить различными методами. Постоянная c не является отвлеченным числом. Ее размерность получается, если принять во внимание, что, так как в гауссовой системе ε_0 и μ_0—отвлеченные числа, электрическое и магнитное напряжения по (1) и (3) оба имеют размерность:

$$\sqrt{\text{плотность энергии}} = \left[m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}\right]. \tag{12}$$

Так как размерность потока энергии S по (5) равна $[mt^{-1}]$, то размерность константы c на основании (9) или (10) будет: $[lt^{-1}]$. Таким образом c имеет размерность скорости, т. е., если мы станем изменять единицы массы, длины и времени, то числовая величина c изменяется таким образом, что она представляет всегда ту же самую скорость. Эта определенная скорость называется „критической скоростью". С числовым значением критической скорости мы познакомимся впоследствии при рассмотрении первого по времени метода ее измерения (§ 60).

2. В максвелловой электростатической системе единиц принято $\varepsilon'_0=1$ и $C'=1$. В этом случае размерность электрического напряжения дается попрежнему (12), напротив, для магнитного напряжения, размерность которого мы должны теперь вычислять из формулы (9) для потока энергии, получается выражение

$$\left[m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-2}\right], \tag{13}$$

так что магнитная проницаемость μ'_0 на основании (3) получает размерность: $[l^{-2} t^2]$, т. е. обратную размерности квадрата скорости.

3. В максвелловой электромагнитной системе единиц положено $\mu_0''=1$ и $C''=1$. Благодаря этому электрическое и магнитное напряжения обмениваются своими ролями: электрическое напряжение получает размерность (13), тогда как для магнитного напряжения размерность выражается (12), а диэлектрическая постоянная ε_0'' становится величиной, по своей размерности обратной квадрату скорости.

Чтобы найти количественные соотношения между числовыми значениями какой-нибудь определенной физической величины в различных системах единиц, представим себе какое-нибудь определенное электромагнитное поле в пустоте и сопоставим выражения для величины энергии в трех системах единиц, отмечая их для различия попрежнему значками, поставленными вверху: для электрической энергии по (1) имеем:

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \varepsilon_0' \mathbf{E}'^2 = \varepsilon_0'' \mathbf{E}''^2, \tag{14a}$$

для магнитной энергии по (3)

$$\mu_0 \mathbf{H}^2 = \mu_0' \mathbf{H}'^2 = \mu_0'' \mathbf{H}''^2. \tag{14b}$$

для потока энергии по (9):

$$C\mathbf{E}\mathbf{H} = C'\mathbf{E}'\mathbf{H}' = C''\mathbf{E}''\mathbf{H}''. \tag{14c}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что направления трех векторов **S**, **E**, **H** одинаковы в трех системах единиц

Если в этих шести уравнениях вставить для отдельных констант их значения, указанные выше, то путем простого вычисления получаются следующие соотношения:

$$\varepsilon_0'' = \frac{1}{c^2},\ \ \mu_0' = \frac{1}{c^2}, \tag{15}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}''}{c},\ \ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}'}{c} = \mathbf{H}'', \tag{16}$$

т. е. все различия между числовыми значениями в разных системах единиц, как оказывается, сводятся к критической скорости c. Уравнения (16) годны не только для пустоты, но, на основании пограничных условий (11), для всякой произвольной среды. Отсюда следует, если применить уравнения (14) к какой-либо среде:

$$\varepsilon = \varepsilon' = c^2\,\varepsilon'',\ \ \mu = c^2\mu' = \mu''. \tag{17}$$

Так как все понятия, с которыми оперирует электродинамика, выводятся из понятий напряжеиий полей и констант ε и μ, то уравнения (16) и (17) представляют собой универсальный ключ к пониманию связи между различными системами единиц.

Кроме трех, рассмотренных здесь, классических абсолютных систем единиц, существует еще практическая система единиц, которая тесно примыкает к максвелловой электромагнитной системе и отличается от нее только тем, что по практическим соображениям увеличивает или уменьшает в десять в некоторой степени раз числовые значения величин. В соответствующем месте мы к этому вернемся (§ 61).

В теоретической физике теперь большею частью употребляют лоренцову рациональную систему единиц, которая характеризуется тем, что в выражениях (1), (3) и (9) для плотности энергии и для потока энергии, как уже было упомянуто выше, в знаменателе опускают множитель 4π, тогда как диэлектрическую постоянную и магнитную проницаемость определяют совершенно так же, как и в гауссовой системе. Таким образом, если мы отметим величины, выраженные в лоренцовой рациональной системе единиц, чертой сверху, то будем иметь:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon},\ \ \ \mu = \bar{\mu}, \tag{18}$$

и отсюда, если мы, как в (14), сопоставим выражения для энергии в гауссовой и лоренцовой системах:

$$\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{4\pi}} = \bar{\mathbf{E}},\ \ \ \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi}} = \bar{\mathbf{H}}, \tag{19}$$

тогда как постоянная $\bar{C}$ в выражении для потока энергии будет равна критической скорости c. Сводка соотношений между важнейшими электрическими и магнитными величинами, выраженными в различных системах единиц, находится в конце этой книги. В тексте, чтобы избежать недоразумений, мы будем употреблять исключительно гауссову систему единиц.

То обстоятельство, что какая-либо определенная физическая величина имеет в двух различных системах единиц не только различные числовые значения, но даже и различные размерности, часто истолковывалось как некоторое логическое противоречие, требующее себе объяснения, и, между прочим, подало повод к постановке вопроса об „истинной" размерности физических величин. На основании только что развитых соображений нет никакой особой необходимости доказывать, что подобный вопрос имеет не более смысла, чем вопрос об „истинном" названии какого-либо предмета (ср. *1*, § 28).

§ 8. Мы перейдем к рассмотрению второй из двух названных в § 4 причин изменения содержащейся в теле электромагнитной энергии: к превращению ее в другие формы энергии. И здесь все имеющиеся в нашем распоряжении опытные данные можно объединить в одном простом положении: в каждой среде электрическая энергия везде непрерывно переходит в тепловую, причем количество перешедшей в тепло энергии в течение элемента времени dt в каком-либо элементе объема $d\tau$ среды пропорционально существующей в данном месте в данный момент плотности электрической энергии:

$$dt \cdot d\tau \cdot \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathbf{E}^2 \cdot \mathrm{const}.$$

Эту энергию называют „джаулевым теплом". Процесс перехода можно до некоторой степени наглядно пояснить его аналогией с переходом упругой энергии в теплоту, происходящим в деформированном не совершенно упругом теле, когда упругие натяжения мало-по малу ослабевают.

Простое рассмотрение размерности приведенного выражения для джаулева тепла обнаруживает, что константа, входящая в него, зависящая от природы среды, представляет собой величину, обратную времени. Мы положим ее равной $\frac{2}{T}$.

Тогда джаулево тепло представится выражением:

$$dt \cdot d\tau \cdot \frac{\varepsilon}{4\pi T} \mathbf{E}^2 = dt \cdot d\tau \cdot \varkappa \cdot \mathbf{E}^2, \tag{20}$$

где для сокращения положено:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi T} = \varkappa. \tag{21}$$

Чем больше T, тем медленнее совершается потребление электрической энергии; поэтому T называют также „временем релаксации (расслабления)" среды. *Для металлов T чрезвычайно мало*, для газов, наоборот, очень велико, для абсолютной пустоты $T = \infty$, т. е. в пустоте электрическая энергия может сохраняться безгранично долго, подобно тому, как остаются неизменными упругие натяжения в совершенно упругих телах.

Для магнитной энергии не существует явления, аналогичного релаксации.

§ 9. Мы настолько подготовились, что можем приступить к выполнению намеченного в § 4 хода соображений и из принципа сохранения энергии получить общие уравнения электромагнитного поля. Происходящее за элемент времени dt изменение электромагнитной энергии, заключающейся в какой-либо части объема однородного тела, равно по (2) и (4):

$$\frac{dt}{4\pi}\int d\tau\left\{\varepsilon(\mathrm{E}_x\dot{\mathrm{E}}_x+\mathrm{E}_y\dot{\mathrm{E}}_y+\mathrm{E}_z\dot{\mathrm{E}}_z)+\mu(\mathrm{H}_x\dot{\mathrm{H}}_x+\mathrm{H}_y\dot{\mathrm{H}}_y+\mathrm{H}_z\dot{\mathrm{H}}_z)\right\}. \quad (22)$$

Это изменение обусловлено, во-первых, притоком энергии (5) извне внутрь тела через ограничивающую его поверхность за тот же самый промежуток времени в количестве

$$dt\int d\sigma\,\mathrm{S}_\nu\,, \quad (23)$$

во-вторых, происшедшим за тот же интервал времени образованием тепловой энергии в количестве [(20)]

$$dt\int d\tau\,\varkappa\,\mathrm{E}^2\,, \quad (24)$$

и, конечно, выражение (22) равно выражению (23) минус выражение (24). Преобразуем прежде всего интеграл по поверхности (23), воспользовавшись формулой (8), по [2, (78)] в интеграл по объему:

$$\int d\sigma\,\mathrm{S}_\nu=-\int d\tau\left(\frac{\partial\mathrm{S}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{S}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{S}_z}{\partial z}\right)=-\int d\tau\,\mathrm{div}\,\mathrm{S}, \quad (25)$$

затем все величины перенесем в левую часть уравнения и соберем их в один интеграл по объему. Так как объем может быть взят произвольно малым, то сумма величин, имеющих общим множителем $d\tau$, исчезает. Это дает:

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\mathrm{E}_x\dot{\mathrm{E}}_x+\mathrm{E}_y\dot{\mathrm{E}}_y+\mathrm{E}_z\dot{\mathrm{E}}_z\right)+\frac{\mu}{4\pi}\left(\mathrm{H}_x\dot{\mathrm{H}}_x+\mathrm{H}_y\dot{\mathrm{H}}_y+\mathrm{H}_z\dot{\mathrm{H}}_z\right)+$$
$$+\frac{\partial\mathrm{S}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{S}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{S}_z}{\partial z}+\varkappa(\mathrm{E}_x^2+\mathrm{E}_y^2+\mathrm{E}_z^2)=0; \quad (25a)$$

здесь вектор потока энергии S представлен по (9) по гауссовой системе единиц выражением:

$$\mathrm{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\mathrm{EH}\right]. \quad (26)$$

Имеющее общее значение уравнение (25а) однородно и второй степени относительно шести слагающих напряжений поля и их производных. Чтобы получить из него шесть однородных линейных диференциальных уравнений электромагнитного поля, представляется наиболее естественным приравнять в нем нулю в отдельности те величины, которые имеют своими общими множителями шесть слагающих напряжений E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z.

Тогда получаются следующие шесть уравнений:

$$\varepsilon\dot{E}_x = c\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - 4\pi\varkappa E_x,$$
$$\mu\dot{H}_x = -c\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right), \tag{27}$$

или в векторной форме, по [2, (65)]:

$$\varepsilon\dot{E} = c\,\mathrm{rot}\,H - 4\pi\varkappa E, \tag{27a}$$

$$\mu\dot{H} = -c\,\mathrm{rot}\,E. \tag{27b}$$

Это и есть максвелловы основные уравнения электромагнитного поля для покоящегося однородного изотропного тела. Из них и из пограничных условий (11) можно, как мы убедимся дальше, вывести однозначно все законы электрических и магнитных явлений в таких телах.

Если ввести для сокращения векторы

$$\varepsilon E = D, \tag{28}$$

$$\varkappa E = J, \tag{29}$$

$$\mu H = B, \tag{30}$$

то уравнения поля примут вид:

$$\dot{D} = c\,\mathrm{rot}\,H - 4\pi J, \tag{31a}$$

$$\dot{B} = -c\,\mathrm{rot}\,E, \tag{31b}$$

которые отличаются тем, что не содержат никаких специальных констант, характерных для данного тела, и имеют универсальное значение. Отсюда эта форма уравнений удобна для применения в случае неоднородных и неизотропных тел, если только они сплошные и могут считаться покоящимися. И действительно, эти уравнения в указанных пределах оказались превосходными при всех их применениях. Они образуют, так сказать, прочный остов, в который можно ввести все отдельные особенности, обусловленные специальными свойствами различных тел. Последние входят только в такие соотношения, которые для однородных изотропных тел представлены уравнениями (28), (29), (30).

Так, вся кристаллооптика получается просто путем изменения соотношения (28); это изменение состоит в том, что вместо простой пропорциональности векторов E и D принимают более общую линейную зависимость между их компонентами (ср. *4*, § 52). С другой стороны, теория возбуждения электрического тока в растворе с неравномерной концентрацией получается обобщением уравнения (29), вводя в него кроме напряжения электрического поля еще аддитивную величину: „возбуждающую“ электродвижущую силу. Наконец, законы ферромагнитных веществ вытекают из соответственного обобщения соотношения (30) (ср. ниже, § 35).

Понятно, что при каждом подобном обобщении уравнений (28), (29) или (30) затрагиваются и выражения (2), (4) или (20) для плотности энергии и для джаулева тепла, тогда как выражение (22) для потока энергии остается при этом неизменным, ибо оно не содержит постоянных, связанных с материальными константами тела. Пользуясь универсальными уравнениями (26) и (31) и применяя, как и в § 9, принцип энергии, мы получаем особый вид модификации.

Отсюда, например, следует, что изменение электрической энергии, происходящее за элемент времени dt, равно:

$$\frac{1}{4\pi}\int d\tau\left(\mathbf{E}_x\, d\mathbf{D}_x + \mathbf{E}_y\, d\mathbf{D}_y + \mathbf{E}_z\, d\mathbf{D}_z\right), \tag{32}$$

а изменение магнитной энергии:

$$\frac{1}{4\pi}\int d\tau\left(\mathbf{H}_x\, d\mathbf{B}_x + \mathbf{H}_y\, d\mathbf{B}_y + \mathbf{H}_z\, d\mathbf{B}_z\right). \tag{32a}$$

Эти выражения представляют собой обобщение выражений (2) и (4).

§ 10. Хотя пограничные условия (11) содержат только тангенциальные компоненты напряжений поля, но в связи с уравнениями для поля внутри тела они позволяют сделать заключение о соотношении нормальных составляющих по обе стороны границы раздела двух сред. Рассмотрим, в самом деле, снова, как в § 6, точку на поверхности раздела двух сред и примем касательную плоскость за плоскость xy. Тогда уравнение (31a) дает для нормальной составляющей электрического вектора $\mathbf{D}$ по обе стороны поверхности раздела:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial t} = c\left(\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y}\right) - 4\pi \mathbf{J}_z$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}'_z}{\partial t} = c\left(\frac{\partial \mathbf{H}'_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}'_x}{\partial y}\right) - 4\pi \mathbf{J}'_z,$$

следовательно, после вычитания:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}'_z - \mathbf{D}_z\right) = c\left(\frac{\partial (\mathbf{H}'_y - \mathbf{H}_y)}{\partial x} - \frac{\partial (\mathbf{H}'_x - \mathbf{H}_x)}{\partial y}\right) - 4\pi(\mathbf{J}'_z - \mathbf{J}_z). \tag{32b}$$

Но на основании пограничных условий (11) для тангенциальных компонентов напряжения магнитного поля:

$$\mathbf{H}'_y - \mathbf{H}_y = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{H}'_x - \mathbf{H}_x = 0. \tag{33}$$

И не только самые эти разности, но и разности их производных по координатам x и y равны нулю, потому что уравнения (33) имеют место также для всех соседних точек пограничной поверхности и потому могут быть диференцированы по каждому направлению, которое, как направления x и y, лежит в тангенциальной плоскости, между тем как, наоборот, диференцирование по нормали z, естественно, недопустимо, потому что уравнения (33) имеют место только для значения $z = 0$.

Таким образом в уравнении (32b) член, содержащий c, совсем выпадает, и мы получаем вообще для нормальной составляющей $\mathbf{D}$ по обе стороны поверхности раздела:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}'_{\nu'} - \mathbf{D}_{\nu}\right) = -4\pi\left(\mathbf{J}'_{\nu} - \mathbf{J}_{\nu}\right).$$

Ради удобства это уравнение может быть написано в более симметричной форме, если мы обозначим через ν' нормаль, направленную внутрь второй среды, так что $\nu = -\nu'$:

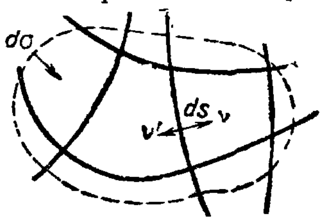
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{D}'_{\nu'} + \mathbf{D}_{\nu}\right) = -4\pi\left(\mathbf{J}'_{\nu'} + \mathbf{J}_{\nu}\right). \tag{34}$$

Очень наглядное представление о значении этого пограничного условия для нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ мы найдем в § 11.

Совершенно таким же путем получается для нормальной составляющей магнитного вектора $\mathbf{B}$ более простое пограничное условие:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B}'_{\nu'} + \mathbf{B}_{\nu}\right) = 0. \tag{35}$$

§ 11. Важнейшая особенность максвелловых уравнений электромагнитного поля заключается в том, что они допускают простую интеграцию, которая приводит к фундаментальному в электродинамике принципу. Чтобы вывести его сейчас в возможно общей форме, вообразим себе электромагнитное поле в системе произвольно большого числа соприкасающихся друг с другом тел и выделим для ближайшего рассмотрения произвольно большой и произвольной формы объем, ограниченный воображаемой замкнутой поверхностью (на черт. 1 эта поверхность обозначена пунктирной линией).



Черт. 1.

В этом пространстве находятся различные тела, которые разделены определенными поверхностями раздела (на черт. 1 они обозначены сплошными линиями).

Образуем теперь сначала в уравнениях электрического поля (31a) от обеих частей дивергенцию в смысле [2, (66)], тогда получим:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{J}, \tag{36}$$

умножим это уравнение на элемент объема $d\tau$ и проинтегрируем затем по всему рассматриваемому объему:

$$\int d\tau \cdot \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = -4\pi \int d\tau \cdot \operatorname{div} \mathbf{J}. \tag{37}$$

Выражение в левой части (37) можно представить непосредственно как производную по времени, тогда как выражение справа может быть преобразовано по примеру (25) в интеграл по поверхности. Однако при этом надо обратить внимание на то, что вектор J не непрерывен, и что поэтому преобразование (25) не может быть применено непосредственно ко всему рассматриваемому пространству. Мы разложим сначала интеграл по объему в правой части (37) на сумму объемных интегралов, относящихся каждый в отдельности к отдельным однородным телам системы, и преобразуем их в интегралы по поверхности для каждого тела в отдельности. Тогда в различные интегралы по поверхности войдут кроме внешней, воображаемой, поверхности также и внутренние реальные поверхности раздела каждых двух тел. При этом бросается в глаза разница, заключающаяся в том, что элемент $d\sigma$ воображаемой поверхности будет встречаться только один раз, тогда как каждый элемент (ds) реальной поверхности раздела—два раза, ибо он ведь является элементом поверхности двух различных тел.

Приняв это в соображение, мы получим уравнение (37) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau \cdot \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \int d\sigma\, \mathbf{J}_\nu + 4\pi \int ds\,(\mathbf{J}'_{\nu'} + \mathbf{J}_{\nu'}),$$

причем мы соединили в один два члена, которые относятся к определенному элементу ds, и одно из двух граничащих по этому элементу поверхности тел отметили значком вверху.

Теперь мы можем на основании (34) интеграл по поверхности раздела заменить производной по времени, и тогда последнее уравнение перепишется в форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int d\tau \cdot \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} + \int ds \cdot \frac{\mathbf{D}'_{\nu'} + \mathbf{D}_\nu}{4\pi}\right\} = \int d\sigma\, \mathbf{J}_\nu . \tag{38}$$

Это выражает, что изменение со временем всей стоящей в скобках величины

$$\int d\tau \cdot \frac{\operatorname{div} \mathbf{D}}{4\pi} + \int ds \cdot \frac{\mathbf{D}'_{\nu'} + \mathbf{D}_\nu}{4\pi} = e \tag{39}$$

обусловливается процессами на внешней поверхности рассматриваемого пространства. Если интеграл по поверхности справа равен нулю, что, например, по (29) имеет место, если для всех сред, через которые проходит поверхность σ, $\varkappa = 0$, то e остается неизменным. Величину e, определяемую выражением (39), называют **количеством электричества**, содержащимся в рассматриваемой системе тел, или **электрическим зарядом**, а положение, выражаемое (38),—законом сохранения электричества.

Как видно из (39), электрический заряд существует в двух видах: как объемный заряд и как поверхностный заряд.

Плотность объемного заряда:

$$\frac{\operatorname{div}\mathbf{D}}{4\pi}=k, \tag{40}$$

а плотность поверхностного заряда

$$\frac{\mathbf{D}'_{\nu'}+\mathbf{D}_{\nu}}{4\pi}=h. \tag{41}$$

Определенный выражением (28) вектор **D** называется „электрической индукцией" или „электрическим смещением". Таким образом плотность объемного заряда пропорциональна „объемной дивергенции"; плотность поверхностного заряда пропорциональна „поверхностной дивергенции", т. е. скачку нормальной составляющей электрической индукции.

Полный заряд e системы тел можно представить по (39) также в виде интеграла по внешней поверхности системы. В самом деле, если объемный интеграл в (39) преобразовать по такому же точно образцу, как мы это сделали выше с объемным интегралом в правой части (27), принимая притом во внимание, что вектор **D** вообще непрерывен на границе раздела двух различных тел, то получаются два интеграла по поверхности: один по поверхностям раздела, который равен и противоположен по знаку поверхностному интегралу в (39) и с ним взаимно уничтожается, и другой по внешней поверхности:

$$-\int d\sigma\frac{\mathbf{D}_{\nu}}{4\pi}=e. \tag{42}$$

Выражаемая этой формулой связь между всем количеством электричества внутри рассматриваемого пространства и интегралом по поверхности от нормальной слагающей электрической индукции совершенно того же рода, как выведенная в *2*, § 64 зависимость между интенсивностями всех заключенных в объеме жидкости источников и стоков и потоком через поверхность, ограничивающую пространство (теорема Гаусса). Поэтому произведение $d\sigma\cdot\mathbf{D}_{\nu}$ носит также название „потока индукции" через элемент поверхности $d\sigma$ в направлении нормали ν. Полный поток индукции через замкнутую поверхность наружу дает, таким образом, всегда весь заряд в объеме, ограниченном этой поверхностью.

Что касается изменения всего заряда рассматриваемого пространства со временем, то по (38) оно составляет за промежуток времени dt:

$$dt\cdot\int d\sigma\cdot\mathbf{J}_{\nu}: \tag{43}$$

Эту величину называют поэтому полным количеством электричества, втекшего в интервал dt в объем через все элементы поверхности. Так как через элемент поверхности $d\sigma$ втекает количество электричества:

$$dt\cdot d\sigma\,\mathbf{J}_{\nu}, \tag{44}$$

то вектор $\mathbf{J}$, определенный выражением (29), называется аналогично вектору потока энергии $\mathbf{S}$ [(5)] „плотностью электрического тока“ и константа $\varkappa$ в (29) — удельной „электрической проводимостью“ или „электропроводностью“ рассматриваемой среды. Для пустоты по § 8 $\varkappa = 0$ и поэтому $\mathbf{J} = 0$. Такие вещества называются „изоляторами“, остальные—„проводниками“. Если для какого-нибудь вещества было бы возможно, чтобы $\varkappa = \infty$, то это был бы „абсолютный проводник“.

Само собой понятно, что введение понятия об электрическом заряде, электрической проводимости сообщает принципу сохранения электричества очень наглядное значение. Так, например, пограничное условие (34), вводя поверхностную плотность h из (41), можно написать следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -(\mathbf{J}'_{\nu'} + \mathbf{J}_{\nu}), \tag{45}$$

и смысл этого выражения таков, что изменение со временем электрического заряда, лежащего на границе раздела, определяется тем скачком, который испытывает на этой поверхности нормальная составляющая плотности электрического тока.

Значительно проще выражаются соотношения, аналогичные закону сохранения электричества, для магнетизма. Так как здесь нет члена, подобного электрическому току в проводнике, то эти соотношения сводятся, если ввести по (30) „магнитную индукцию“ $\mathbf{B}$, к такому выражению:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{46}$$

непосредственно получаемому из (31b), и к

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}'_{\nu'} + \mathbf{B}_{\nu}) = 0, \tag{47}$$

как в (35), т. е. магнитный заряд как объемный, так и поверхностный, везде со временем не изменяется.

§ 12. Для однородных тел, которыми мы впоследствии и ограничимся уравнение (46) позволяет выполнить самым общим образом интеграцию по времени. Действительно, здесь ε и $\varkappa$ везде внутри объема постоянны, поэтому они могут быть вынесены за знак div, и мы получим на основании (28), (29) и (21):

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{k}{T},$$

интегрируя:

$$k = \text{const} \cdot e^{-\frac{t}{T}}, \tag{48}$$

т. е. в однородном веществе объемная плотность электричеткого заряда всегда убывает со временем. Только в предельном случае, при бесконечно большом времени релаксации T, она остается постоянной. Следовательно, если бы в какой-либо момент объемный заряд отсутствовал, то он вообще никогда не может появиться. Выяснив это, мы в дальнейшем будем предполагать, что пространственная плотность заряда k везде равна нулю. Тогда из (40) следует вообще:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \tag{49}$$

Таким образом в однородных телах электричество находится всегда только на пограничной поверхности. Далее, по (28) и (29) выходит:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \tag{50}$$

Электричество течет, следовательно, как несжимаемая жидкость [ср. 2 (259)]. То обстоятельство, что при этом его объемная плотность равна нулю, не представляет никакого противоречия, так как условия (49) и (50) относительно отсутствия дивергенции вполне совместимы с конечностью величины $\mathbf{J}$.

Что касается, далее, магнетизма, то мы уже видели в (46) и (47), что как объемная, так и поверхностная плотности магнетизма не могут изменяться со временем, и поэтому во всех телах, которые когда-либо были немагнитными, магнетизм всегда отсутствует. Поэтому мы специализируем эти уравнения еще больше, принимая, что вообще

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{51}$$

и

$$\mathbf{B}'_{\nu'} + \mathbf{B}_{\nu} = 0, \tag{52}$$

т. е. что для магнитной индукции равны нулю как объемная, так и поверхностная дивергенции. Поэтому, также по аналогии с общим уравнением (42), поток магнитной индукции через всякую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\int \mathbf{B}_{\nu}\, d\sigma = 0. \tag{53}$$

Этим самым основы всей теории электромагнетизма представлены достаточно полно.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ОТСУТСТВИИ КОНТАКТНОЙ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

§ 13. Обращаясь теперь к применениям выведенной системы уравнений, мы сначала займемся простейшими случаями, чтобы постепенно войти в круг всей необозримой области явлений. Мы начнем со статических состояний. Статическим мы называем электромагнитное поле в том случае, если состояние среды, в которой образовано поле, нигде не изменяется с течением времени. Поэтому в статическом поле все производные по времени мы можем приравнять нулю, благодаря чему по (31) получается:

$$0 = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{J} \tag{54}$$

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{55}$$

Но этих условий еще недостаточно, чтобы состояние было статическим, ибо, пока величина $\varkappa \mathbf{E}^2$ в (24) отлична от нуля хотя бы в каком-нибудь одном месте поля, там происходит образование тепла и вместе с этим изменение состояния среды. Следовательно, условие статического состояния требует, чтобы везде в произведении $\varkappa \mathbf{E}^2$ или множитель $\varkappa$, или множитель $\mathbf{E}$ обращались в нуль, другими словами: конечное электростатическое поле возможно только в изоляторе ($\varkappa = 0$), в случае же хотя бы самой незначительной проводимости напряжение электрического поля для статического состояния:

$$\mathbf{E} = 0. \tag{56}$$

Если же величина $\varkappa \mathbf{E}^2$ везде равна нулю, то обращается в нуль и $\varkappa \mathbf{E} = \mathbf{J}$, поэтому из (54) следует:

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \tag{57}$$

Таким образом получаются основные уравнения для статических полей. Как видно из них, они распадаются на такие уравнения, которые содержат только электрические величины, и на такие, которые содержат только магнитные величины, или, другими словами: электростатические и магнитостатические поля следуют законам, совершенно независящим друг от друга,—они просто налагаются одно на другое, нисколько не влияя друг на друга. Отсюда следует, что электростатику можно развивать совершенно отдельно от магнитостатики.

Как ни просты и как ни очевидны эти заключения, однако они приводят к одному, поистине удивительному, следствию. Вообразим себе, что в какой-либо среде существуют одновременно и электростатическое и магнитостатическое поля, тогда по (26) везде в этой среде имеется определенный конечный поток энергии, величина и направление которого существенным образом зависят от соотношения между электрическим и магнитным полями. Следовательно, здесь мы имеем дело с процессом, который обусловлен взаимодействием между электрическим и магнитным полями. Конечно, никакого физического значения этот процесс не имеет; поток энергии не производит никакого изменения находящейся в поле энергии, ибо в какой-либо объем втекает энергии столько же, сколько из него и вытекает. Но все-таки это следствие, с необходимостью вытекающее из теоремы Пойнтинга, до некоторой степени странно, и его приходится пока рассматривать как неподтверждаемый фактами и поэтому ненужный балласт при теоретических представлениях; с другой стороны, его нельзя и устранить, не подвергая опасности все построения м а к с в е л л о в о й теории.

§ 14. Займемся сначала законами электростатики. Из (55) следует, что электрическое напряжение **E** имеет потенциал [(*1*, (121)]:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{58}$$

Этим самым вся задача сводится к отысканию одной только функции. Электрический потенциал φ удовлетворяет везде диференциальному уравнению (50)

$$\Delta \varphi = 0, \tag{59}$$

далее, пограничным условиям (11):

$$\frac{d(\varphi' - \varphi)}{d\lambda} = 0\ , \tag{60}$$

где $d\lambda$ обозначает элемент длины какой-нибудь кривой, лежащей на поверхности, ограничивающей обе среды, или, интегрируя по λ:

$$\varphi' - \varphi = \text{const}, \tag{61}$$

т. е. разность потенциалов на границе двух сред имеет во всех точках этой поверхности одинаковую величину. Эту величину называют к о н т а к т н о й разностью потенциалов обоих веществ; она вообще отлична от нуля и зависит от химической природы соприкасающихся веществ и от их температуры. В этой главе мы совершенно отвлечемся от контактной разности потенциалов и будем рассматривать потенциал как функцию всюду непрерывную. Кроме того, электрический потенциал—

функция однозначная, так как соотношение (55) имеет место для всего пространства (ср. *2*, § 69).

По (56) внутри каждого проводника потенциал φ всюду постоянен. Абсолютная его величина не имеет никакого физического значения, так как во всех предыдущих уравнениях встречаются только его разности и диференциалы. Поэтому величину φ в каком-нибудь произвольно выбранном месте можно задать какой угодно. Обыкновенно полагают φ равным нулю на бесконечно большом расстоянии от электрически заряженных тел, где последние уже не производят никакого заметного действия.

Если потенциал φ известен, то из него получается на основании (41) и (28) плотность электрического заряда, расположенного на границе двух сред:

$$-4\pi h = \varepsilon \frac{d\varphi}{d\nu} + \varepsilon' \frac{d\varphi'}{d\nu'}. \tag{62}$$

Если среда, отмеченная здесь штрихом, проводник, то для него:

$$\frac{d\varphi'}{d\nu'} = 0$$

$$4\pi h = -\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \varepsilon \, \mathbf{E}_\nu. \tag{63}$$

Электрическая плотность, следовательно, пропорциональна напряжению поля в изоляторе и имеет тот же знак, что и компонент поля по направлению внутрь изолятора. Отсюда получается также весь заряд проводника, граничащего с изолятором, у которого диэлектрическая постоянная равна ε:

$$e = \int h \, d\delta = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma, \tag{64}$$

в согласии с общим уравнением (42), причем нужно заметить, что там ν обозначало нормаль, направленную внутрь рассматриваемого пространства, здесь же — нормаль, направленную внутрь изолятора, т. е. наружу от проводника.

Этот полный заряд проводника представляет собой постоянную величину, характеризующую его состояние, ибо, по § 11, он неизменен, пока проводник остается окруженным изолятором, какие бы значительные изменения при этом ни претерпевало поле. Если $e = 0$, но $h \neq 0$, то проводник называется заряженным „через влияние" или „через индукцию".

§ 15. Наглядное представление о свойствах электростатического поля дает построение поверхностей уровня $\varphi = \text{const}$ и пересекающих их под прямым углом силовых линий, как это подробно было изложено в *1*, § 40. Внутри проводников, по (56), вообще нет силовых линий, они существуют только в изоляторах. Поверхности проводников представляют собой поверхности уровня, поэтому силовые линии всюду нормальны к поверхностям проводников. В точках, где плотность заряда h положительна, силовые линии идут от проводника в изолятор; в точках с отрицательной плотностью заряда силовые линии направлены от изолятора к проводнику. Таким образом, силовая линия начинается на положительном заряде и оканчивается на отрицательном. Так как силовые линии идут всегда от высшего потенциала к низшему, то они не могут оканчиваться на том же проводнике, из которого они вышли,—они оканчиваются или на поверхности другого проводника с низшим потенциалом или идут в бесконечность. Последний случай можно свести на предыдущий, если представить себе, что все лежащие в бесконечности точки соединены между собою проводящею поверхностью, например, если вокруг всего расположенного на конечном расстоянии поля вообразить бесконечно большую шаровую проводящую поверхность. Вследствие этого поле нисколько не изменится, так как в бесконечности потенциал обращается в нуль, т. е. тем самым удовлетворяется на этой поверхности шара условие $\varphi = \text{const}$.

От каждого положительно заряженного бесконечно малого элемента поверхности $d\sigma$ проводника в изолятор идет бесконечно тонкая „силовая трубка" (ср. *2*, § 61). Ее форма стоит в тесной связи не только с направлением, но и с величиной напряжения поля, так как, по (63),

$$h\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon \mathrm{E}_\nu\,d\sigma = \frac{1}{4\pi}\,D_\nu\,d\sigma. \tag{65}$$

Эта величина, представляющая собой то количество электричества, которое вырезано на поверхности проводника силовой трубкой, характеризует своей неизменностью силовую трубку на всем ее протяжении, пока она не попадет на какой-либо заряд. Именно, если теперь под $d\sigma$ подразумевать какое-нибудь произвольное и произвольно расположенное сечение трубки в каком-нибудь месте поля и если ν — направление его нормали, то величина (65) представляет собой, опуская в знаменателе 4π, поток индукции через сечение $d\sigma$. Но по общему уравнению (42) поток индукции изнутри наружу какой-либо замкнутой поверхности, внутри которой нет электрических зарядов, равен нулю, и так как из двух произвольных сечений трубки и ее боковой поверхности всегда можно образовать замкнутую поверхность, через которую потока индукции не будет, то по (42) выходит, что, пока трубка не встретит заряда, поток индукции в каком-либо определенном направлении через каждое сечение неизменен. Здесь оказывается полная аналогия с силою течения несжимаемой жидкости в [*2*, (328)] или с моментом вихревой нити в [*2*, (317)]. Там, где трубка суживается, индукция и, следовательно, напряжение поля велики, и обратно. Точно так же там, где трубка переходит из одного изолятора в другой и где вследствие этого (§ 17) происходит ее излом, поток индукции остается неизменным, предполагая, что на поверхности раздела нет электрических зарядов, т. е. $h=0$. На конце трубки поток индукции прерывается, он компенсируется отрицательным зарядом, который замыкает трубку и который по величине равен тому положительному заряду, на котором трубка началась. Что эти оба заряда как раз равны друг другу по величине и противоположны по знаку, вытекает непосредственно из общего уравнения (42), если его применить ко всей силовой трубке, ограниченной двумя сечениями, которые лежат целиком на обоих проводниках. Тогда поток индукции через замкнутую поверхность равен нулю, а следовательно, и алгебраическая сумма находящихся внутри зарядов равна нулю.

Если принять заряды $h\,d\sigma$ всех силовых трубок, исходящих от данного проводника, и силовых трубок, оканчивающихся на нем, одинаковыми, то полное число исходящих от него трубок (причем оканчивающиеся считаются за отрицательные) дает по величине и знаку меру для его полного заряда e. Подобные трубки называются „единичными трубками". При графическом представлении всего удобнее каждую единичную трубку изображать одной силовой линией, идущей приблизительно посредине трубки. При таком построении число силовых линий, выходящих из какого-либо проводника, дает поток индукции через его поверхность и вместе с тем его полный заряд по величине и знаку.

Если изолирующая среда, в которой находится сколь угодно большое число как-либо заряженных проводников, со всех сторон ограничена проводящей оболочкой, то на внутренней стороне последней собирается заряд, противоположный по знаку полному заряду всех заключающихся в среде проводников. В самом деле, вокруг всей изолирующей среды можно построить замкнутую поверхность, расположенную внутри проводящей оболочки, через которую силовые линии не проходят и потока индукции не имеется. Поэтому заряд, заключенный внутри этой поверхности, равен нулю, или, как говорят, заряженные проводники „связывают" на внутренней стороне проводящей оболочки количество электричества, противоположное по знаку их заряду. Тот же результат получается, если принять во внимание, что каждый положительный заряд, находящийся где-либо в изоляторе, дает начало силовой трубке, на конце которой должно находиться равное количество отрицательного заряда. На внешней стороне окружающей оболочки собирается количество электричества, равное разности полного заряда оболочки и того заряда, который расположен на внутренней ее стороне.

Если потенциал проводящей оболочки сделать равным нулю, соединивши ее проводником с землей, то находящийся на наружной стороне оболочки заряд стекает к земле, и все внешнее пространство становится нейтральным. Так как силовая линия не может оканчиваться на том же проводнике, на котором она началась, то во внешнем пространстве не может быть силовых линий. В противоположность этому электрическое поле внутри оболочки совершенно не зависит от того, отведена ли оболочка к земле или же она изолирована от земли и ей сообщен какой-либо заряд, так как условия существования внутреннего электрического поля совершенно не затрагиваются величиною потенциала проводящей оболочки (§ 14). Поэтому говорят, что проводящая оболочка представляет собой электрическую „защиту", выражая этим, что электрические поля по обе ее стороны совершенно независимы одно от другого. Можно также воспользоваться для электрической защиты плоской проводящей поверхностью, если только она настолько велика по своим размерам, что все силовые линии, идущие из поля по одну сторону ее по направлению к другой стороне, этой плоскостью задерживаются и ни одна из них по другую ее сторону не проникает.

§ 16. Обращаясь теперь к рассмотрению частных случаев, заметим прежде всего, что каждое частное решение диференциального уравнения Лапласа (59) представляет собой определенное электростатическое поле, которое осуществляется в действительности тогда, когда выполняются необходимые для этого специальные условия. Границами поля служат поверхности проводников, т. е. поверхности постоянного потенциала. Обратно, для какой-либо функции φ, удовлетворяющей (59), можно всякую поверхность $\varphi = \mathrm{const}$ рассматривать как поверхность с соответственным значением потенциала некоторого проводника, производящего вокруг себя поле, представляемое потенциалом φ. Все дело сводится только к тому, представляет ли практический интерес проводник подобной формы.

Простейшее частное решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ есть линейная зависимость φ от прямолинейных координат x, y, z. Это соответствует по (58) однородному электростатическому полю. Если принять направление поля за ось x-ов, то φ будет зависеть только от x, и мы получим:

$$\varphi = ax + b. \tag{66}$$

Такое поле можно осуществить, если две поверхности уровня $\varphi = \mathrm{const}$, например $x = 0$, $x = d$, ограничивающие поле, считать за поверхности проводников. Эта система образует плоский конденсатор. Электрическое поле определяется значениями φ на обеих границах (пластинах, обкладках). Пусть $\varphi = \varphi_0$ для $x = 0$ и $\varphi = 0$ для $x = d$, принимая, что вторая обкладка отведена к земле. Выражение (66) преобразуется в следующее:

$$\varphi = \varphi_0\left(1 - \frac{x}{d}\right). \tag{67}$$

Силовые линии направлены параллельно оси положительных x-ов, напряжение поля или падение потенциала равно по (58):

$$\mathrm{E}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_0}{d}, \tag{68}$$

плотность заряда на неотведенной обкладке $x=0$, по (63):

$$h=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\varphi_0}{d}. \qquad (69)$$

На отведенной к земле пластине расположен противоположный по знаку заряд.

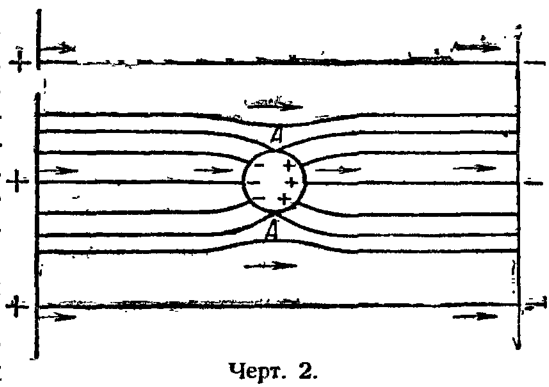
Отношение полного заряда обкладки к разности потенциалов обкладок, или тот заряд, который создает между обкладками разность потенциалов, равную 1, называется электрической „емкостью“ конденсатора. Если через F обозначим величину поверхности обкладки, то емкость:

$$C=\frac{hF}{\varphi_0}=\frac{\varepsilon F}{4\pi d}, \qquad (70)$$

т. е. емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна его поверхности и диэлектрической постоянной изолятора (воздуха, стекла) и обратно пропорциональна расстоянию между обкладками.

Так как формула (66) годна только в случае равнопотенциальной поверхности, простирающейся в бесконечность, то при применении уравнения (70) к конечной поверхности F необходимо вводить поправку на края поля, которая, относительно, тем меньше, чем больше F.

Если в однородное поле ввести проводник, хотя бы изолированный и незаряженный, то он произведет некоторое изменение поля, которое вообще трудно вычислить, но особенности его в общих чертах можно выяснить себе при помощи представлений о силовых линиях. Именно, так как силовые линии примыкают к поверхности проводника везде по нормали, то проводник стягивает к себе (черт. 2) идущие вблизи него силовые линии. Места входа силовых линий дают положение отрицательных зарядов, места выхода—положительных зарядов. Особые силовые линии, которые только подходят к поверхности проводника и тут же покидают его, определяют на проводнике положение точек (точки A), где плотность заряда равна нулю. Эти точки образуют так называемую нейтральную зону проводника, отделяющую положительные заряды от отрицательных. Силовые линии, идущие еще дальше от проводника, примыкают к этим особым линиям, давая сначала большие, а затем все меньшие



Черт. 2.

и меньшие изгибы в сторону проводника, пока, наконец, всякое возмущающее влияние проводника не исчезает совсем.

Картина силовых линий дает также возможность составить некоторое общее заключение о величине плотности заряда в связи с формою поверхности проводника. Именно там, где поверхность сильно выпукла, силовые линии очень расходятся, т. е. силовые трубки при приближении к проводнику сильно сужаются, и поэтому сильно увеличивается напряжение поля, и, следовательно, плотность заряда достигает значительной величины. Но там, где поверхность проводника значительно вогнута, например в случае углубления в проводнике, там силовые линии расходятся при приближении к проводнику, напряжение поля сильно убывает, и плотность заряда очень мала.

Предельные случаи представляют выступающие и входящие острия, на которых плотность заряда, соответственно, бесконечна и нуль. Для иллюстрации может служить черт. 11 в [2, § 63], причем прямые углы представляют поверхности проводников, кривые линии — силовые линии в изоляторе. Точка A обозначает выступающий угол, точка B — входящий.

§ 17. Рассмотрим теперь еще раз соотношения на границе раздела двух изоляторов. Здесь имеют место пограничные условия (62), причем плотность заряда h в каждом месте пограничной поверхности имеет определенную неизменную величину. Отсюда вытекает, что направление силовой линии, определяемое отношением компонентов поля, на границе раздела претерпевает нарушение непрерывности, так что силовые линии при переходе через эту поверхность испытывают преломление, величина которого также существенно зависит от h. Если примем $h = 0$, то (62) перейдет в:

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \varepsilon' \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu'} = 0. \tag{71}$$

Закон преломления при этом приобретает простой вид. Именно, разложим напряжение поля по каждую сторону границы раздела на тангенциальные и нормальные компоненты, тогда первые непрерывны, между тем как последние по (71) изменяются в обратном отношении диэлектрических постоянных. Отсюда следует, во-первых, что „преломленная" силовая линия лежит в плоскости, определяемой „падающей" силовой линией и нормалью к поверхности раздела (или перпендикуляром в точке падения); во-вторых, если α и α' означают острые углы обеих силовых линий с перпендикуляром в точке падения:

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \alpha' = \varepsilon : \varepsilon', \tag{72}$$

ибо тангенсы обоих углов обратно пропорциональны нормальным составляющим напряжения поля. Таким образом, чем больше диэлектрическая постоянная изолятора, тем дальше уклоняется от перпендикуляра в точке падения проникающая в изолятор силовая линия. В пределе при $\varepsilon = \infty$ по (71) $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ на всей поверхности изолятора, и потому по теореме, доказанной в *2*, § *71*, φ всюду в таком изоляторе постоянно, или, другими словами: изолятор с бесконечно большой диэлектрической постоянной ведет себя в электростатическом поле как проводник,—ни одна силовая линия в него не проникает. Понятно, однако, что подобный изолятор все же нельзя вполне отождествлять с проводником, ибо существенным различием между ними всегда будет то, что через проводник может течь электрический ток, а через изолятор—нет.

§ 18. Весьма важным частным интегралом уравнения Лапласа (59) является ньютоновский гравитационный потенциал [*1*, (125) или (126)] для случая, когда рассматриваемая точка воздействия лежит вне действующей массы. Мы положим поэтому электрический потенциал φ равным потенциалу некоторых воображаемых, подходящим образом расположенных масс — положительных или отрицательных, действующих по закону тяготения. Так как в электростатическом поле уравнение Лапласа всюду имеет место, то фиктивные массы не могут иметь конечной объемной плотности, поэтому приходится представлять себе, что они распределены по поверхностям проводников и изоляторов с конечной (поверхностной) плотностью. Чтобы не произошло никакого смешения с электрической плотностью h, мы обозначим поверхностную плотность этих фиктивных масс через h' и вызываемый ими гравитационный потенциал через ψ. Тогда:

$$\psi = \Sigma \frac{\mu}{r} = \int \frac{h' d\sigma}{r}, \tag{73}$$

где r обозначает положительное расстояние точки воздействия от элемента поверхности $d\sigma$.

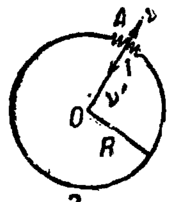
Исследуем сначала в общем виде свойства этого гравитационного потенциала ψ, предполагая, что воображаемые массы расположены с определенной плотностью на какой-либо поверхности. По своему определению (73) функция ψ однозначна и равна нулю в бесконечности, если, как мы принимаем, вся поверхность лежит в конечных пределах. Что касается вопроса о непрерывности ψ и ее первых производных, то это можно выяснить путем исследования простого частного случая: случая шаровой поверхности радиуса R, покрытой равномерным слоем массы. Для этого случая по *1*, § 37, если точка воздействия лежит вне шара, потенциал таков, как если бы вся масса была сосредоточена в центре шара, т. е.

$$\psi = \frac{1}{r_0} \cdot \int h'\, d\sigma = \frac{4\pi R^2}{r_0} h', \tag{74}$$

где r_0 представляет собой расстояние точки воздействия от центра шара; если, наоборот, точка воздействия лежит внутри шара, то потенциал везде постоянен и равен тому значению, которое он имеет в центре, т. е. по (73):

$$\psi = \frac{1}{R}\int h'\, d\sigma = 4\pi R h'. \qquad (75)$$

Если, далее, точка воздействия перемещается извне ($r_0 > R$) через поверхность шара ($r_0 = R$) внутрь ($r_0 < R$), то выражение (74), как видно, переходит непрерывно в выражение (75), следовательно, потенциал ψ не испытывает никакого скачка на поверхности, покрытой массой. Этот результат может быть легко распространен на случай покрытой массой поверхности любой формы методом, совершенно аналогичным примененному в *1*, § 33. Именно разделим шаровую поверхность на две части, выделив на шаре около места A где точка воздействия проникает через его поверхность (черт. 3), небольшой кружок, который мы обозначим через *1* (на чертеже отмечен штрихами), тогда как все остальное обозначим через *2*. Мы имеем тогда:



Черт. 3.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \qquad (76)$$

и так как ψ и ψ_2 оба непрерывны, последняя функция потому, что для масс *2* точка воздействия при ее перемещении всегда остается внешней, то и ψ_1, потенциал кружка, непрерывен. Но этого достаточно, чтобы доказать непрерывность ψ при прохождении точки воздействия через покрытую массой поверхность любой формы. Ибо, какими бы свойствами ни обладала поверхность, всегда возможно выделить на ней подобный небольшой кружок около места прохождения через нее точки воздействия. Остальная часть поверхности не может нарушить непрерывности, потому что для нее точка воздействия постоянно остается вовне. Поэтому вообще для всякой покрытой массой поверхности:

$$\psi' = \psi, \qquad (77)$$

если ψ и ψ' обозначают значения ψ по обе стороны поверхности.

