Б. Е. ПОБЕДРЯ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

Издание третье, дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Механика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1986

УДК 152.972

Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу: Учеб. пособие. — 3-е изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 264 с.

Цель пособия — ознакомить начинающих с основами современного тензорного анализа, необходимыми для усвоения курсов аналитической механики, механики сплошной среды, теории оболочек, теоретической физики, теории относительности. Даны синтез алгебраического и геометрического описания тензорного аппарата, теория тензорных функций и операторов, основы теории внешних форм Э. Картана, теории кривизны пространства, представление тензоров третьего и четвертого рангов. В третьем издании исправлены неточности, введен материал по теории дифференцирования тензорнозначных функций по тензорному аргументу и по времени, рассмотрены анизотропные тензорные функции. В книге имеется большое число упражнений.

Для студентов физико-математических специальностей вузов. Библиогр. 15 назв. Ил. 18.

Рецензент:

кафедра механики сплошной среды
Ташкентского государственного
университета

П $\dfrac{1702040000-138}{077(02)-86}$ 119—86

Предисловие к третьему изданию

С момента выхода в свет первого издания книги прошло более десяти лет. За это время область применения тензорного исчисления значительно расширилась. Сейчас практически в каждой монографии и учебном пособии по механике и теоретической физике используются тензорные обозначения. Правда, используются по-разному, и с помощью индексов, и в так называемой прямой, безындексной записи. Применяются криволинейные координаты, а некоторые авторы обходятся только прямоугольной декартовой системой координат.

Данная книга предназначена начинающему. Изложение основ тензорного анализа начинается, что называется, «с нуля». От читателя требуется только умение дифференцировать и знание основных положений аналитической геометрии. А вот закончить чтение каждый может в зависимости от необходимости, ибо, несмотря на совершенно элементарное начало, книга содержит и некоторые «серьезные» вопросы тензорного анализа.

Настоящее издание дополнено главой, посвященной тензорным функциям в трехмерном евклидовом пространстве. Потребность в изложении этого вопроса в учебной литературе назрела давно. Автор — свидетель того, что даже на экзамене кандидатского минимума многих аспирантов ставит в тупик вопрос: «Откуда следует, что симметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта, а несимметричный — шесть?». Возможно, было бы интересно включить в книгу и материал, относящийся к тензорным функциям в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, важным в теории относительности. Однако это заставило бы увеличить объем пособия.

В третьем издании добавлены «некоторые литературные указания» и значительно расширен предметный указатель. В первой главе появился параграф, посвященный группам преобразований. Исправлены некоторые ошибки и неточности.

Рукопись четвертой главы внимательно прочитал и ввел полезные коррективы В. В. Лохин, за что автор ему весьма благодарен.

Предисловие ко второму изданию

Во втором издании к третьей главе добавлен параграф, посвященный представлению некоторых тензоров третьего и четвертого ранга, наиболее часто встречающихся в приложениях. Сделаны некоторые добавления и в другие параграфы. В частности, введено понятие квазилинейных соотношений для анизотропных сред. В приложении добавлены выражения оператора Лапласа от компонент вектора и тензора второго ранга.

Исправлены замеченные опечатки и неточности. На некоторые из них автору указали сотрудники кафедр теории упругости Московского и Ростовского университетов, за что автор им весьма признателен.

Предисловие к первому изданию

Замечательный педагог-механик профессор МГУ Андрей Петрович Минаков, получив от студентов первого курса определение вектора как «отрезка, имеющего определенную величину, направление и точку приложения», любил приводить следующий пример. Пусть мы стоим на площади Маяковского (имеем точку приложения). И пусть каждый час по Садовому кольцу (рис. 1) пробегает a машин, а по улице Горького, перпендикулярной Садовому кольцу, — b машин (имеем определенную величину и направление). Представим эти значения в виде векторов. Тогда, складывая эти векторы по правилу параллелограмма, заключаем, что каждый час в здание Концертного зала им. П. И. Чайковского врывается $\sqrt{a^2+b^2}$ машин. Слушая протестующие выкрики студентов, Андрей Петрович делал логическое заключение: «Если хочешь быть вектором, научись складываться с подобным себе по **правилу параллелограмма»**.

Этот пример, хотя и в шутливой форме, убедительно доказывает важность выяснения векторной природы физических величин. В механике кроме скаляров (температура, масса, плотность вещества), векторов (поля скоростей, ускорений, силы) встречаются объекты более сложной природы.

