



MAX PLANCK

EINFÜHRUNG  
IN DIE THEORETISCHE PHYSIK

IV  
OPTIK

VERLAG VON S. HIRZEL  
Leipzig, 1932

МАКС ПЛАНК

ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ  
О П Т И К А

Перевод с немецкого  
С. И. ЛЕЙТМАНА

*Допущено Наркомпросом РСФСР  
в качестве учебного пособия  
для государственных университетов*

**ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО**

**ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН**

**Москва 1934 Ленинград**

Т 40-5-2

## ПРЕДИСЛОВИЕ КЪ ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Новое издание отличается от предыдущего лишь небольшими изменениями и дополнениями.

Берлин — Грюневальд,  
декабрь 1930 г.

*Автор*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

При выборе содержания и характера изложения предлагаемой книги я основывался на тех положениях, которые руководили мною при составлении ранее появившихся в том же издательстве трех частей настоящего труда, предназначенного для первого серьезного введения в теоретическую физику. При том объеме, который имеет в настоящее время теоретическая физика, и здесь опять речь может идти лишь о скупом выборе из имеющегося крайне богатого материала. При этом решающим было в первую очередь ограничение рамками классической волновой теории в ее применении к средам непрерывной плотности. Поэтому я имел возможность уделить больше внимания систематическому изложению и развитию высказываемых положений, а также их связи с другими отделами теоретической физики. Этим обусловлены многочисленные ссылки на предшествующие тома настоящего труда, в которых цифра 1 указывает на общую механику, 2 — на механику деформируемых тел и 3 — на теорию электричества и магнетизма.

Но если в первых частях книги можно было рассматривать материю как непрерывную среду с непрерывно меняющимися свойствами, то при изложении дисперсии оказывается необходимым отказаться от такого представления. Так как, однако, при изложении теоретической оптики дисперсия не может быть опущена, то в последней части книги я ввел атомистический метод рассмотрения. При этом я пытался наметить также естественный переход и к квантовой механике. Мне кажется правильным не только из педагогических соображений, но и по существу дела подходить к квантовой механике, так же как и к теории относительности, на основе классической теории при помощи соответствующего обобщения.

В конце книги приведен, как и раньше, алфавитный указатель всех определений и важнейших высказанных положений.

Берлин — Грюневальд,  
июль 1927 г.

*Автор*

## О Г Л А В Л Е Н И Е

	<i>Стр.</i>
Предисловие ко второму изданию . . . . .	5
Предисловие к первому изданию . . . . .	—
Введение в теоретическую оптику . . . . .	7

### *Часть первая*

#### Оптика изотропных однородных сред

Глава I. Отражение и преломление . . . . .	9
Глава II. Спектральное разложение, интерференция, поляризация . . . . .	31
Глава III. Геометрическая оптика . . . . .	50
Глава IV. Дифракция . . . . .	63

### *Часть вторая*

#### Кристаллооптика

Глава I. Плоские волны . . . . .	95
Глава II. Волиновые поверхности . . . . .	108
Глава III. Перпендикулярное падение . . . . .	114
Глава IV. Наклонное падение . . . . .	119

### *Часть третья*

#### Дисперсия изотропных сред

Глава I. Основные уравнения . . . . .	132
Глава II. Плоские волны . . . . .	137
Глава III. Геометрическая оптика неоднородных сред. Связь с квантовой механикой . . . . .	150
Указатель определений и важнейших положений . . . . .	161

---

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ОПТИКУ

§ 1. Физическая оптика образует специальный отдел электродинамики, охватывающий быстро меняющиеся поля. Особенное ее значение состоит в том, что она обнимает ту область физики, где возможны наиболее тонкие измерения и вследствие этого возможно наиболее глубокое проникновение в подробности физических процессов. Вместе с тем в оптике яснее, чем в других областях физики, проявляется своеобразная тенденция научного исследования — оставить первоначальную исходную точку — чувственные ощущения — и построить наши физические понятия на более объективных основаниях. В то время как важнейшие оптические понятия — понятия света и цвета — развились первоначально из впечатлений нашего глаза, в современной физике понятия света и цвета не имеют ничего общего с непосредственными ощущениями, но относятся к электромагнитным волнам и периодам колебаний; это развитие вполне оправдывается принесенными им богатыми плодами.

§ 2. В качестве исходной точки удобнее всего взять общую систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в покоящихся телах и притом в той специальной форме, которую они имеют для прозрачных немагнитных тел. Так как прозрачность тела связана с отсутствием превращения электромагнитной энергии в теплоту, то все прозрачные тела являются электрическими изоляторами, в которых вектор  $\mathbf{J}$  электрического тока (проводимости) везде и всегда равен нулю. Вместе с проводниками исключаются из рассмотрения и все сильно намагничиваемые вещества, а для остальных можно без заметной ошибки отождествить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  с напряжением магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Тогда уравнения поля согласно §, (3) принимают простую форму:

$$\mathbf{D} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \quad (1)$$

вместе с добавочными уравнениями §, (49) и (51):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  обозначает напряжение электрического поля,  $\mathbf{H}$  — напряжение магнитного поля,  $\mathbf{D}$  — электрическую индукцию,  $c$  — критическую скорость.

Эта система уравнений охватывает оптику всех прозрачных веществ. Входящие в них переменные играют лишь роль вспо-

могательных величин, так как они не могут быть непосредственно измерены. Величиной, к определению которой сводятся все оптические измерения и вычисление которой является, в сущности говоря, задачей каждой оптической теории, служит вектор потока электромагнитной энергии  $\mathcal{S}$ , (26), равный:

$$\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (3)$$

который обуславливает интенсивность излучения по величине и направлению.

Для дальнейшего исследования этих уравнений надо принять во внимание связь между вектором электрического напряжения  $\mathbf{E}$  и вектором индукции  $\mathbf{D}$ ; эта связь и определяет характер оптического поведения определенного вещества. В соответствии с видом этой связи мы разобьем весь подлежащий рассмотрению материал на три части и рассмотрим последовательно оптику изотропных однородных сред, кристаллооптику и оптику неоднородных сред вместе с явлениями дисперсии и абсорбции.

---



**ОПТИКА ИЗОТРОПНЫХ ОДНОРОДНЫХ СРЕД**

ГЛАВА I

**ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ**

§ 3. Для изотропного однородного вещества связь между электрической индукцией и напряжением электрического поля выражается уравнением 3, (28):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  обозначает диэлектрическую постоянную.

Тогда уравнения поля (1) переходят в

$$\varepsilon \dot{\mathbf{E}} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \dot{\mathbf{H}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (5)$$

Мы рассмотрим в качестве простейшего частного решения этой системы дифференциальных уравнений случай плоской волны, которая распространяется вдоль одной из координатных осей, например по положительному направлению оси  $x$ . Тогда все слагающие поля независимы от  $y$  и  $z$ , и так как в оптике статические поля не принимаются во внимание, то из (5) и (2) получается:

$$E_x = 0, \quad H_x = 0,$$

в то время как для других компонент имеют место дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial H_z}{\partial x}, & \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} &= c \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= c \frac{\partial E_z}{\partial x}, & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -c \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Таким образом из четырех компонент поля каждые две связаны попарно, именно  $E_y$  с  $H_z$  и  $E_z$  с  $H_y$ , и для каждой пары компонент имеет место то же самое дифференциальное уравнение (6):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Если мы обозначим

$$\frac{c^2}{\varepsilon} = q^2, \quad (7)$$

то из выведенного в 2, § 35 общего интеграла дифференциального уравнения (6) получим наиболее общее выражение для плоской волны, распространяющейся в однородной среде по положительному направлению оси  $x$  в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & H_x &= 0, \\ E_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} f\left(t - \frac{x}{q}\right), & H_y &= -g\left(t - \frac{x}{q}\right), \\ E_z &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} g\left(t - \frac{x}{q}\right), & H_z &= f\left(t - \frac{x}{q}\right), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные однозначные функции одного переменного.

Как видно, напряжения обоих полей перпендикулярны к направлению распространения; волна называется поэтому „поперечной“. Она распадается на две в общем случае независимые друг от друга составляющие, направленные вдоль координатных осей; у каждой из них электрическое и магнитное напряжения пропорциональны друг другу.

Знаки определяются согласно следующему правилу: направления напряжения электрического поля, напряжения магнитного поля и направление распространения образуют правую систему координат.

§ 4. Если мы теперь поставим вопрос о том, что можно измерить в этой электромагнитной волне и какие ее свойства могут быть объективно установлены, то окажется, что непосредственно измеряемой величиной является вектор потока энергии (3), который в рассматриваемом случае сводится к  $x$ -компоненте:

$$S_x = \frac{c}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y) = \frac{q}{4\pi} (f^2 + g^2).$$

Таким образом направление потока энергии в однородной среде совпадает с направлением нормали к волне  $x$ , и количество энергии, протекшей за время  $dt$  через поверхность  $F$ , лежащую в плоскости волны, равно:

$$S_x \cdot F \cdot dt = \frac{q}{4\pi} (f^2 + g^2) \cdot F dt. \quad (9)$$

Но так как заметные действия излучения происходят всегда за конечный промежуток времени, то измерения дают не сам вектор потока энергии, но его интеграл по времени или его среднее значение, взятое за достаточно большой промежуток времени  $T$ . Если для сокращения обозначим средние значения через:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2 dt = \overline{f^2}, \quad \frac{1}{T} \int_0^T g^2 dt = \overline{g^2}, \quad (10)$$

то лучистая энергия, проходящая в единицу времени через поверхность  $F$ , равна:

$$\frac{q}{4\pi}(\bar{f}^2 + \bar{g}^2) \cdot F; \quad (11)$$

эта энергия может быть обнаружена каждым прибором, воспринимающим лучистую энергию целиком и обладающим необходимой чувствительностью (болометр, радиометр, термостолбик).

После того как измерен общий поток энергии волны, возникает задача о ее дальнейшем анализе; задача эта двойная: во-первых, необходимо отделить обе слагаемые  $\bar{f}^2$  и  $\bar{g}^2$  друг от друга, во-вторых, перейти от средних значений по времени к самим функциям, т. е. исследовать вид волновых функций  $f$  и  $g$ . Для этих целей необходимы особые оптические установки, теорию и способ действия которых мы разберем в дальнейшем. Заранее о виде этих функций ничего нельзя сказать. В частности, нет никаких оснований приписывать функциям  $f$  и  $g$  какую-либо периодичность. В действительности в оптике вообще не бывает волн с резко определенным в математическом смысле периодом, как это, например, имеет место в акустике. Поэтому мы пока не будем рассматривать вопрос о форме волны; мы вернемся к нему лишь тогда, когда это будет необходимо. Только одно положение мы можем принять заранее, а именно, что средние значения  $f$  и  $g$  равны нулю, т. е.:

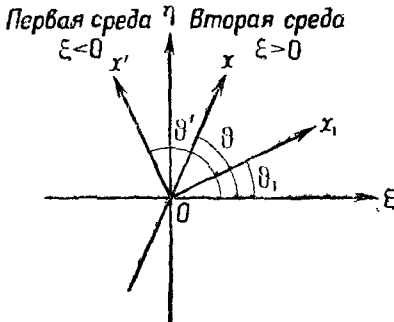
$$\bar{f} = 0; \quad \bar{g} = 0. \quad (12)$$

Если бы волновая функция имела среднее значение, отличное от нуля, мы могли бы данную волну заменить другой волной, подчиняющейся уравнениям (12), с наложенным на нее статическим полем, равным этому среднему значению. Это поле может быть обнаружено вследствие его ponderomotorного влияния на заряженное пробное тело (электрон) и таким образом отделено от собственно оптической волны.

§ 5. Само собой понятно, что плоская волна с безграничным сечением не может быть осуществлена в природе. Но все же можно воспроизвести волны, которые по своим свойствам приближаются к плоским волнам. Представим себе точечный источник света, который начинает светиться в определенный момент времени, например при  $t = 0$ . Так как предполагается, что окружающая среда однородна и изотропна, то свет будет распространяться равномерно во все стороны. Ту поверхность, до которой свет распространился за известный промежуток времени, называют волновой поверхностью. Каждому моменту времени соответствует, таким образом, определенная волновая поверхность и все окружающее пространство заполнено системой волновых поверхностей, следующих одна за другой и охватывающих одна другую. В рассматриваемом случае волновые поверхности, очевидно, представляют собой сферы, концентрически охватывающие источник света. Небольшой участок достаточно большой сфери-

ческой поверхности может приниматься с достаточным приближением за плоскую волну. Нормалью к последней служит соответствующий радиус сферы и то же направление имеет и вектор луча  $S$ .

§ 6. Исследуем теперь явления, происходящие, когда плоская волна (8) падает на плоскую границу двух изотропных сред. Перпендикуляр к этой граничной плоскости возьмем за ось  $\xi$  новой координатной системы; направим эту ось внутрь второй среды, а точка  $O$  пусть будет общим началом координат систем  $x\eta z$  и  $\xi\eta\zeta$ . Тогда мы можем, не уменьшая общности рассматриваемого случая, расположить как ось  $y$ , так и ось  $\eta$  в так называемой плоскости падения, проходящей через  $x$  и  $\xi$ , и взять эту плоскость в качестве плоскости рисунка (черт. 1). Все точки, для которых  $\xi < 0$  (слева), находятся в первой среде — в той, откуда идет волна (8); все точки, для которых  $\xi > 0$  (справа) — во второй среде, все точки, для которых  $\xi = 0$  (ось  $\eta$ ), находятся в плоскости, служащей границей двух сред. Ось  $x$  совпадает с направлением луча, приходящим слева из первой среды; она образует с перпендикуляром,



Черт. 1.

лежащим в плоскости падения, угол падения  $\vartheta$ . Ось  $y$  представляет собой след плоскости падающей волны, перпендикулярной к плоскости чертежа; эта ось образует с плоскостью границы также угол  $\vartheta$ , но на чертеже она не нанесена, чтобы не увеличивать числа начерченных направлений. Ось  $z$  совпадает с осью  $\zeta$  и направлена от плоскости чертежа перпендикулярно к нему.

При решении поставленной задачи допустим, что каждая система волн, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям внутри обеих сред и граничным условиям, представляет собою явление, возможное в природе.

Чтобы удовлетворить дифференциальным уравнениям во второй среде, представим себе в ней плоскую волну, выражающуюся уравнениями (8), но с направлением луча по  $x_1$  (черт. 1), наклоненным к оси  $\xi$  под углом  $\vartheta_1$  и с поверхностью волны  $y_1 z_1$ , причем  $z_1$  опять совпадает с  $z$  и  $\zeta$ . Тогда для шести компонент  $E_{x_1}$ ,  $E_{y_1}$ ,  $E_{z_1}$ ,  $H_{x_1}$ ,  $H_{y_1}$ ,  $H_{z_1}$  имеют место уравнения (8), но в правой части этих уравнений должна стоять координата  $x_1$  вместо  $x$ , вместо волновых функций  $f$  и  $g$  должны стоять волновые функции  $f_1$  и  $g_1$ , а вместо констант  $\epsilon$  и  $q$  — диэлектрическая постоянная  $\epsilon_1$ , и скорость распространения во второй среде (7):

$$q_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} = q \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_1}}. \quad (13)$$

Но этого недостаточно. Именно граничные условия требуют согласно 3, § 6, чтобы для  $\xi = 0$  значения тангенциальных компонент напряжения поля, т. е. величины  $E_\eta, E_\zeta, H_\eta, H_\zeta$ , в обеих средах соответственно совпадали. Это дает четыре уравнения между волновыми функциями, для удовлетворения которых в нашем распоряжении находятся только функции  $f_1$  и  $g_1$ , так как функции  $f$  и  $g$  заданы. Предполагаемое решение нужно поэтому взять в более общем виде. Для этого допускаем, что в первой среде существует еще одна волна, которая естественно опять определяется уравнениями (8), но с измененным направлением луча  $x'$ , образующим с осью  $\xi$  угол  $\vartheta'$  (черт. 1) и с плоскостью волны  $y'z'$ , причем опять  $z' = z$ . Тогда шесть компонент напряжения поля,  $E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}, H_{x'}, H_{y'}, H_{z'}$ , заданы уравнениями (8), если в них вставить волновые функции  $f'$  и  $g'$  и вместо  $x$  координату  $x'$ ; константы  $\varepsilon$  и  $q$  оставляем те же.

Теперь мы получили решение (как для точек внутри первой, так и внутри второй среды) в достаточно общем виде и можем приступить к составлению граничных условий. В первой среде имеется электромагнитное поле, образованное наложением обеих волн, принятых нами плоскими. Принимая во внимание, что компоненты  $E_x, H_x, E_{x'}, H_{x'}$  равны нулю, получаем для интегрирующих нас остальных компонент в первой среде ( $\xi < 0$ ):

$$\begin{aligned} E_\eta &= E_y \cos \vartheta + E_{y'} \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot f + \frac{\cos \vartheta'}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot f', \\ E_\zeta &= E_z + E_{z'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot g + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot g', \\ H_\eta &= H_y \cos \vartheta + H_{y'} \cos \vartheta' = -\cos \vartheta \cdot g - \cos \vartheta' \cdot g', \\ H_\zeta &= H_z + H_{z'} = f + f'. \end{aligned}$$

С другой стороны, принимая во внимание, что компоненты  $E_{x_1}$  и  $H_{x_1}$  равны нулю, имеем для второй среды ( $\xi > 0$ ):

$$\begin{aligned} E_\eta &= E_{y_1} \cos \vartheta_1 = \frac{\cos \vartheta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} f_1, \\ E_\zeta &= E_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} g_1, \\ H_\eta &= H_{y_1} \cos \vartheta_1 = -\cos \vartheta_1 \cdot g_1, \\ H_\zeta &= H_{z_1} = f_1. \end{aligned}$$

Для граничной плоскости  $\xi = 0$  имеет место:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \cdot f + \cos \vartheta' \cdot f' &= \frac{\cos \vartheta_1}{n} \cdot f_1, \\ g + g' &= \frac{g_1}{n}, \\ \cos \vartheta \cdot g + \cos \vartheta' \cdot g' &= \cos \vartheta_1 \cdot g_1, \\ f + f' &= f_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где для сокращения мы обозначили:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} = \frac{q}{q_1} = n.$$

В этих четырех уравнениях содержится вся теория отражения и преломления. Они, как это видно, распадаются на две группы, из которых одна содержит только  $f$ -волны, другая только  $g$ -волны. Таким образом эти группы волн ведут себя независимо друг от друга, и каждая из них подчиняется своим собственным законам.

§ 7. Прежде всего, пользуясь последними четырьмя уравнениями, выразим неизвестные волновые функции  $f'$ ,  $f_1$ ,  $g'$ ,  $g_1$  через заданные волновые функции  $f$  и  $g$ . Получаем:

$$f' = \frac{n \cos \vartheta - \cos \vartheta_1}{\cos \vartheta_1 - n \cos \vartheta'} \cdot f = \mu \cdot f, \quad (15)$$

$$f_1 = \frac{n (\cos \vartheta - \cos \vartheta')}{\cos \vartheta_1 - n \cos \vartheta'} \cdot f = \mu_1 \cdot f, \quad (16)$$

$$g' = \frac{\cos \vartheta - n \cos \vartheta_1}{n \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta'} \cdot g = \sigma \cdot g, \quad (17)$$

$$g_1 = \frac{n (\cos \vartheta - \cos \vartheta')}{n \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta'} \cdot g = \sigma_1 \cdot g. \quad (18)$$

Аргументами этих функций служат:

для  $f$  и  $g$ :

$$t - \frac{x}{q},$$

для  $f_1$  и  $g_1$ :

$$t - \frac{x_1}{q_1},$$

для  $f'$  и  $g'$ :

$$t - \frac{x'}{q}.$$

При этом везде  $\xi = 0$  и, следовательно, при преобразовании к координатам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ :

$$x = \eta \sin \vartheta, \quad x_1 = \eta \sin \vartheta_1, \quad x' = \eta \sin \vartheta',$$

вследствие чего аргументы имеют следующие значения:

$$t - \frac{\eta \sin \vartheta}{q}, \quad t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1}, \quad t - \frac{\eta \sin \vartheta'}{q}.$$

Так как уравнения (15)—(18) должны соблюдаться для любого времени  $t$  и для любых точек  $\eta$  граничной плоскости, то необходимо, чтобы все три аргумента были равны между собой. В этом можно убедиться и непосредственно, если взять от одного из функциональных уравнений частную производную

по  $t$ , потом частную производную по  $\eta$  и полученные уравнения разделить одно на другое. Следовательно, необходимо, чтобы

$$\frac{\sin \vartheta}{q} = \frac{\sin \vartheta_1}{q_1} = \frac{\sin \vartheta'}{q}. \quad (19)$$

Отсюда получаем закон преломления:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_1} = \frac{q}{q_1} = n = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon}} \quad (20)$$

и закон отражения:

$$\vartheta' = \pi - \vartheta. \quad (21)$$

Если углом отражения назвать угол между отраженным лучом и обратным направлением перпендикуляра к граничной плоскости, то угол отражения равен углу падения.

§ 8. Закон преломления Снелиуса (20), утверждающий, что отношение синуса угла падения  $\vartheta$  к синусу угла преломления  $\vartheta_1$  равно показателю преломления второй среды по отношению к первой, или отношению скоростей распространения  $q$  и  $q_1$ , подтверждается бесчисленными измерениями. Обыкновенно показатель преломления какого-либо вещества относят к воздуху (являющемуся „первой“ средой). Так, показатель преломления воды равен 1,3, стекла — 1,5. Относительный показатель преломления одного вещества по отношению к другому получим, разделив друг на друга их показатели преломления по отношению к воздуху. Если вещества поменять местами, то показатель преломления принимает обратную величину. Показатель преломления по отношению к вакууму, так называемый „абсолютный“ показатель преломления, равен произведению показателя преломления относительно воздуха и абсолютного показателя преломления воздуха 1,0003. Очевидно, в большинстве случаев он мало отличается от обыкновенного показателя преломления.

Когда угол падения  $\vartheta$  меняется от 0 (нормальное падение) до  $\frac{\pi}{2}$  (скользящее падение), то угол преломления  $\vartheta_1$  растет от 0 до  $\arcsin \frac{1}{n}$  (предельный угол). При этом необходимо отметить следующий важный момент. Предельный угол имеет действительное значение лишь тогда, когда  $n > 1$ , или, как говорят, когда второе вещество оптически плотнее, чем первое. В этом случае угол преломления  $\vartheta_1$  всегда меньше угла падения  $\vartheta$ , т. е. луч при преломлении приближается к перпендикуляру; предельный угол — это наибольшее значение, которого достигает угол преломления. Если же  $n < 1$ , то будет, если оба вещества поменять местами, то меняются местами и углы падения и преломления; в этом случае угол преломления больше угла падения и достигает значения  $\frac{\pi}{2}$ , когда угол падения достигает величины предельного угла; и если угол падения увеличивать еще дальше, то (20) дает мнимое значение для угла преломления и получен-

ное решение проблемы преломления теряет физический смысл. Но так как ничто не мешает дать углу падения любую величину от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , то здесь возникает особый вопрос, обсуждение которого мы, однако, отложим до дальнейшего (§ 12), а пока ограничимся рассмотрением тех случаев, для которых закон преломления дает действительную величину угла преломления  $\vartheta_1$ .

§ 9. Электромагнитная теория преломления света не только указывает на независимость показателя преломления от величины угла падения, но также дает величину показателя преломления; согласно (20) последний равен квадратному корню из отношения диэлектрических постоянных; или для абсолютного показателя преломления

$$n = \sqrt{\epsilon_1}. \quad (22)$$

Однако, сравнивая это отношение с фактами, получаем в общем резкое противоречие. Так, для воды имеем  $n = 1,3$ ,  $\epsilon_1 = 80$ . Но, кроме этого, (22) не может быть всегда справедливо хотя бы потому, что диэлектрическая постоянная по самому своему определению независима от формы волновых функций  $f$  и  $g$ , в то время как показатель преломления  $n$  для всех веществ более или менее сильно зависит от формы световой волны, т. е. от цвета. Это явление (дисперсия) долгое время представляло серьезное препятствие признанию максвелловской теории. Если желательно учесть ее соответствующим образом в рамках изложенной здесь теории, то остается только принять, что для быстрых оптических колебаний допущение (4) в общем случае не соответствует действительности. Это допущение пропорциональности электрической индукции напряжению электрического поля было сделано в начале настоящей главы для оптических явлений в однородных изотропных средах. Чтобы получить удовлетворительную теорию дисперсии, мы должны будем заменить это допущение более общим; это будет сделано в третьей части этой книги. Обобщение это будет исходить из того, что представление об абсолютной непрерывности и однородности материи не годно для объяснения оптических явлений во всех деталях, и поэтому теория должна быть изменена так, чтобы были учтены характерные особенности структуры среды.

С этой последней точки зрения соотношению (22) следует приписать смысл предельного закона, выполняющегося тем лучше, чем меньше заметна дисперсия. Это предположение, действительно, подтверждается более подробными исследованиями. Так, в газах дисперсия меньше, чем в других веществах, и для них формула (22) была хорошо подтверждена (впервые измерениями Л. Больцмана). При этом особенно замечательно то, что у газов зависимость от давления показателя преломления, с одной стороны, и диэлектрической постоянной — с другой, идет вполне параллельно и в согласии с уравнением (22). Поэтому можно с полным правом говорить об этом соотношении как о существ-



венном подтверждении электромагнитной теории в пределах определенной области ее применения.

§ 9а. Кроме направлений отраженного и преломленного луча теория дает также и форму отраженной и преломленной волны. Действительно, из теории следует, что волновые функции последних пропорциональны соответствующим волновым функциям падающей волны. Если в формулах (15) — (18) заменить показатель преломления  $n$  согласно (20) при помощи углов  $\vartheta$  и  $\vartheta_1$ , а угол  $\vartheta'$  через  $\pi - \vartheta$ , то коэффициенты пропорциональности принимают следующие значения: для отраженной волны ( $f'$ ,  $g'$ ):

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta_1)}{\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta_1)}, \quad \sigma = -\frac{\sin(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}. \quad (23)$$

для преломленной волны ( $f_1$ ,  $g_1$ ):

$$\mu_1 = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin(\vartheta + \vartheta_1) \cos(\vartheta - \vartheta_1)}, \quad \sigma_1 = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin(\vartheta + \vartheta_1)}. \quad (24)$$

Согласно этим так называемым френелевским формулам имеется значительное различие между обеими волновыми функциями  $f$  и  $g$ , которое соответствует тому физическому обстоятельству, что согласно (8) у  $f$ -волны напряжение электрического поля направлено в плоскости падения, а у  $g$ -волны направлено перпендикулярно к плоскости падения. Первой соответствуют коэффициенты  $\mu$ , второй —  $\sigma$ .

Для проверки теории мы должны обратиться к измерению энергии лучей. Рассмотрим сначала отраженную волну. Из уравнения (11) получается для отношения интенсивности излучения отраженной волны к интенсивности излучения падающей волны или для так называемого „коэффициента отражения“ [при обозначениях (15) и (17)]:

$$\frac{\overline{f'^2} + \overline{g'^2}}{\overline{f^2} + \overline{g^2}} = \rho = \frac{\mu^2 \overline{f^2} + \sigma^2 \overline{g^2}}{\overline{f^2} + \overline{g^2}}.$$

Очевидно, значение коэффициента отражения  $\rho$  лежит между значениями  $\mu^2$  и  $\sigma^2$ , которые соответствуют предельным случаям, когда одна из волн  $f$  или  $g$  исчезающе мала. В общем случае из измерений  $\rho$  можно найти отношение интенсивностей излучения для волн  $f$  и  $g$ :

$$\overline{f^2} : \overline{g^2} = \frac{\sigma^2 - \rho}{\rho - \mu^2}. \quad (25)$$

Это отношение можно экспериментально проверить, измеряя коэффициент отражения  $\rho$  для определенной падающей волны ( $f$ ,  $g$ ) при различных углах падения  $\vartheta$ , вводя вычисленные согласно (23) значения  $\mu$  и  $\sigma$  и исследуя, получается ли при всех углах падения одно и то же отношение интенсивностей (25). В действительности так всегда и оказывалось, если только по-

верхность применяемого тела была достаточно гладкой и если были достаточно хорошо устранены химические загрязнения поверхности, к которым относятся и загрязнения, возникающие при действии полирующих веществ.

Когда свет приходит непосредственно от тела, нагретого до каления, его называют „естественным“; в этом случае измерения дают, как и следовало ожидать:

$$\bar{f}^2 = \bar{g}^2,$$

и поэтому

$$\rho = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2}. \quad (26)$$

Зависимость коэффициента отражения  $\rho$  от угла падения  $\vartheta$  дана уравнением (23). Для перпендикулярного падения, когда  $\vartheta$  и  $\vartheta_1$  бесконечно малы, получаем:

$$\rho = \left( \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta + \vartheta_1} \right)^2 = \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2. \quad (27)$$

Отражение тем сильнее, чем больше показатель преломления отличается от единицы, т. е. чем оптически разнороднее обе среды. Для скользящего падения  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  и соответственно для предельного угла  $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$  коэффициент отражения достигает своей наибольшей величины, равной единице; в этих случаях вообще никакое излучение не входит во вторую среду.

Но выводы теории и возможности ее применения идут еще дальше. Именно оказывается, что если падающий свет был естественным, то отраженный свет не является естественным, но согласно (15) и (17):

$$\bar{f}'^2 : \bar{g}'^2 = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\cos^2(\vartheta + \vartheta_1)}{\cos^2(\vartheta - \vartheta_1)}. \quad (28)$$

Только для перпендикулярного и скользящего падения (и соответственно для предельного угла) это отношение равно единице и отраженный свет является естественным; это вполне понятно, так как в первом случае плоскость падения неопределенная и поэтому между волнами  $f'$  и  $g'$  нет никакого физического различия, а во втором случае отражается полностью весь свет. Но в общем случае обе компоненты обладают различной интенсивностью, т. е. отраженное излучение „поляризовано“ и интенсивность  $f$ -волны, электрический вектор которой лежит в плоскости падения, меньше, чем интенсивность  $g$ -волны. При этом в случае, когда

$$\vartheta + \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ или } \operatorname{tg} \vartheta = n, \quad (29)$$

т. е. когда отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу, числитель (28) равен нулю,  $f$ -волна в отраженном свете

вообще отсутствует и остается лишь одна  $g$ -волна. Излучение называется тогда полностью поляризованным и притом поляризованным прямолинейно (или линейно), потому что в этом случае электрическое и магнитное напряжения волны имеют вполне определенные направления. Определяемый уравнием (29) угол падения называется „углом поляризации“, плоскость падения — „плоскостью поляризации“, а отражающее тело (зеркало) — „поляризатором“. Если назвать „плоскостью колебаний“ луча плоскость, проходящую через направление луча и направление напряжения электрического поля, то в свете, отраженном при угле поляризации (29), плоскость колебаний постоянна и перпендикулярна к плоскости падения (закон Брюстера). Это положение может быть проверено непосредственно на опыте тем, что линейно поляризованный луч заставляют отражаться от второго тела из того же вещества и опять при угле поляризации, но так, чтобы при втором отражении падающий луч играл роль  $f$ -волны, т. е. чтобы его плоскость колебаний совпала с его новой плоскостью падения. Это будет тогда, когда плоскость падения при втором отражении перпендикулярна к плоскости падения при первом отражении. В этом случае свет вообще не отражается (опыт Малюса с зеркалами). Второе отражающее тело действует в этом случае, как „анализатор“.

Отражение при угле поляризации дает возможность измерить в заданном излучении отдельно волновые функции  $f$  и  $g$ .

Именно, приняв во внимание, что  $f' = 0$ , получим:

$$\bar{g}'^2 = \sigma^2 \bar{g}^2 = \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 \bar{g}^2, \quad (30)$$

это — интенсивность отраженного света; ее можно измерить и отсюда определить интенсивность  $g$ -волны; таким же образом отражением в плоскости падения, повернутой на  $\frac{\pi}{2}$  (ось поворота — падающий луч), можно определить интенсивность  $f$ -волны.

При отражении под произвольным углом падения  $\vartheta$  отраженный луч лишь частично поляризован. Интенсивности обеих волновых компонент  $\bar{f}'^2$  и  $\bar{g}'^2$  получаются путем умножения соответствующих компонент  $\bar{f}^2$  и  $\bar{g}^2$  падающей волны на соответствующие коэффициенты отражения. Для света, колебания которого происходят в плоскости падения ( $f$ -волна), коэффициент отражения равен:

$$e_{\parallel} = \mu^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta - \vartheta_1)}{\operatorname{tg}^2(\vartheta + \vartheta_1)}; \quad (31)$$

для света, колебания которого перпендикулярны к плоскости падения ( $g$ -волна):

$$e_{\perp} = \sigma^2 = \frac{\sin^2(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1)}. \quad (32)$$

§ 10. Для излучения, прошедшего через граничную поверхность двух сред, можно получить соотношения, аналогичные полученным для отраженных лучей. Их можно свести к уже найденным, если вспомнить, что на основании закона сохранения энергии прошедшая энергия равна разности между энергией падающего и отраженного света. Это имеет место потому, что граничные условия уже обеспечивают отсутствие потерь лучистой энергии (ср. § 3, § 6). Если назвать коэффициентом пропускания ту часть падающей лучистой энергии, которая проходит через границу во вторую среду, то для света, колебания которого происходят в плоскости падения ( $f$ -волна), он равен:

$$1 - e_{\parallel} = 1 - \mu^2 = \frac{\sin 2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1) \cos^2(\vartheta - \vartheta_1)}, \quad (33)$$

а для света, колебания которого перпендикулярны плоскости падения ( $g$ -волна):

$$1 - e_{\perp} = 1 - \sigma^2 = \frac{\sin 2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta_1}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_1)}. \quad (34)$$

Само собой понятно, что коэффициент пропускания можно вычислить и непосредственно из отношения интенсивности волны, проникшей во вторую среду  $f_1$ , или  $g_1$  к интенсивности падающей волны  $f$  или  $g$ . Только при этом соответствующие коэффициенты пропускания нельзя считать, исходя из (16) и (18), равными  $\mu_1^2$  или  $\sigma_1^2$ , но надо вернуться к выражению (11) для энергии, прошедшей в единицу времени через участок  $F$ , лежащий в плоскости волны, так как при переходе во вторую среду меняется как скорость распространения  $q$ , так и величина поверхности  $F$ , равная поперечному сечению цилиндра, образованного лучами, причём легко сообразить из простых геометрических рассуждений, что

$$\frac{F}{\cos \vartheta} = \frac{F}{\cos \vartheta_1}. \quad (35)$$

В самом деле, это отношение равно величине площадки, на которую опирается в плоскости границы как цилиндр падающих, так и цилиндр преломленных лучей. Отсюда получается отношение прошедшей лучистой энергии к падающей согласно (11), (20), (35) и (16) для  $f$ -волны:

$$\frac{q_1 \overline{f_1^2} F_1}{q \overline{f^2} F} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta} \cdot \mu_1^2 \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta}$$

и соответственно для  $g$ -волны:

$$\frac{q_1 \overline{g_1^2} F_1}{q \overline{g^2} F} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta} \cdot \sigma_1^2 \cdot \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta}.$$

Эти выражения совпадают на основании (24) с (33) и (34). Отношение обеих компонент интенсивности излучения в прошедшем свете равно:

$$\frac{\overline{f_1^2}}{g_1^2} = \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\cos^2(\vartheta - \vartheta_1)}. \quad (36)$$

Так как это выражение не может равняться ни нулю ни бесконечности, то при падающем естественном свете прошедшее излучение никогда не может быть полностью поляризовано, оно всегда поляризовано только частично, и притом компонента с колебаниями в плоскости падения является более сильной, в противоположность тому, что имеется в отраженном свете.

Наконец, нужно указать еще на одно соотношение, которое является выражением одного общего закона оптики. Как уравнение (20) для закона преломления, так и значения коэффициентов отражения и пропускания остаются неизменными, когда обе среды, а вместе с ними и углы  $\vartheta$  и  $\vartheta_1$ , меняют местами, т. е. когда волну заставляют падать в обратном направлении из второй среды на границу первой среды. Другими словами, свет не только может идти в обратном направлении, но при этом он разделяется в прежнем соотношении на отраженное и прошедшее излучение. Граница двух сред одинаково хорошо отражает в обе стороны и одинаково хорошо пропускает в обе стороны; этот закон является применением закона обратимости луча, высказанного впервые Гельмгольцем, согласно которому ослабление, претерпеваемое определенным лучом на своем пути через различные среды в результате отражения, преломления, рассеяния, поглощения, не зависит от направления, в котором пройден путь.

§ 11. После того как мы убедились, что обе взаимно перпендикулярные компоненты  $f$  и  $g$  заданной (8) плоской волны можно измерить отдельно, и узнали, как это сделать, встает дальнейший вопрос, определяется ли значением обеих интенсивностей  $\overline{f^2}$  и  $\overline{g^2}$  также интенсивность какой-либо компоненты света, колебание которой направлено по какому-нибудь направлению, перпендикулярному к направлению распространения, подобно тому как заданными двумя взаимно перпендикулярными компонентами какой-либо силы задается ее компонента по любому направлению. Мы увидим, что это не так, и выясним, какое здесь есть отличие.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, мы вновь рассмотрим общий случай (8) плоской волны, но в целях более удобных обозначений возьмем в качестве направления распространения ось  $z$  вместо оси  $x$ , так что плоскость  $xu$  будет плоскостью волн.  $f$ -волна имеет колебания вдоль оси  $x$ ,  $g$ -волна — вдоль оси  $u$ . Если теперь заменить оси  $x$  и  $u$  двумя другими осями  $x'$  и  $u'$  (взаимно перпендикулярными и лежащими в той же плоскости, перпендикулярной направлению), образующими угол  $\varphi$

с прежними осями, то относящиеся к ним волновые функции  $f'$  и  $g'$  согласно (8) преобразуются как компоненты напряжений поля:

$$f' = f \cos \varphi + g \sin \varphi, \quad (37)$$

$$g' = -f \sin \varphi + g \cos \varphi, \quad (38)$$

а соответствующие интенсивности преобразуются так:

$$\overline{f'^2} = \overline{f^2} \cos^2 \varphi + 2\overline{fg} \sin \varphi \cos \varphi + \overline{g^2} \sin^2 \varphi,$$

$$\overline{g'^2} = \overline{f^2} \sin^2 \varphi - 2\overline{fg} \sin \varphi \cos \varphi + \overline{g^2} \cos^2 \varphi.$$

Сложением получаем:

$$\overline{f'^2} + \overline{g'^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2},$$

т. е. если сложим интенсивности двух взаимно перпендикулярных компонент, то всегда получим интенсивность всей волны, что ясно уже из того, что выбор начальной системы координат  $xu$  вполне произволен. Но интенсивность какой-нибудь компоненты, например такой, направление колебаний которой образует угол  $\varphi$  с осью  $x$ , зависит не только от интенсивностей  $\overline{g^2}$  и  $\overline{f^2}$ , но и от третьей величины  $\overline{fg}$ . Если мы обозначим для сокращения

$$\overline{f^2} = A, \quad \overline{g^2} = B, \quad \overline{fg} = C, \quad (39)$$

то интенсивность компоненты, колебания которой происходят в азимуте  $\varphi$ , равна:

$$\overline{f'^2} = J_\varphi = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi. \quad (40)$$

Поэтому интенсивность излучения представляет собой не вектор, но тензор второго ранга (2, § 13, § 20) и притом плоский тензор, имеющий только три компоненты и характеризующийся тем, что величина (40) не зависит от выбора координат. Компонента  $C$  может принимать любые значения между  $-\sqrt{AB}$  и  $+\sqrt{AB}$ , но не может превосходить эти пределы, так как  $J$  для всех значений  $\varphi$  имеет положительную величину.

Для предельного значения  $C = \pm \sqrt{AB}$   $J$  согласно (40) превращается в полный квадрат:

$$J = \left( \sqrt{A} \cos \varphi \pm \sqrt{B} \sin \varphi \right)^2. \quad (41)$$

В этом случае  $J = \overline{f'^2}$  обращается в нуль в азимуте  $\varphi$ , для которого  $\operatorname{tg} \varphi = \mp \sqrt{\frac{A}{B}}$  и все излучение сводится к одной компоненте  $\overline{g'^2}$ , колеблющейся в перпендикулярном  $\left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$  азимуте. Свет в этом случае поляризован линейно.

Из  $\overline{f'^2} = 0$  следует  $f' = 0$  и согласно (37):

$$\frac{f}{g} = -\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad (42)$$

т. е. отношение волновых функций  $f$  и  $g$  постоянно и не зависит от их аргумента. В таком случае, когда одна волновая функция вполне определяется второй, обе соответствующие компоненты излучения называют вполне когерентными. Линейная поляризация обуславливает поэтому полную когерентность обеих компонент, на которые может быть разложен поляризованный луч. Из соотношений (15)–(18) непосредственно вытекает, что линейно поляризованный свет после преломления и отражения будет тоже линейно поляризованным, так как тогда отношения  $f_1 : g_1$  и  $f' : g'$  также постоянны.

В общем случае свет лишь частично поляризован, так что обе компоненты частично некогерентны. Противоположный крайний случай представляет собой естественный свет, для него интенсивность излучения  $J_\varphi$  совершенно не зависит от азимута колебаний. Для этого согласно (40) требуется, чтобы не только имело место  $A = B$ , но также, чтобы  $C = 0$ .

Легко убедиться, что последнее условие действительно выполнено, если обе компоненты колебаний  $f$  и  $g$  совершенно некогерентны, т. е. совершенно независимы друг от друга. Это значит, что определенному значению  $f$  соответствует не одно определенное, а бесконечное множество значений  $g$ , и что средняя величина всех этих значений  $g$  независима от взятого значения  $f$ . Поэтому математическим выражением полной некогерентности  $f$  и  $g$  служит:

$$\overline{fg} = \overline{f} \cdot \overline{g} \quad (43)$$

и согласно (39) и (12):

$$C = \overline{fg} = 0. \quad (44)$$

Так как функции  $f$  и  $g$  однозначно зависят от их общего аргумента, то для некогерентности  $f$  и  $g$  необходимо, чтобы определенному значению  $f$  или  $g$  соответствовало бесконечное множество значений аргумента или чтобы любое определенное значение волновой функции в течение времени очень часто повторялось.

Если соотношение (44) является необходимым следствием полной некогерентности обеих функций  $f$  и  $g$ , то его совершенно недостаточно, чтобы ручаться за некогерентность, так как мы скоро (§ 20) увидим, что компоненты  $f$  и  $g$  могут быть совершенно когерентны, и все же уравнение (44) будет выполняться. Само собой понятно, что  $f$  и  $g$  тогда не пропорциональны одна другой, как в (42), т. е. свет не является линейно поляризованным, но он все же вполне поляризован, так как одна компонента в каждый момент вполне определяется второй компонентой.

Вернемся теперь опять к рассмотрению общего случая. Легко видеть, что интенсивность излучения  $J_\varphi$  согласно (40) для определенных значений  $\varphi$  имеет максимум и минимум, которые оба определяются из уравнения:

$$\frac{dJ}{d\varphi} = 0,$$

или согласно (40) из уравнения:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{C}{A-B}. \quad (45)$$

Эти два взаимно перпендикулярные направления называются главными плоскостями колебаний луча, а соответствующие интенсивности, т. е. максимум и минимум  $J$ , равные

$$J = \frac{A+B}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}, \quad (46)$$

называются главными интенсивностями луча.

Для плоскополяризованного света, как мы видели,  $C = \pm \sqrt{AB}$ . Тогда согласно (46) максимальная интенсивность  $J = A + B$ , а минимальная интенсивность  $J = 0$ .

Для естественного света  $A = B$  и  $C = 0$  и согласно (46)  $J = A = B$  и главные плоскости колебаний согласно (45) делаются неопределенными.

Если координатные оси  $x$  и  $y$  направить по главным плоскостям колебаний, то уравнение (45) удовлетворяется при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , следовательно, тогда  $C = 0$  и компонента интенсивности излучения в произвольном направлении согласно (40) равна:

$$J_\varphi = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi, \quad (47)$$

причем  $A$  и  $B$  в согласии с (46) представляют собой главные интенсивности. Так как в общем случае интенсивность излучения  $J_\varphi$  согласно (40) зависит от трех констант, то для характеристики поляризации излучения недостаточно измерений двух компонент

$$J_0 = A \quad \text{и} \quad J_{\frac{\pi}{2}} = B.$$

В действительности, например, когда  $A = B$ , свет может быть или естественный или линейно поляризованный в азимуте  $45^\circ$  или же он может быть как-нибудь составлен из естественного и линейно поляризованного света. Чтобы определить третью компоненту тензора  $\overline{fg} = C$ , требуется еще третье измерение, например измерить компоненту, колебания которой направлены под углом  $\frac{\pi}{4}$ :

$$J_{\frac{\pi}{4}} = \frac{A+B}{2} + C. \quad (48)$$

Тогда  $A$ ,  $B$  и  $C$  вполне определены.



§ 12. Чтобы закончить разбор вопросов, связанных с явлениями отражения и преломления, нам остается рассмотреть еще один случай. Этот случай оставлен нами временно (в конце § 8) нерассмотренным, так как найденное нами тогда решение к этому случаю не могло быть применено. Это случай, когда  $\sin \vartheta > n$  (причем  $n < 1$ ). В этом случае угол преломления  $\vartheta_1$  согласно (20) получается мнимым.

Само собой понятно, что недостаточно сказать: так как угол преломления мнимый, то никакого преломления нет и, следовательно, весь свет отражается. Действительно, мы не сможем удовлетворить граничным условиям задачи, если волновые функции преломленной волны положим равными нулю, а волновые функции отраженной волны равными волновым функциям падающей волны. Вопросы о нахождении вида волновых функций, удовлетворяющих всем условиям, требуемым теорией, таким образом нельзя обойти. Кроме того, следует принять во внимание, что комплексное решение уравнения также является решением и что оно, не имея прямого реального смысла, может указать нам путь для нахождения действительного решения.

В самом деле, каждое уравнение с комплексными величинами распадается на два уравнения с действительными величинами. Примем во внимание, что как все уравнения между напряжениями поля падающей, отраженной и преломленной волны, так и условия внутри среды и на границе являются линейными и однородными по отношению к напряжению поля и имеют действительные коэффициенты; из этого следует, что если все уравнения удовлетворяются комплексными значениями напряжений поля, то и действительные части этих комплексных значений удовлетворяют этим уравнениям и дают действительное физическое решение проблемы. Мы можем поэтому из любого комплексного решения получить сразу действительное решение, если отбросим чисто мнимые части комплексных значений напряжений поля и оставим только действительные части.

Осуществляя эти соображения, мы должны помнить, что вследствие комплексности угла преломления  $\vartheta$  как коэффициенты  $\sigma$  и  $\mu$ , так и волновые функции преломленной и отраженной волны будут комплексными величинами. В интересах полной общности мы сделаем такое же допущение и относительно падающей волны, т. е. под  $f$  и  $g$  мы подразумеваем две произвольные комплексные функции одного и того же комплексного аргумента. Обозначая действительную часть какой-нибудь комплексной величины поставленной впереди нее буквой  $R$ , получаем из (8) для действительных компонент поля падающей волны выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & H_x &= 0, \\ E_y &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot Rf, & H_y &= -Rg, \\ E_z &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot Rg, & H_z &= Rf, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

где в качестве аргумента для  $f$  и  $g$  опять служит  $t - \frac{x}{q}$ ; ось  $x$ , как и раньше, направлена по нормали к волне, ось  $y$  опять находится в плоскости падения, ось  $z$  перпендикулярна к ней.