Совершенно подобным же способом мы достигаем результата для первых производных от ψ. Что касается тангенциальных составляющих, то, диференцируя (77) по какому-либо направлению λ, расположенному на поверхности раздела, имеем:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \qquad (78)$$

Таким образом тангенциальные производные непрерывны. Чтобы найти связь между нормальными производными, мы не можем, конечно, диференцировать уравнение (77) по нормали ν к поверхности, так как оно имеет место только для самой поверхности, т. е. для частного значения ν, но мы опять будем исходить из простого случая покрытой массой сферы, причем для нее можно положить $\nu = r_0$. Тогда из (74) получается для случая, если точка воздействия лежит вне шара:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi}{\partial r_0} = -\frac{4\pi\kappa}{r_0^2}\cdot h',$$

и, если точка воздействия приблизится непосредственно к самой поверхности·

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = -4\pi h'. \tag{79}$$

Напротив, из (75) для внутреннего положения точки воздействия следует:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0. \tag{80}$$

Производная $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$, таким образом, прерывна на поверхности шара. Она испытывает при прохождении точки воздействия через поверхность скачок величиною $-4\pi h'$, т. е. если ψ — потенциал во внешнем пространстве, ψ' — во внутренней его части, ν и ν' — наружу и внутрь направленные нормали, это означает, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi'}{\partial\nu'} = -4\pi h'. \tag{81}$$

Чтобы этот результат распространить на случай покрытой массой поверхности произвольной формы, мы опять будем различать две части *1* и *2* поверхности шара (черт. 3). Тогда, диференцируя (76), получаем вообще:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\nu} \tag{82}$$

Точно так же:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial\nu'} = \frac{\partial\psi_1'}{\partial\nu'} + \frac{\partial\psi_2'}{\partial\nu'} \tag{83}$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi_2'}{\partial\nu'} = 0,$$

так как $\frac{\partial\psi_2}{\partial\nu}$ непрерывна, потому что точка воздействия лежит вне поверхности *2*.

Складывая (82) и (83) и принимая во внимание (81).

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} + \frac{\partial\psi_1'}{\partial\nu'} = -4\pi h'. \tag{84}$$

Из этого видно, что скачок в величине производной $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ потенциала, покрытой массой шаровой поверхности, происходит исключительно от потенциала небольшого выделенного около *A* кружка, а отсюда следует, что величина скачка отнюдь не зависит от того, как распределены массы вне кружка. Если у нас имеется поверхность совершенно произвольной формы с совершенно произвольным распределением плотности и если точка воздействия проникает через поверхность в точке A, то производная потенциала по нормали испытывает при этом скачок:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}+\frac{\partial\psi'}{\partial\nu'}=-4\pi h', \tag{85}$$

где h' означает плотность на поверхности в точке прохождения A, т. е. поверхностную плотность небольшого выделенного около A кружка.

Мы можем в наших выводах итти еще дальше. В самом деле, в уравнении (84):

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu}=\frac{\partial\psi_1'}{\partial\nu'}. \tag{86}$$

Ибо для небольшого кружка нет никакого различия между внешним и внутренним пространством, направления ν и ν' совершенно равнозначны и могут заменить одно другое. Из этого вытекает:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu}=\frac{\partial\psi_1'}{\partial\nu'}=-2\pi h'. \tag{87}$$

Эта величина имеет наглядное физическое значение. Именно, так как градиент потенциала представляет силу, с которой притягивается или отталкивается действующими массами единица массы, находящаяся в точке воздействия, то выражение (87) представляет ту силу, с какой небольшой кружок действует на единицу массы, непосредственно к нему прилегающую. Эта сила зависит только от плотности покрытия массой, но не от величины кружка, и сохраняет свою величину, как бы мал ни был кружок, что, конечно, объясняется тем, что размеры кружка всегда все же бесконечно велики по сравнению с расстоянием от него точки воздействия.

Точно так же делается понятным, почему сила, с которой действует на материальную точку сферический слой, сразу падает от конечной величины до нуля, когда точка извне проходит внутрь шаровой поверхности. Именно, пока материальная точка находится еще вне, небольшой кружок *1* действует в том же направлении, как и остальная масса *2*, но как только она проникает через поверхность, направление силы, производимой кружком, изменяется на обратное, тогда как другая сила сохраняет прежнее направление. Таким образом обе эти силы действуют в противоположных направлениях и взаимно компенсируются.

§ 19. Результаты предыдущего исследования позволяют нам высказать и доказать следующее положение: в произвольном электростатическом поле потенциал φ тождественен с гравитационным потенциалом ψ фиктивных масс, распределенных по поверхности проводников и изоляторов с плотностью:

$$h'=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}+\frac{\partial\varphi'}{\partial\nu'}\right)=\frac{\mathrm{E}_\nu+\mathrm{E}'_{\nu'}}{4\pi} \tag{88}$$

Чтобы доказать это, покажем, что функция:

$$\psi - \varphi = \varphi_0, \tag{89}$$

где ψ определяется по (73) и (88), тождественно равна нулю. В самом деле, функция φ_0 обладает следующими свойствами. Она удовлетворяет диференциальному уравнению Лапласа, потому что ему удовлетворяют как ψ, так и φ; далее, она однозначна и непрерывна и в бесконечности обращается в нуль, так как это имеет место как для ψ, так и для φ. Наконец, первые производные от φ_0 всюду непрерывны, даже на поверхности проводников и изоляторов. Действительно, для тангенциальных производных из (60) и (78) вытекает:

$$\frac{\partial \varphi_0'}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \lambda},$$

а для нормальных следует из (85) и (88):

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi_0'}{\partial \nu'} = 0.$$

Что функция с подобными свойствами тождественно равна нулю, является частным случаем теоремы, которую мы сейчас выведем в самом общем виде.

Однозначная и непрерывная вместе с своими первыми производными функция пространственных координат f, удовлетворяющая диференциальному уравнению Лапласа, вполне определена внутри какого-либо объема, если заданы ее значения во всех точках поверхности, ограничивающей этот объем. В самом деле, обозначим через f и f' две функции, которые обладают всеми этими свойствами и значения которых во всех точках поверхности равны между собою, в остальном же совершенно произвольны. Тогда по 2, (81) для разности $f_0 = f' - f$:

$$\int\left\{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau = -\int f_0 \frac{\partial f_0}{\partial \nu} d\sigma - \int f_0 \cdot \Delta f_0 \cdot d\tau. \tag{90}$$

В этом уравнении оба интеграла справа равны нулю: интеграл по объему — на основании уравнения Лапласа, интеграл по поверхности—потому, что разность f_0 для всех точек поверхности равна нулю. Следовательно, в положительном интеграле слева подинтегральная величина во всех точках объема равна нулю, т. е. f_0 всюду постоянно и равно нулю, как и на поверхности.

То же самое имеет место по отношению к нашей функции φ_0, так как она везде равна нулю в бесконечности.

§ 20. Теорема, доказанная в предыдущем параграфе, представляет возможность осветить законы электростатики с новой точки зрения, рассматривая (условно) электрические действия как действия на расстоянии. Только поверхностная плотность, которую нужно приписать фиктивным массам, чтобы их гравитационный потенциал совпадал с электрическим, не равна электрической плотности h, по величине h', определяемой (88), которую поэтому часто называют плотностью „свободного“ заряда в отличие от h — плотности „действительного“ заряда. Свободный заряд связан по (88) с напряжением электрического поля $\mathbf{E}$ совершенно так же, как действительный заряд по (41) с электрической индукцией $\mathbf{D}$. Введение такого заряда представляет ту выгоду, что при вычислении потенциала и напряжения поля можно совершенно отвлечься от диэлектрических свойств изоляторов и приходится иметь дело только с непосредственными действиями на расстоянии. Но свободное электричество не подчинено, как действительное, закону сохранения электричества (§ 11). Если, например, перенести изолированный заряженный электричеством проводник из одного изолятора в другой с иной диэлектрической постоянной, то действительный заряд останется неизменным, между тем как свободный заряд изменится.

Связь между плотностью свободного заряда h' и действительного h представляется уравнениями (88) и (41). Она, вообще, довольно сложна, но принимает особенно простую форму в очень важном случае — в случае поверхности проводника. Ибо для этого случая $\mathbf{E}_{\nu'_1} = 0$, и, следовательно,

$$h' = -\frac{\mathbf{E}_\nu}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}; \tag{91}$$

комбинируя это с (63), получаем:

$$h' = \frac{h}{\varepsilon}. \tag{92}$$

Таким образом, если дано h, то непосредственно можно вывести из действия на расстоянии потенциал и напряжение поля.

Интересно взглянуть на рассмотренные в § 16 частные случаи электростатических полей с точки зрения теории дальнодействия. Если, например, точка, заряженная положительным зарядом 1, находится в каком-нибудь месте между двух обкладок плоского конденсатора с плотностями зарядов $+h$ и $-h$, то эта заряженная точка, на основании выражения (87) для притяжения плоским кружком бесконечных размеров по сравнению с расстоянием от него точки воздействия, будет притягиваться отрицательно заряженной обкладкой и отталкиваться положительной, так что полное напряжение поля составит:

$$\mathbf{E}_x = 4\pi h' = \frac{4\pi h}{\varepsilon}, \tag{93}$$

в точном соответствии с уравнениями (68) и (69).

Если внести в однородное поле конденсатора изолированный и незаряженный проводник, то для того, чтобы напряжение поля везде внутри проводника было равно нулю, на поверхности его должны появиться заряды, притяжение (соответственно отталкивание) которых компенсируют подобные же действия зарядов на обкладках: понятно само собою, что общий заряд проводника при этом остается равным нулю. Черт. 2 представляет наглядно действие этих связанных зарядов.

Для проводящего шара, находящегося в изоляторе с диэлектрической постоянной ε, если R — его радиус, а e — заряд, потенциал по (75):

$$\varphi = \frac{1}{R\varepsilon}\int h\,d\sigma = \frac{e}{R\varepsilon}, \tag{94}$$

так что электрическая емкость шара:

$$C = \frac{e}{\varphi} = R\varepsilon, \tag{95}$$

т. е. равна произведению радиуса на диэлектрическую постоянную. Если, следовательно, поместить изолированный заряженный шар в какой-нибудь другой изолятор, то его потенциал, а вместе с тем и напряжение поля, понизятся во столько раз, во сколько увеличится диэлектрическая постоянная.

Если, напротив, вместо того чтобы сохранять e неизменным, мы станем поддерживать потенциал φ шара при помещении его в новый изолятор постоянным, что можно сделать, соединив шар тонкой проволокой с одним полюсом очень удаленной батареи, то заряд шара возрастает с увеличением диэлектрической постоянной. Это происходит благодаря тому, что некоторое количество электричества притекает к шару из батареи. Соединительную проволоку можно взять настолько тонкой, что она не будет заметно влиять на создаваемое шаром поле (ср. ниже, § 25, конец).

§ 21. Последние заключения мы обобщим для случая сколь угодно большого числа произвольной формы проводников, находящихся в одном и том же изоляторе с диэлектрической постоянной ε. Рассмотрим сначала простой случай, когда все проводники за исключением одного, который мы отметим *1*, отведены при помощи длинной тонкой проволоки к земле, т. е. имеют потенциал нуль, тогда как проводник *1* поддерживается при потенциале 1. Тогда потенциальная функция в изоляторе повсюду определяется по теореме, выведенной в конце § 19. Мы ее назовем f_1.

Силовые линии все начинаются на проводнике *1*, а оканчиваются частью на остальных проводниках, частью в бесконечности. Отсюда заряд первого проводника e_1 положителен, заряды остальных проводников $e_2, e_3, \ldots$ отрицательны.

Если теперь при прочих равных условиях проводник *1* будет поддерживаться при потенциале φ_1, вместо 1, то потенциальная функция электрического поля в этом случае станет $\varphi_1 \cdot f_1$ и плотности зарядов на отдельных проводниках:

$$h_1 = -\frac{\varepsilon\varphi_1}{4\pi}\frac{\partial f_1}{\partial \nu_1}, \quad h_2 = -\frac{\varepsilon\varphi_1}{4\pi}\frac{\partial f_1}{\partial \nu_2}. \tag{96}$$

Отсюда полные заряды проводников:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \int h_1\,d\sigma_1 = -\frac{\varepsilon\varphi_1}{4\pi}\int\frac{\partial f_1}{\partial\nu_1}d\sigma_1 = \varepsilon\varphi_1 c_1,\\ e_2 &= \int h_2\,d\sigma_2 = -\frac{\varepsilon\varphi_1}{4\pi}\int\frac{\partial f_1}{\partial\nu_2}d\sigma_2 = \varepsilon\varphi_1 c_{21},\\ e_3 &= \int h_3\,d\sigma_3 = -\frac{\varepsilon\varphi_1}{4\pi}\int\frac{\partial f_1}{\partial\nu_3}d\sigma_3 = \varepsilon\varphi_1 c_{31},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Заряд проводника 1 обусловлен его потенциалом φ_1, заряды остальных обусловлены влиянием на них проводника 1. Произведение εc_1 — емкость проводника 1, остальные подобные произведения, взятые со знаком плюс, „парциальные" емкости остальных проводников. Существенно, что величины c, равно как и функция f_1, зависят только от геометрических условий системы, а не от электрических. Вследствие этого возможно общий случай свести путем разложения на рассмотренный здесь частный случай.

Именно, если мы обозначим соответственную потенциальную функцию через f_2 для проводника 2 и т. д., то задача об определении электрического поля для того случая, когда проводник 1 будет поддерживаться при потенциале φ_1, проводник 2 при потенциале φ_2 и т. д., разрешается потенциальной функцией:

$$\varphi = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3 + \dots, \tag{98}$$

ибо эта функция удовлетворяет, во-первых, везде в изоляторе уравнению Лапласа, так как каждая функция в отдельности ему удовлетворяет, и, во-вторых, на поверхности каждого проводника она принимает заданное значение, так как там соответствующая функция $f = 1$, а все остальные f обращаются в нуль.

Отсюда получаются по (63) плотности зарядов отдельных проводников:

$$h_1 = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\varphi_1\frac{\partial f_1}{\partial\nu} + \varphi_2\frac{\partial f_2}{\partial\nu} + \varphi_3\frac{\partial f_3}{\partial\nu} + \dots\right), \tag{99}$$

и полные заряды:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon(\varphi_1 c_1 + \varphi_2 c_{12} + \varphi_3 c_{13} + \dots),\\ d_2 &= \varepsilon(\varphi_1 c_{21} + \varphi_2 c_2 + \varphi_3 c_{23} + \dots),\\ c_3 &= \varepsilon(\varphi_1 c_{31} + \varphi_2 c_{32} + \varphi_3 c_3 + \dots),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

причем

$$c_{12} = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial f_2}{\partial\nu_1}d\sigma_1,\quad c_{21} = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial f_1}{\partial\nu_2}d\sigma_2, \tag{101}$$

Заряды проводников представляют собой, таким образом, линейные функции их потенциалов и, кроме того, пропорциональны диэлектрической постоянной изолятора, как это мы видим в (95), в частности, для шара. При этом всегда:

$$c_{12} = c_{21} \text{ и т. д.} \tag{102}$$

В этом можно убедиться из рассмотрения следующего тождества из 2, (80):

$$\int\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)d\tau=$$

$$=-\int f_1\frac{\partial f_2}{\partial \nu_1}d\sigma_1-\int f_1\frac{\partial f_2}{\partial \nu_2}d\sigma_2-\int f_1\frac{\partial f_2}{\partial \nu_3}d\sigma_3.$$

Здесь интеграл по объему распространяется по всему изолятору, тогда как интегралы по поверхности относятся ко всей поверхности, ограничивающей изолятор, т. е. к поверхности всех проводников. Так как, далее, f_1 принимает значение 1 на поверхности проводника *1*, а на поверхности остальных проводников — значение 0, то вся сумма сводится к одному первому члену, который представляет не что иное, как парциальную емкость c_{12} без множителя 4π, а вследствие симметрии интеграла по объему то же самое будет иметь место и для случая c_{21}.

Если разрешить уравнения (100) относительно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то, обратно, потенциалы проводников представятся как линейные функции их зарядов:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{\varepsilon}\,(e_1c_1' + e_2c_{21}' + e_3c_{31}' + \ldots),\\
\varphi_2 &= \frac{1}{\varepsilon}\,(e_1c_{12}' + e_2c_2' + e_3c_{32}' + \ldots),\\
\varphi_3 &= \frac{1}{\varepsilon}\,(e_1c_{13}' + e_2c_{23}' + e_3c_3' + \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\qquad(103)$$

где константы c', так же как c, зависят только от геометрических условий рассматриваемой системы, но не от электрических. Конечно, и здесь также $c_{12}'=c_{21}'$. При заданных зарядах потенциалы, таким образом, обратно пропорциональны диэлектрическим постоянным, как это мы уже видели в (94) для частного случая шара.

Так же разрешается задача об определении электрического поля, если для одних проводников заданы их потенциалы, а для других их заряды. Во всяком случае, дело идет о разрешении линейных уравнений, если только известны емкости c.

§ 22. Теперь мы рассмотрим еще несколько дальнейших интересных для электростатики частных решений уравнения Лапласа. Ради упрощения будем теперь предполагать в качестве изолятора пустоту, для которой $\varepsilon=1$. Тогда свободный и действительный заряд — одно и то же. Для случая других изоляторов по предыдущим выводам можно ввести необходимые обобщения.

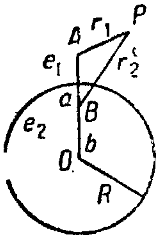
Заимствуем из выражения (73) частное решение:

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2},\qquad(104)$$

где r_1 и r_2 обозначают расстояния точки воздействия от двух неизменных полюсов A и B с зарядами e_1 и e_2. Поверхности уровня здесь восьмого порядка, следовательно, имеют довольно сложный вид, но между ними существует одна поверхность особенно простой формы, именно:

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0. \tag{105}$$

Эта поверхность представляет собой шар, как в этом легко можно убедиться аналитическим или же геометрическим путем.



Черт. 4.

Конечно, для того чтобы шар был действительный, заряды e_1 и e_2 должны быть противоположны по знаку. Тогда шаровая поверхность будет окружать полюс с меньшим зарядом; пусть это будет B. Если обозначим через O центр шара, через R — его радиус и назовем через a и b расстояния обоих полюсов от O, то из (105) для точек пересечения поверхности шара с осью ABO (черт. 4) получается:

$$\frac{e_1}{a+R} + \frac{e_2}{b+R} = 0 \tag{106a}$$

(для точки пересечения вне AB),

$$\frac{e_1}{a-R} + \frac{e_2}{b-R} = 0 \tag{106b}$$

(для точки пересечения внутри AB).

Из этих двух уравнений можно найти, если заданы положения обоих полюсов, т. е. их расстояние $a-b$ и их заряды e_1 и e_2, как радиус шара, так и a и b в отдельности, т. е. положение центра шара O.

Но можно также поступить наоборот. В самом деле, вообразим себе, что шар является проводником и отведен к земле. От этого электрическое поле нисколько не изменится. Тогда шаровая поверхность представит полную защиту внутреннего пространства от внешнего (§ 15) и внутреннее и внешнее поля друг от друга независимы. Поэтому рассматриваемый случай представляет также решение такой задачи: определить электрическое поле, которое образуется, если полюс A с зарядом e_1 находится на расстоянии a от центра O шара радиуса R, отведенного к земле. Тогда в уравнениях (106) e_1, a и R даны, а b и e_2 определяются по этим данным, и потенциал во всем внешнем пространстве представляется, как и раньше, формулой (104), т. е. заряд, связанный заряженным полюсом на поверхности шара и противоположный ему по знаку, действует во-вне так же, как полюс B с зарядом e_2 на расстоянии b от центра шара.

Поэтому точку B называют также „электрическим изображением" полюса A по отношению к шару. Положение изображения B получается из уравнений (106) после исключения e_1 и e_2, именно:

$$b = \frac{R^2}{a}. \tag{107}$$

Это соотношение не зависит от величины зарядов и, кроме того, оно симметрично по отношению к a и b, т. е. полюсы A и B могут поменяться своими ролями. Поэтому представляемый формулой (107) закон изображения внешнего пространства на внутреннем, и обратно, называется законом „обратных радиусов". Для заряда изображения B получается также из (106) величина:

$$e_2 = -\frac{R}{a} \cdot e_1 = -\frac{b}{R} \cdot e_1. \tag{108}$$

Тем самым задача совершенно решена. Плотность заряда, связанного на поверхности шара, получается по (63) и (104) в виде:

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(e_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial r_0} + e_2 \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial r_0}\right), \tag{109}$$

где r_0 означает расстояние точки P от O; оно совпадает с внутренней нормалью к поверхности изолятора. Чтобы иметь весь заряд шара, надо $h\,d\sigma$ проинтегрировать по всей шаровой поверхности. Однако можно достигнуть этой цели удобнее, если принять в соображение, что полный заряд определяется потоком индукции через шаровую поверхность и что этот поток индукции останется также и в том случае, если удалить проводящую шаровую поверхность и вместо нее вообразить в пустоте заряд e_2 в точке B. Таким образом рассматриваемый поток индукции производит заряд e_2 и, стало быть, e_2 представляет собой весь связанный на отведенной к земле шаровой поверхности заряд.

Так же находит свое разрешение при помощи предыдущих вычислений и тот случай, когда шар не отведен к земле, но изолирован и заряжен определенным зарядом. Чтобы найти электрическое поле, соответствующее какой-либо наперед заданной величине заряда на шаре, достаточно на плотность h заряда, связанного на поверхности шара зарядом в полюсе A, наложить какую-либо другую, повсюду одинаковую, положительную или отрицательную плотность заряда, чтобы получить электрическое поле, соответствующее каждому требуемому полному заряду шара.

Так, например, если на шаровой поверхности распределить равномерно заряд $-e_2$, то получится электростатическое поле для того случая, когда изолированный незаряженный шар находится вблизи электрического полюса A.

Само собою разумеется, что во всех приведенных случаях можно поменять внешнее пространство с внутренним, т. е. потенциал (104) дает также поле внутри эвакуированного полого шара, поверхность которого отведена к земле и внутри которого находится полюс B с зарядом e_2. Связанный вследствие этого на поверхности шара заряд $-e_2$ действует всюду внутри шара как изображение A с зарядом e_1.

§ 23. Дальнейший способ нахождения частных решений уравнения Лапласа основывается на введении другой системы координат вместо прямолинейных координат x, y, z. Мы выразим теперь величину $\Delta\varphi$ при помощи новых криволинейных координат и предположим с этой целью, что x, y, z являются некоторыми заданными однозначными и непрерывными функциями трех новых переменных λ, μ, ν.

Чтобы установить общие формулы преобразования, составим сначала выражения для диференциалов:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial x}{\partial\nu}d\nu, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial y}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial y}{\partial\nu}d\nu, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial z}{\partial\mu}d\mu + \frac{\partial z}{\partial\nu}d\nu, \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

и будем считать здесь 9 частных производных за постоянные, а 6 диференциалов за переменные, т. е. мы исследуем взаимную зависимость старых и новых координат в непосредственной близости какой-нибудь определенной выбранной нами точки (x, y, z, λ, μ, ν), которую мы назовем точкою A. Для расстояния ds какой-нибудь бесконечно близкой точки P с координатами ($x+dx$, $y+dy,\ldots$) от точки A мы получим, что квадрат этого расстояния выражается суммою квадратов трех диференциальных выражений (110), т е. в виде однородной квадратичной функции диференциалов $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$. Для упрощения, однако, мы введем теперь ограничивающее предположение, именно, что вообще:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial\mu} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\nu} + \frac{\partial y}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial y}{\partial\nu} + \frac{\partial z}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial z}{\partial\nu} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial y}{\partial\lambda} + \frac{\partial z}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial z}{\partial\lambda} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

тогда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{d\lambda^2}{\Lambda^2} + \frac{d\mu^2}{M^2} + \frac{d\nu^2}{N^2},$$

если для сокращения положим

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2 \quad \text{и т. д.} \tag{112}$$

вместе с более специальным определением, что Λ, M и N — положительны.

Возьмем теперь уравнения (110) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} dx&=\left(\Lambda\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\cdot\frac{d\lambda}{\Lambda}+\left(M\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)\frac{d\mu}{M}+\left(N\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)\frac{d\nu}{N},\\ dy&=\left(\Lambda\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\cdot\frac{d\lambda}{\Lambda}+\left(M\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)\frac{d\mu}{M}+\left(N\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)\frac{d\nu}{N},\\ dz&=\left(\Lambda\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\cdot\frac{d\lambda}{\Lambda}+\left(M\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\frac{d\mu}{M}+\left(N\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)\frac{d\nu}{N}.\end{aligned}\right\}\tag{113}$$

Мы можем дать им теперь очень наглядное истолкование. В самом деле, девять констант, определяющихся положением точки A и выделенных, как коэфициенты, скобками в (113), удовлетворяют, если обозначить их по порядку через α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, по (112) и (111) следующим шести условиям:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1,\ldots,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0,\ldots$$

Вследствие этого уравнения (113) можно истолковать по *1*, § 56 как соотношения между координатами dx, dy, dz и координатами $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{M}$, $\frac{d\nu}{N}$ точки P в другой подобной прямоугольной системе координат с тем же началом в A, положение которой определяется девятью косинусами направлений таким образом, что буквам α, β, γ соответствуют координаты x, y, z, а цифрам 1, 2, 3 — координаты λ, μ, ν. Мы будем предполагать, что последняя система координат также правая, чего всегда можно достигнуть перестановкой λ и μ. Тогда для косинусов направления имеют место все уже выведенные в *1*, § 146 соотношения, как например:

$$\Lambda\frac{\partial x}{\partial\lambda}=MN\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial z}{\partial\nu}-\frac{\partial y}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial z}{\partial\mu}\right),\ldots$$

Далее, имеют место также обратные (113) уравнения:

$$\frac{d\lambda}{\Lambda}=\left(\Lambda\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\cdot dx+\left(\Lambda\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\cdot dy+\left(\Lambda\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\cdot dz,\ldots,$$

комбинируя их с тождествами

$$d\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial x}dx+\frac{\partial\lambda}{\partial y}dy+\frac{\partial\lambda}{\partial z}dz,\ldots,$$

получаем 9 соотношений:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\Lambda^2\frac{\partial x}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\Lambda^2\frac{\partial y}{\partial\lambda},\ldots,\tag{114}$$

при посредстве которых можно перейти от производных по x, y, z к производным по λ, μ ν. Из них вытекают также 3 уравнения, соответствующие уравнениям (111):

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y};\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,\ldots,\tag{115}$$

которые выражают, что три семейства поверхностей $\lambda = \text{const}$ $\mu = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, везде пересекаются друг с другом под прямыми углами. Поэтому уравнения (115), или равнозначные им уравнения (111), называют условиями ортогональной подстановки, а величины λ, μ, ν—ортогональными координатами. Точки A и P можно рассматривать как вершины противолежащих углов каждого из двух бесконечно малых прямоугольных параллелепипедов, один из которых ограничен поверхностями:

$$x = \text{const}, \quad x + dx = \text{const}, \quad y = \text{const}, \; y + dy = \text{const}, \ldots$$

и длины его ребер dx, dy, dz, а другой—поверхностями:

$$\lambda = \text{const}, \quad \lambda + d\lambda = \text{const}, \quad \mu = \text{const}, \quad \mu + d\mu = \text{const}, \ldots,$$

и длины его ребер $\frac{d\lambda}{\Lambda}$, $\frac{d\mu}{M}$; $\frac{d\nu}{N}$; его объем равен:

$$d\tau = \frac{d\lambda}{\Lambda}\frac{d\mu}{M}\frac{d\nu}{N}. \tag{116}$$

Чтобы выразить величину $\Delta\varphi$ возможно простым способом в новых координатах, воспользуемся тождеством:

$$\int \Delta\varphi \cdot d\tau = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds; \tag{117}$$

и применим его ко второму, только что упомянутому, бесконечно малому параллелепипеду. Тогда интеграл по объему слева сведется к одному только члену $\Delta\varphi \cdot d\tau$, где величина $d\tau$ дается выражением (116), тогда как интеграл по поверхности справа представляет собой сумму шести слагаемых соответственно шести граням параллелепипеда. Что касается грани $\lambda = \text{const}$, то ее величина:

$$ds = \frac{d\mu}{M} \cdot \frac{d\nu}{N};$$

Далее, элемент длины внутренней нормали:

$$dn = \frac{d\lambda}{\Lambda}\nu,$$

таким образом подставляемая величина:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} ds\right)_\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \cdot \frac{\Lambda}{MN} \cdot d\mu\, d\nu.$$

К этому члену присоединяется соответственный член для противолежащей грани $\lambda + d\lambda = \text{const}$, который от предыдущего отличается только тем, что вместо λ надо вставить $\lambda + d\lambda$ и изменить знак внутренней нормали на обратный, т. е.

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} ds\right)_{\lambda + d\lambda} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \cdot \frac{\Lambda}{MN}\right)_{\lambda + d\lambda} \cdot d\mu\, d\nu.$$

Складывая эти два члена, получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \cdot \frac{\Lambda}{MN}\right) d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Внеся это и соответственные выражения для μ и ν в (117), найдем искомое выражение для $\Delta\varphi$ в произвольных ортогональных координатах:

$$\Delta\varphi = \Lambda MN\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\Lambda}{MN}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{M}{N\Lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{N}{\Lambda M}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\right\}. \tag{118}$$

§ 24. Применим сначала преобразованное уравнение (118) в простейшем случае к обыкновенным полярным координатам:

$$x = r\sin\vartheta\cos\psi,\quad y = r\sin\vartheta\sin\psi,\quad z = r\cos\vartheta, \tag{119}$$

причем r, ϑ, φ соответствуют по порядку λ, μ, ν. Ортогональность этих координат ясна, конечно, из того, что условия (111) выполняются. Из (112) имеем:

$$\frac{1}{\Lambda} = 1,\quad \frac{1}{M} = r,\quad \frac{1}{N} = r\sin\vartheta.$$

Из этого следуют затем все другие соотношения, так, например, по (114):

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}$$

(ср. *2*, § 65). Далее, по (116):

$$d\tau = r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\psi$$

(ср. *1*, (93), и из (118) выходит:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)\right\} \tag{120}$$

результат, который можно было бы получить прямыми преобразованиями из (119) только путем утомительных вычислений.

Для частного случая, когда потенциал φ зависит только от r) но не от углов ϑ и ψ, из (120) получается:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right), \tag{121}$$

и уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0,$$

откуда общий интеграл представится в форме:

$$\varphi = \frac{\text{const}}{r} + \text{const}.$$

Он равен, таким образом, ньютонову потенциалу с добавлением постоянной.

§ 25. Теперь мы сделаем другое применение уравнения преобразования (118), которое приведет нас к новому частному решению уравнения Лапласа.

Сначала определим функцию u трех координат x, y, z и трех положительных констант $a > b > c$ следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1=0. \tag{122}$$

Как видно, величина u этим не определяется однозначно, но, так как уравнение по отношению к u кубическое, то u, вообще, имеет три значения. Что все они действительные, в этом можно убедиться, если изменять u непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$ и проследить при этом, какие значения принимает выражение в левой части (122), которое мы назовем через F. Тогда оказывается следующее:

для

$$\begin{array}{ll} -\infty < u < -a^2 & -1 > F > -\infty, \\ -a^2 < u < -b^2 & +\infty > F > -\infty, \\ -b^2 < u < -c^2 & +\infty > F > -\infty, \\ -c^2 < u < +\infty & +\infty > F > -1. \end{array}$$

Отсюда вытекает, что уравнение $F=0$ по отношению к u имеет три действительных корня, которые мы обозначим в порядке их величины через λ, μ, ν. Тогда:

$$+\infty \geqslant \lambda \geqslant -c^2 \geqslant \mu \geqslant -b^2 \geqslant \nu \geqslant -a^2. \tag{123}$$

При этих предположениях величины λ, μ, ν определяются через координаты точки x, y, z однозначно. Мы будем называть их **эллиптическими координатами** точки, потому что поверхности $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, как видно из (122), представляют собой уравнения эллипсоида, однополого гиперболоида и двуполого гиперболоида. Хотя λ, μ, ν нельзя выразить в удобной форме в виде явных функций от x, y, z, однако, обратно, возможно x, y, z простым путем выразить через λ, μ, ν, непосредственнее всего при помощи следующего приема. Приведем к общему знаменателю выражение (122), тогда числитель представит собой целую функцию третьей степени по отношению к u, которую можно написать при помощи ее корней λ, μ, ν, в форме произведения трех линейных множителей следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}-1 \equiv \frac{-(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}. \tag{124}$$

При этом нужно еще заметить, что коэфициенты при u^3 в числителе слева и справа совпадают.

Смысл соотношения (124) заключается в том, что оно, если λ, μ, ν рассматривать как функции x, y, z, a, b, c, представляет собою тождество, имеющее место для **всякого** значения u. Поэтому оно останется справедливым и тогда, когда в нем положить $u = -a^2$. Но тогда слева останется только первый член, потому что он будет бесконечно большим по сравнению с остальными, и мы получаем:

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}. \tag{125a}$$

Таким же путем при помощи циклической перестановки найдем:

$$y^2 = \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \tag{125b}$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \tag{125c}$$

Легко убедиться, если принять во внимание (123), что величины в (125) в самом деле все положительны. Вместе с тем, однако, ясно, что какой-нибудь определенной системе значений λ, μ, ν соответствует не одна, а восемь различных систем значений: x, y, z, т. е. 8 различных точек пространства, которые расположены симметрично друг относительно друга в 8 октантах. Чтобы получить полную однозначность преобразования, мы будем считать, что точка лежит в первом октанте, т. е. что x, y, z все три положительны.

Теперь прежде всего надо доказать ортогональность преобразования. Этого можно достигнуть, составив выражение (111). С этою целью продиференцируем (125a) по λ:

$$2x\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

и разделим на (125a):

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{x}{2(a^2+\lambda)},$$

точно так же:

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{x}{2(a^2+\mu)}, \ldots \tag{126}$$

Если вставим все эти значения в (111) и подставим затем для x^2, y^2, z^2 их значения из (125), то убедимся, что условия ортогонального преобразоваиия выполнены целиком.

Теперь нужно еще вычислить величины Λ, M, N. Для Λ на основании (112) и (126) получаем:

$$\frac{1}{\Lambda^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}. \tag{127}$$

Чтобы это выражение преобразовать удобным образом в такое, которое зависит только от λ, μ, ν, продиференцируем сначала общее тождество (124) по u. Таким путем получается:

$$\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2} \equiv$$

$$\equiv \frac{(u-\lambda)(u-\mu)(u-\nu)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{u-\lambda} + \frac{1}{u-\mu} + \frac{1}{u-\nu} - \frac{1}{a^2+u} - \frac{1}{b^2+u} - \frac{1}{c^2+u}\right).$$

Положим здесь $u=\lambda$. Тогда окажется, так как от большой скобки останется только первый член:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)\,(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

следовательно, по (127):

$$\Lambda=2\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}. \tag{128a}$$

Точно так же:

$$M=2\sqrt{\frac{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}} \tag{128b}$$

$$N=2\sqrt{\frac{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}, \tag{128c}$$

все эти три выражения действительны и положительны. Подстановка их в (118) дает уравнение Лапласа в эллиптических координатах.

Теперь посмотрим, что наперед не очевидно, нельзя ли удовлетворить уравнению $\Delta\varphi=0$, если предположить, что φ зависит только от λ, но не от μ и ν. Таким образом предположим теперь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0.$$

Тогда для уравнения Лапласа получим из (118), приняв во внимание выражение (128):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)=0, \tag{129}$$

между тем как все члены, содержащие множителем μ и ν, выпадут. Это особое обстоятельство, что диференциальное уравнение (129) содержит только одну переменную λ, обнаруживает возможность искомого решения, которое легко получается из (129) двукратным интегрированием, именно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{A}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \tag{130}$$

(A — константа) и

$$\varphi=A\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \tag{131}$$

Поверхности уровня $\lambda=\text{const}$ по (122) представляют семейство конфокальных эллипсоидов, к которым принадлежит также эллипсоид $\lambda=0$, или:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{132}$$

с полуосями a, b, c. Для $\lambda=\infty$ получается бесконечно большая шаровая поверхность:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\lambda^2}-1=0 \tag{133}$$

с радиусом $\sqrt{\lambda}$, и для $\lambda=-c^2$ — бесконечно тонкая эллиптическая пластинка

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}\leqslant 1,\quad z=0. \tag{134}$$

Две постоянные интеграции A и λ_0 в (131) определятся, если будут даны значения потенциала на каких-либо двух поверхностях уровня. Примем, например, в бесконечности $\varphi=0$ и на эллипсоиде (132) $\varphi=1$, т. е. для $\lambda=\infty$ $\varphi=0$ и для $\lambda=0$ $\varphi=1$, поэтому на основании (131) $\lambda_0=\infty$ и

$$\varphi=l\cdot\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{135}$$

если мы для краткости положительную постоянную, размерность которой обратна размерности длины, положим:

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}=\frac{1}{l}. \tag{136}$$

Выражение (135) определяет электрическое поле проводящего эллипсоида (132), заряженного до потенциала 1, во всем внешнем пространстве. Плотность заряда h в каждой точке поверхности олучается по (63) из значения $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}$, причем нужно принять во внимание, что элемент длины нормали к эллипсоиду не $d\lambda$, а $\frac{d\lambda}{\Lambda}$. Полный заряд эллипсоида всего проще вычислить путем определения потока индукции через бесконечно удаленную поверхность сферы (133) с радиусом $\sqrt{\lambda}$ вместо того, чтобы интегрировать $h\,d\sigma$. Именно, из (135) получается:

$$\varphi=l\cdot\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3}}=\frac{2l}{\sqrt{\lambda}}.$$

С другой стороны, потенциал на большом расстоянии $\sqrt{\lambda}$, так как при этом эллипсоид может быть рассматриваем как точка:

$$\varphi=\frac{e}{\sqrt{\lambda}}.$$

Следовательно $e=2l$. В настоящем случае это представляет собой также электрическую емкость C эллипсоида. Таким образом по (136):

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \tag{137}$$

Для шара с радиусом $R=a=b=c$ отсюда следует опять, как в (95), значение $C=R$. Для $a=b>c$ (сдавленный эллипсоид вращения) и для $a>b=c$ (удлиненный эллипсоид вращения) интеграция (137) приводит, соответственно, к циклометрическому и логарифмическому выражению. Специально в первом случае для $c=0$ (круглая пластинка радиуса a):

$$C=\frac{2a}{\pi}, \tag{138}$$

и во втором случае для $b=c=$ бесконечно малой величине (бесконечно тонкая проволока длиною a и диаметром $2b$)

$$C=\frac{a}{\ln\frac{2a}{b}}. \tag{139}$$

Вследствие того, что знаменатель бесконечно велик, C бесконечно мало. Поэтому бесконечно тонкая проволока даже при конечной величине потенциала получает только бесконечно малый заряд и поэтому производит на конечных расстояниях только бесконечно слабое электрическое поле.

§ 26. Заканчивая главу, сделаем еще один шаг вперед в теории. Мы познакомились при исследовании электрических полей с двумя совершенно различными методами, которые в пределах электростатики совершенно равноправны и из которых каждый обнаруживает свои особые преимущества: один метод исходит из теории близкодействия и примыкает к представлению о потоке жидкости, другой исходит из теории действия на расстоянии и оперирует с гравитационным законом Ньютона, однако, вводя свободное электричество взамен действительного. Уже в самом начале этой книги (§ 1) шла речь о том, что существует только одна теория близкодействия, а теорий дальнодействия несколько. Этим произволом при введении действия на расстоянии можно воспользоваться с тем, чтобы свести в самом основании все свободное электричество на действительное при помощи некоторого видоизменения метода, которое здесь кажется только математическим преобразованием, но которое при дальнейшем развитии теории, именно, при распространении ее на тела, построенные из атомов, оказалось необычайно плодотворным. Именно, мы можем потенциал электрического поля, которое проистекает от каких-либо зарядов, находящихся на элементах поверхности $d\sigma$ проводников и изоляторов, представить всегда по (73) в форме:

$$\varphi=\int\frac{h\,d\sigma}{r}-\int\frac{h-h'}{r}\,d\sigma=\varphi_0+\varphi_1. \tag{140}$$

Здесь первый интеграл φ_0 представляет потенциал действительного электричества, т. е. тот потенциал, который произвели бы действительные заряды, если бы кроме пустоты других изоляторов не существовало, тогда как второй, отрицательный, интеграл φ_1 дает ту поправку, которую нужно присоединить к φ_0, если диэлектрические свойства тел отличаются от свойств пустоты. Чтобы преобразовать φ_1, введем вектор:

$$\frac{\mathbf{D}-\mathbf{E}}{4\pi}=\mathbf{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\,\mathbf{E}. \tag{141}$$

Тогда в связи с (41) и (88) можно написать:

$$\varphi_1=-\int\frac{P'_{\nu'}+P_\nu}{r}\,d\sigma. \tag{142}$$

Интеграция распространяется на все пограничные поверхности проводников и изоляторов, и выражение в числителе над r означает скачок, который испытывает нормальная составляющая вектора $\mathbf{P}$ на элементе поверхности $d\sigma$; r представляет собою расстояние точки x, y, z от элемента поверхности с координатами ξ, η, ζ. Переменные интеграции ξ, η, ζ. Но этот интеграл по поверхности можно изобразить также в виде интеграла по объему. В самом деле, преобразуем интеграл, распространяющийся на все бесконечное пространство:

$$\int\left(P_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+P_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+P_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\tau, \tag{143}$$

по 2, (79) при помощи интеграции по частям в другой интеграл по объему и в интеграл по поверхности. При этом примем во внимание, что вследствие прерывности вектора $\mathbf{P}$ весь интеграл по объему до преобразования надо представлять как сумму интегралов по объему, распространенных на отдельные однородные тела, совершенно так же, как мы это сделали с интегралом по объему (37). Тогда оказывается, что интеграл (143) представится в виде:

$$-\int\left(\frac{\partial P_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial P_\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial P_\zeta}{\partial\zeta}\right)\cdot\frac{d\tau}{r}-\int\frac{P'_{\nu'}+P_\nu}{r}\,d\sigma, \tag{143a}$$

или, так как первый интеграл по (141) и (50) обращается в нуль, то получится φ_1.

Таким образом после подстановки:

$$\varphi=\int\frac{h\,d\sigma}{r}+\int\left(P_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+P_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+P_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\tau. \tag{144}$$

На основании этого заключаем, что потенциал поля слагается из потенциала действительных зарядов и из суммы некоторых потенциалов, которые проистекают от отдельных элементов объема $d\tau$ изоляторов, так как для проводников $\mathbf{P}=0$. Подобный проистекающий от элемента объема $d\tau$ потенциал

$$\left(P_\xi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}+P_\eta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}+P_\zeta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\tau \tag{145}$$

можно рассматривать по 2, (339) как потенциал „двойного полюса“ или „диполя“, момент и ось которого представляются вектором $\mathbf{P}\,d\tau$. Это есть потенциал двух бесконечно близких, равных и противоположно заряженных полюсов, в совершенном соответствии с потенциалом скоростей двойного источника в гидродинамике. Момент его равен произведению заряда одного полюса на расстояние между полюсами; ось совпадает с направлением от отрицательного полюса к положительному.

Поскольку элемент объема изолятора представляется как вместилище электрического диполя, этот элемент объема называется электрически или диэлектрически „поляризованным“. Вектор поляризации $\mathbf{P}$ по (141) пропорционален напряжению поля в данном месте $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}, \tag{146}$$

где константа

$$\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \tag{147}$$

называется электрической восприимчивостью. Только совершенная пустота абсолютно не поляризуется, для всех других изоляторов $\varkappa$ имеет бо́льшую или меньшую положительную величину.

Введение электрической поляризации, благодаря чему, как мы видели, понятие о свободном электричестве становится излишним, имеет здесь, когда мы рассматриваем диэлектрическую постоянную ε как наперед заданную, только чисто формальное значение. Но оно приобретает реальное физическое содержание, если поставить вопрос о сущности и причине диэлектрической постоянной — вопрос, который можно разрабатывать только на почве атомистической гипотезы. Введение этой величины становится насущной необходимостью, если приходится принимать в расчет явления, при которых ε уже нельзя считать постоянной. Таким образом диэлектрические действия изоляторов надо представлять себе как действия огромного числа малых, плотно расположенных друг возле друга диполей, находящихся в пустоте под влиянием электрического поля. Момент их определяется напряжением поля совершенно так же, как в случае, рассмотренном в § 16 (черт. 2), когда изолированный проводник в однородном поле испытывает под влиянием этого внешнего поля некоторого рода электрическую поляризацию.

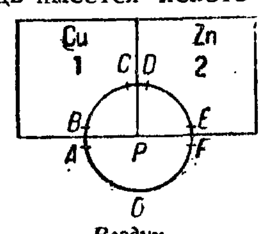
ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЛУЧАЕ КОНТАКТНОЙ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

§ 27. В предшествующей главе мы принимали упрощающее вычисления предположение, что на границе раздела двух сред совершенно отсутствует представляемая (61) контактная разность потенциалов, которая постоянна вдоль каждой границы и зависит только от химических свойств и температуры соприкасающихся сред. Здесь мы исследуем явления, которые характерны именно для такой разности потенциалов. Прежде всего существенно различно, на всех ли границах, имеющихся в рассматриваемой системе проводников и изоляторов, соприкасаются всегда только две среды или же существуют и такие пограничные точки, где сходятся одновременно три среды.

В первом случае возникает вследствие контактной разности скачок потенциала на границе двух веществ, и, как бы он ни был велик, это не имеет ни малейшего влияния на свойства электростатического поля. Ибо все величины, доступные измерению, как-то: напряжение поля и плотности зарядов действительного и свободного электричества, сохраняют совершенно те же значения, как если бы потенциал был всюду непрерывен, так как они зависят от производных потенциала. Единственное различие состоит в том, что сам потенциал φ испытывает при переходе из одного вещества в другое определенный скачок. Если, например, у нас имеется соприкосновение изолятора и проводника, и мы обозначим контактную разность потенциалов, т. е. изменение потенциала при переходе из изолятора (*0*) в проводник (*1*) через $E_1 = -E_{10}$, то этот скачок одинаков по (61) на всей разграничивающей поверхности обоих веществ. Он ничего не изменяет в пограничных условиях для компонентов поля и зарядов, следовательно, не изменяет и свойств электростатического поля, поэтому также нет никакой возможности для измерения величины E_{01}.

Совершенно иначе обстоит дело, если какое-либо вещество находится в контакте не с одним, а с двумя или несколькими другими веществами одновременно. Тогда ведь имеется некоторая особенная пограничная кривая, по которой встречаются три вещества, и для этих особенных мест соприкосновения возникают особые условия. Мы исследуем здесь подробнее важнейший случай, когда соприкасаются два проводника *1* и *2* (например медь и цинк) как между собою, так и с одним и тем же изолятором (например воздухом). На черт. 5 проводники, форма которых безразлична, представлены в виде прямоугольных кусков, особая пограничная кривая проходит перпендикулярно к плоскости чертежа и пересекает его в точке P. Контактные разности потенциалов на трех пограничных поверхностях в вышеуказанном смысле пусть будут E_{01}, E_{02} и E_{12}. Тогда мы можем проследить за поведением потенциала φ, если по какой-нибудь кривой, например по кругу, станем обходить в плоскости чертежа особенную точку P. Начнем с точки A в изоляторе *0*, лежащей непосредственно у самой поверхности проводника *1*, и назовем потенциал в этом месте через φ_1; тогда потенциал в точке B по другую сторону этой границы будет $\varphi_1 + E_{01}$, и эту вели-



Черт. 5.

