В. А. ПЛИСС

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА · 1964 · ЛЕНИНГРАД

В. А. ПЛИСС

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО [illegible]КА»
МОСКВА · 1964 · ЛЕНИ[illegible]АД

534
П88
УДК 534.0

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время усилия многих специалистов по теории дифференциальных уравнений были направлены на изучение так называемых нелокальных проблем этой теории. Среди таких проблем видное место занимают вопросы существования периодических решений и их устойчивости в большом. Именно этому кругу вопросов и посвящается предлагаемая книга. В ней рассматриваются два широких класса систем: системы, правые части которых зависят периодическим образом от времени, и автономные системы.

Книга состоит из трех глав.

В первой главе изучаются в основном многомерные периодические системы.

§ 1 носит вводный характер. В этом параграфе рассматриваются самые общие автономные и периодические системы. Даются основные определения. Доказываются важные для дальнейшего общие теоремы о поведении решений периодических и автономных систем.

В § 2 изучаются общие свойства диссипативных систем. Диссипативными называются системы, у которых любое решение с течением времени попадает в фиксированную область. В терминах существования некоторых функций, являющихся обобщениями классических функций Ляпунова, даются условия, необходимые и достаточные для диссипативности. Доказывается существование ограниченного множества S, состоящего из целых решений, такого, что все решения диссипативной системы стремится к S при неограниченном возрастании времени.

В следующих трех параграфах (§ 3—5) даются условия, достаточные для диссипативности некоторых конкретных систем дифференциальных уравнений. Для доказательства диссипативности используются общие теоремы, доказанные в § 2.

§ 6 посвящается изучению многомерных периодических систем, не являющихся диссипативными. Здесь при различных предположениях доказывается существование периодических решений с тем же периодом, что и у правых частей.

В последних двух параграфах I гл. (§ 7, 8) изучаются системы с конвергенцией. Под этим понимаются системы с одним устойчивым в целом периодическим решением. При изучении систем с конвергенцией периодическое решение обычно бывает неизвестно, поэтому естественно рассмотреть вопрос о сближении всех вообще решений. В связи с этим в § 7 вводятся функции, зависящие от двух точек пространства и обращающиеся в нуль при совпадении этих точек. В терминах существования такого рода функций даются условия, необходимые и достаточные для наличия конвергенции. В дальнейшем эти условия используются для установления наличия конвергенции у некоторых конкретных многомерных и двумерных систем.

Во II гл. изучаются периодические системы первого и второго порядков. Здесь в основном приводятся теоремы, доказательство которых, по существу, использует тот факт, что мы имеем дело именно с такими системами. Большинство этих теорем не может быть обобщено на системы более высокого порядка.

В § 9 рассматриваются уравнения первого порядка. Формулируются некоторые общие теоремы о расположении интегральных кривых таких уравнений. Большая часть параграфа посвящена изучению уравнения с полиномиальной правой частью. Для такого уравнения весьма подробно изучается вопрос о возможном числе периодических решений. Дается ряд условий, достаточных для того, чтобы число периодических решений не превышало степени полинома, стоящего в правой части.

В § 10 и 11 рассматриваются уравнения первого порядка, правые части которых периодичны по обоим аргументам. Такие уравнения естественно рассматривать на торе. В § 10 излагаются общие сведения о поведении траекторий на торе. В § 11 ивучаются вопросы зависимости поведения решений от параметров, входящих в правую часть уравнения. Здесь исследуется зависимость числа вращения от параметров, формулируются условия, необходимые и достаточные для грубости.

Остальные параграфы (§ 12—17) II гл. посвящены периодическим системам второго порядка.

В § 12 устанавливаются общие теоремы о поведении интегральных кривых периодической системы двух дифференциальных уравнений. В частности, здесь устанавливается фундаментальная теорема Массера о существовании периодических решений систем второго порядка. Подробно изучается поведение диссипативной системы второго порядка. Исследуется возможная структура множества S такой системы.

В следующих двух параграфах (§ 13, 14) рассматривается вопрос о существовании торообразных инвариантных поверхностей. Предполагается, что некоторая система имеет торообразную интегральную поверхность с определенными свойствами, и доказывается, что и все „близкие" к ней системы также имеют такую интегральную поверхность. В § 13 и 14 делаются различные предположения относительно поведения решений на инвариантной поверхности исходной системы. В связи с этим и методы доказательства существования интегральных поверхностей в этих параграфах различны. В § 13 вводится пространство замкнутых кривых, строится некоторое связанное с системой преобразование этого пространства в себя и доказывается существование неподвижной точки такого преобразования. В § 14 рассуждение ведется на основе известного первого метода Ляпунова.

В § 15 дается пример диссипативной системы второго порядка с весьма сложной структурой множества S. В частности, доказывается, что пересечение этого множества с плоскостью, в которой аргумент системы сохраняет постоянное значение, представляет собой область, граница которой не является жордановой кривой.

§ 16 и 17 посвящены изучению конкретных систем второго порядка. При определенных предположениях здесь устанавливается существование периодических решений с периодом, равным целому кратному периода правой части.

В последней III гл. изучаются автономные системы.

В § 18 формулируются некоторые общие теоремы о периодических решениях автономных систем. Здесь устанавливается известный принцип тора. Даются условия, достаточные для существования и единственности периодического решения в некоторой области фазового пространства.

В § 19 рассматривается некоторая конкретная система, для которой с помощью принципа тора доказывается существование периодического решения.

Последние три параграфа книги посвящаются изучению уравнения третьего порядка с одной нелинейностью, удовлетворяющей так называемым обобщенным условиям Гурвица.

В § 20 устанавливаются некоторые теоремы о расположении траекторий этого уравнения.

В § 21 формулируются условия, достаточные для ограниченности всех решений рассматриваемого уравнения. При этих условиях уточняется качественная картина расположения траекторий. В частности, доказывается, что если уравнение не имеет периодических решений, то все его решения стремятся к состоянию равновесия.

Наконец, в последнем § 22 даются условия, достаточные для существования периодических решений.

Книга отнюдь не претендует на полноту изложения всех методов нелокальной теории колебаний. В ней излагается лишь часть наиболее важных фактов этой теории. Специалист обратит, конечно, внимание на то, что неосвещенными остались не только отдельные весьма важные и интересные результаты, бесспорно относящиеся к тематике книги, но даже и целые направления. Например, совершенно не рассматриваются двумерные автономные системы (теория таких систем превосходно изложена в книге [90]).

Что касается приводимого списка литературы, то он тоже не претендует на полноту. В этом списке приводятся лишь те работы, на которые приходится ссылаться в процессе изложения. Нужные библиографические справки читатель найдет во многих появившихся в последнее время обзорах (см., например, работы [91, 92]).

Академик В. И. Смирнов просмотрел рукопись и сделал ряд важных замечаний, принятых во внимание при окончательном редактировании. Я приношу ему глубокую благодарность.

В. А. Плисс

ГЛАВА

МНОГОМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Общие сведения о периодических и автономных системах

Вынужденные колебания механических систем с конечным числом степеней свободы часто описываются векторными дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dX}{dt}=F(X, t), \tag{1.1}$$

правые части которых зависят периодически от времени t.

Относительно системы (1.1) мы будем делать в дальнейшем следующие предположения. $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор, вектор-функция $F=\{f_1, \ldots, f_n\}$ определена и непрерывна при всех вещественных X и t, удовлетворяет условию единственности решений системы (1.1) при всех X, t и имеет период ω по t, т. е. $F(X, t+\omega)\equiv F(X, t)$.

Если речь идет о свободных колебаниях, то правая часть уравнения (1.1) не будет явно зависеть от времени, и мы будем иметь систему вида

$$\frac{dX}{dt}=F(X), \tag{1.2}$$

о которой также будем предполагать, что n-мерная вектор-функция F задана и непрерывна при всех вещественных значениях n-мерного вектора X и удовлетворяет условию единственности решений системы (1.2) при любых X.

Так как в системе (1.1) правая часть периодична по времени, то эту систему целесообразно изучать в тороидальном пространстве, отождествив между собой все точки вида

$(X, t+k\omega)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Присоединим к системе (1.1) уравнение $\frac{d\theta}{dt}=1$, тогда получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F(X, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Правые части полученной системы не зависят явно от времени, т. е. эта система имеет вид (1.2). Фазовым пространством системы (1.3) служит описанное тороидальное пространство X, θ с отождествленными между собой точками вида $(X, \theta+k\omega)$.

1. Если все решения системы (1.2) продолжимы на все моменты времени от $-\infty$ до $+\infty$ (а этого, как хорошо известно, легко добиться простой заменой переменной t [1]), то решения (1.2) образуют динамическую систему в соответствующем фазовом пространстве. В наших случаях это будет или евклидово пространство векторов X, если речь идет о системе (1.2), или описанное выше тороидальное пространство, если дело касается системы (1.3).

Поведение динамических систем хорошо изучено (см. книги [1, 2]). Здесь мы приведем лишь некоторые, особенно важные для дальнейшего результаты.

Пусть $X=\Phi(p, t)$ — решение системы (1.2) с начальными данными $t=0$, $X=p$, т. е. $\Phi(p, 0)=p$. Так как решение $X=\Phi(p, t)$ при любом p по условию единственно, то имеет место теорема об интегральной непрерывности [3]: по любым $T>0$ и $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что если $\rho(p, q)<\delta$, то

$$\rho[\Phi(p, t), \Phi(q, t)]<\varepsilon \tag{1.4}$$

при $|t| \leqslant T$, где $\rho(\alpha, \beta)$ — расстояние между точками α и β.

Так как правые части системы (1.2) не зависят явно от времени, то выполняется соотношение (групповое свойство динамической системы)

$$\Phi(p, t_1+t)=\Phi(\Phi(p, t_1), t). \tag{1.5}$$

Пусть $T_1<t<T_2$ — наибольший промежуток, на котором определено решение $\Phi(p, t)$, т. е. при $t=T_i$ $(i=1, 2)$ решение $X=\Phi(p, t)$ не определено (может, конечно, слу-

читься, что одно из чисел T_1, T_2 или оба они несобственные). Будем называть множество точек $\Phi(p, t)$ $T_1 < t < T_2$ траекторией системы (1.2) и обозначать $\Phi(p, I_0)$. Множество точек $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t \leqslant T_2$ будем называть положительной полутраекторией. Аналогично определяется отрицательная полутраектория.

Если точка p такова, что $F(p) = 0$, то ясно, что $X = \Phi(p, t) = p$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Такие точки называются состояниями равновесия.

Пусть точка p такова, что существует $\tau > 0$, такое, что $\Phi(p, \tau) = p$ и $\Phi(p, t) \neq p$ при $0 < t < \tau$. Тогда имеем, в силу свойства (1.5),

$$\Phi(p, t+\tau) = \Phi(\Phi(p, \tau), t) = \Phi(p, t). \tag{1.6}$$

Таким образом, вектор-функция $\Phi(p, t)$ оказывается периодической с периодом τ, а траектория $\Phi(p, t)(-\infty < t < +\infty)$ представляет собой замкнутую кривую.

Пусть M — множество точек фазового пространства, через $\Phi(M, t)$ будем обозначать множество точек $\Phi(p, t)$, у которых $p \in M$. Множество M называется инвариантным, если

$$\Phi(M, t) = M \tag{1.7}$$

при всех t. Из определения инвариантного множества следует, что инвариантное множество состоит из целых траекторий и, обратно, множество, состоящее из целых траекторий, инвариантно.

Из теоремы об интегральной непрерывности вытекает, что замыкание инвариантного множества инвариантно.

В теории динамических систем весьма важную роль играет понятие предельной точки. Рассмотрим положительную полутраекторию $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$. Если существует такая последовательность

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \ldots \to +\infty, \tag{1.8}$$

что

$$\lim_{k \to \infty} \Phi(p, t_k) = q,$$

то точка q называется предельной точкой положительной полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$ и ω-предельной точкой траектории $\Phi(p, t)$. Аналогично определяется предельная точка отрицательной полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \geqslant t > -\infty$.

Предельная точка отрицательной полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \geqslant t > -\infty$ называется α-предельной точкой траектории $\Phi(p, t)$.

Теорема 1.1. *Множество предельных точек всякой полутраектории инвариантно и замкнуто.*

Докажем теорему для положительной полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$. Пусть q — предельная точка этой полутраектории. Тогда существует последовательность $t_1 < t_2 < \ldots \to +\infty$, такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \Phi(p, t_k) = q. \tag{1.9}$$

Рассмотрим некоторую точку $\Phi(q, \tau)$ траектории, проходящей через точку q. По теореме об интегральной непрерывности по любому $\varepsilon > 0$ и $T = |\tau|$ найдется такое $\delta > 0$, что если $\rho(\Phi(p, t_k), q) < \delta$, то $\rho(\Phi(p, t_k + \tau), \Phi(q, \tau)) < \varepsilon$. Из (1.9) следует, что первое из этих двух неравенств выполняется при достаточно больших k; следовательно, при таких k выполняется и второе, а это, в свою очередь, означает, что

$$\lim_{k \to \infty} \Phi(p, t_k + \tau) = \Phi(q, \tau),$$

т. е. точка $\Phi(q, \tau)$ является предельной для полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$. Отсюда следует, что предельное множество этой полутраектории инвариантно.

Покажем, что оно замкнуто. Пусть точки $q_1, q_2, q_3, \ldots$ являются предельными для нашей полутраектории и

$$\lim_{k \to \infty} q_k = q. \tag{1.10}$$

Докажем, что точка q является предельной для полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По этому ε, в силу (1.10), найдется такое q_k, что $\rho(q_k, q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как q_k — предельная для $\Phi(p, t)$, то найдется сколь угодно большое $\bar{t}$, такое, что $\rho(\Phi(p, \bar{t}), q_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $\rho(\Phi(p, \bar{t}), q) < \varepsilon$; это и доказывает, что точка q — предельная для нашей полутраектории.

Теорема доказана.

В дальнейшем нас, естественно, будут больше всего интересовать ограниченные решения. Траектории, соответствующие таким решениям, имеют специальное название.

Определение 1.1. Ограниченная полутраектория называется устойчивой по Лагранжу. Движение называется положительно (отрицательно) устойчивым по Лагранжу, если устойчива по Лагранжу его положительная (отрицательная) полутраектория. Движение, одновременно положительно и отрицательно устойчивое по Лагранжу, называется устойчивым по Лагранжу.

Из принципа выбора Больцано — Вейерштрасса следует, что множество предельных точек устойчивой по Лагранжу полутраектории не пусто.

Теорема 1.2. *Если полутраектория устойчива по Лагранжу, то множество ее предельных точек связно.*

Доказательство. Пусть положительная полутраектория $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$ устойчива по Лагранжу. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что множество Ω ее предельных точек не связно. Тогда множество Ω разбивается на два непустых замкнутых подмножества: $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_1 \cdot \Omega_2 = 0$. Так как рассматриваемая полутраектория ограничена, то ограничено и множество Ω; следовательно, по теореме отделимости имеем $\rho(\Omega_1, \Omega_2) = d > 0$.

Так как $\Omega_1 \subset \Omega$ и $\Omega_2 \subset \Omega$, то найдутся сколь угодно большие значения t'_k, для которых

$$\rho(\Phi(p, t'_k), \Omega_1) < \frac{d}{3}, \tag{1.11}$$

и сколь угодно большие значения t''_k, для которых

$$\rho(\Phi(p, t''_k), \Omega_2) < \frac{d}{3}. \tag{1.12}$$

Последовательности t'_k и t''_k можно подобрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < t'_1 < t''_1 < t'_2 < t''_2 < \ldots < t'_k < t''_k < \ldots$$

Так как $\rho(\Phi(p, t), \Omega_1)$ есть непрерывная функция t и выполняются неравенства

$$\rho(\Phi(p, t'_k), \Omega_1) < \frac{d}{3},$$

$$\rho(\Phi(p, t''_k), \Omega_1) \geqslant \rho(\Omega_1, \Omega_2) - \rho(\Phi(p, t''_k), \Omega_2) \geqslant \frac{2}{3} d,$$

то найдется значение $\tau_k \left(t'_k < \tau_k < t''_k\right)$ такое, что

$$\rho(\Phi(p, \tau_k), \Omega_1) = \frac{d}{2}.$$

Так как полутраектория $\Phi(p, t)$ ограничена, то из последовательности точек $\Phi(p, \tau_k)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке q. Точка q тогда будет предельной для полутраектории $\Phi(p, t)$ $0 \leqslant t < +\infty$, а с другой стороны, $\rho(q, \Omega_1) = \frac{d}{2}$; следовательно, q не принадлежит ни Ω_1, ни Ω_2.

Мы получили противоречие, которое и доказывает теорему.

2. В дальнейшем нам понадобится понятие минимального множества.

Определение 1.2. Множество Σ точек фазового пространства называется минимальным, если оно не пусто, замкнуто, инвариантно и не имеет истинного подмножества, обладающего этими свойствами.

Состояние равновесия и траектория периодического движения являются, очевидно, минимальными множествами.

Наибольший интерес представляют ограниченные минимальные множества. Относительно существования таких множеств можно высказать следующую теорему.

Теорема 1.3. *Ограниченное замкнутое инвариантное множество содержит минимальное множество.*

Доказательство. Пусть M — инвариантное замкнутое и ограниченное множество точек фазового пространства. Если оно не имеет правильной части, обладающей теми же свойствами, то M — минимальное множество, и теорема доказана. Предположим, что существует множество $M_1 \subset M$, $M_1 \neq M$ и M_1 замкнуто и инвариантно. Если M_1 не содержит в качестве правильной части замкнутого инвариантного множества, то оно минимально. Пусть существует замкнутое инвариантное множество $M_2 \subset M_1$ и $M_2 \neq M_1$ и т. д. Продолжим этот процесс; если на конечном шаге не появится минимального множества, то существует последовательность замкнутых инвариантных множеств

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \qquad (1.13)$$

Пересечение этих множеств M_ω замкнуто, ограничено и не пусто. Покажем, что оно инвариантно. Действительно, пусть

$p \in M_\omega$; следовательно, при любом k $p \in M_k$. Все M_k инвариантны, поэтому при любом t и k $\Phi(p, t) \in M_k$. Отсюда следует, что при любом t $\Phi(p, t) \in M_\omega$, что и доказывает инвариантность M_ω.

Если M_ω не является минимальным, то выберем замкнутое инвариантное множество $M_{\omega+1} \subset M_\omega$ $(M_{\omega+1} \neq M_\omega)$ и т. д. Если β является предельным числом и построены M_α при всех $\alpha < \beta$, то положим $M_\beta = \prod_{\alpha<\beta} M_\alpha$. Ясно, что M_β будет замкнутым и инвариантным.

Мы получаем, таким образом, трансфинитную последовательность вложенных друг в друга множеств

$$M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots \supset M_\omega \supset \ldots \supset M_\beta \supset \ldots$$

По теореме Бэра (см., например, [4]) существует такое трансфинитное число β второго класса, что $M_\beta = M_{\beta+1}$, т. е. множество M_β не имеет замкнутого и инвариантного истинного подмножества. Следовательно, M_β — минимальное множество.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Если полутраектория устойчива в смысле Лагранжа, то множество ее предельных точек содержит минимальное множество.

Введем следующие обозначения. Будем через $\Phi(p, t_0, t_1)$ обозначать множество точек $\Phi(p, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Пусть M — множество точек фазового пространства; через $U(M, \varepsilon)$ будем обозначать ε-окрестность этого множества, т. е. множество тех точек p, для которых $\rho(M, p) < \varepsilon$.

Определение 1.3. Решение $\Phi(p, t)$ называется положительно устойчивым в смысле Пуассона (устойчивым P^+), если по любому $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ можно указать $t > T$, такое, что $\rho(\Phi(p, t), p) < \varepsilon$. Аналогично, если существует такое $t < -T$, что $\rho(\Phi(p, t), p) < \varepsilon$, то решение $\Phi(p, t)$ отрицательно устойчиво по Пуассону (устойчиво P^-).

Решение положительно и отрицательно устойчивое по Пуассону называется устойчивым по Пуассону.

Определение 1.4. Решение $\Phi(p, t)$ называется рекуррентным, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T(\varepsilon)$, что любая дуга траектории этого движения временной длины $T(\varepsilon)$ апроксимирует всю траекторию с точностью до ε, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$ существует T такое, что при любом t_0 выполняется соотношение

$$\Phi(p, I_0) \subset U(\Phi(p, t_0, t_0+T), \varepsilon). \qquad (1.14)$$

Нетрудно видеть, что всякое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону. Действительно, по всяким $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ можно указать такие точки t_1 и t_2, $t_1 \in [t_0, t_0+T]$, $t_2 \in [-t_0-T, -t_0]$, что $\rho(p, \Phi(p, t_k)) < \varepsilon\ (k=1, 2)$. Это и доказывает устойчивость движения $\Phi(p, t)$ в смысле Пуассона.

Оказывается, что минимальные множества целиком построены из рекуррентных траекторий. Имеет место

Теорема 1.4. *Всякая траектория ограниченного минимального множества рекуррентна.*

Доказательство. Пусть p — точка ограниченного минимального множества Σ. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что движение $\Phi(p, t)$ не является рекуррентным. Это означает, что существуют число α и последовательность неограниченно возрастающих промежутков времени $[t_\nu - T_\nu, t_\nu + T_\nu]$, $T_\nu \to +\infty$, таких, что каждая из дуг $\Phi(p, t_\nu - T_\nu, t_\nu + T_\nu)$ находится на расстоянии не меньшем α от точки $q_\nu = \Phi(p, \tau_\nu)$. В силу ограниченности множества Σ последовательности q_ν и $p_\nu = \Phi(p, t_\nu)$ можно считать сходящимися (в противном случае мы перешли бы к сходящимся подпоследовательностям). Положим

$$\lim_{\nu\to\infty} q_\nu = q, \quad \lim_{\nu\to\infty} p_\nu = p'. \qquad (1.15)$$

Так как Σ замкнуто, то $q \in \Sigma$ и $p' \in \Sigma$. Возьмем произвольное число $T > 0$ и рассмотрим дугу траектории $\Phi(p; -T, T)$. По теореме об интегральной непрерывности существует такое δ, что если $\rho(p', r) < \delta$, то $\rho(\Phi(p', t), \Phi(r, t)) < \frac{\alpha}{3}$ при $|t| \leqslant T$. Из (1.15) следует, что при достаточно большом ν выполняются неравенства

$$T_\nu > T, \quad \rho(p', p_\nu) < \delta, \quad \rho(q_\nu, q) < \frac{\alpha}{3}. \qquad (1.16)$$

Тогда для любого t из промежутка $-T \leqslant t \leqslant T$ будем иметь неравенство

$$\rho(\Phi(p', t), \Phi(p_\nu, t)) < \frac{\alpha}{3}. \qquad (1.17)$$

По самому выбору точки q_ν, так как $|t| < T < T_\nu$, можем написать

$$\rho(\Phi(p_\nu, t), q_\nu) = \rho(\Phi(p, t_\nu + t), q_\nu) \geqslant \alpha. \qquad (1.18)$$

Из неравенств (1.16)—(1.18) следует, что при всех $|t| \leqslant T$ выполняется неравенство

$$\rho(\Phi(p', t), q) > \frac{\alpha}{3}. \qquad (1.19)$$

Так как число T было выбрано совершенно произвольно, то последнее неравенство выполняется для всех значений t от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. $\rho(\Phi(p', I_0), q) \geqslant \frac{\alpha}{3}$.

Как уже отмечалось, $p' \in \Sigma$. Из инвариантности Σ следует включение

$$\Phi(p', I_0) \subset \Sigma. \qquad (1.20)$$

Пусть, как обычно, $\overline{\Phi(p', I_0)}$ обозначает замыкание множества $\Phi(p', I_0)$. Ясно, что $\rho(\overline{\Phi(p', I_0)}, q) \geqslant \frac{\alpha}{3}$, т. е. q не лежит на $\overline{\Phi(p', I_0)}$. Поэтому множество $\overline{\Phi(p', I_0)}$ есть правильная часть множества Σ. Но замыкание инвариантного множества инвариантно и замкнуто. Таким образом, множество Σ содержит в качестве истинного подмножества инвариантное замкнутое множество $\overline{\Phi(p', I_0)}$ и потому не является минимальным.

Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Следствие 1.2. Если полутраектория устойчива по Лагранжу, то ее предельное множество содержит рекуррентную траекторию.

Это утверждение следует из следствия 1.1 и теоремы 1.4. Теорема 1.4 допускает следующее обращение.

Теорема 1.5. *Если движение $\Phi(p, t)$ рекуррентно, то замыкание его траектории $\overline{\Phi(p, I_0)}$ представляет собой ограниченное минимальное множество.*

Доказательство. Докажем сначала, что траектория $\Phi(p, I_0)$ ограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$, по этому ε, в силу определения рекуррентного движения, можно указать такое T, что при всех t

$$\Phi(p, t) \in U(\Phi(p; -T, T), 1).$$

Но дуга траектории $\Phi(p; -T, T)$ представляет собой, очевидно, ограниченное множество. Отсюда и следует ограниченность множества $\Phi(p, I_0)$.

Осталось доказать, что множество $\overline{\Phi(p, I_0)} = \Sigma$ минимально. Допустим, напротив, что это не так, тогда существует замкнутое инвариантное множество M, представляющее собой правильную часть Σ. Тогда p не входит в M, ибо в противном случае оказалось бы, что $M = \overline{\Phi(p, I_0)} = \Sigma$. Так как M ограничено и замкнуто, то $\rho(M, p) = d > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{d}{3}$ и выберем число $T(\varepsilon)$, входящее в определение рекуррентной траектории. Возьмем какую-нибудь точку $q \in M$. По взятым числам ε и T, в силу теоремы об интегральной непрерывности, найдется $\delta > 0$ такое, что если $\rho(q, r) < \delta$, то при всех $|t| \leqslant T$

$$\rho(\Phi(q, t), \quad \Phi(r, t)) < \delta.$$

Точка $q \in M \subset \overline{\Phi(p, I_0)}$, поэтому существует такое t_1, что

$$\rho(\Phi(p, t_1), q) < \delta.$$

Отсюда в силу выбора δ следует, что при всех $|t| \leqslant T$ выполняется неравенство

$$\rho(\Phi(q, t), \quad \Phi(p, t_1 + t)) < \varepsilon. \tag{1.21}$$

Так как множество M инвариантно, то $\Phi(q, t) \in M$ при всех t, отсюда и из неравенства (1.21) следует, что при $|t| \leqslant T$ имеет место соотношение

$$\rho(M, \Phi(p, t_1 + t)) < \varepsilon.$$

Следовательно, при $|t| \leqslant T$ имеем

$$\rho(p, \Phi(p, t_1 + t)) > d - \varepsilon = \frac{2d}{3} > \varepsilon.$$

Это неравенство показывает, что точка p не лежит в ε-окрестности дуги траектории $\Phi(p, t)$ временной длины $2T$ с серединой в точке $\Phi(p, t_1)$, что противоречит выбору T.

Теорема доказана.

3. Рекуррентное движение, как видно из самого его определения, представляет собой некий колебательный процесс в системе нелинейных колебаний. Доказательство существования такого процесса достаточно просто, надо лишь уста-

новить наличие ограниченного движения. Среди всех рекуррентных движений наибольший интерес представляют „чистые" колебания—периодические решения. К изучению таких решений мы сейчас и переходим.

Установим сначала следующий признак существования периодических решений у динамической системы (1.2).

Теорема 1.6. *Пусть положительно устойчивое в смысле Пуассона движение $\Phi(p, t)$ системы* (1.2) *обладает следующим свойством: существует непрерывная и положительная при $t \geqslant 0$ функция $\alpha(t)$, $\alpha(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, такая, что по любому $\varkappa > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что если $\rho(q, p) \leqslant \varepsilon$, то существует такое $h(q)$ $(|h(q)| < \varkappa)$, что*

$$\rho(\Phi(p, t + h(q)), \quad \Phi(q, t)) < \alpha(t)$$

при $t \geqslant 0$; тогда движение $\Phi(p, t)$ — периодическое.

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, если p — состояние равновесия. Поэтому в дальнейшем будем считать, что p не является состоянием равновесия системы (1.2). Проведем через точку p гиперплоскость L $(n-1)$-го измерения, нормальную к вектору поля направлений в точке p. Пусть U — столь малая окрестность точки p, что замыкание $\bar{S}$ ее пересечения с гиперплоскостью L не имеет контакта с полем направлений системы (1.2).

Нетрудно видеть, что существует такое $H > 0$, что если точка r лежит в $\bar{S}$, то траектория $\Phi(r, t)$ при $-4H \leqslant t \leqslant 4H$ не пересекает S.

По этому H в силу условий теоремы можно указать такое $\varepsilon > 0$, что если $\rho(p, q) \leqslant \varepsilon$, то существует $|h(q)| < H$, такое, что $\rho(\Phi(p, t + h(q)), \Phi(q, t)) < \alpha(t)$ при $t \geqslant 0$. Зафиксируем такое ε, меньшее радиуса указанной выше окрестности U точки p.

Возьмем произвольную точку $r \in \bar{S}$ такую, что $\rho(r, p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $(n-1)$-мерный шар $\bar{S}$ не имеет контакта с полем направлений, то можно утверждать, что существует $\delta > 0$, не зависящее от выбора r и обладающее следующими свойствами. Пусть, как обычно, $\Phi(r; -H, H)$ — часть траектории $\Phi(r, t)$, соответствующая моментам времени $-H \leqslant t \leqslant H$, а V — δ-окрестность этой части траектории. Тогда если точка l лежит в V, то траектория $\Phi(l, t)$ при $-2H \leqslant t \leqslant 2H$ пересечет $\bar{S}$ и притом только один раз; точка этого пересечения $\Phi(l, \tau)$ лежит на расстоянии меньшем $\varepsilon/2$ от r и зависит от l непрерывно.

Так как по условию $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то существует такое T, что при $t \geqslant T$ $\alpha(t) \leqslant \delta$. По условию теоремы движение $\Phi(p, t)$ положительно устойчиво по Пуассону; следовательно, существует такое $t_1 > T + 2H$, что точка $\Phi(p, t_1)$ лежит в $\bar{S}$ и $\rho(\Phi(p, t_1), p) < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем произвольную точку $q \in S$ так, что $\rho(q, p) \leqslant \varepsilon$. По условию теоремы при $t > 0$ будем иметь неравенство $\rho(\Phi(p, t + h(q)), \Phi(q, t)) < \alpha(t)$; следовательно, $\rho(\Phi(p, t_1 + h(q)), \Phi(q, t_1)) < \delta$. Так как $|h(q)| < H$ в силу выбора ε, то по выбору δ существует такое $\tau \in [t_1 - 2H, t_1 + 2H]$, что точка $\Phi(q, \tau)$ лежит в $\bar{S}$, $\rho(\Phi(q, \tau), \Phi(p, t_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$ и точка $\Phi(q, \tau)$ зависит непрерывно от точки $\Phi(q, t_1)$, а в силу теоремы об интегральной непрерывности и от точки q.

Из неравенства треугольника следует, что $\rho(\Phi(q, \tau), p) < \varepsilon$. Обозначим через S_ε пересечение S с $U(p, \varepsilon)$. Поставим в соответствие точке $q \in S_\varepsilon$ точку $\Phi(q, \tau)$. Так как $\rho(p, \Phi(q, \tau)) < \varepsilon$, то, таким образом, мы получим преобразование P замкнутого $(n-1)$-мерного шара $\bar{S}_\varepsilon$ в себя. Как уже отмечалось, точка $\Phi(q, \tau)$ непрерывно зависит от q, поэтому преобразование P непрерывно. Отсюда в силу теоремы Брауэра следует, что преобразование P имеет неподвижную точку $q_0 \in S_\varepsilon$. Это означает, что $\Phi(q_0, \tau) = q_0$, т. е. траектория $\Phi(q_0, t)$ замкнутая.

Докажем, что траектории $\Phi(q_0, I_0)$ и $\Phi(p, I_0)$ совпадают. Допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что $\rho(p, \Phi(q_0, I_0)) = d > 0$. Так как $q_0 \in \bar{S}_\varepsilon$, то по условию теоремы существует такое $h(q_0)$, что $\rho(\Phi(p, t + h(q_0)), \Phi(q_0, t)) < \alpha(t)$ при $t \geqslant 0$. По условию теоремы $\alpha(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому существует T_0 такое, что при $t \geqslant T_0$ $\alpha(t) < \frac{d}{2}$. Следовательно, при $t \geqslant T_0$ $\rho(\Phi(p, t + h(q_0)), \Phi(q_0, t)) < \frac{d}{2}$. Отсюда в силу неравенства треугольника получаем $\rho(p, \Phi(p, t + h(q_0))) > \frac{d}{2}$ при всех $t \geqslant T_0$. Последнее неравенство противоречит тому, что движение $\Phi(p, t)$ положительно устойчиво в смысле Пуассона. Противоречие доказывает, что траектории $\Phi(p, I_0)$ и $\Phi(q_0, I_0)$ совпадают. Траектория $\Phi(q_0, I_0)$ замкнутая, следовательно, и $\Phi(p, I_0)$ замкнута.

Теорема доказана.

4. Рассмотрим систему (1.1) при сделанных выше предположениях. Можно было бы предполагать, что любое периодическое решение этой системы имеет период, соизмеримый с периодом ω правых частей системы. Однако было замечено [5, 6], что это не всегда так. Рассмотрим в качестве примера [7] систему

$$\frac{dx}{dt} = y + (x^2 + y^2 - 1)\sin\lambda t, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{1.22}$$

Правые части этой системы имеют период $\frac{2\pi}{\lambda}$ по t, однако система допускает периодическое решение $x = -\cos t$, $y = \sin t$ с периодом 2π, вообще говоря, несоизмеримым с $\frac{2\pi}{\lambda}$. Система (1.22) такова, что в тех точках плоскости x, y, через которые проходит периодическое решение, т. е. в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$, правые части не зависят от времени. Оказывается, что это справедливо не только для системы (1.22), но и для всякой системы, имеющей периодическое решение, период которого несоизмерим с периодом правых частей. Справедливо следующее утверждение [8].

Теорема 1.7. *Пусть $X(t)$ — периодическое решение системы* (1.1), *период которого Ω несоизмерим с ω; тогда для любого t_0 вектор-функция $F(X(t_0), t)$ постоянна.*

Перед тем как доказывать это утверждение, установим справедливость следующей арифметической леммы.

Лемма 1.1. *Пусть a и μ — несоизмеримые числа, тогда по любому b и $\varepsilon > 0$ можно указать два таких целых числа M и N, что*

$$|b + M\mu - Na| < \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем столь большое натуральное число p, чтобы $\frac{a}{p} < \varepsilon$. Разделим сегмент $[0, 1]$ на части вида $\left[\frac{h-1}{p},\ \frac{h}{p}\right]$. Обозначим через $[\beta]$ целую, а через (β) дробную часть числа β. Введем в рассмотрение $p+1$ число $\left(k\frac{\mu}{a}\right)$, $k=1, 2, \ldots, p+1$. Так как сегментов, на которые мы разделили отрезок $[0, 1]$, всего p, то найдутся два разных числа k_1 и k_2 таких, что $\left(k_1\frac{\mu}{a}\right)$ и $\left(k_2\frac{\mu}{a}\right)$ попадут в один и тот же частичный сегмент. Пусть

$$\frac{h-1}{p} \leqslant \left(k_1\frac{\mu}{a}\right) \leqslant \frac{h}{p} \tag{1.23}$$

и

$$\frac{h-1}{p} \leqslant \left(k_2\frac{\mu}{a}\right) \leqslant \frac{h}{p}. \tag{1.24}$$

При этом для определенности будем считать, что $k_1 < k_2$. Вычтем из неравенств (1.23) неравенства (1.24), тогда получим

$$-\frac{1}{p} \leqslant \left(k_2\frac{\mu}{a}\right)-\left(k_1\frac{\mu}{a}\right) \leqslant \frac{1}{p}$$

или по определению $\left(k\frac{\mu}{a}\right)$

$$-\frac{1}{p} \leqslant (k_2-k_1)\frac{\mu}{a}-\left\{\left[k_2\frac{\mu}{a}\right]-\left[k_1\frac{\mu}{a}\right]\right\} \leqslant \frac{1}{p}. \tag{1.25}$$

Положим $k_2-k_1=m$, $\left[k_2\frac{\mu}{a}\right]-\left[k_1\frac{\mu}{a}\right]=n$, так как $k_2>k_1$, то ясно, что $m>0$, $n \geqslant 0$. Умножая (1.25) на a, получаем

$$-\varepsilon \leqslant m\mu - na \leqslant \varepsilon.$$

Так как число $\frac{\mu}{a}$ иррационально по условию, то возможно одно из двух: либо

$$m\mu - na = \gamma > 0, \tag{1.26}$$

либо

$$m\mu - na = -\gamma < 0. \tag{1.27}$$

В обоих случаях $0 < \gamma \leqslant \varepsilon$. Предположим сначала, что имеет место неравенство (1.27). Умножим (1.27) на $\left[\frac{b}{\gamma}\right]$ и прибавим к обеим частям b, тогда получим

$$b+m\left[\frac{b}{\gamma}\right]\mu - n\left[\frac{b}{\gamma}\right]a = b-\left[\frac{b}{\gamma}\right]\gamma. \tag{1.28}$$

Но по определению $\left[\frac{b}{\gamma}\right]$ имеем

$$\gamma\left[\frac{b}{\gamma}\right] \leqslant b < \gamma\left[\frac{b}{\gamma}\right] + \gamma;$$

отсюда

$$0 \leqslant b - \gamma\left[\frac{b}{\gamma}\right] < \gamma \leqslant \varepsilon.$$

Полагая здесь $m\left[\frac{b}{\gamma}\right] = M$ и $n\left[\frac{b}{\gamma}\right] = N$, получим утверждение леммы.

Пусть теперь реализуется (1.26). Найдем такое число $l \geqslant 1$, что

$$(l-1)\,a \leqslant b < la.$$

Умножим (1.26) на $\left[\frac{la-b}{\gamma}\right]$ и вычтем из него $la - b$, тогда получим

$$b - la + m\left[\frac{la-b}{\gamma}\right]\mu - n\left[\frac{la-b}{\gamma}\right]a = b - la + \gamma\left[\frac{la-b}{\gamma}\right]. \tag{1.29}$$

Кроме того, по определению $\left[\frac{la-b}{\gamma}\right]$ имеем

$$\left[\frac{la-b}{\gamma}\right] \leqslant \frac{la-b}{\gamma} < \left[\frac{la-b}{\gamma}\right] + 1$$

или

$$0 \leqslant la - b - \gamma\left[\frac{la-b}{\gamma}\right] < \gamma \leqslant \varepsilon.$$

Полагая $m\left[\frac{la-b}{\gamma}\right] = M$, $n\left[\frac{la-b}{\gamma}\right] + l = N$, получим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Переходим теперь к доказательству теоремы 1.7. Возьмем фиксированное число t_0. Пусть M и N — произвольные целые числа (положительные, отрицательные или нули). Имеем

$$F(X(t_0),\ t_0 + M\omega + N\Omega) = F(X(t_0),\ t_0 + N\Omega), \tag{1.30}$$

так как функция F имеет по условию период ω по t. По предположению $X(t_0 + N\Omega) = X(t_0)$, следовательно, можем написать

$$F(X(t_0),\ t_0 + N\Omega) = F(X(t_0 + N\Omega),\ t_0 + N\Omega). \tag{1.31}$$

но

$$\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=t_0+N\Omega} = F(X(t_0+N\Omega),\ t_0+N\Omega), \tag{1.32}$$

и по периодичности $X(t)$ имеем

$$\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=t_0+N\Omega} = \left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=t_0} = F(X_0(t_0),\ t_0).$$

Отсюда, из (1.30), (1.31) и (1.32) получаем

$$F(X(t_0),\ t_0+M\omega+N\Omega) = F(X(t_0),\ t_0). \tag{1.33}$$

По условию теоремы число $\frac{\Omega}{\omega}$ иррационально, поэтому в силу леммы 1.1 множество чисел $M\omega+N\Omega$ всюду плотно на числовой оси t, а так как по предположению функция $F(X,\ t)$ непрерывна, то из (1.33) следует, что при всяких t выполняется равенство

$$F(X(t_0),\ t) = F(X(t_0),\ t_0). \tag{1.34}$$

Это равенство и доказывает теорему.

Предположим, что система (1.1) имеет периодическое решение $X(t)$, период Ω которого несоизмерим с ω. Из теоремы 1.7 следует, что тогда вектор-функция $X(t+h)$, где $h=\text{const}$, является также решением системы (1.1). Действительно,

$$\frac{d}{dt}X(t+h) = F(X(t+h),\ t+h),$$

так как $X(t)$ — решение системы (1.1). По теореме 1.7 $F(X(t+h),\ t+h) = F(X(t+h),\ t)$; отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}X(t+h) = F(X(t+h),\ t);$$

это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, если решение $X(t)$ системы (1.1) имеет период Ω, несоизмеримый с периодом ω правых частей, то оно ведет себя как решение динамической системы (1.2): вдоль него правые части не зависят от времени, и оно входит в состав семейства $X(t+h)$.

Еругин [7] указал способы отыскания такого рода периодических решений и в работе [9] доказал, что линейная система второго порядка, коэффициенты которой не вырождаются в постоянные, не может иметь периодических решений, период которых несоизмерим с периодом коэффициентов.

5. Как показывают рассуждения предыдущего пункта, периодические решения системы (1.1) с периодом, несоизмеримым с периодом правых частей, представляют собой явление в известном смысле исключительное.

Наибольший интерес, естественно, представляют решения с периодом, соизмеримым с ω. В дальнейшем мы будем изучать именно такие решения.

Введем следующие определения [10].

Определение 1.5. Решение системы (1.1), имеющее период ω, называется гармоническим колебанием или просто гармоникой.

Определение 1.6. Решение системы (1.1) с наименьшим периодом $k\omega$ ($k \geqslant 2$ — натуральное) носит название субгармонического колебания k-го порядка или субгармоники k-го порядка.

Пусть $X(t)$ — субгармоника k-го порядка. Ясно тогда, что $X = X(t + l\omega)$ при любом целом l есть также субгармоника k-го порядка. При этом среди функций $X(t + l\omega)$ имеется ровно k различных субгармоник (имеется в виду евклидово пространство X, t; в тороидальном пространстве субгармоники отождествятся). Все эти функции будем называть системой субгармоник.

Для изучения гармонических и субгармонических колебаний системы (1.1) удобно ввести следующее преобразование. Пусть $X = X(t, X_0, t_0)$ есть решение системы (1.1) с начальными данными $t = t_0$, $X = X_0$. Предположим, что точка X_0 гиперплоскости $t = 0$ такова, что решение $X(t, X_0, 0)$ продолжимо на все моменты времени $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Поставим в соответствие точке X_0 точку $X(\omega, X_0, 0)$. Таким образом, получаем преобразование T той части гиперплоскости $t = 0$, через которую проходят решения, продолжимые на период, в гиперплоскость $t = 0$.

Из теорем единственности и интегральной непрерывности следует, что множество тех точек гиперплоскости $t = 0$, в которых определено преобразование T, открыто и на этом множестве преобразование T взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Из ω-периодичности функции $F(X, t)$ следует, что если $TX_0 = X_0$, то решение $X(t, X_0, 0)$ ω-периодично, и обратно, если $X(t+\omega, X_0, 0) = X(t, X_0, 0)$, то $TX_0 = X_0$. Таким образом, чтобы решение $X(t, X_0, 0)$ было гармоническим колебанием, необходимо и достаточно, чтобы точка X_0 была неподвижной относительно преобразования T.

Далее ясно, что если решение $X(t, X_0, 0)$ имеет период $k\omega$, то $T^k X_0 = X_0$. Из ω-периодичности правых частей системы (1.1) следует и обратное утверждение: если $T^k X_0 = X_0$, то решение $X(t, X_0, 0)$ имеет период $k\omega$.

6. Рассмотрим систему (1.1) в предположении, что правые части ее непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Справедлива следующая

{X, t} **Теорема 1.8.** *Если правые части системы* (1.1) *непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} < 0 \tag{1.35}$$

при всех X, t и если все решения $X(t, X_0, 0)$ существуют при $0 \leqslant t \leqslant \omega$, то любое ограниченное инвариантное относительно преобразования T множество гиперплоскости $t = 0$ имеет нулевую лебегову меру.

Доказательство. Преобразование T ставит в соответствие точке X_0 с координатами $\{x_{10}, \ldots, x_{n0}\}$ точку $X(\omega, X_0, 0)$ с координатами $\tilde{x}_1 = x_1(\omega, x_{10}, \ldots, x_{n0}, 0), \ldots$ $\ldots, \tilde{x}_n = x_n(\omega, x_{10}, \ldots, x_{n0}, 0)$. Вычислим якобиан этого преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_{n0}} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \dfrac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_{n0}} \end{vmatrix}. \tag{1.36}$$

Подставим решение $X = X(t, X_0, 0)$ системы (1.1) в эту систему и продифференцируем полученные тождества по каждой из переменных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, тогда получим n систем тождеств:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}, \\ &\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial x_n}{\partial u} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

где вместо u надо последовательно подставить $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, а под знаком функций $f_1, \ldots, f_n$ вместо X следует подставить $X(t, X_0, 0)$. Систему равенств (1.37) можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений для $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). По определению имеем $X(0, X_0, 0) = X_0$, поэтому при $t = 0$ $\frac{\partial x_i}{\partial x_{k0}} = \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Отсюда следует, что система функций

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{n0}}, \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_{n0}} \end{matrix} \tag{1.38}$$

представляет собой фундаментальную матрицу решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\zeta_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\zeta_n, \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{d\zeta_n}{dt} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\zeta_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\zeta_n, \end{aligned} \tag{1.39}$$

нормированную при $t = 0$ к единичной матрице. По теореме Лиувилля определитель этой системы вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{n0}} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial x_{10}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_{n0}} \end{vmatrix} = e^{\int\limits_0^t \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dt}. \tag{1.40}$$

Предположим теперь, вопреки утверждению теоремы, что преобразование T оставляет инвариантным ограниченное множество M ненулевой меры. Нетрудно видеть, что замыкание $\overline{M}$ множества M также ограничено и инвариантно относительно преобразования T.

Множество $\overline{M}$ имеет, очевидно, положительную лебегову меру μ. Рассмотрим в пространстве X, t множество S, состоящее из интегральных кривых системы (1.1), проходящих через множество $\overline{M}$. Множество это ограничено при

$0 < t \leqslant \omega$, поэтому существует такой шар K гиперплоскости $t = 0$, что множество S лежит в цилиндре

$$L\,\{X \in K,\ t \in [0,\ \omega]\} \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \omega.$$

Из условия (1.35) и непрерывности входящих в него производных следует, что существует такое $\alpha > 0$, что при $X \in \overline{K}$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} < -\alpha. \tag{1.41}$$

Разобъем теперь гиперплоскость $t = 0$ на кубики с гранями, параллельными координатным плоскостям, и рассмотрим множество G, состоящее из тех кубиков, которые имеют хотя бы одну общую точку с $\overline{M}$. Разбиение это можно считать столь мелким, что: 1) любое решение, проходящее через множество $\overline{G}$ при $t = 0$, при $0 \leqslant t \leqslant \omega$ лежит в цилиндре L; 2) объем a множества G удовлетворяет неравенствам $\mu < a < \mu e^{\alpha\omega}$.

Рассмотрим множество TG: так как $\overline{M} \subset G$, то имеем $T\overline{M} \subset TG$, и из инвариантности $\overline{M}$ вытекает $\overline{M} \subset TG$. Оценим объем a_1 множества TG. Имеем

$$a_1 = \int\limits_G J dx_1 \ldots dx_n. \tag{1.42}$$

Из определения J (равенство (1.36)), равенства (1.40) и неравенства (1.41) следует неравенство

$$J < e^{-\alpha\omega}. \tag{1.43}$$

А отсюда и из (1.42) вытекает неравенство

$$a_1 < e^{-\alpha\omega} \int\limits_G dx_1 \ldots dx_n = e^{-\alpha\omega} a. \tag{1.44}$$

По самому выбору множества G $a < \mu e^{\alpha\omega}$, отсюда и из (1.44) получаем неравенство

$$a_1 < \mu. \tag{1.45}$$

С другой стороны, $\overline{M} \subset TG$; следовательно, по определению лебеговой меры $\mu \leqslant a_1$. Это неравенство противоречит (1.45).

Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 2. Общие теоремы о диссипативных системах

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую вынужденные колебания:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \tag{2.1}$$

где $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор, а вектор-функция $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений системы (2.1) при всех X, t; кроме того, она имеет период ω по t: $F(X, t + \omega) \equiv F(X, t)$.

Обозначим через $X(t, X_0, t_0)$ решение системы (2.1) с начальными данными $X = X_0$ при $t = t_0$, т. е. $X(t_0, X_0, t_0) = X_0$.

В практике весьма часто встречаются системы, у которых из-за естественной диссипации каждое решение по истечении достаточно большого промежутка времени попадает в некоторую фиксированную область и в ней остается при дальнейшем возрастании времени. Такие системы часто называют [10, 11] диссипативными. Определим точно это понятие.

Определение 2.1. Будем называть систему (2.1) диссипативной или D-системой, если существует такое $R > 0$, что

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \|X(t, X_0, t_0)\| < R \tag{2.2}$$

при любых X_0, t_0. Мы считаем, как обычно, что

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Из самого определения следует, что все решения $X(t, X_0, t_0)$ D-системы продолжимы на все моменты времени $t \geqslant t_0$.

В этом и двух следующих параграфах мы будем изучать системы, принадлежащие к классу D-систем.

1. Укажем сначала одно характеристическое свойство D-системы.

Теорема 2.1. Для того чтобы система (2.1) *была диссипативной, необходимо и достаточно существование такого $r > 0$, чтобы по любым X_0, t_0 можно было указать $\tau(X_0, t_0) > t_0$ такое, что*

$$\|X(\tau, X_0, t_0)\| < r, \tag{2.3}$$

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем достаточность.

Предположим, вопреки утверждению теоремы, что из условия (2.3) не следует соотношение (2.2), т. е. предположим, что существуют такие последовательности $\overline{X}_0^{(1)}$, $\overline{X}_0^{(2)}, \ldots, t_0^{(1)}, t_0^{(2)}, \ldots$ и $R_1, R_2, \ldots \to +\infty$, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\| X\left(t, \overline{X}_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right) \right\| > R_k. \tag{2.4}$$

При этом мы можем и будем считать, что $R_k > r$. Но по условию (2.3) существуют такие $\tau_k > t_0^{(k)}$, что выполняются неравенства

$$\left\| X\left(\tau_k, \overline{X}_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right) \right\| < r. \tag{2.5}$$

Из (2.4) вытекает существование последовательности $\overline{t}_k > \tau_k$, обладающей свойством

$$\left\| X\left(\overline{t}_k, X_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right) \right\| > R_k.$$

Но тогда по непрерывности решений мы сможем указать такие $\overline{\theta}_k \in [\tau_k, \overline{t}_k]$, что

$$\left\| X\left(\overline{\theta}_k, \overline{X}_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right) \right\| = r \tag{2.6}$$

и при $\overline{\theta}_k < t \leqslant \overline{t}_k$

$$\left\| X\left(t, \overline{X}_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right) \right\| > r. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.6) и (2.7) и из ω-периодичности вектор-функции $F(X, t)$ следует, что существуют последовательности θ_k, $X_0^{(k)}$, $t_k > \theta_k$ такие, что $0 \leqslant \theta_k \leqslant \omega$, $\left\| X_0^{(k)} \right\| = r$ и

$$\left\| X\left(t_k, X_0^{(k)}, \theta_k\right) \right\| > R_k \tag{2.8}$$

и при $\theta_k < t \leqslant t_k$ выполняются неравенства

$$\left\| X\left(t, X_0^{(k)}, \theta_k\right) \right\| > r. \tag{2.9}$$

Так как последовательности θ_k и $X_0^{(k)}$ ограничены, то мы можем считать их сходящимися (в противном случае мы выбрали бы нужные подпоследовательности). Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0, \quad \lim_{k\to\infty} X_0^{(k)} = X_0'. \tag{2.10}$$

Рассмотрим решение $X(t, X_0', \theta_0)$ системы (2.1). Из условия (2.3) следует существование $\tau_0 > \theta_0$, удовлетворяющее неравенству

$$\|X(\tau_0, X_0', \theta_0)\| < r. \tag{2.11}$$

Пусть $M > r$ таково, что на промежутке $\theta_0 \leqslant t \leqslant \tau_0$ выполняется неравенство

$$\|X(t, X_0', \theta_0)\| < M. \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.10) и из равенства $\lim\limits_{k \to \infty} R_k = \infty$ тогда следует, что при $k > k_0$, где натуральное число k_0 достаточно велико, $\theta_k < \tau_0, \|X(\tau_0, X_0^{(k)}, \theta_k)\| < r, \|X(t, X_0^{(k)}, \theta_k)\| < M$ при $\theta_k \leqslant t \leqslant \tau_0$, $R_k > M$. Это противоречит неравенствам (2.8) и (2.9). Полученное противоречие и доказывает, что из условия (2.3) следует соотношение (2.2).

Теорема доказана.

2. Рассмотрим преобразование T, введенное в конце предыдущего параграфа. В случае диссипативной системы это преобразование обладает тем свойством, что любой шар с центром в начале и достаточно большим радиусом переходит в себя при применении к нему достаточно высокой степени преобразования T. Докажем это утверждение.

T_2 ?

ретракция

Теорема 2.2. Пусть система (2.1) *диссипативна. Тогда существует такой шар* $H\{\|X\| < h\}$, *что, каков бы ни был шар* $A\{\|X\| < a\}$, *найдется такое натуральное* $k(a)$, *что при* $k \geqslant k(a)$

$$T^k A \subset H. \tag{2.13}$$

Доказательство. Покажем, что существует такое h, что если $\|X\| \leqslant R$, где R — величина, фигурирующая в определении 2.1 диссипативности системы, то

$$\|T^k X\| < h \tag{2.14}$$

при всех целых неотрицательных k. Допустим, напротив, что это не так. Тогда мы должны предположить существование последовательностей X_l, h_l и k_l таких, что

$$\|X_l\| \leqslant R, \quad h_l > R, \quad \lim_{l \to \infty} h_l = \infty,$$

$$\|T^{k_l} X_l\| > h_l \tag{2.15}$$

и

$$\|T^k X_l\| > R \text{ при } 0 < k \leqslant k_l. \tag{2.16}$$

Так как последовательность X_l ограничена, то мы можем считать ее сходящейся (в противном случае мы перешли бы к соответствующей последовательности).

Пусть

$$\lim_{l\to\infty} X_l = X_0.$$

Из соотношения (2.2) по смыслу преобразования T следует, что существует натуральное число l и положительная величина M такие, что

$$\|T^l X_0\| < R,$$

$$\|T^k X_0\| < M \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant l.$$

Тогда найдется такое l_0, что при $l \geqslant l_0$ $h_l > M$,

$$\|T^l X_l\| < R, \tag{2.17}$$

$$\|T^k X_l\| < M < h_l \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant l. \tag{2.18}$$

Это противоречит соотношениям (2.15) и (2.16), что и доказывает существование числа h со свойством (2.14).

Покажем, что число h — требуемое теоремой. Возьмем произвольную точку $X' \in A$. Из (2.2) следует, что существует такое натуральное k, что $\|T^k X'\| < R$. Но тогда и для всех X, для которых $\|X - X'\|$ достаточно мало, имеем $\|T^k X\| < R$.

По лемме Бореля о покрытиях тогда существует такое $k(a)$, что для любого $X \in A$ можно указать $m \leqslant k(a)$, обладающее свойством $\|T^m X\| < R$. Но тогда из неравенства (2.14) следует, что при всех $k \geqslant m$ выполняется соотношение $\|T^k X\| < h$. Так как $k(a) \geqslant m$, то окажется, что из $X \in A$ и $k > k(a)$ вытекает $\|T^k X\| < h$. Это и доказывает соотношение (2.13).

Следствие 2.1. Если система (2.1) диссипативна, то она допускает хотя бы одно периодическое решение.

Действительно, возьмем в качестве шара A, фигурирующего в теореме 2.2, шар H. Из соотношения (2.13) следует, что $T^{k(h)}\overline{H} \subset \overline{H}$, где под $\overline{H}$ понимается замыкание шара H. Отсюда по известной теореме Брауэра следует, что в шаре H имеется неподвижная точка X_0 преобразования $T^{k(h)}$. Но тогда ясно, что решение $X(t, X_0, 0)$ имеет период, равный $\omega k(h)$.

3) Выясним некоторые дальнейшие свойства D-систем. Рассмотрим произвольный шар $A\{\|X\|<a\}$, содержащий в себе замкнутый шар $\bar{H}$ (см. теорему 2.2). По теореме 2.2 будем иметь

$$T^{k(a)}\bar{A}\subset\bar{H}\subset A. \tag{2.19}$$

Подвергнем множества, составляющие соотношение (2.19), преобразованию $T^{lk(a)}$, где l — произвольное целое неотрицательное число; тогда получим

$$T^{(l+1)k(a)}\bar{A}\subset T^{lk(a)}A \tag{2.20}$$

при любом целом неотрицательном l.

Введем в рассмотрение непустое множество $I=\prod\limits_{l=0}^{\infty}T^{lk(a)}A$.

Нетрудно видеть, что множество это замкнуто и ограничено. Покажем, что оно инвариантно относительно преобразования T. Из соотношения (2.20) следует

$$\begin{gathered}T^{(l+1)(k(a)+1)k(a)}A\subset T^{l(k(a)+1)k(a)+k(a)k(a)}A\subset\\ \subset T^{l(k(a)+1)k(a)+(k(a)-1)k(a)}A\subset\ldots\subset T^{l(k(a)+1)k(a)}A.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Отсюда и из определения множества I вытекает равенство

$$I=\prod_{l=0}^{\infty}T^{l(k(a)+1)k(a)}A. \tag{2.22}$$

Но согласно теореме 2.2 имеем

$$T^{k(a)+1}\bar{A}\subset A$$

и, значит,

$$T^{(l+1)(k(a)+1)}\bar{A}\subset T^{l(k(a)+1)}A$$

при любом целом неотрицательном l. Отсюда получаем

$$\begin{gathered}T^{(l+1)(k(a)+1)k(a)}A\subset T^{l(k(a)+1)k(a)+(k(a)-1)(k(a)+1)}A\subset\ldots\\ \ldots\subset T^{l(k(a)+1)k(a)}A.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Соотношения (2.22) и (2.23) дают

$$\prod_{l=0}^{\infty}T^{l(k(a)+1)}A=\prod_{l=0}^{\infty}T^{l(k(a)+1)k(a)}A=I. \tag{2.24}$$

Легко убедиться в справедливости равенства

$$T^{k(a)}\prod_{l=0}^{\infty} T^{lk(a)}A=\prod_{l=1}^{\infty} T^{lk(a)}A,$$

а это означает, что

$$T^{k(a)}I=I.$$

Аналогично из соотношения (2.24) получаем $T^{k(a)+1}I=I$; следовательно,

$$T^{k(a)+1}I=T^{k(a)}I.$$

Подвергая множества, стоящие в этом равенстве, преобразованию $T^{-k(a)}$, получаем

$$TI=I. \tag{2.25}$$

Таким образом, множество I инвариантно относительно преобразования T.

Покажем теперь, что множество I не зависит от выбора шара A. Пусть $k(h)$ таково, что при $k\geqslant k(h)$ оказывается $T^kH\subset H$. Докажем, что тогда

$$I=\prod_{m=0}^{\infty} T^{mk(h)}H. \tag{2.26}$$

Так как $H\subset A$, то при любом натуральном j будем иметь

$$T^{jk(a)k(h)}H\subset T^{jk(a)k(h)}A.$$

Отсюда и из определения I следует, что

$$\prod_{m=0}^{\infty} T^{mk(h)}H\subset I. \tag{2.27}$$

С другой стороны, из определения числа $k(a)$ вытекает, что $T^{k(a)}A\subset H$, и потому при любом натуральном j окажется

$$T^{jk(a)k(h)+k(a)}A\subset T^{jk(a)k(h)}H.$$

Это соотношение влечет за собой следующее:

$$I\subset\prod_{m=0}^{\infty} T^{mk(h)}A. \tag{2.28}$$

Соотношения (2.27) и (2.28) доказывают (2.26). Таким образом, каков бы ни был шар A, всегда окажется справедливым соотношение (2.26). Это и значит, что множество I не зависит от выбора шара A.

Совершенно аналогично можно доказать, что, какова бы ни была ограниченная область B, содержащая шар H, справедливо соотношение

$$\prod_{l=0}^{\infty} T^{lk} B = I, \tag{2.29}$$

где k — некоторое натуральное число.

Пусть M и N — два точечных множества. Будем через $\rho(M, N)$ обозначать расстояние между ними.

Покажем, что, какова бы ни была точка X_0 гиперплоскости $t=0$, всегда окажется

$$T^m X_0 \to I \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{2.30}$$

Рассмотрим шар $A\{\|X\| < a\}$, такой, что $a > h$ и $X_0 \in A$. Тогда по определению I

$$\prod_{l=0}^{\infty} T^{lk(a)} A = I.$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Так как преобразование T непрерывно, то по этому ε найдется такое $\delta > 0$, что если $\rho(X, I) < \delta$, то при любых целых $k \in [0, k(a)]$ окажется $\rho(T^k X, I) < \varepsilon$. Пусть M — точечное множество, обозначим через $U(M, \delta)$ δ-окрестность множества M, т. е. множество тех точек, для которых имеет место неравенство $\rho(M, X) < \delta$. По определению I найдется l_0 такое, что при $l \geqslant l_0$ $T^{lk(a)} A \subset U(I, \delta)$. Но тогда при $l \geqslant l_0$ будет, очевидно, и $T^{lk(a)} X_0 \in U(I, \delta)$. По выбору δ тогда окажется, что при $lk(a) \leqslant j \leqslant (l+1)k(a)$ $T^j X_0 \in U(I, \varepsilon)$. Так как по любому $j > l_0 k(a)$ можно указать такое $l \geqslant l_0$, что $lk(a) \leqslant j \leqslant (l+1)k(a)$, то, следовательно, при всех $j > l_0 k(a)$ будет выполняться неравенство

$$\rho(T^j X_0, I) < \varepsilon,$$

которое и доказывает соотношение (2.30).

Пусть теперь $X_0 \in I$. Рассмотрим решение $X(t, X_0, 0)$ системы (2.1), проходящее при $t=0$ через точку $X = X_0 \in I$. Так как множество I инвариантно относительно преобразования T, то ясно, что решение это продолжимо на все моменты времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Введем множество всех решений $X(t, X_0, 0)$ при $X_0 \in I$. Обозначим через S множество точек пространства X, t, заполняемое этими решениями.

Ясно, что множество S ограничено и замкнуто. Это множество обладает еще рядом замечательных свойств. Для того чтобы сформулировать эти свойства, введем следующие определения.

Определение 2.2. Будем говорить, что непустое множество M $(n+1)$-мерного пространства X, t Ω-периодично, если из соотношения $(X, t) \in M$ следует соотношение $(X, t+l\Omega) \in M$ при любом целом l.

Определение 2.3. Будем говорить, что непустое множество M $(n+1)$-мерного пространства X, t инвариантно, если оно состоит из целых интегральных кривых системы (2.1), т. е. из соотношения $(X_0, t_0) \in M$ следует $(X(t, X_0, t_0), t) \in M$ при всех тех t, при которых решение $X(t, X_0, t_0)$ существует.

Обозначим через M_t пересечение множества M с соответствующей гиперплоскостью пространства X, t.

Определение 2.4. Инвариантное множество M называется устойчивым, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что если $\rho(X_0, M_{t_0}) < \delta$, то $\rho(X(t, X_0, t_0), M_t) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 2.5. Инвариантное множество M называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и если существует такое δ, что из соотношения $\rho(X_0, M_{t_0}) < \delta$ следует соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \rho(X(t, X_0, t_0), M_t) = 0. \tag{2.31}$$

Определение 2.6. Инвариантное множество M называется устойчивым в целом, если оно устойчиво и для всякого решения системы (2.1) выполняется соотношение (2.31).

Отметим, что определение устойчивости инвариантных множеств динамических систем было дано Барбашиным [12].

Нетрудно видеть, что множество S ω-периодично и инвариантно. Докажем, что оно устойчиво в целом.

Теорема 2.3. Множество S устойчиво в целом.

Доказательство. Докажем сначала, что множество S устойчиво. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По нему отыщется $\delta_1 > 0$, такое, что если $\rho(X_0, S_{t_0}) < \delta_1$, то $\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < \varepsilon$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + k(h)\omega$, где $k(h)$ — число, фигурирующее в теореме 2.2. Такое δ_1 существует в силу теоремы об интегральной непрерывности, ω-периодичности функции $F(X, t)$ и множества S. По найденному δ_1 в силу определения множества S мы сможем указать такое l_1, что при $l \geqslant l_1$ $T^{lk(h)}\overline{H} \subset U(S_0, \delta_1)$, где по определению $S_0 = I$. Обозначим через Γ границу области $T^{l_1k(h)}H$. Так как $I \subset H$, то ясно, что множества Γ и I не пересекаются. Пусть d — расстояние между ними. По этому d можно указать такое δ, что если $\rho(X_0, S_{t_0}) < \delta$, то $\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < d$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \omega$. Это δ и будет искомым. Действительно, рассмотрим произвольную точку X_0, t_0, но такую, что $\rho(X_0, S_{t_0}) < \delta$. Тогда по выбору δ решение $X(t, X_0, t_0)$ пересекает ближайшую к $t = t_0$ гиперплоскость вида $t = m$ (m — целое, такое, что $m - 1 \leqslant t_0 \leqslant m$) в точке области $T^{l_k k(h)}H$. Поэтому при $t = m + jk(h)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ окажется $X(t, X_0, t_0) \in T^{l_1k(h)}H \subset U(S_t, \delta_1)$. А тогда по самому выбору δ_1 будем иметь $\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$. Этим доказана устойчивость множества S. Соотношение же (2.31) легко выводится из (2.30) с помощью теоремы об интегральной непрерывности.

Теорема доказана.

4. Отметим еще одно важное для дальнейшего свойство D-системы. Будем по-прежнему предполагать, что система (2.1) диссипативна. Выберем произвольное число $g \geqslant h$ (число h фигурирует в формулировке теоремы 2.2) и рассмотрим цилиндр $G\{\|X\| \leqslant g,\ 0 \leqslant t \leqslant \omega\}$. Будем изучать все решения $X(t, X_0, t_0)$, проходящие через G. На промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant \omega$ эти решения равномерно ограничены. Если предположить обратное, т. е. если считать, что существуют последовательности $X_0^{(l)}$, $t_0^{(l)}$, t_l, такие, что $\|X_0^{(l)}\| \leqslant g$, $0 \leqslant t_0^{(l)} \leqslant \omega$, $t_0^{(l)} \leqslant t_l \leqslant \omega$,

$$\|X(t_l, X_0^{(l)}, t_0^{(l)})\| \geqslant g_l > g,\quad g_l \underset{l \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

то окажется, что через точку $\overline{X}_0$, $\overline{t}_0$, предельную для последовательности $X_0^{(l)}$, $t_0^{(l)}$, проходит решение, не продолжимое при $\overline{t}_0 \leqslant t \leqslant \omega$. Это невозможно по определению D-системы. Таким образом, доказано существование такого $c > g$, что

$\|X(t, X_0, t_0)\| < c$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \omega$, если только $\|X_0\| \leqslant g$, а $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$.

Возьмем теперь произвольное число $a > c$ и обозначим через $\Omega(t)$ множество точек $\{X(t, X_0, t_0), t\}$ при $\|X_0\| \leqslant a$, $t \geqslant t_0$, $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$.

Определим при $t \geqslant \omega$ функцию $\alpha_1(t)$ следующим образом. Пусть $\alpha_1(t)$ такова, что

$$\Omega(t) \subset U(S_t, \alpha_1(t)), \quad \Omega(t) \not\subset U(S_t, \alpha_1(t) - \varepsilon)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Так как $I \subset H$ по определению I, то из выбора числа c следует, что S_t лежит целиком в цилиндре $\|X\| < c$. Поэтому ясно, что множество $\Omega(t)$ содержит точки, не принадлежащие множеству S_t. А это доказывает, что $\alpha_1(t) > 0$ при $t \geqslant \omega$.

Покажем, что

$$\lim_{t \to \infty} \alpha_1(t) = 0. \tag{2.32}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По этому ε в силу теоремы об интегральной непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что если $\rho(X_0, S_{t_0}) < \delta$, то $\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + k(a)\omega$, где $k(a)$ — число из теоремы 2.2. По определению I найдется такое l_1, что при $l \geqslant l_1$ $T^{lk(a)}\bar{A} \subset U(I, \delta)$, где под A понимается шар $\|X\| < a$. Это значит, что при $t = lk(a)\omega$, где $l \geqslant l_1$, $\Omega(t) \subset U(S_t, \delta)$. Отсюда и из выбора δ следует, что при всех $t \geqslant l_1 k(a)$ $\Omega(t) \subset U(S_t, \delta)$. Это и доказывает соотношение (2.32).

Из определения функции $\alpha_1(t)$ и множества $\Omega(t)$ следует, что если $\|X_0\| \leqslant a$ и $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$, то

$$\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < \alpha_1(t) \tag{2.33}$$

при $t \geqslant \omega$.

Заметим, что из рассуждений, проведенных при доказательстве существования числа c, следует, что множество $\Omega(t)$ ограничено. Введем функцию $\alpha(t)$ следующим образом: $\alpha(t)$ задана и непрерывно дифференцируема при $t > 0$, $\alpha'(t) < 0$ при $t > 0$, $|\alpha'(t)| < \frac{1}{2}$ при достаточно больших t, $\alpha(t) > \alpha_1(t)$ при $t \geqslant \omega$, $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\alpha(t) \to \infty$ при $t \to 0$, при $0 \leqslant t_0 < \omega$ и $t_0 < t$

$$\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) < \alpha(t), \tag{2.34}$$

если $\|X_0\| \leqslant a$.

Из (2.33) следует, что тогда (2.34) выполняется при всех $t_0 \leqslant t < +\infty$, если $0 \leqslant t_0 \leqslant \omega$ и $\|X_0\| \leqslant a$.

Рассмотрим теперь область вида $c < \|X\| < a$, $0 < t < \omega$. Обозначим эту область через L. Покажем, что существует функция $\beta(t)$ со следующими свойствами: $\beta(t)$ задана и непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$, $\beta'(t) < 0$ при $t \geqslant 0$ и

$$\rho(X(t, X_0, t_0), S_t) > \beta(t) \text{ при } t \geqslant t_0, \tag{2.35}$$

если $(X_0, t_0) \in \bar{L}$.

Как было показано выше, S_t лежит внутри шара $\|X\| < c$ при всяком t. Поэтому замкнутая область $\bar{L}$ и множество S не пересекаются

Пусть $\Phi(t)$ есть множество точек вида $X(t, X_0, t_0)$ при $(X_0, t_0) \in \bar{L}$ и $t \geqslant t_0$. Так как множество S инвариантно и не пересекается с $\bar{L}$, то ясно, что S_t не пересекается с $\Phi(t)$. Но множества S_t и $\Phi(t)$ замкнуты, поэтому $\rho(\Phi(t), S_t) > 0$. Нетрудно указать функцию $\beta(t)$, определенную, непрерывно дифференцируемую при $t \geqslant 0$ и подчиняющуюся неравенствам $\beta'(t) < 0$ и $0 < \beta(t) < \rho(\Phi(t), S_t)$. Тогда ясно, что функция $\beta(t)$ и будет искомой.

Таким образом, мы доказали существование гладких функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ таких, что выполняются неравенства (2.34) и (2.35).

5. Сформулируем теперь предложение, позволяющее в ряде случаев определить, является ли данная система диссипативной.

Теорема 2.4. *Для того чтобы система* (2.1) *была диссипативной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

I. *Все решения* $X(t, X_0, t_0)$ *системы* (2.1) *продолжимы при* $t \geqslant t_0$.

II. *Существует непрерывная функция* $v(X)$ *со следующими свойствами:*

1) $v(X)$ *определена и непрерывна при* $\|X\| \geqslant a$, *где* a — *некоторое положительное число;*

2) $v(X) > 0$ *при* $\|X\| \geqslant a$;

3) $v(X) \to \infty$ *при* $\|X\| \to \infty$;

4) *если* X *таково, что* $\|X\| > a$, $\|TX\| > a$, *то* $v(TX) < v(X)$.

Доказательство. Достаточность. Обозначим, как и раньше, через A шар $\|X\| < a$, а через $\bar{A}$ его замыкание. Рассмотрим множество $T\bar{A}+\bar{A}-A$. Множество это замкнуто. Пусть $l=\max\limits_{X\in T\bar{A}+\bar{A}-A} v(X)$. Так как $v(X)\to\infty$ при $\|X\|\to\infty$ по условию, то существует такое $b>a$, что при $\|X\|\geqslant b$ $v(X)\geqslant 2l$. Возьмем теперь произвольную точку X_0 и покажем, что существует такое k_0, что при $k>k_0$ $\|T^kX_0\|<b$.

Пусть сначала X_0 таково, что либо $\|X_0\|<a$, либо $v(X_0)<l$. Тогда возможно одно из двух: либо $\|TX_0\|<a$, либо $TX_0\in T\bar{A}$, и, следовательно, $v(TX_0)\leqslant l$. Рассматривая теперь TX_0 опять как произвольную точку, мы убедимся в том, что при всех $k\geqslant 0$ окажется одно из двух: либо $\|T^kX_0\|<a$, либо $v(T^kX_0)\leqslant l$. В обоих этих случаях будет выполняться неравенство $\|T^kX_0\|<b$.

Пусть теперь X_0 таково, что $v(X_0)=v_0>l$. Пусть G_1 — множество тех точек гиперплоскости $t=0$, в которых выполняется неравенство $v(X)<v_0$. Положим $G=G_1+A$. Покажем, что существует k_0 такое, что при $k\geqslant k_0$ $\|T^kX_0\|<b$. Допустим, напротив, что это не так. Рассмотрим последовательность точек T^kX_0. Из предыдущих рассуждений следует, что $\|T^kX_0\|>a$ и $v(T^kX_0)>l$, ибо в противном случае, согласно предыдущему абзацу, оказалось бы $\|T^kX_0\|<b$ при всех достаточно больших k. По условию теоремы последовательность $v(T^kX_0)$ убывающая. Поэтому существует $\bar{v}=\lim\limits_{k\to\infty} v(T^kX_0)$. Кроме того, из соотношения $v(X)\to\infty$ при $\|X\|\to\infty$ следует, что множество $\bar{G}$ ограничено, а $T^kX_0\in\bar{G}$ при всех $k\geqslant 0$. Следовательно, T^kX_0 имеет непустое предельное множество P. Ясно, что если $\bar{X}\in P$, то $v(\bar{X})=\bar{v}$. Но тогда $\bar{v}\geqslant 2l$, ибо в противном случае оказалось бы, что множество P лежит в шаре $\|X\|<b$, что повлекло бы за собой соотношение $\|T^kX_0\|<b$ при достаточно больших k. Возьмем какую-нибудь точку $\bar{X}\in P$. По условию теоремы имеем $v(T\bar{X})<v(\bar{X})=\bar{v}$. А тогда ясно, что существует такое k, что $v(T^kX_0)<\bar{v}$, что невозможно по определению $\bar{v}$. Полученное противоречие и доказывает, что при достаточно больших k $\|T^kX_0\|<b$.

Отсюда и из теоремы 2.1 следует достаточность условий теоремы.

Докажем необходимость. Пусть система (2.1) диссипативна. Тогда, как уже отмечалось, любое ее решение $X(t, X_0, t_0)$ продолжимо при $t \geqslant t_0$.

Рассмотрим шар H, фигурирующий в теореме 2.2, и множество $I = \prod_{l=0}^{\infty} T^{lk(h)} H$. Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, определенную в начале предыдущего пункта. Из неравенства (2.34) следует неравенство

$$\rho(T^k X, I) < \alpha(k) \tag{2.36}$$

при $X \in H$ и $k > 0$.

Обратим функцию $\alpha = \alpha(t)$, получим функцию $t = t(\alpha)$; $t(\alpha)$ определена и непрерывно дифференцируема при $0 < \alpha < +\infty$; при таких α $t'(\alpha) < 0$ и $t(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \infty$, $t(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0$.

Образуем функцию

$$v(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^2(\rho(T^k X, I))} \tag{2.37}$$

при $X \notin I$. Покажем, что ряд, стоящий справа в (2.37), равномерно сходится в любом шаре A вида $\|X\| < a$. Пусть $k(a)$ — натуральное число, такое, что при всех $k \geqslant k(a)$ $TA \subset H$; такое число существует по теореме 2.2. Из неравенства (2.36) следует тогда, что

$$\rho(T^k X, I) < \alpha(k - k(a))$$

при всех $k > k(a)$.

В силу монотонности функции $t(\alpha)$ будем иметь

$$t(\rho(T^k X, I)) > t(\alpha(k - k(a))) = k - k(a)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{t^2(\rho(T^k X, I))} < \frac{1}{[k - k(a)]^2} \tag{2.38}$$

при $X \in A$ и $k > k(a)$.

Это показывает, что ряд, определяющий функцию $v(X)$, сходится равномерно в A. Отсюда следует непрерывность функции $v(X)$ при $\|X\| > h$. Ясно далее, что при $\|X\| > h$ $v(X) > 0$.

Так как $\rho(X, I) \to \infty$ при $\|X\| \to \infty$, то $t(\rho(X, I)) \to 0$ при $\|X\| \to \infty$ и, следовательно, $v(X) \to \infty$ при $\|X\| \to \infty$.

Для того чтобы убедиться в справедливости теоремы, нам осталось лишь доказать неравенство $v(TX) < v(X)$. Имеем

$$v(TX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^2(\rho(T^{k+1}X, I))} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2(\rho(t^kX, I))} =$$

$$= v(X) - \frac{1}{t^2(\rho(X, I))};$$

так как $\frac{1}{t^2(\rho(X, I))}$ положительно при $X \notin I$, то этим и доказано неравенство $v(TX) < v(X)$.

Теорема доказана.

6. Часто оказывается возможным построить гладкую функцию v, зависящую не только от X, но и от t, и убывающую вдоль всех решений, расположенных в окрестности бесконечности. В таких случаях оказывается удобным воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 2.5. *Предположим, что правые части системы* (2.1) *таковы, что существует функция* $v(X, t)$, *непрерывно дифференцируемая при* $\|X\| > a$ (a — *некоторое число*) *по всем своим аргументам и обладающая следующими свойствами:*

1) $v(X, t+\omega) = v(X, t)$;

2) $v(X, t) > 0$ *при* $\|X\| > a$;

3) $v(X, t) \to \infty$ *при* $\|X\| \to \infty$ *равномерно по* $t \in [0, \omega]$;

4) $\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i < 0$ *при* $\|X\| > a$.

Тогда система (2.1) *диссипативна.*

Доказательство. Рассмотрим решение $X(t, X_0, t_0)$ с достаточно большим $\|X_0\|$. В силу условия 4) теоремы это решение при всех $t \geqslant t_0$ лежит в множестве $v \leqslant v(X_0)$, а по условию 3) множество это ограничено. Следовательно, все решения системы (2.1) продолжимы при $t \geqslant t_0$. Так как по условию 4) функция v убывает вдоль всех решений системы (2.1), то нетрудно видеть, что функция $v(X, 0)$ удовлетворяет условию II предыдущей теоремы, ссылка на которую и завершает доказательство.

Можно указать и некоторые другие условия диссипативности, основанные на рассмотрении функций, аналогичных функции $v(X, t)$ из теоремы 2.5 (см., например, работу [13]), но мы на этом не будем останавливаться, так как для дальнейшего достаточно условий теорем 2.4 и 2.5.

Если воспользоваться рассуждениями Курцвейля [14], то теорему 2.5 можно обратить. Здесь мы проведем это обращение при дополнительном предположении о гладкости правых частей изучаемой системы. Предлагаемые рассуждения во многом аналогичны рассуждениям, проведенным Массера при обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. Малкин [15], Массера [16]). $\dot{X} = F(X,t$

Теорема 2.6. *Если правые части системы* (2.1) *непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то условия теоремы* 2.5 *необходимы для диссипативности.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $w(X, t)$ со следующими свойствами: 1) $w(X, t) = w(X, t+\omega)$ при всех X, t; 2) если $(X, t) \in S$, то $w(X, t) = 0$; 3) если $(X, t) \notin S$, то имеют место неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{w(X, t)}{\rho(X, t)} < \frac{3}{2};$$

4) в любой точке $(X, t) \notin S$ функция $w(X, t)$ непрерывно дифференцируема.

Существование такой функции нетрудно установить с помощью теоремы Витни [17].

Рассмотрим опять величины a, c и множество L, введенные в пункте 4 настоящего параграфа, и обозначим $\gamma(t) = \frac{3}{2}\alpha(t)$, $\delta(t) = \frac{1}{2}\beta(t)$. Тогда из неравенств (2.34) и (2.35) по определению $w(X, t)$ получим

$$\delta(t) < w(X(t, X_0, t_0), t) < \gamma(t) \tag{2.39}$$

при $(X_0, t_0) \in L$.

Пусть $X = X(\tau, \Xi, t)$, где $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, есть решение системы $\frac{dX}{d\tau} = F(X, \tau)$ с начальными данными $X = \Xi$

при $\tau = t$. Рассмотрим функцию

$$v(\Xi, t) = \int_t^\infty G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\,d\tau, \tag{2.40}$$

где $G(\eta)$ — непрерывно дифференцируемая при $\eta \geqslant 0$ функция, принимающая при $\eta > 0$ лишь положительные значения и обращающаяся в нуль вместе со своей производной при $\eta = 0$. В дальнейшем мы определим функцию G так, чтобы интеграл, стоящий справа в (2.40), имел смысл и определял непрерывную и непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам функцию, удовлетворяющую всем условиям теоремы 2.5.

Покажем, что функция v периодична по t с периодом, равным ω. Имеем

$$v(\Xi, t+\omega) = \int_{t+\omega}^\infty G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\,d\tau;$$

сделаем в интеграле, стоящем справа, замену $\tau = \theta + \omega$, получим

$$v(\Xi, t+\omega) = \int_t^\infty G(w(X(\theta+\omega, \Xi, t+\omega), \theta+\omega))\,d\theta.$$

Из периодичности правой части системы (2.1) следует

$$X(\theta+\omega, \Xi, t+\omega) = X(\theta, \Xi, t),$$

поэтому можем написать

$$v(\Xi, t+\omega) = \int_t^\infty G(w(X(\theta, \Xi, t), \theta+\omega))\,d\theta,$$

отсюда по периодичности w получаем

$$v(\Xi, t+\omega) = \int_t^\infty G(w(X(\theta, \Xi, t), \theta))\,d\theta = v(\Xi, t).$$

Это и доказывает периодичность функции v.

Определим сначала функцию G при больших η. Из рассуждений, проведенных при введении функции $\alpha(t)$ (см. пункт 4) и из периодичности правых частей системы (2.1), следует, что существует такое b_1, что если $\|\Xi\| < a$, то при $\tau \geqslant t$ $\|X(\tau, \Xi, t)\| < b_1$, $w(X(\tau, \Xi, t), \tau) < b_1$. Выберем величину $b > 2b_1$ так, чтобы при $\|X\| > b$ выполнялись неравенства $\frac{1}{3}\|X\| < w(X, t) < \frac{5}{3}\|X\|$. Определим функцию $G(\eta)$ при $\eta \geqslant b$.

Рассмотрим функцию $N_1(\varphi) = n \max\limits_{\|X\|=\varphi,\ i=1,\,2,\,\ldots,\,n} |f_i(X, t)|$. Введем функцию $N(\varphi)$ со следующими свойствами: 1) $N(\varphi)$ определена и непрерывно дифференцируема при $\varphi \geqslant b$, 2) $N'(\varphi) > 0$ при $\varphi \geqslant b$; 3) $N(\varphi) > N_1(\varphi)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -N(\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi \geqslant b. \tag{2.41}$$

Не нарушая общности, можем считать, что все его решения не продолжимы при $t \to -\infty$ (в противном случае достаточно было бы добавить $-\varphi^2$ к правой части уравнения). Отметим, что если $\varphi(\tau)$ — решение уравнения (2.41), то и $\varphi(\tau + c)$, где c — произвольная постоянная, также его решение.

В дальнейшем через $\varphi(\tau)$ будем обозначать такое решение уравнения (2.41), что $\varphi(\tau_0) = b$, $\varphi(\tau)$ определена при $0 < \tau \leqslant \tau_0$ и $\varphi(\tau) \to \infty$ при $\tau \to +0$. Функция $\varphi(\tau)$ допускает обращение $\tau = \tau(\varphi)$; $\tau(\varphi)$ есть убывающая функция, заданная при $b \leqslant \varphi < \infty$, $\tau(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to \infty$, $\tau(\varphi) \to \tau_0$ при $\varphi \to b$.

Положим

$$G(\eta) = \frac{1}{\tau(\eta)} \quad \text{при} \quad \eta \geqslant b. \tag{2.42}$$

Покажем, что тогда

$$\int_t^\infty G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\,d\tau \to \infty \quad \text{при} \quad \|\Xi\| \to \infty \tag{2.43}$$

равномерно относительно t. Возьмем произвольное $D > 0$. Положим $\bar{t} = e^{-D + \ln \tau_0}$. Пусть Ξ подчиняется условию $\|\Xi\| > 3\varphi(\bar{t})$. Покажем, что тогда

$$\|X(\tau, \Xi, t)\| > 3\varphi(\tau + \bar{t} - t) \tag{2.44}$$

при $t \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + t - \bar{t}$.

Действительно, имеем

$$\frac{d}{d\tau}\|X(\tau, \Xi, t)\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|X\|} f_k(X(\tau, \Xi, t), \tau). \quad (2.45)$$

Из условия $\|\Xi\| > 3\varphi(\bar{t})$ следует, что неравенство (2.44) выполняется при τ, достаточно близких к t. Предположим, что неравенство (2.44) выполняется не при всех $\tau \in [t, \tau_0 + t - \bar{t}]$. Это значит, что существует $\tau^* \in [t, \tau_0 + t - \bar{t}]$ такое, что

$$\|X(\tau^*, \Xi, t)\| = 3\varphi(\tau^* + \bar{t} - t) \quad (2.46)$$

и неравенство (2.44) выполняется при $t \leqslant \tau < \tau^*$. Но тогда из (2.45) и из определения $N(\varphi)$ получим

$$\frac{d}{d\tau}\|X(\tau^*, \Xi, t)\| \geqslant -n \max_{i=1, 2, \ldots, n} |f_i(X(\tau^*, \Xi, t), \tau^*)| >$$
$$> -3N(\varphi(\tau^* + \bar{t} - t)) = 3\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau^* + \bar{t} - t).$$

А это невозможно, поскольку неравенство (2.44) выполняется при $t \leqslant \tau < \tau^*$. Полученное противоречие и доказывает справедливость неравенства (2.44) при $t \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + t > \bar{t}$.

Так как функция $G(\eta)$ неотрицательна при $\eta \geqslant 0$, то имеем

$$\int_t^{\infty} G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\, d\tau > \int_t^{\tau_0 + t - \bar{t}} G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\, d\tau. \quad (2.47)$$

Из неравенства (2.43) в силу выбора величины b получаем

$$w(X(\tau, \Xi, t), \tau) > \varphi(\tau + \bar{t} - t) \quad (2.48)$$

при $t \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + t - \bar{t}$.

Так как функция $G(\eta)$ при $\eta \geqslant b$ монотонно возрастает, то неравенства (2.47) и (2.48) дают

$$\int_t^{\infty} G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\, d\tau > \int_t^{\tau_0 + t - \bar{t}} G(\varphi(\tau + \bar{t} - t))\, d\tau =$$
$$= \int_t^{\tau_0 + t - \bar{t}} \frac{d\tau}{\tau(\varphi(\tau + \bar{t} - t))},$$

а отсюда по определению функции $\tau(\varphi)$ и величины $\bar{t}$ получаем

$$\int_t^\infty G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\,d\tau > \int_t^{\tau_0+t-\bar{t}} \frac{d\tau}{\tau+\bar{t}-t} = \ln\tau_0 - \ln\bar{t} = D.$$

Это и доказывает соотношение (2.43).

Определим функцию $G(\eta)$ при $0 \leqslant \eta \leqslant b_1$. Найдем производные от v по t и ξ_s, выполняя дифференцирование под знаком интеграла:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_s} = \int_t^\infty G'(w(X(\tau, \Xi, t), \tau)) \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s}\,d\tau, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -G(w(\Xi, t)) + \int_t^\infty G'(w(X(\tau, \Xi, t), \tau)) \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}\,d\tau. \tag{2.50}$$

Пусть точка (Ξ, t) принадлежит замкнутому множеству $\bar{L}$ ($\bar{L}$ — это множество $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $c \leqslant \|\Xi\| \leqslant a$).

Из неравенства (2.39) и из непрерывности производных $\frac{\partial w}{\partial x_k}$, $\frac{\partial x_k}{\partial \xi_s}$, $\frac{\partial x_k}{\partial t}$ следует, что если $(\Xi, t) \in \bar{L}$, то можно указать такую функцию $M(\tau)$, определенную при $\tau \geqslant 0$, что

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s}\right| < M(\tau) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

$$\left|\sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}\right| < M(\tau) \tag{2.51}$$

при $\tau > t$. При этом мы можем и будем считать функцию $M(\tau)$ непрерывной и возрастающей.

Так как функция $\gamma(t)$ убывающая, то она имеет обратную $t = t(\gamma)$. Ясно, что функция $t(\gamma)$ положительна, имеет отрицательную производную, $t(\gamma) \to \infty$ при $\gamma \to 0$, $t(\gamma) \to 0$ при $\gamma \to \infty$.

Положим

$$G(\eta) = \int_0^\eta \frac{e^{-t(\eta)}}{M(t(\eta))}\,d\eta \tag{2.52}$$

при $0 \leqslant \eta \leqslant b_1$. Таким образом, функция $G(\eta)$ определена при $0 \leqslant \eta \leqslant b_1$ и при $\eta \geqslant b$. Определим эту функцию при $b_1 \leqslant \eta \leqslant b$ так, чтобы функция $G(\eta)$ была положительной и непрерывно дифференцируемой при $b_1 \leqslant \eta \leqslant b$. Покажем, что при таком выборе G интегралы, стоящие справа в (2.49) и (2.50), сходятся равномерно при $(\Xi, t) \in \overline{L}$. Имеем

$$\left| \int_t^\infty G'(w) \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s} d\tau \right| =$$
$$= \left| \int_t^\infty \frac{e^{-t(w)}}{M(t(w))} \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s} d\tau \right| < \int_t^\infty \frac{e^{-t(w)}}{M(t(w))} M(\tau)\, d\tau.$$

Так как $M(\tau)$ — возрастающая функция, а $t(\gamma)$ — убывающая, то в силу неравенства (2.39) получаем

$$t(w(X(\tau, \Xi, t), \tau)) > \tau, \qquad M(t(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))) > M(\tau),$$

и, следовательно,

$$\left| \int_t^\infty G'(w) \sum_{k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_k} d\tau \right| < \int_t^\infty e^{-\tau} d\tau \leqslant \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = 1. \quad (2.53)$$

Этим доказывается равномерная сходимость интеграла, стоящего справа в (2.49); аналогично докажется, что интеграл из равенства (2.50) сходится равномерно при $(\Xi, t) \in \overline{L}$. Так как функция $v(\Xi, t)$ периодична, то ясно, что интегралы, стоящие справа в (2.49) и (2.50), сходятся равномерно при $c \leqslant \|\Xi\| \leqslant a$ и всех t.

Возьмем теперь произвольную точку (Ξ, t), предполагая, что $\|\Xi\| \geqslant a$. Покажем, что интегралы, стоящие справа в равенствах (2.49) и (2.50), сходятся равномерно в некоторой окрестности точки (Ξ, t).

Так как функция $v(\Xi, t)$ периодична, то, не нарушая общности, можно считать, что $0 \leqslant t < \omega$. Рассмотрим решение $X(\tau, \Xi, t)$. Так как любое решение диссипативной системы стремится к множеству S при $t \to +\infty$ и S при всех t лежит в цилиндре $\|X\| \leqslant c$, то ясно, что существует такое $\bar{t} > t$, что $c < \|X(\bar{t}, \Xi, t)\| < a$.

Из теоремы об интегральной непрерывности следует, что это же соотношение справедливо и для решений системы

(2.1), начинающихся в достаточной близости к точке (Ξ, t). Положим

$$X(\bar{t}, \Xi, t) = \bar{X} = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\},$$

тогда будем иметь

$$X(\tau, \Xi, t) = X(\tau, \bar{X}, \bar{t}). \tag{2.54}$$

Используя это соотношение, можно написать

$$\int_{t}^{\infty} G'(w) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s} d\tau = \\ = \int_{t}^{\infty} G'(w) \sum_{k,\, l=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_l} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial \xi_s} d\tau. \tag{2.55}$$

Из непрерывности производных от решений по начальным данным следует, что существует постоянная P такая, что

$$\left| \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \xi_s} \right| < P \quad (k, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.56}$$

для всех решений, достаточно близких к $X(\tau, \Xi, t)$.

Так как $c < \|X(\bar{t}, \Xi, t)\| < a$, то из (2.39) следует, что

$$\delta(\tau - \bar{t}) < w(X(\tau, \Xi, t), \tau) < \gamma(\tau - \bar{t}) \tag{2.57}$$

при $\tau > \bar{t}$. Отсюда из (2.51) вытекает, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_l} \right| < M(\tau - \bar{t}) \quad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.58}$$

Используя соотношения (2.55), (2.56) и (2.58), получаем

$$\left| \int_{\bar{t}}^{\infty} G'(w) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_s} d\tau \right| < \int_{\bar{t}}^{\infty} G'(w) \cdot nP \cdot M(\tau - \bar{t}) d\tau = \\ = \int_{\bar{t}}^{\infty} \frac{e^{-t(w)}}{M(t(w))} nPM(\tau - \bar{t})\, d\tau.$$

Отсюда и из (2.57) так же, как и выше, находим

$$\left|\int_{\bar t}^{\infty} G'(w)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_k}\,d\tau\right| < nP\int_{\bar t}^{\infty}\frac{e^{-(\tau-\bar t)}}{M(\tau-\bar t)}M(\tau-\bar t)\,d\tau,$$

откуда и вытекает равномерная сходимость интеграла, стоящего справа в (2.49). Аналогично и для интеграла из (2.50).

Покажем теперь, что интеграл, стоящий справа в равенстве (2.40), сходится равномерно в области $\|\Xi\| \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$. По определению G имеем

$$\int_{t}^{\infty} G(w)\,d\tau = \int_{t}^{\infty} d\tau \int_{0}^{w} \frac{e^{-t(\eta)}}{M(t(\eta))}\,d\eta.$$

Так как $w(X(\tau, \Xi, t), \tau) < \gamma(\tau)$ при $\tau > t$, то можем написать

$$\int_{t}^{\infty} G(w)\,d\tau < \int_{t}^{\infty} d\tau \int_{0}^{\gamma(\tau)} \frac{e^{-t(\eta)}}{M(0)}\,d\eta.$$

Заменяя во внутреннем интеграле переменную интегрирования η переменной $t(\eta)$, будем иметь

$$\int_{t}^{\infty} G(w)\,d\tau < \int_{t}^{\infty} d\tau \int_{\infty}^{\tau} \gamma'(t)\frac{e^{-t}}{M(0)}\,dt.$$

Но по выбору $\alpha(t)$ при достаточно больших t $|\gamma'(t)| < 1$; отсюда и следует равномерная сходимость исследуемого интеграла.

Так как v периодична, то ясно, что интеграл этот сходится равномерно при всех t и при $\|\Xi\| \leqslant a$.

Пусть теперь точка (Ξ, t) такова, что $\|\Xi\| \geqslant a$. Как уже отмечалось, существует такое $\bar t > t$, что $\|X(\bar t, \Xi, t)\| < a$, и соотношение это выполняется для всех решений, начинающихся достаточно близко к точке (Ξ, t). Положим $X(\bar t, \Xi, t) = \bar X$, тогда

$$\int_{t}^{\infty} G(w(X(\tau, \Xi, t)))\,d\tau = \int_{t}^{\bar t} G(w(X(\tau, \Xi, t), \tau))\,d\tau + \\ + \int_{\bar t}^{\infty} G(w(X(\tau, \bar X, \bar t))\,d\tau,$$

Но мы только что доказали, что $\int\limits_{\bar{t}}^{\infty} G(w(X(\tau, \overline{X}, \bar{t}), \tau))d\tau$ сходится равномерно при $\|\overline{X}\| \leqslant a$.

Таким образом, интеграл, стоящий справа в равенстве (2.40), сходится равномерно в окрестности каждой точки (Ξ, t).

Из доказанного следует, что функция $v(\Xi, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам при $\|\Xi\| > c$. Кроме того, она удовлетворяет условиям 1), 2) и 3) теоремы 2.5. Покажем, что она удовлетворяет также и условию 4) этой теоремы. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} f_i = \frac{d}{dt} v(\Xi(t), t),$$

где под $\Xi(t)$ понимается решение системы (2.1) с начальными данными при $t = t_0$ $\Xi = \Xi_0$. Но нетрудно видеть, что

$$X(\tau, \Xi(t, \Xi_0, t_0), t) = X(\tau, \Xi_0, t_0),$$

и поэтому

$$\frac{d}{dt} v(\Xi(t), t) = \frac{d}{dt} \int\limits_{t}^{\infty} G(w(X(\tau, \Xi_0, t_0), \tau)) d\tau = \\ = -G(w(X(t, \Xi_0, t_0), t)) < 0.$$

Это и доказывает выполнение условия 4).