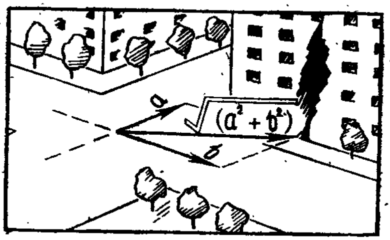

Рис. 1

Так, из теоретической механики известно, что для подсчета кинетической энергии системы N материальных точек, с массой m_k каждая, необходимо знать систему величин

$$\mathcal{J}_{ij}=\sum_{k=1}^{N} x_k^i x_k^j m_k, \tag{1}$$

где x_k^i $(i=1, 2, 3)$ — прямоугольные декартовы координаты материальной точки k. При $i=j$ величина $\mathcal{J}_{ij}$ называется моментом инерции относительно плоскости $x^i=0$, а при $i\neq j$ — центробежным моментом инерции.

Рассмотрим далее растяжение деформируемого стержня силой P, отнесенной к единице площади стержня (рис. 2). В сечении I «напряженное состояние» определяется только силой P, действующей нормально к сечению $(\sigma_n=P)$. В сечении II напряженное состояние определяется двумя составляющими:

$$\left.\begin{aligned} &\text{нормальной } \sigma_\alpha=\frac{P\cos\alpha}{1/\cos\alpha}=P\cos^2\alpha, \\ &\text{касательной } \tau_\alpha=\frac{P\sin\alpha}{1/\cos\alpha}=\frac{P}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Понятно, что физические законы не должны зависеть от выбора той или иной системы координат, хотя в их формулировку могут входить величины типа (1) или (2), изменяющиеся (так же как и компоненты векторов) при переходе от одной системы координат к другой. В таком случае говорят, что физические законы должны иметь ковариантную форму записи.

Во всяком физическом соотношении все слагаемые должны являться геометрическим объектом одной и той же структуры (говорят «иметь один и тот же тензорный характер») и иметь одну физическую размерность. Предметом изучения тензорного анализа и является исследование инвариантных характеристик геометрических объектов физических величин при переходе от одной системы координат к другой.

Тензорный анализ для механика — это математический аппарат, с помощью которого не только сокращаются многочисленные выкладки, но и концентрируется физическая идея, так как использование тензорного анализа позволяет отодвинуть на второй план сложную геометрическую картину физического явления.

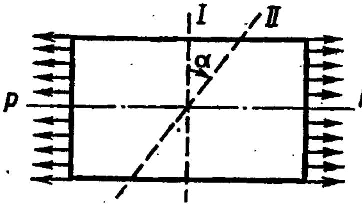

Рис. 2

Этот курс читался автором с 1968 г. в течение ряда лет на механико-математическом факультете МГУ как полугодовой специальный курс, предназначенный для ознакомления студентов-механиков второго курса с основами тензорного исчисления, необходимыми для усвоения курсов аналитической механики, механики сплошной среды и теоретической физики. Начиная с 1971/72 уч. г. стал читаться обязательный годовой курс дифференциальной геометрии, и автор надеется, что настоящие лекции могут служить учебным пособием по этому курсу и пригодятся всем желающим самостоятельно изучить основы тензорного исчисления. Автор стремился дать синтез алгебраического и геометрического описания тензорного аппарата, максимально приблизив его к нуждам механика. Знакомство с механикой и теоретической физикой у читателя не предполагается, хотя некоторые понятия автор пытался сформулировать так, чтобы читатель сразу мог перенести их на язык кинематики сплошной среды, теории оболочек и теории относительности. Предлагаемые упражнения в большинстве являются необходимой составной частью курса, и их результаты используются в дальнейшем изложении. В главах 1 и 3 рассматриваются трехмерные пространства, а в главах 2 и 4 — пространства произвольного числа n-измерений.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность чл.-кор. АН СССР И. И. Воровичу, профессорам П. К. Рашевскому и М. А. Колтунову, доцентам А. В. Михалеву и Л. М. Зубову, сделавшим ряд ценных замечаний, доценту В. Н. Кузнецову за оформление рисунков, а также сотрудницам кафедры теории упругости МГУ Л. С. Харьковой и П. В. Трупашовой за помощь при подготовке рукописи.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Ковариантные и контравариантные координаты вектора

Из аналитической геометрии известно, что всякий вектор на плоскости x^1x^2 (цифры 1, 2 над буквой x означают индекс, но не степень!) можно разложить на две составляющие по единичным векторам базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2. \tag{1.1}$$

При этом числа a^1 и a^2 называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\vec{a}$ (рис. 3).