чиму он сохранит везде внутри проводника *1* до перехода через границу от C к D в проводник *2*, где потенциал примет значение $\varphi_1+E_{01}+E_{12}$, которое будет неизменным внутри проводника *2*. Наконец, при переходе от точки E к F обратно в изолятор *0*, потенциал сделается равным

$$\varphi_1+E_{01}+E_{12}+E_{20}=\varphi_2,$$

и это начение останется постоянным в изоляторе вдоль всей границы соприкосновения с проводником *2*, тогда как значение φ_1 будет иметь место везде на поверхности *1*.

Так как, вообще говоря, сумма трех величин E не равна нулю, то поэтому в изоляторе установится постоянная разность потенциалов между каждыми двумя точками, лежащими на поверхности обоих проводников:

$$\varphi_2-\varphi_1=E_{01}+E_{12}+E_{20}=E. \tag{148}$$

Она называется контактной разностью потенциалов, контакт ным напряжением Вольта. Ее величина обусловлена химическими свойствами обоих проводников и изолятора, но она не зависит от заряда или потенциала всей системы проводников. В данном случае (*1*—медь, *2* — цинк, *0* — воздух) E положительно, т. е потенциал проводника *2* больше потенциала проводника *1*. Наглядно это можно изобразить таким способом:

$$E=\text{воздух/медь}+\text{медь/цинк}+\text{цинк/воздух}>0. \tag{148a}$$

Так как поверхности обоих проводников представляют различные поверхности уровня, то от поверхности (*2*) с бо̀льшим потенциалом идут силовые линии к поверхности (*1*) с меньшим потенциалом, приблизительно в форме дуги круга FA. Таким образом в изоляторе возникает электрическое поле, напряжение которого при приближении к особенной пограничной кривой делается даже безгранично большим, потому что там на бесконечно малом протяжении имеет место конечное падение потенциала.

Задача нахождения этого поля представляет только математические трудности. Чтобы разрешить ее, представим себе, что мы нашли такую функцию f_1, которая внутри изолятора вместе с своими первыми производными однозначна и непрерывна, удовлетворяет уравнению Лапласа, в бесконечности исчезающе мала, на границе изолятора с проводником *1* принимает значение 1, а на границе его с проводником *2* — значение 0. По общей, доказанной в конце § 19, теореме существует только одна такая функция f_1. Представим себе, что мы нашли также соответствующую функцию f_2, которая обращается в 0 на границе изолятора с проводником *1* и в 1 — на границе с проводником *2*. Тогда потенциал в какой-либо точке изолятора:

$$\varphi=\varphi_1 f_1+\varphi_2 f_2. \tag{149}$$

Для определения двух констант φ_1 и φ_2 служит уравнение (148) и, кроме того, уравнение, которое дает общий заряд обоих проводников или же потенциал одного из них.

Выражение для потенциала φ известным образом вполне определяет электростатическое поле в изоляторе и, в частности, плотности зарядов на поверхности обоих проводников. Вместе с тем, вообще; разрешена вся задача, так как внутри проводников поле отсутствует. Отсюда явствует, что три контактные разности потенциалов E_{01}, E_{12}, E_{20} входят только в соединении (148) друг с другом, таким образом, нет никаких оснований делать какие-либо заключения при помощи электростатических измерений о том, какую часть вносит каждая отдельная контактная разность потенциалов в их сумму E.

Очень важно, далее, следующее заключение: электростатическое поле нисколько не зависит от формы поверхности раздела обоих проводников *1* и *2*, так как эта поверхность не играет никакой роли при вычислении функций f_1 и f_2. Так что, если эта поверхность изменится, но особая пограничная кривая (*012*), останется неизменной, например в таком роде, что проводник *1* сократится до тонкого слоя, идущего вдоль границы (*01*), то электрическое поле все же останется неизменным. Из этого выясняется, какое значение для электрических свойств тел имеет присутствие на них тонкого проводящего слоя. Если только слой достаточно толст, чтобы его можно было принимать за однородный, то он производит такое электростатическое действие, которое совершенно одинаково с действием произвольно толстого слоя.

§ 28. Рассмотрим теперь электростатическое поле с контактной разностью потенциалов также и с точки зрения теории дальнодействия. Ради простоты мы оставим в стороне диэлектрические свойства изолятора, положив $\varepsilon = 1$, тем самым отождествляя действительное и свободное электричество. Вопрос заключается в том, как нужно распределить заряд на границе двух веществ, чтобы он вызвал скачок потенциала на этой поверхности. Ответ на это мы получим, если заменим сначала скачок крутым подъемом на коротком, но все же конечном протяжении, и затем перейдем к пределу. Если потенциал претерпевает в пределах очень короткого отрезка δ нормали к поверхности конечное изменение, тогда как по обе стороны этого промежуточного слоя он совсем не изменяется, то мы имеем дело тем самым по § 16 с электрическим полем конденсатора, и разность потенциалов, которую мы обозначим через $\varphi' - \varphi$, связана по (69) с плотностью заряда конденсатора:

$$\varphi' - \varphi = 4\pi h \cdot \delta. \tag{150}$$

Если мы перейдем к пределу $\delta = 0$, то для того, чтобы скачок потенциала оставался постоянным, произведение $h \cdot \delta$ должно иметь конечное значение g, т. е. на каждом элементе поверхности $d\sigma$ мы имеем электрический диполь, момент которого равен $h\,d\sigma$, умноженному на расстояние δ обоих зарядов, т. е. $g\,d\sigma$, а его ось расположена по направлению нормали к поверхности ν считая от отрицательного заряда к положительному. Подобный, расположенный на поверхности в форме электрических диполей заряд мы будем называть **двойным электрическим слоем** с моментом $g(>0)$. По (150) при прохождении точки воздействия через такой слой с отрицательной на положительую сторону получается скачок потенциала:

$$\varphi' - \varphi = 4\pi g. \tag{151}$$

Так как скачок потенциала вдоль всей поверхности одинаков, то можно считать g постоянным и, следовательно, двойной слой однородным.

В связи с этим вычислим теперь в общем виде потенциал однородного двойного слоя, расположенного на любой заданной поверхности, с моментом g и с направлением оси по ν. Путем сравнения с (145) для него получается следующее выражение:

$$\varphi = \int \left(g_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + g_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + g_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности, ξ, η, ζ — его координаты, g_ξ, g_η, g_ζ — компоненты вектора g с направлением ν, или

$$\varphi = \int g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma, \tag{152}$$

и так как двойной слой однороден, то

$$\varphi = g \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma. \tag{153}$$

Эта величина допускает очень простое геометрическое истолкование. Именно, можно написать:

$$\varphi = -g \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \nu} d\sigma. \tag{154}$$

Здесь $\frac{\partial r}{\partial \nu}$ представляет косинус угла, который образует с нормалью радиус-вектор r, проведенный из точки воздействия (x, y, z) к элементу поверхности $d\sigma$. Этот косинус положителен, если r возрастает одновременно с ν, стало быть, если точка воздействия лежит на отрицательной стороне двойного слоя. Произведение $\frac{\partial r}{\partial \nu} \cdot d\sigma$ есть нормальное сечение бесконечно тонкого конуса с вершиной в точке воздействия, вырезающего из двойного слоя элемент поверхности $d\sigma$. Это сечение, разделенное на r^2, дает часть поверхности, которую тот же конус вырезает на шаре радиуса 1, описанном из точки воздействия как из центра. Итак, подинтегральная величина представляет собою „телесный угол" или „кажущуюся величину" $d\Omega$ элемента поверхности $d\sigma$ относительно точки воздействия.

По интеграции из (154) вытекает:

$$\varphi = \pm g \cdot \Omega, \tag{155}$$

где Ω означает абсолютную величину телесного угла для всего двойного слоя, и нужно брать знак + или —, смотря по тому, обращен ли двойной слой к точке воздействия своей положительной или отрицательной стороной.

Замечательным в этом отношении является то обстоятельство, что телесный угол и, стало быть, потенциал φ зависят исключительно от пограничного контура двойного слоя, а в остальном совершенно не зависят от формы поверхности, на которой двойной слой расположен. При неизменном контуре поверхность может изменяться как угодно, и телесный угол постоянно будет один и тот же.

Если двойной слой вовсе не имеет пограничного контура, т. е. если он целиком охватывает некоторую часть пространства, то его потенциал φ легко определить. Действительно, тогда для произвольно расположенной внутри объема точки воздействия Ω будет равно всей поверхности шара радиуса 1, т. е. 4π; следовательно, если внутренняя сторона двойного слоя положительна, то $\varphi = 4\pi g$.

Но для внешней точки воздействия двойной слой распадается на две части, разграниченных друг от друга кривой, по которой соприкасается с поверхностью конус, проведенный к ней из точки воздействия. Телесные углы этих двух частей поверхности равны, но заряды их противоположны, так как одна часть обращена к точке воздействия своей положительной стороной, другая отрицательной; поэтому проистекающие от них потенциалы взаимно уничтожаются, и получается, что $\varphi = 0$. При прохождении точки воздействия через двойной слой потенциал, таким образом, испытывает скачок $4\pi g$, в полном соответствии с уравнением (151), выведенным для другого случая.

В самом деле, легко видеть, что это уравнение дает совершенно общее соотношение между скачком потенциала и моментом двойного слоя. Ведь скачок потенциала может зависеть только от свойств двойного слоя на том месте, где точка воздействия проникает через него, но не от его свойств на конечно удаленных элементах поверхности, потенциалы которых все непрерывны.

Если мы спросим себя о поведении первых производных потенциала двойного слоя при проникновении точки воздействия через слой, то, во-первых, понятно, что тангенциальные производные остаются непрерывными, так как диференцирование уравнения (151), которое имеет место вдоль всей поверхности, дает для разности производных от φ' и φ по какому-нибудь направлению, лежащему на поверхности, величину нуль. Но и нормальные производные не претерпевают никакого скачка, ибо для замкнутого двойного слоя они по вышеуказанному равны нулю как вне, так и внутри, т. е. непрерывны, и то же самое свойство они должны иметь и в случае произвольного двойного слоя, так как лежащий на конечном расстоянии пограничный контур не может иметь никакого влияния на свойства непрерывности.

Первые производные потенциальной функции φ дают величину и направление силы, оказываемой двойным слоем на заряд в точке воздействия. Эта сила для случая замкнутого двойного слоя везде равна нулю как вне, так и внутри его, а для незамкнутого двойного слоя зависит единственно и всецело от пограничного контура. В остальном положение поверхности не имеет никакого физического значения для создаваемого двойным слоем электрического поля. Электрические силовые линии начинаются на положительной стороне слоя (§ 15) и идут во вне круга пограничного контура к отрицательной стороне. Начало и конец силовой линии совпадают, так что можно смотреть на начинающиеся линии просто как на продолжение оканчивающихся, без всякого физического перерыва. Вблизи пограничного контура огибающие его силовые линии стягиваются в небольшие круги, и здесь напряжение поля чрезвычайно велико, потому-то на коротком протяжении происходит конечное падение потенциала. Соотношения здесь совершенно такие же, как для потенциала скоростей и линии тока бесконечно тонкого вихревого кольца в несжимаемой жидкости (ср. *2*, § 75). Вычислим в виде примера потенциал и напряжение поля к р у г о в о г о двойного слоя радиуса R для точки воздействия, расположенной на его оси. Примем ось двойного слоя за положительную ось z. Тогда телесный угол круглой пластинки для точки воздействия на положительной стороне слоя на расстоянии z от центра круга выразится:

$$\Omega = \iint \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

где по φ интеграция производится от 0 до 2π, по ϑ от 0 до $\operatorname{arc\,tg} \frac{R}{z}$. Это дает:

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right). \tag{156}$$

Таким образом по (155):

$$\varphi = 2\pi g\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right), \tag{157}$$

тогда как для точки воздействия на отрицательной стороне слоя ($z < 0$) имеет место выражение:

$$\varphi = -2\pi g\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right). \tag{157a}$$

Если точка воздействия пройдет через слой с отрицательной стороны на положительную, то потенциал изменится скачком с $-2\pi g$ на $+2\pi g$, соответственно уравнению (151). Наоборот, производная от потенциала

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{2\pi R^2 g}{(R^2+z^2)^{3/2}}=-\mathbf{E}_z \tag{158}$$

везде непрерывна, также и при переходе через слой. Она сохраняет также свое значение, если двойной слой вообразить расположенным на какой угодно поверхности, ограниченной тем же самым контуром. Только круговая линия сама по себе имеет физическое значение для поля, создаваемого двойным слоем. Напряжение поля $\mathbf{E}_z$, как видно, везде положительно и симметрично по отношению к плоскости круга: на положительной стороне перевешивает отталкивание положительной стороны слоя, на отрицательной — притяжение отрицательной стороны. В бесконечности напряжение равно нулю, максимального значения оно достигает в плоскости круга, именно:

$$\mathbf{E}_z=\frac{2\pi g}{R}. \tag{159}$$

§ 29. Мы познакомились теперь, в целом, с тремя видами потенциала: потенциалом масс, распределенных в пространстве, потенциалом поверхностных масс и однородных двойных слоев. Для потенциала первого рода является характерным, что он удовлетворяет уравнению Пуассона [*I*, (132)], с объемной плотностью k, причем потенциал и его первые производные непрерывны. Для второго характерна прерывность нормальной производной, обусловленная поверхностной плотностью h (85), тогда как сам потенциал все еще непрерывен и везде удовлетворяет уравнению Лапласа. Третий тип потенциала характеризуется тем, что потенциал сам претерпевает нарушение непрерывности, обусловленное моментом g (151), тогда как его производные остаются непрерывными, и уравнение Лапласа также сохраняет для него свою силу.

Обратно, всякую произвольно заданную однозначную функцию f пространственных координат x, y, z, которая вместе с ее производными может быть также прерывной на определенных поверхностях и в бесконечности обращается в нуль, можно всегда представить единственным образом как потенциал притягивающихся, лежащих на конечном расстоянии масс, которые распределены частью по объему, частью по поверхности и частью в виде двойных слоев. В самом деле, вычислим из скачка f на поверхности разрыва по (115) значение g; далее, из скачка для нормальной производной $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ по (85) значение h, наконец, из величины Δf по уравнению Пуассона [1, (132)] значение k и составим потенциальную функцию:

$$\varphi = \int g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma + \int \frac{h\, d\sigma}{r} + \int \frac{k\, d\tau}{r}. \tag{160}$$

Разность $\varphi - f$, рассматриваемая как функция от x, y, z, обладает следующими свойствами: она однозначна и вместе со своими первыми производными всюду непрерывна, так как соответствующие скачки с φ и f взаимно компенсируются. Далее, она удовлетворяет уравнению Лапласа и в бесконечности обращается в нуль, поэтому на основании общей теоремы, доказанной в § 19, эта функция равна нулю, т. е. $\varphi = f$.

Три соотношения между объемной плотностью k, поверхностной плотностью h и плотностью двойного слоя g, с одной стороны, и свойствами потенциала, с другой, тесно между собою связаны и могут быть также формально выведены одно из другого, если каждую прерывность заменить хотя и быстрым, но конечным изменением с последующим затем переходом к пределу. Представим себе, например, в случае плоской равномерно заряженной поверхности проводника с нормалью ν, что геометрическая поверхность заменена пространственно неоднородным слоем очень малой толщины δ. Тогда для объемной дивергенции φ имеет место уравнение Пуассона:

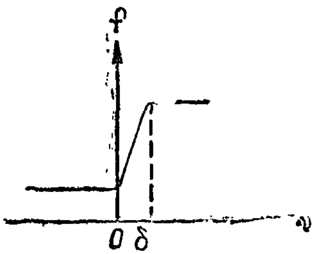
$$\operatorname{div} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2} = -4\pi k.$$

По интеграции этого уравнения от $\nu = 0$ до $\nu = \delta$ мы получаем:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -4\pi \int_0^\delta k\, d\nu = -4\pi h,$$

что тождественно с условием (85) для поверхностной дивергенции.

Точно так же можно себе представить, что скачок в величине самого потенциала φ заменен крутым, но конечным, происходящим в пределах слоя δ подъемом, и тогда из хода кривой для φ непосредственно видно, что представляемая второй производной $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu^2}$ кривизна кривой в начале и в конце промежуточного слоя достигает очень большой величины, но противоположна по знаку, соответственно двум находящимся там противоположным зарядам двойного слоя.



Черт. 6.

Для некоторых общих исследований этот способ трактования вопроса, избегающий всякого рода прерывностей и имеющий поэтому дело вообще с пространственно распределенной плотностью заряда

k и с уравнением Пуассона, очень удобен вследствие своего единообразия. Однако в таком случае вследствие существования конечных промежуточных слоев тела уже не могут более рассматриваться как всюду однородные.

§ 30. Если теперь мы вернемся опять к исследованиям, выполненным в начале этой главы, то выведенные нами там теоремы могут быть частью освещены с точки зрения действия на расстоянии с новой стороны. Если, например, в системе проводников и изоляторов на всех имеющихся пограничных поверхностях соприкасаются всегда только два вещества, то непосредственно очевидно, что наличие контактной разности потенциалов не произведет никакого влияния на электростатическое поле. В самом деле, двойные слои, соответствующие скачкам потенциала, все замкнуты и поэтому не производят никакого физического действия ни внутри, ни вне.

Но если два проводника *1* и *2* соприкасаются между собою и с изолятором *0*, как на черт. 5, то мы имеем дело с тремя однородными двойными слоями (*01*), (*12*), (*20*) с общим пограничным контуром (*012*), и так как действие однородного двойного слоя зависит только от пограничного контура, то мы можем вообразить себе, что все три слоя расположены на одной и той же поверхности с тем же пограничным контуром, из чего непосредственно следует, что для электростатического поля в изоляторе имеет значение только представляемая (148) сумма Σ трех соответственных контактных разностей потенциалов—вольтова контактная разность потенциалов, и что нет возможности при помощи электростатических измерений выделить из этой суммы каждое слагаемое в отдельности.

Если в изоляторе *0* находятся не два проводника *1* и *2*, а несколько: *1*, *2*, *3*,... ν, n, соединенных последовательно друг с другом в одну проводящую цепь, то такая система носит название в о л ь т о в о й ц е п и. Вместо выражения (149) для потенциала φ электрического поля в изоляторе тогда получится более общее выражение:

$$\varphi = \varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3 + \dots + \varphi_n f_n, \tag{160a}$$

где функции f_1, f_2, f_3,..., f_n равны 1 на поверхности проводников с соответствующим им указателем, и равны 0 на поверхностях всех остальных проводников, тогда как постоянные φ_1, φ_2, φ_3,... ...,φ_n, дающие значения потенциала в изоляторе непосредственно на поверхности соответствующего проводника, однозначно определены в о л ь т о в о й контактной разностью потенциалов (148) и величиною или полного заряда системы проводников, или же потенциала на одном из проводников.

Напряжение всей цепи, или разность потенциалов $\varphi_n - \varphi_1$, прямо получается, если заставить точку воздействия пройти из изолятора в проводник *1* и по прохождении через все проводники выйти из проводника n опять в изолятор:

$$\varphi_n - \varphi_1 = E_{01} + E_{12} + E_{23} + \dots + E_{n-1\cdot n} + E_{n0} = E. \tag{161}$$

В особенности важен случай, когда вещество последнего проводника n то же самое, что и первого проводника 1. Ибо тогда, очевидно, $E_{01}+E_{n0}=E_{01}+E_{10}=0$ и вследствие этого:

$$E=\varphi_n-\varphi_1=E_{12}+E_{23}+\ldots+E_{n-1,n}, \tag{162}$$

т. е. разность потенциалов цепи совершенно не зависит от природы изолятора. Подобного рода разность потенциалов (напряжение) называется, в частности, также **гальваническим** напряжением. Если, например, проводники $1, 2, 3, 4, 5$ суть по порядку: медь (Cu), цинк (Zn), раствор сернокислого цинка ($ZnSO_4$), раствор сернокислой меди ($CuSO_4$), медь, то гальваническое напряжение этой цепи, так называемого гальванического элемента Даниеля:

$$E=\mathrm{Cu}|\mathrm{Zn}+\mathrm{Zn}|\mathrm{ZnSO_4aq}+\mathrm{ZnSO_4aq}|\mathrm{CuSO_4aq}+\mathrm{CuSO_4aq}|\mathrm{Cu}. \tag{163}$$

Изолятор в противоположность вольтовой разности потенциалов не играет здесь никакой роли.

§ 31. Возникает совершенно новый случай, если конечное звено цепи—проводник n—соединить проводником с первым звеном—проводником 1, или если иметь дело не с „открытой" цепью, как это было до сих пор, а с „замкнутой" цепью. Ведь тогда система проводников образует двусвязное пространство (ср. 2, § 69), т. е. не все кривые, идущие внутри проводящего пространства от одного проводника к другому, могут быть переведены одна в другую непрерывным их преобразованием. В этом случае вообще получаются поэтому два различных значения для разности потенциалов каких-либо двух проводников, например 1 и 2, смотря по тому пути, по которому точка воздействия проводится из одного проводника в другой. Так, например, разность потенциалов между 1 и 2 есть E_{12}, но она также равна $E_{1n}+E_{n,n-1}+$ $+E_{43}+E_{32}$, и так как, по существу, электрический потенциал однозначен, то, вообще говоря, возникает противоречие, т. е. электростатическое поле в предполагаемом случае вообще не может быть осуществлено. Только при частном предположении, именно, что указанные выше значения между собою равны, или что если написать это в симметричной форме:

$$E_{12}+E_{23}+\ldots+E_{n-1,n}+E_{n}=0, \tag{164}$$

необходимые для существования электростатического поля условия будут выполнены. Соотношение, представленное выражением (164), которое, собственно, относится к химическим свойствам проводников, называется **законом последовательности напряжений**. В замкнутой проводящей цепи, таким образом, электростатическое поле возможно только тогда, когда проводники удовлетворяют закону последовательности напряжений. Поэтому здесь мы будем принимать, что уравнение (164) удовлетворяется. Противоположный случай мы пока оставим в стороне и только впоследствии, в главе V мы к нему вернемся.

Те проводники, которые удовлетворяют закону последовательности напряжений, мы назовем „проводниками первого класса", а остальные—„проводниками второго класса". Если у нас имеются три проводника первого класса: *1*, *2*, *3*, то для них имеет место по (64):

$$E_{12}+E_{23}+E_{31}=0,$$

или

$$E_{12}=E_{32}-E_{31}.$$

В этом уравнении контактное напряжение проводников *1* и *2* представлено в виде разности двух величин, из которых первая совершенно не связана с проводником *1*, а вторая с проводником *2*. Так как проводник *3* в прочих отношениях совершенно произволен и его влияние в обоих членах разности уничтожается, то он входит в величины E_{32} и E_{31} только в виде произвольной аддитивной постоянной. Если мы эту постоянную совсем опустим в этом соотношении, то оно может быть написано в виде:

$$E_{12}=E_2-E_1, \tag{165}$$

причем аддитивную постоянную в величинах E_1 и E_2 мы оставляем неопределенной. Она, конечно, всегда может быть выбрана такой, чтобы обе величины E_1 и E_2 были положительными.

Соотношение (165) дает необходимое и достаточное условие для того, что два проводника *1* и *2* — проводники первого класса. В самом деле, непосредственно видно, что в каждой цепи проводников, для которой уравнение (165) удовлетворяется, тождественно удовлетворяется также закон последовательности напряжений (164).

Уравнение (165) дает возможность все проводники первого класса расположить в один ряд в порядке числовых значений положительных величин E_1, E_2, E_3,..., начиная с меньших и заканчивая бо́льшими величинами: это — гальванический ряд напряжений. Из вида этого ряда возможно непосредственно усмотреть знак контактного напряжения для каких-нибудь двух проводников, так как каждый проводник ряда по (165) обладает при соприкосновении с предшествующим проводником высшим потенциалом, при соприкосновении с последующим проводником — низшим потенциалом.

Для вольтова напряжения двух проводников первого класса по (148) и (165) имеет место соотношение:

$$\varphi_2-\varphi_1=E_{01}+E_2-E_1+E_{20},$$

или

$$\varphi_2-\varphi_1=E_2'-E_1', \tag{166}$$

если положить:

$$E_1'=E_1+E_{10},\quad E_2'=E_2+E_{20}. \tag{167}$$

Из этого мы видим, что не только для гальванических, но и для вольтовых контактных напряжений проводников первого класса существует последовательность напряжений. Только порядок проводников в этой последовательности напряжений вообще другой, чем в прежней, ибо он существенно обусловлен химическими свойствами изолятора 0. Вследствие того, что на это обстоятельство не обращали внимания, возникали большие недоразумения, которые занимают большое место в литературе по этому вопросу.

§ 32. Обращаясь в конце еще раз к вопросу о химическом различии проводников первого и второго класса, рассмотрим опять замкнутую цепь, в которую включены один или несколько проводников второго класса. В такой цепи ни при каких условиях электростатическое поле не может существовать. Следовательно, возникает электрический ток. Но этот ток не может не произвести в системе проводников каких-либо изменений, ибо иначе он продолжался бы вечно, и действия, производимые им, постоянно возникали бы из ничего, в противоречии с универсальным принципом сохранения энергии. Отсюда можно заключить, что ток должен вызвать некоторое изменение в контактных напряжениях, и вместе с тем в химических свойствах проводящих поверхностей, и именно, как раз у тех проводников, которым он обязан своим возникновением, т. е. у находящихся в цепи проводников второго класса. Назовем проводник, химические свойства которого изменяются протекающим через него электрическим током, электролитом, тогда можно выставить следующее общее, подтверждаемое в самых широких пределах опытами, положение: все проводники второго класса электролиты. Напротив, все проводники, которые не изменяются химически электрическим током, т. е. все металлы, суть необходимо проводники первого класса.

ГЛАВА III

МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 33. Возвращаясь к общим выводам § 13, мы перейдем теперь к законам магнитостатики, к которым мы применим, говоря по существу, такие же приемы обработки, каким мы следовали до сих пор. В качестве законов магнитостатического поля в системе однородных тел мы имеем для пространства внутри тела следующие уравнения (51): $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, и (57): $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, в связи с (30): $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, и для границы двух тел уравнение (52): $\mathbf{B}'_{\nu'} + \mathbf{B}_{\nu} = 0$.

Эти уравнения совершенно сходны с соответствующими уравнениями электростатики, но они существенно проще в том тношении, что в магнитные пограничные условия (52) не входит, как в соответствующие электрические (41), величина h, названная нами в § 20 действительной плотностью заряда; или, другими словами: для магнетизма действительный заряд, вообще, равен нулю, и не только объемный заряд (объемная дивергенция индукции), но и поверхностный заряд (поверхностная дивергенция индукции).

Поэтому, если разломить магнит, то каждый кусок опять представит собою магнит. Пространственное отделение положительного магнетизма от отрицательного, подобно тому как это имеет место для положительного и отрицательного электричества, невозможно, также невозможен и процесс, соответствующий электрическому току. В магнитном отношении все вещества—изоляторы.

Хотя, как выясняют эти положения, магнитные поля по сравнению с электрическими отличаются своей значительной простотой, зато в других отношениях, не менее важных, они оказываются несравненно сложнее. Именно, точные измерения показали, что в целом ряде широко распространенных веществ, так называемых „ферромагнитных", к которым принадлежат железо, кобальт, никель и некоторые сплавы марганца, магнитное состояние зависит не единственно только от напряжения поля для данного момента, как мы предполагали в § 3. Как можно по 2, § 21 выразиться, указанные вещества в магнитном отношении ведут себя не как совершенно упругие. Именно, если подобное тело находится в магнитном поле, напряжение которого то увеличивается, то уменьшается, то магнитная индукция в нем при каком-либо напряжении поля не представляет всегда определенной величины, но она меньше при возрастании поля и больше при убывании; можно сказать, она следует за напряжением поля, несколько прихрамывая. Поэтому здесь не может быть и речи о годности уравнения (30). Это явление носит название „гистерезиса". В интересах простоты мы исключим здесь из нашего рассмотрения все, что с ним связано.

Напротив, мы будем принимать здесь в расчет, вследствие его большой важности, другое явление, которое также обусловливает уклонение от уравнения (30), именно, что для ферромагнитных веществ индукция, даже если она зависит только от данного напряжения поля, вообще направлена не одинаково с напряжением поля и ему не пропорциональна, или что вместо векторного уравнения (30) имеет место совершенно другое соотношение между **H** и **B**. И в этом отношении, таким образом, магнетизм обнаруживает гораздо более сложное поведение, чем электричество. Действительно, между тем как диэлектрическая постоянная ε, по существу, независима от напряжения электрического поля и всегда больше 1, магнитная проницаемость μ, напротив, даже если она для какого-либо вещества представляет собою постоянную величину, может быть как больше, так и меньше 1. В первом случае вещество называется „парамагнитным" (платина, кислород, азот), в оследнем случае „диамагнитным" (висмут, медь, вода, водород).

Принимая во внимание эти обстоятельства, лучше всего сначала исследовать свойства магнитостатического поля, совершенно не принимая в расчет уравнения (30), единственного, которое характерно для специфического поведения веществ.

§ 34. Для индукции **B** из (51) и (52) вытекает совершенно общее положение, соответствующее уравнению (42) для действительного электрического заряда, что полный поток магнитной индукции через поверхность, ограничивающую какой-либо объем, равен нулю, или

$$\oint \mathbf{B}_\nu \, d\sigma = 0, \tag{168}$$

где кольцо вокруг знака интеграла должно обозначать, что дело идет о замкнутой поверхности. Для незамкнутой поверхности поток магнитной индукции зависит поэтому только от пограничного контура, но не от расположения или формы поверхности. Это легко усмотреть из того обстоятельства, что две различные поверхности с общим пограничным контуром вместе образуют замкнутую поверхность, для которой имеет тогда место теорема (168). Поэтому и в трубках магнитной индукции (§ 15) поток индукции везде одинаков и не изменяется при переходе через поверхность раздела двух тел.

Для напряжения поля $\mathbf{H}$ вытекает, с другой стороны, из (57), что оно имеет потенциал φ, т. е.

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{169}$$

Магнитный потенциал мы принимаем во всех случаях непрерывным, даже на границе двух различных сред, так как в противоположность электрическому потенциалу нет никаких экспериментальных оснований для предположения о его прерывности. Потенциал также однозначен, так как уравнение (169) имеет место во всем магнитостатическом поле, и пространство, занятое полем, односвязно.

Из всего этого следует, что надо делать различие между свойствами напряжения $\mathbf{H}$ и индукции $\mathbf{B}$, между силовыми линиями и линиями индукции, между силовым потоком и потоком индукции. В ферромагнитных веществах только силовые линии нормальны к системе поверхностей уровня $\varphi = \text{const}$ и направлены в сторону убывающего потенциала, тогда как линии индукции могут быть направлены совершенно иначе, даже в противоположном направлении. Наоборот, только для потока магнитной индукции имеет место простое соотношение (168). Силовой поток через замкнутую поверхность, конечно, может быть отличен от нуля, т. е. могут встретиться свободные магнитные заряды как объемные так и поверхностные, там, где возникают или исчезают силовые линии. С простыми примерами этого мы познакомимся ниже, в § 37 и 38.

Положим по *1*, (132):

$$\frac{\operatorname{div} \mathbf{H}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi = k' \tag{170}$$

(k'—объемная плотность свободного магнитного заряда), по (85):

$$\frac{\mathbf{H}\nu + \mathbf{H}\nu'}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{\partial \varphi'}{\partial' \nu}\right) = h' \tag{171}$$

(h' — поверхностная плотность свободного магнитного заряда), тогда по § 29:

$$\varphi = \int \frac{h'd\sigma}{r} + \int \frac{k'd\tau}{r}. \tag{172}$$

На этом основании напряжение магнитного поля всегда можно истолковывать как притяжение и отталкивание свободных зарядов. Если проинтегрировать уравнение (170) по всему бесконечному пространству и уравнение (171) по всем границам раздела двух тел, то выходит по 2, (82), что сумма этих двух интегралов тождественно равна нулю, т. е. полный свободный заряд магнитного поля всегда равен нулю.

Совершенно аналогично тому, как было сделано в § 26 относительно электрического потенциала, и магнитный потенциал может быть представлен не только при помощи свободных зарядов, но также и при помощи магнитной поляризации элементарных объемов всех тел, входящих в состав поля. Именно, положим аналогично тому, как в (141):

$$\frac{\mathbf{B} - \mathbf{H}}{4\pi} = \mathbf{M}, \tag{173}$$

и рассмотрим выражение (143а), заменив в нем **P** на **M**.

Вследствие соотношений (51), (52), (170), (171) оно оказывается совершенно тождественным с магнитным потенциалом (172). Следовательно, если (143а) заменить (143):

$$\varphi = \int \left(\mathbf{M}_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathbf{M}_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathbf{M}_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\tau. \tag{174}$$

Вектор $\mathbf{M}\,d\tau$ представляет „магнитную поляризацию", или намагничение элемента объема $d\tau$, абсолютная величина его — магнитный момент. Элемент объема образует магнитный диполь, ось которого идет от отрицательного к положительному полюсу, а момент дается произведением магнитного заряда полюса на междуполюсное расстояние.

§ 35. Тогда как выводы предыдущего параграфа приложимы без исключения ко всем телам, мы предпримем теперь специализацию наших задач, которая обусловливается особым поведением определенных веществ. В каждом случае дело сводится к уравнению (30) или к тому, которое его заменяет, а именно, к характерному для данного вещества соотношению между индукцией и напряжением поля, или, в более удобной формулировке, между намагничением **M**, определяемым (173), и напряжением поля **H**.

В парамагнитных и диамагнитных веществах, для которых уравнение (30) имеет место и μ постоянно, мы имеем:

$$\mathbf{M} = \varkappa \mathbf{H} \tag{175}$$

где

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi}. \tag{176}$$

„Магнитная восприимчивость“ $\varkappa$ вещества положительна для парамагнитных веществ, отрицательна для диамагнитных и равна нулю для пустоты. В парамагнитных веществах ось намагничения совпадает, таким образом, с направлением поля, в диамагнитных она имеет противоположное ему направление.

Совершенно иначе ведут себя ферромагнитные вещества. Прежде всего в этом случае намагничение не исчезает вместе с напряжением поля, но $\mathbf{M}$ вообще имеет конечное значение при $\mathbf{H} = 0$, — это так называемый „остаточный магнетизм“. Идеальный предельный случай представляют так называемые „постоянные магниты“, намагничение которых

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p \tag{177}$$

абсолютно постоянно и совершенно не зависит от напряжения поля. Более общий тип магнитного поведения получится, если комбинировать (175) и (177):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \varkappa\mathbf{H}, \tag{178}$$

или также по (173):

$$\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{M}_p + \mu\mathbf{H}. \tag{178a}$$

В этих уравнениях второй член правой части в противоположность первому называется также, соответственно, „временным магнетизмом“ и „временной индукцией“. Конечно, векторы $\mathbf{M}_p$ и $\mathbf{H}$, вообще, имеют различные направления. В некоторых ферромагнитных веществах восприимчивость $\varkappa$ принимает при исчезающе малых значениях $\mathbf{M}_p$ необычайно большие значения; такие вещества называются в магнитном отношении „мягкими“. Однако, строго говоря, $\varkappa$ не сохраняет постоянной величины ни для какого вещества, ибо при неограниченном возрастании напряжения поля $\mathbf{H}$ намагничение $\mathbf{M}$ никогда не возрастает безгранично, но приближается к определенному, характерному для каждого вещества, пределу, к „пределу насыщения“ намагничения. Чтобы учесть это обстоятельство, необходимо принять, следовательно что восприимчивость $\varkappa$ (178) обращается в нуль при бесконечно большом напряжении поля.

Когда задано для каждого тела характеризующее его магнитное состояние уравнение, например, в форме (175), (177) или (178), то при помощи законов предыдущего § 34 можно однозначно определить все свойства магнитостатического поля.

Простое рассуждение показывает, что для сохранения магнитостатического поля непременно требуется постоянный магнетизм, так как, если налицо имеются только парамагнитные и диамагнитные вещества, то все уравнения поля удовлетворяются тем, что как $\mathbf{H}$, так и $\mathbf{B}$, всюду исчезают.

Далее, заметим еще для дальнейшего употребления, что выражение (4) для магнитной энергии годится также для постоянного магнита с постоянной проницаемостью μ типа (178а), что тотчас станет ясным, если исходить из общего соотношения (32а) и принять во внимание, что в данном случае $d\mathbf{B} = \mu\, d\mathbf{H}$.

§ 36. Чтобы сделать некоторые применения выведенных теорем, начнем с простейшего случая постоянных магнитов. Рассмотрим сначала л и н е й н ы й п о с т о я н н ы й м а г н и т, т. е. как угодно длинный и как угодно изогнутый тонкий магнитный стержень в пустоте. Пусть бесконечно тонкое поперечное сечение стержня f, его длина l, элемент длины $d\lambda$, намагничение $\mathbf{M}_\lambda$, представляющее собою произвольно заданную функцию, его направление пусть совпадает с λ.

Тогда по (174) потенциал соответствующего магнитного поля, так как в пустоте намагничение равно нулю, есть

$$\varphi = \int\limits_0^l M_\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda} d\tau = \int\limits_0^l f M_\lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda} d\lambda, \tag{179}$$

или, полагая $f\mathbf{M}_\lambda = M$:

$$\varphi = \int\limits_0^l M \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\varphi = \frac{M_1}{r_1} - \frac{M_0}{r_0} - \int\limits_0^l \frac{\partial M}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{r}, \tag{180}$$

где индексы 0 и l относятся к обоим концам стержня. На основании этого магнитный стержень действует в магнитном пространстве, как два магнитных полюса на его концах с магнитными зарядами M_1 и M_0 вместе с зарядом, непрерывно распределенным по всей его длине, с плотностью $-\frac{\partial M}{\partial \lambda}$. Сумма всех этих свободных зарядов, конечно, должна равняться нулю, как это следует по § 34 Если M постоянно вдоль всего стержня (равномерное намагничение), то $M_1 = M_0$ и

$$\varphi = M_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right). \tag{181}$$

В этом частном случае, следовательно, стержень может быть заменен одними полюсами на концах.

Если оба полюса совпадают, если, таким образом, стержень образует замкнутую кривую, так называемый кольцевой магнит, то $\varphi = 0$, и магнитное поле совершенно отсутствует. Из этого вытекает теорема, что равномерно намагниченный произвольной формы кольцевой магнит не производит никакого магнитного действия во внешнем пространстве.

Если стержень так длинен, что один из двух полюсов лежит очень далеко от точки воздействия, то остается только действие второго полюса. Таким образом можно приблизительно осуществить отдельный, положительный или отрицательный, магнитный полюс, если взять равномерно намагниченный, достаточно длинный стержень.

Употребляемые на практике прямолинейные магниты намагничены неравномерно, но M, полагая его положительным, в середине имеет наибольшую величину и к обоим концам симметрично убывает. Поэтому $\frac{\partial M}{\partial \lambda}$ в середине нуль, для малых значений λ — положительно, для больших — отрицательно при той же абсолютной величине. Непрерывно распределенная плотность свободного заряда имеет, таким образом, с каждой стороны тот же знак, какой на соответственном конце имеет заряд. Так как величина его на обеих сторонах одинакова, то оба полюса заряжены одинаково. Заряды, которые прибавляются вследствие этого к зарядам полюсов, оказывают на очень удаленную точку воздействия такое действие, как если бы оба полюса были несколько смещены от концов к середине, так что расстояние полюсов составляет, примерно, $^5/_6$ длины стержня.

§ 37. Предположим теперь, что у нас имеется в пустоте постоянный магнит произвольных размеров, но с равномерным намагничением **M**, направление которого мы примем за направление оси z-ов. Тогда по (174) как внутри, так и во внешнем пространстве:

$$\varphi = \mathbf{M} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \, d\tau, \tag{182}$$

где интеграция распространяется на объем магнита, или

$$\varphi = -\mathbf{M} \int \frac{\cos(\nu z)}{r} \, d\sigma. \tag{183}$$

Поэтому магнит действует внутри и вовне, как магнитный заряд, распределенный на его поверхности с плотностью $-\mathbf{M}\cos(\nu z)$. Величину этой плотности свободного заряда можно легко изобразить наглядно следующим образом. Вообразим, что магнит, не изменяя своей формы, бесконечно мало переместился в направлении положительной оси z, при этом каждый элемент $d\sigma$ поверхности опишет некоторый бесконечно малый объем в виде косого цилиндра с основанием $d\sigma$. Объем этого цилиндра, оставляя знак в стороне, пропорционален $\cos(\nu z)\, d\sigma$, т. е. как раз соответствует величине находящегося на $d\sigma$ свободного заряда. На передней поверхности смещенного магнита заряд положителен, на задней — отрицателен, нейтральная зона (§ 16) находится на тех местах, где поверхность расположена параллельно оси z.

Силовые линии идут от положительного заряда к отрицательному и притом как внутри магнита, так и в пустоте вокруг него, так что каждый положительно заряженный элемент поверхности посылает в обе стороны по силовой трубке, каждый отрицательно заряженный элемент поверхности воспринимает с обеих сторон по силовой трубке. Наоборот, трубки индукции идут по § 34, не прерываясь, образуя постоянный поток индукции, через поверхность магнита, и так как они в пустоте совпадают с силовыми линиями, то внутри магнита они идут в направлении, противоположном силовым трубкам, т. е. от отрицательного к положительному свободному заряду. Линия индукции и трубки индукции поэтому являются замкнутыми образованиями, впрочем, на поверхности, вследствие прерывности тангенциальной составляющей индукции, они испытывают излом.

Для вычисления потенциала φ в настоящем случае более подходящим является не выражение (183), а следующее, соответствующее превращению [*2*, (339)] в [*2*, (340)], преобразование (182):

$$\varphi = -\mathrm{M}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, d\tau,$$

или

$$\varphi = -\mathrm{M}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{184}$$

где

$$\psi = \int \frac{d\tau}{r} \tag{185}$$

обозначает ньютонову потенциальную функцию для случая, когда объем магнита был бы заполнен массою с плотностью 1.

Выполним все вычисления для случая равномерно и постоянно намагниченного шара радиуса R, помещенного в пустоте. По (185) и I, § 38 для точки воздействия, лежащей вне, на расстоянии r_0 ($>R$) от центра:

$$\psi_a = \frac{4}{3}R^3\pi \cdot \frac{1}{r_0}.$$

Наоборот, внутри ($r_0 < R$):

$$\psi_i = \frac{2\pi}{3}(3R^2 - r_0^2).$$

Отсюда следует по (184), так как

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

что магнитный потенциал во внешнем пространстве:

$$\varphi_a = \frac{Mz}{r_0^3} = -M\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z}, \tag{186}$$

магнитный потенциал во внутреннем пространстве:

$$\varphi_i = \frac{Mz}{R^3}, \tag{187}$$

если обозначить магнитный момент всего шара через

$$M = \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \mathbf{M}. \tag{188}$$

Тем самым по (169) определено также напряжение поля $\mathbf{H}$. Во внешнем пространстве равномерно намагниченный шар действует так же, как магнитный диполь с магнитным моментом шара; внутри магнита, наоборот, напряжение поля постоянно, поле однородно:

$$\mathbf{H}_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = -\frac{M}{R^3} = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{M}, \tag{189}$$

пропорционально намагничению и, что особенно важно и замечательно, не зависит от радиуса шара. Силовые линии идут в направлении от положительных к отрицательным z как внутри, так и вне.

Для индукции, напротив, мы имеем по (173):

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{B}_i = \frac{8\pi}{3}\mathbf{M}, \tag{190}$$

Поэтому линии индукций внутри магнита направлены в обратную сторону от отрицательных к положительным z.

Так же просто разрешается случай, когда в шаре внутри имеется пустое пространство, ограниченное концентрической шаровой поверхностью. При этом, между прочим, получается такой результат, что магнитное действие равномерно намагниченного полого шара во внутреннем пустом пространстве равно нулю.

§ 38. То обстоятельство, что равномерно намагниченный шар внутри создает однородное поле, позволяет обобщить предыдущие теоремы простым путем на тот случай, когда шар, кроме указанного намагничения, которое мы станем далее обозначать через $\mathbf{M}_p$, обладает также временным намагничением, по типу уравнения (178), с произвольной постоянной восприимчивостью $\varkappa$ и соответственной магнитной проницаемостью μ. В интересах большего обобщения мы станем представлять себе, что шар находится не в магнитно нейтральном пустом пространстве, а в однородном магнитном поле, параллельном оси z-ов, с напряжением $\mathbf{H}$. Проницаемость окружающей среды пусть будет μ_0. Тогда мы можем удовлетворить всем условиям для магнитостатического поля, если, обобщая уравнения (188) и (187), положим для потенциала во внешнем пространстве:

$$\varphi_a = \frac{C_0 z}{r_0^3} - \mathbf{H}_0 z \tag{191}$$

и внутри:

$$\varphi_i = Cz. \tag{192}$$

Значения обоих постоянных C_0 и C получатся из пограничных условий на поверхности шара, а именно: во-первых, из условия, что потенциал φ сам непрерывен:

$$\frac{C_0}{R^3} - \mathbf{H}_0 = C, \tag{193}$$

во-вторых, из условия, что нормальная составляющая $\mathbf{B}_\nu$ индукции непрерывна, т. е. по (178а):

$$(\mu_0 \mathbf{H}_0)_{r_0} = (4\pi \mathbf{M}_p + \mu \mathbf{H}_i)_{r_0},$$

или

$$-\mu_0 \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r_0}\right)_R = 4\,\pi \mathbf{M}_p \cdot \frac{z}{R} - \mu \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_0}\right)_R,$$

следовательно:

$$\frac{2\mu_0 C_0}{R^3} + \mu_0 \mathbf{H}_0 = 4\pi \mathbf{M}_p - \mu C \tag{194}$$

Если вычислить постоянные C_0 и C из (193) и (194), то для магнитного потенциала во-вне и внутри получается по (191) и (192):

$$\varphi_a = \frac{4\pi \mathbf{M}_p + (\mu - \mu_0)\,\mathbf{H}_0}{\mu + 2\mu_0} \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 z - \mathbf{H}_0 z, \tag{195}$$

$$\varphi_i = \frac{4\pi \mathbf{M}_p - 3\mu_0 \mathbf{H}_0}{\mu + 2\mu_0} \cdot z, \tag{196}$$

и вместе с тем определяются все свойства этого магнитного поля. Во-вне шар действует, как диполь, внутри его поле однородно с напряжением:

$$\mathbf{H}_i = \frac{4\pi \mathbf{M}_p - 3\mu_0 \mathbf{H}_0}{\mu + 2\mu_0}. \tag{197}$$

Индукция по (178а):

$$\mathbf{B}_i = \frac{8\pi \mathbf{M}_p + 3\mu \mathbf{H}_0}{\mu + 2\mu_0} \cdot \mu_0, \tag{198}$$

и намагничение [(178)]:

$$\mathbf{M} = \frac{1 + 2\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{M}_p + \frac{3\mu_0 (\mu - 1)}{4\pi (\mu + 2\mu_0)} \cdot \mathbf{H}_0. \tag{199}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Для постоянного магнита $\mu = 1$ и $\mathbf{M}$ всегда равно $\mathbf{M}_p$.

Если внешнего поля $\mathbf{H}_0$ не будет, то магнит действует во внешнем пространстве, как двойной полюс с моментом

$$\frac{4\pi R^3 \mathbf{M}_p}{\mu + 2\mu_0} = \frac{3M_p}{\mu + 2\mu_0}, \tag{200}$$

где M_p аналогично (188) означает постоянный („перманентный") момент всего шара. Тогда во внешнем пространстве потенциал будет:

$$\varphi_a = \frac{3M_p}{\mu + 2\mu_0} \cdot \frac{z}{r_0{}^3}. \tag{200a}$$

Для $\mu = \mu_0 = 1$ мы имеем рассмотренный в предшествующем параграфе случай постоянного магнита в пустоте. Всякая положительная восприимчивость как в магните, так и в окружающей среде, ослабляет, следовательно, возбужденное постоянным магнетизмом поле, но восприимчивость среды оказывает более сильное влияние, чем восприимчивость магнита.