Теорема доказана.

§ 3. Достаточные условия диссипативности для многомерных систем

В этом параграфе мы будем изучать некоторые нелинейные системы с точки зрения их принадлежности к классу D-систем.

1. Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt} = AX + G(X, t) + F(X, t), \tag{3.1}$$

где A — постоянная квадратная матрица с элементами a_{ij} ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), X, G и F — n-мерные векторы с компонентами x_i, g_i, f_i соответственно. Функции G и F будем считать непрерывными, обеспечивающими единственность решений системы (3.1) и периодическими по t с периодом, равным ω. Кроме того, будем предполагать, что при всех X и t выполняются неравенства

$$|f_i(X, t)| < d_0, \quad |g_i(X, t)| < \varkappa_0 \|X\| \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Системы вида (3.1), подчиняющиеся условиям (3.2), называют обычно почти линейными [1]. Такие системы с точки зрения из диссипативности изучали В. В. Немыцкий [18] и П. В. Атрашенок [19]. В дальнейшем изложении мы будем пользоваться рассуждениями П. В. Атрашенка.

2. Пусть дана квадратичная форма переменных $y_1, \ldots, y_n$:

$$Y = \sum_{i, k=1}^{n} b_{ik} y_i y_k, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

Введем обозначения

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots, & b_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1}, & \ldots, & b_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Хорошо известно, что, для того чтобы квадратичная форма Y была определенно-положительна, необходимо и достаточно выполнение неравенств $\Delta_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (критерий Сильвестра).

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Phi = 2\lambda^2 y_1^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} 2\lambda^{2\alpha-1} y_\alpha(-y_{\alpha-1} + \lambda y_\alpha), \tag{3.3}$$

где λ — любое вещественное число, отличное от нуля, и покажем, что она определенно-положительна. Составим определители Сильвестра Δ_k:

$$\Delta_1 = 2\lambda^2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\lambda^2, & -\lambda^3 \\ -\lambda^3, & 2\lambda^4 \end{vmatrix} = 3\lambda^6,$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 2\lambda^2, & -\lambda^3, & 0, \ldots, 0 \\ -\lambda^3, & 2\lambda^4, & -\lambda^5, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, \ldots, 2\lambda^{2k} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель по элементам последнего столбца, получаем рекуррентное соотношение

$$\Delta_k = 2\lambda^{2k}\Delta_{k-1} - \lambda^{4k-2}\Delta_{k-2}. \tag{3.4}$$

Покажем, что

$$\Delta_k = (k+1)\lambda^{(k+1)k}. \tag{3.5}$$

При $k=1$ равенство (3.5), очевидно, имеет место. Предположим, что оно справедливо для $k-1$ и $k-2$, т. е. предположим, что выполняются равенства

$$\Delta_{k-2} = (k-1)\lambda^{(k-1)(k-2)}, \qquad \Delta_{k-1} = k\lambda^{k(k-1)}.$$

Подставим эти равенства в соотношение (3.4), тогда получим

$$\Delta_k = 2\lambda^{2k}\cdot k\lambda^{k(k-1)} - \lambda^{4k-2}(k-1)\lambda^{(k-1)(k-2)} = (k+1)\lambda^{(k+1)k}.$$

Отсюда в силу принципа математической индукции и следует справедливость равенства (3.5) при $k=1, 2, \ldots, n$. Из (3.5) вытекает, что $\Delta_k > 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому квадратичная форма (3.3) определенно-положительна; при достаточно малых μ квадратичная форма

$$\Phi_1 = \Phi - \mu\sum_{i=1}^{n} y_i^2, \tag{3.6}$$

очевидно, также определенно-положительна.

Замечание 3.1. Если $\alpha > 0$ достаточно мало, то в промежутке $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$ определители

$$\Delta_k(\mu) = \begin{vmatrix} 2\lambda^2-\mu, & -\lambda^3, & 0, \ldots, 0 \\ -\lambda^3, & 2\lambda^4-\mu, & -\lambda^5, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, 2\lambda^{2k}-\mu \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

достигают своего наибольшего значения при $\mu = 0$.

Действительно, пусть σ_l — сумма всех главных миноров l-го порядка определителя Δ_k. Все $\sigma_l > 0$, так как они представляют собой суммы произведений определителей вида Δ_k и четных степеней λ. Имеем

$$\Delta_k(\mu) = \Delta_k - \mu\sigma_{k-1} + \mu^2\sigma_{k-2} - \ldots + (-1)^k\mu^k. \tag{3.8}$$

Отсюда и следует, что при достаточно малых положительных μ $\Delta_k(\mu) < \Delta_k$.

Найдем верхнюю границу тех значений μ, при которых квадратичная форма (3.6) определенно-положительна. Составим определители $\Delta_1(\mu), \ldots, \Delta_n(\mu)$ и найдем нижнюю границу l_k вещественных корней уравнения

$$\Delta_k(\mu) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.9}$$

из формулы (3.8) следует, что $l_k > 0$.

Положим

$$m_n = \min\{l_1, \ldots, l_n\}, \tag{3.10}$$

тогда при $\mu < m_n$ выполняются неравенства $\Delta_k(\mu) > 0$, и, следовательно, квадратичная форма (3.6) будет определенно-положительна.

Замечание 3.2. Число m_n можно определить так же, как наименьшее значение формы (3.3) на поверхности сферы $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$.

В самом деле, если m_n — наименьшее значение квадратичной формы (3.3) на поверхности $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$, то

$$\Phi \geqslant m_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2;$$

следовательно,

$$\Phi_1 = \Phi - m_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0,$$

и ясно, что при $\mu < m_n$ форма Φ_1 окажется определенно-положительной.

3. Обозначим через λ_i вещественные, а через $p_j + iq_j$ комплексные собственные числа матрицы A, через k_i и k_j обозначим кратности отвечающих им элементарных делителей матрицы A. Если r и r_1 — число элементарных делителей, отвечающих вещественным и комплексным корням, то

$$\sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{j=1}^{r_1} k_j = n.$$

Систему (3.1) можно привести к следующему каноническому виду:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{dz_{1,i}}{dt}=\lambda_i z_{1,i}+\xi_{1,i}+\eta_{1,i},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dz_{k_i,i}}{dt}=-z_{k_i-1,i}+\lambda_i z_{k_i,i}+\xi_{k_i,i}+\eta_{k_i,i},\\
&\frac{du_{1,j}}{dt}=p_j u_{1,j}-q_j v_{1,j}+\xi_{\nu_j+1,j}+\eta_{\nu_j+1,j},\\
&\frac{dv_{1,j}}{dt}=p_j v_{1,j}+q_j u_{1,j}+\xi_{\rho_j+1,j}+\eta_{\rho_j+1,j},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{du_{k_j,j}}{dt}=p_j v_{k_j,j}-q_j v_{k_j,j}-u_{k_j-1,j}+\xi_{\nu_j+k_j,j}+\eta_{\nu_j+k_j,j},\\
&\frac{dv_{k_j,j}}{dt}=p_j v_{k_j,j}+q_j u_{k_j,j}-v_{k_j-1,j}+\xi_{\rho_j+k_j,j}+\eta_{\rho_j+k_j,j}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.11}
$$

Функции $\xi_{\alpha,\beta}$ суть линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций f_i, а $\eta_{\alpha,\beta}$ — линейные комбинации с такими же коэффициентами от функций g_i. Очевидно, $\xi_{\alpha,\beta}$ и $\eta_{\alpha,\beta}$ удовлетворяют условиям такого же вида, что и функции f_i и g_i соответственно. Поэтому при всех z, u, v и t будем иметь

$$
|\xi_{\alpha,\beta}|<d,\quad |\eta_{\alpha,\beta}|<\varkappa\sqrt{\sum z_\alpha^2+\sum\left(u_\beta^2+v_\beta^2\right)}. \tag{3.12}
$$

Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны.

Следуя Болю [20], образуем функции

$$
Z_i=\sum_{\alpha=1}^{k_i}\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha,i}^2,\quad U_j=\sum_{\beta=1}^{k_j}p_j^{2\beta-1}\left(u_{\beta,j}^2+v_{\beta,j}^2\right) \tag{3.13}
$$

и положим

$$
S=\sum_{j=1}^{r}Z_i+\sum_{j=1}^{r_1}U_j. \tag{3.14}
$$

Функция S представляет собой квадратичную форму с коэффициентами, являющимися нечетными степенями вещественных частей собственных чисел матрицы A. Составим полную производную от S по t, в силу дифференциальных уравнений системы (3.11),

$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{k_i}2\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha, i}\frac{dz_{\alpha, i}}{dt}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}\left(u_{\beta, j}\frac{du_{\beta, j}}{dt}+v_{\beta, j}\frac{dv_{\beta, j}}{dt}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\left\{2\lambda_i z_{1, i}(\lambda_i z_{1, i}+\xi_{1,i}+\eta_{1, i})+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=2}^{k_i}2\lambda^{2\alpha-1}z_{\alpha, i}(-z_{\alpha-1, i}+\lambda_i z_{\alpha, i}+\xi_{\alpha, i}+\eta_{\alpha, i})\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\left\{2p_j u_{1, j}(p_j u_{1, j}-q_j v_{1, j}+\xi_{\nu_j+1, j}+\eta_{\nu_j+1, j})+\right.$$

$$+\sum_{\beta=2}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}u_{\beta, j}(-u_{\beta-1, j}+p_j u_{\beta_j}-$$

$$\left.-q_j v_{\beta, j}+\xi_{\nu_j+\beta, j}+\eta_{\nu_j+\beta, j})\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\left\{2p_j v_{1, j}(p_j v_{1, j}+q_j u_{1, j}+\xi_{\rho_j+1, j}+\eta_{\rho_j+1, j})+\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=2}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}v_{\beta, j}(p_j v_{\beta, j}+q_j u_{\beta, j}-v_{\beta-1, j}+\xi_{\rho_j+\beta, j}+\eta_{\rho_j+\beta, j})\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\left[2\lambda_i^2 z_{1, i}^2+\sum_{\alpha=2}^{k_i}2\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha, i}(-z_{\alpha-1, i}+\lambda_i z_{\alpha, i})\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\left[2p_j^2u_{1,j}^2+\sum_{\beta=2}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}u_{\beta,j}(-u_{\beta-1,j}+p_ju_{\beta,j})\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\left[2p_j^2v_{1,j}^2+\sum_{\beta=1}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}v_{\beta,j}(-v_{\beta-1,j}+p_jv_{\beta,j})\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{k_i}2\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha,i}\xi_{\alpha,i}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}(u_{\beta,j}\xi_{\nu_j+\beta,j}+v_{\beta,j}\xi_{\rho_j+\beta,j})+$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{k_i}2\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha,i}\eta_{\alpha,i}+$$

$$+\sum_{j=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{k_j}2p_j^{2\beta-1}(u_{\beta,j}\eta_{\nu_j+\beta,j}+v_{\beta,j}\eta_{\rho_j+\beta,j}).$$

В каждой из квадратных скобок написанного выражения стоят квадратичные формы того же вида, что и (3.3). Пусть m_{k_i} — числа, удовлетворяющие условиям (3.10); положим

$$m_0=\min_i\{m_{k_i}\}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим линейную форму

$$L=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{k_i}\lambda_i^{2\alpha-1}z_{\alpha,i}+\sum_{j=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{k_j}p_j^{2\beta-1}(u_{\beta,j}+v_{\beta,j}), \tag{3.16}$$

обозначим ее наибольшее значение на поверхности

$$\sum_{\alpha=1}^{k}z_\alpha^2+\sum_{\beta=1}^{l}(u_\beta^2+v_\beta^2)=1$$

через M_0 и положим $\lambda_0 = 2M_0$. В силу нереченства Коши имеем

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{k_i} \lambda_i^{4\alpha-2} + 2 \sum_{j=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{k_j} p_j^{4\beta-2}}. \tag{3.17}$$

Принимая во внимание соотношения (3.12), получим следующую оценку для $\frac{dS}{dt}$:

$$\frac{dS}{dt} \geqslant m_0 \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{k_i} z_{\alpha, i}^2 + \sum_{j=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{k_j} (u_{\beta, j}^2 + v_{\beta, j}^2) \right) -$$
$$- \lambda_0 d \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{k_i} z_{\alpha, i}^2 + \sum_{j=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{k_j} (u_{\beta, j}^2 + v_{\beta, j}^2)} -$$
$$- \lambda_0 \varkappa \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{k_i} z_{\alpha, i}^2 + \sum_{j=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{k_j} (u_{\beta, j}^2 + v_{\beta, j}^2) \right),$$

или, обозначая

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{k_i} z_{\alpha, j}^2 + \sum_{j=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{k_j} (u_{\beta, j}^2 + v_{\beta, j}^2), \tag{3.18}$$

получаем

$$\frac{dS}{dt} \geqslant (m_0 - \lambda_0 \varkappa) \sigma^2 - \lambda_0 d\sigma. \tag{3.19}$$

4. Установленное неравенство позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Если вещественные части собственных чисел матрицы A отрицательны и $\varkappa < \frac{m_0}{\lambda_0}$, где m_0 определяется равенством* (3.15), *а* $\lambda_0 = 2M_0$ — *равенством* (3.17), *то система* (3.1) *диссипативна.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $V = -S$. Из вида этой функции и неравенства (3.19) следует, что функция эта удовлетворяет всем условиям теоремы 2.5, ссылка на которую и доказыват наше утверждение.

Теорема 3.2. *При выполнении условий предыдущей теоремы система* (3.1) *имеет хотя бы одно периоди-*

ческое решение с периодом, равным ω ***(гармоническое колебание).***

Доказательство. Пусть по-прежнему $V = -S$. Тогда из неравенства (3.19) и из доказательства теорем 2.4 и 2.5 легко вывести, что при достаточно большом h множество $V \leqslant h$ переходит в себя при преобразовании T. Но функция V есть определенно-положительная квадратичная форма; следовательно, множество $V \leqslant h$ гомеоморфно замкнутому шару. Отсюда в силу теоремы Брауэра следует, что преобразование T имеет в множестве $V \leqslant h$ неподвижную точку; следовательно, система (3.1) имеет гармонику.

Теорема доказана.

5. Рассмотрим снова систему (2.1). Докажем следующую теорему о диссипативности этой системы.

Теорема 3.3. *Пусть функции* f_i *непрерывно дифференцируемы и* $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant -m < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *пусть, кроме того, функции* $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_n, t)$ *ограничены, тогда система* (2.1) *диссипативна.*

Доказательство. Имеем

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, t) = \int\limits_0^{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t), \tag{3.20}$$

По условию теоремы существует такое $M > 0$, что

$$|f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t)| < M. \tag{3.21}$$

Отсюда и из условия теоремы следует, что существует такое $a > 0$, что при $|x_i| \geqslant a$ выполняется неравенство

$$f_i x_i < -\frac{m}{2} x_i^2. \tag{3.22}$$

Кроме того, из (3.20) и (3.21) вытекает, что при $|x_i| \leqslant a$

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\, x_i < Na, \tag{3.23}$$

где $N > 0$ — некоторое число.

Рассмотрим функцию

$$v = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{3.24}$$

Производная от этой функции по времени, вычисленная в силу дифференциальных уравнений системы (2.1), очевидно, равна

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}2x_if_i(x_1, \ldots, x_n, t). \tag{3.25}$$

Выберем число A столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$mA^2>2nNa. \tag{3.26}$$

Рассмотрим область $\|X\|\geqslant nA$. Так как $\sum_{k=1}^{n}|x_k|\geqslant\|X\|$, то ясно, что в этой области будет выполняться неравенство $\max_{i=1,\ldots,n}|x_i|\geqslant A$. Из неравенств (3.22) и (3.23) нетрудно вывести оценку

$$\frac{dv}{dt}<-mA^2+2nNa.$$

Из этого неравенства в силу (3.26) заключаем, что при $\|X\|\geqslant nA$

$$\frac{dv}{dt}<0. \tag{3.27}$$

Отсюда и из теоремы 2.5 следует доказываемое утверждение.

Из неравенства (3.27) и теоремы Брауэра вытекает утверждение следующей теоремы.

Теорема 3.4. *Если система* (2.1) *удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, то она имеет хотя бы одну гармонику.*

Результаты теорем 3.3 и 3.4 и близкие к ним были получены Кордуняну в работах [21—24]. Манфреди [25], Граффи [26], Кастро [27] и другие получили ряд интересных результатов, относящихся к диссипативности систем дифференциальных уравнений второго порядка. Мы не будем останавливаться на этих результатах, отсылая читателя к оригинальным работам.

В следующих двух параграфах мы будем исследовать диссипативность некоторых конкретных систем второго и третьего порядков, встречающихся в приложениях.

§ 4. О диссипативности некоторых двумерных систем, встречающихся в приложениях

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=p(t). \qquad (4.1)$$

Такое уравнение и различные его обобщения изучались с точки зрения их диссипативности весьма многими авторами. В этом параграфе мы установим лишь несколько достаточных условий диссипативности для уравнения (4.1) и некоторых его обобщений [28].

1. Введем следующие обозначения: $q(t)=\int\limits_0^t p(t)\,dt$, $F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx$ и $y=\frac{dx}{dt}+F(x)-q(t)$. Тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x)+q(t), \quad \frac{dy}{dt}=-q(x).$$

Вместо этой системы рассмотрим более общую:

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x)+Q(x,\ y,\ t), \quad \frac{dy}{dt}=-q(x). \qquad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Пусть функции $F(x)$, $g(x)$ и $Q(x,\ y,\ t)$ непрерывны и удовлетворяют условию единственности решений системы (4.2) при любых начальных данных.*

Пусть, далее, $xg(x)>0$ при $|x|\geqslant 1$ и $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx=\int\limits_0^{-\infty} g(x)\,dx=+\infty$. Пусть, кроме того, существуют такие постоянные $L>H>0$, что $|Q(x,\ y,\ t)|<H$ при всех $x,\ y,\ t$ и $F(x)\operatorname{sign}x>L$ при $|x|\geqslant 1$. Пусть, наконец, $Q(x,\ y,\ t+1)=Q(x,\ y,\ t)$ при всех $x,\ y,\ t$. Тогда система (4.2) диссипативна.

Доказательство. Положим

$$F_m = \max_{|x| \leqslant 1} |F(x)|.$$

Так как интегралы $\int\limits_0^{+\infty} g(x)\,dx$ и $\int\limits_0^{-\infty} g(x)\,dx$ расходятся по условию, то существует такое $\xi > 1$, что

$$(L-H)\int\limits_1^{\xi} g(x)\,dx > 4(F_m+H)\int\limits_{-1}^{+1} |g(x)|\,dx$$

и

$$(L-H)\int\limits_{-1}^{-\xi} g(x)\,dx > 4(F_m+H)\int\limits_{-1}^{+1} |g(x)|\,dx.$$

Введем следующие обозначения:

$$a = \max_{|x| \leqslant \xi} |g(x)|, \quad b = \max_{|x| \leqslant \xi} |F(x)| + H,$$

$$\eta_1 = \frac{4b + \sqrt{4b^2 + 24(1+\xi)a}}{3}.$$

Рассмотрим решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (4.2) с начальными данными $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$. Будем считать, что $|x_0| \leqslant 1$, $y_0 \geqslant \eta_1$.

Из первого уравнения системы (4.2) следует, что x возрастает вдоль любого решения в области $|x| \leqslant \xi$, $y > b$. В этой области зависимость y от x вдоль нашего решения описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y - F(x) + Q(x, y, t)}. \tag{4.3}$$

Из уравнения (4.3) следует, что в области $|x| \leqslant \xi$, $y > b$ имеет место оценка

$$\frac{dy}{dx} > -\frac{a}{y-b}. \tag{4.4}$$

Пусть $Y(x)$ — решение уравнения

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{a}{Y-b} \tag{4.5}$$

с начальными данными $x = x_0$, $Y = y_0$. Из неравенства (4.4) вытекает, что при тех $x \in (x_0, \xi]$, для которых $Y(x) > b$, будет выполняться неравенство $y > Y(x)$.

Найдем функцию $Y(x)$; интегрируя (4.5), получаем

$$\frac{1}{2} Y^2 - bY - \frac{1}{2} y_0^2 + by_0 + a(x - x_0) = 0$$

и, следовательно,

$$Y = b + \sqrt{(y_0 - b)^2 - 2a(x - x_0)}.$$

Так как $|x_0| \leqslant 1$ и $x \leqslant \xi$, то можем написать

$$y \geqslant b + \sqrt{(y_0 - b)^2 - 2a(1 + \xi)} \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \xi. \tag{4.6}$$

Так как η_1 есть корень уравнения

$$\sqrt{(y_0 - b)^2 - 2a(1 + \xi)} = \frac{1}{2} y_0,$$

то из (4.6) выводим неравенство

$$y - b > \frac{1}{2} y_0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \xi. \tag{4.7}$$

Рассмотрим теперь наше решение при изменении x от x_0 до $+1$. Из уравнения (4.3) получаем

$$\frac{dy}{dx} < \frac{a}{y - b}. \tag{4.8}$$

Это неравенство показывает, что при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ вдоль нашего решения выполняется неравенство $y(x) < y_1(x)$, где $y_1(x)$ — решение уравнения

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{a}{y_1 - b} \tag{4.9}$$

с начальными данными при $x = x_0$, $y_1 = y_0$. Но из (4.9) путем интегрирования находим

$$\frac{1}{2} y_1^2 - by_1 - \frac{1}{2} y_0 + by_0 - a(x - x_0) = 0;$$

следовательно,

$$y_1 = b + \sqrt{(y_0 - b)^2 + 2a(x - x_0)}.$$

Так как $|x_0| \leqslant 1$ и $x \leqslant 1$, то при $x_0 \leqslant x \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$y < b + \sqrt{(y_0 - b)^2 + 4a} < y_0 + 2\sqrt{a}.$$

Так как при $1 \leqslant \varkappa \leqslant \xi$ y вдоль нашего решения убывает с ростом времени, то при $x_0 \leqslant x \leqslant \xi$ будет выполняться неравенство

$$y < y_0 + 2\sqrt{a}.$$

Из условия $y_0 > \eta_1$ легко вывести неравенство $y_0 + 2\sqrt{a} + b > 2y_0$; следовательно,

$$y + b < 2y_0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \xi. \tag{4.10}$$

Введем функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \int_0^x g(x)\,dx. \tag{4.11}$$

Производная от этой функции, вычисленная в силу дифференциальных уравнений системы (4.2), как нетрудно проверить, равна

$$\dot{v} = -g(x)[F(x) - Q(x, y, t)]. \tag{4.12}$$

Пусть t_1 — первый после t_0 момент времени, в который на рассматриваемом решении $x = \xi$, т. е. $\varphi(t_1) = \xi$ и $x_0 \leqslant \varphi(t) < \xi$ при $t_0 \leqslant t < t_1$. Покажем, что

$$v(\varphi(t_1), \psi(t_1)) < v(x_0, y_0). \tag{4.13}$$

Разделим равенство (4.12) на первое уравнение (4.2), тогда получим

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g(x)[F(x) - Q(x, y, t)]}{y - F(x) + Q(x, y, t)}. \tag{4.14}$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$v(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = v(x_0, y_0) - \int_{x_0}^{1} \frac{g(x)[F(x) - Q(x, y, t)]}{y - F(x) + Q(x, y, t)}\,dx - \\ - \int_1^{\xi} \frac{g(x)[F(x) - Q(x, y, t)]}{y - F(x) + Q(x, y, t)}\,dx. \tag{4.15}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части этого равенства. В силу (4.7) получаем

$$-\int_{x_0}^{1} \frac{g(x)[F(x) - Q(x, y, t)]}{y - F(x) + Q(x, y, t)}\,dx < \frac{2(F_m + H)}{y_0} \int_{-1}^{+1} |g(x)|\,dx.$$

Из неравенства (4.10) легко выводится следующая оценка:

$$\int_1^{\xi} \frac{g(x)[F(x)-Q(x, y, t)]}{y-F(x)+Q(x, y, t)} dx > \frac{L-H}{2y_0} \int_1^{\xi} g(x)\, dx.$$

Отсюда и из (4.15) получаем неравенство

$$v(\varphi(t_1), \psi(t_1)) < v(x_0, y_0) + \frac{2(F_m+H)}{y_0} \int_{-1}^{+1} |g(x)|\, dx - \frac{L-H}{2y_0} \int_1^{\xi} g(x)\, dx.$$

Из последнего неравенства в силу выбора ξ и вытекает неравенство (4.13).

Аналогично предыдущему докажем, что при убывании t от t_0 x вдоль решения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ убывает до тех пор, пока при $t=t_2$ не окажется $x=-\xi$. При этом через $t=t_2$ обозначается первый такой момент, т. е. $\varphi(t_2)=-\xi$ и $-\xi<\varphi(t)\leqslant x_0$ при $t_2<t\leqslant t_0$. Ясно, кроме того, что на промежутке времени $t_2\leqslant t\leqslant t_0$ будут выполнены неравенства (4.7) и (4.10). Тогда, используя те же рассуждения, докажем, что

$$v(\varphi(t_2), \psi(t_2)) > v(x_0, y_0). \tag{4.16}$$

Пусть теперь $x=\varphi_1(t)$, $y=\psi_1(t)$ — решение с начальными данными $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$ и $|x_0|\leqslant 1$, $y_0<-\eta_1$. Тогда так же, как и выше, докажем, что существуют моменты времени $t_2'<t_0'<t_1'$ такие, что $\varphi_1(t_1')=-\xi$, $\varphi_1(t_2')=\xi$, $-\xi<\varphi(t)<\xi$ при $t_2'<t<t_1'$, на промежутке времени $t_2'\leqslant t\leqslant t_1'$ выполняются неравенства

$$y+b<\frac{1}{2}y_0, \quad y-b>2y_0. \tag{4.17}$$

Эти соотношения так же, как и раньше, позволяют доказать справедливость неравенств

$$v(\varphi_1(t_1'), \psi_1(t_1'))<v(x_0, y_0)<v(\varphi_1(t_2'), \psi_1(t_2')). \tag{4.18}$$

Оценим длину промежутка $[t_0, t_1]$. Из первого уравнения (4.2) следует неравенство

$$\frac{dt}{dx} < \frac{1}{y-b} \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant \xi,$$

а отсюда и из (4.7) получаем

$$\frac{dt}{dx} < \frac{2}{y_0}.$$

Интегрируя это неравенство от $x = x_0$ до $x = \xi$, получаем

$$t_1 - t_0 < \frac{2}{y_0}(\xi - x_0) \leqslant \frac{2}{y_0}(\xi + 1). \tag{4.19}$$

Положим

$$\eta = \max\{\eta_1, \ 4(\xi + 1)\}, \tag{4.20}$$

тогда при $y_0 > \eta$ будем иметь неравенство $t_1 - t_0 < \frac{1}{2}$. Аналогично докажутся и неравенства $t_0 - t_2 < \frac{1}{2}$, $t_1' - t_0 < \frac{1}{2}$ и $t_0 - t_2' < \frac{1}{2}$.

Положим

$$\bar{v} = \frac{1}{2}\eta^2 + \int_{-1}^{+1} |g(x)|\, dx. \tag{4.21}$$

Так как по условию интегралы $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ и $\int_0^{-\infty} g(x)\,dx$ расходятся, то найдется такое $A > 0$, что при $x^2 + y^2 \geqslant A^2$ $v(x, y) > \bar{v}$.

Рассмотрим решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (4.2) с начальными данными $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$ и $x_0^2 + y_0^2 \geqslant A^2$. Докажем неравенство

$$v(\varphi(1), \ \psi(1)) < v(x_0, y_0). \tag{4.22}$$

Будем доказывать неравенство (4.22) от противного. Предположим, что это неравенство не выполняется. Будем считать сначала, что $|x_0| \geqslant 1$, тогда из равенства (4.12) и условий теоремы следует, что $\dot{v}(x_0, y_0) < 0$. Следовательно, $v(\varphi(t), \psi(t))$ убывает в окрестности точки $t = 0$. Так как по предположению неравенство (4.22) не выполняется, то ясно, что существует такое $\tau_0 \in (0, 1]$, что $v(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0)) = v(x_0, y_0)$ и при $0 < t < \tau_0$ выполняется неравенство $v(\varphi(t), \psi(t)) < v(x_0, y_0)$. Из равенства (4.12) следует, что при $|x| \geqslant 1$ $v(x, y) < 0$; поэтому ясно, что $|\varphi(\tau_0)| < 1$. Если $|x_0| < 1$, то положим просто $\tau_0 = 0$.

Покажем, что $\tau_0 < \frac{1}{2}$. Так как $x_0^2 + y_0^2 \geqslant A^2$, то $v(x_0, y_0) > \bar{v}$, и по определению τ_0

$$v(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0)) = v(x_0, y_0) > \bar{v}, \tag{4.23}$$

но $|\varphi(\tau_0)| < 1$, поэтому в силу равенства (4.21) получаем

$$|\psi(\tau_0)| > \eta. \tag{4.24}$$

Отсюда и из предыдущих рассуждений следует, что существует τ^* (это τ^* соответствует моменту t_2 при $\psi(\tau_0) > \eta$ и моменту t_2' при $\psi(\tau_0) < -\eta$), такое, что $\tau^* < \tau_0$ и

$$v(\varphi(\tau^*), \psi(\tau^*)) > v(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0)). \tag{4.25}$$

При этом, как было показано выше, $\tau_0 - \tau^* < \frac{1}{2}$. Это и доказывает, что $\tau_0 < \frac{1}{2}$, ибо если бы было $\tau_0 \geqslant \frac{1}{2}$, то оказалось бы, что $0 < \tau^* < \tau_0$, что в соединении с (4.25) противоречит определению τ_0 как первого после $t = 0$ момента нарушения неравенства $v(\varphi(t), \psi(t)) < v(x_0, y_0)$.

Как было показано выше, существует такое $\tau_1 > \tau_0$ (это τ_1 соответствует моменту t_1, если $\psi(\tau_0) > \eta$ и моменту t_1', если $\psi(\tau_0) < -\eta$), что $\varphi(\tau_1) = \xi$, $\varphi(\tau_0) < \varphi(t) < \xi$ при $\tau_0 < t < \tau_1$ (при $\psi(\tau_0) > \eta$) или $\varphi(\tau_1) = -\xi$, $-\xi < \varphi(t) < \varphi(\tau_0)$ при $\tau_0 < t < \tau_1$ (при $\psi(\tau_0) < -\eta$) и

$$v(\varphi(\tau_1), \psi(\tau_1)) < v(\varphi(\tau_0), \psi(\tau_0)) = v(x_0, y_0). \tag{4.26}$$

Кроме того, было показано, что $\tau_1 - \tau_0 < \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\tau_1 < 1$.

По предположению неравенство (4.22) не выполняется, поэтому существует такое $\bar{\tau} \in (\tau_1, 1]$, что

$$v(\varphi(\bar{\tau}), \psi(\bar{\tau})) = v(x_0, y_0)$$

и при $\tau_1 \leqslant t < \bar{\tau}$ $v(\varphi(t), \psi(t)) < v(x_0, y_0)$; ясно, что $|\varphi(\bar{\tau})| < 1$.

Тогда по доказанному ранее найдется такое $\tau' < \bar{\tau}$, что $\varphi(\tau') = -\xi$, $\xi < \varphi(t) < \varphi(\bar{\tau})$ при $\tau' < t < \bar{\tau}$ (если $\psi(\bar{\tau}) > \eta$) или $\varphi(\tau') = \xi$, $\varphi(\bar{\tau}) < \varphi(t) < \xi$ при $\tau' < t < \bar{\tau}$ (если $\psi(\bar{\tau}) < -\eta$) и

$$v(\varphi(\tau'), \psi(\tau')) > v(\varphi(\bar{\tau}), \psi(\bar{\tau})) = v(x_0, y_0). \qquad (4.27)$$

Из определения момента τ_1 следует, что выполняются неравенства $\tau_1 < \tau' < \bar{\tau} \leqslant 1$. Это противоречит тому, что при $\tau_1 \leqslant t < \bar{\tau}$ $v(\varphi(t), \psi(t)) < v(x_0, y_0)$. Полученное противоречие и доказывает неравенство (4.22).

Проведенные рассуждения показывают, кроме того, что при $\tau_1 \leqslant t \leqslant 1$ $v(\varphi(t), \psi(t)) < v(x_0, y_0)$. Отсюда и из определения v следует, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ограничено, а значит, и продолжимо на все моменты времени от $t = 0$ до $t = 1$.

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 2.4, ссылка на эту теорему и завершает доказательство.

Замечание 4.1. Из проведенных рассуждений следует, что система (4.2) при выполнении условий предыдущей теоремы имеет хотя бы одно периодическое решение с единичным периодом. Действительно, при достаточно больших c множество $v(x, y) \leqslant c$ представляет собой, как легко видеть, замкнутый топологический круг. Так как при преобразовании T этот круг переходит в себя, то из теоремы Брауэра и следует наше утверждение.

2. Рассмотрим уравнение более сложное, чем уравнение (4.1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = R(x, \dot{x}, t). \qquad (4.28)$$

Положим $y = \dot{x} + F(x)$, где, как и раньше, $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$; тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + R(x, y, t). \qquad (4.29)$$

Теорема 4.2. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $R(x, y, t)$ непрерывны и удовлетворяют условию единственности решений системы (4.29) при любых начальных данных, $R(x, y, t+1) = R(x, y, t)$ при всех x, y, t. Предполо-

жим, кроме того, что существуют такие постоянные $L > H > 0$ *и* $K > 0$, *что*

1) $|R(x, y, t)| < H$ *при всех* x, y, t;
2) $g(x)\operatorname{sign} x \geqslant L$ *при* $|x| \geqslant 1$;
3) $f(x) \geqslant K$ *при* $|x| \geqslant 1$.

Тогда система (4.29) *диссипативна.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, y) = y^2 - yF(x) + \frac{1}{2}F^2(x) + 2\int_0^x g(x)\,dx. \quad (4.30)$$

Производная от этой функции, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (4.29), как нетрудно проверить, равна

$$\dot{v} = -[y - F(x)]^2 f(x) - g(x)F(x) + [2y - F(x)]R(x, y, t). \quad (4.31)$$

Покажем, что существует такое $h_1 > 0$, что при $|x| \geqslant h_1$

$$\dot{v}(x, y, t) < 0. \quad (4.32)$$

Будем для определенности считать $x > 0$ (при $x < 0$ доказательство аналогично). При $x \geqslant 1$ и $y \geqslant \frac{1}{2}F(x)$ имеем в силу условий теоремы

$$\dot{v} < -[y - F(x)]^2 K - LF(x) + [2y - F(x)]H.$$

Покажем, что при достаточно больших x уравнение

$$[y - F(x)]^2 K + LF(x) - [2y - F(x)]H = 0$$

не имеет вещественных решений. Вычислим дискриминант D этого уравнения:

$$\frac{1}{4}D = K^2F^2 + 2KHF + H^2 - K^2F^2 - KLF - KHF =$$
$$= KHF + H^2 - KLF = -K(L - H)F(x) + H^2.$$

Так как по условию $f(x) \geqslant K$ при $|x| \geqslant 1$, то ясно, что $\lim F(x) = \infty$ при $x \to \infty$, поэтому из-за $L > H$ при достаточно больших x будем иметь $D < 0$. Это и доказывает, что при достаточно больших x и $y \geqslant \frac{1}{2}F(x)$ $\dot{v} < 0$.

При $x \geqslant 1$ и $y \leqslant \frac{1}{2}F(x)$ будем иметь $\dot{v} < -[y-F(x)]^2 K - LF(x) - [2y - F(x)]H$. Так же, как и выше, покажем, что уравнение

$$[y - F(x)]^2 K + LF(x) + [2y - F(x)]H = 0$$

не имеет вещественных решений при достаточно больших x. Из сказанного следует существование такого $h_1 > 0$, что при $|x| \geqslant h_1$ выполняется неравенство (4.32).

Из самого вида функции $\dot{v}$ вытекает существование такого h_2, что при $|x| \leqslant h_1$ и $|y| \geqslant h_2$

$$\dot{v}(x, y, t) < 0.$$

Следовательно, существует $a > 0$ такое, что при $x^2 + y^2 \geqslant a$ $\dot{v} < 0$.

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 2.5, что и доказывает наше утверждение.

Замечание 4.2. Нетрудно показать, что при выполнении условий предыдущей теоремы система (4.29) имеет хотя бы одно гармоническое колебание.

§ 5. Исследование одного нелинейного уравнения третьего порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение [29, 30]

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = p_1\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t\right). \quad (5.1)$$

Положим $y = ax + \dot{x}$, $z = bx + a\dot{x} + \ddot{x}$, тогда уравнение (5.1) заменится системой

$$\frac{dx}{dt} = y - ax, \quad \frac{dy}{dt} = z - bx, \quad \frac{dz}{dt} = -f(x) + p(x, y, z, t). \quad (5.2)$$

Установим для системы (5.2) следующие условия диссипативности.

Теорема 5.1. *Пусть функции $f(x)$ и $p(x, y, z, t)$ непрерывны и удовлетворяют условию единственности* *решений системы* (5.2) *при всех* x, y, z, t. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $a > 0$, $b > 0$;

2) $0 < \frac{f(x)}{x} < ab$ *при* $|x| \geqslant 1$;

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$;

4) $\lim\limits_{|x|\to\infty} |f(x) - abx| = \infty$;

5) $p(x, y, z, t+\omega) = p(x, y, z, t)$ *при всех* x, y, z, t;

6) *существует такая постоянная* $A > 0$, *что при всех* x, y, z, t *выполняется неравенство* $|p(x, y, z, t)| < A$.

Тогда система (5.2) *диссипативна.*

Для доказательства рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{2}(a^2x - ay + z)^2 + \frac{1}{2}(z - bx)^2 + \frac{b}{2}y^2 + a\int_0^x [f(x) - abx]\,dx. \qquad (5.3)$$

Производная от этой функции по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (5.2), как нетрудно проверить, равна

$$\dot v = -a(a^2x - ay + z)^2 + [abx - f(x)] \times [2(a^2x - ay + z) - bx] + [(a^2 - b)x - ay + 2z]\,p(x, y, z, t). \qquad (5.4)$$

Изучим поведение $\dot v$ при достаточно больших x, y, z. Положим

$$w = -a(a^2x - ay + z)^2 + [abx - f(x)][2(a^2x - ay + z) - bx]. \qquad (5.5)$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *При выполнении условий теоремы* 5.1 *выполняется следующее соотношение*:

$$\lim \left|\frac{w}{x}\right| = +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty \qquad (5.6)$$

равномерно при всех y, z.

Доказательство. Положим $u = a^2x - ay + z$. Найдем максимум функции w при фиксированном x:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -2au + 2[abx - f(x)].$$

Следовательно, максимум w при фиксированном x реализуется при $u = \frac{1}{a}[abx - f(x)]$. Обозначим этот максимум через $w_1(x)$. Имеем

$$w_1(x) = -\frac{1}{a}[abx - f(x)]^2 + \frac{2}{a}[abx - f(x)]^2 - \\ - bx[abx - f(x)] = -\frac{1}{a} f(x)[abx - f(x)].$$

Отсюда получаем

$$\left|\frac{w(x, y, z)}{x}\right| \geqslant \left|\frac{w_1(x)}{x}\right| = \frac{f(x)}{a|x|}[abx - f(x)]. \quad (5.7)$$

Возьмем произвольное $L > 0$, по этому L в силу условий 3) и 4) теоремы найдется такое $x_0 > 1$, что при $|x| \geqslant x_0$ $|f(x)| > \frac{2L}{b}$ и $|abx - f(x)| > \frac{2L}{b}$. Рассмотрим произвольное $x > x_0$. Возможно одно из двух: либо

$$0 < \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{2} ab, \quad (5.8)$$

либо

$$\frac{1}{2} ab < \frac{f(x)}{x} < ab. \quad (5.9)$$

Предположим сначала, что выполняется (5.9), тогда из (5.7) следует неравенство

$$\left|\frac{w(x, y, z)}{x}\right| \geqslant \frac{b}{2}|abx - f(x)| > L. \quad (5.10)$$

В случае же выполнения (5.8) получаем

$$\left|\frac{w(x, y, z)}{x}\right| \geqslant \frac{b}{2}|f(x)| > L. \quad (5.11)$$

Неравенства (5.10) и (5.11) и доказывают, что соотношение (5.6) выполняется равномерно при всех y, z.

Пусть α — произвольное достаточно малое положительное число. Обозначим через $D(\alpha)$ множество точек, определяемое неравенствами $\left\{-\alpha^2 z < x < \alpha^2 z,\ \frac{1-\alpha}{a} z < y < \frac{1+\alpha}{a} z\right.$ при $z > 0$ и $\alpha^2 z < x < -\alpha^2 z,\ \left.\frac{1+\alpha}{a} z < y < \frac{1-\alpha}{a} z \text{ при } z < 0\right\}$.

Лемма 5.2. Существует такое число $r(\alpha)$, что за пределами множества $D(\alpha)$ и шара $R(\alpha)$, определяемого неравенством $\{x^2+y^2+z^2 < r^2(\alpha)\}$, функция $\dot{v}(x, y, z, t)$ отрицательна.

Доказательство этого утверждения будем проводить в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$; для остальных координатных углов доказательство аналогично.

Рассмотрим сначала область $E_1 \left\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \geqslant \alpha^2 z,\ x \geqslant \frac{a\alpha^2}{1+\alpha} y\right\}$. Из вида функции $\dot{v}$ и соотношения (5.6) вытекает, что существует такое r_1, что в области E за пределами шара $\{x^2+y^2+z^2 < r_1^2\}$ оказывается $\dot{v} < 0$.

Обозначим через E_2 область, определяемую неравенствами $\left\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ y \geqslant \frac{1+\alpha}{a} z,\ x \leqslant \frac{a\alpha^2}{1+\alpha} y\right\}$. Имеем

$$\frac{\dot{v}}{(a^2x - ay + z)^2} = -a + 2\,\frac{abx - f(x)}{a^2x - ay + z} - \frac{bx\,[abx - f(x)]}{(a^2x - ay + z)^2} + \\ + \frac{(a^2 - b)\,x - ay + 2z}{(a^2x - ay + z)^2}\,p(x, y, z, t). \quad (5.12)$$

Нетрудно убедиться в существовании такого числа A_1, что в области E_2 при достаточно малых α будут выполнены неравенства:

$$\left|\frac{abx - f(x)}{a^2x - ay + z}\right| < A_1\alpha, \quad \left|\frac{bx\,[abx - f(x)]}{(a^2x - ay + z)^2}\right| < A_1\alpha^2. \quad (5.13)$$

Из определения области E_2 следует, что в этой области при достаточно больших $x^2+y^2+z^2$ величина

$$\frac{(a^2 - b)\,x - ay + 2z}{(a^2x - ay + z)^2}$$

сколь угодно мала. Отсюда, из выражения (5.12), неравенства (5.13) и условия 6) теоремы следует, что существует такое r_2, что при $x^2+y^2+z^2 \geqslant r_2^2$ в области E_2 $\dot{v} < 0$.

Аналогично доказывается существование r_3, такого, что в области $E_3\left\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \leqslant \alpha^2 z,\ y \leqslant \frac{1-\alpha}{a} z\right\}$ при $x^2+y^2+z^2 \geqslant r_3^2$ $\dot{v} < 0$.

Таким образом, доказано, что за пределами множества $\Sigma(\alpha) = R(\alpha) + D(\alpha)$ $\dot{v}(x, y, z, t) < 0$.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 5.3. Существуют величина $\alpha_1 > 0$ *и функция* $q_1(\alpha)$ *со следующими свойствами. Пусть точка* (x_0, y_0, z_0) *лежит в области* $D(\alpha)$, *где* $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$ *и* $z_0 \geqslant q_1(\alpha) > 0$. *Пусть* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — *решение системы* (5.2) *с начальными данными при* $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. *Тогда существует такое* $\theta_1 > t_0$, *что*

1) $x(\theta_1) = 2\alpha^2 z(\theta_1)$ *и при* $t_0 \leqslant t < \theta_1$ $|x(t)| < 2\alpha^2 z(t)$;
2) *при* $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ $|z - z_0| < \alpha^2 z_0$;
3) *при* $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ $0 \leqslant y - y_0 < \alpha z_0$;
4) $\theta_1 - t_0 < \frac{\omega}{2}$.

Доказательство. Выберем $\alpha_1^2 < \frac{1}{2b}$, тогда рассматриваемое решение пересечет сначала плоскость $x = 2\alpha^2 z$, а лишь затем плоскость $x = \frac{1}{b} z$. Поэтому на промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$ y вдоль нашего решения возрастает. Покажем, что при достаточно малом α_1 и достаточно большом $q_1(\alpha)$ выполняются утверждения 2) и 3) леммы. При $t > t_0$ и достаточно малом $t - t_0$ оба неравенства

$$|z(t) - z_0| < \alpha^2 z_0, \quad 0 \leqslant y - y_0 < \alpha z_0 \tag{5.14}$$

выполняются по непрерывности. Предположим, что одно из них нарушается при $t = t^* \in (0, \theta_1]$, при этом мы предполагаем, что t^* — первый момент нарушения одного из неравенств (5.14). Предположим сначала, что первым нарушается второе из неравенств (5.14), т. е. предположим, что

$$y(t^*) - y_0 = \alpha z_0 \tag{5.15}$$

и оба неравенства (5.14) выполняются при $t_0 \leqslant t < t^*$. Деля второе уравнение системы (5.2) на первое, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - bx}{y - ax}. \tag{5.16}$$

Отсюда следует, что при достаточно малом α_1 и достаточно большом $q_1(\alpha)$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} < 2a \tag{5.17}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$. Интегрируя неравенство (5.17) вдоль решения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, получаем

$$y - y_0 < 2a(x - x_0).$$

Так как $x_0 > -\alpha^2 z$, $x < 3\alpha^2 z_0$ при достаточно малом α, то из последнего неравенства вытекает соотношение

$$y(t^*) - y_0 < \alpha z_0,$$

противоречащее равенству (5.15). Это противоречие доказывает, что второе из неравенств (5.14) может нарушиться лишь после первого. Предположим теперь, что

$$|z(t^*) - z_0| = \alpha^2 z_0 \tag{5.18}$$

и оба неравенства выполняются при $t_0 \leqslant t < t^*$.

Разделим третье уравнение системы (5.2) на первое, тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-f(x) + p(x, y, z, t)}{y - ax}. \tag{5.19}$$

Из неравенства (5.14) и условий теоремы вытекает, что при достаточно малом α_1 и достаточно большом $q_1(\alpha)$ на рассматриваемом решении при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| < \alpha. \tag{5.20}$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$|z - z_0| < \alpha |x - x_0|.$$

Так как на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ $|x(t)| \leqslant 2\alpha^2 z(t)$, то из последнего неравенства выводим

$$|z - z_0| < \alpha^2 z_0,$$

что противоречит равенству (5.18). Полученные противоречия и доказывают, что неравенства (5.14) выполняются при всех $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$.

Докажем теперь выполнение последнего утверждения леммы. Из первого уравнения системы (5.2) находим

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{y - ax}. \tag{5.21}$$

Из неравенств (5.14) при достаточно малом α получим неравенство

$$\frac{dt}{dx} < \frac{2a}{z_0},$$

справедливое при $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$. Интегрируя это неравенство, находим

$$\theta_1 - t_0 < \frac{2a}{z_0}(x - x_0) < \alpha.$$

Если $\alpha_1 < \frac{\omega}{2}$, то мы и получаем $\theta_1 - t_0 < \frac{\omega}{2}$.

Лемма доказана.

Аналогично доказываются следующие три леммы.

Лемма 5.4. *Существуют величина $\alpha_1 > 0$ и функция $q_1(\alpha)$ со следующими свойствами. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит в области $D(\alpha)$, где $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$ и $z_0 \geqslant q_1(\alpha) > 0$. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — решение системы (5.2) с начальными данными при $t = t_0$ $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Тогда существует $\theta_2 < t_0$ такое, что*

1) $x(\theta_2) = -2\alpha^2 z(\theta_2)$ *и при* $\theta_2 < t \leqslant t_0$ $x(t) > -2\alpha^2 z(t)$;
2) *при* $\theta_2 \leqslant t \leqslant t_0$ $|z - z_0| < \alpha^2 z_0$;
3) *при* $\theta_2 \leqslant t \leqslant t_0$ $0 \leqslant y_0 - y < \alpha z$;
4) $t_0 - \theta_2 < \frac{\omega}{2}$.

Лемма 5.5. *Существуют величина $\alpha_1 > 0$ и функция $q_1(\alpha)$ со следующими свойствами. Пусть точка (x_0, y_0, z_0) лежит в области $D(\alpha)$, где $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$ и $z_0 \leqslant -q_1(\alpha) < 0$. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — решение с начальными данными $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Тогда существует $\theta_3 > t_0$ такое, что*

1) $x(\theta_3) = 2\alpha^2 z(\theta_3)$ *и при* $t_0 \leqslant t < \theta_3$ $x(t) > 2\alpha^2 z(t)$;
2) *при* $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_3$ $|z(t) - z_0| < -\alpha^2 z_0$;
3) *при* $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_3$ $0 \leqslant y_0 - y < -\alpha z_0$;
4) $\theta_3 - t_0 < \frac{\omega}{2}$.

Лемма 5.6. *Существуют величина $\alpha_1 > 0$ и функция $q_1(\alpha)$ со следующими свойствами. Пусть точка (x_0, y_0, z_0)*

лежит в области $D(\alpha)$, *где* $0<\alpha\leqslant\alpha_1$ *и* $z_0\leqslant-q_1(\alpha)$. *Пусть* $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — *решение с начальными данными* $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. *Тогда существует такое* $\theta_4<t_0$, *что*

1) $x(\theta_4)=-2\alpha^2z(\theta_4)$ *и при* $\theta_4<t\leqslant t_0$ $x(t)<-2\alpha^2z(t)$;
2) *при* $\theta_4\leqslant t\leqslant t_0$ $|z(t)-z_0|<-\alpha^2z_0$;
3) *при* $\theta_4\leqslant t\leqslant t_0$ $0\leqslant y-y_0<-\alpha z_0$;
4) $t_0-\theta_4<\frac{\omega}{2}$.

Установим теперь следующие четыре леммы о поведении функции $v(x, y, z)$ вдоль решений системы (5.2).

Лемма 5.7. *Пусть* $\alpha>0$ *достаточно мало, а* $q_2(\alpha)>0$ *достаточно велико. Пусть* $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — *решение системы* (5.2) *с начальными данными* $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, *точка* (x_0, y_0, z_0) *лежит в области* $D(\alpha)$, *а* $z_0\geqslant q_2(\alpha)$. *Тогда*

$$v(x_0, y_0, z_0)>v(x(\theta_1), y(\theta_1), z(\theta_1)), \tag{5.22}$$

где θ_1 — *момент времени, определяемый леммой 5.3.*

Доказательство. Деля равенство (5.4) на первое уравнение системы (5.2), получаем

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{a(a^2x-ay+z)^2}{y-ax}+\frac{abx-f(x)}{y-ax}[2(a^2x-ay+z)-bx)+\frac{(a^2-b)x-ay+2z}{y-ax}p(x, y, z, t). \tag{5.23}$$

Будем для определенности считать, что $x_0<-1$. Из леммы 5.3 следует тогда, что существуют моменты времени t_1, t_2, t_3 такие, что $t_0<t_1<t_2<t_3<\theta_1$ и $x(t_1)=-1$, $x(t_2)=1$, $x(t_3)=\alpha^2z(t_3)$, $x_0\leqslant x(t)\leqslant-1$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $-1\leqslant x(t)\leqslant 1$ при $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, $1\leqslant x(t)\leqslant\alpha^2z(t)$ при $t_2\leqslant t\leqslant t_3$, $\alpha^2z(t)\leqslant x(t)\leqslant 2\alpha^2z(t)$ при $t_3\leqslant t\leqslant\theta_1$. Имеем

$$v(x(\theta_1), y(\theta_1), z(\theta_1))-v(x_0, y_0, z_0)=\int_{x_0}^{-1}\frac{dv}{dx}dx+\int_{-1}^{+1}\frac{dv}{dx}dx+\int_{1}^{x(t_3)}\frac{dv}{dx}dx+\int_{x(t_3)}^{x(\theta_1)}\frac{dv}{dx}dx. \tag{5.24}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (5.24). Из доказательства леммы 5.1 следует, что

$$w(x,\ y,\ z) \leqslant -\frac{1}{a} f(x)[abx - f(x)] = w_1(x).$$

Отсюда и из (5.23) вытекает неравенство

$$\int_{x_0}^{-1} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant \int_{x_0}^{-1} \frac{(a^2-b)\,x - ay + 2z}{y - ax}\,p(x,\ y,\ z,\ t)\,dx.$$

Из леммы 5.3 следует, что при фиксированном α величина $\frac{(a^2-b)\,x - ay + 2z}{y - ax}$ ограничена равномерно по z_0 на решении $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_1$. Отсюда по условию теоремы получаем

$$\left|\frac{(a^2-b)\,x - ay + 2z}{y - ax}\,p(x,\ y,\ z,\ t)\right| < B_1, \tag{5.25}$$

где B_1 — достаточно большая постоянная. Следовательно, имеем

$$\int_{x_0}^{-1} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant -B_1(1 + x_0) < B_1 \alpha z_0. \tag{5.26}$$

Из равенства (5.23) получаем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant \int_{-1}^{+1} \frac{abx - f(x)}{y - ax}\,[2(a^2x - ay + z) - bx]\,dx + \\ + \int_{-1}^{+1} \frac{(a^2-b)\,x - ay + 2z}{y - ax}\,p\,dx.$$

Но функция $f(x)$ непрерывна и потому ограничена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, поэтому

$$\left|\frac{abx - f(x)}{y - ax}\,[2(a^2x - ay + z) - bx]\right| < B_2$$

на рассматриваемом решении при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Постоянную B_2 мы можем и будем считать не зависящей от выбора начальных данных x_0, y_0, z_0. Таким образом, получаем

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant 2B_2. \tag{5.27}$$

Из неравенства (5.25) вытекает оценка

$$\int_{1}^{x(t_3)} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant B_1(x(t_3)-1) \leqslant 2B_1\alpha^2 z_0. \tag{5.28}$$

Складывая неравенства (5.26), (5.27) и (5.28), получаем

$$\int_{x_0}^{x(t_3)} \frac{dv}{dx}\,dx \leqslant 3B_1\alpha^2 z_0 + 2B_2. \tag{5.29}$$

Оценим теперь последнее слагаемое правой части равенства (5.24):

$$\int_{x(t_3)}^{x(\theta_1)} \frac{dv}{dx}\,dx = \int_{x(t_3)}^{x(\theta_1)} \frac{w(x, y, z)}{y-ax}\,dx + \\ + \int_{x(t_3)}^{x(\theta_1)} \frac{(a^2-b)x - ay + 2z}{y-ax}\,p\,dx. \tag{5.30}$$

Из лемм 5.1 и 5.3 следует, что вдоль рассматриваемого решения

$$\frac{w(x, y, z)}{y-ax} \to -\infty \text{ при } z_0 \to +\infty, \tag{5.31}$$

и стремление это осуществляется равномерно относительно $t \in [t_3, \theta_1]$ и выбора начальных данных x_0, y_0, z_0. Поэтому

$$\frac{w(x, y, z)}{y-ax} < -B, \tag{5.32}$$

где B может быть сделано сколь угодно большим выбором достаточно большого z_0. Из (5.25), (5.30), (5.32) и леммы 5.3 следует, что

$$\int_{x(t_3)}^{x(\theta_1)} \frac{dv}{dx}\,dx < -\frac{1}{2}\alpha^2 z_0 B + 2B_1\alpha^2 z_0.$$

Складывая это неравенство с неравенством (5.29), получаем

$$v(x(\theta_1),\ y(\theta_1),\ z(\theta_1)) - v(x_0,\ y_0,\ z_0) < \\ < -\frac{1}{2}\alpha^2 z_0 B + 5B_1\alpha^2 z_0 + 2B_2.$$

Отсюда по смыслу B находим

$$v(x(\theta_1),\ y(\theta_1),\ z(\theta_1)) - v(x_0,\ y_0,\ z_0) < 0. \tag{5.33}$$

Это соотношение и доказывает лемму.

Аналогично доказываются следующие три леммы.

Лемма 5.8. *Пусть $\alpha > 0$ достаточно мало, а $q_2(\alpha) > 0$ достаточно велико. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — решение системы (5.2) с начальными данными $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит в области $D(\alpha)$, а $z_0 \geqslant q_2(\alpha)$. Тогда*

$$v(x(\theta_2),\ y(\theta_2),\ z(\theta_2)) > v(x_0,\ y_0\ z_0), \tag{5.34}$$

где θ_2 — момент времени, определяемый леммой 5.4.

Лемма 5.9. *Пусть $\alpha > 0$ достаточно мало, $q_2(\alpha) > 0$ достаточно велико. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z_0(t)$ — решение системы (5.2) с начальными данными $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит в области $D(\alpha)$, а $z_0 \leqslant -q_2(\alpha)$. Тогда*

$$v(x(\theta_3),\ y(\theta_3),\ z(\theta_3)) < v(x_0,\ y_0,\ z_0), \tag{5.35}$$

где θ_3 — момент, определяемый леммой 5.5.

Лемма 5.10. *Пусть $\alpha > 0$ достаточно мало, $q_2(\alpha) > 0$ достаточно велико. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — решение системы (5.2) с начальными данными $t = t_0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит в области $D(\alpha)$, а $z_0 \leqslant -q_2(\alpha)$. Тогда*

$$v(x(\theta_4),\ y(\theta_4),\ z(\theta_4)) > v(x_0,\ y_0,\ z_0), \tag{5.36}$$

где θ_4 — момент, определяемый леммой 5.6.

Изучим поведение функции $v(x,\ y,\ z)$ при достаточно больших $x^2 + y^2 + z^2$.

Лемма 5.11. *Имеет место соотношение*

$$v(x,\ y,\ z) \to \infty \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 \to \infty. \tag{5.37}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует такое $x_0 > 0$, что при $|x| \geqslant x_0$

$$\int_0^x f(x)\,dx > 0. \tag{5.38}$$

Соотношение (5.37) выполняется при $|x| \leqslant x_0$. Будем рассматривать функцию v при $|x| \geqslant x_0$. Положим

$$V(x,\ y,\ z) = (a^2x - ay + z)^2 + (z - bx)^2 + by^2 - a^2bx^2. \tag{5.39}$$

При $|x| \geqslant x_0$ имеем

$$v(x,\ y,\ z) = \frac{1}{2}V(x,\ y,\ z) + a\int_0^x f(x)\,dx > \frac{1}{2}V(x,\ y,\ z). \tag{5.40}$$

Докажем, что форма V определенно-положительна.

Сделаем замену переменных

$$x_1 = a^2x - ay + z,\quad y_1 = z - bx,\quad z_1 = y,$$

тогда

$$x = \frac{x_1 - y_1 + az_1}{a^2 + b};$$

форма V принимает вид

$$V = x_1^2 + y_1^2 + bz_1^2 - \frac{a^2b}{(a^2+b)^2}(x_1 - y_1 + az_1)^2. \tag{5.41}$$

Рассмотрим форму

$$V_h = x_1^2 + y_1^2 + bz_1^2 - h(x_1 - y_1 + az_1)^2. \tag{5.42}$$

Необходимыми и достаточными условиями определенной положительности этой формы будут, очевидно, неравенства $1 - h > 0$, $1 - 2h > 0$ и

$$\begin{vmatrix} 1-h, & h, & -ah \\ h, & 1-h, & ah \\ -ah, & ah, & b-a^2h \end{vmatrix} > 0.$$

Последнее неравенство может быть записано в следующем виде:

$$b-(2b+a^2)h>0 \quad \text{или} \quad h<\frac{b}{2b+a^2}.$$

Но легко проверить, что $\frac{a^2b}{a^2+b^2}<\frac{1}{2}$ и $\frac{a^2b}{(a^2+b)^2}<\frac{b}{2b+a^2}$. Отсюда и следует, что форма V определенно-положительна. Из (5.40) тогда вытекает утверждение леммы.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы 5.1. Покажем, что существует такое $q>0$, что если $x_0^2+y_0^2+z_0^2 \geqslant q^2$, то

$$v(x_0, y_0, z_0)>v(x(\omega), y(\omega), z(\omega)), \tag{5.43}$$

где $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — решение системы (5.2) с начальными данными $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Выберем $\bar{q}$ так, чтобы при $x_0^2+y_0^2+z_0^2 \geqslant \bar{q}^2$ и некотором фиксированном достаточно малом α выполнялись утверждения леммы 5.1—5.10. Пусть

$$\bar{v}=\max_{x^2+y^2+z^2 \leqslant \bar{q}^2} v(x, y, z). \tag{5.44}$$

В силу леммы 5.11 найдется такое $q>\bar{q}$, что при $x^2+y^2+z^2 \geqslant q^2$ $v \geqslant 2\bar{v}$. Покажем, что это q и есть искомое.

Будем доказывать неравенство (5.43) от противного. Предположим, что оно не выполняется. Будем считать сначала, что точка x_0, y_0, z_0 не лежит в области $D(\alpha)$, тогда в силу леммы 5.2 имеем $\dot{v}(x_0, y_0, z_0)<0$. Следовательно, $v(x(t), y(t), z(t))$ убывает в окрестности точки $t=0$. Так как по предположению неравенство (5.43) не выполняется, то ясно, что существует $\tau_0 \in (0, \omega]$ такое, что

$$v(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))=v(x_0, y_0, z_0) \tag{5.45}$$

и при $0<t<\tau_0$ выполняется неравенство

$$v(x(t), y(t), z(t))<v(x_0, y_0, z_0). \tag{5.46}$$

Из леммы 5.2 следует, что точка $x(\tau_0)$, $y(\tau_0)$, $z(\tau_0)$ лежит в области $D(\alpha)$. Если точка (x_0, y_0, z_0) лежит в $D(\alpha)$, то положим просто $\tau_0=0$.

Покажем, что $\tau_0 < \frac{\omega}{2}$. В силу выбора q имеем $v(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0)) = v(x_0, y_0, z_0) > 2\bar{v}$; следовательно, по определению $\bar{v}$ получаем $x^2(\tau_0) + y^2(\tau_0) + z^2(\tau_0) > \bar{q}$, и потому существует $\tau^* < \tau_0$ (это τ^* соответствует моменту θ_2 из леммы 5.4, если $z(\tau_0) > 0$, и моменту θ_4 из леммы 5.6, если $z(\tau_0) < 0$), такое, что

$$v(x(\tau^*), y(\tau^*), z(\tau^*)) > v(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0)) = v(x_0, y_0, z_0). \tag{5.47}$$

При этом, как следует из лемм 5.4 и 5.6, $\tau_0 - \tau^* < \frac{\omega}{2}$. Это и доказывает, что $\tau_0 < \frac{\omega}{2}$, ибо если бы было $\tau_0 \geqslant \frac{\omega}{2}$, то оказалось бы, что $0 < \tau^* < \tau_0$, что противоречит тому факту, что неравенство (5.46) выполняется при $0 < t < \tau_0$.

Из лемм 5.7 и 5.9 следует, что существует такое $\tau_1 > \tau_0$ (это τ_1 соответствует моменту θ_1 из леммы 5.3, если $z(\tau_0) > 0$, и моменту θ_3 из леммы 5.5, если $z(\tau_0) < 0$), что

$$v(x(\tau_1), y(\tau_1), z(\tau_1)) < v(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0)) \tag{5.48}$$

и $\tau_1 - \tau_0 < \frac{\omega}{2}$; значит, $\tau_1 < \omega$.

По предположению неравенство (5.43) не выполняется; следовательно, существует $\bar{\tau} \in (\tau_1, \omega]$ такое, что

$$v(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau}), z(\bar{\tau})) = v(x_0, y_0, z_0)$$

и при $\tau_1 \leqslant t < \bar{\tau}$ выполняется неравенство (5.46). Нетрудно видеть, что тогда точка $(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau}), z(\bar{\tau}))$ лежит в $D(\alpha)$ и $x^2(\bar{\tau}) + y^2(\bar{\tau}) + z^2(\bar{\tau}) > \bar{q}$. Отсюда и из лемм 5.8 и 5.10 следует, что существует такое τ', что

$$v(x(\tau'), y(\tau'), z(\tau')) > v(x(\bar{\tau}), y(\bar{\tau}), z(\bar{\tau})) = v(x_0, y_0, z_0).$$

Из лемм 5.4—5.10 следует при этом, что $\tau_1 < \tau' < \bar{\tau} \leqslant \omega$. Это противоречит тому, что неравенство (5.46) выполняется при $\tau_1 \leqslant t < \bar{\tau}$. Полученное противоречие доказывает неравенство (5.43).

Из проведенных рассуждений следует, кроме того, что любое решение системы (5.2) продолжимо при возрастании времени. А тогда мы находимся в условиях теоремы 2.4, ссылка на которую и завершает доказательство.

Теорема 5.2. *При выполнении условий теоремы 5.1 система* (5.2) *имеет хотя бы одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. Рассмотрим область $v(x, y, z) < c$ и покажем, что при достаточно больших c область эта звездная. Положим $x = \alpha l$, $y = \beta l$, $z = \gamma l$ $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$ и докажем, что эта прямая имеет с поверхностью $v(x, y, z) = c$, где c достаточно велико, ровно одно пересечение при $l > 0$. Рассмотрим уравнение

$$v(\alpha l, \beta l, \gamma l) = c. \tag{5.49}$$

Нетрудно видеть, что если c достаточно велико, то корни уравнения (5.49) сколь угодно велики. Покажем, что при достаточно больших l $\frac{d}{dl} v(\alpha l, \beta l, \gamma l) > 0$. Имеем

$$\frac{d}{dl} v(\alpha l, \beta l, \gamma l) = l(a^2\alpha - a\beta + \gamma)^2 + l(\gamma - b\alpha)^2 + bl\beta^2 +$$
$$+ a\alpha[f(\alpha l) - ab\alpha l] = lV(\alpha, \beta, \gamma) + a\alpha f(\alpha l).$$

При доказательстве леммы 5.11 было установлено, что форма $V(\alpha, \beta, \gamma)$ определенно-положительна. Отсюда, из условий теоремы 5.1 и последнего равенства тогда следует, что

$$\frac{d}{dl} v(\alpha l, \beta l, \gamma l) > 0$$

при достаточно больших l. Это и доказывает, что область $v(x, y, z) < c$ при достаточно большом c звездная. Отсюда нетрудно вывести, что замкнутая область $v(x, y, z) \leqslant c$ гомеоморфна шару. Из неравенства (5.43) следует, что при преобразовании T топологический шар $v(x, y, z) \leqslant c$ переходит в себя. По теореме Брауэра преобразование T имеет неподвижную точку. Это и доказывает теорему.

§ 6. Существование гармонических колебаний у систем высших порядков, не являющихся D-системами

Мы уже отмечали, что любая неподвижная точка преобразования T представляет собой начальное данное ω-периодического решения системы

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t). \tag{6.1}$$

Поэтому для доказательства теорем существования гармонических колебаний могут применяться различные признаки существования неподвижных точек топологических преобразований евклидова пространства в себя.

1. Часто весьма удобным для применения оказывается следующий признак существования неподвижной точки у преобразования T [31].

Теорема 6.1. *Пусть на некоторой $(n-1)$-мерной сфере S пространства $x_1, \ldots, x_n$ вращение вектора $F(X, 0)$ отлично от нуля. Пусть, кроме того, все решения, проходящие при $t=0$ через замкнутый шар $\overline{K}$, ограничиваемый сферой S, продолжимы при $0 \leqslant t \leqslant \omega$, и для $X_0 \in S$ $0 < t \leqslant \omega$ выполняется неравенство*

$$X(t, X_0, 0) \neq X_0. \tag{6.2}$$

Тогда в шаре K существует хотя бы одна неподвижная точка преобразования T.

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор

$$V(X_0, t) = X(t, X_0, 0) - X_0. \tag{6.3}$$

При достаточно малых $t > 0$ будем иметь

$$V(X_0, t) = F(X_0, 0)\, t + \varepsilon(X_0, t) \cdot t, \tag{6.4}$$

где $\varepsilon(X_0, t) \to 0$ при $t \to 0$ равномерно относительно $X_0 \in S$. Поэтому при достаточно малых $t > 0$ вектор V ни в одной точке сферы S не обращается ни в нуль, ни в вектор, направленный противоположно вектору $F(X_0, 0)$. Следовательно, при достаточно малых $t > 0$ вращения векторов $V(X_0, t)$ и $F(X_0, 0)$ совпадают. По условию вращение вектора $F(X_0, 0)$ на сфере S отлично от нуля; следовательно, отлично от нуля и вращение вектора $V(X_0, t)$ при достаточно малых $t > 0$. Но вектор $V(X_0, t)$ не имеет особых точек на сфере S ни при одном $t \in (0, \omega]$ в силу условия (6.2); кроме того, $V(X_0, t)$ зависит от t непрерывно, следовательно, вращение $V(X_0, t)$ постоянно на полуинтервале $0 < t \leqslant \omega$. Отсюда следует, что вращение вектора $V(X_0, \omega)$ отлично от нуля. Вектор $V(X_0, \omega)$ есть вектор сдвига отображения T в точке X_0. Таким образом, степень отображения T отлична от нуля. Это и доказывает теорему.

2. Доказанная теорема позволяет установить следующий признак существования у системы (6.1) гармонического колебания (см. работы [22, 23, 24]).

Теорема 6.2. *Пусть функция* $F(X, t) = \{f_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, t)\}$ *непрерывна,* ω*-периодична по* t *и имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяющие условиям*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geqslant m > 0$$

или

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant -m < 0;$$

пусть, кроме того, функции $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t)$ *ограничены. Тогда система* (6.1) *имеет гармоническое колебание.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует такое r, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geqslant m > 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{6.5}$$

и

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \leqslant -m < 0 \quad \text{при} \quad i = r+1, \ldots, n. \tag{6.6}$$

При этом можно считать, что r отлично от нуля и n, ибо в противном случае дело свелось бы к теореме 3.4. Имеем

$$f_i = \int_0^{x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t). \tag{6.7}$$

По условию теоремы существует такое $M > 0$, что

$$|f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n, t)| < M. \tag{6.8}$$

Отсюда и из условий (6.5) и (6.6) следует, что существует такое $a > 0$, что при $|x_i| \geqslant a$ выполняются неравенства

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\, x_i > \frac{m}{2} x_i^2 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, r, \tag{6.9}$$

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\, x_i < -\frac{m}{2} x_i^2 \text{ при } i = r+1, \ldots, n. \tag{6.10}$$

Наряду с системой (6.1), рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt}=\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{6.11}$$

где функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ определяются посредством равенств:

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t)=$$
$$=\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n, t) & \text{при } |x_i|\leqslant a, \\ a\dfrac{f_i(x_1, \ldots, x_n, t)\,x_i}{(2a-|x_i|)\,x_i+(|x_i|-a)\,f_i} & \text{при } a\leqslant|x_i|\leqslant 2a, \\ x_i & \text{при } |x_i|\geqslant 2a \end{cases}$$

для $i=1, 2, \ldots, r$,

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t)=$$
$$=\begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n, t) & \text{при } |x_i|\leqslant a, \\ a\dfrac{f_i(x_1, \ldots, x_n, t)}{(2a-|x_i|)\,x_i-(|x_i|-a)\,f_i}\,x_i & \text{при } a\leqslant|x_i|\leqslant 2a, \\ -x_i & \text{при } |x_i|\geqslant 2a \end{cases}$$

для $i=r+1, \ldots, n$.

Нетрудно видеть, что функции φ_i непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по переменным x_k в окрестности каждой точки X, t, ω-периодичны и $\operatorname{sign}\varphi_i=\operatorname{sign}x_i$ при $|x_i|\geqslant a$, $i=1, 2, \ldots, r$ и $\operatorname{sign}\varphi_i=-\operatorname{sign}x_i$ при $|x_i|\geqslant a$, $i=r+1, \ldots, n$.

Выберем положительное число A столь большим, чтобы оказалось

$$A^2>nMa, \quad A>2a. \tag{6.12}$$

Пусть S — сфера с центром в начале координат, определяемая равенством $\|X\|=nA$. Рассмотрим векторное поле $Z(X)$ с компонентами

$$\left.\begin{aligned} z_i(X)&=x_i \quad \text{при } i=1, 2, \ldots, r, \\ z_i(X)&=-x_i \quad \text{при } i=r+1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Пусть Φ — вектор с компонентами $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Рассмотрим скалярное произведение

$Z \cdot \Phi = \sum_{i=1}^{n} z_i \varphi_i$ и покажем, что на сфере S это скалярное произведение положительно. Имеем

$$Z \cdot \Phi = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i x_i - \sum_{i=r+1}^{n} \varphi_i x_i. \tag{6.14}$$

Ясно, что на сфере S окажется $\max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \geqslant A$. Кроме того, из условий (6.5) и (6.6), равенства (6.7) и условия (6.8) вытекают неравенства

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, t) x_i > -Ma, \qquad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{6.15}$$

$$f_i(x_i, \ldots, x_n, t) x_i < Ma, \qquad i = r+1, \ldots, n. \tag{6.16}$$

Из этих неравенств получаем оценку

$$Z \cdot \Phi > A^2 - nMa,$$

а отсюда, в силу выбора числа A, следует неравенство $Z \cdot \Phi > 0$, справедливое на сфере S. Это означает, что на сфере S векторы Z и Φ не оказываются противоположно направленными; следовательно, их вращения совпадают. Но хорошо известно [32], что вращение вектора Z отлично от нуля; следовательно, отлично от нуля и вращение вектора Φ.

Пусть вектор $\Psi(t, X_0, t_0)$ с компонентами $\psi_1, \ldots, \psi_n$ представляет собой решение системы (6.11) с начальными данными $t = t_0$, $X = X_0$. Покажем, что если $X_0 \in S$, то при $0 < t \leqslant \omega$ выполняется неравенство

$$\Psi(t, X_0, t_0) \neq X_0. \tag{6.17}$$

Пусть $X_0 = \{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\} \in S$. Предположим сначала, что при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant r$, выполняется неравенство $|x_k^{(0)}| \geqslant a$. Но тогда из того, что при $|x_k| \geqslant a$ $\varphi_k x_k > 0$, следует, что при всех $t > 0$ вдоль нашего решения будет выполняться неравенство $|x_k| > |x_k^{(0)}|$, что и доказывает соотношение (6.17). Пусть теперь $|x_i^{(0)}| < a$ при $i = 1, 2, \ldots, r$; тогда при некотором k, $r+1 \leqslant k \leqslant n$ окажется $|x_k^{(0)}| \geqslant a$. Так как $\varphi_k x_k < 0$ при $|x_k| \geqslant a$, то легко убедиться в том, что при всех $t > 0$ будет выполнено неравенство $|x_k| < |x_k^{(0)}|$. Это и доказывает (6.17).

Из самого выбора функций φ_l следует, что все решения системы (6.11) продолжимы на все моменты времени t от $t=-\infty$ до $t=+\infty$.

Таким образом, для системы (6.11) выполняются все условия теоремы 6.1; следовательно, система (6.11) имеет ω-периодическое решение. Пусть это решение есть $x_i=\psi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Покажем, что при всех t выполняются неравенства $|\psi_i(t)|<a$ $(i=1, \ldots, n)$. Предположим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что $|\psi_k(t_0)|\geqslant a$. Пусть сначала $k\leqslant r$; тогда ясно, что при $t\geqslant t_0$ $|\psi_k(t)|$ возрастает, и, следовательно, не может выполняться равенство $\psi_k(t_0+\omega)=\psi_k(t_0)$. Пусть теперь $k>r$, тогда при $t\leqslant t_0$ $|\psi_k(t)|$ возрастает с убыванием времени и не может реализоваться равенство $\psi_k(t_0-\omega)=\psi_k(t_0)$. В обоих случаях функция $\psi_k(t)$ оказывается непериодической. Полученное противоречие доказывает, что $|\psi_i(t)|<a$ $(i=1, \ldots, n)$. Но при $|x_i|\leqslant a$ система (6.11) совпадает с (6.1); следовательно, $x_i=\psi_i(t)$ представляет собой ω-периодическое решение системы (6.1).

Теорема доказана.

3. Докажем еще одну теорему о существовании гармонических колебаний. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=AX+F(X, t), \tag{6.18}$$

где X и $F(X, t)$ — вещественные n-мерные векторы с компонентами $x_1, \ldots, x_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ соответственно; $A=\{a_{ij}\}$ — вещественная постоянная квадратная матрица n-го порядка.

Относительно функции $F(X, t)$ будем предполагать, что она непрерывна, имеет период 2π по аргументу t и удовлетворяет условию единственности решений при всех X, t.

Теорема 6.3. *Если матрица A не имеет собственных чисел вида ki (k — натуральное число или нуль, i — мнимая единица) и если функция $F(X, t)$ при достаточно больших $\|X\|$ удовлетворяет условию*

$$\|F(X, t)\|<L\|X\|, \tag{6.19}$$

где положительная постоянная L достаточно мала, то система (6.18) *имеет хотя бы одно 2π-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть, как обычно, $X(t, X_0, t_0)$ — решение системы (6.18). Из оценок (6.19) следует [1], что все решения системы (6.18) продолжимы на все моменты времени от $-\infty$ до $+\infty$. Пусть $V(X)=TX-X$ — вектор сдвига преобразования T, а $v_1, \ldots, v_n$ — компоненты вектора V.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dX}{dt}=AX. \tag{6.20}$$

Не нарушая общности, можем считать, что матрица A имеет каноническую структуру. Определим для системы (6.20) преобразование T_0 пространства X в себя, аналогичное преобразованию T для системы (6.18). Обозначим через $W=\{w_1, \ldots, w_n\}$ вектор сдвига преобразования T_0, т. е. вектор $W=T_0X-X$. Пусть матрица A имеет следующие характеристические числа: $\lambda_1 \pm i\mu_1, \ldots, \lambda_s \pm i\mu_s, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2s}$, среди которых могут быть и равные. Ясно, что

$$\frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}=$$
$$=\begin{vmatrix} e^{2\pi\lambda_1}\cos 2\pi\mu_1-1, & -e^{2\pi\lambda_1}\sin 2\pi\mu_1, & 0, \ldots, 0 \\ e^{2\pi\lambda_1}\sin 2\pi\mu_1, & e^{2\pi\lambda_1}\cos 2\pi\mu-1, & 0, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & e^{2\pi\varkappa_{n-2s}}-1 \end{vmatrix},$$

и по теореме Лапласа имеем

$$\frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}=$$
$$=\prod_{m=1}^{s}\left(1-2e^{2\pi\lambda_m}\cos 2\pi\mu_m+e^{4\pi\lambda_m}\right)\prod_{m=1}^{n-2s}\left(e^{2\pi\varkappa_m}-1\right).$$

В силу условия теоремы $\varkappa_m \neq 0$ и если $\lambda_m=0$, то $\mu_m \neq k$ (k — натуральное число). Отсюда получаем

$$\frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0. \tag{6.21}$$

Это доказывает, что индекс точки $x_1=x_2= \ldots =x_n=0$ как особой точки векторного поля $W(X)$ равен ± 1.

Кроме того, из неравенства (6.21) вытекает, что существует такая постоянная $K>0$, что

$$\|W(X)\| \geqslant K\|X\|. \tag{6.22}$$

Оценим теперь норму разности $V(X_0) - W(X_0)$ при достаточно большом $\|X_0\|$. Ясно, что

$$V(X_0) - W(X_0) = X(2\pi, X_0, 0) - \Psi(2\pi, X_0, 0), \tag{6.23}$$

где через $\Psi(t, X_0, t_0)$ обозначено решение системы (6.20) с начальными данными $t = t_0$, $X = X_0$. Пусть $Y(t)$ — решение матричного уравнения

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{6.24}$$

такое, что $Y(0) = I$.

Известно (см., например, [3]), что тогда решение $X(t, X_0, 0)$ системы (6.18) удовлетворяет интегральному уравнению

$$X(t, X_0, 0) = \Psi(t, X_0, 0) + \int_0^t Y(t-\tau) F(X, \tau)\, d\tau. \tag{6.25}$$

Пусть y_{ij} — элементы матрицы Y, тогда положим

$$\|Y\| = \sum_{i, j=1}^{n} |y_{ij}| \quad \text{и} \quad c_1 = \max_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|\Psi(t, X_0, 0)\|.$$

Так как Ψ — решение линейной системы (6.20), то существует такая положительная постоянная M, что $c_1 \leqslant M\|X_0\|$. Пусть, кроме того, $c_2 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \|Y(t)\|$.

Из равенства (6.25) получаем

$$\|X(t, X_0, 0)\| \leqslant c_1 + c_2 \int_0^t \|F(X(\tau, X_0, 0), \tau)\|\, d\tau \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Считая, что $\|X_0\|$ достаточно велико, в силу условия (6.19) имеем

$$\|X\| < c_1 + c_2 L \int_0^t \|X(\tau, X_0, 0)\|\, d\tau \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{6.26}$$

Отсюда по известной лемме (см. [1]) находим

$$\|X(t, X_0, 0)\| < c_1 e^{c_2 L t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \tag{6.27}$$

С другой стороны, из равенства (6.25) вытекает оценка

$$\|X(t, X_0, 0)-\Psi(t, X_0, 0)\| \leqslant c_2 \int_0^t \|F(X, \tau)\| d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

а отсюда при достаточно больших $\|X_0\|$, принимая во внимание (6.19) и (6.27), получаем

$$\|X(t, X_0, 0)-\Psi(t, X_0, 0)\| < c_2 L c_1 \int_0^t e^{c_2 L\tau} d\tau = c_1 (e^{c_2 Lt} - 1).$$

Из этого неравенства и из (6.23) в силу $c_1 \leqslant M\|X_0\|$ выводим

$$\|V(X_0) - W(X_0)\| < M(e^{2\pi c_2 L} - 1)\|X_0\| \tag{6.28}$$

при достаточно большом $\|X_0\|$.

Будем считать постоянную L настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$K \geqslant M(e^{2\pi c_2 L} - 1). \tag{6.29}$$

Пусть S — сфера достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Из оценок (6.22) и (6.28) вытекает, что ни в одной точке сферы S векторы V и W не оказываются противоположно направленными и V ни в одной точке сферы не обращается в нуль. Отсюда следует, что вращения векторов V и W на сфере S совпадают. Но было доказано, что индекс точки $X=0$ как особой точки поля W равен ± 1. Сфера S, в силу неравенства (6.22), не охватывает особых точек поля W, отличных от начала координат, и потому вращение вектора W на сфере S равно ± 1. Следовательно, вращение V на сфере S также равно ± 1, а это значит, что сфера S охватывает хотя бы одну особую точку вектора V. Эта точка является, очевидно, неподвижной точкой преобразования T.

Теорема доказана.

Эта теорема впервые была доказана, по-видимому, Барбалатом [33]. Здесь мы привели доказательство, опубликованное в [34].

Отметим, что, как следует из самого доказательства теоремы 6.3, константа L в неравенстве (6.19) может быть эффективно оценена через матрицу A.

В заключение отметим, что результаты, близкие по своему идейному содержанию к приведенным выше, были не так давно опубликованы М. А. Красносельским [32].

§ 7. Системы с конвергенцией

1. В этом и следующем параграфах мы будем изучать системы, обладающие единственным устойчивым в целом гармоническим колебанием.

Пусть, как обычно, правые части системы

$$\frac{dX}{dt}=F(X,\ t) \tag{7.1}$$

непрерывны, ω-периодичны по t и удовлетворяют условиям единственности при всех $(X,\ t)$.

Определение 7.1. Будем говорить, что система (7.1) обладает свойством конвергенции, если

1) все решения $X(t,\ X_0,\ t_0)$ продолжимы на все моменты времени $t \geqslant t_0$;

2) система (7.1) имеет единственное ω-периодическое решение $X=\Phi(t)$;

3) это решение устойчиво в смысле Ляпунова;

4) для любого решения $X(t,\ X_0,\ t_0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to+\infty}\|X(t,\ X_0,\ t_0)-\Phi(t)\|=0. \tag{7.2}$$

Таким образом, система с конвергенцией — это такая диссипативная система, у которой множество I (см. п. 3 § 2) вырождается в точку. Установим следующее характеристическое свойство систем с конвергенцией.

Теорема 7.1. *Для того чтобы система* (7.1) *обладала свойством конвергенции, необходимо и достаточно, чтобы существовало ограниченное при* $t \geqslant t_0$ *решение и чтобы любое решение* $X(t,\ X_0,\ t_0)$ *системы* (7.1) *было равномерно при* $t \geqslant t_0$ *асимптотически устойчиво, т. е. чтобы по любому* $\varepsilon > 0$ *можно было указать такое* $\delta(X_0,\ t_0)$, *что если* $\|X^*-X(t^*,\ X_0,\ t_0)\|<\delta$, *то при* $t \geqslant t^* \geqslant t_0$

$$\|X(t,\ X_0,\ t_0)-X(t,\ X^*,\ t^*)\|<\varepsilon, \tag{7.3}$$

и чтобы существовало такое $\Delta(X_0, t_0)$, *что если*

$$\|X^* - X(t^*, X_0, t_0)\| < \Delta,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t, X_0, t_0) - X(t, X^*, t^*)\| = 0. \qquad (7.4)$$

Доказательство. Необходимость [35]. Пусть система (7.1) обладает свойством конвергенции, тогда она имеет ω-периодическое решение $X = \Phi(t)$. По определению это решение асимптотически устойчиво. Но хорошо известно (см., например, [15]), что асимптотически устойчивое ω-периодическое решение системы (7.1) будет и равномерно асимптотически устойчиво. Таким образом, решение $X = \Phi(t)$ равномерно асимптотически устойчиво. Покажем, что и любое решение $X(t, X_0, t_0)$ будет равномерно при $t \geqslant t_0$ асимптотически устойчивым. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как решение $X = \Phi(t)$ равномерно асимптотически устойчиво, то по этому ε найдется δ такое, что если $\|\bar{X}_0 - \Phi(\bar{t}_0)\| < \delta$, то $\|X(t, \bar{X}_0, \bar{t}_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant \bar{t}_0$. Из соотношения (7.2) вытекает существование такого $\tau \geqslant t_0$, что

$$\|X(t, X_0, t_0) - \Phi(t)\| < \frac{\delta}{2}$$

при $t \geqslant \tau$. По теореме об интегральной непрерывности существует такое $\delta_1 \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$, что если $\|X^* - X(t^*, X_0, t_0)\| < \delta_1$ и $t_0 \leqslant t^* \leqslant \tau$, то при всех $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ $\|X(t, X^*, t^*) - X(t, X_0, t_0)\| < \frac{\delta}{2}$. Отсюда и вытекает соотношение (7.3).

Необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность [36]. Пусть система (7.1) имеет ограниченное при $t \geqslant \bar{t}_0$ решение $X = \Psi(t)$; покажем, что при любых t_0 и X выполняется соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} \|X(t, X_0, t_0) - \Psi(t)\| = 0. \qquad (7.5)$$

Допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что существует такое t^* и такое X_0^*, что для решения $X(t, X_0^*, t^*)$ соотношение (7.5) не выполняется. Из условий теоремы следует, что любое решение $X(t, X_0, t_0)$ системы (7.1) продолжимо при $t \geqslant t_0$, поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $t^* \geqslant \bar{t}_0$. Пусть G — множество таких точек гиперплоскости $t = t^*$, через которые проходят решения, обладающие свойством (7.5). Множество G не пусто, так как ясно, что $\Psi(t^*) \in G$. С другой стороны, по предположению множество G не совпадает со всей гиперплоскостью $t = t^*$. Пусть X^* — граничная точка для множества G. Для решения $X(t, X^*, t^*)$ соотношение (7.5) не выполняется, ибо если оно выполнялось бы, то из-за того, что решение $\Psi(t)$ равномерно асимптотически устойчиво, соотношение (7.5) выполнялось бы и для всех решений, близких к $X(t, X^*, t^*)$, и точка X^* не была бы граничной для G.

Так как для решения $X(t, X^*, t^*)$ соотношение (7.5) не выполняется, а в любой окрестности точки X^* лежат точки области G, то ясно, что решение $X(t, X^*, t^*)$ не может быть устойчивым. Это противоречит условию теоремы. Противоречие доказывает соотношение (7.5). Из этого соотношения вытекает, что система (7.1) диссипативна; следовательно, она имеет решение с периодом $k\omega$ и решение с периодом $(k+1)\omega$, где k — достаточно большое натуральное число. В силу соотношения (7.5) разность между этими решениями должна стремиться к нулю при $t \to +\infty$; отсюда следует, что эти решения просто совпадают. Но если решение имеет периоды $k\omega$ и $(k+1)\omega$, то оно имеет и период ω.

Таким образом, система (7.1) имеет ω-периодическое решение, к которому стремятся все остальные решения. Отсюда и вытекает достаточность условий теоремы.

2. Пусть, как и раньше, T — топологическое преобразование гиперплоскости $t = 0$ в себя, ставящее в соответствие точке X точку $X(\omega, X_0, 0)$. Докажем следующую теорему [37].

Теорема 7.2. *Если система* (7.1) *диссипативна и существует непрерывная функция* $v(X, Y)$ *точек* X *и* Y *гиперплоскости* $t = 0$ *со свойствами:*

1) $v(X, Y) \geqslant 0$ *и* $v(X, Y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $X = Y$,

2) $v(TX, TY) \leqslant v(X, Y)$ *и при* $v(TX, TY) = v(X, Y)$ $X = Y$,

то система (7.1) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Для диссипативной системы (7.1) определено множество I. Покажем, что в условиях теоремы множество представляет собой точку. Предположим, напро тив, что это не так, тогда

$$\alpha = \sup_{X,\ Y \in I} v(X,\ Y) > 0. \qquad (7.6$$

Как было показано в § 2, множество I замкнуто, поэтом существуют точки $\overline{X} \in I$ и $\overline{Y} \in I$ такие, что $v(\overline{X},\ \overline{Y}) = \alpha$ Из равенства $TI = I$ следует, что $T^{-1}\overline{X} \in I$ и $T^{-1}\overline{Y} \in I$.

Из условия теоремы тогда вытекает неравенство

$$v(T^{-1}\overline{X},\ T^{-1}\overline{Y}) > v(\overline{X},\ \overline{Y}) = \alpha.$$

Это противоречит определению α. Полученное противоречие доказывает, что множество I представляет собой точку гиперплоскости $t = 0$. Отсюда и из теоремы 2.3 вытекает, что решение $X(t,\ Z,\ 0)$ есть устойчивое в целом ω-периодическое решение системы (7.1).

Теорема доказана.

Условия этой теоремы оказываются и необходимыми для конвергенции.

Теорема 7.3. *Если система* (7.1) *обладает свойством конвергенции, то существует функция* $v(X,\ Y)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 7.2.

Доказательство. Пусть в системе (7.1) имеет место конвергенция и пусть $X = \Phi(t)$ — гармоническое колебание Множество точек этого решения представляет собой множество S для диссипативной системы (7.1) (множество S был введено на стр. 36, п. 3 § 2). Пусть $a > 0$ таково, чт $\|\Phi(0)\| < a$.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, введенную в п. 4 § 2. Из неравенства (2.34) следует, что

$$\|X(t,\ X_0,\ t_0) - \Phi(t)\| < \alpha(t) \qquad (7.7)$$

при $t_0 \leqslant t < +\infty$, $t_0 \in [0,\ \omega]$, $\|X_0\| \leqslant a$.

Отсюда вытекает, что если $\|X\| \leqslant a$, $\|Y\| \leqslant a$, то

$$\|T^kX - T^kY\| < 2\alpha(k) \qquad (7.8)$$

при $k > 0$. Обратим функцию $\beta = 2\alpha(t)$, получим функци $t = t(\beta)$; $t(\beta)$ определена и непрерывно дифференцируем при $0 < \beta < +\infty$, при таких β $t'(\beta) < 0$ и $t(\beta) \to 0$ пр $\beta \to \infty$ и $t(\beta) \to \infty$ при $\beta \to 0$.

Образуем функцию

$$v(X, Y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^2(\|T^kX-T^kY\|)} & \text{при } X\neq Y,\\ 0 & \text{при } X=Y.\end{cases} \tag{7.9}$$

Покажем, что ряд, определяющий функцию v при $X\neq Y$, сходится равномерно при $\|X\|\leqslant b$, $\|Y\|\leqslant b$, где b — любое положительное число. Так как система (7.1) диссипативна, то, как было показано в § 2, существует такое $k(b)$, что при $k\geqslant k(b)$ и при $\|X\|\leqslant b$ выполняется $\|T^kX\|\leqslant a$. Отсюда и из неравенства (7.8) вытекает, что

$$\|T^kX-T^kY\|<2\alpha(k-k(b))$$

при $k>k(b)$. Из этого неравенства в силу монотонности функции $t(\beta)$ получаем

$$t(\|T^kX-T^kY\|)>t(2\alpha(k-k(b)))=k-k(b),$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{t^2(\|T^kX-T^kY\|)}<\frac{1}{[k-k(b)]^2} \tag{7.10}$$

при $\|X\|\leqslant b$, $\|Y\|\leqslant b$. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится равномерно при $\|X\|\leqslant b$, $\|Y\|\leqslant b$. Отсюда, из того, что $t(\beta)\to\infty$ при $\beta\to 0$, и из непрерывности преобразования T, вытекает непрерывность функции v при всех X, Y.

Для того чтобы убедиться в справедливости теоремы, осталось показать, что $v(TX, TY)<v(X, Y)$ при $X\neq Y$. Имеем

$$v(TX, TY)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^2(\|T^{k+1}X-T^{k+1}Y\|)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t^2(\|T^kX-T^kY\|)}=v(X, Y)-\frac{1}{t^2(\|X-Y\|)}.$$

Так как при $X\neq Y$ $\dfrac{1}{t^2(\|X-Y\|)}>0$, то этим и доказано наше неравенство.

Теорема доказана.

В приложениях часто удобно пользоваться следующей теоремой, являющейся простым следствием предыдущей [38, 39].

Теорема 7.4. *Пусть система* (7.1) *диссипативна и существует функция* $v(X, Y, t)$ *со следующими свойствами*:

1) $v(X, Y, t) = v(X, Y, t + \omega)$,

2) $v(X, Y, t) \geqslant 0$ *и* $v(X, Y, t) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $X = Y$,

$$3)\ \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} f_k(X, t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k} f_k(Y, t) \leqslant 0 \quad и$$

$\dot{v} = 0$ *в том и только в том случае, когда* $X = Y$ (*под* x_k, y_k, f_k *понимаются, как обычно, компоненты векторов* X, Y *и* F *соответственно*). *Тогда система* (7.1) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Рассмотрим два решения $X(t, X_0, 0)$ и $X(t, Y_0, 0)$ системы (7.1), считая, что $X_0 \neq Y_0$. Из третьего свойства функции v следует неравенство

$$\frac{d}{dt} v(X(t, X_0, 0), X(t, Y_0, 0), t) < 0.$$

Отсюда вытекает соотношение $v(X_0, Y_0, 0) > v(TX_0, TY_0, \omega) = v(TX_0, TY_0, 0)$. Теперь ясно, что функция $v(X, Y, 0)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.2, что и доказывает наше утверждение.

Используя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.6, нетрудно показать, что теорема 7.4 допускает обращение, однако мы на этом не останавливаемся.

3. Укажем теперь несколько достаточных условий конвергенции для конкретных систем. Рассмотрим систему [40]

$$\frac{dX}{dt} = AX + G(X, t), \tag{7.11}$$

где A — постоянная квадратная матрица с элементами a_{ij} ($i, j = 1, \ldots, n$), X, G — n-мерные векторы с компонентами x_i и g_i соответственно. Относительно функции $G(X, t)$ будем предполагать, что она непрерывна, обеспечивает единственность решений системы (7.11) и периодична по t с периодом ω. Кроме того, будем предполагать, что при всех X, Y и t выполняются неравенства

$$|g_i(x_1, \ldots, x_n, t) - g_i(y_1, \ldots, y_n, t)| \leqslant \varkappa \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$
$$i = 1, \ldots, n. \tag{7.12}$$

Теорема 7.5. *Если все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, а постоянная $\varkappa$ достаточно мала, то система (7.11) обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Рассмотрим систему „первого приближения"

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{7.13}$$

Хорошо известно [41], что для этой системы существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы, т. е. существует определенно-положительная форма

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \tag{7.14}$$

производная от которой по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (7.13),

$$\dot{W} = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{7.15}$$

определенно-отрицательна.

Положим

$$v(X, Y) = W(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) =$$
$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j). \tag{7.16}$$

Вычислим производную от функции $v(X, Y)$ по времени в силу дифференциальных уравнений системы (7.11):

$$\dot{v} = \sum_{i,\, j=1}^{n} c_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) +$$
$$+ \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}[g_i(x_1, \ldots, x_n, t) - g_i(y_1, \ldots, y_n, t)](x_j - y_j) +$$
$$+ \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}(x_i - y_i)[g_j(x_1, \ldots, x_n, t) - g_j(y_1, \ldots, y_n, t)]. \tag{7.17}$$

Но форма (7.15) определенно-отрицательна. Отсюда и из неравенств (7.12) следует, что при достаточно малом $\varkappa$ выполняется неравенство $\dot{v}(X, Y) \leqslant 0$ и $\dot{v}(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = Y$. Форма (7.14) определенно-положительна, поэтому $v(X, Y) \geqslant 0$ и $v(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Таким образом, функция $v(X, Y)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.4. Кроме того, как было показано ранее (см. теорему 3.1), система (7.11) диссипативна. Следовательно, система (7.11) обладает свойством конвергенции.

Теорема доказана.

Отметим, что, как следует из самого доказательства теоремы 7.5, константа $\varkappa$ в неравенстве (7.12) может быть эффективно оценена через матрицу A.