Если оси координат x^1 и x^2 не являются взаимно ортогональными, то вектор $\vec{a}$ можно задать двояко:

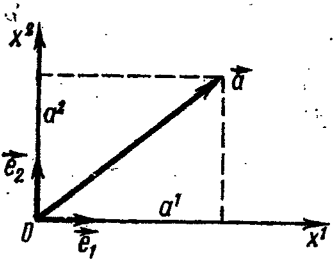

Рис. 3

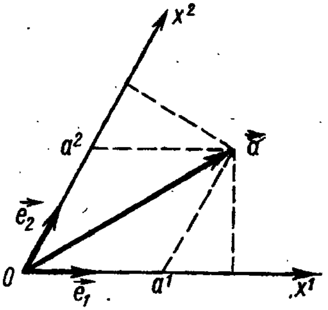

Рис. 4

разлагая его, как и прежде, по единичным векторам базиса (1.1), т. е. числами a^1 и a^2, а также с помощью ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ на оси координат (рис. 4).

Введем теперь два вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, вообще говоря, различной длины, направленных соответственно по x^1 и x^2 (рис. 5). Тогда для вектора $\vec{a}$ справедливо соотношение (1.1). Пара чисел a^1, a^2 определяет однозначно вектор $\vec{a}$. Поэтому эти числа могут быть названы координатами вектора $\vec{a}$ *(контравариантными)*.

Рассмотрим скалярные произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_1=a_1;\quad \vec{a}\cdot\vec{e}_2=a_2. \tag{1.2}$$

Обозначим длину вектора $\vec{b}$ через $|\vec{b}|$. Тогда из (1.2) по определению скалярного произведения имеем

$$a_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_1|\cos\alpha=\vec{a}|_{x^1}\cdot|\vec{e}_1|, \tag{1.3}$$

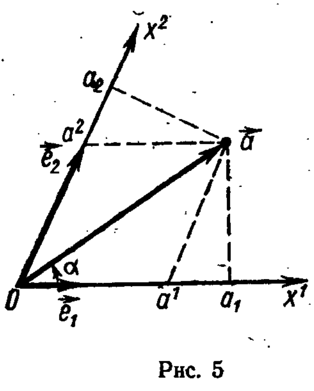

Рис. 5

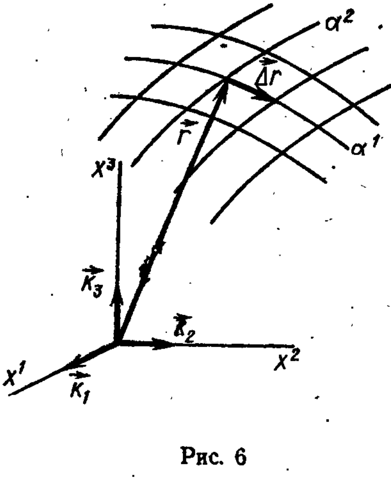

Рис. 6

где $\vec{a}|_{x^1}$ — ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на ось x^1. Из (1.2) и (1.3) имеем

$$\vec{a}|_{x^1}=\frac{a_1}{|\vec{e}_1|};\quad \vec{a}|_{x^2}=\frac{a_2}{|\vec{e}_2|}. \tag{1.4}$$

Таким образом, по числам a_1 и a_2 можно определить ортогональные проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат и, следовательно, сам вектор $\vec{a}$. Тогда величины a_1 и a_2 тоже можно назвать координатами вектора $\vec{a}$, в отличие от предыдущих — *ковариантными*. В дальнейшем всегда контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$ по отношению к некоторому базису будем обозначать верхними индексами, а ковариантные — нижними.

Рассмотрим три некомпланарных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, и пусть $\vec{a}$ — произвольный вектор в трехмерном пространстве. Тогда

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2+a^3\vec{e}_3=\sum_{i=1}^{3} a^i\vec{e}_i. \qquad (1.5)$$

Условимся всякий раз, когда в одночлене встречается какой-нибудь латинский индекс дважды, один раз вверху и один раз внизу, считать, что происходит суммирование по этому индексу от 1 до n (n — размерность пространства, в данном случае $n=3$), а знак суммы опускать, т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} a^i\vec{e}_i \equiv a^i\vec{e}_i \quad (i=1, 2, 3). \qquad (1.6)$$

При этом, если из изложения не ясно и требуется уточнить, какие значения пробегает индекс суммирования, значения этого индекса заключаем в круглые скобки, как показано в (1.6). Если же встречается дважды греческий индекс, то суммирование по нему не производится. Если нужно уточнить, какие значения может пробегать греческий индекс, заключаем его значения в угловые скобки. Например, выражение

$$a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} \langle \alpha=1, 2, 3\rangle \qquad (1.7)$$

представляет собой составляющую вектора $\vec{a}$ по оси x^{α}.