Если, с другой стороны, нет никакого постоянного магнетизма, т. е. шар в магнитном отношении мягок, то силовые линии совпадают везде с линиями индукции. Определяемое действие шара во-вне зависит от знака $\mu - \mu_0$, т. е. смотря по тому, больше или меньше проницаемость шара проницаемости окружающей среды, шар ослабляет или усиливает возбуждающее его однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. В предельном случае $\mu = \mu_0$ поле, что легко понять, присутствием шара вообще не изменяется.

Внутри шара напряжение поля:

$$\mathbf{H}_i = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0, \tag{201}$$

индукция:

$$\mathbf{B}_i = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0, \tag{202}$$

намагничение:

$$\mathbf{M} = \frac{3\mu_0(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2\mu)} \cdot \mathbf{H}_0. \tag{203}$$

Для самого важного случая $\mu_0 = 1$ намагничение шара следующее:

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} \mathbf{H}_0 = \frac{\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} \mathbf{H}_0. \tag{204}$$

Отношение намагничения $\mathbf{M}$ к намагничивающему внешнему полю $\mathbf{H}_0$ не следует смешивать с отношением $\mathbf{M}$ к напряжению внутреннего поля $\mathbf{H}_i$, которое по (175) представляет собою магнитную восприимчивость $\varkappa$. Различие между $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_i$ проистекает из того, что шар, как бы он ни был мал, вследствие своего намагничения создает внутри напряжение поля конечной величины. Ибо для $\mu_0 = 1$:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \tag{205}$$

Намагничение шара производит, следовательно, внутри его ослабление поля на величину $\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}$. Это явление называют поэтому „саморазмагничиванием", а числовой множитель $\frac{4\pi}{3}$ коэфициентом размагничивания шара. Его величина от величины шара совсем не зависит, но изменяется с формой магнитного тела. Вообще, внутри намагниченного однородным полем тела, даже очень малых размеров, напряжение поля, а вследствие этого также и намагничение, непостоянны. Только эллипсоид, намагниченный в направлении своей оси, обнаруживает это простое поведение. Поэтому-то телам, служащим для испытания магнитных свойств того вещества, из которого они приготовлены, придают эллипсоидальную форму.

Для бесконечно большого значения проницаемости или восприимчивости из (201) следует: $\mathbf{H}_i = 0$, $\varphi = \mathrm{const}$, и из (205):

$$\mathbf{M} = \frac{3}{4\pi}\mathbf{H}_0 .$$

Подобное тело, в магнитном отношении „абсолютно мягкое", обнаруживает наибольшее саморазмагничивание, которое совершенно компенсирует намагничивающее поле $\mathbf{H}_0$. Оно ведет себя в любом магнитном поле, как проводник в электрическом поле, в полном соответствии с положениями, имеющими место для изолятора с бесконечно большой диэлектрической постоянной ε (§ 17). Поэтому мягкое железо в магнитном отношении, смотря по величине μ, производит большее или меньшее экранирующее действие, которым пользуются, например, в панцырных гальванометрах для защиты от возмущающего влияния земного магнитного поля.

ГЛАВА IV

ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В СТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 39. Хотя в предыдущем мы до известной степени развили теорию, однако, еще не познакомились ни с одним методом, который действительно позволяет измерить какую-либо из рассмотренных нами величин и тем самым подвергнуть теорию экспериментальному испытанию. Так как каждое измерение в конце концов сводится к механическому действию, то, чтобы теория могла достичь своей подлинной цели, необходимо дать картину механических или пондеромоторных действий в статическом поле. Для полного разрешения этой задачи нам нужно лишь вернуться к введенным в начале определениям различных электрических и магнитных величин, имеющим своим источником заимствованное из механики понятие энергии.

Начнем опять с электростатического поля. По (2) и (58) электрическая энергия произвольной системы заряженных проводников и изоляторов выражается:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon \mathbf{E}^2\, d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon (\operatorname{grad}\varphi)^2\, d\tau, \tag{206}$$

или, интегрируя по частям, по (59) и (62):

$$U = \frac{1}{2}\int h\varphi\, d\sigma, \tag{207}$$

где интеграция распространяется по всей поверхности раздела проводников и изоляторов. Вводя плотность свободного заряда h, по (88), можно по (73) также написать:

$$U=\frac{1}{2}\iint\frac{hh'}{r}\,d\sigma\,d\sigma', \tag{208}$$

где r означает расстояние каждых двух элементов поверхности $d\sigma$ и $d\sigma'$. При этом надо обратить внимание на то, что каждый элемент поверхности системы входит в интеграл один раз как $d\sigma$, а другой раз как $d\sigma'$.

Если все проводники заключены в одном общем изоляторе с диэлектрической постоянной ε, то по (92) $h'=\frac{h}{\varepsilon}$, h_1, причем мы снабдили значком 1, чтобы не смешивать его с плотностью заряда h, относящейся к элементу поверхности $d\sigma$. Поэтому мы имеем:

$$U=\frac{1}{2\varepsilon}\cdot\iint\frac{hh_1}{r}\,d\sigma\,d\sigma_1, \tag{209}$$

причем в данном интеграле каждая комбинация каждых двух элементов поверхности входит дважды. Члены двойного интеграла, соответствующие бесконечно малому значению r, для которого следовательно, $d\sigma$ и $d\sigma_1$ сливаются, добавляют к U только очень незначительную величину.

Если мы напишем вместо элементарных зарядов $h\,d\sigma$ и $h_1 d\sigma_1$ соответственно e и e_1 и если, кроме того, мы условимся, что каждая комбинация зарядов по два должна считаться только однажды, то числовой множитель $\frac{1}{2}$ в (209) исчезнет и мы получим:

$$U=\frac{1}{\varepsilon}\sum\sum\frac{ee_1}{r}. \tag{210}$$

Здесь двойная сумма представляет собой полный потенциал всех элементарных зарядов друг относительно друга, или потенциал всей системы зарядов на себя (*I*, § 104), так как потенциал каждого отдельного элементарного заряда на самого себя исчезающе мал.

Представленные в пяти последних формулах различные выражения электрической энергии в электростатическом поле все совершенно равнозначны, между тем как в динамических полях имеет место только первое [(206)] выражение.

§ 40. *Из выражения для электрической энергии по принципу* сохранения энергии мы приходим к закону механических действий электрического поля. Рассмотрим систему заряженных проводников и изоляторов, движущихся как угодно, однако, настолько медленно, что в каждый момент, для каждого положения тел, поле может быть рассматриваемо как электростатическое. Такое поле называют „квазистатическим". Практически это ограничение крайне незначительное, ибо время, потребное для того, чтобы электрические заряды распределились на поверхностях проводников соответственно расположению тел в данный момент, исчезающе мало по сравнению с тем, в течение которого происходит заметное перемещение этих последних.

Если мы отвлечемся от всех других сил, между ними также и от тяготения, то будем иметь дело с энергией только двух видов: кинетической K и электрической U, и по принципу энергии [1, (388)] для бесконечно малого времени:

$$d(K+U)=0.$$

С другой стороны, по 1, (386) изменение живой силы равно сумме механических или пондеромоторных работ всех сил:

$$dK=A.$$

Отсюда следует:

$$A=-dU, \tag{211}$$

т. е. при всяком произвольном перемещении системы заряженных проводников и изоляторов полная работа всех проистекающих от зарядов пондеромоторных сил равна и противоположна по знаку изменению энергии, обусловленному изменением конфигурации. Таким образом сила действует всегда в смысле уменьшения энергии. Так как изменение конфигурации системы может быть произведено совершенно произвольно, то эта теорема составляет самый общий закон пондеромоторных действий в статических полях. Чтобы в каждом отдельном случае из работы получить выражение силы, нужно только принять во внимание соответствующее перемещение.

§ 41. В качестве первого примера определим механическую силу, которую испытывает заряженная электричеством материальная точка с зарядом e, например употребленный нами в § 2 маленький пробный шарик, в изолирующей среде с диэлектрической постоянной ε, если там при помощи других заряженных точек образовано электрическое поле. Для этого мы должны сообщить точке воздействия с зарядом e бесконечно малое смещение, оставляя в покое все остальные заряды, которые создают поле и которые мы обозначим через e_1, а затем вычислить изменение энергии U, обусловленное этим смещением. При этом в двойной сумме (210) нужно рассматривать только те члены, которые содержат множителем e, так как расстояния между остальными созлающими поле зарядами, взятыми попарно, остаются постоянными. Мы можем поэтому написать:

$$U=\frac{1}{\varepsilon}\cdot e_1\cdot\sum\frac{e_1}{r}+\text{const}. \tag{212}$$

При этом применении формулы (210) надо, впрочем, заметить, что для конечного заряда e, сосредоточенного в бесконечно малом теле, потенциал его на самого себя не является исчезающе малым, напротив, он (положительный) бесконечно велик. Но, так как эта величина не изменяется при производимом нами перемещении, то мы можем ее считать включенной в const выражения (212). Принимая во внимание (73), вместо (212) можно также написать:

$$U = e \cdot \varphi + \text{const}, \tag{213}$$

и тогда из (211) мы получим для механической работы при каком либо перемещении заряженной точки воздействия с зарядом e и с координатами x, y, z:

$$A = -e\,d\varphi = -e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right).$$

Если, с другой стороны, через $\mathbf{F}$ мы обозначим механическую силу, которую испытывает заряд e в электростатическом поле, то

$$A = \mathbf{F}_x\,dx + \mathbf{F}_y\,dy + \mathbf{F}_z\,dz.$$

Сравнивая два последних уравнения, заключаем:

$$\mathbf{F} = -e\,\text{grad}\,\varphi = e\mathbf{E}, \tag{214}$$

т. е. с и л а р а в н а п р о и з в е д е н и ю з а р я д а н а н а п р я ж е н и е п о л я, независимо от диэлектрической постоянной.

Это положение дает совершенно общим образом также и для произвольного динамического поля механическую силу, с какою электрическое поле действует на покоящийся в нем точечный заряд. Действительно, электрическое поле вполне характеризуется его напряжением $\mathbf{E}$, вне зависимости от того, как поле возникло и статическое оно или нет.

В § 2 мы отождествили направление $\mathbf{E}$ с направлением действующей на пробный шарик силы $\mathbf{F}$ в том случае, когда пробный шарик был заряжен электричеством от кошачьего меха. Это электричество мы будем принимать за положительное, электричество же эбонитовой палки — за отрицательное.

Абсолютную величину заряда e и напряжения поля $\mathbf{E}$ можно выразить с помощью (214) в абсолютных механических единицах. Так, если поле создается одним только заряженным полюсом с зарядом e_1, который находится на расстоянии r от пробного шарика, то потенциал на расстоянии r от полюса есть:

$$\varphi = \frac{e_1}{\varepsilon r}, \tag{215}$$

напряжение поля:

$$|\mathbf{E}| = \frac{e_1}{\varepsilon r^2}, \tag{216}$$

энергия поля:

$$U = \frac{ee_1}{\varepsilon r} + \text{const}, \tag{217}$$

и механическая сила, действующая на пробный шарик e:

$$|\mathbf{F}| = \frac{ee_1}{\varepsilon r^2}. \tag{218}$$

Так как сила действует всегда в смысле уменьшения U, то для одноименных зарядов она — отталкивательная, для разноименных — притягивательная (закон Кулона).

Если оба шарика перенести в другую изолирующую среду с большей диэлектрической постоянной, то, так как e и e_1 остаются неизменными, сила становится меньшей. Всего больше величина силы F для пустоты.

По закону Кулона (218) единица количества электричества в гауссовой системе единиц определяется тем, что она на равный ей заряд на расстоянии 1 *см* действует с силой в 1 дину (*1*, § 9). В других системах единиц определение звучит менее просто. Полезно сделать себе наглядным на частных примерах порядок величины единиц, принятых в какой-либо определенной системе. В гауссовой системе единица количества электричества практически так мала, что при незначительном натирании эбонитовой палки легко можно получить сотни единиц. Что касается потенциала, то при помощи электрической машины с влиянием проводник можно довести, примерно, до $200\left[г^{\frac{1}{2}}\ см^{\frac{1}{2}}\ сек^{-1}\right]$. Напротив, гальваническое напряжение элемента Даниэля (163) в тех же единицах равно только 0,0035, и того же порядка, даже еще несколько меньше, вольтово напряжение (148а) между цинком и медью в воздухе.

§ 42. Мы познакомились с законом пондеромоторных действий электрических полей в двух совершенно различных формулировках, из которых каждая имеет свои отличительные преимущества и недостатки, так что в одних случаях лучше применять одну формулировку, в других — другую. Первую формулировку дает потенциальный, или интегральный, закон (211). Он определяет полную работу всех пондеромоторных сил при произведенном изменении конфигурации; он, таким образом, применим в особенности в том случае, когда дело идет о замене всех действующих сил одной равнодействующей. Часто потенциал или энергия U всего поля может быть выражена сравнительно простой формулой, которая позволяет, например, тотчас же установить, возрастает или же убывает потенциал при данном изменении конфигурации.

Тогда можно сразу же усмотреть, в какую сторону направлено результирующее механическое действие.

Если, с другой стороны, речь идет о том, чтобы получить точное представление о деталях рассматриваемого процесса, то рекомендуется применять диференциальный закон (214), который дает для каждого элементарного заряда в отдельности оказываемое на последний механическое действие, но зато не позволяет составить себе представления о совокупном действии в целом.

Относительно закона действия (214) необходимо иметь в виду еще одно соображение основного значения при его применении, напрашивающееся само собою. Оно относится к значению **E** в этом выражении. Очевидно, что **E** не есть действительное напряжение электрического поля в месте нахождения заряда e, но то напряжение, которое было бы в этом месте, если бы не существовало заряда e. Ибо заряд e ничего не прибавляет к величине потенциала φ в формуле (214). Что касается метода исследования поля при помощи заряженного пробного шарика, то он имеет смысл только тогда, когда можно принять, что внесением пробного шарика поле не изменяется или, по крайней мере, не изменяется существенно. Но если мы представим себе теперь конечный заряд e сосредоточенным в бесконечно малом теле, то он создаст там даже бесконечно большое напряжение. Оно не должно быть в (214) присоединено к **E**. Это легко понять и из того, что заряд e не в состоянии привести в движение сам себя.

Трудности, подобные описанной, не присущи интегральному закону (211). Поэтому в сомнительных случаях рекомендуется обращаться к этому последнему и находить решение с его помощью. В случае точечного заряда e дело обстоит, конечно, совсем просто. Следует лишь представить себе заряд e удаленным прочь и принять за напряжение поля **E** то, которое оказывается тогда в данном месте.

Несколько сложнее представляется исследование механической силы, которая действует на элемент поверхности проводника, заряженной количеством электричества $h\,d\sigma$. Напряжение поля здесь уже не бесконечно велико, но оно прерывно. На стороне изолятора оно по (63) равно $\frac{4\pi h}{\varepsilon}$, а на стороне проводника оно равно нулю, и было бы одинаково ошибочно пользоваться в формуле (214) для F как первым, так и вторым значением **E**. Правильное значение мы получим только тогда, когда представим себе, что заряд $h\,d\sigma$ совершенно удален, и в качестве **E** введем напряжение поля, которое окажется тогда в этом месте. Эта всюду непрерывная величина составляет $2\pi h' = 2\pi\frac{h}{\varepsilon}$, ибо на стороне проводника эта величина компенсирует напряжение поля, создаваемое зарядом $h d\sigma$, следовательно, ему равна и противоположна, а напряжение поля по (87) равно $-2\pi h'$. Поэтому мы должны в (214) для **E** вставить не $\frac{4\pi h}{\varepsilon}$ и не 0, а $\frac{2\pi h}{\varepsilon}$, т. е. арифметическое среднее этих двух величин. Тогда мы получим для механической силы, действующей на элемент поверхности проводника с зарядом $h\,d\sigma$, величину:

$$\frac{2\pi h^2}{\varepsilon}\,d\sigma. \tag{219}$$

Эта сила нормальна к поверхности и направлена в сторону изолятора независимо от знака заряда. Таким образом на каждый заряженный проводник действует механическая сила, которая стремится увеличить его объем. Если проводник обладает заметной сжимаемостью, как, например, мыльный пузырь, то при его заряжении происходит заметное увеличение объема, которое называют „электрическим расширением". Результирующая всех этих поверхностных сил представляет собой полное действие поля на проводник.

§ 43. Для более точного измерения электрических зарядов формулировка (218) закона Кулона мало пригодна,—для этого необходимы более чувствительные приспособления. Одно из них может быть создано из плоского электрического конденсатора, одна из пластин которого подвижная. При этом измеряют ту силу, которая как раз достаточна для того, чтобы воспрепятствовать приближению подвижной пластины к неподвижной, противоположно заряженной. Чтобы избежать ошибки, проистекающей от неоднородности поля (§ 16) на краю пластины, делают подвижной не всю обкладку, но оставляют неподвижной кольцеобразную наружную ее часть (охранное кольцо Томсона). Если через F обозначить площадь подвижной части обкладки, то сила притяжения, действующая на нее со стороны противолежащей обкладки, по (219) равна:

$$\frac{2\pi h^2}{\varepsilon}F, \tag{220}$$

как следует и непосредственно, если вычислить притяжение (87) неподвижной, бесконечно большой по сравнению с расстоянием, пластины.

Измерив эту силу, получим плотность заряда h и по (69) разность потенциалов обкладок в абсолютной системе единиц для пустоты ($\varepsilon = 1$). Для другой изолирующей среды можно измерить ее диэлектрическую постоянную, пользуясь тем обстоятельством, что сила притяжения при неизменной плотности заряда h обратно пропорциональна диэлектрической постоянной, а при неизменной разности потенциалов прямо пропорциональна ей. Первый случай осуществляется, если заряженную пластину изолировать, последний,—если ее соединить на все время с полюсами определенной гальванической цепи.

Если мы имеем вообще систему заряженных проводников $1, 2, 3, \ldots$, помещенных в каком-нибудь изоляторе, как в § 21, то энергия поля по (207), так как φ в каждом проводнике постоянно:

$$U = \frac{1}{2}\left(e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2 + e_3\varphi_3 + \ldots\right), \tag{221}$$

или по (100) и (102):

$$U = \varepsilon\left(\frac{c_1}{2}\varphi_1^2 + c_{12}\varphi_1\varphi_2 + \frac{c_2}{2}\varphi_2^2 + c_{13}\varphi_1\varphi_2 + \ldots\right), \tag{222}$$

и также по (103):

$$U = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{c_1'}{2}e_1^2 + c_{12}'e_1e_2 + \frac{c_2'}{2}e_2^2 + c_{13}'e_1e_3 + \ldots\right). \tag{223}$$

Для случая только одного проводника мы получаем:

$$U = \frac{1}{2} e_1\varphi_1 = \frac{\varepsilon c_1}{2} \varphi_1^2 = \frac{c_1'}{2\varepsilon} e_1^2. \tag{224}$$

Если, например, проводник — шар радиуса R, то, принимая во внимание его емкость (95), имеем:

$$U = \frac{\varepsilon R}{2} \varphi_1^2 = \frac{e_1^2}{2\varepsilon R}. \tag{225}$$

Увеличение радиуса изолированного шара (мыльный пузырь) на dR влечет за собой уменьшение энергии в количестве:

$$-dU = \frac{e_1^2}{2\varepsilon R^2} dR = \frac{8\pi^2 R^2 h^2}{\varepsilon} \cdot dR,$$

которое по (211) представляет собой механическую работу расширения, проистекающую от электризации. Так как увеличение объема составляет $dv = 4\pi R^2 \cdot dR$, то по *2*, (278) получается для механического давления, т. е. силы на единицу поверхности:

$$-\frac{dU}{dv} = p = \frac{2\pi h^2}{\varepsilon},$$

в соответствии с общей формулой (219).

§ 44. Общий закон пондеромоторных действий в электростатическом поле допускает еще другое трактование, которое оказалось особенно благотворным для развития максвелловой теории и которое вытекает из следующих соображений. В общей механике в качестве важнейшей из основ статики имеет место следующая теорема, опирающаяся на принцип равенства действия и противодействия: если какая-либо система точек находится в равновесии, то внешние силы уравновешиваются так, как если бы система отвердела (*1*, § 112).

Представим теперь себе заряженный проводник, находящийся в каком-либо электростатическом поле, окруженный изолятором с диэлектрической постоянной ε. Пусть он удерживается в равновесии при помощи подходящих механических сил, например при помощи привязанных к нему тонких шелковых нитей, тогда как никакие другие механические силы, кроме сил электрического поля, на него не действуют. По вышеприведенной теореме равновесие будет продолжать существовать и тогда, когда мы выделим в качестве системы точек проводник вместе с совершенно произвольной частью окружающего его изолятора, вообразим все это затвердевшим и рассмотрим только внешние силы, которые на него действуют. Обозначим поверхность этой системы точек, которая по нашему предположению расположена целиком внутри изолятора, через σ. По принципу близкодействия внешние силы, проистекшие от электрического поля, сводятся к некоторым приложенным извне к элементу поверхности давлениям, которые по *2*, § 20 в самом общем случае представляются симметричным тензором с шестью компонентами $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, Z_x$, так называемым электрическим тензором давлений или напряжений. Полная равнодействующая всех этих сил давления извне на все элементы поверхности равна и противоположна равнодействующей, создаваемой натянутыми нитями, или, что сводится к тому же, она эквивалентна пондеромоторной силе электрического поля на проводник. Таким образом, если мы возьмем слагающую по оси x равнодействующей, обозначив поверхность проводника, в отличие от произвольной воображаемой поверхности σ в изоляторе, через s, ее нормаль через n, то по 2, (74) и (219) получим:

$$\int\Big((X_x\cos(\nu,x)+X_y\cos(\nu,y)+X_z\cos(\nu,x)\Big)d\sigma=$$
$$=\frac{2\pi}{\varepsilon}\int h^2\cos(n,x)\,ds. \qquad (226)$$

Соответственное уравнение имеет место для слагающих по оси y и z. Нормали n и ν направлены внутрь изолятора, заключенного между поверхностями σ и s.

Естественно, что электрический тензор давлений нельзя себе представлять как обыкновенное механическое давление уже потому, что оно действует также и в пустоте. Поэтому невозможно также и подыскать для него вполне удовлетворительное наглядное объяснение. Но эти затруднения оставляют незатронутым его физическое значение, которое заключается именно в том, что его результирующее действие на какую-нибудь замкнутую поверхность в каждом случае дает пондеромоторную силу электростатического поля, действующую на находящуюся внутри материю. В случае энергии положение дела такое же, ибо как ни трудно составить себе наглядное представление о потоке энергии в совершенной пустоте, однако, остается в силе теорема большого практического значения, что полный поток энергии через замкнутую поверхность дает изменение находящейся внутри энергии.

С точки зрения принципа близкодействия, по существу, следует потребовать, чтобы электрический тензор давления со всеми его компонентами вполне определялся в каждом месте поля местным значением электрического напряжения **E**. Так как, с другой стороны, уравнение (226) должно иметь место для всякой произвольной формы поверхности σ, то отсюда получаются значения шести величин $X_x,\ldots$ Чтобы вывести их, преобразуем сначала интеграл по поверхности по $d\sigma$ в сумму интеграла по объему изолятора, заключенного между поверхностями σ и s, и интеграла по поверхности s:

$$-\int\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)d\tau-\int\Big(X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z)\Big)ds. \qquad (227)$$

Это выражение равно только в том случае правой части (226), когда, во-первых, везде внутри изолятора:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0, \qquad (228)$$

и, во-вторых, везде на поверхности проводника, принимая во внимание (63):

$$X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n\,z) = -\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi} \cos(n,x). \qquad (229)$$

Если заметим, что на поверхности проводника всегда

$$\mathbf{E}_x : \mathbf{E}_y : \mathbf{E}_z = \cos(n,x) : \cos(n,y) : \cos(n,z),$$

то мы удовлетворим уравнениям (229), если положим:

$$X_x = -\frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi} + C(\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}^2),$$

$$X_y = C\mathbf{E}_x \mathbf{E}_y, \quad X_z = C\mathbf{E}_x \mathbf{E}_z,$$

где C — произвольная постоянная. Если эти выражения подставить в диференциальное уравнение (228), то окажется, что оно ввиду (50) и (55) всегда может быть удовлетворено значением:

$$C = -\frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Итак, компоненты электрического тензора давления выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathbf{E}_x^2 - \mathbf{E}^2), & \text{также } Y_z &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathbf{E}_y \mathbf{E}_z, \\ Y_y &= -\frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathbf{E}_y^2 - \mathbf{E}^2), & \text{"} \quad Z_x &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathbf{E}_z \mathbf{E}_x, \\ Z_z &= -\frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathbf{E}_z^2 - \mathbf{E}^2), & \text{"} \quad X_y &= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\mathbf{E}_x \mathbf{E}_y. \end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

Что касается величины главных давлений и направлений главных осей давления [2, § 20], то понятно само собой, что одна из главных осей совпадает с направлением напряжения поля $\mathbf{E}$. Если мы примем это направление за ось z, то

$$\mathbf{E}_x = 0, \quad \mathbf{E}_y = 0, \quad \mathbf{E}_z^2 = \mathbf{E}^2,$$

следовательно:

$$\left.\begin{aligned} X_x = Y_y = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2, \quad Z_z = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2, \\ Y_z = Z_x = X_y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (231)$$

На основании последнего ряда уравнений следует, что оси x и y — также главные оси давления. Относящиеся к этим обеим осям главные давления равны между собою. Электрический тензор давления указывает, таким образом, на существование вдоль направления напряжения поля $\mathbf{E}$ натяжения в размере, равном плотности электрической энергии (1), в каждом направлении, перпендикулярном к этому,—на существование давления той же величины. Из этого простого положения также можно вывести все пондеромоторные действия электростатического поля. Но оно имеет место далеко за пределами электростатики и годно вообще для всякого произвольного электрического поля по тем же основаниям, которые были приведены в защиту универсальной годности закона действия силы (214).

§ 45. Для пондеромоторных действий в магнитном поле применим совершенно те же соображения, как и для действий в электрическом поле. Основным законом является опять потенциальный закон в форме (211), в котором U теперь означает магнитную энергию поля. Из него опять вытекает закон действия силы Кулона (218) для притяжения двух разноименных или отталкивания двух одноименных магнитных полюсов.

Осуществить один изолированный положительный или отрицательный магнитный полюс на деле возможно, на основании замечания в § 36, при помощи длинного, тонкого, равномерно намагниченного стержня.

Рассмотрим, далее, ввиду применения для обследования магнитного поля (§ 3) маленькой магнитной стрелки, пондеромоторное действие произвольно заданного магнитостатического поля с напряжением **H** на находящийся в нем бесконечно малый постоянный магнит с моментом M. Полезно выполнить вычисления двумя способами: сначала при помощи закона действия силы, затем при помощи потенциального закона.

Магнит состоит из двух полюсов с зарядами $+m$ и $-m$ на бесконечно малом расстоянии друг от друга l, так что момент его $M = ml$. Обозначим координаты отрицательного полюса через x, y, z, следовательно, координаты положительного полюса могут быть представлены в виде $x + \alpha l$, $y + \beta l$, $z + \gamma l$, где α, β, γ обозначают косинусы углов между направлением оси магнита и осями координат. Тогда компоненты силы, действующей на отрицательный полюс, будут по (214): $-m\mathrm{H}_x$, $-m\mathrm{H}_y$, $-m\mathrm{H}_z$, компоненты силы, действующей на положительный полюс:

$$m\left(\mathrm{H}_x + \frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial x}\alpha l + \frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial y}\beta l + \frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z}\gamma l\right) \text{ и т. д.}$$

Действующие на оба полюса силы сложатся по правилу сложения сил для неизменяемой системы [*I*, (306)] в одну результирующую силу с компонентами:

$$F_x = ml\left(\alpha\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z}\right) = \mathrm{M}_y\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial x} + \mathrm{M}_z\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial y} + \mathrm{M}\frac{\partial \mathrm{H}_x}{\partial z} \tag{232}$$

и т. д., и в одну результирующую пару сил с компонентами

$$\mathrm{N}_x = \beta\, lm\mathrm{H}_z - \gamma\, lm\mathrm{H}_y = \mathrm{M}_y\mathrm{H}_z - \mathrm{M}_z\mathrm{H}_y, \tag{233}$$

или в векторной форме

$$\mathrm{N} = [\mathrm{MH}] \tag{234}$$

если пренебрегать малыми величинами высшего порядка

Будем, с другой стороны, исходить из потенциального закона. Рассмотрим какое-нибудь бесконечно малое смещение неизменяемого магнитного двойного полюса, которое мы охарактеризуем тремя компонентами поступательного движения u, v, w и тремя компонентами вращения ξ, η, ζ. Тогда работа, совершенная при этом пондеромоторными силами магнитного поля, по *1*, (349):

$$A = u\mathbf{F}_x + v\mathbf{F}_y + w\mathbf{F}_z + \xi\mathbf{N}_x + \eta\mathbf{N}_y + \zeta\mathbf{N}_z. \tag{235}$$

Что касается произведенного вследствие смещения изменения энергии dU, то целесообразно выделить в выражении для полной энергии рассматриваемой системы такие члены, которые при смещении остаются неизменными, совершенно так же, как это мы сделали выше, в § 41 при выводе (213). Это достигается, если заметить, что полная энергия состоит из трех членов: во-первых, энергии поля, если бы диполь не существовал (потенциал поля в отсутствии диполя), во-вторых, энергии диполя, если бы не было поля (потенциал самого диполя), в-третьих, потенциала поля на диполь. Так как первые два члена не изменяются при перемещении диполя, то остается один только третий член, подверженный изменению. Мы получаем поэтому совершенно по образцу (213):

$$U = -m\varphi_{x,y,z} + m\varphi_{x+\alpha l,\ y+\beta l,\ z+\gamma l} + \text{const},$$

$$U = -ml\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \text{const}$$

$$U = -(\mathbf{M}_x\mathbf{H}_x + \mathbf{M}_y\mathbf{H}_y + \mathbf{M}_z\mathbf{H}_z) + \text{const}. \tag{236}$$

При смещении полюс x, y, z примет положение $x+u$, $y+v$, $z+w$ и ось диполя примет направление $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$, где по *1*, (499):

$$d\alpha = \gamma\eta - \beta\zeta,\quad d\beta = \alpha\zeta - \gamma\xi,\quad d\gamma = \beta\xi - \alpha\eta. \tag{237}$$

Поэтому, так как M постоянно:

$$d\mathbf{M}_x = M\,d\alpha,\quad d\mathbf{M}_y = M\,d\beta,\quad d\mathbf{M}_z = M\,d\gamma$$

и

$$d\mathbf{H}_x = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial z}w$$

и т. д. Следовательно, по (236):

$$-dU = M(\mathbf{H}_x d\alpha + \mathbf{H}_y d\beta + \mathbf{H}_z d\gamma) +$$

$$+ u\left(\mathbf{M}_x\frac{\partial\mathbf{H}_x}{\partial x} + \mathbf{M}_y\frac{\partial\mathbf{H}_y}{\partial x} + \mathbf{M}_z\frac{\partial\mathbf{H}_z}{\partial x}\right) + \ldots \tag{238}$$

Если ввести сюда значения (237) для $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ и приравнять по (211) выражения (235) и (238) для всякого произвольного перемещения, то для результирующей силы $\mathbf{F}$ и для результирующей пары $\mathbf{N}$ получатся точно такие же выражения (232) и (233), как и из закона действия силы. При этом самая величина напряжения поля $\mathbf{H}$ имеет значение только для результирующей пары, но не для результирующей силы. Однородное поле, как бы ни было оно сильно, никогда не может переместить центра тяжести магнита. Поэтому напряжение поля **H** измеряют, определяя производимый им момент вращения.

Если маленькая, свободно вращающаяся около своего центра тяжести магнитная стрелка находится в магнитном поле, то в случае устойчивого равновесия, при котором U принимает минимальное значение (*1*, § 119), направление магнитной оси, идущей от отрицательного к положительному полюсу, совпадает с направлением напряжения поля. Но, так как в § 3 мы определили направление напряжения поля как направление от южного полюса к северному полюсу магнитной стрелки, находящейся в устойчивом равновесии, то, следовательно, северный полюс положителен, южный полюс отрицателен, и соответственно этому вообще северный магнетизм — положительный, а южный — отрицательный.

Для случая равномерно намагниченного шара, за каковой можно приблизительно считать землю, магнитные силовые линии идут как внутри, так и вне шара, по § 37, в направлении от положительного свободного заряда к отрицательному свободному заряду. Но так как силовые линии магнитного поля земли идут в направлении от географического южного полюса к географическому северному полюсу, то выходит, что географический северный полюс земли есть ее магнитный южный полюс, т. е. он заряжен отрицательным свободным магнетизмом.

Измерение магнитных величин в абсолютной системе единиц можно произвести по Гауссу, комбинируя два различные опыта, которые можно выполнить с магнитной стрелкой с моментом M в земном поле с напряжением **H**: во-первых, определяя период колебания стрелки, вращающейся около ее центра тяжести в земном поле (опыт с колебаниями), во-вторых, определяя отклонение, которое сообщает та же самая неподвижная стрелка какой-либо другой стрелке, вращающейся около ее центра тяжести в земном поле (опыт с отклонением). Первый опыт дает по *1*, § 140 момент вращения $M\mathbf{H}$, второй — отношение $\frac{M}{\mathbf{H}}$, которое определяет угол отклонения. Из этих двух величин получаются в отдельности M и **H**. Единица напряжения магнитного поля **H** обыкновенно называется „гаусс“. Горизонтальная составляющая напряжения земного магнитного поля составляет в средней Европе около 0,2 гаусса; отклонение его направления от географического меридиана — около 10° на запад (склонение) и наклон под горизонт — около 66° (наклонение).

§ 46. Магнитное поле оказывает пондеромоторные действия также на тела в магнитном отношении мягкие, парамагнитные и диамагнитные. Эти действия можно вывести как из потенциального закона, так и из силового. Если дело идет о действии в целом, то предпочтительнее применять потенциальный закон. Так, например, выше, в § 38, мы видели, что шар, внесенный в однородное магнитное поле, действует там, где он находится, на напряжение поля во-вне и внутри, ослабляя его или усиливая смотря по тому, больше или меньше магнитная проницаемость шара μ проницаемости окружающей среды μ_0. Легко видеть, что качественно это справедливо и для всякой другой формы тела. Отсюда следует, что пондеромоторные силы, которые стремятся всегда уменьшить энергию всей системы и поэтому также и напряжение поля, действуют на тело с большей, чем для окружающей среды, проницаемостью в том смысле, что они увлекают его в те места поля, где напряжение поля наибольшее, ибо там тело будет всего более ослаблять энергию поля. При однородном поле, напротив, по отношению к энергии совершенно безразлично, где находится тело, т. е. вообще на тело не действует никакая сила со стороны поля. Если, наоборот, $\mu < \mu_0$, то пондеромоторные силы увлекают тело в места наименьших напряжений поля.

Поэтому, если подвесить между полюсами сильного подковообразного магнита стерженек из какого-либо вещества так, чтобы он мог вращаться в горизонтальной плоскости, то он будет устанавливаться аксиально, т. е. в направлении линии, соединяющей полюсы, или экваториально, т. е. поперек этого направления, смотря по тому, больше или меньше проницаемость вещества стерженька, чем проницаемость того газа или жидкости, в котором все расположено. Это не нужно истолковывать таким образом, что стерженек стремится расположиться один раз в направлении силовых линий, другой раз — в поперечном к ним направлении, но это вытекает из того, что в направлении к одному из полюсов в сумме напряжение поля возрастает сильнее, чем в боковом направлении. Если позаботиться о том, чтобы напряжение поля возрастало сильнее поперек к силовым линиям, чем в их направлении, то наблюдается обратное явление.

Если дело идет не об общем результирующем пондеромоторном действии, а об отдельных местных силах, то часто можно предпочесть потенциальному закону закон действия для сил, который в самой общей форме выражается тензором магнитных давлений и напряжений.

Этот закон гласит совершенно по образцу (230):

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{\mu}{8\pi}\left(2\mathrm{H}_x^2-\mathrm{H}^2\right), & Y_z &= -\frac{\mu}{4\pi}\mathrm{H}_y\,\mathrm{H}_z, \\ Y_y &= -\frac{\mu}{8\pi}\left(2\mathrm{H}_y^2-\mathrm{H}^2\right), & Z_x &= -\frac{\mu}{4\pi}\mathrm{H}_z\,\mathrm{H}_x, \\ Z_z &= -\frac{\mu}{8\pi}\left(2\mathrm{H}_z^2-\mathrm{H}^2\right), & X_y &= -\frac{\mu}{4\pi}\mathrm{H}_x\,\mathrm{H}_y \end{aligned}\right\} \qquad (239)$$

и дает в применении к каждой произвольно малой замкнутой поверхности ту силу, которую пондеромоторные действия поля оказывают на находящуюся внутри ее материю.

ГЛАВА V

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 47. От рассмотренных до сих пор статических электрических и магнитных полей сделаем дальнейший шаг к стационарным полям. Последние от статических отличаются тем, что, хотя электромагнитное состояние поля нигде не претерпевает никаких изменеиий со временем, тем не менее в определенных местах может происходить непрерывное превращение электрической энергии в тепловую. В таком случае уравнения (54) и (55) продолжают иметь место, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{240}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \tag{241}$$

но произведение $\varkappa \mathbf{E}^2$ или $\varkappa \mathbf{E} = \mathbf{J}$ может быть отлично от нуля, т. е. в проводнике может идти постоянный по величине и направлению поток электричества.

Подобный случай возникает, например, если некоторое число проводников первого и второго класса образуют многосвязное пространство или замкнутую цепь (§ 31). Тогда закои последовательности напряжений (164) более не выполняется. Вместо него имеет место соотношение вида:

$$E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,\,n} + E_{n1} = E, \tag{242}$$

где E—электродвижущая сила цепи. Она отлична от нуля и определяется химической природой проводников. В этом случае условия для статического состояния, как мы видели, более не выполняются, и поэтому возникнут токи, которые в конце концов при сохранеиии внешних условий могут принять стационарный характер. Такие стационарные состояния нам и нужно теперь исследовать.

Главное отличие стационарных полей от ранее рассмотренных статических заключается в том, что вследствие соотношения (241) электрические и магнитные величины уже более ие независимы друг от друга. Даже более, везде, где существуют электрические токи, должны быть и магнитные действия. Мы исследуем теперь, как можно в каком-либо заданном случае определить, во-первых, электрическое поле, включая и электрические токи, и как, во-вторых, по электрическим токам полностью определить магнитное поле.

§ 48. Представим себе, как уже указано выше, замкнутую гальваническую цепь, состоящую из произвольного числа проводников первого и второго класса, которые в совокупности образуют двусвязное пространство и окружены одиим и тем же изолятором. Пусть контактные напряжения на границе каждой пары веществ даны. тогда известна электродвижущая сила (242) всей цепи.

В стационарном состоянии напряжение электрического поля на основании (240) обладает потенциалом φ внутри и вне проводника, и этот потенциал однозначен, потому что всякая замкнутая кривая может быть стянута до нуля непрерывным сокращением, не выходя за пределы применимости (240) (ср. *2*, § 69). Напротив, функция φ прерывна, ибо она испытывает на границах каждой пары веществ скачки определенной величины.

Первые производные φ, вообще, непрерывны. Только на пограничных поверхностях возникают прерывности и, именно, по (45) вследствие стационарности состояний всегда должно иметь место соотношение:

$$\mathrm{J}_r + \mathrm{J}'_{\nu'} = 0,$$

или

$$\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \varkappa' \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu'} = 0, \tag{242a}$$

которое сведется в случае поверхности раздела между проводником и изолятором ($\varkappa' = 0$) к более простому:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0. \tag{243}$$

Последнее может быть наглядно формулировано так: находящиеся на поверхности раздела электрические заряды током не изменяются.

Наконец, по (50) электрический потенциал удовлетворяет везде внутри проводника и внутри изолятора уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{244}$$

На основе вышеуказанных условий можно теперь непосредственно привести доказательство того, что напряжение электрического поля и, вместе с тем, электрический ток в проводниках полностью определены.

Именно, возьмем две различных функции φ и φ', которые могут быть обе рассматриваемы как электрические потенциальные функции исследуемой системы, и составим их разность $\varphi' - \varphi = \varphi_0$. Функция φ_0 также удовлетворяет условиям (242), (243) и (244). Но, кроме того, φ_0 не только однозначна, но и непрерывна, потому что скачки для φ и φ' в ней компенсируются взаимно.

Выполним теперь, прежде всего, известное преобразование интеграла для отдельного проводника:

$$\int d\tau\, \varkappa \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z}\right)^2 \right\} = -\int d\tau\, \varkappa\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0 - \int d\sigma\, \varkappa\varphi_0 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} =$$

$$= -\int d\sigma\, \varkappa\varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu}$$

и затем просуммируем соответствующие интегралы по всем проводникам. Тогда для всей суммы Q всех этих положительных интегралов по объему получится выражение:

$$Q = -\sum \int d\sigma \left(\varkappa \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} + \varkappa' \varphi'_0 \cdot \frac{\partial \varphi_0'}{\partial \nu'} \right). \tag{245}$$

Здесь суммирование Σ распространяется на все границы каждых двух смежных проводников, а члены, относящиеся к границе с изолятором, по (243) пропадают.

Так как φ_0 непрерывно равно φ_0', то на основании (242а) $Q = 0$, и φ_0 везде во всех проводниках постоянно. Поэтому две различные потенциальные функции для рассматриваемой системы могут отличаться только на постоянную, так что напряжение электрического поля **E** и электрический ток $\mathbf{J} = \varkappa \mathbf{E}$ всюду полностью определены. Остающаяся неопределенной в потенциальной функции φ аддитивная постоянная может быть задана только тогда, когда известен или общий заряд всей системы, или когда для одного из проводников задан потенциал, например, путем отведения его к земле. Если мы это предположим, то потенциал в окружающем изоляторе вычисляется известным образом (§ 19), причем тогда определяются также и все электрические заряды, и тем самым задача разрешена. Очевидно, что для свойств электрического поля и для токов в проводниках не имеют никакого значения ни статические заряды, ни свойства изолятора, но единственно контактные разности потенциалов и проводимости. По (242а), именно, проводимость $\varkappa$ играет ту же роль для хода электрических силовых линий в проводниках, какую имеет диэлектрическая постоянная ε на границе двух изоляторов или магнитная проницаемость μ на границе двух намагничивающихся сред. Во всех этих случаях напряжение поля испытывает там по величине и направлению характерный скачок (§ 17).

§ 49. Подойдем теперь несколько ближе к исследованию свойств таким образом установленного электрического тока в проводниках. Так как линии тока совпадают с электрическими силовыми линиями, то они пересекают, как в статическом поле, поверхности уровня $\varphi = \text{const}$ нормально, тогда как вдоль поверхности изолятора они располагаются тангенциально. Все линии тока, исходящие из точек какого-нибудь произвольно расположенного элемента поверхности $d\sigma$, образуют вместе „трубку тока", внутри которой электричество течет подобно несжимаемой жидкости в замкнутой трубе, так как вследствие стационарности состояния через каждое поперечное сечение трубки в единицу времени протекает одинаковое количество электричества:

$$d\sigma \cdot \mathbf{J}_\nu = -d\sigma \cdot \varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \tag{246}$$

где ν означает нормаль к $d\sigma$, направленную в сторону тока. На границе двух проводников трубка тоже испытывает, вообще говоря, внезапное изменение направления, не изменяя величины (246) интенсивности трубки тока.

Полный поток электричества в системе проводников слагается из таких бесконечно тонких трубок тока, и интеграция всех интенсивностей (246) по всему сечению какого-либо одного проводника дает „интенсивность" или „силу" тока в системе проводников:

$$I = -\int \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma, \tag{247}$$

которая представляет собой количество электричества, протекающее в единицу времени через какое-либо поперечное сечение в системе проводников, независимо от формы и положения сечения.

Мы рассмотрим сначала случай линейного проводника, причем будем принимать, что все поперечные сечения проводника бесконечно тонки. Тогда поток сведется к одной только бесконечно тонкой трубке тока, и мы будем подразумевать под $d\sigma$ нормальное сечение проводника q и под $d\nu$ — элемент длины ds проводника. Опуская знак интеграла в (247), можем написать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{I}{\varkappa q}.$$

Интегрируя по s от сечения 1 до некоторого другого сечения 2 того же проводника, получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{\varkappa} \int_1^2 \frac{ds}{q} = I \cdot w. \tag{248}$$

Входящая здесь константа

$$w = \frac{1}{\varkappa} \int_1^2 \frac{ds}{q} \tag{249}$$

носит название „сопротивления" части проводника между сечениями 1 и 2. Если q постоянно, то сопротивление пропорционально длине и обратно пропорционально сечению проводника. Коэфициент $\frac{1}{\varkappa}$ называется „удельным сопротивлением" вещества проводника. По (248) сила тока I равна отношению падения потенциала к сопротивлению.

Просуммируем равенство (248) последовательно по различным проводникам, составляя сначала соответствующее соотношение для первого проводника между сечением 1 и границей его со вторым проводником, затем от этой границы с третьим проводником и т. д. до какого-нибудь сечения n в n-м проводнике и затем соединяя все полученные таким образом равенства вместе. Тогда оказывается, если принять во внимание прерывность (§ 27) потенциала φ на границе каждых двух проводников, что

$$\varphi_1 + E_{12} + E_{23} + E_{34} + \ldots + E_{n-1,n} - \varphi_n = I(w_1 + w_2 + \ldots + w_n), \tag{249a}$$

или

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_n + \Sigma E}{\Sigma w}, \tag{250}$$

где ΣE означает сумму контактных разностей потенциалов, или электродвижущих сил, находящихся между сечением 1 и n-м, Σw — сумму находящихся между ними сопротивлений.

Если мы перейдем, наконец, к совершенно замкнутой цепи, то сечение n совпадает с сечением 1, и, так как электрический потенциал φ — функция однозначная, то $\varphi_n = \varphi_1$, и мы получим из (250):

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma w} \tag{251}$$

— закон Ома, который утверждает, что сила тока в замкнутой системе проводников равна отношению полной электродвижущей силы цепи ко всему сопротивлению цепи.

§ 50. В нелинейных проводниках, к рассмотрению которых мы теперь переходим, соотношения гораздо сложнее в силу того, что здесь не заданы наперед положения трубок тока в проводнике. Вообще, эти положения могут быть получены только путем интегрирования уравнений поля. Но выражения (246) и (247) всегда имеют место для силы тока в отдельных трубках тока и во всей системе проводников. Поэтому в применении к бесконечно тонкой трубке тока имеет место также и уравнение (250).

Если сложить силы токов во всех трубках тока, пронизывающих рядом друг с другом систему проводников, от поверхности уровня $\varphi = \varphi_1$ в проводнике 1 до уровня $\varphi = \varphi_n$ в проводнике n, то из (250) получится полная сила тока в системе:

$$I = (\varphi_1 - \varphi_n + \Sigma E)\, \mathrm{S} \frac{1}{\Sigma w}. \tag{252}$$

Здесь в противоположность суммированию Σ по лежащим „друг за другом" последовательно частям одной какой-либо трубки тока мы обозначили для большей ясности через латинское S суммирование по трубкам тока, идущим „рядом друг с другом".

Если положить аналогично (250):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_n + \Sigma E}{W}, \tag{253}$$

то можно величину

$$W = \frac{1}{\mathrm{S}\dfrac{1}{\Sigma w}} \tag{254}$$

назвать сопротивлением рассматриваемой нелинейной системы проводников. Знаменатель этого выражения называют также „проводимостью“ системы. Для линейных проводников $W = \Sigma w$ способ выполняемого суммирования можно характеризовать тем, что при суммировании по последовательно включенным проводникам складываются сопротивления, а при суммировании по параллельно включенным проводникам — проводимости. Однако это правило применимо для практического вычисления только в случае, если известно положение трубок тока. Таким образом о сопротивлении нелинейного проводника можно определенно говорить только тогда, когда известно, как протекают в нем токи.

При применении ко всей замкнутой цепи проводников φ_n совпадает с φ_1, и по (253) получается выражение закона Ома и для нелинейных объемных токов:

$$I = \frac{\Sigma E}{W}. \tag{255}$$

§ 51. Вычислим в качестве примера сопротивление электрически проводящей жидкости (соляного раствора) в форме круглого полого цилиндра с радиусами a и b $(a < b)$ и высотою h. Электроды расположены по границе в виде двух коаксиальных металлических цилиндров, а ток течет по направлению изнутри наружу. Внутренний электрод называют анодом, внешний — катодом. Потенциал φ в электролите падает от величины φ_1 на внутреннем цилиндре до величины φ_2 на внешнем. Замыкание цепи от катода к аноду во внешнем пространстве можно произвести как угодно, однако так, чтобы от этого не пострадала симметрия в распределении токов.