4. Рассмотрим теперь следующую систему [42]:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + G(t), \tag{7.18}$$

где X, F и G — n-мерные векторы с компонентами x_i, f_i и g_i соответственно. Вектор-функцию G будем считать непрерывной и ω-периодичной. Относительно функций $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Образуем матрицу Якоби вектор-функции $F(X)$:

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Положим

$$W(X) = \frac{1}{2}(J + J^*), \tag{7.20}$$

где J^* — транспонированная матрица J. Докажем следующее утверждение.

Теорема 7.6. *Если при всех X все характеристические числа матрицы W меньше некоторой отрицательной постоянной, то система* (7.18) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Пусть $\lambda_k(X)$ — характеристические числа матрицы $W(X)$. По условию существует такое $\delta > 0$, что при всех X выполняются неравенства $\lambda_k(X) < -\delta$. Обозначим через $X \cdot Y$ скалярное произведение векторов X и Y. Покажем, что при любых X и Y имеет место неравенство

$$(W(Y)X \cdot X) < -\delta \|X\|^2. \tag{7.21}$$

Рассматривая функцию $W(Y)X \cdot X$ как квадратичную форму компонентов вектора X, приведем ее посредством ортогонального преобразования $X = PZ$ к каноническому виду:

$$W(Y)X \cdot X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(Y) z_k^2, \tag{7.22}$$

где z_k — компоненты вектора Z. Из равенства (7.22) и неравенств $\lambda_k(Y) < -\delta$ следует неравенство

$$W(Y)X \cdot X < -\delta \|Z\|^2.$$

Но преобразование $X = PZ$ ортогонально, поэтому $\|Z\| = \|X\|$. Отсюда и вытекает неравенство (7.21).

Положим $v(X) = \|X\|^2$. Продифференцируем эту функцию по t в силу системы (7.18):

$$\dot{v} = 2F(X) \cdot X + 2G(t) \cdot X$$

или

$$\dot{v} = 2[F(X) - F(0)] \cdot X + 2[G(t) + F(0)] \cdot X. \tag{7.23}$$

Далее,

$$F(X) - F(0) = \int_0^1 J(uX) X \, du. \tag{7.24}$$

Нетрудно убедиться в следующем соотношении:

$$\int_0^1 J(uX) X \, du \cdot X = \int_0^1 W(uX) X \, du \cdot X. \tag{7.25}$$

Из равенств (7.23) — (7.25) получаем

$$\dot{v} = 2\int_0^1 W(uX) X \cdot X \, du + 2[G(t) + F(0)] \cdot X. \tag{7.26}$$

Отсюда и из (7.21) вытекает неравенство

$$\dot{v} < -2\delta \|X\|^2 + 2[G(t) + F(0)] \cdot X. \tag{7.27}$$

Функция $G(t)$ непрерывна и периодична, следовательно, ограничена; поэтому при достаточно больших $\|X\|$ $\dot{v}<0$. Из теоремы 2.5 тогда следует, что система (7.18) диссипативна.

Рассмотрим теперь функцию $v_1(X, Y)=\|X-Y\|^2$. Образуем производную от этой функции по t в силу системы (7.18):

$$\dot{v}_1=2[X-Y]\cdot[F(X)-F(Y)].$$

Используя так же, как и выше, (7.24) и тождество (7.25), получаем

$$\dot{v}_1=2\int_0^1 W(Y+u(X-Y))(X-Y)\,du\cdot(X-Y).$$

Отсюда в силу неравенства (7.21), справедливого при любых значениях аргумента матрицы W, получаем

$$\dot{v}_1<-2\delta\|X-Y\|^2. \tag{7.28}$$

Из этого неравенства следует, что функция v_1 удовлетворяет условиям теоремы 7.4, ссылка на которую и завершает доказательство.

5. В этом пункте мы рассмотрим систему прямого автоматического регулирования с одной нелинейностью и периодическими вынуждающими силами [37]:

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{\nu=1}^{n} b_{k\nu}x_\nu+h_k f(\sigma)+p_k(t),\quad \sigma=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\,(k=1,\ \ldots,\ n), \tag{7.29}$$

где $b_{k\nu}$, h_k, α_k — вещественные постоянные, функции $p_k(t)$ непрерывны и ω-периодичны, $f(\sigma)$ непрерывно дифференцируема при всех σ.

Предположим, что все характеристические числа матрицы, составленной из коэффициентов $b_{k\nu}$, простые и имеют отрицательные действительные части.

Приведем, следуя А. И. Лурье [43], систему (7.29) к каноническому виду. Будем предполагать, что при этом получится система

$$\frac{dz_\rho}{dt}=\lambda_\rho z_\rho+f(\sigma)+q_\rho(t),\quad \sigma=\sum_{k=1}^{n}\gamma_k z_k\quad(\rho=1,\ \ldots,\ n). \tag{7.30}$$

Будем считать для определенности, что первые s чисел λ_k вещественны, а остальные представляют собой $\frac{n-s}{2}$ пар комплексных сопряженных чисел. Тогда, очевидно, окажется, что $z_1, \ldots, z_s$ суть вещественные переменные, а $z_{s+1}, \ldots, z_n$ представляют собой $\frac{n-s}{2}$ пар комплексных сопряженных величин.

Будем искать для системы

$$\frac{dz_\rho}{dt} = \lambda_\rho z_\rho + f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k z_k \quad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{7.31}$$

функцию Ляпунова в виде квадратичной формы переменных z_ρ (см. [43], гл. II, § 4).

Положим

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \frac{z_\alpha z_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}. \tag{7.32}$$

Квадратичная форма $F(z_1, \ldots, z_n)$ принимает лишь вещественные значения. Это следует из того, что слагаемые этой формы или вещественны или для всякого комплексного слагаемого найдется соответствующее ему сопряженное слагаемое.

Докажем, что форма F — отрицательная знакоопределенная. Заметим, что имеет место тождество

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_\beta} = -\int_0^\infty e^{(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)\tau}\, d\tau,$$

поэтому

$$F = -\int_0^\infty \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} z_\alpha z_\beta e^{(\lambda_\alpha + \lambda_\beta)\tau}\, d\tau = -\int_0^\infty \left(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau} \right)^2 d\tau.$$

Но сумма $\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha e^{\lambda_\alpha \tau}$ представляет собой вещественную величину (комплексные слагаемые входят попарно с сопряженными), квадрат которой положителен; при различных λ_α указанная сумма может обратиться в нуль для любого τ, если каждая из переменных z_α будет нулем и только в этом случае. Поэтому F является определенно-отрицательной формой.

Составим полную производную от F по времени в силу дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_\alpha = \lambda_\alpha z_\alpha \, (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{7.33}$$

Имеем

$$\dot{F} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial z_\alpha} \lambda_\alpha z_\alpha = 2 \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha z_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} \frac{z_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}$$

или

$$\dot{F} = 2 \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} z_\alpha z_\beta + \\ + \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\beta + \lambda_\alpha} z_\alpha z_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} z_\alpha z_\beta = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} z_\beta.$$

Таким образом,

$$\dot{F} = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \right)^2. \tag{7.34}$$

Квадратичная форма

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{2}(A_1 z_1^2 + \ldots + A_s z_s^2) + \\ + (C_1 z_{s+1} z_{s+2} + C_3 z_{s+3} z_{s+4} + \ldots + C_{n-s-1} z_{n-1} z_n) \tag{7.35}$$

при положительных $A_1, \ldots, A_s, C_1, \ldots, C_{n-s-1}$, очевидно, является определенно-положительной. Ее производная по времени, взятая в силу системы (7.33), имеет вид

$$\dot{\Phi} = A_1 \lambda_1 z_1^2 + A_2 \lambda_2 z_2^2 + \ldots + A_s \lambda_s z_s^2 + \\ + C_1 (\lambda_{s+1} + \lambda_{s+2}) z_{s+1} z_{1+2} + \ldots + C_{n-s-1} (\lambda_{n-1} + \lambda_n) z_{n-1} z_n \tag{7.36}$$

и, значит, представляет собой определенно-отрицательную квадратичную форму.

Будем разыскивать функцию Ляпунова для системы (7.31) в виде

$$v(z_1, \ldots, z_n) = \Phi(z_1, \ldots, z_n) - F(a_1 z_1, \ldots, a_n z_n). \tag{7.37}$$

Производная от этой функции по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (7.31), как следует из соотношений (7.34) и (7.36), равна

$$\dot{v} = -\left(\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho z_\rho\right)^2 + A_1\lambda_1 z_1^2 + \ldots + A_s\lambda_s z_s^2 +$$
$$+ C_1(\lambda_{s+1} + \lambda_{s+2}) z_{s+1} z_{s+2} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-s-1}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) z_{n-1} z_n + f(\sigma) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{\rho=1}^{s} z_\rho \left[A_\rho - 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} \right] + \right.$$
$$\left. + \sum_{\rho=1}^{n-s} z_{s+\rho} \left[C_\rho - 2a_{s+\rho} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_{s+\rho}} \right] \right\}; \qquad (7.38)$$

причем в последней сумме для упрощения записи введены постоянные C_2, C_4, ..., C_{n-s}, равные соответственно C_1, C_3, ..., C_{n-s-1}.

Сделаем теперь следующее предположение. Предположим, что функция $f(\sigma)$ такова, что

$$f(\sigma)\sigma > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0. \qquad (7.39)$$

Добавим к правой части равенства (7.38) величину $\mu\sigma f(\sigma)$ и отнимем равное ей произведение $\mu f(\sigma) \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_\rho z_\rho$. Тогда если подчинить выбор постоянных a_1, ..., a_n, A_1, ..., A_s, C_1, ..., C_{n-s} и μ условиям

$$A_\rho - 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\rho} + \mu\gamma_\rho = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, s), \qquad (7.40)$$

$$C_\rho - 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{a_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_{s+\rho}} + \mu\gamma_{s+\rho} = 0 \quad (\rho = 1, 2, \ldots, n-s), \qquad (7.41)$$

то выражение $\dot{v}$ примет вид

$$\dot{v} = -\mu\sigma f(\sigma) - \left(\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho z_\rho\right)^2 + A_1\lambda_1 z_1^2 + \ldots + A_s\lambda_s z_s^2 + \\ + C_1(\lambda_{s+1} + \lambda_{s+2}) z_{s+1} z_{s+2} + \ldots \\ \ldots + C_{n-s-1}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) z_{n-1} z_n, \quad (7.42)$$

и при $\mu > 0$ функция $\dot{v}$ будет определенно-отрицательной.

Используя функцию v, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 7.7. *Если выполняется соотношение* (7.39) *и если можно указать такие постоянные* $A_1 > 0, \ldots, A_s > 0$, $C_1 = C_2 > 0, \ldots, C_{n-s-1} = C_{n-s} > 0$ *и* $\mu > 0$, *что система квадратных уравнений* (7.40), (7.41) *имеет вещественные корни* $a_1, \ldots, a_s$ *и* $\frac{n-s}{2}$ *пар комплексных сопряженных корней* $a_{s+1}, \ldots, a_n$, *то система* (7.29) *диссипативна.*

Доказательство. Продифференцируем функцию v по t в силу дифференциальных уравнений системы (7.30); будем иметь

$$\dot{v} = \mu f(\sigma)\sigma - \left(\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho z_\rho\right)^2 + A_1\lambda_1 z_1^2 + \ldots \\ \ldots + A_s\lambda_s z_s^2 + C_1(\lambda_{s+1} + \lambda_{s+2}) z_{s+1} z_{s+2} + \ldots \\ \ldots + C_{n-s-1}(\lambda_{n-1} + \lambda_n) z_{n-1} z_n + L(t, z_1, \ldots, z_n), \quad (7.43)$$

где $L(t, z_1, \ldots, z_n)$ есть линейная форма переменных $z_1, \ldots, z_n$ с периодическими по t коэффициентами. Ясно, что при достаточно больших значениях суммы $|z_1| + \ldots \ldots + |z_n|$ функция (7.43) окажется определенно-отрицательной. Отсюда и из теоремы 2.5 и следует наше утверждение.

Теорема 7.8. *Если выполнены условия предыдущей теоремы и если, кроме того,* $f'(\sigma) > 0$ *при всех* σ, *то система* (7.29) *обладает свойством конвергенции.*

Доказательство. Для доказательства образуем функцию

$$V\left(z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)}, z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(2)}\right) = \\ = v\left(z_1^{(1)} - z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(1)} - z_n^{(2)}\right). \quad (7.44)$$

Найдем полную производную от V по t в силу дифференциальных уравнений системы (7.30). Составим для этого сначала производные от разностей

$$\dot{z}_\rho^{(1)} - \dot{z}_\rho^{(2)} = \lambda_\rho \left(z_\rho^{(1)} - z_\rho^{(2)}\right) + f(\sigma^{(1)}) - f(\sigma^{(2)}) \qquad (\rho = 1, \ldots, n).$$

Отсюда по теореме о среднем получаем

$$\dot{z}_\rho^{(1)} - \dot{z}_\rho^{(2)} = \lambda_\rho \left(z_\rho^{(1)} - z_\rho^{(2)}\right) + f'(\tilde{\sigma})(\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}) \tag{7.45}$$
$$(\rho = 1, \ldots, n),$$

где $\tilde{\sigma}$ лежит между $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$.

Из равенств (7.31), (7.42) и (7.45) следует, что

$$\dot{V} = -\mu f'(\tilde{\sigma})(\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)})^2 - \left[\sum_{\rho=1}^{n} a_\rho \left(z_\rho^{(1)} - z_\rho^{(2)}\right)\right]^2 +$$
$$+ A_1\lambda_1\left(z_1^{(1)} - z_1^{(2)}\right)^2 + \ldots + A_s\lambda_s\left(z_s^{(1)} - z_s^{(2)}\right)^2 +$$
$$+ C_1\left(\lambda_{s+1} + \lambda_{s+2}\right)\left(z_{s+1}^{(1)} - z_{s+1}^{(2)}\right)\left(z_{s+2}^{(1)} - z_{s+2}^{(2)}\right) + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-s-1}\left(\lambda_{n-1} + \lambda_n\right)\left(z_{n-1}^{(1)} - z_{n-1}^{(2)}\right)\left(z_n^{(1)} - z_n^{(2)}\right).$$

Ясно, что при выполнении условий теоремы $\dot{V} \leqslant 0$ и $\dot{V} = 0$ тогда и только тогда, когда $z_\rho^{(1)} = z_\rho^{(2)}$ $(\rho = 1, \ldots, n)$.

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 7.4. Теорема доказана.

§ 8. Вопросы конвергенции для уравнения второго порядка

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t) \tag{8.1}$$

и уравнение с параметром

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t). \tag{8.2}$$

1. Будем изучать уравнение (8.1) в предположении, что функция $g(x)$ линейная, т. е. рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + ax = p(t). \tag{8.3}$$

Функции $f(x)$ и $p(t)$ будем считать непрерывными, а $p(t)$ еще и ω-периодической.

Теорема 8.1. *Пусть $a>0$, пусть, кроме того, существует такое $K>0$, что при всех x выполняется неравенство $f(x)\geqslant K$. Тогда для уравнения* (8.3) *выполняется свойство конвергенции.*

Доказательство. Из теоремы 4.2 следует, что уравнение (8.3) принадлежит к классу D-систем. Положим $y=\dot{x}+F(x)$, где, как обычно, $F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx$; тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-ax+p(t). \tag{8.4}$$

Введем функцию

$$v(x_1, y_1, x_2, y_2)=a(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2. \tag{8.5}$$

Вычислим полную производную от этой функции по времени, считая x_1, y_1 и x_2, y_2 решениями системы (8.4). Для этого составим производные от разностей:

$$\dot{x}_1-\dot{x}_2=y_1-y_2+F(x_2)-F(x_1),\qquad \dot{y}_1-\dot{y}_2=a(x_2-x_1).$$

Отсюда по теореме о среднем получаем

$$\dot{x}_1-\dot{x}_2=y_1-y_2+f(\tilde{x})(x_2-x_1). \tag{8.6}$$

Таким образом, можем написать

$$\dot{v}=-f(\tilde{x})(x_1-x_2)^2. \tag{8.7}$$

Пусть теперь $x_1(t)$, $y_1(t)$ и $x_2(t)$, $y_2(t)$ — два произвольных решения системы (8.4). Если $x_1(0)=x_2(0)$, $y_1(0)=y_2(0)$, то $v(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))\equiv 0$; пусть же $[x_1(0)-x_2(0)]^2+[y_1(0)-y_2(0)]^2>0$. Покажем, что тогда разность $x_1(t)-x_2(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Пусть $x_1(t^*)-x_2(t^*)=0$, тогда в силу теоремы единственности $y_1(t^*)-y_2(t^*)\neq 0$. Из первого уравнения системы (8.6) получаем при $t=t^*$

$$\dot{x}_1-\dot{x}_2=y_1-y_2\neq 0.$$

Отсюда и следует, что разность x_1-x_2 обращается в нуль лишь в изолированных точках. Поэтому и $\dot{v}$ на решениях

$x_1(t)$, $y_1(t)$ и $x_2(t)$, $y_2(t)$ обращается в нуль лишь в изолированных точках. Так как при $x_1 \neq x_2$ $\dot{v} < 0$, то ясно что функция $v(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ убывает с ростом времени. Следовательно, имеем

$$v(x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) >$$
$$> v(x_1(\omega), y_1(\omega), x_2(\omega), y_2(\omega)). \qquad (8.8)$$

Отсюда и из теоремы 7.2 и вытекает наше утверждение.

2. Будем рассматривать уравнение (8.2) при следующих предположениях:

1) Функции f, g и p непрерывны, g удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки x, а $p(t)$ имеет период ω.

2) Существуют такие положительные числа a, α, β, что $f(x) > \alpha$ при $|x| \geqslant a$, $g(x) \geqslant \beta$ при $x \geqslant a$, $g(x) \leqslant -\beta$ при $x \leqslant -a$.

3) Функция $P(t) = \int\limits_0^t p(t)\,dt$ ограничена при всех t.

Из этих условий следует, что a можно считать настолько большим, что будет выполняться также и следующее условие:

4) Существует такое положительное γ, что

$$F(x) - E \geqslant \gamma \quad \text{при} \quad x \geqslant a, \quad F(x) + E \leqslant -\gamma \quad \text{при} \quad x \leqslant -a;$$
$$G(x) > 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant a,$$

где $F(x) = \int\limits_0^x f(x)\,dx$, $G(x) = \int\limits_0^x g(x)\,dx$, а $E > 0$ таково, что $|P(t)| < E$ при всех t.

Из теоремы 4.1 следует, что уравнение (8.2) при перечисленных условиях представляет собой D-систему. Для установления конвергенции нам понадобится оценить более точно ту область, в которую попадают решения уравнения (8.2). Такого рода оценки были проведены Картрайт и Литтлвудом [44]. Мы установим здесь эти оценки, следуя книге Лефшеца [45].

Заменим, как в § 4, уравнение (8.2) эквивалентной системой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - k(F(x) - P(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Во всем дальнейшем будем считать $k \geqslant 1$.

Пусть λ_0 таково, что $|F| + E \leqslant \lambda_0$ при $|x| \leqslant a$, а λ_1 — положительная постоянная, которую мы определим позже. Рассмотрим прямоугольник R:

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant k\lambda_0 + \lambda_1. \tag{8.10}$$

Покажем, что любое решение системы (8.9) с возрастанием времени попадает в прямоугольник R.

Лемма 8.1. *Пусть $|x_0| \leqslant a$, а $|y_0| > k\lambda_0 + \lambda_1$, тогда решение, проходящее при $t = t_0$ через точку x_0, y_0, либо войдет при возрастании t в прямоугольник R, либо покинет полосу $|x| \leqslant a$.*

Доказательство. Разделим второе уравнение системы (8.9) на первое, тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x)}{y - k(F(x) - P(t))}. \tag{8.11}$$

Внутри полосы $|x| \leqslant a$ имеем $|F(x) - E| \leqslant \lambda_0$; значит, внутри этой полосы за пределами R имеем $|y - k(F(x) - P(t))| \geqslant \lambda_1$. Кроме того, $|g(x)| \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant \frac{\delta}{\lambda_1} = m_0. \tag{8.12}$$

Отсюда и следует, что с возрастанием времени рассматриваемое решение покинет полосу $|x| \leqslant a$, если оно остается вне R. При этом ясно, что выше прямоугольника R все решения проходят полосу $|x| \leqslant a$ при возрастании x, а ниже этого прямоугольника при убывании x.

Замечание. Время прохождения решениями полосы $|x| \leqslant a$ вне прямоугольника R имеет положительную верхнюю границу τ_1.

Действительно, пусть, например, решение проходит полосу $|x| \leqslant a$ выше R, тогда из первого уравнения системы получим

$$dx = [y - k(F(x) - P(t))]\,dt > \lambda_1\,dt.$$

Следовательно,

$$t_1 - t_2 \leqslant \frac{2a}{\lambda_1} = \tau_1,$$

где под t_1 и t_2 понимаются моменты пересечения рассматриваемого решения с прямыми $x = \pm a$.

Лемма 8.2. Всякое решение, начинающееся вне полосы $|x| \leqslant a$, достигает ее за конечное время.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x). \tag{8.13}$$

Дифференцируя равенство (8.13) по t в силу дифференциальных уравнений системы (8.9), получаем

$$\dot{v} = -kg(x)[F(x) - P(t)]. \tag{8.14}$$

Возьмем произвольную точку x_0, y_0 вне полосы $|x| \leqslant a$. Пусть для определенности $x_0 > a$. Рассмотрим решение $x(t)$, $y(t)$ с начальными данными $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = t_0$. До тех пор пока это решение остается вне полосы $|x| \leqslant a$, вдоль него выполняются неравенства $g(x) \geqslant \beta$ и $F(x) - P(t) \geqslant \gamma$. Поэтому на этом решении выполняется неравенство

$$\frac{dv}{dt} < -k\beta\gamma. \tag{8.15}$$

До тех пор пока рассматриваемое решение находится вне полосы $|x| \leqslant a$, на нем выполняется неравенство $v > 0$. Поэтому решение должно покинуть полуплоскость $x \geqslant a$ в момент времени $t = \tau$ и $\tau - t_0 < \frac{1}{k\beta\gamma} v(x_0, y_0)$.

Лемма доказана.

Лемма 8.3. Если λ_1 достаточно велико, то любое решение системы (8.9) *с возрастанием времени попадает в прямоугольник R.*

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t)$, $y(t)$ системы (8.9) и предположим, вопреки утверждению леммы, что оно при всех t остается за пределами прямоугольника R. Из лемм 8.1 и 8.2 следует, что тогда это решение бесчисленное множество раз пересекает каждую из прямых $x = \pm a$. Пусть t_1 и t_2 — два последовательных момента пересечения нашего решения с прямой $x = -a$. Покажем, что существует такое q, что $y^2(t_1)-y^2(t_2)\geqslant kq$. Для определенности будем считать, что $y(t_1)>0$. При возрастании t от t_1 рассматриваемое решение попадает в полосу $|x|\leqslant a$ и затем при $t=\theta_1$ пересечет прямую $x=a$ и попадет в полуплоскость $x>a$.

Из леммы 8.2 вытекает, что при дальнейшем возрастании t наше решение пересечет прямую $x=a$ при $t=\theta_2>\theta_1$. При этом ясно, что $y(\theta_2)<0$, ибо при $x=a$ и $y>\lambda_0 k+\lambda_1$ $\dot{x}>0$. Далее, при $t=\theta_3$ наше решение пересечет прямую $x=-a$, а затем при $t=t_2>\theta_3$ опять пересечет эту же прямую.

Найдем приращение $\Delta_1 v$ функции v вдоль нашего решения при изменении t от t_1 до θ_1. Из равенства (8.14) получаем

$$|\Delta_1 v|=k\left|\int_{t_1}^{\theta_1} g(x)[F(x)-P(t)]\,dt\right|=$$

$$=k\left|\int_{-a}^{+a}[F(x)-P(t)]\frac{dy}{dx}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant k\int_{-a}^{+a}(|F|+E)\left|\frac{dy}{dx}\right|dx\leqslant 2ak\lambda_0 m_0=\frac{2ak\lambda_0\delta}{\lambda_1}.$$

Такая же оценка справедлива, очевидно, и для приращения $\Delta_3 v$ функции v на промежутке $\theta_2\leqslant t\leqslant\theta_3$. Следовательно, полное приращение v на этих двух промежутках удовлетворяет неравенству

$$\Delta_1 v+\Delta_3 v\leqslant\frac{4ak\lambda_0\delta}{\lambda_1}. \tag{8.16}$$

С другой стороны, на промежутке времени от θ_1 до θ_2 функция v убывает и в то же время убывает и y. Пусть $\Delta_2 v$ — приращение v вдоль нашего решения при $\theta_1\leqslant t\leqslant\theta_2$. Имеем

$$\Delta_2 v=-k\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(x)[F(x)-P(t)]\,dt=k\int_{y(\theta_1)}^{y(\theta_2)}[F(x)-P(t)]\,dy. \tag{8.17}$$

Но при $\theta_1\leqslant t\leqslant\theta_2$ $x\geqslant a$, и поэтому $F(x)-E\geqslant\gamma$. Кроме того, ясно, что $y(\theta_1)>\lambda_1$, а $y(\theta_2)<-\lambda_1$, так как прямоугольник R имеет вертикальную сторону длиннее, чем $2\lambda_1$. Следовательно, из (8.17) вытекает оценка $\Delta_2 v < -2k\lambda_1\gamma$.

Для приращения $\Delta_4 v$ функции v на промежутке $\theta_3 \leqslant t \leqslant t_2$ справедлива, конечно, такая же оценка, и поэтому

$$\Delta_2 v + \Delta_4 v < -4k\lambda_1\gamma. \tag{8.18}$$

Пусть Δv — приращение v вдоль рассматриваемого решения на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Складывая (8.16) и (8.18), получаем

$$v(t_1) - v(t_2) \geqslant 4k\left(\lambda_1\gamma - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\delta\right).$$

Выберем $\lambda_1 > \sqrt{\lambda_0 a \frac{\delta}{\gamma}}$ и положим $q = 8\left(\lambda_1\gamma - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} a\delta\right) > 0$. Тогда будем иметь

$$y^2(t_1) - y^2(t_2) = 2(v(t_1) - v(t_2)) \geqslant kq. \tag{8.19}$$

Но тогда ясно, что после достаточно большого числа пересечений с прямой $x = -a$ рассматриваемое решение попадет в прямоугольник R. Это противоречит предположению о том, что наше решение при всех t находится вне R. Противоречие доказывает лемму.

Установим теперь следующие теоремы, важные для дальнейшего.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия* 1) — 3) *настоящего пункта, пусть* $k > 1$, *тогда существует такое* $M > 0$, *что всякое решение системы* (8.9) *попадает с возрастанием времени в область* $|x| < M$, $|y| < M(1+k)$ *и при дальнейшем возрастании времени остается в ней.*

Доказательство. Если решение остается в прямоугольнике R, то теорема доказана. По лемме 8.3 всякое решение достигает этого прямоугольника. Предположим, что оно покидает его, например, при $x = a$ в момент $t = t_0$, когда значение $\frac{dx}{dt}$ равно $\dot{x}_0$. Траектория точки совершит поворот в момент t, когда $\frac{dx}{dt} = 0$. Интегрируя уравнение (8.2), находим

$$-\dot{x}_0 + k(F(x) - F(a)) + \beta(t - t_0) \leqslant k(P(t) - P(t_0)) \leqslant 2kE,$$

так как $g > \beta$ при $x \geqslant a$ и $|P(t)| \leqslant E$. Следовательно,

$$k(F(x) - F(a)) \leqslant 2kE + \dot{x}_0. \tag{8.20}$$

Из первого уравнения системы (8.9) следует, что при $x = a$ наибольшее возможное значение $\dot{x}_0$ имеет вид $kC + D \leqslant k(C + D)$ (где C и D — положительные постоянные, не зависящие от k). Следовательно, (8.20) дает для $x \geqslant a$

$$F(x) \leqslant F(a) + 2E + C + D = K > 0.$$

Так так функция $F(x)$ монотонно возрастает при $x \geqslant a$, то наше неравенство дает нам $x \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \geqslant a$. Отсюда уже нетрудно вывести утверждение теоремы.

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и если $f(x) \geqslant A > 0$ при всех x, то для любого решения при достаточно большом t выполняется неравенство $\left|\frac{dx}{dt}\right| < N$, где N — достаточно большая постоянная, не зависящая от k.*

Доказательство. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ не может оказаться $\dot{x}(t) > \varepsilon$ при всех достаточно больших t, так как $|x(t)|$ ограничен. Следовательно, либо $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и тогда теорема доказана, либо $\dot{x}(t)$ бесконечно колеблется с ростом t.

Если t_1 — одна из точек максимума $\dot{x}(t)$, то $\ddot{x}(t_1) = 0$. Поэтому из уравнения (8.2) получаем

$$\dot{x}(t_1) = \frac{kp(t_1) - g(x(t_1))}{kf(x(t_1))}.$$

Так как по предыдущей теореме $|x|$ ограничен величиной, не зависящей от k, то и $|g(x)| < L$, где L не зависит от k. Отсюда, поскольку $k > 1$, получаем

$$\dot{x}(t_1) < \frac{k \max p(t) + L}{kA} \leqslant \frac{k(\max p(t) + L)}{kA} = K,$$

где K не зависит от k. Таким образом, $\dot{x}(t)$ имеет фиксированную и не зависящую от k верхнюю границу во всех максимумах, и, следовательно, при всех достаточно больших t. Аналогичное справедливо и для минимумов.

Теорема доказана.

Обратим внимание на следующие обстоятельства. Пусть точка x_0, y_0 лежит в прямоугольнике R; тогда, как следует непосредственно из доказательства теоремы 8.2, при всех $t \geqslant t_0$ выполняются неравенства

$$|x(t)| < M, \quad |y(t)| < M(1+k), \tag{8.21}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение с начальными данными t_0, x_0, y_0.

Из доказательства теоремы 8.3 вытекает, что существует такое $\tau_1 \geqslant 0$, что на нашем решении при всех $t \geqslant t_0 + \tau_1$ будут выполняться неравенства

$$|x(t)| < M, \quad \frac{dx}{dt} < N, \tag{8.22}$$

при этом величина τ_1 не зависит ни от параметра k, ни от точки (x_0, y_0, t_0). Действительно, неравенство $|x| < M$ просто следует из (8.21). Докажем, что и неравенство $\left|\frac{dx}{dt}\right| < N$ выполняется при $t \geqslant t_0 + \tau_1$. Если это неравенство выполняется при $t = t_0$, то, как следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 8.3, оно выполняется и при всех $t > t_0$. Пусть же при $t = t_0$ $\frac{dx}{dt} \geqslant N$. Так как $|x| < M$ при всех $t \geqslant t_0$, то ясно, что неравенство $\frac{dx}{dt} \geqslant N$ может выполниться лишь при $t - t_0 < \frac{2M}{N} = \tau_1$. При $t \geqslant t_0 + \tau_1$ будут выполнены оба неравенства (8.22).

Как следует из леммы 8.3, система (8.9) диссипативна (это же, впрочем, вытекает и из теоремы 4.1). Образуем для этой системы множества I и S (определение множеств I и S см. на стр. 33 и 36 соответственно).

Из всего сказанного следует, что для любой точки множества S выполняются неравенства

$$|x| \leqslant M, \quad \left|\frac{dx}{dt}\right| = |y - k(F(x) - P(t))| < N. \tag{8.23}$$

Кроме того, в силу теоремы 2.3 множество S устойчиво. Поэтому можно указать столь малую окрестность U множества I, что на любом решении, проходящем при $t = 0$ через U, будут выполняться неравенства (8.23).

3. Будем рассматривать теперь уравнение (8.2) при более жестких ограничениях. Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) Функции f, g и p непрерывны, g удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки x, а $p(t)$ имеет период ω.

2) Существует такая положительная постоянная α, что $f(x) \geqslant \alpha$ при всех x.

3) Функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в промежутке $|x| \leqslant M$, где M — число, определяемое теоремой 8.2. При $|x| \leqslant M$ $g'(x) > 0$. Существует такое $\beta > 0$, что при $|x| \geqslant M$ $g(x) \operatorname{sign} x \geqslant \beta$.

4) Существует положительное E такое, что

$$|p(t)| \leqslant E, \quad |P(t)| = \left| \int_0^t p(t)\,dt \right| \leqslant E \quad \text{при всех } t.$$

При этих условиях мы докажем следующую теорему о конвергенции в уравнении (8.2) [46].

Теорема 8.4. *Пусть выполнены условия* 1) — 4) *настоящего пункта. Тогда при $k > k_0$, где*

$$k_0 = \frac{1}{2} N \max_{|x| \leqslant M} \frac{g''(x)}{f(x)\, g'(x)}, \tag{8.24}$$

а постоянные M и N определяются теоремами 8.2 *и* 8.3, *имеет место конвергенция.*

Доказательство. Зафиксируем $k > k_0$. Установим, что при сделанных предположениях множество I диссипативной системы (8.9) вырождается в точку. Этим самым теорема будет доказана.

Допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что множество I содержит две различные точки. Пусть расстояние между этими точками равно $d > 0$. Возьмем две какие-нибудь точки (x_{10}, y_{10}) и (x_{20}, y_{20}), лежащие в множестве I, и соединим их гладкой дугой γ без самопересечений, целиком лежащей в U (U — это окрестность множества I, определенная в конце предыдущего пункта). Пусть $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ — параметрическое уравнение дуги γ, так что $\varphi(0) = x_{10}$, $\psi(0) = y_{10}$, $\varphi(1) = x_{20}$, $\psi(1) = y_{20}$. Нетрудно видеть, что кривые γ могут быть выбраны так, что будет существовать постоянная Γ, не зависящая от выбора точек на l и от выбора кривой γ, такая, что будет выполняться неравенство $[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2 \leqslant \Gamma$ при любом выборе точек на l и при любом $u \in [0, 1]$.

Проведем через все точки дуги γ решения системы (8.9) $x(t, u)$, $y(t, u)$, так что $x(0, u)=\varphi(u)$, $y(0, u)=\psi(u)$. Дуга γ лежит в U. По определению U будем иметь при всех

$$|x(t, u)|<M, \quad |\dot{x}(t, u)|=|y(t, u)-k(F(x)-P(t))|<N. \tag{8.25}$$

Обозначим через $C(t)(t \geqslant 0)$ кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x=x(t, u), \quad y=y(t, u) \quad (0 \leqslant u \leqslant 1). \tag{8.26}$$

Поскольку расстояние между точками $x(t, 0)$, $y(t, 0)$ и $x(t, 1)$, $y(t, 1)$ меньше или равно длине кривой $C(t)$, мы имеем неравенство

$$\{[x(t, 0)-x(t, 1)]^2+[y(t, 0)-y(t, 1)]^2\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ \leqslant \int_0^1 \left\{\left[\frac{\partial x(t, u)}{\partial u}\right]^2+\left[\frac{\partial y(t, u)}{\partial u}\right]^2\right\} du. \tag{8.27}$$

Положим

$$v_1(t, u)=\frac{\partial x(t, u)}{\partial u}, \quad v_2(t, u)=\frac{\partial y(t, u)}{\partial u}. \tag{8.28}$$

Нетрудно проверить, что функции $v_1(t, u)$ и $v_2(t, u)$ удовлетворяют следующей системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_1}{dt}=v_2-kf(x(t, u))v_1, \quad \frac{dv_2}{dt}=-g'(x(t, u))v_1. \tag{8.29}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$W(t, u)=g'(x(t, u))v_1^2+v_2^2-2\eta v_1 v_2 \quad (t \geqslant 0, \ 0 \leqslant u \leqslant 1). \tag{8.30}$$

W представляет собой квадратичную форму переменных v_1 и v_2 с коэффициентами, зависящими от t и u. Выберем положительную постоянную η таким образом, чтобы эта форма была определенно-положительной равномерно относительно

$|x| \leqslant M$. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы число η удовлетворяло неравенству

$$\eta^2 < \min_{|x| \leqslant M} g'(x). \tag{8.31}$$

Найдем полную производную от функции W по времени t в силу дифференциальных уравнений системы (8.9) и (8.29).

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (g''(x)\,\dot{x} - 2kg'(x)f(x) + 2\eta g'(x))\,v_1^2 - \\ - 2\eta v_2^2 + 2k\eta f(x)\,v_1 v_2. \tag{8.32}$$

Дуга γ лежит в U, а k зафиксировано так, что $k > k_0$, поэтому при всех $t \geqslant 0$ $|x| \leqslant M$, $|\dot{x}| \leqslant N$; следовательно, при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$g''(x)\,\dot{x} - 2kg'(x)f(x) \leqslant -\mu < 0, \tag{8.33}$$

где μ — некоторая достаточно малая постоянная. Пусть $\varkappa > 0$ таково, что $g'(x) < \varkappa$ и $f(x) < \varkappa$ при $|x| \leqslant M$. Тогда из (8.32) и (8.33) следует неравенство

$$\frac{\partial W}{\partial t} \leqslant (-\mu + 2\eta\varkappa)\,v_1^2 + 2k\eta f(x)\,v_1 v_2 - 2\eta v_2^2. \tag{8.34}$$

При достаточно малом η форма, стоящая в правой части последнего неравенства, определенно-отрицательна. Зафиксируем η таким образом, чтобы правая часть неравенства (8.34) была определенно-отрицательна и чтобы выполнялось неравенство (8.31). Тогда функция W будет представлять собой форму, равномерно положительно-определенную при $|x| \leqslant M$. Значит, существует такое $\lambda > 0$, что при всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial W(t, u)}{\partial t} \leqslant -\lambda W(t, u). \tag{8.35}$$

Таким образом, при $t \geqslant 0$ имеем

$$W(t, u) \leqslant W(0, u)\,e^{-\lambda t}.$$

Из вида функции W и неравенства $[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2 = v_1^2(0, u) + v_2^2(0, u) < \Gamma$ следует, что существует такое число $\overline{W}$, не зависящее от выбора точек на l и кривой γ, что

$$W(t, u) \leqslant \overline{W} e^{-\lambda t}. \tag{8.36}$$

Так как функция $W(t, u)$ представляет собой равномерно определенно-положительную при $t \geqslant 0$ форму переменных v_1 и v_2, то из неравенства (8.36) следует существование такого τ, что при $t \geqslant \tau$ и при любом выборе двух точек из I будем иметь неравенство

$$\left\{v_1^2(t, u)+v_2^2(t, u)\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{d}{2}. \tag{8.37}$$

Возьмем теперь столь большое натуральное n, чтобы оказалось $n\omega > \tau$.

Из неравенства (8.27) следует

$$\{[x(n\omega, 0)-x(n\omega, 1)]^2+[y(n\omega, 0)-y(n\omega, 1)]^2\}^{\frac{1}{2}} < \frac{d}{2}. \tag{8.38}$$

Так как точки (x_{10}, y_{10}) и (x_{20}, y_{20}) — любые две точки множества I, а само множество I инвариантно относительно преобразования T^n, то и точки $(x(n\omega, 0), y(n\omega, 0))$ и $(x(n\omega, 1), y(n\omega, 1))$ — произвольные точки множества I. Из неравенства (8.38) следует, что расстояние между различными точками множества I меньше, чем $\frac{d}{2}$. Но по определению в множестве I существуют две точки, расстояние между которыми равно d. Полученное таким образом противоречие и доказывает теорему.

ГЛАВА II

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

§ 9. Уравнение первого порядка

Будем рассматривать случай, когда в уравнении (1.1) $n = 1$, т. е. x представляет собой скалярную величину

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \tag{9.1}$$

Как обычно, будем предполагать, что $F(x, t)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности при всех x, t и $F(x, t + \omega) \equiv F(x, t)$.

1. Предположим, что уравнение (9.1) имеет решение $x = \varphi(t)$, ограниченное при $t \geqslant t_0$. В силу периодичности функции $F(x, t)$ можем считать, не нарушая общности, что решение $x = \varphi(t)$ задано при $t = 0$. Рассмотрим последовательность $x_k = \varphi(k\omega)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Если $\varphi(0) = \varphi(\omega)$, то решение $x = \varphi(t)$ — ω-периодическое, и при любых целых k и l будем иметь $\varphi(k\omega) = \varphi(l\omega)$. Пусть же $\varphi(0) \neq \varphi(\omega)$. Покажем, что в этом случае последовательность x_k монотонна. Будем считать для определенности, что $\varphi(0) < \varphi(\omega)$. Покажем, что тогда

$$\varphi(\omega) < \varphi(2\omega). \tag{9.2}$$

Предположим, напротив, что это не так, т. е. что выполняется неравенство

$$\varphi(\omega) \geqslant \varphi(2\omega). \tag{9.3}$$

Рассмотрим решение $x = \psi(t)$ уравнения (9.1) с начальным данным $\psi(\omega) = \varphi(0)$. Из периодичности $F(x, t)$ следует, что $\psi(t)=\varphi(t-\omega)$. Поэтому $\psi(2\omega)=\varphi(\omega)$. Имеем $\psi(\omega)=\varphi(0)<\varphi(\omega)$. С другой стороны, из (9.3) следует неравенство $\psi(2\omega)\geqslant\varphi(2\omega)$. Из этих неравенств вытекает, что на промежутке $\omega<t\leqslant 2\omega$ существует такое t^*, что $\varphi(t^*)=\psi(t^*)$. А это невозможно в силу единственности решений уравнения (9.1). Противоречие и доказывает неравенство (9.2).

Аналогично доказывается, что при любом натуральном k выполняется неравенство

$$\varphi(k\omega)<\varphi((k+1)\omega). \tag{9.4}$$

Мы предположим, что решение $x=\varphi(t)$ ограничено при $t\geqslant 0$. Поэтому последовательность $\varphi(k\omega)$ ограничена и существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(k\omega)=a. \tag{9.5}$$

Рассмотрим решение $x=\chi(t)$ с начальным данным $\chi(0)=a$. Покажем, что оно периодическое. Положим $\varphi_k(t)=\varphi(t+k\omega)$. Так как правая часть уравнения (9.1) ω-периодична по t, то каждая из функций $\varphi_k(t)$ представляет собой решение. Кроме того, из определения $\varphi_k(t)$ и соотношения (9.5) вытекает, что $\varphi_k(0)\to a$ при $k\to\infty$. Следовательно, по теореме об интегральной непрерывности $\varphi_k(\omega)\to\chi(\omega)$ при $k\to\infty$. Но $\varphi_k(\omega)=\varphi((k+1)\omega)\to a$ при $k\to\infty$. Отсюда вытекает, что $\chi(\omega)=a=\chi(0)$. Таким образом, решение $x=\chi(t)$ имеет период ω.

Докажем, что решение $x=\varphi(t)$ асимптотически приближается к решению $x=\chi(t)$, т. е. что

$$\lim_{t\to\infty}(\varphi(t)-\chi(t))=0. \tag{9.6}$$

Возьмем $\varepsilon>0$, по этому ε для любого решения $x=x(t)$ найдется такое $\delta>0$, что

$$|x(t)-\chi(t)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\omega, \tag{9.7}$$

если $|x(0)-a|<\delta$. Пусть k_1 столь велико, что при $k>k_1$ $|\varphi(k\omega)-a|<\delta$; тогда ясно, что при $t\geqslant k\omega$ $|\varphi(t)-\chi(t)|<\varepsilon$. Это доказывает соотношение (9.6).

Таким образом, установлена

Теорема 9.1. *Если решение $x=\varphi(t)$ ограничено при $t\geqslant t_0$ (при $t\leqslant t_0$), то либо оно само ω-периодическое,* *либо приближается к некоторому ω-периодическому решению асимптотически при $t \to +\infty$ (при $t \to -\infty$).*

2. Изолированные периодические решения уравнения (9.1) обладают некоторыми замечательными свойствами.

Определение 9.1. Периодическое решение $x=\chi(t)$ называется изолированным, если существует такое $h>0$, что в области

$$\chi(t)-h \leqslant x \leqslant \chi(t)+h \tag{9.8}$$

нет периодических решений, отличных от $x=\chi(t)$.

Теорема 9.2. *Если изолированное периодическое решение $x=\chi(t)$ уравнения (9.1) устойчиво по Ляпунову, то оно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. По h, взятому из определения изолированного периодического решения, найдем такое $\delta>0$, что все решения с начальными данными $|x(0)-\chi(0)|<\delta$ удовлетворяют неравенствам (9.8) при $t \geqslant 0$. Пусть $x=\varphi(t)$ — решение уравнения (9.1), такое, что $|\varphi(0)-\chi(0)|<\delta$. Это решение не может быть периодическим, так как $x=\chi(t)$ изолировано. Следовательно, $\varphi(t)$ должно асимптотически приближаться к периодическому решению, лежащему в полосе (9.8). Но таким периодическим решением может быть только $\chi(t)$. Таким образом, все решения уравнения (9.1) с начальными данными при $t=0$, мало отличающимися от $\chi(0)$, стремятся к $\chi(t)$ при $t \to +\infty$.

Это и доказывает теорему.

Пусть опять $x=\chi(t)$ — изолированное периодическое решение. Покажем, что любое решение, которое при $t=0$ оказывается достаточно близким к $x=\chi(0)$, асимптотически приближается к $x=\chi(t)$ либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. По числу h из соотношения (9.8) найдем $\delta>0$, такое, что если $|x(0)-\chi(0)|<\delta$, то решение $x(t)$ лежит в полосе (9.8) при $-\omega \leqslant t \leqslant +\omega$. Пусть $x=\varphi(t)$ — решение (9.1), такое, что $|\varphi(0)-\chi(0)|<\delta$; для определенности будем считать $\varphi(0)<\chi(0)$. Так как $x=\chi(t)$ — изолированное периодическое решение, то ясно, что $\varphi(0) \neq \varphi(\omega)$. Пусть сначала $\varphi(0)<\varphi(\omega)$. В этом случае последовательность $\varphi(k\omega)$ определена и возрастает вместе с k. Положим $a=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(k\omega)$. Нетрудно видеть, что $a \leqslant \chi(0)$. Но решение с начальными данными $t=0$, $x=a$ периодическое, и так как в полосе (9.8) имеется лишь одно периодическое решение, то это решение совпадает с $x=\chi(t)$; следовательно, $a=\chi(0)$. А отсюда вытекает соотношение

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi(t)-\chi(t)]=0. \tag{9.9}$$

Пусть теперь $\varphi(0)>\varphi(\omega)$. В этом случае, как следует из предыдущих рассуждений, $\varphi(-\omega)>\varphi(0)$. Но тогда последовательность $\varphi(-k\omega)$ определена и возрастает. Пусть $a=\lim\varphi(-k\omega)$. Так же, как и в случае $\varphi(0)<\varphi(\omega)$, докажется, что $a=\chi(0)$ и

$$\lim_{t\to-\infty}[\varphi(t)-\chi(t)]=0.$$

3. Укажем теперь на одно интересное свойство решений уравнения (9.1).

Теорема 9.3. *Любое решение $\varphi(t)$ уравнения* (9.1) *ограничено при возрастании t либо сверху, либо снизу.*

Доказательство. Мыслимы две возможности: либо решение $x=\varphi(t)$ продолжимо на все моменты времени $t\geqslant t_0$, либо нет. Предположим сначала, что существует такое $\tau>t_0$, что при $t\to\tau$ решение $x=\varphi(t)$ уходит в бесконечность. По известной теореме о продолжимости решений выполняется соотношение $\lim\limits_{t\to\tau}|\varphi(t)|=\infty$. Но тогда ясно, что имеет место одно из двух равенств:

$$\lim_{t\to\tau}\varphi(t)=+\infty,\quad \lim_{t\to\tau}\varphi(t)=-\infty.$$

А отсюда и следует, что $\varphi(t)$ при $t\geqslant t_0$ ограничена либо сверху, либо снизу.

Предположим теперь, что решение $x=\varphi(t)$ продолжимо на всю полуось $t\geqslant t_0$. Если $\varphi(t_0)=\varphi(t_0+\omega)$, то решение $x=\varphi(t)$ периодично и, значит, ограничено. Пусть $\varphi(t_0)\neq\varphi(t_0+\omega)$; для определенности будем считать, что $\varphi(t_0)<\varphi(t_0+\omega)$. Положим $m=\min\varphi(t)$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\omega$. Докажем, что $\varphi(t)\geqslant m$ при $t\geqslant t_0$.

Допустим, напротив, что существует $t^*>t_0$ такое, что

$$\varphi(t^*)<m. \tag{9.10}$$

Пусть $k\geqslant 1$ таково, что $k\omega+t_0<t^*\leqslant(k+1)\omega+t_0$. Рассмотрим решение $x=\varphi_1(t)$, $\varphi_1(t_0)=\varphi(t_0+k\omega)$. Так как $\varphi(t_0)<\varphi(t_0+\omega)$, то ясно, что

$$\varphi(t_0)<\varphi_1(t_0)=\varphi(k\omega+t_0). \tag{9.11}$$

Из периодичности правой части уравнения и неравенства (9.10) следует, что

$$\varphi_1(t^*-t_0-k\omega)<m\leqslant\varphi(t^*-t_0-k\omega).$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (9.11) противоречит теореме единственности.

Теорема доказана.

4. Рассмотрим случай аналитической зависимости F от x. Предположим, что при любом $x_0\in[a,\ b]$ функция $F(x,\ t)$ представима в виде

$$F(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(t)(x-x_0)^n \tag{9.12}$$

и ряд, стоящий справа, сходится абсолютно и равномерно при всех $t\in(-\infty,\ +\infty)$ и $|x-x_0|<\alpha$, где α — положительное число.

Введем в рассмотрение функцию последования $p(c)$. Пусть, как обычно, $x(t,\ c,\ 0)$ — решение (9.1) с начальными данными при $t=0$, $x=c$. Предположим, что $x(t,\ c,\ 0)$ определено и непрерывно при $0\leqslant t\leqslant\omega$; тогда функция p задана в точке c и $p(c)=x(\omega,\ c,\ 0)$. Хорошо известно, что функция $p(c)$ аналитична в точке c, если $x(t,\ c,\ 0)\in[a,\ b]$ при $t\in[0,\ \omega]$.

Теорема 9.4. *Если в окрестности любой точки* $x_0\in[a,\ b]$ *функция* $F(x,\ t)$ *представима в виде* (9.12), *то либо все решения, целиком лежащие в полосе* $a\leqslant x\leqslant b$, *периодические, либо в этой полосе располагается не более чем конечное число периодических решений.*

Доказательство. Предположим, что имеется последовательность различных периодических решений $x_k=\psi_k(t)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, целиком лежащих в этой полосе. Последовательность точек $\psi_k(0)$ лежит на промежутке $[a,\ b]$; следовательно, ее можно считать сходящейся (в противном случае мы бы перешли к нужной подпоследовательности), положим $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_k(0)=\eta$ и $\chi(t)=x(t,\ \eta,\ 0)$. Решение $x=\chi(t)$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$ лежит в полосе $a\leqslant x\leqslant b$, ибо в противном случае решения $\psi_k(t)$ при достаточно больших k не могли бы удовлетворять неравенствам $a\leqslant\psi_k(t)\leqslant b$ при всех $0\leqslant t\leqslant\omega$, что противоречит определению $\psi_k(t)$.

Таким образом, в точке $c=\eta$ задана аналитическая функция $p(c)$. Составим разность $q(c)=p(c)-c$. Эта разность обращается в нуль при $c=\psi_k(0)$ по самому определению функции $p(c)$. Отсюда следует, что точка η является точкой сгущения нулей аналитической функции $q(c)$, но тогда $q(c)\equiv 0$. Следовательно, все решения, целиком лежащие в полосе $a\leqslant x\leqslant b$, периодические.

Теорема доказана.

5. В дальнейшем мы будем интересоваться поведением решений уравнения (9.1) в случае, когда функция $F(x, t)$ представляет собой полином от искомой функции. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=x^n+p_1(t)x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(t)x+p_n(t). \tag{9.13}$$

Функции $p_k(t)$ мы будем считать непрерывными, ω-периодическими.

Пусть $n\geqslant 2$. Нетрудно видеть, что существует такое $a_1>0$, что при $|x|\geqslant a_1$ выполняется неравенство

$$|x^n|-|p_1(t)x^{n-1}|-\ldots-|p_n(t)|>\frac{1}{2(n-1)}|x^n|. \tag{9.14}$$

Положим $a=\max\left\{a_1, \left(\frac{2}{\omega}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}$. Рассмотрим уравнение сравнения

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2(n-1)}x^n. \tag{9.15}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$x=\frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{(2a^{1-n}-t)^{\frac{1}{n-1}}} \tag{9.16}$$

представляет собой решение уравнения (9.15) с начальными данными $t=0$, $x=a$. Решение это, как легко убедиться, определено лишь до $t=2a^{1-n}\leqslant\omega$. Если $x_0\geqslant a$, то из (9.14) следует, что

$$x(t, x_0, 0)\geqslant\frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{(2a^{1-n}-t)^{\frac{1}{n-1}}}\quad\text{при } t\geqslant 0. \tag{9.17}$$

Отсюда вытекает, что решение $x(t, x_0, 0)$ не продолжимо на промежуток времени $0\leqslant t\leqslant\omega$.

Из сказанного следует также, что если $x_0 \geqslant a$, то решение $x(t, x_0, t_0)$ не продолжимо на весь промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \omega$ и $x(t, x_0, t_0) > a$ при $t > t_0$. Кроме того, при четном n и $x_0 \leqslant -a$ окажется $x(t, x_0, t_0) < -a$ при $t < t_0$, и решение $x(t, x_0, t_0)$ не продолжимо при $t_0 - \omega \leqslant \leqslant t \leqslant t_0$. При нечетном n и $x_0 \leqslant -a$ $x(t, x_0, t_0) < -a$ при $t > t_0$, и решение $x(t, x_0, t_0)$ не продолжимо при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \omega$.

Теорема 9.5. *Уравнение* (9.13) *может иметь лишь конечное число периодических решений.*

Доказательство. Пусть a имеет прежнее значение. Тогда при $|x| \geqslant a$ вдоль всех решений x изменяется монотонно. Следовательно, если $|x_0| \geqslant a$, то решение $x(t, x_0, t_0)$ при $t \geqslant t_0$ или при $t \leqslant t_0$ остается за пределами полосы $|x| < a$ и уходит в бесконечность. Поэтому любое периодическое решение целиком лежит в полосе $|x| \leqslant a$. По теореме 9.4 либо уравнение (9.13) имеет конечное число периодических решений, либо все решения, целиком лежащие в полосе при $0 \leqslant t \leqslant \omega$, периодические. Но если все решения, лежащие в полосе $|x| \leqslant a$, периодические, то существует периодическое решение, имеющее точки на прямой $x = a$. Это невозможно, так как такое решение уходит в бесконечность. Таким образом, уравнение (9.13) может иметь лишь конечное число периодических решений.

Расположение интегральных кривых уравнения (9.13) существенно зависит от четности числа n. Пусть сначала $n > 2$ — число нечетное. Пусть по-прежнему a_1 — число, определяемое неравенством (9.14). Ясно тогда, что при $|x| \geqslant a_1$ вдоль всех решений $|x|$ возрастает при возрастании t и убывает при убывании t. Из предыдущего следует, что любое решение $x(t, x_0, t_0)$, у которого $|x_0| \geqslant a_1$, при возрастании времени остается в множестве $|x| \geqslant a_1$ и уходит в бесконечность при конечном значении аргумента t. При убывании же t любое решение попадает в полосу $|x| < a_1$ и в ней остается. Отсюда, в частности, следует, что уравнение (9.13) при нечетном n имеет хотя бы одно периодическое решение. Может, конечно, оказаться, что периодическое решение не одно; тогда среди них имеется „наибольшее" $x = \varphi(t)$ и „наименьшее" $x = \psi(t)$. Пусть $x = x(t, x_0, t_0)$ — решение уравнения (9.13). Тогда если $\psi(t_0) \leqslant x_0 \leqslant \varphi(t_0)$, то это решение при всех t остается в полосе $\psi(t) \leqslant x \leqslant \varphi(t)$ и либо само является периодическим, либо стремится к некоторым периодическим как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Если же $x_0 > \varphi(t_0)$ (или $x_0 < \psi(t_0)$), то $x(t, x_0, t_0)$ при $t \to -\infty$ асимптотически приближается к решению $x = \varphi(t)$ (или $x = \psi(t)$), а при возрастании t уходит в бесконечность при конечном значении аргумента.

Пусть теперь $n \geqslant 2$ — число четное. Если $x_0 \geqslant a_1$, то решение $x(t, x_0, t_0)$ с возрастанием t уходит в бесконечность при конечном значении аргумента t. Если же $x_0 \leqslant -a_1$, то решение $x(t, x_0, t_0)$ с убыванием t уходит в бесконечность. При четном n уравнение (9.1) может не иметь периодических решений. Например, у уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^n + p_n(t) \tag{9.18}$$

при $p_n(t) > 0$ все решения представляют собой возрастающие функции. У таких уравнений все решения уходят в бесконечность как при возрастании, так и при убывании времени.

Предположим теперь, что уравнение (9.13) с четным n имеет периодические решения и пусть $x = \varphi(t)$ — „наибольшее“, а $x = \psi(t)$ — „наименьшее“ из них. Тогда любое решение, начинающееся в полосе $\psi(t) \leqslant x \leqslant \varphi(t)$, при всех t остается в этой полосе и либо само является периодическим, либо стремится к некоторым периодическим как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Если $x_0 > \varphi(t_0)$, то решение $x(t, x_0, t_0)$ при $t \to -\infty$ асимптотически приближается к $x = \varphi(t)$, а при возрастании времени уходит в бесконечность. Если же $x_0 < \psi(t_0)$, то решение $x = x(t, x_0, t_0)$ при $t \to +\infty$ стремится к $x = \psi(t)$, а при убывании времени уходит в бесконечность.

Таким образом, качественная картина поведения интегральных кривых уравнения (9.13) целиком зависит от периодических решений.

6. В дальнейшем мы будем интересоваться вопросом о максимально возможном количестве периодических решений у уравнения (9.13) при фиксированном n.

Если $n = 1$, то уравнение (9.13) линейное:

$$\dot{x} = x + p_1(t),$$

$$x = e^t \left[x_0 + \int_0^t p_1(t) e^{-t} dt \right]. \tag{9.19}$$

Ясно, что уравнение (9.19) имеет одно и только одно периодическое решение:

$$x = e^t \left[\frac{e^\omega}{1 - e^\omega} \int_0^\omega p_1(t) e^{-t}\, dt + \int_0^t p_1(t) e^{-t}\, dt \right]. \tag{9.20}$$

Пусть $n = 2$, т. е. уравнение (9.13) представляет собой уравнение Риккати:

$$\dot{x} = x^2 + p_1(t)\, x + p_2(t). \tag{9.21}$$

Нетрудно указать уравнения вида (9.21), имеющие точно два периодических решения. Например, уравнение

$$\dot{x} = x^2 - 1 \tag{9.22}$$

имеет ровно два периодических решения $x = 1$, $x = -1$. Все остальные решения — монотонно меняющиеся функции.

Теорема 9.6. *Уравнение* (9.21) *не может иметь более двух периодических решений.*

Доказательство. Предположим, вопреки нашему утверждению, что уравнение (9.21) имеет три различных периодических решения x_1, x_2, x_3. В силу теоремы единственности можем считать, что при всех t выполняются неравенства $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t)$. Подставляя решения x_1, x_2, x_3 в уравнение (9.21), получаем тождества:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + p_1(t)\, x_1 + p_2(t),$$
$$\dot{x}_2 = x_2^2 + p_1(t)\, x_2 + p_2(t),$$
$$\dot{x}_3 = x_3^2 + p_1(t)\, x_3 + p_2(t).$$

Вычитая первое и второе тождества из третьего, получаем

$$\dot{x}_3 - \dot{x}_1 = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) + p_1(t)(x_3 - x_1),$$
$$\dot{x}_3 - \dot{x}_2 = (x_3 - x_2)(x_3 + x_2) + p_1(t)(x_3 - x_2).$$

По предположению $x_3 > x_2$ и $x_3 > x_1$, поэтому из двух предыдущих равенств получаем

$$\frac{\dot{x}_3 - \dot{x}_2}{x_3 - x_2} - \frac{\dot{x}_3 - \dot{x}_1}{x_3 - x_1} = x_2 - x_1.$$

Проинтегрируем полученное тождество по t на промежутке $0 \leqslant t \leqslant \omega$, тогда получим

$$\ln(x_3 - x_2)\Big|_0^\omega - \ln(x_3 - x_1)\Big|_0^\omega = \int_0^\omega (x_2 - x_1)\, dt.$$

Но функции x_1, x_2 и x_3 ω-периодичны, поэтому левая часть последнего равенства равна нулю. С другой стороны, $x_2 - x_1 > 0$ по предположению; следовательно, правая часть последнего равенства положительна. Полученное противоречие свидетельствует о том, что уравнение (9.21) не может иметь более двух различных периодических решений.

Рассмотрим, наконец, случай $n = 3$, т. е. тот случай, когда уравнение (9.13) есть уравнение Абеля:

$$\dot{x} = x^3 + p_1(t)\, x^2 + p_2(t)\, x + p_3(t). \tag{9.23}$$

Легко указать примеры уравнений вида (9.23), имеющих ровно три различных периодических решения. Таково уравнение

$$\dot{x} = x^3 - x; \tag{9.24}$$

оно имеет три периодических решения $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$. Все остальные его решения суть монотонные функции.

Теорема 9.7. *Уравнение* (9.23) *не может иметь более трех периодических решений.*

Доказательство. Допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что уравнение (9.23) имеет четыре различных периодических решения: x_1, x_2, x_3, x_4. В силу теоремы единственности при всех t выполняются неравенства $x_i \neq x_k$ (при $i \neq k$). Подставляя решения $x_i(t)$ в уравнение (9.23), получаем следующие тождества:

$$\dot{x}_i = x_i^3 + p_1(t)\, x_i^2 + p_2(t)\, x_i + p_3(t) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Вычитая второе и третье тождества из первого и производя деление на отличные от нуля разности $x_1 - x_2$ и $x_1 - x_3$, получаем

$$\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + p_1(t)(x_1 + x_2) + p_2(t)$$

и

$$\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_3}{x_1 - x_3} = x_1^2 + x_1 x_3 + x_3^2 + p_1(t)(x_2 + x_3) + p_2(t).$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, получаем

$$\frac{\dot{x}_1-\dot{x}_2}{x_1-x_2}-\frac{\dot{x}_1-\dot{x}_3}{x_1-x_3}=x_1(x_2-x_3)+x_2^2-x_3^2+p_1(t)(x_2-x_3)$$

и аналогично, заменяя лишь x_1 на x_4,

$$\frac{\dot{x}_4-\dot{x}_2}{x_4-x_2}-\frac{\dot{x}_4-\dot{x}_3}{x_4-x_3}=x_4(x_2-x_3)+x_2^2-x_3^2+p_1(t)(x_2-x_3).$$

Вычтем это равенство из предыдущего, тогда получим

$$\frac{\dot{x}_1-\dot{x}_2}{x_1-x_2}-\frac{\dot{x}_1-\dot{x}_3}{x_1-x_3}-\frac{\dot{x}_4-\dot{x}_2}{x_4-x_2}+\frac{\dot{x}_4-\dot{x}_3}{x_4-x_3}=(x_1-x_4)(x_2-x_3).$$

Проинтегрируем это тождество на промежутке $[0, \omega]$, тогда получим

$$\ln\frac{(x_1-x_2)(x_4-x_3)}{(x_1-x_3)(x_4-x_2)}\Bigg|_0^{\omega}=\int_0^{\omega}(x_1-x_4)(x_2-x_3)\,dt.$$

Так как x_i — периодические функции, то левая часть этого равенства равна нулю. Под интегралом же, стоящим справа, находится непрерывная, не обращающаяся в нуль функция. Следовательно, правая часть равенства отлична от нуля. Полученное противоречие и доказывает, что уравнение Абеля не может иметь более трех различных периодических решений.

Нетрудно построить пример уравнения (9.13), имеющего ровно n периодических решений. Для этого в качестве правой части достаточно взять полином с постоянными коэффициентами, имеющий n различных вещественных корней. Эти-то корни и будут представлять собой периодические решения уравнения. Как мы только что показали, уравнение (9.13) при $n \leqslant 3$ не может иметь более n различных периодических решений (эти остроумные доказательства мне сообщил Н. В. Адамов). Естественно было бы предположить, что это же справедливо и для уравнений (9.13) с любым n. Однако это предположение оказывается неверным. В дальнейшем мы дадим пример уравнения вида (9.13) с $n=4$, которое имеет шесть различных периодических решений. Будут также указаны условия, достаточные для того, чтобы уравнение (9.13) имело не более чем n периодических решений. Кроме того, мы постараемся теоретически обосновать тот факт, что, начиная с $n=4$, появляются уравнения, число различных периодических решений которых превышает n [47].

7. Рассмотрим опять введенные ранее функции $p(c)=x(\omega, c, 0)$ и $q(c)=p(c)-c$. Функции эти заданы и аналитичны в тех точках c, в которых решения $x(t, c, 0)$ продолжимы на промежуток $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Как следует из теоремы 9.1, любое периодическое решение уравнения (9.13) имеет период ω, поэтому нули функции $q(c)$ (и только они) представляют собой начальные данные периодических решений (9.13). Таким образом, вопрос о числе и расположении периодических решений приводится к вопросу о числе и расположении нулей аналитической функции $q(c)$. В связи с этим естественно рассматривать не только вещественные, но и комплексные значения c и допустить в качестве решений комплексно-значные функции вещественного аргумента t. Положим $x=u+iv=re^{i\varphi}$. Тогда из (9.13) получаем уравнение

$$\dot{r}e^{i\varphi}+ir\dot{\varphi}e^{i\varphi}=r^n e^{in\varphi}+p_1(t)\,r^{n-1}e^{i(n-1)\varphi}+\ldots$$
$$\ldots+p_{n-2}(t)\,r^2e^{2i\varphi}+p_{n-1}(t)\,re^{i\varphi}+p_n(t).$$

Деля на $e^{i\varphi}$ и отделяя вещественную и мнимую части, получаем уравнения для аргумента и модуля x:

$$\dot{r}=r^n\cos(n-1)\varphi+\ldots+p_{n-2}(t)\,r^2\cos\varphi+$$
$$+p_{n-1}(t)\,r+p_n(t)\cos\varphi, \qquad (9.25)$$

$$r\dot{\varphi}=r^n\sin(n-1)\varphi+\ldots+p_{n-2}(t)\,r^2\sin\varphi-p_n(t)\sin\varphi. \qquad (9.26)$$

Функцию $q(c)$ по-прежнему будем определять равенством $q(c)=x(\omega, c, 0)-c$ и считать ее заданной лишь в тех точках комплексной плоскости переменного c, через которые при $t=0$ проходят решения, продолжимые на сегмент $0\leqslant t\leqslant\omega$. Нули $q(c)$ определяют ω-периодические решения уравнения (9.13) и при комплексном c. Обратно, любое ω-периодическое решение при $t=0$ проходит через нуль функции $q(c)$.

При комплексных значениях x уравнение (9.13) может иметь периодические решения с периодами, отличными от ω. Например, уравнение

$$\dot{x}=x^2+1, \quad \omega=1 \qquad (9.27)$$

имеет общее решение

$$x = \operatorname{tg}(t + B).$$

Ни одно из решений уравнения (9.27) не имеет периода, равного единице. В то же время любое решение с $\operatorname{Im} B \neq 0$ непрерывно и имеет период π. Решения же (9.27) при $\operatorname{Im} B = 0$ уходят в бесконечность как при возрастании, так и при убывании t.

Нас в дальнейшем будут особенно интересовать ω-периодические решения, поэтому только такие решения мы будем называть периодическими.

Если изменять коэффициенты уравнения (9.13), то функция $q(c)$ и ее нули будут меняться. Эти нули при непрерывном изменении коэффициентов могут „исчезать", уходя в особые точки. Особые точки $q(c)$ — это те точки плоскости комплексного переменного c, через которые при $t = 0$ проходят решения, не продолжимые на сегмент $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Изучим поведение таких решений.

Выясним качественную картину поведения решений уравнения (9.13) в окрестности бесконечно удаленной точки. Во всем дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения (9.13) удовлетворяют условию Липшица

$$|p_i(t_1) - p_i(t_2)| \leqslant L\,|t_1 - t_2| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.28}$$

Функции $p_i(t)$ — периодические и потому ограниченные; пусть M_i — такие числа, что при всех t выполняются неравенства

$$|p_i(t)| \leqslant M_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.29}$$

Положим $a = \max\{6, 6M_1\}$. Выберем число $\rho > 0$ настолько большим, чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{\pi}{4(n-1)} > \frac{a}{\rho}, \tag{9.30}$$

$$\sin\frac{(n-1)a}{r} > \frac{5}{6}\,\frac{(n-1)a}{r} \quad \text{при } r \geqslant \rho, \tag{9.31}$$

$$\sum_{k=2}^{n} M_k r^{n-k} < \frac{a}{6}\, r^{n-1} \quad \text{при } r \geqslant \rho, \tag{9.32}$$

$$r^n > 4\sum_{k=1}^{n} M_k r^{n-k} \quad \text{при } r \geqslant \rho. \tag{9.33}$$

Введем в рассмотрение области G_k, определяемые неравенствами

$$\left\{r > \rho,\ \frac{k\pi}{n-1} - \frac{a}{r} < \varphi < \frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{r}\right\} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-3),$$

и области H_k, дополняющие систему областей G_k до всей внешности цилиндра $r = \rho$. Области H_k определяем соотношениями $\left\{r > \rho,\ \frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{r} < \varphi < \frac{(k+1)\pi}{n-1} - \frac{a}{r}\right\}$. Из соотношения (9.30) следует, что замыкания областей G_k не пересекаются друг с другом. Покажем, что границы областей G_k не имеют контакта с полем линейных элементов, определяемым системой (9.25)—(9.26). Рассмотрим часть цилиндра $\left\{r = \rho,\ \frac{k\pi}{n-1} - \frac{a}{\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{\rho}\right\}$. Будем называть ее нижней стенкой области G_k. Из неравенства (9.30) следует, что на этой стенке выполняются неравенства

$$\frac{dr}{dt} > \frac{r^n}{\sqrt{2}} + p_1(t)\, r^{n-1} \cos(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(t)\, r + p_n(t) \cos\varphi$$

при четном k и

$$\frac{dr}{dt} < -\frac{r^n}{\sqrt{2}} + p_1(t)\, r^{n-1} \cos(n-2)\varphi + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(t)\, r + p_n(t) \cos\varphi$$

при k нечетном. Из этих неравенств и из соотношения (9.33) следует, что в замыкании области G_k при четном k выполняется неравенство

$$\frac{dr}{dt} > \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, r^n, \tag{9.34}$$

а при нечетном k — неравенство

$$\frac{dr}{dt} < -\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, r^n. \tag{9.35}$$

Назовем поверхности $\left\{r \geqslant \rho,\ \frac{k\pi}{n-1} - \frac{a}{r} = \varphi\right\}$ и $\left\{r \geqslant \rho,\ \varphi = \frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{r}\right\}$ первой и второй боковыми стенками области G_k соответственно. Из уравнения (9.26) и соотношений

(9.31) и (9.32) следует, что на первой боковой стенке области G_k с нечетным номером k и на второй боковой стенке области G_k с четным номером выполняется неравенство

$$r\dot{\varphi} > \frac{1}{2} ar^{n-1}. \tag{9.36}$$

На второй боковой стенке области G_k при нечетном k и на первой боковой стенке области G_k при четном k имеем

$$r\dot{\varphi} < -\frac{1}{2} ar^{n-1}. \tag{9.37}$$

Из соотношений (9.34) — (9.37) следует, что боковые и нижние стенки областей G_k суть поверхности без контакта. При этом через нижнюю стенку области G_k с четным номером все решения входят в G_k, а через боковые стенки выходят из G_k при возрастании времени. При нечетном k аналогичная картина имеет место при убывании времени, т. е. если k нечетное, то через нижнюю стенку G_k решения выходят из нее, а через боковые входят в область G_k при возрастании времени.

Изучим подробнее поведение решений в областях G_k. Из неравенства (9.33) и из уравнения (9.25) следует, что в области G_k вдоль всех решений r изменяется монотонно, поэтому можем выбрать r в качестве независимой переменной.

Положим

$$R = \cos(n-1)\varphi + \frac{1}{r} p_1 \cos(n-2)\varphi + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{r^{n-1}} p_{n-1} + \frac{1}{r^n} p_n \cos\varphi, \tag{9.38}$$

$$\Phi = \sin(n-1)\varphi + \frac{1}{r} p_1 \sin(n-2)\varphi + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{r^{n-2}} p_{n-2} \sin\varphi - \frac{1}{r^n} p_n \sin\varphi. \tag{9.39}$$

Тогда из (9.25), (9.26) получим систему

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r^n R(r, \varphi, t)}, \tag{9.40}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\Phi(r, \varphi, t)}{rR(r, \varphi, t)}. \tag{9.41}$$

Рассмотрим два решения этой системы: $t_1(r)$, $\varphi_1(r)$ и $t_2(r)$, $\varphi_2(r)$ с начальными данными при $r=\rho$ $t=t_{10}$, $\varphi=\varphi_{10}$ и $t=t_{20}$, $\varphi=\varphi_{20}$ соответственно. При этом мы будем считать, что $\varphi_{20}>\varphi_{10}$ и $|t_{20}-t_{10}|\leqslant\varphi_{20}-\varphi_{10}$. Из уравнения (9.40) получаем

$$\frac{dt_2}{dr}-\frac{dt_1}{dr}=\frac{R(r,\varphi_1,t_1)-R(r,\varphi_2,t_2)}{r^nR(r,\varphi_1,t_1)R(r,\varphi_2,t_2)}.$$

Из вида функции $R(r,\varphi,t)$ и из условия (9.28) следует, что при достаточно большом ρ в пределах области G_k выполняется неравенство

$$\left|\frac{dt_2}{dr}-\frac{dt_1}{dr}\right|<\frac{L_1}{r^{n+1}}(|t_2-t_1|+|\varphi_2-\varphi_1|), \tag{9.42}$$

где L_1 — некоторая положительная постоянная.

Уравнение (9.41) дает

$$\frac{d\varphi_2}{dr}-\frac{d\varphi_1}{dr}=\frac{1}{r}\left(\frac{\Phi_2}{R_2}-\frac{\Phi_1}{R_1}\right),$$

где положено $\Phi_i=\Phi(r,\varphi_i,t_i)$, $R_i=R(r,\varphi_i,t_i)$ $(i=1,2)$, или

$$\frac{d\varphi_2}{dr}-\frac{d\varphi_1}{dr}=\frac{1}{r}\,\frac{R_1\Phi_2-R_2\Phi_1}{R_1R_2}. \tag{9.43}$$

Имеем

$$R_1\Phi_2-R_2\Phi_1=R_1\Phi_2-R_1\Phi(r,\varphi_1,t_2)+R_1\Phi(r,\varphi_1,t_2)-$$
$$-R_1\Phi_1+R_1\Phi_1-R(r,\varphi_2,t_1)\Phi_1+R(r,\varphi_2,t_1)\Phi_1-R_2\Phi_1. \tag{9.44}$$

Согласно теореме о среднем можем написать

$$\Phi(r,\varphi_2,t_2)-\Phi(r,\varphi_1,t_2)=$$
$$=\cos[(n-1)(\varphi_1+\eta(\varphi_2-\varphi_1))](\varphi_2-\varphi_1)+O\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi_2-\varphi_1).$$

В области G_k выполняется неравенство $\left|\varphi_i-\frac{k\pi}{n-1}\right|\leqslant\frac{a}{r}$, поэтому из последнего соотношения вытекает следующая оценка:

$$\Phi(r,\varphi_2,t_2)-\Phi(r,\varphi_1,t_2)=$$
$$=(\cos k\pi)(\varphi_2-\varphi_1)+O\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi_2-\varphi_1). \tag{9.45}$$

Используя теорему о среднем и условие (9.28), установим следующие оценки:

$$\Phi(r, \varphi_1, t_2) - \Phi(r, \varphi_1, t_1) = O\left(\frac{1}{r}\right)(t_2 - t_1), \tag{9.46}$$

$$R(r, \varphi_2, t_1) - R(r, \varphi_1, t_1) = O\left(\frac{1}{r}\right)(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{9.47}$$

$$R(r, \varphi_2, t_2) - R(r, \varphi_2, t_1) = O\left(\frac{1}{r}\right)(t_2 - t_1). \tag{9.48}$$

Кроме того, непосредственно из вида функции R следует, что в пределах области G_k имеет место равенство

$$R(r, \varphi, t) = \cos k\pi + O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9.49}$$

Из равенств (9.43) и (9.44) и из найденных оценок следует, что в областях G_k выполняется оценка

$$\frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{1}{r}(\varphi_2 - \varphi_1) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)(|\varphi_2 - \varphi_1| + |t_2 - t_1|). \tag{9.50}$$

Покажем, что до тех пор, пока оба решения t_1, φ_1 и t_2, φ_2 находятся в области G_k с достаточно большим ρ, выполняется неравенство

$$\varphi_2 - \varphi_1 \geqslant |t_2 - t_1|. \tag{9.51}$$

Допустим, напротив, что существует такое r^*, что при $\rho \leqslant r \leqslant r^*$ решения $t_1(r)$, $\varphi_1(r)$ и $t_2(r)$, $\varphi_2(r)$ находятся в $\overline{G}_k$ и $\varphi_2(r^*) - \varphi_1(r^*) = |t_2(r^*) - t_1(r^*)|$, а при $r > r^*$, но достаточно близких к r^*, неравенство (9.51) нарушается. Из соотношений (9.42) и (9.50) следует, что при $r = r^*$ имеет место неравенство

$$\frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dr} > \left|\frac{d(t_2 - t_1)}{dr}\right|,$$

если только ρ достаточно велико. Последнее неравенство и доказывает выполнение неравенства (9.51) в области G_k, если ρ достаточно велико, что мы в дальнейшем будем считать выполненным.

Из соотношений (9.50) и (9.51) вытекает, что в области G_k выполняется неравенство

$$\frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dr} > \frac{1}{2r}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\ln(\varphi_2-\varphi_1)-\ln(\varphi_{20}-\varphi_{10})>\frac{1}{2}(\ln r-\ln\rho)$$

или

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\varphi_{20}-\varphi_{10}}>\sqrt{\frac{r}{\rho}}\quad\text{при}\quad r>\rho. \tag{9.52}$$

Отсюда следует, что при возрастании r хотя бы одно из рассматриваемых нами решений покинет область G_k.

Рассмотрим область G с четным номером k. На нижней стенке области G_k выберем дугу окружности $\gamma_k(t_0)$:

$$\left\{t=t_0,\ r=\rho,\ \frac{k\pi}{n-1}-\frac{a}{\rho}\leqslant\varphi\leqslant\frac{k\pi}{n-1}+\frac{a}{\rho}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что решения, начинающиеся на кривой $\gamma_k(t_0)$ достаточно близко к $\varphi=\frac{k\pi}{n-1}-\frac{a}{\rho}$ при возрастании t, покидают область G_k, пересекая первую боковую стенку. Решения же, начинающиеся на $\gamma_k(t_0)$ достаточно близко к точке $\varphi=\frac{k\pi}{n-1}+\frac{a}{\rho}$, покидают при возрастании t область G_k, пересекая вторую боковую стенку. Пусть $\varphi=f_k(t_0)$ — точная верхняя граница тех точек дуги $\gamma_k(t_0)$, через которые проходят решения, при возрастании t пересекающие первую боковую стенку. Из соображений непрерывности следует, что решение с начальными данными $t=t_0$, $r=\rho$, $\varphi=f_k(t_0)$ лежит в области G_k при всех тех $t>t_0$, при которых оно определено. Покажем, что на дуге $\gamma_k(t_0)$ существует только одна точка, обладающая таким свойством. Допустим, напротив, что существуют φ_{10} и φ_{20} на $\gamma_k(t_0)$, такие, что решения $t=t_1(r)$, $\varphi=\varphi_1(r)$ и $t=t_2(r)$, $\varphi=\varphi_2(r)$ системы (9.40), (9.41) с начальными данными $r=\rho$, $t=t_0$, $\varphi=\varphi_{10}$ и $r=\rho$, $t=t_0$, $\varphi=\varphi_{20}$ соответственно при всех $r>\rho$ лежат в области G_k. Как было только что показано, это невозможно.

Таким образом, на дуге $\gamma_k(t_0)$ имеется одна и только одна точка $\varphi=f_k(t_0)$ такая, что решение системы (9.25), (9.26) лежит в области G_k при всех $t>t_0$, при которых оно определено.

Функция $\varphi=f_k(t)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f_k(t_1)-f_k(t_2)|<|t_1-t_2|. \tag{9.53}$$

Действительно, как было показано выше, два решения системы (9.40), (9.41) с начальными данными $r=\rho$, $t=t_1$, $\varphi=f_k(t_1)$ и $r=\rho_1$, $t=t_2$, $\varphi=f_k(t_2)$ не могут при возрастании t целиком лежать в области G_k, если не выполнено неравенство (9.53). Из периодичности коэффициентов $p_j(t)$ следует, что функции $f_k(t)$ ω-периодичны.

Пусть $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ — решение системы (9.25), (9.26) с начальными данными $t=t_0$, $r=\rho$, $\varphi=f_k(t_0)$. Тогда ясно, что при возрастании времени t на этом решении выполняется неравенство (9.34). Интегрируя это неравенство, получаем

$$\frac{1}{\rho^{n-1}}-\frac{1}{r^{n-1}}>\frac{(2-\sqrt{2})(n-1)}{2\sqrt{2}}(t-t_0).$$

Отсюда следует, что $r(t)\to\infty$ при $t\to t_1>t_0$.

Пусть теперь G_k имеет нечетный номер k. Аналогично доказывается, что на нижней стенке этой области существует кривая $\varphi=f_k(t)$ со следующими свойствами. Функция $f_k(t)$ ω-периодична и удовлетворяет условию Липшица. Интегральная кривая с начальными данными $t=t_0$, $r=\rho$, $\varphi=f_k(t_0)$ уходит в бесконечность при $t\to t_1$, где $t_1<t_0$, и при $t_1<t<t_0$ эта интегральная кривая лежит в области G_k.

Рассмотрим поверхность, состоящую из интегральных кривых, которые проходят через кривую $r=\rho$, $\varphi=f_k(t)$. Пусть Γ_k — та часть этой интегральной поверхности, которая располагается в G_k (при четном k Γ_k отвечает возрастающим значениям t, а при нечетном k — убывающим). Из предыдущих рассуждений следует, что любое решение, начинающееся в G_k за пределами поверхности Γ_k, покидает G_k как при возрастании, так и при убывании времени t.

Изучим теперь поведение решений в областях

$$H_k\left\{r>\rho,\ \frac{k\pi}{n-1}+\frac{a}{r}<\varphi<\frac{(k+1)\pi}{n-1}-\frac{a}{r}\right\},$$

дополняющих G_k до всей внешности цилиндра $r=\rho$. Из уравнения (9.26) и условий (9.31) и (9.32) следует, что при четном k $\dot\varphi>0$, а при нечетном $\dot\varphi<0$. Покажем, что любое решение покидает область H_k как при возрастании, так и при убывании t. В области H_k при $\frac{k\pi}{n-1}+\frac{a}{r}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)$

выполняется неравенство

$$\frac{dr}{d\varphi} < 2r \frac{\cos (n-1)\varphi}{\sin (n-1)\varphi}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\ln \frac{r}{r_0} < \frac{2}{n-1} \ln \frac{\sin (n-1)\varphi}{\sin (n-1)\varphi_0}.$$

Таким образом, при возрастании φ от φ_0 до $\frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)$ r остается конечной величиной. При $\frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{1}{4}\right) \leqslant \varphi \leqslant \leqslant \frac{k+1}{n-1}\pi - \frac{a}{r}$ имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} < 2r.$$

Из этого неравенства следует, что при возрастании φ от $\frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{1}{4}\right)$ до границ области H_k величина r также остается конечной. Аналогично доказывается, что величина r остается конечной и при убывании φ в пределах области H_k. Из неравенств (9.31) и (9.32) следует, что в области H_k выполняется неравенство $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| > \frac{a}{2}$. Это и доказывает, что любое решение покидает область H_k как при возрастании, так и при убывании времени.

Оценим r на решении, остающемся в пределах области H_k. При $\frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{r} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)$ выполняется неравенство

$$\frac{dr}{d\varphi} > -2r,$$

и потому в области H_k при таких φ имеет место неравенство

$$r \geqslant r_0 e^{-2(\varphi-\varphi_0)} > r_0 e^{-2\pi}. \tag{9.54}$$

При $\frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{3}{4}\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{k+1}{n-1}\pi - \frac{a}{r}$ имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} > 2r \frac{\cos (n-1)\varphi}{\sin (n-1)\varphi}.$$

Отсюда получаем

$$\ln \frac{r}{r_1} > \frac{2}{n-1} \ln \frac{\sin (n-1)\varphi}{\sin (n-1)\varphi_1}.$$

Но $\varphi \leqslant \frac{k+1}{n-1}\pi - \frac{a}{r}$, и потому в силу (9.31) можем написать $|\sin(n-1)\varphi| > \frac{5}{6}\frac{(n-1)a}{r}$. А $\varphi_1 \geqslant \frac{\pi}{n-1}\left(k+\frac{3}{4}\right)$, поэтому $|\sin(n-1)\varphi_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Используя эти неравенства, получаем

$$r > r_1\left[\frac{5(n-1)a}{6\sqrt{2}r}\right]^{\frac{2}{n-1}}.$$

Отсюда и из (9.54) получаем, что при возрастании φ в пределах области H_k выполняется неравенство

$$r > h\cdot r_0^{\frac{n-1}{n+1}}, \tag{9.55}$$

где h — некоторая постоянная, не зависящая от r_0. Легко видеть, что это же неравенство оказывается справедливым и при убывании φ. Таким образом, на любом решении в пределах области H_k выполняется неравенство (9.55).

Из уравнения (9.26) и условия (9.32) следует, что в области H_k при четном k имеет место неравенство

$$\frac{dt}{d\varphi} < \frac{2}{r^{n-1}\sin(n-1)\varphi}, \tag{9.56}$$

а при нечетном k — неравенство

$$\frac{dt}{d\varphi} > \frac{2}{r^{n-1}\sin(n-1)\varphi}. \tag{9.57}$$

Пусть k — число четное. Рассмотрим решение нашей системы с начальными данными $t=t_0$, $\varphi=\varphi_0$, $r=r_0$ из области H_k. Во все время пребывания в области H_k на этом решении выполняется неравенство (9.55). Положим $r_m = hr_0^{\frac{n-1}{n+1}}$, тогда из (9.56) будет следовать

$$\frac{dt}{d\varphi} < \frac{2}{r_m^{n-1}\sin(n-1)\varphi}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$t - t_0 < \frac{2}{r_m^{n-1}}\ln\frac{\operatorname{tg}(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}(n-1)\frac{\varphi_0}{2}}. \tag{9.58}$$

Но в области H_k $\varphi_0 \geqslant \frac{k\pi}{n-1} + \frac{a}{r_0}$. Поэтому $\operatorname{tg}(n-1)\frac{\varphi_0}{2} \geqslant \frac{(n-1)a}{2r_0}$. В этой области $\varphi \leqslant \frac{(k+1)\pi}{n-1} - \frac{a}{r}$. Считая, что ρ достаточно велико, можем написать $\operatorname{tg}(n-1)\frac{\varphi}{2} \leqslant \frac{4r_0}{a(n-1)}$. Из (9.58) следует тогда, что

$$t - t_0 < \frac{2}{r_m^{n-1}} \ln \frac{8r_0^2}{a(n-1)}. \tag{9.59}$$

Из этого неравенства следует, что если $r_0 \to \infty$, то время пребывания решения в области H_k стремится к нулю. Из неравенства (9.57) аналогично выводится такое же утверждение для H_k с нечетным номером k.

Резюмируем сказанное относительно поведения решений системы (9.25), (9.26) в окрестности бесконечности. На нижней стенке каждой области O_k существует кривая $r = \rho$, $\varphi = f_k(t)$ (f_k удовлетворяет условию Липшица и ω-периодична). Через эту кривую проходит интегральная поверхность Γ_k, целиком лежащая в O_k. Всякое решение, лежащее на Γ_k, уходит в бесконечность при конечном значении времени t; если k — четное, то при возрастании t, а если k — нечетное, то при убывании t. Если решение имеет в области $r \geqslant \rho$ точку, не лежащую ни на одной из интегральных поверхностей Γ_k, то оно покидает область $r \geqslant \rho$ как при возрастании, так и при убывании t. Любое решение, уходящее в бесконечность при конечном значении t, проходит через одну из кривых $\varphi = f_k(t)$ и, следовательно, располагается на одной из поверхностей Γ_k. Если точка t_0, φ_0, r_0 лежит в H_k, то время нахождения решения с начальными данными t_0, φ_0, r_0 в области H_k стремится к нулю при $r_0 \to \infty$.

8. В дальнейшем мы будем сравнивать различные уравнения вида (9.13) при комплексном x с точки зрения количества периодических (с периодом ω) решений. В связи с этим целесообразно ввести пространства таких уравнений. Рассмотрим пространство R_n вектор-функций $P(t) = \{p_1(t), \ldots, p_n(t)\}$. Точки этого пространства часто будем называть уравнениями, так как вектор $P(t)$ определяет уравнение (9.13). Пространство R_n будем характеризовать числами: ω — период всех точек P этого пространства, L — константа Липшица из условия (9.28) и числа $M_1, \ldots, M_n$, фигурирующие

в оценках (9.29). Таким образом, под $R_n(\omega, L, M_1, \ldots, M_n)$ понимается пространство всех ω-периодических вектор-функций $P(t)$, удовлетворяющих условиям (9.28) и (9.29). Назовем расстоянием между двумя точками $P_1 = \{p_1^{(1)}(t), \ldots, p_n^{(1)}(t)\}$ и $P_2 = \{p_1^{(2)}(t), \ldots, p_n^{(2)}(t)\}$ величину

$$\|P_2 - P_1\| = \max_{\substack{i=1, \ldots, n \\ 0 \leqslant t \leqslant \omega}} \{|p_i^{(2)}(t) - p_i^{(1)}(t)|\}. \tag{9.60}$$

Станем передвигаться в пространстве R_n от точки к точке. При этом периодические решения и их начальные данные будут, вообще говоря, меняться. Эти периодические решения могут даже исчезать, если соответствующие им нули функции $q(c)$ будут приближаться к особым точкам этой функции, т. е. к таким точкам, через которые проходят решения, не продолжимые на весь период. В таких случаях периодические решения будут стремиться к некоторым системам решений, уходящих в бесконечность как при возрастании, так и при убывании t. Системы решений, к которым могут приближаться, исчезая, периодические решения, мы будем называть особыми периодическими решениями. Дадим точное определение этого понятия.

Определение 9.1. Пусть существует $s+1$ $(s \geqslant 1)$ чисел $t_0 < t_1 < \ldots < t_s$, таких, что $t_s - t_0 = \omega$, на каждом из промежутков (t_{i-1}, t_i) определено решение $x = x_i(t)$, уходящее в бесконечность как при $t \to t_{i-1}$, так и при $t \to t_i$; при этом если $x_i(t)$ уходит в бесконечность при $t \to t_i$, оставаясь при t, достаточно близких к t_i, в области G_k (т. е. лежит на Γ_k), то $x_{i+1}(t)$ уходит в бесконечность при $t \to t_i$, оставаясь при t, достаточно близких к t_i, в одной из областей G_{k-1} или G_{k+1} (лежит либо на Γ_{k-1}, либо на Γ_{k+1}); в случае, если $i = s$, роль $x_{s+1}(t)$ играет $x_1(t)$. Из периодичности коэффициентов $p_j(t)$ уравнения (9.13) следует, что система решений $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ повторяет себя при $t_0 + l\omega \leqslant t \leqslant t_0 + (l+1)\omega$, где l — целое число. Описанную систему решений назовем особым периодическим решением уравнения (9.13).

Покажем, что если периодическое решение уравнения (9.13) при изменении коэффициентов $p_j(t)$ исчезает, то оно приближается к особому периодическому решению.

Теорема 9.8. *Пусть $P_0 \in R_n$; если по любым ε и N можно указать $P \in R_n$, удовлетворяющее неравенству $\|P - P_0\| < \varepsilon$ и имеющее периодическое решение $x = x(t)$, такое, что $\max |x(t)| > N$, то P_0 имеет особое периодическое решение.*

Доказательство. Выберем последовательность уравнений P_k, таких, что

$$\lim_{k \to \infty} \|P_k - P_0\| = 0, \tag{9.61}$$

и каждое из уравнений P_k имеет периодическое решение $x_k(t)$; при этом

$$\lim_{k \to \infty} \max |x_k(t)| = \infty. \tag{9.62}$$

Из предыдущих рассуждений следует, что каждое из этих периодических решений имеет точки в цилиндре $|x| \leqslant \rho$. Но тогда в силу принципа выбора Больцано — Вейерштрасса можно считать, что существует последовательность $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$, $0 \leqslant t_0 < \omega$, такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t_k) = x_0$, $|x_0| \leqslant \rho$. Из непрерывности решений по начальным данным и по коэффициентам уравнения (9.13) и из предыдущих рассуждений тогда следует, что через точку t_0, x_0 проходит особое периодическое решение уравнения P_0.

Из предыдущих рассуждений также вытекает и следующее утверждение.

Теорема 9.9. *Если $P_\nu \in R_n$, $P_\nu \to P_0$ при $\nu \to \infty$ и если у каждого P_ν есть особое периодическое решение, то и у P_0 имеется особое периодическое решение.*

Теорема 9.10. *Если уравнение P имеет бесконечно много периодических решений, то оно имеет и особое периодическое решение.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что если P имеет бесконечно много периодических решений, то модули всех периодических решений этого уравнения не могут быть ограничены одним и тем же числом. Следовательно, выполняется условие теоремы 9.8, из которой и вытекает наше утверждение.

Обозначим через $A \subset R_n$ множество уравнений, не имеющих особых периодических решений, а через B — его дополнение до R_n. Из теоремы 9.9 следует, что множество B замкнуто, а A открыто в R_n.

Определение 9.2. Назовем кратностью периодического решения уравнения (9.13) кратность его значения при $t=0$ как нуля функции $q(c)$.

Теоремы 9.8—9.10 позволяют доказать следующее утверждение относительно числа периодических решений близких уравнений.

Теорема 9.11. *Пусть $P_0 \in A$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\|P-P_0\| < \varepsilon$, то уравнения P и P_0 имеют одинаковое число периодических решений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. Из теоремы 9.5 следует, что существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, что для всех периодических решений $x(t)$ всех уравнений из множества $\|P_0 - P\| < \varepsilon$ выполняется оценка

$$|x(t)| < N. \tag{9.63}$$

Пусть $q_P(c)$ — функция q для уравнения P. Из оценки (9.63) следует, что любой нуль каждой из функций $q_P(c)$ располагается в области $|c| \leqslant N$. Кроме того, из этой оценки следует, что существует такое $\delta > 0$, что все нули каждой функции $q_P(c)$ лежат на расстоянии, превышающем δ, от границ области определенности функции $q_P(c)$. Отсюда и из теоремы Руше следует, что все функции $q_P(c)$ при $\|P-P_0\| < \varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей, если каждый из них считать столько раз, какова его кратность. Этим теорема 9.11 доказана.

Следствие. Любая компонента множества A состоит из уравнений с одним и тем же числом периодических решений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

В тех случаях, когда множество A совпадает со всем пространством R_n, т. е. ни одно из уравнений пространства R_n не имеет особых периодических решений, все уравнения пространства имеют одно и то же число периодических решений. Но в пространство R_n обязательно входит уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^n, \tag{9.64}$$

имеющее одно периодическое решение $x=0$ n-й кратности. Поэтому в этом случае все уравнения R_n имеют n периодических решений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность. Это соображение позволяет доказать следующие две теоремы.

Теорема 9.12. *Пусть пространство R_n таково, что ни одно из его уравнений не имеет решений, уходящих в бесконечность как при возрастании, так и при убывании времени до истечения периода, т. е. не существует решений $x(t)$ таких, что $x(t)\to\infty$ при $t\to t_1$, $x(t)\to\infty$ при $t\to t_2$ и $0<t_2-t_1<\omega$. Тогда все уравнения пространства R_n имеют ровно n периодических решений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.*

Для доказательства этого предложения надо лишь заметить, что в рассматриваемом случае ни одно из уравнений пространства R_n не имеет особых периодических решений, т. е. $R_n=A$.

Используя теорему 9.12, нетрудно доказать (мы на этом не останавливаемся) следующее утверждение. Пусть в уравнении (9.13) $|p_i(t)|\leqslant M$ $(i=1, \ldots, n)$,

$$\omega\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{(n-1)(1+\sqrt{2})\beta^{n-1}},$$

где β — единственный положительный корень уравнения

$$\beta^n=M\sqrt{2}(\beta^{n-1}+\beta^{n-2}+\ldots+\beta+1),$$

тогда уравнение (9.13) имеет ровно n периодических решений, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 9.13. *Уравнение Абеля $(n=3)$ с вещественными коэффициентами имеет ровно три периодических решения, если каждое из них считать столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. Покажем, что в данном случае выполняются условия предыдущей теоремы. Предположим, что решение $x(t)$ уходит в бесконечность при возрастании времени. Как было показано ранее, $x(t)$ имеет тогда точки либо на Γ_0, либо на Γ_2. Но и Γ_0 и Γ_2, как нетрудно видеть, представляют собой части плоскости вещественных x. Следовательно, решение $x(t)$ вещественно, и потому оно не может из-за нечетности k уходить в бесконечность при убывании t. Теорема доказана.