Что касается преломленной волны, то ее волновая нормаль  $x_1$  является комплексной величиной (другими словами, угол  $\vartheta$  комплексный). Поэтому мы сразу возьмем компоненты поля в действительной координатной системе  $\xi, \eta, \zeta$ , которая определена перпендикуляром к границе  $\xi$  и плоскостью падения  $\xi\eta$  (черт. 1). Для этого мы прежде всего выразим комплексные напряжения поля согласно уравнениям:

$$E_\xi = E_{x_1} \cdot \cos \vartheta_1 - E_{y_1} \cdot \sin \vartheta_1,$$

$$E_\eta = E_{x_1} \cdot \sin \vartheta_1 + E_{y_1} \cdot \cos \vartheta_1,$$

и т. д. и заменяем здесь компоненты  $E_{x_1}, E_{y_1}, E_{z_1}$  по образцу (8) волновыми функциями  $f_1$  и  $g_1$ , а эти опять согласно (16) и (18) заменяем волновыми функциями падающей волны  $f$  и  $g$ . Тогда для действительных компонент поля преломленной волны получаются выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_\xi &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cdot R\mu_1 f \sin \vartheta_1, & H_\xi &= R\sigma_1 g \sin \vartheta_1, \\ E_\eta &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cdot R\mu_1 f \cos \vartheta_1, & H_\eta &= -R\sigma_1 g \cos \vartheta_1, \\ E_\zeta &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cdot R\sigma_1 g, & H_\zeta &= R\mu_1 f. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Здесь аргументом  $f$  и  $g$  повсюду является  $t - \frac{x_1}{q_1}$ , где

$$x_1 = \xi \cos \vartheta_1 + \eta \sin \vartheta_1. \quad (51)$$

Наконец, для отраженной волны, нормаль которой  $x'$  действительна, мы получаем согласно (8), (15) и (17) действительные компоненты поля:

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= 0, & H_{x'} &= 0, \\ E_{y'} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} R\mu f, & H_{y'} &= -R\sigma g, \\ E_{z'} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} R\sigma g, & H_{z'} &= R\mu f \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

с аргументом  $t - \frac{x'}{q}$  для  $f$  и  $g$ .

§ 13. Предшествующие уравнения в принципе разрешают проблему полного внутреннего отражения, однако применить теорию непосредственно к общему случаю волновых функций произвольного вида не удается, потому что невозможно явно вы-

делить действительную часть комплексного выражения, пока неизвестен вид этого последнего. Поэтому, если мы желаем перейти к действительным выражениям, мы вынуждены сначала разобрать частные решения задачи, а потом соответствующим обобщением частных решений разрешить и общий случай. При выборе частных решений, могущих играть роль в задачах оптики, мы должны помнить, что (согласно § 11) для естественного света нужно рассматривать волновые функции, очень часто принимающие все возможные для них значения. Мы выбираем поэтому в качестве простейшего частного решения простую периодическую функцию, полагая

$$f(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad (53)$$

и рассматриваем обе волны  $f$  и  $g$  отдельно, принимая пока

$$g(t) = 0. \quad (54)$$

Тогда согласно (49) имеем для падающей волны:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & H_x &= 0, \\ E_y &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \cos \omega \left( t - \frac{x}{q} \right), & H_y &= 0, \\ E_z &= 0, & H_z &= \cos \omega \left( t - \frac{x}{q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Это частный случай синусоидальной волны с частотой  $\omega$ , с числом колебаний  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  и длиной волны  $\lambda = \frac{2\pi q}{\omega}$  (2, § 40). Чтобы из (50) найти действительные компоненты поля для преломленной волны, мы вычисляем сперва комплексные значения  $\cos \vartheta_1$  и  $\mu_1$ . Для  $\cos \vartheta_1$  мы получаем из (20):

$$\cos \vartheta_1 = \pm i\vartheta',$$

где через  $\vartheta'$  мы обозначили положительную действительную величину:

$$\vartheta' = \sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{n^2} - 1} \quad (56)$$

[не смешивать с углом отражения в (21)].

Коэффициент  $\mu_1$  задан уравнением (24); мы выделим его действительную и мнимую части, написав его в виде:

$$\mu_1 = \frac{2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin \vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1} = \frac{2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \mp i \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \vartheta' \cdot \sin \vartheta_1}{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + \vartheta'^2 \sin^2 \vartheta_1},$$

или если для сокращения мы положим

$$\frac{\vartheta' \sin \vartheta_1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \quad (0 < \delta < \pi), \quad (57)$$

то получим:

$$\mu_1 = 2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \mp i \cdot 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} = 2 \cos \frac{\delta}{2} e^{\mp i \frac{\delta}{2}}.$$

Решение вопроса, взять ли верхний или нижний знак, получается из рассмотрения выражений (50). Последние содержат величину  $f\left(t - \frac{x_1}{q_1}\right)$ , где согласно (51):

$$x_1 = \pm i\xi\vartheta' + \eta \sin \vartheta_1.$$

Если подставить выражение (53) для  $f$ , то в показателе  $e$  получим действительный член  $\pm \frac{\omega\xi\vartheta'}{q_1}$ , который, чтобы решение было пригодно, должен обращаться в бесконечность при  $\xi = +\infty$ , т. е. в бесконечном удалении от плоскости границы. Поэтому везде нужно взять нижний знак, и мы получим:

$$\cos \vartheta_1 = -i\vartheta' \quad (58)$$

и соответственно:

$$\mu_1 = 2 \cos \frac{\delta}{2} e^{i\frac{\delta}{2}}. \quad (59)$$

Таким образом для компонент поля преломленной волны получаем согласно (50) следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_\xi &= -\frac{2 \sin \vartheta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \frac{\delta}{2} \cdot e^{-\frac{\omega\vartheta'\xi}{q_1}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\delta}{2} \right], \\ E_\eta &= \frac{2\vartheta'}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \frac{\delta}{2} \cdot e^{-\frac{\omega\vartheta'\xi}{q_1}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\delta}{2} \right], \\ E_\zeta &= 0, \\ H_\xi &= 0, \\ H_\eta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$H_\zeta = 2 \cos \frac{\delta}{2} \cdot e^{-\frac{\omega\vartheta'\xi}{q_1}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\delta}{2} \right]. \quad (61)$$

Очевидно, и при полном внутреннем отражении во второй, оптически менее плотной, среде имеют место заметные колебания. Но эти колебания имеют ту особенность, что их фаза совершенно не зависит от нормальной к границе координаты  $\xi$ . В результате во второй среде волна распространяется параллельно плоскости границы вдоль оси  $\eta$  и поэтому вообще не проникает в глубину среды. Ее проникновение ограничивается всегда граничным слоем, толщина которого имеет величину порядка одной длины волны  $\lambda_1$ . Чем больше угол падения, тем менее глубоко волна проникает во вторую среду и тем медленнее она распространяется вдоль граничной поверхности.

Для отраженной волны выражения получают значительно более простыми, так как для нее волновая нормаль

$$x' = -\xi \cos \vartheta + \eta \sin \vartheta, \quad (62)$$

входящая в аргумент  $t - \frac{x'}{q}$  волновой функции, является действи-

тельной величиной. Наоборот, на основании (58) и (57) для коэффициента  $\mu$  получается из (23) комплексное выражение:

$$\mu = e^{i\delta}. \quad (63)$$

Отсюда на основании (52) получаем для компонент поля отраженной волны:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & E_y &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x'}{q} \right) + \delta \right], & E_z &= 0, \\ H_x &= 0, & H_y &= 0, & H_z &= \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x'}{q} \right) + \delta \right]. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Ясно, что теперь, получив выражение для поля, можно убедиться непосредственной проверкой, что выражения (55), (60), (61), (64) для падающей, преломленной и отраженной волны действительно удовлетворяют всем условиям внутри ( $\xi \geq 0$ ) и на границе ( $\xi = 0$ ) обеих сред.

Для отраженной волны характерно, что она имеет ту же амплитуду, что и падающая волна, но в отличие от обыкновенного отражения имеет фазу, смещенную на угол  $\delta$ .

Этот скачок фазы равен нулю согласно (57) для предельного угла ( $\sin \vartheta \doteq n$ ,  $\vartheta' = 0$ ), где полное внутреннее отражение совпадает с обыкновенным отражением, он растет вместе с увеличением угла падения  $\vartheta$  и достигает значения  $\pi$  для скользящего падения ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ).

Изложенные результаты справедливы для  $f$ -волны, колебания которой направлены в плоскости падения. Для  $g$ -волны, колебания которой направлены перпендикулярно к плоскости падения, справедливы аналогичные законы; однако в этом случае имеются и характерные отличия от рассмотренного выше случая колебаний в плоскости падения. Так как ход вычислений остается тот же, то достаточно будет вкратце привести результаты.

Если падающая волна представлена уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 0, & H_x &= 0, \\ E_y &= 0, & H_y &= -\cos \omega \left( t - \frac{x}{q} \right), \\ E_z &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \cos \omega \left( t - \frac{x}{q} \right), & H_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

и если, далее, обозначить

$$\frac{\vartheta' \sin \vartheta}{\cos \vartheta \sin \vartheta_1} = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \quad (0 < \tau < \pi), \quad (66)$$

то получится из (24) и (23):

$$\sigma_1 = 2n \cos \frac{\tau}{2} \cdot e^{i \frac{\tau}{2}}, \quad \sigma = e^{i\tau}. \quad (67)$$

Таким образом компоненты поля преломленной волны согласно (50) равны:

$$\left. \begin{aligned} E_{\xi} &= 0, \\ E_{\eta} &= 0, \\ E_{\zeta} &= \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \cos \frac{\tau}{2} e^{-\frac{\omega \vartheta' \xi}{q_1}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\tau}{2} \right], \\ H_{\xi} &= 2 \sin \vartheta \cos \frac{\tau}{2} e^{-\frac{\omega \vartheta' \xi}{q_1}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\tau}{2} \right], \\ H_{\eta} &= -2n\vartheta' \cos \frac{\tau}{2} e^{-\frac{\omega \vartheta' \xi}{q_1}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{\eta \sin \vartheta_1}{q_1} \right) + \frac{\tau}{2} \right], \\ H_{\zeta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

а компоненты поля отраженной волны согласно (52):

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= 0, \quad E_{y'} = 0, \quad E_{z'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x'}{q} \right) + \tau \right], \\ H_{x'} &= 0, \quad H_{y'} = -\cos \left[ \omega \left( t - \frac{x'}{q} \right) + \tau \right], \quad H_{z'} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Таким образом  $g$ -волна с колебаниями, направленными перпендикулярно к плоскости падения, претерпевает при полном внутреннем отражении иной скачок фазы  $\tau$ , чем  $f$ -волна, колебания которой направлены в плоскости падения, причем в общем случае согласно (52) и (66)  $\delta > \tau$ . Только в случаях предельного угла ( $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ ) и скользщего падения ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ )  $\delta$  и  $\tau$  равны друг другу.

§ 14. Для полного решения вопроса о полном внутреннем отражении полученные частные решения нужно еще распространить на случай любых заданных волн  $f(t)$  и  $g(t)$ . Это можно сделать, если выражение (53) сперва умножить на произвольную комплексную постоянную, вследствие чего колебание приобретает произвольную амплитуду и произвольную фазовую постоянную, и после этого произвести суммирование по целым кратным значениям определенной частоты  $\omega$ . Вследствие этого действительная часть  $f(t)$  и соответственно  $g(t)$  принимает форму ряда Фурье (2, § 38):

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left( \frac{2\pi n t}{T} + \vartheta_n \right), \quad (70)$$

а известно, что любая периодическая функция с периодом  $T$  может быть представлена таким рядом. Начальный член этого ряда  $C_0$  согласно (12) взят равным нулю. То, что при этом функции  $f$  и  $g$  получаются периодическими, не является ограничением, так как период  $T$  можно взять столь большим, что для

физических измерений будут иметь значения только моменты времени  $t$ , лежащие внутри одного и того же периода, т. е., например, значения  $t$  между нулем и  $T$ . Это имеет место, например, если момент, когда источник света начинает действовать, обозначить через  $t=0$ , а момент окончания последнего измерения обозначить через  $t=T$ .

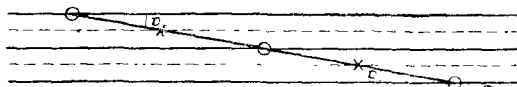
---

## ГЛАВА II

### СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

§ 15. При выводе законов отражения и преломления, изложенных в предыдущей главе, не было сделано никаких предположений относительно вида волновых функций  $f$  и  $g$ . Это относится также и к законам полного внутреннего отражения, так как разложение волновой функции в ряд Фурье представляет собой лишь особую форму математического изображения. В особенности не нужно думать, что волновые функции в пределах большого основного периода  $T$  должны обладать какими-нибудь свойствами периодичности. В течение определенного времени они даже могут быть равными нулю, а до этого и после этого какими угодно. Отсюда следует также, что отдельным амплитудам  $C_n$  ряда Фурье (70) нельзя приписать объективного значения (для характеристики формы волновой функции), так же как и основному периоду  $T$ , от которого они зависят. Чтобы узнать что-либо о форме волны, необходимы, следовательно, особые измерения. Принципиально наиболее подходящим методом является метод, примененный Г. Герцем для исследования формы открытых им электромагнитных волн: получение стоячих колебаний отражением от абсолютно проводящей и поэтому зеркальной поверхности (§ 92). При этом в периодическом характере волн можно убедиться по появлению узлов и пучностей, лежащих на постоянных расстояниях, по которым можно измерить длину волны, а, таким образом, и частоту колебаний. Соответствующий опыт для оптических волн впервые удался О. Винеру (1890), который заставил фиолетовые лучи вольтовой дуги падать перпендикулярно на серебряное зеркало. Чтобы обнаружить образующиеся узлы и пучности электрического напряжения, на зеркало был наложен наклонно, под небольшим углом  $\alpha$ , очень тонкий, плоский светочувствительный слой из хлорно-серебряного коллодия, который мало мешал световым колебаниям (черт. 2). Оказалось, что в тех местах, где слой встречал плоскость, в которой находятся узлы электрического напряжения, например у самого зеркала, не было никакого фотографического действия, в местах же, лежащих в середине между ними, где слоем пересекались плоскости пучностей (пунктир на черт. 2).

получался максимум почернения. Из расстояний между полосами и угла наклона слоя относительно зеркала можно непосредственно вычислить длину волны.



Черт. 2.

По причине малых размеров длины световой волны в оптике часто употребляют в качестве единицы

$10^{-4} \text{ см} = 1 \mu$  (микрон) и соответственно  $10^{-7} \text{ см} = 1 \text{ м}\mu$  (миллимикрон), или также единицу Ангстрема  $10^{-8} \text{ см} = 1 \text{ \AA}$ . Видимый спектр простирается приблизительно от  $0,4 \mu$  (фиолетовые лучи) до  $0,8 \mu$  (красные).

§ 16. Описанным выше опытом был установлен периодический характер световой волны определенного цвета; но из этого вовсе не следует, что ряд Фурье (70) для этого случая сводится к одному единственному, например  $n$ -му, члену. Даже при самых тонких спектральных линиях результаты измерения всегда совместимы с наличием многих членов, которым соответствует достаточно большая область порядковых чисел  $n$ , с частотами, лишь незаметно отличающимися друг от друга. Именно, так как

$$\omega = \frac{2\pi n}{T} = 2\pi\nu \quad (71)$$

и так как  $T$  взято очень большим по сравнению с временем одного светового колебания, то получаемые порядковые числа  $n$  очень велики, и изменение  $n$  на одну или несколько единиц не дает заметных изменений  $\omega$ .

Поэтому мы не должны считать свет определенного цвета (так называемый однородный свет) волной с одним определенным периодом, как в акустике звуковую волну определенного тона, а должны считать его сложным, состоящим из многих волн с почти одинаковыми периодами. Понятие однородного света имеет не абсолютный смысл, а только более или менее приближенный. Условие однородности света с частотой  $\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{T}$  математически выражается тем, что в ряде Фурье (70) отличны от нуля лишь те амплитуды, для которых

$$\left| \frac{n - n_0}{n_0} \right| \ll 1. \quad (72)$$

Степень однородности определяется наибольшим значением, которого достигает выражение (72) для таких  $n$ , для которых  $C_n$  отлично от нуля. Особенно наглядное представление о характере волновой функции однородного света можно получить, если в ряде Фурье (70) положить

$$n = n_0 + (n - n_0)$$



и разложить косинус соответствующим образом. Тогда ряд (70) можно изобразить одним членом:

$$C_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n_0 t}{T} + \vartheta_0\right), \quad (73)$$

где

$$C_0 \cos \vartheta_0 = \sum C_n \cos\left(\frac{2\pi(n-n_0)t}{T} + \vartheta_n\right),$$

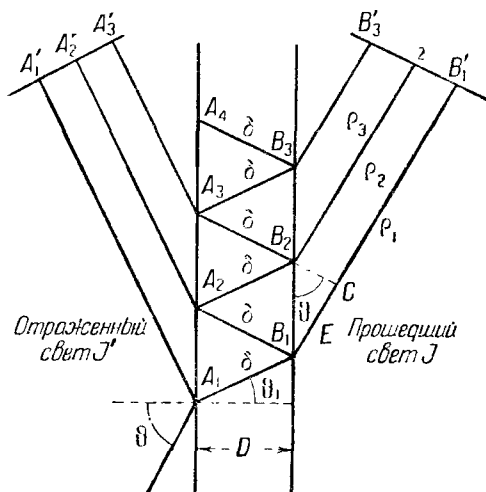
$$C_0 \sin \vartheta_0 = \sum C_n \sin\left(\frac{2\pi(n-n_0)t}{T} + \vartheta_n\right),$$

и считать его состоящим из колебаний одной частоты  $\omega_0$ , с амплитудой  $C_0$  и фазовой константой  $\vartheta_0$ . Конечно, теперь  $C_0$  и  $\vartheta_0$  не строго постоянны, но согласно (72) сравнительно медленно и, вообще говоря, беспорядочно изменяются с временем  $t$  и притом тем медленнее, чем однороднее свет. Здесь проявляется тесная связь, существующая между колебаниями амплитуды и фазы, с одной стороны, и степенью монохроматичности света — с другой. Абсолютно постоянная амплитуда и строго определенная фаза были бы возможны лишь при абсолютно однородном свете; флюктуации (изменения) той или другой связаны с неполной однородностью.

§ 17. При помощи отражения света от прозрачной плоскопараллельной пластинки или путем пропуска света сквозь нее можно осуществить гораздо более резкое и совершенное спектральное разложение, чем при отражении от непрозрачного зеркала. Эта проблема также может быть разрешена при помощи вышеизложенных методов.

Если плоская волна падает на прозрачную плоскую пластинку толщиной  $D$  под углом падения  $\vartheta$  (черт. 3), то она частью отражается, а частью проникает внутрь пластинки. Волна, проникающая внутрь, будет распространяться в пластинке взад и вперед между обеими ограничивающими ее плоскостями и при каждой встрече с плоскостями будет частично выходить в ту или другую сторону наружу из пластинки.

Полное решение задачи заключается в следующем. В первой среде (воздух) находятся две волны: одна, направленная к пластинке под углом падения  $\vartheta$ , другая, идущая от пластинки под



Черт. 3.

углом отражения  $\vartheta$ ; во второй среде (стекло) также имеются две волны, обе под углом  $\vartheta_1$  к нормали к пластинке: одна, идущая от передней грани к задней, другая, идущая в обратную сторону; в третьей среде (воздух) распространяется одна волна в направлении, параллельном первоначально падающей волне.

Эти пять волн связаны четырьмя граничными условиями, по одному условию для электрического и магнитного векторов на каждой границе. Поэтому при заданной падающей волне остальные четыре волны определяются однозначно.

Достигнуть цели можно и более наглядным путем, хотя и не таким прямым, как вышеизложенный, если рассмотреть, как данное явление протекает во времени; этот метод имеет еще то преимущество, что он может быть с успехом применен и тогда, когда поперечное сечение падающей волны и поверхность пластинки не безграничны, как это всегда и имеет место в действительности.

Пусть падающая волна  $f\left(t - \frac{x}{q}\right)$  представлена на черт. 3 одним произвольно выбранным лучом, который встречает первую грань пластинки в точке  $A_1$ , так что  $x$  представляет собой волновую нормаль в точке  $A_1$ . Тогда отраженный луч (отраженная волна) отразится обратно от точки  $A_1$  в воздух с коэффициентом ослабления  $\mu$ , известным из (23), в то время как преломленный луч с коэффициентом ослабления  $\mu_1$  пойдет внутри пластинки до точки  $B_1$ . Здесь он опять расщепляется и часть выходит в воздух, частью возвращается обратно в пластинку к точке  $A_2$ . Так будет продолжаться и дальше, до тех пор пока энергия луча не сделается настолько незначительной, что ею можно будет пренебречь. Таким образом четыре вышеупомянутые волны, волновые функции которых должны были быть вычислены из падающей волны, могут быть представлены как четыре суммы бесконечно большого числа членов, каждый из которых известен и может быть вычислен.

Рассмотрим сначала прошедшую волну, выделив для этого достаточно удаленную от пластинки плоскость волны  $B_1' B_2' B_3'$ . Эта волна образована наложением волн, изображенных лучами  $A_1 B_1 B_1'$ ,  $A_1 B_1 A_2 B_2 B_2'$ , ... Обозначим расстояние  $A_1 B_1 = B_1 A_2 = A_2 B_2$  и т. д. через  $\delta$ , а расстояния  $B_1 B_1'$ ,  $B_2 B_2'$  через  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ , ... Мы получим в выделенной нами плоскости волны значения волновых функций, соответствующих отдельным налагающимся лучам, если в аргумент вставим указанный световой путь и, кроме того, учтем коэффициенты ослабления при каждом отражении и преломлении  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu'$ ,  $\mu_1'$  [(23) и (24)]. Здесь  $\mu'$  и  $\mu_1'$  обозначают коэффициенты, относящиеся к переходу волны из стекла в воздух. Они получаются из выражений для  $\mu$  и  $\mu_1$  обменом мест углов  $\vartheta$  и  $\vartheta_1$ .

Таким образом волновую функцию первого луча, который претерпел два преломления в  $A_1$  и  $B_1$ , для точки  $B_1'$  получаем в виде:

$$\mu_1 \mu_1' \cdot f\left(t - \frac{x}{q} - \frac{\delta}{q_1} - \frac{\varrho_1}{q}\right);$$

для второго луча, который претерпел два преломления в  $A_1$  и  $B_2$  и два отражения — в  $B_1$  и  $A_2$ , для точки  $B_2'$  получаем:

$$\mu_1 \mu_1'^2 \mu_1' \cdot f\left(t - \frac{x}{q} - \frac{3\delta}{q_1} - \frac{e_2}{q}\right) \text{ и т. д.}$$

Отсюда получаем для волновой функции всего прошедшего света:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \mu_1 (\mu_1')^{2p} \mu_1' f\left(t - \frac{x}{q} - \frac{(2p+1)\delta}{q_1} - \frac{e_{p+1}}{q}\right). \quad (74)$$

Коэффициенты  $\mu_1$ ,  $\mu_1'$  и  $\mu_1'^2$  можно, пользуясь (23) и (24), свести к одному коэффициенту  $\mu$  при помощи уравнений:

$$\mu_1' = -\mu, \quad \mu_1 = 1 + \mu, \quad \mu_1'^2 = 1 - \mu. \quad (75)$$

Что же касается аргумента  $f$ , то в нем члены, содержащие световые пути, можно, пользуясь (14), привести к общему знаменателю:

$$\frac{x + (2p+1)\delta n + e_{p+1}}{q} \quad (76)$$

и таким образом „привести к воздуху“ световой путь.

Расстояния  $e_{p+1}$  можно выразить через расстояние  $e_1$ , если воспользоваться понятными из черт. 3 соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_1 - e_2 &= B_1 C = \varepsilon, \\ e_1 - e_3 &= 2\varepsilon, \dots, \\ e_1 - e_{p+1} &= p\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Наконец, для введенных величин  $\delta$  и  $\varepsilon$  легко получить такие выражения:

$$\delta = \frac{D}{\cos \vartheta_1}, \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= B_1 B_2 \cdot \sin \vartheta = 2\delta \sin \vartheta_1 \sin \vartheta, \\ \varepsilon &= 2D \operatorname{tg} \vartheta_1 \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Обозначив еще для сокращения члены аргумента  $f$ , не зависящие от  $p$ , через  $\alpha$ :

$$t - \frac{x + \delta n + e_1}{q} = \alpha, \quad (80)$$

и члены, содержащие  $p$  множителем, через  $\beta p$ :

$$\frac{2\delta n - \varepsilon}{q} \cdot p = \beta p, \quad (81)$$

получим волновую функцию (74) в виде:

$$\sum_{p=0}^{\infty} (1 - \mu^2) \mu^{2p} \cdot f(\alpha - \beta p). \quad (82)$$

§ 18. Чтобы можно было провести суммирование, надо задать определенную форму  $f$ . Поэтому мы представим себе функцию  $f$  разложенной в ряд Фурье и рассмотрим сперва один член этого ряда с частотой  $\omega$ . Так как с показательными функциями часто удобнее производить вычисления, чем с тригонометрическими, то мы будем рассматривать действительное колебание как действительную часть „комплексного колебания“, т. е. положим:

$$f(t) = e^{i\omega t}, \quad (83)$$

причем для сокращения мы, как это часто делается, не будем писать буквы  $R$  (действительная часть). Тогда выражение (82) переходит в

$$\sum_{p=0}^{\infty} (1 - \mu^2) \mu^{2p} e^{i\omega(\alpha - p\beta)},$$

а эта сумма равна:

$$\frac{(1 - \mu^2) e^{i\omega\alpha}}{1 - \mu^2 e^{-i\omega\beta}}. \quad (84)$$

Действительная часть этого комплексного выражения и дает искомую волну прошедшего света; так как переменные  $t$  и  $\rho_1$  содержатся только в  $\alpha$ , то получается простая периодическая волна, волна с частотой  $\omega$ . Ее интенсивность согласно уравнению (10) пропорциональна квадрату амплитуды. Проще всего вычислить этот квадрат, если вспомнить, что он равен квадрату абсолютного значения комплексной величины (84) или произведению (84) на комплексно сопряженную величину. Так как нас интересует отношение интенсивности прошедшего света к интенсивности падающего света и так как абсолютное значение (83) равно единице, то для интенсивности прошедшего света по отношению к падающему мы получим:

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{(1 - \mu^2) \cdot e^{i\omega\alpha}}{1 - \mu^2 e^{-i\omega\beta}} \cdot \frac{(1 - \mu^2) \cdot e^{-i\omega\alpha}}{1 - \mu^2 e^{i\omega\beta}}, \\ J &= \frac{(1 - \mu^2)^2}{1 - 2\mu^2 \cos \omega\beta + \mu^4}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

При этом согласно (81), (78), (79) и (20):

$$\beta = \frac{2nD \cos \vartheta_1}{q} = \frac{2D}{q_1} \cos \vartheta_1,$$

следовательно:

$$\omega\beta = \frac{4\pi D}{\lambda_1} \cos \vartheta_1 = \xi, \quad (86)$$

где  $\lambda_1$  — длина волны в веществе пластинки; и

$$J = \frac{(1 - \mu^2)^2}{1 - 2\mu^2 \cos \xi + \mu^4}. \quad (87)$$

Максимум интенсивности достигается при  $\xi = 2\pi p$ , т. е. при

$$\frac{2D}{\lambda_1} \cos \vartheta_1 = p, \quad (88)$$

где  $p$  — целое число. Тогда  $J = 1$ . Между ними лежат минимумы интенсивности, имеющие величину:

$$J = \left( \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right)^2. \quad (89)$$

Разница между максимумом и минимумом тем больше, чем ближе  $\mu$  к единице, т. е. чем большим взят угол падения  $\vartheta$ .

Но самой характерной для рассматриваемого явления и наиболее важной для измерений чертой является острота максимумов.

Она получается потому, что в большинстве случаев  $\xi$  в (86) [а поэтому также  $p$  в (88)] очень большое число, когда  $D$  очень велико по сравнению с  $\lambda$ . Поэтому интенсивность света быстро меняется при изменении направления луча  $\vartheta$ .

Нужно теперь принять во внимание, что в оптике мы никогда не имеем дела с лучом одного определенного направления или одной системой параллельных волновых плоскостей, что вытекает уже из рассуждений § 5 и что дальше (§ 36) будет разъяснено еще подробнее. На опыте всегда наблюдается конус лучей, хотя бы и узкий. Поэтому, если мы для лучей каждого направления  $\vartheta$  найдем точку бесконечно удаленного экрана, к которой направлены все лучи этого направления, то всегда будет освещено много таких точек  $\vartheta$ , лежащих близко одна от другой. Так как  $J$  быстро меняется с изменением  $\vartheta$ , то на экране появится ряд многочисленных максимумов и минимумов интенсивности, расстояния между которыми определяются следующими друг за другом порядковыми числами  $p$  в (88). Если  $\mu$  близко к единице, то интенсивность  $J$  согласно (87) вообще мала, и лишь тогда, когда условие (88) в точности выполнено, она делается равной единице, то есть максимумы резко выделяются на темном фоне.

Предыдущие рассуждения относятся к волне вполне определенной частоты  $\omega$ , т. е. к вполне однородному свету.

В действительности, как мы видели, мы всегда имеем дело с не строго монохроматическим светом; его можно представить себе как наложение многих монохроматических — синусоидальных волн, имеющих близкие частоты. Поэтому в наблюдаемой картине всегда налагаются многие системы максимумов и минимумов рассмотренного выше рода, каждая с несколько другим расстоянием между максимумами и минимумами. В каждом луче прошедшего света и соответственно в каждой точке бесконечно удаленного экрана соединяется много лучей различного цвета и, конечно, вообще говоря, различной интенсивности. При этом может случиться, что в какой-нибудь определенной точке  $\vartheta$

два различных цвета имеют свои максимальные интенсивности, т. е. согласно (88):

$$p\lambda_1 = p'\lambda'_1$$

или, отнесенные к воздуху:

$$p\lambda = p'\lambda'. \quad (90)$$

Тогда  $p$ -й максимум для длины волны  $\lambda$  совпадает с  $p'$ -м максимумом для длины волны  $\lambda'$ . Если  $\lambda$  и  $\lambda'$  мало отличаются друг от друга, то и близлежащие максимумы обеих волн, порядок которых лишь немногими единицами отличается от  $p$  и  $p'$ , также будут лежать близко один от другого. Поэтому на некотором участке картины максимумов и минимумов этих двух систем будут примерно совпадать. Но если перейти к более высоким порядкам, то даже малое различие в расстоянии между максимумом и минимумом станет заметным, и максимумы обеих систем разойдутся, причем максимумы большей длины волны, например  $\lambda'$ , благодаря большим расстояниям между ними всегда будут опережать максимумы меньшей длины волны  $\lambda$  соответствующего порядка. Наконец, при достаточном увеличении порядка максимума, максимум  $\lambda'$  порядка  $p' + r$ , так сказать, догонит максимум для  $\lambda$  порядка  $p + r + 1$ . Тогда опять получается совпадение обеих систем, но порядок максимумов  $\lambda$  увеличится на единицу больше, чем порядок максимумов  $\lambda'$ , т. е.

$$(p + r + 1)\lambda = (p' + r)\lambda'.$$

Из этого условия и из (90) получаем:

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{r}. \quad (91)$$

Таким образом, подсчитывая число максимумов между двумя следующими друг за другом совпадениями максимумов двух систем, мы можем очень точно измерить разности длин волн.

Интенсивность света  $J$ , отраженного пластинкой, можно найти тем же методом, как и для света, пропущенного ею. Однако нам нет надобности проводить подробно весь подсчет, так как результат можно сразу получить из закона сохранения энергии, согласно которому сумма интенсивностей  $J'$  отраженного света и  $J$  пропущенного света равна интенсивности падающего света (принимаемой равной единице); поэтому в силу (87):

$$J' = 1 - J = \frac{4\mu^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}}{1 - 2\mu^2 \cos \xi + \mu^4}. \quad (92)$$

Отраженный свет является, как говорят, дополнительным к пропущенному свету. Когда  $\mu$  близко к единице, интенсивность в минимумах равна нулю и минимумы резко выделяются на окружающем фоне. В остальном здесь имеют место те же положения, что и для прошедшего света.

До сих пор мы рассматривали только  $f$ -волну — свет с колебаниями в плоскости падения. Ясно, что и для  $g$ -волны — света с колебаниями, перпендикулярными плоскости падения, справедливы те же заключения. Результат для  $g$ -волны отличается только тем, что вместо коэффициента  $\mu$  в него входит коэффициент  $\sigma$  (§ 9). Положение максимумов и минимумов остается здесь то же, что и у  $f$ -волны.

§ 19. Согласно уравнению (86) угол  $\xi$ , определяющий величину интенсивности света, зависит кроме длины волны  $\lambda_1$  и направления луча  $\vartheta_1$  также и от толщины пластинки  $D$ . Это ферометрах переменной толщины обстоятельство используется в интерференционной (воздушная пластинка) для измерения зависимости интенсивности света  $J$  от толщины пластинки при перпендикулярном падении света ( $\vartheta_1 = 0$ ). Тогда согласно (88) толщина тех слоев, для которых интенсивность проходящего света имеет наибольшее значение, равное единице, равна целому кратному половине длины в веществе слоя:

$$D = \frac{\lambda_1}{2} p. \quad (93)$$

Это легко понять, если вспомнить, что при толщине, кратной длине полу волны, фазы различных налагающихся одна на другую волн, проходящих через слой после различного числа отражений внутри слоя, отличаются на величину, кратную  $2\pi$ , и поэтому волны усиливают одна другую.

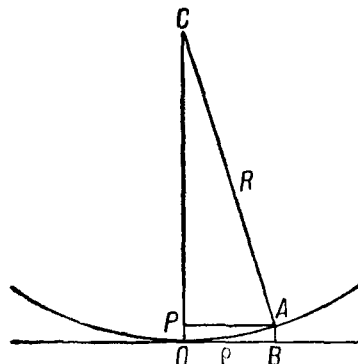
Для иллюстрации одновременного влияния слоев различной толщины, следующих друг за другом, могут служить ньютоновы цветные кольца. Когда плоско-выпуклую стеклянную линзу кладут ее сферической поверхностью вплотную на поверхность плоскопараллельной стеклянной пластинки (черт. 4), то получается тонкий воздушный слой, толщина которого непрерывно растет от нуля в точке касания  $O$  до величины  $D$  на расстоянии  $\rho$  от  $O$ . Если пластинку осветить сверху пучком однородных параллельных лучей, падающих перпендикулярно к ней, то в проходящем свете можно видеть систему светлых и темных колец с светлым центром, а в отраженном свете — явление в дополнительных цветах.

Приблизительная теория этих явлений получается очень просто из предыдущего. Если мы ограничимся значениями  $\rho$ , малыми по сравнению с радиусом сферы  $R$ , то можно положить:

$$D = AB = PO = R - \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

или

$$D = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R}.$$



Черт. 4.

Следовательно, в силу (93) максимумы интенсивности в проходящем свете и соответственно минимумы в отраженном свете получатся на расстояниях от центра, равных:

$$e = \sqrt{p\lambda R}, \quad (94)$$

где  $\lambda$  — длина волны в воздухе.

Итак, радиусы темных колец в отраженном свете относятся, как квадратные корни из последовательных целых чисел.

Для двух цветов, лишь немного отличающихся друг от друга, как, например, для двух компонент линии натрия, системы колец несколько различны и по удалении от центра  $O$  постепенно разделяются и смазывают одна другую, пока при  $p$ , приблизительно равном некоторому  $r$ , опять не наступает совпадение максимумов и минимумов. Это можно обнаружить по вновь появившейся резкости системы колец. Отсюда, пользуясь (91), вычисляется относительная разность длин волн обеих натриевых линий.

§ 20. Предшествующие рассуждения привели нас к необходимости исследования действия многих накладывающихся друг на друга и распространяющихся по одному направлению цугов волн. Теперь мы подвергнем такую суперпозицию световых волн более общему систематическому исследованию. Два луча с волновыми функциями  $f_1\left(t - \frac{x}{q}\right)$  и  $f_2\left(t - \frac{x}{q}\right)$ , распространяющихся по общему направлению  $x$  и колебания которых происходят в одном и том же направлении дают один луч с волновой функцией:

$$f = f_1 + f_2. \quad (95)$$

Отсюда следует, что интенсивность результирующего луча  $J$ , выраженная в зависимости от интенсивностей  $J_1$  и  $J_2$  обеих компонент (если отвлечься от не имеющего значения множителя), равна:

$$\begin{aligned} J &= \overline{f^2} = \overline{f_1^2} + \overline{f_2^2} + 2\overline{f_1 f_2}, \\ J &= J_1 + J_2 + 2\overline{f_1 f_2}. \end{aligned} \quad (96)$$

Интенсивность результирующего луча, таким образом, вообще говоря, отличается от суммы интенсивностей отдельных лучей. Это явление называют „интерференцией“ двух лучей 1 и 2. В некоторых случаях интерференции не будет, именно, если волновые функции  $f_1$  и  $f_2$  совершенно независимы друг от друга, т. е. если лучи 1 и 2 некогерентны. В самом деле, в этом случае [ср. (43)] имеем:

$$\overline{f_1 f_2} = \overline{f_1} \cdot \overline{f_2} = 0.$$

Это имеет, например, место, когда лучи получаются от различных источников света. Поэтому два таких луча никогда не интерферируют. Но некогерентность не является необходимым условием для отсутствия интерференции. Интерференция может



отсутствовать и тогда, когда лучи „вполне когерентны“, понимая под этим, что одна из двух волновых функций вполне определяется второй. Это имеет место, например, в случае однородного света, когда аргументы  $f_1$  и  $f_2$  отличаются на нечетное кратное  $\frac{\pi}{2}$ ; тогда  $\overline{f_1 f_2} = 0$ , несмотря на полную когерентность (так как  $\sin \omega t \cdot \cos \omega t = 0$ ). Более общим случаем является „частичная когерентность“, когда  $f_1$  и  $f_2$ , хотя и не независимы друг от друга, но не вполне определяют друг друга.

§ 21. Тот же вопрос можно рассмотреть несколько иначе, если обе волновые функции  $f_1$  и  $f_2$  представить в виде рядов Фурье, с одним и тем же основным периодом  $T$ . Тогда и результирующая волновая функция  $f = f_1 + f_2$  сразу получится в виде ряда Фурье, причем каждые две волны с одинаковыми частотами (соответствующие отдельным членам ряда) объединяются в одну волну. Так, например, пусть имеем две волны с частотой  $\omega$ :

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} a_1 \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{q} \right) + \vartheta_1 \right\} \\ a_2 \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{q} \right) + \vartheta_2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

При суммировании обоих этих выражений важную роль играет разность фаз обеих волн:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta. \quad (98)$$

Вместо фазовой постоянной  $\vartheta$  в выражение волновой функции часто вводят постоянную  $d$  (некоторая длина) или постоянную  $\delta$  (некоторое время) и пишут:

$$a \cos \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{\tau} - \frac{x+d}{\lambda} \right) \right\},$$

или

$$a \cos \left\{ 2\pi \left( \frac{t+\delta}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}$$

и тогда говорят о разности хода  $d_1 - d_2$  обеих волн или о запаздывании  $\delta_1 - \delta_2$  второй волны по отношению к первой. Разнице фаз  $2\pi$  соответствует разность хода, равная одной длине волны  $\lambda$ , или запаздывание на время одного колебания  $\tau$ . В результате сложения обоих выражений (97) получается волна с частотой  $\omega$ :

$$a \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{x}{q} \right) + \vartheta \right\}, \quad (99)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a \cos \vartheta &= a_1 \cos \vartheta_1 + a_2 \cos \vartheta_2, \\ a \sin \vartheta &= a_1 \sin \vartheta_1 + a_2 \sin \vartheta_2. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Амплитуда и фазовая постоянная результирующей волны определяются соответствующими величинами для составляющих

совершенно так же, как определяются абсолютное значение и направление вектора, являющегося суммой двух векторов.

Для квадрата амплитуды  $a$  мы получаем из (100) и (98):

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \Delta. \quad (101)$$

Это уравнение является выражением того, что две абсолютно однородные волны одинаковой частоты с одинаковыми направлениями колебаний и распространения, вообще говоря, интерферируют одна с другой. Это обстоятельство не находится в противоречии с тем положением (§ 20), что два луча, выходящие из разных источников света, никогда не интерферируют друг с другом, так как согласно § 16 в природе никогда не встречается абсолютно однородный свет; наиболее однородный оптический луч содержит очень много отдельных волн с близкими частотами колебаний, каждая из которых интерферирует с волной той же частоты во втором луче. Если оба луча некогерентны, то разность фаз  $\Delta$  беспорядочно меняется от одной пары волн к другой и никакого заметного интерференционного эффекта не может получиться.

§ 22. Теперь мы разберем сложение двух волн с взаимно перпендикулярными колебаниями, распространяющихся по одному и тому же направлению. Этот вопрос был рассмотрен в § 11, но теперь в основу рассмотрения мы положим разложение в ряд Фурье. Пусть, как и там,  $z$  будет направление распространения,  $x$  и  $y$  — направления электрического напряжения первой и второй волны. Электрические напряжения обеих волн одной и той же частоты  $\omega$  (соответствующих членам одного и того же порядка в разложении  $f$  и  $g$  в ряд Фурье) можно представить, как в (97):

$$\left. \begin{aligned} a \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{z}{q} \right) + \vartheta_1 \right\} &= x, \\ b \cos \left\{ \omega \left( t - \frac{z}{q} \right) + \vartheta_2 \right\} &= y, \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

если только для  $x$  и  $y$  выбрать соответствующие единицы.

При этом мы можем, не теряя общности, принять, что:  $a \geq b \geq 0$ . Этот метод обозначения делает возможным наглядно представить закон, по которому меняется со временем по величине и направлению результирующая электрического напряжения в определенной волновой плоскости  $z$ , так как она в каждый момент определяется положением подвижной точки  $x, y$  в плоскости  $z = \text{const}$ . Что же касается пути этой точки, то он получается исключением времени  $t$  из уравнений (102) проще всего, находя значение  $\cos \omega \left( t - \frac{z}{q} \right)$  и  $\sin \omega \left( t - \frac{z}{q} \right)$ , возвышая их в квадрат и приравнявая их сумму единице. В качестве уравнения кривой пути получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \Delta = \sin^2 \Delta. \quad (103)$$

Это эллипс, который вырождается в прямую при  $\Delta = n\pi$ , а при  $\Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  оси эллипса совпадают с осями координат. В общем случае угол  $\varphi$ , образованный одной из осей с осью  $x$ , определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab \cos \Delta}{a^2 - b^2}. \quad (104)$$

Это соотношение можно непосредственно получить из (45), если там положить соответственно рассматриваемому случаю:

$$A = \bar{f}^2 = \frac{a^2}{2}, \quad B = \bar{g}^2 = \frac{b^2}{2},$$

$$C = \bar{f}g = \frac{ab}{2} \cos \Delta.$$

Скорость, с которой пробегается эллиптический путь, определяется из (102) дифференцированием:

$$x dy - y dx = \omega ab \sin \Delta dt. \quad (105)$$

Это значит, что точка  $x, y$  движется по закону площадей (I, § 50) и, в зависимости от знака  $\sin \Delta$ , в положительную или отрицательную сторону (так как  $ab > 0$ ). Так как ось  $z$  нашей правой системы координат указывает направление распространения света, то направление вращения движущейся точки имеет определенный физический смысл.

В оптике свет считается правовращающим, если движение точки  $x, y$  представляется наблюдателю, смотрящему против света, происходящим по часовой стрелке. Поэтому мы считаем направление вращения правовращающего света отрицательным, а левовращающего света положительным. Наглядное представление о том, как зависит движение точки  $x, y$  от координат  $a, b, \Delta$ , можно получить, если  $a$  и  $b$  оставить постоянными, а разность фаз  $\Delta$  менять от 0 до  $2\pi$ . При  $\Delta = 0$  согласно (104) или (102) эллиптическое движение вырождается в прямолинейное колебание в первой и третьей четверти наклонно к оси под углом:

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a} \leq \frac{\pi}{4} \quad (105a)$$

с амплитудой  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

С увеличением разности фаз  $\Delta$  эллипс расширяется, и вращение происходит в положительном направлении. Свет, таким образом, имеет левое вращение. Вместе с этим угол  $\varphi$  уменьшается, т. е. большая ось эллипса поворачивается к оси  $x$ . При  $\Delta = \frac{\pi}{2}$  эллипс достигает своей наибольшей ширины, его полуоси равны  $a$  и  $b$ , их направления совпадают с осями координат. Когда  $\Delta$  делается больше  $\frac{\pi}{2}$ , большая ось переходит во вторую и четвертую четверть, эллипс делается все более удлиненным,

пока при  $\Delta = \pi$  опять не превратится в прямую, наклоненную под углом (105а) к оси  $x$ . Начиная отсюда, при дальнейшем росте  $\Delta$  форма эллиптического пути повторяется в обратном направлении, что ясно уже из того, что уравнение пути (103) остается неизменным, если  $\Delta$  заменить через  $2\pi - \Delta$ . Эллипс опять расширяется и его большая ось опять поворачивается к оси  $x$ , которой она достигает при  $\Delta = \frac{3\pi}{2}$ . Но теперь путь описывается в отрицательном направлении. Наконец, при  $\Delta = 2\pi$  опять получится движение, рассмотренное вначале. Поучительно также разобрать случай, когда при определенной разности фаз  $\Delta$  меняются амплитуды  $a$  и  $b$  составляющих колебаний. Можно видеть, между прочим, из (104), что тогда направление осей  $\varphi$  зависит только от отношения амплитуд  $a$  и  $b$  и что то же самое справедливо относительно отношения длин осей.

Условия, при которых движение делается круговым, легче всего получаются из выражения для направления осей (104), которое делается неопределенным в случае круга, т. е. принимает форму  $\frac{0}{0}$ ; это дает два условия для кругового колебания:

$$a = b, \quad \Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (106)$$

которые должны быть удовлетворены одновременно. В соответствии с тем, будет ли  $n$  четным или нечетным, движение по кругу будет происходить в положительном или отрицательном направлении.

§ 23. Рассмотренное эллиптическое колебание представляет собой также наиболее общий случай сложения скольких угодно плоских световых волн одной и той же частоты  $\omega$ , распространяющихся по направлению  $z$ . Каждое плоское колебание можно разложить на два слагающих колебания по направлениям  $x$  и  $y$  с разностью фаз 0; все же колебания по направлению  $x$  или  $y$  согласно принципу суперпозиции (§ 21) образуют одно колебание по тому же направлению.

Общий случай эллиптического колебания можно представить себе замененным вместо двух плоских колебаний двумя колебаниями по кругу, с противоположными направлениями вращения. Это станет ясным, если вспомнить, что каждое плоское колебание можно представить как сумму двух противоположно направленных движений по кругу. Обе вращающиеся точки встречаются всегда в одних и тех же местах и эти места определяют направление и половину амплитуды результирующего плоского колебания. Таким образом для общего случая мы получим четыре вращения по кругу, из которых два, имеющие одинаковое направление, можно, конечно, сложить в одно. Направление вращения, получающееся от сложения двух вращений, определяется, естественно, направлением вращения того кругового колебания, которое имело больший радиус.