Так как металлы обладают несравненно большей удельной электропроводностью $\varkappa$, чем электролиты, то ввиду пограничного условия (242а) обыкновенно можно пренебречь падением потенциала в металлических частях цепи по сравнению с падением в электролите. Тогда потенциал внутри металла практически постоянен, и поверхность электрода в то же время есть поверхность уровня. Потенциал φ и вместе с тем весь поток электричества в электролите вполне определяются тогда постоянными значениями φ на электродах.

В настоящем случае легко вычислить выражение для потенциала в электролите. Действительно, ввиду пограничных условий (243) на верхнем и нижнем сечениях цилиндра, где электролит граничит с окружающим его изолятором, и вследствие симметрии по отношению к оси цилиндра, которую мы примем здесь за ось z, все линии токов идут радиально, таким образом, потенциал зависит только от расстояния ϱ от оси. Общий интеграл уравнения Лапласа (244) представляется поэтому в виде логарифмического потенциала [*1*, (§ 146)] с добавлением аддитивной постоянной:

$$\varphi = A \ln \varrho + B. \tag{256}$$

Значения обеих постоянных интеграции A и B получатся из условий, что для $\varrho = a, \varphi = \varphi_1$ и для $\varrho = b$ $\varphi = \varphi_2$. Поэтому падение потенциала от анода к катоду:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -A \ln \frac{b}{a}. \tag{257}$$

С другой стороны, полная сила тока I получается из (247) при посредстве интеграции по какому-либо из сечений проводника, т. е. по поверхности какого-либо коаксиального цилиндра радиуса ϱ ($\varrho < b$) и высоты h:

$$I = -\int \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} d\sigma.$$

Если вставить сюда выражение (256) для φ, для $d\sigma$ величину $2\pi\varrho dz$ и проинтегрировать по z от 0 до h, то получим:

$$I = -2\pi\varkappa A h;$$

разделив (257) на эту величину, найдем.

$$W = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{1}{2\pi\varkappa h} \ln \frac{b}{a}. \tag{258}$$

Следовательно, сопротивление обратно пропорционально высоте цилиндра и, что замечательно, зависит только от отношения радиусов пограничных цилиндров.

К той же самой величине для W можно в настоящем случае притти более прямым путем при помощи уравнений (254) и (249), если использовать то обстоятельство, что линии тока идут радиально и симметрично.

§ 52. Как дальнейший пример вычисления сопротивления рассмотрим случай безгранично простирающегося по всем направлениям электролита, в котором расположены на очень большом расстоянии R друг от друга два сферических электрода, анод с радиусом a и катод с радиусом b. Замыкание от катода к аноду может быть произведено при помощи изолированной относительно электролита металлической проволоки, которая должна быть настолько тонка, чтобы электрическое поле благодаря ей не претерпело существенных нарушений (ср. § 25 в конце). В этот провод может быть включена какая-нибудь электродвижущая сила.

При сделанных предположениях потенциал φ в электролите представляется следующим частным интегралом уравнения Лапласа:

$$\varphi = \frac{A}{r_1} + \frac{B}{r_2}, \tag{259}$$

где r_1 и r_2 — расстояния точки воздействия от центров шаров, A и B — две постоянные, которые определяются по значениям

φ_1 и φ_2 потенциала на обоих электродах. На первом шаре $r_1 = a \ll r_2$, следовательно, $\varphi = \frac{A}{a} = \varphi_1$ и на втором шаре $r_2 = b \ll r_1$, $\varphi = \frac{B}{b} = \varphi_2$.

Отсюда по (259) вытекает:

$$\varphi = \frac{a\varphi_1}{r_1} + \frac{b\varphi_2}{r_2}. \tag{260}$$

С другой стороны, если за поперечное сечение проводника один раз взять поверхность анода 1 ($r = r_1$), другой раз поверхность катода 2 ($r = -r_2$), для полной силы тока получается:

$$I = -\varkappa \int \frac{\partial \varphi}{\partial r_1}\, d\sigma_1 = \varkappa \int \frac{\partial \varphi}{\partial r_2}\, d\sigma_2 \tag{261}$$

или по (260), по выполнении интеграции по поверхностям обоих шаров:

$$I = 4\pi\varkappa a\varphi_1 = -4\pi\varkappa b\varphi_2.$$

Это дает для искомого сопротивления электролитического проводника бесконечного протяжения:

$$W = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{262}$$

Из этого результата можно вывести интересное заключение относительно сопротивления земного шара. Совершенно ясно, что система линий тока в электролите, здесь только что рассмотренная, ничуть не изменится, если провести через центры шаров бесконечную горизонтальную изолирующую плоскость и если, далее, заменить находящийся выше этой горизонтальной плоскости бесконечный проводящий объем изолятором (воздухом), в котором и поместить замыкающий ток провод вместе с включенной в него электродвижущей силой (телеграфная линия). Тогда выражение (260) останется справедливым для φ. Напротив, интегралы в (261) сократятся наполовину, соответственно уменьшению вдвое проводящего сечения, так что для сопротивления ограниченного горизонтальной плоскостью земного слоя между двумя очень удаленными полушарообразными электродами с радиусами a и b вместо (262) мы получим:

$$W = \frac{1}{2\pi\varkappa}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \tag{263}$$

т. е. выражение, совершенно не зависящее от расстояния электродов, но только от их величины.

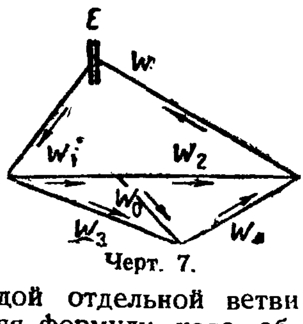
Когда это удивительное обстоятельство было впервые установлено на опыте, то некоторые физики вследствие этого были склонны к предположению, что сопротивление земли обусловлено исключительно процессами на поверхностях электродов, т. е. представляет собой некоторый вид сопротивления при переходе через границу раздела, сама же земля вообще никаким сопротивлением не обладает. Как мы видели, такое допущение ничем не оправдывается. Кажущийся парадокс независимости сопротивления земли от расстояния R электродов объясняется непосредственно из того соображения, что то увеличение сопротивления, которое происходит при удлинении трубок тока, как раз компенсируется уменьшением сопротивления, обусловленным увеличением проводящих сечений трубок тока при более глубоком проникновении их в землю.

§ 53. Мы рассмотрим еще несколько ближе случай, когда система проводников образует более чем двухсвязное пространство или, как говорят, обладает точками разветвления. При этом мы ограничимся линейными проводниками. В этом случае проводник имеет вид вообще неправильно составленной сетки узлы которой и образуют „точки разветвления". В каждой точке разветвления сходятся три или более проводника. Части проводников между каждыми двумя соседними точками разветвления называются „ветвями" системы проводников. В каждую ветвь может быть включена особая электродвижущая сила, которую мы будем принимать как заданную. Тогда можно, как показал Г. Кирхгоф, свести вычисление стационарной силы тока, которая в каждой отдельной ветви будет, конечно, иная, к двум простым положениям. Во-первых, так как процесс стационарный, в каждой точке разветвления, алгебраическая сумма количеств электричества, притекающих к ней в определенный момент времени через все сходящиеся здесь ветви, должна быть равна нулю, или в соответствующем обозначении:

$$\Sigma I = 0. \qquad (264)$$

Во-вторых, для каждой отдельной ветви имеет место соотношение (249а), если φ_1 и φ_2 означают значения потенциала в начальной и в конечной точках ветви. Если теперь скомбинировать какие-нибудь граничащие друг с другом ветви в их последовательном порядке в одну замкнутую в себе цепь и сложить друг с другом соответственные соотношения (249а), то все значения φ попарно сократятся и в результате получится второе правило Кирхгофа:

$$\Sigma E = \Sigma I \cdot w, \qquad (265)$$



Черт. 7.

где величины E, I, w относятся к каждой отдельной ветви замкнутой системы проводников. Применяя формулу, надо обращать внимание на то, что положительное направление для E и I соответствует одному определенному направлению обхода.

§ 54. Применим оба правила Кирхгофа к комбинации проводников, изображенной на черт. 7, обыкновенно называемой „мостиком Уитстона", и вычислим силы тока при произвольно заданных сопротивлениях: в главной цепи — w, в четырех ветвях —

w_1, w_2, w_3, w_4, в мостике — w_0. Электродвижущая сила пусть включена только в главную цепь. Направления, в которых мы будем считать величины E и I положительными, указаны на чертеже стрелками. Тогда из (264) вытекают соотношения:

$$I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$
$$I_1 = I_0 + I_2;\ I_3 + I_0 = I$$

и из (265) — соотношения:

$$\begin{aligned} E &= Iw + I_1 w_1 + I_2 w_2 \\ E &= Iw + I_3 w_3 + I_4 w_4 \\ O &= I_1 w_1 + I_0 w_0 - I_3 w_3 \\ O &= I_2 w_2 - I_4 w_4 - I_0 w_0. \end{aligned}$$

Отсюда определятся силы токов во всех отдельных ветвях. Так, для силы тока в главной цепи получается:

$$I = \frac{\{w_0 \Sigma w_1 + (w_1 + w_3)(w_2 + w_4)\} \cdot E}{\Sigma w_1 w_2 w_3 + w(w_1 + w_3)(w_2 + w_4) + w_0(w_1 + w_2)(w_3 + w_4) + w w_0 \Sigma w_1}, \tag{266}$$

причем суммирование распространяется на четыре ветви 1, 2, 3, 4. Далее, для тока в мостике:

$$I_0 = \frac{(w_2 w_3 - w_1 w_4) \cdot I}{w_0 \Sigma w_1 + (w_1 + w_2)(w_3 + w_4)}. \tag{267}$$

Если в мостике тока нет, то из этого следует простое условие:

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4. \tag{268}$$

§ 55. После того как мы видели, какими способами можно определить в стационарном поле электрический потенциал и силу тока, будем теперь предполагать электрические величины заданными и будем исследовать свойства обусловленного ими магнитного поля. Для этого служит соотношение (241) между напряжением магнитного поля **H** и плотностью тока **J** в соединении с общими соотношениями (51) и (52).

Чтобы упростить исследования, не теряя из виду, однако, наиболее характерного, мы будем всегда в последующем предполагать, если не будет специально оговорено противоположное, что проницаемость μ всех веществ, проводников и изоляторов одинакова. Тогда, конечно, напряжение поля **H** на всех пограничных поверхностях непрерывно, касательные составляющие по (11), нормальные составляющие по (52). При такой постановке задачи вопрос сводится к вычислению напряжения магнитного поля **H** по плотности тока **J**. В математическом отношении она вполне тождественна с задачей вычисления скорости течения (предполагая последнюю непрерывной) несжимаемой жидкости q по ее вихревой скорости O (2, § 73). Поэтому мы можем здесь соответствующим образом воспользоваться имеющими место в гидродинамике теоремами. Прежде всего мы получаем из них в качестве следствия, что напряжение магнитного поля **H** во всем пространстве вне и внутри тока определяется однозначно плотностью тока **J**.

Так как вне тока по (241) $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, то в изоляторе магнитное поле обладает потенциалом φ. Вопрос в том, однозначен ли и непрерывен ли этот магнитный потенциал φ. Условие для этого идентично с тем, чтобы для каждой идущей по всей своей длине внутри изолятора замкнутой кривой интеграл:

$$\oint \mathbf{H}_x dx + \mathbf{H}_y dy + \mathbf{H}_z dz = A \tag{269}$$

обращался в нуль. Из соотношения же $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ следует, что интеграл (269) сохраняет свою величину при бесконечно малой деформации кривой (2, § 69). Таким образом вопрос об однозначности и непрерывности потенциала приводится к другому вопросу: может ли быть стянута до нуля всякая целиком расположенная внутри изолятора кривая. Действительно, если это осуществится, то постоянное значение (269) необходимо равно нулю. Так как в настоящем случае изоляторы, а также несущие ток проводники образуют многосвязное пространство, то на поставленный вопрос приходится вообще отвечать отрицательно. В самом деле, невозможно стянуть до нуля расположенную в изоляторе кривую, которая охватывает несущий ток проводник.

Если поэтому величина интеграла (269) вследствие наличия в проводнике тока не равна нулю, то она стоит в известной связи с этим током. Эта зависимость на деле представляется в самом общем случае весьма простым соотношением, основывающимся на математическом преобразовании уравнения (241), на так называемой теореме Стокса.

§ 56. Для вывода теоремы Стокса вычислим изменение, которое претерпевает интеграл A вследствие бесконечно малого изменения замкнутой кривой интеграции для общего случая, когда $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ не равен нулю. Для него мы имеем:

$$\delta A = \oint \delta \mathbf{H}_x dx + \delta \mathbf{H}_y dy + \delta \mathbf{H}_z dz + \oint \mathbf{H}_x \delta dx + \mathbf{H}_y \delta dy + \mathbf{H}_z \delta dz, \tag{270}$$

и интегрируя по частям, по формуле:

$$\oint \mathbf{H}_x \delta dx = -\oint d\mathbf{H}_x \delta x \ldots,$$

а также принимая во внимание то обстоятельство, что компоненты напряжения поля $\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y, \mathbf{H}_z$ зависят только от x, y, z:

$$\delta A = \oint \left(\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial z} \right) (\delta y dz - \delta z dy) + \ldots \tag{271}$$

Здесь под знаком интеграла первый множитель есть компонент вектора $\operatorname{rot} \mathbf{H}$, второй — компонент векторного произведения δr и $d\bar{r}$, абсолютная величина которого равна площади параллелограма, образованного смещением δr и элементом кривой dr, и направление которого перпендикулярно к плоскости параллелограма, так что оно с направлениями δr и dr образует правую систему координат. Но указанный параллелограм есть не что иное, как площадь $d\sigma$, описанная при перемещении элемента кривой dr с нормалью ν; поэтому мы можем также написать:

$$\delta A = \oint \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}\right) \nu \cdot d\sigma, \tag{272}$$

где интеграция распространяется на все элементы бесконечно узкой кольцеобразной поверхности, образованной смещением первоначальной кривой интеграции. Направление ν есть ось того вращения, которое соответствует направлению элемента кривой до смещения и направлению, противоположному направлению начального элемента кривой (*1*, § 83).

Рассмотрим теперь какую-нибудь конечную, ограниченную заданной замкнутой кривой, поверхность с элементом $d\sigma$. Мы можем представить себе, что она составлена из бесконечно узких колцеобразных частей, самая внешняя из которых ограничена заданным пограничным контуром, а самая внутренняя сократилась до одного только бесконечно малого элемента поверхности. Составим для каждой кольцеобразной поверхности выражение по образцу (272) и затем сложим все эти выражения. Тогда в левой части все линейные интегралы попарно сократятся до самого внешнего, который берется по заданному контуру, и самого внутреннего, который равен нулю, и мы получим в качестве выражения теоремы Стокса:

$$A = \oint \mathbf{H} \cdot dr = \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}\right) \cdot d\sigma. \tag{273}$$

Нормаль ν к элементу поверхности $d\sigma$ берется в том направлении, которое соответствует оси вращения при обходе по элементам кривой интеграции.

Так как интеграл слева зависит только от пограничного контура, а не от особого положения поверхности σ, то это же справедливо и для интеграла справа. В этом можно легко убедиться и непосредственно, если принять в соображение, что две различные поверхности σ, с той же пограничной кривой, в совокупности образуют одну замкнутую поверхность, ограничивающую один определенный объем, и что интеграл по этой замкнутой поверхности (273) равен интегралу по объему величины $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H}$, которая тождественно равна нулю. Это выражают также, говоря: полный поток вихревого (или соленоидального) вектора через какую-либо поверхность зависит только от пограничного контура, но не от расположения и формы поверхности. Такой вихревой вектор представляет собой, например, скорость несжимаемой жидкости, а также магнитную индукцию **B**, для которой мы, действительно, уже раньше установили соответствующее соотношение в форме (53).

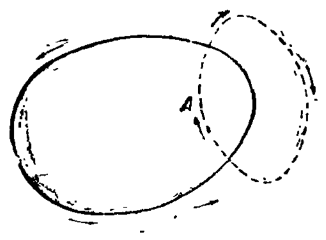
§ 57. Возвращаясь к нашей электромагнитной проблеме, мы получим теперь через подстановку соотношения (241) в формулу (273) теоремы Стокса:

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r}=\frac{4\pi}{c}\int \mathbf{J}_\nu\, d\sigma=\frac{4\pi}{c}I. \tag{274}$$

или на словах: интеграл работы магнитных сил по замкнутой кривой равен $\frac{4\pi}{c}$ раз взятому количеству электричества, протекающего в единицу времени через какую-либо поверхность, ограниченную этой кривой. Эта работа положительна, если направление тока служит осью того вращения, которое соответствует обходу по кривой при интегрировании. Это положение является основой электромагнетизма, оно совсем не связано ни с какими константами, характеризующими материальные тела. Что величина I не зависит от особого расположения поверхности, это следует на основании соображений, изложенных в конце предыдущего параграфа, непосредственно из того, что вектор плотности тока I вихревой. Пока замкнутый пограничный контур расположен весь в изоляторе, величина I не изменяется при изменении положения контура, и поэтому работа магнитных сил остается неизменной. Если $I=0$, то кривую можно стянуть до нуля непрерывным сокращением, не выводя ее из изолятора, тогда и работа магнитных сил равна нулю. Если же I отлично от нуля, то при стягивании кривой всегда настанет такой момент, когда кривая станет проникать в несущий ток проводник. С этого момента при дальнейшем стягивании станет убывать величина I, пока, наконец, когда кривая сократится до размеров одной точки, она не сделается нулем. Таким образом мы видим, что прежние выводы при расширении их физического значения выигрывают в содержании и наглядности.

§ 58. Определим теперь образуемое током магнитное поле, сначала для частного случая, именно для линейного тока данной конечной силы $I>0$, который расположен в каком-нибудь однородном изоляторе. Тогда, как мы знаем, напряжение магнитного поля всюду определяется однозначно и в изоляторе обладает потенциалом φ. Но этот потенциал, не непрерывен и не однозначен, ибо работа магнитных сил вдоль замкнутой кривой, охватывающей один раз ток, не нуль, но имеет постоянную конечную величину, определяемую (274). Таким образом мы имеем на выбор: или считать магнитный потенциал не непрерывным, тогда он многозначен, или считать его однозначным, тогда он не непрерывен (ср. 2, § 69 и след.). Так как в наших вычислениях мы предпочитаем иметь дело с однозначными величинами, то мы склоняемся к последней альтернативе. Но в таком случае мы должны на каждой кривой, охватывающей ток, фиксировать какую-нибудь воображаемую точку, при переходе через которую потенциал φ испытывает постоянный, даваемый формулой (274), скачок. Все эти воображаемые точки мы соединим в воображаемую поверхность, ограниченную контуром тока, через которую необходимо проникать, если обходить вокруг тока. Введенная таким образом воображаемая поверхность разрыва не имеет, конечно, никакого физического значения. Она служит только для того, чтобы обеспечить возможность вычисления однозначного потенциала из напряжения поля при помощи ограничения, что линия, соединяющая две точки, вдоль которой надо интегрировать выражение для работы магнитных сил $\mathbf{H}d\mathbf{r}$, чтобы получить разность потенциалов в этих точках, не должна проходить через поверхность разрыва. В самом деле, вследствие этого пространство, занятое изолятором, превращается из двухсвязного в односвязное и все проведенные в нем замкнутые кривые могут быть при непрерывном сокращении стянуты до нуля. Условившись в этом, мы сопоставим теперь все свойства магнитного потенциала φ. Во всем изоляторе потенциал φ однозначен и конечен. В бесконечности φ равен нулю, так как мы предполагали, что контур тока не идет в бесконечность. На воображаемой поверхности разрыва, ограничиваемой контуром тока, φ испытывает скачок в $\frac{4\pi I}{c}$, и именно положительный в смысле возрастания, если переход через поверхность разрыва совершается в направлении, соответствующем вращению около тока, как около оси.

Это соотношение направлений представлено на черт. 8. Сплошная кривая есть контур тока, расположенный, например, в горизонтальной плоскости, рассматриваемый сверху. Работа магнитных сил вдоль пунктирной вертикальной, охватывающей ток кривой по (274), положительна для обозначенного стрелкой направления интегрирования. Поэтому магнитный потенциал вдоль этой кривой постепенно убывает и при переходе через точку A воображаемой поверхности разрыва, ограниченной контуром тока, возвращается скачком к своей первоначальной, большей величине.



Черт. 8.

Первые производные потенциала или компоненты напряжения поля $\mathbf{H}$ везде непрерывны, кроме непосредственной близости к контуру тока, где они бесконечно велики, так как интеграл (274) по замкнутому пути сохраняет свою конечную величину и при безграничном уменьшении длины кривой интеграции. Наконец, потенциал повсюду в изоляторе удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Однозначно определяемая всеми этими условиями функция на основании общей, выведенной в § 29, теоремы идентична с потенциалом двойного магнитного слоя, расположенного на поверхности разрыва:

$$\varphi = g\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma$$

момент которого можно вычислить из даниого скачка потенциала по (151):

$$g = \frac{I}{c}. \tag{275}$$

Нормаль ν к слою направлена по оси того вращения, которое указывается направлением тока. В самом деле, потенциал этого двойного слоя:

$$\varphi = \frac{I}{c}\int \frac{d\frac{1}{r}}{d\nu}\, d\sigma \tag{276}$$

обладает на основании наших прежних, приведенных в § 28 рассуждений всеми требуемыми здесь свойствами. В особенности первые его производные или компоненты магнитного напряжения сплошь непрерывны и зависят только от пограничного контура или от контура тока, но не от того, как расположена поверхность в остальных ее частях. Уравнение (276) сводит все магнитные действия линейного тока к действиям определенного двойного магнитного слоя. Однако здесь надо сделать одно важное дополнительное замечание. Выражение (276) не содержит никаких материальных констант, в частности, не содержит магнитной проницаемости μ изолятора, в котором находится ток. Поэтому величина $\frac{I}{c}$ момента двойного слоя, обусловливающего скачок потенциала, относится не к действительному, а к свободному магнитному заряду, аналогично тому, как при простом электрическом или магнитном слое на поверхности прерывность нормальной составляющей напряжения поля определяется по (88) не действительным, а свободным зарядом. Таким образом, если бы задать вопрос о действительном магнитном моменте эквивалентного току двойного слоя, то на основании соотношения (92) нужно величину свободного заряда еще умножить на μ. Окончательный результат тогда можно формулировать в виде следующего положения: магнитное поле, образуемое в изоляторе с проницаемостью μ стационарным линейным током, тождественно с полем магнитного двойного слоя, ограниченного контуром тока со свободным моментом $\frac{I}{c}$ или с действительным моментом $\frac{\mu I}{c}$.

Сделанное здесь разъяснение приобретает, как мы увидим позже, значение, если речь идет о взаимодействии токов. Здесь же, где имеется магнитное поле, создаваемое только одним током, достаточно рассматривать лишь свободные заряды.

§ 59. Так как мы уже познакомились с тем, как измерять все магнитные величины в абсолютных гауссовых единицах, то предыдущее положение или равенство (276) дает нам средство для непосредственного измерения отношения $\frac{I}{c}$. Здесь в первый раз критическая скорость c входит в соотношение, которое доступно для измерений. Пока величина c неизвестна, вывести величину силы тока в гауссовой системе единиц из одних магнитных измерений нельзя. Но отношение $\frac{I}{c}$ означает силу тока, выраженную в максвелловой электромагнитной системе единиц (§ 7) (см. также сравнительную таблицу в конце книги). Отсюда магнитные измерения дают непосредственно эту последнюю величину. В этом и кроется причина того, что практическая система единиц примыкает к максвелловой электромагнитной, а не к гауссовой системе единиц.

Круговой ток радиуса R образует в своем центре по (159) и (275) магнитное поле с напряжением:

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{c} \cdot \frac{2\pi}{R}. \tag{277}$$

Если принять $R = 1$, если, следовательно, длина тока равна 2π, то можно сказать: единица силы тока в максвелловой электромагнитной системе единиц — это сила такого тока, который, протекая по кругу радиуса 1, действует на находящийся в центре круга единичный магнитный полюс с силой, отнесенной к единице длины тока, равной единице.

§ 60. Чтобы найти величину критической скорости c, нужно комбинировать измеренную из магнитных явлений величину $\frac{I}{c}$ с величиной I, измеренной из электрических явлений. Это было произведено впервые Р. Кольраушем и В. Вебером при помощи метода, принцип которого заключается в том, что разрядный ток электрического конденсатора большой емкости пропускают через проволоку, согнутую по кругу, в центре которого находится маленькая магнитная стрелка. Плоскость кругового проводника устанавливается в плоскости магнитного меридиана. Тогда в положении покоя стрелка располагается в плоскости круга. Когда по проводнику пойдет разрядный ток, на стрелку не станет действовать момент вращения, и она начнет колебаться. Соотношения между величинами здесь можно вывести известным путем. Конечно, мы имеем здесь, как это понятно само собою, не стационарный ток, а, наоборот, ток, длящийся очень недолго и вследствие этого очень изменчивый. Однако мы можем все-таки принять, не делая заметной ошибки, что ни в одной точке проводящей проволоки не происходит накопления электрического заряда, вследствие этого сила тока в какой-либо определенный момент t во всем проводнике имеет одну и ту же величину и поэтому может быть рассматриваема как функция только t, которая в начале равна нулю, затем быстро возрастает и, наконец, убывает до нуля. Далее, мы будем предполагать, что возбуждаемое током I магнитное поле в каждый момент t такое же, как если бы ток был стационарный. Вводя эти упрощения, мы предвосхищаем для этого специального случая позднейший разбор подобных „квазистационарных" процессов, которые мы в систематическом порядке рассмотрим только в третьей части этой книги. Тогда же мы обсудим границы допустимости этих упрощений, практически очень широкие.

По сказанному, действующее на магнитную стрелку напряжение **H** поля, возбуждаемого разрядным током I, дается для каждого произвольного момента времени формулой (277). В этот момент времени стрелка поэтому испытывает момент вращения (234). Мы можем дальше без заметной ошибки допустить, что разрядный ток протекает настолько быстро, что разряд оканчивается, прежде чем стрелка заметно выйдет из своего положения равновесия или, другими словами: механическое действие тока может быть рассматриваемо как моментальное действие („баллистический" гальванометр), как удар (*1*, § 136). Тогда величина векторного произведения (234) равна просто произведению магнитного момента M стрелки на напряжение **H** поля; таким образом уравнение движения стрелки по *1* (469 *b*):

$$K \cdot \frac{d\omega}{dt} = M \cdot \frac{I}{c} \cdot \frac{2\pi}{R},$$

где мы обозначаем через K момент инерции, через ω угловую скорость стрелки.

Это уравнение мы проинтегрируем по времени от $t = 0$ — начала разряда — до момента τ. При этом интервал τ выбран настолько большим, что за это время разряд совершенно закончится, но вместе с тем настолько малым, что стрелка все еще не выйдет из плоскости магнитного меридиана, тогда получится, так как для $t = 0$ $\omega = 0$:

$$K \cdot \omega_\tau = \frac{M}{c} \cdot \frac{2\pi}{R} \int_0^\tau I\,dt. \tag{278}$$

Здесь ω_τ — угловая скорость, с которой магнитная стрелка начинает совершать свои видимые колебания около ее положения равновесия, находясь при этом все время только под действием горизонтальной составляющей земного поля (опыт Гаусса с колебаниями § 45). Так как законы этих колебаний известны, то можно из них вычислить ω_τ, например, измеряя амплитуду колебаний, а также M и K. Далее:

$$\int_0^\tau I\,dt = e.$$

Это полное, протекшее в определенном направлении через кольцевой проводник количество электричества, независимо от специального вида функции времени для I, равно электрическому заряду конденсатора, который может быть измерен также в гауссовых единицах, например при помощи электрометра Томсона (§ 43).

Таким путем находятся все величины, знание которых необходимо для вычисления из соотношения (278) единственной неизвестной критической скорости c. Она оказалась во всех измерениях одинаковой, равною

$$c = 3 \cdot 10^{10}\ см/сек^{-1}. \tag{279}$$

Во всех позднейших вычислениях мы будем отныне предполагать ее известной.

Только что описанный метод первого определения c представляет особо прекрасный пример не только искусства точных измерений, но также глубины теоретических проникновений, которые как раз обнаруживают свой наибольший успех в том отношении, что они учат нас в запутанных явлениях и закономерностях пренебрегать несущественным и отделять его от существенного.

При практическом осуществлении измерений разрядный ток пропускался вокруг магнитной стрелки не через один, а через большое число оборотов проволоки (катушка, соленоид), так как по (274) магнитное напряжение от этого соответственно увеличивается.

§ 61. Знание величины критической скорости раз навсегда делает выполнимым переход между различными системами единиц. Чрезмерно большая числовая величина c обусловливает то обстоятельство, что физически определимая сила тока в электромагнитной системе единиц выражается значительно меньшим числом $\left(\frac{i}{c}\right)$, чем в гауссовой системе. Обратное имеет место с напряжением поля $\mathbf{E}$ или электродвижущей силой E, так как по соотношению (16) напряжения и разности потенциалов какого-нибудь определенного электрического поля в электромагнитной системе единиц выражаются числом в c раз большим, чем в системе Гаусса.

Так как проводимость или сопротивление по (251) получается взаимным делением электродвижущей силы и силы тока, то для этих величин отмеченный контраст в обеих системах единиц усиливается. Так, например, для ртути при 0° С удельная проводимость в гауссовой системе единиц:

$$\varkappa = 9{,}567 \cdot 10^{15}\ сек^{-1}; \tag{280}$$

тогда как в электромагнитной системе

$$\frac{\varkappa}{c^2} = 1{,}063 \cdot 10^{-5}\, см^{-2}\, сек. \tag{281}$$

В практической электромагнитной системе единиц по возможности избегают неудобных степеней десяти абсолютной системы. Поэтому для практической системы единиц в качестве исходной точки условно установлено, что сопротивление, имеющее в электромагнитной системе величину 10^9 *см/сек*$^{-1}$, представляет 1 ом и, далее, что электродвижущая сила или разность потенциалов, имеющая в электромагнитных единицах величину 10^8 *г*$^{1/2}$ *см*$^{3/2}$ *сек*$^{-2}$, значит 1 вольт. Практическая единица силы тока, 1 ампер, получается тогда из уравнения (251), из закона Ома, она составляет, таким образом, $\frac{1}{10}$ единицы силы тока в абсолютной электромагнитной системе.

Если держаться этих определений, то возникли бы чувствительные практические неудобства, вследствие зависимости практических единиц от точности воспроизведения абсолютных единиц. Поэтому условились, далее, в том, так же как это было ранее при установлении единицы длины (*1*, § 3), чтобы наряду с предыдущими теоретическими определениями ввести узаконенные или интернациональные определения, которые очень близко с ними сходятся и имеют то преимущество, что могут быть точнее воспроизведены. Так, 1 интернациональный ом есть сопротивление столба ртути с поперечным сечением в 1 *мм*^{2} и высотою 1,063 *м*. В самом деле, это сопротивление в электромагнитных единицах по (249):

$$\frac{c^2}{\varkappa}\,\frac{l}{q}=\frac{c^2}{\varkappa}\cdot\frac{106{,}3}{10^{-2}}=\frac{c^2}{\varkappa}\cdot 10\,630$$

и равно по (286) 10^9.

Далее, 1 интернациональный ампер есть ток, который в одну секунду выделяет 0,001118 *г* серебра (ср. § 66). В центре кругового проводника с радиусом 1 *см* 1 ампер возбуждает по (277) магнитное поле с напряжением в $\frac{2\pi}{10}=0{,}628$ гаусса.

Величина интернационального вольта получается тогда из закона Ома (251). Электродвижущие силы наиболее употребительных гальванических элементов лежат между 1 и 2 вольтами; в особенности надо отметить электродвижущую силу так называемого нормального элемента Вестона (кадмиевый элемент); при 20° C она равна 1,01830 интернационального вольта.

Названными единицами устанавливаются также практические единицы количества электричества и электрической емкости, а именно: 1 кулон есть количество электричества, доставляемое оком в 1 ампер в 1 секунду, а 1 фарад есть емкость, которую 1 кулон заряжает до потенциала 1 вольт.

Миллионную часть этих величин обозначают приставкой „микро“, а величину в миллион раз большую — приставкой „мега“. Так говорят о микрофараде, о микровольте и т. д.

Емкость электрического воздушного конденсатора с 100 *см*² поверхности и 1 *см* расстояния между пластинами составляет на (70):

$$\frac{100}{\nu\pi} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot 10^9 \cdot 10^6 = 8{,}84 \cdot 10^{-6} \text{ микрофарад.}$$

§ 62. От магнитных действий линейных токов мы перейдем теперь к рассмотрению общего случая нелинейных токов и вместе с тем вернемся к задаче, формулированной в § 55, которую мы решим теперь прямым путем, вычисляя напряжение магнитного поля **H** в какой-либо точке объема, внутри или вне проводника, несущего ток, по заданной величине плотности тока **J**. При этом мы последуем тому же методу, как во *2*, § *74*, только будем теперь пользоваться векторным исчислением.

Сначала представим общий интеграл везде имеющего место диференциального уравнения (51) в виде следующего соотношения:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{282}$$

где вектор **A** может быть совершенно произвольной функцией координат, которую мы, так как **B** везде непрерывно, также будем считать непрерывной вместе с ее первыми производными. Кроме этого условия наложим на вектор **A** еще другое ограничение, не стесняя при этом нисколько величины **B**. Именно, если мы вместо **A** примем $\mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi$, то **B** сохранит, очевидно, свою величину совершенно неизменной, каково бы ни было ψ. Мы воспользуемся этим обстоятельством, чтобы на вектор **A** наложить еще дальнейшее ограничение:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{283}$$

чего всегда можно достигнуть подходящим подбором скалярной функции ψ, в частности, величины $\Delta\psi$. Из (282) следует:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{284}$$

и, вставляя в (241), получаем уравнение, служащее для вычисления **A**:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \cdot \mathbf{J}. \tag{285}$$

Далее, как можно в этом убедиться, произведя вычисления для какого-нибудь компонента, мы имеем тождественно:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \tag{286}$$

принимая же во внимание (283):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \tag{287}$$

и из (285):

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \cdot \mathbf{J}. \tag{288}$$

Это есть уравнение Пуассона *1*, (131), но не для скаляра, а для вектора, поэтому и интеграл этого диференциального уравнения

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{J}'}{r}\,d\tau' \tag{289}$$

называется „вектор-потенциалом" в противоположность скалярному потенциалу. r означает в нем положительное расстояние элемента объема $d\tau$, несущего ток плотностью $\mathbf{J}'$, от точки воздействия. Уравнение (289), как всякое векторное уравнение, представляет три уравнения, по одному для каждого из трех компонентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}'$.

Подставляя величину вектор-потенциала в (284), получаем искомое напряжение магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \left[\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,\mathbf{J}'\right] d\tau' \tag{290}$$

или также:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{d\tau'}{r^2}\cdot\left[\mathbf{J}'\,\frac{\mathbf{r}}{r}\right], \tag{291}$$

где вектор $\mathbf{r}$ направлен от элемента объема $d\tau'$ к точке воздействия [ср. *2*, (394)].

Вместо плотности тока $\mathbf{J}$ можно также ввести в формулы силу тока I бесконечно тонкой трубки тока с сечением q, подразумевая под $d\tau'$ бесконечно короткую часть длины ds подобной трубки тока. Тогда, так как

$$d\tau' = q\,ds \quad \text{и} \quad I = \left|\mathbf{J}\right| q,$$

$$\left|\mathbf{J}\right| d\tau = I\,ds, \tag{291a}$$

т. е. вектор:

$$\mathbf{J}\,d\tau' = I\,d\mathbf{r}, \tag{292}$$

и в результате:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{I}{r^2}\cdot\left[d\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\right]. \tag{293}$$

На основании всего этого оказывается, что напряжение магнитного поля в точке воздействия является результирующей бесконечно большого числа бесконечно малых напряжений, из которых каждое проистекает от определенного элемента тока и может быть рассматриваемо, как производимое этим элементом тока напряжение в точке воздействия. Величина его и направление определяются вектором:

$$\frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r^2}\left[d\mathbf{r}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\right].$$

Поэтому величина его равна:

$$\frac{I\,ds}{c}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\sin(d\mathbf{r},\,\mathbf{r})$$

направление перпендикулярно к плоскости, проходящей через ds и r, и таково, что для наблюдателя в ds, плывущего вперед по току и обращенного лицом к точке воздействия, напряжение магнитного поля направлено влево (закон Био-Савара, „правило пловца" Ампера).

Понятно, что в только что полученных результатах содержатся как частный случай прежние результаты для линейных токов. Так, например, для напряжения магнитного поля, которое круговой ток радиуса R создает в своем центре, из (293) непосредственно получается известное выражение (277).

Соотношение (291) дает, естественно, напряжение магнитного поля $\mathbf{H}$ также и внутри проводника, несущего ток. Тогда в точке воздействия $\mathbf{J}$ отлично от нуля, а между величинами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ не существует никакой непосредственной связи. В особенности не следует думать, что $\mathbf{H}$ должно быть перпендикулярно к $\mathbf{J}$. Напротив, может даже случиться, что напряжение магнитного поля будет совпадать по направлению с электрическим током.

§ 63. Так как магнитное состояние в каком-либо месте определяется магнитным напряжением, то магнитное поле, возбуждаемое током, по существу совершенно тождественно с магнитным полем, возбуждаемым магнитом, и ничем физически от него не отличается. Из этого следует, что мы можем представлять себе по произволу всякое существующее в природе магнитное поле возбужденными или покоряющимися магнитами или стационарными токами. В самом деле, если мы имеем перед собою стационарные токи, то мы можем весь ток, каков бы он ни был, представить себе составленным из бесконечно тонких, следовательно, линейных трубок тока и к каждой из них применить найденный в § 58 закон. При этом нужно только следить за тем, чтобы поверхность с двойным слоем не проходила через точку воздействия. Далее, следует заметить, что можно совершенно пренебречь магнитным действием бесконечно тонкой трубки тока на точку воздействия, расположенную внутри ее.

Если же у нас имеются постоянные магниты, то они представляют собой систему бесконечно большого числа бесконечно малых элементарных магнитов. Ввиду этого можно, применяя в обратном смысле основной закон § 58, каждый элементарный магнит с магнитным моментом $\mathbf{M}$ заменить элементом поверхности σ произвольной формы, обтекаемой током I, с нормалью к σ, совпадающей с осью магнита, между тем как

$$\frac{\mu I}{c}\sigma = |\mathbf{M}|. \tag{295}$$

Все эти бесконечно малые токи, так называемые амперовы молекулярные токи, возбуждают то же самое поле, как и магниты.

Какому из двух противопоставленных пониманий, магнитному или электрическому, отдать предпочтенье, в этом с точки зрения общей теории не может быть сомнения. С одной стороны, стремление к единству наших воззрений на природу принуждает нас к тому, чтобы заменить дуализм между электричеством и магнетизмом, по существу, унитарным воззрением, а с другой стороны, не может быть и речи о сведении электричества к магнетизму, ввиду невозможности истолковать при помощи магнетизма понятие (действительного) электрического заряда. Поэтому остается только одна возможность: рассматривать электричество как первоначальное, а магнетизм как производное понятие.

Гипотеза амперовых молекулярных токов во всех ее следствиях, действительно, всюду подтверждается.

Вычислим теперь вектор-потенциал, вызываемый данным элементарным магнитом с постоянным моментом **M**, в какой-нибудь точке пространства, лежащей на расстоянии r. Для этого мы можем воспользоваться вытекающим из (288) и (292) уравнением:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} I \cdot \int \frac{d\mathbf{r}}{r}, \tag{296}$$

где интегрирование распространяется на все элементы $d\mathbf{r}$ контура бесконечно малой поверхности σ. Форму для σ мы выберем в виде круга, еще удобнее прямоугольник, так как тогда все интегрирование сведется к суммированию по четырем его сторонам. Так как $d\mathbf{r}$ — вектор, то приходится вычислять три интеграла, которые получаются из вышенаписанного заменой в нем $d\mathbf{r}$ через его три компонента. Принимая затем во внимание (295), мы найдем искомое выражение для **A**.

Вместо выполнения этих элементарных вычислительных операций мы можем притти к выражению для **A** более удобно следующим путем. Потенциал данного элементарного магнита:

$$\varphi = -\frac{\mathbf{M}}{\mu} \operatorname{grad} \frac{1}{r}. \tag{297}$$

(Ср. внешний потенциал (200a), намагниченного вдоль оси шара для $\mu_0 = \mu$. Случай $\mu_0 \neq \mu$ будет разобран в ближайшем параграфе.) Из этого следует для напряжения поля **H**, для индукции **B** и для вектор-потенциала по (282):

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \operatorname{grad}\left(\mathbf{M} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right). \tag{298}$$

Так как **M** не зависит от положения точки воздействия, то тождественно:

$$\operatorname{grad}\left(\mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) \equiv \mathbf{M} \Delta \frac{1}{r} + \operatorname{rot}\left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} \mathbf{M}\right], \tag{299}$$

и по (298), так как $\Delta \frac{1}{r} = 0$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot}\left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} \mathbf{M}\right],$$

Это дает, учитывая условие (283), однозначное выражение вектор-потенциала элементарного магнита с моментом **M**:

$$\mathbf{A} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} \mathbf{M}\right]. \tag{300}$$

Таким же точно образом можно свести магнитное поле любого конечного магнита к вектор-потенциалу амперовых молекулярных токов.

Если по вышеизложенному все магнитные действия с точки зрения общей теории можно свести к вектор-потенциалу, то все же во многих исследованиях из практических соображений предпочитают пользоваться в вычислительном отношении более простым, скалярным потенциалом φ, имея при этом в виду, что скалярный магнитный потенциал следует расценивать только как удобную вспомогательную математическую величину.

§ 64. В выполнявшихся нами до сих пор электромагнитных исследованиях мы, начиная с § 55, для упрощения постоянно предполагали, что проницаемость μ во всех веществах одинакова. Если теперь мы оставим это ограничение, то нормальная составляющая напряжения **H** и тангенциальная составляющая индукции **B** перестанут быть непрерывными. В таком случае решение задачи — найти магнитное поле при заданной стационарной плотности **J** — можно получить или при помощи только вектор-потенциала, причем тогда нужно принять во внимание кроме тока **J** также амперовы молекулярные токи, соответствующие временному намагничению, или, что удобнее, разложить напряжение магнитного поля на две части: одну, проистекающую от тока и определяемую вектор-потенциалом **A** для этого тока по (289), и другую, обладающую скалярным потенциалом φ:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} \varphi. \tag{301}$$

Этим выражением, если принять $\Delta\varphi = 0$, удовлетворяется как (241), так и (51), между тем как прерывность **H** на границах, обусловленная различием μ, служит для ближайшего определения φ.

ГЛАВА VI

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ И ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ

§ 65. По уравнению (20) в каждом элементе объема проводника, несущего ток, в течение времени dt превращается в джаулево тепло количество электрической энергии:

$$dt \cdot d\tau \varkappa \mathbf{E}^2 = dt d\tau \, \mathbf{J}\mathbf{E} = dt \cdot d\tau \frac{\mathbf{J}^2}{\varkappa}. \tag{302}$$

Это дает для тока силой I в однородном линейном проводнике с поперечным сечением q на элемент длины dl между сечениями

1 и 2, так как $I = \mathrm{J}q$ и $d\tau = qdl$, количество образовавшейся теплоты:

$$dt \cdot I^2 \cdot \frac{1}{\varkappa} \int_1^2 \frac{ql}{q}$$

или по (249):

$$dt \cdot I^2 \cdot w. \tag{303}$$

Если ток идет через цепь последовательно соединенных проводников, то полное количество выделившегося тепла получится суммированием:

$$dt \cdot I^2 \cdot \Sigma w. \tag{304}$$

Это выражение имеет место и в том случае, когда сила тока I как угодно изменяется со временем.

Для стационарного тока можно вместо (304) также написать по (250):

$$dt \cdot I \cdot (\varphi_1 - \varphi_n + \Sigma E), \tag{305}$$

где φ_1 и φ_n—значения электрического потенциала в начальном и конечном сечениях рассматриваемой системы проводников.

Если имеются объемные проводники, то, суммируя (305) между поверхностью уровня $\varphi = \varphi_1$ в проводнике 1 и поверхностью уровня $\varphi = \varphi_n$ в проводнике 2 по всем идущим рядом бесконечно тонким трубкам тока, получим количество образовавшейся теплоты опять в виде выражения (305), если под I подразумевать полную силу тока. Пользуясь (253), для него также можно написать:

$$dt \cdot I^2 \cdot W. \tag{306}$$

Количество тепла, образовавшегося во всей замкнутой системе проводников, составляет по (305) для $\varphi_1 = \varphi_n$:

$$dt \cdot I \cdot \Sigma E, \tag{307}$$

где ΣE означает полную электродвижущую силу замкнутой цепи.

Произведение $I \cdot \Sigma E$ называется в технике также „эффектом" или „мощностью" электродвижущей силы, ΣE — единица этой величины носит название вольт-ампера или ватта. Киловатт, равный тысяче ватт, представляет приблизительно 1,36 лошадиной силы. Доставляемая 1 ваттом в 1 секунду энергия, так называемая ватт-секунда, равная 10^7 эргам, называется 1 джауль.

§ 66. Теперь спрашивается, из какого источника энергии берется это всегда положительное количество теплоты, выделяемой в покоящемся проводнике стационарным током? Очевидно, здесь играют роль только молекулярные, т. е. термические и химические, процессы, и, конечно, если проводники все однородны и поддерживаются при одинаковой температуре, эти процессы протекают исключительно на границе проводников. Так как электромагнитное поле не изменяется со временем, следовательно, обладает также неизменной энергией, то электрический ток играет роль только промежуточной инстанции, и в целом пущенная в оборот молекулярная энергия равна всему количеству (307) джаулева тепла, поэтому произведенная на пограничных поверхностях молекулярная энергия есть:

$$-dt \cdot I \cdot \Sigma E, \tag{308}$$

т. е. она пропорциональна силе тока и полной, действующей на границах, электродвижущей силе.

Но это заключение имеет силу только для цепи в целом. Было бы поспешным, да и вообще неверным, выводить отсюда далее, что через произведение IE выражается также и молекулярная энергия, произведенная током I на отдельной пограничной поверхности с электродвижущей силой E. Так как ток через отдельную границу не представляет изолированной системы (*1*, § 120), то принцип сохранения энергии не позволяет здесь сделать никаких заключений, не принимая в расчет внешних воздействий, которые в настоящем случае обусловлены притекающим к границе и уходящим от нее электричеством.

В металлических проводниках молекулярная энергия, проявляющаяся на пограничных поверхностях, сводится к образованию тепла (тепло Пельтье), в электролитах к этому присоединяется еще химическая энергия, связанная с их разложением. Для вторых имеет место установленный впервые Фарадеем общий опытный закон, что количество разложенного током электролита зависит единственно и исключительно от полного протекшего через него в определенном направлении количества электричества, невзирая на время протекания, на силу или плотность тока, электродвижущую силу и т. д., т. е. зависит от величины:

$$\int I dt. \tag{309}$$

При этом для различных электролитов при одной определенной величине (309) соответственные (выделившиеся) количества любых веществ находятся в том же отношении, как их химические эквиваленты, т. е. как весовые количества, в которых эти вещества входят в химические соединения. Если a обозначает химический эквивалент какого-нибудь вещества, отнесенный к кислороду с эквивалентом 16 *г*, то это вещество выделится током I в гауссовых единицах, или $\frac{I}{c}$ в электромагнитных единицах, или $\frac{10I}{c}$ в амперах, за dt секунд в количестве:

$$1{,}0363 \cdot 10^{-5} \cdot a \cdot \frac{10I}{c} \cdot dt \text{ г}. \tag{310}$$

Коэфициент $1{,}0363 \cdot 10^{-5} \cdot a$ называется электрохимическим эквивалентом вещества.