9. Дадим теперь пример уравнения с $n=4$, имеющего не менее пяти различных периодических решений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=x^4+[(2+\mu_1)\cos t+\cos 2t+\mu_2]\,x^3+\\ +(\sin t+\mu_3)\,x^2+\mu_4 x, \qquad (9.65)$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ — параметры; у этого уравнения $\omega=2\pi$. Уравнение (9.65) имеет решение $x=0$, и потому его решения могут быть представлены в виде

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(t,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)\,c^\nu, \qquad (9.66)$$

где $\varphi_\nu(t, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ суть аналитические функции $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ и непрерывные функции t, такие, что $\varphi_1(0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)=1$ и $\varphi_\nu(0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)=0$ при $\nu\geqslant 2$. Ряды, стоящие справа в (9.66), сходятся равномерно при $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ и достаточно малых $|\mu_i|$ и $|c|$.

Из (9.66) следует, что функция $q(c)$ для уравнения (9.65) представляется в виде

$$q(c,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)=\sum_{\nu=1}^{\infty}h_\nu(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)\,c^\nu, \qquad (9.67)$$

где

$$h_1(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)=\varphi_1(2\pi,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)-1,$$
$$h_\nu(\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)=\varphi_\nu(2\pi,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)\quad(\nu\geqslant 2).$$

Подставляя ряд (9.66) в уравнение (9.65), найдем:

$$\varphi_1(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=1,$$
$$\varphi_2(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=1-\cos t,$$
$$\varphi_3(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=(1-\cos t)^2+2\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t,$$
$$\varphi_4(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=(1-\cos t)^3-\sin 2t+\frac{8}{3}\sin^3 t+3\sin t,$$
$$\varphi_5'(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=2\sin t\left[(1-\cos t)^3-\sin 2t+\frac{8}{3}\sin^3 t+\right.\\ \left.+3\sin t\right]+2\sin t(1-\cos t)\left[(1-\cos t)^2+2\sin t+\right.\\ \left.+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+3(2\cos t+\cos 2t)(1-\cos t)^2+\\ +3(2\cos t+\cos 2t)\left[(1-\cos t)^2+2\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+\\ +4(1-\cos t).$$

Отсюда следует, что $h_1(0,\ 0,\ 0,\ 0) = h_2(0,\ 0,\ 0,\ 0) = h_3(0,\ 0,\ 0,\ 0) = h_4(0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0$, $h_5(0,\ 0,\ 0,\ 0) = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, уравнение (9.65) имеет периодическое решение $x = 0$ пятой кратности. Покажем, что параметрами μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 можно распорядиться таким образом, что уравнение (9.65) будет иметь по крайней мере пять различных вещественных периодических решений. Непосредственными вычислениями легко убедиться, что $h_1(\mu_1,\ 0,\ 0,\ 0) = h_2(\mu_1,\ 0,\ 0,\ 0) = h_3(\mu_1,\ 0,\ 0,\ 0) = 0$ и $h_4(\mu_1,\ 0,\ 0,\ 0) = -\mu_1\pi$. Поэтому функция $q(c,\ \mu_1,\ 0,\ 0,\ 0)$ имеет нуль четвертой кратности в точке $c = 0$ и простой нуль в точке $c = c_1$, $c_1 = 2\mu_1 + O(\mu_1^2)$.

Зафиксируем какое-нибудь достаточно малое μ_1. Легко убедиться в том, что $h_1(\mu_1,\ \mu_2,\ 0,\ 0) = h_2(\mu_1,\ \mu_2,\ 0,\ 0) = 0$ и $h_3(\mu_1,\ \mu_2,\ 0,\ 0) = -\mu_2$. Если выбрать достаточно малое μ_2, то окажется, что функция $q(c,\ \mu_1,\ \mu_2,\ 0,\ 0)$ имеет при $c = 0$ нуль третьей кратности, в окрестности точки c_1 она имеет простой нуль и еще один простой нуль в окрестности точки $\frac{\mu_2}{\mu_1\pi}$. Фиксируя теперь достаточно малое μ_2 и выбирая аналогично μ_3 и μ_4, мы получим такое уравнение вида (9.65), которое будет иметь четыре различных ненулевых периодических решения. Так как $x = 0$ есть решение уравнения (9.65) при любых μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, то отсюда и следует, что при надлежащем выборе параметров уравнение (9.65) имеет не менее пяти различных вещественных периодических решений.

§ 10. Уравнения первого порядка, периодичные по обоим аргументам

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi,\ \theta), \tag{10.1}$$

правая часть которого периодична по обоим аргументам.

Не нарушая общности, можно считать, что функция $f(\varphi,\ \theta)$ 2π-периодична по φ и по θ. Кроме того, будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию единственности решений уравнения (10.1).

Правая часть уравнения (10.1) периодична по обоим аргументам; следовательно, ограничена, и потому все решения продолжимы на все значения аргумента от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом, всякая интегральная кривая определена при $\varphi=0$, и естественно рассматривать решения, у которых начальное данное по аргументу равно нулю. Пусть $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ — решение уравнения (10.1) с начальными данными $\varphi=0$, $\theta=\theta_0$.

Рассмотрим переменные φ и θ как декартовы координаты плоскости. Поле направлений, определяемое уравнением (10.1), 2π-периодично по обоим аргументам, и если в квадрате $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ поле задано, то во всей остальной плоскости оно известно из-за периодичности. Поэтому естественно переменные φ и θ интерпретировать как углы и тогда следует отождествить между собой точки вида $(\varphi + 2k\pi, \theta + 2n\pi)$ с целыми k и n. Геометрически такое отождествление можно осуществить путем склеивания противоположных сторон основного квадрата $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. В результате такого склеивания мы получим поверхность тора, т. е. поверхность вращения окружности вокруг оси, ее не пересекающей. Через эту ось вращения проведем пучок плоскостей, одну из которых выберем в качестве начальной. Каждое сечение тора полуплоскостью будем характеризовать углом φ (долгота точки тора). На каждом сечении тора выбираем точку, наиболее удаленную от оси вращения. Эту точку будем считать начальной при отсчете углов θ на данном сечении (угол θ — широта точки тора). Каждой паре чисел (φ, θ) соответствует одна и только одна точка тора. С другой стороны, каждой точке тора отвечает совокупность пар чисел вида $(\varphi + 2k\pi, \theta + 2n\pi)$ с целыми k и n.

Будем рассматривать переменные φ и θ как координаты точки тора. Ясно тогда, что через каждую точку тора проходит одна и только одна интегральная кривая.

1. Проведем через нулевой меридиан какую-нибудь интегральную кривую $\theta = F(\varphi, \theta_0)$. Возможно, что существуют такие целые числа p и q, что

$$F(2q\pi, \theta_0) = \theta_0 + 2p\pi, \tag{10.2}$$

т. е. после q оборотов по долготе интегральная кривая совершит ровно p оборотов по широте и замкнется. В этом случае мы имеем дело с $2q\pi$-периодическим решением. Может, конечно, оказаться, что таких целых чисел p и q не существует. В этом случае интегральная кривая $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ незамкнутая.

Пример. Пусть $f(\varphi, \theta) = \alpha$, т. е. имеем уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \alpha. \tag{10.3}$$

На декартовой плоскости переменных φ и θ интегральные кривые уравнения (10.3) образуют систему параллельных прямых с угловым коэффициентом α.

Возможны два случая:

I. $\alpha = \frac{p}{q}$ — рациональное число.

Уравнение интегральной кривой имеет вид

$$\theta = \alpha\varphi + \theta_0. \tag{10.4}$$

Пусть $\varphi = 2q\pi$, тогда из (10.4) получаем

$$\theta = \theta_0 + 2p\pi, \tag{10.5}$$

т. е. мы имеем равенство (10.2), и, следовательно, все интегральные кривые уравнения (10.3) замкнутые.

II. α — число иррациональное.

Рассмотрим кривую $\theta = \alpha\varphi$, т. е. интегральную кривую уравнения (10.3), проходящую через точку $\varphi = \theta = 0$. Покажем, что эта кривая всюду плотна на торе, т. е. что она проходит через любую окрестность любой точки тора.

Докажем сначала, что множество точек пересечения кривой $\theta = \alpha\varphi$ с нулевым меридианом всюду плотно на нем. Возьмем произвольную точку нулевого меридиана $\varphi = 0$, $\theta = \beta$ $(0 \leqslant \beta < 2\pi)$. Этой точке на торе соответствуют точки на плоскости с координатами $(2q\pi,\ 2p\pi + \beta)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Рассмотрим широты пересечения траектории $\theta = \alpha\varphi$ с нулевым меридианом, это будут числа 0, $2\pi\alpha$, $4\pi\alpha$, ... Кроме того, рассмотрим еще систему чисел, обозначающих широту точки $(0, \beta)$: β, $\beta + 2\pi$, $\beta + 4\pi$, ... Имеем, таким образом, две прогрессии, отношение разностей которых есть иррациональное число α. По лемме 1.1 найдутся такие числа M и N, что

$$|\beta + 2M\pi - 2N\pi\alpha| < \varepsilon. \tag{10.6}$$

Это и означает, что после N оборотов по долготе интегральная кривая $\theta = \alpha\varphi$ попадет в ε-окрестность точки $(0, \beta)$.

Точка $(0, \beta)$ была взята на нулевом меридиане. Возьмем теперь произвольную точку (γ, β). Рассмотрим то решение нашего уравнения, которое проходит через эту точку: $\theta = \alpha\varphi + \beta - \gamma\alpha$. Было доказано, что траектория $\theta = \alpha\varphi$ проходит через любую окрестность любой точки нулевого меридиана, в частности она проходит через ε-окрестность точки $(0, \beta - \gamma\alpha)$. Но тогда ясно, что интегральная кривая $\theta = \alpha\varphi$ проходит через ε-окрестность точки (α, β).

Таким образом, доказано, что кривая $\theta = \alpha\varphi$ всюду плотна на торе.

2. Перейдем к изучению общего уравнения (10.1). Будем называть точки плоскости (φ, θ), координаты которых суть целые кратные 2π, угловыми. Угловую точку $(2q\pi, 2p\pi)$ будем характеризовать парой чисел (q, p).

Рассмотрим интегральную кривую уравнения (10.1), выходящую из начала координат, т. е. кривую $\theta = F(\varphi, 0)$. Будем изучать положение угловых точек плоскости относительно кривой $\theta = F(\varphi, 0)$. Если эта кривая проходит хотя бы через одну угловую точку, кроме начала координат, то эта кривая замкнута на торе, ибо выполняется равенство

$$F(2q\pi, 0) = 2p\pi. \tag{10.7}$$

Если выполняется равенство (10.7), то интегральная кривая $\theta = F(\varphi, 0)$ проходит через любую угловую точку с координатами $(2nq\pi, 2np\pi)$ в силу периодичности поля направлений.

Предположим, что точка $P_1(q, p)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi, 0)$. Покажем, что тогда и точка $P_2(2q, 2p)$ лежит выше этой кривой. Проведем через точку P_1 интегральную кривую $\theta = \theta(\varphi)$ уравнения (10.1). Эта кривая в силу единственности решений лежит выше кривой $\theta = F(\varphi, 0)$, т. е. имеет место неравенство $\theta(\varphi) > F(\varphi, 0)$ и, в частности,

$$\theta(4q\pi) > F(4q\pi, 0). \tag{10.8}$$

Но кривая $\theta = \theta(\varphi)$ проходит через угловую точку, и в силу периодичности поля направлений по обоим аргументам она конгруэнтна кривой $\theta = F(\varphi, 0)$. Следовательно, точка $P_2(2q, 2p)$ лежит выше кривой $\theta = \theta(\varphi)$, т. е. имеет место неравенство

$$4p\pi > \theta(4q\pi); \tag{10.9}$$

отсюда и из (10.8) следует

$$4p\pi > F(4q\pi,\ 0). \tag{10.10}$$

Неравенство (10.10) и означает, что точка P_2 лежит выше кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$. Повторяя это рассуждение, докажем, что точка $P_n(nq,\ np)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$ при любом натуральном n.

Заменяя в только что проведенных рассуждениях знак неравенства на обратный, а слово „выше" словом „ниже", докажем, что если точка $P_1(q,\ p)$ лежит ниже кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, то и точка $P_n(nq,\ np)$ при любом натуральном n лежит ниже этой кривой.

Пусть теперь числа q и p представимы в виде $q = kq_1$, $p = kp_1$, где k — натуральное число. Предположим, что точка $P(q,\ p)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, тогда и точка $P_1(q_1,\ p_1)$ лежит выше этой кривой. Действительно, допустим, напротив, что это не так; тогда возможно одно из двух:

I. P_1 лежит ниже кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, но тогда по доказанному $P(kq_1,\ kp_1)$ также лежит ниже этой кривой, что противоречит исходному предположению.

II. P_1 лежит на кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, но тогда по периодичности и P также лежит на $\theta = F(\varphi,\ 0)$, что также противоречит предположению.

Таким образом, если $P(q,\ p)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, то и $P_1(q_1,\ p_1)$ лежит выше этой кривой.

Аналогично докажется, что если $P(q,\ p)$ лежит ниже кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$ или на ней самой, то также расположена и точка $P(q_1,\ p_1)$.

Таким образом, вопрос о том, лежит ли точка $P(q,\ p)$ выше, ниже или на самой кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$, зависит лишь от отношения $\frac{p}{q}$.

Разобьем все рациональные числа на два класса:

I. Рациональное число $\frac{p}{q}$ отнесем в первый класс, если точка $P(q,\ p)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$ или на ней самой.

II. Рациональное число $\frac{p}{q}$ отнесем во второй класс, если точка $P(q,\ p)$ лежит ниже кривой $\theta = F(\varphi,\ 0)$.

Оба эти класса не пусты. Каждое рациональное число попадает в один и только в один из них. Покажем, что каждое число первого класса больше каждого числа второго класса. Для этого достаточно показать, что если $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ и $2p\pi \geqslant F(2q\pi, 0)$, то $2\pi p' > F(2q'\pi, 0)$. По доказанному угловая точка (qq', pq') лежит выше кривой $\theta = F(\varphi, 0)$ или на ней самой, но точка $(qq', p'q)$ имеет ту же абсциссу и большую ординату и, следовательно, лежит выше кривой $\theta = F(\varphi, 0)$. Поэтому $2p'\pi > F(2q'\pi, 0)$.

Таким образом, мы имеем дедекиндово сечение в области рациональных чисел. Пусть оно производится числом μ. Это число называется числом вращения уравнения (10.1).

Теорема 10.1. *При любом θ_0 имеет место следующее предельное соотношение*:

$$\lim_{\varphi \to +\infty} \frac{F(\varphi, \theta_0)}{\varphi} = \mu. \tag{10.11}$$

Доказательство. Установим сначала следующий частный случай соотношения (10.11):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(2n\pi, 0)}{2n\pi} = \mu. \tag{10.12}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, выберем натуральное число N так, чтобы было $\frac{2}{N} < \varepsilon$. Возьмем такое целое число m, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{m-1}{N} < \mu < \frac{m+1}{N}. \tag{10.13}$$

Угловая точка $P_1(N, m-1)$ лежит по определению μ ниже кривой $\theta = F(\varphi, 0)$, а $P_2(N, m+1)$ — выше этой кривой. Таким образом, выполняются неравенства

$$2(m-1)\pi < F(2N\pi, 0) < 2(m+1)\pi.$$

Разделим эти неравенства на $2N\pi$ и вычтем из (10.13), тогда получим

$$-\frac{2}{N} < \mu - \frac{F(2N\pi, 0)}{2N\pi} < \frac{2}{N}. \tag{10.14}$$

Отсюда по определению N получаем

$$\left|\mu - \frac{F(2N\pi, 0)}{2N\pi}\right| < \varepsilon. \tag{10.15}$$

Так как N — произвольное, достаточно большое натуральное число, то последнее неравенство и доказывает справедливость соотношения (10.12).

Покажем теперь, что

$$\lim_{\varphi \to +\infty} \frac{F(\varphi, 0)}{\varphi} = \mu. \tag{10.16}$$

Возьмем произвольное число φ; его можно представить в виде $\varphi = 2\pi n + \varphi'$, где $\varphi' \in [0, 2\pi)$. Интегрируя уравнение (10.1), получаем

$$\theta = F(\varphi, 0) = F(2n\pi, 0) + \int_{2n\pi}^{\varphi} f(\varphi, \theta)\, d\varphi. \tag{10.17}$$

Так как $f(\varphi, \theta)$ периодична по обоим аргументам, то существует такое целое число M, что $|f(\varphi, \theta)| < M$. Положим

$$\theta' = \int_{2n\pi}^{\varphi} f(\varphi, \theta)\, d\varphi;$$

тогда ясно, что $|\theta'| < M\varphi' < M2\pi$;

$$\frac{F(\varphi, 0)}{\varphi} = \frac{F(2n\pi, 0) + \theta'}{2n\pi + \varphi'} = \frac{\dfrac{F(2n\pi, 0)}{2n\pi} + \dfrac{\theta'}{2n\pi}}{1 + \dfrac{\varphi'}{2n\pi}}. \tag{10.18}$$

Устремим здесь $\varphi \to +\infty$, тогда n также устремится к $+\infty$, а φ' и θ' останутся ограниченными. Отсюда и из (10.12) следует (10.16).

Рассмотрим теперь три интегральные кривые: $\theta = F(\varphi, 0)$, $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ и $\theta = F(\varphi, 2k\pi)$, где k — натуральное число, такое, что $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2k\pi$.

В силу периодичности поля направлений имеем

$$F(\varphi, 2k\pi) = F(\varphi, 0) + 2k\pi.$$

Так как интегральные кривые уравнения (10.1) не пересекаются, то выполняются неравенства

$$F(\varphi, 0) \leqslant F(\varphi_0, 0) \leqslant F(\varphi, 2k\pi) = F(\varphi, 0) + 2k\pi.$$

Деля эту строку на φ и устремляя $\varphi \to +\infty$, в силу соотношения (10.16) получаем (10.11).

Теорема доказана.

3. Поведение решений уравнений (10.1) во многом зависит от числа вращения. При этом весьма важную роль играет арифметическая природа этого числа. Докажем, что если уравнение (10.1) имеет замкнутую интегральную кривую на торе, то число вращения рационально.

Теорема 10.2. *Если уравнение* (10.1) *имеет на торе замкнутую интегральную кривую, которая до замыкания делает q оборотов по долготе и p оборотов по широте, т. е. если*

$$F(2q\pi,\ \theta_0) = \theta_0 + 2p\pi, \tag{10.19}$$

то число вращения $\mu = \dfrac{p}{q}$.

Доказательство. Из периодичности поля направлений и из предположения (10.19) следует, что

$$F(2qn\pi,\ \theta_0) = \theta_0 + 2pn\pi \tag{10.20}$$

при любом целом n. Деля равенство (10.20) на $2qn\pi$ и переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(2qn\pi,\ \theta_0)}{2qn\pi} = \frac{p}{q}. \tag{10.21}$$

Отсюда и из (10.11) и следует равенство $\mu = \dfrac{p}{q}$.

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 10.1. Пусть уравнение (10.1) имеет два периодических решения, т. е. пусть

$$F(2q_1\pi,\ \theta_1) = 2p_1\pi + \theta_1, \quad F(2q_2\pi,\ \theta_2) = 2p_2\pi + \theta_2,$$

тогда $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2} = \mu$.

Теорема 10.2 показывает, что если уравнение (10.1) имеет замкнутую интегральную кривую, то его число вращения рационально. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 10.3. *Если число вращения μ рационально, т. е. если $\mu = \dfrac{p}{q}$, где p и q взаимно просты, то существует хотя бы одна замкнутая на торе интеграль-*

ная кривая, делающая до замыкания q оборотов по долготе и p по широте.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$v(\theta_0) = F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0.$$

Из определения функции v следует, что нули этой функции определяют замкнутые интегральные кривые. По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных функция $v(\theta_0)$ непрерывна. Из периодичности f следует, что эта функция 2π-периодична.

Допустим, вопреки утверждению теоремы, что уравнение (10.1) не имеет замкнутых на торе интегральных кривых, делающих до замыкания q оборотов по долготе и p по широте, т. е. предположим, что при любых θ_0

$$v(\theta_0) = F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0 \neq 0. \tag{10.22}$$

В силу непрерывности $v(\theta_0)$ из (10.22) следует, что $v(\theta_0)$ сохраняет знак. Предположим для определенности, что $v(\theta_0) > 0$ и положим $\alpha = \inf v(\theta_0)$. Так как $v(\theta_0)$ — непрерывная периодическая функция, то $\alpha > 0$. По определению α имеем

$$v(\theta_0) \geqslant \alpha > 0. \tag{10.23}$$

По определению $v(\theta_0)$ неравенство (10.23) дает

$$F(2q\pi, \theta_0) > 2p\pi + \theta_0 + \alpha. \tag{10.24}$$

Положим $F(2q\pi, \theta_0) = \theta_1$. Тогда можем написать

$$F(2q\pi, \theta_1) > 2p\pi + \theta_1 + \alpha, \tag{10.25}$$

так как в неравенстве (10.24) θ_0 — любое число. Из периодичности правой части уравнения (10.1) следует равенство

$$F(2q\pi, \theta_1) = F(4q\pi, \theta_0). \tag{10.26}$$

Подставляя в неравенство (10.25) вместо θ_1 и $F(2q\pi, \theta_1)$ их значения, получаем

$$F(4q\pi, \theta_0) > 2p\pi + F(2q\pi, \theta_0) + \alpha.$$

Сопоставляя это с (10.24), находим

$$F(4q\pi, \theta_0) > 4p\pi + 2\alpha + \theta_0. \tag{10.27}$$

Покажем, что и при всяком n выполняется неравенство

$$F(2nq\pi, \theta_0) > 2np\pi + n\alpha + \theta_0. \tag{10.28}$$

Предположим, что это неравенство выполнено при некотором n. Положим $F(2nq\pi, \theta_0)=\theta_n$, из (10.24) получаем

$$F(2q\pi, \theta_n) > 2p\pi + \theta_n + \alpha.$$

Но имеем $F(2q\pi, \theta_n)=F(2q(n+1)\pi, \theta_0)$. Следовательно,

$$F(2(n+1)q\pi, \theta_0) > 2p\pi + F(2qn\pi, \theta_0)+\alpha.$$

Отсюда и из (10.28) получаем

$$F(2(n+1)q\pi, \theta_0) > 2(n+1)p\pi + (n+1)\alpha + \theta_0.$$

Последнее неравенство в силу принципа математической индукции и доказывает неравенство (10.28).

Разделим неравенство (10.28) на $2nq\pi$:

$$\frac{F(2nq\pi, \theta_0)}{2nq\pi} > \frac{p}{q} + \frac{\alpha}{2q\pi} + \frac{\theta_0}{2qn\pi}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$ получаем

$$\mu \geqslant \frac{p}{q} + \frac{\alpha}{2q\pi}.$$

Это неравенство противоречит предположению о том, что $\mu = \frac{p}{q}$. Противоречие и доказывает теорему.

Таким образом, для того чтобы уравнение (10.1) имело на торе замкнутые интегральные кривые, необходимо и достаточно, чтобы его число вращения было рациональным.

4. Предположим, что уравнение (10.1) имеет рациональное число вращения $\mu = \frac{p}{q}$, тогда оно имеет замкнутую интегральную кривую $\theta = F(\varphi, \theta_0)$, на которой выполняется равенство $F(2q\pi, \theta_0) = 2p\pi + \theta_0$. Рассмотрим на нулевом меридиане тора $\varphi = 0$ множество K тех точек, через которые проходят замкнутые интегральные кривые. Множество это, как уже отмечалось, представляет собой множество нулей непрерывной функции $v(\theta_0) = F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0$ и поэтому является замкнутым. Пусть M — открытое множество, дополняющее K до всего нулевого меридиана. Хорошо известно, что множество M представляет собой сумму конечного или счетного множества непересекающихся интервалов, которые называются смежными интервалами для множества K. Любое непериодическое решение пересекает хотя бы один из этих интервалов,

Теорема 10.4. *Предположим, что уравнение* (10.1) *имеет рациональное число вращения* $\mu = \frac{p}{q}$. *Тогда любое непериодическое решение стремится к некоторому периодическому при* $\varphi \to +\infty$ *и к некоторому (возможно, и другому) периодическому решению при* $\varphi \to -\infty$.

Доказательство. Рассмотрим непериодическое решение $\theta = F(\varphi, \theta')$ нашего уравнения, тогда $\theta' \in M$. Пусть $\theta' \in (\theta_1, \theta_2)$, где (θ_1, θ_2) — интервал, смежный для множества K, т. е. ни одна точка этого интервала не принадлежит K, а концы его, точки θ_1 и θ_2, принадлежат K. Введем, как и выше, следующую функцию точки нулевого меридиана:

$$v(\theta_0) = F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0.$$

Предположим для определенности, что $v(\theta_0) > 0$ при $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$. Покажем, что в этом случае

$$\lim_{\varphi \to -\infty} [F(\varphi, \theta_1) - F(\varphi, \theta')] = 0 \tag{10.29}$$

и

$$\lim_{\varphi \to +\infty} [F(\varphi, \theta_2) - F(\varphi, \theta')] = 0; \tag{10.30}$$

этим и будет доказана теорема.

Возьмем произвольную точку $\bar{\theta} \in (\theta_1, \theta_2)$ и покажем, что $F(2q\pi, \bar{\theta})$ лежит на интервале (θ_1, θ_2). Действительно, из неравенств

$$\theta_1 < \bar{\theta} < \theta_2,$$

в силу единственности решений, следуют неравенства

$$F(\varphi, \theta_1) < F(\varphi, \bar{\theta}) < F(\varphi, \theta_2) \tag{10.31}$$

и, в частности,

$$F(2q\pi, \theta_1) < F(2q\pi, \bar{\theta}) < F(2q\pi, \theta_2).$$

Но по условию θ_1 и θ_2 лежат в K, значит,

$$F(2q\pi, \theta_i) = 2p\pi + \theta_i \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда следуют неравенства

$$\theta_1 + 2p\pi < F(2q\pi, \bar{\theta}) < \theta_2 + 2p\pi, \tag{10.32}$$

которые и показывают, что точка $F(2q\pi, \bar{\theta})$ лежит на интервале (θ_1, θ_2).

Покажем, что имеет место соотношение

$$F(2qn\pi, \theta') - 2pn\pi \xrightarrow[n \to +\infty]{} \theta_2. \tag{10.33}$$

Решения $F(\varphi, \theta_1)$ и $F(\varphi, \theta_2)$ периодические, поэтому при любом целом n имеем $F(2qn\pi, \theta_i) = 2pn\pi + \theta_i$ $(i = 1, 2)$. Отсюда и из (10.31) следует

$$\theta_1 < F(2qn\pi, \bar{\theta}) - 2pn\pi < \theta_2. \tag{10.34}$$

По определению функции v имеем

$$\begin{aligned} v(F(2qn\pi, \theta')) &= F(2q(n+1)\pi, \theta') - F(2qn\pi, \theta') - 2p\pi = \\ &= [F(2q(n+1)\pi, \theta') - 2p(n+1)\pi] - \\ &\quad - [F(2qn\pi, \theta') - 2pn\pi] > 0. \end{aligned} \tag{10.35}$$

Отсюда и из (10.34) следует, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} [F(2qn\pi, \theta') - 2pn\pi] = \theta^* \in [\theta_1, \theta_2]. \tag{10.36}$$

Покажем, что $\theta^* = \theta_2$. Допустим, напротив, что $\theta^* < \theta_2$, тогда ясно, что $[\theta', \theta^*] \subset (\theta_1, \theta_2)$. Но функция v непрерывна, следовательно, $v \geqslant \alpha > 0$ на сегменте $[\theta', \theta^*]$. Пусть $N > \dfrac{\theta^* - \theta'}{\alpha}$. Из соотношений (10.35) и (10.36) следует, что при всех целых $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\theta' \leqslant F(2qn\pi, \theta') - 2pn\pi < \theta^*; \tag{10.37}$$

следовательно,

$$F(2q(n+1)\pi, \theta') - F(2qn\pi, \theta') - 2p\pi \geqslant \alpha > 0.$$

Просуммируем это неравенство по всем n от 0 до N, тогда получим

$$F(2q(N+1)\pi, \theta') - 2p(N+1)\pi - \theta' \geqslant N\alpha,$$

что в силу определения N противоречит неравенству (10.37). Полученное противоречие доказывает, что $\theta^* = \theta_2$, и, таким образом, соотношение (10.33) установлено.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По этому ε, в силу периодичности правой части уравнения (10.1) и теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных, найдется такое $\delta > 0$, что если $|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}| < \delta$, то $|F(\varphi, \theta^{(1)}) - F(\varphi, \theta^{(2)})| < \varepsilon$ при $\varphi \in [0, 2q\pi]$. По найденному δ в силу равенства (10.33) мы сможем указать такое k_0, что при $k > k_0$ окажется

$$\theta_2 - F(2qk\pi, \theta_0) + 2pk\pi < \delta. \qquad (10.38)$$

Отсюда и из определения δ следует, что

$$|F(\varphi, \theta') - F(\varphi, \theta_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \varphi \in [2qk\pi, 2q(k+1)\pi].$$

Но в (10.38) k — произвольное целое число, большее k_0, поэтому последнее неравенство и означает, что выполняется соотношение (10.30). Аналогично доказывается и (10.29). Теорема доказана.

Отметим два следствия доказанной теоремы.

Следствие 10.2. Если изолированное периодическое решение уравнения (10.1) устойчиво в смысле Ляпунова, то оно асимптотически устойчиво.

Следствие 10.3. Изолированное периодическое решение является предельным для всех решений, начинающихся в достаточно малой его окрестности, либо при $\varphi \to +\infty$, либо при $\varphi \to -\infty$.

5. При определении числа вращения мы говорили о расположении целых (mod 2π) точек относительно начальной траектории $\theta = F(\varphi, 0)$. По этому расположению можно судить о соотношении между величиной $\frac{p}{q}$ и числом вращения μ. Оказывается, что об этом соотношении можно судить и по расположению точек вида $(2q\pi, 2p\pi + \theta_0)$ относительно интегральной кривой $\theta = F(\varphi, \theta_0)$. Имеет место следующая

Лемма 10.1. Пусть μ — число вращения уравнения (10.1). *Если точка $(2q\pi, 2p\pi + \theta_0)$ лежит ниже интегральной кривой $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ или на ней самой, то $\frac{p}{q} \leqslant \mu$, и обратно, если точка $(2q\pi, 2p\pi + \theta_0)$ лежит выше кривой $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ или на ней самой, то $\frac{p}{q} \geqslant \mu$.*

Доказательство. Сделаем в уравнении (10.1) замену переменной $\vartheta = \theta - \theta_0$, тогда уравнение (10.1) запишется в виде

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = f(\varphi, \vartheta + \theta_0). \qquad (10.39)$$

Функция $\vartheta = F(\varphi, \theta_0) - \theta_0$ есть решение уравнения (10.39). Отсюда и из теоремы 10.1 следует, что числа вращения уравнений (10.1) и (10.39) совпадают. Но кривая $\vartheta = F(\varphi, \theta_0) - \theta_0$ есть начальная интегральная кривая уравнения (10.39), так как $F(0, \theta_0) = \theta_0$. Тогда по определению числа вращения μ имеем: если $2p\pi \leqslant F(2q\pi, \theta_0) - \theta_0$, то $\frac{p}{q} \leqslant \mu$, а если $2p\pi \geqslant F(2q\pi, \theta_0) - \theta_0$, то $\frac{p}{q} \geqslant \mu$.

Лемма доказана.

Перейдем к изучению того случая, когда уравнение (10.1) имеет иррациональное число вращения. Как следует из теоремы 10.2, все интегральные кривые на торе незамкнуты.

В дальнейшем будем пользоваться следующей терминологией. Проведем через точку θ_0 нулевого меридиана решение $\theta = F(\varphi, \theta_0)$. После каждого оборота эта интегральная кривая будет пересекать нулевой меридиан в точках $F(2n\pi, \theta_0)$. Пусть θ_n — приведенная координата точки $F(2n\pi, \theta_0)$, т. е. такая координата точки $F(2n\pi, \theta_0)$, которая лежит в полусегменте $[0, 2\pi)$. Будем называть точки $\theta_1, \theta_2, \ldots$ последующими точками для θ_0. Так как в силу предположения об иррациональности числа вращения μ интегральная кривая $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ незамкнута, то все точки θ_k различны.

Возьмем на нулевом меридиане точку θ_0 и две последующие для нее θ_{q_1} и θ_{q_2} $(0 < q_1 < q_2)$. Будем говорить, что θ_{q_2} следует за θ_{q_1}, и писать $\theta_0 \prec \theta_{q_1} \prec \theta_{q_2}$, если при движении по нулевому меридиану в положительном направлении от точки θ_0 мы сначала встречаем точку θ_{q_1}, а лишь затем точку θ_{q_2}. В противном случае будем говорить, что θ_{q_1} следует за θ_{q_2}, и писать $\theta_0 \prec \theta_{q_2} \prec \theta_{q_1}$.

Оказывается, что взаимное расположение точек θ_0, θ_{q_1} и θ_{q_2} зависит только от числа вращения и величин q_1 и q_2. Справедлива следующая

Теорема 10.5. *Если* $(\mu q_1) < (\mu q_2)$, *то* $\theta_0 \prec \theta_{q_1} \prec \theta_{q_2}$, *и обратно, если* $(\mu q_2) < (\mu q_1)$ *то* $\theta_0 \prec \theta_{q_2} \prec \theta_{q_1}$ ((a) — *дробная часть числа* a).

Эту теорему иначе формулируют так: круговой порядок точек θ_0, θ_{q_1} и θ_{q_2} совпадает с порядком чисел 0, (μq_1), (μq_2).

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $\theta_0 = 0$. Общность этим предположением не нарушается, так как если $\theta_0 \neq 0$, то достаточно сделать замену переменной $\vartheta = \theta - \theta_0$. Как показывалось при доказательстве леммы 10.1, число вращения при такой замене не меняется. Кроме того, так как при такой замене изменяется лишь начало отсчета, то ясно, что и круговой порядок точек не меняется, но при этом $\theta=\theta_0$ переходит в $\vartheta=0$.

Таким образом, требуется доказать, что если $(\mu q_1)<(\mu q_2)$, то и $0<\theta_{q_1}<\theta_{q_2}$, и наоборот, если $(q_1\mu)>(\mu q_2)$, то $0<\theta_{q_2}<\theta_{q_1}$.

Возьмем на нулевом меридиане точку θ_0'. Пусть θ_1', θ_2', ... — ее последующие. Обозначим через p такое число, что $F(2q\pi, \theta_0')=2p\pi+\theta_q'$. Так как число μ иррационально, то возможно лишь одно из двух: либо $\theta_0'<\theta_q'$, либо $\theta_0'>\theta_q'$. Предположим сначала, что $\theta_0'<\theta_q'$, тогда по определению p имеем $F(2q\pi, \theta_0')>2p\pi+\theta_0'$. А отсюда, в силу леммы 10.1, получаем, что

$$\frac{p}{q}\leqslant\mu.$$

С другой стороны, по определению $\theta_q'<2\pi$ и по определению p имеем

$$\frac{p+1}{q}\geqslant\mu.$$

Так как μ иррационально, то из этих двух неравенств получаем соотношение

$$p<\mu q<p+1$$

или

$$p=[\mu q]. \tag{10.40}$$

Предположим теперь, что реализуется вторая возможность: $\theta_0'>\theta_q'$. Тогда по определению p имеем $p>\mu q$ и $p-1<\mu q$. Следовательно, в этом случае

$$p-1=[\mu q]. \tag{10.41}$$

Пусть теперь p_1 и p_2 — такие целые числа, что $F(2q_1\pi, 0)=\theta_{q_1}+2p_1\pi$ и $F(2q_2\pi, 0)=\theta_{q_2}+2p_2\pi$. Проведем через точку $(0, \theta_{q_1})$ интегральную кривую $\theta=F(\varphi, \theta_{q_1})$. По периодичности поля она повторит отрезок кривой $\theta=F(\varphi, 0)$ при изменении φ от $2q_1\pi$ до $2q_2\pi$. Отсюда следует равенство

$$F(2(q_2-q_1)\pi, \theta_{q_1})=\theta_{q_2}+2(p_2-p_1)\pi. \tag{10.42}$$

Предположим теперь, что $\theta_{q_2} > \theta_{q_1}$. Тогда, в силу равенства (10.40), будем иметь

$$p_2 - p_1 = [\mu(q_2 - q_1)]. \tag{10.43}$$

Кроме того, так как $\theta_{q_1} > 0$ и $\theta_{q_2} > 0$, то из (10.40) следуют равенства

$$p_1 = [\mu q_1], \qquad p_2 = [\mu q_2]. \tag{10.44}$$

Оценим (μq_2). Имеем

$$(\mu q_2) = \mu q_2 - [\mu q_2] = \mu q_2 - p_2 =$$
$$= \mu(q_2 - q_1) - (p_2 - p_1) + \mu q_1 - p_1.$$

Отсюда и из равенств (10.43) и (10.44) получаем

$$(\mu q_2) = \mu(q_2 - q_1) - [\mu(q_2 - q_1)] + (\mu q_1);$$

так как μ иррационально, то

$$\mu(q_2 - q_1) - [\mu(q_2 - q_1)] > 0,$$

а это приводит к неравенству

$$(\mu q_2) > (\mu q_1). \tag{10.45}$$

Пусть $\theta_{q_1} > \theta_{q_2}$. Тогда из соотношения (10.41) получим

$$p_2 - p_1 - 1 = [\mu(q_2 - q_1)]. \tag{10.46}$$

Но тогда так же, как и выше, имеем

$$(\mu q_2) = \mu q_2 - [\mu q_2] = \mu q_2 - p_2 = \mu(q_2 - q_1) - (p_2 - p_1) +$$
$$+ \mu q_1 - p_1 = \mu(q_2 - q_1) - (p_2 - p_1) + (\mu q_1).$$

Отсюда и из (10.46) вытекает неравенство

$$(\mu q_2) < (\mu q_1). \tag{10.47}$$

Таким образом, из неравенства $\theta_{q_2} > \theta_{q_1}$ следует (10.45), а из неравенства $\theta_{q_2} < \theta_{q_1}$ — (10.47). Но тогда ясно, что и, наоборот, из неравенства (10.45) следует, что $\theta_{q_2} > \theta_{q_1}$, а из (10.47) — неравенство $\theta_{q_2} < \theta_{q_1}$.

Теорема доказана.

6. Введем следующее преобразование нулевого меридиана на себя. Каждой точке нулевого меридиана поставим в соответствие точку $F(2\pi, \theta_0)$. Это преобразование обозначим через T. Как следует из теорем единственности и инте-

гральной непрерывности, преобразование T взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Кроме того, из теоремы единственности вытекает, что это преобразование сохраняет ориентацию.

Лемма 10.2. Предположим, что на нулевом меридиане имеется дуга $\alpha(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$, обладающая тем свойством, что $T^q\alpha \subset \alpha$, где q — натуральное число. Тогда через некоторую точку α проходит замкнутая интегральная кривая.

Доказательство. Так как $T^q\alpha \subset \alpha$, то преобразование T^q имеет неподвижную точку $\theta_0 \in \alpha$. По определению T это означает, что существует такое целое число p, что $F(2q\pi, \theta_0) = 2p\pi + \theta_0$. Следовательно, интегральная кривая $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ замкнута.

Предполагая по-прежнему, что число вращения μ уравнения (10.1) иррационально, будем изучать поведение траектории $\theta = F(\varphi, 0)$. Пусть θ_k — точки, последующие для $\theta = 0$, а P — предельное множество последовательности θ_k.

Теорема 10.6. Множество P совершенно.

Доказательство. Множество P, как всякое предельное множество, замкнуто. Покажем, что оно плотно в себе. Пусть P' — производное от P множество, т. е. множество всех предельных точек множества P. Докажем, что $P \subset P'$. Пусть $\vartheta_0 \in P$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Относительно этого ε будем предполагать, что

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{3}\vartheta_0, \ \frac{1}{3}(2\pi - \vartheta_0)\right\}.$$

Так как ϑ_0 есть предельная точка последовательности θ_k, то существуют числа $m < k < m_1 < k_1$ такие, что $|\theta_m - \vartheta_0| < \varepsilon$, $|\theta_k - \vartheta_0| < \varepsilon$, $|\theta_{m_1} - \vartheta_0| < \varepsilon$, $|\theta_{k_1} - \vartheta_0| < \varepsilon$. Так как число вращения μ иррационально, то все точки θ_k различны, поэтому из четырех точек θ_m, θ_k, θ_{m_1}, θ_{k_1} по крайней мере три не совпадают с ϑ_0. Пусть это будут точки θ_m, θ_k, θ_{m_1}. Из этих трех точек хотя бы две лежат в одном из интервалов $(\vartheta_0 - \varepsilon, \vartheta_0)$ и $(\vartheta_0, \vartheta_0 + \varepsilon)$. Пусть для определенности θ_k и θ_m лежат в интервале $(\vartheta_0, \vartheta_0 + \varepsilon)$. Рассмотрим числа $(m\mu)$ и $(k\mu)$. Для определенности будем считать, что $(m\mu) < (k\mu)$. Тогда по теореме 10.5 $0 \prec \theta_m \prec \theta_k$, а в силу наших обозначений это означает, что $\vartheta_0 < \theta_m < \theta_k < \vartheta_0 + \varepsilon$. Возьмем теперь произвольное число b, удовлетворяющее неравенствам $(m\mu) <$

$< b < (k\mu)$, и положительное число δ такое, что $(m\mu) < b - \delta < b + \delta < (k\mu)$. Рассмотрим две прогрессии: $\{b, b+1, b+2, \ldots\}$ и $\{\mu, 2\mu, 3\mu, \ldots\}$. По лемме 1.1 существует бесконечная последовательность пар чисел M_l, N_l $(l=1, 2, \ldots)$ таких, что

$$|b + M_l - N_l\mu| < \delta.$$

Тогда ясно, что $|(N_l\mu) - b| < \delta$, а тогда при любом l будут справедливы неравенства $(m\mu) < (N_l\mu) < (k\mu)$. По теореме 10.5 при любом l имеет место неравенство $\vartheta_0 < \theta_m < \theta_{N_l} < \theta_k$. Таким образом, на промежутке $\theta_m \leqslant \theta \leqslant \theta_k$ существует хотя бы одна точка, предельная для последовательности θ_k. Пусть это будет точка ϑ_1. По определению $\vartheta_1 \in P$. Но точка ϑ_1 лежит в ε-окрестности точки ϑ_0. Так как ε есть произвольное достаточно малое число, то отсюда следует, что точка ϑ_0 — предельная для P, ϑ_0 — произвольная точка P; следовательно, любая точка P есть предельная точка этого множества, т. е. $P \subset P'$. Таким образом, множество P плотно в себе; так как оно замкнуто, то оно совершенно.

Хорошо известно, что совершенное множество, лежащее на окружности, может быть лишь одного из следующих трех видов: a) это множество совпадает со всей окружностью, b) множество нигде не плотно на окружности, c) это множество не заполняет всю окружность, но содержит в себе хотя бы один сегмент.

Теорема 10.7. *Множество P не может содержать в себе целый сегмент, не заполняя при этом всей окружности.*

Доказательство. Допустим, напротив, что существует сегмент $\alpha \subset P$. Относительно α будем предполагать, что это наибольший сегмент, т. е. в любой окрестности его граничных точек имеются точки, не принадлежащие P. Так как $\alpha \subset P$, то на α лежат хотя бы две точки последовательности θ_n: θ_k и θ_m; пусть $m < k$. Будем по-прежнему через T обозначать преобразование, ставящее в соответствие точке θ_0 точку $F(2\pi, \theta_0)$. Тогда ясно, что $T^{(k-m)}\theta_m = \theta_k$. Но $\theta_m \in \alpha$, $\theta_k \in \alpha$; следовательно, $T^{(k-m)}\theta_m \in \alpha$. Рассмотрим пересечение $T^{(k-m)}\alpha \cdot \alpha$; оно не пусто, так как $\theta_k \in \alpha$, $\theta_k \in T^{(k-m)}\alpha$. Образуем сумму $T^{(k-m)}\alpha + \alpha$, эта сумма представляет собой сегмент. Если этот сегмент совпадает с α, то $T^{(k-m)}\alpha \subset \alpha$. Отсюда, в силу леммы 10.2, следует, что на торе имеется замкнутая интегральная кривая. Но это невозможно, так как число вращения μ иррационально. Предположим теперь, что сегмент $T^{(k-m)}\alpha + \alpha$ содержит в себе α как правильную часть. Нетрудно видеть, что множество P инвариантно относительно преобразования T; следовательно, $T^{(k-m)}\alpha \subset P$ и, значит, $T^{(k-m)}\alpha + \alpha \subset P$. Это невозможно, так как по предположению α — наибольший сегмент. Полученное противоречие и доказывает, что P не может содержать в себе целую дугу нулевого меридиана, не заполняя его целиком.

Данжуа [48] доказал, что если от функции $F(2\pi, \theta_0)$ требовать только непрерывности, то P может быть любым совершенным нигде не плотным множеством. Однако если потребовать от $F(2\pi, \theta_0)$ достаточной гладкости, то P заполнит весь нулевой меридиан. Именно, справедлива следующая теорема, доказанная Данжуа.

Теорема 10.8. *Если функции $f(\varphi, \theta)$ непрерывно дифференцируемы по θ и если производная $\frac{d}{d\theta_0} F(2\pi, \theta_0)$ представляет собой функцию ограниченной вариации, то множество P заполняет весь нулевой меридиан.*

Перед тем как переходить непосредственно к доказательству теоремы 10.8, докажем следующее утверждение.

Лемма 10.3. *Пусть μ — иррациональное число, тогда по любому n_0 можно указать такие целые числа $n > n_0$ и l, что будет выполняться неравенство*

$$|n\mu - l| < |b\mu - a| \tag{10.48}$$

при целом b, удовлетворяющем неравенствам $0 < b < n$, и любом целом a.

Доказательство леммы 10.3. Рассмотрим множество чисел вида $|b\mu - a|$, где a и b — целые и $0 < b \leqslant n_0$. Нетрудно видеть, что существует лишь $2n_0$ пар целых чисел (a, b), если $0 < b \leqslant n_0$, для которых справедливо неравенство $|b\mu - a| < 1$. Поэтому существует $\varepsilon = \min |b\mu - a|$ при $0 < b \leqslant n_0$. Так как μ — число иррациональное, то ясно, что $\varepsilon > 0$. В силу леммы 1.1 по этому ε найдется пара целых чисел M, N такая, что

$$|M\mu - N| < \varepsilon. \tag{10.49}$$

Из определения ε следует, что $M > n_0$. Пусть теперь $\delta = \min |b\mu - a|$ при целых a и b и при $0 < b \leqslant M$. Так как μ — число иррациональное, то ясно, что существует лишь одна пара чисел n, l такая, что $\delta = |n\mu - l|$. Эти n и l и будут, очевидно, искомыми.

Доказательство теоремы 10.8. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что P не заполняет весь нулевой меридиан, т. е. представляет собой совершенное нигде не плотное множество. Пусть α_0 — какой-нибудь смежный для множества P интервал, а ϑ_0 — точка на этом интервале. Как уже отмечалось, множество P инвариантно относительно преобразования T. Следовательно, любой интервал вида $T^k\alpha_0$ является смежным для P. Отсюда вытекает, что интервалы вида $T^k\alpha_0$ и $T^l\alpha_0$ при $l \neq k$ не пересекаются. Действительно, если интервалы $T^k\alpha_0$ и $T^l\alpha_0$ пересекаются, то пересекаются и интервалы α_0 и $T^{k-l}\alpha_0$. Но тогда интервал $\alpha_0 + T^{k-l}\alpha_0$ совпадает с α_0, ибо в противном случае α_0 не мог бы быть интервалом, смежным для множества P. Отсюда следует, что $T^{k-l}\alpha_0 \subset \alpha_0$, и в силу леммы 10.2 уравнение (10.1) имеет на торе замкнутую интегральную кривую, что противоречит иррациональности числа вращения.

Возьмем какое-нибудь натуральное число n, для которого выполняется неравенство (10.48), и рассмотрим точки

$$\vartheta_{-n} = T^{-n}\vartheta_0,\ \vartheta_{-n+1} = T^{-n+1}\vartheta_0,\ \ldots,\ \vartheta_0,\ \vartheta_1 = \\ = T\vartheta_0,\ \ldots,\ \vartheta_{2n} = T^{2n}\vartheta_0$$

и соответствующие им смежные для множества P интервалы

$$\alpha_{-n} = T^{-n}\alpha_0,\ \alpha_{-n+1} = T^{-n+1}\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_0,\ \alpha_1 = \\ = T\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{2n} = T^{2n}\alpha_0.$$

Будем для определенности предполагать, что $n\mu - l > 0$. Покажем, что на промежутке между ϑ_0 и ϑ_n (при движении от ϑ_0 к ϑ_n в положительном направлении) не лежит ни одна точка вида ϑ_k при $-n < k < 2n$, $k \neq 0$, $k \neq n$. Пусть сначала $0 < k < n$, и предположим, вопреки нашему утверждению, что $\vartheta_0 \prec \vartheta_k \prec \vartheta_n$. Тогда в силу теоремы 10.5 выполняется неравенство

$$(\mu k) < (\mu n),$$

которое означает, что существует такое целое число m, что

$$0 < \mu k - m < \mu n - l,$$

а это противоречит выбору числа n, так как $k < n$.

Пусть теперь $k = n + q$, где $0 < q < n$. Предполагая опять, что $\vartheta_0 \prec \vartheta_k \prec \vartheta_n$, получаем в силу теоремы 10.5

$$(\mu n + \mu q) < (\mu n).$$

Отсюда следует, что существует целое число m такое, что

$$0 < \mu n + \mu q - m - l < \mu n - l$$

или

$$-\mu n + l < \mu q - m < 0;$$

это неравенство также противоречит выбору n.

Пусть, наконец, $-n < k < 0$. Из предположения $\vartheta_0 \prec \vartheta_k \prec \vartheta_n$ получаем $\vartheta_k \prec \vartheta_n \prec \vartheta_0$ и, принимая точку ϑ_k за начальную, в силу теоремы 10.5 находим

$$(\mu n - \mu k) < (-\mu k),$$

т. е. существует такое число m, что

$$0 < \mu n - \mu k - l - m < (-\mu k)$$

или

$$-\mu n + l < -\mu k - m < (-\mu k) - \mu n + l.$$

Если $-\mu k - m < 0$, то из последнего неравенства получаем

$$-\mu n + l < -\mu k - m < 0,$$

что противоречит выбору n, так как $-n < k < 0$. Если же $-\mu k - m > 0$, то имеем

$$0 < -\mu k - m < (-\mu k) - \mu n + l,$$

и так как по предположению $\mu n - l > 0$, то

$$0 < -\mu k - m < (-\mu k).$$

Последнее неравенство, очевидно, не может реализоваться. Таким образом, предполагая, что $\vartheta_0 \prec \vartheta_k \prec \vartheta_n$, мы получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим два интервала α_{-n+p} и α_p, где p — целое число, подчиняющееся неравенствам $0 \leqslant p \leqslant n-1$, и покажем, что между ними (если двигаться от интервала α_{-n+p} к интервалу α_p в положительном направлении) не располагается ни один интервал α_k $(-n \leqslant k \leqslant n-1,\ k \neq -n+p,$ $k \neq p)$. Для этого достаточно показать, что между точками ϑ_{-n+p} и ϑ_p нет точек ϑ_k $(-n \leqslant k \leqslant n-1,\ k \neq -n+p,$ $k \neq p)$. Допустим, напротив, что $\vartheta_{-n+p} \prec \vartheta_k \prec \vartheta_p$. Применяя к этой строке преобразование T^{n-p}, получаем $\vartheta_0 \prec \vartheta_{k+n-p} \prec \vartheta_n$. Это противоречит только что доказанному утверждению, так как при сделанном выборе k и p выполняются неравенства $-n < k+n-p < n,\ k+n-p \neq 0,\ k+n-p \neq n$.

Возьмем систему интервалов $\alpha_{-n}, \alpha_{-n+1}, \ldots, \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$; выберем из них интервал α_{-n+p} $(0 \leqslant p \leqslant n-1)$, тогда ближайшим к нему (в сторону возрастания полярного угла) интервалом из выбранной системы будет интервал α_p.

Обозначим через $u(\varphi, \theta_0)$ функцию $u = \frac{\partial}{\partial \theta_0} F(\varphi, \theta_0)$. Хорошо известно, что в наших предположениях функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{d\varphi} = f_\theta'(\varphi, F(\varphi, \theta_0))\, u.$$

Так как $u(0, \theta_0) = \frac{\partial}{\partial \theta_0} F(0, \theta_0) = 1$, то, интегрируя последнее уравнение, получаем

$$u = e^{\int\limits_0^\varphi f_\theta'(\varphi, F(\varphi, \theta_0))\, d\varphi}$$

и, в частности,

$$u(2\pi, \theta_0) = e^{\int\limits_0^{2\pi} f_\theta'(\varphi, F(\varphi, \theta_0))\, d\varphi}.$$

По условию f_θ' непрерывна, поэтому из последнего равенства получаем, что существуют такие числа H_1 и H_2, что

$$0 < H_1 \leqslant u(2\pi, \theta_0) \leqslant H_2.$$

Рассмотрим функцию

$$h(\theta_0) = \ln u(2\pi, \theta_0). \tag{10.50}$$

Функция эта ограничена и в силу монотонности логарифмической функции имеет ограниченную вариацию. По определению полная вариация функции $h(\theta_0)$ равна

$$V = \sup \sum_{k=0}^{n-1} \left| h\left(\theta_0^{(k+1)}\right) - h\left(\theta_0^{(k)}\right) \right| \tag{10.51}$$
$$\left(\theta_0^{(0)} < \theta_0^{(1)} < \ldots < \theta_0^{(n)} = \theta_0^{(0)} + 2\pi\right).$$

Рассмотрим на нулевом меридиане интервал β длиною s, и пусть длина интервала $T\beta = \beta'$ равна s'. Ясно тогда, что

$$s' = \int_\beta u(2\pi,\ \theta_0)\, d\theta_0 = se^{h(\tau)}, \tag{10.52}$$

где τ — некоторая точка, лежащая на интервале β. Иначе говоря, для точки τ имеем

$$h(\tau) = \ln \frac{s'}{s}. \tag{10.53}$$

Пусть интервал α_q имеет длину s_q. Возьмем на интервале α_q точку τ_q, аналогичную точке τ на β; тогда будем иметь

$$s_{q+1} = s_q e^{h(\tau_q)}, \qquad h(\tau_q) = \ln \frac{s_{q+1}}{s_q}. \tag{10.54}$$

Рассмотрим колебание функции $h(\theta_0)$ между точками τ_{-n+p} и τ_p, это колебание будет равно $h(\tau_p) - h(\tau_{-n+p})$. Так как по доказанному выше между интервалами α_{-n+p} и α_p нет интервалов системы α_q $(q = -n,\ -n+1,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ n-1)$, то ясно, что сумма абсолютных величин таких колебаний будет не больше полной вариации функции h; следовательно, можем написать

$$\left| \sum_{p=0}^{n-1} h(\tau_p) - \sum_{p=0}^{n-1} h(\tau_{-n+p}) \right| \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} \left| h(\tau_p) - h(\tau_{-n+p}) \right| \leqslant V.$$

Отсюда и из (10.54) получаем

$$\left| \ln \frac{s_n}{s_0} - \ln \frac{s_0}{s_{-n}} \right| \leqslant V$$

или

$$e^{-V} \leqslant \frac{s_k s_{-n}}{s_0^2} \leqslant e^V. \tag{10.55}$$

Было доказано, что интервалы вида $T^k\alpha_0$ и $T^l\alpha_0$ не пересекаются, поэтому длина s_k интервала $T^k\alpha_0$ стремится к нулю при $k \to \pm\infty$. Следовательно, первое из неравенств (10.55) не может быть выполнено при достаточно большом n. Так как в наших рассуждениях, согласно лемме 10.3, n может быть выбрано сколь угодно большим, то мы получаем противоречие, доказывающее теорему.

Отметим, что функция $\frac{d}{d\theta_0} F(2\pi, \theta_0)$ имеет ограниченную вариацию, если вариация функции $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ ограничена равномерно относительно φ. Действительно,

$$h\left(\theta_0^{(k+1)}\right) - h\left(\theta_0^{(k)}\right) = \int_0^{2\pi} \left[f'_\theta\left(\varphi, \theta_0^{(k+1)}\right) - f'_\theta\left(\varphi, \theta_0^{(k)}\right)\right] d\varphi.$$

Поэтому если полная вариация функции $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ по переменной θ меньше W для любого φ, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| h\left(\theta_0^{(k+1)}\right) - h\left(\theta_0^{(k)}\right) \right| < 2\pi W,$$

т. е. вариация функции $h(\theta_0)$, а следовательно, и функции $\frac{d}{d\theta_0} F(2\pi, \theta_0)$ конечна.

Таким образом, если правая часть уравнения (10.1) достаточно гладка, то множество P совпадает со всем нулевым меридианом. В связи с этим представляет интерес следующее утверждение [1].

Теорема 10.9. *Пусть число вращения μ иррационально, а множество P совпадает со всем нулевым меридианом, тогда существует гомеоморфное преобразование S тора на себя, такое, что интегральные кривые уравнения* (10.1) *переходят в интегральные кривые уравнения*

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \mu. \tag{10.56}$$

Доказательство. Пусть по-прежнему θ_k — точки, последующие для $\theta = 0$, а P — предельное множество последовательности θ_k. По условию множество θ_k всюду плотно. Определим на последовательности θ_k функцию Φ по формуле

$$\Phi(\theta_k) = (\mu k)\, 2\pi. \tag{10.57}$$

Функция Φ на множестве своего определения монотонна, так как по теореме 10.5 если

$$\theta_{k_1} < \theta_{k_2}, \quad \text{то} \quad (\mu k_1) < (\mu k_2). \tag{10.58}$$

Так как множество θ_k всюду плотно на нулевом меридиане, то, взяв любую точку $\bar{\theta}$ на нем, мы сможем указать две последовательности θ_{k_i} и θ_{k_j} такие, что

$$\lim_{i\to\infty} \theta_{k_i} = \bar{\theta}, \quad \lim_{j\to\infty} \theta_{k_j} = \bar{\theta}, \tag{10.59}$$

$$\theta_{k_i} \leqslant \bar{\theta} \leqslant \theta_{k_j}. \tag{10.60}$$

Так как функция Φ монотонна на множестве своего определения, то имеем

$$\lim_{i\to\infty} \Phi(\theta_{k_i}) = \Phi(\bar{\theta} - 0), \tag{10.61}$$

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(\theta_{k_j}) = \Phi(\bar{\theta} + 0), \tag{10.62}$$

и при этом числа $\Phi(\bar{\theta} - 0)$ и $\Phi(\bar{\theta} + 0)$ не зависят от выбора последовательностей θ_{k_i} и θ_{k_j}.

Покажем, что при любом $\bar{\theta}$

$$\Phi(\bar{\theta} - 0) = \Phi(\bar{\theta} + 0). \tag{10.63}$$

Допустим, напротив, что

$$\Phi(\bar{\theta} - 0) < \Phi(\bar{\theta} + 0).$$

Так как множество (μk) всюду плотно на отрезке $[0, 1]$, то найдутся два числа $m \neq l$ таких, что

$$\Phi(\bar{\theta} - 0) < (m\mu)\, 2\pi < \Phi(\bar{\theta} + 0),$$
$$\Phi(\bar{\theta} - 0) < (l\mu)\, 2\pi < \Phi(\bar{\theta} + 0).$$

Рассмотрим точки θ_m и θ_l. Пусть для определенности $\theta_m < \theta_l$, тогда по теореме 10.5 окажется $\theta_{k_i} \leqslant \theta_m < \theta_l \leqslant \theta_{k_j}$. Это невозможно в силу (10.59). Противоречие доказывает равенство (10.63).

Доопределим функцию Φ до всего меридиана естественным образом: если $\bar{\theta} \neq \theta_k$, то $\Phi(\bar{\theta}) = \Phi(\bar{\theta} + 0)$. Из соотношения (10.63) следует, что Φ непрерывна.

Так как функция Φ монотонна, то она имеет непрерывную и монотонную обратную функцию Φ^{-1}. Пусть A — точка тора, а φ и θ — ее приведенные координаты. Проведем через эту точку интегральную кривую $\theta = F(\varphi, \theta_0)$, поставим точке A в соответствие точку B с координатами $(\theta = \mu\varphi + \Phi(\theta_0),\ \varphi = \varphi)$. Это отображение и будет требуемым. Нетрудно видеть, что это отображение взаимно однозначно при $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и взаимно непрерывно. Покажем, что оно взаимно однозначно и при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, т. е. покажем, что точки с координатами $(\varphi = 2\pi,\ \theta = 2\mu\pi + \Phi(\theta_0))$ и $(\varphi = 0,\ \theta = \Phi(F(2\pi, \theta_0)))$ совпадают. По непрерывности это достаточно доказать лишь для случая, когда $\theta_0 = \theta_k$, так как точки θ_k всюду плотны на нулевом меридиане. $F(2\pi, \theta_k)$ имеет приведенную координату θ_{k+1}; следовательно, $\mu 2\pi + \Phi(\theta_k)$ с точностью до целого кратного 2π совпадает с $\Phi(\theta_{k+1})$. Имеем

$$\Phi(\theta_k) = (k\mu)\,2\pi, \quad \Phi(\theta_{k+1}) = ((k+1)\mu)\,2\pi.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

7. В начале предыдущего пункта мы ввели преобразование T нулевого меридиана тора на себя, порождаемое общим решением $\theta = F(\varphi, \theta_0)$ уравнения (10.1)

Предположим теперь, что нам задано гомеоморфное и сохраняющее ориентацию преобразование T окружности C на себя. Покажем, что это преобразование подчиняется тем же законам, что и преобразование, порождаемое уравнением (10.1). Для этого введем семейство кривых, аналогичное семейству интегральных кривых уравнения (10.1).

Введем на окружности C угловую координату θ_0, отсчитываемую от точки $M^{(0)}$, так что координаты точки $M^{(0)}$ представляют собой целые кратные 2π. Пусть $TM^{(0)} = M_1^{(0)}$ и пусть $\theta_1^{(0)}$ есть приведенная координата точки $M_1^{(0)}$ $(0 \leqslant \theta_1^{(0)} < 2\pi)$. Образуем функцию $\theta_1(\theta_0)$ по следующему правилу. Пусть θ_0 есть координата точки $M \in C$, тогда $\theta_1(\theta_0)$ представляет собой координату точки TM. При этом $\theta_1(0) = \theta_1^{(0)}$. Так как преобразование T непрерывно, то мы можем и будем считать функцию θ_1 непрерывной. Нетрудно видеть, что тогда функции $\theta_1(\theta_0)-\theta_0$ будет 2π-периодической. Образуем функцию

$$F(\varphi,\ \theta_0)=\frac{\theta_1(\theta_0)-\theta_0}{2\pi}\varphi+\theta_0 \text{ при } 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<\theta_0<+\infty. \tag{10.64}$$

Кривые $\theta=F(\varphi,\ \theta_0)$ на плоскости $\varphi,\ \theta$ представляют собой семейство отрезков прямых, соединяющих вертикали $\theta=0$ и $\theta=2\pi$. Отрезки эти не пересекаются между собой, так как по предположению преобразование T сохраняет ориентацию. Образуем в полосах вида $2n\pi\leqslant\varphi\leqslant 2(n+1)\pi$ аналогичные семейства отрезков и в точках вертикальных прямых $\theta=2n\pi$ „склеим" соответствующие отрезки, получим семейство ломаных. Точнее говоря, доопределим функцию $F(\varphi,\ \theta_0)$ до всей плоскости следующим образом. Предположим, что функция $F(\varphi,\ \theta_0)$ определена при всех $0\leqslant\varphi\leqslant 2n\pi\ (n\geqslant 1)$. Доопределим F следующим образом в полосе $2n\pi\leqslant\varphi\leqslant 2(n+1)\pi$. Положим

$$F(\varphi,\ \theta_0)=\frac{\theta_1(F(2n\pi,\ \theta_0))-F(2n\pi,\ \theta_0)}{2\pi}(\varphi-2n\pi)+F(2n\pi,\ \theta_0). \tag{10.65}$$

Таким образом, функция $F(\varphi,\ \theta_0)$ окажется определенной при всех $\varphi\geqslant 0$. При $\varphi\leqslant 0$ $F(\varphi,\ \theta_0)$ определяется аналогично. На плоскости $\varphi,\ \theta$ семейство $\theta=F(\varphi,\ \theta_0)$ представляет собой семейство ломаных, нигде не пересекающихся друг с другом и непрерывно зависящих от параметра θ_0. Через каждую точку плоскости проходит одна и только одна ломаная.

Нетрудно видеть, что для семейства $\theta=F(\varphi,\ \theta_0)$ справедливы те же заключения, что и для семейства интегральных кривых уравнения (10.1).

Определение 10.1. Назовем числом вращения μ преобразования T число вращения семейства $\theta=F(\varphi,\ \theta_0)$, определенного выше.

Если число вращения μ преобразования T иррационально, то семейство кривых $\theta=F(\varphi,\ \theta_0)$ не имеет на торе замкнутых кривых, а это в свою очередь означает, что преобразование T^q на окружности C не имеет неподвижных точек ни при каком q. С другой стороны, если преобразование T^q имеет неподвижную точку M, $T^qM=M$ и $T^rM\neq M$ при $1\leqslant r<q$, то преобразование T имеет рациональное число вращения $\frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты.

Обратно, если преобразование T имеет рациональное число вращения $\mu = \frac{p}{q}$ $\left(\text{дробь } \frac{p}{q} \text{ несократима}\right)$, то преобразование T^q имеет неподвижную точку. При этом если для некоторой точки $M \in C$ выполняется соотношение $T^r M = M$ (r — натуральное число), то обязательно $r = kq$, где k — натуральное число.

Эти утверждения вытекают непосредственно из теорем 10.2 — 10.4, справедливых, как отмечалось, в рассматриваемом случае.

§ 11. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе

В этом параграфе мы вновь рассмотрим уравнение первого порядка, правая часть которого периодична по обоим аргументам:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta). \tag{11.1}$$

Относительно функции $f(\varphi, \theta)$ будем, как и выше, предполагать, что она 2π-периодична по обоим аргументам, непрерывна и обеспечивает единственность решений при любых φ, θ.

1. Будем интересоваться зависимостью числа вращения от параметров, которые могут входить в правую часть уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta, \alpha), \tag{11.2}$$

где функция $f(\varphi, \theta, \alpha)$ непрерывна в точке $(\varphi, \theta, \alpha_0)$ и в окрестности этой точки обладает теми же свойствами, что и правая часть уравнения (11.1). Ясно, что число вращения $\mu = \mu(\alpha)$ уравнения (11.2) зависит от α.

Теорема 11.1. Функция $\mu(\alpha)$ *непрерывна в точке* α_0.

Доказательство. Обозначим через $\theta = F(\varphi, \theta_0, \alpha)$ то решение уравнения (11.2), для которого $\theta_0 = F(0, \theta_0, \alpha)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и столь большое натуральное

q, что $\frac{2}{q} < \varepsilon$. По этому q найдется, очевидно, такое целое число p, что

$$2\pi(p-1) < F(2\pi q,\ 0,\ \alpha_0) < 2\pi(p+1). \tag{11.3}$$

В силу непрерывной зависимости решения уравнения (11.2) от параметра α в точке α_0 найдется такое $\delta > 0$, что при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ окажется

$$2\pi(p-1) < F(2\pi q,\ 0,\ \alpha) < 2\pi(p+1). \tag{11.4}$$

Из неравенств (11.3) и (11.4) и из определения числа вращения вытекают неравенства

$$\frac{p-1}{q} < \mu(\alpha_0) < \frac{p+1}{q} \tag{11.5}$$

и

$$\frac{p-1}{q} < \mu(\alpha) < \frac{p+1}{q} \quad \text{при} \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta. \tag{11.6}$$

Вычитая неравенство (11.5) из неравенства (11.6), получим

$$-\frac{2}{q} < \mu(\alpha) - \mu(\alpha_0) < \frac{2}{q}.$$

А отсюда и из выбора числа q следует

$$|\mu(\alpha) - \mu(\alpha_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\alpha - \alpha_0| < \delta.$$

Последнее неравенство и доказывает теорему.

Теорема 11.1 показывает, что число вращения зависит от параметра непрерывно, если правая часть уравнения есть непрерывная функция параметра. В связи с этим возникает вопрос, не будет ли функция $\mu(\alpha)$ обладать какой-нибудь гладкостью, если правая часть есть достаточно гладкая функция своих аргументов. На следующем примере видно, что функция $\mu(\alpha)$ может не удовлетворять условию Липшица, несмотря на то, что правая часть есть целая функция.

Пример.

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \sin^2\theta + \alpha.$$

При $\alpha \in [-1,\ 0]$ это уравнение допускает в качестве своих решений некоторые постоянные, и, следовательно, его число вращений равно нулю, т. е. $\mu(\alpha) = 0$ при $\alpha \in [-1,\ 0]$.

Проинтегрируем наше уравнение при $\alpha > 0$ и при начальных данных $\varphi = \theta = 0$:

$$\int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\alpha + \sin^2\theta} = \varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha}} \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{\alpha + 1}\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\alpha}}.$$

По теореме 10.1

$$\mu(\alpha) = \lim_{\varphi \to +\infty} \frac{F(\varphi, 0, \alpha)}{\varphi},$$

откуда

$$\mu(\alpha) = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \alpha} \cdot \theta}{\operatorname{Arctg} \dfrac{\sqrt{\alpha + 1} \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha}.$$

Таким образом, для рассматриваемого уравнения $\mu(\alpha)$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\alpha = 0$.

2. Как будет видно из дальнейшего, число вращения μ уравнения (11.1) в некоторых случаях не меняется, несмотря на произвольные, но достаточно малые возмущения правой части. Выясняем вопрос о том, когда имеет место такое явление. Наряду с уравнением (11.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta) + f_1(\varphi, \theta), \tag{11.7}$$

где функция $f_1(\varphi, \theta)$ непрерывна, 2π-периодична по обоим аргументам и обеспечивает единственность решения уравнения (11.7).

Определение 11.1. Будем говорить, что уравнение (11.1) имеет устойчивое число вращения, если существует такое $\varepsilon > 0$, что при любой функции $f_1(\varphi, \theta)$ такой, что $|f_1(\varphi, \theta)| \leqslant \varepsilon$, уравнение (11.7) имеет такое же число вращения, как и уравнение (11.1).

В противном случае будем говорить, что уравнение (11.1) имеет неустойчивое число вращения.

Лемма 11.1. Если число вращения μ *уравнения* (11.1) *иррационально, то оно неустойчиво.*

Доказательство. В рассматриваемом случае на торе нет замкнутых интегральных кривых и существует устойчиная в смысле Пуассона траектория. Будем для определенности считать, что траектория $L\{\theta = F(\varphi, 0)\}$ устойчива по Пуассону (в противном случае мы сделали бы замену переменных вида $\vartheta = \theta - \theta_0$). Зададимся теперь произвольным положительным ε. По этому ε в силу непрерывности и периодичности функции $f(\varphi, \theta)$ найдется такое $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, что $|f(\varphi_1, \theta_1) - f(\varphi_2, \theta_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|\varphi_1 - \varphi_2| < \delta$, $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$. В силу предположения о том, что траектория L устойчива в смысле Пуассона на торе, найдется такое целое число p и такое натуральное число q, что $|2p\pi - F(2q\pi, 0)| < \delta$. Для определенности мы предположим, что $2p\pi > F(2q\pi, 0)$ (равенство $2p\pi = F(2q\pi, 0)$ невозможно, так как μ иррационально по условию). Тогда из определения числа μ и из его иррациональности следует, что

$$\frac{p}{q} > \mu. \tag{11.8}$$

Положим теперь $f_1(\varphi, \theta) = \varepsilon$, тогда уравнение (11.7) примет вид

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = f(\varphi, \theta) + \varepsilon. \tag{11.9}$$

Обозначим через $\theta = F_1(\varphi, \theta_0)$ решение уравнения (11.9), а через μ_1 его число вращения. Из определения δ следует, что кривая $M\{\theta = F(\varphi, 0) + \delta\}$ не имеет контакта с полем линейных элементов уравнения (11.9). Кроме того, из вида уравнения (11.9) и из определения δ следует, что до тех пор, пока кривая $\theta = F_1(\varphi, 0)$ находится в замкнутой области $G\{F(\varphi, 0) \leqslant \theta \leqslant F(\varphi, 0) + \delta\}$, выполняется неравенство

$$F_1'(\varphi, 0) - F'(\varphi, 0) > \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.10}$$

Интегрируя это неравенство, убеждаемся, что кривая $\theta = F_1(\varphi, 0)$ покидает область G при $0 < \varphi < 2\pi$. Так как кривая M не имеет контакта с полем линейных элементов уравнения (11.9), то ясно, что при $\varphi \geqslant 2\pi$ выполняется неравенство $F_1(\varphi, 0) > F(\varphi, 0) + \delta$. Отсюда и из определения чисел p и q следует, что $F_1(2q\pi, 0) > 2p\pi$. По определению числа вращения тогда имеем

$$\mu_1 \geqslant \frac{p}{q},$$

отсюда и из (11.8) следует неравенство $\mu_1 > \mu$, которое и доказывает лемму.

Предположим теперь, что число вращения уравнения (11.1) рационально $\mu = \frac{p}{q}$. Образуем функцию

$$g(\theta_0) = F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0. \qquad (11.11)$$

Функцию эту мы будем называть функцией последования. Из теоремы 10.2 следует, что функция последования имеет нули при $\theta_0 \in [0, 2\pi)$. Нулям этой функции соответствуют периодические решения уравнения 11.1 (замкнутые циклы на торе).

Лемма 11.2. Если число вращения уравнения (11.1) *рационально* $\left(\mu = \frac{p}{q}\right)$ *и если функция последования* $g(\theta_0)$ *не меняет знака, то число вращения уравнения* (11.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть для определенности $g(\theta_0) \geqslant 0$ при всех θ_0. Наряду с (11.1) рассмотрим уравнение (11.9), в котором ε — произвольное положительное число. Тогда ясно, что $F_1(2q\pi, \theta_0) > F(2q\pi, \theta_0)$ при всех θ_0. Но отсюда следует, что

$$F_1(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0 > F(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0 = g(\theta_0) \geqslant 0.$$

Это неравенство показывает, что уравнение (11.9) не имеет замкнутых циклов, делающих до замыкания q оборотов по долготе и p оборотов по широте. А отсюда вытекает, что число вращения у уравнения (11.9) отлично от $\frac{p}{q}$. Этим доказана лемма.

Лемма 11.3. Если число вращения μ *уравнения* (11.1) *рационально* $\left(\mu = \frac{p}{q}\right)$ *и если функция последования* $g(\theta_0)$ *принимает значения разных знаков, то число вращения уравнения* (11.1) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть $\theta = F_2(\varphi, \theta_0)$ — решение уравнения (11.7). По условию леммы имеем, что функция $g(\theta_0)$ меняет знак. Отсюда и из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от правых частей следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $g_2(\theta_0) = F_2(2q\pi, \theta_0) - 2p\pi - \theta_0$ также меняет знак, если только $|f_1(\varphi, \theta)| < \varepsilon$ при всех φ, θ. Но тогда в силу непрерывности функции $g_2(\theta_0)$ существует такое θ_0', что $g_2(\theta_0') = 0$. Следовательно, через точку $\varphi = 0$, $\theta = \theta_0$ проходит замкнутый цикл уравнения (11.7). Отсюда вытекает, что число вращения уравнения (11.7) равно $\frac{p}{q}$. Это и доказывает лемму.

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 11.2. *Для того чтобы уравнение* (11.1) *имело устойчивое число вращения, необходимо и достаточно, чтобы число μ было рациональным и функция последования $g(\theta_0)$ меняла знак.*

Теореме 11.2 в случае, когда правая часть уравнения (11.1) аналитична по θ, можно придать другую формулировку.

Теорема 11.3. *Если в окрестности каждой точки $\theta \in [0, 2\pi]$ функция $f(\varphi, \theta)$ разлагается в степенной ряд по θ, сходящийся равномерно при $\varphi \in [0, 2\pi]$, то, для того чтобы число вращения μ уравнения* (11.1) *было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (11.1) *имело хотя бы одно асимптотически устойчивое по Ляпунову периодическое решение.*

Доказательство. Достаточность следует из того, что в условиях теоремы число вращения рационально, а функция последования меняет знак, и из теоремы 11.2.

Теперь докажем необходимость. Предположим, что условия теоремы 11.3 не выполнены. Если уравнение (11.1) вообще не имеет периодических решений, то число вращения его иррационально и в силу леммы 11.1 неустойчиво. Пусть теперь уравнение (11.1) имеет периодические решения, тогда его число вращения рационально. Образуем функцию последования $g(\theta_0)$; из аналитичности правой части уравнения (11.1) следует, что функция $g(\theta_0)$ аналитическая. Отсюда вытекает, что либо уравнение $g(\theta_0) = 0$ имеет конечное число корней на промежутке $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$, либо $g(\theta_0) \equiv 0$. Во втором случае из леммы 11.2 следует, что число вращения уравнения (11.1) неустойчиво. В первом же случае, ввиду отсутствия устойчивых периодических решений, функция $g(\theta_0)$ не принимает значений одного какого-нибудь знака и в силу леммы 11.2 уравнение (11.1) имеет неустойчивое число вращения.

Теорема доказана.

3. В этом пункте мы будем изучать вопрос о грубости уравнения (11.1). Дадим определение грубости для уравнения (11.1), заданного на торе. Определение это во многом аналогично определению грубости плоской динамической системы [51, 52]. Предположим, что функция $f(\varphi, \theta)$ имеет непрерывную частную производную по θ. Обозначим через $\rho(M, N)$ евклидово расстояние между точками M и N ~~тора R~~.

Определение 11.2. Уравнение (11.1) назовем грубым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при любой непрерывной $f_1(\varphi, \theta)$, имеющей непрерывную $\frac{\partial f_1}{\partial \theta}$, 2π-периодичной по обоим своим аргументам и удовлетворяющей неравенствам

$$|f_1(\varphi, \theta)| < \delta, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right| < \delta, \tag{11.12}$$

существует топологическое преобразование S тора R на себя со следующими свойствами:

1) $\rho(M, S(M)) < \varepsilon$;

2) S преобразует интегральные кривые уравнения (11.1) в интегральные кривые уравнения (11.7).

Лемма 11.4. Если уравнение (11.1) *грубое, то оно имеет рациональное число вращения* $\mu = \frac{p}{q}$, *и функция последования* $g(\theta_0)$ *меняет знак.*

Доказательство. Доказательство леммы мы будем проводить от противного. Предположим сначала, что число вращения μ уравнения (11.1) иррационально. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Сделаем относительно решения $\theta = F(\varphi, 0)$ уравнения (11.1) такие же предположения, как и при доказательстве леммы 11.1. Как было показано, тогда число вращения μ_1 уравнения (11.9) больше числа вращения μ уравнения (11.1). В силу теоремы 11.1 число вращения $\mu_1(\varepsilon)$ уравнения (11.9) зависит от ε непрерывно, и потому существует такое $\varepsilon_0 < \varepsilon$, что число вращения $\mu_1(\varepsilon_0)$ рационально. Но ясно, что тогда не существует топологического преобразования тора R на себя, переводящего интегральные кривые уравнения (11.1) в интегральные кривые уравнения (11.9), в котором $\varepsilon = \varepsilon_0$, ибо в противном случае при таком преобразовании незамкнутая кривая переходила бы в замкнутый цикл, что невозможно. Но тогда из определения 11.2 следует, что уравнение (11.1) не является грубым. Мы получили противоречие с условием леммы, которое и доказывает, что число вращения уравнения (11.1) не может быть иррациональным.

Предположим теперь, что $\mu = \frac{p}{q}$ и что функция последования не меняет знака. Пусть для определенности $g(\theta_0) \geqslant 0$. Тогда, как показано при доказательстве леммы 11.2, число вращения μ_1 уравнения (11.9) отлично от числа вращения μ уравнения (11.1) при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, существует сколь угодно малое ε_0, такое, что число вращения уравнения (11.9) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ иррационально. Но тогда ясно, что уравнение (11.1) не является грубым. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 11.5. Если уравнение (11.1) *грубое, то оно имеет лишь конечное число замкнутых циклов.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\delta > 0$. По этому δ можно указать 2π-периодическую по обоим аргументам и непрерывную по φ функцию $\bar{f}(\varphi, \theta)$, обладающую следующими свойствами: 1) она разлагается в степенной ряд по θ, сходящийся равномерно при $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $|\theta| < A$, где A — любое положительное число; 2) имеют место следующие неравенства:

$$|f(\varphi, \theta) - \bar{f}(\varphi, \theta)| < \delta, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta}\right| < \delta. \tag{11.13}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \bar{f}(\varphi, \theta). \tag{11.14}$$

В силу (11.13) уравнение это является допустимым возмущением для (11.1). По условию леммы тогда существует топологическое преобразование S тора R на себя, переводящее интегральные кривые уравнения (11.1) в интегральные кривые уравнения (11.14). Предположим теперь, вопреки утверждению леммы, что уравнение (11.1) имеет бесконечно много замкнутых циклов. Тогда и уравнение (11.14) имеет бесконечно много замкнутых циклов. Так как уравнение (11.14) имеет периодические решения, то его число вращения рационально и для него определена функция последования $\bar{g}(\theta_0)$. В силу предположения об аналитичности $\bar{f}(\varphi, \theta)$ функции $\bar{g}(\theta_0)$ будет также аналитической. Но периодические решения уравнения (11.14) соответствуют нулям функции $\bar{g}(\theta_0)$. Следовательно, функция $\bar{g}(\theta_0)$ имеет бесконечно много нулей, и, значит, $\bar{g}(\theta_0)\equiv 0$, так как $\bar{g}(\theta_0)$ — аналитическая функция. Отсюда вытекает, что все решения уравнения (11.14) периодические. Но тогда и все решения уравнения (11.1) тоже периодические. Отсюда следует, что функция последования $g(\theta_0)$ уравнения (11.1) — тождественный нуль. А это противоречит тому, что уравнение (11.1) грубое, и лемме 11.4. Полученное противоречие доказывает лемму.

Предположим, что уравнение (11.1) имеет рациональное число вращения $\mu=\frac{p}{q}$. Пусть θ_1 — широта точки на нулевом меридиане тора R, через которую проходит периодическое решение уравнения (11.1). С периодическим решением $\theta=F(\varphi,\ \theta_1)$ свяжем характеристический показатель

$$h(\theta_1)=\frac{1}{2q\pi}\int\limits_0^{2q\pi}\frac{\partial f}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=F(\varphi,\ \theta_1)}d\varphi. \tag{11.15}$$

Нетрудно видеть, что в наших предположениях относительно правой части уравнения (11.1) имеет место равенство

$$\frac{d}{d\theta_0}F(2q\pi,\ \theta_0)\bigg|_{\theta_0=\theta_1}=e^{2q\pi h(\theta_1)}. \tag{11.16}$$

Пусть $g(\theta_0)$ — функция последования для уравнения (11.1), тогда из (11.16) и вида функции $g(\theta_0)$ следует равенство

$$\frac{dg}{d\theta_0}\bigg|_{\theta_0=\theta_1}=e^{2q\pi h(\theta_1)}-1. \tag{11.17}$$

Сформулируем теперь еще одну лемму относительно грубости уравнения (11.1).

Лемма 11.6. *Если уравнение* (11.1) *грубое, то любое его периодическое решение* $\theta=F(\varphi,\ \theta_1)$ *имеет отличный от нуля характеристический показатель.*

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению леммы, что через точку θ_1 нулевого меридиана проходит периодическое решение $\theta=F(\varphi,\ \theta_1)$ и $h(\theta_1)=0$. В силу леммы 11.5 уравнение (11.1) имеет лишь конечное число периодических решений. Поэтому на нулевом меридиане существует такая точка θ_2 ($\theta_2>\theta_1$), что решение $\theta=F(\varphi,\ \theta_2)$

периодическое, и через интервал (θ_1, θ_2) не проходит больше периодических решений уравнения (11.1). Отметим, что θ_2 — точка, геометрически отличная от точки θ_1, так как в противном случае функция $g(\theta_0)$ имела бы лишь один нуль на промежутке $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$ и, будучи периодической, не меняла бы знака, а это противоречит лемме 11.4. По определению точки θ_2 функция $g(\theta_0)$ при $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ сохраняет знак, пусть для определенности $g(\theta_0) > 0$ при $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$. Возьмем теперь столь малое $\delta > 0$, что δ-окрестность $\{F(\varphi, \theta_1) - \delta \leqslant \theta \leqslant F(\varphi, \theta_1) + \delta\}$ решения $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ не пересекается ни с одним из периодических решений уравнения (11.1), отличных от $\theta = F(\varphi, \theta_1)$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Введем в рассмотрение функцию $f_1(\varphi, \theta)$ со следующими свойствами: а) $f_1(\varphi, \theta)$ принадлежит классу C_2 и 2π-периодична по обоим аргументам; б) $|f_1(\varphi, \theta)| \leqslant \varepsilon$, $\left|\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right| \leqslant \varepsilon$; в) $f_1(\varphi, \theta) = 0$ на кривой $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ и вне δ-окрестности этой кривой; $\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -\varepsilon$ при $\theta = F(\varphi, \theta_1)$.

Рассмотрим уравнение (11.7), в котором функция $f_1(\varphi, \theta)$ обладает перечисленными свойствами. Ясно, что все периодические решения уравнения (11.1) будут также и периодическими решениями уравнения (11.7). Найдем характеристический показатель $h_1(\theta_1)$ решения $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ уравнения (11.7). По определению имеем

$$h_1(\theta_1) = \frac{1}{2\pi q} \int_0^{2q\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right) \Bigg|_{\theta = F(\varphi, \theta_1)} d\varphi$$

или

$$h_1(\theta_1) = \frac{1}{2q\pi} \int_0^{2q\pi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \Bigg|_{\theta = F(\varphi, \theta_1)} d\varphi + \frac{1}{2q\pi} \int_0^{2q\pi} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \Bigg|_{\theta = F(\varphi, \theta_1)} d\varphi. \tag{11.18}$$

Первый из интегралов правой части этого равенства совпадает с характеристическим показателем $h(\theta_1)$ решения $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ уравнения (11.1) и по предположению равен нулю. Отсюда и из свойства функции $f_1(\varphi, \theta)$ имеем

$$h_1(\theta_1) = -\varepsilon. \tag{11.19}$$

Пусть $g_1(\theta_0)$ — функция последования для уравнения (11.7). По формуле (11.17) получаем

$$g_1'(\theta_1) = e^{-2q\pi s} - 1 < 0. \tag{11.20}$$

По определению числа δ кривая $\theta = F(\varphi, \theta_2)$ и замкнутая область $\{F(\varphi, \theta_1) - \delta \leqslant \theta \leqslant F(\varphi, \theta_1) + \delta\}$ не пересекаются. Значит, существует такое $\delta_2 > 0$, что не пересекаются замкнутые области $\{F(\varphi, \theta_2) - \delta_2 \leqslant \theta \leqslant F(\varphi, \theta_2) + \delta_2\}$ и $\{F(\varphi, \theta_1) - \delta \leqslant \theta \leqslant F(\varphi, \theta_1) + \delta\}$.

По теореме об интегральной непрерывности найдется такое $l > 0$, что все решения $\theta = F_1(\varphi, \theta_0)$ уравнения (11.7), у которых $|\theta_2 - \theta_0| < l$, будут лежать в области $|\theta - F(\varphi, \theta_2)| < \delta_2$ на промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant 2q\pi$. Но по свойству функции $f_1(\varphi, \theta)$ эти решения будут просто совпадать с соответствующими решениями уравнения (11.1). А тогда в силу сделанного предположения будем иметь

$$g_1(\theta_0) = g(\theta_0) > 0 \tag{11.21}$$

при $\theta_2 - l \leqslant \theta_0 \leqslant \theta_2$. Как отмечалось выше, функция $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ есть периодическое решение уравнения (11.7), и потому $g_1(\theta_1) = 0$. Но тогда из соотношений (11.20) и (11.21) вытекает существование такого $\theta_3 \in (\theta_1, \theta_2)$, что $g_1(\theta_3) = 0$. Это значит, что решение $\theta = F_1(\varphi, \theta_3)$ уравнения (11.7) периодическое. Таким образом, оказывается, что у уравнения (11.7) больше периодических решений, чем у уравнения (11.1). Но тогда не может существовать преобразования тора R на себя, требуемого определением грубости. Это противоречит условию. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Теорема 11.4. *Для того чтобы уравнение* (11.1) *было грубым, необходимо и достаточно, чтобы оно имело рациональное число вращения и любое его периодическое решение имело ненулевой характеристический показатель.*

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы следует из лемм 11.4 и 11.6. Докажем достаточность. Отметим сначала, что уравнение (11.1) имеет лишь конечное число периодических решений. Действительно, если бы их было бесконечно много, то среди них имелось бы неизолированное, а его характеристический показатель был бы равен нулю. Зададимся произвольным положительным числом ε.

Будем сравнивать уравнение (11.1) с уравнением (11.7), у которого $|f_1| < \delta$, $\left|\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right| < \delta$. Пусть θ_1 и θ_2 — две точки на нулевом меридиане, через которые проходят периодические решения уравнения (11.1). При этом предполагается, что решения эти соседние, т. е. через интервал (θ_1, θ_2) не проходит замкнутые циклы уравнения (11.1). Обозначим через A область, расположенную между замкнутыми кривыми $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ и $\theta = F(\varphi, \theta_2)$. Так как решения $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ и $\theta = F(\varphi, \theta_2)$ имеют ненулевые характеристические показатели, то их можно заключить в сколь угодно узкие полосы U_1 и U_2, ограниченные замкнутыми гладкими кривыми без контакта. Пусть L_1 и N_1 — границы U_1, а L_2 и N_2 — границы U_2. Мы будем предполагать, что ширина полос U_1 и U_2 меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и что эти полосы не пересекаются друг с другом и с периодическим решением уравнения (11.1), отличным от $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ и $\theta = F(\varphi, \theta_2)$. Из формулы (11.17) следует, что δ можно выбрать столь малым, что уравнение (11.7) будет иметь столько же периодических решений, сколько и уравнение (11.1). Величину δ можно выбрать столь малой, чтобы кривые L_1, N_1, L_2 и N_2 не имели контакта с полем уравнения (11.7) и чтобы уравнение (11.7) имело в каждой из полос U_1 и U_2 точно одно периодическое решение ($\theta = F_1(\varphi, \theta_1')$ и $\theta = F_1(\varphi, \theta_2')$ соответственно), а в области $A - U_1 - U_2$ не имело бы периодических решений. Кроме того, δ будем считать столь малым, что решения уравнений (11.1) и (11.7), начинающиеся в одной и той же точке области $A - U_1 - U_2$, отличаются друг от друга достаточно мало до тех пор, пока оба они находятся в области $A - U_1 - U_2$.

Пусть кривая L_1 лежит в области A. Сопоставим каждой точке этой кривой ее самое. Каждой точке p траектории K уравнения (11.1), проходящей через точку q кривой L_1, сопоставим точку, имеющую ту же долготу, что и p, и лежащую на той траектории уравнения (11.7), которая проходит через q. Ясно, что при этом получится гомеоморфное преобразование S_1 области A в тор R. Сопоставим теперь между собой точки кривых $\theta = F(\varphi, \theta_1)$ и $\theta = F_1(\varphi, \theta_1')$, $\theta = F(\varphi, \theta_2)$ и $\theta = F_1(\varphi, \theta_2')$, имеющие одинаковую долготу. Из того, что характеристические показатели всех этих кривых отличны от нуля и имеют попарно одинаковые знаки, следует, что таким образом мы получаем гомеоморфное преобразование замкнутой области $\overline{A}$ в тор R.

Если эти же рассуждения распространить на все области, лежащие между соседними периодическими решениями, то станет ясно, что найдется такое $\delta > 0$, что при $|f_1| < \delta$, $\left|\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right| < \delta$ существует гомеоморфное преобразование тора R на себя, удовлетворяющее требованиям, сформулированным в определении грубости.

Теорема доказана.

§ 12. Общие теоремы о поведении решений систем второго порядка

В этом параграфе мы начнем изучение системы уравнений второго порядка

$$\frac{dX}{dt} = F(X,\ t), \tag{12.1}$$

где $X = \{x_1,\ x_2\}$, $F = \{f_1,\ f_2\}$ — двумерные векторы. Относительно вектор-функции F будем, как обычно, предполагать, что она определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений системы (12.1) при всех X, t. Кроме того, будем, как и раньше, предполагать, что F имеет период ω по t, т. е. $F(X,\ t+\omega) = F(X,\ t)$.

1. У системы (12.1) гиперплоскость $t = 0$ есть просто евклидова плоскость E. Поэтому в тех случаях, когда все решения $X(t,\ X_0,\ 0)$ системы (12.1) продолжимы на все моменты времени из промежутка $0 \leqslant t \leqslant \omega$, преобразование T, определенное в § 1, представляет собой преобразование евклидовой плоскости в себя. Это обстоятельство позволяет для системы (12.1) сформулировать следующее весьма важное утверждение [53].

Теорема 12.1. *Если все решения $X(t,\ X_0,\ 0)$ системы (12.1) продолжимы на все моменты времени $0 \leqslant t \leqslant \omega$ и если существует решение, ограниченное при $t \geqslant 0$, то существует и ω-периодическое решение.*

Прежде чем доказывать теорему 12.1, установим следующие важные предложения, касающиеся теории топологических преобразований плоскости. (Доказываемые ниже утверждения принадлежат Брауэру [54], читатель найдет их доказательства также и в работе А. А. Андронова и А. Г. Майера [55].)

Пусть T — гомеоморфное и сохраняющее ориентацию преобразование евклидовой плоскости E в себя. Введем следующие понятия. Пусть X — точка плоскости E и $X_1 = TX$. Пусть γ — простая дуга с концами в точках X и X_1, такая, что дуга $\gamma_1 = T\gamma$ имеет с γ одну общую точку X_1. Дуга γ называется дугой переноса, а множество точек

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} T^k\gamma \tag{12.2}$$

носит название луча переноса.

Теорема 12.2. Предположим, что преобразование T не имеет неподвижных точек, тогда луч переноса не может иметь двойных точек (т. е. точек, принадлежащих $\gamma_n = T^n\gamma$ и $\gamma_m = T^m\gamma$, $n \neq m$, и отличных от их общего конца, если $|m - n| = 1$).

Доказательство. Рассмотрим луч переноса Γ, начинающийся в точке X дугой γ, и предположим, вопреки утверждению теоремы, что он имеет двойную точку. Присоединим к простой дуге γ простую дугу $\gamma_1 = T\gamma$. По определению дуги переноса опять получим простую дугу $\gamma + \gamma_1$. К этой простой дуге присоединим дугу $\gamma_2 = T^2\gamma$; полученная таким образом кривая $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2$ может оказаться простой дугой, в этом случае присоединим к ней дугу $\gamma_3 = T^3\gamma$ и т. д. Согласно сделанному нами предположению процесс этот должен оборваться (ибо в противном случае луч переноса Γ не будет иметь двойных точек). Пусть впервые при присоединении дуги $\gamma_k (k > 1)$ к простой дуге $\gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}$ не получится простая дуга. Обозначим через q_1 первую от $X_k = T^kX$ точку пересечения γ_k с $\gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}$, так что простая дуга $\gamma + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{k-1}$ не имеет с дугой X_kq_1 точек пересечения, отличных от q_1. Покажем, что $q_1 \in \gamma$. Предположим, напротив, что $q_1 \in \gamma_r (1 \leqslant r \leqslant k-1)$. Тогда ясно, что $T^{-r}q_1 \in T^{-r}\gamma_r = T^{-r}T^r\gamma = \gamma$, но $q_1 \in \gamma_k$; следовательно, $T^{-r}q_1 \in T^{-r}\gamma_k = \gamma_{k-r}$, а это значит, что γ пересекается с γ_{k-r} в точке $T^{-r}q_1$, что противоречит определению k. Обозначим через C простую замкнутую кривую, составленную из простых дуг q_1X_1 (часть γ), γ_1, γ_2, ..., γ_{k-1} и X_kq_1 (часть γ_k). Точки $q_2 = Tq_1$, $q = T^{-1}q_1$ принадлежат C ($q_2 \in \gamma_1$,

$q \in \gamma_{k-1}$). Простая дуга $q_1X_{k+1}q_2$, состоящая из частей γ_k и γ_{k+1}, может пересекать лишь дугу q_1X_1 (часть γ), так как в противном случае уже γ_{k-1} пересекалась бы с одной из дуг γ, γ_1, γ_2, ..., γ_{k-2} вопреки предположению. Поэтому простую дугу $q_2X_2q_1$, состоящую из частей дуг γ_1 и γ_k и простых дуг γ_2, ..., γ_{k-1}, можно дополнить до простой замкнутой кривой как при помощи простой дуги $q_1X_1q_2$ — тогда получится C, — так и при помощи простой дуги $q_1X_{k+1}q_2$ — тогда получится простая замкнутая кривая $C_1 = TC$. Обратим внимание на то, что область, ограниченная простыми дугами $q_1X_1q_2$ и $q_1X_{k+1}q_2$, не может содержать внутри себя простую дугу qX_kq_1, ибо в противном случае преобразование T меняло бы ориентацию контура C.