§ 24. Рассмотрим вкратце еще зависимость электрических напряжений  $x$  и  $y$  в (102) от волновой нормали  $z$ . При неизменном  $t$  эти уравнения дают так называемую „волновую линию“, — в рассматриваемом случае эллиптическую винтовую линию, и согласно (105), если там заменить  $dt$  на  $-\frac{dz}{q}$ , правый винт (2, § 32), если  $\sin \Delta < 0$ , т. е. если направление вращения отрицательно. Шаг винта равен длине волны  $\lambda$ .

Если принять во внимание сказанное в § 23 относительно направления вращения правовращающего света, то получается, что правовращающему свету соответствует правый винт, левовращающему свету — левый винт. Движение точки  $x, y$  в плоскости  $z$  получится, если смещать винтовую линию вдоль оси  $z$  со скоростью  $q$  и наблюдать ее мгновенную точку пересечения с плоскостью  $z = \text{const}$ . Если взять обратное направление смещения винтовой линии, то получается волна, распространяющаяся в сторону отрицательных  $z$  и притом с вращением в противоположном направлении, так что опять правый винт соответствует правовращающему свету, левый винт — левовращающему свету.

§ 25. Рассмотрим теперь вопрос о том, как можно получить определенную разность фаз  $\Delta$  между обеими составляющими колебания  $x$  и  $y$ . Пусть мы имеем плоскополяризованную волну с направлением колебания  $\varphi$  в первой и третьей четверти, тогда согласно (102) отношение амплитуд постоянно и равно:

$$\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi \leq 1 \quad (107)$$

(ср. 105а) и разность фаз:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta = 0.$$

Эту волну заставляем отражаться под произвольным углом падения так, чтобы колебания электрического напряжения  $x$  происходили в плоскости падения. При обыкновенном отражении ( $\sin \vartheta < n$ ) не получается никакого скачка фазы, разность фаз  $\Delta$  остается равной нулю, и обе отраженные волны опять складываются в одну плоскополяризованную волну, но согласно (1050а) вследствие различия коэффициентов отражения  $\mu$  и  $\sigma$  с измененным направлением колебания. Это было нами уже отмечено в § 11.

Дело обстоит совершенно иначе, если наша волна претерпевает полное внутреннее отражение ( $\sin \vartheta > n$ ). Здесь, наоборот, остаются неизменными амплитуды  $a$  и  $b$  обеих волновых составляющих, но появляется разность фаз  $\Delta = \delta - \tau$ , значение которой получается из (57) и (66):

$$\text{tg } \frac{\Delta}{2} = \text{tg } \frac{\delta - \tau}{2} = \frac{\vartheta' \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_1}, \quad (108)$$

где  $\vartheta'$  определяется через (56).

Эта разность фаз  $\Delta$ , как мы уже установили в конце § 13, всегда положительна и исчезает в обоих предельных случаях:

для предельного угла  $\vartheta' = 0$  и для скользящего падения  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Между ними она достигает максимума, который согласно (108) получается при угле падения:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{2n^2}{1+n^2}; \quad (109)$$

величина этой наибольшей разности фаз равна:

$$\Delta = \pi - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} n, \quad \left. \begin{array}{l} \\ (0 < \operatorname{arc} \operatorname{tg} n < \frac{\pi}{4}). \end{array} \right\} \quad (110)$$

Чем меньше показатель преломления  $n$ , тем большей разности фаз можно достичь. После отражения обе составляющие колебания складываются в эллиптическое колебание; направление осей  $\varphi'$  определяется из (104) и (107):

$$\operatorname{tg} 2\varphi' = \operatorname{tg} 2\varphi \cdot \cos \Delta. \quad (111)$$

Для круговой поляризации света необходимо согласно (106), чтобы разность фаз была равна  $\frac{\pi}{2}$ . Наименьшее значение  $n$ , которое необходимо для получения разности фаз  $\frac{\pi}{2}$ , определяется из (110):

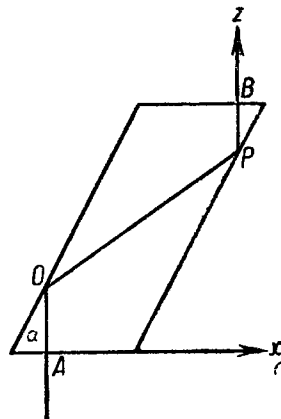
$$n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1. \quad (112)$$

Его обратная величина  $\sqrt{2} + 1 = 2,414$ ; такой показатель преломления должно иметь вещество, чтобы при полном внутреннем отражении на его поверхности получить разность фаз  $\frac{\pi}{2}$  между  $f$ - и  $g$ -волнами. Из известных веществ этому условию удовлетворяет лишь алмаз.

Если при помощи однократного полного внутреннего отражения практически нельзя добиться разности фаз  $\frac{\pi}{2}$ , то этого можно добиться сравнительно удобно при помощи двух последовательных отражений, для чего особенно подходит параллелепипед Френеля. Это — косоугольный параллелепипед из прозрачного стекла (черт. 5), угол  $\alpha$  которого выбран таким, что луч света, падающий из стекла в воздух под углом падения  $\vartheta = \alpha$ , претерпевает полное внутреннее отражение с разностью фаз  $\Delta = \frac{\pi}{4}$  между обеими компонентами колебания. Согласно (108) для данного сорта стекла это возможно при двух различных углах, из которых можно взять любой.

Если снизу (черт. 5) у точки  $A$  пустить перпендикулярно к основанию параллелепипеда луч света, колебания которого, как принято в начале этого параграфа, направлены под углом  $\varphi$  к

оси  $x$ , то уравнение (107) действительно для отношений амплитуд как до, так и после вступления луча в параллелепипед. Первое отражение происходит в точке  $O$ , на наклонной грани под углом падения  $\alpha$  с разностью фаз  $\frac{\pi}{4}$  и неизменными амплитудами; затем в  $P$ , на противоположной грани, происходит второе отражение с новой разностью фаз  $\frac{\pi}{4}$  и опять с неизменными амплитудами; наконец, в  $B$  луч по перпендикуляру выходит в воздух с равномерно уменьшенными амплитудами и неизменной разностью фаз, равной  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому луч, выходящий вверх в  $B$ , имеет эллиптические колебания, и его главные оси совпадают с осями координат  $x$  (вправо) и  $y$  (направлено за чертеж).



Черт. 5.

Так как было принято, что свет, падающий в  $A$ , имел колебания в первой и третьей четверти ( $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ), то свет, вышедший в точке  $B$ , имеет левое вращение. Но если падающий свет колеблется во второй и четвертой четверти ( $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi < \pi$ ),

то выходящий луч имеет правое вращение. При  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  или  $\frac{3\pi}{4}$  получается  $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$ , т. е. свет поляризован по кругу и имеет левое или правое вращение.

§ 26. Все изложенные выше рассуждения относятся к световому колебанию одной определенной частоты  $\omega$ , соответствующему одному члену разложения волновой функции в ряд Фурье. Так как в природе даже наиболее однородная световая волна содержит большое число отдельных синусообразных колебаний, то мы всегда должны суммировать по всем этим синусообразным колебаниям и таким образом получать соответствующие законы для результирующего колебания.

Вместо этого мы можем такое естественное „однородное“ световое колебание рассматривать, как в (73), как колебание определенной частоты  $\omega_0$ , у которого амплитуда и фазовая константа претерпевают со временем медленные беспорядочные изменения; во многих случаях это дает более наглядную картину явления. Из § 23 можно сделать вывод, что наиболее общая практически однородная световая волна может быть рассматриваема как одно эллиптическое колебание соответствующей частоты с медленно и беспорядочно меняющимися длинами и направлениями осей эллипса, или как два противоположно направленных круговых колебания с медленно и беспорядочно меняющимися радиусами.

Но так как вообще закономерности, выведенные в последних параграфах, начиная с § 22, совершенно независимы от частного значения частоты колебания  $\omega$ , то они без дальнейшего справедливы и при наложении многих синусообразных колебаний с близкими частотами. В частности, это справедливо для отношения амплитуд (107) обеих компонент колебания синусообразной волны линейно поляризованного света, а также и для заданной (108) разности фаз  $\Delta$  обеих компонент колебания, получающейся при полном внутреннем отражении, и вместе с этим и для направления (111) и для отношения длин обеих главных осей результирующего эллиптического колебания (ср. конец § 22). Все эти величины одинаковы для отдельных синусообразных волн, поэтому они постоянны и не зависят от времени и для результирующего колебания. Световые колебания с постоянным направлением и отношением осей называют „эллиптически поляризованным светом“. Под этим подразумевают не только то, что световые колебания эллиптически, — это само собой понятно, — но также и то, что в эллипсе, описываемом при колебании, хотя бы он менялся медленно и незакономерно, остаются неизменными направление осей, отношение их длин и направление вращения. Соответственно этому свет, поляризованный по кругу, представляет собой круговые колебания с медленно и беспорядочно меняющимся радиусом. Чтобы получить из плоскополяризованного света свет, поляризованный эллиптически или по кругу, можно пользоваться описанным выше параллелепипедом Френеля. Как мы видели, направление осей определяется плоскостью падения при полном внутреннем отражении, отношение осей — азимутом поляризации падающего света. Отсюда легко вывести заключение, что обе компоненты колебания такого света вполне когерентны (§ 20).

§ 27. Мы в состоянии теперь на основании всех этих результатов до известной степени проанализировать данную нам плоскую световую волну. Возьмем какую-нибудь реальную волну, происхождения которой мы не знаем, и поставим себе задачу — определить путем измерений ее форму, т. е. определить, как можно полнее, свойства обеих волновых функций  $f$  и  $g$ , из которых волна составлена.

Прежде всего мы производим спектральное разложение по одному из вышеописанных интерферометрических методов. После этого мы имеем дело только с однородным светом.

Для такой однородной световой волны мы определяем согласно § 11 оба главных направления колебания и обе главные интенсивности. При этом могут встретиться три случая. Первый случай, когда одна главная интенсивность равна нулю. Тогда свет линейно поляризован. Второй случай — противоположный, когда обе главные интенсивности равны между собой. Тогда свет или поляризован по кругу, или естественный, или представляет собой смесь обоих — так называемый частично поляризо-



ванных по кругу свет. Чтобы узнать, с каким из этих случаев мы имеем дело, пустим свет перпендикулярно на параллелепипед Френеля (черт. 5). Если свет поляризован по кругу, то амплитуды обеих компонент колебания  $f$  и  $g$  равны между собой и их разность фаз равна  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$ , смотря по тому, вправо или влево вращается свет. После выхода света амплитуды остаются равными, но разность фаз будет теперь  $\pi$  или  $2\pi$ , т. е. выходящий свет линейно поляризован и колеблется во второй и четвертой или первой и третьей четвертях под углом  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$  или  $\frac{\pi}{4}$  к оси  $x$ . Таким образом здесь начальная разность фаз обеих компонент при помощи двойного отражения дополняется до величины, кратной  $\pi$ , и параллелепипед Френеля действует как „компенсатор“.

Если же мы имеем дело с естественным светом, то никакой компенсации не будет и выходящий свет, как и падающий, не будет иметь никаких различий в различных направлениях колебания.

Наконец, если свет представляет собой смесь из естественного и поляризованного по кругу, то естественная часть остается неизменной, а часть, поляризованная по кругу, опять дает плоскополяризованный свет, который колеблется в азимуте  $\frac{3\pi}{4}$  или  $\frac{\pi}{4}$ ; его интенсивность определится из разности главных интенсивностей выходящего света.

В третьем случае — общем, когда обе главные интенсивности данного света отличны от нуля и не равны друг другу, свет пускают на параллелепипед Френеля так, чтобы направление большей главной интенсивности совпало с осью  $x$  (черт. 5). Если свет эллиптически поляризован, то обе компоненты колебания имеют разность фаз  $\frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$  и отношение амплитуд равно  $\frac{b}{a}$ . Под влиянием компенсатора получается плоскополяризованный свет с направлением колебания  $\varphi = \mp \arctg \frac{b}{a}$ , которое образует с осью  $x$  угол  $< \frac{\pi}{4}$ . Если же свет представляет собой смесь плоскополяризованного и естественного света, то и в выходящем свете большее главное колебание направлено по оси  $x$ .

Если, наконец, свет частично эллиптически поляризован, то в выходящем свете большее главное колебание образует с осью  $x$  угол  $< \frac{\pi}{4}$ , который указывает отношение осей эллипса, в то время как интенсивность поляризованной части определяется из разности главных интенсивностей.

Таким образом во всех случаях можно определить свойства данного луча в отношении его поляризации. Конечно, всегда остаются элементы, не поддающиеся определению, которые физически обусловлены сложностью элементарных процессов в каждом источнике света и которые находят свое математическое выражение в том, что в ряде Фурье имеется большое число членов, не равных нулю.

### ГЛАВА III

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 28. Изложенные выше законы отражения и преломления довольно просты. Эта простота вызвана главным образом сделанным предположением, что как поверхности световой волны (§ 5), так и поверхности, ограничивающие тела представляют собой бесконечные плоскости. В действительности эти поверхности не являются ни безграничными, ни плоскими, поэтому строго говоря, указанные простые законы не применимы к случаям, встречающимся в природе. Однако, если указанные предположения выполняются хотя бы приблизительно, т.е. если сечения волновых и граничных поверхностей и радиусы кривизны этих поверхностей очень велики по сравнению с длиной волны рассматриваемого света, то эти законы являются очень хорошим приближением к действительности. В оптике длина волны вообще говоря, очень мала по сравнению с размерами рассматриваемых тел. Отсюда вытекает особая простота оптических законов распространения, отражения и преломления, в противоположность тому, что имеет место в акустике, где законы волнового движения хотя и имеют силу, но указанные предположения вообще говоря, не выполняются.

Геометрическая оптика охватывает те закономерности, которые получаются, когда волновые поверхности света и поверхности тел представляют себе разделенными на маленькие части и к каждой применяют законы распространения, отражения и преломления безграничных плоских волн на безграничных плоских поверхностях. Каждый такой маленький участок волновой поверхности, рассматриваемый как часть плоскости, наглядно изображают лучом, направленным по нормали к нему. Каждый луч распространяется прямолинейно со скоростью, свойственной данной среде; на поверхности раздела двух сред он отражается и преломляется, сообразно с направлением нормали в этом месте, как от плоскости. Поэтому геометрическая оптика называется также „лучевой оптикой“ в отличие от более общей, но более сложной „волновой оптики“.

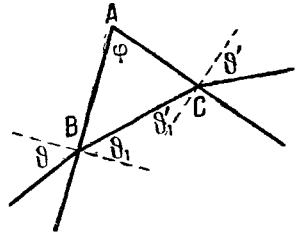
§ 29. В качестве первого примера рассмотрим ход светового луча через призму, т. е. через прозрачное тело, ограниченное

двумя плоскостями, наклоненными одна к другой под углом  $\varphi$ . Согласно сказанному выше, мы должны исключить из рассмотрения явления, имеющие место непосредственно у ребра  $A$  [которое мы представляем себе перпендикулярным к чертежу (черт. 6)], потому что там радиус кривизны поверхности преломления бесконечно мал.

Луч, падающий в плоскости чертежа в точку  $B$  под углом падения  $\vartheta$ , преломляется по направлению  $BC$  и в точке  $C$  вновь выходит в воздух под углом  $\vartheta'$  к нормали в этом месте. Для обоих преломлений имеем:

$$\sin \vartheta = n \sin \vartheta_1, \quad (113)$$

$$\sin \vartheta' = n \sin \vartheta_1'. \quad (114)$$



Черт. 6.

При этом сумма трех углов треугольника  $BAC$ :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) + \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1'\right) = \pi,$$

$$\vartheta_1 + \vartheta_1' = \varphi. \quad (115)$$

После построений вычисляется угол выхода  $\vartheta'$  в зависимости от угла входа  $\vartheta$ . Полное отклонение луча призмой  $\delta$ , т. е. угол между входящим и выходящим лучом, выражается так:

$$\delta = (\vartheta - \vartheta_1) + (\vartheta' - \vartheta_1')$$

Принимая во внимание (115):

$$\delta = \vartheta + \vartheta' - \varphi. \quad (116)$$

Исследуем зависимость полного отклонения  $\delta$  от угла входа  $\vartheta$  пользуясь (113), (114) и (115), найдем производную:

$$\frac{d\delta}{d\vartheta} = 1 - \frac{\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_1'}{\cos \vartheta_1 \cos \vartheta'}. \quad (117)$$

Это выражение равно нулю при  $\vartheta_1' = \vartheta_1$ , а следовательно, и  $\vartheta' = \vartheta$ , т. е. когда луч проходит призму симметрично, так что расстояния  $AB$  и  $AC$  равны между собой. Тогда отклонение имеет максимум или минимум, равный  $\delta_0$ . Результат зависит от знака второй производной, которая получается вторичным дифференцированием (117) и при  $\vartheta' = \vartheta$  равна:

$$\left(\frac{d^2\delta}{d\vartheta^2}\right)_0 = \frac{2 \sin(\vartheta + \vartheta_1) \cdot \sin(\vartheta - \vartheta_1)}{\sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \vartheta_1}. \quad (118)$$

Когда показатель преломления вещества призмы  $n > 1$ , вторая производная при  $\vartheta' = \vartheta$  положительна и отклонение имеет минимум.

Этот предельный случай можно довольно точно осуществить экспериментально, если при неизменном направлении падающего луча поворачивать призму вокруг оси, параллельной одному из ее

ребер, туда и назад и наблюдать направление выходящего луча. Когда пробями найдено минимальное отклонение  $\delta_0$  из (116), (113) и (115), вычисляется показатель преломления вещества призмы:

$$n = \frac{\sin \frac{\varphi + \delta_0}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \quad (119)$$

§ 30. Прежде чем перейти к рассмотрению кривых волновых поверхностей и кривых поверхностей тел, мы предположим дальнейшему несколько общих замечаний. Начальной поверхностью волны в изотропном теле является сферическая поверхность. От каждого точечного источника света распространяются сферические световые волны, которые на достаточном расстоянии от источника света могут быть представлены пучком расходящихся лучей. После преломления или отражения на кривой поверхности другого тела направления лучей в общем случае не пересекаются в одной точке, т. е. пучок лучей уже является не „гомоцентрическим“, а „астигматическим“. Если же, как это бывает в особых случаях, пучок лучей оказывается опять гомоцентрическим, то та точка, в которой лучи пересекаются, называется „оптическим изображением“ источника света, действительным или мнимым, смотря по тому, сходятся ли лучи к точке их пересечения или расходятся от нее. Так как свет всегда может проделать и обратный путь (конец § 10), то источник света и его изображение могут обменяться ролями. Поэтому они называются „сопряженными“ точками. Изображение бесконечно удаленного источника света, или, что то же самое, точка пересечения лучей, образованных преломлением или отражением пучка падающих параллельных лучей, если она вообще существует, называется „фокусом“. Если фокус сделать местонахождением источника света, то получится пучок параллельных лучей. На этом основано получение на практике плоских световых волн.

§ 31. Теперь мы исследуем вопрос о преломлении света на сферической поверхности, разделяющей две среды 1 и 2 (черт. 7).

Пусть будут  $n_1$  и  $n_2$  показатели преломления этих двух сред,  $C$  — центр сферы,  $r = PC$  — радиус ее. Найдем сперва изображение светящейся точки  $A_1$ , лежащей на оси системы, т. е. на прямой  $PC$ . Из всех лучей, выходящих из  $A_1$ , лишь осевой луч  $A_1P$  проходит через сферическую поверхность без преломления. Другой луч, выходящий из  $A_1$  под углом  $\vartheta_1$  к оси, встречает сферу в точке  $Q$ . Там он преломляется по закону

$$\frac{\sin \angle A_1QC}{\sin \angle A_2QC} = \frac{n_2}{n_1}$$

и встречает ось в точке  $A_2$  под углом  $\vartheta_2$ . Вычисление обоих синусов при помощи треугольников  $A_1QC$  и  $A_2QC$  дает соотношение:

$$\frac{A_1C}{A_1Q} : \frac{A_2C}{A_2Q} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (120)$$

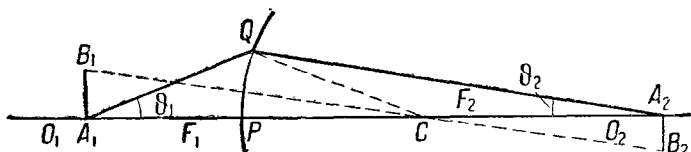
Вообще с изменением  $\vartheta_1$ , а следовательно, и с изменением положения точки  $Q$ , изменится и положение точки  $A_2$ , т. е. пучок лучей, выходящий из  $A_1$ , становится после преломления астигматическим. Но если  $\vartheta_1$  взять достаточно малым, то можно в (120) расстояния  $A_1Q$  и  $A_2Q$  с ошибкой второго порядка заменить расстояниями  $A_1P$  и  $A_2P$ ; обозначая расстояния  $A_1$  и  $A_2$  от  $P$  через  $e_1$  и  $e_2$ , получим:

$$\frac{e_1 + r}{e_1} : \frac{e_2 - r}{e_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (121)$$

или

$$\frac{n_1}{e_1} + \frac{n_2}{e_2} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \quad (122)$$

Так как точка  $Q$  здесь не фигурирует, то пучок лучей, выходящий из точки  $A$  конусом с малым телесным углом, остается гомоцентрическим и после преломления, и точка  $A_1$  имеет опти-



Черт. 7.

ческое изображение: сопряженную ей точку  $A_2$ . Закон оптического изображения выражается согласно (122) линейным уравнением между обратными расстояниями сопряженных точек от преломляющей сферической поверхности.

Когда  $A_1$  передвигается влево в бесконечность,  $A_2$  передвигается влево в фокус  $F_2$ , абсцисса которого

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r. \quad (123)$$

Когда  $A_1$  движется вправо, то  $A_2$  сперва уходит направо, уходя в бесконечность, когда точка  $A_1$  приходит в фокус  $F_1$  с абсциссой

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot r, \quad (124)$$

но если  $A_1$  переходит через фокус  $F_1$ , преломленный пучок становится расходящимся, т. е. точка  $A_2$  лежит левее  $A_1$  и является мнимым изображением  $A_1$ , которое следует за перемещающейся вправо светящейся точкой  $A_1$ , пока они не сольются в  $P$ . Точка  $P$  сопряжена сама с собой, так же как и точка  $C$ , так как лучи, выходящие из  $C$ , вообще не отклоняются.

Абсциссы  $f_1$  и  $f_2$  фокусов связаны соотношениями

$$f_2 - f_1 = r, \quad (125)$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (126)$$

Если их ввести вместо  $r$  и  $n$ , то закон изображения выражается так:

$$\frac{f_1}{e_1} + \frac{f_2}{e_2} = 1. \quad (127)$$

Все эти соотношения, как мы увидим, можно значительно обобщить. Здесь отметим еще, что данные формулы справедливы и для изображения, получаемого отражением на сферической поверхности, если только положить

$$n_1 = -n_2.$$

Когда лучи, выходящие из  $A_1$ , после преломления встречаются в точке изображения  $A_2$ , то угол расхождения пучка лучей в  $A_1$  другой, чем у сопряженного пучка в  $A_2$ . Из черт. 7 следует для углов наклона к центральной оси обоих сопряженных лучей  $A_1Q$  и  $A_2Q$ :

$$\sin \vartheta_1 : \sin \vartheta_2 = A_2Q : A_1Q$$

и с соответствующим приближением

$$\sin \vartheta_1 : \sin \vartheta_2 = A_2P : A_1P = e_2 : e_1. \quad (128)$$

§ 32. Исследуем теперь изображение точки, не лежащей на центральной оси. Пусть  $B_1$  (черт. 7) будет точкой, лежащей в плоскости, проходящей через  $A_1$  и перпендикулярной к центральной оси.  $B_1$  так же, как и  $A_1$ , имеет оптическое изображение в сопряженной точке  $B_2$ , находящейся на прямой  $B_1C$ . Окружность, описанная точкой  $B_1$  при вращении вокруг центральной оси  $A_1A_2$ , имеет своим оптическим изображением окружность, образованную вращением  $B_2$ . Поверхность круга с радиусом  $A_1B_1$  отображается куском определенной поверхности вращения, ограниченной окружностью  $B_2$  с центром в  $A_2$ . Если ограничиться маленькими расстояниями от центральной оси, как мы это и будем делать, то эту поверхность можно считать плоскостью, а именно кругом, перпендикулярным к центральной оси с радиусом  $A_2B_2$ . Тогда светящаяся поверхность „подобно“ отображается на поверхности изображения и для отношения длины светящейся линии  $A_1B_1 = l_1$  к длине линии изображения  $A_2B_2 = l_2$  имеем:

$$l_1 : l_2 = A_1C : A_2C$$

и согласно (121):

$$l_1 : l_2 = \frac{n_2 e_1}{n_1 e_2}.$$

Это соотношение вместе с равенством (128) дает следующую простую связь между линейными размерами и наклоном лучей в двух сопряженных плоскостях:

$$n_1 l_1 \sin \vartheta_1 = n_2 l_2 \sin \vartheta_2. \quad (129)$$

Если точка  $A_1$  находится в фокусе  $F_1$ , то  $l_2 = \infty$  и  $\vartheta_2 = 0$ . Две плоскости, проходящие перпендикулярно к оси через первый и второй фокусы  $F_1$  и  $F_2$ , называются фокальными плоскостями.

§ 33. Все вышеизложенные законы могут быть легко обобщены на случай многих преломляющих сферических поверхностей. Для этого необходимо только выбрать соответствующим образом абсциссы двух сопряженных точек  $A_1$  и  $A_2$ . До сих пор мы принимали абсциссы равными расстояниям  $e_1$  и  $e_2$  от преломляющей сферической поверхности, причем считали положительные  $e_1$  влево, положительные  $e_2$  вправо. Начало отсчета  $P$  сопряжено само с собою. Теперь для каждой из абсцисс мы выберем особое начало отсчета, притом так, чтобы оба начала отсчета  $O_1$  и  $O_2$  были сопряженными точками. В остальном они могут быть выбраны произвольно. Кроме того, обе абсциссы  $x_1$  и  $x_2$  мы будем считать положительными, когда точки  $A_1$  и  $A_2$  лежат вправо от своих начал отсчета. Если  $a_1$  и  $a_2$  обозначают расстояния новых начальных точек  $O_1$  и  $O_2$  от сферической поверхности, то согласно (127):

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1 \quad (130)$$

и новые абсциссы  $x_1$  и  $x_2$  связаны со старыми  $e_1$  и  $e_2$  следующим образом (черт. 7):

$$\begin{aligned} O_1A_1 &= O_1P - A_1P = a_1 - e_1 = x_1, \\ O_2A_2 &= PA_2 - PO_2 = e_2 - a_2 = x_2. \end{aligned}$$

Подставив в (127)  $x_1$ ,  $x_2$  вместо  $e_1$ ,  $e_2$  и приняв во внимание (130), получим закон оптического изображения:

$$\frac{a_1 - f_1}{x_1} + \frac{f_2 - a_2}{x_2} = 1, \quad (131)$$

т. е. опять-таки линейное соотношение между обратными абсциссами обеих сопряженных точек.

§ 34. Теперь мы перейдем к исследованию системы, состоящей из произвольного числа центрированных сферических поверхностей. Система называется центрированной, когда центры всех поверхностей лежат на одной прямой — центральной оси системы. Если мы опять ограничимся лучами и светящимися точками, близкими к центральной оси, т. е. малыми значениями  $\vartheta$  и  $l$ , то законы изображения можно вывести из вышеизложенных. Возьмем сначала светящуюся точку, лежащую на оси, и узкий пучок, идущий от нее в первой среде. Этой точке соответствует определенная, лежащая на оси сопряженная точка, действительная или мнимая, а пучку лучей соответствует определенный сопряженный пучок лучей во второй среде. Этим последним опять соответствуют определенные сопряженные величины в третьей среде, и так постепенно приходим к определенной сопряженной точке  $A'$  и определенному сопряженному пучку лучей в последней среде.

Так как обратные абсциссы двух последовательных сопряженных точек по отношению к любой паре сопряженных точек

взятых в качестве начальных точек, связаны линейно между собой, то это будет справедливо и для абсцисс  $x$  и  $x'$  сопряженных точек  $A$  и  $A'$  в первом и последнем теле и закон отображения имеет ту же форму, как в (131)<sup>1)</sup>:

$$\frac{l}{x} + \frac{l'}{x'} = 1. \quad (132)$$

Для  $x = 0$  имеем  $x' = 0$ . Тогда точки  $A$  и  $A'$  совпадают с сопряженными началами отсчета  $O$  и  $O'$ . Постоянные  $f$  и  $f'$  являются, очевидно, абсциссами фокусов точек в первой и последней средах. Когда фокусы лежат по разные стороны от начальных точек, то  $f$  и  $f'$  имеют противоположные знаки.

Длины  $l$  и  $l'$  двух сопряженных отрезков, проходящих через  $A$  и  $A'$  перпендикулярно к центральной оси, очевидно, согласно (129) связаны соотношением:

$$nl \sin \vartheta = n'l' \sin \vartheta', \quad (133)$$

где  $n$  и  $n'$  — показатели преломления первой и последней сред,  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  — углы с центральной осью каких-либо сопряженных лучей, проходящих через  $A$  и  $A'$ .

Величины  $l$  и  $l'$  и углы  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  мы будем в дальнейшем считать положительными, когда они направлены в одну определенную (для всех тел) сторону. Это не внесет никакого изменения в знаке в (133).

§ 34а. Постараемся теперь найти пару сопряженных точек, лежащих на оптической оси, для которых  $l = l'$ . Ясно, что изображение любой фигуры, лежащей в плоскости, проходящей через одну из этих точек, перпендикулярно к центральной оси, получится в плоскости, проходящей через сопряженную точку, и будет совершенно конгруэнтно объекту (изображение будет без

<sup>1)</sup> В этом проще всего убедиться путем доказательства от  $n$  к  $n+1$ . Допустим, что (132) имеет место для  $n-1$  преломлений и  $x_n$  — абсцисса  $A_n$  относительно  $O_n$  — точки, сопряженной  $O_1$ , и напишем (132) в виде:

$$\frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_n} = 1.$$

Для  $n$ -го преломления имеем:

$$\frac{\alpha'}{x_n} + \frac{\beta'}{x_{n+1}} = 1,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  обозначают величины, аналогичные  $a_1 - f_1$ ,  $f_2 - a_2$  в (131). Исключая из этих уравнений  $x_n$  и обозначая  $\alpha'' = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha' - \beta'}$ ,  $\beta'' = \frac{\beta\beta'}{\beta' - \alpha'}$ , получим:

$$\frac{\alpha''}{x_1} + \frac{\beta''}{x_{n+1}} = 1.$$

Отсюда и из того, что (132) справедливо для  $n = 1$ , следует, что (132) справедливо для любого числа  $n$  преломляющих поверхностей. Прим. ред.



увеличения или уменьшения). Обозначим эти точки через  $H$  и  $H'$  и найдем их абсциссы  $x$  и  $x'$ . Из (133) получаем:

$$n \sin \vartheta = n' \sin \vartheta'.$$

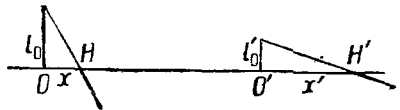
Проведя через  $H$  и  $H'$  два каких-нибудь сопряженных луча под малыми углами  $\vartheta$  и  $\vartheta'$  к центральной оси и обозначая через  $l_0$  и  $l'_0$  расстояния от оси точек их пересечения с плоскостями, проходящими через начала координат  $O$  и  $O'$  перпендикулярно оси (черт. 8), получим:

$$n \frac{l_0}{x} = n' \frac{l'_0}{x'}.$$

Отсюда, пользуясь (132), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x &= f + \frac{nl_0}{n'l'_0} f', \\ x' &= \frac{n'l'_0}{nl_0} f + f'. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Точки  $H$  и  $H'$  однозначно определяются этими уравнениями. Они называются „главными точками“, а проведенные через них конгруэнтно отображающиеся одна на другую плоскости называются „главными плоскостями“ системы.



Черт. 8.

Формулы значительно упрощаются, если начала координат  $O$  и  $O'$  поместить в главные точки  $H$  и  $H'$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что начала координат выбраны именно таким образом. Тогда в (134)  $x$  и  $x'$  равны нулю, а, с другой

стороны,  $l_0 = l'_0$ , следовательно:

$$f : f' = -n : n', \quad (135)$$

т. е. фокальные точки лежат с противоположных сторон главных точек (обе внутри или обе вне их). Их расстояния (черт. 9) от главных точек, так называемые фокусные расстояния, относятся, как показатели преломления. Для закона изображения (132) получаем:

$$\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{n}{f}. \quad (136)$$

Если первая среда одинакова с последней (например обе воздух), то  $n' = n$  и оба фокусных расстояния равны друг другу, и закон изображения принимает более простой вид:

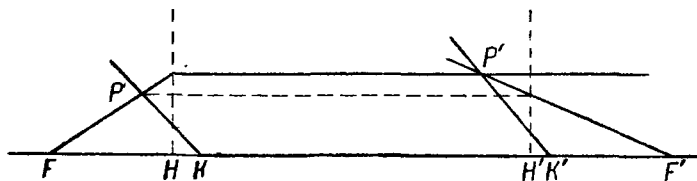
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}. \quad (136a)$$

§ 35. Главным точкам  $H$  и  $H'$ , характеризующимся тем, что плоскости, проходящие через них, конгруэнтно отображают одна

другую, аналогичны в некотором отношении узловые точки. Это две сопряженные точки  $K$  и  $K'$ , которые характеризуются тем, что каждому лучу пучка, проходящего через  $K$ , сопряжен параллельный луч пучка, проходящего через  $K'$ , так что для любых двух сопряженных лучей  $\vartheta = \vartheta'$ . Положение узловых точек легко найти, если принять во внимание, что два параллельных, взаимно сопряженных луча, проходящих через  $K$  и  $K'$ , пересекают главные плоскости на одинаковом расстоянии  $l_0 = l_0'$  от центральной оси, так что и абсциссы  $x$  и  $x'$  обеих узловых точек равны между собою. Поэтому из (132) получается:

$$x = x' = f + f' = f \left( 1 - \frac{n'}{n} \right), \quad (137)$$

т. е. обе узловые точки находятся на одинаковом расстоянии от соответствующих главных точек, именно на расстоянии, равном разности фокусных расстояний.



Черт. 9.

Примерное положение главных точек, фокусов и узловых точек представлено на черт. 9, на котором абсциссы узловых точек положительны, а фокусы лежат вне главных точек, так что  $f + f' > 0$ ,  $f < 0$ ,  $f' > 0$ . Тогда

$$HK = H'K' = H'F' - HF.$$

Следовательно:

$$H'F' = HK + HF = Fk,$$

т. е. пары точек  $FF'$ ,  $HK'$  и  $KH'$ , которые все вместе называются „кардинальными точками“, имеют общую для всех пар одну и ту же среднюю точку, которая называется оптическим центром системы. Если имеется лишь одна преломляющая поверхность (черт. 7), то эта поверхность отображается конгруэнтно сама на себе, и, следовательно, в ней совпадают обе главные плоскости. Вследствие этого совпадают и узловые точки, а именно в другой самосопряженной точке — центре сферы  $C$ . Это видно непосредственно, так как каждый проходящий через  $C$  луч сопряжен с самим собой. При этом уравнения (135) и (137) для отношения и разности фокусных расстояний непосредственно переходят в уравнения (126) и (125), найденные в § 31 и относящиеся к этому частному случаю.

Если имеется система линз в воздухе, то фокусные расстояния равны между собой и узловые точки совпадают с главными точками. Если имеется лишь одна тонкая линза, то главные точки совпадают внутри самой линзы.

Вообще положение кардинальных точек дает простой геометрический метод нахождения точки  $P'$ , в последней среде сопряженной с любой точкой  $P$ , лежащей в первой среде (черт. 9). Для этого только нужно для двух произвольных лучей, проходящих через  $P$ , начертить сопряженные лучи. Целесообразнее всего взять луч  $PK$ , проходящий через узловую точку  $K$ . Лучом, сопряженным с ним, является параллельный ему луч  $P'K'$ . Кроме того, можно воспользоваться лучом, проходящим через  $P$  параллельно оси; сопряженный с ним в последней среде луч проходит через фокус  $F'$  и встречает соответствующую главную плоскость на таком же расстоянии от центральной оси, на каком начальный луч встречает главную плоскость в первой среде. Таким образом точка  $P'$  найдена. Можно рассмотреть также луч  $PF$ . С ним сопряжен луч, параллельный оси и пересекающий последнюю главную плоскость на таком же расстоянии от оси, на каком первый луч пересекает первую главную плоскость.

§ 36. Полное изложение законов оптического изображения должно касаться не только путей лучей, но также и интенсивности их. При рассмотрении этого вопроса необходимо иметь в виду, что конечное количество энергии излучения никогда не выходит из одной точки, а всегда из некоторой поверхности, и распространяется внутри некоторого конечного телесного угла, а не в одном строго определенном направлении. Это обстоятельство можно наглядно выразить, считая, что энергия пучка пропорциональна числу лучей, входящих в пучок. Каждый пучок лучей содержит бесконечное число  $\infty^4$  лучей (бесконечное многообразие четырех измерений), так как поверхность, из которой он исходит, определяет бесконечное число точек двух измерений ( $\infty^2$ ), а каждая точка определяет конус с бесконечным числом направлений тоже двух измерений  $\infty^2$ . При этом надо обратить внимание на следующее обстоятельство. Лучи, выходящие из одной светящейся точки по разным направлениям, когерентны между собой ввиду того, что точка эта является центром волновой поверхности, на которой фаза всюду одна и та же. Лучи же, идущие из двух различных точек поверхности объекта, вообще говоря, некогерентны, во всяком случае, если объект является источником света. Поэтому такие лучи не интерферируют друг с другом, их интенсивности просто складываются. Однако бывают случаи (их иногда упускают из виду), когда две различные точки поверхности излучают когерентный свет и, наоборот, когда из одной точки поверхности в разных направлениях идут некогерентные лучи, например, когда поверхность (отверстие, щель) освещена посторонним источником света; тогда могут иметь место некоторые интерференционные явления, ко-

торые геометрическая оптика объяснить не в состоянии. Поэтому будем предполагать, что поверхность самосветящаяся.

Когда источник света помещен в фокус, то получается пучок параллельных лучей, но согласно сказанному не в том смысле, что все лучи пучка параллельны, а в том смысле, что каждой точке светящейся поверхности соответствует особое направление лучей пучка, причем величина светящейся поверхности определяет телесный угол конуса различных направлений лучей. Наоборот, лучи, приходящие от практически бесконечно далекого источника света, например от солнца, не собираются все в определенном фокусе, но в фокальной плоскости получается малое изображение солнца, так как все параллельные между собой лучи, исходящие из одной точки солнца, встречаются в одной точке фокальной плоскости.

Рассмотрим интенсивность (поток энергии)  $J$  излучения, распространяющегося от малого элемента поверхности  $f$ , перпендикулярного к центральной оси в нормальном направлении, внутри узкого конуса с телесным углом  $\Omega$ . Согласно сказанному она равна:

$$J = K \cdot f \cdot \Omega. \quad (138)$$

Величина (конечная)  $K$  называется „удельной интенсивностью излучения“ или также „удельной яркостью“ пучка лучей.

Для сопряженного пучка лучей, падающего внутри сопряженного конуса лучей  $\Omega'$  на сопряженную площадку  $f'$ , имеет место соответствующее соотношение:

$$J' = K' f' \Omega'. \quad (139)$$

Величины  $f$  и  $\Omega$  в первой и последней среде связаны согласно законам оптического изображения уравнением (133). Так как изображение подобно объекту, то форма поверхности не имеет значения. Мы можем взять ее в виде круга радиуса  $l$ . Тогда

$$f = l^2 \pi, \quad f' = l'^2 \pi.$$

В качестве телесного угла  $\Omega$  возьмем телесный угол кругового конуса с малым углом раствора  $\vartheta$ . Тогда

$$\Omega = 4\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \vartheta^2 \pi.$$

Точно так же  $\Omega' = \vartheta'^2 \pi$ .

Пользуясь этими значениями  $\Omega$  и  $\Omega'$  и соотношением (133), имеем:

$$n^2 f \Omega = n'^2 f' \Omega', \quad (140)$$

а принимая во внимание (138) и (139), получаем:

$$\frac{n^2 J}{K} = \frac{n'^2 J'}{K'}. \quad (141)$$

Если общая интенсивность излучения  $J$  (полный поток энергии)

в обоих сопряженных пучках одинаковая (что, конечно, никогда не может выполняться точно, хотя бы потому, что при каждом преломлении излучение частью теряется), то

$$\frac{K}{n^2} = \frac{K'}{n'^2} \text{ или } Kq^2 = K'q'^2, \quad (142)$$

т. е. яркости относятся обратно пропорционально квадратам скорости распространения света. Для  $n = n'$  будет  $K = K'$ . Поэтому путем оптического изображения яркость какого-либо пучка никогда не может быть увеличена. В фокусе излучение хотя и концентрируется на меньшей поверхности, зато оно рассеивается по более расходящимся направлениям.

§ 37. Изложенные выше простые законы оптического изображения системой центрированных сферических поверхностей являются по большей части лишь первым приближением к реальным соотношениям, так как в практической оптике приходится иметь дело с поверхностями конечного размера и с конечными конусами лучей. К поправкам, вызываемым этими обстоятельствами, добавляются еще поправки, обусловленные зависимостью показателя преломления от цвета лучей (§ 9). В связи с необходимостью учитывать эти поправки возникает ряд сложных задач. Решение этих задач имеет громадное значение для техники оптических инструментов. Однако все эти поправки не вносят изменения в общие законы геометрической оптики в том виде, как они обрисованы нами в § 28.

Общие законы геометрической оптики могут быть объединены в одно простое и наглядное положение — принцип Ферма (или принцип наименьшего времени распространения луча). Принцип этот позволяет установить ход светового луча через произвольное число различных тел с любыми ограничивающими поверхностями. Принцип Ферма состоит в следующем: время, потребное свету, чтобы из определенной точки притти к какой-нибудь другой точке, меньше на пути луча, чем на любом соседнем пути. Заметим, что этот принцип является исторически одним из первых примеров равноправности интегрального закона с дифференциальным (ср. §, § 42).

Можно дать простое доказательство этого принципа, если рассмотреть поверхность волны, распространяющейся от светящейся точки  $P$ . Согласно § 5 каждому моменту времени  $t$  соответствует определенная волновая поверхность. Независимо от того, окружена ли точка  $P$  одной средой или разными средами, эта поверхность представляет собой границу, достигнутую к моменту  $t$  светом, вышедшим в момент  $t = 0$  из точки  $P$ . На волновой поверхности лежат концы всех лучей, вышедших из  $P$  по разным направлениям; каждый из этих лучей шел по своему определенному пути. Пусть  $Q$  — некоторая точка волновой поверхности, а  $PQ$  обозначает определенный (вообще говоря, не прямой) луч; от точки  $P$  до точки  $Q$  свет распространяется за

время  $t$ . Если бы свет из  $P$  мог по какому-либо другому пути достичь  $Q$  за время меньшее, чем  $t$ , то свет, выходящий из  $P$  во все стороны, за промежуток времени от 0 до  $t$  прошел бы дальше  $Q$ , что противоречит самому определению волновой поверхности. Поэтому  $t$  представляет собой минимум времени, необходимый свету, чтобы каким угодно путем дойти от  $P$  до  $Q$ .

Исходя из принципа Ферма, можно развить всю геометрическую оптику, и притом даже для неоднородных и анизотропных сред. Прямолинейное распространение света в однородной изотропной среде по принципу Ферма является непосредственным следствием того, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между точками  $P$  и  $Q$ . Рассмотрим еще следующий пример перехода света через плоскую границу двух однородных изотропных сред. Пусть  $q$  и  $q_1$  — скорости распространения,  $A$  и  $B$  — проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскость границы,  $C$  — точка прохождения луча через границу (черт. 10); наконец,  $\vartheta$  и  $\vartheta_1$  — углы падения и преломления; тогда время, потребное свету, чтобы притти из  $P$  в  $Q$ , равно

$$t = \frac{PC}{q} + \frac{CQ}{q_1} = \frac{r}{q} + \frac{r_1}{q_1}, \quad (143)$$

причем

$$r^2 = AP^2 + AC^2 \text{ и } r_1^2 = BQ^2 + BC^2. \quad (144)$$

При смещении точки перехода  $C$  расстояния  $AP$ ,  $BQ$  и  $AB$  остаются постоянными, в то время как  $AC = a$  и  $BC = b$  меняются так, что

$$\delta a + \delta b = 0, \quad (145)$$

следовательно, согласно (143) и (144):

$$\delta t = \frac{a \delta a}{r q} + \frac{b \delta b}{r_1 q_1}.$$

Полагая  $\delta t = 0$  и принимая во внимание (145), получим:

$$q : q_1 = \frac{a}{r} : \frac{b}{r_1} = \sin \vartheta : \sin \vartheta_1,$$

условие, совпадающее с (20).

1) Заметим, что принцип Ферма сохраняет силу и для определения путей лучей, испытывающих отражения. Нужно только иметь в виду, что в этом случае время прихода для пути луча всегда будет *extremum*, но может и не быть минимальным (может быть, например, наибольшим). Прим. ред.

Подобным же образом можно применить принцип Ферма к определению путей распространения света в любых телах с любыми поверхностями.

Если конечный пункт  $Q$  какого-нибудь луча, выходящего из  $P$ , совпадает с точкой, оптически сопряженной с  $P$ , то путь луча  $PQ$  неопределенный, и имеется бесчисленное множество лучей от  $P$  к  $Q$ . В соответствии с этим время, потребное свету для прохождения от  $P$  до  $Q$ , одинаково для всех этих путей, и оптическая поверхность волны, идущей от  $P$ , имеет в  $Q$  особую точку.

#### ГЛАВА IV

### ДИФРАКЦИЯ

§ 38. Законы геометрической оптики неприменимы в тех случаях, когда волновые поверхности или поверхности тел нельзя рассматривать как бесконечные по сравнению с длиной волны. Понятие луча и его распространения теряет тогда смысл. В этих случаях имеют место явления, называемые „дифракцией“. Согласно сказанному в § 28 дифракция, вообще говоря, играет тем большую роль, чем больше длина волны применяемого света. Полная теория дифракции возможна только на основе дифференциальных уравнений для электромагнитных волн в рассматриваемой среде (мы будем теперь считать, что это вакуум со скоростью распространения  $q = c$ ) и граничных условий, выполняющихся на поверхности дифрагирующих тел.

Дифференциальные уравнения поля внутри среды можно свести к одному единственному дифференциальному волновому уравнению (3, § 87):

$$\ddot{\varphi} = c^2 \Delta \varphi. \quad (146)$$

Ему должна удовлетворять каждая компонента  $\varphi$  любого вектора поля.

Краевые условия могут быть различны; вид их зависит от свойств дифрагирующих тел. Они имеют наиболее простой вид для так называемых абсолютных проводников (3, § 92); внутри них электрическое поле равно нулю. Абсолютные проводники действуют как идеальное зеркало. Противоположный крайний случай представляют собой так называемые черные тела, они поглощают весь падающий свет. Проблемы дифракции относятся к труднейшим в оптике. Строгое решение одной из этих проблем было дано впервые А. Зоммерфельдом в 1895 г.