Индекс, по которому происходит суммирование, называется *немым индексом*. Его можно, как и переменную интегрирования в подынтегральном выражении, заменить любым другим индексом. Например,

$$x_i^j y^i = x_k^j y^k = x_m^j y^m \text{ и т. д.}$$

(сравните: $\int f(x)dx=\int f(t)dt$). Индекс, встречающийся в одночлене один раз, называется *свободным индексом.* При правильном написании любого выражения каждое его слагаемое должно иметь одни и те же свободные индексы, стоящие на одном и том же месте (вверху или внизу).

Обратим внимание на порядок написания индексов. Из записи x^i_j следует, что индекс i стоит на первом месте, а индекс j — на втором. Чтобы подчеркнуть это, иногда пишут $x^{i\cdot}_{\cdot j}$. Если порядок следования индексов ясен или не имеет значения, будем писать x^i_j.

Упражнение 1.1. Представить в полной записи

$$a^{\alpha}{}_{kl}x_{\alpha}y^k z^l \quad (k, l=1, 2, 3), \quad \langle\alpha=1, 2\rangle. \bullet$$

Вектор $\vec{a}$ в косоугольной системе координат определяется, таким образом, своими контравариантными a^i и ковариантными a_i компонентами

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i, \quad a_i=\vec{a}\cdot\vec{e}_i. \tag{1.8}$$

Рассмотрим теперь криволинейную систему координат α^1, α^2, α^3. Для этого зададим радиус-вектор $\vec{r}$ как дифференцируемую вектор-функцию от трех переменных

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \tag{1.9}$$

Векторное соотношение (1.9) равносильно трем скалярным:

$$x^i=x^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \tag{1.10}$$

На рис. 6 показана координатная сетка линий α^1 и α^2. Если мы дадим приращение радиус-вектору $\vec{r}$ по координатной линии $\Delta\alpha^1$, то

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}=\lim_{\Delta\alpha^1\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\alpha^1}. \tag{1.11}$$

Следовательно, вектор $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}$ является вектором, касательным к линии α^1. Таким образом, в каждой точке пространства можно рассмотреть тройку векторов $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}$, которые можно принять за *векторы базиса* (или *репера*), если они не компланарны. Это условие выполнено, если в каждой точке

$$\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^3}\right) \neq 0, \tag{1.12}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^1}{\partial\alpha^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^2}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial x^3}{\partial\alpha^3} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.13}$$

По теореме о неявных функциях в этом случае существует обращение формул (1.10):

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1, x^2, x^3), \tag{1.14}$$

так что *якобиевы матрицы* $\frac{\partial x^i}{\partial\alpha^j} \equiv X^i{}_j$(или X) и $\frac{\partial\alpha^i}{\partial x^j} \equiv Y^i{}_j$ (короче, Y) являются взаимно обратными.

Таким образом, при выполнении условий (1.13) в каждой точке пространства существует связанный с криволинейной системой координат базис

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}, \tag{1.15}$$

который поэтому называется *локальным*. Если $\vec{k}_i$ — тройка единичных векторов, то локальный базис $\vec{e}_i$ связан с ней соотношениями

$$\vec{e}_i = X_i{}^j\vec{k}_j; \quad \vec{k}_i = Y_i{}^j e_j. \tag{1.16}$$

Упражнение 1.2. Найти якобиевы матрицы $X^i{}_j$ и $Y^i{}_j$ и локальный базис $\vec{e}_i$ цилиндрической системы координат

$$x^1 = \alpha^1 \cos\alpha^2,$$

$$x^2 = \alpha^1 \sin\alpha^2,$$

$$x^3 = \alpha^3. \quad ●$$

Упражнение 1.3. Найти матрицы X и Y и построить локальный базис $\vec{e}_i$ в сферической системе координат

$$x^1 = \alpha^1 \cos\alpha^2 \cos\alpha^3,$$
$$x^2 = \alpha^1 \sin\alpha^2 \cos\alpha^3,$$
$$x^3 = \alpha^1 \sin\alpha^3. \quad \bullet$$

Итак, в каждой точке вектор $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ представляется в локальном базисе $\vec{e}_i$ своими контравариантными компонентами

$$\vec{a} = a^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = a^i \vec{e}_i. \tag{1.17}$$

Его ковариантные компоненты согласно (1.8) определяются следующим образом:

$$a_j = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a^i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \tag{1.18}$$

Определим теперь матрицу

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \tag{1.19}$$

которая, очевидно, является симметричной. Она называется *фундаментальной* матрицей. Определитель этой матрицы $g = \det|g_{ij}|$ согласно условиям (1.12) или (1.13) отличен от нуля. Следовательно, существует матрица g^{ij}, обратная по отношению к g_{ij}:

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \tag{1.20}$$

где δ_i^j — элементы единичной матрицы (*дельта Кронекера*):

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{1.21}$$

Из формул (1.18) и (1.19) устанавливаем связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора $\vec{a}$:

$$a_j = a^i g_{ij}. \tag{1.22}$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на g^{jk} и производя суммирование по j, получим, используя (1.20), соотношение, обратное к (1.22):

$$a_j g^{jk} = a^k. \tag{1.23}$$

Обратим внимание на мнемоническое правило суммирования величин a^i с дельтой Кронекера δ_i^k, использованное при выводе соотношения (1.23):

$$a^k = a^i \delta_i^k.$$

У компоненты a^i следует заменить индекс, по которому происходит суммирование с дельтой Кронекера, на ее свободный индекс.