Пусть $v(X)$ — вектор сдвига преобразования T, т. е. вектор, проведенный из точки X в точку TX. Так как область, ограниченная дугами $q_1X_1q_2$ и $q_1X_{k+1}q_2$, не содержит qX_kq_1, то угол, на который поворачивается вектор преобразования v при перемещении его начальной точки по простой дуге qX_kq_1 (и, следовательно, конечной точки по дуге $q_1X_{k+1}q_2$), будет такой же, как угол поворота вектора, нигде не исчезающего, начало которого движется по простой дуге qX_kq_1, а конец — по какому-либо непрерывному закону по простой дуге $q_1X_1q_2$.

Отсюда следует, что угол поворота вектора преобразования v при обходе начальной точкой кривой C будет такой же, как и угол поворота вектора, нигде не исчезающего, конец которого при обходе начальной точкой кривой C также обходит кривую C, и потому этот угол равен $+2\pi$. Таким образом, индекс замкнутой кривой C в поле v равен $+1$; следовательно, в области, ограниченной кривой C, вектор v обращается в нуль хотя бы в одной точке X_0. Но тогда $X_0 = TX_0$, т. е. точка X_0 — неподвижная точка преобразования T. Это противоречит условию. Теорема доказана.

Обозначим через E_1 образ плоскости E при преобразовании T.

Теорема 12.3. Если преобразование T не имеет неподвижных точек, то через каждую точку области E_1 можно провести луч переноса.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $X \in E_1$ и покажем, что ее можно соединить с $X_1 = TX$ дугой переноса, этим и будет доказана теорема.

Соединим X с X_1 какой-нибудь простой дугой γ, лежащей в E_1, и положим $\gamma_1 = T\gamma$. Если γ и γ_1 не пересекаются, то теорема доказана. Будем предполагать, что кривые γ и γ_1 пересекаются.

Обозначим через q_1 точку пересечения γ и γ_1 со следующим свойством: если $q = T^{-1}q_1$, $q_2 = Tq_1$, то:

а) либо Xq_1 не имеет других точек пересечения с X_1q_2,

б) либо X_1q_1 не имеет других точек пересечения с Xq.

Покажем, что точка q_1 с таким свойством существует. Пусть точка s движется по γ от X к X_1; тогда $s_1 = Ts$ движется по γ_1 от X_1 к X_2. Мыслимы две возможности:

а) либо точка s, двигаясь по γ, пересечет в q_1 часть дуги γ_1, уже пройденную s_1 до того, как s_1 пересечет часть γ, уже пройденную s; точка q_1 будет искомой;

б) либо точка s_1, двигаясь по γ_1, пересечет в точке q_1 часть дуги γ, уже пройденную s до того, как s пересечет часть дуги γ_1, уже пройденную s_1; точка q_1 будет искомой.

Будем рассматривать лишь случай а); случай б) обращается в случай а) при замене T на T^{-1}.

Возьмем достаточно малое положительное ε. Обозначим через U_1 ε-окрестность дуги X_1q_1 (части γ_1). Число ε будем считать настолько малым, что $U_1 \subset E_1$, и положим $U = T^{-1}U_1$. Будем предполагать, что U не пересекается с ε-окрестностью дуги X_1q_2 (части γ_1). На дуге Xq_1 в ε-окрестности q_1 возьмем точку r_1 и соединим ее с X_1 дугой β_1, лежащей в U_1 и не пересекающей X_1q_2 (кроме как в точке X_1) и Xq_1 (кроме как в точке r_1).

Дуга $\beta = T^{-1}\beta_1$, соединяющая точку $r = T^{-1}r_1$ с X, тогда не будет пересекаться ни с Xr_1 (так как β_1 не пересекается с X_1q_1), ни с X_1r_2, где $r_2 = Tr_1$ (очевидно, что $r_2 \in X_1q_2$). Таким образом, простая дуга rXr_1, состоящая из частей β и γ, есть дуга переноса. Так как по теореме 11.2 луч переноса, проведенный через дугу rXr_1, не имеет двойных точек, то дуга Xr_1X_1 этого луча есть также дуга переноса.

Теорема доказана.

Теорема 12.4. *Пусть T не имеет неподвижных точек и последовательность $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots \in E_1$ имеет точку $X \in E_1$ своей предельной точкой. Тогда через точку X можно провести дугу переноса,* *содержащую по крайней мере две точки последовательности Q_k.*

Доказательство. Пусть $X_1 = TX$ и γ — дуга переноса, соединяющая эти точки. Такая дуга существует по теореме 12.3. Пусть U — столь малая окрестность точки X, что: 1) она не содержит ни внутри, ни на границе точек дуги $\gamma_1 = T\gamma$, 2) замыкания множеств U, $U_1 = TU$ и $U_2 = TU_1$ не пересекаются между собой, 3) $\overline{U}_2$ не имеет общих точек с дугой γ.

Пусть Y — последняя на дуге γ, считая от X, общая точка γ и границы U, т. е. дуга YX_1 (часть γ) целиком лежит вне U, а Y лежит на границе U.

Пусть Z — первая на дуге γ, считая от Y, общая точка γ и границы U_1, т. е. дуга YZ (часть γ) целиком лежит вне $U + U_1$, а Z лежит на границе U_1. Соединим точки X и Y произвольной простой дугой λ, целиком, кроме конца Y, лежащей в U. Пусть $\lambda_1 = T\lambda$. Ясно, что λ_1 целиком, кроме точки $Y_1 = TY$, лежит в U_1. Соединим точку Z с точкой X_1 простой дугой μ, целиком, кроме конца Z, лежащей в U_1 и непересекающейся с λ_1, кроме как в точке X_1. Обозначим через β дугу XX_1, состоящую из дуги λ, дуги YZ (часть γ) и дуги μ. Покажем, что β есть дуга переноса. Пусть $\mu_1 = T\mu$. Ясно, что μ_1 целиком, кроме точки $Z_1 = TZ$, лежит в U_2. Дуга μ_1 не может пересечь ни λ, ни μ, так как по выбору $U \overline{U}_2$ не пересекается ни с $\overline{U}$, ни с $\overline{U}_1$, кроме того, μ_1 не пересекает дугу YZ (часть γ), так как $\overline{U}_2$ не пересекается с γ. Дуга Y_1Z_1 не пересекается с λ, так как $\overline{U}$ не имеет общих точек с γ_1; дуги Z_1Y_1 (часть γ_1) и YZ (часть γ) не пересекаются, так как γ есть дуга переноса, и, следовательно, γ и γ_1 не имеют общих точек; дуга Y_1Z_1 не пересекается с μ, так как μ лежит внутри U_1, а Y_1Z_1 лежит вне U_1 (как образ дуги YZ, лежащей вне U). Наконец, дуга λ_1 не пересекается с λ, так как $\lambda \subset \overline{U}$, $\lambda_1 \subset \overline{U}_1$; дуга λ_1 не пересекается с YZ (часть γ), так как последняя лежит вне U_1; дуги же λ_1 и μ пересекаются лишь в одной точке X_1 по самому построению μ. Таким образом, дуга β имеет со своим образом лишь одну общую точку X_1, т. е. является дугой переноса.

В силу произвольности λ ее всегда можно провести через две точки последовательности Q_k. Это и доказывает теорему.

Теорема 12.5. Пусть T — гомеоморфное и сохраняющее ориентацию преобразование евклидовой плоскости E в себя, пусть существует такая точка Y плоскости, что последовательность Y, $Y_1 = TY$, $Y_2 = T^2Y$, ... имеет сходящуюся подпоследовательность, тогда преобразование T имеет неподвижную точку.

Доказательство. Предположим, что последовательность Y_k имеет точку X своей предельной точкой. Из непрерывности преобразования T следует, что и точка TX является предельной для этой последовательности, и потому можно считать, что $X \in E_1$.

Предположим теперь, вопреки утверждению теоремы, что T не имеет неподвижных точек. Тогда через точку X в силу теоремы 12.4 можно провести дугу переноса γ, содержащую две точки последовательности Y_k. Пусть это будут точки Y_m и Y_n, $n > m$. Образуем луч переноса $\Gamma = \sum_{l=0}^{\infty} T^l\gamma$. Так как $T^{(n-m)}Y_m = Y_n$, то дуга γ пересекается с дугой $T^{(n-m)}\gamma$, т. е. луч переноса Γ имеет двойную точку. Это противоречит теореме 12.2.

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает утверждение теоремы 12.1. Действительно, пусть T — преобразование плоскости E, ставящее в соответствие точке X_0 точку $X(\omega, X_0, 0)$, т. е. преобразование, введенное в § 1. Это преобразование сохраняет ориентацию. В самом деле, возьмем произвольный замкнутый контур C и каким-нибудь образом его ориентируем. Проведем через C при $t = 0$ всевозможные интегральные кривые до пересечения их с плоскостью $t = \omega$. Эти интегральные кривые образуют поверхность L. Пересечение поверхности L с плоскостью $t = \omega$ представляет собой контур TC. Ориентация контура TC может не совпасть с ориентацией контура C только в том случае, если на поверхности L произошло пересечение интегральных кривых, чего не может быть в силу единственности.

По условию теоремы 12.1 существует решение, ограниченное при $t \geqslant 0$. Пусть Y — точка этого решения при $t = 0$. Из определения преобразования T следует, что последовательность T^kY ограничена. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 12.5, ссылка на которую и доказывает теорему 12.1.

2. В § 9 мы показали (теорема 9.1), что если уравнение первого порядка имеет ограниченное решение, то оно имеет и ω-периодическое, т. е. в случае уравнения первого порядка условие теоремы 12.1 о продолжимости всех решений на периоде является излишним. Массера [53] показал, что для системы второго порядка это условие существенно. Приведем пример Массера.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(u, v)\cos^2 \pi t - g(u, v)\sin \pi t \cos \pi t - \pi y, \\ \frac{dy}{dt} &= g(u, v)\cos^2 \pi t + f(u, v)\sin \pi t \cos \pi t + \pi x, \end{aligned} \tag{12.3}$$

где u и v представляются формулами

$$u = x\cos \pi t + y \sin \pi t, \quad v = y\cos \pi t - x \sin \pi t. \tag{12.4}$$

Относительно функций f и g предполагается, что они удовлетворяют следующим условиям:

1) f и g непрерывно дифференцируемы по своим аргументам;

2) $f(-u, -v) = f(u, v)$, $g(-u, -v) = g(u, v)$;

3) $f(1, 0) = g(1, 0) = 0$, $f(0, v) = 0$, $g(0, v) > 0$ при всех v;

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{g(0, v)} < \frac{2}{\pi}$.

Из условия 2) следует, что правые части рассматриваемой системы имеют период, равный единице.

В переменных u, v система (12.3) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = f(u, v)\cos \pi t, \quad \frac{dv}{dt} = g(u, v)\cos \pi t. \tag{12.5}$$

Из условий 2) и 3) следует, что $u = \pm 1$, $v = 0$ суть два решения системы (12.5); следовательно, $x = \pm \cos \pi t$, $y = \pm \sin \pi t$ суть два периодических решения системы (12.3) с периодом 2. Из первого уравнения системы (12.5) следует, что если на каком-нибудь решении оказывается $u = 0$ при $t = t_0$, то на этом решении при всех t $u = 0$. Отсюда вытекает, что на решениях нашей системы функция u не меняет знака. Предположим теперь, что система (12.3) имеет решение с единичным периодом, и пусть при $t=t_0$ на этом решении $u \neq 0$, тогда из первого равенства (12.4) следует, что на этом решении u меняет знак, что невозможно. Следовательно, если система (12.3) имеет решение с периодом, равным единице, то на этом решении $u \equiv 0$. Для этого решения из второго уравнения (12.5) получаем

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g(0, v)} = \int_{t_0}^{t} \cos \pi t \, dt = \frac{1}{\pi} (\sin \pi t - \sin \pi t_0).$$

Пусть t изменяется в пределах от $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, тогда из последнего равенства получаем

$$\int_{v\left(-\frac{1}{2}\right)}^{v\left(+\frac{1}{2}\right)} \frac{dv}{g(0, v)} = \frac{2}{\pi},$$

что противоречит условию 4), наложенному на функцию $g(0, v)$.

Таким образом, система (12.3), имея два решения с периодом, равным 2, не имеет решений с единичным периодом. Это происходит из-за того, что ни одно решение, у которого $u=0$, не продолжимо на периоде, в чем нетрудно убедиться путем непосредственного интегрирования второго уравнения системы (12.5) при $u=0$.

3) Предположим теперь, что система (12.1) диссипативна. Тогда по определению любое ее решение $X(t, X_0, 0)$ ограничено при всех $t \geqslant 0$; следовательно, по теореме 12.1 диссипативная система двух дифференциальных уравнений имеет гармоническое колебание. Справедливо и более точное утверждение: можно указать замкнутую, ограниченную замкнутой жордановой кривой область, переходящую при преобразовании T в себя.

Прежде чем переходить к доказательству этого утверждения, установим справедливость следующих геометрических лемм.

Лемма 12.1. Пусть J_1 и J_2 — две замкнутые жордановы кривые, а D_1 и D_2 — их внутренние (ограниченные) *области. Пусть U — неограниченная компонента дополнения множества $J_1 + J_2$ до всей плоскости, а Γ — ее граница. Если пересечение $D_1 \cdot D_2$ не пусто, то Γ представляет собой замкнутую жорданову кривую, содержащуюся в множестве $J_1 + J_2$. Область Δ, внутренняя для Γ, содержит в себе и D_1 и D_2.*

Доказательство. Возможно одно из трех: или

$$D_1 \subset D_2, \tag{12.6}$$

или

$$D_2 \subset D_1, \tag{12.7}$$

или не выполняется ни (12.6), ни (12.7). В случае (12.6) $\Gamma = J_2$, $\Delta = D_2$; в случае (12.7) $\Gamma = J_1$, $\Delta = D_1$. Осталось рассмотреть случай, когда ни (12.6), ни (12.7) не реализуются. В этом случае D_2 имеет точки как внутри, так и за пределами D_1. Следовательно, и J_2 имеет точки и внутри D_1, и за ее пределами. Действительно, если бы J_2 не имела точек вне D_1, то точки области D_2, лежащие вне D_1, можно было бы соединить с бесконечно удаленной точкой, не встречаясь с кривой J_2, что невозможно, и если бы кривая J_2 не имела точек внутри D_1, то D_1 лежала бы в D_2, что также невозможно по предположению. Очевидно, далее, что Γ содержится в $J_1 + J_2$, и если Γ представляет собой замкнутую жорданову кривую, то область Δ содержит в себе $D_1 + D_2$. Осталось доказать, таким образом, что Γ — замкнутая жорданова кривая.

Определим преобразование S множества Γ на J_1 и покажем, что это преобразование гомеоморфное. Пусть $X \in \Gamma$ и $X \in J_1$, тогда положим $SX = X$.

Пусть теперь $X \in \Gamma$, но $X \notin J_1$; следовательно, $X \in J_2$. Тогда существует единственная дуга A_X кривой J_2, содержащая X как внутреннюю точку и такая, что внутренние точки этой дуги лежат на Γ, но не на J_1. Конечные точки a и b дуги A_X лежат на J_1. Тогда множество $A_X + J_1$ состоит из трех дуг, пересекающихся друг с другом лишь конечными точками (множество это имеет вид буквы θ). Множество $A_X + J_1$ делит плоскость на три части, две из которых ограничены и не пересекаются с U. Одна из этих ограниченных частей есть, очевидно, область D_1. Обозначим другую через R_X. Область R_X ограничена дугой A_X и дугой B_X, лежащей на кривой J_1 и имеющей те же концы a и b, что и дуга A_X.

Определим S на A_X как гомеоморфное преобразование дуги A_X на дугу B_X, оставляющее неподвижными концы a и b этих дуг. Тем самым определение преобразования S завершено.

Покажем, что каждой точке $X \in J_1$ соответствует точка $S^{-1}X$ на Γ. Если $X \in J_1$ и $X \in \Gamma$, то это очевидно. Если $X \in J_1$, но $X \notin \Gamma$, то мы можем построить дугу C_X, соединяющую точку X с бесконечно удаленной точкой и пересекающуюся с J_1 только в точке X. Пусть Y — первая точка пересечения этой дуги с множеством Γ. Тогда область R_Y, определенная выше, содержит часть дуги C_X от X до Y и, следовательно, X является образом одной из точек дуги A_Y при преобразовании S.

Покажем, что преобразование S взаимно однозначно. Допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что существуют две точки $X_1 \in \Gamma$ и $X_2 \in \Gamma$, такие, что $SX_1 = SX_2$. Ясно, что если $X \in \Gamma$ и X не лежит на J_1, то SX не лежит на Γ; следовательно, если $SX_1 \in \Gamma$, то X_1 лежит на Γ и на J_1, и потому $X_1 = X_2 = SX_1 = SX_2$. Предположим теперь, что SX_1 не лежит на Γ, тогда дуги A_{X_1} и A_{X_2} могут пересекаться разве лишь своими концами. Точка SX_1 оказывается тогда граничной как для R_{X_1}, так и для R_{X_2} и не является конечной ни для дуги A_{X_1}, ни для дуги A_{X_2}. Таким образом, области R_{X_1} и R_{X_2} имеют общие точки. Это невозможно, так как если точка X принадлежит R_{X_1} и R_{X_2}, то ее можно соединить с бесконечно удаленной точкой дугой, пересекающей лишь A_{X_2} и не пересекающей ни A_{X_1}, ни B_{X_1}.

Непрерывность преобразования S следует просто из того факта, что областей R_X может быть не более чем счетное количество и лишь конечное число из них может по диаметру превышать данное положительное число ε.

Лемма доказана.

Лемма 12.2. *Пусть T — гомеоморфное преобразование плоскости в себя, а D — область, ограниченная замкнутой жордановой кривой J. Обозначим через U_N неограниченную компоненту дополнения множества $J + TJ + \ldots + T^N J$ до всей плоскости, а через Γ_N — ее границу. Если пересечение $D \cdot TD$ не пусто, то Γ_N представляет собой замкнутую жорданову кривую, содер-*

жащуюся в $J+TJ+\ldots+T^NJ$. *Область* Δ_N, *внутренняя для* Γ_N, *содержит в себе сумму* $D+TD+\ldots+T^ND$.

Доказательство. Если $N=1$, то, полагая $D_1=D$, $D_2=TD$, мы получим наше утверждение из предыдущей леммы. Предположим, что утверждение доказываемой леммы выполняется для $N-1$. Покажем, что оно верно и для N. Положим $D_1=\Delta_{N-1}$, $D_2=T^ND$, тогда $J_1=\Gamma_{N-1}$ и $J_2=T^NJ_1$ суть замкнутые жордановы кривые, и так как Δ_{N-1} содержит $D+TD+\ldots+T^ND$, то неограниченная компонента дополнения $\Gamma_{N-1}+T^NJ$ будет совпадать с неограниченной компонентой U_N дополнения $J+TJ+\ldots+T^NJ$. Так как $D\cdot TD$ не пусто, то и $T^{N-1}D\cdot T^ND$ также не пусто, но $T^{N-1}D\subset\Delta_{N-1}$, поэтому не пусто и пересечение $\Delta_{N-1}\cdot T^ND$. Таким образом, выполняются условия предыдущей леммы, ссылка на которую и завершает доказательство.

Эти две леммы позволяют доказать наше утверждение.

Теорема 12.6. *Предположим, что система* (12.1) *диссипативна, тогда существует область* Δ, *ограниченная замкнутой жордановой кривой* Γ, *такая, что*

$$T\bar{\Delta}\subset\bar{\Delta}, \tag{12.8}$$

где, как обычно, $TX_0=X(\omega, X_0, 0)$.

Доказательство. Рассмотрим круг $H\{\|X\|<h\}$, определенный теоремой 2.2, и выберем какой-нибудь круг $D\supset H$. По теореме 2.2 существует такое N, что при $k\geqslant N$

$$T^kD\subset H. \tag{12.9}$$

Кроме того, из соотношения (2.28) следует, что множество I, соответствующее диссипативной системе (12.1), лежит в H. Так как множество I инвариантно относительно преобразования T, то ясно, что $I\subset D\cdot TD$, и, следовательно, пересечение $D\cdot TD$ не пусто. Обозначим через J окружность, ограничивающую круг D. Пусть, как и в лемме 12.2, U_N обозначает неограниченную компоненту дополнения множества $J+TJ+\ldots+T^NJ$ до всего пространства, Γ_N — ее границу, а Δ_N — внутренность Γ_N. Покажем, что

$$T\bar{\Delta}_N\subset\bar{\Delta}_N. \tag{12.10}$$

Для этого достаточно, очевидно, доказать, что

$$T\Gamma_N\subset\bar{\Delta}_N. \tag{12.11}$$

По лемме 12.2 Γ_N содержится в множестве $J+TJ+\ldots$ $\ldots+T^NJ$. Из самого определения Δ_N следует, что

$$J+TJ+\ldots+T^NJ\subset\overline{\Delta}_N. \qquad (12.12)$$

Пусть X — произвольная точка Γ_N, тогда существует такое целое k, $0\leqslant k\leqslant N$, что $X\in T^kJ$. Если $k<N$, то $TX\in$ $\in T^{k+1}J$ и, следовательно, в силу (12.12) $TX\in\overline{\Delta}_N$. Пусть же $X\in T^NJ$, тогда $T^{-N}X\in J$, и в силу (12.9)

$$TX=T^{N+1}T^{-N}X\in\overline{H}.$$

Но по самому выбору D $\overline{H}\subset\overline{D}$, а по определению Δ_N $\overline{D}\subset\overline{\Delta}_N$, и потому $TX\in\overline{\Delta}_N$. Отсюда и вытекает включение (12.11), которое и доказывает теорему.

Теорема эта впервые была опубликована в работе [44]. На русском языке ее доказательство приведено в книге [45].

Введем в рассмотрение вектор сдвига преобразования T: $V=\overrightarrow{X,\,TX}$. Из теоремы 12.6 вытекает следующее утверждение:

Следствие 12.1. Индекс любой замкнутой жордановой кривой, расположенной за пределами круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат, в поле вектора сдвига преобразования T равен $+1$.

Действительно, индекс кривой Γ_N в поле V равен $+1$, как следует непосредственно из теоремы 12.6. Возьмем произвольную замкнутую жорданову кривую γ, охватывающую область Δ_N. Ясно, что в кольце, ограниченном кривыми γ и Γ_N, нет особых точек вектора V, и потому индексы кривых γ и Γ_N в поле V совпадают.

4. Будем опять предполагать, что система (12.1) диссипативна. Рассмотрим множество I, отвечающее этой системе. Если I вырождается в точку, то мы имеем дело со случаем конвергенции. Предположим, что I в точку не вырождается. По определению I представляет собой пересечение вложенных друг в друга областей и потому является континуумом *), не разбивающим плоскости.

Пусть G — дополнение I до всей плоскости, а Γ — его граница. По предположению Γ состоит не из одной точки,

*) Континуумом, как обычно, называем связное, замкнутое множество.

поэтому область G можно конформно преобразовать на внешность единичной окружности C.

Итак, пусть G лежит в плоскости комплексного переменного z ($z = x_1 + ix_2$). Единичная окружность C лежит в плоскости комплексного переменного w и D — неограниченная компонента дополнения C до всей плоскости w. По теореме Римана существует конформное преобразование S области G на область D, такое, что бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную. При этом преобразовании граница Γ переходит в окружность C таким образом, что каждой точке окружности C соответствует граничный элемент (простой конец по терминологии Каратеодори [57]; подробнее о граничных свойствах конформного отображения см. также [58]), и соответствие это взаимно однозначное.

Рассмотрим преобразование STS^{-1}, переводящее внешность D окружности C в себя. Преобразование это в области D является гомеоморфным. Из свойств преобразования S границы Γ на окружность C следует, что преобразование это оказывается гомеоморфным также и в замкнутой области $\bar{D}$. Нетрудно видеть, что преобразование STS^{-1} замкнутой области $\bar{D}$ на себя сохраняет ориентацию. Таким образом, STS^{-1} преобразует окружность C на себя взаимно однозначно, непрерывно и с сохранением ориентации. Пусть μ — число вращения этого преобразования (о числе вращения преобразования окружности на себя см. конец § 10). Предположим, что $\mu = \frac{p}{q}$, где q — натуральное, а p — целое; тогда на C существуют точки, неподвижные относительно преобразования $(STS^{-1})^q = ST^qS^{-1}$. Следовательно, в этом случае существуют граничные элементы Γ, неподвижные относительно преобразования T^q. Если такой неподвижный граничный элемент есть элемент первого рода, т. е. состоит из одной точки z_0, то эта точка есть неподвижная точка преобразования T^q и через нее проходит решение с периодом $q\omega$.

Предположим теперь, что неподвижный относительно T^q граничный элемент представляет собой континуум K_1, не вырождающийся в точку. Обозначим через K континуум, представляющий собой сумму K_1 и всех ограниченных компонент дополнения K_1 до всей плоскости (в случае, когда K_1 не разбивает плоскость, K совпадает с K_1). Континуум K не разбивает плоскость. Так как $T^qK_1=K_1$, то ясно, что $T^qK=K$, т. е. преобразование T^q оставляет инвариантным континуум K. Ниже будет показано, что преобразование T^q имеет в K неподвижную точку. Таким образом, каждому неподвижному относительно T^q граничному элементу соответствует $q\omega$-периодическое решение системы (12.1).

Докажем теперь, что преобразование T^q имеет в K неподвижную точку. Приводимая теорема была доказана Картрайт и Литтлвудом [59]. Мы даем более позднее и простое ее доказательство, найденное Райфенбергером [60].

Теорема 12.7. *Пусть T — гомеоморфное и сохраняющее ориентацию преобразование плоскости в себя. Если T оставляет инвариантным ограниченный континуум I, не разбивающий плоскость, то на I имеется неподвижная точка преобразования T.*

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что T не имеет неподвижных точек на I. Рассмотрим вектор сдвига $V=\overrightarrow{X, TX}$ преобразования T. По предположению этот вектор не имеет на I особых точек, поэтому в силу замкнутости и ограниченности I существует такое $b>0$, что длина вектора V на I больше, чем $2b$. По непрерывности V существует такое $\varepsilon>0$, что в ε-окрестности I длина вектора сдвига больше, чем b.

Построим полигон π, обладающий следующими свойствами: сам полигон π и его внутренность π_i лежат в ε-окрестности континуума I, π_i содержит I, любая точка π может быть соединена с некоторой точкой I дугой, принадлежащей π_i, диаметр которой меньше $\frac{b}{4}$.

Пусть $U\left(I, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, как обычно, $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность континуума I, а $\overline{U\left(I, \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ — ее замыкание. Рассмотрим дополнение множества $\overline{U\left(I, \frac{\varepsilon}{2}\right)}$ до всего пространства. Нетрудно видеть, что может существовать лишь конечное число ограниченных компонент этого дополнения, содержащих точки, лежащие вне $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности множества $\overline{U\left(I, \frac{\varepsilon}{2}\right)}$. Пусть это будут области $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Соединим эти области с бесконечностью кривыми $l_1, l_2, \ldots, l_n$, не пересекающимися с множеством I. Пусть ε_1 — расстояние от континуума I до $l_1 + l_2 + \ldots + l_n$. Ясно, что если реально существует хотя бы одна область A_i, то $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, в противном случае положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Разделим плоскость на равные квадраты со сторонами, параллельными осям координат; длину стороны каждого квадрата примем равной $\min\left\{\frac{b}{8}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$. Рассмотрим множество B всех тех квадратов, которые имеют хотя бы одну общую точку с континуумом I (имеются в виду, конечно, замкнутые квадраты). Любая ограниченная компонента дополнения множества B лежит в $U(I, \varepsilon)$. Действительно, нетрудно видеть, что $B \subset U\left(I, \frac{\varepsilon}{2}\right)$; следовательно, если бы какая-нибудь ограниченная компонента A дополнения B имела бы точки вне ε-окрестности I, то мы имели бы $A \supset A_i$ при некотором i. Тогда кривая l_i соединяла бы A с бесконечностью, не пересекаясь с B, что невозможно по определению A. Полигон π, являющийся частью границы множества B (или совпадающий с этой границей, если она связна) и содержащий в своей внутренности π_i множество B, и будет, очевидно, искомым.

Выберем на полигоне π конечное число точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$ с таким расчетом, чтобы точки эти располагались на нем в порядке положительного вращения и чтобы диаметр дуги $p_k p_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n, p_{n+1} = p_1)$ был меньше $\frac{b}{4}$. В качестве таких точек можно взять, например, все угловые точки полигона π, пронумеровав их в порядке положительного вращения.

Каждой точке p_k по самому выбору полигона π соответствует достижимая точка r_k континуума I и дуга, соединяющая p_k с r_k, лежащая целиком, кроме концов, в области $\pi_i - I$. Диаметр дуги $p_k r_k$ меньше, чем $\frac{b}{4}$. Обозначим через L_k дугу $r_k p_k p_{k+1} r_{k+1}$. Диаметр L_k меньше b, следовательно,

$$L_k \cdot TL_k = 0. \tag{12.13}$$

Пусть D_k — область, ограничиваемая дугой L_k и континуумом l. Из (12.13) следует, что области D_k и TD_k либо не пересекаются, либо одна из них содержит другую.

Так как $T^{-1}\pi$ лежит на положительном расстоянии от l, то можно указать дугу Λ_k, соединяющую r_k с r_{k+1}, лежащую в D_k и не пересекающую $T^{-1}\pi$. Ясно, что $T\Lambda_k$ лежит внутри π_l.

Будем рассматривать угловое изменение вектора сдвига V преобразования T при движении точки p в положительном направлении вдоль полигона π. Обозначим полное угловое изменение вектора V после одного целого обхода полигона π через Δ. Пусть α_k — угловое изменение вектора V при движении по дуге $p_k p_{k+1}$, тогда

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{12.14}$$

Пусть β_k — угловое изменение непрерывного вектора, начало которого движется вдоль дуги $p_k p_{k+1}$ полигона π, а конец — от точки Tr_k к точке Tr_{k+1} вдоль дуги TL_k. Покажем, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k. \tag{12.15}$$

Это соотношение очевидно, если в определении β_k выбрать вектор, который сначала проходит дугу $Tr_k Tp_k$ с начальной точкой, зафиксированной в точке p_k, затем превращается в вектор сдвига на дуге $p_k p_{k+1}$ и, наконец, проходит дугу $Tp_{k+1} Tr_{k+1}$ с началом, фиксированным в точке p_{k+1}.

Пусть теперь γ_k — угловое изменение вектора, конечная точка которого движется по дуге $T\Lambda_k$, а начальная — по дуге $p_k p_{k+1}$ полигона π. Сумма $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ представляет собой полное угловое изменение вектора, начало которого обходит π в положительном направлении, а конец все время находится в π_l. Поэтому имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = +2\pi. \tag{12.16}$$

Станем сравнивать β_k и γ_k. Так как $T\Lambda_k$ не пересекается с π и TL_k не пересекается с L_k, то сумма $T\Lambda_k + TL_k$

представляет собой замкнутую жорданову кривую, не пересекающую дугу $p_k p_{k+1}$ полигона π.

Мыслимы следующих три случая:

I. $D_k \cdot TD_k = 0$.

Область, ограниченная кривой $T\Lambda_k + TL_k$, лежит в TD_k, которая не содержит в себе точек $\overline{D}_k$, и, следовательно, $p_k p_{k+1}$ лежит вне $T\Lambda_k + TL_k$, так что

$$\beta_k - \gamma_k = 0. \tag{12.17}$$

II. $TD_k \subset D_k$.

В этом случае область, ограниченная кривой $T\Lambda_k + TL_k$, лежит в $TD_k \subset D_k$ и, значит, опять $p_k p_{k+1}$ лежит вне кривой $T\Lambda_k + TL_k$, т. е. опять выполняется равенство (12.17).

III. $D_k \subset TD_k$.

Дуга $p_k p_{k+1}$ полигона π не пересекается с $TL_k + l$, но она содержится в области $\overline{D}_k \subset \overline{TD}_k$ и, следовательно, содержится в области, ограниченной дугой TL_k и континуумом l. С другой стороны, так как $T\Lambda_k \subset \pi_l$, то дуга $p_k p_{k+1}$ лежит за пределами области, ограниченной дугой $T\Lambda_k$ и континуумом l. Следовательно, дуга $p_k p_{k+1}$ лежит внутри области, ограниченной замкнутой жордановой кривой $T\Lambda_k + TL_k$; поэтому в рассматриваемом случае имеем

$$\beta_k - \gamma_k = \pm 2\pi. \tag{12.18}$$

Знак в равенстве (12.18) выбирается следующим образом. Если путь — сначала по дуге TL_k от точки Tr_k к точке Tr_{k+1}, затем по $T\Lambda_k$ в обратном направлении — проходится в положительном направлении, то надо выбрать знак „+", в противном случае выбирается „—". Так как дуга $p_k p_{k+1}$ лежит на полигоне π в положительном направлении и дуга $p_{k+1} r_{k+1} + \Lambda_k + r_k p_k$ лежит в π_l, то путь — сначала по L_k от r_k до r_{k+1}, а затем по Λ_k в обратном направлении — имеет положительное направление. Но T сохраняет ориентацию; следовательно, положительное направление имеет и путь — сначала по дуге TL_k от Tr_k к Tr_{k+1}, а затем по $T\Lambda_k$ в обратном направлении. Отсюда следует, что в равенстве (12.18) всегда фигурирует знак „+", и потому в рассматриваемом случае имеем

$$\beta_k - \gamma_k = 2\pi. \tag{12.19}$$

Из равенств (12.14)—(12.17) и (12.19) вытекает равенство

$$\Delta = 2\pi m \quad (m \geqslant 1). \tag{12.20}$$

Это равенство показывает, что в $\overline{\pi_l}$ имеется особая точка вектора сдвига преобразования T. Но π_l целиком лежит в $U(I, \varepsilon)$, поэтому в силу выбора ε длина вектора V в $\overline{\pi_l}$ не меньше, чем $b > 0$. Мы получили, таким образом, противоречие, доказывающее теорему.

Итак, каждому неподвижному относительно преобразования T^q граничному элементу области G соответствует субгармоника q-порядка.

В следующих двух параграфах мы укажем диссипативные системы, множества I которых представляют собой замкнутые области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми, и в § 15 будем изучать диссипативную систему с множеством I значительно более сложной структуры.

§ 13. О существовании инвариантных поверхностей

Рассмотрим опять систему двух уравнений, периодическую по аргументу:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t). \tag{13.1}$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему, к ней „близкую“:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y, t) + \varepsilon X_1(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t). \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

Относительно функций X, X_1, Y, Y_1 будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и имеют период ω по t. Кроме того, будем считать, что функции $X(x, y, t)$ и $Y(x, y, t)$ имеют непрерывные вторые производные по x и y; ε — малый параметр.

1. Мы предположим, что исходная система (13.1) имеет гладкую торообразную инвариантную поверхность, и докажем, что при некоторых дополнительных условиях и „близкая“ к ней система (13.2) также имеет такую инвариантную поверхность [61—65].

Итак, пусть система (13.1) имеет гладкую торообразную (если считать отождествленными все плоскости вида $t = n\omega$) инвариантную поверхность. Будем считать, что поверхность эта задается в виде

$$x = \varphi(\theta, t), \quad y = \psi(\theta, t). \tag{13.3}$$

Предполагается, что функции φ, ψ выбраны периодические по t с периодом ω. Так как поверхность (13.3) инвариантна, то кривые $x = \varphi(\theta, 0)$, $y = \psi(\theta, 0)$ и $x = \varphi(\theta, \omega)$, $y = \psi(\theta, \omega)$ должны совпадать, поэтому сделанное нами предположение не нарушит общности рассуждений.

В пересечении с плоскостью $t = 0$ поверхность (13.3) дает гладкую замкнутую кривую без самопересечений, поэтому можно считать, что функции $\varphi(\theta, 0)$ и $\psi(\theta, 0)$ имеют некоторый период ω_1, равенства $\varphi(\theta_1, 0) = \varphi(\theta_2, 0)$, $\psi(\theta_1, 0) = \psi(\theta_2, 0)$ влекут за собой равенство $\theta_1 - \theta_2 = n\omega_1$, где n — целое число, и $[\varphi'_\theta(\theta, 0)]^2 + [\psi'_\theta(\theta, 0)]^2 > 0$. Поверхность (13.3) по предположению инвариантная, т. е. состоит из целых интегральных кривых, поэтому при каждом фиксированном t функции $x = \varphi(\theta, t)$, $y = \psi(\theta, t)$ задают гладкую замкнутую кривую без самопересечений. Следовательно, можно считать, что при всех t имеют место равенства

$$\varphi(\theta + \omega_1, t) = \varphi(\theta, t), \quad \psi(\theta + \omega_1, t) = \\ = \psi(\theta, t), \quad [\varphi'(\theta, t)]^2 + [\psi'(\theta, t)]^2 > 0.$$

Поверхность (13.3) гладкая, следовательно, мы можем и будем считать, что функции φ и ψ имеют непрерывные частные производные по обоим аргументам. Кроме того, будем предполагать, что $\varphi(\theta, t)$ и $\psi(\theta, t)$ имеют непрерывные вторые производные по θ.

Введем теперь в окрестности нашей инвариантной поверхности новые координаты по следующему правилу. Координату t оставим без изменения. Зафиксируем некоторое $t = \bar{t}$ и проведем в плоскости $t = \bar{t}$ нормали к кривой $x = \varphi(\theta, \bar{t})$, $y = \psi(\theta, \bar{t})$. Так как функции φ и ψ имеют непрерывные вторые производные, то в силу периодичности этих функций по обоим аргументам радиус кривизны кривых $x = \varphi(\theta, \bar{t})$, $y = \psi(\theta, \bar{t})$ ограничен снизу одним и тем же числом при всех θ и $\bar{t}$. Поэтому можно указать столь малую окрестность поверхности (13.3), что в ней указанные выше нормали не пересекаются, если только они соответствуют геометрически различным точкам кривой $x=\varphi(\theta, \bar{t})$, $y=\psi(\theta, \bar{t})$. Возьмем теперь точку (x, y, t) этой окрестности и проведем через нее плоскость постоянного t. В этой плоскости проведем нормаль n к кривой $x=\varphi(\theta, t)$, $y=\psi(\theta, t)$ через нашу точку. За новые координаты точки (x, y, t) выберем координату θ точки пересечения нормали n с кривой $x=\varphi(\theta, t)$, $y=\psi(\theta, t)$ и длину z нормали n от точки (x, y, t) до точки ее пересечения с кривой. При этом z будем считать положительным, если точка (x, y, t) лежит вне области, ограниченной кривой $x=\varphi(\theta, t)$, $y=\psi(\theta, t)$, и отрицательным, если она находится внутри этой области.

Выбранные таким образом координаты часто называют нормальными. Нетрудно видеть, что новые координаты связаны со старыми следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(\theta, t)-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}z, \\ y &= \psi(\theta, t)+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}z, \end{aligned}\right\} \tag{13.4}$$

где функции $\alpha=-\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ и $\beta=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, так же как и φ и ψ, имеют непрерывные частные производные по обоим аргументам и периоды ω по t и ω_1 по θ.

В новых переменных в окрестности поверхности (13.3) система уравнений (13.1) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= G(\theta, t)+zF(\theta, t, z), \\ \frac{dz}{dt} &= A(\theta, t)z+z^2H(\theta, t, z). \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

Мы будем в дальнейшем предполагать, что функции $F(\theta, t, z)$, $A(\theta, t)$, $H(\theta, t, z)$ имеют непрерывные частные производные по своим аргументам.

Сделаем еще одно весьма важное для дальнейшего предположение: $G(\theta, t)\equiv 1$; проанализируем его. Система (13.5), конечно, имеет инвариантную поверхность $z=0$, совпадающую с поверхностью (13.3). Если считать, что $G(\theta, t)\equiv 1$, то координата θ на этой поверхности подчиняется уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных $\tau = t\frac{2\pi}{\omega}$, $\vartheta = \theta\frac{2\pi}{\omega_1}$, тогда получим уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{\omega}{\omega_1}, \tag{13.6}$$

которое имеет период 2π по обоим аргументам.

Таким образом, предположение о том, что $G(\varphi, \theta) \equiv 1$, означает, что на самой интегральной поверхности решения ведут себя так же, как решения уравнения (13.6). Как показывает теорема 10.7 из § 10, в некоторых случаях этого можно добиться надлежащей заменой переменных.

При сделанных нами предположениях в новых переменных система (13.2) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 1 + zF(\theta, t, z) + \varepsilon P(\theta, t, z), \\ \frac{dz}{dt} &= A(\theta, t)z + z^2H(\theta, t, z) + \varepsilon R(\theta, t, z), \end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

где по-прежнему ε — малый параметр. Функции A, F, H, P, R периодичны по t и θ с периодами ω и ω_1 соответственно и имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что выполняется неравенство

$$-M(a) = \int_0^\omega A(t + a, t)\,dt < 0. \tag{13.8}$$

Положим $\inf M(a) = M$. Нетрудно видеть, что $M(a)$ есть ω_1-периодическая функция, а потому можно утверждать, что $M > 0$.

Будем через a и c обозначать начальные данные функций θ и z при $t = 0$, т. е. если $\theta(t, a, c, \varepsilon)$, $z(t, a, c, \varepsilon)$ — решение системы (13.7), то $\theta(0, a, c, \varepsilon) = a$, $z(0, a, c, \varepsilon) = c$. Введем преобразование T_ε декартовой плоскости θ, z в себя по обычному правилу: поставим в соответствие точке $\theta = a$, $z = c$ точку $\theta = \theta(\omega, a, c, \varepsilon)$, $z = z(\omega, a, c, \varepsilon)$. Преобразонение это, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров, определено при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и $|c| \leqslant h$, где ε_0, $h > 0$ достаточно малы.

Из второго уравнения системы (13.7) видно, что при $\varepsilon = 0$ преобразование T_0 оставляет инвариантной прямую $z=0$.

Мы покажем, что при сделанных предположениях для всякого достаточно малого ε существует кривая $\gamma\,(z = z(\theta))$ ω_1-периодическая по θ, переходящая при преобразовании T_ε в себя, и эта кривая при $\varepsilon \to 0$ стремится к прямой $z = 0$.

Заметим сначала, что из ω_1-периодичности правых частей системы (13.7) по θ следует, что

$$\left.\begin{aligned} \theta(t,\ a+\omega_1,\ c,\ \varepsilon) &= \theta(t,\ a,\ c,\ \varepsilon)+\omega_1, \\ z(t,\ a+\omega_1,\ c,\ \varepsilon) &= z(t,\ a,\ c,\ \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

Рассмотрим кривую $\gamma : c = g(a)$ в плоскости $t = 0$, относительно функции $g(a)$ предположим, что $g(a+\omega_1) = g(a)$ при всех a и при всех a $|g(a)| \leqslant h$, где h — введенная выше постоянная. Изучим кривую $\bar\gamma = T_\varepsilon\gamma$, где $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Покажем, что если точка $(a, \bar c)$ лежит на $\bar\gamma$, то и точка $(\bar a+\omega_1,\ c)$ также лежит на этой кривой. Действительно, пусть $(a,\ c)$ — прообраз точки $(\bar a,\ \bar c)$ при преобразовании T_ε, т. е. пусть $T_\varepsilon^{-1}(\bar a,\ \bar c) = (a,\ c)$, тогда $\bar a = \theta(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon)$, $\bar c = z(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon)$ по определению преобразования T_ε. Из равенств (13.9) при $t = \omega$ следует, что

$$\theta(\omega,\ a+\omega_1,\ c,\ \varepsilon) = \theta(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon)+\omega_1 = \bar a+\omega_1,$$

$$z(\omega,\ a+\omega_1,\ c,\ \varepsilon) = z(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon) = \bar c,$$

т. е. $T_\varepsilon(a+\omega_1,\ c) = (\bar a+\omega_1,\ \bar c)$. Но по условию точка $(a+\omega_1,\ c)$ лежит на γ, следовательно, точка $T_\varepsilon(a+\omega_1,\ c)$ лежит на $\bar\gamma$, значит, точка $(\bar a+\omega_1,\ \bar c)$ лежит на $\bar\gamma$.

Таким образом, мы имеем оператор Φ_ε, ставящий в соответствие ω_1-периодической кривой $\gamma\,(c = g(a),\ |g(a)| \leqslant h)$ периодическую же кривую $\bar\gamma$. В дальнейшем мы покажем, что при любом достаточно малом ε этот оператор имеет неподвижную точку.

Введем обозначения

$$\bar a(a,\ c,\ \varepsilon) = \theta(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon),\quad \bar c(a,\ c,\ \varepsilon) = z(\omega,\ a,\ c,\ \varepsilon). \tag{13.10}$$

Оценим частные производные

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial c}, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial c}.$$

Положим $\varepsilon = c = 0$. Тогда система (13.7) имеет решение $\theta = a + t$, $z = 0$. Следовательно, $\bar{a} = a + \omega$, и потому при $\varepsilon = c = 0$ имеем

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial c} = 0. \qquad (13.11)$$

Определим теперь производные $\frac{\partial \bar{c}}{\partial a}$, $\frac{\partial \bar{c}}{\partial c}$ при $\varepsilon = c = 0$. Пусть u есть одна из величин a или c. Будем, как это обычно делается, частную производную обозначать с помощью соответствующего индекса, тогда из второго уравнения системы (13.7) получим

$$\frac{dz_u}{dt} = A(\theta, t) z_u + zA_\theta \theta_u + 2zz_u H + z^2 H_\theta \theta_u + z^2 H_z z_u$$

при $\varepsilon = 0$. Полагая $c = 0$ будем иметь $z = 0$ при всех t, поэтому последнее уравнение дает при $c = \varepsilon = 0$

$$\frac{dz_u}{dt} = A(\theta, t) z_u.$$

При $c = \varepsilon = 0$ $\theta = t + a$, поэтому интегрирование дает

$$z_u(\omega) = z_u(0) e^{\int\limits_0^\omega A(t+a, t)\, dt}.$$

Отсюда в силу (13.8) получаем

$$z_u(\omega) = z_u(0) e^{-M(a)}. \qquad (13.12)$$

Далее, ясно, что

$$z_a(0) = \frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$

$$z_c(0) = \frac{\partial c}{\partial c} = 1,$$

Отсюда и из (13.12) получаем для $\varepsilon = c = 0$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial c} = e^{-M(a)} < 1. \qquad (13.13)$$

Частные производные $\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}$, $\frac{\partial\bar{a}}{\partial c}$, $\frac{\partial\bar{c}}{\partial a}$, $\frac{\partial\bar{c}}{\partial c}$ непрерывны по своим аргументам, кроме того, из соотношений (13.9) следует, что они имеют период ω_1 по a, поэтому все эти частные производные равномерно непрерывны при $|c| \leqslant h$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $-\infty < a < +\infty$. Отсюда и из соотношений (13.11) и (13.13) вытекает следующая лемма.

Лемма 13.1. *Для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon_0 > 0$, $h > 0$ такие, что при $|c| \leqslant h$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ выполняются неравенства*

$$\left|\frac{\partial\bar{a}}{\partial a} - 1\right| < \delta, \quad \left|\frac{\partial\bar{a}}{\partial c}\right| < \delta,$$

$$\left|\frac{\partial\bar{c}}{\partial a}\right| < \delta, \quad 0 \leqslant \frac{\partial\bar{c}}{\partial c} < e^{-M} + \delta,$$

где $M = \inf M(a) > 0$.

Из этой леммы следует утверждение:

Лемма 13.2. *Если ε_0, h достаточно малы, то при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ из неравенства $|c| \leqslant h$ следует неравенство $|\bar{c}| < h$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что при достаточно малых ε_0, h $\left|\frac{\partial\bar{c}}{\partial c}\right| \leqslant \beta < 1$. Выберем h и ε_0 так, чтобы выполнялось утверждение предыдущей леммы. В силу непрерывной зависимости решений от параметра ε найдется такое $\varepsilon_0' > 0$, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0'$ будет выполнено неравенство

$$|\bar{c}(a, 0, \varepsilon)| < h(1-\beta).$$

Интегрируя теперь неравенство $\left|\frac{\partial\bar{c}}{\partial c}\right| \leqslant \beta$ в промежутке от 0 до $c \leqslant h$, мы и получим утверждение леммы.

Лемма 13.3. *Пусть ε_0, h — столь малые положительные постоянные, что выполняются утверждения предыдущих лемм. Пусть $\gamma\,(c = g(a),\ a_1 \leqslant a \leqslant a_2)$ есть отрезок кривой, такой, что $|g| \leqslant h$, $|g'(a)| \leqslant 1$ при $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$. Тогда $\bar{\gamma} = T_\varepsilon\gamma$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ представляет собой дифференцируемую кривую, и если $\bar{a}$, $\bar{c}$ — текущие координаты кривой $\bar{\gamma}$, то $\left|\frac{d\bar{c}}{d\bar{a}}\right| \leqslant 1$.*

Доказательство. Производная $\frac{d\bar{c}}{d\bar{a}}$ на кривой $\bar{\gamma}$ существует и определяется дробью

$$\frac{d\bar{c}}{d\bar{a}}=\frac{\frac{\partial\bar{c}}{\partial a}+\frac{\partial\bar{c}}{\partial c}\frac{dc}{da}}{\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}+\frac{\partial\bar{a}}{\partial c}\frac{dc}{da}},\tag{13.14}$$

если только знаменатель этой дроби отличен от нуля. Но по лемме 13.1

$$\left|\frac{\partial\bar{a}}{\partial a}-1\right|<\delta,\qquad\left|\frac{\partial\bar{a}}{\partial c}\right|<\delta,$$

а по условию $\left|\frac{dc}{da}\right|\leqslant 1$, поэтому если δ достаточно мало, то знаменатель дроби (13.14) отличен от нуля. Воспользуемся неравенствами, установленными в лемме 13.1. Из этих неравенств следует:

$$\left|\frac{d\bar{c}}{d\bar{a}}\right|\leqslant\frac{\delta+(e^{-M}+\delta)\left|\frac{dc}{da}\right|}{1-\delta-\delta\left|\frac{dc}{da}\right|}\leqslant\frac{e^{-M}+2\delta}{1-2\delta},$$

так как $\left|\frac{dc}{da}\right|\leqslant 1$. Если h и ε_0 столь малы, что $4\delta\leqslant 1-e^{-M}$, то будем иметь $\left|\frac{d\bar{c}}{d\bar{a}}\right|\leqslant 1$.

Лемма доказана.

Лемма 13.4. *Пусть ε_0 и h достаточно малы. Возьмем две точки плоскости $t=0:p_1$ с координатами (a_1, c_1) и p_2 с координатами (a_2, c_2); пусть $|c_1|\leqslant h$, $|c_2|\leqslant h$ и $|c_2-c_1|\leqslant|a_2-a_1|$, тогда для точек $\bar{p}_i=T_\varepsilon p_i$ $(i=1, 2, |\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0)$ с координатами $(\bar{a}_i, \bar{c}_i)$ справедливо неравенство*

$$|\bar{c}_2-\bar{c}_1|\leqslant|\bar{a}_2-\bar{a}_1|.\tag{13.15}$$

Доказательство. Соединим точки p_1 и p_2 отрезком прямой $\gamma: c-c_1=\frac{c_2-c_1}{a_2-a_1}(a-a_1)$. Так как по условию $|c_2-c_1|\leqslant|a_2-a_1|$, то на γ будет выполняться неравенство $\left|\frac{dc}{da}\right|\leqslant 1$. Рассмотрим теперь кривую $\bar{\gamma}=T_\varepsilon\gamma$; в силу леммы 13.3 на этой кривой будет иметь место неравенство $\left|\frac{dc}{da}\right| \leqslant 1$. Отсюда по формуле конечных приращений Лагранжа мы и получаем (13.15).

Лемма доказана.

Будем считать по-прежнему, что ε_0 и h столь малы, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|c| \leqslant h$ выполняются утверждения сформулированных лемм. При этом $\delta > 0$ выберем столь малым, чтобы оказалось

$$e^{-M} + 2\delta = q < 1. \tag{13.16}$$

Рассмотрим в плоскости $t = 0$ две кривые $\gamma_1(c = g_1(a))$ и $\gamma_2(c = g_2(a))$. Относительно функций g_1 и g_2 будем предполагать, что они ω_1-периодичны, $|g_i(a)| \leqslant h$ $(i = 1, 2)$ при всех a и $|g_i(a_1) - g_i(a_2)| < |a_1 - a_2|$ $(i = 1, 2)$. Пусть $\bar{\gamma}_i = T_\varepsilon \gamma_i$ $(i = 1, 2$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0)$ суть образы кривых и γ_i при преобразовании T_ε. Из леммы 13.4 следует, что кривые $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ могут быть представлены в виде $c = f_1(a)$, $c = f_2(a)$ соответственно, а функции f_1 и f_2 будут удовлетворять условию Липшица:

$$|f_i(a_1) - f_i(a_2)| \leqslant |a_1 - a_2| \quad (i = 1, 2). \tag{13.17}$$

Как было доказано ранее, функции $f_1(a)$ и $f_2(a)$ ω_1-периодичны. Введем обозначения

$$\rho = \max |g_1(a) - g_2(a)|, \tag{13.18}$$

$$\bar{\rho} = \max |f_1(a) - f_2(a)|. \tag{13.19}$$

Лемма 13.5. Справедливо неравенство

$$\bar{\rho} \leqslant q\rho. \tag{13.20}$$

Доказательство. Предположим, напротив, что это не так, т. е. допустим, что $\bar{\rho} > q\rho$. Тогда существует такая точка a', что $|f_1(a') - f_2(a')| > q\rho$. Пусть точка $\bar{p}_1$ имеет координаты a', $f_1(a')$, а ее прообраз p_1 при преобразовании T_ε имеет координаты a, $g_1(a) = c_1$. Пусть p_2 — точка с координатами a, $g_2(a) = c_2$. По определению имеем

$$|c_2 - c_1| \leqslant \rho. \tag{13.21}$$

Пусть $\bar{p}_2 = T_\varepsilon p_2$. Из обозначений (13.10) следует, что $\bar{p}_1$ имеет координаты $\bar{a}(a, c_1, \varepsilon) = a'$, $\bar{c}(a, c_1, \varepsilon) = f_1(a')$, а $\bar{p}_2$ —

координаты $\bar{a}(a, c_2, \varepsilon)$, $\bar{c}(a, c_2, \varepsilon)$. По формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$|\bar{c}(a, c_2, \varepsilon)-\bar{c}(a, c_1, \varepsilon)|=\left|\frac{\partial \bar{c}}{\partial c}\right||c_2-c_1|,$$

где производная $\frac{\partial \bar{c}}{\partial c}$ берется в некоторой промежуточной точке. По лемме 13.1 тогда имеем

$$|\bar{c}(a, c_2, \varepsilon)-\bar{c}(a, c_1, \varepsilon)| \leqslant (e^{-M}+\delta)|c_2-c_1|. \tag{13.22}$$

Кроме того,

$$|\bar{a}(a, c_2, \varepsilon)-\bar{a}(a, c_1, \varepsilon)| \leqslant \left|\frac{\partial \bar{a}}{\partial c}\right||c_2-c_1|,$$

откуда

$$|\bar{a}(a, c_2, \varepsilon)-\bar{a}(a, c_1, \varepsilon)| \leqslant \delta|c_2-c_1|. \tag{13.23}$$

В силу доказанного выше неравенства (13.17) получаем

$$|f_2(\bar{a}(a, c_2, \varepsilon))-f_2(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))| \leqslant \leqslant |\bar{a}(a, c_2, \varepsilon)-\bar{a}(a, c_1, \varepsilon)| \leqslant \delta|c_2-c_1|. \tag{13.24}$$

Имеем

$$|f_2(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))-f_1(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))| \leqslant |f_2(\bar{a}(a, c_2, \varepsilon))- -f_1(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))|+|f_2(\bar{a}(a, c_2, \varepsilon))-f_2(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))|. \tag{13.25}$$

Но по самому определению точек $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ можем написать

$$f_2(\bar{a}(a, c_2, \varepsilon))=\bar{c}(a, c_2, \varepsilon), \quad f_1(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))=\bar{c}(a, c_1, \varepsilon).$$

Из последних равенств, а также из (13.24) и (13.25) получаем неравенство

$$|f_2(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))-f_1(\bar{a}(a, c_1, \varepsilon))| \leqslant \leqslant (e^{-M}+\delta)|c_2-c_1|+\delta|c_2-c_1|.$$

Но $\bar{a}(a, c_1, \varepsilon)=a'$ в силу принятых обозначений, отсюда и из (13.16) получаем

$$|f_2(a')-f_1(a')| \leqslant q|c_2-c_1|. \tag{13.26}$$

А это неравенство совместно с (13.21) противоречит исходному предположению.

Лемма доказана.

Сформулированные леммы позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 13.1. *Если система* (13.2) *заменой переменных* (13.4) *приводится к виду* (13.7) *и если выполнено условие* (13.8), *то при* $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ *достаточно мало, существует инвариантная торообразная поверхность, стремящаяся к поверхности* (13.3) *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить, что при сколь угодно малом h и достаточно малом ε_0 существует ω_1-периодическая кривая γ ($c = g(a)$, $|g(a)| \leqslant h$ при всех a), такая, что $T_\varepsilon \gamma = \gamma$, если $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Установим это.

Пусть h — достаточно малое число. Мы его будем считать настолько малым, чтобы выполнялись утверждения сформулированных лемм. Рассмотрим пространство Ω всех кривых γ, обладающих следующими свойствами. Кривые γ представимы в виде $c = g(a)$, функции $g(a)$ ω_1-периодичны, функции $g(a)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянной, равной единице:

$$|g(a_1) - g(a_2)| \leqslant |a_1 - a_2|; \tag{13.27}$$

функции g ограничены по модулю числом h: $|g(a)| \leqslant h$. Введем в пространстве Ω естественную метрику

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \max |g_1(a) - g_2(a)|. \tag{13.28}$$

Из лемм 13.2 и 13.4 следует, что оператор Φ_ε переводит пространство Ω в себя. Лемма 13.5 показывает, что на этом пространстве оператор Φ_ε представляет собой оператор сближения. Отсюда в силу принципа Банаха следует, что оператор Φ_ε имеет на Ω неподвижную точку $\gamma = \Phi_\varepsilon \gamma$. Следовательно, $\gamma = T_\varepsilon \gamma$, что и доказывает теорему.

2. Пусть Σ_ε — инвариантная поверхность, существование которой доказано в предыдущем пункте. При $\varepsilon = 0$ поверхность эта вырождается в поверхность Σ_0, задаваемую формулами (13.3) (в координатах θ, t, z поверхность Σ_0 представляет собой плоскость $z = 0$).

Изучим вопрос об устойчивости поверхности Σ_ε.

Пусть h и ε_0 таковы, что выполняются утверждения, сделанные в предыдущем пункте. Пусть γ — пересечение плоскости $t=0$ с поверхностью Σ_ε, т. е. $T_\varepsilon\gamma=\gamma$. В плоскости x, y кривая γ представляет собой, как нетрудно видеть, замкнутую кривую, лежащую сколь угодно близко к кривой $x=\varphi(\theta, 0)$, $y=\psi(\theta, 0)$, если только ε достаточно мало. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 кривые $z=-h$ и $z=h$, лежащие в плоскости x, y, а через H — кольцеобразную область, ограниченную этими кривыми. Из доказательства теоремы 13.1 следует, что $\gamma\subset H$. Кроме того, из леммы 13.2 вытекает, что $T_\varepsilon\overline{H}\subset H$, где, как обычно, $\overline{H}$ — замыкание области H.

Теорема 13.2. *Инвариантная поверхность Σ_ε, существование которой доказывается теоремой* 13.1, *асимптотически устойчива по Ляпунову.*

Доказательство. Существование кривой γ было доказано с помощью принципа Банаха, поэтому кривая γ может быть получена методом последовательных приближений, т. е. $T_\varepsilon^k\Gamma_1\to\gamma$ и $T_\varepsilon^k\Gamma_2\to\gamma$ при $k\to\infty$. Отсюда следует, что

$$\prod_{k=0}^{\infty} T_\varepsilon^k H=\gamma.$$

Зададимся произвольным положительным числом $\lambda>0$. Обозначим через $\rho(p, q)$ евклидово расстояние между точками p, q, а через $\chi(t, p, t_0)$ — вектор решения системы (13.2), т. е. вектор с координатами $x(t, x_0, y_0, t_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, y_0, t_0, \varepsilon)$. По выбранному λ в силу теоремы об интегральной непрерывности найдется $\delta_1>0$ такое, что если $\rho(p, \gamma)<\delta_1$, то $\rho(\chi(t, p, 0), \Sigma_{\varepsilon t})<\lambda$ при $0\leqslant t\leqslant\omega$, где, как и в определении 2.3, через $\Sigma_{\varepsilon t}$ обозначено пересечение инвариантной поверхности Σ_ε с соответствующей плоскостью пространства x, y, t.

Так как $\gamma=\prod\limits_{k=0}^{\infty} T_\varepsilon^k H$, то существует такое K, что $\rho(T^K\Gamma_1, \gamma)<\delta_1$, $\rho(T^K\Gamma_2, \gamma)<\delta_1$. Положим $\delta=\min\{\rho(T^K\Gamma_1, \gamma), \rho(T^K\Gamma_2, \gamma)\}$.

Из выбора δ следует, что если $\rho(p, \gamma)<\delta$, то $\rho(\chi(t, p, 0), \Sigma_{\varepsilon t})<\lambda$ при всех $t\geqslant 0$, что и доказывает устойчивость инвариантного множества Σ_ε.

Из соотношения $\gamma = \prod_{k=0}^{\infty} T_k H$ непосредственно вытекает, что если $p \in H$, то $T^k p \to \gamma$ при $k \to \infty$. А отсюда в силу теоремы об интегральной непрерывности следует, что любое решение, начинающееся в области H, стремится к Σ_ε при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда правые части системы (13.1) не зависят от времени [66]. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y) + \varepsilon X_1(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) + \varepsilon Y_1(x, y, t). \end{aligned}\right\} \tag{13.29}$$

Относительно правых частей этой системы будем, как и раньше, предполагать, что они непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и обладают периодом ω по t. Кроме того, будем считать, что X и Y обладают непрерывными вторыми производными.

Предположим, что траектории системы

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{13.30}$$

ведут себя следующим образом. Начало координат, точка O, есть состояние равновесия, и оба корня характеристического уравнения, соответствующего этому состоянию равновесия, положительны. Существует периодическое решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ с периодом ω_1. Характеристический показатель

$$\varkappa = \int_0^{\omega_1} [X'_x(\varphi(t), \psi(t)) + Y'_y(\varphi(t), \psi(t))]\, dt \tag{13.31}$$

этого периодического решения отрицателен. Все траектории системы (13.30), кроме состояния равновесия O, стремятся к предельному циклу $\beta(x = \varphi(t),\ y = \psi(t))$ при $t \to \infty$. Отсюда, очевидно, следует, что предельный цикл β охватывает начало координат. Пусть Δ — область, ограничиваемая циклом β. Любое решение, начинающееся в Δ, стремится к началу координат при $t \to -\infty$. Любое решение, начинающееся вне Δ, стремится к бесконечности при убывании времени.

При этих предположениях будем изучать поведение решений системы (13.29) с достаточно малым ε.

Введем, как и выше, в окрестности предельного цикла β координаты θ и z по формулам

$$x=\varphi(\theta)-\psi'(\theta)z, \quad y=\psi(\theta)+\varphi'(\theta)z. \tag{13.32}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$D=\frac{D(x, y)}{D(\theta, z)}=\begin{vmatrix} \varphi'(\theta)-\psi''(\theta)z, & -\psi'(\theta) \\ \psi'(\theta)+\varphi''(\theta)z, & \varphi'(\theta) \end{vmatrix}=$$
$$=\varphi'^2+\psi'^2+z(\psi'\varphi''-\varphi'\psi''). \tag{13.33}$$

Ясно, что при достаточно малых z $D>0$.

Дифференцируя равенства (13.32) по t, получим

$$\dot{x}=(\varphi'-z\psi'')\dot{\theta}-\psi'\dot{z},$$
$$\dot{y}=(\psi'+z\varphi'')\dot{\theta}+\varphi'\dot{z}.$$

Отсюда в силу системы (13.30) получаем

$$(\varphi'-z\psi'')\dot{\theta}-\psi'\dot{z}=X(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z),$$
$$(\psi'+z\varphi'')\dot{\theta}+\varphi'\dot{z}=Y(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z).$$

Разрешая эту систему относительно $\dot{\theta}$, $\dot{z}$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\theta}&=\{X(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z)\varphi'+ \\ &\qquad +Y(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z)\psi'\}\frac{1}{D}, \\ \dot{z}&=\{-X(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z)(\psi'+z\varphi'')+ \\ &\qquad +Y(\varphi-\psi'z, \psi+\varphi'z)(\varphi'-z\psi'')\}\frac{1}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{13.34}$$

Правая часть первого из этих уравнений при $z=0$ обращается в $\{X(\varphi, \psi)\varphi'+Y(\varphi, \psi)\psi'\}\dfrac{1}{\varphi'^2+\psi'^2}$, но пара функций φ, ψ представляет собой решение системы (13.30), поэтому $X(\varphi, \psi)=\varphi'$, $Y(\varphi, \psi)=\psi'$, и, следовательно, при $z=0$ правая часть первого уравнения (13.34) равна 1.

Таким образом, первое уравнение системы (13.34) может быть записано в виде

$$\frac{d\theta}{dt}=1+zF(\theta,\ z). \tag{13.35}$$

Нетрудно убедиться, что при $z=0$ правая часть второго уравнения системы (13.34) обращается в нуль, поэтому второе уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dz}{dt}=A(\theta)z+z^2H(\theta,\ z). \tag{13.36}$$

Найдем $A(\theta)$. Непосредственно из вида правой части второго уравнения (13.34) следует:

$$A(\theta)=$$
$$=\frac{1}{\varphi'^2+\psi'^2}\left\{X_x\psi'^2-X_y\varphi'\psi'-X\varphi''-Y_x\varphi'\psi'+Y_y'\varphi'^2-Y\psi''\right\}=$$
$$=\frac{1}{\varphi'^2+\psi'^2}\left\{(X_x+Y_y)(\varphi'^2+\psi'^2)-\varphi'(X_x\varphi'+X_y\psi')-\right.$$
$$\left.-\psi'(Y_x\varphi'+Y_y\psi')-\varphi'\varphi''-\psi'\psi''\right\}.$$

Дифференцируя тождества $\varphi'=X(\varphi,\ \psi)$, $\psi'=Y(\varphi,\ \psi)$ по θ, получаем $\varphi''=X_x\varphi'+X_y\psi'$, $\psi''=Y_x\varphi'+Y_y\psi'$; следовательно,

$$A(\theta)=X_x+Y_y-2\frac{\varphi'\varphi''+\psi'\psi''}{\varphi'^2+\psi'^2}$$

или

$$A(\theta)=X_x+Y_y-\frac{d}{d\theta}\ln(\varphi'^2+\psi'^2). \tag{13.37}$$

Так как функции φ и ψ имеют период ω_1, то из этого равенства получаем

$$\int_0^{\omega_1}A(\theta)\,d\theta=\int_0^{\omega_1}[X_x(\varphi,\ \psi)+Y_y(\varphi,\ \psi)]\,d\theta=\varkappa. \tag{13.38}$$

Система (13.29) в переменных θ, t, z примет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt}&=1+zF(\theta,\ z)+\varepsilon P(\theta,\ t,\ z),\\ \frac{dz}{dt}&=A(\theta)z+z^2H(\theta,\ z)+\varepsilon R(\theta,\ t,\ z).\end{aligned}\right\} \tag{13.39}$$

Для этой системы выполнены все условия предыдущих пунктов, и поэтому существует инвариантная поверхность Σ_ε.

Из сделанных предположений относительно поведения решений системы (13.30) следует, что система эта диссипативна. Так как правые части этой системы не зависят от времени, то из теоремы 2.6 вытекает, что существует функция $v(x, y)$ со следующими свойствами. Функция v задана и непрерывно дифференцируема по обоим аргументам при $x^2+y^2 \geqslant a^2$ (где a — некоторое положительное число), $v(x, y) > 0$ при $x^2+y^2 \geqslant a^2$, $v(x, y) \to \infty$ при $x^2+y^2 \to \infty$, $\frac{\partial v}{\partial x} X + \frac{\partial v}{\partial y} Y < 0$ при $x^2+y^2 \geqslant a^2$. Нетрудно видеть, что существует такая непрерывная определенно-положительная функция $w(x, y)$, что если

$$|X_1(x, y, t)| + |Y_1(x, y, t)| \leqslant w(x, y) \tag{13.40}$$

при $x^2+y^2 \geqslant a^2$, то при таких x, y будет выполняться неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial x}(X+X_1) + \frac{\partial v}{\partial y}(Y+Y_1) < 0. \tag{13.41}$$

Отсюда и из теоремы 2.5 следует, что тогда при любом $\varepsilon \leqslant 1$ система (13.29) диссипативна и, более того, существует число a_1, не зависящее от ε, такое, что любое решение системы (13.29) при возрастании времени попадает в цилиндр $x^2+y^2 \leqslant a_1^2$ и при дальнейшем возрастании времени его не покидает.

Отсюда, из асимптотической устойчивости поверхности Σ_ε и теоремы об интегральной непрерывности следует, что любое решение, начинающееся вне цилиндра, ограниченного Σ_ε, стремится к Σ_ε при $t \to +\infty$, если только ε достаточно мало.

Из теории возмущения периодических решений (см., например, [67]) известно, что если ε достаточно мало, то система (13.29) в окрестности начала координат имеет единственное периодическое решение и характеристические показатели этого решения положительны. Отсюда и из теоремы об интегральной непрерывности следует, что все решения, начинающиеся внутри поверхности Σ_ε, за исключением периодического, стремятся к Σ_ε при $t \to +\infty$.

Таким образом, система (13.29) при выполнении условия (13.40) и при достаточно малом ε представляет собой диссинативную систему. Множество I этой системы представляет собой замкнутую область $\bar{G}$, ограниченную замкнутой кривой γ, удовлетворяющей условию Липшица. Внутри области G имеется неподвижная точка p_ε преобразования T_ε, отвечающая периодическому решению с положительными характеристическими показателями. Пусть p — точка, отличная от p_ε, тогда $T_\varepsilon^k p \to \gamma$ при $k \to \infty$.

Расположение интегральных кривых на поверхности Σ_ε или поведение преобразования T_ε на γ требует, конечно, специального исследования, аналогичного тому, которое проводилось в § 10.

§ 14. Существование инвариантной поверхности и поведение решений на ней в одном специальном случае

В этом параграфе мы будем опять изучать вопрос о существовании тороидальной инвариантной поверхности. Рассмотрим снова систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y, t) + \varepsilon X_1(x, y, t, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

Функции X, X_1 Y, Y_1 предполагаются непрерывными по всем своим аргументам и непрерывно дифференцируемыми по x и y. Кроме того, как обычно, предполагается, что эти функции имеют период ω по t.

Будем, как и в предыдущем параграфе, предполагать, что система (14.1) при $\varepsilon = 0$ имеет инвариантную поверхность Σ_0, гомеоморфную тору. Однако в предыдущем параграфе мы предполагали, что на самой поверхности Σ_0 интегральные кривые ведут себя как решения уравнения (13.6).

Сейчас мы будем предполагать, что на поверхности Σ_0 располагаются $k\omega$-периодические (k — целое) решения системы (14.1) с $\varepsilon = 0$ и что оба характеристических показателя каждого из этих решений отличны от нуля. Кроме того, будем считать, что инвариантная поверхность Σ_0 асимптотически устойчива.

Введем преобразование T_ε плоскости x, y в себя по обычному правилу: если $x(t, x_0, y_0, t_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, y_0, t_0, \varepsilon)$ — решение системы (14.1), то точке (x_0, y_0) ставим в соответствие точку $(x(\omega, x_0, y_0, 0, \varepsilon), y(\omega, x_0, y_0, 0, \varepsilon))$.

Итак, предполагается, что существует замкнутая жорданова кривая γ_0 без самопересечений, инвариантная относительно преобразования T_0. Поверхность Σ_0 представляет собой семейство всех решений, проходящих через γ_0 при $t=0$.

В дальнейшем систему (14.1) мы будем рассматривать в тороидальном фазовом пространстве, отождествив все точки вида $(x, y, t+n\omega)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

1. Выясним подробнее структуру поверхности Σ_0. Пусть S — топологическое преобразование γ_0 на окружность C, тогда ST_0S^{-1} будет топологическим и сохраняющим ориентацию преобразованием окружности C на себя. По предположению система (14.1) при $\varepsilon=0$ имеет на Σ_0 периодические решения. Следовательно, на γ_0 существует точка p, неподвижная относительно преобразования T_0^k. Будем предполагать, что k — наименьшее такое число, т. е. что если $k \geqslant 2$, то $T_0^l p \neq p$ при $l=1, 2, \ldots, k-1$. Покажем, что точка Sp есть неподвижная точка преобразования $[ST_0S^{-1}]^k$. Действительно, нетрудно видеть, что $[ST_0S^{-1}]^k = ST_0^kS^{-1}$. Следовательно,

$$[ST_0S^{-1}]^k Sp = ST_0^kS^{-1}Sp = ST_0^k p.$$

Но точка p — неподвижная точка преобразования T_0^k, т. е. $T_0^k p = p$, поэтому

$$[ST_0S^{-1}]^k Sp = Sp,$$

что и доказывает наше утверждение.

Пусть l — натуральное число, меньшее k; напишем тождество

$$[ST_0S^{-1}]^l Sp = ST_0^lS^{-1}Sp = ST_0^l p.$$

По предположению $T_0^l p \neq p$, поэтому

$$[ST_0S^{-1}]^l Sp \neq Sp.$$

Из рассуждений, приведенных в пункте 7 § 10, следует, что число вращения μ преобразования ST_0S^{-1} равно $\frac{m}{k}$, где m — целое неотрицательное число. Из этих же рассуждений вытекает, что если точка P окружности C неподвижна относительно преобразования $[ST_0S^{-1}]^l$ (где l — натуральное число), то $l = km_1$ (m_1 — целое), и точка P также неподвижна относительно $[ST_0S^{-1}]^k$. Отсюда следует, что если точка p_1 кривой γ_0 неподвижна относительно T_0^l, то $l = km_1$ (m_1 — целое) и $T_0^k p_1 = p_1$.

Таким образом, все периодические решения, лежащие на Σ_0, имеют наименьший период $k\omega$.

Из предположения о том, что любое периодическое решение, лежащее на Σ_0, имеет характеристические показатели, отличные от нуля, следует, что на Σ_0 имеется лишь конечное число периодических решений. Действительно, если бы на Σ_0 было бесконечно много периодических решений, то среди них имелось бы такое, в каждой окрестности которого существовало бы периодическое решение, отличное от него самого. Это противоречит тому, что оба характеристических показателя этого решения отличны от нуля. Так как поверхность Σ_0 асимптотически устойчива, то хотя бы один из характеристических показателей периодического решения, лежащего на Σ_0, отрицателен. Действительно, если бы это было не так, т. е. если бы существовало периодическое решение с положительными характеристическими показателями, то существовали бы решения, стремящиеся к Σ_0 при $t \to -\infty$ и не лежащие на Σ_0. Это невозможно из-за устойчивости Σ_0.

Пусть точка p — неподвижная точка преобразования T_0^k. Как было только что показано, на Σ_0 располагается лишь конечное число неподвижных точек преобразования T_0^k; следовательно, p — изолированная неподвижная точка преобразования T_0^k. По следствию 10.3 для любой точки q, лежащей в достаточно малой окрестности точки p, выполняется одно из соотношений

$$T_0^{nk} q \xrightarrow[n \to +\infty]{} p, \tag{14.2}$$

$$T_0^{nk} q \xrightarrow[n \to -\infty]{} p. \tag{14.3}$$

При этом если для какой-нибудь точки q, лежащей на γ_0, выполняется соотношение (14.2), то и для всех точек, лежащих на γ_0 между p и q, выполняется то же соотношение, и обратно.

Ясно, что если через точку p проходит периодическое решение с отрицательными характеристическими показателями, то для всякой точки q, лежащей в достаточной близости к p, выполняется соотношение (14.2). Такие точки p в дальнейшем будем называть устойчивыми.

Пусть $x=\overline{\varphi}_i(t)$, $y=\overline{\psi}_i(t)$ — $k\omega$-периодическое решение с отрицательными характеристическими показателями. Обозначим через p_{i0} точку с координатами $\overline{\varphi}_i(0)$, $\overline{\psi}_i(0)$; тогда ясно, что точки $p_{il}=T_0^l p_{i0}$ $(l=0, 1, \ldots, k-1)$ будут геометрически различными устойчивыми неподвижными точками преобразования T_0^k.

Рассмотрим периодическое решение $x=\varphi_j(t)$, $y=\psi_j(t)$, лежащее на Σ_0 с одним положительным характеристическим показателем. Пусть q_{j0} — точка с координатами $x=\varphi_j(0)$, $y=\psi_j(0)$, тогда точки $q_{jl}=T^l q_{j0}$ $(l=0, 1, \ldots, k-1)$ будут различными неподвижными точками преобразования T_0^k. Сделаем в системе (14.1) при $\varepsilon=0$ замену $\overline{x}=x-\varphi_j(t)$, $\overline{y}=y-\psi_j(t)$, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dt} &= a_{11}(t)\,\overline{x}+a_{12}(t)\,\overline{y}+\overline{X}(\overline{x}, \overline{y}, t), \\ \frac{d\overline{y}}{dt} &= a_{21}(t)\,\overline{x}+a_{22}(t)\,\overline{y}+\overline{Y}(\overline{x}, \overline{y}, t). \end{aligned}\right\} \qquad (14.4)$$

В этой системе функции $a_{ik}(t)$ $(i, k=1, 2)$, $\overline{X}(\overline{x}, \overline{y}, t)$ и $\overline{Y}(\overline{x}, \overline{y}, t)$ имеют период ω по t, кроме того, функции $\overline{X}(\overline{x}, \overline{y}, t)$ и $\overline{Y}(\overline{x}, \overline{y}, t)$ обращаются в нуль вместе со своими частными производными по $\overline{x}$, $\overline{y}$ при $\overline{x}=\overline{y}=0$.

Хорошо известно [68], что заменой переменных с периодическими коэффициентами система (14.4) может быть приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1\xi+X_1(\xi, \eta, t), \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2\eta+Y_1(\xi, \eta, t). \end{aligned}\right\} \qquad (14.5)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — характеристические показатели, функции X_1, Y_1 непрерывно дифференцируемы по ξ, η и обращаются в нуль вместе со своими производными при $\xi=\eta=0$.

Рассмотрим систему первого приближения для (14.4):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= a_{11}(t)\,\bar{x} + a_{12}(t)\,\bar{y}, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= a_{21}(t)\,\bar{x} + a_{22}(t)\,\bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Составим характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1(k\omega)-\rho, & \bar{x}_2(k\omega) \\ \bar{y}_1(k\omega), & \bar{y}_2(k\omega)-\rho \end{vmatrix} = 0, \tag{14.7}$$

где $\bar{x}_1(t)$, $\bar{y}_1(t)$ — решение системы (14.6) с начальными данными $\bar{x}_1(0)=1$, $\bar{y}_1(0)=0$, а $\bar{x}_2(t)$, $\bar{y}_2(t)$ — решение с начальными данными $\bar{x}_2(0)=0$, $\bar{y}_2(0)=1$. Так как по предположению один из характеристических показателей решений $x=\varphi_j(t)$, $y=\psi_j(t)$ положителен, то по доказанному характеристические показатели λ_1 и λ_2 имеют разные знаки; следовательно, один из корней уравнения (14.7) по модулю больше единицы, а другой меньше. Отсюда вытекает, что оба корня уравнения (14.7) вещественны. Если корни уравнения (14.7) положительны, то преобразование, переводящее систему (14.4) в систему (14.5), имеет период $k\omega$ [68], и, следовательно, функции X_1 и Y_1 имеют тот же период. Если же корни характеристического уравнения отрицательны, то это преобразование имеет период $2k\omega$ и такой же период имеют функции X_1 и Y_1. В действительности нетрудно показать, что при сделанных нами предположениях второй случай невозможен. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого утверждения, так как для дальнейших рассуждений не важно, имеют ли функции X_1 и Y_1 период $k\omega$ или $2k\omega$.

Так как в системе (14.5) один из коэффициентов λ_1 и λ_2 положителен, то в пространстве ξ, η, t имеется двумерная непрерывно дифференцируемая интегральная поверхность, проходящая через прямую $\xi=\eta=0$. На этой поверхности лежат интегральные кривые, стремящиеся к $\xi=\eta=0$ при $t\to-\infty$. Любое решение, не лежащее на этой поверхности при убывании t, покидает достаточно малую окрестность решения $\xi=\eta=0$ (о существовании такой поверхности см., например, [3]). Отсюда следует, что существует гладкая дуга Λ_{j0}, проходящая через точку q_{j0}, такая, что если $q\in\Lambda_{j0}$, то $T_0^{nk}q\to q_{j0}$ при $k\to-\infty$.

Из устойчивости Σ_0 следует, что $\Lambda_{j0}\subset\gamma_0$, ибо в противном случае существовали бы решения, не лежащие на Σ_0 и стремящиеся к Σ_0 при $t\to-\infty$, что, очевидно, невозможно.

Таким образом, доказано, что если через точку p, неподвижную относительно преобразования T_0^k, проходит периодическое решение, имеющее положительный характеристический показатель, то для всякой точки q, лежащей на γ_0 в достаточной близости от p, выполняется соотношение (14.3). Такие точки p будем называть неустойчивыми.

Из сказанного выше следует, что точки $q_{jl}=T_0^l q_{j0}$ $(l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$ будут геометрически различными неустойчивыми неподвижными точками преобразования T_0^k.

Если рассмотреть преобразование $ST_0^kS^{-1}$, то из теоремы 10.4 нетрудно вывести, что на γ_0 устойчивые и неустойчивые точки чередуются.

Предположим, что на Σ_0 располагается m различных периодических решений с отрицательными характеристическими показателями, тогда на γ_0 лежит km устойчивых неподвижных точек p_{jl} $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$ и столько же неустойчивых неподвижных точек q_{jl} $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$.

Возьмем какую-нибудь неустойчивую неподвижную точку q_{jl} и дугу Λ_{jl}, ей соответствующую. Рассмотрим открытую дугу

$$H_{jl}=\sum_{s=0}^{\infty}T^{sk}\Lambda_{jl}. \tag{14.8}$$

Дуга эта инвариантна относительно преобразования T_0^k, и для любой точки $q\in H_{jl}$ выполняется соотношение $T^{sk}q\to q_{jl}$ при $s\to-\infty$, поэтому $H_{jl}\subset\gamma_0$.

Из теоремы 10.4 следует, что дуга H_{jl} своими концами примыкает к некоторым устойчивым неподвижным точкам. Таким образом, кривая γ_0 представляет собой сумму всех дуг H_{jl} с присоединением устойчивых неподвижных точек p_{jl} $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1)$.

2. Окружим в плоскости x, y точки p_{jl} и q_{jl} окрестностями U_{jl}, V_{jl} достаточно малого радиуса с таким расчетом, чтобы каждая из них содержала лишь одну неподвижную точку преобразования T_0^k и чтобы они не пересекались между собой.

Как хорошо известно из теории возмущения периодических систем, в каждой из окрестностей U_{jl} и V_{jl} существует одна и только одна неподвижная точка преобразования T_ε^k при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Пусть это будут точки $p_{jl}^{(\varepsilon)}$, $q_{jl}^{(\varepsilon)}$. Корни характеристического уравнения, соответствующего периодическому решению, проходящему через точку $p_{jl}^{(\varepsilon)}$ или $q_{jl}^{(\varepsilon)}$, зависят непрерывно от ε. Поэтому при достаточно малых ε через точку $p_{jl}^{(\varepsilon)}$ проходит периодическое решение с отрицательными характеристическими показателями, а через точку $q_{jl}^{(\varepsilon)}$ — решение, один из характеристических показателей которого положителен, а другой отрицателен. В связи с этим точки $p_{jl}^{(\varepsilon)}$ будем называть устойчивыми, а точки $q_{jl}^{(\varepsilon)}$ неустойчивыми.

Так же как и для точки q_{jl}, для точки $q_{jl}^{(\varepsilon)}$ существует гладкая дуга $\Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}$, проходящая через $q_{jl}^{(\varepsilon)}$ и обладающая тем свойством, что если $q \in \Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}$, то $T_\varepsilon^{nk} q \to q_{jl}^{(\varepsilon)}$ при $n \to -\infty$. Для любой точки q, лежащей в достаточной близости от $q_{jl}^{(\varepsilon)}$, но на $\Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}$, последовательность $T_\varepsilon^{nk} q$ покидает достаточно малую окрестность точки $q_{jl}^{(\varepsilon)}$. Отсюда следует, что $\Lambda_{jl}^{(\varepsilon)} \subset T_\varepsilon^k \Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}$. Нетрудно видеть, кроме того, что дуги $\Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}$ и $T_\varepsilon^l \Lambda_{j0}^{(\varepsilon)}$ ($l = 0, 1, \ldots, k-1$) или совпадают между собой, или накладываются друг на друга таким образом, что их сумма опять составляет гладкую дугу.

Из доказательства теоремы о существовании интегрального многообразия, на которую мы ссылались (см. опять [3]), следует, что дуга $\Lambda_{j\varepsilon}^{(\varepsilon)}$ непрерывно зависит от ε. Рассмотрим открытую дугу

$$H_{jl}^{(\varepsilon)} = \sum_{s=0}^{\infty} T_\varepsilon^{sk} \Lambda_{jl}^{(\varepsilon)}.$$

Из теоремы о непрерывности решений по параметру и начальным данным следует, что концы этой дуги лежат в некоторых достаточно малых окрестностях устойчивых неподвижных точек преобразования T_0^k; пусть это будут точки p_{jl} и p_{j+1l}. Тогда ясно, что они также попадают и в достаточно малые окрестности устойчивых неподвижных точек $p_{jl}^{(\varepsilon)}$ и $p_{j+1l}^{(\varepsilon)}$. Но тогда дуга $H_{jl}^{(\varepsilon)}$ просто примыкает к точкам $p_{jl}^{(\varepsilon)}$ и $p_{j+1}^{(\varepsilon)}$.

Рассмотрим кривую γ_ε, состоящую из всех открытых дуг $H_{jl}^{(\varepsilon)}$ и устойчивых точек $p_{jl}^{(\varepsilon)}$. Из самого построения этой кривой следует, что она представляет собой замкнутую жорданову кривую и что она инвариантна относительно преобразования T_ε: $T_\varepsilon\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon$.

Из сказанного вытекает следующее утверждение [69].

Теорема 14.1. *При сделанных предположениях система* (14.1) *имеет инвариантную поверхность* Σ_ε *гомеоморфную тору, если* ε *достаточно мало.*

§ 15. Изучение одной диссипативной системы с сингулярным строением множества I

В этом параграфе мы изучим одну диссипативную систему с весьма своеобразным поведением решений и структурой множества I. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = b\lambda k \cos\lambda t \qquad (15.1)$$

и его обобщение

$$\ddot{x} + kf(x)\dot{x} + g(x) = kp(t), \qquad (15.2)$$

где k — большой параметр, а b и λ — постоянные. Картрайт и Литтлвуд [71—73] подвергли эти уравнения детальному изучению и получили, наряду с другими, следующие замечательные результаты.

При $b > \frac{2}{3}$ и $k > k_0(\lambda, b)$ уравнение (15.1) обладает свойством конвергенции. Наиболее детальному анализу авторы подвергли случай $\frac{1}{100} < b < \frac{2}{3} - \frac{1}{100}$. Из этого промежутка для b исключается некоторое множество промежутков, сумма длин которых мала, т. е. существует ε сколь угодно малое при достаточно большом k_0, обладающее следующими свой стями. Если $k \geqslant k_0$, то существует множество исключенных промежутков с суммой длин, меньшей ε. Оставшееся множество B есть также система промежутков. Оно меняется вместе с k, но мера его при $k \geqslant k_0$ оказывается не меньше, чем $\frac{2}{3} - \frac{2}{100} - \varepsilon$. B разделяется на две части B_1 и B_2, сравнимых по мере.

Если b лежит на интервале $I_1 \subset B_1$, то уравнение (15.1) имеет систему устойчивых субгармоник порядка $2n+1$, и „большинство“ других решений стремится к одной из этих субгармоник при $t \to +\infty$. Число n постоянно в I_1 и имеет порядок $\left(\frac{2}{3} - b\right)k$. Если b лежит в I_1 из B_1, то существует система неустойчивых субгармоник порядка $(2n+1)$.

Если b принадлежит интервалу I_2 из B_2, то уравнение (15.1) имеет две системы устойчивых субгармоник порядка $2n+1$ и $2n-1$; „большинство“ остальных решений стремится к одной из этих субгармоник. Имеется, далее, бесконечное множество Σ неустойчивых периодических решений. Существует, кроме того, множество X мощности континуум не периодических рекуррентных решений. Число n, так же как и в первом случае, постоянно в I_2. Множества X и Σ остаются топологически эквивалентными при изменении b в I_2.

При всех b из промежутка $\frac{1}{100} < b < \frac{2}{3} - \frac{1}{100}$ и при достаточно больших k существует единственное вполне неустойчивое (асимптотически устойчивое при $t \to -\infty$) периодическое решение с периодом $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Для уравнения (15.2) при определенных условиях получены аналогичные результаты.

Доказательства этих утверждений, весьма длинные и сложные по своей структуре, по-видимому, не допускают существенного сокращения, поэтому не представляется возможным привести их в этой книге, и мы отсылаем читателя к оригинальным работам.

Левинсон [74] рассмотрел более простое уравнение с таким же особым поведением решений, что и у уравнений (15.1) и (15.2). Мы воспроизведем сейчас рассуждения Левинсона. Знакомство с этими рассуждениями значительно облегчит изучение трудных работ Картрайт и Литтлвуда,

1. Рассматривается уравнение

$$\varepsilon\ddot{x}+\varphi(x)\dot{x}+\varepsilon x=b\sin t, \qquad (15.3)$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $\varphi(x)=1$ при $|x|>1$, $\varphi(x)=-$ при $|x|<1$, а постоянная b выбирается из некоторой системы интервалов, погруженной в промежуток $(0, 1)$. Как следует из теоремы 4.1, уравнение (15.3) представляет собой диссипативную систему. Сделаем замену переменных, положим $x_1=x$, $x_2=\varepsilon\dot{x}+\Phi(x_1)$, где $\int\limits_0^{x_1}\varphi(x)\,dx=\Phi(x_1)$, тогда получим систему

$$\varepsilon\frac{dx_1}{dt}=x_2-\Phi(x_1), \quad \frac{dx_2}{dt}=-\varepsilon x_1+b\sin t. \qquad (15.4)$$

Пусть $P(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $|P(x)-\Phi(x)|<\Delta$ при $|x|\leqslant 5$, где Δ — достаточно малая положительная постоянная. Так как $\Phi(x)$ непрерывна, $P(x)$ может быть полиномом. Наряду с (15.4) рассмотрим систему

$$\varepsilon\frac{dy_1}{dt}=y_2-P(y_1), \quad \frac{dy_2}{dt}=-\varepsilon y_1+b\sin t. \qquad (15.5)$$

Эта система эквивалентна уравнению

$$\varepsilon\ddot{y}+P'(y)\dot{y}+\varepsilon y=b\sin t. \qquad (15.6)$$

Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной, равной единице, поэтому если $y_i(t_0)=x_i(t_0)$ $(i=1, 2)$, то

$$|y_1(t)-x_1(t)|+|y_2(t)-x_2(t)|\leqslant\frac{\Delta}{1+\varepsilon^2}\left[e^{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right)(t-t_0)}-1\right] \qquad (15.7)$$

до тех пор, пока $|y_1|\leqslant 5$. Это неравенство следует из хорошо известных теорем теории дифференциальных уравнений (см., например, [1]).

Выбором достаточно малого Δ мы можем сделать разности (y_1-x_1) и (y_2-x_2) сколь угодно малыми на протяжении любого, но фиксированного промежутка времени. Таким образом, поведение решений систем (15.4) и (15.5) при достаточно малом Δ одинаково на конечном промежутке времени. В дальнейшем будет показано, что поведение решений системы (15.5) при $-\infty < t < +\infty$ определяется поведением ее решений на некотором конечном интервале изменения времени. Поэтому решения систем (15.4) и (15.5) ведут себя одинаково при всех t, если только Δ выбрать достаточно малым.

Перед тем как переходить к точным формулировкам результатов, опишем приблизительно и без доказательств поведение решений уравнения (15.3). Оказывается, что среди решений этого уравнения имеется семейство F следующей специфической структуры. Решение $x(t)$ этого семейства имеет максимальное значение, равное приблизительно 3. Если этот максимум достигается при $t = t_1$, то при $t > t_1$ и пока $x > 1$ решение ведет себя приблизительно как функция

$$(3-b)\,e^{-\rho(t-t_1)} - b\cos t, \tag{15.8}$$

где ρ — малая положительная постоянная. Таким образом, при $t > t_1$ первое слагаемое (15.8) медленно убывает. Когда x достигает значения, равного 1, решение начинает быстро убывать и за промежуток времени длиною не более 2π достигает минимума, приблизительно равного -3. Затем картина повторяется: решение медленно возрастает до $x = -1$, и потом быстро достигает максимума, равного приблизительно 3. При дальнейшем возрастании времени решение ведет себя аналогично.

Будем называть четной точкой пересечения значение t, при котором решение $x(t)$ семейства F, убывающее от своего максимального значения, приблизительно равного 3, впервые достигает значения $x = 1$. Назовем нечетной точкой пересечения то значение t, при котором решение $x(t)$, возрастающее от своего минимального значения, впервые достигает значения $x = -1$. Для каждого решения из семейства F четные и нечетные точки пересечения чередуются с возрастанием t. И четные, и нечетные точки пересечения будем называть просто точками пересечения.

Каждая четная точка пересечения всегда лежит на некотором коротком интервале $t = \tau \pmod{2\pi}$ $0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{10}$, который называется четным базисным интервалом, Все нечетные точки пересечения лежат на коротком промежутке $t = \pi + \tau \pmod{2\pi}$, $0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{10}$, который называется нечетным базисным интервалом.

Уравнению (15.3) можно поставить в соответствие большое целое число n. Расстояние между двумя соседними базисными интервалами, в которых лежат точки пересечения одного и того же решения семейства F, близко либо к $(2n-1)\pi$, либо к $(2n+1)\pi$. Зададимся произвольной последовательностью d_k $(-\infty < k < +\infty)$, где d_k есть либо $(2n-1)\pi$, либо $(2n+1)\pi$, тогда существует решение семейства F, точки пересечения которого лежат в базисных интервалах с соответствующими расстояниями, равными d_k, и это решение не имеет других точек пересечения.

Так как последовательность d_k содержит бесчисленное множество перемен ± 1, то множество таких последовательностей имеет мощность континуума. Большую часть решений семейства F составляют непериодические решения, так как последовательности d_k в большинстве своем непериодические. Среди всех последовательностей d_k имеется счетное множество периодических. Каждой из таких периодических последовательностей отвечает по крайней мере одно периодическое решение из F, точки пересечения которого лежат на базисных интервалах; расстояния между ними определяются соответствующей последовательностью d_k. Семейство таких периодических движений будем обозначать через Σ.

Уравнение (15.3) имеет две системы субгармоник порядка $(2n-1)\pi$ и $(2n+1)\pi$, каждая из этих субгармоник асимптотически устойчива при $t \to +\infty$. Существует также одно гармоническое колебание, асимптотически устойчивое при $t \to -\infty$.

2. Решение уравнения (15.3) может быть найдено точно: при $x \neq \pm 1$ уравнение (15.3) представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Пусть ρ — наименьший корень уравнения

$$\varepsilon\rho^2 - \rho + \varepsilon = 0, \tag{15.9}$$

т. е.

$$\rho = \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon^3 + \ldots, \quad \varepsilon = \frac{\rho}{1+\rho^2}. \tag{15.10}$$

Так как ε мало, то ρ также мало.

Решение уравнения (15.3) дается формулами

$$x = A_1 e^{-(t-t_0)/\rho} + A_2 e^{-(t-t_0)\rho} - b\cos t \quad \text{при} \quad |x| > 1, \tag{15.11}$$

где A_1, A_2, t_0 — постоянные, и аналогично

$$x = B_1 e^{(t-t_0)/\rho} + B_2 e^{(t-t_0)\rho} + b\cos t \quad \text{при} \quad |x| < 1. \tag{15.12}$$

Чтобы показать существование семейства F, содержащего по крайней мере одно решение, отвечающее каждой последовательности d_k, установим некоторые утверждения относительно преобразований базисных интервалов. Рассмотрим непрерывное семейство решений с начальными данными из нечетного базисного интервала:

$$x_0 = -1, \quad \dot{x}_0 = \rho(1 + b\cos\tau) - b\sin\tau + E, \quad t_0 = \pi + \tau, \tag{15.13}$$

где $0 < \tau < \tau_1 < \frac{1}{10}$, $|E| < e^{-\frac{10}{\rho}}$. Это семейство будем называть нечетным базисным семейством. Мы покажем в дальнейшем, что решения нечетного базисного семейства при $t = 3\pi$ близки к 3. При $t > 3\pi$ эти решения даются формулой (15.11) с пренебрежимо малым первым слагаемым. Таким образом, эти решения приблизительно равны

$$x = Ae^{-\rho(t-3\pi)} - b\cos t, \tag{15.14}$$

где A близко к $3 - b$.