Волновую функцию  $\varphi$  всегда можно представить в виде ряда Фурье и общее решение (146) свести к сумме частных решений, каждое из которых соответствует определенной частоте  $\omega$ . Для такого частного решения можно написать:

$$\varphi = \psi e^{i\omega t}, \quad (146a)$$

где  $\psi$  обозначает определенную комплексную функцию простран-

ственных координат. Модуль или абсолютное значение  $\psi$  характеризует амплитуду, а аргумент — фазовую постоянную периодического колебания.

Из волнового уравнения (146) следует, что функция пространственных координат  $\psi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\Delta\psi + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0$$

или

$$\Delta\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0, \quad (146b)$$

которое нужно интегрировать, приняв во внимание краевые условия.

Строгие решения формулированной таким образом дифракционной проблемы очень сложны, нахождение их требует применения достаточно сложного математического аппарата. Поэтому очень важно, что приближенные решения, практически вполне достаточные для коротких оптических волн, можно получить, пользуясь принципом Гюйгенса. Идея принципа Гюйгенса состоит в том, что каждая точка, до которой дошла световая волна, сама делается источником новой световой волны, распространяющейся от нее по концентрическим сферическим поверхностям. Г. Кирхгоф в 1882 г. дал более точную формулировку принципа Гюйгенса; она представляет собой развитие формулы Грина из теории потенциала, вывод которой мы сейчас дадим.

§ 39. Пусть  $U$  и  $V$  представляют собой внутри некоторой области пространства две однозначные непрерывные функции пространственных координат  $x, y, z$  с непрерывными производными первого порядка. Тогда для этой области пространства [согласно 2, § 18, (80) (где  $d\tau$  — элемент объема,  $d\sigma$  — элемент поверхности и  $\nu$  — внутренняя нормаль к поверхности)] справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \int \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\tau &= - \int V \frac{\partial U}{\partial \nu} d\sigma - \int V \Delta U d\tau = \\ &= - \int U \frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma - \int U \Delta V d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\int \left( U \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int (V \Delta U - U \Delta V) d\tau. \quad (147)$$

Если взять  $U = \frac{1}{r}$ , где  $r$ , взятое с положительным знаком, — расстояние точки  $x, y, z$  от произвольной точки  $A$ , лежащей вне области интегрирования, то  $U$  удовлетворяет условиям однозначности и непрерывности; кроме того,  $U = \frac{1}{r}$  удовлетворяет



уравнению Лапласа [1, (129)]  $\Delta U = 0$ . Следовательно, из (147) получается:

$$\int \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\nu} \right) d\sigma = - \int \frac{\Delta V}{r} d\tau. \quad (148)$$

Если точка  $A$  лежит внутри рассматриваемой области пространства, то, исключив при интегрировании очень маленькую сферу с центром в точке  $A$  (где  $U = \frac{1}{r}$  имеет разрыв непрерывности), можно опять применить это уравнение. При этом правая часть меняется лишь незначительно (ср. 1, § 33), к левой же части уравнения в качестве добавочного члена прибавляется интеграл по поверхности выделенной сферы (элемент ее  $d\sigma$ ). Принимая во внимание, что направленная внутрь области интегрирования нормаль к этой сфере совпадает с  $r$ , получим этот интеграл в виде:

$$\int \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + V \cdot \frac{1}{r^2} \right) d\sigma_1.$$

Если радиус сферы взять достаточно малым, то этот интеграл ввиду конечности  $V$  и  $\frac{\partial V}{\partial r}$  сводится к интегралу:

$$\int \frac{V}{r^2} d\sigma_1 = V_0 \int \frac{d\sigma_1}{r^2} = 4\pi V_0,$$

где  $V_0$  обозначает значение  $V$  при  $r = 0$ , т. е. в точке  $A$ . Прибавив этот член к левой части уравнения (148), получим формулу Грина:

$$4\pi V_0 = - \int \frac{\Delta V}{r} d\tau + \int \left( V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (149)$$

Эта формула позволяет найти значение функции  $V$  в каждой точке  $A$  рассматриваемой области пространства, если даны значения  $\Delta V$  в каждой внутренней точке области и значения  $V$  и  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  на поверхности ее.

Если функция  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta V = 0$ , то объемный интеграл пропадает и в правой части (149) остаются лишь величины  $V$  и  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  на поверхности объема. В этом случае формула Грина особенно полезна, однако ее значение существенно ограничено тем, что значения  $V$  и  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  на поверхности не могут быть выбраны независимо друг от друга. В самом деле, известно, что решение уравнения Лапласа внутри некоторой области вполне определено заданием как значений одного только  $V$  на поверхности области (3, § 19), так и заданием значений одной только производной  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  на поверхности (2, § 71).

Но формула Грина при задании на поверхности либо только  $V$ , либо только  $\frac{\partial V}{\partial \nu}$  может только в том случае служить непосредственно для определения  $V$  во внутренних точках, если еще каким-нибудь образом можно определить для всех точек поверхности недостающую величину.

§ 40. Формулу, выражающую принцип Гюйгенса, можно вывести непосредственно из формулы Грина. Для этого вставим в последнюю вместо  $V$  некоторую волновую функцию, которую нужно выбрать так, чтобы объемный интеграл в (149) можно было свести к поверхностному. Этого нельзя сделать, если вместо  $V$  просто подставить решение  $\varphi$  волнового уравнения (146). Как мы увидим, этот объемный интеграл удастся свести к поверхностному интегралу, если в качестве  $V$  в (149) взять какую-нибудь функцию  $\varphi$  от  $x, y, z, t$ , удовлетворяющую волновому уравнению (140), но вместо  $t$  в качестве аргумента подставить  $t - \frac{r}{c}$ , где  $r$  обозначает, как и прежде, расстояние точки  $x, y, z$  от точки  $A$ , лежащей внутри области интеграции. Нужно, следовательно, иметь в виду, что теперь  $V$  зависит от координат  $x, y, z$  двумя способами, во-первых, явно, так как  $\varphi$  — функция координат, во-вторых, неявно через  $r$ , так как аргумент:

$$t - \frac{r}{c} = \tau \quad (150)$$

содержит расстояние  $r$ . Чтобы выразить это яснее, мы будем писать:

$$V = \varphi_{\tau}(x, y, z), \quad (151)$$

причем мы пишем пространственные координаты в скобках под знаком функции, а временную координату ставим внизу в виде индекса. Нам нечего опасаться смещения временного аргумента  $\tau$  с элементом объема  $d\tau$ , так как последний скоро исчезнет из формул. В этих обозначениях (149) приобретает такой вид:

$$4\pi\varphi_{\tau}(0) = - \int \frac{\Delta\varphi_{\tau}}{r} d\tau + \int \left( \varphi_{\tau} \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_{\tau}}{\partial \nu} \right) d\sigma. \quad (152)$$

Эта формула дает значение волновой функции  $\varphi$  в момент  $t$  в какой-нибудь точке, лежащей внутри области интегрирования, ограниченной поверхностью  $\sigma$  с внутренней нормалью  $\nu$ . Чтобы теперь свести объемный интеграл к поверхностному, вычислим значение  $\Delta\varphi_{\tau}$ , которое, разумеется, не равно  $(\Delta\varphi)_{\tau}$ , вычисленному, считая при дифференцировании  $\tau$  постоянным.

Мы имеем:

$$\frac{\partial\varphi_{\tau}}{\partial x} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{\tau} + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{\tau} \cdot \frac{\partial\tau}{\partial x} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{\tau} - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{\tau} \frac{\partial r}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2\varphi_{\tau}}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right)_{\tau} - \frac{2}{c} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial t} \right)_{\tau} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \right)_{\tau} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)_{\tau} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Аналогичные выражения получаются для  $\frac{\partial^2 \varphi_{\tau}}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 \varphi_{\tau}}{\partial z^2}$ . Сложением получаем:

$$\Delta \varphi_{\tau} = (\Delta \varphi)_{\tau} - \frac{2}{c} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \frac{\partial r}{\partial z} \right)_{\tau} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{\tau} - \frac{2}{cr} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\tau}.$$

Если из волнового уравнения (146) сюда вставить значение  $(\Delta \varphi)_{\tau}$ :

$$(\Delta \varphi)_{\tau} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{\tau},$$

то выражение для  $\Delta \varphi_{\tau}$  можно представить как производную по времени:

$$\Delta \varphi_{\tau} = -\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{r} \right)_{\tau}$$

или

$$\Delta \varphi_{\tau} = -\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi_{\tau}}{\partial r} + \frac{\varphi_{\tau}}{r} \right).$$

Таким образом объемный интеграл в (152) преобразуется в

$$\int \frac{\Delta \varphi_{\tau}}{r} d\tau = -\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\tau}{r} \left( \frac{\partial \varphi_{\tau}}{\partial r} + \frac{\varphi_{\tau}}{r} \right),$$

а если элемент объема  $d\tau$  выразить при помощи полярных координат с началом в точке  $A$  и через  $d\omega$  обозначить телесный угол элементарного конуса с вершиной в  $A$ , то

$$d\tau = r^2 dr d\omega,$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{\Delta \varphi_{\tau}}{r} d\tau &= -\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int dr d\omega \cdot \left( r \frac{\partial \varphi_{\tau}}{\partial r} + \varphi_{\tau} \right) = \\ &= -\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d\omega \cdot [r \varphi_{\tau}]_0^r. \end{aligned} \quad (153)$$

После интегрирования по  $r$ , в выражение, стоящее в квадратных скобках, нужно еще подставить в качестве верхнего предела расстояние  $r$  элемента поверхности  $d\sigma$  от  $A$ , зависящее от направления, а в качестве нижнего предела значения  $r=0$ . Подстановка значения  $r=0$  дает нуль и остается только член, относящийся к поверхности. Элемент поверхности  $d\sigma$  связан с величиной телесного угла  $d\omega$  опирающегося на него элементарного конуса следующим соотношением:

$$r^2 d\omega = -d\sigma \cdot \cos(r; \nu) = -d\sigma \cdot \frac{\partial r}{\partial \nu} \quad (154)$$

(знак минус, так как направления возрастающего  $r$  и возрастающего  $\nu$  образуют между собой тупой угол).

Отсюда следует

$$\int \frac{\Delta \varphi_{\tau}}{r} d\tau = +\frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d\sigma \cdot \frac{\varphi_{\tau}}{r} \frac{\partial r}{\partial \nu} = \frac{2}{c} \int \frac{d\sigma}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\tau} \cdot \frac{\partial r}{\partial \nu}. \quad (155)$$

Рассматриваемый элементарный конус  $d\omega$  может пересекать поверхность объема интегрирования больше одного раза, но всегда нечетное число раз (если поверхность не везде выпуклая наружу). В этом случае взятый по  $r$  интеграл в (153) распадается на отдельные части, и легко можно убедиться в том, что соотношение (155) остается в силе, если только интегрирование по  $d\sigma$  распространить на всю поверхность, охватывающую область интегрирования. Примем, наконец, во внимание, что входящая в (152) величина  $\frac{\partial \varphi_{\tau}}{\partial v}$  равна:

$$\frac{\partial \varphi_{\tau}}{\partial v} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_{\tau} - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\tau} \frac{\partial r}{\partial v}. \quad (156)$$

Теперь формула Грина (152) переходит в принцип Гюйгенса:

$$4\pi\varphi_t(0) = \int \Omega_{\nu} d\sigma, \quad (157)$$

где согласно (155) и (156) для сокращения принято обозначение:

$$\Omega_{\nu} = \left( \varphi \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{1}{cr} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial v} \right), \quad (158)$$

Вместо этого иногда пишут короче:

$$\Omega_{\nu} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\varphi_{\tau}}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_{\tau}; \quad (159)$$

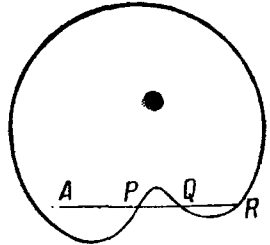
но в такой форме формула неверна, ибо при таком написании не учтено, что в первом члене дифференцирование  $\varphi_{\tau}(x, y, z)$  по  $\nu$  должно распространяться лишь на зависимость от аргумента  $\tau$ , а не от координат  $x, y, z$ .

Значение принципа Гюйгенса состоит в том, что согласно ему волновая функция, удовлетворяющая внутри некоторой области пространства волновому уравнению (146), вполне определяется в какой-нибудь точке  $A$  внутри этой области в момент времени  $t$  значениями  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  на поверхности этой области; значения  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  на поверхности должны быть взяты в моменты времени  $\tau$ , различные для разных элементов поверхности; эти моменты предшествуют моменту  $t$  на время, потребное свету, чтобы дойти от соответствующих элементов до  $A$ .

Принцип Гюйгенса можно согласно только что сказанному формулировать следующим образом: каждый элемент поверхности  $d\sigma$  все время отсылает сферические волны, распространяющиеся во всех направлениях со скоростью света. Световое поле этих волн определяется световым полем на элементе поверхности  $d\sigma$ , испускающем их. Значение волновой функции в точке  $A$  аддитивно складывается из значений в этой точке волновых функций этих элементарных сферических волн, приходящих

к моменту  $t$  в точку  $A$  из всех элементов замкнутой поверхности  $\sigma$ . Нельзя, однако, упускать из виду, что эта картина справедлива только для замкнутой поверхности  $\sigma$ ; поэтому не имеет физического смысла говорить о действии отдельных элементов поверхности  $d\sigma$ , так как интеграл (157) может быть разложен на свои дифференциалы бесконечным числом способов. Значение высказанного здесь ограничения становится особенно ясным в том случае, если среди выходящих из  $A$  прямых имеются прямые, пересекающие поверхность больше чем в одной точке, например в трех точках  $P, Q, R$  (черт. 11).

В этом случае интегрирование не распространяется на область  $PQ$ ; между  $P$  и  $Q$  волновое уравнение (146) может и не удовлетворяться; более того, там могут находиться любые тела, даже непрозрачные для световых лучей. Тем не менее принцип Гюйгенса в форме (157) имеет место, причем интегрирование нужно распространить по всей поверхности  $\sigma$  и нельзя исключать элементы поверхности в  $Q$  и  $R$  на том основании, что свет от них не может прямолинейно достичь точки  $A$ .



Черт. 11.

§ 41. Разделим область интегрирования на две части 1 и 2 так, чтобы точка  $A$  находилась внутри части 1. При этом мы получим две области пространства с элементами поверхности  $d\sigma_1$ ,  $d\sigma_2$  и  $d\sigma_0$ ; при этом  $d\sigma_0$  обозначает элемент введенной поверхности раздела. Теперь принцип Гюйгенса можно применить двумя способами, во-первых, можно применить его к первоначальной поверхности с элементами  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$ , при этом получится:

$$4\pi\varphi_t(0) = \int \Omega_{\nu_1} d\sigma_1 + \int \Omega_{\nu_2} d\sigma_2,$$

во-вторых, к поверхности области 1 с элементами  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_0$ , при этом имеем:

$$4\pi\varphi_t(0) = \int \Omega_{\nu_1} d\sigma_1 + \int \Omega_{\nu_{01}} d\sigma_0,$$

где  $\nu_{01}$  обозначает нормаль к поверхности раздела, направленную внутрь объема 1.

Вычитанием обоих уравнений получаем:

$$0 = \int \Omega_{\nu_2} d\sigma_2 - \int \Omega_{\nu_{01}} d\sigma_0,$$

а так как  $\nu_{01}$  и  $\nu_{02}$  направлены в противоположные стороны, то

$$0 = \int \Omega_{\nu_2} d\sigma_2 + \int \Omega_{\nu_{02}} d\sigma_0. \quad (160)$$

Но  $\sigma_2$  и  $\sigma_0$  образуют замкнутую поверхность объема 2. Таким образом получаем общее положение, что интеграл Гюйгенса,

взятый для точки  $A$ , лежащей вне области интегрирования, равен нулю. Это положение находится в полном соответствии с формулой Грина в форме (148).

§ 42. Теперь мы применим принцип Гюйгенса к области пространства, ограниченной с одной стороны поверхностью, отделяющей все тела, принимаемые во внимание при исследуемом явлении: источники света, экраны и т. д., а с другой стороны — очень большой сферической поверхностью радиуса  $R$  с центром, лежащим в конечной части пространства. Уравнение (157) применимо и в этом случае, если только во всей области интегрирования удовлетворяется волновое уравнение (146). Интеграл Гюйгенса распадается при этом на два интеграла: один по первой поверхности (точки которой находятся на конечном расстоянии) с элементом  $ds$  и с нормалью  $\nu$ , направленной внутрь области интегрирования и, следовательно, направленной к точке  $A$ ; второй — по сферической поверхности радиуса  $R$  с элементом  $dS$ . Без дальнейшего исследования второй интеграл нельзя считать равным нулю при достаточно большом значении  $R$ , так как хотя подинтегральное выражение  $\Omega$  и уменьшается безгранично при увеличении  $R$ , но, с другой стороны, безгранично растет величина поверхности. Однако, если относительно формы волновой функции  $\varphi$  сделать некоторое допущение, ни в какой степени не ограничивающее действительное протекание явления, то этим интегралом можно пренебречь. Для этого нужно только принять, что для моментов времени  $t < -T$ , где  $T$  очень большой промежуток времени, волновая функция  $\varphi$  вместе с ее производными всюду равна нулю, т. е. все источники света начали действовать лишь в какой-то определенный момент времени. Тогда исчезает значение  $\varphi$  вместе с ее производными для всех элементов поверхности  $dS$ , если только

$$\tau = t - \frac{R}{c} < -T.$$

Следовательно, надо выбрать  $R > (T + t)c$ . Конечно, в это условие входит переменная величина  $t$ , но это не создает трудности, ибо можно заранее выбрать  $R$  таким, что неравенство будет выполнено даже для наибольших значений  $t$ , встречающихся при измерениях. Физически это означает, что  $R$  должно быть выбрано таким, чтобы какое-либо исходящее от отдаленной сферической поверхности воздействие к моменту  $t$  еще не дошло до точки  $A$ .

После этих замечаний мы можем считать, что уравнение (157) применимо и в том случае, когда точка  $A$  лежит по одну сторону от поверхности  $\sigma$ , а источники света, экраны и пр. находятся по другую сторону этой поверхности.

Подводя итоги, мы можем сказать: принцип Гюйгенса в форме (157) применим всегда, когда поверхность  $\sigma$  совершенно отделяет точку  $A$  от действующих тел, так что нет никакого пути,

ведущего от какого-либо из этих тел к точке  $A$ , и не пересекающего поверхности  $\sigma$ .

§ 43. Интересующую нас проблему дифракции мы формулируем в общем случае следующим образом. На пути света от данного источника поставлен непрозрачный экран с одним или многими отверстиями определенной формы и положения. Требуется найти интенсивность света в точке  $A$  позади экрана.

Прежде всего мы можем упростить задачу, приняв во внимание только одну точку  $C$  источника света, рассматривая источник как точечный; тогда (§ 36) интенсивности света, вызванные другими точками источника, просто прибавляются к интенсивности, исходящей от  $C$ . Затем волновую функцию  $\varphi$  света, идущего от источника, находящегося в точке  $C$ , можно представить в виде ряда Фурье и при расчете ограничиться одним его членом. Это можно сделать потому, что при естественном свете постоянной интенсивности отдельные члены ряда независимы друг от друга и не дают заметной интерференции.

Применяя принцип Гюйгенса к рассматриваемому случаю, мы проводим поверхность Гюйгенса так, чтобы она отделяла „точку дифракции“  $A$  от источника света и от экрана, и чтобы она, кроме того, проходила вплотную к экрану и через отверстия, со стороны, обращенной к точке  $A$ . Тогда, пользуясь (157) и (158), мы можем интегрированием по поверхности Гюйгенса вычислить значение  $\varphi$  в точке  $A$ .

Однако, чтобы продвинуться дальше в решении задачи, мы вынуждены пожертвовать точностью этого решения. Положение здесь такое же, как при применении формулы Грина (конец § 39). Для определения величины  $\Omega$ , стоящей в (158) под знаком интеграла, мы должны знать значение  $\varphi$  и ее производных по  $\nu$  и по  $t$  во всех точках поверхности Гюйгенса, а это уже предполагает, что проблема нахождения  $\varphi$  частично разрешена. Эта трудность особенно усугубляется еще тем, что значения  $\varphi$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  в определенной точке поверхности не независимы друг от друга и что вставляя в выражение  $\Omega$  какие-нибудь приближенные значения этих величин, мы, вообще говоря, приходим даже к внутреннему противоречию. Действительно ли получается такое противоречие и какого оно характера, можно выяснить, переместив точку дифракции  $A$  на гюйгенсову поверхность и сравнив полученные из (157) значения  $\varphi$  и его производных с первоначально вставленными в  $\Omega$  значениями их.

Несмотря на это, мы сможем пойти дальше по избранному пути. Бесчисленные применения показали, что принцип Гюйгенса не только в его строгой формулировке, но даже при лишь приблизительно верных значениях  $\Omega$  приводит к результатам, вполне достаточным для потребностей практической оптики. Это приближенное значение  $\Omega$  можно получить, если принять, что в отверстиях экрана значения  $\varphi$  и его производных, входящих

в  $\Omega$ , таковы, каковыми они были бы в случае отсутствия экрана, а что во всех других точках поверхности  $\sigma$  они равны нулю. Интеграл (157) нужно распространить тогда только на отверстия экрана, а при вычислении  $\Omega$  при помощи (158) наличие экрана можно вообще игнорировать.

Естественно, (157) распадается на столько отдельных интегралов, сколько имеется отверстий, и каждый интеграл относится только к одному отверстию. При этом легко убедиться в том, что значение интеграла зависит только от края отверстия; в самом деле, поверхности Гюйгенса можно придать различную форму, лишь бы граница ее оставалась прежняя — край отверстия. Поэтому можно с тем же успехом говорить о „дифрагирующем отверстии“, как и о „дифрагирующем крае“.

§ 44. Из сказанного выше вытекает, что теперь для решения задачи нужно только узнать волновую функцию и ее производные для всех точек отверстия, причем решать задачу так, как будто экран отсутствует. Для этого достаточно простого интегрирования волнового уравнения (146). В качестве простейшей формы частного решения этого уравнения, соответствующей строго монохроматической волне, исходящей из светящейся точки  $C$ , мы согласно 2, (230) возьмем выражение:

$$\varphi = \frac{A}{r_1} e^{i\omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right)}, \quad (161)$$

где  $r_1$  — расстояние рассматриваемой точки от светящейся точки  $C$  (в отличие от  $r$ , расстояния точки дифракции  $A$  от элемента поверхности  $d\sigma$ ). Величина  $A$  представляет собой некоторую комплексную постоянную, остальные обозначения те же, что и раньше [ср., например, (83)].

Вставляя выражение (161) для  $\varphi$  в (158) и выполняя соответствующие дифференцирования, мы увидим, что величина  $\Omega$  распадается на несколько членов, порядок величины которых различен. Действительно, для оптических явлений длина волны  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  мала сравнительно с расстояниями  $r$  и  $r_1$  точки дифракции  $A$  и светящейся точки  $C$  от дифрагирующего отверстия; поэтому в  $\Omega$ , члены, содержащие  $\omega$  множителем, велики сравнительно с остальными членами и эти последние можно отбросить (ср. 2, § 88).

Наконец, вставив в качестве аргумента  $\Omega$ , везде вместо  $t$  величину  $\tau = t - \frac{r}{c}$ , получим:

$$\Omega_v = \frac{2\pi i A}{\lambda r r_1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \right) e^{i\omega \left[ t - \frac{r+r_1}{c} \right]},$$

и в силу (157):

$$\varphi_t(0) = \frac{iA}{2\lambda} \int \frac{d\sigma}{r_1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \right) e^{i\omega \left[ t - \frac{r+r_1}{c} \right]}. \quad (162)$$



Для упрощения дальнейшей трактовки этого выражения мы следующим образом специализируем проблему, сохранив все характерные черты дифракционных явлений. Именно, мы предположим, что, во-первых, дифракционный экран плоский и, во-вторых, что свет падает перпендикулярно, параллельными лучами и параллельными волновыми плоскостями, т. е. что  $r_1$  во всех точках дифрагирующего отверстия имеет постоянное значение, очень большое по сравнению с другими расстояниями. Тогда  $\frac{\partial r_1}{\partial v} = 1$ , в то время как  $\frac{\partial r}{\partial v} = -\cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  обозначает „угол дифракции“ (знак минус, так как направление возрастающего  $v$  образует тупой угол с направлением возрастающего  $r$ ). Вставляя эти значения, видим, что (162) обращается в

$$\varphi_t(0) = \frac{iA}{r_1} e^{i\omega \left[ t - \frac{r_1}{c} \right]} \cdot \int \frac{d\sigma}{\lambda r} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}$$

или

$$\varphi_t(0) = \frac{iA}{r_1} e^{i\omega \left[ t - \frac{r_1}{c} \right]} (C - iS), \quad (163)$$

где для сокращения положено:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{\lambda} \int \frac{d\sigma}{r} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{2\pi r}{\lambda}, \\ S &= \frac{1}{\lambda} \int \frac{d\sigma}{r} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{2\pi r}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Действительная часть (163) представляет периодическое (во времени) синусообразное колебание; интенсивность его мы согласно § 18 найдем, умножая комплексную величину (163) на величину, ей комплексно сопряженную. Так как нас интересует не абсолютное значение интенсивности света, а отношение интенсивности дифрагированного света к интенсивности падающего, то мы делим полученную таким образом величину на интенсивность падающего света, а именно на произведение комплексного выражения (161) на сопряженную величину, т. е. на  $\frac{|A|^2}{r_1^2}$ .

Таким путем мы получаем следующее выражение для интенсивности дифрагированного света в точке  $A$ :

$$J = C^2 + S^2. \quad (165)$$

Проблема дифракции сведена таким образом к нахождению обоих интегралов  $C$  и  $S$ , в которых  $d\sigma$  обозначает элемент поверхности дифрагирующего отверстия,  $r$ —его расстояние от точки наблюдения  $A$ ,  $\vartheta$ —угол дифракции.

§ 45. Наиболее важным в выражениях для  $C$  и  $S$  является различие в характере зависимости содержащихся в них величин от переменных интеграций. В то время как  $\vartheta$  и  $r$  меняются

сравнительно медленно, при переходе от одного элемента к другому, тригонометрические функции, наоборот, вследствие большой величины аргумента  $\frac{r}{\lambda}$  изменяются быстро, колеблясь между максимумом и минимумом. Единственным исключением являются те элементы поверхности  $d\sigma$ , расстояние  $r$  которых от точки  $A$  имеет минимум, потому что тогда  $r$  мало меняется с  $\sigma$ . Это справедливо для всех элементов поверхности  $d\sigma$ , которые лежат в непосредственной близости от прямой линии, перпендикулярной к плоскости экрана, соединяющей светящуюся точку  $S$  с точкой наблюдения  $A$ . Поэтому эта прямая  $AS$ , которую мы назовем „центральной линией“, и, в частности, точка пересечения ее с поверхностью Гюйгенса играют существенную роль при определении интенсивности света в  $A$ .

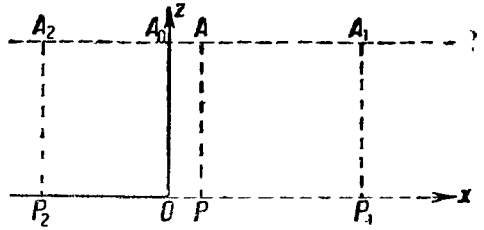
Но имеется случай, когда центральной линии вообще нет. Это будет тогда, когда не только точка  $S$ , но и точка  $A$  лежит в бесконечности. Тогда  $AS$  не обозначает никакой определенной линии, но лишь определенное направление, и никакая точка поверхности Гюйгенса не играет особенной роли. Интегралы  $S$  и  $S$  при этом совершенно меняют свой характер. Этому случаю соответствуют дифракционные явления, открытые Фраунгофером и носящие его имя.

§ 46. Займемся прежде всего общим случаем, так называемым случаем дифракции Френеля. Разберем явление дифракции от плоского экрана, ограниченного прямолинейным краем. Ответ на этот вопрос представляет интерес и для общего случая экрана, ограниченного краем любой формы, так как такой край может быть представлен состоящим из прямолинейных отрезков, если только кривизна его достаточно велика по сравнению с длиной волны. Вместе с этим мы подходим к вопросу о границе тени, образуемой телом любой формы.

Проведем плоскость черт. 12 через точку наблюдения  $A$  перпендикулярно к краю экрана. Ось  $x$  направим по линии пересечения плоскости чертежа с экраном и положим начало координат  $O$  в точке края экрана. Край экрана, перпендикулярный к плоскости чертежа, возьмем в качестве оси  $y$ , а ось  $z$  проведем в плоскости чертежа. Координаты точки наблюдения  $A$  назовем  $x, y=0, z$ , координаты какой-либо точки плоскости экрана  $\xi, \eta, \zeta=0$ . Если экран простирается в сторону положительных значений  $x$ , интегрирование должно производиться по элементам поверхности  $d\sigma = a\xi d\eta$ , лежащим в плоскости  $x, y$  и соответствующим положительным значениям  $\xi$ .

Отсюда пределы интегриации: для  $\xi$  — от 0 до  $\infty$ , для  $\eta$  — от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При вычислении интегралов (164) мы будем исходить из характеризующих их свойств, указанных выше. Для этого проведем центральную линию  $AS$ , пересекающую плоскость экрана в точке  $P$ . Поверхностные интегралы (164), для которых переменными интегриации являются координаты  $\xi$  и  $\eta$ , мы разобьем

на две части следующим образом: пусть первый частичный интеграл охватывает точки, лежащие вблизи точки  $P$ , расстояния которых от  $P$  малы сравнительно с  $AP = z$ ; второй частичный интеграл распространяется тогда на все остальные точки интегрируемой области. Более четкое определение границы первого частичного интеграла мы дадим позже. Согласно сказанному мы можем в этом интеграле медленно меняющиеся величины  $r$  и  $\vartheta$  заменить соответственно через  $z$  и  $0$  и тогда получаем:



Черт. 12.

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{\lambda z} \int \int d\xi d\eta \cos \frac{2\pi r}{\lambda} + \dots \\ S &= \frac{1}{\lambda z} \int \int d\xi d\eta \sin \frac{2\pi r}{\lambda} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Здесь многоточия обозначают второй частичный интеграл. Чтобы выполнить интегрирование по  $\eta$ , мы напишем:

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2;$$

или, так как  $y = 0$  и  $\zeta = 0$ :

$$r^2 = \varrho^2 + \eta^2, \quad (167)$$

где

$$\varrho^2 = (\xi - x)^2 + z^2 \quad (168)$$

остаётся постоянным при интегрировании. Интегрируем по  $\eta$  в пределах от  $-\eta'$  до  $+\eta'$ , полагая

$$\eta' \ll z. \quad (169)$$

Так как согласно принятому  $\eta \ll \varrho$ , то мы можем (167) разложить по степеням, откинув члены высших порядков:

$$r = \varrho + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\varrho} + \dots \quad (170)$$

Подставляя это в (166), имеем:

$$\cos \frac{2\pi r}{\lambda} = \cos \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \cos \frac{\pi \eta^2}{\lambda \varrho} - \sin \frac{2\pi \varrho}{\lambda} \sin \frac{\pi \eta^2}{\lambda \varrho}. \quad (171)$$

Таким образом мы сводим задачу к подсчету следующих двух интегралов:

$$\int_{-\eta'}^{+\eta'} d\eta \cos \frac{\pi \eta^2}{\lambda \varrho} \quad \text{и} \quad \int_{-\eta'}^{+\eta'} d\eta \sin \frac{\pi \eta^2}{\lambda \varrho}. \quad (172)$$

Положим для сокращения

$$\eta \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_0}} = u. \quad (173)$$

Тогда мы приведем интегралы к виду:

$$\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}} \int_{-u'}^{+u'} \cos u^2 du \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}} \int_{-u'}^{+u'} \sin u^2 du. \quad (174)$$

Величину

$$u' = \eta' \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_0}} \quad (175)$$

мы можем без нарушения условия (169) принять очень большой сравнительно с единицей, полагая

$$\eta' \gg \sqrt{\lambda z}. \quad (176)$$

Делая это, мы дополняем приведенное выше определение области интегрирования первого частичного интеграла в выражениях для  $C$  и  $S$ . Тогда оба интеграла в (174) принимают вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du. \quad (177)$$

Оба эти „интеграла Френеля“, как будет показано в следующем параграфе, имеют конечное значение, а именно каждый из них равен  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Вставив эту величину в (174), получим для обоих интегралов (172) одно и то же значение  $\sqrt{\frac{\lambda_0}{2}}$ ; согласно (168) можно написать вместо него  $\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$ . Обращаясь теперь к (166) и приняв во внимание (171), получим следующие выражения для  $C$  и  $S$ :

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} (c - s) + \dots,$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} (c + s) + \dots,$$

где для сокращения положено:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int \cos \frac{2\pi \eta}{\lambda} d\xi, \\ s &= \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int \sin \frac{2\pi \eta}{\lambda} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Наконец, на основании (165) находим:

$$J = c^2 + s^2 + \dots \quad (179)$$

Таким образом задача сводится к вычислению обыкновенных интегралов  $c$  и  $s$ , выраженных формулами (178). Аналогия их с поверхностными интегралами  $C$  и  $S$  в (166) бросается в глаза. Ясно, что  $c$  и  $s$ , так же как  $C$  и  $S$ , представляют собой отвлеченные числа.

В интегралах Френеля кажется удивительным то обстоятельство, что они, простираясь в обе стороны в бесконечность, имеют конечное значение, несмотря на то, что в данном случае подинтегральные выражения их не исчезают в бесконечности, как обычно бывает у подобных интегралов, но сохраняют конечную величину, принимая поочередно положительные и отрицательные значения. Но, несмотря на это, в результате получается конечное значение для интеграла. Это объясняется тем, что при возрастании  $\eta$  максимумы и минимумы  $+1$  и  $-1$  сдвигаются все ближе между собой, так что колебания значений интеграла делаются все меньше. Такое своеобразное поведение является математическим отображением некоторого, имеющего физический смысл, обстоятельства. Последнее заключается в том, что влияющие элементарных волн, соответствующих полоскам  $d\eta$  поверхности Гюйгенса, на величину волновой функции в точке  $A$  хотя и сохраняет один и тот же порядок величины с удалением полосы от центральной линии, но зато все быстрее меняет свой знак. Это обстоятельство обуславливает недейственность тех элементов поверхности  $d\sigma$ , координаты которых  $\eta$  имеют величину порядка  $\eta'$  (176). Оно еще в большей степени будет иметь место для тех элементов поверхности, которые еще дальше расположены от центральной линии, т. е. для которых координата  $\eta > \eta'$ . Отсюда следует, что часть интеграла в выражениях (164) для  $C$  и  $S$ , соответствующая интегрированию от  $\eta = \eta'$  до  $\eta = \infty$ , не влияет заметно на величину волновой функции в точке  $A$ . При этом надо указать, что величины  $r$  и  $\vartheta$ , входящие в коэффициенты при косинусе и синусе, также меняются по мере роста  $\eta$ ; но их изменения сравнительно так малы, что для интервала  $\eta$ , который охватывает много максимумов и минимумов косинуса и синуса, ими можно пренебречь.

Отсюда вытекает, что мы можем откинуть многоточия во всех наших формулах и в дальнейшем, во всех других случаях дифракции Френеля, ограничиться при интегрировании только теми элементами  $d\sigma$  поверхности Гюйгенса, которые лежат вблизи центральной линии, соответственно условиям (169) и (176). Итак, впредь мы будем пользоваться соотношением:

$$J = c^2 + s^2. \quad (179a)$$

§ 47. В этом параграфе, имеющем вспомогательное значение, мы займемся исследованием интегралов Френеля. Прежде

всего мы должны вычислить определенные интегралы (177). Для этого будем исходить из интеграла Лапласа:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx, \quad (180)$$

где  $a > 0$ .

Мы можем также написать его в виде:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy.$$

Умножением находим двойной интеграл

$$L^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)}.$$

Введя полярные координаты, имеем:

$$dx dy = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

и

$$L^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \cdot e^{-a\rho^2}.$$

В результате интегрирования получаем:

$$L = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (181)$$

Интегралы Френеля могут быть найдены при помощи интеграла Лапласа, если в последнем заменить  $a$  на  $i$ .

Ради краткости мы опускаем доказательство того, что уравнение (181) справедливо и для  $a = i$ . Из (180) получаем:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2) dx$$

и из (181):

$$L = \sqrt{\frac{\pi}{i}} = (1-i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Приравнивая друг к другу последние выражения, находим для обоих интегралов значения, указанные в предыдущем параграфе:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

В дальнейшем нам потребуется знать величину интегралов Френеля для переменных пределов, поэтому мы продолжим исследование несколько дальше.

Заметим прежде всего, что путем разбиения рассмотренного интеграла на две части легко получить величину интеграла для случая, когда один из пределов его равен нулю. Действительно, так как  $(+u)^2 = (-u)^2$ , имеем:

$$\int_{-\infty}^0 \cos u^2 du = \int_0^{\infty} \cos u^2 du = \int_0^{\infty} \sin u^2 du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (183)$$

Но интеграл с переменным пределом  $u$  нельзя свести к элементарным функциям, и для вычисления необходимо воспользоваться разложением в ряд. С помощью интегрирования по частям можно разложить интеграл, взятый в пределах от 0 до  $u$ , в сходящийся всюду ряд. Действительно, находим:

$$\begin{aligned} \int_0^u \cos u^2 du &= u \cos u^2 + 2 \int_0^u u^2 \sin u^2 du, \\ \int_0^u \sin u^2 du &= u \sin u^2 - 2 \int_0^u u^2 \cos u^2 du. \end{aligned}$$

Продолжая преобразование интегралов, находящихся в правой части равенства, при помощи интегрирования по частям, получаем в конце концов:

$$\int_0^u \cos u^2 du = \cos u^2 \cdot \Sigma + \sin u^2 \cdot \Gamma, \quad (184)$$

$$\int_0^u \sin u^2 du = \sin u^2 \cdot \Sigma - \cos u^2 \cdot \Gamma, \quad (185)$$

где для сокращения положено:

$$\Sigma = u - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} u^5 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} u^9 - \dots \quad (186)$$

$$\Gamma = \frac{2}{3} u^3 - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7} u^7 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} u^{11} - \dots \quad (187)$$

Эти ряды сходятся для всех положительных и отрицательных значений  $u$ , так как отношение двух последовательных членов ряда с возрастанием порядкового номера безгранично убывает. Однако эти ряды при сколько-нибудь больших значениях  $u$  неудобны для вычислений вследствие быстрого роста показателя степени их членов. Поэтому при больших значениях  $u$  лучше употреблять другие ряды, расположенные по нисходящим степеням и которые хотя и расходятся, но, как мы увидим,

часто оказываются очень удобными для вычислений. Так как ряд с отрицательными степенями  $u$  для возрастающего  $u$  стремится к нулю, то целесообразно здесь исходить из интеграла, имеющего границей  $u = \infty$ . Применим в этом случае интегрирование по частям в следующей форме:

$$\int_{u > 0}^{\infty} \cos u^2 du = \int_u^{\infty} u \cos u^2 \cdot \frac{1}{u} du = -\frac{\sin u^2}{2u} + \int_u^{\infty} \frac{\sin u^2 du}{2u^2},$$

$$\int_u^{\infty} \sin u^2 du = \int_u^{\infty} u \sin u^2 \cdot \frac{1}{u} du = \frac{\cos u^2}{2u} - \int_u^{\infty} \frac{\cos u^2 du}{2u^2}.$$

При последовательном применении этого приема к интегралам правой части получаем:

$$\int_u^{\infty} \cos u^2 du = \cos u^2 \cdot \gamma_n - \sin u^2 \cdot \sigma_n + R_e, \quad (188)$$

$$\int_u^{\infty} \sin u^2 du = \sin u^2 \cdot \gamma_n + \cos u^2 \cdot \sigma_n + R_s. \quad (189)$$

Здесь ряды

$$2\sigma_n = \frac{1}{u} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{u^5} + \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-5)}{2 \cdot 2 \dots 2} \cdot \frac{1}{u^{4n-3}} \quad (190)$$

и

$$2\gamma_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{u^7} + \dots (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-3)}{2 \cdot 2 \dots 2} \cdot \frac{2}{u^{4n-1}} \quad (191)$$

расходятся и поэтому взяты с ограниченным определенным числом членов  $n$ . Остаточные члены их:

$$R_e = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{2 \cdot 2 \dots 2} \cdot \int_u^{\infty} \frac{\cos u^2 du}{u^{4n}}, \quad (192)$$

$$R_s = (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{2 \cdot 2 \dots 2} \cdot \int_u^{\infty} \frac{\sin u^2 du}{u^{4n}}. \quad (193)$$

Оба они с возрастающим  $n$  растут безгранично. Однако эти ряды часто можно применять с успехом для вычислений, так как при ближайшем рассмотрении оказывается, что для определенных значений порядкового числа  $n$  остаточные члены становятся очень малы и поэтому могут быть откинuty без заметной ошибки. Прежде всего легко убедиться в том, что как  $R_e$ , так и  $R_s$  меньше по величине того выражения  $R_n$ , которое получится, если в интегралах (192) и (193) заменить косинус и синус единицей, т. е. меньше, чем

$$R_n = \frac{1 \cdot 2 \dots (4n-1)}{2 \cdot 2 \dots 2} \int_u^{\infty} \frac{du}{u^{4n}} = \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-3)}{2 \cdot 2 \dots 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^{4n-1}}. \quad (194)$$



Но это есть как раз последний член в ряде  $\gamma_n$ , который при известных условиях представляет собой очень малое число, в особенности, если  $u$  велико.

Существенным при этом является, конечно, выбор порядкового числа  $n$ . Когда  $n$  растет, начиная от единицы, то  $R_n$  сначала убывает благодаря степени  $4n - 1$  знаменателя, но дальше растет безгранично вследствие наличия факториала в числителе. Минимум  $R_n$  имеет место для тех значений порядкового числа  $n$ , для которых отношение  $\frac{R_{n+1}}{R_n}$  ближе всего к единице, т. е. когда

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{(4n-1) \cdot (4n+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{u^4} \text{ приблизительно} = 1,$$

а следовательно:

$$n \text{ приблизительно} = \frac{u^2}{2}. \quad (195)$$

Чем больше  $u$ , тем больше членов нужно взять в рядах  $\gamma_n$  и  $\sigma_n$ , для того чтобы остаточные члены их имели наименьшее возможное значение. Притом это их наименьшее значение быстро убывает с возрастанием величины  $u$ . Если ими пренебречь, то из (188) и (189) получаются приближенные значения интегралов Френеля. Такие ряды, которые, будучи расходящимися, все же до определенного числа членов приближаются к некоторому пределу, вновь удаляясь от него дальше, называются полусходящимися. Употребление их часто удобнее, чем употребление сходящихся рядов. Но, конечно, они имеют тот недостаток, что, пользуясь ими, нельзя получить сколь угодно большого приближения, как для сходящихся рядов, а только приближение до определенного предела. Тем не менее уже при не слишком больших значениях  $N$  полусходящиеся ряды  $\gamma_n$  и  $\sigma_n$  оказываются более удобными для определения приближенных значений интегралов Френеля, чем сходящиеся ряды  $\Gamma$  и  $\Sigma$ . Например, при  $u = 2$  в сходящихся рядах (186) и (187) нужно взять очень много членов, чтобы сделать колебания суммы достаточно малыми; в то же время остаточный член  $R$  разложения в расходящийся ряд, в котором на основании (195) надо положить  $n = 2$ , имеет значение согласно (194):

$$R_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^7} = 0,0073.$$

Эта величина уже достаточно мала сравнительно с единицей, и при известных условиях ею, несомненно, можно пренебречь.

§ 48. Возвратимся теперь к задаче определения интенсивности света  $J$  в точке  $A$ , где наблюдается явление дифракции. Для этого вычислим интегралы  $s$  и  $s$ , данные формулой (178). Выразим предварительно  $\rho$  через переменную интеграции  $\xi$ , пользуясь формулой (168). Согласно заключениям § 46 мы должны при расчете ограничиться точками, находящимися вблизи центральной

линии. Поэтому мы можем  $\xi - x$  принять малым по сравнению с  $z$ , и тогда находим для  $\rho$  приближенное значение:

$$\rho = z + \frac{(\xi - x)^2}{2z}. \quad (196)$$

Отсюда следует:

$$\cos \frac{2\pi\rho}{\lambda} = \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \frac{\pi(\xi - x)^2}{\lambda z} - \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \frac{\pi(\xi - x)^2}{\lambda z}.$$

Вставим это в выражение (178) для  $c$ ; последнее выражается тогда через два интеграла:

$$\int \cos \frac{\pi(\xi - x)^2}{\lambda z} \cdot d\xi \quad \text{и} \quad \int \sin \frac{\pi(\xi - x)^2}{\lambda z} \cdot d\xi,$$

причем оба эти интеграла должны быть взяты в пределах от  $\xi = 0$  до  $\xi = \infty$ . Введя новую переменную интегриации:

$$u = (x - \xi) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}, \quad (197)$$

приходим к интегралам:

$$\sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}} \int_{-\infty}^u \cos u^2 du \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}} \int_{-\infty}^u \sin u^2 du.$$

Верхний предел их имеет значение, которое принимает  $u$  при  $\xi = 0$ , согласно (197), а именно:

$$u = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} \cdot x. \quad (198)$$

Таким образом выражение (178) для  $c$  переходит в следующее:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot C - \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot S \right),$$

где для сокращения положено:

$$C = \int_{-\infty}^u \cos u^2 du, \quad S = \int_{-\infty}^u \sin u^2 du. \quad (199)$$

Точно так же из (178) находим:

$$s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot C + \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cdot S \right).$$

Отсюда получаем согласно (179а) искомое значение интенсивности:

$$J = \frac{1}{\pi} (C^2 + S^2). \quad (200)$$

Таким образом задача сводится к вычислению интегралов Френеля  $S$  и  $S$ , для которых переменная  $u$  имеет значение (198).

Интенсивность света  $J$  зависит только от  $u$  и, следовательно, совершенно не зависит от  $y$ , что понятно само собой. Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением одной лишь плоскости чертежа (черт. 12)  $y = 0$ . Кроме того, для каждой кривой

$$\frac{x}{\sqrt{z}} = \text{const}$$

интенсивность света имеет постоянную величину. Эта кривая представляет собой одну ветвь параболы с вершиной в точке  $O$ . В этой точке парабола касается края экрана (оси  $x$ ) и более или менее сильно искривлена в ней. Дадим постоянной все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .  $\sqrt{z}$  всегда положителен, в то время как абсцисса  $x$  точки наблюдения  $A$  может быть положительной или отрицательной.

Поэтому прежде всего получим  $z = 0$ ,  $x < 0$ , т. е. точки, лежащие непосредственно позади экрана. Затем идет ряд ветвей парабол, простирающихся в сторону экрана. Далее для  $\text{const} = 0$  получаем положительную ось  $z$ , потом ветви парабол, простирающиеся в сторону, не закрытую экраном, и, наконец, положительную ось  $x$ -ов:  $z = 0$ ,  $x > 0$ . Чтобы получить картину зависимости интенсивности света  $J$  от места  $A$ , достаточно перемещать точку наблюдения  $A$  по какой-нибудь, параллельной оси  $x$ , прямой:  $z = \text{const}$ . Тогда  $u$  согласно (198) дает меру для абсциссы  $x$  точки наблюдения, т. е. для расстояния  $OP$  центральной линии  $AP$  от края экрана.