Обратно, чтобы разложить химический эквивалент a граммов вещества, необходимо подвести количество электричества $\frac{c}{1{,}0363\cdot 10^{-4}}=2{,}895\cdot 10^{14}$ в гауссовых единицах, или 9650 в электромагнитных единицах, или 96 500 кулонов.

Для серебра $a=107{,}88$, таким образом, для него электрохимический эквивалент:

$$1{,}0363\cdot 10^{-5}\cdot 107{,}88=0{,}001118\ г$$

(ср. § 61).

§ 67. Для более наглядного представления энергетических процессов в цепи стационарного гальванического тока часто прибегают к картине медленного стационарного течения жидкости, прогоняемой через систему труб, на стенках которых она испытывает трение. Джаулеву теплу соответствовала бы тогда теплота трения, падению потенциала — падение давления, и потеря молекулярной энергии на границе двух проводников была бы представлена как результат действия особого механизма, который в месте соединения двух труб увеличивает в жидкости давление.

Это уподобление, однако, страдает существенным недостатком, поскольку оно дает совершенно не соответствующее действительности представление о направлении, в котором транспортируется энергия. При течении жидкости энергия как механическая работа сдавливания приведенной в движение жидкости течет в направлении линий тока, при гальваническом же токе по теореме Пойнтинга (9) направление потока энергии перпендикулярно к направлению поля и потому также и к направлению тока. Поэтому каждая цилиндрическая трубка тока внутри проводника получает свое джаулево тепло не через основания, а через боковую поверхность цилиндра; то же самое имеет место для всего проводника. Мы приходим, таким образом, к очень странному на первый взгляд заключению, что джаулево тепло доставляется проводнику не из других прилегающих к нему проводников, но из примыкающего к нему изолятора, через границу которого энергия входит со всех сторон в проводник поперек к линии тока. Но, само собою понятно, вследствие стационарности состояния изолятор должен восстанавливать утраченную им энергию, и это происходит, как показывает ближайшее рассмотрение, в тех местах, где изолятор соприкасается с границей раздела двух проводников, ибо как раз здесь электрическое напряжение в изоляторе обладает по § 27 очень большой, исключительной величиной. Конечно, этого нельзя понимать так, как если бы на каждом таком отдельном контакте энергия устремлялась в изолятор, так как знак $\pm$ электрического напряжения в изоляторе меняется вместе с контактной разностью потенциалов E, между тем как, напротив, направление магнитного поля задано направлением тока и не зависит от знака E. Но алгебраическая сумма потоков энергии от всех контактов дает количество энергии, отданной изолятору, и по своей величине представляется формулой (307), как устанавливает ближайшее вычисление, от выполнения которого мы можем здесь воздержаться.

Как ни необыкновенной и излишне запутанной может сначала показаться нарисованная нами форма обмена энергией, она значительно лучше отвечает действительности, чем в случае вышеуказанной картины потока жидкости. Как только мы перейдем от стационарного гальванического тока к переменному, обнаружатся явления, которые прямо доказывают, что изолятор в случае тока в проводнике играет совсем не пассивную роль, которая ему отведена в механической картине совершенно извне изолированной неизменной системы труб. Уже то обстоятельство, что при стационарном токе внутри изолятора существует электромагнитное поле, т. е. электромагнитная энергия, обнаруживает, что последний не может оставаться совсем безучастным в процессе тока. Действительно, при устанавливании гальванического тока изолятору, который первоначально, при отсутствии тока в проводнике, был нейтральным в электромагнитном отношении, из системы проводников, т. е. за счет молекулярной энергии на контактах, необходимо должна быть сообщена энергия, в которой он нуждается при стационарном состоянии тока. Это количество энергии или возвращается обратно в систему проводников при прекращении тока или теряется наружу в бесконечное пространство при очень быстром прерывании тока. Более подробно мы познакомимся с этим далее в § 76.

§ 68. От молекулярных процессов в стационарном поле мы обращаемся теперь к рассмотрению пондеромоторных действий и соответственно механических сил, которые нужно приложить к какой-либо покоящейся системе свободно движущихся магнитов и обтекаемых током проводников, чтобы удержать их в неподвижном состоянии.

Все эти действия мы можем подразделить на три группы: во-первых, взаимодействия между магнитами (магнитные действия), во-вторых, взаимодействия между магнитами, с одной стороны, и проводниками с током, с другой (электромагнитные действия), в-третьих, взаимодействия между проводниками с током (электродинамические действия).

Что касается прежде всего магнитных пондеромоторных действий, то мы вполне познакомились уже с их законом в § 45, и именно, в двух формах, каждая из которых имеет свои преимущества: интегральным законом или потенциальным и диференциальным или силовым законом. По потенциальному закону работа, совершенная при бесконечно малом перемещении магнитов действующими между ними механическими силами, равна уменьшению магнитного потенциала, а магнитный потенциал тождественен с магнитной энергией U. По силовому закону результирующая действующих на какую-либо часть магнита механических сил получается через сложение действующих на ее поверхность магнитных давлений (239). Так как значение магнитного тензора давлений независимо от того, образовано поле магнитами или токами, а также и от того, содержит ли объем, заключающийся внутри поверхности, магнит или проводник с током, то эта форма диференциального закона удобна также для непосредственного применения к электромагнитным и электродинамическим действиям. Однако ей часто в высокой степени недостает наглядности, поэтому в последующих исследованиях мы будем исходить из интегрального закона.

§ 69. Мы займемся теперь электромагнитными действиями. Представим себе какой-нибудь постоянный магнит и произвольный линейный проводник, по которому течет ток. Пусть оба они совершенно свободны в своих движениях и действуют друг на друга. При этом ток действует механически на магнит через посредство возбуждаемого им по § 58 магнитного поля и, наоборот, по механическому принципу — действие равно противодействию, магнит действует на ток в обратном направлении с такой же силой. Работа, произведенная при взаимном перемещении магнита и тока, по § 45 равна происходящей при этом убыли потенциала магнита на ток или электромагнитного потенциала V, если мы так назовем потенциал, образуемого магнитом поля $\mathbf{H}$ на двойной магнитный слой, эквивалентный току I.

Но уже ранее, в § 45, мы вычислили потенциал данного магнитного поля $\mathbf{H}$ на находящийся в нем магнитный диполь с постоянным магнитным моментом $\mathbf{M}$. Это есть переменная часть выражения (253):

$$-(\mathbf{M}_x\mathbf{H}_x + \mathbf{M}_y\mathbf{H}_y + \mathbf{M}_z\mathbf{H}_z). \tag{311}$$

Но двойной магнитный слой, эквивалентный по § 58 току I, с постоянным магнитным моментом $\frac{\mu I}{c}$, состоит из бесконечно большого числа диполей, каждый из которых лежит на элементе поверхности слоя $d\sigma$, с моментом:

$$|\mathbf{M}| = \frac{\mu I}{c} d\sigma \tag{312}$$

и с нормалью к поверхности ν, направленной по оси, согласной с направлением тока. Поэтому мы получим для искомого электромагнитного потенциала, подставляя (312) в (311) и суммируя по всем элементам $d\sigma$ двойного слоя

$$V = -\frac{\mu I}{c}\int \mathbf{H}_\nu\, d\sigma = -\frac{I}{c}\int \mathbf{B}_\nu\, d\sigma. \tag{313}$$

Таким образом потенциал магнитного поля на линейный ток равен взятому со знаком минус произведению $\frac{I}{c}$ на поток индукции поля через поверхность, ограниченную током, или, как еще можно выразиться, числу линий индукции, охватываемых проводником. Что этот интеграл по поверхности не зависит от специального вида поверхности, мы уже видели в уравнении (53).

Так как смысл механических взаимодействий между магнитом и током всегда совпадает с направлением уменьшения величины V, то можно коротко это взаимодействие охарактеризовать таким образом: механические силы стремятся увеличить поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную током. Это имеет место для всякого рода перемещений магнита относительно тока. Если магнит неподвижно закреплен, то ток стремится, вращаясь или двигаясь поступательно, занять такое положение, при котором он охватывает (в положительном смысле) возможно большее число линий индукции, исходящих из магнита. Если ток закреплен, то магнит старается двигаться так, чтобы послать возможно большее число линий индукции через поверхность тока в положительном направлении. Это происходит, например, в случае кругового тока тогда, когда середина магнита лежит в центре круга и когда ось магнита совпадает с положительной нормалью тока.

Независимость электромагнитного потенциала V от специальной формы поверхности σ, ограниченной током, можно выразить и формально, если ввести вместо индукции $\mathbf{B}$ по (282) или (298) вектор-потенциал магнита. Тогда при помощи теоремы Стокса (273) получается:

$$\int \mathbf{B}_\nu \, d\sigma = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \tag{313a}$$

и из (313):

$$V = -\frac{1}{c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \tag{314}$$

где интегрирование распространяется только по элементам $d\mathbf{r}$ кривой проводника тока. Из этого следует также, далее, для объемного тока, принимая во внимание (292),

$$V = -\frac{1}{c} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \cdot d\tau. \tag{315}$$

§ 70. При помощи интегрального закона мы приходим к диференциальному закону механических электромагнитных действий. Что касается, во-первых, механической силы, с какой действует элемент тока на магнитный полюс, то она получается уже из закона Био и Савара (294), так как производимое током магнитное напряжение поля представляет в то же время механическую силу, действующую на положительный единичный магнитный полюс, находящийся в поле.

Чтобы найти, с другой стороны, механическую силу $\mathbf{F}$, производимую данным магнитным полем $\mathbf{H}$ или $\mathbf{B}$ на элемент $d\mathbf{r}$ находящегося в нем линейного, несущего ток, проводника, мы будем исходить из общей механической работы:

$$\Sigma \cdot \mathbf{F} \delta\mathbf{r}. \tag{316}$$

всех действующих на отдельные элементы тока сил при каком-либо бесконечно малом возможном перемещении проводника. Она равна убыли электромагнитного потенциала, т. е. по (313):

$$-\delta V = +\frac{I}{c}\,\delta\left(\int \mathbf{B}_v\, d\sigma\right). \tag{317}$$

Вариации интеграла здесь можно вычислить из простых геометрических соображений. Именно, так как магнитное поле **B** неизменно, то вариация потока индукции через всю поверхность σ сведется к потоку индукции через ту бесконечно узкую кольцеобразную поверхность, которая образована смещенной кривой и первоначальной и которая вместе с первоначальной поверхностью σ представляет измененную поверхность. Элемент этой поверхности есть параллелограм, образуемый отрезками $\delta\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$, или как вектор:

$$[\delta\mathbf{r}\, d\mathbf{r}]$$

и поток индукции через него:

$$\mathbf{B}\,[\delta\mathbf{r}\, d\mathbf{r}].$$

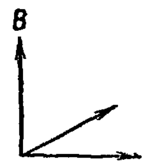
Таким образом, интегрируя по всем элементам кольцеобразной поверхности по (317):

$$-\delta V = \frac{I}{c}\int \mathbf{B}\cdot[\delta\mathbf{r}\, d\mathbf{r}] = \frac{I}{c}\int \delta\mathbf{r}\,[d\mathbf{r}\mathbf{B}] \tag{317a}$$

и сравнивая с (316), так как отдельные $\delta\mathbf{r}$ независимы друг от друга:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c}\,[d\mathbf{r}\,\mathbf{B}] \tag{318}$$

Таким образом сила пропорциональна синусу угла, образуемого элементом тока и проникающей линией магнитной индукции, и действует перпендикулярно к обоим. Направление не указано на черт. 9 и может быть выражено в форме такого положения, что для наблюдателя, плывущего в направлении электрического тока, сила действует вправо. Поэтому элемент тока побуждается силой к тому, чтобы пересекать линии магнитной индукции поперек, и эта формулировка опять обнаруживает связь с интегральным законом, по которому ток стремится охватить возможно большее число линий индукции.



Черт. 9.

§ 71. Наконец, что касается пондеромоторных взаимодействий токов между собою, т. е. электродинамических действий, то понятно, что действие магнитного поля на элемент тока не зависит от того, проистекает ли магнитное поле от магнита или от второго тока. Поэтому и здесь имеет место закон действия силы (318).

Далее, чтобы установить электродинамический потенциальный закон, образуем из электромагнитного потенциала V электродинамический потенциал W, внося в (315) выражение вектор-потенциала (289) системы нелинейных токов:

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{c^2}\iint \frac{\mathbf{J}\mathbf{J}' d\tau d\tau'}{r}. \tag{319}$$

Прибавление множителя $\frac{1}{2}$ необходимо, так как в двойном интеграле комбинация каждых двух элементов объема $d\tau$ и $d\tau'$ входит дважды.

В этом общем выражении для электродинамического потенциала системы нелинейных токов содержится также действие тока на самого себя, ибо интегрирование распространяется также на каждые два элемента объема $d\tau$ и $d\tau'$ той же самой трубки тока. При этом доля, вносимая двумя бесконечно близкими элементами тока, несмотря на то, что тогда $\mathbf{r}$ исчезающе мало, не имеет заметного значения вследствие малости $d\tau$ и $d\tau'$.

Если мы выразим скалярное произведение $\mathbf{J}\mathbf{J}'$ через абсолютные величины векторов, то мы можем также написать:

$$W = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{c^2}\iint \frac{|\mathbf{J}|\cdot|\mathbf{J}'|\cdot\cos\delta}{\mathbf{r}}\cdot d\tau\cdot d\tau', \tag{320}$$

где δ обозначает угол между векторами $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$.

Применим электродинамический потенциал к пондеромоторному взаимодействию двух линейных токов I и I'. Так как мы пренебрегаем действием токов на самих себя, то мы можем относить $d\tau$ только к одному проводнику, а $d\tau'$ только к другому, и тогда получаем из (320), принимая во внимание (291a) и опуская множитель $\frac{1}{2}$:

$$W = -\frac{\mu}{c^2} II' \int \frac{\cos\delta}{r} ds\, ds'. \tag{321}$$

На основании примечания к (313) эта величина равна $-\frac{I}{c}$ раз взятому потоку магнитной индукции, который посылает в положительном направлении ток I' благодаря своим магнитным действиям через поверхность, ограниченную током I, и соответственно обратно; таким образом W пропорционально числу линий индукции, которое охватывает оба тока вместе. Пондеромоторные силы между несущими токи проводниками действуют всегда в направлении возможно большего увеличения потока индукции, будет ли то движение поступательное или вращение Поэтому, например, параллельные, одинаково направленные токи притягиваются, между тем как противоположно направленные отталкиваются или же так стремятся вращаться, чтобы сделаться одинаково направленными.

§ 72. Обобщая все до сих пор сказанное, мы можем в каждом случае вполне охарактеризовать пондеромоторные действия, появляющиеся в системе свободно движущихся магнитов и проводников, по которым идут токи, при помощи следующего положения: при всяком возможном бесконечно малом смещении магнитов и проводников произведенная пондеромоторными силами механическая работа равна убыли полного потенциала:

$$U + V + W = F, \tag{322}$$

причем $-\delta U$ — возможная работа магнитных сил, δV — электромагнитных, $-\delta W$ — электродинамических сил.

Выражения для потенциалов V и W получаются из выведенных выше соотношений. Если мы имеем дело в частном случае с линейными проводниками, в которых текут токи I_1, I_2, то по (313):

$$V = -\frac{1}{c}(I_1V_1 + I_2V_2 + \ldots), \tag{323}$$

где V_1, V_2 обозначают потоки индукции образуемого магнитами поля через поверхности, ограниченные токами 1, 2,... Далее, по (320) аналогично с (321):

$$W = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{13}I_1I_3 + \ldots\right), \tag{324}$$

где:

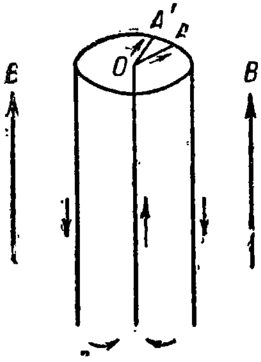
$$L_{12} = L_{21} = \mu \int \frac{\cos\delta}{r}\, ds_1 ds_2. \tag{325}$$

Коэфициенты L зависят только от геометрической конфигурации системы проводников, а $\frac{1}{c}L_{12}I_2$ равно по (321) потоку магнитной индукции, который посылает ток I_2 через поверхность, ограниченную током I_1, в положительном направлении. Члены, входящие в сумму (324) в квадратах, дают электродинамические потенциалы отдельных токов самих на себя, билинейные члены — потенциалы каждых двух различных токов друг на друга. Изменение коэфициентов L, происходящее при перемещении проводников с током, дает работу пондеромоторных сил между соответствующими токами.

§ 73. Перемещение магнитов и проводников, к которому мы прибегаем при вычислении пондеромоторной работы, совершенно произвольно. В частности, оно может быть соединено также и с деформацией тела, например с гнутием или искривлением проводника. Смотря по тому, окажется ли соответствующая работа положительной или отрицательной, пондеромоторные силы будут действовать в смысле деформации или противоположно ей. Однако нужно при этом иметь в виду одно существенное обстоятельство. Как явствует из способа применения потенциального закона к взаимодействию тока и магнита, необходимо при перемещении считать неизменной силу тока в каждом элементе каждой трубки тока. Если, следовательно, перемещение соединено с деформацией проводника, то при этом трубки тока остаются неизменно связанными с проводником или, как еще можно выразиться, линии тока увлекаются вместе с материей, в том смысле, что материальная кривая, которая до смещения представляла линию тока, представляет линию тока и после смещения.

Только строго соблюдая это правило, можно уберечься от ошибок, которые иногда так сами собой напрашиваются, что из-за ошибочных применений возникали даже возражения против всеобщности потенциального закона.

Один пример пояснит сказанное ближе. Вообразим себе в сильном однородном, направленном вертикально вверх, магнитном поле **H** или **B** прямолинейный проводник OA (черт. 10) длиною R, могущий вращаться в горизонтальной плоскости около неподвижной точки O, и пусть по проводнику течет стационарный ток I. Подводка тока производится таким образом, что горизонтальная дуга круга, скользя по которой движется конец A проводника, образует верхний край проводящей боковой поверхности длинного вертикального полого цилиндра; в точке A ток из проводника вступает в боковую поверхность цилиндра и течет по ней далеко вниз, где включена электродвижущая сила, а оттуда ток возвращается по оси цилиндра к точке O. Вопрос заключается в том, испытывает ли проводник с током, текущим по R, в магнитном поле вращательную силу, и если да, то каково ее направление и как она велика.



Черт. 10.

Сначала мы решим эту задачу при помощи потенциального закона, а затем при помощи закона действия силы. Так как здесь дело идет об электромагнитном действии, то из трех потенциалов нужно рассмотреть только потенциал V. Но тут напрашивается следующее ложное заключение. Общее выражение для V дается формулой (315), и величина этого выражения явно не зависит от положения радиуса в его плоскости. Ибо, если, например, ввести систему координат, для которых ось xов есть радиус R и ось z-ов — вертикаль через O, то вследствие симметрии по отношению к этой системе положение всех линий тока совершенно определенное, независимо от того, находится ли конец радиуса R в A или A'. Следовательно, можно было бы заключить, что при бесконечно малом вращении радиуса $\delta v = 0$, и, таким образом, не было бы никакого механического действия.

Этот вывод неправилен потому, что в изложенном вычислении δV не было соблюдено условие, что при предпринятом возможном вращении трубки тока должны оставаться неизменно связанными с веществом проводника. Так как проводящий цилиндр покоится, то при вариации остаются совершенно неизменными также и линии тока, в нем находящиеся, и при измененном положении радиуса R ток должен течь по следующему пути:

из O к A', затем по дуге к A и от A точно так же, как и раньше, через боковую поверхность цилиндра вниз и через ось цилиндра вверх. Возможное изменение тока, таким образом, в настоящем случае несколько иное, чем происходящее в действительности при вращении радиуса.

Если составить выражение для V по (315) для тока до смещения и затем для тока после смещения и вычесть первую величину из второй, то в обоих интегралах сократятся, так как вектор-потенциал A магнитного поля неизменен, все члены, относящиеся к покоящимся частям проводящей цепи, и останется выражение:

$$\delta V = -\frac{I}{c}\oint \mathbf{A}\, d\mathbf{r},$$

которое надо проинтегрировать по контуру от O через A' и A и обратно до O. Но этот линейный интеграл по (313) равен потоку индукции магнитного поля через узкий треугольник $OA'A$ в направлении нормали, соответствующем смыслу интеграции, в случае, изображенном на черт. 10, вниз, противоположно направлению магнитного поля, т. е. в отрицательном направлении. Если ξ — бесконечно малый угол поворота, то площадь указанного треугольника $\frac{R^2}{2}\xi$, и поэтому:

$$\delta V = \frac{I}{c}\frac{R^2}{2}\xi\cdot\mathbf{B}. \tag{326}$$

С другой стороны, обозначая механический момент вращения через N, для возможной механической работы будем иметь $N\xi$, следовательно, так как работа равна убыли потенциала:

$$\mathbf{N} = -\frac{I}{c}\frac{R^2}{2}\cdot\mathbf{B}, \tag{327}$$

момент вращения действует, стало быть, в направлении от A' к A.

К тому же самому результату мы придем, применяя к данному случаю закон силы (318). Момент вращения заданного магнитного поля на подвижный радиус R получается через суммирование моментов вращения, действующих на отдельные элементы радиуса $d\mathbf{r}$.

Но сила на элемент $d\mathbf{r}$ по (318): $\frac{I}{c}\mathbf{B}\, d\mathbf{r}$, следовательно, момент вращения есть произведение из этого выражения и $\mathbf{r}$, а результирующий момент вращения:

$$\mathbf{N} = -\frac{I}{c}\mathbf{B}\int_0^R r\,dr = -\frac{I}{c}\mathbf{B}\frac{R^2}{2}$$

как и выше. Направление вращения для наблюдателя, движущегося по направлению линий индукции, т. е. стоящего в O вертикально и смотрящего в направлении радиуса R по току, — вправо; поэтому и знак минус в выражении $\mathbf{N}$.

Подобная же опасность ошибочных заключений и соответствующая необходимость быть осмотрительным возникает, очевидно, в каждом случае, когда приходится иметь дело с проводниками, которые могут скользить один по другому.

Возвращаясь к рассмотренному в § 72 случаю системы произвольных подвижных магнитов и линейных токов I_1, $I_2, \ldots$, составим еще выражение для пондеромоторной работы A при каком-либо возможном бесконечно малом смещении системы. Принимая во внимание правила о неизменности силы тока, получим:

$$A = \delta U - \delta V - \delta W = -\delta U + \frac{1}{c}(I_1 \delta V_1 + I_2 \delta V_2 + \ldots) +$$
$$+ \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2} I_1^2 \delta L_{11} + I_1 I_2 \delta L_{12} + \frac{1}{2} I_2^2 \delta L_{22} + I_1 I_3 \delta L_{13} + \ldots\right). \quad (328)$$

Отсюда можно вывести все механические действия в системе.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

ГЛАВА
КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ЗАМКНУТЫХ ТОКАХ

§ 74. Обращаясь в последней части этой книги к общему случаю электродинамики: к нестационарным процессам, мы встречаемся при более точном исследовании с чрезвычайной сложностью подлежащих разрешению задач. Уже самый простой на первый взгляд случай движения неизменяемого магнита в безвоздушном пространстве представляет, строго говоря, очень запутанный процесс. Так как напряжение **H** магнитного поля, возбуждаемого магнитом, в каком-нибудь определенном месте в пустоте вследствие движения магнита изменяется со временем, то в этом месте согласно (31b) возникнет электрическое поле **E**, которое также изменяется со временем и вызывает в магните переменные электрические заряды, и т. д.

Выход из этого лабиринта взаимодействий, который ведет к общему обзору основных среди них случаев, может быть найден, если мы ограничимся сначала, как это мы уже сделали в электростатике в § 40, исследованием процессов, которые протекают так медленно, что каждый момент все электромагнитное поле может быть рассматриваемо как стационарное, т. е. исследованием так называемых квазистационарных процессов. Большое преимущество, которое вносит с собою это упрощение, состоит в том, что число неизвестных, которыми определяется состояние рассматриваемой системы тел и изменением со временем которых поэтому однозначно задается ход процесса, существенно ограничивается. Так, например, в случае медленно изменяющегося квазистационарного тока в покоящемся линейном проводнике общее состояние зависит от одной единственной переменной, от силы тока. При этом магнитное поле в окружающем изоляторе всюду и всегда имеет как раз те свойства, которыми оно обладало бы, если бы мгновенное значение силы тока было постоянно. Поэтому процесс во всех его частях может быть рассматриваем как известный, раз дана сила тока как функция времени.

Прежде чем перейти к исследованию квазистационарных процессов, задержимся еще немного на вопросе, нельзя ли при определенной имеющейся налицо системе тел наперед установить какой-либо количественно формулируемый критерий того, что процесс может быть трактован как квазистационарный. Если речь идет о движущихся телах, то подобный критерий напрашивается сам собою: это есть условие, что скорости, с которыми приходится иметь дело, малы по сравнению с критической скоростью c.

Но этого условия недостаточно, ибо в покоящихся проводниках могут разыгрываться также электродинамические процессы, которые не могут уже быть причислены к квазистационарным. Для этих случаев мы встретим наглядное количественное соотношение только впоследствии в § 89, которое может быть употреблено как общий критерий квазистационарного характера процесса.

Среди квазистационарных процессов своею особенной простотой выделяются такие (поэтому они и должны быть рассмотрены прежде всего), при которых все электрические токи замкнуты, или, говоря точнее, при которых токи на поверхностях проводников текут везде тангенциально. Упрощение, которое это условие влечет за собою, двоякое. Во-первых, при замкнутых токах электрические заряды, находящиеся на поверхностях проводников, и соответственно этому напряжения электрического поля везде так незначительны, что обусловленная ими электрическая энергия, по сравнению с магнитной энергией, обусловленной токами, может совершенно не приниматься в расчет. Во-вторых, для вычисления остающейся тогда одной только магнитной энергии можно воспользоваться без дальнейших рассуждений формулами для магнитных действий замкнутых стационарных токов, установленными в предшествующих главах. Так, применяя принцип энергии, мы придем к определенным законам для процессов, о которых идет речь.

§ 75. Итак, вычислим сначала магнитную энергию $Э$ квазистационарного поля, которое возбуждается произвольным числом движущихся постоянных магнитов и проводников с током, находящихся в одном и том же простирающемся в бесконечность изоляторе. Напряжение магнитного поля $\mathbf{H}$ в какой-либо точке какого-либо вещества составляется из двух членов: того напряжения $\mathbf{H}_m$, которое проистекает только от магнитов и которое зависит только от мгновенного положения магнитов, и напряжения $\mathbf{H}_i$, проистекающего от токов и зависящего исключительно от мгновенного положения проводников с током и от мгновенной силы тока в них.

Таким образом:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_i. \tag{329}$$

Вектор $\mathbf{H}_m$ получается из потенциала φ для постоянного магнита:

$$\mathbf{H}_m = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{330}$$

между тем как вектор $\mathbf{H}_i$, который не имеет скалярного потенциала, может быть по (284) сведен к вектор-потенциалу $\mathbf{A}$ тока:

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\;\mathbf{A}. \tag{331}$$

Так как μ во всех веществах мы принимаем одинаковой (§ 52), то $\mathbf{H}_i$ всюду непрерывен. Для магнитной энергии всей системы имеем, принимая во внимание замечание в конце § 35 относительно магнитной энергии при наличии постоянных магнитов:

$$Э = \frac{\mu}{8\pi}\int \mathbf{H}^2\,d\tau =$$

$$= \frac{\mu}{8\pi}\int \mathbf{H}_m^2\,d\tau + \frac{\mu}{4\pi}\int \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_i\,d\tau + \frac{\mu}{8\pi}\int \mathbf{H}_i^2\,d\tau. \tag{332}$$

Рассмотрим отдельно три части этого выражения. Первая часть представляет собой магнитную энергию, или магнитный потенциал постоянных магнитов на себя, мы обозначим его, как и раньше, через U. Вторая часть может быть преобразована, если воспользоваться (330), так как и φ и $\mathbf{H}_i$ непрерывны:

$$\mathbf{H}_m \cdot \mathbf{H}_i\,d\tau = \int \varphi \cdot \mathrm{div}\,\mathbf{H}_i\,d\tau,$$

что по (331) равно нулю. Наконец, третья часть по (331) после соответствующего преобразования дает:

$$\frac{\mu}{8\pi}\int \mathbf{H}_i^2\mathbf{A}\,d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{rot}\;\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}_i\,d\tau = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_i\,d\tau \tag{332a}$$

или по (241) и (289):

$$\frac{1}{2c}\int\!\!\int \mathbf{A}\,\mathbf{J}\,d\tau = \frac{\mu}{2c^2}\int \frac{\mathbf{J}\mathbf{J}'}{r}\,d\tau\,d\tau',$$

где в двойном интеграле каждый элемент объема всего пространства считается один раз как $d\tau$ и другой раз как $d\tau'$.

Сравнение с (319) обнаруживает, что это выражение есть не что иное, как взятый с минусом электродинамический потенциал W системы объемных токов. Поэтому мы имеем в качестве общего выражения для магнитной энергии всех магнитов и токов:

$$Э = U - W. \tag{333}$$

Этот результат, по которому вся магнитная энергия просто аддитивно составляется из энергии U магнитов и взятого с минусом потенциала токов W, без члена, зависящего от взаимодействия между магнитами и токами, на первый взгляд кажется неожиданным и поразительным. В особенности встает вопрос, почему величина $Э$ отличается от величины (322) полного потенциала F магнитов и токов, который мы получили таким путем, что каждый ток был заменен эквивалентным ему двойным магнитным слоем; физическая основа этого различия между $Э$, и F кроется в том, что несмотря на возможность замены тока во всех исхо дящих от него действиях магнитом, вполне отождествить их все же нельзя. Дело в том, что способ, каким реагирует ток на то магнитное поле, в котором он движется, отвечает поведению магнита (в согласии с принципом равенства действия и противодействия) только в отношении пондеромоторных, но не, как увидим позже, электродвижущих действий. На этом несходстве тока и эквивалентного ему магнита и покоится различие между величинами $Э$ и F.

Для наглядного различия от полной электромагнитной энергии $Э$ потенциал F, имеющий силу только для механической работы, часто называют „свободной энергией". Общую связь между функциями $Э$ и F устанавливать здесь мы не станем. Однако, забегая вперед, в виде примера заметим, что для поля постоянных магнитов и линейных токов I_1, I_2, I_3 имеется соотношение:

$$Э = F - \left(I_1 \frac{\partial F}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial F}{\partial I_2} + \ldots\right), \tag{333a}$$

которое может быть проверено при помощи уравнений (322), (323), (324) и которое совершенно того же вида, как соотношение [*I*, (407)] между энергией $Э$ и лагранжевой функцией L.

§ 76. Мы воспользуемся теперь найденным для энергии $Э$ выражением для решения наших задач. С этой целью мы применим принцип сохранения энергии к ряду типичных случаев, начиная с простейшего: одного линейного проводника с током.

Чтобы фиксировать нашу мысль, представим себе вначале незамкнутую гальваническую цепь с заданной электродвижущей силой E и заданным сопротивлением W. Спрашивается, какою функцией времени t является сила тока I с момента $t = 0$, когда цепь замыкается, так что для $t = 0$ $I = 0$? В интересах ясного представления о зависимости характеризующих процесс величин от времени мы будем предполагать проводники изменяющимися, например гибкими и растяжимыми, осуществляя это включением в цепь спирали, обороты которой могут сближаться друг с другом или удаляться друг от друга. Этим мы достигаем того, что в выражении (324) магнитной энергии тока

$$Э = -W = \frac{1}{2c^2} LI^2 \tag{334}$$

может зависеть от времени, также и коэфициент L, обусловленный взаимным расположением частей проводника.

Принцип сохранения энергии требует, чтобы сумма всех встречающихся в рассматриваемой системе энергий сохраняла неизменную величину, другими словами, чтобы ее изменение за элемент времени dt было равно нулю. В настоящем случае мы должны принять в расчет кроме выраженной формулой (334) магнитной энергии еще механическую, термическую и химическую энергию.

Происшедшее за время dt изменение механической энергии (кинетическая и упругая энергия движущихся и деформированных частей проводника) согласно законам механики I, (393) равно совершенной током пондеромоторной работе А, т. е. по (328) для нашего случая:

$$A = \frac{1}{2c^2} I^2 dL, \tag{334a}$$

где dL обозначает изменение L за время dt. Наконец, термическая и химическая энергия испытывают за время dt по (304) и (308) изменение:

$$dt \cdot I^2 w - dt \cdot I \cdot E. \tag{335}$$

Поэтому на основании принципа энергии из трех последних выражений следует:

$$d\left(\frac{1}{2c^2} LI^2\right) + \frac{1}{2c^2} I^2 dL + dt\left(I^2 w - I E\right) = 0.$$

Или также:

$$\frac{1}{c^2} \frac{d(LI)}{dt} + Iw - E = 0, \tag{336}$$

соотношение, которым можно воспользоваться для вычисления I как функции от времени t. Чтобы получить наглядное представление о физическом значении этого соотношения, его часто пишут в такой форме:

$$I = \frac{E - \frac{1}{c^2} \frac{d(LI)}{dt}}{w} \tag{337}$$

и проводят параллель между ним и выражением закона Ома (251) для стационарного тока. Сравнение тогда дает, что и в настоящем случае можно применять закон Ома, допуская, что кроме электродвижущей силы E на контактах действует еще вторая электродвижущая сила E', величиною

$$E' = -\frac{1}{c^2} d \frac{(LI)}{dt}, \tag{338}$$

которую называют „электродвижущей силой индукции" (здесь самоиндукции). Она состоит, как видно, из двух частей: одна происходит от изменения коэфициента самоиндукции, или „индуктивности" L, т. е. от взаимного смещения частей проводника, другая от изменения силы тока I.

Однако в этом распространении закона Ома на нестационарные токи нельзя усматривать ничего более, как чисто формальное видоизменение соотношения (336). Может даже возникнуть сомнение, следует ли величину (338) называть электродвижущей силой. Ведь так как на силу смотрят, как на причину, то можно было бы притти к представлению, что выражение, содержащее $\frac{dI}{dt}$, является причиной того или иного значения I. Последнее бессмысленно уже потому, что причина предшествует действию, Не $\frac{dI}{dt}$ причина I, но наоборот: значение I, выражаясь точнее, отклонение I от стационарного значения $\frac{E}{w}$, есть причина $\frac{dI}{dt}$. Поэтому гораздо лучше выдвигать аналогию с механическими процессами; если величины в (336) написать с обратным знаком, тогда первый член можно истолковать как инерцию (*1*, § 66), второй—как трение, третий—как движущую силу.

Если мы предположим в частном случае, что проводник покоится, т. е. L — постоянно, то диференциальное уравнение (336) можно интегрировать. Принимая во внимание, что для $t=0$ $I=0$, получим:

$$I=\frac{E}{w}\left(1-e^{-\frac{c^2wt}{L}}\right). \tag{339}$$

Отсюда видно, как возрастает сила тока от начального его значения 0 до установившейся величины $\frac{E}{w}$; вследствие огромной численной величины c это обыкновенно очень быстрый процесс который ускоряется при увеличении сопротивления w, замедляется при увеличении самоиндукции L. Можно также формулировать это в таком виде, что при замыкании цепи стационарный ток $\frac{E}{w}$ устанавливается не моментально, но что на него накладывается так называемый „экстраток", здесь „ток замыкания", который течет против стационарного тока и вначале имеет ту же величину, но затем быстро убывает до нуля. Введенному таким способом току замыкания соответствует равновеликий, но противоположного направления, т. е. в одном направлении с главным током, „ток размыкания", которой появляется тогда, когда в цепи течет вначале стационарный ток и когда, не прерывая цепь, внезапно выключают в момент $t=0$ электродвижущую силу E. В этом случае вся энергия вначале электромагнитная; с ходом процесса она целиком переходит в джаулево тепло.

§ 77. Рассмотрим теперь взаимодействие между движущимся линейным проводником с сопротивлением w и постоянным магнитом. Самоиндукцией проводника мы будем здесь пренебрегать, и потому примем L соответственно малым. Тогда электромагнитная энергия $Э$ сведется по (333) к постоянной, так как энергия U магнита не изменяется со временем, и происходящее в элемент времени dt изменение механической энергии (кинетическая энергия проводника и магнита) будет по (328) равна:

$$A=\frac{1}{c}IdV_1, \tag{340}$$

между тем как соответствующее изменение термической и химической энергии попрежнему представится формулой (335). По принципу энергии сумма всех изменений энергии опять равна нулю, т. е.

$$\frac{1}{c} I dV_1 + dt(I^2 w - IE) = 0$$

или:

$$\frac{1}{c}\frac{dV_1}{dt} + I^2 w - E = 0. \tag{340a}$$

Если написать это соотношение опять в виде закона Ома:

$$I = \frac{E + E'}{w} \tag{341}$$

и обозначить через E' электродвижущую силу индукции, то

$$E' = -\frac{1}{c}\frac{dV_1}{dt} \tag{342}$$

представит электродвижущую силу, индуктированную в проводнике движениями этого последнего и магнита. Как видно, она не зависит ни от имеющейся в цепи контактной разности потенциалов E, ни от существующей в ней силы тока I, но исключительно от движений проводника и магнита, и именно от относительных движений обоих этих тел. Величина V_1 представляет собой по (323) поток магнитной индукции образованного магнитом поля через поверхность, ограниченную проводником тока, или число исходящих из магнита линий индукций, которые охватывает ток. Это число положительно, если их направление соответствует по смыслу тому обходу, в котором сила тока принимается положительной. Эта величина не изменяется, если проводник и магнит при их движении остаются неизменно связанными.

Смысл электродвижущей силы индукции по (342) всегда противоположен увеличению указанного потока магнитной индукции, или, как еще можно выразиться, индуктированный электрический ток $\frac{E'}{w}$ всегда течет в таком направлении, что пондеромоторная работа (340) становится отрицательной, и вследствие этого кинетическая энергия убывает. Отсюда механические силы, производимые индукционным током, всегда действуют против движения (правило Ленца), так же как и силы трения. И здесь обнаруживается существенное родство джаулева тепла с теплотой трения.

§ 78. Вслед за последними частными случаями мы исследуем наиболее общий случай движения системы произвольно большого числа линейных проводников тока $I_1, I_2, I_3, \ldots$ и каких-либо постоянных магнитов. И здесь полная энергия слагается из магнитной, термической и химической энергии. Происходящее за время dt изменение магнитной энергии здесь по (333):

$$dU = -dW, \tag{343}$$

где теперь в выражении (324) для W нужно считать зависящими от времени как коэфициенты L, так и силы токов I.

Изменение механической энергии системы выражается через работу A, которая получается из (328), если в нем везде написать вместо вариации δ диференциал по времени d. Наконец, для изменения термической и химической энергии, которое получается суммированием (335) по всем проводникам, можно написать, вводя электродвижущие силы индукции E' из (341):

$$dt\,(I_1E_1' + I_2E_1' + \ldots), \tag{344}$$

и применяя затем ко всей рассматриваемой системе принцип энергии, получаем:

$$dU - dW + A + dt\cdot(I_1E_1' + I_2E_2' + \ldots) = 0. \tag{345}$$

Это уравнение на самом деле удовлетворяется во всех своих частях и притом тождественно, если для электродвижущих сил $E_1', E_2' \ldots$, индуктированных в проводниках, подставить те выражения, которые необходимо вытекают из найденных выше для частиых случаев значений. Это имеет место в силу того, что соотношение (342) должно быть справедливо и здесь, если только вместо V_1 подставить полный поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную проводником 1, так как безразлично, происходит ли магнитное поле, в котором находится проводник, от магнитов или от токов. Полный поток индукции, посылаемый магнитами и остальными токами через поверхность, ограниченную проводником 1, выразится на основании замечаний к (323) и к (325) через:

$$V_1 + \frac{1}{c}\left(L_{12}I_2 + L_{13}I_3 + \ldots\right).$$

Если вставить это в (342) вместо V_1 и принять во внимание в конце концов, также и самоиндукцию (338), то для полной индуктированной в проводнике 1 электродвижущей силы получается

$$E_1' = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\left(V_1 + \frac{L_{11}I_1 + L_{12}I_2 + L_{13}I_3 + \ldots}{c}\right) \tag{346}$$

и соответственные выражения для E_2', E_3', ...

Из этого мы видим, что электродвижущая сила может быть индуктирована в проводнике или движениями магнитов и токов, благодаря чему изменяются величины V_1 и L, или же изменением сил токов I, но лишь постольку, *поскольку будет изменяться полный поток магнитной индукции через поверхность, ограничениую проводником.*

Если подставить выражение (346) в условие (345), то, принимая во внимание dU, dW и A, непосредственным вычислением можно обнаружить тождественное совпадение и тем самым подкрепление внутренней связности развитой теории.

§ 79. Закон электродвижущей индукции, выраженный уравнением (346), мы можем, принимая во внимание его выяснившееся физическое значение, обобщить без дальнейших рассуждений на случай, когда индуктированное магнитное поле **B** производится не только магнитами и линейными токами, но также и нелинейными токами. Выражение для индуктированной в каком-нибудь замкнутом линейном проводнике электродвижущей силы в своей самой общей и одновременно простейшей форме изображается так:

$$E' = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}_\nu \, d\sigma. \qquad (347)$$

Эта формула содержит в себе все до сих пор рассмотренные примеры как частные случаи.

При применении (347) это само собою понятно, все же необходимо отметить, что замкнутая кривая, ограничивающая поверхность σ в момент $t + dt$, образуется теми же материальными частицами, как в момент t. Из этого следует, например, для рассмотренного в § 73 случая вращающегося в магнитном поле радиуса OA (черт. 10), что при вращении от A к A_1 на бесконечно малый угол ζ вносимое в (347) изменение потока магнитной индукции равно потоку индукции через бесконечно узкий треугольник OAA' и что поэтому во вращающемся радиусе наводится электродвижущая сила от O к A, равная

$$\frac{1}{C}\mathbf{B}\frac{R^2}{2}\frac{\xi}{dt},$$

в полном согласии с правилом Ленца, так как идущий от O к A ток производит обратное вращение от A' к A.

В истолковании (347) закон электродвижущей индукции представлен в виде интегрального закона. Естественно, что дополнительно возникает теперь вопрос о форме соответствующего диференциального закона, который укажет, каково индуктированное напряжение электрического поля в отдельных бесконечно малых частях проводника. Если мы обозначим его через $\mathbf{E}$, то для электродвижущей силы во всей цепи мы имеем:

$$\mathbf{E}' = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{r}, \qquad (348)$$

причем интегрирование скалярного произведения $\mathbf{E}$ и элемента проводника $d\mathbf{r}$ распространяется на замкнутый контур проводника.

Чтобы было возможно вывести величину $\mathbf{E}$ из (347), мы должны правую часть этого уравнения представить в форме линейного интеграла по $d\mathbf{r}$. Но изменение со временем потока магнитной индукции через ограниченную поверхность σ обусловлено двумя различного рода причинами: во-первых, изменением магнитного поля, во-вторых, движением контура тока. Поэтому полное, происходящее за элемент времени dt, изменение интеграла (347) аддитивно составляется из части:

$$dt \cdot \int \dot{\mathbf{B}}_\nu \, d\sigma, \qquad (348a)$$

или по (313a):

$$dt \cdot \int \dot{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{r}, \qquad (349)$$

обозначающей изменение со временем потока магнитной индукции при неизменном контуре, и из второй части, обозначающей изменение со временем потока магнитной индукции в постоянном магнитном поле **B** вследствие смещения пограничной кривой и которая, если сравнить выражения (317) и (317а), принимает следующее значение:

$$\int \delta\mathbf{r}\,[d\mathbf{r}\mathbf{B}], \tag{349а}$$

где $\delta\mathbf{r} = \mathbf{q}\,dt$ означает смещение движущегося со скоростью $\mathbf{q}$ элемента проводника $\mathbf{r}$ за время dt. Подставляя эту величину, последнее выражение можно написать также следующим образом:

$$dt\int \mathbf{q}\;\;[d\mathbf{r}\mathbf{B}] = dt\int d\mathbf{r}\;\;[\mathbf{B}\mathbf{q}]. \tag{350}$$

Складывая (349) и (350) и вставляя в (347), для электродвижущей силы, индуктированной в цепи, получаем:

$$E_1 \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = -\frac{1}{c}\int \dot{\mathbf{A}}\,d\mathbf{r} - \frac{1}{c}\int d\mathbf{r}\;\;[\mathbf{B}\mathbf{q}]$$

и отсюда для местного напряжения поля в элементе проводника

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{c}[\mathbf{B}\mathbf{q}] - \operatorname{grad}\varphi, \tag{351}$$

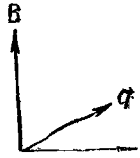
если обозначить через φ некоторую скалярную однозначную и непрерывную функцию точки воздействия. Пока дело идет только об электродвижущей силе E' для всей цепи, величина функции φ совершенно безразлична. Но если спрашивается, какова величина действительно существующего напряжения электрического поля **E** в определенной точке проводника, то поскольку остальные величины **A**, **B** и $\mathbf{q}$ известны, также и φ имеет определенное значение, которое вычисляется из условия $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и из специальных имеющих место для настоящего случая пограничных условий.

Если местное напряжение электрического поля дается выражением (351), то последнее все-таки не является чистым диференциальным законом, поскольку в правой части уравнения стоят потенциалы **A** и φ. Однако их легко исключить, образовав от каждой из частей уравнения ротор. Принимая во внимание (282), получаем соотношение:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\left(\mathbf{B}\mathbf{q}\right), \tag{351а}$$

в котором встречаются уже исключительно величины, характеризующие поле.

Диференциальный закон (351) сводит индуктированное в элементе тока напряжение поля к двум различного рода причинам: к изменению со временем поля в данном месте, где находится элемент проводника, и к движению элемента проводника. Изменение поля действует по мере местного изменения вектор-потенциала **A**, движение же проводника действует так, что произведенное напряжение электрического поля пропорционально площади параллелограма, образованного скоростью $\mathbf{q}$ и местной магнитной индукцией $\mathbf{B}$, и направлено перпендикулярно к этой, площади в смысле, указанном на черт. 11. Для наблюдателя, плывущего в направлении магнитной индукции $\mathbf{B}$ и смотрящего в сторону скорости $\mathbf{q}$, напряжение электрического поля будет действовать вправо. Если вследствие этого напряжения $\mathbf{E}$ в проводнике возникнет ток I одного с ним направления, то магнитное поле $\mathbf{B}$ будет действовать на ток с пондеромоторной силой $\mathbf{F}$, которая по (318) (черт. 9) противоположна скорости $\mathbf{q}$ проводника, т. е. стремится его остановить, совершенно согласно правилу Ленца (§ 77).



Черт. 11.

Обе причины электродвижущей индукции: изменение поля и движение проводника, между тем не так уже существенно отличны друг от друга, как это можно было бы думать с первого взгляда, ибо одна причина может до некоторой степени заменить другую. Именно, если вспомнить, что, например, по (347) электродвижущая сила, индуктированная взаимным движением постоянного магнита и замкнутого линейного проводника в последнем, зависит только от относительного движения проводника и магнита, то ясно, что физически нет никакой разницы, покоится ли проводник и магнит движется, или магнит покоится, а соответствующим образом движется проводник. Но в первом случае причина индуктированного напряжения поля $\mathbf{E}$ в элементе проводника заключается единственно в члене с A, во втором случае в члене с $\mathbf{q}$. Если в обоих случаях в каждом элементе проводника получается то же самое $\mathbf{E}$, то это обязано, как показывает ближайшее рассмотрение, в которое здесь нет надобности вдаваться, вхождению функции φ (ср. ниже § 99).

§ 80. Зная диференциальный закон (351) электродвижущей индукции, можно вычислить индуктированное электрическое напряжение также и для тел нелинейных в каждой их точке, и притом, так как в уравнении (351) не содержится никаких констант, характерных для вещества тела, это вычисление будет годно не только для проводников, но и для изоляторов. Таким образом, например, возникает электризация и электрический ток в медном диске, движущемся между полюсами магнита. Эти так называемые токи Фуко текут, согласно правилу Ленца, всегда так, что вследствие механических сил, действующих между ними и магнитом, движение тормозится так же, как при трении.