С помощью формул (1.22), (1.23) и определения (1.19) скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить четырьмя различными способами:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = g^{ji} a_j b_i = a_i b^i. \qquad (1.24)$$

Рассмотрим теперь тройку векторов $\vec{e}^j$, получающуюся из базисных векторов $\vec{e}_i$, следующим образом:

$$\vec{e}^j = g^{ji} \vec{e}_i. \qquad (1.25)$$

Умножая скалярно левую и правую части равенства (1.25) последовательно на векторы $\vec{e}_k$ и $\vec{e}^k$, получим

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = \delta^j{}_k, \qquad (1.26)$$

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}^k = g^{jk}. \qquad (1.27)$$

Следовательно, вектор $\vec{e}^1$, например, ортогонален к векторам $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, а его скалярное произведение с вектором $\vec{e}_1$ равно единице. Систему векторов $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$ и $\vec{e}^3$ называют ***базисом, взаимным*** (или ***сопряженным***) с базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Упражнение 1.4. Доказать некомпланарность векторов $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$ и $\vec{e}^3$.

Упражнение 1.5. Показать справедливость формулы

$$\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j. \quad \bullet \qquad (1.28)$$

Рассмотрим какой-либо вектор $\vec{a}$. Из соотношений (1.23) и (1.25) находим, что

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a_j g^{ji} \vec{e}_i = a_j \vec{e}^j. \qquad (1.29)$$

Умножая скалярно вектор $\vec{a}$ на $\vec{e}^k$, из (1.29) получим

$$\vec{a}\cdot\vec{e}^k = a_j\vec{e}^j\cdot\vec{e}^k = a_j g^{jk} = a^k. \qquad (1.30)$$

Итак, всякий вектор $\vec{a}$ может быть разложен как по векторам базиса $\vec{e}_i$ (тогда компоненты его разложения являются контравариантными), так и по векторам базиса $\vec{e}^i$ (с ковариантными компонентами)

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = a_i\vec{e}^i. \qquad (1.31)$$

При этом ковариантные и контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$ определяются как скалярные произведения вектора $\vec{a}$ на базисные векторы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^i$ соответственно

$$a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i; \qquad a^i = \vec{a}\cdot\vec{e}^i. \qquad (1.32)$$

Это оправдывает название базиса $\vec{e}^1$, $\vec{e}^2$, $\vec{e}^3$ как взаимного по отношению к $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Отметим существенную разницу этих базисов. Если векторы $\vec{e}_i$ связаны непосредственно с системой координат (являются касательными к координатным линиям), то векторы $\vec{e}^i$ вводятся формально по формулам (1.25) и, вообще говоря, не являются касательными векторами ни к каким координатным линиям (*неголономный* базис). Формулы (1.22) и (1.23) показывают, что с помощью матриц g_{ij} и g^{ij} можно опускать и поднимать индексы у компонент вектора. Иногда говорят, что с помощью этих матриц происходит *жонглирование* индексами.

Упражнение 1.6. Показать, что в прямоугольной декартовой системе координат

$$\vec{e}_i = \vec{e}^i; \; g_{ij} = g^{ij} = \delta_i^j. \qquad (1.33)$$

§ 2. Преобразование координат. Ковариантная производная вектора

Наряду со старой криволинейной системой координат (α^1, α^2, α^3) рассмотрим новую систему координат (α^1, α^2, α^3), связанную со старой соотношениями

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (2.1)$$

Предположим, что преобразование (2.1) в каждой точке обратимо

$$\alpha^i = \alpha^i(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}). \tag{2.2}$$

Для этого потребуем, чтобы определитель якобиевой матрицы

$$A^{i'}{}_j \equiv \frac{\partial\alpha^{i'}}{\partial\alpha^j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

был отличен от нуля, т. е.

$$A \equiv \det|A^{i'}{}_j| \neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда существует матрица $B^i{}_{j'}$, обратная к матрице (2.3), так что

$$A^{i'}{}_j B^j{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}; \quad B^i{}_{j'} A^{j'}{}_j = \delta^i{}_j. \tag{2.5}$$

Матрица $B^i{}_{j'}$ является якобиевой матрицей преобразования (2.2).