Итак, будем перемещать точку наблюдения  $A$  по некоторой прямой (черт. 12), проходящей справа налево через всю плоскость чертежа, и будем определять интенсивность с помощью выражений (200) и (199).

1. Для очень больших положительных значений  $u$ , когда точка  $A$  находится далеко справа, например в  $A_1$ , можно положить верхние пределы интегралов (199) бесконечными. Тогда из (182) и (200) получаем  $J = 1$ . Отсюда следует, что на большом расстоянии от экрана интенсивность света такая же, какая была бы при отсутствии экрана, как и следовало ожидать.

2. Когда  $u$  принимает не слишком малые положительные значения, то, как мы видели выше, мы можем получить приближенное значение интегралов Френеля при помощи разложения в полусходящиеся ряды. При этом можно идти вплоть до  $u = 1,5$ , так как для этого значения  $u$  остаточные члены  $R_c$  и  $R_s$ , которыми мы пренебрегаем, при  $n = 1$  согласно (194) остаются меньшими, чем

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1,5^3} = 0,074.$$

Чтобы иметь возможность применить формулы (188) и (189), мы пишем вместо (199):

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u^2 du - \int_u^{+\infty} \cos u^2 du,$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u^2 du - \int_u^{+\infty} \sin u^2 du.$$

Тогда, принимая во внимание (182), получаем следующие приближенные значения для  $C$  и  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \gamma_n \cos u^2 + \sigma_n \sin u^2, \\ S &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \gamma_n \sin u^2 - \sigma_n \cos u^2. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Согласно (200) это дает:

$$J = \frac{1}{\pi} \left[ \pi - 2\sqrt{\pi} \gamma_n \cos \left( u^2 - \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{\pi} \sigma_n \sin \left( u^2 - \frac{\pi}{4} \right) + \gamma_n^2 + \sigma_n^2 \right] \quad (202)$$

Спросим себя, имеет ли интенсивность света  $J$  в каких-нибудь местах рассматриваемого участка максимум или минимум? Такие места определяются согласно (200) из уравнения:

$$C \frac{dC}{du} + S \frac{dS}{du} = 0. \quad (203)$$

Так как на основании (199):

$$\frac{dC}{du} = \cos u^2 \quad \text{и} \quad \frac{dS}{du} = \sin u^2, \quad (204)$$

то уравнение (203) переходит в следующее:

$$\cos \left( u^2 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\gamma_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{u^4} + \dots \right). \quad (205)$$

Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, для всех рассматриваемых значений  $u$  очень мало, следовательно, уравнение удовлетворяется такими значениями аргумента, которые близки к одному из чисел  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$ . Это дает следующие приближенные значения для

$$u_1 = \sqrt{\frac{3\pi}{4}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{7\pi}{4}}, \quad u_3 = \sqrt{\frac{11\pi}{4}}, \quad u_4 = \sqrt{\frac{15\pi}{4}} \dots \quad (206)$$

Первое и наименьшее из этих чисел  $u_1 = 1,535$ ; оно как раз лежит в рассматриваемом участке.

Следовательно, мы имеем в этом участке бесконечное число максимумов и минимумов интенсивности. Вопрос о том, что именно имеет место, максимум или минимум, решается при помощи подстановки найденных значений  $u$  в (202). Так как  $\gamma_n$  и  $\sigma_n$  — малые положительные числа, то значение  $J$  определяется главным образом членом, содержащим  $\sigma_n \sin(u^2 - \frac{\pi}{4})$ . При этом знак перед синусом решает вопрос, имеет ли  $J$  максимум или минимум, больше ли оно единицы или меньше. Поэтому  $J$  имеет максимум для мест, где  $u$  равно  $u_1, u_3, u_5, \dots$ , и минимум для мест, где  $u$  равно  $u_2, u_4, u_6, \dots$ .

Приближенные значения для максимумов и минимумов получаются из (202) и (190):

$$J = 1 \pm \frac{1}{u\sqrt{\pi}}.$$

Согласно (206) это дает для максимумов:

$$J_1 = 1 + \frac{2}{\pi\sqrt{3}}, \quad J_3 = 1 + \frac{2}{\pi\sqrt{11}}, \dots$$

для минимумов:

$$J_2 = 1 - \frac{2}{\pi\sqrt{7}}, \quad J_4 = 1 - \frac{2}{\pi\sqrt{15}}, \dots$$

По мере роста  $u$  места максимумов и минимумов сближаются друг с другом, как и значения для них интенсивности  $J$ . В конце концов они сливаются между собой.

3. Пусть точка наблюдения  $A$  лежит так близко к оси  $z$  или к границе тени экрана, что абсцисса  $u$  имеет малые положительные или отрицательные значения, примерно между  $-1,5$  и  $+1,5$ . В этом случае для вычисления интегралов Френеля выгодно применить разложение в сходящиеся ряды. Поэтому пишем (199) в форме:

$$C = \int_{-\infty}^0 \cos u^2 du + \int_0^u \cos u^2 du,$$

$$S = \int_{-\infty}^0 \sin u^2 du + \int_0^u \sin u^2 du,$$

и согласно (183), (184), (185) и (200) находим:

$$J = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{4} + \sqrt{\pi} \cdot \mathcal{Z} \cdot \cos(u^2 - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{\pi} \cdot \Gamma \cdot \sin(u^2 - \frac{\pi}{4}) + \Sigma^2 + \Gamma^2 \right]. \quad (207)$$

Решение вопроса о том, имеются ли в этом участке максимумы и минимумы для  $J$ , находится прежним путем. Оно приводит к условию:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \Sigma = 0,$$

или, согласно (186):

$$\cos\left(u^2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(u - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} u^3 + \dots\right) = 0. \quad (208)$$

В этом уравнении первое слагаемое в пределах рассматриваемого участка ( $-1,5 < u < +1,5$ ) всегда положительно. Второе слагаемое меняет свой знак в зависимости от знака  $u$ , но его абсолютная величина никогда не достигает абсолютного значения косинуса. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить ряд  $\Sigma$  для крайнего случая  $u = 1,5$ . При этом можно установить степень приближения, соответствующую взятому числу членов. Для этого надо вычислить границу для пренебрегаемого остаточного члена, аналогично тому, как было получено уравнение (194).

Вопрос о корнях уравнения  $\frac{dJ}{du} = 0$  приобретает еще более наглядное выражение, если зависимость функции  $J$  от  $u$  представить геометрически. Последняя вполне определена простыми уравнениями (200) и (204), вместе с граничными условиями при  $u = 0$ . При этом  $C$  и  $S$  можно взять в качестве прямоугольных координат некоторой точки; тогда  $J$  выразится квадратом расстояния этой точки от начала координат.

Согласно сказанному выражение (208) имеет во всей рассматриваемой области  $u$  знак, одинаковый со знаком косинуса, т. е. оно положительно; таким образом для данной области  $\frac{dJ}{du} > 0$  и интенсивность света при перемещении точки наблюдения от отрицательных абсцисс к положительным монотонно возрастает до достижения первого максимума при  $u = u_1$ . В непосредственной близости от точки  $A_0$ , лежащей на границе геометрической тени согласно (207) и (186):

$$J = \frac{1}{4} + \frac{u}{\sqrt{2\pi}}. \quad (209)$$

Следовательно, в самой точке  $A_0$ :

$$J = \frac{1}{4}.$$

4. Пусть, наконец, точка наблюдения  $A$  смещается влево на сравнительно большое расстояние от границы тени ( $u < -1,5$ ), например в точку  $A_2$ . Тогда мы можем опять обратиться к соходящимся рядам.

При этом пишем:

$$u = -u' \quad (u' > 1,5),$$

$$C = \int_{-\infty}^{-u'} \cos u^2 du = \int_{u'}^{\infty} \cos u^2 du,$$

$$S = \int_{-\infty}^{-u'} \sin u^2 du = \int_{u'}^{\infty} \sin u^2 du.$$

К этим выражениям можно применить формулы (188) и (189), откинув в них остаточные члены. Это дает:

$$J = \frac{1}{\pi} (\gamma_n^2 + \sigma_n^2). \quad (210)$$

Условие для максимума или минимума сводится при этом согласно (203) и (204) к  $\gamma_n = 0$ . Оно не выполняется нигде, поэтому при возрастании  $u'$  интенсивность света все время убывает. Наконец, для очень больших значений  $u'$  находим:

$$J = \frac{1}{4\pi u'^2}, \quad (211)$$

откуда для  $u = -\infty$

$$J = 0.$$

Полученные нами результаты определяют интенсивность света и во всех других точках плоскости  $xz$ . Это следует из того, что через каждую точку  $A$  рассмотренной нами прямой  $A_2A_0A_1$  проходит ветвь определенной параболы семейства  $\frac{x}{\sqrt{z}} = \text{const}$ . Во всех точках этой параболы интенсивность света та же, что и в точке  $A$ , вплоть до особой точки  $O$ , где все кривые касаются одна другой. Следовательно, когда прямая  $A_2A_1$  приближается к оси  $x$ , все время оставаясь ей параллельной, то максимумы и минимумы  $J$  сближаются все теснее между собой, не изменяя своей величины; когда же прямая совпадает с осью  $x$ , то все они сосредоточиваются в одной точке  $O$ , причем отрицательная ось  $x$  представляет собой ветвь параболы с интенсивностью, равной нулю, а положительная — с интенсивностью, равной единице. Это вполне соответствует тем предпосылкам, из которых мы исходили в § 43 при применении принципа Гюйгенса.

§ 49. Перейдем теперь от общего случая дифракции Френеля к частному случаю дифракции Фраунгофера. При этом мы воспользуемся замечаниями, сделанными в конце § 45. Явления дифракции Фраунгофера представляют гораздо больший интерес для практической оптики, чем явления дифракции Френеля, и математическое исследование их значительно доступнее.

Исходной точкой в данном случае служат опять уравнения (164) и (165), которые справедливы для плоского дифракционного экрана с перпендикулярно падающим на него светом. Но

теперь мы вводим специальное допущение, что не только светящаяся точка  $C$ , но также точка наблюдения  $A$  лежат в бесконечности. При этом мы сохраняем прежние обозначения, т. е. проводим плоскость  $x, y$  в плоскости экрана и обозначаем координаты дифракционной точки через  $x, y, z$ , а координаты точки отверстия в экране через  $\xi, \eta, \zeta = 0$ . В качестве начала координат берем какую-либо точку отверстия.

Расстояние точки наблюдения от всех точек дифрагирующего отверстия должно быть бесконечно велико по сравнению с линейными размерами отверстия. Поэтому мы приписываем последнему конечные размеры. Тогда все лучи, идущие от точек отверстия к точке  $A$ , можно считать параллельными между собой. Их направление и определяет положение точки  $A$ , так как величина расстояния точки  $A$  от экрана теперь не играет роли. Поэтому, вместо того чтобы говорить о точке, где наблюдается дифракция, мы можем говорить о направлении дифракции. Оно характеризуется двумя полярными углами  $\vartheta$  и  $\varphi$ , входящими в уравнения:

$$\frac{x}{r_0} = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad \frac{y}{r_0} = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad \frac{z}{r_0} = \cos \vartheta, \quad (212)$$

где  $x, y, z$  и  $r_0$  — расстояние  $OA$  — безгранично велики. При подстановке этих выражений в (164) мы можем считать при интегрировании  $r$  в знаменателе и  $\vartheta$  постоянными. В то же время для отношения  $\frac{r}{\lambda}$  изменения числителя имеют существенное значение. Поэтому пишем:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = r_0^2 - 2x\xi - 2y\eta, \\ r = r_0 - \frac{\xi x + \eta y}{r_0}.$$

Подставив эти значения в (164), находим для  $C$  и  $S$  следующие выражения:

$$C = \cos \frac{2\pi r_0}{\lambda} \cdot c + \sin \frac{2\pi r_0}{\lambda} \cdot s, \\ S = \sin \frac{2\pi r_0}{\lambda} \cdot c - \cos \frac{2\pi r_0}{\lambda} \cdot s,$$

причем

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{1}{\lambda r_0} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \int d\sigma \cos(a\xi + \beta\eta), \\ s &= \frac{1}{\lambda r_0} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \int d\sigma \sin(a\xi + \beta\eta), \end{aligned} \right\} \quad (213)$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda r_0} = \frac{2\pi \sin \vartheta \cos \varphi}{\lambda} = a, \quad \frac{2\pi y}{\lambda r_0} = \frac{2\pi \sin \vartheta \sin \varphi}{\lambda} = \beta. \quad (214)$$

Величину интенсивности света  $J$ , наблюдаемой в дифракционном направлении  $(\vartheta, \varphi)$ , получаем согласно выражению (165):

$$J = c^2 + s^2. \quad (215)$$



Входящие в (215) интегралы легко подсчитать, так как  $\alpha$  и  $\beta$  при интегрировании остаются постоянными.

Для дифракционного угла  $\vartheta = 0$  (точка наблюдения  $A$  лежит на оси  $z$ )  $\alpha = \beta = 0$ , следовательно, также и  $s = 0$ . Отсюда мы получаем „осевую“ интенсивность света (т. е. света, распространяющегося вдоль „оси“) с помощью (215) и (213):

$$J_0 = \frac{\sigma^2}{\lambda^2 r_0^2}, \quad (216)$$

где  $\sigma$  обозначает величину площади отверстия. Согласно этому выражению интенсивность света пропорциональна  $\sigma^2$ , а не  $\sigma$ . Это является парадоксальным, так как количество энергии, посылаемое источником света через отверстие, должно быть пропорционально  $\sigma$ . Однако кажущийся парадокс объясняется тем, что  $J_0$  не есть непосредственно излученная энергия, так как конечное излучение энергии всегда имеет место внутри определенного конуса дифракционных направлений ( $\vartheta, \varphi$ ), как уже было установлено в § 18.

Для изучения явления дифракции абсолютная величина интенсивности света не имеет значения, поэтому удобнее выразить ее через интенсивность, наблюдаемую вдоль оси. Тогда получим вместо (215):

$$J = J_0 (C^2 + S^2), \quad (217)$$

где  $C$  и  $S$  имеют новые значения согласно (216) и (213):

$$\left. \begin{aligned} C &= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \int d\sigma \cos(\alpha\xi + \beta\eta), \\ S &= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \int d\sigma \sin(\alpha\xi + \beta\eta). \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

§ 50. В качестве примера рассчитаем дифракцию через прямоугольное отверстие. Пусть ширина его  $b$  и длина его  $l$ , откуда площадь его  $\sigma = bl$ . Поместим начало координат  $O$  в центре отверстия. Тогда имеем при интегрировании:

$$-\frac{b}{2} < \xi < +\frac{b}{2}, \quad -\frac{l}{2} < \eta < +\frac{l}{2}.$$

Из (218) находим:

$$C = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{ab}{2}}{\frac{ab}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\beta l}{2}}{\frac{\beta l}{2}}, \quad S = 0,$$

а из (217):

$$J = J_0 \cdot \cos^4 \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{ab}{2}}{\left(\frac{ab}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\beta l}{2}}{\left(\frac{\beta l}{2}\right)^2}. \quad (219)$$

Таким образом, принимая во внимание (214), мы видим, что интенсивность света  $J$  представляет собою функцию направления ( $\vartheta$ ,  $\varphi$ ), под которым наблюдается дифракция. Для  $\vartheta = 0$  получается  $J = J_0$ , как и должно быть. Интенсивность света, наблюдаемого вдоль оси, является наиболее значительной, так как функция  $\frac{\sin x}{x}$  имеет наибольшее значение для  $x = 0$ . При возрастании  $x$  интенсивность колеблется между постепенно убывающими значениями максимумов и равным нулю минимумом, доходя до полного исчезновения. При этом  $J$  изменяется двояким образом, так как мы имеем здесь две системы одинаково отстоящих друг от друга точек, для которых интенсивность света равна нулю. Одна из них определяется значениями  $\alpha$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2\pi x}{\lambda r_0} = \frac{2\pi}{b}, \quad \frac{4\pi}{b}, \quad \frac{6\pi}{b}, \dots, \\ \beta &= \frac{2\pi y}{\lambda l} = \frac{2\pi}{l}, \quad \frac{4\pi}{l}, \quad \frac{6\pi}{l}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (220)$$

Между каждыми двумя точками, для которых интенсивность равна нулю, лежит максимум, убывающий с возрастанием порядкового числа. Сверх того,  $J$  постепенно уменьшается вследствие возрастания дифракционного угла  $\vartheta$ .

Этот характер изменения интенсивности света можно сделать доступным наблюдению следующим образом. Пропускают дифрагированные лучи сквозь собирающую линзу. Тогда всем отклоненным по одному направлению ( $\vartheta$ ,  $\varphi$ ) лучам соответствует одна точка в фокусной плоскости линзы. При этом в качестве дифракционной картины получается согласно сказанному светлый крест с двумя системами темных полос с обеих сторон, симметричных относительно сторон прямоугольника. Чем короче какая-нибудь из сторон прямоугольника и чем больше длина волны падающего света, тем дальше друг от друга лежат полосы. Если прямоугольник длинный и узкий (щель), то полосы одной системы исчезают и остается только другая система полос, параллельных длине щели.

Ясно, что эта дифракционная картина не представляет собой изображения дифрагирующего отверстия в том смысле, в котором употребляется это понятие в геометрической оптике. В данном случае мы не получаем оптически сопряженных точек и поэтому здесь нельзя ожидать какого-нибудь геометрического подобия между дифракционной картиной и дифрагирующим отверстием.

§ 50а. Явление дифракции Фраунгофера имеет практическое значение для случая большого числа конгруэнтных дифрагирующих отверстий. Пусть у нас имеется  $N$  тождественных отверстий произвольной формы, произвольным образом расположенных на экране, но одинаково ориентированных. Тогда интен-

сивность дифрагированного света  $J$  можно на основании простого соображения выразить через интенсивность  $J_1$  дифрагированного света от одного отверстия. Для этого выразим координаты  $\xi, \eta$  точки  $n'$ -го отверстия через координаты произвольно выбранной точки этого отверстия  $O_n$ , взятой в качестве начала отсчета. Получим:

$$\xi = \xi_n + \xi', \quad \eta = \eta_n + \eta', \quad (221)$$

где  $\xi_n$  и  $\eta_n$  суть координаты точки  $O_n$  относительно общего, любым образом выбранного, начала координат  $O$ . Точки  $O_n$  во всех других отверстиях мы берем в местах, соответствующих данной выбранной точке  $O_n$ . Тогда каждый из двух интегралов в (218) распадается на  $N$  интегралов, распространяемых на одно отверстие с одинаковыми для всех интегралов пределами для  $\xi'$  и  $\eta'$ . Таким образом мы получаем:

$$C = \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{n=N} \iint d\xi' d\eta' \cos \{ \alpha(\xi_n + \xi') + \beta(\eta_n + \eta') \}. \quad (222)$$

Суммирование здесь относится к индексу  $n$ , интегрирование производится по координатам  $\xi'$  и  $\eta'$ . Оба эти действия совершенно независимы друг от друга и поэтому могут быть переставлены между собой. Положим для сокращения, аналогично (218):

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \iint d\xi' d\eta' \cos (\alpha\xi' + \beta\eta') &= C_1, \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_1} \iint d\xi' d\eta' \sin (\alpha\xi' + \beta\eta') &= S_1, \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

причем мы будем впредь обозначать индексом 1 величины, относящиеся к одному отверстию. Положим также:

$$\sigma = N \cdot \sigma_1 \quad (224)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=N} \cos (\alpha\xi_n + \beta\eta_n) &= C_N, \\ \sum_{n=1}^{n=N} \sin (\alpha\xi_n + \beta\eta_n) &= S_N. \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

Согласно (222) получим:

$$C = \frac{1}{N} (C_N C_1 - S_N S_1).$$

Точно таким же образом найдем:

$$S = \frac{1}{N} (S_N C_1 + C_N S_1).$$

Тогда находим согласно (217):

$$J = \frac{J_0}{N^2} (C_1^2 + S_1^2) (C_N^2 + S_N^2),$$

и, наконец, на основании (216) и (224):

$$J = J_{01} (C_1^2 + S_1^2) (C_N^2 + S_N^2). \quad (226)$$

В соответствии с (217) мы можем также написать:

$$J = J_1 (C_N^2 + S_N^2). \quad (227)$$

Это простое соотношение дает возможность получить значение интенсивности света, дифрагированного системой отверстий, зная интенсивность света, дифрагированного одним отверстием. Таким образом мы видим, что применение многих отверстий не вызывает ни изменения распределения света в дифракционной картине, ни увеличения размеров ее. При этом меняется исключительно величина интенсивности света сравнительно с дифракционной картиной от одного отверстия. Но коэффициент усиления интенсивности света может иметь, как мы увидим, весьма различные значения, смотря по тому, расположены ли отверстия на экране в определенном порядке или нет. Действительно, согласно (225):

$$\begin{aligned} C_N^2 + S_N^2 &= \sum_{n=1}^N \cos^2(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^N \cos(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) \cos(\alpha\xi_{n'} + \beta\eta_{n'}) + \\ &+ \sum_{n=1}^N \sin^2(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^N \sin(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) \sin(\alpha\xi_{n'} + \beta\eta_{n'}) = \\ &= N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{n'=n+1}^N \cos\{\alpha(\xi_{n'} - \xi_n) + \beta(\eta_{n'} - \eta_n)\}. \quad (228) \end{aligned}$$

Пусть отверстия расположены совершенно беспорядочно, как, например, когда отверстия проделаны на карте случайным образом одной и той же иглой. Тогда все члены двойной суммы имеют частью положительные, частью отрицательные значения. Поэтому величина суммы будет иметь значение, очень малое по сравнению с первым членом (равным  $N$ ). В результате этого получается, что интенсивность дифрагированного света согласно (227) в  $N$  раз сильнее света, дифрагированного одним отверстием, если не считать местных колебаний.

Совершенно другой результат получится в случае правильно расположенных отверстий. Пусть, например, точки  $O_n$  так расположены, что для определенных значений  $\alpha$  и  $\beta$  все встречающиеся в (228) углы оказываются кратными  $2\pi$ . Тогда двойная

сумма превращается в  $N(N-1)$  и, таким образом, при большом  $N$  она имеет порядок величины  $N^2$ .

Это своеобразное явление объясняется следующим образом. При неправильном расположении отверстий лучи, отклоненные  $N$  отверстиями в определенном направлении, незначительно интерферируют между собой, так что их интенсивности просто складываются друг с другом. Наоборот, при правильном расположении отверстий эти  $N$  лучей могут иметь одну и ту же фазу, так что складываются не интенсивности их, но абсолютные значения амплитуд напряжения поля. Так как результирующая интенсивность измеряется квадратом результирующей амплитуды, то она в  $N^2$  раз больше интенсивности света от одного отверстия. Такое большое изменение интенсивности света и обуславливает практическое значение дифракционных явлений Фраунгофера.

§ 51. Проведем еще подсчет для случая дифракции от решетки. Пусть  $b$  — ширина отверстия щели,  $c$  — так называемая постоянная решетки, т. е. расстояние между соответствующими точками двух соседних щелей. Последнее равно сумме ширины щели и расстояния между двумя соседними щелями. Мы можем в (225) считать все  $\eta$  равными нулю, в то время как

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = c, \quad \xi_3 = 2c, \dots, \quad \xi_N = (N-1)c.$$

Суммирование обоих тригонометрических рядов (225) значительно упрощается, если мы вспомним, что выражение  $C_N^2 + S_N^2$ , которое нас интересует, представляет собою квадрат абсолютного значения комплексной величины:

$$C_N + iS_N = \sum_{n=1}^N e^{i\alpha \xi_n} = \sum_{n=1}^N e^{i\alpha (n-1)c} = \frac{e^{i\alpha Nc} - 1}{e^{i\alpha c} - 1}.$$

Умножая на сопряженное мнимое выражение, мы получим искомую величину. Таким образом согласно (227) интенсивность дифракционного света:

$$J = J_1 \frac{\sin^2 N \frac{\alpha c}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha c}{2}}. \quad (229)$$

Максимумы интенсивности имеют место для:

$$\alpha = \frac{2\pi x}{\lambda_0} = 0, \quad \frac{2\pi}{c}, \quad \frac{4\pi}{c}, \dots, \quad \frac{2n\pi}{c}, \dots \quad (230)$$

Их расстояния друг от друга равны между собой, прямо пропорциональны длине волны и обратно пропорциональны постоянной решетки. Свет, распространяющийся вдоль оси ( $\theta = 0$ ), имеет общий максимум для волн любой длины. Разложение на цвета появляется лишь при ближайшем максимуме, для  $n = 1$ , т. е. в спектре первого порядка.

Значение максимума интенсивности для всех порядков равно  $N^2 J_1$ . При этом нужно заметить, что множитель  $J_1$  в (229), обозначающий интенсивность света дифракции от одной щели, не постоянен, но в свою очередь зависит от дифракционного угла и ширины щели  $b$  согласно уравнению (219). Поэтому решетки с одной и той же константой оказываются часто весьма различными. Если, например, промежуток между двумя соседними щелями равен по величине ширине щели ( $c = 2b$ ), то точки, для которых  $J_1$  согласно (220) равно нулю, совпадают с максимумами для четных значений порядка  $n$  в (230). Поэтому в дифракционной картине такой решетки отсутствуют все спектры четного порядка.

---

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ

## КРИСТАЛЛОПТИКА

### ГЛАВА I

#### ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 52. Оптика кристаллов основывается на тех же уравнениях электромагнитного поля (1), (2) и (3), которые лежат в основе оптики изотропных сред. Единственное различие состоит в том, что связь между электрической индукцией  $\mathbf{D}$  и напряжением электрического поля  $\mathbf{E}$ , представляющая собой для изотропных сред простую пропорциональность (4), для кристаллов выражается в более общей форме. Именно каждая компонента электрической индукции является определенной линейной однородной функцией компонент электрического напряжения:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z, \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

где константы  $\varepsilon$  зависят от природы кристалла. Чем более высокой симметрией обладает кристалл (2, § 26), тем большее число соотношений существует между этими компонентами. Для предельного случая изотропного вещества  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ , а все остальные  $\varepsilon$  — нули; в этом случае (231) переходит в (4).

Однако и при отсутствии всякой симметрии из девяти величин  $\varepsilon$  только шесть являются независимыми. В этом можно убедиться, применяя принцип сохранения энергии к какому-либо электромагнитному процессу, происходящему внутри кристалла. Именно, если мы выделим внутри кристалла некоторый объем и применим к нему принцип сохранения энергии, как в 3, § 9, то получим для энергии, втекающей в этот объем за промежуток времени  $dt$  через все элементы поверхности  $d\sigma$ , величину [ср. 3, (25)]:

$$dt \int d\sigma \mathbf{S}_n = - dt \int d\tau \cdot \operatorname{div} \mathbf{S}.$$

Применяя к этому выражению (3) и (1), приведем его к виду:

$$\frac{dt}{4\pi} \int d\tau (E_x \dot{D}_x + E_y \dot{D}_y + E_z \dot{D}_z + H_x \dot{H}_x + H_y \dot{H}_y + H_z \dot{H}_z). \quad (232)$$

Согласно принципу сохранения энергии эта величина должна равняться изменению электромагнитной энергии, находящейся внутри выделенной части кристалла. Как видим, полученное выражение, так же как и для изотропных сред, состоит из двух частей, соответствующих электрической и магнитной энергии. Изменение плотности электрической энергии за бесконечно малый элемент времени равно:

$$\frac{1}{4\pi} (E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z), \quad (233)$$

а изменение плотности магнитной энергии:

$$\frac{1}{4\pi} (H_x dH_x + H_y dH_y + H_z dH_z). \quad (234)$$

В то время как плотность магнитной энергии, как указывает сравнение с  $\mathcal{E}$ , (3), в точности равна плотности этой энергии в изотропной среде с проницаемостью  $\mu = 1$ , плотность электрической энергии принимает для кристалла гораздо более сложное выражение, так как подстановка (231) в (233) и интегрирование дают для нее квадратичную форму от компонент электрического напряжения, коэффициентами которой являются константы  $\epsilon$ . Но для того чтобы интегрирование вообще было возможно, необходимо чтобы коэффициент при  $E_x dE_x$  был равен коэффициенту при  $E_y dE_y$ , т. е. должно иметь место соотношение  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ ; точно так же должно быть  $\epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_{31} = \epsilon_{13}$ .

Тогда плотность электрической энергии равна:

$$\frac{1}{8\pi} (\epsilon_{11} E_x^2 + \epsilon_{22} E_y^2 + \epsilon_{33} E_z^2 + 2\epsilon_{12} E_x E_y + 2\epsilon_{23} E_y E_z + 2\epsilon_{31} E_z E_x). \quad (235)$$

Это выражение можно еще упростить, если в качестве осей координат выбрать три взаимно перпендикулярные направления, представляющие собой главные оси эллипсоида, определяемого тензором (235). Они представляют собой три „главных оси“ кристалла. В этом случае выражение для плотности электрической энергии принимает форму:

$$\frac{1}{8\pi} (\epsilon_1 E_x^2 + \epsilon_2 E_y^2 + \epsilon_3 E_z^2). \quad (236)$$

Связь между электрической индукцией и напряжением электрического поля выразится тогда проще:

$$D_x = \epsilon_1 E_x, \quad D_y = \epsilon_2 E_y, \quad D_z = \epsilon_3 E_z. \quad (237)$$

Три постоянные, входящие в состав (236) и (237), называются „главными диэлектрическими постоянными“; они всегда положительны. В дальнейшем мы будем пользоваться в качестве координатных осей исключительно главными осями.



§ 53. Разберем теперь, возможны ли линейно поляризованные волны в кристалле, и если возможны, то каким законам они подчиняются. Для ответа на эти вопросы найдем выражения для компонент поля такой волны и подставим их в уравнения поля (1) и (2).

Пусть  $n$  будет нормалью плоской волны,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — ее направляющие косинусы, так что

$$n = \alpha x + \beta y + \gamma z; \quad (238)$$

$D$  — величина электрической индукции,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — ее направляющие косинусы, и, таким образом:

$$D_x = D\xi, \quad D_y = D\eta, \quad D_z = D\zeta; \quad (239)$$

$E$  — напряжение электрического поля,  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  — его направляющие косинусы; имеем:

$$E_x = E\xi', \quad E_y = E\eta', \quad E_z = E\zeta', \quad (240)$$

наконец,  $H$  — величина напряжения магнитного поля;  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — его направляющие косинусы, так что

$$H_x = H\lambda, \quad H_y = H\mu, \quad H_z = H\nu. \quad (241)$$

Плоская линейно поляризованная волна определяется тем условием, что величины  $D$ ,  $E$  и  $H$  зависят кроме времени только от расстояния  $n$ , причем все перечисленные направляющие косинусы остаются неизменными.

В этом случае уравнения поля (1) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi \dot{D} &= c_0 (\beta\nu - \gamma\mu) \cdot \frac{\partial H}{\partial n}, \\ \eta \dot{D} &= c_0 (\gamma\lambda - \alpha\nu) \cdot \frac{\partial H}{\partial n}, \\ \zeta \dot{D} &= c_0 (\alpha\mu - \beta\lambda) \cdot \frac{\partial H}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (242)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \dot{H} &= c_0 (\eta'\gamma - \zeta'\beta) \cdot \frac{\partial E}{\partial n}, \\ \mu \dot{H} &= c_0 (\zeta'\alpha - \xi'\gamma) \cdot \frac{\partial E}{\partial n}, \\ \nu \dot{H} &= c_0 (\xi'\beta - \eta'\alpha) \cdot \frac{\partial E}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

Эти уравнения дают возможность ответить на все поставленные вопросы. В них через  $c_0$  обозначена скорость света в пустоте, так как символ  $c$  впоследствии (§ 55) будет использован в другом смысле.

§ 54. Направления векторов, характеризующих плоскую линейно поляризованную волну, могут быть определены из уравнений (242) и (243). Из них следует, что электрическая индук-

ция направлена перпендикулярно к волновой нормали и к напряжению магнитного поля:

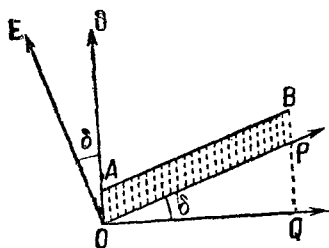
$$D \perp n \text{ и } D \perp H. \quad (244)$$

Из (243) следует далее, что напряжение магнитного поля направлено перпендикулярно к волновой нормали и к напряжению электрического поля:

$$H \perp n \text{ и } H \perp E. \quad (245)$$

Эти положения являются следствиями уравнений поля (2) и получаются путем подстановки в них значений компонент напряжения поля. Кроме того, согласно (3) вектор луча  $S$  направлен перпендикулярно к напряжению электрического поля и к напряжению магнитного поля:

$$S \perp E \text{ и } S \perp H. \quad (246)$$



Черт. 13.

Все эти соотношения можно объединить в одном положении, что напряжение магнитного поля перпендикулярно ко всем остальным векторам, т. е. последние лежат в одной плоскости, причем электрическая индукция  $D$  перпендикулярна к волновой нормали  $n$ , а напряжение электрического поля  $E$  перпендикулярно к лучу  $S$ . Это соотношение уясняется черт. 13, в котором плоскость чертежа перпендикулярна к напряжению магнитного поля, направленному от рисунка к читателю; она называется, как и в случае изотропных сред, „плоскостью колебаний“ (§ 9). В плоскости колебаний находятся, таким образом, волновая нормаль, луч и нормальные к ним электрическая индукция и напряжение электрического поля.

Мы видим, что направление напряжения магнитного поля играет особую роль. Это объясняется тем, что направление его совпадает с направлением магнитной индукции, в то время как направление напряжения электрического поля, вообще говоря, не совпадает с направлением электрической индукции. Если угол между электрическим напряжением и электрической индукцией обозначить через  $\delta$ , то  $\delta$  будет также углом между лучом и нормалью волны, и так как главные диэлектрические постоянные в (237) положительны, то  $\delta < \frac{\pi}{2}$ .

Физическое значение этого различия между направлениями луча и нормали можно уяснить при помощи следующего рассуждения. Представим себе, что плоская волна ограничена с боков. Для этого вырежем из одной из ее волновых плоскостей конечный участок  $DA$  (черт. 13) и из каждой точки его проведем световой луч под углом  $\delta$  к нормали. Совокупность этих всех лу-

чей, исходящих из точек участка  $DA$ , образует световой цилиндр, наклонный к плоскости волны. На черт. 13 сечение плоскости волны цилиндром в различных местах его от  $OA$  до  $PB$  намечено пунктирными параллельными линиями.

Величина  $\delta$  согласно ее определению задана условием:

$$\cos \delta = \xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta' > 0. \quad (247)$$

Кроме того, если обозначим направляющие косинусы луча  $S$  через  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , то

$$\cos \delta = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'. \quad (248)$$

Входящие в эти уравнения величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  вместе с направляющими косинусами  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  напряжения магнитного поля представляют собой косинусы трех взаимно перпендикулярных направлений. То же относится и к  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ ;  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  и  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

§ 55. Теперь мы перейдем от направлений рассматриваемых векторов к их величинам. Для этого освободимся от направляющих косинусов возведением в квадрат и сложением уравнений (242) и (243). Сумма квадратов величин, стоящих в скобках в (242), дает единицу, так как  $\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$ . Для соответствующей суммы в (243) это не имеет места, так как  $\mathbf{E}$  не перпендикулярно  $\mathbf{n}$ . Эта сумма квадратов равна:

$$\begin{aligned} & (\eta' \gamma - \zeta' \beta)^2 + (\zeta' \alpha - \xi' \gamma)^2 + (\xi' \beta - \eta' \alpha)^2 = \\ & = (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) \cdot (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\xi' \alpha + \eta' \beta + \zeta' \gamma)^2 = \\ & = 1 - \sin^2 \delta = \cos^2 \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, мы получаем соотношения:

$$\dot{D}^2 = c_0^2 \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)^2 \quad \text{и} \quad \dot{H}^2 = c_0^2 \left( \frac{\partial E}{\partial n} \right)^2 \cdot \cos^2 \delta. \quad (249)$$

Следует обратить внимание на знаки при извлечении корня. Их можно определить, рассматривая какой-нибудь частный случай, например случай, когда нормаль направлена по оси  $x$ , электрическая индукция  $\mathbf{D}$  — по оси  $y$ , а магнитное напряжение — по оси  $z$ . Тогда  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\eta' = \cos \delta$  и уравнения (242) и (243) переходят в

$$\dot{D} = -c_0 \frac{\partial H}{\partial n}, \quad \dot{H} = -c_0 \cos \delta \frac{\partial E}{\partial n}. \quad (250)$$

Эти соотношения согласно (249) имеют место и в общем случае. Исключим из них  $H$ , продифференцировав первое уравнение по  $t$ , а второе по  $n$ . Получим:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c_0^2 \cos \delta \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial n^2}. \quad (251)$$

С другой стороны, из (257) следует:

$$D \cdot \xi = \varepsilon_1 \cdot E \xi', \quad D \cdot \eta = \varepsilon_2 \cdot E \eta', \quad D \cdot \zeta = \varepsilon_3 \cdot E \zeta'.$$

Выразив величину  $D$  через  $E$  при помощи одного из этих соотношений и вставив ее в (251), получим для  $E$  знакомое волновое уравнение (6) в форме:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = q^2 \frac{\partial^2 E}{\partial n^2}, \quad (252)$$

причем квадрат скорости распространения света  $q^2$  имеет следующее значение:

$$q^2 = \frac{\xi}{\xi'} \frac{c_0^2}{\varepsilon_1} \cos \delta = \frac{\eta}{\eta'} \frac{c_0^2}{\varepsilon_2} \cos \delta = \frac{\zeta}{\zeta'} \frac{c_0^2}{\varepsilon_3} \cos \delta.$$

Введя „главные скорости распространения“:

$$\frac{c_0^2}{\varepsilon_1} = a^2, \quad \frac{c_0^2}{\varepsilon_2} = b^2, \quad \frac{c_0^2}{\varepsilon_3} = c^2, \quad (253)$$

получим:

$$\xi' q^2 = \xi a^2 \cos \delta, \quad \eta' q^2 = \eta b^2 \cos \delta, \quad \zeta' q^2 = \zeta c^2 \cos \delta. \quad (254)$$

Дифференциальное уравнение (252), как известно (2, § 35), имеет решение:

$$E = f\left(t - \frac{n}{q}\right), \quad (255)$$

где  $f$  — произвольная функция аргумента  $t - \frac{n}{q}$ ; она определяет форму волны.

Из уравнения (255) следует:

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{1}{q} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (256)$$

и при подстановке в (250) получаем:

$$H = \frac{c_0}{q} \cdot \cos \delta \cdot E, \quad (257)$$

$$D = \frac{c_0^2}{q^2} \cdot \cos \delta \cdot E. \quad (258)$$

Таким образом, если найдено значение  $q$ , удовлетворяющее всем трем уравнениям (254), то это значит, что в кристалле возможна волна произвольной формы, направления распространения и поляризации которой связаны друг с другом определенным образом.

§ 56. Посмотрим теперь, можно ли найти такие выражения для различных констант, которые бы удовлетворяли всем необходимым условиям и прежде всего уравнениям (254).

Легко видеть, что, взяв какое-либо направление электрической индукции  $D$ , мы тем самым однозначно задаем все остальные величины. Для нахождения величины  $q$  умножим каждое из уравнений (254) на  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и сложим; приняв во внимание (247), получим:

$$q^2 = a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2. \quad (259)$$

Далее, из (254) получается направление напряжения поля  $E$

$$\xi' : \eta' : \zeta' = a^2 \xi : b^2 \eta : c^2 \zeta. \quad (260)$$

Но направления  $D$  и  $E$  дают нам плоскость колебаний, а значит, и перпендикулярное к ней направление  $H$ , а также и направления  $\pi$  и  $S$ . Таким образом волна определена полностью кроме ее формы, которая остается произвольной.

Теперь выведем выражения для направляющих косинусов волновой нормали  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Так как волновая нормаль  $\pi$  лежит в одной плоскости с напряжением поля  $E$  и индукцией  $D$ , то ее направление определяется условием:

$$\alpha : \beta : \gamma = (\xi' + x\xi) : (\eta' + x\eta) : (\zeta' + x\zeta),$$

где  $x$  обозначает определенное число. С другой стороны, волновая нормаль перпендикулярна к индукции, следовательно:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0. \quad (261)$$

Отсюда, приняв во внимание (247), получаем:

$$x = -\cos \delta.$$

Следовательно:

$$\alpha : \beta : \gamma = (\xi' - \xi \cos \delta) : (\eta' - \eta \cos \delta) : (\zeta' - \zeta \cos \delta).$$

Из этого следует согласно (254):

$$\alpha : \beta : \gamma = (a^2 - q^2) \xi : (b^2 - q^2) \eta : (c^2 - q^2) \zeta. \quad (262)$$

§ 57. Поставим теперь вопрос, насколько определена плоская волна, если задано направление волновой нормали. В данном случае дело сводится к тому, чтобы выразить все величины при помощи  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , а для этого, как мы видели, достаточно определить направляющие косинусы вектора индукции  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Они получаются из (262):

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\alpha}{a^2 - q^2} : \frac{\beta}{b^2 - q^2} : \frac{\gamma}{c^2 - q^2}. \quad (263)$$

Остающаяся в этом уравнении неопределенной скорость пространства  $q$  находится согласно (261) из уравнения:

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - q^2} + \frac{\beta^2}{b^2 - q^2} + \frac{\gamma^2}{c^2 - q^2} = 0. \quad (264)$$

Как показывает исследование подобного уравнения (3, § 25), корни его дают два действительных положительных значения для  $q^2$ . Вместе с этим и  $q$  получает два действительных положительных значения. Оба они лежат в двух интервалах, ограниченных значениями постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Назвав их  $q_1$  и  $q_2$ , можно, не уменьшая общности, положить, что

$$a > q_1 > b > q_2 > c. \quad (265)$$

Каждому из двух значений  $q_1$  и  $q_2$  соответствует согласно (263) определенное направление индукции  $D_1$  и  $D_2$ , а этим согласно § 56 уже определены направления всех остальных векторов, характеризующих волну.

Направления индукции  $D_1$  и  $D_2$ , соответствующие одной и той же волновой нормали  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , находятся в простом соотношении друг с другом, а именно: если в уравнение (261) подставить для  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  значения  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ , а для  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  значения (262), выражаемые через  $q_2$  и  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_2$ , то получается:

$$(a^2 - q_2^2) \xi_1 \xi_2 + (b^2 - q_2^2) \eta_1 \eta_2 + (c^2 - q_2^2) \zeta_1 \zeta_2 = 0.$$

Таким же образом получается:

$$(a^2 - q_1^2) \xi_1 \xi_2 + (b^2 - q_1^2) \eta_1 \eta_2 + (c^2 - q_1^2) \zeta_1 \zeta_2 = 0.$$

Отсюда вычитанием получаем:

$$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 = 0, \quad (266)$$

$$a^2 \xi_1 \xi_2 + b^2 \eta_1 \eta_2 + c^2 \zeta_1 \zeta_2 = 0. \quad (267)$$

Из первого уравнения следует, что  $D_1 \perp D_2$ , из второго, что  $D_1 \perp E_2$  и  $D_2 \perp E_1$ . Отсюда получается также, что  $H_1 \parallel D_2$  и  $H_2 \parallel D_1$ .

§ 58. Связь между всеми этими направлениями и соответствующими величинами скоростей распространения  $q_1$  и  $q_2$  может быть наглядно представлена при помощи так называемого „эллипсоида поляризации“ Коши. Этот эллипсоид, уравнение которого

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1, \quad (268)$$

имеет полуоси

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}.$$

Если мы хотим для какого-нибудь определенного направления волновой нормали  $n$  найти обе соответствующие волны, проводим диаметрально плоскость эллипсоида, перпендикулярную к  $n$ . Тогда направления обеих осей эллипса, полученного в сечении, дают направления электрической индукции  $D_1$  и  $D_2$ , а величины, обратные длинам его полуосей, дают соответствующие скорости распространения  $q_1$  и  $q_2$ . Действительно, если вместо координатной системы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ввести новую прямоугольную систему  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  с тем же началом, причем ось  $z'$  направлена по нормали  $n$ , а  $x'$  и  $y'$  по направлениям электрической индукции  $D_1$  и  $D_2$ , то уравнения преобразования имеют вид:

$$x = \xi_1 x' + \xi_2 y' + \alpha z',$$

$$y = \eta_1 x' + \eta_2 y' + \beta z',$$

$$z = \zeta_1 x' + \zeta_2 y' + \gamma z'.$$

Подставив эти выражения в (268) и положив  $z' = 0$ , получаем на основании (267) уравнение полученного в сечении эллипса в форме:

$$(a^2 \xi_1^2 + b^2 \eta_1^2 + c^2 \zeta_1^2) x'^2 + (a^2 \xi_2^2 + b^2 \eta_2^2 + c^2 \zeta_2^2) y'^2 = 1,$$

откуда согласно (259) получаются  $q_1$  и  $q_2$  как величины, обратные полуосям.

Так как напряжение магнитного поля  $\mathbf{H}$  перпендикулярно к  $\mathbf{p}$  и к  $\mathbf{D}$ , то каждая из осей полученного в сечении эллипса дает также направление магнитного напряжения, соответствующее электрической индукции, направление которой совпадает с другой осью. В то же время направление напряжения электрического поля  $\mathbf{E}$  согласно (260) задается нормалью к эллипсоиду в конце той оси, которая определяет электрическую индукцию. Наконец, направление луча  $\mathbf{S}$  определяется касательной к эллипсоиду, которая лежит в плоскости колебаний, определенной данными  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ .

Когда одна из главных осей кристалла, например ось  $x$ , является волновой нормалью, то две другие оси  $y$  и  $z$  дают направление индукции с соответствующими скоростями распространения  $b$  и  $c$ .

Все эти положения, конечно, сохраняют свою силу и в случае, когда  $a = b = c$ . Тогда среда оптически изотропна, эллипсоид поляризации превращается в сферу, эллипс сечения переходит в круг, каждый диаметр которого является осью, а скорость распространения  $q = a$ .

§ 59. До сих пор мы задавались значениями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и вычисляли соответствующие величины  $q_1$  и  $q_2$ . Но может быть случай, когда заранее заданы значения  $q_1$  и  $q_2$  [разумеется, внутри границ (265)] и требуется найти соответствующие значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для волновой нормали.

Для решения этой задачи уравнение (264) напомним в следующей форме:

$$\begin{aligned} \alpha^2 (b^2 - q^2) (c^2 - q^2) + \beta^2 (c^2 - q^2) (a^2 - q^2) + \gamma^2 (a^2 - q^2) (b^2 - q^2) &= \\ &= (q^2 - q_1^2) (q^2 - q_2^2). \end{aligned} \quad (269)$$

Это равенство выражает, что  $q_1$  и  $q_2$  являются корнями уравнения (264). Смотря по тому, положим ли мы  $q$  равным  $a$ ,  $b$  или  $c$ , получим из (269):

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{(a^2 - q_1^2) \cdot (a^2 - q_2^2)}{(b^2 - a^2) \cdot (c^2 - a^2)}, \\ \beta^2 &= \frac{(b^2 - q_1^2) \cdot (b^2 - q_2^2)}{(c^2 - b^2) \cdot (a^2 - b^2)}, \\ \gamma^2 &= \frac{(c^2 - q_1^2) \cdot (c^2 - q_2^2)}{(a^2 - c^2) \cdot (b^2 - c^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

Таким образом  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  и  $\gamma^2$  определены, если заданы  $q_1$  и  $q_2$ . Легко убедиться при помощи (265), что значения направляющих

косинусов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  получаются всегда действительные. Эти значения определяют в зависимости от их знака восемь различных направлений, лежащих каждое в особом октанте координатной системы, оси которой совпадают с главными осями, или, — если объединить вместе каждые два противоположных направления, — четыре различных направления. Значениями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  определяются согласно § 58 направления электрической индукции и т. п., соответствующие данным  $q_1$  или  $q_2$ .