Далее будет показано, что для нечетного базисного семейства A в формуле (15.14) принимает значение из промежутка

$$3 - b - 2\pi(3 - b)\rho \leqslant A \leqslant 3 - b + 2\pi(1 - b)\rho. \tag{15.15}$$

Решения (15.14) убывают и достигают значения $x = 1$ на некотором множестве четных точек пересечения. Решение $x = x(t)$ впервые достигает значения $x = 1$ при t, близком к $2m\pi$, как следует из формулы (15.14), ибо при этом $\cos t$ должен быть близок к единице. Чем больше A, тем больше требуется времени для достижения значения $x = 1$. Четная точка пересечения t_M, соответствующая максимальному значению A из промежутка (15.15), лежит примерно на 4π правее четной точки пересечения t_m, соответствующей минимальному значению A, если только b выбрано надлежащим образом. Из соображений непрерывности следует, как мы увидим далее, что множество четных точек пересечения, соответствующих исходному нечетному базисному семейству, включает в себя два четных базисных интервала. Они лежат в промежутке (t_m, t_M) и даются формулами $t = 2n\pi + \tau$ и $t = 2(n+1)\pi + \tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, где n — большое целое число, зависящее от b и ρ.

Если рассмотреть четное базисное семейство, то картина получится аналогичная.

Пусть интегральные кривые исходного нечетного базисного семейства определяют преобразование исходного нечетного базисного интервала во множество четных точек пересечения на прямой $x = 1$; тогда ясно, что образ исходного промежутка включает в себя два четных базисных интервала. Таким образом, исходное семейство решений содержит два подсемейства, каждое из которых пересекает прямую $x = 1$ при $\dot{x} < 0$ так, что точки пересечения покрывают базисный интервал, один из этих интервалов есть $t = 2\pi n + \tau$, а другой — $t = 2(n+1)\pi + \tau$. Точно так же каждое семейство траекторий, начинающееся на четном базисном интервале, пересекает $x = 1$, $\dot{x} > 0$ так, что точки пересечения покрывают два нечетных базисных интервала и так далее. Расстояние между некоторым интервалом и двумя интервалами, лежащими в его образе, есть $(2n-1)\pi$ и $(2n+1)\pi$.

Рассмотрим последовательность базисных интервалов с соответствующими расстояниями, даваемыми произвольной последовательностью d_k, $-\infty < k < +\infty$, где каждое d_k есть или $(2n-1)\pi$ или $(2n+1)\pi$. Тогда, используя природу описанного преобразования, удается показать, что существует по крайней мере одно решение уравнения (15.3) с точками пересечения, лежащими на соответствующих последовательности d_k расстояниях.

3. Переходим к точным формулировкам утверждений и доказательствам. Рассмотрим нечетный базисный интервал, задаваемый формулой $t = \pi + \tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, где $\tau_1 < \frac{1}{10}$ находится из уравнения

$$\sin \tau_1 = \frac{\rho}{b} - \frac{q}{\varepsilon}, \quad q = e^{\left(-\frac{2\pi}{\rho} + 2\rho\right)^{-\frac{3}{4}}}. \tag{15.16}$$

Формула (15.13) для $\dot{x}_0$ есть простое следствие (15.11). Действительно, дифференцируя (15.11) и исключая A_2, получаем

$$\dot{x} = -\rho(x + b\cos t) + b\sin t - \left(\frac{1}{\rho} - \rho\right) A_1 e^{-(t-t_0)/\rho}. \qquad (15.17)$$

Если мы положим здесь $x = -1$, а $t = \pi + \tau$, то мы и получим (15.13) с весьма малым экспоненциальным членом E при достаточно большой разности $t - t_0$.

При $|x| > 1$ уравнение (15.3) есть уравнение $\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + \varepsilon x = b\sin t$; следовательно, его общее решение дается формулой (15.11). Если $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = t_0$, то

$$A_1 = \frac{-\varepsilon\rho(x_0 + b\cos t_0) - \varepsilon\dot{x}_0 + \varepsilon b\sin t_0}{1 - 2\varepsilon\rho}, \qquad (15.18)$$

$$A_2 = \frac{(1 - \varepsilon\rho)(x_0 + b\cos t_0) + \varepsilon\dot{x}_0 - \varepsilon b\sin t_0}{1 - 2\varepsilon\rho}. \qquad (15.19)$$

При $|x| < 1$ общее решение уравнения (15.3) задается формулой (15.12), где постоянные B_1 и B_2 имеют следующие выражения через x_0, $\dot{x}_0$, t_0:

$$B_1 = \frac{-\varepsilon\rho(x_0 - b\cos t_0) + \varepsilon\dot{x}_0 + \varepsilon b\sin t_0}{1 - 2\varepsilon\rho}, \qquad (15.20)$$

$$B_2 = \frac{(1 - \varepsilon\rho)(x_0 - b\cos t_0) - \varepsilon\dot{x}_0 - \varepsilon b\sin t_0}{1 - 2\varepsilon\rho}. \qquad (15.21)$$

Будем считать ε и ρ достаточно малыми положительными постоянными; b лежит между нулем и единицей и отделено от нуля и единицы. Для удобства будем считать $0{,}1 < b < 0{,}9$. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы о поведении решений уравнения (15.3).

Лемма 15.1. *Решение уравнения* (15.3), *начинающееся на левом конце нечетного базисного интервала $t = \pi$, с начальными данными $x_0 = -1$, $\dot{x}_0 = \rho(1 + b) + E$, где $|E| < e^{-\frac{10}{\rho}}$, удовлетворяет неравенству*

$$x \leqslant 3 - 2\pi(3 - b)\rho + \rho^{6/5} \quad \textit{при} \quad t = 3\pi. \qquad (15.22)$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — рассматриваемое решение. Так как $\dot{x}_0 > 0$, то при $t > \pi$ и достаточно близких к π окажется $x > -1$. Таким образом, из (15.12) находим

$$\ddot{x} = \frac{1}{\rho^2} B_1 e^{(t-\pi)/\rho} + \rho^2 B_2 e^{\rho(t-\pi)} - b\cos t.$$

Отсюда и из (15.20) и (15.21) получаем

$$\ddot{x} = \frac{\varepsilon}{\rho}\,\frac{2+E/\rho}{1-2\varepsilon\rho}\,e^{(t-\pi)/\rho} + D(\rho)\,e^{\rho(t-\pi)} - b\cos t,$$

где $|D(\rho)| \leqslant 2\rho^2$. Так как коэффициент при первом члене правой части последнего равенства положителен, то $\ddot{x} > \frac{1}{2}b$ до тех пор, пока $|x| < 1$ и $\pi < t < \frac{5\pi}{4}$. Поэтому при этих условиях $\dot{x} > 0$, поскольку $\dot{x}_0 > 0$. Более того, $\ddot{x} > \frac{3}{2}e^{(t-\pi)/\rho}$ до тех пор, пока $|x| < 1$. Так как $\dot{x}_0 > 0$, то из этого неравенства для $\ddot{x}$ следует, что x достигает единицы при $t < \pi + 3\rho\ln\frac{1}{\rho}$.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (15.3) и отметим точку, в которой x достигает значения, равного единице, индексом 1; тогда будем иметь

$$\varepsilon\dot{x}_1 - 2 + \varepsilon\int_{t_0}^{t_1} x\,dt = -b\cos t_1 + b\cos t_0 + \varepsilon\dot{x}_0. \quad (15.23)$$

Так как $t_0 = \pi < t_1 < \pi + 3\rho\ln\frac{1}{\rho}$, $|\dot{x}_0| < 2\rho$ и $|x| \leqslant 1$, то можем написать

$$\varepsilon\dot{x}_1 + b\cos t_1 = 2 - b + \gamma\varepsilon\rho\ln\frac{1}{\rho}, \quad (15.24)$$

где через γ обозначается величина, ограниченная при $\varepsilon \to 0$. Из (15.24) следует, что $\dot{x}_1 > 0$, поэтому для дальнейшего разыскания решения надо воспользоваться формулой (15.11). Постоянные A_1 и A_2 найдутся из (15.18) и (15.19) в точке t_1. Используя (15.24), получаем для достаточно малого ε

$$x = \gamma_1 e^{-(t-t_1)/\rho} + (3-b)\,e^{-\rho(t-t_1)} - b\cos t + \gamma\varepsilon\rho\ln\frac{1}{\rho}, \quad (15.25)$$

где величина γ ограничена при $\varepsilon \to 0$, а $|\gamma_1| < 2{,}05$ при достаточно малых ε. Из формулы (15.25) нетрудно заключить, что если ε достаточно мало, то при $t_1 \leqslant t \leqslant 3\pi$ $x > 1$. Тогда из этой же формулы при $t = 3\pi$ и получаем утверждение доказываемой леммы.

Лемма 15.2. Решение уравнения (15.3), *начинающееся на правом конце нечетного базисного интервала* $t=\pi+\tau_1$, *и удовлетворяющее* (15.13) *при* $\tau=\tau_1$, *подчиняется неравенству*

$$x \geqslant 3+2\pi(1-b)\rho-\rho^{6/5} \quad \text{при} \quad t=3\pi. \tag{15.26}$$

Доказательство. В процессе доказательства леммы будет показано, что $x>-1+\frac{1}{3}b\rho^{1/2}$ при $\frac{5}{4}\pi<t<3\pi$.

Рассматриваем решение $x(t)$, начинающееся при $t_0=\pi+\tau_1$, где τ_1 дается формулами (15.16). В силу (15.13) $\dot{x}_0>0$, поэтому для нахождения x воспользуемся выражением (15.12). Из условия (15.16) вытекает, что постоянная B_1 мала; действительно,

$$B_1=\frac{2bq+\varepsilon E}{1-2\varepsilon\rho}, \qquad B_2=-(1-b+\gamma\rho^2), \tag{15.27}$$

где, как и ранее, γ обозначает величину, ограниченную при $\varepsilon\to 0$. Таким образом,

$$x=\frac{2bq+\varepsilon E}{1-2\varepsilon\rho}e^{(t-\pi-\tau_1)/\rho}-(1+\gamma\rho^2-b)e^{(t-\pi-\tau_1)\rho}+b\cos t, \tag{15.28}$$

и ясно, что

$$\ddot{x}=D_1(\rho)-b\cos t, \tag{15.29}$$

где $D_1(\rho)>-3\rho^2$ при $\pi+\tau_1\leqslant t\leqslant\frac{5\pi}{4}$. Таким образом, $\ddot{x}>\frac{1}{2}b>0$ на этом промежутке; так как $\dot{x}_0>0$, то мы имеем $x>-1$, вплоть до $t=\frac{5\pi}{4}$.

На промежутке $\pi+\tau_1<t<3\pi-3\rho^{1/4}$ первое слагаемое правой части равенства (15.28) мало по смыслу обозначений E и q. Следовательно, на этом промежутке изменения времени

$$x=-1+b+b\cos t+\gamma\rho \tag{15.30}$$

(как всегда, γ — величина, ограниченная при $\varepsilon\to 0$). В частности, тогда $1>x>-1+b\rho^{\frac{1}{2}}$ при $\frac{5\pi}{4}<t<3\pi-3\rho^{\frac{1}{4}}$.

Положим теперь $t = 3\pi - s$, тогда при $\rho^{\frac{1}{4}} < s < 3\rho^{\frac{1}{4}}$ до тех пор, пока $|x| < 1$, будем иметь в силу (15.28)

$$x = -1 + \frac{2b}{1-2\varepsilon\rho} e^{-\frac{\tau_1}{\rho}+2\rho^{-\frac{3}{4}}-\frac{s}{\rho}} + \frac{1}{2}bs^2 + \gamma\rho. \tag{15.31}$$

Из этого равенства следует, что на рассматриваемом промежутке для s до тех пор, пока $|x| < 1$, выполняется неравенство $x > -1 + \frac{1}{3} b\rho^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, $x > -1$ на этом промежутке. При $s = \rho^{\frac{1}{4}}$ второе слагаемое правой части (15.28) оказывается весьма большим, значит, x оказывается больше единицы при некотором s из промежутка $\rho^{\frac{1}{4}} < s < 3\rho^{\frac{1}{4}}$.

Продифференцируем теперь (15.28) и исключим член с $e^{(t-\pi-\tau_1)/\rho}$ из равенств для x и $\dot{x}$; тогда получим

$$\rho\dot{x} = x - \rho b \sin t - b\cos t + (1-\rho^2)(1 - b + \gamma\rho^2)\, e^{(t-\pi-\tau_1)\,\rho}. \tag{15.32}$$

Пусть теперь при $t = t_1$ оказывается $x = 1$. Как было показано, $\rho^{\frac{1}{4}} < 3\pi - t_1 < 3\rho^{\frac{1}{4}}$. Следовательно, из (15.32) получаем

$$\rho\dot{x}_1 + b\cos t_1 = 2 - b + 2\pi(1-b)\rho + \gamma\varepsilon^{\frac{5}{4}}. \tag{15.33}$$

В частности $\dot{x}_1 > 0$. Поэтому для нахождения x воспользуемся формулой (15.11), в которой при определении A_1 и A_2 учтем (15.33). Получим

$$x = -\left(2 + \gamma\rho^{\frac{1}{2}}\right) e^{-(t-t_1)/\rho} + [(3-b) + \\ + 2\pi(1-b)\rho + \gamma\rho^{5/4}]\, e^{-(t-t_1)/\rho} - b\cos t \tag{15.34}$$

до тех пор, пока $x > 1$. Из этого равенства следует, что при $t_1 < t \leqslant 3\pi$ $x > 1$. Полагая в (15.34) $t = 3\pi$, получаем утверждение леммы.

Лемма 15.3. Все решения уравнения (15.3), *начинающиеся на нечетном базисном интервале* $t=\pi+\tau_1$ *и удовлетворяющие* (15.13), *удовлетворяют неравенству*

$$|\dot{x}(3\pi)|\leqslant\gamma\rho, \tag{15.35}$$

где γ *ограничено при малых* ε. *Для всех таких решений выполняются неравенства* $-1<x<3{,}1$ *при* $\pi+\tau<t<3\pi$. *На этих решениях* $\dot{x}>\frac{1}{2}b\rho$ *при* $\pi+\tau\leqslant t<\frac{5}{4}\pi$ *и* $x>-1+\frac{b}{10}\rho^{\frac{1}{2}}$ *при* $\frac{5}{4}\pi\leqslant t\leqslant 3\pi$. *Кроме того, каждое такое решение пересекает прямую* $x=1$ *при возрастании* t *лишь один раз на промежутке* $\pi+\tau<t<3\pi-\frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$, *и далее это решение остается выше прямой* $x=1$ *до* $t=3\pi$.

Доказательство. В рассматриваемом случае равенство (15.28) выполняется, если только q заменить некоторой большей величиной, а τ_1 заменить на τ. Следовательно, для рассматриваемых решений выполняется оценка (15.29), и потому $\ddot{x}>0$ при $\pi+\tau<t<\frac{5}{4}\pi$. Таким образом, $\dot{x}>\dot{x}_0>\frac{1}{2}b\rho$ в этом промежутке, и, следовательно, либо $x=1$ для некоторого t из этого промежутка, либо равенство (15.28) выполняется, если в нем q заменить на некоторую большую величину, а τ_1 на τ. В последнем случае $x(t)$ может оказаться меньше правой части равенства (15.28) разве лишь на величину порядка $\gamma\varepsilon^2$. Таким образом, $x=1-\gamma\varepsilon^2$ при некотором $t<3\pi-\rho^{1/4}$. Интегрируя дифференциальное уравнение (15.3) от $t_0=\pi+\tau$ до t так же, как при доказательстве леммы 15.1, найдем, что для $0{,}9<x\leqslant 1$ $\varepsilon\dot{x}>1$. Таким образом, при $t=t_1<3\pi-\frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$ окажется $x=1$. Так как $x(t)$ может оказаться меньше, чем решение, рассмотренное в лемме 15.2, лишь на величину $\gamma\varepsilon^2$, то, кроме того, получаем $x(t)>-1+\frac{1}{4}b\rho^{1/2}$ при $\frac{5}{4}\pi\leqslant t$ до тех пор, пока $x\leqslant 1$.

В каждом случае x достигает значения, равного единице; будем обозначать точку, в которой это случается впервые, индексом 1. Тогда $t_1 < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$. Если использовать равенство (15.32), выполняющееся в настоящих условиях, и положить $x = 1$, $t = t_1$, то получим

$$\rho\dot{x}_1 = 2 - b - b\cos t_1 + \gamma\rho. \qquad (15.36)$$

Отсюда и из формул (15.18) и (15.19) находим $-3 < A_1 < 0$ и $A_2 = 3 - b + \gamma\rho$. Согласно (15.11) при $x \geqslant 1$ будем иметь

$$x = A_1 e^{-(t-t_1)\rho} + A_2 e^{-(t-t_1)\rho} - b\cos t. \qquad (15.37)$$

Дифференцируя это по t, находим

$$\dot{x} = -\frac{A_1}{\rho} e^{-(t-t_1)/\rho} - \rho A_2 e^{-\rho(t-t_1)} + b\sin t.$$

Так как $t_1 < 3\pi - \frac{1}{2}\rho^{\frac{1}{4}}$, то ясно, что если $x \geqslant 1$ вплоть до $t = 3\pi$, то мы действительно имеем $\dot{x} = \gamma\rho$ при $t = 3\pi$.

Осталось показать, что $x > 1$ при $t_1 < t \leqslant 3\pi$. Предположим, напротив, что $x = 1$ при $t = t_2 \in (t_1, 3\pi]$. Проинтегрируем уравнение (15.3) от t_1 до t_2, тогда получим

$$\varepsilon\dot{x}_2 = \varepsilon\dot{x}_1 - \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} x\,dt + b\int_{t_1}^{t_2} \sin t\,dt. \qquad (15.38)$$

Из (15.37) следует, что $x < 3,1$. Используя (15.36), получаем в силу (15.38), что $\varepsilon\dot{x}_2 > 2 - 2b + \gamma\rho > 0$. Но это невозможно, так как при $t = t_2$ должно быть $\dot{x} \leqslant 0$.

Лемма доказана.

В пункте 2 уже отмечалось (но не было доказано), что решения нечетного базисного семейства для $t \geqslant 3\pi$ даются приблизительной формулой

$$x = (3 - b)e^{-(t-3\pi)\rho} - b\cos t.$$

Ясно, что это решение впервые достигает единицы при тех значениях t, при которых величина $(3 - b)e^{-(t-3\pi)\rho}$ близка к $1 + b$. Иными словами, это значение времени t зависит от величины

$$\frac{1}{\rho}\ln\frac{3-b}{1+b}.$$

Введем в рассмотрение целое число n, определяемое соотношением

$$\frac{1}{\rho}\ln\frac{3-b}{1+b}=(2n-1)\pi-\delta, \tag{15.39}$$

где $0\leqslant\delta<2\pi$. Так как ρ мало, то n велико. Более того, слегка изменяя b, можно добиться такого положения, чтобы δ лежало в пределах от 0 до $2\pi\frac{1-b}{3-b}$. В дальнейшем нам будет удобнее предполагать, что

$$\rho^{\frac{1}{10}}\leqslant\delta\leqslant 2\pi\frac{1-b}{3-b}-\rho^{\frac{1}{10}}. \tag{15.40}$$

Условие (15.40) дает те значения b, для которых образ базисного интервала включает в себя два базисных интервала, лежащих от исходного на расстоянии $(2n-1)\pi$ и $(2n+1)\pi$.

Так как мы предположили, что $0,1<b<0,9$, то можно выбрать b так, чтобы n имело значения, удовлетворяющие неравенствам

$$1+\frac{1}{2\pi\rho}\ln\frac{2,1}{1,9}<n<\frac{1}{2\pi\rho}\ln\frac{2,9}{1,1}. \tag{15.41}$$

Зададимся каким-нибудь n, удовлетворяющим неравенствам (15.41). Тогда существует такой сегмент $I_n(\rho)$, лежащий на промежутке $(0,1,\ 0,9)$, что если $b\in I_n(\rho)$, то выполняются соотношения (15.39) и (15.40).

Всюду в дальнейшем будем считать, что b принадлежит одному из сегментов $I_n(\rho)$.

Будем теперь рассматривать уравнение (15.6) с функцией $P(y)$, достаточно мало отличающейся от функции $\Phi(y)$. Определим для решений $y(t)$ этого уравнения более точно понятие непрерывного нечетного базисного семейства. Пусть θ — параметр и $\tau(\theta)$, $E(\theta)$ — две непрерывные функции от θ, заданные на промежутке $\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_1$, такие, что $\tau(\theta_0)=0$, $\tau(\theta_1)=\tau_1$, $0<\tau(\theta)<\tau_1$ при $\theta_0<\theta<\theta_1$ и $|E(\theta)|\leqslant e^{-\frac{10}{\rho}}$. Тогда непрерывное нечетное базисное семейство есть семейство решений уравнения (15.6) $y(t,\theta)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} y_0&=-1,\quad t_0=(2m+1)\pi+\tau(\theta),\\ \dot{y}_0&=\rho(1+b\cos\tau(\theta))-b\sin\tau(\theta)+E(\theta), \end{aligned} \tag{15.42}$$

где m есть целое число и $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$. Аналогично определяется непрерывное четное базисное семейство.

Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и целое n, удовлетворяющее неравенствам (15.41). Пусть $b \in I_n(\rho)$. Сформулируем теперь следующий фундаментальный результат относительно уравнения (15.6) с функцией $P(y)$, достаточно близкой к $\Phi(y)$ (постоянная Δ достаточно мала).

Лемма 15.4. Пусть $y(t, \theta)$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ — *непрерывное нечетное базисное семейство на нечетном базисном интервале* $t = \pi + \tau(\theta)$. *Тогда существуют два непересекающихся интервала* Θ_1 *и* Θ_2, *лежащие на* (θ_0, θ_1), *такие, что решения* $y(t, \theta)$, *начинающиеся на* Θ_1, *впервые пересекают* $y = 1$, $\dot{y} < 0$ *на четном базисном интервале* $t = 2n\pi + \tau$, $0 < \tau < \tau_1$ *и, сверх того, образуют непрерывное четное базисное семейство на этом интервале. Аналогично решения, начинающиеся на интервале* Θ_2, *образуют непрерывное четное базисное семейство на четном базисном интервале* $t = 2(n+1)\pi + \tau$, $0 < \tau < \tau_1$. *Точно так же непрерывное четное базисное семейство имеет два непересекающихся подсемейства, каждое из которых образует непрерывное нечетное базисное семейство на нечетных базисных интервалах, находящихся на расстояниях* $(2n-1)\pi$ *и* $(2n+1)\pi$ *от исходного.*

Доказательство. Пусть $y(t, \theta)$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ — непрерывное нечетное базисное семейство на нечетном базисном интервале $t = \pi + \tau$. Рассмотрим семейство решений уравнения (15.3) с теми же начальными данными, что и у $y(t, \theta)$. Выберем Δ в неравенстве (15.7) с таким расчетом, чтобы на промежутке времени $|t - \pi| \leqslant (2n+2)\pi$ решения $y(t, \theta)$ и $x(t, \theta)$ уравнений (15.6) и (15.3) соответственно различались бы достаточно мало. Положим

$$\Delta \leqslant e^{-\frac{11}{\rho} - \frac{(2n+3)\pi}{\varepsilon}}. \tag{15.43}$$

Тогда если $|x| \leqslant 5$ и $|y| \leqslant 5$, то в силу неравенства (15.7) будем иметь

$$|y(t) - x(t)| \leqslant e^{-\frac{11}{\rho}} \quad \text{при} \quad |t - \pi| \leqslant (2n+2)\pi. \tag{15.44}$$

Так как $\varepsilon\dot{y} = y_2 - P(y_1)$, $\varepsilon\dot{x} = x_2 - \Phi(x_1)$, то можем написать

$$\begin{aligned}\varepsilon|\dot{y} - \dot{x}| &\leqslant |y_2(t) - x_2(t)| + |P(y_1) - \Phi(x_1)| \leqslant \\ &\leqslant |y_2 - x_2| + |P(y_1) - \Phi(y_1)| + |\Phi(y_1) - \Phi(x_1)| \leqslant \\ &\leqslant |y_2 - x_2| + \Delta + |y_1 - x_1| \leqslant 2e^{-\frac{11}{\rho}}\end{aligned}$$

или

$$|\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| \leqslant \frac{1}{20} e^{-\frac{10}{\rho}} \quad \text{при} \quad |t - \pi| \leqslant (2n + 2)\pi. \tag{15.45}$$

Из леммы 15.3 следует, что $|x| < 3{,}1$ при $\pi + \tau \leqslant t \leqslant 3\pi$. Тогда в силу (15.44) на этом же промежутке выполняется неравенство $|y| < 4$. Также в силу леммы 15.3 и неравенств (15.44) и (15.45) имеем $y(t) > -1$ при $\pi + \tau < t < 3\pi$. Рассмотрим $x(t, \theta)$ при $t \geqslant 3\pi$. Полагая в равенстве (15.11) $t_0 = 3\pi$, получаем

$$x(t, \theta) = A_1 e^{-(t-3\pi)/\rho} + A_2 e^{-(t-3\pi)\rho} - b\cos t; \tag{15.46}$$

используя лемму 15.3, легко установим, что $|A_1| \leqslant \rho$.

Из вида системы (15.4) следует, что x_1 и x_2 суть непрерывные функции начальных данных, а тогда это же верно и для $x(t)$, $\dot{x}(t)$. В частности, $x(3\pi, \theta)$ и $\dot{x}(3\pi, \theta)$ непрерывно зависят от начальных данных на прямой $x = -1$ и, следовательно, являются непрерывными функциями θ. Таким образом, $A_2(\theta)$ есть непрерывная функция θ, а $A_1(\theta)$, как было только что показано, удовлетворяет неравенству $|A_1(\theta)| \leqslant \rho$.

Из соотношений (15.44) — (15.46) следует, что при $t > 7\pi$ выполняются соотношения

$$y(t, \theta) = A_2 e^{-\rho(t-3\pi)} - b\cos t + \frac{1}{10} G(\theta, t), \tag{15.47}$$

$$\dot{y}(t, \theta) = -\rho A_2 e^{-\rho(t-3\pi)} + b\sin t + \frac{1}{10} G(\theta, t), \tag{15.48}$$

где в обоих случаях $|G(\theta, t)| \leqslant e^{-\frac{10}{\rho}}$. Исключая из этих равенств A_2, получаем

$$\dot{y}(t, \theta) = -\rho y(t, \theta) - \rho b\cos t + b\sin t + \frac{1}{5} G(\theta, t). \tag{15.49}$$

Полагая в (15.19) $t_0 = 3\pi$, получаем в силу лемм 15.1—15.3:

$$A_2(\theta_0) \leqslant 3 - b - 2\pi(3-b)\rho + 2\rho^{\frac{6}{5}},$$
$$A_2(\theta_1) \geqslant 3 - b + 2\pi(1-b)\rho - 2\rho^{\frac{6}{5}}.$$

Положим $A_2(\theta) = 3 - b + r(\theta)$. Ясно, что функция $r(\theta)$ непрерывна при $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ и множество значений $r(\theta)$ при $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ содержит в себе сегмент

$$-2\pi(3-b)\rho + 2\rho^{\frac{6}{5}} \leqslant r \leqslant 2\pi(1-b)\rho - 2\rho^{\frac{6}{5}}. \qquad (15.50)$$

Положим в (15.47) $A_2 = 3 - b + r$, $t = 2n\pi + \sigma$ и используем обозначение (15.39), тогда получим

$$y(t, \theta) = (1+b)e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} + r(\theta)\frac{1+b}{3-b}e^{-\rho(\sigma+\delta-2\pi)} - b\cos\sigma + \frac{1}{10}G.$$

Ясно, что если выполнены неравенства (15.50), то при $\sigma < -10\pi$ $y > 1$. Для $|\sigma| \leqslant 10\pi$ получаем

$$y(t, \theta) = 1 + b - b\cos\sigma - \left[\rho(1+b)(\sigma+\delta-2\pi) - r(\theta)\frac{1+b}{3-b}\right] + \gamma\rho^2, \qquad (15.51)$$

где, как обычно, γ — величина, ограниченная при малых ρ.

Обозначим через $t(\theta)$ наименьшее после $t = 3\pi$ значение времени t, при котором оказывается $y(t, \theta) = 1$. Рассмотрим правую часть равенства (15.51) при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau_1$. Если $r = r_1 = -(3-b)\left(2\pi - \delta + \rho^{\frac{1}{2}}\right)\rho$, то эта правая часть меньше единицы. Это значит, что если $\theta = \theta_{10}$ есть корень уравнения $r(\theta) = r_1$, то $t(\theta_{10}) < 2n\pi$. Аналогично пусть $r = r_2 = -(3-b)\left(2\pi - \delta - \rho^{\frac{1}{2}}\right)\rho$ и $r(\theta_{20}) = r_2$, тогда $t(\theta_{20}) > 2n\pi + \tau_1$. Так как r_1 и r_2 лежат внутри сегмента (15.50), то θ_{10} и θ_{20} могут быть выбраны внутри промежутка $[\theta_0, \theta_1]$. Функция $r(\theta)$ непрерывна, и имеют место неравенства $r(\theta_1) > r(\theta_{20}) > r(\theta_{10}) > r(\theta_0)$, поэтому можно выбрать θ_{10} и θ_{20} так, что $\theta_{10} < \theta_{20}$ и $r_1 < r(\theta) < r_2$ при $\theta_{10} < \theta < \theta_{20}$.

Так как $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то в силу (15.51) имеем, что $y > 1$ при $\theta < -\frac{1}{4}\pi$. Таким образом, $t(\theta) > 2n\pi - \frac{1}{4}\pi$ при $\theta_{10} \leqslant \theta \leqslant \theta_{20}$. Так как $t(\theta_{10}) < 2n\pi$ и так как $\dot{y}(t(\theta), \theta) < -\frac{1}{4}b\rho$ при $2n\pi - \frac{1}{4}\pi \leqslant t(\theta) \leqslant 2n\pi + \tau_1 + \frac{1}{4}b\rho$ в силу (15.48), то ясно, что при возрастании θ $t(\theta)$ есть непрерывная функция до тех пор, пока $2n\pi - \frac{1}{4}\pi \leqslant t(\theta) \leqslant 2n\pi + \tau_1 + \frac{1}{4}b\rho$. Так как $t(\theta_{20}) > 2n\pi + \tau_1$, то существуют такие θ_{11} и θ_{12}, что $\theta_{10} < \theta_{11} < \theta_{12} < \theta_{20}$ и $t(\theta_{11}) = 2n\pi$, $t(\theta_{12}) = 2n\pi + \tau_1$ и $t(\theta_{11}) < t(\theta) < t(\theta_{12})$ при $\theta_{11} < \theta < \theta_{12}$. Таким образом, мы видим, что $(\theta_{11}, \theta_{12})$ есть интервал Θ_1, о котором говорится в утверждении леммы.

Совершенно аналогично, выбрав $r_3 = (3-b)\left(\delta - \rho^{\frac{1}{2}}\right)\rho$ и $r_4 = (3-b)\left(\delta + \rho^{\frac{1}{2}}\right)\rho$, докажем существование интервала Θ_2.

Для четных базисных семейств доказательство проводится аналогично.

Лемма доказана.

Замечание. Из соотношения (15.49) следует, что для четных базисных семейств, образованных из семейства $y(t, \theta)$ на интервалах $t = 2n\pi + \tau$ и $t = 2(n+1)\pi + \tau$, выполняется неравенство $|E| < \frac{1}{5}e^{-\frac{10}{\rho}}$.

Установим теперь существование семейства F.

Теорема 15.1. *Пусть дана последовательность* d_k, $-\infty < k < +\infty$, *где* d_k *есть или* $(2n-1)\pi$ *или* $(2n+1)\pi$, *тогда существует решение* $y(t)$ *уравнения* (15.6) *с точками пересечения, лежащими на базисных интервалах с соответствующими расстояниями, равными* d_k, $-\infty < k < +\infty$. *Это решение не имеет других точек пересечения.*

Доказательство. Рассмотрим подпоследовательность базисных интервалов с соответствующими расстояниями, равными d_k при $-N \leqslant k \leqslant +N$, где N — натуральное число. По лемме 15.4 всякое непрерывное базисное семейство, начинающееся на самом левом из этих базисных интервалов, имеет подсемейство, которое представляет собой непрерывное базисное семейство на следующем из выбранных базисных интервалов. Это семейство в свою очередь имеет подсемейство, представляющее собой непрерывное базисное семейство на следующем базисном интервале и т. д. Таким образом, на самом левом базисном интервале существует подсемейство, точки пересечения которого лежат на базисных интервалах с соответствующими расстояниями d_k, $-N \leqslant k \leqslant N$.

Рассмотрим теперь множество $S(N)$ всех решений уравнения (15.6), имеющих точки пересечения на каждом из выбранных базисных интервалов, $0 < \tau < \tau_1$ со взаимными расстояниями, равными d_k, $-N < k < +N$, и таких, что в каждой точке пересечения выполняется $|\dot{y} + \rho y + \rho b \cos t - b \sin t| < e^{-\frac{10}{\rho}}$, а между точками пересечения оказывается $|y| < 4$. Мы только что показали, что множество $S(N)$ не пусто.

Без ограничения общности можем считать, что $t = \pi + \tau$ есть один из выбранных нечетных базисных интервалов. Пусть $y(t)$ — решение из множества $S(N)$. Его нечетной точке пересечения с нечетным базисным интервалом $t = \pi + \tau$, $0 < \tau < \tau_1$, на плоскости τ, v соответствует некоторая точка $\tau = t - \pi$, $\dot{y}(\pi + \tau) = v$. Из непрерывности решений по начальным данным следует, что множество $S_1(N)$ таких точек, соответствующее множеству $S(N)$ решений, открыто. Кроме того, оно не пусто, как уже отмечалось. Рассмотрим теперь множество $S(N+M)$, где M — натуральное число и соответствующее ему множество $S_1(N+M)$ точек плоскости τ, v. Ясно, что $S_1(N+M) \subset S_1(M)$.

Из предыдущих рассуждений без труда получается и более точное включение $\bar{S}_1(N+M) \subset S_1(M)$ (как обычно, $\bar{S}_1$ обозначает замыкание множества S_1). Таким образом, существует непустое множество $S_1(\infty)$, такое, что $S_1(\infty) \subset S_1(N)$ при любом натуральном N. Ясно, что множество решений $S(\infty)$, отвечающее точечному множеству $S_1(\infty)$ плоскости τ, v, и есть требуемое теоремой 15.1.

Теорема доказана.

4. Как было показано в § 4 (см. теорему 4.1), система (15.4) диссипативна. Сейчас мы будем изучать структуру множества I этой системы. Одновременно будет показано, что система (15.5) имеет инвариантное множество такой же структуры, что и множество I системы (15.4) при

некоторых дополнительных условиях, налагаемых на функцию $P(x)$ в промежутке $|x| \leqslant 70$. Из дальнейших рассуждений будет следовать, что если $P(x)$ отличается от $\Phi(x)$ достаточно мало при всех x, то это инвариантное множество будет являться множеством I для системы (15.5).

Введем для уравнения (15.6) преобразование T плоскости y, $v (v = \dot{y})$ в себя по обычному правилу. Пусть p — точка y_0, $v_0 = \dot{y}_0$ этой плоскости, а $y(t, y_0, \dot{y}_0)$ — решение уравнения (15.6) с начальными данными $t = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0 = v_0$, тогда Tp есть точка плоскости y, v с координатами $y = y(2\pi, y_0, \dot{y}_0)$, $v = \dot{y}(2\pi, y_0, \dot{y}_0)$. Пусть $\tilde{T}$ — аналогичное преобразование для уравнения (15.3).

Нетрудно видеть, что уравнение (15.3) имеет 2π-периодическое решение $x = b \cos t$. Решения, близкие к этому периодическому при $t = 0$, задаются формулой

$$x = B_1 e^{t/\varrho} + B_2 e^{t\varrho} + b \cos t, \tag{15.52}$$

где B_1 и B_2 достаточно малы. Так как оба характеристических показателя положительны, то ясно, что решение $x = b \cos t$ асимптотически устойчиво при $t \to -\infty$.

Рассмотрим тождество

$$\frac{d}{dt}[(x - b\cos t)^2 + (u + b\sin t)^2] = \frac{2}{\varepsilon}(u + b\sin t)^2, \tag{15.53}$$

где $u(t) = \dot{x}(t)$.

Из этого тождества следует, что расстояние между произвольным решением уравнения (15.3) и периодическим решением $x = b\cos t$ возрастает с возрастанием времени до тех пор, пока $|x| < 1$. Пусть Γ — окружность плоскости x, u достаточно малого радиуса с центром в точке $x = b$, $u = 0$, а C_0 — открытый круг с границей Γ. Из (15.53) следует, что $\bar{C}_0 = C_0 + \Gamma \subset \tilde{T}C_0$.

Из теории возмущений периодических решений хорошо известно (см., например, монографию И. Г. Малкина [67]), что если $P(x) - \Phi(x)$ и $P'(x) - 1$ достаточно малы при $|x| < 0{,}95$, то уравнение (15.6) имеет периодическое решение, близкое к $y = b\cos t$. Это решение асимптотически устойчиво при $t \to -\infty$, и для него выполняется соотношение

$$\bar{C}_0 = C_0 + \Gamma \subset TC_0, \tag{15.54}$$

из которого следует

$$\overline{T^m C_0} \subset T^{m+1} C_0. \tag{15.55}$$

Рассмотрим множество

$$H = \sum_{m=0}^{\infty} T^m C_0. \tag{15.56}$$

Нетрудно видеть, что H есть односвязная область. Эта область представляет собой область асимптотической устойчивости при $t \to -\infty$ 2π-периодического решения уравнения (15.6), т. е. если $y_1(t)$ есть это периодическое решение и y_0, v_0 — точка плоскости y, v, то соотношение

$$\lim_{t \to -\infty} |y_1(t) - y(t, y_0, v_0)| = \lim_{t \to -\infty} |\dot{y}_1(t) - \dot{y}(t, y_0, v_0)| = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда точка (y_0, v_0) лежит в H.

В дальнейшем будем предполагать, что $|P'(x) - 1|$ достаточно мало при $|x| \leqslant 0{,}95$ и $|\Phi(x) - P(x)| < \Delta$ при $|x| \leqslant 70$, где Δ достаточно мало.

Для изучения множества I нам понадобятся следующие леммы относительно поведения решений уравнений (15.3) и (15.6).

Лемма 15.5. Пусть $x(t)$ — *решение уравнения* (15.3) *с начальными данными* t_0, x_0, $\dot{x}_0$, *подчиняющимися условиям*

$$|x_0| < 1, \quad |x_0 - b\cos t_0| + \rho|\dot{x}_0 + b\sin t_0| \geqslant h, \tag{15.57}$$

где $0 < h < 1$; *тогда существует такое* t

$$t_0 < t < t_0 + \frac{2}{\rho} \ln \frac{32}{h}, \tag{15.58}$$

что $|x(t)| > 1$.

Доказательство. Так как $|x(t)| < 1$, то

$$x = B_1 e^{(t-t_0)/\rho} + B_2 e^{(t-t_0)\rho} + b\cos t, \tag{15.59}$$

где

$$B_1 + B_2 = x_0 - b\cos t_0, \quad \frac{1}{\rho} B_1 + \rho B_2 = \dot{x}_0 + b\sin t_0, \tag{15.60}$$

как следует из начальных условий.

Таким образом,

$$|B_1|+|B_2|\geqslant|x_0-b\cos t_0|,\qquad |B_1|+|B_2|>\rho|\dot{x}_0+b\sin t_0|,$$

отсюда получаем

$$|B_1|+|B_2|\geqslant\frac{1}{2}(|x_0-b\cos t_0|+\rho|\dot{x}_0+b\sin t_0|)\geqslant\frac{1}{2}h. \tag{15.61}$$

Введем обозначение $s=\frac{1}{\rho}\ln\frac{32}{h}$ и предположим, вопреки утверждению леммы, что $|x|\leqslant 1$ при $0\leqslant t-t_0\leqslant 2s$. Тогда из равенства (15.59), в котором мы последовательно положим $t=0$, $t=s$, $t=2s$, получим

$$|B_1+B_2|\leqslant 1+b,\qquad |B_1e^{s/\rho}+B_2e^{s\rho}|\leqslant 1+b,$$
$$|B_1e^{2s/\rho}+B_2e^{2s\rho}|\leqslant 1+b. \tag{15.62}$$

Из первых двух неравенств (15.62) получаем

$$|B_1|(e^{s/\rho}-e^{s\rho})\leqslant(1+b)+|B_1+B_2|e^{s\rho}\leqslant(1+b)(1+e^{s\rho}).$$

Из определения s следует $|B_1|<\frac{1}{4}h$, а тогда из (15.61) и (15.62) получаем

$$\frac{1}{4}h<|B_2|<1+b+|B_1|<\frac{9}{4}. \tag{15.63}$$

Воспользуемся теперь третьим неравенством (15.62):

$$|B_1|e^{s/\rho}\leqslant(1+b+|B_2|e^{2s\rho})e^{-s/\rho}\leqslant\frac{9}{4}e^{-s/\rho+2s\rho},$$

отсюда получаем

$$|B_1e^{s/\rho}+B_2e^{s\rho}|\geqslant|B_2|e^{s\rho}-|B_1|e^{s/\rho}\geqslant\frac{1}{4}he^{s\rho}-$$
$$-\frac{9}{4}e^{-s/\rho+2s\rho}\geqslant\frac{1}{8}he^{s\rho}\geqslant 4>1+b,$$

что противоречит (15.62). Противоречие доказывает лемму.

Лемма 15.6. *Пусть выполняются неравенства* (15.57) *и*

$$|x_0|+\rho|\dot{x}_0|<20, \tag{15.64}$$

тогда существует такое $t=t_1$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$t_0\leqslant t_1<t_0+5\pi+\frac{2}{\rho}\ln\frac{32}{h}+\frac{5}{(1-b)\varepsilon}, \tag{15.65}$$

что выполняется одно из двух: либо

$$|t_1 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)| < 10\rho^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = 1, \; -10\rho^{\frac{1}{2}} < \dot{x}_1 \leqslant 0,$$

либо

$$|t_1 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) - \pi| < 10\rho^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = -1, \quad 0 \leqslant \dot{x}_1 < 10\rho^{\frac{1}{2}}.$$

При этом $|x(t)| \leqslant 60$, *если* $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Доказательство. Предположим сначала, что $|x_0| > 1$, или $x_0 = 1$ и $\dot{x}_0 > 0$, или $x_0 = -1$ и $\dot{x}_0 < 0$, тогда решение уравнения (15.3) записывается в виде

$$x = A_1 e^{-(t-t_0)/\rho} + A_2 e^{-(t-t_0)\rho} - b\cos t, \tag{15.66}$$

где из условий для начальных данных следует $|A_i| < 22$ $(i = 1, 2)$. Предположим еще, что при $0 < t - t_0 < 4\pi$ $|x| > 1$, тогда при $t > t_0 + \pi$ до тех пор, пока $|x| \geqslant 1$, будем иметь

$$|x - A_2 e^{-(t-t_0)\rho} + b\cos t| < e^{-2/\rho}$$

и, исключая A_2 из равенства (15.66) и его производной, получаем

$$|\dot{x} + \rho(x + b\cos t) - b\sin t| < \gamma e^{-2/\rho} \quad \text{при} \quad t > t_0 + \pi.$$

Из этих неравенств и вытекает существование такого $t_1 < t_0 + \frac{5}{\rho}$, что выполняются утверждения леммы. Пусть теперь при некотором $t = t_2$, $t_0 < t_2 < t_0 + 4\pi$ оказывается $|x| = 1$. Тогда нетрудно убедиться, что при $t = t_2$ окажется либо $x_2 = -1$, $0 \leqslant \dot{x}_2 < \frac{28}{\rho}$, либо $x_2 = 1$, $-\frac{28}{\rho} < \dot{x}_2 \leqslant 0$.

Если $x_0 = -1$, $\dot{x}_0 \geqslant 0$, то из неравенства (15.64) следует, что $\dot{x}_0 < \frac{20}{\rho}$, и аналогично, если $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 \leqslant 0$, то $-\frac{20}{\rho} < \dot{x}_0$.

Пусть, наконец, $|x_0| < 1$, тогда в силу предыдущей леммы будем иметь $|x| = 1$ впервые при $t = t_3 < t_0 + \frac{2}{\rho}\ln\frac{32}{h}$. Если $t_3 \leqslant t_0 + 1$, то, интегрируя (15.3), найдем $|\dot{x}_3| < \frac{25}{\rho}$. Если же $t_3 > t_0 + 1$, тогда воспользуемся равенством (15.59) и убедимся, что если $|B_1 e^{(t_3-t_0)/\rho}| > 10$, то

$$|B_2 e^{(t_3-t_0)\rho}| > 2 + \frac{1}{2}|B_1 e^{(t_3-t_0)/\rho}|,$$

так как $|x_3| = 1$. При $t = t_3 - \frac{1}{2}$ будем иметь

$$|x| > |B_2 e^{(t_3-t_0)\rho}| e^{-\frac{1}{2}\rho} - |B_1 e^{(t_3-t_0)/\rho}| e^{-\frac{1}{2\rho}} - b > 2e^{-\frac{\rho}{2}} - b > 1,$$

что невозможно. Таким образом, $|B_1 e^{(t_3-t_0)/\rho}| < 10$. Отсюда легко получаем $|\dot{x}_3| < \frac{11}{\rho}$. Если при $t_3 \leqslant t \leqslant t_3 + 4\pi$ $|x| \geqslant 1$, то так же, как и в начале доказательства, покажем, что выполняется утверждение леммы. Если же существует такое t_2, $t_3 \leqslant t_2 \leqslant t_3 + 4\pi$, что при $t = t_2$ $|x| = 1$, то опять окажется одно из двух: либо $x_2 = -1$, $0 \leqslant \dot{x}_2 < \frac{28}{\rho}$, либо $x_2 = -1$, $-\frac{28}{\rho} < \dot{x}_2 \leqslant 0$.

Таким образом, для доказательства леммы нам осталось рассмотреть случай, когда существует t_2, $t_0 < t_2 < t_0 + 4\pi + \frac{2}{\rho}\ln\frac{32}{h}$, такое, что $x_2 = -1$, $0 \leqslant \dot{x}_2 < \frac{28}{\rho}$ (случай $x_2 = 1$ исчерпывается аналогично).

Интегрируя уравнение (15.3), получаем

$$\varepsilon\dot{x} + \Phi(x) + b\cos t = \\ = \varepsilon\dot{x}_2 + \Phi(x_2) + b\cos t_2 - \varepsilon\int_{t_2}^{t} x\,dt. \qquad (15.67)$$

Это равенство доказывает, что из двух неравенств $x > -3$ и

$$x < -\frac{1-b}{2} + b\cos t \qquad (15.68)$$

первым нарушается неравенство (15.68). Действительно, при $x \leqslant -3$ до тех пор, пока выполнено (15.68), оказывается $\dot{x} > 0$. Следовательно, $x > -3$ до тех пор, пока выполняется (15.68). Кроме того, при $t > t_2 + 1$ до тех пор, пока имеет место (15.68), $\varepsilon\dot{x} < 7$. В самом деле, если бы при $t = t_6$ оказалось $\varepsilon\dot{x} \geqslant 7$, то из (15.67), поскольку $-3 \leqslant x \leqslant 1$, следовало бы $\varepsilon\dot{x} > 2$ при $t_6 - 1 \leqslant t \leqslant t_6$. Но тогда неравенство (15.68) не могло бы выполняться при $t=t_6$. Итак, $\varepsilon\dot{x}<7$.

Используя (15.67) на промежутке выполнения неравенства (15.68), получаем

$$\varepsilon\dot{x}>-2b+\frac{\varepsilon}{2}(1-b)\int_{t_2}^{t}dt-2\varepsilon b. \tag{15.69}$$

Следовательно, если $t>t_2+\frac{5}{(1-b)\varepsilon}$, то неравенство (15.68) оказывается невыполненным. Предположим, что (15.68) впервые нарушается при $t=t_4$, и $t_3<t_4$ — последнее перед $t=t_4$ значение t, при котором оказывается $x=-1$. Тогда либо $\varepsilon\dot{x}_3<7$, либо $t_3<t_2+1$; в этом втором случае из (15.67) следует неравенство $\varepsilon\dot{x}_3<29$. В обоих этих случаях при $t=t_3$, в силу $x_3=-1$, имеем

$$x=B_1\left(e^{(t-t_3)/\rho}-e^{(t-t_3)\rho}\right)-(1+b\cos t_3)e^{(t-t_3)\rho}+b\cos t. \tag{15.70}$$

Из равенства (15.20) следует, что $|B_1|<30$. При $t=t_4$ имеем $x_4=-\frac{1-b}{2}+b\cos t_4$ и, следовательно, в силу (15.70)

$$-\frac{1-b}{2}\leqslant B_1\left(e^{(t_4-t_3)/\rho}-e^{(t_4-t)\rho}\right)-(1-b)$$

или,

$$\frac{1-b}{2}<B_1e^{(t_4-t_3)/\rho}.$$

Дифференцируя равенство (15.70) и используя последнее неравенство, получаем

$$\dot{x}<\frac{1-b}{4\rho}-1.$$

Таким образом, при некотором $t_5<t_4+\frac{10\rho}{1-b}$ $x_5=1$, $\dot{x}_5>0$. Из (15.70), благодаря $|B_1|<30$, следует, что $\dot{x}_5<\frac{31}{\rho}$, а отсюда и из (15.11) вытекает, что $|x(t)|<60$ до тех пор, пока $x>1$. Из интегрального соотношения (15.67), взятого в пределах от t_3 до t_5, и из неравенства (15.68), справедливого при $t_3 < t < t_4$, получаем, так как $t_4 > t_5 - \frac{10\rho}{1-b}$,

$$b\cos t_5 + \varepsilon \dot{x}_5 > 2 - b - 3b\varepsilon. \tag{15.71}$$

Используя это в интегральной форме уравнения (15.3), найдем, что $x(t) > 1$ при $t_5 < t < t_5 + 4\pi$. А тогда, так же как и в начале доказательства, установим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 15.7. Пусть $x(t)$ — *решение уравнения* (15.3) *такое, что при* $t = t_1$ $x_1 = -1$, $0 \leqslant \dot{x}_1 < 10\rho^{\frac{1}{2}}$ *и* $|t_1 (\mathrm{mod}\, 2\pi) - \pi| < 10\rho^{\frac{1}{2}}$. *Тогда существует такое* t_2, $t_1 < t_2 < t_1 + 2\pi + \varepsilon^{\frac{1}{4}}$, *что* $x_2 = 1$, $-3 < x < 1$ *при* $t_1 < t < t_2$. *От* $x_2 = 1$ x *быстро возрастает до максимума, близкого к трем. При* $t > t_2$ *имеем*

$$x = Ae^{-(t-t_2)\rho} - b\cos t + E(\rho, t) \tag{15.72}$$

до тех пор, пока $x > 1$ $\Big($*это неравенство будет выполняться на промежутке времени, длина которого имеет порядок* $\frac{1}{\rho}\ln\frac{3-b}{1-b}\Big)$. *При этом*

$$|A - (3-b)| < \gamma\varepsilon, \quad |E(\rho, t)| + \left|\frac{d}{dt}E(\rho, t)\right| < \frac{5}{\rho}e^{-\frac{t-t_2}{\rho}}, \tag{15.73}$$

где, как обычно, γ — *величина, ограниченная при малых* ε. *На промежутке* $t_1 < t < t_2$ $|x| < 3$ *и* $\varepsilon|\dot{x}| < 4$.

Доказательство. Не нарушая общности, можем считать, что $|t_1 - \pi| < 10\rho^{\frac{1}{2}}$. Будем предполагать, что (15.68) выполняется при $t_1 < t < t_3 = 3\pi - \rho^{\frac{2}{3}}$. Кроме того, будем считать, что $x < -1$ при $t = t_3$. Интегрируя уравнение (15.3), получаем тогда

$$\varepsilon\dot{x}_3 + x_3 + b\cos t_3 \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon\dot{x}_1 - 1 - b - \varepsilon\int_{t_1}^{t_3} x\,dt \geqslant -1 - b + \frac{1}{2}(1-b)\pi\varepsilon. \tag{15.74}$$

Как было показано выше, из неравенства (15.68) следует, что $x_3 > -3$. Из (15.74) тогда вытекает, что

$$x = A_1 e^{-\frac{t-t_3}{\rho}} + A_2 e^{-(t-t_3)\rho} - b\cos t, \tag{15.75}$$

где $|A_1| < 4$ и $A_2 > -1 - b + \frac{1}{4}(1-b)\pi\varepsilon$. Следовательно, при $t = 3\pi$ формула (15.75) дает $x > -1$. Это означает, что существует такое t_4, $t_3 < t_4 < 3\pi$, что при $t = t_4$ $x_4 = -1$. А тогда из (15.75) получаем

$$1 > \varepsilon \dot{x}_4 > \frac{(1-b)\pi\varepsilon}{2} > 0.$$

Отсюда и из равенств (15.20) и (15.21) находим

$$B_1 > \frac{1-b}{3}\pi\varepsilon, \quad |B_2| < 2.$$

Дифференцируя два раза равенство

$$x = B_1 e^{\frac{t-t_4}{\rho}} + B_2 e^{(t-t_4)\rho} + b\cos t,$$

получаем

$$\ddot{x} = \frac{B_1}{\rho^2} e^{\frac{t-t_4}{\rho}} + B_2\rho^2 e^{(t-t_4)\rho} - b\cos t \geqslant \frac{1-b}{4\varepsilon}\pi$$

до тех пор, пока $t > t_4$ и $|x| \leqslant 1$. Так как $\dot{x}_4 > 0$, то при $t > t_4$ имеем

$$\dot{x} > \dot{x}_4 + \frac{(1-b)\pi}{4\varepsilon}(t-t_4) > \frac{(1-b)\pi}{4\varepsilon}(t-t_4).$$

Следовательно, существует $t_5 < t_4 + \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ такое, что при $t = t_5$ $x_5 = 1$, $\dot{x}_5 > 0$.

Если (15.68) выполняется, то при $-1 \leqslant x_3$, интегрируя (15.3), получаем

$$\varepsilon \dot{x}_3 > \frac{(1-b)\pi\varepsilon}{20}$$

и, рассуждая так же, как и выше, найдем, что существует $t_5 < t_3 + \varepsilon^{\frac{1}{3}}$ такое, что $x_5 = 1$, $\dot{x}_5 > 0$.

Предположим теперь, что (15.68) нарушается впервые при $t = t_4$, $t_1 < t_4 < t_3$. В этом случае точно так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, получим, что при некотором $t < t_4 + \frac{10\rho}{1-b}$ выполняются соотношения $x = 1$, $\dot{x} > 0$. Таким образом, всегда существует такое $t < t_1 + 2\pi + \varepsilon^{\frac{1}{3}}$, что при этом t $x = 1$, $\dot{x} > 0$.

Обозначим через t_2 первый после t_1 момент времени, при котором $x = 1$. Тогда $t_2 < t_1 + 2\pi + \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Интегрируя (15.3), получаем

$$\varepsilon\dot{x}_2 - 1 + b\cos t_2 = \varepsilon\dot{x}_1 + 1 + b\cos t_1 - \varepsilon\int_{t_1}^{t_2} x\,dt. \tag{15.76}$$

Так как $x > -3$ до тех пор, пока выполняется (15.68), и так как x возрастает до единицы, когда (15.68) нарушается, то ясно, что $x > -3$. Таким образом, из (15.76) получаем

$$|\varepsilon\dot{x}_2 + b\cos t_2 + b - 2| < 200\varepsilon. \tag{15.77}$$

Найдя A_1 и A_2 по формулам (15.18) и (15.19), мы и получим (15.72) и (15.73). Из интегральной формы уравнения (15.3) и из равенства (15.72) следует, что при возрастании t от t_2 x быстро возрастает до своего максимума, равного приблизительно трем. Было уже показано, что при $t_1 < t < t_2$ $|x| < 3$. Отсюда и из интегральной формы уравнения (15.3) следует, что $\varepsilon|\dot{x}| < 4$.

Лемма доказана.

Две последние леммы позволяют доказать следующее важное утверждение.

Лемма 15.8. *Каждое решение уравнения* (15.6), *удовлетворяющее при* $t = t_0$ *условиям*

$$|y_0| + \rho|\dot{y}_0| \leqslant 20, \tag{15.78}$$

$$(y_0 - b\cos t_0)^2 + (\dot{y}_0 + b\sin t_0)^2 \geqslant \alpha^2, \tag{15.79}$$

где α *— достаточно малая постоянная, подчиняется неравенству* $|y(t)| \leqslant 70$ *при* $t \geqslant t_0$. *Кроме того, существует такое* L, *зависящее от* ε *и* α, *что при* $t \geqslant t_0 + L$

$$|y(t)| < 3{,}2, \quad |\dot{y}(t)| < \frac{5}{\varepsilon}. \tag{15.80}$$

Если при $t=t_M$ имеем максимум, то при $t>t_M>t_0+L$

$$y=(3-b)e^{-\rho(t-t_M)}-b\cos t+\gamma\rho$$

до тех пор, пока $y>1$. После того как y достигнет значения, равного единице, $y(t)$ за промежуток времени, длина которого не превышает 7π, достигнет при $t=t_m$ минимума, близкого к -3. При $t>t_m$

$$y=-(3-b)e^{-\rho(t-t_m)}-b\cos t+\gamma\rho$$

до тех пор, пока y не достигнет значения, равного -1. Затем за промежуток времени, длина которого не превышает 7π, y достигнет максимума, близкого к 3 и т. д.

Доказательство. Выберем сначала достаточно малое ε так, чтобы выполнялись утверждения предыдущих лемм. Выберем затем h настолько малым, чтобы из (15.79) следовало (15.57). Положим $L=9\pi+\frac{2}{\rho}\ln\frac{32}{h}+\frac{5}{(1-b)\varepsilon}$. Возьмем, далее, Δ столь малым, чтобы для всяких решений $x(t)$ и $y(t)$ с одинаковыми начальными данными, удовлетворяющими неравенствам (15.57) и (15.64), имело место соотношение

$$|x(t)-y(t)|+|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)|<\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad 0\leqslant t-t_0\leqslant L.$$

Тогда из лемм 15.6 и 15.7 следует, что при $t_3=t_1+4\pi$ (где t_1 — точка, существование которой доказано в лемме 15.6) выполняются неравенства

$$|y(t_3)-3|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad |\dot{y}(t_3)|<20\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

или неравенства, в которых 3 заменяется на -3. Решение $x(t)$ уравнения (15.3), удовлетворяющее тем же начальным данным, что и $y(t)$ при $t=t_3$, задается формулой (15.11) и, как было показано при доказательстве леммы 15.6, пересекает прямую $x=1$ при $t=t_4$, $|t_4(\mathrm{mod}\,2\pi)|<10\rho^{\frac{1}{2}}$, $0\geqslant\dot{x}>-10\rho^{\frac{1}{2}}$. В силу леммы 15.7 при $t=t_5=t_4+4\pi$ имеют место неравенства $|y(t_5)+3|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $|\dot{y}(t_5)|<20\varepsilon^{\frac{1}{2}}$

и, кроме того, $\left| t_4 - t_3 - \frac{1}{\rho} \ln \frac{3-b}{1+b} \right| < 10\pi$. Таким образом, $t_5 - t_3 < L$, и на этом промежутке $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ близки к $x(t)$ и $\dot{x}(t)$. При $t = t_5$ мы находимся в тех же самых условиях, что и при $t = t_3$, и, следовательно, таким же образом докажем, что существует t_7, при котором $y(t)$ близок к 3 и т. д.

При некотором t, $t_4 < t < t_5$, $y(t)$ достигает минимума, близкого к -3; между t_6 и t_7 достигает максимума и т. д. Так как при $t < t_4 - 3\pi$ $x(t) > 1 + \varepsilon$, то $y(t) > 1$, следовательно, $y(t)$ пересекает прямую $y = 1$ при $t \in (t_4 - 3\pi, t_4 + 3\pi)$. Неравенства (15.80) следуют из неравенств, установленных для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, и из того, что $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ весьма близки к $x(t)$ и $\dot{x}(t)$.

Лемма доказана.

Замечание. Из результатов § 8 и из предыдущих рассуждений следует, что для любого решения уравнения (15.3) при достаточно больших значениях t выполняется неравенство

$$|x| + \rho |\dot{x}| \leqslant 20. \tag{15.81}$$

Поэтому для любого решения уравнения (15.3) при достаточно больших t справедливы утверждения последней леммы.

Обозначим через $C^{(0)}$ область

$$|y| + \rho |v| < 20$$

плоскости y, v (где, как и раньше, $\dot{y} = v$). Тогда в силу леммы 15.8 существует такое целое число N, что $\overline{T^k C^{(0)}} \subset C^{(0)}$ при $k \geqslant N$.

Введем в рассмотрение множество

$$J = \prod_{k=0}^{\infty} T^{kN} C^{(0)}.$$

Из определения J следует, что $T^N J = J$. Так же, как и при доказательстве инвариантности множества I диссипативной системы (см. § 2, п. 3), устанавливается, что множество J инвариантно относительно преобразования T, т. е.

$$TJ = J.$$

Из сделанного замечания следует, что если речь идет об уравнении (15.3), то множество J совпадает с множеством I этого уравнения как D-системы.

Покажем, что множество H (см. соотношение (15.56)) принадлежит J. Действительно, $C_0 \subset C^{(0)}$; следовательно, $T^{kN}C_0 \subset T^{kN}C^{(0)}$ (при любом натуральном k). Из определения H следует равенство $H = \sum_{k=1}^{\infty} T^{kN}C_0$. Отсюда и вытекает соотношение $H \subset J$.

Рассмотрим множество $K = J - H$. Из определения H следует, что $TH = H$, а тогда $TK = K$. Докажем, что множество K имеет нулевую площадь. Нетрудно видеть, что кольцевая область Λ, ограниченная окружностью Γ (граница круга C_0) и кривой $|y| + \rho|v| = 20$ (граница области $C^{(0)}$), содержит в себе множество K. Покажем, что площадь области $T^k\Lambda$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Так как множество K инвариантно, то отсюда и будет следовать, что площадь K равна нулю. Пусть $y = y(t, y_0, v_0)$ — решение уравнения (15.6) с начальными данными $t = 0$, $y = y_0$, $\dot{y} = v_0$. Введем в рассмотрение якобиан

$$W = \frac{D(y, v)}{D(y_0, v_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial y_0}, & \dfrac{\partial y}{\partial v_0} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_0}, & \dfrac{\partial v}{\partial v_0} \end{vmatrix}.$$

Из дифференциального уравнения (15.6) находим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} P'(y) W$$

или

$$W(t) = W(0)\, e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t P'(y)\,dt}.$$

По лемме 15.8 для каждого решения, лежащего при $t = 0$ в области Λ, на достаточно длинном промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ $|y(t)| > 1{,}1$ на множестве точек t с общей мерой, превышающей $\frac{2}{3}$ длины промежутка $(0, t_1)$. Выберем $P(y)$ с таким расчетом, чтобы $P'(y) > 0{,}9$ при $|y| > 1{,}1$

и $P'(y) > -1,1$ при $|y| < 1,1$. Тогда, очевидно, окажется, что $W(t) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно для всех решений, начинающихся в области Λ при $t = 0$. Отсюда и следует, что площадь области $T^k\Lambda$ стремится к нулю при $k \to \infty$.

Из приведенных рассуждений следует также, что инвариантное множество Ω, состоящее из решений, проходящих при $t = 0$ через множество K, асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, и все решения, начинающиеся при $t = 0$ в области Λ, стремятся к Ω при $t \to \infty$. Заметим, кроме того, что у уравнения (15.3) вообще все решения, за исключением гармоники, $x = b\cos t$ стремятся к Ω при $t \to +\infty$.

5. Покажем теперь, что если b удовлетворяет соотношениям (15.39), (15.40), то уравнение (15.6) имеет две системы асимптотически устойчивых субгармоник порядка $2n-1$ и $2n+1$.

Положим

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(1+b)(3-b)}{2b}\delta\rho}. \tag{15.82}$$

Рассмотрим решения уравнения (15.3) с начальными данными t_0, x_0, $\dot{x}_0$, удовлетворяющими условиям $x_0 = -1$,

$$|t_0 - \pi + \sigma_1| \leqslant \rho^{\frac{3}{5}}, \quad |\dot{x}_0 - \rho + b\rho\cos t_0 - b\sin t_0| \leqslant e^{-\frac{10}{\rho}}. \tag{15.83}$$

Обозначим область (15.83) плоскости $x = -1$ через D_0. Используя формулы (15.11) и (15.12), установим, что при $t \geqslant \pi$ и до тех пор, пока $x \geqslant 1$,

$$x = A_1 e^{-(t-\pi)/\rho} + A_2 e^{-(t-\pi)\rho} - b\cos t, \tag{15.84}$$

где

$$|A_1| < 1, \quad A_2 = 3 - b + \frac{1}{2}b\sigma_1^2 + \gamma\varepsilon^{\frac{3}{2}}. \tag{15.85}$$

Положим $t = 2n\pi - s$, тогда из (15.84), (15.85) и (15.40) найдем

$$x = 1 + b + (1+b)\rho(s-\delta) + \frac{b}{2}\frac{1+b}{3-b}\sigma_1^2 - b\cos s + \gamma\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

После элементарных подсчетов находим, что $x = 1$ при

$$|s - \sigma_1| < \left[\frac{1+b}{3-b} + \rho^{\frac{1}{10}}\right]\rho^{\frac{3}{5}} < \frac{19}{20}\rho^{\frac{3}{5}}.$$

Обозначим момент первого пересечения решения x с прямой $x=1$ через t_1, $\dot{x}(t_1)=\dot{x}_1$, тогда из последнего неравенства и из равенства (15.17) получаем

$$|t_1-2n\pi+\sigma_1|<\frac{19}{20}\rho^{\frac{3}{5}}, \quad |\dot{x}_1+\rho+\rho b\cos t_1-b\sin t_1|<\frac{1}{2}e^{-\frac{10}{\rho}}. \tag{15.86}$$

Обозначим область (15.86) плоскости $x=1$ через D_1. Образуем область D_2 следующим образом: пусть точка t, $\dot{x}$ лежит в D_1, тогда точка $t-(2n-1)\pi$, $-\dot{x}$ лежит в D_2, и обратно. Нетрудно видеть, что $\overline{D}_2\subset D_0$. Как было только что показано, любое решение, начинающееся в области D_0, пересекает область D_1. Это приводит нас к непрерывному преобразованию области D_0 в D_1. Поставим теперь в соответствие точки области D_2 точкам области D_1 указанным выше способом. В итоге получим преобразование области D_0 в область D_2. Так как $\overline{D}_2\subset D_0$, то по теореме Брауэра существует неподвижная точка. Это означает, что существует решение $x=g(t)$, такое, что $g(t_0)=-1$, $g(t_0+(2n-1)\pi)=1$ и $\dot{g}(t_0)=-\dot{g}(t_0+(2n-1)\pi)$. Отсюда и из вида уравнения (15.3) следует, что

$$g(t+(2n-1)\pi)=-g(t). \tag{15.87}$$

Следовательно, решение $x=g(t)$ уравнения (15.3) имеет период $2(2n-1)\pi$. Таким образом, система (15.4) имеет $2(2n-1)\pi$-периодическое решение.

Исследуем его устойчивость. Составим уравнение в вариациях, соответствующее этому решению:

$$\varepsilon\frac{d\xi_1}{dt}=\xi_2-\varphi(g(t))\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt}=-\varepsilon\xi_1. \tag{15.88}$$

Так как $\varphi(x)$ — четная функция, то из (15.87) вытекает, что $\varphi(g(t))$ имеет период $(2n-1)\pi$. Оценим корни характеристического уравнения системы (15.88), соответствующего периоду $(2n-1)\pi$. Будет показано, что оба эти корня меньше единицы по модулю и, следовательно, периодическое решение системы (15.4) асимптотически устойчиво. Из теории возмущений периодических систем тогда будет следовать, что и система (15.5) при соответствующем выборе функции $P(y)$ будет иметь асимптотически устойчивое решение с периодом $2(2n-1)\pi$.

Пусть t_0 удовлетворяет первому из неравенств (15.83) и таково, что $g(t_0)=-1$. Пусть, далее, t_1 — первый после $t=t_0$ момент, при котором оказывается $g(t_1)=1$. Из формулы (15.12) следует, что тогда $t_1-t_0<\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Положим $t_2=t_0+(2n-1)\pi$, тогда $g(t)>1$ при $t_1<t<t_2$. Обозначим через $\xi_{11}(t)$, $\xi_{21}(t)$ решение системы (15.88) с начальными данными $t=t_0$, $\xi_1=1$, $\xi_2=0$, а через $\xi_{12}(t)$, $\xi_{22}(t)$ — решение этой системы с начальными данными $t=t_0$, $\xi_1=0$, $\xi_2=1$. Рассмотрим определитель Вронского

$$W(t)=\begin{vmatrix} \xi_{11}(t), & \xi_{12}(t) \\ \xi_{21}(t), & \xi_{22}(t) \end{vmatrix}.$$

По формуле Лиувилля получаем

$$W(t_2)=e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t_2}\varphi(g(t))\,dt}\leqslant e^{\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{(2n-1)\pi}{\varepsilon}}<e^{-\frac{10}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $|\lambda_1\lambda_2|=W(t_2)<e^{-\frac{10}{\varepsilon}}$.

Сумма корней характеристического уравнения равна $\xi_{11}(t_2)+\xi_{22}(t_2)$. Из формулы (15.12) следует, что

$$e^{(t_1-t_0)/\rho}\sim\frac{1}{b\varepsilon\sigma_1}\quad\text{при малых } \varepsilon \tag{15.89}$$

и

$$e^{-\rho(t_2-t_1)}\sim\frac{1+b}{3-b}\quad\text{при малых } \varepsilon. \tag{15.90}$$

Так как $\varphi(g(t))=-1$ при $t_0<t<t_1$ и $\varphi(g(t))=1$ при $t_1<t<t_2$, то мы можем решить систему (15.88) точно. Воспользовавшись оценками (15.89) и (15.90), мы установим, что при достаточно малых ε $\xi_{11}(t_2)+\xi_{22}(t_2)$ сколь угодно близко к $\frac{1+b}{3-b}$. Отсюда следует, что один из корней характеристического уравнения λ_1 весьма мал, а другой близок к $\frac{1+b}{3-b}<1$. Это и значит, что оба корня характеристического уравнения по модулю меньше единицы.

Существование и асимптотическая устойчивость второй системы субгармоник устанавливаются точно так же, только величину σ_1 следует заменить величиной

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(1+b)(3-b)(\delta+2\pi)}{2b}\rho}.$$

Отметим еще один интересный факт. Как внутри области H, так и за пределами области J существуют точки, через которые проходят решения, стремящиеся к устойчивым периодическим решениям системы (15.5). Мы докажем это для системы (15.4). Если выбрать Δ достаточно малым, то ясно, что это будет справедливо также и для системы (15.5).

Рассмотрим решение уравнения (15.3)

$$x = (4+b-c\rho)e^{-\rho t} - b\cos t, \qquad |c| < 10.$$

Это решение при $t=0$ лежит за пределами J, так как $x(0) > 3{,}5$. Выбором надлежащего c, $|c| < 10$, нетрудно добиться того, чтобы решение $x(t)$ пересекало прямую $x=1$ при $|(t-\sigma_1)(\operatorname{mod} 2\pi)| < \rho^{\frac{3}{5}}$, что и дает требуемый результат для решения с периодом $2(2n-1)\pi$. Точно так же выбором c можно построить решение, стремящееся к $2(2n+1)\pi$-периодическому.

Если m — достаточно большое натуральное число, то решение

$$x = (1-b-c\rho)e^{\frac{t}{\rho}-\frac{2m\pi}{\rho}} + c\rho e^{\rho(t-2m\pi)} + b\cos t, \qquad |c| < 10,$$

лежит внутри области H при $t=0$. Нетрудно видеть, что $|x|$ оказывается равным единице впервые при $t = 2m\pi$, когда выполняется равенство $x=1$. При $t > (2m+1)\pi$ имеем

$$x = (2-c\rho)e^{-\rho(t-2m\pi)} - b\cos t + \gamma\rho^2.$$

Надлежащим выбором c, $|c| < 10$, можно добиться того, чтобы $x(t)$ пересекало прямую $x=1$ на интервале t, соответствующем любой из устойчивых субгармоник.

6. Из самого определения множества K следует, что начальные точки обоих семейств субгармоник (как с периодом $2(2n-1)\pi$, так и с периодом $2(2n+1)\pi$) лежат на K. Отсюда следует, что K хотя и имеет нулевую площадь, но не может быть замкнутой жордановой кривой. Покажем это.

Предположим, что K представляет собой замкнутую жорданову кривую, а S — топологическое преобразование этой кривой на окружность C. Пусть p — начальная точка одной из субгармоник первого семейства, а q — начальная точка одной из субгармоник второго семейства. Тогда имеем $T^{2n-1}p = p$ и $T^l p \neq p$ при $l = 1, 2, \ldots, 2n-2$; $T^{2n+1}q = q$ и $T^l q \neq q$ при $l = 1, 2, \ldots, 2n$.

Рассмотрим преобразование $P = STS^{-1}$ окружности C на себя. Преобразование это гомеоморфное и сохраняющее ориентацию. Пусть $a = Sp$, $b = Sq$, тогда ясно, что $P^{2n-1}a = a$ и $P^l a \neq a$ при $l = 1, 2, \ldots, 2n-2$ и $P^{2n+1}b = b$ и $P^l b \neq b$ при $l = 1, 2, \ldots, 2n$. Но это невозможно, как следует из результатов, приведенных в конце § 10.

Полученное противоречие и показывает, что множество K не может представлять собой замкнутую жорданову кривую.

§ 16. О существовании гармонических колебаний у одной системы двух дифференциальных уравнений

В § 12 было показано, что если все решения системы двух уравнений продолжимы на периоде, то для существования гармонического колебания достаточно существования ограниченного решения. Однако далеко не всегда все решения системы оказываются продолжимыми на периоде. Примерами систем, у которых решение может уходить в бесконечность до истечения периода, могут служить системы, у которых на бесконечности „превалируют" полиномиальные члены. В этом параграфе мы будем изучать именно такие системы.

Рассмотрим систему [75]

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + X(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + Y(x, y, t). \end{aligned}\right\} \tag{16.1}$$

P и Q суть однородные формы n-го измерения, а X, Y непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по переменным x, y в окрестности каждой точки (x, y) и имеют период ω по переменной t. Кроме того, будем считать, что на бесконечности эти функции „малы" по сравнению с P и Q.

Точнее говоря, предположим, что равномерно относительно t выполняются соотношения

$$\frac{X(x, y, t)}{(x^2+y^2)^{n/2}} \xrightarrow[x^2+y^2\to\infty]{} 0, \quad \frac{Y(x, y, t)}{(x^2+y^2)^{n/2}} \xrightarrow[x^2+y^2\to\infty]{} 0. \tag{16.2}$$

Наряду с системой (16.1) будем рассматривать также и „укороченную" систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \tag{16.3}$$

1. Изучим поведение решений систем (16.1) и (16.3) в окрестности бесконечности. Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{16.4}$$

введем обозначения

$$Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi = F(\varphi),$$
$$Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)\cos\varphi - X(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)\sin\varphi = f(r, \varphi, t),$$
$$P(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + Q(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi = G(\varphi),$$
$$X(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)\cos\varphi + Y(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)\sin\varphi = g(r, \varphi, t),$$

тогда системы (16.1) и (16.3) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^n G(\varphi) + g(r, \varphi, t), \\ r\frac{d\varphi}{dt} &= r^n F(\varphi) + f(r, \varphi, t) \end{aligned}\right\} \tag{16.5}$$

и

$$\frac{dr}{dt} = r^n G(\varphi), \quad r\frac{d\varphi}{dt} = r^n F(\varphi). \tag{16.6}$$

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что уравнение

$$F(\varphi) = 0 \tag{16.7}$$

может иметь лишь простые корни и что эти корни не совпадают с корнями уравнения $G(\varphi) = 0$.

Рассмотрим случай, когда уравнение (16.7) имеет вещественные корни. Пусть $\varphi = \varphi_0$ есть корень уравнения (16.7). Тогда ясно, что луч $\varphi = \varphi_0$ представляет собой траекторию системы (16.6). Будем называть направление $\varphi = \varphi_0$ исключительным направлением для систем (16.5) и (16.6) (соответственно для систем (16.1) и (16.3)). Из наших предположений следует, что $G(\varphi_0) \neq 0$ и $F'(\varphi_0) \neq 0$. Если $G(\varphi_0)F'(\varphi_0) > 0$, то направление $\varphi = \varphi_0$ назовем седловым, а если $G(\varphi_0)F'(\varphi_0) < 0$, то направление $\varphi = \varphi_0$ будем называть узловым *). При этом если $G(\varphi_0) < 0$, то направление будем называть отрицательным, а если $G(\varphi_0) > 0$, то положительным.

Рассмотрим какое-нибудь исключительное направление $\varphi = \varphi_0$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы при $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta$ выполнялись неравенства

$$|G(\varphi) - G(\varphi_0)| < \frac{1}{2}|G(\varphi_0)|, \tag{16.8}$$

$$|F(\varphi) - F'(\varphi_0)(\varphi - \varphi_0)| < \frac{1}{2}|F'(\varphi_0)||\varphi - \varphi_0|. \tag{16.9}$$

Из первого уравнения системы (16.5) и из соотношений (16.2) следует, что если $R > 0$ достаточно велико, то в области $\{|\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta,\ r \geqslant R\}$ $\frac{dr}{dt}$ сохраняет знак и, в частности, часть окружности $\{r = R,\ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta\}$ представляет собой кривую без контакта для векторов поля системы (16.5) при любом t. Из второго уравнения системы (16.5) следует, что при достаточно большом R лучи $\{\varphi = \varphi_0 \pm \delta,\ r \geqslant R\}$ также не имеют контакта с полем системы (16.5).

Введем следующие обозначения. Обозначим область $\{|\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta,\ r \geqslant R\}$ через N_+, если направление $\varphi = \varphi_0$ положительное и узловое; эту область будем обозначать через N_-, если направление $\varphi = \varphi_0$ отрицательное и узловое. Через S_+ и S_- будем обозначать область $\{|\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta,\ r \geqslant R\}$, если направление $\varphi = \varphi_0$ седловое и положительное или отрицательное соответственно.

Назовем часть окружности $\{r = R,\ |\varphi - \varphi_0| \leqslant \delta\}$ нижней стенкой, а лучи $\{\varphi = \varphi_0 \pm \delta,\ r \geqslant R\}$ боковыми стенками соответствующей области.

Нетрудно убедиться, что при возрастании времени все решения, начинающиеся на границах области N_+, входят в эту область, а решения, начинающиеся на границах области N_-, выходят из нее. При возрастании времени решения входят в область S_+ через нижнюю стенку и выходят

*) Эти названия даются в соответствии с типами бесконечно удаленных особых точек, определяемых направлением $\varphi = \varphi_0$.

через боковые, а в область S_-, наоборот, входят через боковые и выходят через нижнюю.

2. Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 16.1. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

а) *Выполняются соотношения* (16.2).

б) *Уравнение* (16.7) *имеет по крайней мере один вещественный корень, все его вещественные корни просты, и ни один из них не совпадает с корнем уравнения* $G(\varphi)=0$.

в) *Если* $\varphi=\varphi_1$ *и* $\varphi=\varphi_2$ — *два соседних исключительных направления* (*при* $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ $F(\varphi)\neq 0$), *то одно из них обязательно узловое, т. е. два соседних исключительных направления не могут быть седловыми.*

г) *Индекс особой точки* $x=y=0$ *системы* (16.3) *отличен от нуля. Тогда система* (16.1) *имеет по крайней мере одно* ω*-периодическое решение.*

Доказательство. Функция $F(\varphi)$ представляет собой тригонометрический полином, поэтому ясно, что уравнение (16.7) либо имеет конечное число корней, либо обращается в тождество. Второй случай невозможен в силу предположения о простоте корней уравнения (16.7).

Заключим каждое из исключительных направлений в области вида $\{|\varphi-\varphi_0|\leqslant\delta,\ r\geqslant R\}$, описанные выше. При этом можно считать, что величины δ и R одни и те же для всех таких областей.

Нашей ближайшей задачей будет построение такой замкнутой кривой Г, что если точка (x_0, y_0) лежит на Г, то решение $x(t, x_0, y_0, t_0)$, $y(t, x_0, y_0, t_0)$ системы (16.1) ни при каких $t>t_0$ не оказывается в этой точке.

Легко видеть, что этим свойством обладают точки границ областей N_+ и N_-, поэтому в состав Г могут быть включены любые отрезки этих границ.

Рассмотрим узловое исключительное направление $\varphi=\varphi_1$. Для определенности будем считать, что это направление положительное. Пусть N_+ — соответствующая ему область. Пусть $\varphi=\varphi_2$ — исключительное направление, соседнее с $\varphi=\varphi_1$. Мы будем считать для определенности, что $\varphi_2>\varphi_1$ и при $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ $F(\varphi)\neq 0$. Предположим, что $\varphi=\varphi_2$ — также узловое исключительное направление. Тогда оно необходимо отрицательное. Действительно, по определению положительного узлового направления имеем $G(\varphi_1)>0$, $F'(\varphi_1)<0$.

Так как $\varphi=\varphi_2$ — корень уравнения (16.7), соседний с $\varphi=\varphi_1$, то ясно, что $F'(\varphi_2)>0$. Направление $\varphi=\varphi_2$ узловое, т. е. $F'(\varphi_2)G(\varphi_2)<0$; следовательно, $G(\varphi_2)<0$, и направление $\varphi=\varphi_2$ отрицательное; N_- — соответствующая ему область.

Построим теперь кривую без контакта γ, соединяющую смежные боковые стенки областей N_+ и N_-, т. е. лучи $\varphi=\varphi_1+\delta$ и $\varphi=\varphi_2-\delta$. Разделим первое уравнение системы (16.5) на второе, тогда получим

$$\frac{dr}{d\varphi}=r\frac{G(\varphi)+\dfrac{g(r,\varphi,t)}{r^n}}{F(\varphi)+\dfrac{f(r,\varphi,t)}{r^n}}. \tag{16.10}$$

При $\varphi_1+\delta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2-\delta$ $F(\varphi)\neq 0$, поэтому существует такое $a>0$, что при $r\geqslant R$

$$\frac{dr}{d\varphi}<ar, \tag{16.11}$$

если только R достаточно велико. Из неравенства (16.11) следует, что в области $\{\varphi_1+\delta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2-\delta,\ r\geqslant R\}$ решения уравнения

$$\frac{dr}{d\varphi}=ar \tag{16.12}$$

представляют собой кривые без контакта. Поэтому и кривая

$$r=r_0e^{a(\varphi-\varphi_1-\delta)}, \tag{16.13}$$

где $r_0\geqslant R$, не имеет контакта с полем системы (16.5). Кривая (16.13) при $\varphi_1+\delta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2-\delta$ и будет искомой кривой γ.

Рассмотрим неограниченную область K, границами которой служат кривая γ и лучи $\varphi=\varphi_1+\delta$, $\varphi=\varphi_2-\delta$. Нетрудно видеть, что решения системы (16.5) при возрастании времени входят в область K через кривую γ. Пусть (x_0, y_0) — точка на γ и $x(t)$, $y(t)$ — решение с начальными данными $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. При возрастании времени это решение входит в область K, покинуть эту область оно может лишь через стенку $\varphi=\varphi_1+\delta$, но тогда наше решение попадает в область N_+. Ни одно решение не может при возрастании времени покинуть область N_+. Таким образом, решение $x(t)$, $y(t)$, начавшись в точке (x_0, y_0), не может в эту точку возвратиться. Следовательно, кривая γ может быть включена в искомый контур Γ.

Пусть теперь φ_2 — седловое исключительное направление. По условию соседние с ним исключительные направления должны быть узловыми. Пусть φ_1 и φ_3 — такие направления ($\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$). Для определенности будем считать, что исключительное направление φ_2 положительное. Так как φ_1 и φ_3 — узловые направления, то $F'(\varphi_1)G(\varphi_1) < 0$ и $F'(\varphi_3)G(\varphi_3) < 0$; направление φ_2 положительное седловое, поэтому $F'(\varphi_2) > 0$, $G(\varphi_2) > 0$. Так как все корни уравнения (16.7) простые, то ясно, что $F'(\varphi_1) < 0$, $F'(\varphi_3) < 0$. Следовательно, $G(\varphi_1) > 0$, $G(\varphi_3) > 0$, и направления φ_1 и φ_3 положительные. Заключим направления φ_1, φ_2, φ_3 в области $N_+^{(1)}\{r \geqslant R,\ \varphi_1 - \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \delta\}$, $S_+\{r \geqslant R,\ \varphi_2 - \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 + \delta\}$, $N_+^{(2)}\{r \geqslant R,\ \varphi_3 - \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_3 + \delta\}$.

Нетрудно видеть, что в области $\{\varphi_1 + \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 - \delta,\ r \geqslant R\}$ выполняется неравенство (16.11), и потому кривая γ, определяемая равенством (16.13), не имеет контакта с полем направлений системы (16.5). Точно так же, как и в предыдущем случае, показывается, что любое решение, начавшись в некоторой точке кривой γ, не может возвратиться в эту точку при возрастании времени.

Построим кривую без контакта γ_1, соединяющую смежные боковые стенки областей S_+ и $N_+^{(2)}$, т. е. лучи $\varphi = \varphi_2 + \delta$ и $\varphi = \varphi_3 - \delta$. Из равенства (16.10) точно так же, как и раньше, следует, что в области $\{r \geqslant R,\ \varphi_2 + \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_3 - \delta\}$ выполняется неравенство

$$\frac{dr}{d\varphi} > -ar, \tag{16.14}$$

где по-прежнему a — некоторое положительное число. Но тогда ясно, что кривая

$$r = r_0 e^{-a(\varphi - \varphi_3 + \delta)} \tag{16.15}$$

не имеет контакта с полем направлений системы (16.5). Эта кривая при $\varphi_2 + \delta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_3 - \delta$ и является искомой кривой γ_1. Нетрудно установить, что любое решение, начавшееся на γ_1, не может попасть на эту кривую при возрастании времени.

Проведем теперь окружность C с центром в начале координат столь большого радиуса, чтобы кривые γ и γ_1 содержались внутри этой окружности. Обозначим через γ_2 дугу этой окружности, соответствующую углам $\varphi_2 - \delta \leqslant \varphi \leqslant$

$\leqslant \varphi_1 + \delta$, т. е. дугу, соединяющую боковые стенки области S_+. Через γ_3 и γ_4 обозначим отрезки боковых стенок области S_+, заключенные между окружностью C и кривыми γ и γ_1 соответственно. Обозначим через λ кривую, составленную из криволинейных отрезков γ, γ_3, γ_2, γ_4, γ_1. Кривая λ соединяет смежные боковые стенки областей $N_+^{(1)}$ и $N_+^{(2)}$, т. е. лучи $\varphi = \varphi_1 + \delta$ и $\varphi = \varphi_3 - \delta$. Пусть K — неограниченная область, границами которой служат кривая λ и бесконечные части лучей $\varphi = \varphi_1 + \delta$ и $\varphi = \varphi_3 - \delta$. Из самого построения кривой λ следует, что через эту кривую решения входят в область K. Пусть (x_0, y_0) — точка на λ и $x(t)$, $y(t)$ — решение с начальными данными $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. При возрастании времени это решение входит в область K, покинуть эту область оно может лишь через одну из стенок $\varphi = \varphi_1 + \delta$ или $\varphi = \varphi_3 - \delta$, но тогда наше решение попадает в одну из областей $N_+^{(1)}$ или $N_+^{(2)}$. Ни одно решение, имеющее точки в области N_+, не может покинуть эту область с возрастанием времени. Следовательно, решение $x(t)$, $y(t)$ при возрастании времени не может попасть в точку (x_0, y_0), и кривая λ может быть включена в искомый контур Γ.

Возьмем какое-нибудь узловое исключительное направление $\varphi = \varphi_0$, для определенности будем считать его положительным. Пусть N_+ — соответствующая ему область. Пусть φ_1 — соседнее с φ_0 узловое исключительное направление (может, конечно, случиться, что между φ_0 и φ_1 лежит одно седловое исключительное направление). Обозначим через N' область, соответствующую направлению φ_1 (это, очевидно, может быть область типа N_+ или N_-). Области N_+ и N' можно соединить между собой кривыми типа γ или типа λ (в зависимости от того, заключается ли между направлениями φ_1 и φ_2 седловое). Соединим таким образом между собой все области типа N_+ и N_-. Рассмотрим контур Γ, состоящий из соединяющих кривых и из соответствующих частей границ областей N_+ и N_-. Полученный контур будет обладать тем свойством, что любое решение, начинающееся в некоторой его точке, не может возвратиться в эту точку при возрастании времени.

Из условия б) теоремы следует, что система (16.3) имеет лишь одно состояние равновесия — точку $x = y = 0$. Поэтому индекс кривой Γ в векторном поле $\{P(x, y), Q(x, y)\}$

отличен от нуля. Если контур Г выбрать так, чтобы он лежал за пределами окружности с центром в начале координат достаточно большого радиуса, то ясно, что векторы полей $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ и $\{P(x, y)+X(x, y, 0), Q(x, y)+ +Y(x, y, 0)\}$ нигде на контуре Г не обращаются в нулевые или противоположно направленные. Мы будем считать, что контур Г выбран именно таким образом (для этого достаточно взять число R достаточно большим), и, следовательно, индексы Г в полях $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ и $\{P(x, y)+X(x, y, 0), Q(x, y)+Y(x, y, 0)\}$ совпадают и отличны от нуля.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [P(x, y)+X(x, y, t)]\,H(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= [Q(x, y)+Y(x, y, t)]\,H(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{16.16}$$

где функция $H(x, y)$ выбирается следующим образом. Пусть D — круг с центром в начале координат, содержащий в себе контур Г; функция $H(x, y)$ непрерывно дифференцируема и положительна при всех x, y; $H(x, y)=1$, если точка (x, y) лежит в D, и $(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} H(x, y) \to 0$ при $x^2+y^2 \to \infty$. Ясно, что контур Г по отношению к системе (16.16) обладает теми же свойствами, что и по отношению к системе (16.1). Но все решения системы (16.16) продолжимы на все моменты времени от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому система (16.16), в силу теоремы 6.1, имеет гармоническое колебание. Это ω-периодическое решение лежит, очевидно, внутри контура Г. Но внутри Г системы (16.1) и (16.16) совпадают. Это и доказывает, что система (16.1) имеет гармоническое колебание.

Теорема доказана.

3. Последнее условие теоремы предыдущего пункта состоит в том, чтобы индекс особой точки системы (16.3) был отличен от нуля. Этот индекс может быть вычислен по интегральной формуле Пуанкаре (см., например, [1, 76]). Однако в рассматриваемом случае можно указать более простой способ определения этого индекса.

Пусть $\varphi=\varphi_0$ есть исключительное направление. Это означает, что $F(\varphi_0)=0$. Но $F(\varphi)$ представляет собой форму n-й степени относительно $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, поэтому ясно, что

$F(\varphi_0+\pi)=0$, и, следовательно, $\varphi_0+\pi$ есть также исключительное направление. Произведение $F'(\varphi)G(\varphi)$ есть форма степени $2n$ от $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, поэтому при замене $\sin\varphi$ на $-\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ на $-\cos\varphi$ это произведение не меняется. Следовательно, если $\varphi=\varphi_0$ — седловое исключительное направление, то и $\varphi=\varphi_0+\pi$ есть седловое исключительное направление, а если $\varphi=\varphi_0$ — узловое исключительное направление, то таким же будет и $\varphi=\varphi_0+\pi$.

Таким образом, и узловые, и седловые исключительные направления появляются парами. Пусть число седловых направлений $2k$, а число узловых $2l$. Из условия в) теоремы следует, что $2l \geqslant 2k$.

Проведем окружность с центром в начале координат и постараемся определить поворот вектора поля при обходе этой окружности в положительном направлении.

Пусть $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ — два соседних исключительных направления ($\varphi_1<\varphi_2$). Нетрудно установить, что если оба эти направления узловые, то при переходе от φ_1 к φ_2 вектор поля поворачивается на угол $\varphi_2-\varphi_1-\pi$, а если одно из них узловое, а другое седловое, то на угол $\varphi_2-\varphi_1$.

Таким образом, суммарный поворот вектора поля при обходе всей окружности будет равен сумме углов между исключительными направлениями (т. е. 2π) плюс $-\pi$, умноженное на число углов, ограниченных с обеих сторон узловыми направлениями. Ясно, что таких углов будет ровно столько, сколько имеется „лишних" узловых направлений, именно $2l-2k$. Следовательно, искомый индекс равен

$$I=\frac{1}{2\pi}(2\pi-(2l-2k)\pi)=1+k-l. \qquad (16.17)$$

Поэтому условие г) теоремы может быть сформулировано следующим образом. Число узловых направлений не должно превышать число седловых направлений ровно на 2.

4. Теорема 16.1 касалась того случая, когда уравнение (16.7) имеет вещественные корни. Рассмотрим теперь случай, когда функция $F(\varphi)$ не обращается в нуль при вещественных φ. Докажем следующее утверждение.

Теорема 16.2. *Если $F(\varphi)$ не обращается в нуль и величина*

$$s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{G(\varphi)}{F(\varphi)}\,d\varphi \qquad (16.18)$$

отлична от нуля, то система (16.2) *имеет* ω*-периодическое решение.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что $F(\varphi) > 0$, а $s < 0$. Положим

$$\frac{G(\varphi)}{F(\varphi)} = h(\varphi) + s, \tag{16.19}$$

тогда ясно, что $\int_0^\varphi h(\varphi)\,d\varphi$ есть периодическая функция.

Разделим первое уравнение системы (16.6) на второе, тогда получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(h(\varphi) + s). \tag{16.20}$$

Перепишем уравнение (16.10) в следующем виде:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(h(\varphi) + s + \alpha(r, \varphi, t)), \tag{16.21}$$

где

$$\alpha(r, \varphi, t) = \frac{F\frac{g}{r^n} - G\frac{f}{r^n}}{F\left(F + \frac{f}{r^n}\right)}.$$

Из соотношений (16.2) следует, что существует такое R, что при $r \geqslant R$ $|\alpha(r, \varphi, t)| < \frac{1}{2}|s|$.

Проинтегрируем уравнение (16.20)

$$r = r_0 e^{s\varphi} e^{\int_0^\varphi h(\varphi)\,d\varphi}.$$

Отбросим здесь член, убывающий по экспоненциальному закону, получим периодическую функцию

$$r = r_0 e^{\int_0^\varphi h(\varphi)\,d\varphi}. \tag{16.22}$$

Выберем теперь r_0 столь большим, чтобы при всех φ на кривой (16.22) оказалось $r > R$. Замкнутая кривая (16.22) представляет собой кривую без контакта для системы (16.2).

Действительно, вдоль кривой (16.22) имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = rh(\varphi).$$

В силу равенства (16.21) и соотношения $|\alpha| < \frac{1}{2}|s|$ имеем на интегральных кривых системы (16.1)

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(h(\varphi) + s + \alpha) < rh(\varphi). \tag{16.23}$$

Это и доказывает, что кривая (16.22) бесконтактная.

По предположению $F(\varphi)$ положительна, поэтому из второго уравнения системы (16.5) и из неравенства (16.23) следует, что векторы поля направлены внутрь кривой (16.22). Следовательно, при движении по интегральным кривым системы (16.2) от $t=0$ до $t=\omega$ плоская область, ограниченная кривой (16.22), переходит в себя. Отсюда и из теоремы Брауэра и следует утверждение теоремы.

§ 17. Субгармонические колебания уравнения без диссипации

Рассмотрим движение материальной точки по прямой под действием восстанавливающей и вынуждающей сил при отсутствии сопротивления. Такое движение описывается, как хорошо известно, уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(x) = p(t). \tag{17.1}$$

Будем предполагать, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, а $p(t)$ непрерывна и ω-периодична: $p(t+\omega) = p(t)$.

В этом параграфе будут установлены достаточные условия существования субгармоник у уравнения (17.1) (см. работы [77, 78]).

1. Выясним некоторые свойства решений уравнения (17.1), удовлетворяющих определенным краевым условиям.

Теорема 17.1. Если функция $p(t)$ *четная, т. е.* $p(t) = p(-t)$, *то решение уравнения* (17.1), *удовлетворяющее условию*

$$\dot{x}(0) = \dot{x}\left(\frac{k}{2}\omega\right) = 0, \tag{17.2}$$

где k — *натуральное число, имеет период* $k\omega$.

Доказательство. Пусть $x=\varphi(t)$ есть решение уравнения (17.1). Покажем, что функция $\psi(t)=\varphi(-t)$ также является решением (17.1). Действительно, $\ddot{\psi}(t)=\ddot{\varphi}(-t)$; $\varphi(t)$ есть решение уравнения (17.1), поэтому

$$\ddot{\varphi}(-t)=-g(\varphi(-t))+p(-t)$$

или в силу четности $p(t)$

$$\ddot{\varphi}(-t)=-g(\varphi(-t))+p(t),$$

отсюда получаем

$$\ddot{\psi}(t)=-g(\psi(t))+p(t).$$

Это и доказывает, что функция $\psi(t)=\varphi(-t)$ представляет собой решение уравнения (17.1). Отсюда вытекает, что любое решение уравнения (17.1) с начальным условием $\dot{x}(0)=0$ есть четная функция. Действительно, пусть $x=\varphi(t)$ такое решение. Рассмотрим решение $x=\psi(t)=\varphi(-t)$. При $t=0$ оказывается $\psi(0)=\varphi(0)$ и $\dot{\psi}(0)=-\dot{\varphi}(0)=0$, т. е. решение $x=\varphi(t)$ совпадает с решением $x=\psi(t)$, а это и доказывает, что $\varphi(t)=\varphi(-t)$, т. е. $\varphi(t)$ есть четная функция.