Векторы нового локального репера определяются согласно формуле (1.13) следующим образом:

$$\vec{e}_{i'} \equiv \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^{i'}} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} B^i{}_{i'}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что при переходе от одной системы координат к другой векторы репера преобразуются по законам

$$\vec{e}_{i'} = \vec{e}_i B^i{}_{i'}, \tag{2.7}$$

$$\vec{e}_i = \vec{e}_{i'} A^{i'}{}_i. \tag{2.8}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i. \tag{2.9}$$

В новой (штрихованной) системе координат имеем

$$\vec{a} = a^{i'} \vec{e}_{i'}. \tag{2.10}$$

Сравним выражения (2.9) и (2.10) и воспользуемся соотношениями (2.7)

$$a^i \vec{e}_i = a^{i'} \vec{e}_i B^i{}_{i'}. \tag{2.11}$$

Так как векторы $\vec{e}_i$ линейно независимы, то

$$a^i = B^i{}_{i'} a^{i'}. \qquad (2.12)$$

Умножим левую и правую части (2.12) на $A^{j'}{}_i$ и просуммируем по i от 1 до 3. Используя первое равенство (2.5) и отмеченное в § 1 свойство символов Кронекера, получим

$$A^{j'}{}_i a^i = A^{j'}{}_i B^i{}_{i'} a^{i'} = \delta^{j'}{}_{i'} a^{i'} = a^{j'}, \qquad (2.13)$$

т. е.

$$a^{i'} = A^{i'}{}_i a^i. \qquad (2.14)$$

Таким образом, при переходе от одной системы координат к другой по закону (2.1) контравариантные компоненты произвольного вектора преобразуются по закону (2.14) с помощью якобиевой матрицы (2.3).

Посмотрим, по какому закону преобразуются ковариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Согласно (1.18) и (2.7) имеем

$$a_{j'} = \vec{a} \cdot \vec{e}_{j'} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j B^j{}_{j'}, \qquad (2.15)$$

т. е.

$$a_{j'} = a_j B^j{}_{j'}. \qquad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видим, что при переходе от одной системы координат к другой ковариантные компоненты произвольного вектора $\vec{a}$ преобразуются совершенно по другому закону, нежели контравариантные компоненты, а именно с помощью матрицы, обратной и транспонированной по отношению к якобиевой матрице (2.3) преобразования (2.1). Заметим, что векторы репера (2.7) преобразуются по тому же закону, что и ковариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Поэтому векторы репера $\vec{e}_i$ иногда называют *ковариантным базисом* системы координат.

Посмотрим, как преобразуются векторы взаимного базиса. Для этого разложим по векторам этого базиса произвольный вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^{\,i}. \qquad (2.17)$$

В новой системе координат согласно (2.16) имеем

$$\vec{a} = a_{i'}\vec{e}^{i'} = a_i B^i{}_{i'}\vec{e}^{i'}. \tag{2.18}$$

Сравнивая это выражение с (2.17) и учитывая произвольность вектора $\vec{a}$ (а поэтому и его компонент a_i), получим

$$\vec{e}^i = B^i{}_{i'}\vec{e}^{i'}. \tag{2.19}$$

Умножая (2.19) на $A^{j'}{}_i$, суммируя по i и учитывая свойство символов Кронекера, получим

$$\vec{e}^{i'} = A^{i'}{}_i\vec{e}^i. \tag{2.20}$$

Таким образом, векторы взаимного репера при переходе к другой системе координат преобразуются так же, как и контравариантные компоненты вектора $\vec{a}$. Поэтому векторы взаимного репера иногда называют *контравариантным базисом* системы координат.

Теперь можно дать формальное определение ковариантным и контравариантным компонентам вектора. А именно, *ковариантными* компонентами вектора (или векторного поля) $\vec{a}$ называется система трех чисел a_i, определенная в каждой точке пространства и в каждой системе координат, которая при переходе от одной системы координат к другой (2.1) преобразуется по формулам (2.16). Аналогично определяются и контравариантные компоненты вектора (для которых закон преобразования от одной системы координат к другой задается формулами (2.14)).

Величины, которые не меняются при переходе от одной системы координат к другой, называются *инвариантными* относительно преобразований (2.1). Например, скалярные величины являются инвариантными. Примерами таких величин могут служить плотность вещества, температура, энергия, энтропия и т. д. Инвариантными объектами являются и векторы. В самом деле, нелепо было бы предположить, что от того, что мы рассматриваем течение жидкости в той или иной неподвижной системе координат, меняется скорость течения этой жидкости. Однако компоненты этой скорости изменяются по установленным выше законам (см. формулы (2.12) и (2.16)).