Особенно интересен частный случай, когда  $q_1 = q_2$ . Тогда согласно (265):

$$q_1 = q_2 = b, \quad (271)$$

и направляющие косинусы соответствующей нормали:

$$\alpha_0^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}. \quad (272)$$

Эти уравнения определяют четыре направления, лежащих в плоскости  $x$ ,  $z$ . Из них два, образующие острые углы с осью  $z$ , которой соответствует наименьшая скорость распространения, называются „оптическими осями“ кристалла. Для них имеет место:

$$\alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}. \quad (273)$$

Кристалл называется „оптически положительным“, если обе оптические оси образуют между собой острый угол. В этом случае  $\gamma_0 > \sqrt{\frac{1}{2}}$ , откуда

$$b^2 > \frac{a^2 + c^2}{2}. \quad (274)$$

В противном случае кристалл называется „оптически отрицательным“.

В эллипсоиде поляризации Коши оптические оси образуют нормали двух, проходящих через ось  $y$  диаметральных плоскостей, которые рассекают эллипсоид по кругу с радиусом  $\frac{1}{b}$ . Так как круг имеет бесконечное множество направлений осей, то волна, нормаль которой совпадает с оптической осью, имеет бесконечное множество направлений электрической индукции, так же как и в изотропной среде. Поэтому можно сказать, что в случае совпадения оптической оси кристалла с волновой нормалью кристалл ведет себя в известной степени, как изотропное тело.

Однако между изотропным телом и кристаллом для этого случая имеется и существенная разница. В изотропном теле напряжение электрического поля совпадает с направлением индукции, а следовательно, и луч с направлением нормали; в кристалле же электрическое напряжение, т. е. нормаль к эллипсоиду поляризации в какой-нибудь точке круга сечения, в общем случае не совпадает с электрической индукцией, т. е. с радиусом



круга в этой точке. Более того, каждому из бесконечного множества направлений индукций соответствует свое особое направление напряжения поля и свое особое перпендикулярное к нему направление луча. Таким образом, когда оптическая ось является волновой нормалью, то ей соответствует бесконечное множество лучей, расположенных по образующим некоторого конуса. Среди образующих этого конуса находится также и сама оптическая ось, потому что в точке круга сечения, лежащей на оси  $y$ , нормаль к эллипсоиду совпадает с радиусом круга, т. е. напряжение электрического поля совпадает по направлению с электрической индукцией, а следовательно, и луч с волновой нормалью.

Когда из трех главных скоростей распространения  $a, b, c$  две равны между собой, кристалл называется „оптически одноосным“ и притом согласно (274) „положительным“, если  $a = b > c$ , и „отрицательным“, если  $a > b = c$ .

Для численного расчета обычно применяют не значения главных скоростей распространения, но значения „главных показателей преломления“. По отношению к вакууму они равны:

$$\frac{c_0}{a} = n_1, \quad \frac{c_0}{b} = n_2, \quad \frac{c_0}{c} = n_3 \quad (275)$$

или согласно (253):

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1}, \quad n_2 = \sqrt{\epsilon_2}, \quad n_3 = \sqrt{\epsilon_3}. \quad (276)$$

При этом согласно (265):

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3.$$

При  $n_1 = n_2$  кристалл положительный одноосный, при  $n_2 = n_3$  он отрицательный одноосный.

Оптические свойства кристалла тесно связаны с его упругой структурой, так как каждый род кристаллографической симметрии влечет за собой соответствующую симметрию в оптическом отношении. Поэтому кристаллы асимметрической, моносимметрической и ромбической систем (2, § 26) оптически двуосны (топаз — положительен, арагонит, слюда — отрицательны), а кристаллы гексагональной и тетрагональной систем оптически одноосны (кварц, лед, циркон — положительные, исландский шпат, турмалин — отрицательны). Кристаллы правильной системы оптически изотропны (каменная соль, сильвин).

§ 60. Физическое значение скорости распространения  $q$  становится особенно наглядным при рассмотрении черт. 13 (§ 58). Положим, что плоскость волны  $OA$  за единицу времени переместилась в  $PB$ . Тогда величина  $q$  будет представлена соответствующим приращением нормали  $n$ , т. е. отрезком  $OQ$ . Если измерять скорость не по направлению нормали, а по направлению луча, то она определяется отрезком  $OP$ , который мы обозначим  $q'$ .

Между обеими скоростями имеет место соотношение:

$$\frac{q}{q'} = \frac{OQ}{OP} = \cos \delta. \quad (277)$$

Целесообразность принятого здесь обозначения ясна из того обстоятельства, что каждое из полученных нами соотношений между направляющими косинусами и скоростями распространения сохраняет свое значение, если в них заменить все штрихованные направляющие косинусы соответствующими нештрихованными и наоборот, и, кроме того,  $q$  заменить через  $\frac{1}{q'}$ ,  $q'$  — через  $\frac{1}{q}$  и  $a, b, c$  — через  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ . При этом направление магнитного напряжения  $\lambda, \mu, \nu$  остается неизменным, так же как и угол  $\delta$ . Справедливость изложенного делается ясной, если вспомнить, что согласно § 54 для штрихованных направляющих косинусов имеют место те же соотношения, как и для нештрихованных, и что уравнения (254), служащие для определения скорости распространения  $q$ , остаются согласно (277) справедливыми, если в них произвести указанную замену.

В этом обстоятельстве выражается имеющий повсюду место дуализм, представляющий собою общий принцип взаимности, который часто может быть использован для получения новых соотношений, характеризующих волну. На основании принципа взаимности мы можем без вывода высказать ряд положений, которые по своему значению не уступают ранее рассмотренным. Важнейшие из них мы здесь приведем.

Каждому направлению луча  $\alpha', \beta', \gamma'$  соответствуют скорости распространения  $q_1'$  и  $q_2'$ , причем

$$a \geq q_1' \geq b \geq q_2' \geq c. \quad (278)$$

Эти значения скоростей являются корнями уравнения:

$$\frac{a^2 \alpha'^2}{a^2 - q'^2} + \frac{b^2 \beta'^2}{b^2 - q'^2} + \frac{c^2 \gamma'^2}{c^2 - q'^2} = 0. \quad (279)$$

Они равны по величине полуосям эллипса, который получается при пересечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (280)$$

диаметральной плоскостью, перпендикулярной к направлению  $\alpha', \beta', \gamma'$ . Направления осей эллипса дают направления соответствующих электрических напряжений, в то время как направление электрической индукции совпадает с нормалью к эллипсоиду в конечной точке оси. Направление волновой нормали определяется касательной в этой точке к эллипсоиду, лежащей в плоскости колебаний, которая в свою очередь определяется лучом и напряжением электрического поля. Напряжение магнитного

поля перпендикулярно к плоскости колебаний, следовательно, совпадает с другой осью эллипса.

Обратно, каждым двум произвольно заданным, удовлетворяющим условиям (278) значениям  $q_1'$  и  $q_2'$  соответствуют восемь направлений луча, из которых каждые два друг другу противоположны. Они определяются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'^2 &= \frac{b^2 c^2}{q_1'^2 q_2'^2} \cdot \frac{(a^2 - q_1'^2) \cdot (c^2 - q_2'^2)}{(a^2 - b^2) \cdot (a^2 - c^2)}, \\ \beta'^2 &= \frac{c' a^2}{q_1' q_2'^2} \cdot \frac{(b^2 - q_1'^2) \cdot (b^2 - q_2'^2)}{(b^2 - c^2) \cdot (b^2 - a^2)}, \\ \gamma'^2 &= \frac{a^2 b^2}{q_1'^2 q_2'^2} \cdot \frac{(c^2 - q_1'^2) \cdot (c^2 - q_2'^2)}{(c^2 - a^2) \cdot (c^2 - b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

Если  $q_1'$  и  $q_2'$  одинаковы, то согласно (278):

$$q_1' = q_2' = b. \quad (282)$$

В этом случае уравнения (281) определяют особые направления луча, которые называются „вторичными оптическими осями“ кристалла:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0' &= \pm \frac{c}{b} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = \frac{c}{b} \cdot \alpha_0, \\ \beta_0' &= 0 = \beta_0, \\ \gamma_0' &= \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \frac{a}{b} \gamma_0. \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

Эти оси являются нормальными двух проведенных через ось  $u$  диаметральных плоскостей, которые пересекают эллипсоид (280) по кругам радиуса  $b$ . Сравнение с направляющими косинусами  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$  первичных оптических осей показывает, что угол с осью  $z$  для вторичных осей меньше, чем для первичных, следовательно, вторичные оси расположены ближе к оси  $z$ .

Для одноосных кристаллов эти оси совпадают с первичными осями, причем у положительных кристаллов ( $a = b$ ) они совпадают с осью  $z$ , а у отрицательных ( $b = c$ ) они направлены по положительной и отрицательной осям  $x$ . Вторичной оптической оси в качестве луча соответствует целый конус волновых нормалей, к образующим которого принадлежит также и луч. Каждой такой нормали соответствует определенная плоскость колебаний, проходящая через нее и через луч. В этой плоскости лежат напряжение электрического поля и электрическая индукция.

Само собой разумеется, что все эти положения могут быть получены непосредственно, без применения принципа взаимности, если повторить ход мыслей § 56 и следующих за ним, с заменой всюду нештрихованных величин штрихованными.

## ГЛАВА II

## ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ 61. Плоские волны в природе невозможны, хотя бы по причине их безграничной протяженности в поперечном сечении. Но плоские волны можно осуществить с определенной, как угодно далеко идущей степенью приближения при помощи того же приема, который мы раньше применяли для изотропных сред. Именно мы представляем себе где-нибудь внутри достаточно большого кристалла точечный источник света  $O$ , который начинает светить в момент времени  $t = 0$ , и называем волновой поверхностью с центром в  $O$  ту поверхность, окружающую точку  $O$ , до которой свет успел распространиться за время  $t$ . Выбрав  $t$  достаточно большим, мы можем на волновой поверхности выделить участок произвольной величины, размеры которого малы сравнительно с расстоянием его от  $O$  и который может считаться плоским. Тогда вся волновая поверхность окажется составленной из таких плоских участков, для каждого из которых справедливы законы распространения плоских волн.

Тот, кому трудно представить себе точечный источник света внутри кристалла, может его представить себе находящимся на поверхности кристалла, откуда свет распространяется внутрь кристалла. Тогда получатся не полные замкнутые волновые поверхности, но лишь части их, ограниченные поверхностью кристалла. Для дальнейших рассуждений это безразлично, так как они будут относиться главным образом к одному плоскому участку волны.

Такой плоский участок волны распространяется в кристалле согласно выведенным нами в предыдущей главе законам. Его скорость и поляризация определяются его положением относительно главных осей кристалла совершенно таким же образом, как это имело место для ограниченного участка плоской волны, который мы на черт. 13 (§ 54) обозначили через  $PB$ . При этом  $OP$ , так же как и  $OB$  (так как  $PB \ll OP$ ), обозначает направление луча,  $OQ$  — направление волновой нормали, причем  $OP = q' \cdot t$ , а  $OQ = q \cdot t$ . То обстоятельство, что вблизи источника света волновая поверхность не может быть представлена состоящей из достаточно больших плоских участков, не создает никаких затруднений, так как время  $t$  можно выбрать столь большим, что расстояния  $OQ$  и  $OP$  могут быть приняты пропорциональными времени  $t$ .

При помощи таких рассуждений можно полностью определить волновую поверхность, соответствующую определенному, достаточно продолжительному промежутку времени  $t$ , например  $t = 1$ , и притом определить двумя различными способами.

При первом способе используется скорость распространения по лучу: в произвольных направлениях  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  откладывают

отрезки, равные скорости  $q'$ ; тогда все концы  $P$  таких отрезков образуют искомую волновую поверхность. Второй способ использует скорость распространения по нормали: в произвольном направлении  $\alpha, \beta, \gamma$  откладывают отрезок, равный  $q$ , и проводят через конец  $Q$  этого отрезка перпендикулярную к нему плоскость. Все полученные таким образом плоскости являются касательными плоскостями искомой волновой поверхности. Первый способ дает уравнение волновой поверхности в точечных координатах, второй — в плоскостных координатах.

На основе этого построения можно без особых расчетов установить некоторые свойства волновых поверхностей. Так как каждому лучу соответствуют два значения скорости распространения  $q_1'$  и  $q_2'$ , то каждая прямая, проведенная из  $O$ , пересекает волновую поверхность в двух точках  $P_1$  и  $P_2$ , т. е. волновая поверхность состоит из двух замкнутых поверхностей, из которых наружная образована точками  $P_1$ , а внутренняя точками  $P_2$ . Касательные плоскости к волновым поверхностям в точках  $P_1$  и  $P_2$  образуют волновые плоскости, соответствующие лучу  $OP_1P_2$ , а перпендикуляры к ним — волновые нормали. Но имеются четыре особых направления, а именно: направления вторичных оптических осей (283) и направления, им прямо противоположные, которые пересекают волновую поверхность только один раз на расстоянии  $b$  от точки  $O$ . Таким образом волновая поверхность имеет в плоскости  $xz$  четыре особых точки, в которых встречаются обе замкнутые поверхности. Так как каждому из особых лучей соответствует бесконечное множество направлений нормали, то волновая поверхность имеет в особой точке бесконечное множество касательных плоскостей, т. е. целый конус касательных, который придает волновой поверхности вблизи этой точки воронкообразный вид. Внешняя поверхность волны в этом месте оказывается вогнутой внутрь, внутренняя — выгнута наружу.

К образующим конуса касательных принадлежит также и сама вторичная оптическая ось.

С другой стороны, каждому произвольному направлению волновой нормали соответствуют две перпендикулярные к ней плоскости волны, проходящие на расстояниях  $q_1$  и  $q_2$  от  $O$ . Отрезки, соединяющие точки касания с точкой  $O$ , дают направление и величину скорости распространения двух соответствующих лучей. Но имеются четыре особых касательных плоскости, перпендикулярные к оптическим осям (273) и находящиеся на расстоянии  $b$  от точки  $O$ , для которых расстояния  $q_1$  и  $q_2$  совпадают по величине и равны  $b$ . Каждой такой особой касательной плоскости соответствует бесчисленное множество лучей, следовательно, и бесконечное множество точек касания с волновой поверхностью. т. е. эта плоскость касается волновой поверхности по кривой. Поэтому указанная выше воронка обладает плоским краем, ее можно полностью закрыть плоским листом. К образующим ко-

нуса, определяемого кривой касания, принадлежит также сама оптическая ось.

Все изложенные здесь положения, с необходимостью вытекающие из рассуждений последних параграфов, получают в дальнейшем подтверждение и большую наглядность в применении к частным случаям.

§ 62. Мы составим теперь уравнение поверхности световой волны в координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для  $t = 1$ , применив к данному случаю первый из двух упомянутых методов. Каждая точка волновой поверхности определяется координатами:

$$x = r\alpha', \quad y = r\beta', \quad z = r\gamma',$$

причем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = q'.$$

Подставляя отсюда значения  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  в уравнение (279), получаем уравнение, волновой поверхности:

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - r^2} = 0. \quad (284)$$

Эта поверхность, очевидно, имеет центр симметрии  $O$  и распадается на восемь симметричных октантов. Чтобы выяснить порядок поверхности, умножаем (284) на общий знаменатель. Получается выражение шестой степени, но легко заметить, что он содержит множитель  $r^2$ , и если его откинуть, то получается из (284):

$$a^2 b^2 c^2 - \{a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (c^2 + a^2) y^2 + c^2 (a^2 + b^2) z^2\} + (x^2 + y^2 + z^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) = 0. \quad (285)$$

Итак, получается поверхность четвертого порядка, что согласуется с тем обстоятельством, что луч, выходящий из точки  $O$ , пересекает ее в двух точках.

Форму поверхности световой волны можно представить себе всего нагляднее при рассмотрении пересечения ее с тремя главными плоскостями. Начнем с плоскости  $x$ ,  $y$ . При  $z = 0$  уравнение (285) переходит в следующее:

$$(a^2 b^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2) (c^2 - x^2 - y^2) = 0. \quad (286)$$

Кривая пересечения волновой поверхности с плоскостью распадается на эллипс:

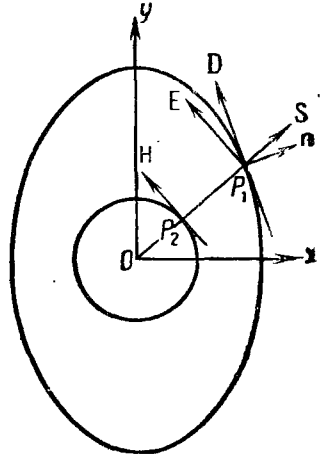
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

с полуосями  $b$  и  $a$  и находящуюся внутри него окружность:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

с радиусом, равным  $c$ .

Эта кривая представлена на черт. 14. Эллипс своими точками  $P_1$  образует след внешней замкнутой поверхности волны, круг своими точками  $P_2$  — след внутренней поверхности. Лучу  $S$ , проходящему через точки  $P_1$  и  $P_2$ , соответствуют в качестве плоскостей волны плоскости, касательные к поверхности волны в точках  $P_1$  и  $P_2$ . Эти плоскости, конечно, перпендикулярны к плоскости  $xu$ . При помощи их легко могут быть определены обе соответствующие лучу взаимно перпендикулярные плоскости колебаний, проходящие через луч и волновую нормаль  $n$ . Плоскость колебаний в точке  $P_1$  есть плоскость  $xu$ ; в точке  $P_2$ , для которой совпадают луч и нормаль, — это плоскость, перпендикулярная к первой. Напряжение электрического поля  $E$  и электрическая индукция  $D$  лежат в плоскости колебаний, причем первое перпендикулярно  $S$ , вторая перпендикулярно  $n$ . В точке  $P_1$  оба эти вектора лежат в плоскости чертежа (черт. 14), в  $P_2$  они перпендикулярны к ней и совпадают между собой. Наоборот, напряжение магнитного поля  $H$  в  $P_1$  перпендикулярно к плоскости чертежа, а в  $P_2$  совпадает с ней.



Черт. 14.

Аналогично можно разобрать кривые пересечения поверхности волны с двумя другими главными плоскостями. Разберем сначала пересечение с плоскостью  $yz$ . При  $x = 0$  уравнение (285) переходит в

$$(b^2c^2 - b^2y^2 - c^2z^2) \cdot (a^2 - y^2 - z^2) = 0. \quad (287)$$

Здесь мы имеем в качестве следа внешней поверхности волны окружность:

$$y^2 + z^2 = a^2$$

с радиусом  $a$ , а в качестве следа внутренней поверхности эллипс:

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

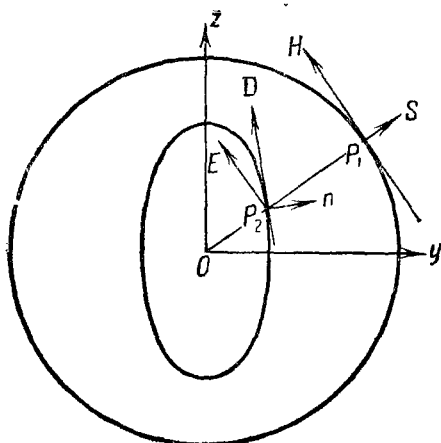
с полуосями  $c$  и  $b$ . Соответствующее изображение дано на черт. 15; оно отличается от черт. 14 только тем, что здесь для точки  $P_2$  внутренней поверхности волны колебания происходят в плоскости чертежа, а для точки  $P_1$  внешней поверхности — в плоскости, перпендикулярной к ней.

§ 63. Наиболее интересным является сечение волновой поверхности плоскостью  $xz$ , т. е. той, в которой лежат наибольшая и наименьшая скорости. Оба конических сечения, по кото-

рым пересекается плоскость  $y = 0$  с поверхностью волны (285), определяются уравнением:

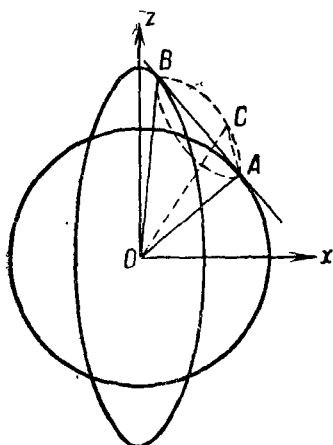
$$(c^2 a^2 - c^2 z^2 - a^2 \lambda^2) \cdot (b^2 - z^2 - x^2) = 0. \quad (288)$$

В этом случае получается эллипс с полуосями  $c$  и  $a$  и



Черт. 15.

окружность с радиусом  $b$ , пересекающиеся в четырех действительных точках, как представлено на черт. 16. Для каждого луча, идущего из точки  $O$  к такой точке пересечения, обе скорости  $q_1'$  и  $q_2'$  совпадают между собой и равны  $b$ . Два из этих лучей, которые образуют с осью  $z$  острый угол, представляют собою вторичные оптические оси кристалла. След внешней поверхности волны представлен частью двумя дугами эллипса, выступающими из окружности, и частью двумя дугами окружности, выступающими из эллипса. Для внутренней поверхности волны имеет место обратное.



Черт. 16.

Первичные оптические оси, так же как и вторичные, лежат в плоскости  $xz$  и образуют нормали тех касательных плоскостей, которые касаются поверхности волны по целой кривой. Расстояние этих плоскостей от точки  $O$  равно  $q_1 = q_2 = b$ . Угол между первичными оптическими осями согласно (283) больше, чем между вторичными. Кривая касания представляет собой край описанной в конце § 61 воронки, встречающий плоскость чертежа в точках  $A$  и  $B$ , а вообще идущий перпендикулярно к плоскости чертежа. На черт. 16 он обозначен пунктиром.

Идущие от точки  $O$  до точек кривой касания прямые линии образуют соответствующий оси  $OA$  конус лучей, к образующим которого относится и сама оптическая ось  $OA$ .

Чтобы найти форму кривой касания, мы будем считать точку  $C$  на чертеже подвижной и будем перемещаться из точки  $A$  по передней части кривой до точки  $B$ , а потом по остальной части кривой обратно в точку  $A$ . При каком-либо положении точки  $C$



$OC$  означает направление луча, плоскость  $OAC$  — соответствующую ему плоскость колебаний, а лежащее в ней перпендикулярное к  $OA$  направление  $AC$  есть направление электрической индукции. Длина отрезка  $AC$  получается из прямоугольного треугольника  $OAC$ :

$$AC = OA \operatorname{tg} \angle AOC = b \operatorname{tg} \delta = b \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = b \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)}{\cos \delta}.$$

Согласно (247) вследствие перпендикулярности направления волновой нормали  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  к направлению электрической индукции  $\xi, \eta, \zeta$  имеем:

$$AC = b \cdot \frac{|\alpha_0 \xi' + \beta_0 \eta' + \gamma_0 \zeta'|}{\xi \xi' + \eta \eta' + \zeta \zeta'},$$

причем

$$\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta = 0. \quad (289)$$

Из этого согласно (260) следует:

$$AC = b \cdot \frac{|a^2 \alpha_0 \xi + b^2 \beta_0 \eta + c^2 \gamma_0 \zeta|}{a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2},$$

приняв во внимание, что в данном случае  $q = b$  и  $\beta_0 = 0$ , имеем согласно (259) и (289):

$$AC = \frac{a^2 - c^2}{b} \gamma_0 \zeta. \quad (290)$$

Этим соотношением искомая кривая касания вполне определена, так как для каждого значения направляющего косинуса, а значит, и для каждого направления прямой  $AC$ , вращающейся около точки  $A$ , находим соответствующую величину расстояния  $AC$ . Когда  $C$  совпадает с  $A$ ,  $AC = 0$  и  $\zeta = 0$ , т. е. касательная к кривой в точке  $A$  перпендикулярна к оси  $z$ , а так как она также перпендикулярна к оптической оси  $OA$ , то она совпадает по направлению с осью  $y$ , перпендикулярной к плоскости чертежа. Когда  $C$  перемещается в точку  $B$ , угол между  $AC$  и осью  $z$  уменьшается, причем  $\zeta$  увеличивается до своего наибольшего значения, которое достигается при совпадении  $C$  с  $B$ . Так как  $AB \perp OA$ , то в этом случае  $\zeta = \alpha_0$  и согласно (290):

$$AB = \frac{a^2 - c^2}{b} \alpha_0 \gamma_0. \quad (291)$$

При обратном движении точки  $C$  по другой дуге кривой те же самые значения будут пройдены в обратном порядке, пока  $C$  опять не совпадет с  $A$ . Соотношение (290) получится еще проще, если ввести вместо  $\zeta$  угол  $CAB$ . Это угол между направлением  $AC$  (с направляющими косинусами  $\xi, \eta, \zeta$ ) и направлением  $AB$  (с направляющими косинусами  $\gamma_0, 0, \alpha_0$ ). Следовательно:

$$\cos \angle CAB = -\gamma_0 \xi + \alpha_0 \zeta$$

и согласно (289):

$$\cos \angle CAB = \left(\frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + \alpha_0\right) \zeta = \frac{\zeta}{\alpha_0}.$$

Последнее вместе с (290) и (291) дает:

$$AC = AB \cos \angle CAB.$$

Из этого следует, что в треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой и кривая касания  $ACB$  является окружностью. Поэтому конус лучей  $OC$  не является круговым конусом, так как круговое сечение  $ACB$  перпендикулярно к образующей конуса. Для величины угла расхождения между лучами конуса получается простейшее выражение, если обозначить через  $\omega$  угол между лучами  $OA$  и  $OB$ :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{AB}{AO} = \frac{a^2 - c^2}{b^2} \alpha_0 \gamma_0$$

и согласно (273):

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2}. \quad (292)$$

Аналогичные положения можно получить при помощи принципа взаимности (§ 60) для вторичных оптических осей и соответственно для особых точек поверхности световой волны. В каждой особой точке особому лучу, идущему к ней из точки  $O$ , соответствует бесконечное множество волновых плоскостей и волновых нормалей, которые образуют конус с углом  $\omega'$ , причем аналогично (292):

$$\operatorname{tg} \omega' = b^2 \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)}$$

или

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{ac}. \quad (293)$$

### ГЛАВА III

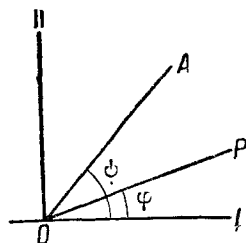
#### ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЕ ПАДЕНИЕ

§ 64. Отражение и преломление света у поверхности кристалла происходит по гораздо более сложным законам, чем для изотропных сред, поэтому всего удобнее начать с рассмотрения наиболее простых случаев. Мы начнем с простейшего случая перпендикулярного падения монохроматической плоской световой волны из воздуха на поверхность кристалла, которая может быть как угодно ориентирована относительно его главных осей.

Согласно принятым нами условиям все точки поверхности кристалла одновременно и в одной фазе возбуждаются падающей волной. Поэтому внутри кристалла волновая плоскость и волновая нормаль сохраняют свое прежнее направление. Особенность заключается в том, что внутри кристалла распространяются две волны с вполне определенными скоростями распро-

странения  $q_1$  и  $q_2$  и вполне определенными направлениями напряжений поля и индукции, которые можно вычислить из приведенных ранее законов, соответственно данному направлению волновой нормали.

При выходе из кристалла каждая из обеих волн следует своему собственному закону отражения и преломления. Можно поэтому использовать различие обеих скоростей распространения в кристалле, чтобы совершенно разделить обе волны, пользуясь, например, тем, что одна из них при падении на противоположную поверхность кристалла претерпевает полное внутреннее отражение, в то время как вторая выходит наружу согласно обычным законам преломления. Это имеет место в призме Николя и является простейшим методом преобразования естественного света в линейно поляризованный. Рассмотрим теперь шлифованную плоскопараллельную кристаллическую пластинку. В этом случае и при выходе из кристалла обе волновые плоскости остаются параллельными поверхностям пластинки. Так как электрические индукции обеих волн перпендикулярны друг к другу и к волновой нормали, то они лежат в плоскости пластинки. Сечения пластинки в направлении этих двух векторов называются главными оптическими сечениями пластинки. Через них проходят плоскости колебаний обеих волн, обозначенные на плоскости черт. 17, которую надо себе представить параллельной плоскости пластинки, через  $I$  и  $II$ . Световые волны надо представить себе падающими на пластинку сзади и выходящими по направлению к читателю. Когда падающий свет является естественным, тогда и прошедший свет будет естественным, если пренебречь потерями при отражении, как мы и будем здесь делать. Но иначе получится, если будет падать поляризованный свет, например свет, прошедший через призму Николя, которая в этом случае играет роль поляризатора. Плоскость колебаний падающего на кристалл поляризованного света обозначена на черт. 17  $OP$  и образует угол  $\varphi$  с главным сечением  $I$ . При вступлении в кристалл волна расщепляется на две волны с плоскостями колебаний  $I$  и  $II$ , скоростями распространения  $q_1$  и  $q_2$ , с одинаковыми фазами и отношением амплитуд, равным  $\cos \varphi : \sin \varphi$  (§ 22). Пройдя сквозь кристаллическую пластинку толщины  $D$ , эти две волны выйдут из кристалла с разностью фаз:



Черт. 17.

$$\Delta = \omega \left( \frac{D}{q_1} - \frac{D}{q_2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_1 - n_2) D, \quad (294)$$

где  $\omega$  обозначает частоту,  $\lambda_0$  — длину волны в воздухе,  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления. Поэтому, слагаясь в воздухе, эти две волны дают в общем случае эллиптически поляризованную волну,

(§ 26), направление осей которой существенно зависит от величины  $\Delta$ . Только тогда, когда  $\Delta$  является кратным  $\pi$ , получается в результате опять плоскополяризованная волна. Если  $\Delta$  равно нечетному числу  $\frac{\pi}{2}$ , оси эллипса имеют направления главных сечений  $I$  и  $II$ ; если, кроме того, угол  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  или  $\frac{3\pi}{4}$ , получается свет, поляризованный по кругу. Поэтому такая пластинка соответствующей толщины (например пластинка слюды) представляет собой простое средство для превращения линейно поляризованного света в циркулярно поляризованный или, наоборот, она применяется, как компенсатор для анализа эллиптически поляризованного света путем превращения его в линейно поляризованный.

Пропустим прошедший сквозь кристаллическую пластинку свет через вторую призму Николя, действующую в качестве анализатора, причем оси ее ориентированы так, что она пропускает только волны с направлением колебаний (черт. 17), образующим угол  $\psi$  с главным сечением  $I$ . От волны  $I$  с амплитудой  $\cos \varphi$  пройдет через анализатор лишь компонента  $\cos \varphi \cdot \cos \psi$ , а от волны  $II$  с амплитудой  $\sin \varphi$  пройдет компонента  $\sin \varphi \cdot \sin \psi$ . Обе эти волны имеют колебания  $OA$  и обладают согласно (101) следующей интенсивностью, считая интенсивность света, даваемого поляризатором за единицу:

$$J = \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \sin^2 \psi + 2 \cos \varphi \cos \psi \sin \varphi \sin \psi \cos \Delta$$

или

$$J = \cos^2(\varphi - \psi) - \sin 2\varphi \sin 2\psi \sin^2 \frac{\Delta}{2}. \quad (295)$$

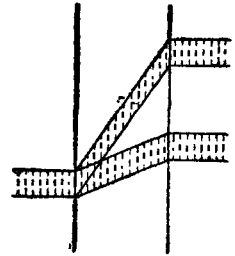
Особого интереса заслуживает случай, когда направления колебаний  $OA$  и  $OP$  взаимно перпендикулярны, т. е. поляризатор и анализатор скрещены. Тогда  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$  и из (295) получается:

$$J = \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{\Delta}{2}. \quad (296)$$

В этом случае, если  $\Delta = 0$ , то и  $J = 0$ . Поэтому прохождение света сквозь пластинку между двумя скрещенными николями является доказательством того, что разница фаз  $\Delta$ , а вместе с этим и  $q_1$  и  $q_2$ , отличны от нуля. Это дает один из самых чувствительных методов для исследования оптической анизотропии веществ. Направления главных сечений могут быть в этом случае непосредственно определены, так как согласно (296) проходящий свет имеет максимальную интенсивность при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  и  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ , в то время как при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  свет, естественно, целиком пропадает.

§ 65. До сих пор при рассмотрении световых волн в кристалле мы обращали внимание лишь на волновые нормали, но не на лучи. Это допустимо, пока сечение волны принимается бесконечным. Но если сечение волны имеет конечные размеры, то тогда необходимо принять во внимание то обстоятельство, что энергия волны распространяется не в направлении волновой нормали, а в направлении луча, как это уже и было разъяснено в § 54 при помощи черт. 13.

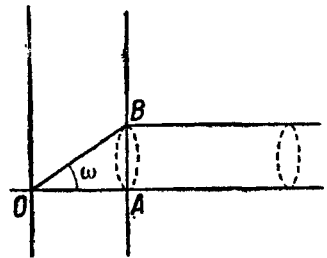
В кристалле определенному направлению нормалей соответствуют в общем случае два различных луча. Поэтому те две волны, на которые расщепляется при входе в кристалл падающий нормально на пластинку плоский пучок лучей, рано или поздно, в зависимости от величины поперечного сечения пучка, разделяются в пространстве и выходят из противоположной стороны кристалла в виде отдельных пучков лучей. Это представлено на черт. 18.



Черт. 18.

Поэтому кристаллическая пластинка и при перпендикулярном падении лучей является двойкопреломляющей, хотя волновые нормали всех лучей как внутри, так и вне кристалла сохраняют одно и то же направление. Следовательно, в этом случае преломление определяется не различием двух граничащих веществ, как в случае изотропных сред, но обуславливается природой самого кристалла.

§ 66. Особенно интересен случай, когда кристаллическая пластинка, например из арагонита, отшлифована перпендикулярно одной из оптических осей кристалла. Тогда плоскости падающей волны, параллельной плоскости пластинки, соответствует бесконечное множество лучей, и луч после входа в кристалл распространяется не по двум направлениям, а по многим, если он первоначально не был поляризован. В этом случае лучи образуют поверхность конуса, соответствующего оптической оси в качестве нормали. К образующим конуса принадлежит и сама оптическая ось.

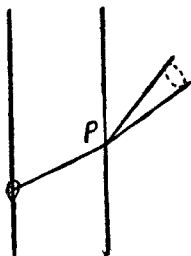


Черт. 19.

На черт. 19 плоскость чертежа содержит в себе (как и плоскость черт. 16 в § 36) кроме оптической оси также направления наибольшей и наименьшей главной скорости распространения, т. е. совпадает с плоскостью  $xz$ . Направления  $OA$  и  $OB$  обозначают, как и там, оптическую ось и наиболее уклоняющийся от нее луч конуса. Так как сечение поверхности пластинки (как особой плоскости касания волновой поверхности) с конусом лучей дает окружность, то лучи, выходящие в воздух, образуют поверхность кругового цилиндра, диаметр которого  $AB$  согласно

черт. 19 равен  $D \cdot \operatorname{tg} \omega$ , где  $D$  — толщина пластинки, а  $\omega$  — угол расхождения лучей конуса;  $\operatorname{tg} \omega$  можно заменить выражением (292). Описанное явление, которое представляет собой одно из наиболее блестящих подтверждений теоретической кристаллооптики, называется „конической рефракцией“ и, в частности, „внутренней“ конической рефракцией, так как распадение света на конус лучей происходит при входе в кристалл.

§ 67. Всякой закономерности, относящейся к направлению лучей в кристалле, соответствует аналогичная закономерность, относящаяся к направлению нормалей. Это имеет место и для только что рассмотренного явления конической рефракции, при-



Черт. 20.

чем в данном случае это основывается на том, что двум определенным особым лучам соответствуют не две, а бесчисленное множество различных волновых нормалей. Чтобы осуществить такой случай, надо получить луч, направление которого совпадает со вторичной оптической осью. Для этого может быть следующим образом употреблена та же пластинка арагонита, которая употреблялась для опыта, описанного в предыдущем параграфе.

Помещают точечный источник света  $O$  на поверхность кристалла, для чего покрывают поверхность непрозрачным экраном, имеющим небольшое отверстие, и этот экран освещают со всех сторон. Тогда из точки  $O$  распространяются в кристалле лучи по всем направлениям. Если противоположную сторону пластинки также покрыть непрозрачным экраном с отверстием  $P$  в каком-либо месте, то из кристалла может выйти только один луч, именно  $OP$ . Этому лучу, как мы знаем, соответствуют в кристалле в общем две нормали, следовательно, две волновые плоскости, образующие с ним некоторые углы; каждая из них переходит в воздух согласно особому закону преломления, с которым мы ближе познакомимся в следующей главе. Следовательно, мы получаем в  $P$  два луча, выходящих по разным направлениям. Но если направление  $OP$  как раз совпадает со вторичной оптической осью кристалла, то лучу  $OP$  соответствует в кристалле бесконечное множество различных направлений нормалей и волновых плоскостей. Так как каждая из них при выходе наружу преломляется особым образом, то свет распространяется из точки  $P$  в виде конуса по бесконечному числу различных направлений (черт. 20). Это явление известно как „внешняя“ коническая рефракция, потому что здесь расщепление луча происходит при выходе из кристалла.

Чтобы найти соответствующее направление  $P$ , естественно, нужно один из экранов сделать подвижным и двигать его до тех пор, пока линия  $OP$ , соединяющая оба отверстия, не совпадает со вторичной оптической осью.

Само собой понятно, что при конической рефракции как внутренней, так и внешней каждый из лучей цилиндра или конуса, выходящий в воздух, обладает определенной плоскостью колебаний и плоскостью поляризации, которые получаются согласно известным законам распространения и преломления.

#### ГЛАВА IV

### НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ

§ 68. Законы перехода плоской световой волны из изотропной среды в кристалл или из кристалла в изотропную среду можно получить тем же методом, которым мы пользовались в первой части книги. Для этого мы сначала составляем выражение для плоских волн внутри обеих граничащих друг с другом сред и налагаем граничные условия, имеющие место для плоскости раздела. Последние заключаются в непрерывности тангенциальных слагающих напряжений электрического и магнитного полей. Таким путем, если произвольным образом задана падающая волна, получаются определенные выражения для преломленной и отраженной волны.

Чтобы сохранить прежние обозначения, мы и теперь возьмем в качестве осей координат главные оси кристалла. Поэтому мы уже не можем, как для изотропных сред, взять нормаль к падающей волне в качестве оси  $x$ . Мы назовем направляющие косинусы этой нормали  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ , а скорость распространения в первой изотропной среде  $q_0$ . Тогда падающая волна определенной поляризации характеризуется, как в (8), ее волновой функцией (выражающей напряжение магнитного поля):

$$f\left(t - \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z}{q_0}\right), \quad (297)$$

причем  $f$  является произвольно заданной функцией одного аргумента. Нормаль к плоскости раздела имеет направляющие косинусы  $u, v, w$ . Требуется найти волновые функции для преломленной волны:

$$f_1\left(t - \frac{ax + by + cz}{q}\right) \quad (298)$$

и отраженной волны:

$$f'\left(t - \frac{\alpha_0' x + \beta_0' y + \gamma_0' z}{q_0}\right). \quad (299)$$

Так же как и для изотропных сред, задача здесь распадается на две части: требуется, во-первых, найти направления, по которым распространяются преломленная и отраженная волны, и во-вторых, определить волновые функции  $f_1$  и  $f'$ . Обе задачи разрешаются путем составления граничных условий, выражающих

равенство напряжений электрического и магнитного поля по обе стороны от плоскости раздела:

$$ix + uy + wz = 0. \quad (300)$$

Отсюда находим два уравнения, так же как (15) и (16), линейные и однородные относительно  $f$ ,  $f_1$  и  $f'$ ; из них следует, что  $f_1$  и  $f'$  пропорциональны  $f$ .

§ 69. Рассмотрим сначала направления преломленной и отраженной волны. Так как пропорциональность между  $f_1$ ,  $f'$  и  $f$  должна иметь место во все моменты времени  $t$  и во всех точках граничной плоскости (300), то аргументы этих функций должны быть равны между собой, как это имело место в § 7, т. е. на границе должно быть:

$$\frac{\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z}{q_0} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{q} = \frac{\alpha_0' x + \beta_0' y + \gamma_0' z}{q_0}. \quad (301)$$

Первое равенство дает:

$$\left(\frac{\alpha}{q} - \frac{\alpha_0}{q_0}\right)x + \left(\frac{\beta}{q} - \frac{\beta_0}{q_0}\right)y + \left(\frac{\gamma}{q} - \frac{\gamma_0}{q_0}\right)z = 0. \quad (302)$$

Если бы это имело место для любых значений  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то все величины в скобках должны были бы равняться нулю. Но  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны между собой уравнением (300). Поэтому можно  $z$  при помощи (300) выразить через  $x$  и  $y$ , подставить в (302) и приравнять нулю коэффициенты при  $x$  и  $y$ . Целесообразнее, однако, применить, как в I, § 97, симметрический метод исключения Лагранжа, состоящий в том, что выражение (300), умноженное на некоторую постоянную  $\lambda$ , прибавляют к (302) и приравнивают нулю коэффициенты при  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в отдельности. Это дает три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{q} - \frac{\alpha_0}{q_0} + \lambda u &= 0, \\ \frac{\beta}{q} - \frac{\beta_0}{q_0} + \lambda v &= 0, \\ \frac{\gamma}{q} - \frac{\gamma_0}{q_0} + \lambda w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (303)$$

Эти равенства допускают следующее простое геометрическое толкование. Во-первых, три заданных направляющими косинусами направления лежат в одной плоскости, т. е. нормаль преломленной волны лежит в плоскости падения, проходящей через нормаль к падающей волне, и перпендикуляр к плоскости границы. Во-вторых, умножением отдельных уравнений на соответствующие направляющие косинусы линий пересечения плоскости падения и плоскости границы и сложением полученных выражений получаем:

$$\frac{\sin \theta}{q} - \frac{\sin \theta_0}{q_0} = 0, \quad (304)$$



где  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$  обозначают углы обеих волновых нормалей с перпендикуляром к граничной плоскости. Таким образом закон преломления Снеллиуса сохраняется и при преломлении в кристалле, поскольку он прилагается к нормали преломленной волны. Но в данном случае он не имеет того практического значения, какое он имеет для случая изотропной среды, поскольку скорость распространения  $q$  неизвестна и сама зависит от искомого угла преломления  $\vartheta$ . Поэтому для нахождения направления преломленной волны надо принять во внимание связь  $q$  с  $\alpha, \beta, \gamma$ , выраженную в (264). Всего проще и очевиднее это можно сделать, введя сокращения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{q} = x, \quad \frac{\beta}{q} = y, \quad \frac{\gamma}{q} = z, \\ \frac{1}{q^2} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

где, конечно,  $x, y, z$  имеют другое значение, чем прежде. Тогда из (303) следует:

$$\left(x - \frac{\alpha_0}{q_0}\right) : \left(y - \frac{\beta_0}{q_0}\right) : \left(z - \frac{\gamma_0}{q_0}\right) = u : v : w, \quad (306)$$

а из (264):

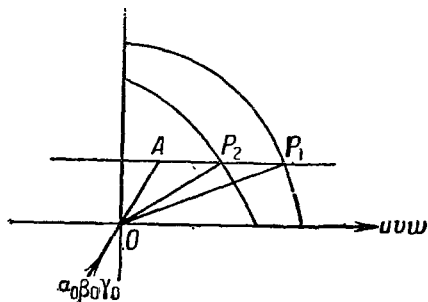
$$\frac{x^2}{a^2 r^2 - 1} + \frac{y^2}{b^2 r^2 - 1} + \frac{z^2}{c^2 r^2 - 1} = 0. \quad (307)$$

Первое уравнение выражает, что точка  $P$ , представленная координатами  $x, y, z$ , лежит на прямой, проходящей через точку  $A$  с координатами  $\frac{\alpha_0}{q_0}, \frac{\beta_0}{q_0}, \frac{\gamma_0}{q_0}$ , перпендикулярно к плоскости границы. При этом отрезки  $OA$  и  $OP$  (черт. 21) имеют направления нормалей падающей и преломленной волны и величины, обратные соответствующим скоростям распространения  $q_0$  и  $q$ . Второе уравнение говорит о том, что точка  $P$  лежит на поверхности (307). Сравнение с (284) показывает, что эта поверхность может быть рассматриваема как поверхность световой волны некоторого воображаемого кристалла с главными скоростями распространения  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ . Ее называют „поверхностью индексов“ действительного кристалла, имеющего главные скорости распространения  $a, b, c$ , так как главные показатели преломления  $n_1, n_2, n_3$  согласно (275) обратно пропорциональны величинам  $a, b, c$ .

Поверхность индексов находится в таком же отношении к волновой поверхности, в каком находится эллипсоид с полуосями  $a, b, c$  (§ 60) к поляризованному эллипсоиду с полуосями  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$  (§ 58). Поэтому все те следствия, которые вытекают из общего принципа взаимности, могут быть применены к свойствам поверхности индексов. Так, например, первичные оптиче-

ские оси поверхности индексов являются вторичными оптическими осями волновой поверхности, и наоборот.

§ 70. Предыдущие положения дают простой метод геометрического построения направления и скорости распространения преломленной волны. Через центр  $O$  поверхности индексов кристалла проводят плоскость параллельно плоскости падения и принимают ее за плоскость чертежа (черт. 21). Эта плоскость содержит нормаль  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  падающей волны и перпендикуляр к плоскости границы  $u, v, w$ . Пересечение ее с обеими частями поверхности индексов представлено на рисунке двумя кривыми,



Черт. 21.

охватывающими одна другую. В направлении  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  откладывают отрезок  $OA = \frac{1}{q_0}$  и проводят через  $A$  параллель к перпендикуляру  $u, v, w$ . Каждая из двух точек пересечения с поверхностью индексов  $P_1$  и  $P_2$  дает два отрезка  $OP_1$  и  $OP_2$ , которые определяют направление  $\alpha, \beta, \gamma$  и обратную величину скорости распространения  $\frac{1}{q}$  для нормали преломленной волны. Таким образом в общем случае имеются две различные преломленные волны, на которые расщепляется падающая волна при входе в кристалл. Каждой из двух волновых нормалей соответствует определенный луч, направление которого представлено нормалью к поверхности индексов в точке  $P$ ; в общем случае он выходит из плоскости падения. Точно так же каждой нормали соответствует и определенная плоскость колебаний, проходящая через нормаль и луч; этим самым определяются направления напряжений электрического и магнитного полей и индукции.

Если  $q_0$  не слишком велико сравнительно с главными скоростями распространения  $a, b, c$ , может случиться, что точка  $A$  лежит вне внутренней или даже внешней замкнутой поверхности индексов. Тогда возможно, что одна точка  $P_2$ , либо обе точки  $P_1$  и  $P_2$  делаются мнимыми и наступают условия для полного внутреннего отражения.

Чтобы наглядным образом проверить описанный здесь метод построения, применим его к преломлению света изотропной средой, которую можно рассматривать как частный случай кристалла.