Рассмотрим теперь решение $x(t)$ уравнения (17.1), удовлетворяющее условию (17.2). Оно является четной функцией, и потому $x\left(-\frac{k}{2}\omega\right)=x\left(\frac{k}{2}\omega\right)$, $\dot{x}\left(-\frac{k}{2}\omega\right)=-\dot{x}\left(\frac{k}{2}\omega\right)=0$. Это и доказывает, что решение $x(t)$ имеет период $k\omega$.

Теорема доказана.

Теорема 17.2. *Если функции $p(t)$ и $g(x)$ нечетные, т. е. $p(-t)=-p(t)$ и $g(-x)=-g(x)$, то решение уравнения* (17.1), *удовлетворяющее условию*

$$x(0)=x\left(\frac{k}{2}\omega\right)=0, \tag{17.3}$$

где k — натуральное число, имеет период $k\omega$.

Доказательство. Пусть $x=\varphi(t)$ есть решение уравнения (17.1). Покажем, что тогда и функция $\psi(t)=-\varphi(-t)$ также является решением этого уравнения. Имеем $\ddot{\psi}(t)=-\ddot{\varphi}(-t)$. $\varphi(t)$ представляет собой решение уравнения (17.1), поэтому

$$-\ddot{\varphi}(-t)=g(\varphi(-t))-p(-t)$$

или, в силу нечетности функций g и p,

$$-\ddot{\varphi}(-t) = -g(-\varphi(-t)) + p(t),$$

отсюда получаем

$$\ddot{\psi}(t) = -g(\psi(t)) + p(t).$$

Это и доказывает, что функция $\psi(t) = -\varphi(-t)$ является решением уравнения (17.1).

Отсюда следует, что любое решение уравнения (17.1) с начальными данными $x(0) = 0$ есть нечетная функция. Действительно, пусть $x = \varphi(t)$ — такое решение. Рассмотрим решение $x = \psi(t) = -\varphi(-t)$. При $t = 0$ оказывается $\psi(0) = -\varphi(0) = 0$ и $\dot{\psi}(0) = \dot{\varphi}(0)$. Таким образом, решение $x = \varphi(t)$ совпадает с решением $x = \psi(t)$, а это и доказывает, что $\varphi(t) = -\varphi(-t)$, т. е. $\varphi(t)$ — нечетная функция.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения (17.1), удовлетворяющее условию (17.3). Оно является нечетной функцией, и потому $x\left(\frac{k}{2}\omega\right) = x\left(-\frac{k}{2}\omega\right) = 0$, $\dot{x}\left(-\frac{k}{2}\omega\right) = \dot{x}\left(\frac{k}{2}\omega\right)$. Это и доказывает, что решение $x(t)$ имеет период $k\omega$.

Теорема доказана.

2. Запишем теперь уравнение (17.1) в виде системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) + p(t). \tag{17.4}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 17.3. *Если существует такое $a > 0$, что $xg(x) > 0$ при $|x| \geqslant a$ и*

$$\int_0^x g(x)\,dx \to \infty \quad \text{при } |x| \to \infty, \tag{17.5}$$

то по любым $R > 0$ и $t_1 > 0$ можно указать $R_0 \geqslant R$, такое, что если $x_0^2 + y_0^2 \geqslant R_0^2$, то на решении $x(t)$, $y(t)$ системы (17.4) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ выполняется неравенство

$$x^2(t) + y^2(t) > R^2 \tag{17.6}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t_1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v=\frac{1}{2}y^2+\int\limits_0^x g(x)\,dx. \qquad (17.7)$$

Из условий теоремы следует, что существует такое $\bar{R}$, что при $x^2+y^2 \geqslant \bar{R}^2$ $|y|<\sqrt{2v}$. Возьмем теперь произвольные положительные величины t_1 и R. Не нарушая общности, можем считать, что $R>\bar{R}$.

Положим

$$v_m=\max_{x^2+y^2\leqslant R^2} v \qquad (17.8)$$

и

$$P=\max|p(t)|. \qquad (17.9)$$

Выберем R_0 так, чтобы при $x^2+y^2 \geqslant R_0^2$ выполнялось неравенство

$$\sqrt{v}>\sqrt{v_m}+\frac{\sqrt{2}}{2}Pt_1. \qquad (17.10)$$

Покажем, что это R_0 и является искомым,

Продифференцируем функцию (17.7) по времени в силу дифференциальных уравнений системы (17.4):

$$\dot{v}=yp(t). \qquad (17.11)$$

Из (17.9) следует тогда, что

$$\dot{v}>-|y|P, \qquad (17.12)$$

а при условии $x^2+y^2 \geqslant \bar{R}^2$ имеем

$$\dot{v}>-\sqrt{2v}\,P, \qquad (17.13)$$

или

$$\frac{dv}{\sqrt{v}}>-P\sqrt{2}dt.$$

Интегрируя это неравенство вдоль решения системы (17.4) с начальными данными $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $x_0^2+y_0^2 \geqslant R_0^2$, получаем

$$\sqrt{v}>\sqrt{v_0}-\frac{\sqrt{2}}{2}P(t-t_0). \qquad (17.14)$$

Неравенство (17.14) справедливо до тех пор, пока на выбранном решении выполняется неравенство $x^2+y^2 \geqslant \overline{R}^2$. При таких t и при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+t_1$ из (17.14) получаем

$$\sqrt{v} > \sqrt{v_0} - \frac{\sqrt{2}}{2} Pt_1.$$

Из этого неравенства и из неравенства (17.10) следует тогда, что при указанных значениях времени

$$\sqrt{v} > \sqrt{v_m}. \tag{17.15}$$

Отсюда и вытекает, что при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+t_1$ выполняется неравенство (17.6).

Теорема доказана.

3. Для выяснения дальнейших свойств решений уравнения (17.1) удобно в системе (17.4) перейти к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{17.16}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r\cos\varphi\sin\varphi - g(r\cos\varphi)\sin\varphi + p(t)\sin\varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{g(r\cos\varphi)}{r}\cos\varphi - \sin^2\varphi + \frac{p(t)}{r}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{17.17}$$

Теорема 17.4. *Если*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty, \tag{17.18}$$

то по любым $t_1 > 0$ и $\Phi > 0$ можно указать такое $R_0 > 0$, что вдоль решения $x(t)$, $y(t)$ системы (17.4) с начальными данными $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $x_0^2+y_0^2 \geqslant R_0^2$ выполняется:

а) *полярный угол φ монотонно убывает при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+t_1$,*

б) $\varphi(t_0+t_1)-\varphi(t_0) < -\Phi$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\alpha > 0$. Из соотношения (17.18) и из второго уравнения системы (17.17) следует, что существует такое $R > 0$, что при $r \geqslant R$ выполняется неравенство

$$\frac{d\varphi}{dt} < -\left(\alpha^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right). \tag{17.19}$$

Выберем R_0 таким образом, чтобы при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t_1$ на нашем решении выполнялось неравенство $r \geqslant R$ (такое R_0 найдется в силу предыдущей теоремы). При этом условии на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + t_1$ будет выполнено неравенство (17.19), что и доказывает утверждение а) теоремы.

Для того чтобы доказать второе утверждение теоремы, проинтегрируем неравенство (17.19)

$$\frac{d\varphi}{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} < -dt;$$

отсюда

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} < t_0 - t,$$

или

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\alpha \sqrt{2}} \Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi} < t_0 - t.$$

Полагая здесь

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\alpha \sqrt{2}} = \psi_0,$$

получаем

$$\operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\alpha \sqrt{2}} < \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (t_0 + \psi_0 - t).$$

Отсюда

$$\varphi < \operatorname{Arctg} \alpha \sqrt{2} \operatorname{tg} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}} (t_0 + \psi_0 - t) \right].$$

Из последнего неравенства следует, что выбором достаточно большого α можно добиться того, чтобы разность $\varphi - \varphi_0$ по абсолютной величине была сколь угодно велика. Это и доказывает утверждение б) теоремы.

Теорема доказана.

4. Теперь мы установим основные утверждения относительно периодических решений уравнения (17.1).

Теорема 17.5. *Предположим, что функция $p(t)$ четная, т. е. $p(-t) = p(t)$, и выполнено условие* (17.18) *предыдущей теоремы. Тогда при любом натуральном k существует бесконечно много решений уравнения* (17.1) *с периодом $k\omega$, и никакое число вида $\bar{k}\omega$, где $\bar{k}$ — натуральное, меньшее k, не является периодом этих решений.*

Доказательство. Возьмем произвольное число $R>0$ и положим $t_1=\frac{k}{2}\omega$, $\Phi=k\pi$. По этим величинам выберем $R_0>R$, удовлетворяющее требованиям предыдущей теоремы. Рассмотрим решение системы (17.4) с начальными данными $t=0$, $x=x_0'>R_0$, $y=0$. В силу предыдущей теоремы тогда окажется, что полярный угол $\varphi(t, x_0')$ на этом решении удовлетворяет неравенству

$$\varphi\left(\frac{k}{2}\omega,\ x_0'\right)<-k\pi. \qquad (17.20)$$

Пусть s — натуральное число, такое, что

$$-sk\pi<\varphi\left(\frac{k}{2}\omega,\ x_0'\right)\leqslant-(s-1)k\pi. \qquad (17.21)$$

Положим теперь $t_1=\frac{k}{2}\omega$, $\Phi=-(sk+1)\pi$ и, используя опять теорему 17.4, найдем такое $x_0''>x_0'$, что на решении с начальными данными $x(0)=x_0''$, $y(0)=0$ будет выполнено неравенство

$$\varphi\left(\frac{k}{2}\omega,\ x_0''\right)<-(sk+1)\pi. \qquad (17.22)$$

Рассмотрим семейство решений системы (17.4) с начальными данными $y(0)=0$, $x_0'\leqslant x(0)\leqslant x_0''$. Ясно, что полярный угол этих решений при $t=\frac{k}{2}\omega$ $\varphi\left(\frac{k}{2}\omega,\ x(0)\right)$ непрерывно зависит от $x(0)$. Из неравенств (17.21) и (17.22) тогда следует, что существует такое $x_0\in(x_0',\ x_0'')$, что на соответствующем решении выполняется равенство

$$\varphi\left(\frac{k}{2}\omega,\ x_0\right)=-(sk+1)\pi. \qquad (17.23)$$

Покажем, что это решение удовлетворяет утверждению теоремы. Из равенства (17.23) следует, что на нашем решении $y\left(\frac{k}{2}\omega\right)=0$. Так как по самому выбору решения $y(0)=0$, то по теореме 17.1 это решение имеет период $k\omega$.

Покажем, что наше решение не может иметь периода $\bar{k}\omega$, где $\bar{k}$ — натуральное число, меньшее k. Допустим, напротив, что построенное нами решение имеет такой период. Предположим, что $\bar{k}$ — наименьшее натуральное число, для которого $\bar{k}\omega$ есть период рассматриваемого решения, т. е. если $\bar{\bar{k}} < \bar{k}$, то $\bar{\bar{k}}\omega$ не является периодом нашего решения. В этом случае $\bar{k}$ должно быть делителем k. Действительно, величины $\omega^* = \omega(c_1\bar{k} + c_2 k)$, где c_1 и c_2 — целые числа, положительные, отрицательные или нули, являются периодами нашего решения. Но среди чисел $c_1\bar{k} + c_2 k$ содержится наибольший общий делитель d чисел k и $\bar{k}$. Следовательно, $d\omega$ есть также период рассматриваемого решения. Из минимальных свойств $\bar{k}$ следует, что $\bar{k} = d$. Таким образом, $\bar{k}$ есть делитель k, значит, $k = q\bar{k}$, где $q \geqslant 2$ — целое число.

Как было показано при доказательстве теоремы 17.1, построенное нами решение есть четная функция; следовательно, полярный угол $\varphi(t)$ является нечетной функцией:

$$\varphi(-t) = -\varphi(t);$$

отсюда

$$\varphi\left(-\frac{k}{2}\omega - t\right) = -\varphi\left(\frac{k}{2}\omega + t\right).$$

Так как наше решение имеет период $k\omega$, то из последнего равенства получаем

$$\varphi\left(\frac{k}{2}\omega - t\right) = -\varphi\left(\frac{k}{2}\omega + t\right). \tag{17.24}$$

Из этого неравенства следует, что на промежутке времени $\frac{k}{2}\omega \leqslant t \leqslant k\omega$ полярный угол изменяется на такую же величину, как и на промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{k}{2}\omega$, т. е. на $-(sk+1)\pi$. Отсюда и из (17.23) следует, что

$$\varphi(k\omega, x_0) = -2(sk+1)\pi. \tag{17.25}$$

С другой стороны, величина $\bar{k}\omega$ есть период нашего решения, и потому на промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant \bar{k}\omega$ полярный угол изменяется на целое кратное 2π, т. е. $\varphi(\bar{k}\omega, x_0) = -2r\pi$. А тогда ясно, что на промежутке времени $\bar{k}m\omega \leqslant t \leqslant \bar{k}(m+1)\omega$ полярный угол изменяется на величину $-2r\pi$; следовательно, за время $0 \leqslant t \leqslant \bar{k}q\omega = k\omega$ полярный угол изменится на величину $-2qr\pi$, т. е.

$$\varphi(k\omega, x_0) = -2qr\pi, \tag{17.26}$$

что в соединении с (17.25) дает

$$-2(sk+1)\pi = -2qr\pi,$$

или

$$sk+1 = qr,$$

где числа s, k, q, r — целые, а $q \geqslant 2$ является делителем k. Это невозможно.

Полученное противоречие и доказывает, что построенное нами решение не может иметь периода вида $\bar{k}\omega$.

Итак, взяв произвольное $R > 0$, мы указали решение с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) > R$, обладающее требуемыми свойствами. Из произвольности R следует, что таких решений существует бесконечно много.

Теорема доказана.

Теорема 17.6. *Предположим, что функции $p(t)$ и $g(x)$ нечетные, т. е. $p(-t) = -p(t)$ и $g(-x) = -g(x)$, и выполнено условие* (17.18). *Тогда при любом натуральном k существует бесконечно много решений уравнения* (17.1) *с периодом $k\omega$, и никакое число вида $\bar{k}\omega$, где $\bar{k}$ — натуральное число, меньшее k, не является периодом этих решений.*

Эта теорема доказывается так же, как и предыдущая, только надо воспользоваться теоремой 17.2 и соответственно начальные данные решений выбирать на оси Oy.

В заключение параграфа отметим, что из теорем 17.5 и 17.6 следует, что построенные там решения могут не оказаться субгармониками лишь в том исключительном случае, когда наряду с периодом $k\omega$ они имеют период $\frac{k}{q}\omega$, где q — целое число, взаимно простое с k.

ГЛАВА III

АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 18. Общие теоремы о существовании и устойчивости периодических решений автономных систем

В этом и следующих параграфах мы будем рассматривать системы свободных колебаний

$$\frac{dX}{dt} = F(X). \tag{18.1}$$

Как обычно, будем предполагать, что n-мерная вектор-функция $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности при всех значениях n-мерного вектора $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Исследование вопроса о существовании периодических решений системы (18.1) по сравнению с таким же вопросом, касающимся системы вынужденных колебаний (1.1), представляет некоторые дополнительные трудности. Трудности эти возникают из-за того, что в случае автономной системы нельзя, вообще говоря, заранее указать период искомого периодического решения, в то время как в случае системы вынужденных колебаний (1.1) периодическое решение обычно имеет период, равный или кратный периоду правой части. А в тех случаях, когда система (1.1) имеет решение с периодом, несоизмеримым с периодом правой части, это решение, как следует из теоремы 1.7, располагается в множестве, на котором правая часть не зависит от времени t, т. е., строго говоря, в этом случае мы как раз имеем дело с системой вида (18.1).

1. В этом и следующих параграфах наиболее детальному анализу подвергается вопрос о существовании периодических решений автономных систем.

Для доказательства существования периодического решения системы (18.1) поступают обычно следующим образом. В фазовом пространстве выделяется гиперповерхность M $(n-1)$-го измерения, не имеющая контакта с полем направлений системы (18.1). На поверхности M выделяется $(n-1)$-мерный симплекс S. Предполагается, что если точка p лежит в S, то при возрастании времени траектория $\Phi(p, t)$ системы (18.1), проходящая при $t=0$ через точку p, пересечет поверхность M в точке $\Phi(p, \tau)$, $\tau > 0$. Таким образом, получается преобразование T симплекса S в гиперповерхность M, ставящее в соответствие точке p точку $\Phi(p, \tau)$. Обычно без особых затруднений удается показать, что преобразование это непрерывно. Если, кроме того, преобразование T таково, что на S оно имеет неподвижную точку q, то ясно, что траектория $\Phi(q, I_0)$ замкнута, т. е. решение $\Phi(q, t)$ периодическое.

Такая схема рассуждений применяется и при установлении хорошо известного принципа тора. Этот принцип состоит в следующем. Пусть R — торообразная область фазового пространства, ограниченная $(n-1)$-мерной гладкой поверхностью Σ, такой, что все траектории пересекают эту поверхность, переходя внутрь области R при возрастании времени t. Пусть S — одно из сечений тора R, представляющее собой $(n-1)$-мерный симплекс без контакта. Если любая траектория, начинающаяся на $\bar{S}$, при возрастании t снова пересекает S, то в R имеется замкнутая траектория.

Действительно, пусть $p \in \bar{S}$, а τ — первый после $t=0$ момент пересечения траектории $\Phi(p, t)$ с S. Так как поверхность Σ, ограничивающая S, не имеет контакта с полем направлений системы (18.1), то ясно, что $\Phi(p, \tau)$ лежит непременно внутри S (а не на его границе). Отсюда следует, что точка $\Phi(p, \tau)$ зависит непрерывно от $p \in \bar{S}$. Сопоставим, как указывалось выше, точку $\Phi(p, \tau)$ точке p. Полученное таким образом преобразование T будет непрерывным преобразованием $(n-1)$-мерного замкнутого симплекса в себя. По теореме Брауэра преобразование это имеет неподвижную точку q. Тогда ясно, что траектория $\Phi(q, I_0)$ замкнутая.

В следующем параграфе при исследовании конкретной системы мы покажем приемы построения области R и сечения S.

2. В этом пункте мы укажем один признак существования периодического решения автономной системы [70].

Будем предполагать, что правые части системы (18.1) непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Образуем матрицу Якоби правой части системы:

$$J(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{18.2}$$

Будем, как и раньше, через $X \cdot Y$ обозначать скалярное произведение векторов X и Y, а через $\|X\|$ — евклидову норму вектора X.

Теорема 18.1. *Предположим, что в ограниченной области D фазового пространства выполняется соотношение*

$$J(Y)(X-Y)\cdot(X-Y)\leqslant-\Delta\|X-Y\|^2, \tag{18.3}$$

где Δ — положительная постоянная, векторы $X \in D$ и $Y \in D$ таковы, что их разность $X-Y$ ортогональна к полю направлений системы (18.1) *в точке Y, т. е. $F(Y)\cdot(X-Y)=0$. Предположим, кроме того, что в замкнутой области $\overline{D}$ отсутствуют состояния равновесия. Тогда любое решение $X=\Phi(p, t)$ системы* (18.1), *располагающееся при $t\geqslant 0$ в некоторой замкнутой области, погруженной в D, устойчиво в смысле Ляпунова, и существует положительная постоянная λ, такая, что по любому $\varkappa>0$ можно указать такое $\varepsilon>0$, что если $\rho(p, q)<\varepsilon$, то существует такое $h(q)$, $h(q)|<\varkappa$, что*

$$\rho(\Phi(p, t+h(q)), \Phi(q, t))<e^{-\lambda t}. \tag{18.4}$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ компоненты вектора $\Phi(p, t)$. Так как по предположению в D не содержатся состояния равновесия, то существует постоянная $b>0$, такая, что при всех $t\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}[\varphi_k'(t)]^2>b. \tag{18.5}$$

Мы предполагаем, что функции $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)(k=1, 2, \ldots, n)$ — компоненты вектора $F(X)$ — непрерывно дифференцируемы; следовательно, функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\ldots$, $\varphi_n(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по t, и вторые производные от этих функций ограничены при $t \geqslant 0$. Таким образом, кривая $X=\Phi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ имеет ограниченную кривизну.

Введем новые координаты. Проведем через точку $X=\Phi(p, \theta)$ гиперплоскость $(n-1)$-го измерения, нормальную к кривой $X=\Phi(p, t)$. Так как кривая $X=\Phi(p, t)$ имеет ограниченную кривизну, то в достаточно малой окрестности этой кривой гиперплоскости, соответствующие близким точкам, не пересекаются. Введем в каждой из этих гиперплоскостей ортогональные координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Таким образом, новые координаты со старыми будут связаны по формулам

$$x_k=\varphi_k(\theta)+\sum_{l=1}^{n-1} \psi_{kl}(\theta) y_l \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{18.6}$$

Координаты y_l могут быть выбраны таким образом, что если вектор $X-\Phi(p, \theta)$ нормален к кривой $X=\Phi(p, t)$, т. е. к вектору $F(\Phi(p, \theta))$, то

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\varphi_k(\theta))^2=\sum_{l=1}^{n-1} y_l^2. \tag{18.7}$$

Функции $\psi_{kl}(\theta)$ выражаются по обычным правилам через $\varphi_s(\theta)$ и $\varphi_s'(\theta)$. Поэтому функции ψ_{kl} непрерывно дифференцируемы при $\theta \geqslant 0$ и ограничены при $\theta \geqslant 0$ вместе со своими производными.

Итак, вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводятся переменные $\theta, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Дифференцируя (18.6) по t и разрешая полученную систему равенств относительно $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{dy_k}{dt}$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}&=\bar{u}(Y, \theta), \\ \frac{dY}{dt}&=\bar{G}(Y, \theta), \end{aligned}\right\} \tag{18.8}$$

где Y — вектор с компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, $\overline{G}$ — векторная функция с компонентами $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$. Из замены (18.6) следует, что решение $X = \Phi(p, t)$ системы (18.1) переходит в решение $\theta = t$, $Y = 0$ системы (18.8). Поэтому $\overline{u}(\theta, 0) \equiv 1$, $\overline{G}(\theta, 0) \equiv 0$. Сделаем еще одну замену. Положим $\theta = t + \tau$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= u(Y, \tau, t), \\ \frac{dY}{dt} &= G(Y, \tau, t), \end{aligned}\right\} \qquad (18.9)$$

где $u(Y, \tau, t) = \overline{u}(Y, t+\tau) - 1$, $G(Y, \tau, t) = \overline{G}(Y, t+\tau)$, компоненты G будем обозначать через $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$. Из вида функций u и G следуют равенства

$$u(0, \tau, t) \equiv 0, \quad G(0, \tau, t) \equiv 0. \qquad (18.10)$$

Из вида замены (18.6) и из отмеченных выше дифференциальных свойств функций $\psi_{kl}(\theta)$ следует, что функции u и G непрерывны при достаточно малых $\|Y\|$ и $|\tau|$ и $t \geqslant 0$ и ограничены при таких значениях аргументов. Кроме того, функции эти непрерывно дифференцируемы по y_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), и все производные вида $\frac{\partial u}{\partial y_i}$, $\frac{\partial g_k}{\partial y_i}$ ограничены при достаточно малых $\|Y\|$ и $|\tau|$ и при $t \geqslant 0$.

Отсюда и из первого из тождеств (18.10) следует, что существует такое $M > 0$, что при достаточно малой $\|Y\|$ выполняется оценка

$$|u(Y, \tau, t)| < M\|Y\|. \qquad (18.11)$$

Из второго тождества (18.10) вытекает, что функции $g_s(Y, \tau, t)$ могут быть представлены в виде

$$g_s(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \tau, t) = a_{s1}(t)\,y_1 + \ldots + a_{sn-1}(t)\,y_{n-1} + \\ + A_s(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tau, t) \; (s = 1, \ldots, n-1), \qquad (18.12)$$

где функции a_{si} ($s, i = 1, 2, \ldots, n-1$) непрерывны и ограничены при $t \geqslant 0$, а функции $A_s(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \tau, t)$ при достаточно малых $|\tau|$ и $\|Y\|$ и при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|A_s(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \tau, t)| < \gamma\|Y\| \; (s = 1, \ldots, n-1). \qquad (18.13)$$

где постоянная γ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малых $|\tau|$ и $\|Y\|$.

Система (18.9) переписывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= u(Y, \tau, t), \\ \frac{dy_s}{dt} &= a_{s1}(t)\,y_1 + \ldots + a_{sn-1}(t)\,y_{n-1} + \\ &\qquad + A_s(y_1, \ldots, y_{n-1}, \tau, t). \end{aligned}\right\} \qquad (18.14)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \|Y\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2. \qquad (18.15)$$

В силу равенства (18.7) можем написать:

$$V = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \varphi_k(\theta))^2 = \|X - \Phi(p, \theta)\|^2, \qquad (18.16)$$

где вектор $X - \Phi(p, \theta)$ ортогонален к $F(\Phi(p, \theta))$.

Продифференцируем функцию V по t полным образом в силу дифференциальных уравнений системы (18.14), будем иметь

$$\dot V = 2\sum_{s=1}^{n-1} y_s(a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn-1}y_{n-1}) + 2\sum_{s=1}^{n-1} y_s A_s. \qquad (18.17)$$

С другой стороны, из равенства (18.16) и из системы (18.1) следует:

$$\dot V = 2\sum_{k=1}^{n} (x_k - \varphi_k(\theta))\Big[f_k(x_1, \ldots, x_n) - \\ - f_k(\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_n(\theta))\frac{d\theta}{dt}\Big].$$

Так как вектор $X - \Phi(p, \theta)$ ортогонален к $F(\Phi(p, \theta))$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \varphi_k(\theta))\,f_k(\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_n(\theta)) = \\ = [X - \Phi(p, \theta)] \cdot F(\Phi(p, \theta)) = 0,$$

то вместо последнего равенства можем написать

$$\dot{V}=2\sum_{k=1}^{n}(x_k-\varphi_k(\theta))(f_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)-$$
$$-f_k(\varphi_1(\theta),\ \ldots,\ \varphi_n(\theta))). \quad (18.18)$$

Отсюда, так же как и в п. 4 § 7, имеем

$$\dot{V}=2\sum_{k=1}^{n}(x_k-\varphi_k(\theta))\sum_{l=1}^{n}\int_0^1\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_l-\varphi_l(\theta))\,du, \quad (18.19)$$

где производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ вычисляются в точке $x_j^*=ux_j+(1-u)\varphi_j(\theta)$, а вектор X^* с компонентами $x_1^*,\ \ldots,\ x_n^*$ таков, что разность $X^*-\Phi(p,\ \theta)$ имеет то же направление, что и $X-\Phi(p,\ \theta)$, но $\|X^*-\Phi(p,\ \theta)\|\leqslant\|X-\Phi(p,\ \theta)\|$. Равенство (18.19), очевидно, означает

$$\dot{V}=2\int_0^1 J(X^*)(X-\Phi(p,\ \theta))\cdot(X-\Phi(p,\ \theta))\,du. \quad (18.20)$$

Перепишем равенство (18.20) в виде

$$\dot{V}=2\int_0^1 J(\Phi(p,\ \theta))(X-\Phi(p,\ \theta))\cdot(X-\Phi(p,\ \theta))\,du+$$
$$+2\int_0^1[J(X^*)-J(\Phi(p,\ \theta))](X-\Phi(p,\ \theta))\cdot(X-\Phi(p,\ \theta))\,du. \quad (18.21)$$

По предположению функция $F(X)$ непрерывно дифференцируема, поэтому матрица $J(X)$ равномерно непрерывна в области D, и, значит, разность $J(X^*)-J(\Phi(p,\ \theta))$ может быть сделана сколь угодно малой по норме, если только величину $\|X-\Phi(p,\ \theta)\|=\|Y\|$ выбрать достаточно малой. Так как вектор $X-\Phi(p,\ \theta)$ ортогонален к $F(\Phi(p,\ \theta))$, то по условию теоремы при достаточно малых $\|Y\|$ будем иметь неравенство

$$\dot{V}<-\frac{3}{2}\Delta\|Y\|^2. \quad (18.22)$$

Потребуем теперь, чтобы величины τ и Y удовлетворяли неравенствам

$$|\tau|\leqslant\beta,\quad \|Y\|<\beta. \quad (18.23)$$

Будем считать β величиной столь малой, что при выполнении неравенств (18.23) выполняются неравенства (18.11), (18.13) и (18.22), причем в неравенстве (18.13) постоянная γ удовлетворяет неравенству

$$\gamma < \frac{\Delta}{8(n-1)}. \tag{18.24}$$

Тогда при выполнении неравенств (18.23), в силу (18.17) и (18.22), будем иметь

$$2\sum_{s=1}^{n-1} y_s(a_{s1}y_1 + \ldots + a_{sn-1}y_{n-1}) < -\frac{5\Delta}{4}\|Y\|^2. \tag{18.25}$$

Заметив это, сделаем преобразование переменных

$$\eta_s = e^{\lambda t}y_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{18.26}$$

где λ — достаточно малая положительная постоянная.

Последние $n-1$ уравнений системы (18.14) примут в новых переменных вид

$$\frac{d\eta_s}{dt} = a_{s1}(t)\eta_1 + \ldots + (a_{ss}(t) + \lambda)\eta_s + \ldots$$
$$\ldots + a_{sn-1}(t)\eta_{n-1} + e^{\lambda t}A_s(e^{-\lambda t}\eta_1, \ldots, e^{-\lambda t}\eta_{n-1}, \tau, t). \tag{18.27}$$

Составим полную производную по времени от функции $V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$ в силу дифференциальных уравнений системы (18.27):

$$\dot V = 2\sum_{s=1}^{n-1}\eta_s(a_{s1}\eta_1 + \ldots + a_{sn-1}\eta_{n-1}) + 2\lambda V(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) +$$
$$+ 2e^{\lambda t}\sum_{s=1}^{n-1}\eta_s A_s(e^{-\lambda t}\eta_1, \ldots, e^{-\lambda t}\eta_{n-1}, \tau, t). \tag{18.28}$$

Если выполняются неравенства

$$|\tau| \leqslant \beta, \quad \sqrt{\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2} \leqslant \beta, \quad t \geqslant 0, \tag{18.29}$$

то из (18.17), (18.24) и (18.25) следует, что

$$\dot V < -\Delta V + 2\lambda V.$$

Выберем λ так, чтобы было $0 < \lambda < \frac{\Delta}{4}$, тогда последнее неравенство дает

$$\dot V < -\frac{\Delta}{2}V \leqslant 0. \tag{18.30}$$

Рассмотрим теперь произвольное решение системы (18.14) с начальными данными $t=0$, $\tau=\tau_0$, $\eta_s=\eta_{s0}$ ($s=1, \ldots, n-1$), удовлетворяющими неравенствам

$$|\tau|<\delta, \quad \sqrt{\eta_{10}^2+\ldots+\eta_{n-10}^2}<\delta, \tag{18.31}$$

где δ — положительная постоянная, меньшая β. Для этого решения условия

$$|\tau(t)|\leqslant\beta, \quad \sqrt{\eta_1^2(t)+\ldots+\eta_{n-1}^2(t)}\leqslant\beta \tag{18.32}$$

будут выполняться по крайней мере для значений t, достаточно близких к начальному $t=0$. Пусть t — момент времени, до которого условия (18.32) выполняются. Тогда во всем промежутке времени $(0, t)$ $\frac{dV}{dt}$ вдоль избранного решения будет отрицательным, и мы можем написать

$$V(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})=V(\eta_{10}, \ldots, \eta_{n-10})+$$
$$+\int_0^t \frac{dV}{dt}\,dt\leqslant V(\eta_{10}, \ldots, \eta_{n-10}). \tag{18.33}$$

Отсюда следует, что на таком промежутке времени выполняется неравенство

$$\sqrt{\eta_1^2(t)+\ldots+\eta_{n-1}^2(t)}<\delta. \tag{18.34}$$

Из замены (18.26) тогда следует, что на таком промежутке времени вдоль рассматриваемого решения выполняется неравенство

$$\|Y(t)\|<\delta e^{-\lambda t}. \tag{18.35}$$

Отсюда и из неравенства (18.11) следует, что на указанном промежутке времени выполняется соотношение

$$|u(Y(t), \tau, t)|<M\delta e^{-\lambda t}. \tag{18.36}$$

Из первого уравнения системы (18.9) следует интегральное равенство

$$\tau(t)=\tau_0+\int_0^t u(Y(t), \tau, t)\,dt.$$

Отсюда в силу (18.36) вытекает, что на промежутке времени, на котором выполнены неравенства (18.32), выполняется и неравенство

$$|\tau(t)| < |\tau_0| + M\delta\int_0^t e^{-\lambda t}\,dt = |\tau_0| + \\ + \frac{M\delta(1-e^{-\lambda t})}{\lambda} < |\tau_0| + \frac{M\delta}{\lambda}. \qquad (18.37)$$

Возьмем произвольное положительное число $E < \beta$. Выберем в неравенствах (18.31) величину δ таким образом, чтобы было

$$\left(1+\frac{M}{\lambda}\right)\delta < E; \qquad (18.38)$$

тогда из (18.37) следует, что на указанном промежутке времени выполняется неравенство

$$|\tau(t)| < E. \qquad (18.39)$$

Покажем, что неравенства (18.34) и (18.39) выполняются при всех $t \geqslant 0$. При $t > 0$ и достаточно малых эти неравенства выполняются, как следует из (18.31). Допустим, вопреки нашему утверждению, что существует такое t^*, что на промежутке времени $0 \leqslant t < t^*$ неравенства (18.34) и (18.39) выполняются, а при $t = t^*$ хотя бы одно из этих неравенств обращается в равенство. Но число E мы выбрали меньше β, и $\delta < E$, как следует из (18.38), поэтому в силу непрерывности функций $\tau(t)$, $\eta_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ существует такое $t_1 > t^*$, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ будут выполняться неравенства (18.32), а тогда из приведенных рассуждений следует, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ будут выполнены и неравенства (18.34) и (18.39). Значит, эти неравенства будут выполнены и при $t = t^*$, что противоречит определению этого момента. Полученное противоречие и доказывает, что неравенства (18.34) и (18.39) выполняются при всех $t \geqslant 0$.

Таким образом, если выполнены неравенства

$$|\tau_0| < \delta, \quad \|Y_0\| < \delta, \qquad (18.40)$$

где τ_0 и Y_0 — начальные данные при $t = 0$ решения системы (18.9), то при всех $t \geqslant 0$ выполняются неравенства (18.35) и (18.39).

Возьмем теперь произвольное число $\varkappa > 0$ и покажем, что если δ достаточно мало, то вдоль выбранного нами решения будет выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \tau(t) = h, \tag{18.41}$$

где $|h| < \varkappa$.

Зафиксируем величину E из промежутка $0 < E < \varkappa$ (мы, конечно, считаем, кроме того, что $E < \beta$). Имеем

$$\tau(t) = \tau_0 + \int_0^t u(Y(t), \tau, t)\,dt.$$

Из оценки (18.36) следует, что интеграл $\int_0^\infty u(Y(t), \tau, t)\,dt$ сходится; положим

$$\int_0^\infty u(Y(t), \tau, t)\,dt = h_1,$$

тогда получим (18.41), где $h = \tau_0 + h_1$. Из оценки (18.37) и неравенства (18.38) следует, что $|h| = |\tau_0 + h_1| < E < \varkappa$.

Оценим разность $h - \tau(t)$. Имеем

$$h - \tau(t) = \int_t^\infty u(Y(t), \tau, t)\,dt,$$

отсюда в силу (18.36) получаем

$$|h - \tau(t)| < M\delta \int_t^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{M\delta}{\lambda} e^{-\lambda t}. \tag{18.42}$$

Как уже отмечалось, в формулах (18.6) функции $\varphi_k(\theta)$ и $\psi_{kl}(\theta)$ непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными при $t \geqslant 0$; следовательно, если величины $|\tau(t)|$, $\|Y(t)\|$ малы, то мала и величина $\|X - \Phi(p, t)\|$. Кроме того, из этих формул нетрудно вывести, что величины $|\tau_0|$ и $\|Y_0\|$ могут быть сделаны сколь угодно малыми выбором достаточно малого $\|X_0 - p\|$. Отсюда следует, что решение $X = \Phi(p, t)$ системы (18.1) устойчиво в смысле Ляпунова. Осталось доказать, что выполняется неравенство (18.4).

Выберем точку q настолько близкой к точке p, чтобы выполнялись неравенства (18.31), в которых величина δ подчиняется неравенству (18.38), а $E \in (0, \varkappa)$. Так как $\theta = t + \tau$, то из формул (18.6) следуют равенства

$$x_k(t) = \varphi_k(t + \tau(t)) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{ki}(t + \tau(t)) y_i(t) \tag{18.43}$$

$$(k = 1, \ldots, n).$$

Вычтем из правых частей этих равенств функции $\varphi_k(t + h)$, где величина h определена выше; будем иметь

$$x_k(t) - \varphi_k(t + h) = \varphi_k(t + \tau(t)) - \varphi_k(t + h) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{ki}(t + \tau(t)) y_i(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18.44}$$

Функции $\psi_{ki}(\theta)$ ограничены при $\theta \geqslant 0$, функции $\varphi_k(\theta)$ имеют ограниченные производные при $\theta \geqslant 0$, поэтому существует такое $L_1 > 0$, что при $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$|x_k(t) - \varphi_k(t + h)| \leqslant \\ \leqslant L_1 |h - \tau(t)| + L_1 \|Y(t)\| \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{18.45}$$

Но $x_k(t)$ — компоненты вектора $\Phi(q, t)$, а $\varphi_k(t + h)$ — компоненты вектора $\Phi(p, t + h)$. Из оценок (18.35) и (18.42) следует, что существует такое L, что

$$\|\Phi(q, t) - \Phi(p, t + h)\| \leqslant L\delta e^{-\lambda t}.$$

Если выбрать $\delta \leqslant \frac{1}{L}$, то мы и получим неравенство (18.4), при этом, как уже было показано, $|h| < \varkappa$.

Теорема доказана.

Теорема 18.2. *Предположим, что выполнены условия предыдущей теоремы и существует решение $X = \Phi(q, t)$ системы* (18.1), *располагающееся при $t \geqslant 0$ в некоторой замкнутой области, погруженной в D. Тогда в D имеется замкнутая траектория системы* (18.1).

Доказательство. Пусть Ω — предельное множество полутраектории $\Phi(q, t)$ при $t \geqslant 0$. Ясно, что $\Omega \subset D$. Из следствия 1.2 вытекает, что в Ω существует точка p, через которую проходит рекуррентная траектория $\Phi(p, t)$. При всех t $\Phi(p, t) \in \Omega$, а так как множество Ω замкнуто, то существует замкнутая область, погруженная в D, в которой содержится $\Phi(p, I_0)$. Как отмечалось в § 1, всякое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону. Следовательно, решение $\Phi(p, t)$ устойчиво по Пуассону, и, кроме того, в силу предыдущей теоремы для него выполняется соотношение (18.4). Если положить $\alpha(t) = e^{-\lambda t}$, то для движения $\Phi(p, t)$ будут выполнены все условия теоремы 1.6, из которой следует, что движение $\Phi(p, t)$ периодическое.

Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 18.1 следует, что это периодическое решение устойчиво в смысле Ляпунова и любое решение, начинающееся в достаточно малой окрестности его траектории, стремится к этой траектории при $t \to +\infty$, т. е. это периодическое решение орбитально асимптотически устойчиво.

Докажем теперь теорему о единственности периодических решений в некоторых областях.

Теорема 18.3. *Пусть в области D выполняются условия теоремы* 18.1. *Пусть, кроме того, область D обладает тем свойством, что при всяком $p \in \overline{D}$ решение $\Phi(p, t)$ лежит в D при $t > 0$. Тогда в области D существует единственное периодическое решение, оно устойчиво в смысле Ляпунова, и любое решение стремится к его траектории при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $p \in \overline{D}$ и решение $\Phi(p, t)$, проходящее через эту точку при $t = 0$. Пусть Ω — предельное множество положительной полутраектории $\Phi(p, t)$. Ясно, что $\Omega \subset \overline{D}$; покажем, что справедливо и более точное соотношение: $\Omega \in D$. Предположим, напротив, что существует точка $q \in \Omega$, лежащая на границе области D. Рассмотрим точку $\Phi(q, t_1)$, где $t_1 < 0$. Множество Ω есть предельное множество для $\Phi(p, t)$, и потому оно инвариантно, следовательно, $\Phi(q, t_1) \in \Omega \subset \overline{D}$. По условию теоремы имеем $\Phi(\Phi(q, t_1), -t_1) = q \in D$. Это противоречит предположению, сделанному о точке q. Полученное противоречие и доказывает, что $\Omega \subset D$. Отсюда и из теоремы 18.2 следует, что существует точка $r \in \Omega$, через которую проходит периодическое решение $\Phi(r, t)$ системы (18.1).

Как было показано выше, решение $\Phi(r, t)$ устойчиво в смысле Ляпунова, и любое решение, начинающееся в достаточно малой окрестности траектории $\Phi(r, I_0)$, стремится к $\Phi(r, I_0)$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим множество A тех точек области D, через которые проходят траектории, стремящиеся к $\Phi(r, I_0)$. Множество A открыто. Действительно, пусть $p \in A$, тогда $\Phi(p, t) \to \Phi(r, I_0)$ при $t \to +\infty$; следовательно, по теореме об интегральной непрерывности все решения, начинающиеся в достаточной близости от точки p, попадают в сколь угодно малую окрестность $\Phi(r, I_0)$ и, значит, стремятся к $\Phi(r, I_0)$ при $t \to \infty$. Это доказывает, что множество A открыто.

Если множество A совпадает с D, то теорема доказана. Допустим, что A не совпадает с D. Пусть Σ — граница множества A. Из самого определения A следует, что если $p \in \Sigma$, то $\Phi(p, t) \in \Sigma$ при всех t. Кроме того, ясно, что Σ — множество замкнутое. Так же, как и выше, мы докажем, что на Σ существует точка s, через которую проходит периодическое решение $\Phi(s, t)$. Ясно, что траектории $\Phi(r, I_0)$ и $\Phi(s, I_0)$ не пересекаются. По теореме 18.1 все решения, начинающиеся в достаточно малой окрестности траектории $\Phi(s, I_0)$, стремятся к $\Phi(s, I_0)$ при $t \to \infty$. Но тогда точка s не может быть граничной для A. Мы получили противоречие, которое и доказывает, что $A = D$.

Теорема доказана.

§ 19. Существование периодического решения у одной автономной системы трех дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы изучим одну конкретную систему, встречающуюся в приложениях, опираясь на сформулированный выше принцип тора [81].

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a[f(x) - (1+b)x - z], \\ \frac{dy}{dt} &= -c[f(x) - x - z], \\ \frac{dz}{dt} &= -d(y+z). \end{aligned}\right\} \qquad (19.1)$$

Система эта встречается при изучении колебательных явлений в электрических цепях.

В этой системе a, b, c и d — положительные постоянные, а функция $f(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию единственности решений в окрестности каждой точки x. Мы будем считать еще, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x=0$.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что выполняются следующие условия:

$$xf(x)>0 \quad \text{при} \quad x\neq 0, \tag{19.2}$$

$$|f(x)|<M \quad \text{при всех } x, \tag{19.3}$$

где M — некоторая постоянная;

$$g>\frac{c}{2a}+\frac{d}{2a}+(1+b)-\sqrt{\left(\frac{c}{2a}-\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{bc}{a}}, \tag{19.4}$$

где $g=f'(0)$;

$$d>4{,}6c\sup_{-\infty<x<+\infty}\frac{f(x)}{x}+9{,}7c+5a+2{,}4ab. \tag{19.5}$$

При этих условиях мы и докажем наличие у системы (19.1) периодического решения.

Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то систему (19.1) можно представить в виде одного уравнения третьего порядка. Для этого надо продифференцировать первое уравнение системы два раза по t и исключить по обычным правилам y, $\dot{y}$, z и $\dot{z}$; в итоге получится следующее уравнение:

$$\dddot{x}+[d+a(1+b)-af'(x)]\,\ddot{x}-af''(x)\,\dot{x}^2+$$
$$+[cd+ad(1+b)-adf'(x)]\,\dot{x}+abcdx=0. \tag{19.6}$$

1. Состояниями равновесия системы (19.6) служат точки, в которых одновременно выполняются равенства

$$f(x)-(1+b)\,x-z=0,$$
$$f(x)-x-z=0,$$
$$y+z=0.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим $x=0$. Из условия (19.2) и непрерывности $f(x)$ следует, что $f(0)=0$, и тогда ясно, что $y = z = 0$. Таким образом, система (19.1) имеет единственное состояние равновесия — начало координат.

Изучим поведение решений в окрестности этого состояния равновесия. Положим $f(x) = gx + S(x)$. Так как $f(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности $x = 0$, то ясно, что $\frac{S(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$. Система (19.1) переписывается в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a[(g-1-b)x - z] + aS(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -c[(g-1)x - z] + cS(x), \\ \frac{dz}{dt} &= -d(y+z). \end{aligned}\right\} \qquad (19.7)$$

Наряду с этой системой рассмотрим „линеаризованную“:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a[(g-1-b)x - z], \\ \frac{dy}{dt} &= -c[(g-1)x - z], \\ \frac{dz}{dt} &= -d(y+z). \end{aligned}\right\} \qquad (19.8)$$

Линеаризованное уравнение третьего порядка запишется в виде

$$\dddot{x} + [d + a(1+b) - ag]\ddot{x} + \\ + [cd + ad(1+b) - adg]\dot{x} + abcdx = 0. \qquad (19.9)$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + [d + a(1+b) - ag]\lambda^2 + \\ + [cd + ad(1+b) - adg]\lambda + abcd = 0. \qquad (19.10)$$

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — корни этого уравнения. Ясно, что

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -abcd < 0. \qquad (19.11)$$

Отсюда следует, что характеристическое уравнение имеет хотя бы один отрицательный корень. Для определенности будем считать, что $\lambda_1 < 0$.

Условия Гурвица отрицательности действительных частей корней уравнения (19.10) имеют вид

$$abcd > 0, \tag{19.12}$$

$$d + a(1 + b) - ag > 0, \tag{19.13}$$

$$[d + a(1+b) - ag][cd + ad(1+b) - a\,dg] - abcd > 0. \tag{19.14}$$

Последнее неравенство может быть переписано в виде

$$g^2 - \left[\frac{c}{a} + 2(1+b) + \frac{d}{a}\right]g + \\ + \frac{c}{a} + \frac{cd}{a^2} + \frac{d}{a}(1+b) + (1+b)^2 > 0. \tag{19.15}$$

Это неравенство выполняется, если выполнено одно из двух следующих неравенств:

$$g < \frac{c}{2a} + \frac{d}{2a} + (1+b) - \sqrt{\left(\frac{c}{2a} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{bc}{a}}, \tag{19.16}$$

$$g > \frac{c}{2a} + \frac{d}{2a} + (1+b) + \sqrt{\left(\frac{c}{2a} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{bc}{a}}. \tag{19.17}$$

Неравенство (19.13) дает

$$g < \frac{d}{a} + 1 + b. \tag{19.18}$$

Так как

$$\frac{c}{2a} + \frac{d}{2a} + (1+b) - \sqrt{\left(\frac{c}{2a} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{bc}{a}} < \frac{d}{a} + 1 + b < \\ < \frac{c}{2a} + \frac{d}{2a} + (1+b) + \sqrt{\left(\frac{c}{2a} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \frac{bc}{a}}, \tag{19.19}$$

то ясно, что условия Гурвица (19.12)—(19.14) выполняются тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (19.16). Из условия (19.4) следует, что условия Гурвица не выполнены в рассматриваемом случае, т. е. характеристическое уравнение (19.10) имеет хотя бы один корень с положительной действительной частью. Из (19.11) следует, что таких корней ровно два; значит,

$$\operatorname{Re}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_3 > 0. \tag{19.20}$$

Ясно, что при наших условиях линеаризованная система имеет две траектории, стремящиеся к началу координат при $t \to +\infty$.

Обе эти траектории представляют собой лучи одной и той же прямой. Направление этой прямой будем называть главным направлением.

Система (19.1) также имеет ровно две траектории, стремящиеся к началу координат при $t \to +\infty$. Траектории эти касаются главного направления в начале координат. Все остальные траектории системы (19.1), начинающиеся в сколь угодно малой окрестности начала координат, покидают некоторую фиксированную окрестность начала при возрастании времени t.

Уточним расположение главного направления в фазовом пространстве. Уравнение (19.9) имеет частное решение

$$x = e^{\lambda_1 t}. \tag{19.21}$$

Подставим это решение в первое уравнение системы (19.8), тогда получим

$$z = \left[g - (1 + b) - \frac{\lambda_1}{a}\right] x. \tag{19.22}$$

Подставляя это в третье уравнение системы (19.8) и принимая во внимание (19.21), получаем

$$y = -\left(1 + \frac{\lambda_1}{d}\right) z. \tag{19.23}$$

Уравнения (19.22) и (19.23) и определяют главное направление. Положим

$$\alpha = g - (1 + b) - \frac{\lambda_1}{a}, \tag{19.24}$$

$$\beta = 1 + \frac{\lambda_1}{d}, \tag{19.25}$$

тогда уравнения главного направления примут вид

$$z = \alpha x, \tag{19.26}$$

$$y = -\beta z. \tag{19.27}$$

Направляющие косинусы этого направления будут равны

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 (1 + \beta^2)}}, \quad Y = \frac{-\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2 (1 + \beta^2)}},$$

$$Z = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 (1 + \beta^2)}}. \tag{19.28}$$

В дальнейшем нам понадобится оценка величины угла между главным направлением и прямой $x=0$, $y=z$. Направляющие косинусы этой прямой равны $X=0$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, косинус η угла между указанными прямыми равен

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha(1-\beta)}{\sqrt{1+\alpha^2(1+\beta^2)}}. \qquad (19.29)$$

Обозначим через $P(\lambda)$ левую часть уравнения (19.10). Имеем

$$P(-d)=-cd^2+abcd. \qquad (19.30)$$

Из условия (19.25) следует неравенство

$$P(-d)<0. \qquad (19.31)$$

Так как λ_1 — единственный отрицательный корень уравнения (19.10), то ясно, что

$$\lambda_1>-d. \qquad (19.32)$$

Пусть k — некоторое число из интервала (0, 1); имеем

$$P(-kd)=k^2(1-k)d^3+ \\ +k(1-k)ad^2[g-(1+b)]-kcd^2+abcd. \qquad (19.33)$$

Из условия (19.4) получаем

$$g-(1+b)>\frac{c}{2a}+\frac{d}{2a}-\sqrt{\left(\frac{c}{2a}-\frac{d}{2a}\right)^2+\frac{bc}{a}}. \qquad (19.34)$$

Отсюда и из условия (19.5) следует, что

$$g-(1+b)>0. \qquad (19.35)$$

Найдем условие, при котором выполняется неравенство

$$k^2(1-k)d^3>kcd^2. \qquad (19.36)$$

Так как $k>0$, то это неравенство равносильно следующему:

$$k(1-k)d>c.$$

Из (19.5) вытекает неравенство

$$d>9{,}7c,$$

Поэтому предыдущее неравенство будет выполнено при условии, что

$$k(1-k) \geqslant \frac{1}{9{,}7},$$

следовательно, если $k=0{,}876$, то выполняется неравенство (19.36). Из неравенства (19.36) и из (19.33) находим

$$P(-0{,}876d) > 0.$$

Отсюда и из (19.32) вытекают неравенства

$$-d < \lambda_1 < 0{,}876d. \tag{19.37}$$

Из этих неравенств и условия (19.5) следуют неравенства

$$\alpha > 4{,}38, \tag{19.38}$$

$$\beta < 0{,}124. \tag{19.39}$$

Отсюда и из (19.29) получаем окончательно

$$\eta > 0{,}60. \tag{19.40}$$

2. Переходим теперь непосредственно к построению торообразной поверхности без контакта. В качестве боковых границ выберем две прямые круговые конические поверхности с общей вершиной в начале координат. Осью этих поверхностей служит прямая $x=0$, $y=z$, а образующие наклонены под углом ξ к плоскости $y+z=0$. Уравнения этих поверхностей имеют, очевидно, вид

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \pm\sin\xi. \tag{19.41}$$

Покажем, что векторы поля направлений системы (19.1) пересекают поверхности (19.41) в направлении к плоскости $y+z=0$, если $\sin\xi=\frac{1}{2}$, т. е. покажем, что траектории системы (19.1) пересекают поверхности (19.41), переходя в область, ограниченную обеими этими поверхностями. Остановимся для определенности на одной из таких поверхностей: рассмотрим поверхность

$$\frac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2}. \tag{19.42}$$

Пусть

$$v = \frac{y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{19.43}$$

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что производная от v по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (19.1), отрицательна при $v=\frac{1}{2}$. Докажем это. Положим

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{19.44}$$

$$\dot{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{y}+\dot{z}}{\rho}-\frac{v\sqrt{2}\,(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})}{\rho^2}\right). \tag{19.45}$$

Подставляя сюда вместо производных их значения, взятые из системы (19.1), получаем

$$\begin{aligned}\dot{v}\sqrt{2}=-\frac{c}{\rho}f(x)+\frac{c}{\rho}x+\frac{c}{\rho}z-\frac{d}{\rho}y-\frac{d}{\rho}z-{}\\ -\frac{av\sqrt{2}}{\rho^2}xf(x)+\frac{av\sqrt{2}}{\rho^2}(1+b)x^2+\frac{av\sqrt{2}}{\rho^2}xz+{}\\ +\frac{cv\sqrt{2}}{\rho^2}yf(x)-\frac{cv\sqrt{2}}{\rho^2}yx-\frac{cv\sqrt{2}}{\rho^2}yz+{}\\ +\frac{dv\sqrt{2}}{\rho^2}yz+\frac{dv\sqrt{2}}{\rho^2}z^2.\end{aligned} \tag{19.46}$$

Из равенств (19.43) и (19.44) находим

$$z=\frac{v\rho\pm\rho\sqrt{1-v^2-\frac{x^2}{\rho^2}}}{\sqrt{2}}, \tag{19.47}$$

$$y=\frac{v\rho\mp\rho\sqrt{1-v^2-\frac{x^2}{\rho^2}}}{\sqrt{2}}, \tag{19.48}$$

где знаки перед радикалами должны быть противоположными, если эти соотношения рассматриваются одновременно.

Используя (19.47) и (19.48) и вводя обозначение $x=\rho w$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{v}\sqrt{2}=\frac{c(v^2-1)}{\rho}f(\rho w)\mp\frac{cv}{\rho}f(\rho w)\sqrt{1-v^2-w^2}-{}\\ -\frac{av\sqrt{2}}{\rho}wf(\rho w)-v(1-v^2)\sqrt{2}\,(d-c)+{}\\ +[av^2+c(1-v^2)]\,w\pm(av+cv)\,w\sqrt{1-v^2-w^2}\pm{}\\ \pm\left(dv^2\sqrt{2}+\frac{c}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-a^2-w^2}-{}\\ -\left(\frac{cv}{\sqrt{2}}-av\sqrt{2}-abv\sqrt{2}\right)w^2,\end{aligned} \tag{19.49}$$

где $w^2 \leqslant 1 - v^2$. Оценим сверху правую часть последнего равенства при $v = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$\dot{v}\sqrt{2} \leqslant -\left(\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)d + \\ + c\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \sup_{-\infty < x < +\infty} \frac{f(x)}{x} + \\ + \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)c + \\ + \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)a + \frac{3\sqrt{2}}{8}ab. \qquad (19.50)$$

Вычисляя значения радикалов, входящих в последнюю оценку, и используя условие (19.5), мы получим

$$\dot{v} < 0 \qquad (19.51)$$

при $v = \frac{1}{2}$.

Совершенно аналогично докажется, что при $v = -\frac{1}{2}$ $\dot{v} > 0$. Таким образом, траектории системы (19.1) пересекают поверхности $v = \pm\frac{1}{2}$, переходя при этом в область $|v| < < \frac{1}{2}$.

Построим теперь внешнюю границу нашей торообразной области. Рассмотрим для этого функцию

$$u = \frac{1}{c^2}y^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{y}{c} + \frac{x}{a}\right)^2 + \frac{z^2}{cd}. \qquad (19.52)$$

Производная от этой функции по времени, вычисленная в силу дифференциальных уравнений системы (19.1), как нетрудно проверить, равна

$$\dot{u} = -\frac{2}{c}yf(x) - \frac{2x^2}{a} - \frac{2z^2}{c}. \qquad (19.53)$$

Из вида этой производной и из условия (19.3) непосредственно следует, что если u достаточно велико, а $|v| \leqslant \frac{1}{2}$, то $\dot{u} < 0$. Поэтому в качестве внешней границы нашей области может быть выбрана эллиптическая поверхность $u=L$ при достаточно большом положительном L.

Область, ограниченная поверхностями $v=\pm\frac{1}{2}$ и $u=L$, гомеоморфна тору. Однако ее еще нельзя использовать для доказательства существования периодического решения с помощью принципа тора, так как на ее границе располагается состояние равновесия, и может оказаться, что, применяя теорему Брауэра, мы докажем существование неподвижной точки — начала координат. В связи с этим мы сейчас введем внутреннюю граничную поверхность, отделяющую наш тор от начала координат.

В силу установленного ранее неравенства (19.40) главное направление лежит вне области $|v|\leqslant\frac{1}{2}$. С другой стороны, так как имеют место неравенства (19.20), то мы можем окружить главное направление семейством цилиндров, которые пересекаются траекториями линейной системы (19.8) изнутри наружу. Для того чтобы это сделать, приведем систему (19.8) к каноническому виду:

$$\left.\begin{aligned}\dot q_1&=\lambda_1 q_1,\\ \dot q_2&=\mu_1 q_2-\varkappa q_3,\\ \dot q_3&=\varkappa q_2+\mu_2 q_3.\end{aligned}\right\}\qquad(19.54)$$

Ось q_1 пойдет вдоль главного направления. Оси q_2 и q_3 будут зависеть от корней λ_2 и λ_3. При этом если λ_2 и λ_3 вещественны, то $\varkappa=0$ и $\mu_1=\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_3$, а если λ_2 и λ_3 — комплексные сопряженные, то $\mu_1=\mu_2=\operatorname{Re}\lambda_2$. В обоих случаях, как следует из (19.20), $\mu_1>0$, $\mu_2>0$.

Если в системе (19.7) перейти к координатам q_1, q_2, q_3, то мы получим систему

$$\left.\begin{aligned}\dot q_1&=+\lambda_1 q_1+c_1 S(x),\\ \dot q_2&=\mu_1 q_2-\varkappa q_3+c_2 S(x),\\ \dot q_3&=\varkappa q_2+\mu_2 q_3+c_3 S(x),\end{aligned}\right\}\qquad(19.55)$$

где c_1, c_2 и c_3 — некоторые постоянные.

Рассмотрим функцию

$$\varphi=q_2^2+q_3^2.\qquad(19.56)$$

Ее производная по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (19.7), равна

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}=\mu_1 q_2^2+\mu_2 q_3^2+(c_2 q_2+c_3 q_3)\,S(x). \tag{19.57}$$

Так как $\frac{S(x)}{x}\to 0$ при $x\to 0$, а главное направление лежит вне области $|v|\leqslant\frac{1}{2}$, то при достаточно малом K поверхность

$$q_2^2+q_3^2=K \tag{19.58}$$

при $|v|\leqslant\frac{1}{2}$ пересекается траекториями при возрастании φ, т. е. изнутри наружу. Поверхность (19.58) и примем за внутреннюю границу.

Область R, ограниченная поверхностями $v=\pm\frac{1}{2}$, $u=L$ и $\varphi=K$, как нетрудно видеть, гомеоморфна тору, а ее граница Σ, как мы показали, пересекается траекториями системы (19.1) снаружи внутрь. Таким образом, для того чтобы установить наличие периодического решения, осталось показать, что в торе R имеется сечение без контакта такое, что любая траектория, начинающаяся на этом сечении, пересекает его еще раз при возрастании времени. Покажем это.

Пусть D_1 — сечение области R полуплоскостью $x=0$, $z<0$; D_2 — полуплоскостью $x=0$, $z>0$. Сечения эти представляют собой, очевидно, односвязные области. При этом замкнутая область $\overline{D_1}$ лежит в области $x=0$, $y>0$, $z<0$, а $\overline{D_2}$ — в области $x=0$, $y<0$, $z>0$.

Сечения $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$ не имеют контакта с полем направлений системы (19.1); действительно, при $x=0$ имеем

$$\dot{x}=-az; \tag{19.59}$$

отсюда и следует наше утверждение. Траектории системы (19.1) пересекают сечение $\overline{D_1}$, переходя из полупространства $x<0$ в полупространство $x>0$; сечение же D_2 пересекается траекториями в обратном направлении. При этом ясно, что если траектория начинается в точке полупространства $x>0$, лежащей в $\overline{R}$ достаточно близко к $\overline{D_2}$, то при возрастании t эта траектория пересечет D_2. Аналогично, если траектория начинается в точке полупространства $x<0$, лежащей в $\overline{R}$ достаточно близко к $\overline{D}_1$, то при возрастании t эта траектория пересекает D_1.

Рассмотрим решение $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы (19.1), начинающееся при $t=0$ в $\overline{D}_1$. При всех $t>0$ решение это находится в области R. При $t>0$ и достаточно малых окажется $x(t)>0$. При дальнейшем возрастании t наше решение не может попасть на сечение D_1 из полупространства $x(t)>0$, так как это сечение пересекается траекториями в обратном направлении. Следовательно, возможно одно из двух: либо при всех t $x(t)>0$, либо рассматриваемое решение при положительном t пересекает сечение D_2.

Покажем, что реализуется именно второй случай. Допустим напротив, что это не так, т. е. предположим, что при всех $t>0$ $x(t)>0$. Тогда существует такое $\delta>0$, что при $t\geqslant 1$ $x(t)>\delta$; действительно, если бы такого δ не существовало, то из приведенного выше свойства сечений $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ следовало бы, что существует $t^*>\frac{1}{2}$ такое, что при $t=t^*$ наше решение лежит либо на D_1, либо на D_2, т. е. $x(t^*)=0$, что противоречит нашему предположению.

Умножим первое из уравнений системы (19.1) на c, второе на a и сложим, тогда получим уравнение

$$c\frac{dx}{dt}+a\frac{dy}{dt}=-abcx. \tag{19.60}$$

Проинтегрируем это уравнение вдоль рассматриваемого нами решения от 1 до t; получим

$$cx+ay-cx(1)-ay(1)=-abc\int_1^t x(t)\,dt. \tag{19.61}$$

Но при $t\geqslant 1$ $x(t)>\delta$, поэтому равенство (19.61) дает

$$cx+ay-cx(1)-ay(1)<-abc\,\delta(t-1). \tag{19.62}$$

Устремляя здесь $t\to+\infty$, получаем соотношение

$$cx(t)+ay(t)\to-\infty \quad \text{при } t\to\infty. \tag{19.63}$$

Это соотношение противоречит тому, что при всех $t>0$ рассматриваемое нами решение лежит в ограниченной области R. Полученное противоречие и доказывает, что рассматриваемое нами решение при возрастании t пересекает сечение D_2.

Аналогично докажется, что при дальнейшем возрастании t наше решение опять пересечет сечение D_1.

Пусть $t=\tau>0$ — первый после $t=0$ момент пересечения нашего решения с D_1. Поставим в соответствие точке $x=x(0)=0$, $y=y(0)$, $z=z(0)$ точку $x=x(\tau)=0$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$. Так как точка $y=y(0)$, $z=z(0)$ — произвольная точка сечения $\overline{D}_1$, то мы получаем, таким образом, преобразование T сечения $\overline{D_1}$ в себя. Преобразование это, как нетрудно видеть, непрерывно; следовательно, по теореме Брауэра в D_1 имеется неподвижная точка этого преобразования. Через эту точку проходит замкнутая траектория системы (19.1).

Итак доказана

Теорема 19.1. *При выполнении условий* (19.2) — (19.5) *система* (19.1) *имеет периодическое решение, отличное от состояния равновесия.*

3. При сформулированных условиях весьма затруднительно (если вообще возможно) установить устойчивость в малом и единственность того периодического решения, существование которого было только что доказано. Однако удается доказать, что любое решение системы (19.1) не удаляется от периодического слишком далеко. Точнее говоря, можно доказать, что любая траектория (кроме двух, примыкающих к началу координат) попадает в область R с возрастанием времени и там остается.

Докажем это. Возьмем произвольную точку p фазового пространства и покажем, что траектория $\Phi(p, t)$ либо стремится при $t\to+\infty$ к началу координат, либо при $t\geqslant 0$ пересекает плоскость $y+z=0$. Пусть точка p имеет координаты x_0, y_0, z_0. Будем для определенности считать, что $y_0+z_0>0$. Предположим, что при $t\geqslant 0$ на $\Phi(p, t)$ выполняется неравенство

$$y(t)+z(t)>0. \tag{19.64}$$

Покажем, что тогда траектория $\Phi(p, t)$ ограничена при $t\geqslant 0$. Из неравенства (19.64) следует, что z вдоль $\Phi(p, t)$ убывает.

Предположим сначала, что $z(t)$ ограничено при $t\geqslant 0$. Из первого уравнения системы (19.1) и из условия (19.3) следует, что тогда на $\Phi(p, t)$ ограничен также и x, ибо при достаточно больших $|x|$ $\operatorname{sign}\dot{x} = -\operatorname{sign} x$. Деля второе уравнение системы (19.1) на третье, получаем

$$\frac{dy}{dz} = \frac{c}{d}\,\frac{f(x) - x - z}{y + z}. \tag{19.65}$$

Из этого уравнения следует, что при достаточно больших $|y|$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{dy}{dz}\right| < 1,$$

а отсюда и из ограниченности z следует ограниченность y. Таким образом, в случае ограниченности z ограничена и полутраектория $\Phi(p, t)$, $t \geqslant 0$.

Предположим теперь, что $z(t)$ не ограничено при $t \geqslant 0$. Так как $\dot{z}(t) < 0$ при $t \geqslant 0$ в силу неравенства (19.64), то $z(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, существует такое t_1, что при $t \geqslant t_1$

$$z(t)\,\frac{b}{2+b} < -M, \tag{19.66}$$

где M — число, фигурирующее в условии (19.3).

Из первого уравнения системы (19.1) тогда следует, что существует такое $t_2 \geqslant t_1$, что при $t \geqslant t_2$ выполняется неравенство

$$x(t) < -\frac{2z(t)}{2+b}. \tag{19.67}$$

Действительно, при

$$x \geqslant -\frac{2z}{2+b}$$

x вдоль $\Phi(p, t)$ убывает, а так как $z(t)$ убывает при всех $t \geqslant 0$, то отсюда и следует неравенство (19.67). Из этого неравенства и из второго уравнения системы (19.1) вытекает неравенство

$$\frac{dy}{dt} < -c\left[f(x) + \frac{2z}{2+b} - z\right],$$

или

$$\frac{dy}{dt} < -c\left[f(x) - \frac{bz}{2+b}\right].$$

А отсюда и из (19.66) следует, что при $t \geqslant t_2$ $\frac{dy}{dt} < 0$; таким образом, на $\Phi(p, t)$ y ограничен сверху при $t \to +\infty$, Это противоречит неравенству (19.64) и соотношению $z(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$.

Полученное противоречие и доказывает, что полутраектория $\Phi(p, t)$, $t \geqslant 0$, ограничена.

Так как траектория $\Phi(p, t)$ ограничена при $t \geqslant 0$, то она имеет ω-предельную точку q. Пусть x_1, y_1, z_1 — координаты точки q. На траектории $\Phi(p, t)$ z ограничено, кроме того, из неравенства (19.64) и из последнего уравнения системы (19.3) вытекает, что $\dot{z}(t) < 0$, и, следовательно,

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = z_1.$$

Так как $\Phi(t)$ ограничена при $t \geqslant 0$, то ограничена и ее предельная траектория $\Phi(q, I_0)$.

Из последнего равенства следует, что на $\Phi(q, t)$ при всех t оказывается $z = z_1$. Значит, на этой траектории $\dot{z} = 0$ и, следовательно, $y + z = 0$, т. е.

$$y = -z_1. \tag{19.68}$$

Тогда из второго уравнения системы (19.1) вытекает, что на $\Phi(q, t)$ при всех t выполняется равенство

$$z_1 = f(x) - x. \tag{19.69}$$

Отсюда и из первого уравнения системы следует, что на траектории $\Phi(q, t)$ при всех t выполняется равенство

$$\frac{dx}{dt} = -abx. \tag{19.70}$$

Это равенство показывает, что на $\Phi(q, t)$ $x = 0$ при всех t, ибо если бы при $t = t_0$ было $x = x_0 \neq 0$, то из (19.70) следовало бы, что на $\Phi(q, t)$ $x = x_0 e^{-ab(t-t_0)}$ и при $t \to -\infty$ x на $\Phi(q, t)$ не был бы ограничен, что невозможно в силу ограниченности $\Phi(q, I_0)$. А тогда на $\Phi(q, t)$ при всех t выполняются равенства

$$x = 0, \quad z = z_1 = 0, \quad y = y_1 = 0, \tag{19.71}$$

т. е. точка q совпадает с состоянием равновесия, расположенным в начале координат.

Таким образом, если траектория $\Phi(p, t)$ не пересекает плоскость $y + z = 0$, то она стремится к началу координат.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 19.2. *Если траектория* $\Phi(p, t)$ *системы* (19.1) *не стремится к началу координат при* $t \to +\infty$, *то при возрастании времени эта траектория попадает в область* R *и при дальнейшем возрастании* t *эту область не покидает.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi(p, t)$ не стремится к началу координат при $t \to +\infty$, тогда, как было только что показано, $\Phi(p, t)$ пересекает плоскость $y + z = 0$ при $t \geqslant 0$. Поэтому, не нарушая общности, можем считать, что точка p лежит на этой плоскости.

Как было показано в начале предыдущего пункта, траектория $\Phi(p, t)$ при всех $t \geqslant 0$ лежит в области $|v| < \frac{1}{2}$, где v — функция, введенная формулой (19.43).

Если точка p лежит при этом в замкнутой области $\overline{R}$, то теорема доказана, так как траектории системы (19.1) пересекают границу R снаружи внутрь. Пусть же p не лежит в $\overline{R}$. Тогда возможно одно из двух: либо в точке p $u > L$, либо в этой точке $\varphi < K$.

Остановимся на первом случае. Из самого выбора постоянной L и из равенства (19.53) следует, что при $u \geqslant L$ и $|v| \leqslant \frac{1}{2}$ $\dot{u} < 0$.

Предположим, вопреки нашему утверждению, что $\Phi(p, t)$ при всех t лежит за пределами области R. Тогда ясно, что на $\Phi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ выполняются неравенства $|v| \leqslant \frac{1}{2}$, $L \leqslant u \leqslant u_0$, где u_0 — значение функции u в точке p. Множество $\left\{|v| \leqslant \frac{1}{2},\ L \leqslant u \leqslant u_0\right\}$, очевидно, ограничено; следовательно, траектория $\Phi(p, t)$ имеет ω-предельную точку q, лежащую в этом множестве. Пусть u_1 — значение функции u в точке q. Ясно, что на $\Phi(p, t)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_1. \tag{19.72}$$

Рассмотрим траекторию $\Phi(q, t)$. Эта траектория является ω-предельной для $\Phi(p, t)$ и потому лежит в множестве $\left\{|v| \leqslant \frac{1}{2},\ L \leqslant u \leqslant u_0\right\}$. Отсюда следует, что вдоль траектории $\Phi(q, t)$ функция u убывает, и, следовательно, в точке $\Phi(q, t_1)$ $u < u_1$, если $t_1 > 0$. Но точка $\Phi(q, t_1)$ есть ω-предельная точка для $\Phi(p, t)$. Отсюда и из непрерывности u следует, что существует такое t^*, что при $t = t^*$ на $\Phi(p, t)$ выполняется соотношение $u < u_1$. Это противоречит тому, что вдоль $\Phi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ функция u убывает, и соотношению (19.72). Противоречие доказывает, что траектория $\Phi(p, t)$ попадает в область R.

Если в точке p $\varphi < K$, то аналогично доказывается, что $\Phi(p, t)$ попадает в область R при возрастании времени t. Теорема доказана.

4. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Как было показано в начале настоящего параграфа, линеаризованная система (19.8) имеет один отрицательный корень характеристического уравнения и два с положительными действительными частями, т. е. при достаточно малых x рассматриваемая нами система (19.1) весьма близка к линейной системе с двумя положительными характеристическими показателями. Это и позволило нам построить внутреннюю, цилиндрическую часть границы Σ области R.

При достаточно больших x система (19.1), наоборот, весьма близка к линейной системе с отрицательными характеристическими показателями. Действительно, перепишем систему (19.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\left\{\left[\frac{f(x)}{x} - (1+b)\right]x - z\right\}, \\ \frac{dy}{dt} &= -c\left\{\left[\frac{f(x)}{x} - 1\right]x - z\right\}, \\ \frac{dz}{dt} &= -d(y+z). \end{aligned}\right\} \tag{19.73}$$

Ясно, что наша система, в силу условия (19.3), при достаточно больших x сколь угодно близка к системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a[(1+b)x + z], \\ \frac{dy}{dt} &= c(x+z), \\ \frac{dz}{dt} &= -d(y+z). \end{aligned}\right\} \tag{19.74}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\lambda^3 + [d + a(1+b)]\lambda^2 + d[c + a(1+b)]\lambda + \\ + abcd = 0. \tag{19.75}$$

Условия Гурвица для уравнения (19.75) запишутся следующим образом:

$$abcd > 0, \quad d + a(1+b) > 0,$$
$$[d + a(1+b)][cd + ad(1+b)] - abcd > 0.$$

Эти условия выполнены при положительных a, b, c и d. Таким образом, корни характеристического уравнения системы (19.74) имеют отрицательные действительные части.

Близость системы (19.1) к системе (19.74) и позволила построить внешнюю эллиптическую часть границы области R.

Итак, система (19.1) такова, что при малых x „большинство" решений „отталкивается" от начала координат, а при больших x, наоборот, решения „притягиваются" к началу. Это и позволяет построить торообразную область R, ограниченную поверхностью без контакта.

Аналогичные соображения позволяют установить наличие периодических решений для многомерных систем в целом ряде весьма интересных случаев (см. работы [82—88]).

Однако оказывается, что и в тех случаях, когда система удовлетворяет так называемым обобщенным условиям Гурвица, могут появляться периодические решения. Изучению таких систем посвящаются заключительные параграфы книги.

§ 20. Изучение одного дифференциального уравнения с нелинейностью, удовлетворяющей обобщенному условию Гурвица

В этом и следующих параграфах мы будем изучать уравнение

$$\frac{d^3\xi}{dt_1^3} + f_1\left(\frac{d^2\xi}{dt_1^2}\right) + a_1\frac{d\xi}{dt_1} + b_1\xi = 0, \tag{20.1}$$

где a_1, b_1 — положительные постоянные, а функция $f_1(\eta)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности каждой точки η.

Перейдем от уравнения (20.1) к системе, положив

$$x = \frac{d^2\xi}{dt_1^2}, \qquad y_1 = -\left(a_1\frac{d\xi}{dt_1} + b_1\xi\right), \qquad z_1 = -b_1\frac{d\xi}{dt_1}; \tag{20.2}$$

получим

$$\frac{dx}{dt_1}=y_1-f_1(x),\quad \frac{dy_1}{dt_1}=z_1-a_1x,\quad \frac{dz_1}{dt_1}=-b_1x. \qquad (20.3)$$

Сделаем в этой системе замену:

$$y_1=\sqrt{a_1}y,\quad z=a_1z,\quad t_1=\frac{1}{\sqrt{a_1}}t, \qquad (20.4)$$

тогда получим

$$\frac{dx}{dt}=y-f(x),\quad \frac{dy}{dt}=z-x,\quad \frac{dz}{dt}=-ax, \qquad (20.5)$$

где

$$a=\frac{b_1}{a_1\sqrt{a_1}},\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{a_1}}f_1(x).$$

Систему (20.5) и будем в дальнейшем изучать. Наряду с системой (20.5), рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt}=y-hx,\quad \frac{dy}{dt}=z-x,\quad \frac{dz}{dt}=-ax. \qquad (20.6)$$

Характеристическое уравнение этой системы, как нетрудно проверить, имеет вид

$$\lambda^3+h\lambda^2+\lambda+a=0. \qquad (20.7)$$

Условие Гурвица отрицательности действительных частей корней этого уравнения записывается в виде: $h>a$.

В соответствии с этим неравенство

$$\frac{f(x)}{x}>a \quad \text{при} \quad x\neq 0 \qquad (20.8)$$

называют часто обобщенным условием Гурвица для системы (20.5).

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что нелинейность $f(x)$ удовлетворяет обобщенному условию Гурвица *).

1. В этом пункте мы рассмотрим общий характер поведения траекторий системы (20.5).

---

*) Более подробное изучение систем третьего порядка, удовлетворяющих обобщенным условиям Гурвица, читатель найдет в работе [89].

Через $\varphi(p, t)$ будем обозначать ту траекторию системы (20.5), которая при $t=0$ проходит через точку p фазового пространства. Пусть E — некоторое множество точек фазового пространства, тогда через $\varphi(E, t)$ будем обозначать множество тех траекторий системы (20.5), которые при $t=0$ проходят через точки множества E.

Опишем поле направлений, определяемое системой (20.5). Непосредственно из системы (20.5) видно, что при $y>f(x)$ x вдоль всех движений системы возрастает, а при $y<f(x)$ убывает с возрастанием времени t. При $z>x$ y вдоль всех движений системы (20.5) возрастает, а при $z<x$ убывает с возрастанием времени. Так как $a>0$, то производная $\frac{dz}{dt}$ имеет знак, обратный знаку x. Поэтому при $x>0$ z вдоль всех движений системы (20.5) убывает, а при $x<0$ возрастает с возрастанием времени.

Плоскость $x=0$ траектории системы (20.5) пересекают при $y>0$, переходя из полупространства $x<0$ в полупространство $x>0$, а при $y<0$ траектории системы (20.5) пересекают плоскость $x=0$, переходя при возрастании времени из полупространства $x>0$ в полупространство $x<0$. При $y=0$ траектории системы (20.5) касаются плоскости $x=0$. Пусть точка p лежит на оси Oz и пусть ее аппликата положительна, тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы (20.5) касается плоскости $x=0$ при $t=0$; при $t \neq 0$, но достаточно малых, траектория $\varphi(p, t)$ лежит в полупространстве $x>0$. Если точка p лежит на оси аппликат, но имеет отрицательную аппликату, то траектория $\varphi(p, t)$ касается в точке p плоскости $x=0$ таким образом, что при $t \neq 0$, но достаточно малых, $\varphi(p, t)$ лежит в полупространстве $x<0$. Таким образом, аппликата z на плоскости $x=0$ испытывает вдоль всех движений системы (20.5) максимум при $y>0$ и минимум при $y<0$. При $y=0$ аппликата z на плоскости $x=0$ на траекториях системы экстремума не имеет.

Опишем теперь поведение траекторий системы (20.5) в окрестности плоскости $z-x=0$. При этом будем считать $x \geqslant 0$, так как при $x<0$ картина, очевидно, будет симметричной. Пусть точка p лежит в плоскости $z-x=0$. Если в точке p $y \geqslant f(x)$, то траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z-x=0$ при $t=0$, переходя из полупространства $z-x>0$ в полупространство $z-x<0$. Если в точке p $y-f(x)<0$, но

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-ax}{y-f(x)}>1, \tag{20.9}$$

то траектория $\varphi(p, t)$ в точке p пересекает плоскость $z-x=0$, также переходя из полупространства $z-x>0$ в полупространство $z-x<0$. В обоих этих случаях ордината траектории $\varphi(p, t)$ в точке p достигает максимума.

Пусть теперь в точке p окажется

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-ax}{y-f(x)}<1, \tag{20.10}$$

тогда траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z-x=0$, переходя из полупространства $z-x<0$ в полупространство $z-x>0$. Ордината траектории $\varphi(p, t)$ в точке p при этом испытывает минимум. Если же в точке p окажется

$$y<f(x), \quad \frac{-ax}{y-f(x)}=1, \tag{20.11}$$

то траектория $\varphi(p, t)$ касается в точке p плоскости $z-x=0$.

Пусть теперь точка p лежит на цилиндрической поверхности $y-f(x)=0$, при этом по-прежнему предполагается, что $x\geqslant 0$ в точке p. Если в точке p $z>x$, то траектория $\varphi(p, t)$ пересекает поверхность $y=f(x)$ в точке p, переходя из области $\{y-f(x)<0\}$ в область $\{y-f(x)>0\}$ (здесь и в дальнейшем неравенства, заключенные в фигурные скобки, означают те области фазового пространства, где эти неравенства выполняются). При этом в точке p абсцисса траектории $\varphi(p, t)$ испытывает минимум. Если в точке p $z<x$, то траектория $\varphi(p, t)$ пересекает поверхность $y-f(x)=0$, переходя из области $\{y-f(x)>0\}$ в область $\{y-f(x)<0\}$. При этом абсцисса траектории $\varphi(p, t)$ имеет в точке p максимум.

2 В этом пункте мы сформулируем одну теорему о поведении траекторий системы (20.5). Для доказательства этой теоремы нам понадобится доказать несколько лемм.

Лемма 20.1. *Пусть $p\in\{x>0,\ z<0\}$, тогда траектория $\varphi(p, t)$ при $t>0$ пересекает плоскость $x=0$.*

Доказательство. Предположим, что $p\in\{x>0,\ y-f(x)>0,\ z<0\}$. Покажем, что тогда при возрастании времени траектория $\varphi(p, t)$ системы (20.5) пересечет поверхность $y-f(x)=0$ и попадет в область $\{x>0, y-f(x)<0, z<0\}$. Действительно, в области $\{x>0, y-f(x)>0, z<0\}$ абсцисса x вдоль всех движений системы (20.5) возрастает, а ордината y и аппликата z убывают с возрастанием времени. В рассматриваемой области y на траектории $\varphi(p, t)$ ограничен, так как он убывает в этой области и положителен. Но тогда в этой области на траектории $\varphi(p, t)$ ограничен и x. Действительно, разделим первое из уравнений системы (20.5) на второе, тогда получим

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-f(x)}{z-x}. \tag{20.12}$$

Ясно, что $z-x<0$ на траектории $\varphi(p, t)$ при $t>0$ и таких, что $\varphi(p, t) \in \{x>0, y-f(x)>0, z<0\}$. Отсюда и из ограниченности y в рассматриваемой области следует ограниченность x.

Покажем, что в области $\{x>0, y-f(x)>0, z<0\}$ аппликата z также ограничена на траектории $\varphi(p, t)$. Для этого разделим третье уравнение системы (20.5) на второе, тогда получим

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-ax}{z-x}. \tag{20.13}$$

Так как x ограничен на $\varphi(p, t)$ в рассматриваемой области, а z убывает с возрастанием времени в этой области, то правая часть равенства (20.13) ограничена. Отсюда и из ограниченности y и вытекает ограниченность z. Предположим теперь, что траектория $\varphi(p, t)$ остается в области $\{x>0, y-f(x), z>0\}$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда $\varphi(p, t)$ ограничена при $t \geqslant 0$. Но в нашей области все координаты зависят от времени монотонно, поэтому траектория $\varphi(p, t)$ стремится при $t \to +\infty$ к некоторой точке фазового пространства, отличной от начала координат. Хорошо известно, что такой точкой может быть лишь состояние равновесия нашей системы. Но система (20.5) имеет лишь одно состояние равновесия, находящееся в точке $x=y=z=0$. Поэтому предположение о том, что траектория $\varphi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ остается в области $\{x>0, y-f(x)>0, z<0\}$ абсурдно. Следовательно, траектория $\varphi(p, t)$ пересекает поверхность $y-f(x)=0$ и попадает в область $\{x>0, y-f(x)<0, z<0\}$.

Покажем, что траектория $\varphi(p, t)$ не может при всех $t > t_1$ лежать в области $\{x > 0, \ y - f(x) < 0, \ z < 0\}$. Предположим, напротив, что $\varphi(p, t)$ лежит в этой области при всех $t > t_1$. Покажем, что тогда траектория $\varphi(p, t)$ ограничена при $t > t_1$. Действительно, x в этой области убывает и положителен, следовательно, ограничен. Предположим, что аппликата z вдоль траектории $\varphi(p, t)$ неограниченно убывает с возрастанием времени. Разделим третье уравнение системы (20.5) на первое, тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-ax}{y - f(x)}. \tag{20.14}$$

Из этого равенства следует, что z на траектории $\varphi(p, t)$ может быть неограниченным лишь при условии, что y на $\varphi(p, t)$ ограничен при $t > t_1$. Но тогда, как видно из равенства (20.13), z на $\varphi(p, t)$ при $t > t_1$ также ограничен. Следовательно, предположение о неограниченности z на траектории $\varphi(p, t)$ при $t > t_1$ абсурдно, и, значит, аппликата z на траектории $\varphi(p, t)$ ограничена при $t > t_1$. Из равенства

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - f(x)}, \tag{20.15}$$

в силу монотонного убывания y и ограниченности x и z на траектории $\varphi(p, t)$ при $t > t_1$, следует, что y не может быть неограниченным при $t > t_1$ на $\varphi(p, t)$.

Таким образом, если траектория $\varphi(p, t)$ при $t > t_1$ остается в области $\{x > 0, \ y - f(x) < 0, \ z < 0\}$, то $\varphi(p, t)$ ограничена при $t > t_1$. Но все координаты вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в области $\{x > 0, \ y - f(x) < 0, \ z < 0\}$ изменяются монотонно. Так как z вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в этой области убывает с возрастанием времени, то отсюда вытекает существование у системы (20.5) состояния равновесия, отличного от $x = y = z = 0$. А это, как отмечалось выше, неверно. Но пересечь плоскость $z = 0$ эта траектория не может, так как в области $\{x > 0\}$ z вдоль всех движений системы (20.5) убывает с возрастанием времени. Поверхность $y - f(x) = 0$ траектория $\varphi(p, t)$ пересечь также не может, ибо, как отмечалось в предыдущем пункте, траектории системы (20.5) при $z < x$ пересекают поверхность $y = f(x)$, переходя из области $\{y - f(x) > 0\}$ в область $\{y - f(x) < 0\}$, а не наоборот.

Следовательно, траектория $\varphi(p, t)$ должна пересечь при $t = T_p > t_1$ плоскость $x = 0$. А это и доказывает лемму.

Замечание. Утверждение леммы, очевидно, справедливо и в том случае, когда $p \in \{x > 0,\ z = 0\}$ и когда $p \in \{x = 0,\ z \leqslant 0,\ y > 0\}$.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 20.2. *Если $p \in \{x < 0,\ z > 0\}$, то $\varphi(p, t)$ при $t > 0$ пересекает плоскость $x = 0$.*

Лемма 20.3. *Предположим, что $p \in \{x > 0,\ y - f(x) > 0\}$. Тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы* (20.5) *при $t > 0$ пересекает поверхность $y - f(x) = 0$ и попадает в область $\{x > 0,\ y - f(x) < 0\}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p \in \{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z > x\}$. В этой области x и y возрастают, а z убывает с возрастанием времени t.

Сделаем предположение, обратное утверждению леммы, т. е. предположим, что при всех $t > 0$ $\varphi(p, t) \in \{x > 0,\ y - f(x) > 0\}$. Покажем, что тогда $\varphi(p, t)$ при $t > 0$ пересечет плоскость $z - x = 0$.

Действительно, x и z на траектории $\varphi(p, t)$ в области $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x > 0\}$ ограничены, так как z в этой области убывает с возрастанием времени. Покажем, что ордината y в этой области также ограничена на $\varphi(p, t)$. Для этого обратимся к равенству

$$\frac{dy}{dz} = \frac{z - x}{-ax}. \tag{20.16}$$

Знаменатель дроби, стоящей в правой части этого равенства, может обратиться в нуль лишь при $x = 0$. Так как на $\varphi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ в области $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x > 0\}$ оказывается $x \geqslant x(p)$ и, как отмечалось выше, x на $\varphi(p, t)$ в этой области ограничен при $t \geqslant 0$, то существует такое число $l > 0$, что $ax > l$ при $t \geqslant 0$ и таких, что траектория $\varphi(p, t)$ остается в области $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z > x\}$. Отсюда и из ограниченности z и следует ограниченность y в этой области. Таким образом, траектория $\varphi(p, t)$ ограничена при $t > 0$ в области $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x > 0\}$.

Отсюда вытекает, что $\varphi(p, t)$ покидает эту область при возрастании времени. Действительно, допустим, напротив, что $\varphi(p, t) \in \{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x > 0\}$ при всех $t \geqslant 0$. Но тогда в силу ограниченности траектория $\varphi(p, t)$

имеет ω-предельную точку q. Так как в рассматриваемой области x вдоль $\varphi(p, t)$ возрастает, то ясно, что $x(q) > 0$. Кроме того, из возрастания z вдоль $\varphi(p, t)$ следует, что $\lim\limits_{t \to \infty} z(\varphi(p, t)) = z(q)$. Но из $x(q) > 0$ следует, что при $t > 0$ и достаточно малых $z(\varphi(q, t)) < z(q)$. А тогда по свойству ω-предельных множеств найдется такое $\tau > 0$, что $z(\varphi(p, \tau)) < z(q)$. Последнее неравенство противоречит монотонности функции $z(\varphi(p, t))$ и соотношению $z(\varphi(p, t)) \to z(q)$ при $t \to \infty$. Полученное противоречие и доказывает, что $\varphi(p, t)$ покидает область $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z > x\}$ при $t > 0$.

Поверхность $y - f(x) = 0$ траектория $\varphi(p, t)$ не пересекает по предположению; следовательно, при $t = t_1$ $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z - x = 0$ и попадает в область $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x < 0,\ z > 0\}$. В этой области y и z ограничены на траектории $\varphi(p, t)$, так как они убывают и положительны. Покажем, что и x ограничен на $\varphi(p, t)$ в этой области. Действительно, из убывания z и возрастания x следует, что в этой области выполняется неравенство

$$z - x < l_1 < 0, \tag{20.17}$$

где l_1 — некоторая постоянная. Отсюда, из ограниченности y в области $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x < 0\}$ и из равенства (20.12) следует ограниченность x в рассматриваемой области. Таким образом, в нашей области все координаты на траектории $\varphi(p, t)$ ограничены и монотонно изменяются со временем, поэтому траектория $\varphi(p, t)$ не может лежать в этой области при всех $t > t_1$ и, следовательно, при возрастании t покидает ее.

Пересечь плоскость $z - x = 0$ траектория $\varphi(p, t)$ не может, так как в области $\{x > 0,\ y > f(x),\ z < x,\ z > 0\}$ x вдоль $\varphi(p, t)$ возрастает, а z убывает с возрастанием t. Пересечь плоскость $x = 0$ $\varphi(p, t)$ также не может в силу возрастания x при $y > f(x)$. Поэтому траектория $\varphi(p, t)$ при $t = t_2 > t_1$ пересекает либо плоскость $z = 0$, либо поверхность $y - f(x) = 0$. Во втором случае лемма доказана. Если же $\varphi(p, t)$ при $t = t_2$ пересекает плоскость $z = 0$, то она при этом переходит в область $\{x > 0,\ y - f(x) > 0,\ z < 0\}$. Но тогда, как видно из доказательства леммы 20.1, при $t = t_3 > t_2$ траектория $\varphi(p, t)$ пересекает поверхность

$y-f(x)=0$ и попадает в область $\{x>0,\ y-f(x)<0\}$. Этим и завершается доказательство леммы 20.3.

Замечание. Утверждение леммы, очевидно, справедливо и в том случае, когда $p\in\{x\geqslant 0,\ y-f(x)\geqslant 0,\ z-x>0\}$.

Лемма 20.4. Предположим, что $p\in\{x<0,\ y-f(x)<0\}$. *Тогда траектория* $\varphi(p,\ t)$ *при* $t>0$ *пересекает поверхность* $y-f(x)=0$ *и попадает в область* $\{x<0,\ y-f(x)>0\}$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 20.3.

Лемма 20.5. Если при всех $t\geqslant 0$ *оказывается* $\varphi(p,\ t)\in\{x>0,\ y-f(x)\leqslant 0,\ z>0\}$, *то* $\varphi(p,\ t)$ *стремится к началу координат при* $t\to+\infty$.

Доказательство. Так как вдоль $\varphi(p,\ t)$ абсцисса и аппликата убывают с возрастанием времени, то они ограничены на этой траектории при $t\geqslant 0$.

Положим

$$g_1=\max f(x) \quad \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant x(p). \tag{20.18}$$

Тогда, так как траектория $\varphi(p,\ t)$ находится при $t\geqslant 0$ в области $\{x>0,\ y-f(x)\leqslant 0,\ z>0\}$, то ордината y ограничена на ней сверху числом g_1. Кроме того, из равенства (20.15), из ограниченности x и z и из монотонности убывания x вдоль траектории $\varphi(p,\ t)$ с возрастанием времени вытекает, что ордината y ограничена на $\varphi(p,\ t)$ при $t\geqslant 0$ также и снизу. Таким образом, траектория $\varphi(p,\ t)$ положительно устойчива в смысле Лагранжа и, следовательно, имеет ω-предельную точку q с координатами x_0, y_0, z_0. Покажем, что $x_0=y_0=z_0=0$. Действительно, так как z вдоль траектории $\varphi(p,\ t)$ при $t\geqslant 0$ монотонно убывает с возрастанием времени, то должны выполняться соотношения

$$z(\varphi(p,\ t))>z_0 \quad \text{при} \quad t\geqslant 0 \tag{20.19}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} z(\varphi(p,\ t))=z_0. \tag{20.20}$$

Точка q, являясь ω-предельной для траектории $\varphi(p,\ t)$, лежит внутри или на границе той области, в которой лежит траектория $\varphi(p,\ t)$ при $t\geqslant 0$; следовательно, $q\in\{x\geqslant 0,\ y-f(x)\leqslant 0,\ z\geqslant 0\}$. Так как траектория $\varphi(q,\ t)$ является ω-предельной траекторией для $\varphi(p,\ t)$, то при всех t окажется $\varphi(q, t) \in \{x \geqslant 0, y - f(x) \leqslant 0, z \geqslant 0\}$. Предположим теперь, что точка q не совпадает с состоянием равновесия (0, 0, 0) системы (20.5). Но тогда легко видеть из предыдущих рассуждений, что при любом $t_1 > 0$ окажется

$$z(\varphi(q, t_1)) < z_0. \tag{20.21}$$

Так как траектория $\varphi(q, t)$ есть ω-предельная траектория для $\varphi(p, t)$, то из неравенства (20.21) вытекает, что существует такое $\tau > 0$, что выполняется неравенство

$$z(\varphi(p, \tau)) < z_0. \tag{20.22}$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (20.19). Полученное противоречие и доказывает, что точка q совпадает с началом координат. Таким образом, траектория $\varphi(p, t)$ имеет точку $x = y = z = 0$ своей единственной ω-предельной точкой. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 20.6. Если при $t \geqslant 0$ $\varphi(p, t) \in \{x < 0, y - f(x) \geqslant 0, z < 0\}$, *то* $\varphi(p, t)$ *стремится к началу координат при* $t \to +\infty$.

Теорема 20.1. *Любая положительная полутраектория системы* (20.5), *целиком лежащая в одном из полупространств* $x \geqslant 0$ *или* $x \leqslant 0$, *стремится к началу координат.*

Доказательство. Предположим для определенности, что при $t \geqslant 0$ выполняется соотношение $\varphi(p, t) \in \{x \geqslant 0\}$. Из леммы 20.1 следует, что тогда $\varphi(p, t) \in \{x \geqslant 0, z > 0\}$ (если только p не совпадает с точкой (0, 0, 0), что мы и будем предполагать при доказательстве этой теоремы). Возможны два случая: либо существует такое T, что при $t > T$ $\varphi(p, t) \in \{x > 0, y - f(x) \leqslant 0, z > 0\}$, либо такого T не существует. В первом случае доказательство завершается простой ссылкой на лемму 20.5. Обратимся ко второму случаю. В силу леммы 20.3 найдется такое $\theta_1 > 0$, что $\varphi(p, \theta_1) \in \{x > 0, y - f(x) < 0, z > 0\}$. Так как по предположению не может оказаться, что $\varphi(p, t) \in \{x > 0, y - f(x) < 0, z > 0\}$ при всех $t \geqslant \theta_1$, то найдется такое $\tau_1 > \theta_1$, что на траектории $\varphi(p, t)$ окажется

$$y(\tau_1) = f(x(\tau_1)). \tag{20.23}$$

Из рассуждений проведенных в первом параграфе настоящей главы, ясно что при этом окажется

$$z(\tau_1) - x(\tau_1) \geqslant 0 \tag{20.24}$$

на траектории $\varphi(p, t)$.

Согласно лемме 20.3 мы сможем указать такое число $\theta_2 > \tau_1 + 1$, что $\varphi(p, \theta_2) \in \{x > 0,\ y - f(x) < 0,\ z > 0\}$, а по этому θ_2 так же, как и выше, найдется такое $\tau_2 > \theta_2$, что

$$y(\tau_2) = f(x(\tau_2)), \quad z(\tau_2) - x(\tau_2) = 0. \tag{20.25}$$

Продолжая этот процесс дальше, мы сможем указать такую последовательность $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ моментов времени, что $\tau_k > \tau_{k-1} + 1$

$$y(\tau_k) - f(x(\tau_k)) = 0 \tag{20.26}$$

и

$$z(\tau_k) - x(\tau_k) \geqslant 0 \tag{20.27}$$

на траектории $\varphi(p, t)$.