В качестве другого примера рассмотрим процесс возбуждения тока в замкнутом проводнике конечного сечения, например при включении в цепь гальванического элемента. Вследствие самоиндукции сила тока возрастает по § 76 от нуля до своего стационарного значения более или менее быстро. Но сила тока не во всех точках какого-либо сечения одинакова для одного и того же момента, ибо самоиндукция действует на внутренние точки гораздо сильнее, чем на внешние, лежащие ближе к изолятору. Вектор-потенциал $\mathbf{A}$, обусловливающий по (351) изменение со временем самоиндукции, имеет, как видно из строения выражения (289), внутри тока бо́льшую величину, чем на границе его. По этой причине подъем кривой тока внутри проводника происходит значительно медленнее, чем на поверхности, и может случиться, что при быстропеременном токе в цилиндрическом проводнике внутренняя часть его практически совсем не будет находиться под током, так что совершенно безразлично, будем ли мы иметь массивный цилиндр или цилиндр полый (скин-эффект).

§ 81. Еще несколько других заключений основного значения мы можем вывести из уравнения (351). Именно, так как существует только единственный вид электрического напряжения поля, то индуктированное в изоляторе электрическое напряжение вызывает, как и статическое напряжение, электрическую поляризацию (26) соответственно диэлектрической постоянной изолятора, т. е. д в и г а ю щ и й с я в м а г н и т н о м п о л е и з о л я т о р по (146) д и э л е к т р и ч е с к и п о л я р и з у е т с я.

Если, далее, движущееся в магнитном поле тело имеет заряд e, как, например, маленький заряженный шарик, то индуктированное электрическое напряжение **E** действует по (214) на его тело пондеромоторно, с силой:

$$\mathbf{F} = e \cdot \mathbf{E} = -\frac{e}{c}[\mathbf{Bq}] = \frac{e}{c}[\mathbf{qB}]. \tag{352}$$

Если сравнить это выражение с выражением (318) для механической силы, которую то же магнитное поле оказывает на находящийся в том же месте элемент тока $I d\mathbf{r}$, то будет иметь место полное совпадение, если положить:

$$I\,d\mathbf{r} = e\mathbf{q}, \tag{353}$$

т. е. сила, с какой действует магнитное поле на движущийся точечный заряд, в точности равна той, которая действует на элемент тока соответственной силы и длины, текущего в направлении движения (отклонение катодных лучей, α-лучей и β-лучей). Поэтому движущийся электрический заряд называют также „конвекционным током“. Тогда получается положение, что конвекционный ток эквивалентен току проводимости. По механическому принципу действия и противодействия эта эквивалентность относится также и к механическому действию, которое конвекционный ток оказывает на магнит (эффект Роулэнда) и, следовательно, ко всем другим магнитным действиям тока. Можно поэтому утверждать совершенно общим способом, ч т о к о н в е к ц и о н н ы й т о к о б л а д а е т т е м и ж е м а г н и т н ы м и с в о й с т в а м и, к а к и о п р е д е л я е м ы й с о о т н о ш е н и е м (353) т о к п р о в о д и м о с т и.

Все выведенные здесь положения, относящиеся к движению тел в постоянном магнитном поле, по принципу относительности, как это было уже указано в § 79, имеют место также и для случая покоящегося тела, по отношению к которому движется магнит, т. е. для покоящегося тела в переменном магнитном поле

ГЛАВА II

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НЕЗАМКНУТЫХ ТОКАХ

§ 82. Переход от замкнутых токов к незамкнутым, примером которых может служить разрядный ток электрического конденсатора, влечет за собою, как мы отметили в конце § 74, двоякого рода изменения: во-первых, нельзя более пренебрегать электрической энергией поля по сравнению с магнитной и, во-вторых, нельзя уже заимствовать для выражения магнитной энергии непосредственно формулу, справедливую для стационарных токов.

Займемся сначала электрической энергией. В каждом месте поверхности проводника, где ток имеет нормальную составляющую, отличную от нуля, и поэтому при переходе в изолятор отчасти прекращается, скапливается электрический заряд более или менее значительной плотности h согласно пограничному условию (45):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathbf{J}_\nu, \tag{354}$$

так как $\mathbf{J}'_\nu$, для изолятора равно нулю. Если это уравнение умножить на элемент поверхности $d\sigma$ и проинтегрировать по какой-либо части поверхности проводника, то условие на границе принимает вид:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \dot{e} = I, \tag{355}$$

где e — электрический заряд, находящийся на рассматриваемой части поверхности, I—полная сила тока по направлению к этой части поверхности и там оканчивающегося, между тем как в (354) $\mathbf{J}_\nu$ обозначает компонент плотности тока по направлению внутрь проводника.

Скапливающийся на поверхности заряд вызывает переменное во времени электрическое поле; однако допущение, что процесс квазистационарный, позволяет нам рассматривать это поле для каждого момента как статическое и вычислить для него потенциал так, как если бы мгновенные заряды на всех частях проводящей поверхности длительно там оставались. Это допущение вполне соответствует тому, которое мы сделали в предыдущей главе относительно магнитной энергии, именно, что магнитное поле на всем своем протяжении моментально следует за всеми колебаниями силы тока.

Таким образом, если мы вообразим себе произвольную систему проводников в неограниченно простирающемся во все стороны изоляторе с диэлектрической постоянной ε, то электрический потенциал в каждый момент времени во всем пространстве будет иметь величину:

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\mathfrak{h}\,d\sigma}{r}, \tag{356}$$

где нужно брать интеграл по поверхностям всех проводников. Отсюда непосредственно выводятся для рассматриваемого момента времени, так же как в электрическом поле, напряжение электрического поля и электрическая энергия.

§ 83. Несколько труднее выразить через силу токов магнитную энергию незамкнутых токов, ибо вычисления, произведенные в § 62 для замкнутых токов, теряют здесь свою силу, как в этом убеждает следующее простое соображение. Если применить и здесь в качестве первого приближения употребленное тогда отношение (241) между плотностью тока $\mathbf{J}$ и напряжением магнитного поля $\mathbf{H}$, то для связи магнитной работы вдоль замкнутой кривой с потоком электричества через какую-либо ограниченную этой кривой поверхность, применяя теорему Стокса, опять получим соотношение (274). Но это соотношение для незамкнутых токов не имеет смысла, ибо указанный поток электричества в этом случае не независим от форм поверхности; он, например, равен полной силе тока, если замкнутая кривая идет вся в изоляторе и поверхность пересекает проводник, несущий ток, но он равен нулю, если поверхность при том же положении пограничной кривой обходит около конца проводника и поэтому вся располагается в изоляторе. Причина непригодности уравнения (241) лежит в том, что хотя для незамкнутых токов объемная дивергенция плотности тока (50) равна нулю, поверхностная дивергенция (45), как это мы видели в (354), отлична от нуля.

Чтобы избежать отмеченного затруднения, мы должны уравнение (241), годное только для замкнутых токов, заменить более общим соотношением, которое мы получим, если прибегнем к общим уравнениям поля (31а), которые можно написать в следующей формуле:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi}\right). \tag{357}$$

Введенное таким способом обобщение более простого соотношения (241) можно сформулировать так, что для незамкнутых токов магнитное поле вычисляется по тому же методу, как для замкнутых токов, только нужно к плотности тока $\mathbf{J}$, которая соответствует току проводимости, прибавить еще другую плотность тока $\frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi}$, которую называют плотностью тока смещения. Последняя определяется изменением со временем напряжения электрического поля, в частности электрической индукции.

§ 84. При помощи тока смещения вычисления можно вести совершенно так же, как в § 62 для случая замкнутых токов, вставляя только везде вместо плотности $\mathbf{J}$ тока проводимости плотность полного тока:

$$\mathbf{J} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi} = \mathbf{C}. \tag{358}$$

Действительно, вышеотмеченное противоречие теперь исчезает, так как для вектора $\mathbf{C}$ как объемная дивергенция по (36), так и по (34) дивергенция поверхностная равны нулю. В этом смысле можно утверждать, что максвеллова электродинамика имеет дело только с замкнутыми токами.

Для вектор-потенциала полного тока мы, таким образом, получаем из (289):

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{\mu}{4\pi c}\int \frac{\dot{\mathbf{D}}'}{r}\,d\tau', \tag{359}$$

причем $\mathbf{A}$, как и до сих пор, относится только к току проводимости, так что для $\mathbf{A}$ остается в силе уравнение (289), между тем как вместо (283) теперь должно быть $\operatorname{div}\mathbf{A}^* = 0$.

Добавочный член в (359) может быть представлен в более наглядной форме. Компонент этого вектора по оси x-ов, если вместо электрической индукции D ввести электрический потенциал φ, изобразится так:

$$-\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\int \frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau'}{r} = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\int \dot{\varphi}'\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,d\tau' \tag{360}$$

так как при интегрировании по частям по x' интеграл по поверхности обращается в нуль вследствие непрерывности φ и $\frac{1}{r}$.

Если принять во внимание, что

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} \tag{361}$$

и что $\dot{\varphi}'$ и $d\tau'$ не зависят от x, то выражение (360) можно написать также:

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{362}$$

где скалярная величина:

$$\psi = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \frac{\dot{\varphi}'}{r}\,d\tau' \tag{363}$$

и вектор-потенциал (359) полного тока переходит в

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \frac{\mu}{c}\operatorname{grad}\psi. \tag{364}$$

Отсюда прежде всего выводим важное заключение, что по (284)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}^* = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{365}$$

Напряжение магнитного поля вычисляется, таким образом, и для незамкнутых токов из вектор-потенциала тока проводимости, не принимая в расчет тока смещения, хотя $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и не равна нулю.

§ 85. Иначе обстоит дело, как мы сейчас увидим, с магнитной энергией. Хотя на основании (365) мы получаем для нее опять выражение (332а):

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H} d\tau,$$

но теперь для $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ нужно вставить величину (357), благодаря чему искомая магнитная энергия представится в таком виде:

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{A}\left(\mathbf{J} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi}\right) d\tau,$$

вместо чего можно также по (289) написать:

$$\frac{\mu}{2c^2}\int \frac{\mathbf{J}'}{r}\left(\mathbf{J} + \frac{\dot{\mathbf{D}}}{4\pi}\right) d\tau\, d\tau'$$

или, переставляя величины со значками с величинами без значков и вводя вектор-потенциал $\mathbf{A}^*$ полного тока,

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}^* d\tau$$

и, наконец, по (364), вводя (319):

$$-W - \frac{\mu}{2c^2}\int \mathbf{J} \cdot \operatorname{grad} \psi \cdot d\tau, \tag{366}$$

где W опять обозначает электродинамический потенциал токов проводимости.

Таким образом в случае незамкнутых токов выражение для магнитной энергии, имеющее место для токов замкнутых, — W получает еще добавочный член, для окончательного вычисления которого нужно определить значение скалярной функции ψ. Эту последнюю мы найдем самым прямым путем, если, воспользовавшись тождеством:

$$\triangle r = \frac{2}{r} \tag{367}$$

напишем уравнение (363) в форме:

$$\psi = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int \dot{\varphi}'\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z'^2}\right) d\tau'.$$

Тогда, интегрируя по частям, получаем, так как $\dot{\varphi}$ непрерывно

$$\psi = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\left(\frac{\partial\dot{\varphi}'}{\partial x'}\,\frac{\partial r}{\partial x'} + \cdot\cdot\cdot\right)d\tau' =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\left(\dot{\mathbf{D}}_x'\,\frac{\partial r}{\partial x'} + \dot{\mathbf{D}}'_y\,\frac{\partial r}{\partial y'} + \dot{\mathbf{D}}_z'\,\frac{\partial r}{\partial z'}\right)d\tau'.$$

Интегрируя еще раз, так как $\operatorname{div} D = 0$:

$$\psi = -\frac{1}{8\pi}\int(\dot{\mathbf{D}}_{,\nu} + \dot{\mathbf{D}}_\nu)\,r\,d\sigma',$$

где интегрирование распространяется на все поверхности проводников, или по (41) и (354):

$$\psi = -\frac{1}{2}\int\dot{h}'r\,d\sigma' = \frac{1}{2}\int\dot{\mathbf{J}}'_{\nu'}\,r\,d\sigma' \tag{368}$$

Как видно, ψ для замкнутых токов исчезает, так как тогда на поверхности всех проводников $\mathbf{J}_\nu = 0$.

При помощи найденного значения ψ мы можем характерный для незамкутых токов добавочный член в выражении магнитной энергии (366) представить или в форме поверхностного интеграла, распространенного на все конечные элементы токов проводимости, или в форме объемного интеграла, распространенного на все токи проводимости.

Для первой цели напишем добавочный член в (366), принимая во внимание, что $\operatorname{div}\dot{\mathbf{J}} = 0$ и что $\mathbf{J}_\nu$ по направлению в изолятор равно нулю:

$$\frac{\mu}{2c^2}\int\mathbf{J}_\nu\cdot\psi\cdot d\sigma, \tag{369}$$

где нужно интегрировать по всем поверхностям проводников, и, таким образом, получим по (368) искомое выражение:

$$\frac{\mu}{4c^2}\int\!\!\int\mathbf{J}_\nu\cdot\mathbf{J}'_{\nu'}\cdot r\cdot d\sigma d\sigma'. \tag{370}$$

Из этого выражения следует, что комбинация каждых двух конечных элементов тока дает некоторую долю для магнитной энергии. Но эта доля тем меньше, чем ближе лежат эти конечные элементы токов. Это вполне понятно, ибо она проистекает из токов смещения, которые текут между конечными элементами токов и некоторым образом образуют продолжение токов проводимости, так как они замыкают последние. Так, например, для разрядного тока электрического конденсатора очень незначительной толщины указанная доля исчезающе мала и магнитная энергия очень близка к той, которая была бы для замкнутого тока.

10*

Для второй указанной выше цели приведем функцию φ в (368 к виду:

$$\varphi=-\frac{1}{2}\int \operatorname{div}(\mathbf{J}'r)\,d\tau'=-\frac{1}{2}\int\left(\mathbf{J}'_{x'}\frac{\partial r}{\partial x'}+\mathbf{J}'_{y'}\frac{\partial r}{\partial y'}+\mathbf{J}'_{z'}\frac{\partial r}{\partial z'}\right)d\tau'=$$
$$=-\frac{1}{2}\int|\mathbf{J}'|\cdot\frac{\partial r}{\partial s'}\,d\tau',$$

где ds' означает элемент линейного тока. Далее, добавочный член в (366) приведем к соответствующему виду:

$$-\frac{\mu}{2c^2}\int|\mathbf{J}|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,d\tau.$$

Таким путем мы получим выражение:

$$\frac{\mu}{4c^2}\iint|\mathbf{J}|\,|\mathbf{J}'|\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\,d\tau d\tau'. \tag{371}$$

Все это вместе дает для магнитной энергии системы незамкнутых токов проводимости по (366) и (320):

$$\frac{1}{2}\frac{H}{c^2}\iint|\mathbf{J}||\mathbf{J}'|\left(\frac{\cos\delta}{r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right)d\tau\,d\tau'. \tag{372}$$

Что для случая замкнутых токов второй интеграл может быть опущен, в этом можно убедиться непосредственно, если по (291а) написать:

$$|\mathbf{J}|\cdot d\tau=J\,ds$$

и выполнить интегрирование по ds и ds' по замкнутой линии тока.

Вместо частных производных от r по s и s' можно также кроме угла δ между двумя линейными элементами ввести при помощи следующего тождества угол, который образует направление r с направлениями ds и ds':

$$\frac{\partial r}{\partial s\,\partial s'}=-\frac{\cos\delta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}, \tag{373}$$

которое получается, если взять производную по s' от уравнения:

$$\frac{\partial r}{\partial}=\frac{x-x'}{r}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y-y'}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial s}+\frac{z-z'}{r}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Подводя итоги, мы можем в качестве результата этих вычислений высказать положение, что, поскольку рассматриваются квазистационарные процессы, магнитная энергия системы незамкнутых токов $I_1, I_2,\ldots$ может быть представлена опять при помощи формулы (324), выведенной для замкнутых токов, где только коэфициенты L подвергаются определенным, характеризуемым (372), обобщениям. Практически это, впрочем, по большей части не имеет никакого значения.

При помощи полученных для электрической и магнитной энергий выражений мы можем теперь вывести те же заключения как в предыдущей главе для замкнутых токов.

§ 86. В виде примера разберем очень важный случай разряда электрического конденсатора. Пусть в начале ($t=0$) заряды обеих обкладок $+e_0$ и $-e_0$. Сила разрядного тока I, обусловливающего по (365) изменение со временем зарядов, пусть вначале равна нулю. Тогда течение процесса разряда однозначно определяется применением принципа энергии. Так как проводник неподвижен и налицо нет никаких химических изменений, то мы должны принимать здесь в расчет только энергии электрическую, магнитную и образование тепла.

Величину электрической энергии заимствуем по § 82 из электростатики, пользуясь формулой (221):

$$\frac{1}{2}e\varphi=\frac{1}{2}\frac{e^2}{C}, \text{ где } C=\frac{e}{\varphi} \tag{374}$$

означает емкость конденсатора. Магнитная энергия § 85 (в конце) опять определяется формулой (334), причем здесь коэфициент самоиндукции L со временем не изменяется и количество тепла, образовавшегося за время dt, представляется формулой (304).

Это по принципу сохранения энергии дает:

$$d\left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{C}\right)d+\left(\frac{1}{2c^2}LI^2\right)+I^2wdt=0$$

или, принимая во внимание (355):

$$\frac{L}{c^2}\frac{d^2e}{dt^2}+w\frac{de}{dt}+\frac{s}{C}=0, \qquad 75)$$

уравнение, которое от соответствующего ему уравнения (336) для замкнутого тока отличается только тем, что здесь входит еще разность потенциалов на конечных элементах токов, т. е. на обеих обкладках конденсатора. Оно совершенно совпадает, как показывает сравнение с *1*, (19а), с уравнением колебаний осциллятора с постоянным затуханием, причем коэфициент самоиндукции L играет роль инертной массы, обратная величина электростатической емкости — притягивающей силы, а гальваническое сопротивление — причины затухания.

В соответствии с этим процесс разряда носит различный характер, смотря по тому

$$w^2-\frac{4L}{c^2G}\gtreqless 0. \tag{376}$$

В первом случае, включая и предельный, разряд с начала до конца течет в одном определенном направлении, в другом же случае, при достаточно малом сопротивлении, он протекает как затухающее колебание с числом колебаний, независимым от начального заряда e_0:

$$\nu=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{wc^2}{4L^2}} \tag{377}$$

и с логарифмическим декрементом:

$$\sigma = \frac{c^2 w}{2Lv}. \tag{378}$$

Во всех случаях первоначальная электрическая энергия в конце концов переходит в проводнике и в искровом промежутке в джаулево тепло, ибо сопротивление цепи w составляется не только из сопротивления проводников, но и из сопротивления искрового промежутка. Чем меньше сопротивление w, тем медленнее убывает амплитуда колебаний и тем больше время протекает до момента окончания процесса разряда. При слабо затухающих колебаниях число колебаний по (377) приблизительно равно:

$$\nu = \frac{c}{2\pi\sqrt{CL}} \tag{379}$$

Колебательный разряд впервые количественно исследовал Феддерсен, который при помощи быстро вращающегося зеркала отделил друг от друга пространственно соответствующие отдельным колебаниям, следующие друг за другом разрядные искры.

Употребленное им число колебаний ν, как это можно вычислить по (379), было порядка миллион в секунду (10^6).

Значительного увеличения числа колебаний удалось достигнуть только Г. Герцу, однако герцевские колебания могут быть разобраны только в следующей главе (§ 89), потому что обусловленные ими процессы в электромагнитном поле протекают настолько быстро, что их уже нельзя считать за квазистационарные.

ГЛАВА III

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПОКОЯЩИХСЯ ТЕЛАХ

§ 87. Если электромагнитное поле так быстро изменяется в пространстве и во времени, что уже не может быть рассматриваемо как квазистационарное, то все до сих пор примененные методы оказываются недостаточными, и ничего более не остается, как прибегнуть к общим уравнениям, установленным во второй главе первой части, и из них вывести те соотношения, которые соответствуют исследуемому физическому процессу.

Мы разберем сначала эти уравнения для покоящихся однородных изотропных тел и упростим их, исходя из допущения, что все входящие в них векторы возможно свести к одной функции. Прежде всего разрешим уравнение (51) для магнитной индукции B, полагая и обобщая, как в (282):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{380}$$

Тогда напряжение электрического поля E должно удовлетворять диференциальному уравнеиию (31b):

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

интеграл которого

$$\mathbf{E} = -\frac{\dot{\mathbf{A}}}{c} - \operatorname{grad} \varphi. \tag{381}$$

Таким способом векторы **E** и **B**, а по (28), (29), (30) также и векторы **D**, **J** и **H** сведены к вектор-потенциалу **A** и скалярному потенциалу φ.

Между обоими потенциалами **A** и φ можно еще установить совершенно произвольное соотношение, не нарушая этим нисколько общности решения. Действительно, если к вектору **A** прибавить еще член grad ψ, а к потенциалу φ — член $\frac{\dot{\psi}}{c}$, где ψ означает какую-нибудь скалярную функцию координат и времени, то как **B** по (380), так и **E** по (381) останутся неизменными. Функция ψ совершенно произвольна; она не может быть также определена на основании остальных уравнений поля, потому что последние содержат только напряжения поля, а не потенциалы.

Этим обстоятельством мы воспользуемся, чтобы вытекающее из (31a) диференциальное уравнение разложить на два более простых. Принимая во внимание (286), это уравнение можно представить в следующем виде:

$$-\frac{\varepsilon \ddot{\mathbf{A}}}{c} - \varepsilon \operatorname{grad} \dot{\varphi} = \frac{c}{\mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{c}{\mu} \triangle \mathbf{A} + \frac{4\pi\varkappa}{c} \dot{\mathbf{A}} + 4\pi\varkappa \operatorname{grad} \varphi.$$

Оно удовлетворяется, если положить члены, содержащие знак grad, в отдельности равными нулю:

$$-\varepsilon \dot{\varphi} = \frac{c}{\mu} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + 4\pi\varkappa\varphi, \tag{382}$$

следовательно, также:

$$-\frac{\varepsilon \ddot{\mathbf{A}}}{c} = -\frac{c}{\mu} \triangle \mathbf{A} + \frac{4\pi\varkappa}{c} \dot{\mathbf{A}}, \tag{383}$$

или, вводя величину, имеющую размерность скорости.

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = q, \tag{384}$$

и из (21) — время релаксации T:

$$\dot{\varphi} + \frac{\varphi}{T} = -\frac{q^2}{c} \operatorname{div} \mathbf{A} \tag{385}$$

и

$$\ddot{\mathbf{A}} + \frac{\dot{\mathbf{A}}}{T} = q^2 \triangle \mathbf{A}. \tag{386}$$

Последнее диференциальное уравнение, которому должен удовлетворять вектор-потенциал, носит название „телеграфного уравнения".

Если присоединить еще (50) или

$$\frac{\operatorname{div}\dot{\mathbf{A}}}{c}+\triangle\varphi=0, \tag{387}$$

то из (385) после диференцирования по t получается:

$$\ddot{\varphi}+\frac{\dot{\varphi}}{T}=q^2\triangle\varphi. \tag{388}$$

Таким образом также и скалярный потенциал, а следовательно, и все векторы, характеризующие поле, удовлетворяют телеграфному уравнению.

Каждые два выражения для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ, удовлетворяющие оба телеграфному уравнению и, кроме того, связанные между собою соотношением (385), представляют один из возможных электромагнитных процессов.

В конце концов мы можем еще и функции $\mathbf{A}$ и φ свести к одной векторной функции $\mathbf{Z}$, которая, конечно, должна удовлетворять телеграфному уравнению:

$$\ddot{\mathbf{Z}}+\frac{\dot{\mathbf{Z}}}{T}=q^2\triangle\mathbf{Z}, \tag{389}$$

тогда как (385) можно удовлетворить, полагая:

$$\mathbf{A}=\frac{c}{q^2}\left(\dot{\mathbf{Z}}+\frac{\mathbf{Z}}{T}\right), \tag{390}$$

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{Z}. \tag{391}$$

Тогда все векторы поля получаются однозначно из одного так называемого вектора Герца $\mathbf{Z}$, именно, по (381):

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Z}-\triangle\mathbf{Z}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z}, \tag{392}$$

и по (380):

$$\mathbf{B}=\frac{c}{q^2}\operatorname{rot}\left(\dot{\mathbf{Z}}+\frac{\mathbf{Z}}{T}\right). \tag{393}$$

Для непроводящих сред ($T=\infty$) в частности:

$$\mathbf{B}=\frac{c}{q^2}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{Z}}, \tag{394}$$

тогда как телеграфное уравнение (389) переходит в форму:

$$\ddot{\mathbf{Z}}=q^2\triangle\mathbf{Z}, \tag{395}$$

это известное волновое уравнение [*2*, (222)], со скоростью распространения q.

Для пустоты или в случае достаточно разреженного газа ($\varepsilon=1$, $\mu=1$) q принимает значение критической скорости c, и вместе с тем критическая скорость получает непосредственное физическое значение: это есть скорость распространения электромагнитных волн в совершенной пустоте, — положение, которое вследствие численного совпадения критической скорости со скоростью света, послужило исходным пунктом для максвелловой электромагнитной теории света.

§ 88. Для физических применений меньший интерес представляет общее решение, чем решение частное, удовлетворяющее имеющимся налицо физическим условиям. Мы начнем с того случая, который, как увидим, представляет собою теорию упомянутых в конце предыдущей главы быстрых герцевских колебаний.

Волновое уравнение (395) для $q = c$ удовлетворяется по [2, (230)] компонентами вектора Z:

$$\mathbf{Z}_x = 0,\ \mathbf{Z}_y = 0,\ \mathbf{Z}_z = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{396}$$

где f — произвольная функция одного аргумента. Отсюда на основании (392) и (394) вытекают следующие выражения для компонентов напряжения электрического и магнитного поля:

$$\mathbf{E}_x = \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial x\, \partial z}, \tag{397a}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial y\, \partial z}, \tag{397b}$$

$$\mathbf{E}_z = -\frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial t^2}, \tag{397c}$$

$$\mathbf{H}_x = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial y\, \partial t},\ \mathbf{H}_y = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial x\, \partial t},\ \mathbf{H}_z = 0. \tag{398}$$

Мы можем принять и принимаем эти выражения имеющими место во всем бесконечном пространстве, с единственным исключением малой его части, окружающей начало координат $r = 0$, потому что там вектор Герца бесконечно велик.

Исследуем теперь физическое значение слагающих поля вблизи начала. В этом случае можно написать:

$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = f(t) - \frac{r}{c} \cdot \dot{f}(t) + \ldots \tag{399}$$

Если мы примем, таким образом,

$$r \ll \frac{c \cdot f(t)}{\dot{f}(t)}, \tag{400}$$

чем уточняется в количественном отношении условие „близости к началу“, то вектор Герца сведется по (396) к

$$\mathbf{Z}_z = \frac{1}{r} f(t),$$

и мы получим из (397) и (398) следующее значение для компонентов поля:

$$\mathbf{E}_x = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} f(t), \qquad \mathbf{E}_y = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} f(t), \qquad \mathbf{E}_z = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} f(t), \tag{401a}$$

$$\mathbf{H}_x = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \dot{f}(t), \quad \mathbf{H}_y = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \dot{f}(t), \quad \mathbf{H}_z = 0, \tag{401b}$$

или также, если написать иначе:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

причем:

$$\varphi = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} f(t) = \frac{z}{r^3} f(t), \tag{402}$$

$$\mathbf{A}_x = 0, \quad \mathbf{A}_y = 0, \quad \mathbf{A}_z = \frac{1}{c} \cdot \frac{\dot{f}(t)}{r}. \tag{403}$$

Эти выражения представляют квазистационарное поле. Электрическое поле с потенциалом φ производится по (145) электрическим диполем в начале координат, с осью по направлению оси z-ов и с моментом $f(t)$; магнитное поле с вектор-потенциалом $\mathbf{A}$ происходит по (289) от расположенного в начале координат элемента (незамкнутого), текущего в направлении оси z-ов тока, причем по (292) $\dot{f}(t)$ представляет произведение силы тока на длину элемента тока. Это как раз тот ток, которым обусловлено изменение заряда указанного выше электрического диполя.

На основании всего этого мы вправе сделать следующее заключение: расположенный в начале координат по оси z-ов электрический диполь (двойной полюс) с произвольно изменяющимся во времени моментом $f(t)$ производит в своей непосредственной близости, т. е. на расстояниях, удовлетворяющих по своей величине условию (400), квазистационарное поле, которое определяется его мгновенным моментом и мгновенным значением тока перезаряжения. Но на больших расстояниях r уравнения (401) теряют свою силу, и на их место становятся более общие выражения (397) и (398), которые представляют собою единственные непрерывные, совместимые с динамическими уравнениями поля, продолжения векторов поля на произвольных расстояниях r.

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай: значения напряжений поля на расстояниях от начала координат столь больших, что для них

$$r \gg \frac{c \cdot f(t)}{\dot{f}(t)}. \tag{404}$$

Тогда в (397) и (398) останутся при диференцировании только те члены, которые получаются при диференцировании аргумента $\left(t-\frac{r}{c}\right)$ в t. и мы будем иметь:

$$\mathbf{E}_x=\frac{xz}{c^2r^3}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right),\quad \mathbf{E}_y=\frac{4z}{c^2r^3}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\mathbf{E}_z=-\frac{x^2+y^2}{c^2r^3}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{405a}$$

$$\mathbf{H}_x=-\frac{y}{c^2r^2}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right),\quad \mathbf{H}_y=\frac{x}{c^3r^3}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right),\quad \mathbf{H}_z=0. \tag{405b}$$

Эти уравнения представляют шаровую волну, распространяющуюся со скоростью c от начала, и именно поперечную волну, ибо и электрическое напряжение поля $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ перпендикулярны к радиусу r шаровой волны, как показывают соотношения:

$$x\mathbf{E}_x+y\mathbf{E}_y+z\mathbf{E}_z=0,$$

$$x\mathbf{H}_x+y\mathbf{H}_y+z\mathbf{E}_z=0.$$

Но, кроме того, $\mathbf{E}$ перпендикулярно к $\mathbf{H}$ вследствие соотношения:

$$\mathbf{E}_x\mathbf{H}_x+\mathbf{E}_y\mathbf{H}_y+\mathbf{E}_z\mathbf{H}_z=0$$

И электрические, и магнитные силовые линии представляют собою круги, а именно магнитные силовые линии ввиду того, что $\mathbf{H}_z=0$ суть пересечения шаровой волны $r=\text{const}$ с плоскостями, параллельными плоскости xy, а электрические силовые линии, перпендикулярные к ним, проходящие через ось z-ов — большие круги шаровой волны. Направления $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{r}$ образуют всегда правую систему координат и направление потока энергии $\mathbf{S}$ совпадает по (9) с направлением $\mathbf{r}$.

Что касается, далее, величины напряжений поля, то напряжение электрического поля по величине постоянно равно напряжению магнитного поля и вместе с ним изменяет свой знак. Общее значение их:

$$\frac{\sin\vartheta}{c^2r}\ddot{f}\left(t-\frac{r}{c}\right), \tag{406}$$

где ϑ — угол радиуса-вектора $\mathbf{r}$ с осью z. На оси z поэтому напряжение поля нуль, в плоскости xy — максимальное.

Как мы видим, электромагнитный процесс на расстояниях r, определяемых по (404), совершенно отличен от того, что происходит вблизи начала (400). Так, например, при периодических колебаниях $f(t)$ поле, непосредственно прилегающее к центру колебаний, также совершенно периодическое, между тем как на больших расстояниях происходит постоянный, направленный в одну сторону — наружу — перенос энергии, при котором периодичность проявляется лишь в периодическом изменении величины потока энергии. Непрерывный переход от квазистационарных колебаний к прогрессивной волне представляют процессы, происходящие на расстояниях r порядка $\frac{c \cdot f(t)}{\dot{f}(t)}$; они имеют более сложный характер. Вычисление и наглядное их описание для случая периодических колебаний дал Герц в „Wiedemanns Annalen der Physik.“, Bd. 36 (1889).

§ 89. Если мы теперь зададим себе вопрос о значении выведенных формул для процессов, происходящих при разряде электрического конденсатора, то прежде всего надо иметь в виду, что заряженный конденсатор может быть рассматриваем как электрический диполь, только на таких расстояниях r, которые велики по сравнению со всеми линейными размерами конденсатора. Таким образом мы должны наперед ограничиться такими точками окружающего его поля, которые удовлетворяют этому условию. Но так как, с другой стороны, для того чтобы можно было трактовать поле как квазистационарное, должно быть удовлетворено условие (400), то и подавно (а fortiori) следуетх что наши уравнения могут иметь применение только для таки' процессов разряда, при которых линейные размеры употребляемого аппарата малы по сравнению с величиною:

$$\frac{c \cdot f(t)}{\dot{f}(t)}. \tag{407}$$

Этим налагается некоторый верхний предел для быстроты процесса. Ибо чем быстрее происходят изменения, тем ниже спускается длина, определяемая выражением (407). Положим при обычных обстоятельствах она вследствие наличия множителя c так значительна, что требуемое условие выполняется удовлетворительно во многих случаях. Рассмотрим, например, колебательный разряд с числом колебаний ν (§ 86). В этом случае (407) имеет порядок:

$$\frac{c}{\nu} = \lambda, \tag{407a}$$

если λ обозначает длину распространяющейся в пространстве со скоростью c периодической волны с числом колебаний ν. Для феддерсеновых колебаний $\nu = 10^6$, таким образом:

$$\lambda = 3 \cdot 10^4 \textit{ см} = 300 \textit{ м};$$

колебания, полученные Герцем, были приблизительно в сто раз быстрее, т. е. $\nu = 10^8$, и $\lambda = 3$ *м* все еще достаточно большая величина, чтобы можно было рассматривать герцевский осциллятор приблизительно как диполь, и поле вблизи него как квазистационарное. Герц, между прочим, пользовался в своих опытах прямым, содержащим искровой промежуток, проводящим стержнем, на обоих концах которого находилось по шару, служащему емкостью. Если оба шара зарядить противоположными по знаку известной величины зарядами, то возникает колебательный, более или менее быстро прекращающийся разряд через искровой промежуток. Вследствие крайне незначительной энергии этого процесса заряжение производилось непрерывно работающей электрической машиной или при помощи индуктория, полюсы которого были соединены с обоими шарами, и таким образом весь процесс часто повторялся в одном и том же порядке, подобно тому, как когда хотят слышать слабый звук замирающего колокола, то часто наносят ему удары один за другим.

Как только расстояние r рассматриваемой точки поля становится порядка, указываемого (407), или порядка длины волн λ, уравнения квазистационарного процесса перестают иметь силу, и на расстояниях, больших по сравнению с λ, остается только прогрессивная волна. Это имеет место, понятно, и для самых медленных колебаний, так что можно сказать: по существу всякое переменное во времени электромагнитное поле, не ограниченное извне, теряет энергию излучением в бесконечное пространство или, выражаясь иначе: при переходах электрической энергии в магнитную и обратно, что связано с каждым электрическим колебанием, обмен не происходит нацело, но каждый раз большая или меньшая часть энергии ускользает во внешнее пространство.

§ 90. Легко вычислить ту энергию, которую уносит во-вне за какой-либо интервал времени шаровая волна (405). Всего удобнее для этого воспользоваться значением (406) для напряжения електрического и соответственно магнитного поля. Тогда по (5) и (26) количество протекшей за время dt через элемент поверхности шаровой волны $d\sigma$ наружу энергии равно:

$$\frac{c}{4\pi}\frac{\sin^2\vartheta}{c^4 r^2}\ddot{f}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot d\sigma\, dt, \tag{408}$$

и это дает после интеграции по всей поверхности шаровой волны для всей излученной за элемент времени энергии положительную величину:

$$\frac{2}{3c^3}\ddot{f}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)dt, \tag{409}$$

поэтому для периодического или приблизительно периодического колебания средняя величина за единицу времени будет независимо от времеии и места:

$$\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{f}^2}. \tag{410}$$

По принципу энергии эта непрерывная отдача энергии требует, если колебания должны быть строго периодическими, непрерывного притока какой-либо особой энергии к источнику колебаний; в случае, если этого притока не существует, должно происходить затухание колебаний, которое прибавляется к затуханию вследствие джаулева тепла, и для отличия от него называющееся „затуханием лучеиспускания“.

Для периодически колеблющегося электрического диполя, например, электрический момент $f(t)$ выражается:

$$f(t) = l \cdot e_0 \cdot \cos 2\pi\nu t, \tag{411}$$

если обозначить через l неизменное расстояние между обоими полюсами, e_0 — начальный заряд одного из полюсов. Число колебаний ν вычисляется по формуле (379) из емкости C и коэфициента самоиндукции L. Энергия $Э$ колебания постоянна и равна по (374):

$$Э = \frac{1}{2}\frac{e_0^2}{c} = \frac{2\pi^2\nu^2 L e_0^2}{c^2}. \tag{412}$$

Энергия, излученная за время одного колебания, получается интегрированием (409) по t от t до $t + \frac{1}{\nu}$:

$$\frac{16\pi^4\nu^3}{3c^3} \cdot l^2 e_0^2, \tag{413}$$

т. е. она обратно пропорциональна третьей степени длины волны λ.

Если этот запас энергии источника колебаний непрерывно не пополняется, то происходит затухание колебаний, декремент которых определяется убылью энергии колебаний за время одного колебания:

$$Э_0 - Э_1 = \frac{16\pi^4\nu^3}{3c^3} \cdot l^2 e_0^2,$$

или по (412):

$$\frac{Э_0 - Э_1}{Э_0} = \frac{8\pi^2\nu l^2}{3cL}. \tag{414}$$

Если затухание слабое, то это выражение представляет в то же время и логарифмический декремент энергии, т. е. натуральный логарифм отношения $Э_0 : Э_1$. Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды, то из этого обстоятельства следует для логарифмического декремента затухания амплитуды σ половина предыдущего значения, т. е.:

$$\sigma = \frac{4\pi^2\nu l^2}{3cL}, \tag{415}$$

или также по (379) и (407a):

$$\sigma = \frac{16\pi^4 C l^2}{3\lambda^3}. \tag{415a}$$

При колебаниях Феддерсена декремент затухания колебаний чрезвычайно мал, при колебаниях Герца он уже достигает того же порядка величины, как декремент, обусловленный сопротивлением; при еще более быстрых колебаниях он один играет первенствующую роль.

§ 91. Рассмотренное в § 88, соответствующее колеблющемуся электрическому диполю решение уравнений поля годно не только для случая колебательного разряда проводника, но также и для случая прямолинейного колебания электрически изолированной заряженной материальной точки (ион или электрон) около положения равновесия, где находится противоположный заряд, ибо по § 81 электрический конвекционный ток обладает теми же магнитными свойствами, как и определяемый выражением (353) ток проводимости:

$$I \cdot l = e \cdot q = \dot{f}(t), \tag{416}$$

где e — постоянный заряд, q — переменная скорость; окружающее электромагнитное поле в обоих случаях одинаково. Поэтому энергия, излученная осциллирующим ионом в единицу времени, составит по (410):

$$\frac{2e^2}{3c^3} \cdot \overline{\dot{q}}. \tag{417}$$

Чтобы вычислить отсюда затухание излучения, мы должны принять в соображение, что энергия рассматриваемого колебания, вообще, как механической природы (кинетическая и потенциальная), так и электромагнитной; первая связана с движущейся инертной массой и с действующими на нее упругими силами, вторая заключается в окружающем электромагнитном поле. При прохождении через положение равновесия, причем по нашему предположению электрическое поле исчезает, скорость q достигает своей максимальной величины q_{max}; тогда имеется налицо только кинетическая и магнитная энергия. Так как обе они пропорциональны квадрату скорости, последняя по (416), то их можно соединить в один член:

$$Э = \frac{1}{2} m q_{max}{}^2, \tag{418}$$

причем постоянный множитель m обозначает „эффективную" инертную массу иона. Это m составляется из механической, данной непосредственно, массы и из электромагнитной, вычисляемой по магнитному полю движущегося иона. Электрон обладает, вообще, только электромагнитной массой.

Если опять ν — число колебаний, то q выразится формулой:

$$q = q_{max} \cdot \cos(2\pi\nu t + \vartheta),$$

и

$$\overline{\dot{q}^2} = 2\pi^2\nu^2 q_{max}{}^2, \tag{419}$$

поэтому логарифмический декремент энергии по (417) и (418):

$$\frac{Э_0 - Э_1}{Э_0} = \frac{8\pi e^2\nu}{3c^3 m}. \tag{420}$$

Если m всецело электромагнитной природы, то, сравнивая с (415), имеем:

$$m = \frac{e^2 L}{c^2 l^2} \tag{421}$$

связь между электромагнитной массой движущегося электрического заряда e и коэфициентом L самоиндукции эквивалентного ей в электромагнитном отношении элемента тока длиною l. В этом можно убедиться также прямым сравнением обоих выражений для магнитной энергии по (416):

$$\frac{1}{2}\frac{L}{c^2}I^2 = \frac{1}{2}mq^2.$$

В действительности нельзя обнаружить никакой принципиальной разницы между механической и электромагнитной инерцией, так что, кажется, мы имеем право принять упрощенную гипотезу: всякий вид инерции — электромагнитного происхождения.

§ 92. Чтобы на опыте определить вид характеристичной для шаровой волны (405) функции $f(t)$, в частности, чтобы убедиться в ее периодичности, существует простое средство: именно нужно заставить волну отразиться от зеркала. Тогда при простой периодической волне образуются стоячие колебания (*2*, § 40), и в узлах и в пучностях периодичность проявится разложенной пространственно, тогда как при прогрессивной волне ни одна точка пространства ничем не выделяется. Для такого исследования нет надобности во всей шаровой волне, достаточно из шаровой волны выделить настолько малый по сравнению с r участок, что в его пределах волну можно рассматривать как плоскую. При этом вследствие (404) размеры этой волновой плоскости все же могут быть достаточно велики по сравнению с длиной волны λ.

Законы распространения плоской волны всего проще получить прямо из уравнений (392) и (394), пользуясь частным решением (395), для которого опять $\mathbf{Z}_x = 0$ и $\mathbf{Z}_y = 0$, между тем как $\mathbf{Z}_z$ зависит только от x и t.

Это дает, если принять также опять $q = c$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial x^2}, \tag{422}$$

и по [*2*, (157)] общий интеграл этого уравнения:

$$\mathbf{Z}_z = F\left(t + \frac{x}{c}\right) + G\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{423}$$

Отсюда вытекают значения компонентов поля:

$$\mathbf{E}_x = 0, \quad \mathbf{E}_y = 0, \quad \mathbf{E}_z = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{424a}$$

$$\mathbf{H}_x = 0 \quad \mathbf{H}_y = f\left(t + \frac{x}{c}\right) - g\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad \mathbf{H}_z = 0, \tag{424b}$$

причем для сокращения обозначено:

$$-\frac{1}{c^2}\ddot{F} = f, \quad -\frac{1}{c^2}\ddot{G} = g.$$

Таким образом мы имеем здесь две, вообще, независимые друг от друга волны, которые распространяются в воздушном пространстве со скоростью c в направлении положительной и отрицательной оси x.

Примем теперь, что воздушное пространство отграничено плоскостью $x=0$, так что оно ограничивается областью положительных значений x. Область, соответствующая отрицательным x, напротив, заполнена веществом бесконечной проводимости $\varkappa$, так называемым „абсолютным проводником", который с достаточным в большинстве случаев приближением может быть представлен каждым металлом. Тогда, как увидим, плоскость $x=0$ действует на падающую на нее из воздуха электромагнитную волну, как совершенное зеркало.

Именно, в абсолютном проводнике, так как для него плотность тока $\mathbf{J}=\varkappa \mathbf{E}$ не может принимать бесконечных значений, напряжение электрического поля $\mathbf{E}$ и с ним джаулево тепло $\varkappa \mathbf{E}^2$ везде равны нулю, и так как по общим электромагнитным пограничным условиям (11) компоненты поля $\mathbf{E}_z$ имеют на границе $x=0$ в обеих средах одинаковую величину, то $\mathbf{E}_z$ также и в воздухе для $x=0$ всегда равно нулю, т. е. по (424а):

$$f(t)+g(t)=0$$

для всех положительных и отрицательных значений аргумента t.

Из этого тотчас же следует также:

$$g\left(t-\frac{x}{c}\right)=-f\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

и тем самым уравнения поля (424) принимают вид:

$$\mathbf{E}_z=f\left(t+\frac{x}{c}\right)-f\left(t-\frac{x}{c}\right), \tag{425a}$$

$$\mathbf{H}_y=f\left(t+\frac{x}{c}\right)+f\left(t-\frac{x}{c}\right). \tag{425b}$$

Таким образом, если волна $f\left(t+\frac{x}{c}\right)$ какого угодно вида, идущая из воздушного пространства и распространяющаяся в направлении отрицательных x-ов, падает на проводящую плоскость $x=0$, то она совершенно отражается в противоположном направлении, а именно, напряжение электрического поля с отрицательным знаком, напряжение магнитного поля с положительным.

Если волна просто периодическая:

$$f(t)=a\cos(\omega t+\vartheta), \tag{426}$$

то из (425) для напряжений поля получаются выражения:

$$\mathbf{E}_z=-2a\sin\frac{\omega x}{c}\sin(\omega t+\vartheta), \tag{427}$$

$$\mathbf{H}_y=2a\cos\frac{\omega x}{c}\cos(\omega t+\vartheta). \tag{428}$$

Они представляют стоячую волну с равноотстоящими узлами и пучностями. Так как длина прогрессивной волны $\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$, то узлы электрического напряжения лежат в точках:

$$x = 0, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda, \quad \frac{3\lambda}{2}, \ldots,$$

узлы магнитного напряжения:

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{3\lambda}{4}, \quad \frac{5\lambda}{4}, \ldots$$

Так как в первых опытах Герца были осуществлены волны с длиною около 1 *м*, то в них легко было отделить узлы и пучности.

§ 93. В предыдущем выводе законов отражения периодической волны от абсолютного проводника остается еще недостаточно выясненным одно обстоятельство, именно, что тангенциальная составляющая магнитного напряжения $\mathbf{H}_y$ на границе с абсолютным проводником $x = 0$ по общим пограничным условиям непрерывна и поэтому в проводнике, как и в воздухе, не равна нулю, но даже по (428) имеет в этом месте максимальную амплитуду. Таким образом и внутри проводника происходят магнитные колебания, тогда как, напротив, электрические колебания, согласно предположению, там совсем не происходят.