Для изотропной среды оба сечения поверхности индексов совпадают с окружностью радиуса  $\frac{1}{q}$ . Отрезки  $OA$  и  $OP$  длины  $\frac{1}{q_0}$  и  $\frac{1}{q}$  образуют с перпендикуляром к границе  $u, v, w$  углы  $\vartheta_0$  и  $\vartheta$ .

Из соотношения между этими углами и получается закон преломления Снеллиуса:

$$\sin \vartheta_0 : \sin \vartheta = q_0 : q.$$

§ 70а. Для отраженной волны второе уравнение (301) дает:

$$(\alpha_0' - \alpha_0) x + (\beta_0' - \beta_0) y + (\gamma_0' - \gamma_0) z = 0.$$

Отсюда при помощи рассуждения, аналогичного предыдущему, получается, что нормаль отраженной волны лежит в плоскости падения, а угол ее с перпендикуляром к плоскости границы определяется из условия:

$$\sin \vartheta_0' = \sin \vartheta_0.$$

Таким образом:

$$\vartheta_0' = \pi - \vartheta_0,$$

т. е. угол отражения равен углу падения, так же как для изотропных сред.

§ 71. Точно так же как мы здесь исследовали преломление и отражение волны, падающей из изотропной среды на кристалл, можно исследовать и противоположный случай, когда волна, распространяющаяся внутри кристалла, падает на поверхность изотропной среды. Тогда тем же самым методом получают соответствующие этому случаю законы преломления и отражения, которые характерным образом отличаются от прежних. Так, в общем случае получаются две различные волны, которые отражаются от поверхности границы обратно в кристалл; в однородную среду выходит лишь одна волна, направление которой можно непосредственно определить при помощи закона преломления Снеллиуса.

§ 72. Полученные здесь для кристаллов законы преломления и отражения допускают большое число применений. Мы коснемся лишь немногих из них. Ради простоты мы ограничимся рассмотрением одноосного и притом положительного кристалла. В этом случае согласно § 59:

$$a = b > c \tag{308}$$

и уравнение (264) переходит в

$$\{(a^2 + \beta^2)(c^2 - q^2) + \gamma^2(a^2 - q^2)\} \cdot (a^2 - q^2) = 0.$$

Корнями его являются:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= a, \\ q_2^2 &= (a^2 + \beta^2)c^2 + \gamma^2 a^2. \end{aligned} \right\} \tag{309}$$

Волну с постоянной скоростью распространения  $a = q_1$  называют „обыкновенной“, волну с переменной скоростью распространения  $q_2$  — „необыкновенной“. Обозначим через  $\vartheta$  угол волновой нормали с оптической осью, которой в данном случае является

ось  $z$ . Тогда  $\gamma = \cos \vartheta$ . Отбросив для простоты индекс 2 у  $q_2$ , получим для скорости распространения необыкновенной волны:

$$q^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta. \quad (310)$$

Уравнение (285) поверхности световой волны при  $a = b$  переходит в

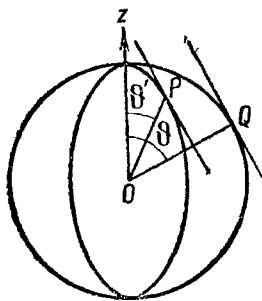
$$(a^2 x^2 + a^2 y^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0. \quad (311)$$

Эта поверхность распадается на вытянутый эллипсоид вращения с полуосями  $c, c, a$ :

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (312)$$

и на сферу радиуса  $a$ , касающуюся эллипсоида в концах его оси:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$



Черт. 22.

Эллипсоид образует внутреннюю замкнутую поверхность волны, сфера — внешнюю. Первичные и вторичные оптические оси совпадают с осью  $z$ .

На черт. 22 нарисованы обе волновые плоскости, которые соответствуют определенной волновой нормали  $OQ$ . Они касаются волновых поверхностей в точке  $P$  внутренней и  $Q$  внешней поверхностей волны.  $OP$  и  $OQ$  — соответствующие им лучи. Плоскость колебаний необыкновенного луча  $OP$  совпадает с плоскостью чертежа, которая представляет собой главное сечение кристалла, проходящее через его оптическую ось. Колебания обыкновенного луча происходят в перпендикулярной к ней плоскости. Поэтому электрическая индукция лежит в  $P$  в плоскости чертежа, а в  $Q$  — перпендикулярно к ней (ср. черт. 14 и 15).

Угол обыкновенного луча  $OQ$  с осью  $z$  равен углу волновой нормали  $\vartheta$ . Угол  $\vartheta'$  необыкновенного луча  $OP$  с осью  $z$  легко вычисляется, если принять во внимание, что на черт. 22 угол  $\vartheta$  обозначает направление нормали к эллипсоиду в конце полу диаметра  $OP$ , проведенного под углом  $\vartheta'$ . Следовательно:

$$\sin \vartheta' : \cos \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{c^2} : \frac{\cos \vartheta'}{a^2}. \quad (313)$$

Отсюда находим:

$$\cos \vartheta' = \frac{a^2 \cos \vartheta}{\sqrt{a^4 \cos^2 \vartheta + c^4 \sin^2 \vartheta}}. \quad (314)$$

Для угла  $\delta$  между лучом и нормалью необыкновенной волны получается:

$$\cos \delta = \cos(\vartheta - \vartheta') = \frac{a^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta}{\sqrt{a^4 \cos^2 \vartheta + c^4 \sin^2 \vartheta}}, \quad (315)$$

а для скорости распространения по направлению луча:

$$q' = \frac{q}{\cos \delta} = \sqrt{\frac{a^4 \cos^2 \delta + c^4 \sin^2 \delta}{a^2 \cos^2 \delta + c^2 \sin^2 \delta}} \quad (316)$$

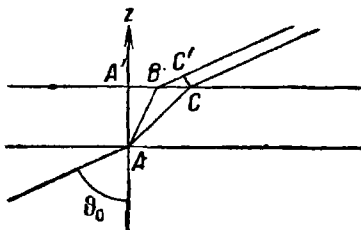
Само собой понятно, что при вычислении этих величин можно воспользоваться и теми соотношениями, которые вытекают из общего принципа взаимности (§ 60). Так, из уравнения (310) можно прямо получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{q'^2} = \frac{\cos^2 \delta'}{a^2} + \frac{\sin^2 \delta'}{c^2}, \quad (317)$$

правильность которого легко может быть установлена.

§ 73. Теперь мы рассмотрим прохождение плоской монохроматической волны через плоскопараллельную пластинку одноосного положительного кристалла, отшлифованную перпендикулярно оптической оси.

Обозначим угол падения через  $\vartheta_0$ . Плоскость падения, которая в то же время является главным сечением кристалла, примем за плоскость чертежа (черт. 23), причем ось  $z$  совпадает с оптической осью. Падающий луч идет через пластинку снизу с левой стороны вверх в правую сторону. Будем считать волну, как и пластинку, неограниченной с боков, тогда можно не останавливаться на направлении луча, а ограничиться рассмотрением волновой нормали.



Черт. 23.

Луч естественного света, который снизу падает на пластинку в точке  $A$ , расщепляется в ней согласно закону преломления Снеллиуса на обыкновенную волну:

$$\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_1} = \frac{q_0}{q_1} = \frac{q_0}{a} \quad (318)$$

и на необыкновенную волну:

$$\frac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_2} = \frac{q_0}{q_2}, \quad (319)$$

где  $q_2$  и  $\vartheta_2$  взаимно связаны соотношением (310).

Каждая из этих двух волн проходит через кристалл и дает при выходе через противоположную, проходящую через точку  $A$ , поверхность луч, направленный вверх вправо. Этот луч параллелен падающему в точку  $A$  лучу, так как при преломлении у второй поверхности кристалла получаются те же углы, что и у первой поверхности его, но в обратной последовательности. Таким образом обе волны опять соединяются в воздухе в одну

волну, параллельную падающей. Но так как путь по волновой нормали для обеих волн различен, то разность фаз при выходе из пластинки у них другая, чем при входе. Подсчитаем это смещение фаз  $\Delta$ , которое получается при прохождении через пластинку.

Нормаль обыкновенной волны представлена на черт. 23 отрезком  $AC$ , причем угол  $CAA' = \vartheta_1$ . В точке  $C$  происходит второе преломление, посредством которого восстанавливается первоначальное направление нормали, образующее угол  $\vartheta_0$  с осью  $z$ .

Нормаль необыкновенной волны в кристалле представлена отрезком  $AB$ , причем угол  $BAA' = \vartheta_2$ . В точке  $B$  волна выходит в воздух опять в направлении  $\vartheta_0$  к оси  $z$ . Плоскость волны прошедшего света  $C'S$  перпендикулярна к волновой нормали  $BC'$ . Искомая разность фаз  $\Delta$  получится, если мы выберем две определенные плоскости волны, из которых одну возьмем до вступления луча в пластинку, например плоскость, проходящую через точку  $A$ . Другую возьмем после прохождения луча через пластинку, пусть она проходит, например, через точку  $C$ . Сравним те изменения, которые претерпевает аргумент волновой функции  $\omega\left(t - \frac{n}{q}\right)$  для каждой из двух волн в промежутке между этими двумя волновыми плоскостями. В этом промежутке нормалью обыкновенной волны служит прямая  $AC$ , нормаль необыкновенной волны представлена ломаной  $ABC'$ , участок которой  $AB$  пробегается волной со скоростью  $q_2$ , участок  $BC'$  — со скоростью  $q_0$  и притом без изменения фазы при преломлении. Отсюда получается искомое смещение фазы:

$$\Delta = \omega \left( \frac{AB}{q_2} + \frac{CB'}{q_0} - \frac{AC}{a} \right). \quad (320)$$

Величина отрезков  $AB$ ,  $BC'$ ,  $AC$ , как и скорости распространения  $q_2$ , получается из угла падения  $\vartheta_0$ . Для простоты мы принимаем  $\vartheta_0$  малым и ограничиваемся членами второго порядка относительно него. Тогда из (318) следует:

$$\vartheta_1 = \frac{a}{q_0} \cdot \vartheta_0, \quad \cos \vartheta_1 = 1 - \frac{a^2 \vartheta_0^2}{2q_0^2},$$

из (319):

$$\vartheta_2 = \frac{q_2}{q_0} \cdot \vartheta_0.$$

На основании (310) получаем:

$$q_2^2 = a^2 - (a^2 - c^2) \vartheta_2^2,$$

откуда

$$q_2 = a \left( 1 - \frac{a^2 - c^2}{2q_0^2} \vartheta_0^2 \right)$$

и

$$\vartheta_2 = \frac{a}{q_0} \vartheta_0 = \vartheta_1.$$

Далее, обозначив через  $D$  толщину пластинки, найдем:

$$AB = \frac{D}{\cos \vartheta_2} = D \left( 1 + \frac{a^2 \vartheta_0^2}{2a_0^2} \right),$$

$$AC = \frac{D}{\cos \vartheta_1} = AB,$$

в то время как

$$BC' = BC \cdot \vartheta_0$$

является величиной порядка  $D \cdot \vartheta_0^2$  и поэтому может быть откинута.

Найденные величины, будучи вставлены в (320), дают:

$$\Delta = \omega \cdot AB \cdot \left( \frac{1}{q_3} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\omega D}{2a} \cdot \frac{a^2 - c^2}{q_0^2} \cdot \vartheta_0^2$$

или, если ввести главные показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  и длину волны в воздухе  $\lambda_0$ :

$$\Delta = \frac{\pi D n_1}{\lambda_0} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \cdot \vartheta_0^2. \quad (321)$$

Плоскость колебаний необыкновенной волны, так же как и электрическая индукция, лежит в главном сечении, т. е. в плоскости падения; плоскость колебаний обыкновенной волны — в плоскости, перпендикулярной к главному сечению. Поэтому необыкновенная волна получается из той компоненты падающей волны, колебания которой происходят в плоскости падения, а обыкновенная волна — из компоненты, перпендикулярной к первой.

Пусть падающий свет линейно поляризован, например, при помощи призмы Николя, употребленной в качестве поляризатора, плоскость колебания которого образует угол  $\varphi$  с плоскостью падения. Тогда разность фаз обеих волн при входе в пластинку равна нулю, а амплитуды их относятся, как  $\cos \varphi : \sin \varphi$ , если пренебречь ослаблением света благодаря отражению. При выходе из пластинки разность фаз, как подсчитано, равна  $\Delta$ , так что выходящий луч в общем случае является эллиптически поляризованным. Если после этого пропустить свет через вторую призму Николя как через анализатор, плоскость колебаний которого образует угол  $\psi$  с плоскостью падения, то интенсивность прошедшего света получается, как в (295), равной:

$$J = \cos^2(\varphi - \psi) - \sin 2\varphi \cdot \sin 2\psi \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}, \quad (322)$$

где  $\Delta$  дано посредством (321), а интенсивность падающего света принята за единицу.

Когда николи скрещены, получается подобно (296):

$$J = \sin^2 2\varphi \cdot \sin^2 \frac{\Delta}{2}. \quad (323)$$

Если свет проходит еще через собирательную линзу, расположенную параллельно кристаллической пластинке, то световые лучи соединяются в такой точке фокальной плоскости, положе-

ние которой определяется углом  $\vartheta_0$ ; последний пропорционален расстоянию этой точки от осевой точки, т. е. от фокуса лучей, перпендикулярных к пластинке, прошедших через нее без преломления.

На основании изложенного объясняется следующее световое явление: возьмем пучок лучей, падающих почти перпендикулярно на плоскопараллельную кристаллическую пластинку, вырезанную из одноосного кристалла перпендикулярно к оптической оси и находящуюся между двумя скрещенными николями. В этом случае мы имеем в пучке лучей бесконечное множество плоскостей падения, каждой из которых соответствует определенное значение  $\varphi$ . Поэтому интенсивность прошедшего света  $J$  зависит, кроме  $\vartheta_0$ , также от азимутального угла  $\varphi$  плоскости падения. Благодаря этому в фокальной плоскости линзы получается черный крест (при  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ) с налегающими на него кон-

центрическими черными кольцами, радиусы которых определяются теми значениями  $\Delta$ , которые являются кратными  $2\pi$ . При других положениях призм Николя значение  $J$  получается из (322).

§ 74. До сих пор мы занимались изучением направления и скорости распространения волн, отраженных и преломленных кристаллом.

Возвращаясь к рассуждениям § 68, поставим теперь вопрос о величине волновых функций. С этой целью мы должны, как и для случая изотропных сред, принять во внимание особую форму условий на границе. Но задача здесь гораздо сложнее, потому что теперь невозможно преломление и отражение компоненты, совершающей колебания в плоскости падения, рассматривать совершенно отдельно от компоненты, колебания которой перпендикулярны к плоскости падения, тем более, что в общем случае каждая из этих двух компонент претерпевает двойное преломление при вступлении в кристалл.

Однако мы можем, как увидим далее, разбить задачу на две независимые части и этим значительно упростить вычисления. При этом мы должны исходить не из определенной компоненты падающей из изотропной среды волны, а обратить свое внимание прежде всего на одну из двух распространяющихся в кристалле волн. Направление распространения и поляризация, равно как и скорость распространения обеих преломленных волн, могут быть определены на основании положений последнего параграфа. Поэтому мы можем поставить себе следующий вопрос: какими свойствами должна обладать падающая волна, чтобы в кристалле получилась только одна из двух преломленных волн?

Будем считать известными направления нормали  $n$ , напряженности электрического и магнитного полей и индукции, а также скорость распространения одной из двух преломленных волн, и определим соответствующую ей падающую и отраженную волну. Это может быть сделано при помощи условий на границе,



выражающих непрерывность тангенциальных компонент напряжений поля.

Обозначая напряжение магнитного поля преломленной волны через

$$H = f_1 \left( t - \frac{n}{q} \right), \quad (324)$$

имеем для напряжения электрического поля волны согласно (257):

$$E = \frac{q}{c_0 \cos \delta} f_1 \left( t - \frac{n}{q} \right). \quad (325)$$

Выразим направление напряжения электрического поля, которое мы считаем известным, при помощи направляющих косинусов  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  углов, образуемых им со следующими тремя взаимно перпендикулярными направлениями: перпендикуляром к границе ( $\xi$ ), линией пересечения плоскости падения с плоскостью границы ( $\eta$ ) и нормалью к плоскости падения ( $\zeta$ ) (ср. черт. 1).

Тогда из двух касательных к граничной плоскости компонент электрического напряжения та, которая находится в плоскости падения, равна:

$$\frac{q}{c_0 \cos \delta} \cdot f_1 \cdot \eta, \quad (326)$$

а перпендикулярная к плоскости падения равна:

$$\frac{q}{c_0 \cos \delta} \cdot f_1 \cdot \zeta. \quad (327)$$

Напряжение магнитного поля перпендикулярно, во-первых, напряжению электрического поля с направляющими косинусами  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , во-вторых, к лежащей в плоскости падения нормали волны  $n$ , с направляющими косинусами:  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$ , 0; его направляющие косинусы поэтому равны:

$$\frac{\zeta \sin \vartheta}{\cos \delta}, \quad \frac{-\zeta \cos \vartheta}{\cos \delta}, \quad \frac{\eta \cos \vartheta - \xi \sin \vartheta}{\cos \delta}. \quad (328)$$

Правильные знаки получаются из рассмотрения частного случая, например, когда  $\delta = 0$ ,  $\vartheta = 0$ ,  $\eta = 1$ . Следовательно, согласно (324) и (328) та касательная к границе компонента магнитного напряжения, которая лежит в плоскости падения, равна:

$$-f_1 \cdot \frac{\zeta \cos \vartheta}{\cos \delta}, \quad (329)$$

а перпендикулярная к плоскости падения:

$$f_1 \frac{\eta \cos \vartheta - \xi \sin \vartheta}{\cos \delta}. \quad (330)$$

Теперь найдем соответствующие величины для падающей волны, которую также примем линейно поляризованной. Обозначив ее магнитное напряжение через  $f$ , имеем согласно (8) и (7) для

электрического напряжения величину  $f \cdot \frac{q_0}{c_0}$ . Если плоскость колебаний образует с плоскостью падения угол  $\varphi$ , то касательная к границе компонента электрического напряжения, находящаяся в плоскости падения, равна:

$$f \cdot \frac{q_0}{c_0} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta_0, \quad (331)$$

а перпендикулярная к плоскости падения равна:

$$f \frac{q_0}{c_0} \sin \varphi. \quad (332)$$

Соответствующие выражения для магнитного напряжения такие:

$$-f \sin \varphi \cos \vartheta_0 \quad (333)$$

и

$$f \cdot \cos \varphi. \quad (334)$$

Наконец, для отраженной волны мы получаем аналогичные выражения, которые мы для отличия будем обозначать штрихом. При этом следует заметить, что  $q_0' = q_0$  и  $\vartheta' = \pi - \vartheta$ . Для электрического напряжения получаются компоненты:

$$-f' \frac{q_0}{c_0} \cos \varphi' \cos \vartheta_0 \quad (335)$$

и

$$f' \frac{q_0}{c_0} \sin \varphi', \quad (336)$$

а для магнитного напряжения компоненты:

$$f' \sin \varphi' \cos \vartheta_0 \quad (337)$$

и

$$f' \cos \varphi'. \quad (338)$$

На границе касательные компоненты всех напряжений поля должны быть непрерывны, так что напряжения падающей и отраженной волны равны напряжению поля преломленной волны. Отсюда получаются следующие четыре граничных условия: во-первых, для компоненты электрического напряжения, лежащей в плоскости падения, согласно (331), (335), (326):

$$f q_0 \cos \varphi \cos \vartheta_0 - f' q_0 \cos \varphi' \cos \vartheta_0 = \frac{q}{\cos \delta} f_1 \eta. \quad (339)$$

Во-вторых, для компоненты электрического напряжения, перпендикулярной к плоскости падения согласно (332), (336), (327):

$$f q_0 \sin \varphi + f' q_0 \sin \varphi' = \frac{q}{\cos \delta} f_1 \zeta. \quad (340)$$

В-третьих, для компоненты магнитного напряжения, лежащей в плоскости падения, согласно (333), (337), (329):

$$-f \sin \varphi \cos \vartheta_0 + f' \sin \varphi' \cos \vartheta_0 = -f_1 \frac{\zeta \cos \vartheta}{\cos \delta}. \quad (341)$$

Наконец, в-четвертых, для компоненты магнитного напряжения, перпендикулярной к плоскости падения, согласно (334), (338), (330):

$$f \cos \varphi + f' \cos \varphi' = f_1 \frac{\eta \cos \vartheta - \xi \sin \vartheta}{\cos \delta}. \quad (342)$$

Полагая, как в § 7:

$$f' = \mu f \quad \text{и} \quad f_1 = \mu_1 f, \quad (343)$$

видим, что все четыре уравнения могут быть удовлетворены при определенных значениях  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\mu$  и  $\mu_1$ . Таким образом мы приходим к выводу, что, действительно, имеется падающая волна определенной формы и поляризации, которая кроме отраженной волны другой определенной формы и поляризации дает в кристалле только одну, рассмотренную здесь преломленную волну. Искомые величины получаются, принимая во внимание (304), при помощи следующих формул:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\zeta \sin (\vartheta_0 + \vartheta)}{\eta (\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos \vartheta + \sin \vartheta) - \xi \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \sin \vartheta}, \quad (344)$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\zeta \sin (\vartheta_0 - \vartheta)}{\xi \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \sin \vartheta - \eta (\sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos \vartheta - \sin \vartheta)}, \quad (345)$$

$$\mu = -\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} \cdot \frac{\sin (\vartheta_0 - \vartheta)}{\sin (\vartheta_0 + \vartheta)}, \quad (346)$$

$$\mu_1 = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin 2\vartheta_0}{\zeta \cdot \sin (\vartheta_0 + \vartheta)}. \quad (347)$$

Для того частного случая, когда напряжение электрического поля преломленной волны перпендикулярно к волновой нормали и лежит в плоскости падения ( $\xi = -\sin \vartheta$ ,  $\eta = \cos \vartheta$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\delta = 0$ ), выражения для  $\mu$  и  $\mu_1$  приобретают вид (23) и (24), где  $\vartheta_0$  — угол падения,  $\vartheta$  — угол преломления; углы  $\varphi$  и  $\varphi'$  при этом равны нулю.

§ 7б. Теперь спросим себя: какой должна быть падающая волна, чтобы при том же самом угле падения  $\vartheta_0$  получилась лишь вторая из обеих преломленных волн? Мы получим ответ тем же самым путем, если будем исходить из волновой функции второй преломленной волны:  $g_1 \left( t - \frac{n_2}{a} \right)$ . Соответствующие расчеты опять дадут определенную падающую волну  $g$ , плоскость колебаний которой имеет азимут  $\varphi_2$  и определенную отраженную волну  $g'$  с азимутом колебаний  $\varphi_2'$ . Обозначим, как в § 7:

$$g' = \sigma g \quad \text{и} \quad g_1 = \sigma_1 g,$$

тогда последние четыре уравнения предыдущего параграфа, если подставить в них вычисленные для второй преломленной волны значения  $\vartheta$ ,  $\delta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , дадут соответствующие величины для  $\varphi_2$ ,  $\varphi_2'$ ,  $\sigma$  и  $\sigma_1$ .

Для того частного случая, когда напряжение электрического поля преломленной волны перпендикулярно как к волновой нор-

мали, так и к плоскости падения ( $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\delta = 0$ ), выражения для  $\delta$  и  $\delta_1$  принимают вид (23) и (24), причем оба угла  $\varphi_2$  и  $\varphi_2'$  делаются равными  $\frac{\pi}{2}$ .

Отсюда получается и решение общей задачи: найти для произвольно заданной падающей волны форму обеих преломленных волн, а также форму и поляризацию отраженной волны. Для этого разлагают падающую волну на две компоненты  $f$  и  $g$ , из которых каждая, независимо одна от другой, дает согласно определенному закону одну преломленную и одну отраженную волну. При этом колебания нужно разлагать не по азимутам  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$  (т. е. в плоскости падения и перпендикулярно к ней), как для изотропных сред, но по азимутам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Величина последних находится из (344), если туда вставить вместо  $\vartheta$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  те значения, которые получаются для обеих преломленных волн, при угле падения  $\vartheta_0$  согласно § 69. Тогда  $\mu_1 \cdot f$  и  $\sigma_1 \cdot g$  являются волновыми функциями для обеих преломленных волн, в то время как  $\mu \cdot f$  и  $\sigma \cdot g$ , нормаль которых одна и та же, соответственно значениям их азимутов  $\varphi_1'$  и  $\varphi_2'$ , складываются в одну отраженную волну. Если падающий свет был линейно поляризованным, то таким же будет и отраженный свет; если падал естественный свет, то отраженный свет будет частично поляризован.

При помощи полученных таким образом результатов могут быть произведены подсчеты, аналогичные тем, которые мы проделали для изотропных сред. Так, например, можно подсчитать коэффициенты отражения и пропускания ( $\rho$  и  $1 - \rho$ ), разобрать случай перпендикулярного падения ( $\vartheta_0 = 0$ ) и скользящего падения ( $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ ), найти угол полной поляризации ( $\rho = 0$ ), угол полного внутреннего отражения ( $\vartheta$  — мнимое). Однако углубление в эти вопросы завело бы нас слишком далеко.

## ДИСПЕРСИЯ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

### ГЛАВА I

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 76. Возвращаясь снова к рассмотрению изотропных сред, мы займемся теперь явлением, которое наблюдается в той или иной степени во всех случаях преломления света, а именно, дисперсией. До сих пор мы принуждены были игнорировать это явление, так как ему не было отведено никакого места в первоначальной теории Максвелла. Выше, в § 9, нам встретилось это обстоятельство, и мы уже тогда указывали единственный выход из связанных с ним затруднений для теории: мы должны отказаться от представления о пространстве, как о совершенно непрерывно заполненном материей, и перейти к атомистическому представлению о нем.

Таким образом мы решительно оставляем ту точку зрения, которой мы держались в предыдущих рассуждениях, и вступаем в область, для продвижения в которой нам необходимо с самого начала обратиться к более или менее произвольным гипотезам. Тут трудность заключается в самой природе вещей. Ее возможно до известной степени уменьшить тем, что мы заранее считаем атомы, или, вообще говоря, наименьшие элементарные частицы материи, крайне малыми и чрезвычайно многочисленными. При помощи этого допущения создается, с одной стороны, возможность приписать материальному телу, построенному из атомов, новые, прежней теорией не объясняемые свойства. С другой стороны, мы можем считать, что тело ведет себя практически, как вполне однородное, если рассматриваемые явления происходят внутри участков, не слишком малых по своим размерам. Хорошим примером тут служит распространение звуковой волны в среде, состоящей из атомов. Для такой среды в случае не слишком малой длины волны совершенно точно справедливы те законы, которые действительны для абсолютно однородной среды той же плотности и упругости. С этой точки зрения вся рассмотренная до сих пор теория является предельной теорией, годной для относительно медленно протекающих явлений грубого характера. Наша теперешняя задача состоит в том, чтобы

область, в которой теория справедлива, несколько расширить в сторону явлений, протекающих более быстро и имеющих более тонкую природу.

§ 77. Чтобы не терять связи с прежним изложением, мы сохраним, как и в кристаллооптике, уравнения (1), (2) и (3), но вместо уравнения (4), выражающего пропорциональность между электрической индукцией  $\mathbf{D}$  и электрическим напряжением  $\mathbf{E}$ , введем более общее соотношение. Это соотношение делается легко понятным при помощи того наглядного физического толкования, которое можно дать согласно § 26 различию между индукцией и напряжением поля, а именно, полагая согласно §, (141):

$$\frac{\mathbf{D} - \mathbf{E}}{4\pi} = \mathbf{M}, \quad (348)$$

мы можем рассматривать  $\mathbf{M}$  как электрический момент единицы объема, т. е. как сумму моментов всех бесконечно малых электрических диполей, которые согласно нашему представлению содержатся в единице объема, выбранной достаточно малой.

Мы сделаем, далее, еще один шаг и припишем этим единичным диполям реальное физическое существование, т. е. мы принимаем не бесконечно большое количество бесконечно малых соприкасающихся друг с другом диполей, относительно размеров которых не имеет смысла и спрашивать, но мы предполагаем их число, их величину и их взаимные расстояния реальными и конечными.

Самым важным следствием из этой гипотезы является то, что теперь имеется только одна непрерывная среда, в настоящем смысле этого слова, — вакуум, в котором протекают все проявления электромагнитного поля. Материальные среды играют в этих процессах лишь промежуточную роль, которая состоит в том, что их электрически заряженные составные части, ионы и электроны, перемещаются в вакууме. Благодаря этому критическая скорость, — скорость распространения света в вакууме, получает более глубокое значение, чем в прежней теории, где она являлась одной из многих скоростей.

§ 78. Обратимся теперь к вопросу о том, каким образом заменить уравнение (4) соотношением, вытекающим из обрисованных нами новых представлений. Заметим прежде всего, что согласно (4) электрический момент всех диполей, содержащихся в единице объема, пропорционален существующему в этот момент времени электрическому напряжению. Однако, приписывая диполям реальное существование, мы должны дать им некоторую самостоятельность. Поэтому мы не можем требовать, чтобы электрический момент диполя мгновенно повторял все колебания действующего на него электрического поля. Мы придадим закону связи между электрическим моментом и возбуждающим электри-

ческим полем более общее значение, проводя различие между колебаниями электрического момента диполя и колебаниями возбуждающего электрического поля. Первые, конечно, определяются последними, но не при помощи простой пропорциональности, а при помощи определенного уравнения колебания, в котором играют роль и индивидуальные особенности диполей, в особенности их инерция. Мы имеем ряд возможностей для выбора формы уравнения колебания. Например, можно диполи считать жесткими и способными вращаться, сохраняя постоянный электрический момент. Тогда в уравнение колебания входят моменты инерции диполей. Нейтральное в электрическом смысле состояние характеризуется совершенно неупорядоченной ориентацией диполей.

Для целей рассмотрения явлений оптической дисперсии, по крайней мере в первом приближении, удобнее всего колебания диполя выразить уравнением вынужденного колебания. Мы представляем себе диполь в виде точечного осциллятора, состоящего из массы  $m$ , соединенной с электрическим зарядом  $e$  и колеблющейся около определенного положения равновесия, в котором находится такой же величины заряд противоположного знака. Уравнение его колебаний в векторной форме 2, (203) имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} = e\mathbf{E}'. \quad (349)$$

Здесь  $\omega_0$  обозначает собственную частоту осциллирующего диполя,  $\mathbf{r}$  — его расстояние от положения равновесия. Поэтому, согласно 3, § 26,  $e\mathbf{r}$  — его электрический момент и если в единице объема находится  $N$  таких диполей, то

$$N \cdot e \cdot \mathbf{r} = \mathbf{M} \quad (350)$$

представляет собой электрический момент единицы объема.

Возбуждающее электрическое поле  $\mathbf{E}'$  надо отличать от суммарного напряжения поля  $\mathbf{E}$ , так как первое происходит от электрических зарядов, находящихся вне рассматриваемого диполя (диполь не может возбуждать сам себя), второе же содержит, кроме того, и то поле, которое происходит от самого рассматриваемого диполя. Различие между  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{E}$  было бы исчезающе малым, если бы достаточно малый объем  $v$  внутри себя не возбуждал никакого поля. Но в действительности этого нет. Наоборот, напряжение поля, которое имеется внутри произвольно малой, равномерно поляризованной, сферы с моментом  $\mathbf{M}$  на единицу объема, равно повсюду одной и той же величине [3, (189)] —  $\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}$ , т. е. не зависит от величины сферы. Прибавив эту величину к возбуждающему напряжению  $\mathbf{E}'$ , получим полное напряжение поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{4\pi}{3}\mathbf{M}. \quad (351)$$

Соединяя вместе три последних уравнения, получаем связь между электрическим моментом  $\mathbf{M}$  и электрическим напряжением  $\mathbf{E}$ , а именно, уравнение колебания в форме

$$m\ddot{\mathbf{M}} + \left(m\omega_0^2 - \frac{4\pi}{3} Ne^2\right)\mathbf{M} = Ne^2\mathbf{E}. \quad (352)$$

Вместе с (348) это дает искомое обобщение основного уравнения (4).

Часто к левой части уравнения колебания прибавляют член затухания, содержащий  $\dot{\mathbf{M}}$  с положительным коэффициентом, как в 7, (20) или 3, (375). Благодаря этому учитывается затухание колебаний, происходящее или вследствие излучения электромагнитной энергии, или по причине столкновений с соседними осцилляторами. Однако мы здесь откажемся от этого добавления.

Для сокращения мы положим:

$$\frac{4\pi Ne^2}{m} = \alpha, \quad (353)$$

$$\omega_0^2 - \frac{\alpha}{3} = \omega_0'^2; \quad (354)$$

тогда уравнение колебания примет более простой вид:

$$\ddot{\mathbf{M}} + \omega_0'^2\mathbf{M} = \frac{\alpha}{4\pi}\mathbf{E}. \quad (355)$$

Уравнения (1), (2), (3), (348) и (355) составляют основу излагаемой здесь теории дисперсии, в основных чертах данной Г. А. Лорентцом. Первым следствием ее является то, что  $\omega_0'^2 > \frac{\alpha}{3}$ , иначе в статическом поле  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  имели бы различные знаки; благодаря этому устанавливается верхняя граница для плотности  $N$  распределения осцилляторов определенного рода.

§ 79. Чтобы установить переход к первоначальной теории Максвелла, рассмотрим явления, протекающие столь медленно, что в уравнении колебания (355) можно пренебречь членом  $\ddot{\mathbf{M}}$  по сравнению с членом, содержащим  $\mathbf{M}$ . Это соответствует тому случаю, когда частота вынужденных возбуждающей волной колебаний диполя мала по сравнению с его собственной частотой.

Тогда из (355) следует:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi\omega_0'^2},$$

а принимая во внимание (348), получим:

$$\mathbf{D} = \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_0'^2}\right)\mathbf{E}.$$

Это уравнение равносильно уравнению (4), устанавливающему строгую пропорциональность между электрической индукцией и



электрическим напряжением. Коэффициент пропорциональности — диэлектрическая постоянная, имеет значение:

$$\epsilon = 1 + \frac{a}{\omega_0'^2}. \quad (356)$$

Область этих явлений и есть та область, на которую распространяются следствия, полученные в § 9. Для них дисперсия полностью исчезает, и согласно (22) получаем для показателя преломления:

$$n^2 = 1 + \frac{a}{\omega_0'^2}. \quad (357)$$

Формулы (356) и (357), как можно видеть, выясняют физическую сущность диэлектрической постоянной, а поэтому также и электрической индукции. Их можно экспериментально проверить путем изучения зависимости диэлектрической постоянной и показателя преломления, от  $N$  — плотности распределения диполей. При этом надо обратить внимание на то, что согласно (353) и (354) как  $a$ , так и  $\omega_0'^2$  зависят от  $N$ .

Подставляя соответствующие значения в (357), получаем:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N \cdot \frac{4\pi e^2}{3m\omega_0'^2}. \quad (358)$$

Так как константы  $e$ ,  $m$  и  $\omega_0$  независимы от  $N$ , то это соотношение очень удобно для установления зависимости между величинами  $n$  и  $N$ . Оно получено независимо один от другого Г. А. Лорентцом и датским физиком Л. Лоренцом и в достаточной степени подтверждается на опыте.

§ 80. В дальнейшем при изучении общего случая удобно исключить из уравнений (1) и (348) магнитное напряжение  $\mathbf{H}$  и электрическую индукцию  $\mathbf{D}$ . При помощи (2) это дает:

$$\ddot{\mathbf{E}} + 4\pi\dot{\mathbf{M}} = c^2\Delta\mathbf{E}. \quad (359)$$

Это уравнение вместе с (355) может служить для решения задач дисперсии.

## ГЛАВА II

### ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 81. Теперь на основании полученных нами основных уравнений выведем важнейшие законы, относящиеся к электромагнитным процессам в диспергирующей среде. При этом обратимся к тому ходу мыслей, которому мы следовали в § 3 при рассмотрении изотропной среды. Возьмем сперва плоскую волну, т. е. предположим, что из пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  лишь координата  $x$  играет роль. Кроме того, мы принимаем волну

линейно поляризованной, а именно считаем колебания направленными вдоль оси  $y$ , как раньше принимали для волны  $f$ . Тогда  $E_x = 0$ ,  $E_z = 0$ ,  $H_x = 0$ ,  $H_y = 0$ , и уравнения (355) и (359) сводятся к таким:

$$\ddot{M}_y + \omega_0'^2 M_y = \frac{a}{4\pi} E_y \quad (360)$$

и

$$\ddot{E}_y + 4\pi \ddot{M}_y = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}. \quad (361)$$

Эти дифференциальные уравнения, установленные нами для диспергирующей среды, имеют существенное отличие от дифференциального уравнения (6). Оно заключается в том, что невозможно удовлетворить этим дифференциальным уравнениям, не задавшись определенными предположениями относительно формы волновой функции  $f$ . Поэтому нам не остается ничего другого, как найти сперва частное решение этих уравнений, а потом составить общее решение при помощи суммирования достаточно большого числа частных решений. Таким образом, например, мы поступили в § 12 при рассмотрении вопроса о полном внутреннем отражении. Как и тогда, мы полагаем:

$$E_y = e^{i\omega \left( t - \frac{nx}{c} \right)} \quad (362)$$

и соответственно

$$M_y = ae^{i\omega \left( t - \frac{nx}{c} \right)}. \quad (363)$$

Эти уравнения выражают собой простую периодическую волну со скоростью распространения:

$$\frac{c}{n} = q. \quad (364)$$

Поэтому мы постоянную  $n$  называем показателем преломления, как и для сред, не имеющих дисперсии. Мы увидим далее, что, в отличие от прежнего,  $n$  может быть и мнимой величиной. Тогда волна будет затухающей в пространстве, как это имело место в случае полного внутреннего отражения.

Принятые нами выражения для  $E_y$  и  $M_y$  удовлетворяют уравнениям (360) и (361) при условии, что между константами существует следующее соотношение:

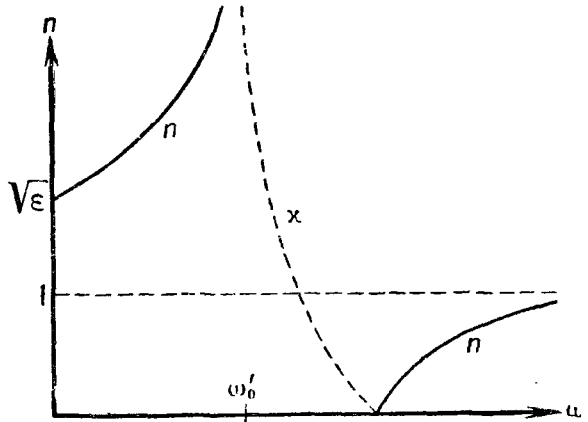
$$n^2 - 1 = 4\pi a = \frac{a}{\omega_0'^2 - \omega^2}. \quad (365)$$

Константы  $a$  и  $\omega_0'$  заданы свойствами среды, поэтому какой-нибудь частоте  $\omega$  волны соответствует определенный показатель преломления  $n$  и определенная величина отношения  $a$  электрического момента  $M$  к напряжению поля  $E$ . Для магнитного напряжения получается из (1):

$$H_x = nE_y. \quad (366)$$

§ 82. Поставим теперь вопрос о зависимости показателя преломления  $n$  от частоты волны  $\omega$ . Согласно (365)  $n$  является или действительной величиной или чисто мнимой. В первом случае мы берем  $n$  положительным, т. е. мы берем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ . Для очень малых значений  $\omega$  мы, очевидно, получаем соотношение (357). По мере роста  $\omega$  растет и  $n$  и притом безгранично, когда  $\omega$  приближается к значению  $\omega_0'$  (ср. черт. 24). После перехода через это значение  $n$  является чисто мнимой величиной и равно  $-ik$ , где  $k$  действительно и положительно, так как иначе, при  $x = \infty$ ,  $E_y$  было бы бесконечно большим.

Это имеет место до тех пор, пока  $\omega$  не достигнет значения  $\sqrt{\omega_0'^2 + a}$ . В этом интервале  $k$  убывает непрерывно от  $\infty$  до 0, как показано на черт. 24 пунктирной линией. После этого показатель преломления  $n$  опять делается действительным и растет от нуля до асимптотического значения, равного единице, которого он достигает при  $\omega = \infty$ . В результате получаем, что



Черт. 24.

вся область спектра от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  разделяется на три различные части „полосой поглощения“, простирающейся от  $\omega = \omega_0'$  до  $\omega = \sqrt{\omega_0'^2 + a}$  (черт. 24). Для волн, частота которых лежит в участках слева и справа от этой полосы, отсутствует поглощение, и показатель преломления растет вместе с ростом частоты; дисперсия, как говорят, является „нормальной“. При этом имеется существенное различие между двумя этими участками спектра, а именно, слева для меньших частот показатель преломления всегда больше, чем  $\sqrt{\epsilon}$  [ср. (356)], в то время как справа для больших частот он всегда меньше единицы. Для волн же, частота которых лежит в самой полосе абсорбции, вообще нет распространения энергии: получаются стоячие и затухающие в пространстве колебания, как это происходит в случае полного внутреннего отражения.

Что касается отношения  $a$  амплитуд момента диполя  $M$  и напряжения поля  $E$ , то следует заметить, что согласно (365) оно слева от полосы абсорбции положительно, справа отрицательно и превращается в нуль при  $\omega = \infty$ . Последнее значит, что при

бесконечно больших частотах диполи вовсе не приходят в колебание и среда ведет себя оптически, как вакуум.

§ 83. Выведенные здесь законы дисперсии и абсорбции получают некоторое обобщение, если в соответствии с уже высказанными в § 78 мыслями к левой части уравнения колебания (355) прибавить еще небольшой член затухания  $k\dot{M}$ , где  $k > 0$ . Тогда в уравнении (360) прибавляется член  $k\dot{M}_y$ . Подстановка выражений (362) и (363) в уравнения (360) и (361) приводит вместо (365) к такому соотношению между константами:

$$n^2 - 1 = 4\pi a = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + ik\omega}. \quad (367)$$

Соотношение (366) остается при этом неизменным. Единственная разница по сравнению с прежним состоит в том, что теперь  $n$  не является уже действительным или чисто мнимым, но всегда комплексным. Если мы вместо  $n$  напишем  $n - i\kappa$ , то  $n$  согласно (362) будет опять иметь значение действительного показателя преломления,  $\kappa$  — показателя поглощения. Черт. 24 надо для этого случая изменить, так как теперь  $n$  уже не растет сначала до бесконечности, падая потом до нуля и оставаясь нулем для всей полосы поглощения. Теперь  $n$  повсюду меняется непрерывно. При вступлении в полосу поглощения  $n$  достигает крутого максимума и после этого непрерывно переходит к нулю, соответственно так называемой „аномальной дисперсии“. Кривая для показателя поглощения  $\kappa$  в обеих областях нормальной дисперсии проходит вблизи от оси абсцисс и принимает заметную величину лишь в полосе абсорбции.

§ 84. Следующее обобщение, имеющее практическое значение, получается для формулы (367), если предположить, что диспергирующая среда содержит колеблющиеся под действием волны диполи разного рода, число которых в единице объема обозначим  $N_1, N_2, N_3, \dots$ . Тогда вместо (348) получается соотношение:

$$\frac{D - E}{4\pi} = \sum M_1, \quad (368)$$

причем суммировать надо по всем родам диполей. Для каждого рода диполей имеет место уравнение колебания типа (349), содержащее или не содержащее член затухания, с особыми значениями для констант  $\omega_1, a_1$ , а также и для  $k_1$ . Уравнения (351) и (359) получают при этом более общий вид:

$$\begin{aligned} E' - \frac{4\pi}{3} \sum M_1 &= E, \\ \ddot{E} + 4\pi \sum \ddot{M}_1 &= c^2 \Delta E. \end{aligned} \quad (370)$$

Подстановка выражения (362) для электрического напряжения и выражения (363) для дипольных моментов  $M_1, M_2, \dots$  с ампли-

тудами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  приводит вместо (367) к более общим соотношениям:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} + \frac{1}{3} \sum \frac{a_1}{\omega_1^2 - \omega^2 + ik_1\omega} \quad (371)$$

и

$$4\pi\alpha = \frac{(n^2 + 2) a_1}{3(\omega_1^2 - \omega^2 + ik_1\omega)}, \dots \quad (372)$$

при помощи которых для каждой волновой частоты  $\omega$  могут быть определены комплексный показатель преломления  $n - ik$  и амплитуды колеблющихся диполей всех родов. Изображая графически, подобно тому как это сделано на черт. 24, соотношения между  $n, k$  и  $\omega$ , мы увидим, что каждый род осцилляторов образует в спектре особую полосу абсорбции, определяемую его собственными константами. Внутри каждой такой полосы имеет место аномальная дисперсия и заметное поглощение, в то время как вне полосы абсорбции дисперсия повсюду нормальна. При этом получается та особенность, что в каждой промежуточной области между двумя полосами абсорбции действительный показатель преломления растет от очень малых до очень больших значений, в то время как во внешней области слева (малые  $\omega$ ) он всегда больше, чем  $\sqrt{\epsilon}$ , а во внешней области справа (большие  $\omega$ ) он всегда меньше единицы. В общем можно сказать, что каждая полоса абсорбции, частота которой превышает частоту волны  $\omega$ , повышает действительный показатель преломления, в то время как каждая полоса абсорбции, частота которой меньше  $\omega$ , понижает показатель преломления. Поэтому показатель преломления, больший единицы, всегда указывает на наличие более высоких собственных частот.

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что комплексный показатель преломления  $n - ik$ , который характеризует полностью оптическое поведение тела, нам известен.

§ 85. Законы преломления и отражения плоской периодической волны у поверхности диспергирующей среды или на границе двух соприкасающихся диспергирующих сред получаются непосредственно из формул, относящихся к диспергирующим средам. Это следует из того обстоятельства, что уравнения (362) и (366), при помощи которых мы выразили электрическое и магнитное напряжения волны, распространяющейся в диспергирующей среде, содержатся как частные случаи в уравнениях (8), а кроме того, граничные условия на плоскости раздела, требующие непрерывности тангенциальных слагающих напряжения поля, остаются такими же для диспергирующих сред, как и для не диспергирующих. Отсюда ясно, что все прежде полученные формулы для отраженной и преломленной волны сохраняют свою силу и теперь. Единственное отличие здесь состоит в том, что вместо показателя преломления  $n$ , а вследствие этого согласно (20) и вместо угла преломления  $\vartheta_1$ , придется вставить в общем случае ком-

плексную величину. Благодаря этому константы  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ , определяемые уравнениями (23) и (24) для отраженной и преломленной волны, являются комплексными, совершенно так же, как при полном внутреннем отражении. Физическое значение этого обстоятельства, как мы там видели, состоит в том, что при отражении и преломлении имеет место скачок фазы. Так как этот скачок фазы для волны с колебаниями в плоскости падения,  $f$ -волны, другой, чем для волны с колебаниями, перпендикулярными плоскости падения,  $g$ -волны, то падающий линейно поляризованный свет отражается уже не линейно, а эллиптически поляризованным. Можно измерить разность фаз обеих компонент волны при помощи компенсатора, например параллелепипеда Френеля (§ 27), или листочка слюды (§ 64). Вместе с изменением угла преломления это дает два соотношения, необходимые, чтобы вычислить две константы  $n$  и  $\kappa$ , которыми определяются все оптические свойства среды.