Упражнение 2.1. Показать, что длина вектора $\vec{a}$

(2.9) является инвариантом относительно преобразований (2.1).

Упражнение 2.2. Пусть $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — дифференцируемая функция криволинейных координат α^i. Доказать, что ее частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^i}$ преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как ковариантные компоненты вектора.

Упражнение 2.3. Доказать, что дифференциал функции $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ является инвариантом относительно преобразований (2.1)

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^i}\, d\alpha^i. \tag{2.21}$$

√ **Упражнение 2.4.** Доказать, что при преобразованиях (2.1) величины g_{ij} и g^{ij}, определенные в § 1, преобразуются по законам

$$g^{i'j'} = A^{i'}{}_i A^{j'}{}_j g^{ij}, \tag{2.22}$$

$$g_{i'j'} = g_{ij} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'}. \tag{2.23}$$

√ **Упражнение 2.5.** Доказать, что символы Кронекера $\delta^i{}_j$ в любой криволинейной системе координат имеют одни и те же значения. ●

Образуем теперь частные производные от векторов репера $\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j}$ и выразим их в виде линейной комбинации от векторов репера $\vec{e}_k$ (т. е. разложим по векторам базиса)

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k. \tag{2.24}$$

Величины $\Gamma_{ij}{}^k$ * называются *символами Кристоффеля 2-го рода.* Они симметричны по нижним индексам в силу определения (1.13):

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j} \equiv \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k. \tag{2.25}$$

Символы Кристоффеля можно найти по заданной

---

* Иногда в литературе обозначают $\Gamma^k_{ij} \equiv \left\{ {k \atop ij} \right\}$.

матрице g_{ij}. В самом деле, дифференцируя (1.19), имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \alpha^k}. \tag{2.26}$$

Подставляя в правую часть (2.26) обозначение (2.25), получим

$$\Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.27}$$

Меняя последовательно местами индексы i, k и j, k в равенстве (2.27), получим

$$\Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{ji}^m g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i}, \tag{2.28}$$

$$\Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{kj}^m g_{mi} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j}. \tag{2.29}$$

Складывая теперь равенства (2.28) и (2.29), вычитая равенство (2.27) и учитывая симметрию Γ_{ij}^k по нижним индексам, находим

$$2\Gamma_{ij}^m g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.30}$$

Умножая левую и правую части (2.30) на $\frac{1}{2} g^{kl}$ и суммируя по k, из равенства (1.18) получим

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} \right). \tag{2.31}$$

Отсюда видно, что, например, в прямоугольной декартовой системе координат все символы Кристоффеля Γ_{ij}^l тождественно обращаются в нуль.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат x^k. Очевидно, что его частные производные имеют вид

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \vec{k}_i. \tag{2.32}$$

Таким образом, компоненты вектора $\vec{a}_k$ получаются частным дифференцированием соответствующей компоненты вектора $\vec{a}$.

В криволинейной системе координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ векторы репера $\vec{e}_i$ различны в разных точках. Поэтому

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k}\vec{e}_i + a^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k}\vec{e}_i + \Gamma^m_{ik} a^i \vec{e}_m, \quad (2.33)$$

т. е.

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = \left(\frac{\partial a^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} a^i\right)\vec{e}_m. \quad (2.34)$$

Следовательно, в этом случае для нахождения компоненты вектора $\vec{a}_k$ необходимо знать все компоненты вектора $\vec{a}$.

Величина, заключенная в скобки в выражении (2.34), называется *ковариантной производной* контравариантных компонент вектора $\vec{a}$ и обозначается через

$$a^m{}_{,k} \equiv \frac{\partial a^m}{\partial \alpha^k} + \Gamma^m_{ik} a^i. \quad (2.35)$$

В литературе встречаются и другие обозначения

$$a^m{}_{,k} \equiv \nabla_k a^m \equiv a^m|_k. \quad (2.36)$$

Формулу (2.34) можно записать, таким образом, в виде

$$\vec{a}_k \equiv \frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} = a^m{}_{,k}\vec{e}_m. \quad (2.37)$$

По аналогии с (2.37) определим ковариантную производную $a_{m,k}$ ковариантных компонент вектора $\vec{a}$ из формулы

$$\vec{a}_k = a_{m,k}\vec{e}^m. \quad (2.38)$$

Умножая скалярно на $\vec{e}_n$ левую и правую части соотношений (2.38), получим

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k} \cdot \vec{e}_n = a_{n,k}. \quad (2.39)$$

Продифференцируем частным образом равенство (1.18)

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}=\frac{\partial \vec{a}}{\partial \alpha^k}\cdot\vec{e}_j+\vec{a}\cdot\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \alpha^k}. \tag{2.40}$$