Так как траектория $\varphi(p, t)$ при $t \geqslant 0$ лежит в полупространстве $x \geqslant 0$, то z вдоль этой траектории убывает с возрастанием времени при $t \geqslant 0$, поэтому можем написать

$$z(\tau_k) \leqslant z(p) \tag{20.28}$$

на траектории $\varphi(p, t)$. Отсюда и из (20.27) получаем

$$x(\tau_k) \leqslant z(p) \tag{20.29}$$

на $\varphi(p, t)$. Положим теперь

$$g_2 = \max f(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant z(p). \tag{20.30}$$

Из (20.26), (20.18), (20.29) и (20.30) вытекают следующие неравенства:

$$0 \leqslant y(\varphi(p, \tau_k)) \leqslant g_2. \tag{20.31}$$

Из неравенств (20.29) — (20.31) вытекает, что последовательность точек $\varphi(p, \tau_k)$ ограничена, следовательно, она имеет предельную точку q с координатами x_0, y_0, z_0.

Так как $\tau_k > \tau_{k-1} + 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$; следовательно, точка q является ω-предельной точкой для траектории $\varphi(p, t)$. Покажем, что точка q совпадает с началом координат. Действительно, так как z вдоль траектории $\varphi(p, t)$ монотонно убывает с возрастанием времени, то должны выполниться соотношения

$$z(\varphi(p, t)) > z_0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0 \tag{20.32}$$

и

$$\lim_{t \to +\infty} z(\varphi(p, t)) = z_0. \tag{20.33}$$

Траектория $\varphi(q, t)$ является ω-предельной для $\varphi(p, t)$, поэтому при всех t окажется $\varphi(q, t) \in \{x \geqslant 0, z \geqslant 0\}$. Предположим, что q не совпадает с началом координат, тогда, очевидно, найдется такое $t_1 > 0$, что

$$z(\varphi(q, t_1)) < z_0. \tag{20.34}$$

Так как точка $\varphi(q, t_1)$ является ω-предельной для траектории $\varphi(p, t)$, то найдется такой момент времени $t_2 > 0$, что

$$z(\varphi(p, t_2)) < z_0. \tag{20.35}$$

Это неравенство противоречит неравенству (20.32). Полученное противоречие и доказывает, что точка q совпадает с началом координат. Аналогично показывается, что любая другая ω-предельная точка траектории $\varphi(p, t)$ совпадает с началом координат. Следовательно, $\varphi(p, t)$ стремится к этому состоянию равновесия при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

3. Будем рассматривать случай, когда $a \geqslant 1$. Положим

$$f(x) = ax + \alpha(x); \tag{20.36}$$

тогда неравенство (20.8) примет вид

$$\frac{\alpha(x)}{x} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{20.37}$$

Справедлива следующая

Лемма 20.7. *Предположим, что выполнено неравенство $a \geqslant 1$. Пусть $p \in \{x \geqslant 0, y - f(x) > 0\}$, тогда траектория $\varphi(p, t)$ при $t > 0$ пересекает плоскость $x = 0$.*

Доказательство. Если $z(p) \leqslant 0$, то утверждение этой леммы следует просто из леммы 20.1. Пусть $z(p) > 0$. Предположим сначала, что $p \in \{x \geqslant 0, y - f(x) > 0, z - x > 0\}$. Как было показано при доказательстве леммы 20.3, траектория $\varphi(p, t)$ пересечет плоскость $z - x = 0$ при $t = t_1 > 0$, и при этом на этой траектории будет выполнено неравенство (20.17). Таким образом, если $p \in \{x \geqslant 0,\ y - f(x) > 0,\ z - x > 0\}$, то существует такое $t_1 \geqslant 0$, что на $\varphi(p,\ t)$ выполняются соотношения

$$z(t_1) - x(t_1) \leqslant 0, \tag{20.38}$$

$$y(t_1) - f(x(t_1)) \geqslant 0. \tag{20.39}$$

Если же $p \in \{x > 0,\ y > f(x),\ z - x \leqslant 0\}$, то положим $t_1 = 0$, тогда соотношения (20.38) и (20.39) на траектории $\varphi(p,\ t_1)$ будут также выполнены. Из неравенства (20.8) вытекает, что на $\varphi(p,\ t)$ выполняется неравенство

$$y(t_1) \geqslant f(x(t_1)) > ax(t_1). \tag{20.40}$$

Положим

$$f(x(t_1)) - ax(t_1) = h,$$

тогда из (20.40) получим

$$y(t_1) \geqslant ax(t_1) + h \tag{20.41}$$

на траектории $\varphi(p,\ t)$. Обратимся теперь к равенству (20.16), перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dz} = \frac{x}{ax} - \frac{z}{ax}.$$

Так как по условию $a \geqslant 1$, то из последнего равенства вытекает, что при $x > 0$ и $z > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{dy}{dz} < 1. \tag{20.42}$$

Пусть $T > t_1$ — произвольное число, такое, что при $t \in (t_1,\ T)$ на траектории $\varphi(p,\ t)$ оказывается $x > 0,\ z > 0$. Тогда на траектории $\varphi(p,\ t)$ при $t \in (t_1,\ T)$ выполнено неравенство (20.42). Проинтегрируем это неравенство вдоль траектории $\varphi(p,\ t)$ в пределах от t_1 до T, тогда получим

$$y(\varphi(p,\ T)) - y(\varphi(p,\ t_1)) > z(\varphi(p,\ T)) - z(\varphi(p,\ t_1))$$

или

$$y(\varphi(p,\ T)) > z(\varphi(p,\ T)) + y(\varphi(p,\ t_1)) - z(\varphi(p,\ t_1)).$$

Отсюда, из соотношений (20.38), (20.41) и $a \geqslant 1$ получаем

$$y(\varphi(p,\ T)) > z(\varphi(p,\ T)) + h. \tag{20.43}$$

Из этого соотношения следует, что должно быть выполнено неравенство

$$x(\varphi(p, T)) > 0, \tag{20.44}$$

так как при $y > 0$ траектории системы (20.5) пересекают плоскость $x = 0$, переходя из полупространства $x < 0$ в полупространство $x > 0$.

Покажем теперь, что $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z = 0$ при $t > t_1$. Действительно, допустим, напротив, что это не так, т. е. предположим, что при $t > t_1$ $z(\varphi(p, t)) > 0$. Но тогда из (20.44) следует, что $x(\varphi(p, t)) > 0$ при всех $t > t_1$ (так как за T можно тогда выбрать любое число, большее t_1). В таком случае из теоремы 20.1 следует, что траектория $\varphi(p, t)$ стремится к началу координат при $t \to +\infty$, а это невозможно в силу соотношений (20.43) и $z(\varphi(p, t)) > 0$ при $t > t_1$. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z = 0$ при $t = t_2 > t_1$. При этом ясно, что при $t \in [t_1, t_2]$ $x(\varphi(p, t) > 0$.

По лемме 20.1 можно утверждать, что траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $x = 0$.

Лемма доказана.

Предположим опять, что $a \geqslant 1$ и $p \in \{x \geqslant 0, y - f(x) > 0\}$, тогда по лемме 20.7 траектория $\varphi(p, t)$ при $t > 0$ пересекает плоскость $x = 0$. Пусть t_p — первый после $t = 0$ момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = 0$, тогда из самого доказательства леммы 20.7 видно, что на траектории $\varphi(p, t)$ выполнены соотношения

$$y(t_p) < 0, \quad z(t_p) < 0. \tag{20.45}$$

Аналогично доказывается

Лемма 20.8. *Если $a \geqslant 1$ и $p \in \{x \leqslant 0, y - f(x) < 0\}$, то траектория $\varphi(p, t)$ при $t > 0$ пересекает плоскость $x = 0$.*

Из лемм 20.7 и 20.8 вытекают следующие теоремы.

Теорема 20.2. *Пусть выполнено неравенство $a \geqslant 1$ и пусть точка p лежит в плоскости $x = 0$, тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы (20.5) при $t > 0$ пересекает плоскость $x = 0$.*

Теорема 20.3. *Предположим, что выполнено неравенство $a \geqslant 1$. Пусть точка p, отличная от точки $x = y = z = 0$, лежит в плоскости $x = 0$ и пусть*

$t_1 > 0$ — *первый после* $t=0$ *момент пересечения траектории* $\varphi(p, t)$ *с плоскостью* $x=0$, $t_2 > t_1$ — *первый после* t_1 *момент пересечения* $\varphi(p, t)$ *с плоскостью* $x=0$. *Тогда возможно одно из двух: либо* $y(t_1) > 0$, $z(t_1) > 0$, *и тогда* $y(t_2) < 0$, $z(t_2) < 0$; *либо* $y(t_1) < 0$, $z(t_1) < 0$, *и тогда* $y(t_2) > 0$, $z(t_2) > 0$.

§ 21. Об ограниченности решений

Будем по-прежнему рассматривать систему (20.5). Относительно функции $f(x)$ будем считать, что она удовлетворяет условию (20.8), непрерывно дифференцируема при всех x и, кроме того, существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $x_0 > 0$, что

$$\alpha' = f'(x) - a > \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| \geqslant x_0, \tag{21.1}$$

При этих предположениях мы докажем, что все решения системы (20.5) ограничены при $t \to +\infty$, и выясним более подробно качественную картину расположения траекторий этой системы.

1. Рассмотрим функцию

$$v = \frac{1}{2}(z-x)^2 + \frac{1}{2}y^2 - y\alpha(x) + ax\alpha(x) + \frac{1}{2}\alpha^2(x) - a\int_0^x \alpha(x)\,dx. \tag{21.2}$$

Производная от этой функции по t, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (20.5), как нетрудно проверить, равна

$$\dot{v} = -\alpha'(x)(y - f(x))^2. \tag{21.3}$$

При $|x| \geqslant x_0$ производная эта неположительна, т. е. функция v при таких x не возрастает вдоль решений системы (20.5).

Введем следующие обозначения. Пусть $D \geqslant 0$ таково, что

$$D \geqslant -\min \alpha'(x) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant x_0. \tag{21.4}$$

Обозначим, кроме того,

$$x_1 = \frac{10D+2\varepsilon}{\varepsilon}x_0, \quad x_2 = 10x_1, \tag{21.5}$$

$$m = \max_{|x| \leqslant x_2} |f(x)+x|, \quad R = \frac{200m^2}{x_0}. \tag{21.6}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 21.1. *Предположим, что выполнено условие* (21.1). *Пусть точка p лежит в области* $\{0 \leqslant x \leqslant x_0, z \geqslant -x_0, y \geqslant f(x)\}$; *пусть, кроме того,*

$$v(p) \geqslant \frac{1}{2}R^2, \tag{21.7}$$

где v — функция координат фазового пространства, введенная равенством (21.2). *Тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы* (20.5) *пересекает плоскость $x = x_1$ при $t = t_1 > 0$ (под t_1 понимается первый после $t = 0$ момент пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = x_1$), и на траектории $\varphi(p, t)$ выполняются соотношения*

$$y - f(x) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, t_1] \tag{21.8}$$

и

$$v(\varphi(p, 0)) = v(p) > v(\varphi(p, t_1)). \tag{21.9}$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы мы будем рассматривать лишь одну траекторию системы (20.5) — $\varphi(p, t)$. В связи с этим различные функции координат фазового пространства мы будем иногда рассматривать просто как функции времени t. Так, например, $v(t)$ есть значение функции v в точке $\varphi(p, t)$. При доказательстве леммы мы рассмотрим два различных случая:

$$\text{I.} \ \frac{y(p)}{z(p)} \geqslant 1, \qquad \text{II.} \ \frac{y(p)}{z(p)} < 1.$$

Рассмотрим сначала случай I. Из неравенства (21.7), из вида функции v (равенство (21.2)), из обобщенного условия Гурвица (20.8) и из обозначения (20.36) легко вывести неравенство

$$y(p) > 100m. \tag{21.10}$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $t > 0$ выполняется неравенство

$$y(t) > f(x(t)). \tag{21.11}$$

Из первого уравнения системы (20.5) следует, что при таких t x возрастает. Докажем теперь, что до тех пор, пока на $\varphi(p, t)$ оказывается $x \leqslant x_1$, на этой траектории выполняется неравенство

$$y > 0{,}9y(p). \tag{21.12}$$

Из неравенства (21.10) и обозначения (21.6) следует, что неравенство (21.12) влечет за собой и неравенство (21.11). Таким образом, если мы установим справедливость неравенства (21.12), то тем самым мы докажем, что $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $x = x_1$ при $t = t_1$ и соотношение (21.8). Доказываем неравенство (21.12). Если $z(p) > x(p)$ и если траектория $\varphi(p, t)$ до пересечения с плоскостью $x = x_1$ не пересекает плоскость $z - x = 0$, то неравенство (21.12) следует просто из того, что y вдоль всех движений системы (20.5) возрастает при $z - x > 0$. Предположим теперь, что $z(p) - x(p) \leqslant 0$ или что $z(p) - x(p) > 0$, но траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $z - x = 0$ до пересечения с плоскостью $x = x_1$. Будем доказывать неравенство (21.12) от противного. Предположим, что существует такое $t^* > 0$, что

$$y(t^*) = 0{,}9y(p), \tag{21.13}$$

$$x(t^*) \leqslant x_1 \tag{21.14}$$

и что при $t \in [0, t^*)$ неравенство (21.12) выполнено, т. е. что t^* — первая точка, в которой нарушается неравенство (21.12).

Обратимся к равенству

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ax}{y - f(x)}. \tag{21.15}$$

Из этого равенства и из неравенства (21.10) и (21.12) следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, t^*)$ выполняется неравенство

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ax}{89m},$$

а потому

$$\frac{dz}{dx} > -\frac{1}{89}. \tag{21.16}$$

Проинтегрируем последнее неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в пределах от 0 до t^*, тогда получим в силу (21.14)

$$z(0) - z(t^*) < \frac{x_1}{89}. \tag{21.17}$$

Рассмотрим теперь равенство (20.15). Из этого равенства, из неравенств (21.12) и (21.17) и из того, что по условию $z(p) = z(0) \geqslant -x_0$, следует

$$\frac{dy}{dx} > -\frac{x_0 + \frac{1}{89}x_1 + x_1}{89m} > \frac{1}{20}.$$

Интегрируя это неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ на промежутке $0 < t < t^*$, получаем

$$y(p) - y(t^*) < \frac{x_1}{20}. \tag{21.18}$$

Так как $x_1 < m$, то последнее неравенство противоречит равенству (21.13). Полученное противоречие и доказывает неравенство (21.12).

Докажем теперь неравенства (21.9). Имеем

$$v(t_1) - v(0) = \int_{x(p)}^{x_0} \frac{dv}{dx}\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{dv}{dx}\,dx.$$

Отсюда и из (21.3) следует

$$v(t_1) - v(0) = -\int_{x(p)}^{x_0} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx - \\ - \int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx. \tag{21.19}$$

Оценим интегралы, стоящие справа в этом равенстве. Для этого оценим сначала $y(t)$ на промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Из уравнения (20.15) получаем

$$\frac{dy}{dx} < \frac{|z - x|}{y - m}.$$

Так как z вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, t_1]$ убывает с возрастанием времени и так как при $t \in [0, t_1]$ на $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство (21.12), то из последнего неравенства и из условия случая I следует

$$\frac{dy}{dx} < 2.$$

Интегрируя это неравенство и используя неравенство (21.10), получаем

$$y(t) < 2y(p) \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1].$$

Принимая во внимание это неравенство, можем написать

$$\int\limits_{x(p)}^{x_0} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > -2Dy(p)\,x_0. \tag{21.20}$$

Кроме того, из неравенств (21.10) и (21.12) получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > \frac{1}{2}\varepsilon y(p)(x_1 - x_0).$$

Отсюда и из (21.5) выводим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > 5Dy(p)\,x_0. \tag{21.21}$$

Из равенства (21.19) и неравенств (21.20) и (21.21) вытекает неравенство (21.9).

Переходим к случаю II. Так же, как и в случае I, легко установить неравенство

$$z(p) > 105\,\frac{m^2}{x_0}. \tag{21.22}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае траектория $\varphi(p, t)$ пересекает сначала плоскость $x = x_1$, а лишь затем плоскость $z - x = 0$. Этим, очевидно, будет доказано существование момента t_1 и неравенство (21.8). Предположим, вопреки нашему утверждению, что существует такое $t^* > 0$, что

$$z(t^*) - x(t^*) = 0, \tag{21.23}$$

$$x(t^*) \leqslant x_1 \tag{21.24}$$

и при $t \in [0, t^*)$ выполняется неравенство

$$z(t) - x(t) > 0. \tag{21.25}$$

Таким образом, t^* — первый после $t = 0$ момент нарушения неравенства (21.25) (неравенство (21.25) при $t = 0$ выполнено, что вытекает из (21.22)). Из равенства (21.23) и неравенства (21.22) следует, что существует такое $t^{**} \in (0, t^*)$, что

$$z(0) - z(t^{**}) = m. \tag{21.26}$$

Обратимся к равенству

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z-x}{ax}. \tag{21.27}$$

Из равенств (21.26) и (21.27) и из неравенства (21.22) следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in (0, t^{**})$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dz} < -100.$$

Интегрируя это неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ от $t = 0$ до $t = t^{**}$, получаем в силу (21.26)

$$y(t^{**}) > 100m. \tag{21.28}$$

Так как на промежутке $t^{**} < t < t^*$ выполняется неравенство (21.25), то на этом промежутке $y(t)$ возрастает, и, следовательно, из последнего неравенства получаем

$$y(t) > 100m \quad \text{при} \quad t \in [t^{**}, t^*]. \tag{21.29}$$

Из равенства (21.15) и неравенства (21.27) заключаем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t^{**}, t^*]$ выполняется неравенство

$$\frac{dz}{dx} > -\frac{1}{99}.$$

Интегрируя это неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при $t^{**} < t < t^*$, получим, используя (21.24),

$$z(t^{**}) - z(t^*) < \frac{1}{99} x_1.$$

Отсюда и из (21.26) получаем

$$z(0) - z(t^*) < m + \frac{1}{99} x_1.$$

Последнее неравенство противоречит равенству (21.23) и неравенствам (21.22) и (21.24). Полученное противоречие и доказывает, что траектория $\varphi(p, t)$ в рассматриваемом случае пересекает сначала плоскость $x = x_1$, а лишь затем плоскость $z - x = 0$.

Введем следующие обозначения. Пусть, как и раньше, t_0 и t_1 — моменты пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостями $x = x_0$ и $x = x_1$ соответственно, а $t = t'$ — момент пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = 2x_0$. Очевидно, что $0 \leqslant t_0 < t' < t_1$. Покажем, что при $t \in [t', t_1]$ выполняется неравенство

$$y(t) > 10m. \qquad (21.30)$$

Действительно, если существует такое $t^{**} \in [0, t']$, что при $t = t^{**}$ выполняется равенство (21.26), тогда так же, как и выше, мы докажем неравенство (21.28), а из него и будет следовать (21.30), так как $y(t)$ при $t \in [0, t_1]$ возрастает вместе со временем. Если же такого t^{**} не существует, то это значит, что при $t \in [0, t']$ имеет место неравенство

$$z(0) - z(t) < m. \qquad (21.31)$$

Будем в этом случае доказывать неравенство (21.30) от противного. Предположим, что при $t \in [0, t']$ выполняется неравенство

$$y(t) \leqslant 10m. \qquad (21.32)$$

Тогда из равенства (20.15) и неравенств (21.22) и (21.31) следует, что

$$\frac{dy}{dx} > \frac{100m^2}{yx_0}.$$

Отсюда и из (21.32) вытекает

$$\frac{dy}{dx} > \frac{10m}{x_0}$$

на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, t']$. Проинтегрируем последнее неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ в пределах от $t = 0$ до $t = t'$, тогда получим

$$y(t') - y(0) > 10m.$$

Так как по условию $y(0) > 0$, то последнее неравенство противоречит неравенству (21.32). Полученное противоречие и доказывает неравенство (21.30).

Докажем теперь неравенство (21.9). Обратимся для этого к равенству (21.19). Оценим интегралы, стоящие в этом равенстве справа:

$$\int_{x(p)}^{x_0} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > -Dy(t')x_0, \qquad (21.33)$$

так как при $t \in [0, t_1]$ $y(t)$ возрастает;

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > \varepsilon(y(t') - m)(x_1 - 2x_0).$$

Отсюда, из (21.30) и (21.5) следует

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx > 5Dy(t')\,x_0. \qquad (21.34)$$

Из (21.19), (21.33) и (21.34) и вытекает (21.9).

Лемма, таким образом, доказана.

Лемма 21.2. Пусть выполнено условие (21.1). *Предположим, что точка p лежит в одной из областей* $\left\{0 \leqslant x \leqslant x_0,\ z \geqslant 0,\ y = f(x),\ v \geqslant \frac{1}{2}R^2\right\}$ *или* $\left\{x = 0,\ y \leqslant 0,\ z > 0,\ \frac{y}{z} \geqslant -1,\ v \geqslant \frac{1}{2}R^2\right\}$, *где, как и в лемме* 21.1, *v — функция, определенная равенством* (21.2). *Тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы* (20.5) *пересекает плоскость $x = x_1$ при $t = t_1 < 0$ (под t_1 понимается первый после $t = 0$ момент пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = x_1$ в направлении убывания времени), и на траектории $\varphi(p, t)$ выполняются соотношения*

$$y < f(x) \quad \textit{при} \quad t \in [t_1, 0), \qquad (21.35)$$

$$v(p) < v(\varphi(p, t_1)). \qquad (21.36)$$

Доказательство. При доказательстве этой леммы мы будем рассматривать лишь одну траекторию системы (20.5) — $\varphi(p, t)$. Поэтому так же, как и при доказательстве леммы 21.1, различные функции координат фазового пространства мы будем считать функциями времени.

Так же, как при доказательстве леммы 21.1, легко установить неравенство

$$z(p) > 105\frac{m^2}{x_0}. \qquad (21.37)$$

Докажем, что траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $x = x_1$ при $t = t_1 < 0$. При $t < 0$ и достаточно близких к нулю траектория $\varphi(p, t)$, как нетрудно видеть, лежит в области $\{x > 0,\ y < f(x),\ z > x\}$. Покинуть эту область траектория $\varphi(p, t)$ может лишь через плоскость $z - x = 0$. Но в области $\{x > 0\}$ $z(t)$ возрастает с убыванием времени. Отсюда и из неравенства (21.37) следует, что $\varphi(p, t)$ может пересечь плоскость $z - x = 0$ лишь после (в направлении убывания времени) пересечения с плоскостью $x = x_1$.

Предположим теперь, что траектория $\varphi(p, t)$ не пересекает плоскость $x = x_1$ при $t < 0$. Тогда, очевидно, при всех $t < 0$ траектория $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{0 < x < x_1,\ y < f(x),\ z - x > 0\}$.

Рассмотрим следующую функцию координат фазового пространства:

$$w = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}(z - x)^2. \tag{21.38}$$

Производная от этой функции по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (20.5), как легко проверить, равна

$$\dot{w} = (z - x)\,\alpha(x). \tag{21.39}$$

Из равенства (21.39) следует, что функция w в области $\{x > 0,\ z - x > 0\}$ убывает вместе со временем вдоль всех движений системы (20.5). Отсюда следует, что траектория $\varphi(p, t)$ в области $\{0 < x < x_1,\ y - f(x),\ z - x > 0\}$ ограничена при $t < 0$ и, следовательно, при $t \to -\infty$ должна стремиться к состоянию равновесия, отличному от начала координат. Но система (20.5) имеет лишь одно состояние равновесия — точку $x = y = z = 0$. Полученное таким образом противоречие и доказывает, что траектория $\varphi(p, t)$ пересекает при $t = t_1 < 0$ плоскость $x = x_1$. Попутно мы установили также неравенство (21.35).

Переходим к доказательству неравенства (21.36). Пусть t_0 и t' — моменты пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостями $x = x_0$ и $x = 2x_0$ соответственно. Ясно, что $0 \geqslant t_0 > t' > t_1$. Покажем, что

$$y(t') < -9m. \tag{21.40}$$

Предположим, напротив, что

$$y(t') \geqslant -9m.$$

Так как $y(t)$ убывает с убыванием времени, то из последнего неравенства вытекает соотношение

$$y(t) \geqslant -9m \quad \text{при} \quad t' \leqslant t \leqslant 0. \tag{21.41}$$

Из равенства (20.15) и неравенств (21.37) и (21.41) следует неравенство

$$\frac{dy}{dx} < -10\frac{m}{x_0}$$

на траектории $\varphi(p, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t'$.

Проинтегрируем последнее неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в пределах от $t=0$ до $t=t'$, тогда получим

$$y(t') - y(0) < -10m. \tag{21.42}$$

Но по условию $y(0) = y(p) \leqslant f(x(p)) < m$. Отсюда и из (21.42) вытекает следующее неравенство:

$$y(t') < -9m.$$

Последнее неравенство противоречит неравенству (21.41). Полученное противоречие и доказывает неравенство (21.40).

Доказываем теперь неравенство (21.36). Обратимся к равенству (21.19). Оценим интегралы, стоящие в правой части этого равенства:

$$\int\limits_{x(p)}^{x_0} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < D(y(t') - m)\,x_0, \tag{21.43}$$

так как при $t \in [t_1, 0]$ $y(t)$ возрастает вместе со временем;

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < \varepsilon y(t')(x_1 - 2x_0).$$

Отсюда и из (21.5) получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < 10Dy(t')\,x_0. \tag{21.44}$$

Из неравенств (21.39), (21.43) и (21.44) вытекает соотношение

$$\int\limits_{x(p)}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < 0. \tag{21.45}$$

А отсюда и из (21.19) следует (21.36).

Лемма доказана.

Лемма 21.3. Пусть выполнено условие (21.1). *Предположим, что точка p лежит в области* $\left\{x=0,\ y<0,\ \frac{|z|}{|y|}\leqslant 1,\ v\geqslant\frac{1}{2}R^2\right\}$, *где, как и выше, v — функция, определенная равенством* (21.2).

Тогда траектория $\varphi(p, t)$ системы (20.5) *пересекает плоскость $x=x_1$ при $t=t_1<0$ (под t_1 понимается первый после $t=0$ момент пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x=x_1$ в направлении убывания времени), и на траектории $\varphi(p, t)$ выполняются соотношения*

$$y<f(x) \quad \textit{при} \quad t\in[t_1, 0) \tag{21.46}$$

и

$$v(p)<v(\varphi(p, t_1)). \tag{21.47}$$

Доказательство: Так же, как и раньше, при доказательстве леммы мы будем рассматривать лишь одну траекторию системы (20.5) — $\varphi(p, t)$ и считать в связи с этим различные функции координат фазового пространства функциями времени.

Как и при доказательстве предыдущих лемм, нетрудно установить неравенство

$$y(p)<-100m. \tag{21.48}$$

Станем двигаться вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в направлении убывания времени от точки p. Покажем, что до тех пор, пока на траектории $\varphi(p, t)$ оказывается $x\leqslant x_1$, на ней выполняется неравенство

$$y<0{,}9y(p). \tag{21.49}$$

Будем доказывать это неравенство от противного. Предположим, что при движении вдоль траектории $\varphi(p, t)$ от точки p в направлении убывания времени неравенство (21.49) нарушается раньше неравенства $x\leqslant x_1$. Так как при $t=0$ неравенство (21.49) выполнено, то это значит, что существует такое $t^*<0$, что

$$y(t^*)=0{,}9y(p), \tag{21.50}$$

$$x(t^*)\leqslant x_1 \tag{21.51}$$

и

$$y(t)<0{,}9y(p) \quad \text{при} \quad t\in(t^*, 0], \tag{21.52}$$

$$x(t)\leqslant x_1 \quad \text{при} \quad t\in[t^*, 0]. \tag{21.53}$$

Обратимся к равенству (20.15). Из этого равенства, из неравенств (21.59) и (21.48) и из того, что при $t \in [t^*, 0]$ $z(t)$ возрастает с убыванием времени, следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t^*, 0]$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} < 2.$$

Интегрируя это неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ от $t = 0$ до $t = t^*$ и используя неравенства (21.51) и (21.53), получаем

$$y(t^*) - y(0) < 2x_1. \tag{21.54}$$

Неравенства (21.48) и (21.54) противоречат равенству (21.50). Полученное противоречие и доказывает справедливость неравенства (21.49).

Докажем теперь, что траектория $\varphi(p, t)$ при $t = t_1 < 0$ пересекает плоскость $x = x_1$. Допустим, напротив, что это не так. Тогда при всех $t < 0$ траектория $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{0 < x < x_1,\ y < 0{,}9y(p)\}$. Докажем, что тогда $\varphi(p, t)$ ограничена при $t < 0$. Если при всех $t < 0$ $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{z - x > 0\}$, то ограниченность траектории $\varphi(p, t)$ при $t < 0$ доказывается так же, как и при доказательстве леммы 21.2, путем рассмотрения функции w, введенной равенством (21.38).

Пусть существует хотя бы один момент времени $t' < 0$ такой, что точка $\varphi(p, t')$ лежит в области $\{0 < x \leqslant x_1,\ y < 0{,}9y(p),\ z - x \leqslant 0\}$. Тогда при всех $t < t'$ траектория $\varphi(p, t)$ лежит в этой области. Действительно, покинуть эту область она может только через плоскость $z - x = 0$. Но, как показывает неравенство (20.10), при $x > 0$ и $y < 0$ все движения системы (20.5) пересекают плоскость $z - x = 0$, переходя при убывании времени из области $\{z - x > 0\}$ в область $\{z - x < 0\}$. Поэтому траектория $\varphi(p, t)$ при $t < t'$ лежит в области $\{0 < x \leqslant x_1,\ y < 0{,}9y(p),\ z - x < 0\}$. В этой области $z(t)$ возрастает с убыванием времени и ограничен сверху числом x_1, а $y(t)$ возрастает и отрицателен. Таким образом, траектория $\varphi(p, t)$ при $t < 0$ ограничена и при достаточно малых t целиком лежит в одной из областей $\{0 < x \leqslant x_1,\ y - f(x) < 0,\ z - x > 0\}$ при $\{0 < x \leqslant x_1,\ y - f(x) < 0,\ z - x < 0\}$. Следовательно, при $t \to -\infty$ траектория $\varphi(p, t)$ стремится к состоянию равновесия системы (20.5), отличному от точки $x = y = z = 0$. Это противоречит тому, что система (20.5) имеет лишь одно состояние равновесия. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(p, t)$ при $t = t_1 < 0$ пересекает плоскость $x = x_1$. Из неравенства (21.49) следует неравенство (21.46).

Оценим теперь $y(t)$ на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant 0$ снизу. Из равенства (21.15) и из неравенств (21.48) и (21.49) следует, что

$$\frac{dz}{dx} < \frac{1}{90}$$

на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t_1, 0]$. Проинтегрируем это неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в пределах от $t = 0$ до $t = t_1$, тогда получим

$$z(t_1) - z(0) < \frac{1}{90} x_1. \tag{21.55}$$

Из равенства (20.15), из неравенств (21.48), (21.49) и (21.55) и из условия $\frac{|z(p)|}{|y(p)|} \leqslant 1$ следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t_1, 0]$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} > -2.$$

Интегрируя это неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ от $t = 0$ до $t = t_1$, получаем

$$y(t_1) - y(0) > -2x_1.$$

Отсюда ясно, что

$$y(t_1) > -2y(0). \tag{21.56}$$

Докажем теперь неравенство (21.47). Оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (21.19). Имеем

$$\int_0^{x_0} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < -D(2y(p) - m)\,x_0, \tag{21.57}$$

что следует из неравенства (21.56).

Из неравенства (21.49) вытекает соотношение

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < 0{,}9\varepsilon y(p)(x_1 - x_0).$$

Отсюда и из (21.5) получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < 9Dy(p)\,x_0. \qquad (21.58)$$

Из неравенств (21.48), (21.57) и (21.58) вытекает соотношение

$$\int_{0}^{x_1} \alpha'(x)(y - f(x))\,dx < 0, \qquad (21.59)$$

а из неравенства (21.59) и равенства (21.19) следует неравенство (21.47).

Лемма доказана.

Лемма 21.4. Пусть выполнено условие (21.1). *Предположим, что точка p лежит в области* $\left\{x = 0,\ y < 0,\ z < 0,\ \frac{y}{z} \leqslant 1,\ v \geqslant \frac{1}{2} R^2\right\}$, *где, как и раньше, v — функция координат фазового пространства, введенная равенством* (21.2). *Предположим далее, что существует такое $t_2 < 0$, что на траектории $\varphi(p, t)$ выполняются соотношения*

$$x(t_2) = x_2, \qquad (21.60)$$

$$y - f(x) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_2, 0]. \qquad (21.61)$$

Тогда траектория $\varphi(p, t)$ пересекает при $t = t_1 \in (t_2, 0)$ плоскость $x = x_1$, и имеет место следующее неравенство:

$$v(p) < v(\varphi(p, t_1)). \qquad (21.62)$$

Доказательство. Интересуясь в доказательстве лишь одной траекторией системы (20.5) — траекторией $\varphi(p, t)$, будем, как и выше, считать функции координат фазового пространства просто функциями времени. Положим $\xi = 9x_1$. Благодаря условиям (21.60) и (21.61) можно утверждать, что существуют такие моменты времени t_0, t_1 и t', что

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t') = \xi, \qquad (21.63)$$

и эти моменты — единственные на промежутке времени $(t_2, 0)$. Очевидно, что $t_2 < t' < t_1 < t_0 < 0$. Из условий $v \geqslant \frac{1}{2} R^2$

и $\frac{y(p)}{z(p)} \leqslant 1$ и из обозначения (21.6) легко вывести неравенство

$$z(p) < -100\frac{m^2}{x_0}. \qquad (21.64)$$

Покажем, что на промежутке $t \in [t_2, 0]$ выполняется неравенство

$$z(t) < 0{,}9z(0). \qquad (21.65)$$

Это неравенство мы будем доказывать от противного. Предположим, что существует такое $t^* \in [t_2, 0]$, что

$$z(t^*) = 0{,}9z(0), \qquad (21.66)$$

и что неравенство (21.65) выполнено при $t \in (t^*, 0]$. Из неравенства (21.65) следует, что при $t \in [t^*, 0]$ $z(t) < 0$ и, как показывает второе уравнение системы (20.5) и равенство (21.39), $y(t)$ и $w(t)$ возрастают с убыванием времени при $t \in [t^*, 0]$. Поэтому имеем

$$w(0) \leqslant w(t^*).$$

Из самого вида функции w тогда следует, что

$$z^2(0) + y^2(0) \leqslant [z(t^*) - x(t^*)]^2 + y^2(t^*). \qquad (21.67)$$

Но $y(t)$ при $t \in [t^*, 0]$ возрастает с убыванием времени, и, кроме того, из условия (21.61) следует, что $y(t) < m$ при $t \in [t^*, 0]$. Поэтому из неравенства (21.67) вытекает соотношение

$$z^2(0) \leqslant [z(t^*) - m]^2 + m^2.$$

Отсюда и из равенства (21.66) получаем

$$z^2(0) \leqslant 0{,}81z^2(0) - 1{,}8\,z(0)m + 2m^2. \qquad (21.68)$$

Это неравенство противоречит неравенству (21.64). Полученное противоречие и доказывает неравенство (21.65).

Покажем теперь, что при $t \in [t', 0]$

$$y(t) < -8m. \qquad (21.69)$$

Так как при $t \in [t_2, 0]$ $y(t)$ убывает с возрастанием времени, то для доказательства неравенства (21.69) достаточно установить, что

$$y(t') < -8m. \qquad (21.70)$$

Доказываем это неравенство. Предположим, что оно не выполнено, тогда при $t \in [t_2, t']$ выполняется

$$y(t) \geqslant -8m. \tag{21.71}$$

Из равенства (20.15) и неравенств (21.64), (21.65) и (21.71) следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t_2, t']$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} > \frac{90\,\frac{m^2}{x_0}}{9m} = 10\,\frac{m}{x_0}.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ от $t = t'$ до $t = t_2$, тогда получим

$$y(t_2) - y(t') > 10\,\frac{m}{x_0}(x_2 - \xi) > 10m.$$

Так как по условию $y(t_2) \leqslant f(x(t_2)) \leqslant m$, то из последнего неравенства получаем

$$y(t') < -9m.$$

Это неравенство противоречит неравенству (21.71). Полученное противоречие доказывает неравенство (21.70), а с ним и (21.69).

Из равенства (20.15) и неравенств (21.64), (21.65) и (21.69) выводим, что на $\varphi(p, t)$ при $t \in [t', 0]$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} > \frac{z(p)}{2y}.$$

Умножая это неравенство на $2y < 0$ и интегрируя полученное неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в пределах от $t = 0$ до $t = t'$, получаем

$$y^2(0) - y^2(t') > -z(p)\,\xi,$$

а отсюда

$$y(0) < -\sqrt{-z(p)}\,\sqrt{\xi}. \tag{21.72}$$

С другой стороны, из равенства (20.15) и неравенств (21.64), (21.65) и (21.69) получаем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [t', 0]$ выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} < \frac{2z(p)}{y}.$$

Умножим это неравенство на $y<0$ и проинтегрируем на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant 0$, тогда получим

$$y^2(0)-y^2(t_1) < -4z(p)x_1$$

или

$$[y(0)-y(t_1)][y(0)+y(t_1)] < -4z(p)x_1.$$

Отсюда, из (21.72) и (21.69) получаем

$$y(t_1)-y(0) < \frac{4\sqrt{-z(p)x_1}}{\sqrt{\xi}}.$$

А отсюда и из (21.72) выводим

$$y(t_1)-y(0) < -\frac{4y(0)}{\xi}x_1.$$

Так как $\xi = 9x_1$, то из последнего неравенства получаем

$$y(t_1) < \frac{1}{2}y(0). \tag{21.73}$$

Доказываем теперь неравенство (21.62). Для этого обратимся к равенству (21.19) и оценим интегралы, стоящие в правой части этого равенства. Имеем

$$\int_0^{x_0} \alpha'(x)(y-f(x))\,dx < D(y(0)-m)x_0. \tag{21.74}$$

С другой стороны,

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y-f(x))\,dx < \varepsilon y(t_1)(x_1-x_0).$$

Отсюда, из (21.73) и (21.5) следует, что

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha'(x)(y-f(x))\,dx < 5Dy(0)x_0. \tag{21.75}$$

Из неравенств (21.74), (21.75) и (21.69) вытекает неравенство

$$\int_0^{x_1} \alpha'(x)(y-f(x))\,dx < 0. \tag{21.76}$$

Из равенства (21.19) и неравенства (21.76) следует неравенство (21.62).

Лемма доказана.

Лемма 21.5. *Пусть выполнено условие* (21.1). *Предположим, что точка p лежит в области* $\left\{x=0,\ y<0,\ z<0,\ \frac{y}{z}\leqslant 1,\ v\geqslant \frac{1}{2}R^2\right\}$, *где, как и раньше, v — функция, введенная равенством* (21.2). *Предположим, что не существует такого $t_2<0$, что на траектории $\varphi(p,t)$ системы* (20.5) *выполняются соотношения* (21.60) *и* (21.61). *Тогда существует такое $T<0$, что на траектории $\varphi(p,t)$ оказывается*

$$x(T)=0, \tag{21.77}$$

$$x(t)>0,\quad z(t)<0 \quad \text{при} \quad t\in(T,0). \tag{21.78}$$

Доказательство. Станем двигаться вдоль траектории $\varphi(p,t)$ от точки p в направлении убывания времени. Покажем, что до тех пор, пока траектория $\varphi(p,t)$ лежит в области $\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y\leqslant 10m\}$, на ней выполняется неравенство

$$z(t)<0{,}9z(p). \tag{21.79}$$

Заметим, что в условиях доказываемой леммы выполнено неравенство (21.64). Неравенство (21.79) будем доказывать от противного. Предположим, что существует такое $t^*<0$, что

$$z(t^*)=0{,}9z(p) \tag{21.80}$$

и при $t\in[t^*,0]$ оказывается $\varphi(p,t)\in\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y\leqslant 10m,\ z\leqslant 0{,}9z(p)\}$. Ясно, что при $t\in[t^*,0]$ z и w возрастают с убыванием времени вдоль траектории $\varphi(p,t)$. Поэтому имеем

$$w(0)\leqslant w(t^*).$$

Из вида функции w тогда следует, что

$$z^2(p)+y^2(p)\leqslant[z(t^*)-x(t^*)]^2+y^2(t^*). \tag{21.81}$$

Но при $t\in[t^*,0]$ y вдоль $\varphi(p,t)$ возрастает с убыванием времени; кроме того, по условию $y\leqslant 10m$, поэтому из неравенства (21.81) получаем

$$z^2(p)\leqslant[z(t^*)-m]^2+100m^2.$$

А отсюда и из (21.80) получаем

$$z^2(p)\leqslant 0{,}81z^2(p)-1{,}8z(p)m+101m^2.$$

Это неравенство противоречит неравенству (21.64); полученное противоречие и доказывает неравенство (21.79).

Покажем, что существует такой момент времени $t=t_1<0$, что на $\varphi(p, t)$ оказывается

$$y(t_1)=f(x(t_1)), \tag{21.82}$$

и при $t\in(t_1, 0]$ $\varphi(p, t)\in\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y<f(x)\}$. Действительно, в области $\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y<f(x)\}$ y вдоль $\varphi(p, t)$ возрастает с убыванием времени в силу (21.79), z также возрастает и благодаря (21.79) ограничен. Поэтому траектория $\varphi(p, t)$ покидает область $\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y<f(x)\}$ при убывании времени. Но пересечь плоскость $x=x_2$ при $y<f(x)$ $\varphi(p, t)$ не может, ибо момент пересечения $t=t_2$ удовлетворял бы соотношениям (21.60) и (21.61). Поэтому траектория $\varphi(p, t)$ пересекает поверхность $y-f(x)=0$ при $t=t_1$, и при $t\in(t_1, 0)$ $\varphi(p, t)\in\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y<f(x)\}$.

Легко видеть, что при $t<t_1$ траектория $\varphi(p, t)$ покидает область $\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ f(x)<y\leqslant 10m\}$. Если $\varphi(p, t)$ пересекает при этом плоскость $x=0$, то момент пересечения $t=T<t_1$ в силу неравенства (21.79) удовлетворяет соотношениям (21.77) и (21.78). Предположим, что при $t=\tau<t_1$ $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $y=10m$ и при этом на ней оказывается $x(\tau)\in[0, x_2)$. Из равенства (21.15) вытекает, что до тех пор, пока траектория $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{0\leqslant x\leqslant x_2,\ y\geqslant 10m\}$, на ней выполняется неравенство

$$\frac{dz}{dx}>-0{,}2.$$

Поэтому при тех $t<\tau$, при которых $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{x\geqslant 0\}$, на ней выполняется

$$z(t)\leqslant 0{,}8z(p). \tag{21.83}$$

Из равенства (20.15) следует, что при тех $t<\tau$, при которых траектория $\varphi(p, t)$ лежит в области $\{x\geqslant 0\}$, на ней выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx}>\frac{z(p)-m}{9m}.$$

Отсюда следует, что при таких t траектория $\varphi(p, t)$ ограничена. Следовательно, она покидает область $\{x>0\}$ при

$t < \tau$. Таким образом, существует момент времени $T < 0$, удовлетворяющий соотношениям (21.77) и (21.78).

Лемма доказана.

Теорема 21.1. *Пусть выполнено условие* (21.1). *Пусть точка p лежит в плоскости $x = 0$. Предположим, что выполнено неравенство*

$$z^2(p) + y^2(p) < R^2. \qquad (21.84)$$

Предположим, кроме того, что точка $\varphi(p, T)$, где $T > 0$, лежит в плоскости $x = 0$; тогда справедливо неравенство

$$y^2(\varphi(p, T)) + z^2(\varphi(p, T)) < R^2. \qquad (21.85)$$

Доказательство. При доказательстве этой теоремы мы будем рассматривать лишь одну траекторию системы (20.5) — $\varphi(p, t)$. В связи с этим будем, как и раньше, различные функции точек фазового пространства иногда рассматривать как функции времени.

Для определенности будем считать, что $y(p) \geqslant 0$. При этом если $z(p) \leqslant 0$, то будем считать $y(p) > 0$. Не умаляя общности, можно считать, что T — первый после $t = 0$ момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = 0$, т. е. что при $t \in (0, T)$ $x(t) > 0$.

Рассмотрим сначала тот случай, когда $z(p) \leqslant 0$. Из третьего уравнения системы (20.5) следует, что при $t \in (0, T)$ $\frac{dz}{dt} < 0$; поэтому при $t \in (0, T]$ $z(t) < 0$, и, следовательно, функция w, введенная равенством (21.38), убывает вдоль $\varphi(p, t)$ при $t \in (0, T)$. Поэтому имеем

$$w(T) < w(0). \qquad (21.86)$$

Из определения функции w и из (21.86) и следует (21.85).

Пусть теперь $z(p) > 0$. Предположим сначала, что на промежутке времени $0 < t < T$ траектория $\varphi(p, t)$ не пересекает участка поверхности $\{y = f(x), 0 < x \leqslant x_0, z - x \geqslant 0\}$, переходя из области $\{y - f(x) < 0\}$ в область $\{y - f(x) > 0\}$. Как следует из леммы 20.3, траектория $\varphi(p, t)$ при $t = \tau \in (0, T)$ пересекает поверхность $y - f(x) = 0$, переходя при $t = \tau$ из области $\{y - f(x) > 0\}$ в область $\{y - f(x) < 0\}$. Предположим, что $x(\tau) \leqslant x_0$. Тогда траектория $\varphi(p, t)$ при $t \in (0, T)$ пересекает поверхность

$y-f(x)=0$, переходя из области $\{y-f(x)>0\}$ в область $\{y-f(x)<0\}$ лишь один раз при $t=\tau$. Действительно, перейти из области $\{y-f(x)<0\}$ в область $\{y-f(x)>0\}$ траектория $\varphi(p, t)$ может лишь при пересечении с участком поверхности $\{y=f(x),\ 0<x\leqslant x_0,\ z-x\geqslant 0\}$, а это по условию невозможно. Таким образом, при $t\in(0, T)$ $x(t)$ имеет лишь один максимум при $t=\tau$, и, следовательно, $x(t)\leqslant x_0$ при $t\in[0, T]$.

Докажем, что в рассматриваемом случае выполнено неравенство (21.85). Предположим, что неравенство (21.85) не выполнено; тогда выполнено неравенство

$$v(T)\geqslant\frac{1}{2}R^2, \tag{21.87}$$

где v — функция точек фазового пространства, введенная равенством (21.2). Если $z(T)\geqslant 0$ или если $z(T)<0$ и $\frac{z(T)}{y(T)}\leqslant 1$, то из неравенства (21.87) и из лемм 21.2 и 21.3 следует, что траектория $\varphi(p, t)$ при $t\in(0, T)$ пересекает плоскость $x=x_1$, что противоречит неравенству $x(t)\leqslant x_0$ при $0\leqslant t\leqslant T$. Если же $z(T)<0$, $\frac{y(T)}{z(T)}\leqslant 1$ и траектория $\varphi(p, T)$ при $t\in(0, T)$ не пересекает плоскости $x=x_2$, то по лемме 21.5 должно оказаться $z(0)=z(p)\leqslant 0$, а это противоречит предположению $z(p)>0$. Полученные противоречия и доказывают неравенство (21.85) в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $x(\tau)>x_0$. Тогда траектория $\varphi(p, t)$ при $t=t_0\in(0, T)$ пересекает плоскость $x=x_0$. Под $t=t_0$ понимается первый после $t=0$ момент пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x=x_0$. Пусть $t=t_3$ — последний перед $t=T$ момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x=x_0$. Из того условия, что траектория $\varphi(p, t)$ не пересекает участка поверхности $\{y=f(x),\ 0<x\leqslant x_0,\ z-x\geqslant 0\}$, переходя из области $\{y-f(x)<0\}$ в область $\{y-f(x)>0\}$, вытекает, что в этом случае траектория $\varphi(p, t)$ при $t\in[t_0, t_3]$ целиком лежит в полупространстве $\{x\geqslant x_0\}$, а при $t\in[0, t_0]$ и $t\in[t_3, T]$ — в полосе $\{0\leqslant x\leqslant x_0\}$. Доказываем теперь неравенство (21.85) в рассматриваемом случае. Если $v(t)<<\frac{1}{2}R^2$ при $t\in[0, T]$, то неравенство (21.85) следует просто из вида функции v. Предположим теперь, что существует такой момент времени $t=\theta \in [0, T]$, что $v(\theta)=\frac{1}{2}R^2$, и при этом будем считать, что θ — первый такой момент, т. е. что при $t \in [0, \theta)$ $v(t)<\frac{1}{2}R^2$. Так как при $x \geqslant x_0$ $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$, что следует из (21.3) и условия (21.1) теоремы, то точка $\varphi(p, \theta)$ должна лежать в полосе $\{0 \leqslant x \leqslant x_0\}$.

Таким образом, должно быть выполнено одно из двух: либо $\theta \in [0, t_0]$, либо $\theta \in [t_3, T]$. Предположим сначала, что $\theta \in [t_3, T]$. Неравенство (21.85) доказываем от противного. Предположим, что оно не выполнено, т. е. что

$$v(T) \geqslant \frac{1}{2}R^2. \tag{21.88}$$

Из этого неравенства, из того, что $z(p)>0$, и из лемм 21.2—21.5 следует, что $\varphi(p, t)$ при $t=t_2 \in (t_0, t_3)$ пересекает плоскость $x=x_1$ и имеет место неравенство

$$v(t_1)>\frac{1}{2}R^2. \tag{21.89}$$

Но $t_1<t_3 \leqslant \theta$, а по определению θ $v(t)<\frac{1}{2}R^2$ при всех $t \in [0, \theta)$. Это показывает, что неравенство (21.88) в рассматриваемом случае также реализоваться не может. Следовательно, неравенство (21.85) в рассматриваемом случае выполнено. Пусть теперь $\theta \in [0, t_0]$. Покажем, что в этом случае

$$z(\theta)>-x_0. \tag{21.90}$$

Предположим, напротив, что

$$z(\theta) \leqslant -x_0. \tag{21.91}$$

Покажем, что тогда

$$z(0) \leqslant 0. \tag{21.92}$$

Рассмотрим сначала случай $\frac{|z(\theta)|}{y(\theta)} \leqslant 1$, тогда из определения момента θ и из вида функции v следует

$$y(\theta)>100m. \tag{21.93}$$

Предположим, что существует такое $t^* \in [0, \theta)$, что

$$z(t^*)=0 \tag{21.94}$$

и

$$z(t)<0 \quad \text{при} \quad t \in (t^*, \theta]. \tag{21.95}$$

Тогда при $t \in (t^*, \theta]$ $y(t)$ возрастает с убыванием времени. Отсюда, из неравенства (21.93) и из уравнения (21.15) следует, что на $\varphi(p, t)$ при $t \in [t^*, \theta]$ выполняется неравенство

$$\frac{dz}{dx} > -\frac{1}{99}.$$

Интегрируя это неравенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ в пределах от $t = t^*$ до $t = \theta$ и используя неравенство (21.91), убеждаемся в том, что равенство (21.94) реализоваться не может; следовательно, должно быть выполнено неравенство (21.92). Пусть теперь $\frac{y(\theta)}{|z(\theta)|} \leqslant 1$. В этом случае неравенство (21.92) доказывается так же, как и при доказательстве леммы 21.5. Но неравенство (21.92) противоречит тому, что $z(p) > 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство (21.90). Из неравенства (21.90) и леммы 21.1 следует, что траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $x = x_1$ при $t = t_1 \in (t_0, t_3)$ и имеет место неравенство

$$v(t_1) < v(\theta) = \frac{1}{2} R^2. \tag{21.96}$$

Будем теперь доказывать неравенство (21.85) от противного. Предположим, что выполнено неравенство (21.88). Тогда из того, что $z(p) > 0$, и из лемм 21.2—21.5 следует, что траектория $\varphi(p, t)$ при $t = t_2 \in (t_1, t_3)$ пересекает плоскость $x = x_1$ и имеет место неравенство

$$v(t_2) > v(T) \geqslant \frac{1}{2} R^2. \tag{21.97}$$

Но при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, t_3]$ траектория $\varphi(p, t)$, как было показано выше, лежит в полупространстве $\{x \geqslant x_0\}$. Но, как показывает равенство (21.2) и условие (21.1) теоремы, функция $v(t)$ убывает при $x \geqslant x_0$. Отсюда следует, что

$$v(t_1) \geqslant v(t_2).$$

Последнее неравенство противоречит неравенствам (21.96) и (21.97). Полученное противоречие и доказывает неравенство (21.85).

Рассмотрим теперь случай, когда траектория $\varphi(p, t)$ при $t \in (0, T)$ пересекает участок поверхности $\{y = f(x), 0 < x \leqslant x_0, z - x \geqslant 0\}$, переходя при этом из области $\{y - f(x) < 0\}$ в область $\{y - f(x) > 0\}$. Нетрудно видеть, что число таких пересечений конечное. Пусть $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \ldots, \tau_k$ — последовательные моменты таких пересечений. Имеем

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k < T. \tag{21.98}$$

На промежутках времени $0 < t < \tau_1$, $\tau_1 < t < \tau_2, \ldots$ $\ldots, \tau_{k-1} < t < \tau_k$, $\tau_k < t < T$ траектория $\varphi(p, t)$ не пересекает участка поверхности $\{y - f(x) = 0,\ 0 < x \leqslant x_0,\ z - x \geqslant 0\}$, переходя из области $\{y - f(x) < 0\}$ в область $\{y - f(x) > 0\}$. Поэтому рассуждениями, аналогичными проведенным выше при доказательстве неравенства (21.85), мы последовательно докажем неравенства

$$v(\tau_i) < \frac{1}{2} R^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{21.99}$$

А из неравенства $v(\tau_k) < \frac{1}{2} R^2$ выведем неравенство $v(T) < \frac{1}{2} R^2$, которое совпадает с (21.85).

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 21.2. *Пусть выполнено условие* (21.1). *Пусть точка p лежит в плоскости $x = 0$. Предположим, что выполнено неравенство*

$$y^2(p) + z^2(p) \geqslant R^2. \tag{21.100}$$

Предположим, далее, что точка $\varphi(p, T)$, где $T > 0$, лежит в плоскости $x = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$y^2(\varphi(p, T)) + z^2(\varphi(p, T)) < y^2(p) + z^2(p). \tag{21.101}$$

Теорема 21.3. *Пусть выполнено условие* (21.1), *тогда любая траектория системы* (20.5), *не стремящаяся к началу координат при $t \to +\infty$, имеет точки в области $\{x = 0,\ y^2 + z^2 < R^2\}$.*

Доказательство. Из теоремы 20.1 следует, что существует такая последовательность моментов времени

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots \to +\infty, \tag{21.102}$$

что

$$x(\varphi(p, t_k)) = 0. \tag{21.103}$$

Допустим, вопреки утверждению теоремы, что траектория $\varphi(p, t)$ не имеет точек в области $\{x=0,\ y^2+z^2<R^2\}$, тогда при всех натуральных k окажется

$$y^2(t_k)+z^2(t_k)\geqslant R^2 \tag{21.104}$$

на траектории $\varphi(p, t)$. Тогда по теореме 21.2 имеем

$$y^2(t_{k+1})+z^2(t_{k+1})<y^2(t_k)+z^2(t_k)<\\ <y^2(t_1)+z^2(t_1) \quad \text{при} \quad k>1. \tag{21.105}$$

В силу неравенства (21.105) и принципа выбора Больцано — Вейерштрасса можно считать, что последовательность точек $\varphi(p, t_k)$ сходится. Положим

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(p, t_k)=q. \tag{21.106}$$

Из неравенства (21.104) вытекает

$$y^2(q)+z^2(q)\geqslant R^2. \tag{21.107}$$

С другой стороны, из (21.105) и (21.106) следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство

$$y^2(t_k)+z^2(t_k)>y^2(q)+z^2(q) \tag{21.108}$$

при всех натуральных k.

Пусть t^* — такой момент времени, что $\varphi(p, t^*)$ лежит в плоскости $x=0$. Тогда, в силу теоремы 21.2 и соотношений (21.103), (21.104) и (21.108), имеем на траектории $\varphi(p, t)$

$$y^2(t^*)+z^2(t^*)>y^2(q)+z^2(q). \tag{21.109}$$

Рассмотрим теперь траекторию $\varphi(q, t)$ системы (20.5). Эта траектория будет, очевидно, ω-предельной для $\varphi(p, t)$. Предположим сначала, что траектория $\varphi(q, t)$ при всех $t\geqslant 0$ лежит в одном из полупространств $\{x\geqslant 0\}$ или $\{x\leqslant 0\}$; в этом случае траектория $\varphi(q, t)$, согласно теореме 20.1, стремится к началу координат. Тогда траектория $\varphi(p, t)$ имеет точки в любой окрестности начала координат, и нетрудно видеть, что эта траектория имеет точки пересечения с плоскостью $x=0$ в любой близости от начала координат.

Пусть теперь найдется такое $t'>0$, что при $t=t'$ траектория $\varphi(q, t)$ переходит из одного из полупространств

$\{x \geqslant 0\}$ и $\{x \leqslant 0\}$ в другое. В силу теоремы 21.2 будем иметь

$$\varphi(q, t') \in \{x = 0, \ y^2 + z^2 < y^2(q) + z^2(q)\}. \qquad (21.110)$$

По теореме об интегральной непрерывности тогда можно указать такое t^*, что и

$$\varphi(p, t^*) \in \{x = 0, \ y^2 + z^2 < y^2(q) + z^2(q)\}. \qquad (21.111)$$

Последнее соотношение противоречит неравенству (21.109).

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 21.4. *Пусть выполнено условие* (21.1). *Тогда существует такое* $M > 0$, *что по любой точке* p *фазового пространства можно указать такое* T_p, *что при* $t \geqslant T_p$ *на траектории* $\varphi(p, t)$ *системы* (20.5) *выполняются неравенства*

$$|x| < M, \quad |y| < M, \quad |z| < M. \qquad (21.112)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную траекторию $\varphi(p, t)$ системы (20.5). Если $\varphi(p, t)$ стремится к началу координат при $t \to +\infty$, то утверждение теоремы для нее, очевидно, выполнено. Предположим, что $\varphi(p, t)$ не стремится к началу координат. Тогда по теореме 21.3 $\varphi(p, t)$ пересекает круг $\{x = 0, \ y^2 + z^2 < R^2\}$ при $t = T_p$. Положим

$$N = \max|f(x) + x| \quad \text{при} \quad |x| \leqslant R. \qquad (21.113)$$

Покажем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \geqslant T_p$ выполняется неравенство

$$|y| < 3N. \qquad (21.114)$$

Пусть $t_1 > T_p$ — первый после T_p момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = 0$. Покажем, что на промежутке $T_p \leqslant t \leqslant t_1$ на $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство (21.114). Для определенности будем считать, что $y(\varphi(p, T_p)) \geqslant 0$, и если $z(\varphi(p, T_p)) \leqslant 0$, то $y(\varphi(p, T_p)) > 0$. Если $z(\varphi(p, T_p)) \leqslant 0$, то, как отмечалось выше, y вдоль $\varphi(p, t)$ при $t \in [T_p, t_1]$ убывает, и, следовательно, при таких t выполняется неравенство

$$|y(\varphi(p, t))| \leqslant \max\{y(\varphi(p, T_p)), \ |y(\varphi(p, t_1))|\}.$$

Из последнего неравенства и из теоремы 21.1 следует, что $|y| < R$ на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [T_p, t_1]$, а отсюда и следует (21.114).

Пусть теперь $z(\varphi(p, T_p)) > 0$. Так как $y^2(\varphi(p, T_p)) + z^2(\varphi(p, T_p)) < R^2$, то $z(\varphi(p, T_p)) < R$. Максимумы y, как отмечалось в § 20, лежат на плоскости $z - x = 0$. Но z вдоль $\varphi(p, t)$ при $t \in [T_p, t_1]$ убывает, поэтому пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $z - x = 0$ на промежутке $t \in [T_p, t_1]$ имеют абсциссу, меньшую R. Покажем, что при $t \in [T_p, t_1]$ на траектории $\varphi(p, t)$ оказывается

$$y < 3N. \tag{21.115}$$

Действительно, если выполнено неравенство $y \leqslant 2N$, то неравенство (21.115) просто следует из него. Если же это неравенство не выполнено, то, как нетрудно видеть, существует такое $t = t^* \in (T_p, t_1)$, что

$$y(t^*) = 2N, \quad z(t^*) - x(t^*) > 0 \tag{21.116}$$

на траектории $\varphi(p, t)$. Тогда до пересечения с плоскостью $z - x = 0$ на траектории $\varphi(p, t)$ будет выполняться неравенство $y \geqslant 2N$. Из этого неравенства, из того, что $z(\varphi(p, t)) < R$ при $t \in (T_p, t_1)$, и из равенства (20.15) следует, что при $t \geqslant t^*$ и таких, что $z(\varphi(p, t)) - x(\varphi(p, t)) \geqslant 0$, выполняется неравенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - f(x)} < 1.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль $\varphi(p, t)$ от $t = t^*$ до точки пересечения $\varphi(p, t)$ с плоскостью $z - x = 0$ и используем равенство (21.116) и тот факт, что на плоскости $z - x = 0$ имеем $x(\varphi(p, t)) < R$. Тогда получим неравенство (21.115).

Покажем теперь, что при $t \in (T_p, t_1)$ на траектории $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство

$$y > -3N. \tag{21.117}$$

Так как минимумы y находятся на плоскости $z - x = 0$ и минимумы эти чередуются с максимумами, то из (21.38) и (21.39) следует, что между максимумом и минимумом y функция w вдоль $\varphi(p, t)$ убывает с возрастанием времени. Отсюда и из вида функции w следует, что в момент минимума y по абсолютной величине меньше, чем в момент предыдущего максимума. Отсюда следует (21.117), а из него и из (21.115) и (21.114).

Так как при $y - f(x) \leqslant 0$ x вдоль траектории $\varphi(p, t)$ убывает, то из обобщенного условия Гурвица $f(x) > ax$ при $x > 0$ следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [T_p, t_1]$ выполнено неравенство

$$x < \frac{1}{a} \max y.$$

Отсюда и из (21.114) следует, что при $t \in [T_p, t_1]$ на траектории $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство

$$|x| < \frac{3}{a} N. \tag{21.118}$$

Так как на промежутке $T_p \leqslant t \leqslant t_1$ z вдоль $\varphi(p, t)$ убывает, то из теоремы 21.1 следует, что на промежутке $T_p \leqslant t \leqslant t_1$ на $\varphi(p, t)$ имеет место неравенство

$$|z| < R. \tag{21.119}$$

Неравенства (21.114), (21.118) и (21.119) доказаны лишь для промежутка времени $[T_p, t_1]$, но в силу теоремы 21.1 они, очевидно, справедливы и при всех $t \geqslant T_p$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

2. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда $a \geqslant 1$ и когда выполнено условие (21.1), и докажем в этом случае одну теорему относительно расположения траекторий системы (20.5). Обозначим через P область $\{x = 0,\ y > 0,\ z > 0,\ y^2 + z^2 < R^2\}$.

Рассмотрим периодическое движение системы (20.5). Как следует из теорем 20.2, 20.3 и 21.3, его траектория пересекает область P. Будем называть периодическое движение системы (20.5) регулярным, если его траектория имеет только одну общую точку с областью P.

Теорема 21.5. *Пусть выполнено неравенство* $a \geqslant 1$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема при всех вещественных* x *и существуют такие положительные числа* ε *и* x_0, *что выполнено условие* (21.1). *Тогда, для того чтобы все решения системы* (20.5) *стремились к началу координат при* $t \to +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы система* (20.5) *не имела регулярных периодических движений.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем достаточность.

Пусть система (20.5) не имеет регулярных периодических движений. Требуется доказать, что тогда все движения этой системы стремятся к началу координат при $t \to +\infty$. Предположим, напротив, что существует такая точка q фазового пространства, что траектория $\varphi(q, t)$ не стремится при $t \to +\infty$ к началу координат. В силу теорем 20.2, 20.3 и 21.3 можно, не нарушая общности, считать, что $q \in P$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $p \in P$, $p \neq (0, 0, 0)$ и траекторию $\varphi(p, t)$ системы (20.5). В силу теорем 20.2, 20.3 и 21.1 существует такое $t_p > 0$, что $\varphi(p, t_p) \in P$. При этом под t_p понимается первый после $t = 0$ момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с областью P. Поставим в соответствие каждой точке $p \in \bar{P}$, $p \neq (0, 0, 0)$ точку $\varphi(p, t_p)$, а точке $(0, 0, 0)$ ее самое. Полученное таким образом преобразование замкнутой области $\bar{P}$ в себя обозначим через T. Из теоремы единственности, теоремы об интегральной непрерывности и теорем 20.2, 20.3 и 21.1 следует, что преобразование T взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Кроме того, оно сохраняет ориентацию. Действительно, возьмем произвольный замкнутый контур l, лежащий в P, и каким-либо образом его ориентируем. Проведем поверхность $\varphi(l, t)$ до пересечения ее следующий после $t = 0$ раз с $\bar{P}$. Это пересечение даст нам, очевидно, контур Tl. Ориентация контура Tl может не совпасть с ориентацией контура l только в том случае, если на поверхности $\varphi(l, t)$ произошло пересечение траекторий, чего не может быть в силу теоремы единственности.

Рассмотрим последовательность $T^n q$. При всяком натуральном n оказывается $T^n q \in P$. Так как область P ограничена, то отсюда следует, что последовательность $T^n q$ имеет предельные точки, лежащие в замкнутой области $\bar{P}$. Пусть q_0 — какая-нибудь предельная точка последовательности $T^n q$. Из теорем 20.3 и 21.1 следует, что если точка q_0 лежит на границе области P, то она обязательно совпадает с началом координат.

Предельное множество последовательности $T^n q$ не может исчерпываться началом координат, ибо в этом случае так же, как и при доказательстве теоремы 21.4, мы бы установили, что $\varphi(q, t)$ при достаточно больших t лежит в сколь угодно малой окрестности начала координат, т. е. стремится к нему при $t \to +\infty$; это невозможно по самому выбору точки q. Таким образом, последовательность $T^n q$ имеет предельную точку q_1, отличную от начала координат и, следовательно, не лежащую на границе P, т. е. последовательность $T^n q$ имеет подпоследовательность $T^{n_k} q$, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{k \to \infty} T^{n_k} q = q_1 \in P. \tag{21.120}$$

Итак, мы имеем гомеоморфное и сохраняющее ориентацию преобразование T плоской области P в себя. Преобразование это таково, что существует точка $q \in P$, для которой выполняется соотношение (21.120). Но тогда из теоремы 12.5 следует, что преобразование T имеет неподвижную точку p_0, лежащую в области P (и, следовательно, отличную от начала координат). По определению преобразования T траектория $\varphi(p_0, t)$ представляет собой траекторию регулярного периодического движения системы (20.5). Это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает достаточность условий теоремы.

§ 22. Периодические решения

В этом параграфе мы покажем, что система (20.5) может иметь периодические решения, даже если выполнено условие (20.8).

Обозначим, как и раньше (см. равенство (20.36)), через $\alpha(x)$ функцию $\alpha(x) = f(x) - ax$. Будем считать, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$hx^2 \leqslant \alpha(x)\,x \leqslant Hx^2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant \delta, \tag{22.1}$$

$$0 < \alpha(x)\,x \leqslant Hx^2 \quad \text{при} \quad \delta \leqslant |x| \leqslant \varepsilon, \tag{22.2}$$

$$0 < \alpha(x)\,\mathrm{sign}\,x \leqslant \delta^4 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon. \tag{22.3}$$

Условия эти будем в дальнейшем называть условиями $E(h, H, \delta)$ или просто условиями E. В условиях E величина ε подчиняется неравенствам

$$0 < \varepsilon - \delta < \delta^2, \tag{22.4}$$

а числа h и H — неравенствам

$$H \geqslant h > \frac{1}{a}. \tag{22.5}$$

Величина δ достаточно мала. Понимается это в том смысле, что при фиксированных h и H существует такое $\delta_0 > 0$, что при $\delta \leqslant \delta_0$ выполняются соответствующие утверждения.

В дальнейшем часто будем пользоваться символом $O(\delta^r)$. Этим символом, как обычно, будет обозначаться величина, для которой можно указать такие постоянные N и δ_0, что имеет место неравенство

$$|O(\delta^r)| \leqslant N\delta^r \quad \text{при} \quad \delta \leqslant \delta_0. \tag{22.6}$$

Система (20.5) в обозначении (20.36) переписывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - ax - \alpha(x), \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = -ax. \tag{22.7}$$

Сделаем в системе (22.7) следующую замену переменных:

$$x_1 = a^2x - ay + z, \quad y_1 = z - x, \quad z_1 = y, \tag{22.8}$$

$$x = \frac{x_1 - y_1 + az_1}{a^2+1}, \quad y = z_1, \quad z = \frac{x_1 + a^2y_1 + az_1}{a^2+1}, \tag{22.9}$$

тогда будем иметь

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1 - a^2\alpha(x), \quad \frac{dy_1}{dt} = -z_1 + \alpha(x), \quad \frac{dz_1}{dt} = y_1. \tag{22.10}$$

В дальнейшем мы часто будем сравнивать решения системы (20.5) с решениями той системы, которая получается, если в (20.5) положить $\alpha(x) = f(x) - ax = 0$, т. е. с решениями системы

$$\frac{dx}{dt} = y - ax, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = -ax. \tag{22.11}$$

В переменных x_1, y_1, z_1 эта система имеет следующий канонический вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = -ax_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -z_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = z_1. \tag{22.12}$$

В дальнейшем через $\psi(p, t)$ будем обозначать ту траекторию системы (22.11), которая при $t = 0$ проходит через точку p фазового пространства. Легко видеть, что общее решение системы (22.12) имеет вид

$$x_1 = x_{10}e^{-at}, \quad y_1 = y_{10}\cos t - z_{10}\sin t,$$
$$z_1 = y_{10}\sin t + z_{10}\cos t, \tag{22.13}$$

где x_{10}, y_{10}, z_{10} — значения функций x_1, y_1, z_1 при $t = 0$.

Пусть p и q — две точки фазового пространства. Обозначим через $\rho(p, q)$ расстояние между ними. Пусть $\varphi(p, t)$ и $\psi(p, t)$ — траектории систем (22.7) и (22.11) соответственно. Будем рассматривать эти траектории на промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant T$, где T — некоторое фиксированное число. Тогда хорошо известно, что

$$\rho(\varphi(p, t), \psi(q, t)) = O(\delta) \cdot t + O(\rho(p, q)). \qquad (22.14)$$

Оценка (22.14), благодаря специальному виду условий $E(h, H, \delta)$, может быть улучшена. Справедлива

Лемма 22.1. Предположим, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условию $E(h, H, \delta)$. Предположим, далее, что точки p и q лежат в области $\left\{x = 0, |x_1| \leqslant \delta, y = z_1 \geqslant \frac{1}{2}\right\}$ и $\rho(p, q) = O(\delta^2)$. Тогда при достаточно малых δ имеет место соотношение

$$\rho(\varphi(p, t), \psi(q, t)) = O(\delta^2) \qquad (22.15)$$

при $t \in \left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$.

Доказательство. Непосредственно из формул (22.13) видно, что траектория $\psi(q, t)$ системы (22.12) на промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant \frac{5}{2}\pi$ пересекает плоскость $x = 0$ три раза: при $t = 0$, $t = t_1'$ и $t = t_2'$. При этом легко видеть, что $t_1' = \pi + O(\delta)$ и $t_2' = 2\pi + O(\delta)$. Но тогда из оценок (22.14) и из рассуждений § 20 следует, что при достаточно малых δ и траектория $\varphi(p, t)$ пересекает плоскость $x = 0$ также три раза на промежутке времени $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$ — при $t = 0$, $t = t_1$ и $t = t_2$. При этом ясно, что

$$t_1 = \pi + O(\delta), \quad t_2 = 2\pi + O(\delta).$$

Из формул (22.13) далее следует, что траектория $\psi(q, t)$ на промежутке времени $[0, t_1']$ пересекает плоскость $x = \varepsilon$ два раза (при $t = \tau_1'$ и при $t = \tau_2'$) и плоскость $x = 2\varepsilon$ также два раза (при $t = \theta_1$ и $t = \theta_2$). Ясно, что $\tau_1' < \theta_1 < \theta_2 < \tau_2'$.

Из оценок (22.14) нетрудно заключить, что и траектория $\varphi(p, t)$ системы (22.7) пересекает плоскость $x = \varepsilon$ два раза на промежутке $[0, t_1]$ — при $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$. Далее из формул (22.13) вытекает, что $\theta_1 = O(\delta)$. Но тогда из (22.14) следует, что при $t \in [0, \theta_1]$ выполняется соотношение (22.15).

Из этой оценки следует, что $\tau_1 \in (0, \theta_1)$, следовательно, точка $\varphi(p, \theta_1)$ лежит в области $\{x > \varepsilon\}$. Из условий $E(h, H, \delta)$ и оценки (22.15) следует, что до тех пор, пока обе траектории $\varphi(p, t)$ и $\psi(q, t)$ лежат в области $\{x > \varepsilon\}$, выполняется соотношение (22.15). Но из этого соотношения ясно, что на промежутке $\theta_1 \leqslant t \leqslant \theta_2$ обе эти траектории лежат в полупространстве $x > \varepsilon$. Обозначив теперь через θ_3 следующий за θ_2 момент пересечения траектории $\psi(q, t)$ с плоскостью $x = -2\varepsilon$ так же, как и выше, покажем, что

$$\theta_3 - \theta_2 = O(\delta).$$

А отсюда вытекает, что соотношение (22.15) выполняется и при $0 \leqslant t \leqslant \theta_3$. Продолжая эти же рассуждения и дальше, мы докажем лемму. Из леммы 22.1 вытекают следующие соотношения:

$$\rho\left(\varphi(p, t_1), \psi(q, t_1')\right) = O(\delta^2), \tag{22.16}$$

$$\rho\left(\varphi(p, t_2), \psi(q, t_2')\right) = O(\delta^2). \tag{22.17}$$

Лемма 22.2. Предположим, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям $E(h, H, \delta)$ с достаточно малым δ. Предположим, что точка p лежит в области

$$\left\{ x = 0,\ |x_1| \leqslant \delta^{\frac{3}{2}},\ y = z_1 \geqslant \frac{1}{2} \right\},$$

тогда имеет место следующая оценка:

$$|x_1(\varphi(p, t_2))| < \delta^{\frac{3}{2}}, \tag{22.18}$$

где, как и раньше, t_2 — первый после $t = 0$ момент пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с полуплоскостью $\{x = 0, y > 0\}$.

Доказательство. Непосредственно из формул (22.13) и оценок (22.14) следует, что при достаточно малых δ траектория $\varphi(p, t)$ пересекает полуплоскость $\{x = 0, y > 0\}$ при $t = t_2 \in \left(0, \frac{5}{2}\pi\right)$. Пусть теперь так же, как и выше, t_2' — первый после $t = 0$ момент пересечения траектории $\psi(p, t)$ системы (22.11) с полуплоскостью $\{x = 0, y > 0\}$. Тогда из первой из формул (22.13) вытекает, что существует такая положительная постоянная $r < 1$, что

$$|x_1(\psi(p, t_2'))| < r\delta^{\frac{3}{2}}.$$

Отсюда и из (22.17) и вытекает утверждение леммы.

Введем в рассмотрение следующую функцию координат фазового пространства:

$$w = \frac{1}{2}(z - x)^2 + \frac{1}{2}y^2. \tag{22.19}$$

Производная от этой функции по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (22.7), как легко проверить, равна

$$\dot{w} = (z - x)\,\alpha(x). \tag{22.20}$$

Рассмотрим в плоскости $x = 0$ следующую область: $P = \left\{x = 0,\ |x_1| < \delta^{\frac{3}{2}},\ w > \frac{1}{2}(a^2 + 1),\ y > 0\right\}$. Ее замыкание мы будем обозначать через $\overline{P}$. Возьмем произвольную точку $p \in \overline{P}$ и рассмотрим траекторию $\varphi(p, t)$ системы (22.7). Если выполняются условия E, то, как следует из предыдущих рассуждений, существуют такие моменты времени $0 < t_1 < t_2$, что точки $\varphi(p, t_1)$ и $\varphi(p, t_2)$ лежат в плоскости $x = 0$, а на промежутках $0 < t < t_1$ и $t_1 < t < t_2$ x сохраняет знак на траектории $\varphi(p, t)$. Поставим в соответствие точке $p \in \overline{P}$ точку $\varphi(p, t_2)$, лежащую в полуплоскости $\{x = 0,\ y > 0\}$. Полученное таким образом преобразование плоской области $\overline{P}$ в полуплоскость $\{x = 0,\ y > 0\}$ обозначим через T. Из теоремы единственности и теоремы об интегральной непрерывности следует, что преобразование T взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Лемма 22.3. Предположим, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условию $E(h, H, \delta)$ с достаточно малым δ. Тогда имеет место соотношение

$$T\overline{P} \subset P. \tag{22.21}$$

Доказательство. Из лемм 22.1 и 22.2 вытекает, что для доказательства соотношения (22.21) достаточно доказать лишь неравенство

$$w(p) < w(\varphi(p, t_2)). \tag{22.22}$$

если $p \in \left\{x=0,\quad |x_1| \leqslant \delta^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}(a^2+1) \leqslant w \leqslant 2(a^2+1),\ y>0\right\}$. Докажем сначала, что выполняется такое неравенство:

$$w(p) < w(\varphi(p,\ t_1)) \tag{22.23}$$

при $p \in \left\{x=0,\ |x_1| \leqslant \delta^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}(a^2+1) \leqslant w \leqslant 2(a^2+1),\ y>0\right\}$.

В неравенствах (22.22) и (22.23) t_1 и t_2 — по-прежнему последовательные моменты пересечения траектории $\varphi(p,\ t)$ с плоскостью $x=0$.

Как уже отмечалось, траектория $\varphi(p,\ t)$ пересекает плоскость $x=\varepsilon$ два раза на промежутке времени $[0,\ t_1]$ — при $t=\tau_1$ и $t=\tau_2$, $\tau_1<\tau_2$. Ясно, далее, что $\varphi(p,\ t)$ пересекает также два раза на промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и плоскость $x=\delta$. Пусть $t=T_1$ и $t=T_2$ суть последовательные моменты пересечения траектории $\varphi(p,\ t)$ с плоскостью $x=\delta$. Очевидно, что $0<T_1<\tau_1<\tau_2<T_2<t_1$.

Подсчитаем приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p,\ t)$ при изменении времени от $t=0$ до $t=t_1$. Пусть y_0 и z_0 — ордината и аппликата точки p, а $y^{(1)}$ и $z^{(1)}$ — соответствующие координаты точки $\varphi(p,\ t_1)$. Из самого определения точки p вытекает, что

$$z_0 = ay_0 + O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right). \tag{22.24}$$

Из лемм 22.1 и 22.2 и формул (22.13) легко вывести, что

$$y^{(1)} = -y_0 + O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right),\quad z^{(1)} = -z_0 + O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right). \tag{22.25}$$

Оценим с точностью до малых высших порядков относительно δ величины y и z на траектории $\varphi(p,\ t)$ при $t \in [0,\ \tau_1]$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-f(x)}. \tag{22.26}$$

Так как функция $\alpha(x) = f(x) - ax$ удовлетворяет условиям $E(h,\ H,\ \delta)$, то из последнего равенства и равенства (22.24) получаем следующее соотношение, справедливое на траектории $\varphi(p,\ t)$ при $t \in [0,\ \tau_1]$:

$$\frac{dy}{dx} = a + O(\delta). \tag{22.27}$$

Интегрируя это равенство вдоль траектории $\varphi(p, t)$ от $t=0$ до $t=\tau_1$, получаем

$$y=y_0+ax+O(\delta^2). \tag{22.28}$$

Точно так же из равенства

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-ax}{y-f(x)} \tag{22.29}$$

получаем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, \tau_2]$ имеет место оценка

$$\frac{dz}{dx}=O(\delta). \tag{22.30}$$

Интегрируя это соотношение вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, \tau_1]$, получаем в силу (22.24)

$$z=ay_0+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right). \tag{22.31}$$

Оценим теперь таким же образом величины y и z на $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_2, t_1]$. Из равенства (22.26) в силу равенств (22.24) и (22.25) так же, как и выше, получаем (22.27), а из этого равенства и из (22.25) заключаем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_2, t_1]$ выполняется оценка

$$y=-y_0+ax+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right). \tag{22.32}$$

Аналогично из равенства (22.30) получим (22.31), а из него

$$z=-ay_0+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right) \tag{22.33}$$

на $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_2, t_1]$.

Оценим приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при прохождении последней полосы $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Для этого будем рассматривать функцию w на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, \tau_1]$ и $t \in [\tau_2, t_1]$ как функцию абсциссы x. При этом возникает неоднозначность, так как траектория $\varphi(p, t)$ проходит полосу $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ два раза на промежутке времени $[0, t_1]$. Чтобы избежать этой неоднозначности, будем на промежутке времени $[0, \tau_1]$ снабжать функцию w значком „+", а на промежутке $[\tau_2, t_1]$ значком „—". Этим однозначность и будет восстановлена.

Деля равенство (22.20) на первое из уравнений системы (22.7), получаем

$$\frac{dw}{dx}=\frac{z-x}{y-ax-\alpha(x)}\alpha(x). \tag{22.34}$$

Из этого равенства и из оценок (22.28) и (22.31) находим

$$\frac{dw_+}{dx}=\frac{ay_0-x+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)}{y_0-\alpha(x)+O(\delta^2)}\alpha(x). \tag{22.35}$$

Аналогично из равенства (22.34) и из оценок (22.32) и (22.33) получаем

$$\frac{dw_-}{dx}=\frac{-ay_0-x+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)}{-y_0-\alpha(x)+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)}\alpha(x). \tag{22.36}$$

Составим разность $\frac{dw_+}{dx}-\frac{dw_-}{dx}$. Непосредственным подсчетом легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$\frac{dw_+}{dx}-\frac{dw_-}{dx}=$$
$$=2\frac{a\alpha(x)-x+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(y_0-\alpha(x)+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)\right)\left(y_0+\alpha(x)+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)\right)}y_0\alpha(x). \tag{22.37}$$

Эта оценка справедлива на траектории $\varphi(p, t)$ при $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$.

Оценим теперь приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при прохождении последней полосы $0\leqslant x\leqslant\delta$. По предположению, имеем $p\in\Big\{x=0,\ |x_1|\leqslant\delta^{\frac{3}{2}},$

$$\left.\frac{1}{2}(a^2+1)\leqslant w\leqslant 2(a^2+1)\right\},$$

но тогда из определения функции w следует, что

$$1+O(\delta)\leqslant y_0\leqslant 2+O(\delta). \tag{22.38}$$

Отсюда, из (22.37) и из условий $E(h, H, \delta)$ вытекает, что при достаточно малых δ имеет место неравенство

$$\frac{dw_+}{dx}-\frac{dw_-}{dx}>\frac{1}{2}[a\alpha(x)-x]\alpha(x)+O\left(\delta^{\frac{3}{2}}\right)\alpha(x). \tag{22.39}$$

А отсюда и из того, что по условию $E\ hx \leqslant \alpha(x) \leqslant Hx$ при $0 < x \leqslant \delta$, получаем

$$\frac{dw_+}{dx} - \frac{dw_-}{dx} > \frac{1}{2}(ah-1)hx^2 + O\left(\delta^{\frac{5}{2}}\right) \qquad (22.40)$$

при $x \in [0, \delta]$. Интегрируя это неравенство от $x=0$ до $x=\delta$, находим

$$\Delta_1 w > \frac{1}{6}(ah-1)h\delta^3 + O\left(\delta^{\frac{7}{2}}\right), \qquad (22.41)$$

где $\Delta_1 w$ — приращение функции w при прохождении траекторией $\varphi(p, t)$ полосы $0 \leqslant x \leqslant \delta$.

Оценим теперь приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при прохождении последней полосы $\delta \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Из (22.37), (22.38) и условий $E(h, H, \delta)$ получаем неравенство

$$\frac{dw_+}{dx} - \frac{dw_-}{dx} > -4x\alpha(x) + O\left(\delta^{\frac{5}{2}}\right). \qquad (22.42)$$

Неравенство это справедливо на траектории $\varphi(p, t)$ при $x \in [\delta, \varepsilon]$. Интегрируя неравенство (22.42) от $x=\delta$ до $x=\varepsilon$, находим

$$\Delta_2 w > -\frac{4}{3}H(\varepsilon^3 - \delta^3) + O\left(\delta^{\frac{5}{2}}\right)(\varepsilon - \delta); \qquad (22.43)$$

здесь $\Delta_2 w$ обозначает приращение функции w при прохождении траекторией $\varphi(p, t)$ полосы $\delta \leqslant x \leqslant \varepsilon$. Из неравенства (22.43) и условия (22.4) получаем

$$\Delta_2 w > O(\delta^4). \qquad (22.44)$$

Оценим, наконец, приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Из формул (22.13), оценок (22.14) и определения точки p следует, что все координаты траектории $\varphi(p, t)$ на промежутке времени $[0, t_1]$ ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом, зависящим лишь от параметра a системы (22.7). По определению моментов времени τ_1 и τ_2 имеем, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ окажется $x \geqslant \varepsilon$, но тогда из условия (22.3) вытекает, что $0 < \alpha(x) \leqslant \delta^4$ на $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$. А отсюда и из (22.20) следует, что на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ выполняется соотношение

$$\dot{w} = O(\delta^4). \qquad (22.45)$$

Далее, из формул (22.13) и оценок (22.14) следует, что $\tau_2 - \tau_1 < 2\pi$. А тогда из (22.45) вытекает, что

$$\Delta_3 w = O(\delta^4), \tag{22.46}$$

где $\Delta_3 w$ обозначает приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ на промежутке времени $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$. Складывая соотношения (22.41), (22.44) и (22.46), получаем следующую оценку:

$$\Delta w > \frac{1}{6}(ah-1)h\delta^3 + O\left(\delta^{\frac{7}{2}}\right), \tag{22.47}$$

где Δw — приращение функции w вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [0, t_1]$. Отсюда и из условия (22.5) вытекает, что при достаточно малых δ выполняется неравенство (22.23).

Продолжая эти же рассуждения дальше при $t > t_1$, мы докажем неравенство (22.22). А из этого неравенства, как отмечалось выше, и следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему о существовании периодических решений у системы (20.5).

Теорема 22.1. *Пусть функция $\alpha(x) = f(x) - ax$ удовлетворяет условиям $E(h, H, \delta)$ с достаточно малым δ. Пусть, кроме того, существует такое положительное λ, что*

$$\alpha(x)\,x \geqslant \lambda \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon, \tag{22.48}$$

где ε — число, фигурирующее в условиях E. Тогда система (22.7) имеет периодические решения, отличные от состояния равновесия.

Доказательство. Обозначим, так же как и выше, через P область

$$\left\{ x = 0,\ |x_1| < \delta^{\frac{3}{2}},\ w > \frac{1}{2}(a^2+1),\ y > 0 \right\},$$

где w — функция, определенная равенством (22.19). Введем, далее, в рассмотрение функцию v по формуле

$$v = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}a^2 y_1^2 + \frac{1}{2}a^2 z_1^2 - a^3 \int_0^x \alpha(x)\,dx. \tag{22.49}$$

Производная от функции v по времени, взятая в силу дифференциальных уравнений системы (22.7), равна

$$\dot{v} = -ax_1^2 - a^2(x - a\alpha(x))\,\alpha(x). \tag{22.50}$$

Возьмем произвольную точку $p \in \bar{P}$; пусть 0, t_1, t_2 суть последовательные моменты пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = 0$. Как было показано выше, на промежутке времени $0 < t < t_1$ существуют два и только два момента пересечения траектории $\varphi(p, t)$ с плоскостью $x = \varepsilon$. Пусть τ_1 и τ_2 — эти моменты, будем считать, что $\tau_1 < \tau_2$.

Из формул (22.13) и оценок (22.14) следует, что если взять достаточно большое $v_0 > 2(a^2 + 1)$, то для траектории $\varphi(p, t)$ будет выполняться неравенство

$$aH^2\varepsilon^2(\tau_1 + t_1 - \tau_2) < \frac{\lambda}{2}(\tau_2 - \tau_1), \tag{22.51}$$

если только точка p лежит на той части кривой $\{x = 0, v = v_0\}$, которая располагается в замкнутой области $\bar{P}$. Обозначим эту дугу через l. Пусть p — произвольная точка дуги l, подсчитаем приращение Δv функции v вдоль траектории $\varphi(p, t)$ при изменении t от 0 до t_1. Из формулы (22.50) и условия E следует, что при $t \in [0, \tau_1]$ и при $t \in [\tau_2, t_1]$ на $\varphi(p, t)$ выполняется неравенство

$$\dot{v} < a^3H^2\varepsilon^2. \tag{22.52}$$

Обозначим общее приращение функции v вдоль траектории $\varphi(p, t)$ на промежутках времени $[0, \tau_1]$ и $[\tau_2, t_1]$ через $\Delta_1 v$, тогда из (22.52) получаем

$$\Delta_1 v > a^3H^2\varepsilon^2(\tau_1 + t_1 - \tau_2). \tag{22.53}$$

Из равенства (22.50) и условия $E(h, H, \delta)$ вытекает, что при достаточно малых δ на траектории $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ выполняется неравенство

$$\dot{v} < -\frac{a^2}{2}\,x\alpha(x). \tag{22.54}$$

Отсюда и из условия (22.48) доказываемой теоремы вытекает, что на $\varphi(p, t)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$ имеет место неравенство

$$\dot{v} < -\frac{a^2}{2}\lambda. \tag{22.55}$$

Пусть $\Delta_2 v$ — приращение функции v вдоль траектории $\varphi(p, t)$ на промежутке времени $[\tau_1, \tau_2]$. Интегрируя неравенство (22.55) вдоль $\varphi(p, t)$ от $t = \tau_1$ до $t = \tau_2$, получаем

$$\Delta_2 v < -\frac{a^2\lambda}{2}(\tau_2 - \tau_1). \tag{22.56}$$

Складывая неравенства (22.53) и (22.56), получаем в силу (22.51)

$$\Delta v < 0. \tag{22.57}$$

Последнее неравенство означает, что

$$v(p) > v(\varphi(p, t_1)). \tag{22.58}$$

Проведя такие же рассуждения для траектории $\varphi(p, t)$ при изменении t от t_1 до t_2, мы получим неравенство

$$v(p) > v(\varphi(p, t_2)). \tag{22.59}$$

Обозначим через Q область $\left\{x = 0,\ |x_1| < \delta^{\frac{3}{2}},\ v < v_0,\ w > \frac{1}{2}(a^2 + 1),\ y > 0\right\}$. Через T, так же как и раньше, будем обозначать преобразование замкнутой области $\overline{P}$ в себя при движении по траекториям системы (20.5). Из леммы 22.3 и соотношения (22.59) следует, что

$$T\overline{Q} \subset Q. \tag{22.60}$$

Отсюда, в силу известной теоремы Брауэра, вытекает, что в области Q имеется точка q, неподвижная относительно преобразования T. Но тогда по смыслу преобразования T траектория $\varphi(q, t)$ есть траектория периодического движения системы (20.5).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.
2. Birkhoff G., Dinamical Systems, N. Y., 1927. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
3. Коддингтон Э. и Левинсон Н., Теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1959.
4. Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.
5. Massera J., Boletin de la Facultad de Ingenieria, IV, 1 mayo, 1950.
6. Massera J., Publ. Inst. mat. Fac. ingr., **2**, 7, 1954.
7. Еругин Н. П., ПММ, **XX**, 1, 1956.
8. Курцвейель Ярослав, Вейвода Отто, Чехосл. матем. журн., **5**, № 3, 1955, 362—370.
9. Еругин Н. П., ДАН БССР, **VI**, № 7, 1962.
10. Levinson N., Annals of Math., **45**, 4, 1944.
11. Демидович Б. П., I, Вестн. МГУ, № 6, 1961.
12. Барбашин Е. А., Матем. сб., **29** (71), 1951.
13. Yoshizawa T., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, № 3, 1955.
14. Курцвейель Я., Чехосл. матем. журн., **5**, 3, 1955.
15. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
16. Massera J., Annals of Math., **50**, 3, 1949.
17. Whithey J., Trans. of American Math. Soc., **36**, 1934.
18. Немыцкий В. В., О некоторых методах качественного исследования в «большом» многомерных автономных систем. Тр. Моск. матем. о-ва, **5**, 1956.
19. Атрашенок П. В., Вестн. ЛГУ, № 8, (3), 1954.
20. Боль П., О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применяемых в механике, Юрьев, 1900.
21. Corduneanu K., C. r. Acad. sci., **245**, № 1, 1957.
22. Corduneanu K., An stünt. Univ. Iasi. Sec., **1**, 3, № 1-2, 1957.
23. Кордуняну К., ДАН СССР, **131**, № 4, 1960.
24. Corduneanu K., Acad. RPR, Fil. Iasi. Mat., **8**, № 2, 1957, 107—126.
25. Manfredi B., Boll. Unione mat. ital., № 1, 1956, 64—71.
26. Craffi D., Atti IV congr. Unione mat. ital., **1**, 1953, 218—231.
27. Castro A., Rend. Seminar mat. Univ. Padova, **22**, № 2, 1953.
28. Плисс В. А., ДАН БССР, 5, № 6, 1961.
29. Ezeilo I. O. C., Proc. Lond. Math. Soc., **9**, № 13, 1959, 74—114.

30. Плисс В. А., ДАН СССР, 139, № 2, 1961.
31. Красносельский М. А., Перов А. И., ДАН СССР, 123, № 2, 1962.
32. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
33. Barbalat I., Halanay A., Rev. math. pures at appl. (RPR), 3, 1958, 395—411.
34. Плисс В. А., ДАН СССР, 137, № 5, 1961.
35. Плисс В. А., Вестн. ЛГУ, № 11, 1954.
36. Красовский Н. Н., ПММ, 21, № 3, 1957, 309—319.
37. Плисс В. А., ДАН СССР, 138, № 2, 1961.
38. Yoshizawa T., Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A28, № 2, 1954, 143—151.
39. Зубов В. И., Колебания в нелинейных и управляемых системах, Судпромгиз, 1962.
40. Лященко Н. Я., ДАН СССР, 104, № 2, 1955, 177—179.
41. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, АН СССР, 1956.
42. Демидович Б. П., Уч. зап. МГУ, 8, 1956, 181.
43. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
44. Cartwright M. L., Contrib. to the theory of nonlinear oscillations, 1, 1950.
45. Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961
46. Opial Z., Ann. Polon. math., 7, № 3, 1960, 309—319.
47. Плисс В. А., ДАН СССР, 127, № 5, 1959.
48. Denioy A., J. de Mathematiques, 11, 1932, 333—375.
49. Плисс В. А., Вестн. ЛГУ, № 13, 1960.
50. Chin Yuan-shun, Science cecord, 1—3, 7—11, 1957.
51. Андронов А. А. и Понтрягин Л. С., ДАН СССР, 14, 5, 1937.
52. Баггис Г. Ф., Грубые системы двух дифференциальных уравнений, УМН, 10, 4, 1955.
53. Massera J., Duke Math. J., 17, 4, 1950.
54. Brouwer L. E. J., Math. Annalen, 72, 1912.
55. Андронов А. А. и Майер А. Г., Автомат. и телемех., 14, 5, 1953.
56. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
57. Caratheodory C., Math. Annalen, 73, 1913, 305—320.
58. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
59. Cartwright M. L. and Littlewood J. E., Annals of Math., 54, 1951, 1—37.
60. Reifenberger E. R., Annals of Math., 61, 1, 1955.
61. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
62. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Киев, 1934.

63. Marcus M. D., Ann. math. studies, 36, 1956.
64. Diliberto S. P., Hufford G., Ann. Math. studies, № 36, 1956.
65. Koosis P., Ann. math. studies, № 36, 1956.
66. Levinson N., Annals of Math., 52, 1958, 727—738.
67. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
68. Еругин Н. П., Приводимые системы, АН СССР, 1946.
69. Плисс В. А., ДАН СССР, 131, № 5, 1960.
70. Borg Göran, Kingl. Tekn. Hogskol. handl., № 153, 1960, 12 pp.
71. Littlewood J. E., Acta math., 97, 3—4, 1957.
72. Littlewood J. E., Acta math., 98, 1—2, 1957.
73. Littlewood J. E., JRE Trans. circuit theory, 7, 4, 535—542. 1960.
74. Levinson N., Annals of Math., 50, 1949, 126—153.
75. Gomory R. E., Ann. math. studies, 36, 1956.
76. Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947.
77. Ehrman H., Zs. angew. Math. und Mech., 35, 1955, 9—10, 326—327.
78. Ehrman H., Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1, 2, 1957, 124—137.
79. Morris G. R., Proc. Cambridge Phil. soc., 51, 2, 1955.
80. Morris G. R., Proc. Cambridge Phil. soc., 54, 4, 1958.
81. Rauch L. L., Ann. Math. studies, 20, 1950.
82. Friedrichs K. O., New York Univers, 1946. 65—103.
83. Colombo G., Rend. Sem. mat. univ. Padova. XIX, 1950.
84. Широкорад Б. В., Автомат. и телемех., 19, № 10, 1958, 953—967.
85. Вайсборд Э. М., Изв. высш. уч. завед., Математика, № 4, 1959, 38—49.
86. Вайсборд Э. М., Научн. докл. школы, Физ.-матем. науки, № 3, 1959, 10—13.
87. Бличевский В. С., Матем. сб., 50 (92), № 1, 1960.
88. Вайсборд Э. М., Матем. сб., 56 (98), № 1, 1962.
89. Плисс В. А., Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд-во ЛГУ, 1958.
90. Андронов А. А., Витт А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
91. Cartwright M. L., Proc. Int. Congr. Math., 3, 1954.
92. Плисс В. А., Вестн. ЛГУ, № 13, 1962.