Ближайшие разъяснения этого кажущегося противоречия мы можем получить, если будем считать проводимость $\varkappa$ проводника не бесконечно большой. Тогда мы будем иметь дело с более общим случаем, что падающая волна не совсем отражается, но частью проникает в проводящее вещество. Поэтому мы должны теперь составить уравнения поля также и для этой части пространства, т. е. для $x < 0$. Ради простоты мы примем для проводника, так же как и для воздуха:

$$\varepsilon = 1 \quad \text{и} \quad \mu = 1;$$

при таких условиях телеграфное уравнение (389) сводится по (21) и (384) к

$$\ddot{\mathbf{Z}} + 4\pi\varkappa\,\dot{\mathbf{Z}} = c^2 \Delta \mathbf{Z},$$

или, если мы опять примем:

$$\mathbf{Z}_x = 0, \quad \mathbf{Z}_y = 0$$

и $\mathbf{Z}_z$ зависящим только от x и t:

$$\ddot{\mathbf{Z}}_z + 4\pi\varkappa\dot{\mathbf{Z}}_z = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_z}{\partial x^2}. \tag{429}$$

Это диференциальное уравнение может быть проинтегрировано при помощи показательной функции. Именно, мы можем положить:

$$\mathbf{Z}_z = e^{\omega\left(it + \frac{p}{c}x\right)}, \tag{430}$$

где, так как дело идет о периодическом во времени процессе, мы принимаем постоянную ω, частоту, действительной величиной, тогда как постоянная p может быть комплексной. Тогда уравнение (429) будет удовлетворено, если положить:

$$-\omega^2 + 4\pi\varkappa \cdot i\omega = \omega^2 p^2. \tag{431}$$

Здесь мы введем еще одно значительное, для нашего случая допустимое упрощение, именно, предположим, что $\varkappa$ хотя и не бесконечно велико, но все же велико по сравнению с ω. Тогда последнее уравнение перейдет в следующее:

$$p = \sqrt{\frac{4\pi\varkappa i}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi\varkappa}{\omega}} \cdot (1 + i) = \sqrt{\frac{4\pi\varkappa}{\omega}} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i}. \tag{432}$$

Корень берется со знаком $+$, так как $\mathbf{Z}_z$ для $x = -\infty$ не может быть бесконечным. Для напряжения поля в проводнике из (392) и (393) получается, если добавить для обобщения комплексную постоянную C:

$$\mathbf{E}_z = Ce^{\omega\left(it + \frac{p}{c}x\right)}, \tag{433}$$

$$\mathbf{H}_y = -ipCe^{\omega\left(it + \frac{p}{c}x\right)}, \tag{434}$$

как это можно более просто вывести также и непосредственно из уравнения поля:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} = c\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x}.$$

С другой стороны, для напряжений поля в воздухе из (424) получаются соответственно следующие частные решения:

$$\mathbf{E}_z = Ae^{\omega i\left(t + \frac{x}{c}\right)} + Be^{\omega i\left(t - \frac{x}{c}\right)}, \tag{435}$$

$$\mathbf{H}_y = Ae^{\omega i\left(t + \frac{x}{c}\right)} - Be^{\omega i\left(t - \frac{x}{c}\right)}. \tag{436}$$

На границе $x = 0$ $\mathbf{E}_z$ и $\mathbf{H}_y$ непрерывны, следовательно:

$$C = A + B \text{ и } -ipC = A - B.$$

Отсюда, если A произвольно задано:

$$B = \frac{1 + ip}{1 - ip} A = -\left(1 - \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\varkappa}}(1 + i)\right) A = -(1 - \delta)^{-\delta i} \cdot A, \tag{437}$$

$$C = \frac{2A}{1 - ip} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\varkappa}}(1 + i) A = \delta\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4} i} A, \tag{438}$$

причем для сокращения малая положительная величина δ обозначает:

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\varkappa}} = \sqrt{\frac{\nu}{\varkappa}}. \tag{438a}$$

Из найденного таким образом комплексного решения можно сейчас же вывести действительное решение задачи, если принять в соображение, что как уравнения поля, так и пограничные условия линейны и однородны по отношению к напряжению поля.

Так как предыдущие комплексные выражения удовлетворяют всем условиям внутри и на границе, то это же имеет место отдельно для действительной и мнимой их частей. Нужно, следовательно, во всех выражениях выделить, например, действительную их часть, чтобы получить искомое решение, удовлетворяющее всем условиям задачи. Положим еще произвольно заданную комплексную константу

$$A = ae^{\vartheta i}; \tag{439}$$

тогда по указанному способу из (435) и (436) получаются для воздуха ($\varkappa > 0$) действительные величины:

$$\mathbf{E}_z = a\cos\left\{\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)+\vartheta\right\} - (1-\delta)\,a\cos\left\{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\delta+\vartheta\right\}, \tag{440}$$

$$\mathbf{H}_y = a\cos\left\{\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)+\vartheta\right\} + (1-\delta)\,a\cos\left\{\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\delta+\vartheta\right\}, \tag{441}$$

и для проводника ($x < 0$) из (433) и (434):

$$\mathbf{E}_z = \delta\sqrt{2}ae^{\frac{\omega x}{\delta c}}\cos\left\{\omega\left(t+\frac{x}{\delta c}\right)+\frac{\pi}{4}+\vartheta\right\}, \tag{442}$$

$$\mathbf{H}_y = 2ae^{\frac{\omega x}{\delta c}}\cos\left\{\omega\left(t+\frac{x}{\delta c}\right)+\vartheta\right\}. \tag{443}$$

Что эти выражения действительно удовлетворяют всем условиям внутри и на границе сред, в этом, конечно, можно убедиться также подстановкой их в уравнения поля.

Итак, мы имеем здесь перед собою решение задачи об отражении падающей волны (426), если проводник обладает конечной, по сравнению с ω большой, проводимостью $\varkappa$. Для $\varkappa = \infty$ или $\delta = 0$, естественно, получаются опять формулы (427) и (428) полного отражения, имеющие место для абсолютного проводника. Конечное $\varkappa$ производит, напротив, небольшое изменение как амплитуды, так и фазы отраженной волны.

Вместе с тем, получается объяснение того отмеченного в начале этого параграфа своеобразного обстоятельства, что внутри проводника происходят конечные магнитные колебания, тогда как напряжение электрического поля там исчезающе мало. Действительно, в проводнике E везде мало по сравнению с H, и это возможно в силу того, что напряжения полей очень сильно изменяются с удалением от границы раздела. Уже на расстоянии одной только единственной длины волны, $x = \lambda$, вследствие большой величины показателя $\frac{\omega\lambda}{\delta c} = \frac{2\pi}{\delta}$ напряжения полей спускаются до ничтожной доли их значения на границе. Волна проникает тем глубже в проводник, чем меньше частота ω и чем меньше проводимость $\varkappa$.

Бросим теперь взгляд на энергетические соотношения, которые представляются наиболее доступными для измерений. По теореме Пойнтинга количество энергии, падающей на единицу пограничной поверхности, и, соответственно, от нее исходящее, в 1 времени выражается:

$$\frac{c}{4\pi}\int_0^1 \mathbf{E}_z\mathbf{H}_y \cdot dt,$$

если в нем положить $x = 0$.

Это дает для падающей волны: $\frac{a^2}{2}$, для отраженной волны: $\frac{a^2(1-\delta)^2}{2}$, для волны, проникающей в проводник: $a^2\delta$, если отвлечься от общего им всем коэфициента $\frac{c}{4\pi}$. Алгебраическая сумма этих трех величин равна нулю, как это и должно быть. Последняя величина тождественно равна энергии, превратившейся внутри проводника в джаулево тепло.

Отношение отраженной и проникшей энергии к падающей энергии называют соответственно отражательной и абсорбирующей способностью вещества для нормального падения. Их величины по вышеуказанному, соответственно, $(1-2\delta)$ и 2δ. Согласие с опытом для инфракрасных световых волн было установлено точными измерениями Е. Гагена и Г. Рубенса (1903). Но для более коротких волн эта теория теряет свое значение, потому что в этом случае уже нельзя более принимать распределение материи в проводнике непрерывным.

§ 94. Электромагнитная волна, падающая из воздуха на отражающее или абсорбирующее тело, производит на него также механическое действие. Мы вычислим его для рассмотренного здесь случая нормального отражения от проводника и с этой целью вообразим себе выделенным в проводнике цилиндр, основание которого равно 1, на поверхности раздела ($x = 0$), а высота настолько велика, что на другом основании цилиндра компоненты поля равны нулю. Тогда по § 44 на всю поверхность этого цилиндра действуют механические силы давления электрического происхождения, результирующая которых сводится к давлению на основание, где компоненты давления по (231) составляют:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}_x = \mathbf{Y}_y = \frac{\mathbf{E}_z^2}{8\pi}, \quad \mathbf{Z}_z = -\frac{\mathbf{E}_z^2}{8\pi}. \\ \mathbf{X}_y = \mathbf{Y}_z = \mathbf{Z}_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{444}$$

Так как, далее, внутренняя нормаль поверхности тела $\nu = -x$, то искомая механическая сила по [2, (74)]:

$$\mathbf{X}_\nu = -\mathbf{X}_x = -\frac{\mathbf{E}_z^2}{8\pi}, \quad \mathbf{Y}_\nu = 0, \quad \mathbf{Z}_\nu = 0.$$

К этому прибавляется по § 46 механическая сила магнитного происхождения, которая, соответственно, выражается:

$$\mathbf{X}_\nu = -\frac{\mathbf{H}_\nu^2}{8\pi}, \quad \mathbf{Y}_\nu = 0, \quad \mathbf{Z}_\nu = 0,$$

так что полная механическая сила, действующая на цилиндр, принимает значение:

$$\mathbf{X}_\nu = -\frac{\mathbf{E}_z^2 + \mathbf{H}_y^2}{8\pi}, \quad \mathbf{Y}_\nu = 0, \quad \mathbf{Z}_\nu = 0. \tag{445}$$

Она действует в направлении отрицательных x, из воздуха к проводнику, т. е. представляет давление и называется „световым давлением“. Величина этого давления равна объемной плотности энергии находящегося в воздухе излучения, считая вместе падающую и отраженную волны. Чем больше поглощает вещество, тем меньше световое давление, производимое на него падающей волной.

§ 95. В заключение этой главы мы рассмотрим еще частное решение уравнения поля, соответствующее случаю, когда электромагнитные волны распространяются не сферически во все стороны пространства, а только в совершенно определенном направлении вдоль параллельных проволок (система Лехера). С этой целью интегрируем волновое уравнение (395) с $q = c$ в предположении, что

$$\mathbf{Z}_x = 0, \quad \mathbf{Z}_y = 0, \quad \mathbf{Z}_z = F\left(x,\ y,\ t - \frac{z}{c}\right), \tag{446}$$

предполагая, что переменные z и t входят только в комбинации: $t - \frac{z}{c}$. Волновое уравнение сводится тогда к

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \tag{447}$$

и компоненты поля по (397) и (398) будут:

$$\mathbf{E}_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t}, \quad \mathbf{E}_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial t}, \quad \mathbf{E}_z = 0, \tag{448}$$

$$\mathbf{H}_x = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial t}, \quad \mathbf{H}_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial t}, \quad \mathbf{H}_z = 0. \tag{449}$$

Положим для сокращения:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t} = \varphi, \tag{450}$$

тогда:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{451}$$

и

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathbf{H}_y, \quad \mathbf{E}_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mathbf{H}_x. \tag{452}$$

Это в точности форма уравнений для стационарного безвихревого движения несжимаемой жидкости (*2*, § 66), происходящего в плоскости xy или в параллельной ей плоскости, с потенциалом скоростей φ.

Электрическим линиям соответствуют линии тока; перпендикулярным к ним магнитным силовым линиям соответствуют линии постоянного потенциала $\varphi = \text{const}$. Но все же имеется существенная разница в том, что здесь функция φ зависит еще от параметра $t - \frac{z}{c}$ и притом совершенно произвольно, таким образом, что электромагнитное поле для определенного z не стационарно, но перемещается, не изменяясь, в направлении возрастающих z со скоростью c.

Обратимся теперь к пограничным условиям. Если в воздухе имеется некоторое число натянутых параллельно оси z цилиндрических проволок, которые мы можем считать за абсолютные проводники, то по пограничным условиям для абсолютного проводника (§ 92) электрические силовые линии везде параллельны плоскости xy и оканчиваются перпендикулярно к сечениям проволок, тогда как магнитные силовые линии поэтому на границах совпадают с пограничными контурами сечений. В гидродинамической картине движущейся жидкости каждое сечение представляет, таким образом, „плоский“ „исток“ или „сток“ жидкости, смотря по тому, заряжено ли сечение положительно или отрицательно.

Каждому положительному заряду, как началу силовой линии, соответствует, конечно, равновеликий отрицательный заряд, как ее конец. При этом не исключена та возможность, что силовые линии идут в бесконечность, как, например, в случае одной проволоки. Тогда можно вообразить себе, что все заключено в проводящий полый цилиндр очень большого сечения, соответственным образом заряженный.

Если теперь это плоское поле перемещается вдоль оси z, то заряды сечений, и соответственно с этим, положения силовых линий изменяются таким образом, как это определяется зависимостью функции φ от аргумента $t - \frac{z}{c}$, и в конечном счете это зависит от формы электрических колебаний, впущенных в систему проводников.

Всего больше напряжения полей всегда вблизи проволок. Поэтому ток электромагнитной энергии идет, главным образом, вдоль проволок, и можно сказать, что удлиненный проводник имеет свойство концентрировать около себя идущую в его направлении волну. Из этого обстоятельства получает объяснение тот факт, что волны беспроволочной телеграфии не рассеиваются в пространстве, а следуют кривизне проводящей поверхности земли.

Вместо изображенной выше картины течений можно по известной теореме гидродинамики (*2*, § 66) применить для наглядного представления электромагнитного поля также другую, до некоторой степени противоположную картину, именно, обменивая роли линий тока с эквипотенциальными линиями. Тогда эквипотенциальные линии будут начинаться и оканчиваться в нормальном направлении к сечениям проволоки, тогда как линии тока будут окружать сечения, и проволоки будут представлять цилиндрические вихревые шнуры, каждое сечение которых, однако, обладает своим особым, определяемым аргументом $t-\frac{z}{c}$, вихревым моментом. Если, например, у нас имеются только две параллельные проволоки с бесконечно тонкими сечениями, то получится картина двух параллельных вихревых шнуров. В какой-нибудь перпендикулярной к ним плоскости электрические силовые линии (эквипотенциальные линии) суть круги, проходящие через обе точки пересечения проволок, и магнитные силовые линии (линии тока) суть перпендикулярные к ним круги, делящие расстояние между этими обеими точками в гармоническом отношении (ср. *2*, § 76, где также выведены соответствующие формулы). Заряды проволок со временем меняются, но в каждый момент они в двух лежащих напротив местах равны и противоположны по знаку.

Чтобы подвергнуть испытанию форму волны, т. е. зависимость волновой функции F от ее аргумента $t-\frac{z}{c}$, можно, как в случае свободно распространяющейся волны, воспользоваться прежним средством, именно, превратить при помощи полного отражения прогрессивную волну в стоячую. Это может быть всего проще достигнуто таким образом, что в произвольно выбранной плоскости z соединяют сечения обеих проволок абсолютным проводником, так называемым мостиком. Тогда при имеющих здесь место условиях в этой плоскости электрических силовых линий не может быть $\mathbf{E}=0$. Вся плоскость ведет себя так, как если бы она была абсолютно проводящая. Это пограничное условие может быть удовлетворено, если кроме волны F, распространяющейся в сторону положительных z, примем еще отраженную волну G, т. е. если вместо (446) положим:

$$\mathbf{Z}_z=F\left(x,\ y,\ t-\frac{z}{c}\right)+G\left(x,\ y,\ t+\frac{z}{c}\right) \tag{453}$$

Тогда компоненты поля выразятся по (397) и (398):

$$\mathbf{E}_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial^2(F-G)}{\partial x\,\partial t},\quad \mathbf{E}_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial^2(F-G)}{\partial y\,\partial t},\quad \mathbf{E}_z=0, \tag{454}$$

$$\mathbf{H}_x=\frac{1}{c}\frac{\partial^2(F+G)}{\partial y\,\partial t},\quad \mathbf{H}_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial^2(F+G)}{\partial x\,\partial t},\quad \mathbf{H}_z=0. \tag{455}$$

Положим для мостика $z=0$, тогда пограничные условия дают:

$$F(x,\ y,\ t)-G(x,\ y,\ t)=0$$

для всех значений x, y, t. Из этого вообще следует:

$$G\left(x,\ y,\ t+\frac{z}{c}\right)=F\left(x,\ y,\ t+\frac{z}{c}\right),$$

и поэтому

$$\mathbf{Z}_z=F\left(x,\ y,\ t-\frac{z}{c}\right)+F\left(x,\ y,\ t+\frac{z}{c}\right). \qquad (456)$$

Если волна F периодическая по отношению к t, то из этого выходит, как в § 92, что получается стоячая волна с равномерно расположенными узлами и пучностями. В плоскости мостика и во всех параллельных ей плоскостях, удаленных от нее на расстояния, кратные $\frac{\lambda}{2}$, электрическое напряжение имеет узел, магнитное — пучность. В таких плоскостях электрических силовых линий не имеется, есть только магнитные силовые линии, которые окружают обе проволоки. Им соответствуют максимальные колебания или пучности текущего в проволоках тока. Если соединить здесь обе проволоки друг с другом проводником, то от этого ничего не изменится.

В середине между каждыми двумя смежными узловыми плоскостями электрического напряжения лежат узловые плоскости магнитного напряжения. Здесь поле чисто электрическое, силовые линии идут поочередно от одной проволоки к другой, смотря по изменению заряда свечения, тогда как сила тока в проволоках все время равна нулю, совершенно аналогично тому, что происходит в узлах стоячей воздушной волны, где плотность воздуха изменяется между своими максимальными значениями, тогда как скорость воздуха все время нуль. Если включить здесь между проволоками чувствительный проводник, например гейслерову трубочку, то она обнаружит своим свечением электрическое напряжение между проволоками и произведет большее или меньшее нарушение процесса.

ГЛАВА IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ. ГРАНИЦЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ МАКСВЕЛЛА-ГЕРЦА

§ 96. После разнообразных отдельных применений теории нам остается еще теперь в качестве последней, высшей цели этого введения в электродинамику задача установить основные уравнения для произвольных динамических процессов в произвольно движущихся телах. Понятно, что эти уравнения должны заключать в себе как частные случаи все найденные ранее законы как для покоящихся тел, так и для квазистационарных процессов в движущихся телах. По этому поводу мы предпримем теперь же еще одно обобщение другого рода, именно распространение нашего исследования не только на однородные и изотропные тела, как до сих пор, но и на неоднородные и анизотропные. Таким путем достигается тотчас еще одно преимущество, именно полнейшее устранение пограничных условий, как это явствует из следующего простого соображения.

Пока мы ограничивались однородными веществами, мы были принуждены принимать на границе двух веществ всегда прерывистый переход и поэтому для каждой исследуемой величины задавать себе вопрос о ее непрерывности, как мы это везде и делали в предыдущих главах. Но если установленные уравнения имеют место также и для неоднородных веществ, то позволительно допустить, что переход от одного однородного вещества к другому происходит не скачком, через поверхность, а непрерывно, через слой малой, но конечной толщины, и вместе с прерывностью свойств вещества исчезает и всякая прерывность протекающих в нем процессов. Поэтому мы будем рассматривать теперь все постоянные и переменные величины как непрерывные в пространстве и во времени. Вместе с тем выпадает также понятие электрической поверхностной плотности заряда h, так же как и понятие о двойном электрическом слое g, и на их место выступает объемная плотность заряда k в переходном от одного вещества к другому слое, как это уже было разъяснено в § 29.

Но одно важное предположение, которое мы в последующем всегда будем подразумевать и должны его сделать, если развиваемая здесь теория должна быть доведена до конца, состоит в том, что пространство повсюду совершенно непрерывно заполнено материей. Ибо иначе нельзя предполагать процессы непрерывными в пространстве. Нужно также принимать всюду непрерывной скорость движения материи, таким образом, например, всякое скольжение двух тел вдоль их поверхности соприкосновения нужно заменить непрерывным переходом тангенциальной скорости через тонкий пограничный слой, который, конечно, при этом соответственно деформируется.

С этим связано то, что не существует никаких абсолютных границ тела, следовательно, не может существовать абсолютной пустоты, ибо на такой границе скорость движения материи испытала бы внезапно скачок или, по крайней мере, потеряла бы всякий смысл. Более того, мы должны представить себе, что даже самое разреженное пространство все еще содержит материю, что, конечно, фактически верно, и, далее, что эта материя, этот остаток газа непрерывно заполняет пространство и движется со скоростью, которая непрерывно переходит к скорости движения стенок сосуда. Последний пункт, как он ни существенен для электродинамики Максвелла-Герца, оказался на столько же опасным для ее дальнейшего развития ввиду того факта, что подобные минимальные следы газа практически не имеют никакого значения (§ 7) для распространения электромагнитной волны.

§ 97. Мы достигнем поставленной здесь цели всего лучше, если сначала отыщем такую форму уравнений поля, чтобы в них не входили величины, относящиеся к материальной природе вещества, как то: диэлектрическая постоянная, проводимость и т. д. Для покоящихся тел это уже выполнено в уравнениях (31), которые содержат общие законы для векторов поля, тогда как частные законы, а между ними также и все характерные для неоднородности и анизотропии, оказываются выраженными в отдельных соотношениях между напряжением поля и индукцией и силой тока. Теперь речь идет о том, чтобы обобщить законы, выраженные в уравнениях (31), для случая произвольно движущихся тел, причем для отдельных соотношений, как то: (28), (29) и (30), мы удерживаем те связи, которые имеют место для покоящихся тел. В качестве руководящей мысли мы воспользуемся при этом само собою напрашивающимся и подтвержденным результатами предыдущей главы положением, что в **достаточно малом объеме каждый процесс можно рассматривать как квазистационарный**. Для формулирования этого положения мы можем, как всегда, и здесь по нашему произволу воспользоваться как интегральной формой, так и диференциальной. Вследствие большей наглядности и большего удобства формулировки мы сначала выберем первый способ. Тогда без всяких дальнейших соображений комбинаций соотношений (341) и (348) даст нам связь между магнитной индукцией и электрическим напряжением для небольшой замкнутой материальной кривой:

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}_\nu \, d\sigma = -c \cdot \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \qquad (457)$$

т. е. скорость изменения потока магнитной индукции через ограниченную кривой поверхность, безразлично, произведено ли это изменение движением материи или оно произошло вследствие местного изменения магнитного поля, равна произведению, взятому со знаком —, критической скорости на линейный интеграл электрического напряжения поля или электрической разности потенциалов вдоль всей кривой.

Форма этого соотношения такова, что оно без ограничений может быть распространено на каждую произвольную конечную замкнутую материальную кривую. В самом деле, если мы станем рассматривать материальную поверхность σ, ограниченную подобной кривой, и разложим ее на заведомо малые материальные части, то соотношение (457) имеет силу, конечно, для каждой отдельной части поверхности и для ее контура. Если все эти уравнения сложить, то слева мы получим прямо поток индукции через всю поверхность σ, справа же сумма линейных интегралов сводится к одному линейному интегралу, распространенному по контуру, охватывающему σ, как это вытекает из того соображения, что в сумме линейных интегралов каждый расположенный внутри σ элемент линии $d\mathbf{r}$ входит дважды, и именно с противоположными знаками, потому что обход по контуру $d\mathfrak{r}$ нужно производить каждый раз в смысле, соответствующем нормали ν к поверхности. Итак, выражение (457) имеет место для всякой произвольной замкнутой материальной кривой. Расположение поверхности σ, ограниченной кривой, совершенно безразлично, потому что поток магнитной индукции от этого не зависит.

От интегральной формы для соотношения между магнитной индукцией и напряжением электрического поля мы перейдем тотчас же к диференциальной форме, чтобы можно было сравнить результат с диференциальным уравнением (31b) для покоящихся тел.

Для этой цели мы выразим сначала обе части уравнения (457) в виде интегралов по поверхности. Для правой части это удается сделать непосредственно при помощи теоремы Стокса:

$$-c\oint \mathbf{E}\, d\mathfrak{r} = -c\int (\operatorname{rot}\, \mathbf{E})_\nu \cdot d\sigma, \tag{458}$$

между тем как диференциал во времени слева по способу, примененному уже в § 79, может быть разложен на две части: одна происходит от местного изменения магнитного поля и выражается формулой (348а), другая обусловлена движением материального контура при неизменном магнитном поле, и ее величина дается выражением (350) или по теореме Стокса:

$$dt\int (\operatorname{rot}\, [\mathbf{B}\mathfrak{q}])_\nu \cdot d\sigma. \tag{459}$$

Если теперь стянуть поверхность в одну точку и если принять в соображение, что направление нормали ν может быть совершенно произвольным, то из (457) при помощи (458), (348) и (459) получается общее соотношение:

$$\dot{\mathbf{B}} + \operatorname{rot}\, [\mathbf{B}\mathfrak{q}] = -c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}, \tag{460}$$

которое представляет искомую диференциальную форму зависимости между магнитной индукцией и электрическим напряжением поля. Для $\mathfrak{q} = 0$ она переходит, как это и требуется, в диференциальное уравнение (31b) для покоящихся тел, в общем случае она оказывается вполне тождественной с уравнением (351а), уже подробно разобранном в § 79.

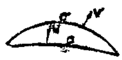
§ 98. Теперь мы займемся до некоторой степени аналогичным соотношением между электрической индукцией и магнитным напряжением поля, т. е. обобщением диференциального уравнения (31а) на случай движущихся тел. Сначала опять отыщем интегральную форму этого соотношения.

Полной аналогии, которой можно было бы, пожалуй, ожидать, именно равенства между скоростью изменения потока электрической индукции через поверхность σ и произведением (здесь положительным) критической скорости и линейного интеграла напряжения магнитного поля вдоль контура около σ, не может быть по тем основаниям, что в противоположность магнитной индукции поток электрической индукции через поверхность σ зависит не только от контура, но и от прочего положения поверхности, так что предполагаемое равенство не имело бы никакого смысла. Но как раз принимая во внимание это обстоятельство, мы находим средство получить необходимое здесь обобщение.

Именно, если мы рассмотрим разность потока электрической индукции через две поверхности σ и σ' с одинаково направленными нормалями ν и ν' и тем же самым контуром:

$$\int \mathbf{D}_{\nu'}\, d\sigma' - \int \mathbf{D}_{\nu}\, d\sigma, \tag{461}$$

то легко усмотреть из черт. 12, что эта разность равна полному потоку индукции из пространства, ограниченного этими двумя поверхностями, наружу, т. е. по (42) равна электрическому заряду e, находящемуся в этом пространстве, умноженному на 4π.



Черт. 12

Если, далее, материальные точки, образующие обе поверхности, как-либо движутся и, кроме того, как-либо изменяется электромагнитное поле, то сообразно с этим получается:

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{D}_{\nu'}\, d\sigma' - \frac{d}{dt}\int \mathbf{D}_{\nu}\, d\sigma = 4\pi \cdot \frac{de}{dt}.$$

Но количество электричества, находящееся в объеме, ограниченном материальными поверхностями, e вообще может измениться только тогда, когда через поверхность, ограничивающую объем, внутрь пойдет ток. Для настоящего случая по (43) мы имеем:

$$de = dt \cdot \left(\int \mathbf{J}_{\nu}\, d\sigma - \int \mathbf{J}_{\nu'}\, d\sigma'\right).$$

Следовательно, комбинируя с последним уравнением и делая надлежащие перестановки:

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{D}_{\nu'}\, d\sigma' + 4\pi \int \mathbf{J}_{\nu'}\, d\sigma = \frac{d}{dt}\int \mathbf{D}_{\nu}\, d\sigma + 4\pi \int \mathbf{J}_{\nu}\, d\sigma. \tag{462}$$

Таким образом мы видим, что не скорость изменения потока электрической индукции, а эта величина с добавлением тока проводимости при определенном контуре не зависит совершенно от положения поверхности σ. Отсюда мы и выводим заключение, что эта сумма как раз пригодна служить основанием для вывода искомого соотношения. Таким путем мы получаем интегральное соотношение в виде:

$$\frac{d}{dt}\int \mathbf{D}_{\nu}\, d\sigma + 4\pi \int \mathbf{J}_{\nu}\, d\sigma = c \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \tag{463}$$

Выбор поверхности σ совершенно безразличен. Остается только условие, что в левой части уравнения при диференцировании по времени поверхность σ изменяется в зависимости от движения материальных точек, на ней лежащих.

Чтобы перейти от интегральной формы к диференциальной, воспользуемся тем же приемом, который мы употребили в предыдущем параграфе для магнитной индукции. Во-первых, мы имеем, справа, как в (458), по теореме Стокса:

$$c \cdot \int \left(\operatorname{rot} \mathbf{H}\right)_\nu \cdot d\sigma. \tag{464}$$

Слева, напротив, выражение несколько сложнее прежнего. Действительно, двум членам, на которые может быть разложен диференциал по времени:

$$d \int \mathbf{D}_\nu \, d\sigma, \tag{465}$$

именно: одному, происходящему от местного изменения электрического поля:

$$dt \int \dot{\mathbf{D}}_\nu \, d\sigma, \tag{466}$$

и другому, обусловленному движением материального контура, при неизменном электрическом поле:

$$dt \int (\operatorname{rot} [\mathbf{D}\mathbf{q}])_\nu \cdot d\sigma, \tag{467}$$

к этим двум членам присоединяется здесь еще третий, — то изменение потока индукции через σ, которое при неизменном электрическом поле и неподвижном контуре производится перемещением материальных точек, лежащих на поверхности σ. Чтобы вычислить это последнее изменение, воспользуемся опять черт. 12, причем теперь под σ' будем подразумевать положение поверхности в момент $t + dt$. Тогда искомая величина:

$$\int \mathbf{D}_{\nu'} \, d\sigma' - \int \mathbf{D}_\nu \, d\sigma$$

или, если написать ее в виде интеграла по объему:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot d\tau.$$

Здесь элемент $d\tau$ равен:

$$d\sigma \cdot \mathbf{q}_\nu \cdot dt,$$

таким образом имеем:

$$dt \int \operatorname{div} \mathbf{D} \cdot \mathbf{q}_\nu \cdot d\sigma. \tag{468}$$

Итак, диференциал (465) получается сложением (466), (467) и (468). Поступая, далее, так же, как прежде, получаем из (463) диференциальный закон для соотношения между электрической индукцией и магнитным напряжением поля в форме:

$$\dot{\mathbf{D}} + \mathrm{rot}\,[\mathbf{D}\mathfrak{q}] + \mathrm{div}\,\mathbf{D}\cdot\mathfrak{q} + 4\pi\mathbf{J} = c\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \tag{469}$$

которое, конечно, для $\mathfrak{q}=0$ переходит в (31а).

Если принять во внимание, что по (40) величина div **D** равна объемной плотности заряда k, умноженной на 4π, то ясно, что произведение ее и $\mathfrak{q}$ представляет конвекционный ток, который как мы уже видели в § 81, также производит магнитные действия. Член rot $[\mathbf{D}\mathfrak{q}]$ называется рентгеновским током, потому что Рентгену впервые удалось доказать экспериментально магнитные действия движущегося поляризованного диэлектрика.

§ 99. Как непосредственно видно из интегрального закона (457) и (463), соотношения между механическими и электромагнитными величинами по теории Максвелла-Герца совершенно не зависят от какой-либо системы отсчета или, другими словами, основные уравнения для электродинамических процессов в движущихся телах инвариантны по отношению к переходу к какой-либо подвижной системе координат. Эту особенность, конечно, можно также доказать и для диференциальных уравнений (460) и (469).

В виде примера мы произведем вычисление для преобразования к системе координат с параллельными осями, начало которых движется с какой-либо переменной скоростью $\dot{f}(t)$ в направлении оси x-ов. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned} x &= x' + f(t), & y &= y', & z &= z', \\ \mathfrak{q}_x &= \mathfrak{q}_x' + \dot{f}(t), & \mathfrak{q}_y &= \mathfrak{q}_y', & \mathfrak{q}_z &= \mathfrak{q}_z'. \end{aligned} \tag{470}$$

Первое из уравнений (469) дает

$$\dot{\mathbf{D}}_x + \frac{\partial(\mathbf{D}_x\mathfrak{q}_y - \mathbf{D}_y\mathfrak{q}_x)}{\partial y} - \frac{\partial(\mathbf{D}_z\mathfrak{q}_x - \mathbf{D}_x\mathfrak{q}_z)}{\partial z} + \\ + \mathrm{div}\,\mathbf{D}\cdot\mathfrak{q}_x + 4\pi\mathbf{J}_x = c\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathbf{H}_y}{\partial z}\right). \tag{471}$$

Так как вследствие производимого преобразования изменяются только члены, содержащие $\dot{\mathbf{D}}_x$ и $\mathfrak{q}_x$, то достаточно рассмотреть только их. Это суть члены:

$$\dot{\mathbf{D}}_x + \mathfrak{q}_x\cdot\frac{\partial\mathbf{D}_x}{\partial x} - \mathbf{D}_y\cdot\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial y} - \mathbf{D}_z\cdot\frac{\partial\mathfrak{q}_x}{\partial z}. \tag{472}$$

Но по (470):

$$\dot{\mathbf{D}}_x = \left(\frac{\partial\mathbf{D}_x}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial\mathbf{D}_x}{\partial t}\right)_{x'} + \left(\frac{\partial\mathbf{D}_x}{\partial x'}\right)_t\frac{\partial x'}{\partial t} = \dot{\mathbf{D}}_{x'} - \frac{\partial\mathbf{D}_x}{\partial x'}\cdot\dot{f}(t).$$

Если подставить эту величину, а также $\mathbf{q}_x$ из (470) в (472) и принять во внимание, что члены с пространственными производными от $\mathbf{D}$ и $\mathbf{q}$ при преобразовании остаются инвариантными, то получится выражение:

$$\dot{\mathbf{D}}_{x'} + \mathbf{q}_x{}' \cdot \frac{\partial \mathbf{D}_{x'}}{\partial x'} - \mathbf{D}_{y'} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial y'} - \mathbf{D}_{z'} \frac{\partial \mathbf{q}_z{}'}{\partial z'},$$

чем доказывается инвариантность (472) и вместе с тем также инвариантность (471). Таким же образом происходит рассмотрение остальных уравнений поля.

Физическое значение рассмотренного свойства инвариантности состоит, очевидно, в том, что электродинамические процессы, происходящие в какой-либо покоящейся или какой-либо движущейся системе тел, не испытывают никакого изменения, если к имеющимся налицо движениям присоединяется движение всей системы тел в целом. Следовательно, невозможно электродинамическими измерениями обнаружить абсолютную скорость всей системы. Этот электродинамический принцип относительности идет еще дальше, чем механический принцип относительности Галилея (*1*, § 59). Действительно, последний требует инвариантности только для равномерного движения, между тем как здесь допускается инвариантность для произвольно ускоренного движения, стало быть, также и для вращательного движения, поскольку только оно оставляет неизменными относительные движения внутри системы. Так как справедливость принципа относительности в природе подтверждается в очень многочисленных случаях возможно тончайшими измерениями, то он оказывается сильной опорой электродинамики Максвелла-Герца.

§ 100. С другой стороны, существуют некоторые факты, которые не оставляют никакого сомнения в том, что представленное здесь и данное Герцем вполне последовательное распространение максвелловой электродинамики для произвольно движущихся тел неприемлемо. Чтобы это доказать, вполне достаточно обсудить один выдающийся из всех, однако уже решающий случай: именно распространение электромагнитной волны в движущемся разреженном газе. По теории Максвелла-Герца электромагнитные волны, на основании принципа относительности, должны всегда вполне увлекаться газом, ибо для наблюдателя, движущегося вместе с газом, распространение волн, по принципу относительности и на основании всех опытов, представляется точно таким же, как и для покоящегося в неподвижном газе наблюдателя. Это положение должно сохранять свою силу без всякого отношения к степени разрежения газа, в полном соответствии с тем, что в основные уравнения предыдущего параграфа не входят константы, характеризующие материальные свойства движущихся тел, и что для достаточно разреженного газа напряжение поля и индукция практически тождественны. Поэтому в состоянии крайнего разрежения даже газ и совместно с ним движущийся эфир остаются носителями электромагнитных волн, так же как звуковых волн.

Но это положение стоит в явном противоречии с действительностью, как это показал в особенности Физо своими опытами с текущим газом. О полном увлечении электромагнитных волн движущимся газом не может быть и речи. Более того, распространение волн в очень разреженном газе происходит по существу независимо от всякого движения газа. Только при очень сильном сжатии становится заметным слабое влияние. Таким образом, если, вообще, предполагать, что для электромагнитных волн должен существовать особый вещественный носитель, то он относится, во всяком случае, совершенно пассивно и индиферентно к движениям разреженного газа.

Математически отмеченное обстоятельство можно выразить так: для разреженного газа в диференциальном уравнении (460) в действительности совершенно отсутствует член с $\mathfrak{q}$, а в диференциальном уравнении (469) — соответственный член.

После того как это установлено, что, впрочем, представляет только более определенную формулировку положения, высказанного уже в § 7, именно, что остатки газа в эвакуированном объеме не производят никакого заметного действия на электромагнитное поле, электродинамика Максвелла-Герца представляется уже недостаточной и требующей существенного ее изменения.

§ 101. Разрешение указанного затруднения было дано Г. А. Лоренцом при помощи установленной им теории покоящегося эфира. Главная идея этой теории заключается в том, что она в основном порывает с существенным для электродинамики Максвелла-Герца предположением о непрерывном заполнении пространства материей или, что сводится к тому же, о полном увлечении носителя электромагнитных действий материей. Согласно электродинамике Лоренца существует только одна среда, которая непрерывно и без промежутков заполняет все пространство и которая поэтому также проникает и во все материальные тела, — эфир. Он один передает все электродинамические действия. Его состояние движения неизменно; поэтому его можно рассматривать как покоящийся. Напротив, материя состоит из отдельных атомов, которые распределены на большем или на меньшем расстоянии друг от друга и движутся по отношению к эфиру, как твердые, или так же, как деформируемые тела, со скоростью $\mathfrak{q}$. Они влияют на электромагнитное поле только побочным образом, именно, взаимодействие между электромагнитным полем и материей осуществляется только благодаря тому обстоятельству, что материя несет электрические заряды с объёмной плотностью k и при движении увлекает их с собою. При этом не исключено, что подобные электрические заряды, если ограничиваться очень малыми, отделенными друг от друга частями пространства, существуют также и вне материи и движутся самостоятельно через эфир. Свободные заряды называются в настоящее время электронами, в противоположность материальным ионам. Согласно этому в теории Лоренца понятие о токе проводимости совершенно отпадает. Так называемый электрический ток в основе не что иное, как электрическая конвекция, носителями зарядов являются в электролитах ионы, в металлах — электроны.

Так как чистый эфир тождественен с полной пустотой, то в нем как диэлектрическая постоянная, так и магнитная проницаемость равны 1, напряжение поля совпадает с индукцией, и вместо уравнений Максвелла-Герца (460) и (469) имеют место уравнения поля Лоренца:

$$\dot{\mathbf{H}} = -c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{473a}$$

$$\dot{\mathbf{E}} + 4\pi k \cdot \mathbf{q} = c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k, \tag{473b}$$

удивительная простота которых состоит в замечательной связи с их не менее поразительной производительностью. Диэлектрическая постоянная ε и магнитная проницаемость μ теряют в теории Лоренца свое первичное значение, которое они имеют в теории Максвелл-Герца; все диэлектрические и магнитные свойства материальных тел сводятся к расположению и движениям ионов и электронов в телах, именно к диэлектрической поляризации (§ 26) и к амперовым молекулярным токам (§ 63). Величины ε и μ поэтому надо рассматривать не просто как константы, но как сокращенное обозначение очень сложных запутанных выражений, как некоторое статистическое среднее, зависящее от взаимодействия невообразимо большого числа малых сил — воззрение, благодаря которому физически объясняется действительная изменчивость этих величин. Это обстоятельство, конечно, не ставит препятствий к тому, чтобы во всех случаях, когда ε и μ практически оказываются постоянными, мы могли пользоваться неизмененными уравнениями Максвелла.

Для всех этих действий по теории Лоренца имеет место следующая общая формула для механической силы, оказываемой электромагнитным полем с напряжением $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на движущийся в нем со скоростью $\mathbf{q}$ точечный заряд e:

$$\mathbf{F} = e \cdot \mathbf{E} + \frac{e}{c} \cdot \left[\mathbf{qH}\right], \tag{474}$$

как это вытекает из комбинации формул (214) и (352). Из этого закона (474) можно вывести все пондеромоторные действия между проводниками и диэлектриками, магнитами и токами, и притом везде в удовлетворительном согласии с опытом.

§ 102. Как ни замечательно подтверждается лоренцова теория покоящегося эфира во всех областях электродинамики, однако, для нее возникло существенное затруднение при преобразовании уравнений Лоренца к системе координат, движущейся по отношению к эфиру. При устранении членов rot $[\mathbf{Bq}]$ и rot $[\mathbf{Dq}]$ из максвелл-герцевых уравнений пропало также как раз то свойство этих уравнений, которое, как мы, например, в (472) видели, обусловливало их инвариантность по отношению к движению системы координат и вместе с тем обеспечивало пригодность принципа относительности. В самом деле, непосредственно ясно, что, например, для наблюдателя, который движется в направлении ряда электромагнитных волн через эфир, скорость движения распространяющихся в эфире волн меньше, чем для покоящегося наблюдателя, и поэтому должно ожидать, что можно установить скорость движения наблюдателя из электромагнитных оптических измерений. В действительности же даже самые тонкие измерения, как, например, измерения Майкельсона и Морлея, не установили никакого влияния земли на относительное распространение света, так что некоторое время казалось, что уравнения Лоренца (473) и (474) несовместимы с принципом относительности и что поэтому теория принуждена пожертвовать одним из этих двух устоев своего здания, чтобы, по крайней мере, спасти другой.

Выход из этой коварной дилеммы указал А. Эйнштейн (Ann. d. Phys. 17, S. 891, 1905), причем он выставил положение, что уравнения электродинамики Лоренца, равно как точные уравнения механики, в действительности инвариантны при переходе от покоящейся системы координат к равномерно движущейся, но что для этого перехода надо пользоваться не преобразованиями Галилея [*1*, (194)], но другим преобразованием, называемым теперь преобразованием Лоренца, которое можно рассматривать до некоторой степени как обобщение преобразования Галилея, так как оно переходит в это последнее при $c = \infty$. Этим положением была не только приведена в согласие с принципом относительности электродинамика Лоренца, но к нему примкнул длинный ряд других следствий, в особенности для механики, которые простираются глубоко в область теории познания и которые ни в одном случае не привели к противоречию с опытом, но часто удивительным образом им подтверждались.

Ближайшее рассмотрение принципа относительности Эйнштейна, однако, здесь невозможно, так как в этой книге имелось в виду дать только введение в теорию электричества.

числовых значений некоторых величин, выраженных в различных системах единиц

Критическая скорость c, а также все механические и энергетические величины (пондеромоторная сила, импульс, работа, плотность энергии, поток энергии, теплота) имеют во всех приведенных системах единиц одинаковые числовые значения, в практической системе единиц они различаются на 10 в некоторой степени.

Величина	Числовое значение в гаусс. системе	Размерность в гауссовой системе	Числовое значение в лоренцовой рациональной системе, § 7	Числовое значение в максвелловой электромагнитной системе, § 7	Числовое значение в практической системе, § 61
Напряжение электрического поля, § 2	$\mathbf{E}$	$\left[C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\frac{\mathbf{E}}{\sqrt{4\pi}}$	$c\mathbf{E}$	$c\mathbf{E} \cdot 10^{-8}$
Напряжен. магнитн. поля, § 3	$\mathbf{H}$	$\left[C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi}}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H}$ гаусс
Диэлектрическая постоянная, § 2	ε	$[1]$	ε	$\frac{\varepsilon}{c^2}$	$\frac{\varepsilon}{c^2} \cdot 10^9$
Магнитная проницаемость, § 3	μ	$[1]$	μ	μ	μ
Количество электричества, § 11	e	$\left[C^{\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\sqrt{4\pi} \cdot e$	$\frac{e}{c}$	$\frac{e}{c} \cdot 11$ ампер-сек. (кулон)
Объемная плотность заряда, § 11	k	$\left[C^{-\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\sqrt{4\pi} \cdot k$	$\frac{k}{c}$	$\frac{k}{c} \cdot 10$
Поверхностная плотность заряда, § 11.	h	$\left[C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\sqrt{4\pi} \cdot h$	$\frac{h}{c}$	$\frac{h}{c} \cdot 10$
Электрическая проводимость, § 11	$\varkappa$	$[S^{-1}]$	$4\pi\varkappa$	$\frac{\varkappa}{c^2}$	$\frac{\varkappa}{c^2} 10^9$
Электрическая индукция, § 11	$\mathbf{D}$	$\left[C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\frac{\mathbf{D}}{\sqrt{4\pi}}$	$\frac{\mathbf{D}}{c}$	$\frac{\mathbf{D}}{c} \cdot 10$
Магнитная индукция, § 11	$\mathbf{B}$	$\left[C^{-\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi}}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
Электродвижущая сила, § 27	E	$\left[C^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\frac{E}{\sqrt{4\pi}}$	cE	$cE \cdot 10^{-8}$ вольт
Сила электрического тока, § 49	I	$\left[C^{\frac{3}{2}} G^{\frac{1}{2}} S^{-1}\right]$	$\sqrt{4\pi} \cdot I$	$\frac{I}{c}$	$\frac{I}{c} \cdot 10$ ампер
Электрическое сопротивление, § 49	w	$[C^{-1} S]$	$\frac{w}{4\pi}$	$c^2 w$	$c^2 w \cdot 10^{-9}$ ом
Электрическая емкость, § 16	C	$[C]$	$4\pi C$	$\frac{C}{c^2}$	$\frac{C}{c^2} \cdot 10^{-9}$ фарад
Коэфициент самоиндукции, § 76	L	$[C]$	$\frac{L}{4\pi}$	L	$L \cdot 10^{-9}$ генри
Работа тока, § 65	A	$[C^2GS^2]$	A	A	$A \cdot 10^{-7}$ ватт-сек. (джауль)
Мощность тока, § 65.	A	$[C^2GS^{-3}]$	A	A	$A \cdot 10^{-7}$ вольт-ампер (ватт)

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ВАЖНЕЙШИХ ПОЛОЖЕНИЙ

Абсолютный проводник 27
Абсорбирующая способность . . 165
Ампер 113
Ампера правило 116
Амперовы молекулярные токи . . 116

Био-Савара закон 116

Вектор-потенциал 115
Вестона элемент 113
Вольт 113
Вольта ряд напряжений 60
Восприимчивость 58
Временный магнетизм 74

Гальваническая цепь 67
Герца вектор 152
Герца колебания 156
Гистерезис 71

Даниеля элемент 68
Двойной слой, электрический . . 62
Действительный заряд 42
Джаулево тепло 20
Джауль 119
Диамагнетизм 71
Диполь 58
Диэлектрик 11
Диэлектрическая постоянная . . 12

Емкость 35
Емкость эллипсоида 55

Закон Ома 25
Заряд электрический 99
Затухание лучеиспускания . . . 157
Защита, электрическая 34
Защита, магнитная 81

Изолятор 27
Индукция, магнитная 26
Индукция, электрическая 27
Ионы 177

Квазистатический 82
Квазистационарный 131

Кирхгофа правила 103
Колебательный разряд 149, 150
Количество электричества 25
Кольцевой магнит 75
Конвекционный ток 142
Конденсатор 34
Контактная разность потенциалов. 30
Критическая скорость 18
Кулон 113
Кулона закон 85

Ленца правило 137
Лехера установка 166
Лоренца преобразование 179
Лоренца теория 177

Магнитный момент 73
Магнитный полюс 75

Наклонение магнитное 93
Намагничение 12
Напряжение поля магнитное . . 13
Напряжение поля электрическое 12
Насыщение намагничения 74
Нормальный элемент 113

Ом 113
Ортогональные координаты . . . 50
Остаточный магнетизм 74
Отражательная способность . . . 165
Охранное кольцо 87

Панцырный гальванометр 81
Парамагнетизм 71
Плотность энергии магнитная . . 13
Плотность энергии электрическая 12
Поток энергии электромагнитной 15
Плотность заряда объемная . . 26
Плотность заряда поверхностная 26
Плотность тока 27
Поверхностная дивергенция . . . 26
Поляризация 58
Последовательность электрических напряжений 68
Постоянный магнит 74

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Постоянный (перманентный) магнетизм 74
Потенциал магнитный. 72
Потенциал электрический 30
Потенциальный закон. 85
Преломление силовых линий . . 36
Проводимость земли 102
Проводник 27
Проводники первого и второго класса 68, 69
Проводимость 100
Проницаемость 13
Принцип сохранения электричества 25
Принцип близкодействия 9

Разветвление тока 103
Релаксации время 20
Рентгена ток 175

Самоиндукция 136
Саморазмагничивание 80
Световое давление 166
Свободный заряд магнитный . . 42
Свободный заряд, электрический. 72
Сила тока 98
Силовые линии 31
Система единиц Гаусса 17
Система единиц Максвелла . . . 18
Система единиц практическая. 19, 113
Система единиц рациональная. . 19
Скин-эффект 142
Склонение магнитное 93
Скорость света 153

Сопротивление 98
Стокса теорема 105

Тензор натяжения магнитный. . 94
Тензор натяжения электрический 89
Телеграфное уравнение 152
Ток замыкания 136
Ток смещения 144
Ток размыкания 136
Токи Фуко 141

Уатт 119
Уитстона мост 103

Фарад 113
Фарадея электрохимический закон 120
Ферромагнетизм 71

Эйнштейна принцип относительности 179
Электрическое расширение . . . 87
Электрическое изображение . . 47
Электродвижущая сила 95
Электролит. 70
Электромагнитная масса 159
Электрон 177
Электропроводность 27
Электрохимический эквивалент . 120
Эллиптические координаты . . . 52
Экстраток 136
Эфир 17
Эффект 119
Эффект Роулэнда. 142