Интенсивность отраженного и преломленного света согласно общим соображениям, высказанным в § 18, определяется квадратами абсолютных значений коэффициентов  $\mu$  и  $\sigma$ . Поэтому величины:

$$|\mu|^2 = e_{\parallel} \quad \text{и} \quad |\sigma|^2 = e_{\perp} \quad (373)$$

дают непосредственно коэффициенты отражения обеих компонент волны. Коэффициент пропускания для преломленной волны можно проще определить согласно § 10 из коэффициента отражения, чем из величин  $\mu_1$  и  $\sigma_1$ . Для частного случая перпендикулярного падения ( $\vartheta = 0$ ) из (23) получается

$$\begin{aligned} e_{\parallel} = e_{\perp} &= \left| \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta + \vartheta_1} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{(n_1 - i\kappa_1) - (n - i\kappa)}{(n_1 - i\kappa_1) + (n - i\kappa)} \right|^2 = \frac{(n_1 - n)^2 + (\kappa_1 - \kappa)^2}{(n_1 + n)^2 + (\kappa_1 + \kappa)^2}. \end{aligned} \quad (374)$$

Отсюда видно, между прочим, что коэффициент отражения лишь тогда равен нулю, когда одновременно  $n_1 = n$  и  $\kappa_1 = \kappa$ , т. е. когда между обоими соприкасающимися телами вообще нет оптического различия. Поэтому „черное“ тело, т. е. такое, которое поглощает весь падающий на него свет, не может обладать плоской поверхностью. Однако коэффициент отражения может быть как угодно близким к единице. Это будет в том случае, когда из четырех величин  $n_1$ ,  $n$ ,  $\kappa$ ,  $\kappa_1$  одна очень велика по сравнению с другими. В этом случае говорят о „металлическом“ отражении, оно имеет место, например, у поверхности абсолютного проводника электричества (§ 92).

§ 86. При выводе законов дисперсии и абсорбции на основании сделанных нами гипотез относительно природы и расположения участвующих в колебаниях диполей мы воспользовались определенным методом расчета. Этот метод можно заменить со-

вершенно другим и с помощью его проверить правильность полученных ранее результатов.

Применяя первый метод, мы получили сначала общие дифференциальные уравнения для электромагнитных процессов, происходящих внутри среды, и затем искали частные интегралы их. При выводе этих дифференциальных уравнений мы должны были совершить переход от атомистического представления о структуре среды к представлению о непрерывном ее строении. Более углубленное понимание изучаемых физических явлений требует переход этот проделать позже, изучив раньше непосредственно те электромагнитные волны, которые излучаются отдельными колеблющимися диполями среды. При таком переходе мы имеем дело лишь с одной средой, в которой распространяются волны: с вакуумом. В нем помещено большое количество колеблющихся диполей, каждый из которых является центром сферической волны, распространяющейся по известным законам, независимо от остальных диполей, так как согласно  $\mathcal{Z}$ , (396) электромагнитное поле, возбуждаемое диполем, колеблющимся с моментом  $f(t)$ , однозначно определено для любого места и для любого момента времени. Этим путем мы приходим к частному решению проблемы, удовлетворяющему уравнениям (362) и (363). При этом мы принимаем, что в вакууме имеется, во-первых, периодическая „первичная“ волна, распространяющаяся вдоль оси  $x$ , с колебаниями в направлении оси  $y$ , частотой  $\omega$  и скоростью распространения  $c$ ; во-вторых, большое число сферических „вторичных“ волн, которые излучаются отдельными диполями, колеблющимися с той же частотой, и налагаются друг на друга и на первичную волну. В результате получается „эффективная“ волна, у которой напряжения поля  $E$  и  $H$  получаются путем векторного сложения соответствующих напряжений поля первичной и вторичной волн. Так как диполи находятся крайне близко друг от друга, можно сложение заменить интегрированием.

Взаимодействие диполей друг с другом и с первичной волной выражается, как и ранее, уравнением (349), которое устанавливает связь между моментом колеблющегося диполя и напряжением возбуждающего его поля  $E'$ . Зависимость между  $E$  и  $E'$  определяется опять уравнением (351) или (369).

Из этих соотношений вытекает вполне определенный закон распространения эффективной волны в рассматриваемой среде. Если теория лишена внутренних противоречий, то этот закон должен быть идентичным с ранее полученным, хотя мы здесь не пользовались ни дифференциальными уравнениями дисперсии, ни понятием электрической индукции, а только законами распространения волн в чистом вакууме. Так оно и есть на самом деле, в чем можно убедиться прямым подсчетом. При этом следует подчеркнуть, что векторное сложение посылаемых диполями вторичных сферических волн дает, как и следует быть, две волны: во-первых, одну волну, распространяющуюся со скоростью  $c$ , ко-

торая равна и противоположна первичной, также распространяющейся со скоростью  $c$ , и поэтому ее уничтожает; во-вторых, волну, распространяющуюся со скоростью  $\frac{c}{n}$ , где  $n$  определяется из (365) или (371). По всем другим направлениям, отличным от оси  $x$ , вторичные волны взаимно уничтожаются вследствие интерференции.

Мы видим, что новый способ распространения дает непосредственное понимание сущности дисперсии; но его физическое значение гораздо глубже, он ведет к новому выводу законов преломления и отражения. Представим себе, ради простоты, плоскую периодическую волну, падающую из вакуума под углом  $\vartheta$  на поверхность диспергирующей среды. Эта волна, которую мы опять обозначим первичной, проходит без всяких препятствий сквозь среду, так как она распространяется, как и прежде, в вакууме, т. е. со скоростью  $c$ . С этой новой точки зрения вообще нельзя говорить о поверхности или границе. Влияние среды сказывается исключительно в виде колебаний его диполей, и мы опять получаем эффективную волну, как суперпозицию первичной волны с вторичными сферическими волнами, получаемыми от колеблющихся диполей среды. При этом наши предположения относительно моментов диполей должны, конечно, удовлетворять уравнению колебания (349). При подсчете полученные в предыдущих параграфах совершенно другим путем законы подтверждаются во всех их деталях. Действительно, результатом суперпозиции вторичных сферических волн является, во-первых, плоская волна, целиком уничтожающая первичную волну вследствие интерференции; во-вторых, плоская волна, распространяющаяся по направлению луча, преломленного согласно закону Снеллиуса; в-третьих, волна, отраженная в вакуум под углом  $\vartheta$ . Амплитуды волн получаются также в согласии с предыдущими вычислениями.

Этот метод получения законов отражения и преломления сложнее, чем прежний, в отношении вычислений; но зато он имеет большее физическое значение. Не требуя никаких условий на границе, он прямо дает полное объяснение явлений отражения и преломления, представляя их как действие излученных во-вне и особым образом интерферирующих сферических волн.

§ 87. Все предыдущие рассуждения относятся исключительно к таким частным решениям уравнений поля, которые соответствуют простым гармоническим периодическим волнам. Обратимся теперь к исследованию более общего случая непериодических плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  внутри диспергирующей среды. Раньше всего надо отметить, что здесь понятие о скорости распространения совершенно теряет тот общий смысл, который оно имело для недиспергирующей среды. Действительно, для диспергирующей среды волновая функция не всегда может быть представлена в виде определенной функции единственного аргумента, зависящего только от  $x$



и  $t$ , как это имеет место в уравнении (8). Другими словами, волна не остается неизменной при распространении, но деформируется с течением времени, и нельзя какой-нибудь, отмеченный в некоторый момент времени пункт волны вновь безошибочно опознать в другой момент времени.

Из этого сразу вытекает, что можно произвольным образом распределить бесконечное множество различного рода скоростей распространения, смотря по тому, на какой характеристический признак обращать внимание при распространении волны. Так, например, можно заметить в какой-нибудь точке  $x$  в момент времени  $t$  напряжение поля  $E_y$  и искать соседнюю точку  $x + dx$ , в которой в момент времени  $t + dt$  будет иметь место то же напряжение поля ( $E_y = \text{const}$ ). Отсюда для скорости распространения напряжения поля  $E_y$  получим:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\frac{\partial E_y}{\partial t}}{\frac{\partial E_y}{\partial x}}. \quad (375)$$

Для недиспергирующих сред эта величина постоянна. Но для сред, имеющих дисперсию, она постоянна лишь в случае простой гармонической периодической волны и поэтому не имеет общего физического значения. Это же замечание будет иметь место, если рассматривать скорость распространения максимума или минимума напряжения поля. Она получается из (375), если туда вставить  $\frac{\partial E_y}{\partial x}$  вместо  $E_y$ , и в общем случае отличается от (375).

Из этих рассуждений следует, что, вообще невозможно для диспергирующей среды определить скорость распространения постоянную во времени и пространстве, если не ввести каких-нибудь предположений относительно особой формы волны. Легко видеть также, что для различных форм волны скорость распространения может быть определена весьма различным образом. Мы установим это для некоторых особенно важных случаев.

Обращаясь теперь к вопросу об общем интеграле волнового уравнения (360) и связанного с ним уравнения колебания (361), мы можем сказать, что в основных чертах достаточный ответ находится тем же путем, который привел нас к цели в случае полного внутреннего отражения (§ 14). Мы можем любую функцию для сколь угодно большого интервала ее аргумента написать в виде ряда Фурье. Каждый член этого ряда представляет собой простой гармонический процесс, который распространяется согласно найденным выше законам. Так как дифференциальные уравнения (360) и (361) линейны и однородны, то отдельные процессы налагаются друг на друга. Таким образом любая волна, распространяющаяся в диспергирующей среде, может быть рас-

сма триваема как состоящая из элементарных гармонических периодических волн, из которых каждая распространяется, не изменяясь, с постоянной во времени и в пространстве скоростью  $\frac{c}{n}$ . Но так как  $n$  для различных волн различно, то фазы отдельных волн смещаются друг относительно друга и отсюда получается деформация суммарной волны.

§ 88. Рассмотрим теперь следующий частный случай. Пусть имеется диспергирующая среда, простирающаяся от  $x=0$  до  $x=\infty$ . Вначале она ничем не возбуждается, но с некоторого момента  $t=0$  на нее падает в течение продолжительного времени, перпендикулярно к ее поверхности, простая периодическая волна частоты  $\omega$ . С какой скоростью возмущение распространится внутрь среды? Неверно будет предположение, кажущееся правильным на первый взгляд, что волна просто войдет в среду со скоростью  $\frac{c}{n}$ , как это имеет место для периодической, долгое время распространявшейся волны.

В рассматриваемом случае мы имеем дело с непериодической волной, которая деформируется при распространении. Полное решение этого вопроса при помощи разложения волны в интеграл Фурье дано А. Зоммерфельдом<sup>1)</sup>. Но мы можем без особых вычислений найти ответ на поставленный выше вопрос, если воспользуемся способом рассуждения, подробно изложенным в § 86.

Первичная волна в диспергирующей среде распространяется со скоростью  $c$ , так же как и вторичные волны, вызванные диполями, колеблющимися вместе с волной. Но результат взаимодействия их получается не такой, как для периодической волны, длящейся продолжительное время. Диполи колеблются не периодически—в самом начале они находятся в покое и вследствие своей инерции приходят в колебание лишь постепенно и притом тем позже, чем больше их абсцисса  $x$ . Колебания эти принимают постоянный характер, строго говоря, лишь через бесконечно большое время и тогда только создают простое периодическое гармоническое волновое движение, распространяющееся со скоростью  $c$ . Пока это не достигнуто, первичная волна не уничтожается вторичными, и она проявляется как возмущение, распространяющееся в диспергирующей среде со скоростью  $c$ . С другой стороны, вторичные волны, какую бы форму они ни имели, также распространяются со скоростью  $c$ . Из этого следует, что искомая скорость, с которой распространяется в среде начало волны, так называемая „фронтальная скорость“, всегда равна  $c$ .

В противоположность фронтальной скорости можно говорить о фазовой скорости  $\frac{c}{n}$ , которую имеет элементарная

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld, Weber-Festschrift, B. G. Teubner, S. 338, 1912.

периодическая, длящаяся продолжительное время волна; мы ее будем обозначать:

$$u = \frac{c}{n}. \quad (376)$$

Не нужно видеть внутреннего противоречия теории в том, что фазовая скорость  $u$  может быть больше, чем фронтовая скорость  $c$  ( $n < 1$ ). Волна не является строго периодической и фронт проникающей в среду волны не обладает постоянной фазой. Поэтому не может быть речи о том, чтобы задние, распространяющиеся с фазовой скоростью части волны определили фронт, распространяющийся с фронтовой скоростью. Из сказанного выше следует, что скорость распространения светового сигнала, посланного в среду, не может быть больше  $c$ . Она достигает этого наивысшего значения только для случая наиболее чувствительного детектора, т. е. для приемника, реагирующего на малейшее возбуждение. В ином случае скорость сигнала можно считать меньшей, смотря по чувствительности приемника. Величину фазовой скорости при этом вообще не приходится принимать во внимание, так как нельзя передавать сигналов при помощи простых периодических гармонических волн.

§ 89. Теперь мы рассмотрим еще более важный случай непериодической волны, и именно случай почти гармонической волны. Во всех так наз. монохроматических лучах (§ 16) в действительности имеет место именно этот случай. Общее выражение для такой приблизительно гармонической волны, распространяющейся в диспергирующей среде, согласно (362):

$$E_y = \sum_{m=1}^{m=N} C_m e^{i\omega_m \left( t - \frac{n_m x}{c} \right)}, \quad (377)$$

причем

$$\frac{\omega_N - \omega_1}{\omega_1} \ll 1. \quad (378)$$

Здесь  $m$  — порядковое число, вместе с которым растет частота колебаний; общее количество  $N$  различных частот колебаний произвольно велико,  $C_m$  есть комплексная постоянная. Рассмотрим сначала форму такой волны. Для этого  $E_y$ , как функцию  $x$  для определенного момента времени  $t$ , представим в виде кривой с абсциссой  $x$ . Эта кривая образована наложением определенного числа простых синусоид с приблизительно одинаковой длиной волны. Результатом будет, как подробно выяснено в § 16, почти гармоническая кривая, с той же длиной волны и с медленно и в общем беспорядочно меняющимися амплитудой и фазой. Разберемся в этом несколько ближе. Амплитуда и фаза результирующей волны определяются различием фаз, с которыми налагаются друг на друга отдельные гармонические волны. Выделим одну из них с частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $\frac{c}{n}$ . Фаза какой-

нибудь другой парциальной волны с частотой  $\omega'$  и фазовой скоростью  $\frac{c}{n'}$  согласно (377) может быть представлена для любой точки  $x$  и любого момента  $t$  фазой первой волны с прибавкой разности фаз:

$$(\omega' - \omega)t - \frac{x}{c}(\omega'n' - \omega n) + \vartheta' - \vartheta. \quad (379)$$

Здесь  $\vartheta'$  и  $\vartheta$  представляют собой угловые аргументы комплексных постоянных  $c'$  и  $c$ . Пока эта разность фаз не меняется заметно для любых комбинаций из каждых двух парциальных колебаний, парциальные волны интерферируют одинаковым образом, и результирующая волна имеет постоянную амплитуду и фазу. Будем считать время  $t$  постоянным, тогда разность фаз меняется лишь в зависимости от абсциссы  $x$ . При переходе от точки  $x$  к соседней точке  $x_1 > x$  разность фаз (379) меняется на величину:

$$-\frac{x_1 - x}{c}(\omega'n' - \omega n). \quad (380)$$

Пусть обе точки лежат так близко друг от друга, что для всех пар парциальных колебаний имеет место:

$$x_1 - x \ll \left| \frac{c}{\omega'n' - \omega n} \right|. \quad (381)$$

Тогда результирующая волна между обеими точками образует простую синусоиду с длиной волны:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} \quad \text{или} \quad \frac{2\pi c}{n'\omega'}, \quad (382)$$

что согласно (378) дает практически одно и то же.

Но если точка  $x_1$  переместится по оси абсцисс так далеко, что соотношение (381) уже будет не действительно, то интерференционное действие парциальных волн изменится, и результирующая волна будет иметь другую амплитуду и другую фазовую константу. Сообразно с этим можно сказать следующее: форма результирующей волны  $E_y$  в какой-нибудь момент времени  $t$  может быть представлена состоящей из ряда лежащих одна за другой групп простых синусоидальных гребней и впадин. Каждая группа в отдельности простирается на такой отрезок по оси абсцисс, для которого выполняется соотношение (381). Любая пара парциальных колебаний имеет в ней определенную разность фаз (379), поэтому каждая такая группа обладает определенной амплитудой и определенной фазовой постоянной. Но от группы к группе эти величины меняются. Число длин волн, укладывающихся на протяжении одной группы, согласно (382) равно:

$$\frac{x_1 - x}{\lambda} = \frac{(x_1 - x) \cdot \omega n}{2\pi c}, \quad (383)$$

если  $x$  и  $x_1$  обозначают начальную и конечную ее точки. Это

число может быть очень велико, так как на основании (279) соотношение

$$\frac{(x_1 - x) \cdot n\omega}{2\pi c} \gg 1 \quad (384)$$

вполне совместимо с соотношением (381).

Рассмотрим теперь изменения, происходящие в определенной точке пространства  $x$  с течением времени  $t$ . При помощи рассуждения, аналогичного вышеприведенному, получаем, что в интервале времени  $t_1 - t$  столь малом, что для каждой пары парциальных колебаний:

$$t_1 - t \ll \left| \frac{1}{\omega' - \omega} \right|, \quad (385)$$

результатирующее напряжение поля  $E_y$  колеблется синусоидально с частотой  $\omega$ . Но для более поздних моментов времени  $t_1$  наступает изменение амплитуды и фазовой постоянной. Можно придать этому явлению большую наглядность, если обратить внимание не на одну определенную точку пространства  $x$ , а на определенную фазу результирующей волны, например на вершину волнового гребня. Этот гребень распространяется с фазовой скоростью  $\frac{c}{n}$ ; он сохраняет свою величину и свою скорость распространения на определенном участке, который может охватывать много длин волн. Но со временем меняются как его величина, так и скорость его распространения. Последняя всегда остается близкой к фазовой скорости, величина же гребня может как угодно расти и убывать. Другими словами, определенным образом выбранный гребень волны не остается с течением времени в одной и той же группе, но переходит в соседнюю группу.

При помощи этого представления решается вопрос о том, с какой скоростью распространяется какая-нибудь определенная группа. Ответ получается на основании вышеуказанного свойства группы, что для нее разность фаз (379) для каждой комбинации двух парциальных колебаний сохраняет определенное неизменное значение.

Возьмем разность фаз (379) для  $x$  и  $t$  и приравняем ее соответствующей величине для  $x_1$  и  $t_1$ . Тогда найдем, что отношение

$$\frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{(\omega' - \omega) c}{\omega' n - \omega n} \quad (386)$$

независимо от  $x$  и  $t$ . Это и есть искомая групповая скорость, постоянная для любого места и времени. Выражение для нее можно на основании (378) написать так:

$$v = c \frac{d\omega}{d(\omega n)}. \quad (387)$$

Между групповой и фазовой скоростью согласно (376) имеется соотношение:

$$\frac{1}{v} = \frac{d\left(\frac{\omega}{u}\right)}{d\omega}. \quad (388)$$

Различие между  $u$  и  $v$ , естественно, основывается на том, уже указанном обстоятельстве, что определенный отмеченный волновой гребень, распространяющийся с фазовой скоростью, с течением времени переходит от группы к группе. Лишь для сред, не имеющих дисперсии ( $\frac{dn}{d\omega} = 0$ ),  $v = u$  и каждый гребень долгое время остается в пределах своей группы. При нормальной дисперсии ( $\frac{dn}{d\omega} > 0$ ),  $v < u$ , т. е. определенный волновой гребень переходит с течением времени из своей группы в ближайшую, впереди находящуюся группу и обгоняет, таким образом, одну группу за другой. При аномальной дисперсии имеет место обратное. При этом надо помнить, что группа не представляет собой образования, сохраняющегося все время. Отношение разностей (386) не равно в точности отношению дифференциалов в (387), но имеет несколько различное значение для каждой комбинации двух парциальных колебаний. Поэтому для большого интервала времени  $t_1 - t$  проделанный путь  $x_1 - x$  для различных пар колебаний будет в значительной степени неодинаков, т. е. группа распадается. Следовательно, в течение больших промежутков времени происходит постепенный обмен и между группами, причем каждая группа со временем распадается и сливается частично с впереди идущей группой, частично — с следующей позади.

### ГЛАВА III

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД. СВЯЗЬ С КВАНТОВОЙ МЕХАНИКОЙ

§ 90. Оптически неоднородная среда характеризуется тем, что для нее показатель преломления  $n$  определенным образом зависит от пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Мы предполагаем также, что среда обладает дисперсией, т. е. принимаем  $n$  зависимым от длины волны. Но зато мы будем считать среду изотропной; тогда  $n$  в определенной точке среды и для определенной частоты одинаково для всех направлений. Законы распространения света в такой среде вообще крайне сложны. Но можно достигнуть значительного упрощения, если ограничиться областью геометрической или лучевой оптики, охватывающей согласно § 28 те явления, для объяснения которых достаточны законы, действительные для плоских волн.

Мы начнем опять с простых гармонических периодических колебаний. Всякая волновая функция имеет в этом случае фазу:

$$\omega t - \varphi(x, y, z) = \Theta, \quad (389)$$

где  $\omega$ —частота, а  $\varphi$  есть функция точки, обобщающая выражение (362). Она называется „эйконал“.

Назовем волновой поверхностью такую поверхность, все точки которой в определенный момент  $t$  имеют одну и ту же фазу  $\Theta$ . Тогда волновая поверхность определяется уравнением:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (390)$$

Семейство волновых поверхностей, которое получается, когда постоянная пробегает всевозможные значения, остается неизменным для всякого момента времени и поэтому неподвижно находится в среде. Если взять какую-нибудь определенную фазу  $\Theta$ , то она согласно (389) в момент  $t$  имеет место на поверхности  $\varphi = \omega t - \Theta$ . Поэтому она со временем равномерно перемещается в направлении от меньших значений  $\varphi$  к большим. Если же взять определенную точку пространства  $x, y, z$ , то в ней фаза равномерно растет со временем:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \omega. \quad (391)$$

Для геометрической оптики характерно положение, что каждый достаточно малый элемент волновой поверхности можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в направлении нормали с соответствующей данному месту фазовой скоростью  $u = \frac{c}{n}$ . Так как среда изотропна, то направление нормали вместе с тем является направлением луча. Поэтому, если какая-нибудь волновая поверхность известна, то мы получим поверхность, бесконечно близкую к ней, откладывая по направлению нормали из каждой точки данной волновой поверхности отрезок  $u \cdot dt$  и соединяя концы всех этих отрезков. Таким образом, обозначая через  $ds$  расстояние по нормали между обеими поверхностями, получим:

$$ds = u dt.$$

С другой стороны, фаза  $\Theta$  при распространении волновой поверхности осталась неизменной, так как  $u$  есть фазовая скорость. Тогда из (389) находим:

$$\omega dt - d\varphi = 0.$$

Это уравнение вместе с предыдущим дает нам производную для  $\varphi$  по нормали:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\omega}{u} = \frac{n\omega}{c} = -\frac{\partial \Theta}{\partial s}. \quad (392)$$

Полученное таким образом дифференциальное уравнение называется уравнением эйконала. С его помощью можно из одной данной волновой поверхности получить остальные, так как  $n$  задано как функция  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В нем, в сущности, заключена в скрытой форме вся геометрическая оптика, так как если известна система волновых поверхностей, то ее ортогональные кривые представляют собой лучи, распространяющиеся сквозь среду.

§ 91. Законы геометрической оптики могут быть получены как из уравнения (392), так и при помощи принципа Ферма. Приведем вывод последнего в той форме, как это сделано для более специального случая в § 37.

Согласно принципу Ферма время, потребное для того, чтобы определенная фаза с присущей ей скоростью  $u$  перешла от определенной точки среды  $P$  к другой определенной точке  $Q$  меньше по пути луча, идущего от  $P$  к  $Q$ , чем по любому другому пути, соединяющему  $P$  и  $Q$ ; или

$$\delta \int_P^Q \frac{ds}{u} = 0 = \delta \int_P^Q n ds. \quad (393)$$

Вставим в это уравнение вместо вариаций их выражения:

$$\begin{aligned} \delta n &= \frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z, \\ \delta ds &= \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz. \end{aligned}$$

Затем, как в I, в § 108, при помощи интегрирования по частям, перейдем от  $\delta dx$ ,  $\delta dy$ ,  $\delta dz$  к  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и коэффициенты при них приравняем по отдельности нулю. Тогда дифференциальные уравнения для пути луча, идущего от  $P$  до  $Q$ , получатся в форме:

$$d \left( n \frac{dx}{ds} \right) : d \left( n \frac{dy}{ds} \right) : d \left( n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} : \frac{\partial n}{\partial y} : \frac{\partial n}{\partial z}. \quad (394)$$

При помощи этих уравнений может быть вычислен путь луча, если заданы начальная точка и начальное направление его. Они заключают в себе все законы геометрической оптики и совершенно идентичны с уравнением (392) для волновых поверхностей. В этом можно убедиться и непосредственно, если мысленно представить себе построение по данной поверхности другой, близкой к ней, как описано в § 90. Вычисляя происходящее при этом изменение направления нормалей волновой поверхности по сравнению с нормальями первоначальной, мы как раз и получим соотношение (394).

§ 92. Чтобы с большей уверенностью итти дальше, мы несколько точнее сформулируем условия, при которых допустимо применение геометрической оптики. Дифференциальные уравнения дисперсии (359) и (355) имеют силу в общем случае. Первое из



них содержит универсальную постоянную  $c$ , во-втором мы принимаем константы  $\omega_0'$  и  $a$  заданными для неоднородной среды как функции пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Оба дифференциальных уравнения можно удовлетворить при помощи следующего обобщения подстановок (362) и (363), которые мы применяли для случая плоских волн в однородной среде

$$E = \psi, \quad M = \alpha\psi. \quad (395)$$

В данном случае  $\alpha$  является определенной функцией координат, в то время как волновая функция  $\psi$  есть некоторая функция пространства и времени.

При помощи подстановки этих выражений в (355) и (359) получаем:

$$\Delta\ddot{\psi} + \omega_0'^2\alpha\psi = \frac{a}{4\pi}\psi \quad (396)$$

и

$$\ddot{\psi} + 4\pi\alpha\ddot{\psi} = c^2\Delta\psi$$

или

$$\ddot{\psi} = \frac{c^2}{n^2} \cdot \Delta\psi = u^2\Delta\psi, \quad (397)$$

где  $n$  связано с  $\alpha$  опять при помощи (365).

Введем теперь предположение, что процесс является периодическим по времени, т. е.

$$\psi = e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad (398)$$

где функция места  $\varphi$  в обобщение (389) может быть теперь комплексной. Тогда

$$\ddot{\psi} = -\omega^2\psi \quad (398a)$$

и соотношение (396) приводит к тому же значению для  $n$ , как соотношение (365), полученное для плоских волн в однородных средах. Вследствие этого вся проблема в общем случае сводится к дифференциальному уравнению (397), определяющему волновую функцию  $\psi$ .

Подстановка в него выражения (398) дает:

$$\frac{n^2\omega^2}{c^2} = i\Delta\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2,$$

или, если обозначить опять через  $ds$  элемент длины нормали к поверхности  $\varphi = \text{const}$ :

$$\frac{n^2\omega^2}{c^2} = i\Delta\varphi + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2. \quad (399)$$

Это соотношение переходит в основное уравнение геометрической оптики (392) тогда и только тогда, когда можно пренебречь членом, содержащим  $\Delta\varphi$ .

Отсюда вытекают вследствие комплексности уравнения (399) два условия. Во-первых, производные мнимой части  $\varphi$  должны быть очень малы. Согласно (398) это значит, что амплитуда волновой функции должна медленно изменяться в пространстве. Во-вторых, член, содержащий вторую производную действительной части  $\varphi$ , должен быть мал по сравнению с каждым из остальных членов уравнения (399). Ввиду соотношения (382) это значит: радиусы кривизны волновых поверхностей должны быть велики по сравнению с длиной волны. Здесь мы имеем то же требование, которое мы уже сформулировали в § 28. Иначе его можно выразить так: радиусы кривизны лучей должны быть велики по сравнению с длиной волны. Поскольку эти условия выполнены, можно законы геометрической оптики применять в качестве первого приближения. Но как только они нарушены в какой-либо точке, приходится иметь дело с волновым уравнением (397), выражающим явления с полной точностью.

§ 93. Оставим теперь простые гармонические лучи и обратимся к естественным монохроматическим, т. е. к почти гармоническим лучам, о которых шла речь в § 89. Мы видели там, что такой луч может быть представлен как ряд распространяющихся одна за другой групп простых синусоидальных гребней и впадин. Скорость распространения этих групп  $v$  характеризовалась условием, что разность  $\theta' - \theta$  фаз каких-либо двух парциальных колебаний частоты  $\omega'$  и  $\omega$  должна оставаться постоянной.

Следовательно, согласно (389):

$$(\omega' - \omega) \cdot t - (\varphi' - \varphi) = \text{const}$$

или

$$(\omega' - \omega) \cdot dt - \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) ds = 0.$$

Отсюда, приняв во внимание (392), получим:

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{\omega' - \omega}{n'\omega' - n\omega} \cdot c$$

в полном согласии с (386), (387) и (388).

Так как групповая скорость  $v$  отлична от фазовой скорости  $u$ , то точка, распространяющаяся с групповой скоростью, меняет с течением времени свою фазу, для такой точки согласно (389):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial s} v$$

и вследствие (391) и (392)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{v\omega}{u} = \omega \left( 1 - \frac{v}{u} \right). \quad (400)$$

Это дает вместе с (376) и (378):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega \frac{\partial n}{\partial \omega}}{\frac{\partial n}{\partial \omega} + \frac{n}{\omega}}. \quad (401)$$

Производные здесь обозначены при помощи круглого  $d$ , так как  $n$  зависит также от места.

Для недиспергирующей среды  $\frac{\partial n}{\partial \omega} = 0$ . Тогда фаза остается постоянной, т. е. групповая скорость совпадает с фазовой. Это имеет силу как для однородных, так и для неоднородных сред.

§ 94. Выведенные выше основные уравнения геометрической оптики неоднородной диспергирующей изотропной среды обнаруживают с формальной стороны, для случая почти гармонического луча, замечательную аналогию с основными уравнениями классической механики для свободной материальной точки, движущейся в консервативном статическом силовом поле (1, § 49). Аналогия эта состоит в том, что волновая группа (ограниченная малым объемом) движется по направлению ее луча согласно тем самым законам, которым следует материальная точка в ее движении по своей траектории. Действительно, приравнивая надлежащим образом оптические константы, можно достичь полной идентичности оптических уравнений с механическими. Мы покажем это в дальнейшем.

Для этой цели мы прежде всего рассмотрим оба уравнения (391) и (401), которые выражают изменение по времени фазы  $\theta$  для покоящейся точки и для точки, перемещающейся вдоль луча с групповой скоростью  $v$ . Этим уравнениям мы противопоставим два соответствующих уравнения механики для интеграла действия  $W$ , который мы будем считать функцией от  $x, y, z, t$ .

На основании [1, (420)] имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -E \quad (402)$$

для покоящейся точки, и [1, (419)]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = E - 2U \quad (403)$$

для точки, перемещающейся согласно законам движения по своей траектории [1, (419)]. При этом  $E$  обозначает энергию, а  $E - 2U$  — кинетический потенциал, или функцию Лагранжа, т. е. разницу между кинетической энергией:

$$E - U = \frac{1}{2} mv^2 \quad (404)$$

и потенциальной энергией  $U$ , которую мы рассматриваем как заданную функцию координат  $x, y, z$ .

К этим формулам для производных по времени от  $\Theta$ , с одной стороны, и  $W$ , с другой стороны, присоединяются формулы для их пространственных производных. Для  $\Theta$  это есть уравнение (392), для  $W$  — уравнения 1, (417). Последние выражают собой, что пространственный градиент равен импульсу движущейся точечной массы. Из них следует, что скорость движения в каждый момент времени направлена по перпендикуляру к поверхности  $W = \text{const}$  и что величина градиента  $\frac{\partial W}{\partial s}$  равна произведению массы на скорость:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = mv. \quad (405)$$

Примем теперь скорость  $v$  перемещающейся точечной массы идентичной по величине и направлению со скоростью распространения волновой группы, обозначенной ранее также через  $v$ . Приняв во внимание, что луч направлен по перпендикуляру к поверхности  $\Theta = \text{const}$ , мы приходим к выводу, что можно положить функции  $W$  и  $\Theta$  пропорциональными одна другой. Из этого вытекает путем сравнения (391) и (402), что и оптическая константа  $\omega$  пропорциональна механической константе  $E$ . Так как обе эти величины имеют различные размерности, то коэффициент пропорциональности не является отвлеченным числом. Мы получаем поэтому:

$$E = h \cdot \frac{\omega}{2\pi}, \quad (406)$$

понимая под  $h$  определенную постоянную, размерность которой равна произведению энергии на время. Уравнения (391) и (402) делаются при этом идентичными, если мы положим еще:

$$W = -\frac{h}{2\pi} \Theta. \quad (407)$$

На основании этого устанавливается также соотношение между уравнениями (405) и (392):

$$mv = \frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{h}{2\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{nh\omega}{2\pi c} = \frac{nE}{c}. \quad (408)$$

Отсюда получается, если вычислить  $v$  из уравнения (404), следующее выражение для показателя преломления:

$$n = \frac{c}{E} \sqrt{2m(E - U)}. \quad (409)$$

Зависимость показателя преломления от функции координат  $U$  обуславливает неоднородность, а зависимость его от постоянной энергии  $E$  и вследствие этого от  $\omega$ , обуславливает дисперсию среды, в которой распространяется рассматриваемая волновая группа.

Можно убедиться в том, что вследствие указанных соотношений между механическими и оптическими величинами обе системы уравнений делаются вполне идентичными. В частности, уравнение (387):

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\omega n)}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \frac{\partial(E n)}{\partial E} \quad (410)$$

при помощи подстановки (409) приводит к идентичности групповой скорости с величиной  $v$ , данной уравнением (404). Точно так же (401) непосредственно переходит в (403).

Мы можем, таким образом, сформулировать следующее, весьма общее положение: согласно законам классической механики, материальная точка  $m$  движется в силовом поле с заданной потенциальной энергией  $U$ , так же как гармонический луч в неоднородной диспергирующей изотропной среде с показателем преломления:

$$n = \frac{2\pi c}{\omega h} \sqrt{2m \left( \frac{\omega h}{2\pi} - U \right)}. \quad (411)$$

Подобно тому как движение материальной точки определяется начальным положением, начальным направлением движения и энергией  $E$ , точно так же распространение соответствующего ей луча определяется начальной точкой, начальным направлением его и частотой  $\omega = \frac{2\pi E}{h}$ .

Сказанным устанавливается далеко идущее сходство между законами классической механики и законами геометрической оптики. Однако оно не полно. Мы имеем существенное различие в следующем пункте. Классическая механика претендует на абсолютную значимость, она представляет собой замкнутую в себе систему и не связана никакими предположениями о порядке величин. Что касается геометрической оптики, то мы знаем, что она не всегда имеет силу, но согласно § 92 лишь тогда, когда длина волны (382), соответствующая частоте  $\omega$  луча, мала по сравнению с радиусом кривизны пути луча. Лишь только это условие нарушено, законы геометрической оптики теряют свою силу, и приходится вновь вернуться к общему волновому уравнению (397) или (399).

§ 95. Мы могли бы ограничиться этими результатами, если бы классическая механика подтверждалась для всех происходящих в природе динамических явлений. Но это не так.

Опытные факты заставляют принять, что очень быстрые движения мельчайших частиц материи происходят при условиях, которые весьма отличаются от основных предположений классической механики. Можно привести в качестве примера тот факт, что при движении электрона вокруг атомного ядра энергия  $E$  имеет предпочтительно некоторые особые, вполне определенные значения, — факт, совершенно чуждый классической теории.

Если, таким образом, оказывается необходимым изменить классическую механику, то речь идет лишь об обобщении ранее установленных ее законов, так как в пределе последние при всех обстоятельствах сохраняют свое значение. Нужно при этом заметить, что классическая механика не может получить такого обобщения, исходя из себя самой, так как, как всякая замкнутая система, она обладает внутренней законченностью и не содержит в себе никаких новых возможностей для дальнейшего развития. Толчок должен быть дан извне. Прекрасный пример представляет собой теория относительности, которая проникла в механику из оптики и прибавила к ней совершенно новую страницу.

И в настоящем случае спасение пришло со стороны оптики. Л. де-Бройль впервые привлек к объяснению квантовых явлений давно уже известную аналогию между классической механикой и геометрической оптикой, изложенную нами в предшествующем параграфе. Шредингер эту мысль провел дальше. Он предположил, что обобщение, которому должны подвергнуться законы классической механики для согласования их с действительностью, имеет тот же характер, как и расширение геометрической оптики, применяемое при выходе за пределы области ее непосредственного действия. Другими словами, законы новой механики найдутся просто при помощи дальнейшего проведения аналогии между механикой и оптикой. Соответственно этому законы старой механики изменяются таким образом, что отмеченное в конце предшествующего параграфа коренное различие между механикой и оптикой пропадает. Уравнения (406) и (411), характерные для аналогии механики с оптикой, остаются тогда в силе и вне области применения геометрической оптики. Таким образом классическая механика — механика лучевая — превращается в волновую механику, включающую в себя первую как частный случай. Ее характерной чертой является то, что движение материальной точки уже не может быть представлено движением геометрической точки; но материальная точка некоторым образом распадается на некоторое число волн определенного рода совершенно так же, как световой луч, строго говоря, не может быть представлен одной кривой, а является результатом взаимодействия световых волн.

Первый большой успех этой идеи проявляется благодаря введению волнового уравнения (397) в новую механику. При  $n$ , определяемом (411), последнее принимает вид:

$$\frac{8\pi^2 m}{\omega^2 h^2} \left( \frac{\omega h}{2\pi} - U \right) \ddot{\psi} = \Delta\psi; \quad (412)$$

или, если вставить для  $\ddot{\psi}$  выражение (398):

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( \frac{\omega h}{2\pi} - U \right) \psi = 0. \quad (413)$$

Согласно (406) можно также написать:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0. \quad (414)$$

Особенность этого дифференциального уравнения Шредингера состоит в том, что коэффициент  $E - U$  при известных условиях может сделаться отрицательным. Если постоянная  $E$  взята столь большой, что для всех точек пространства (предполагая, что волна не имеет границ в пространстве)  $(E - U) > 0$ , то уравнение имеет конечные и непрерывные решения. Если же  $E$  недостаточно велико, то для наибольших значений  $U$  этот коэффициент отрицателен. В этом случае уравнение (414) имеет всюду конечные и непрерывные решения  $\psi$  только тогда, когда  $E$  принимает вполне определенные значения  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , так называемые собственные значения. Этим значениям соответствуют так называемые собственные функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ . Кажущееся сначала невероятным, это обстоятельство гораздо легче может быть понято, если принять во внимание, что при отрицательных значениях  $E - U$  показатель преломления (409) получает мнимое значение и геометрическая оптика вообще теряет смысл.

Дифференциальное уравнение (414) приобретает особенную важность благодаря следующему обстоятельству: найденные из него собственные значения  $E$  во всех случаях совпадают в точности с теми собственными значениями, которые уже были ранее получены Гейзенбергом, Борном и Иорданом при помощи составленных в матричной форме уравнений квантовой механики. Последняя была построена независимо от каких бы то ни было специальных гипотез физического характера, но основывалась на экспериментальных фактах. Это совпадение результатов, полученных двумя совершенно различными путями, служит явным доказательством их существенного значения. Не может быть никакого сомнения в том, что при помощи дифференциального уравнения Шредингера, благодаря его близкой связи с классической механикой, удастся еще глубже проникнуть в сущность квантовых явлений.

Конечно, в физической природе волновой функции  $\psi$  остается еще много неясного, и потребуются немало труда, чтобы удовлетворительно ответить на все напрашивающиеся здесь вопросы.

§ 96. В заключение покажем, каким образом можно при помощи введенной в предшествующем параграфе гипотезы вычислить порядок величины универсальной постоянной  $h$  в уравнении (406). Прежде всего понятно, что если взять  $h$  бесконечно малым, то волновая оптика перейдет в геометрическую, а следовательно, и волновая механика в классическую. Это видно из того, что при таком допущении  $\omega$  получает на основании (406) при любом  $E$  бесконечно большое значение. Согласно (382) длина волны  $\lambda$  становится при этом бесконечно малой, а благо-

даря этому всегда выполняется условие, что длина волны мала сравнительно с радиусом кривизны траектории. Отсюда видно, что значение  $h$  получится тем больше, чем больше радиус кривизны траектории, для которой заметны отступления от классической механики. Для нашего подсчета порядка величины  $h$  мы примем, что для электрона, вращающегося вокруг заряженного одним положительным зарядом ядра, отступления от классической механики становятся заметны, когда радиус его пути доходит до атомных размеров.

В нашем случае, если  $r$  обозначает радиус пути,  $v$  — скорость движения по траектории,  $e$  — заряд,  $m$  — массу электрона, то по законам классической механики при равномерном вращательном движении центростремительная сила равна силе притяжения ядра. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &= \frac{e^2}{r^2}, \\ v &= \frac{e}{\sqrt{mr}}. \end{aligned} \quad (415)$$

С другой стороны, для длины волны  $\lambda$ , которая соответствует рассматриваемому движению, получаем из (382), (411), (406) и (404):

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{h}{mv}$$

и согласно (415):

$$\lambda = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{r}{m}}. \quad (416)$$

Отсюда находим отношение длины волны  $\lambda$  к радиусу кривизны  $r$ :

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{h}{e \sqrt{mr}}. \quad (417)$$

Чтобы это отношение имело заметную величину, числитель и знаменатель дроби должны иметь одинаковый порядок величины, т. е.

$$\approx e \sqrt{mr}. \quad (418)$$

Подставляем сюда согласно принятому выше условию для  $r$  величину  $10^{-7}$  см и выражаем величины в электромагнитной системе единиц:

$$e = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ (эрг} \cdot \text{см)}^{\frac{1}{2}}, \quad m = 9,02 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

Тогда получаем:

$$h \approx 4,5 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.} \quad (419)$$

Более точное значение кванта действия:

$$h \approx 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек.} \quad (420)$$







## УКАЗАТЕЛЬ

- Анализатор 19.  
Астигматический пучок лучей 52.
- Брюстера закон 19.  
Волна необыкновенная 123.  
— обыкновенная 123.  
— поперечная 10.  
— почти гармоническая 147.
- Волновая линия 45.  
Волновая механика 158.  
Волновая поверхность 11, 108 и сл.
- Геометрическая оптика 50.  
Главная скорость распространения 100.  
Главные диэлектрические постоянные 96.  
Главные интенсивности 24.  
Главные плоскости 57.  
Главные точки 57.  
Гомоцентрический пучок лучей 52.
- Дисперсия 16.  
— аномальная 140.  
— нормальная 139.  
Дифракции точка 71.  
Дифракционная решетка 93.  
— — ее постоянная 93.  
Дифракция 63.  
— Фраунгофера 87.  
— Френеля 74.  
Длины единицы в оптике 32.
- Интегралы Френеля 76, 78.  
Интенсивность излучения 8.  
Интерференция 40.
- Кардинальные точки 58.  
Квант действия 160.  
Когерентность 23.  
Компенсатор 49.  
Коэффициент отражения 17, 142.  
— пропускания 20, 142.
- Металлическое отражение 142.
- Некогерентность 40.  
Нормальное падение 16.  
Ньютоновы цветные кольца 39.  
Оптическое изображение 53.  
Оптические оси кристалла 104.  
— вторичные 107.  
Оптический центр системы 58.
- Параллелепипед Френеля 46.  
Плоскопараллельная пластинка 33.  
Плоскость колебаний 19, 98.  
— поляризации 19.  
Поверхность индексов 121.  
Поглощения полоса 139.  
Показатель поглощения 140.  
— преломления 15.  
— главный 105.  
Полусходящиеся ряды 81.  
Поляризатор 19.  
Призма 50, 51.  
— Николая 114, 115.  
Принцип Гюйгенса 64.  
— Ферма 61, 152.
- Разность фаз 41.  
Рефракция коническая 118.  
— внешняя 118.
- Свет естественный 18.  
— левовращающий 43.  
— линейно поляризованный 19.  
— однородный 32.  
— правовращающий 43.  
— поляризованный по кругу 47.  
— эллиптически поляризованный 48.
- Системы центрированные 55.  
Скорость главная распространения 100.  
— групповая 149.  
— светового сигнала 147.  
— фазовая 146, 147.  
— фронтовая 146.
- Снеллиуса закон преломления 15.  
Сопряженные точки 52.  
Стоячие световые волны 31, 32.
- Угол отражения 15.  
— падения 12.  
— преломления 15.

- |                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| — поляризация 19.         | Фокус 52.                       |
| — предельный 15.          | Фокусное расстояние 57.         |
| Узловая точка 58.         |                                 |
| Уравнение Шредингера 159. | Эллипсоид поляризации Коши 102. |
| — эйконала 152.           | Эйконал 151.                    |
| Уравнения Масквелла 7.    |                                 |
| Фокальная плоскость 54.   | Яркость удельная 60.            |

---

Редакция Н. Д. Ершовой.

Корректурa Н. П. Загрядскова.

Сдано в производство 16 сентября 1934 г. Подписано к печати 5 декабря 1934 г.

Количество бум. листов  $5\frac{1}{8}$ . Авторских листов 12. Тираж 7 000. Формат бумаги  $62 \times 94\frac{1}{16}$ .

Количество печ. знаков в 1 бум. листе 96 000.

Занав № 1121. ГТТИ № 145

Уполномоченный Главлита № В-100869.

---

4-я типография ОНТИ НКТП СССР „Красный Печатник“. Ленинград, Международный, 75а.

**ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
НКТП СССР**

**МАКС ПЛАНК**

**ВВЕДЕНИЕ  
В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ**

**ЧАСТЬ ПЕРВАЯ  
ОБЩАЯ МЕХАНИКА**

Пер. с немецкого под ред. проф. Н. П. Кастерина  
Издание второе. 200 стр.  
Москва—Ленинград. 1932 г. Ц. 2 р. 75 к.

**ЧАСТЬ ВТОРАЯ  
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Пер. с немецкого Л. Я. Штрума, под ред. проф. Н. П. Кастерина.  
Издание второе. 184 стр.  
Москва—Ленинград. 1932 г. Ц. 3 р.

**ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ  
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО и МАГНЕТИЗМ**

Пер. с немецкого под ред. проф. Н. П. Кастерина  
Издание второе, стереотипное  
Москва—Ленинград. 1933 г. Ц. 3 р. 50 к.

**ЧАСТЬ ПЯТАЯ  
ОПТИКА**

Пер. с немецкого П. Н. Успенского

**ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
НКТП СССР**

*ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:*

**ИОСС**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

Пер. с немецкого под ред. Э. В. Шпольского

**КЛЕМЕНС ШЕФЕР**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ**

т. I, ч. 2-я, пер. с немецкого под ред. В. К. Семенченко

**Ю. Б. РУМЕР**

**ВВЕДЕНИЕ В ВОЛНОВУЮ МЕХАНИКУ**

ч. 1-я

**ГАЗ**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ**

Пер. с немецкого под ред. В. В. Шулейкина

*ПЕЧАТАЮТСЯ*

**КЛЕМЕНС ШЕФЕР**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ**

т. I, ч. 1-я, пер. с немецкого под ред. К. Н. Лидопольского