Используя равенства (2.39), (2.24) и (1.18), получим

$$\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}=a_{j,k}+\vec{a}\cdot\Gamma^m_{jk}\vec{e}_m=a_{j,k}+\Gamma^m_{jk}a_m, \tag{2.41}$$

откуда

$$a_{j,k}=\frac{\partial a_j}{\partial \alpha^k}-\Gamma^m_{jk}a_m. \tag{2.42}$$

Упражнение 2.6. Доказать справедливость соотношений

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial \alpha^j}=-\Gamma^i_{jk}\vec{e}^k. \tag{2.43}$$

Упражнение 2.7. Доказать, что при преобразовании криволинейных координат (2.1) символы Кристоффеля 2-го рода преобразуются по закону

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}=\Gamma^k_{ij}B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}A^{k'}{}_k+\frac{\partial^2\alpha^k}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}A^{k'}{}_k. \tag{2.44}$$

Упражнение 2.8. Доказать, что для ковариантных производных $a^i{}_{,k}$ и $a_{i,k}$ справедливы формулы жонглирования

$$a^i{}_{,k}=g^{im}a_{m,k};\quad a_{i,k}=g_{im}a^m{}_{,k}. \tag{2.45}$$

Упражнение 2.9. Доказать, что при преобразовании (2.1) ковариантные производные $a^i{}_{,j}$ и $a_{i,j}$ преобразуются по законам

$$a_{i',j'}=B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}a_{i,j}, \tag{2.46}$$

$$a^{i'}{}_{,j'}=A^{i'}{}_iB^j{}_{j'}a^i{}_{,j}. \tag{2.47}$$

Упражнение 2.10. Доказать

$$\Gamma^j_{jk}=\frac{1}{2}g^{ji}\frac{\partial g_{ji}}{\partial \alpha^k}. \tag{2.48}$$

Упражнение 2.11. *Символами Кристоффеля 1-го* *рода* называются величины $\Gamma_{ij,k}$ *, определенные следующим образом:

$$\Gamma_{ij,k} \equiv g_{km}\Gamma^m_{ij}. \quad \Gamma^m_{ij}\, g_{km} \tag{2.49}$$

Тогда из (2.30) следует

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial\alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial\alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\right). \tag{2.50}$$

Нетрудно видеть, что символы Кристоффеля 1-го рода $\Gamma_{ij,k}$ симметричны по индексам ij и

$$\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{ij,k}. \tag{2.51}$$

Доказать, что

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \tag{2.52}$$

Упражнение 2.12. Показать, что закон преобразования символов Кристоффеля 1-го рода при переходе к другой системе координат (2.1) таков:

$$\Gamma_{i'j',k'} = B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}\Gamma_{ij,k} + \frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}B^k{}_{k'}g_{kl}. \tag{2.53}$$

Упражнение 2.13. Показать, что при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат ковариантные и контравариантные компоненты преобразуются по одному закону, т. е.

$$a^i = a_i. \tag{2.54}$$

Поэтому для прямоугольной системы координат будем предполагать суммирование по повторяющемуся индексу, даже если он написан оба раза внизу, например

$$\vec{a} = a_i\vec{k}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.55}$$

§ 3. Группы преобразований

Отметим одно важное обстоятельство, касающееся «инвариантности» рассматриваемых величин. Для этого заметим, что от преобразования (2.1) мы требо-

---

* В литературе иногда обозначают $\Gamma_{ij,k} \equiv [ij, k]$.

вали лишь его обратимости (2.2), т. е. выполнения условий (2.4). Назовем такое преобразование *общим*.

Однако иногда нам нужно рассмотрение преобразований более частного вида.

Например, в случае, если функции $\alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ являются линейными, соотношения (2.1) и (2.2) можно записать соответственно в виде

$$\alpha^{i'} = A^{i'}{}_i \alpha^i + A^{i'}, \tag{3.1}$$

$$\alpha^i = B^i{}_{i'} \alpha^{i'} + B^i. \tag{3.2}$$

Упражнение 3.1. Показать, что если соотношения (3.1) и (3.2) взаимообратны, то выполняются условия (2.4), (2.5) и условия

$$A^{i'} = -A^{i'}{}_i B^i, \quad B^i = -B^i{}_{i'} A^{i'}. \; ● \tag{3.3}$$

Преобразования (3.1), (3.2) называются *аффинными* преобразованиями координат.

Можно рассмотреть различные частные случаи этих преобразований.

Так, полагая в (3.1) и (3.2):

$$A^{i'} = 0, \; B^i = 0, \tag{3.4}$$

получим так называемые *центроаффинные* преобразования.

Преобразования (3.1), (3.2) называются *эквиаффинными*, если

$$A = \pm 1, \tag{3.5}$$

где A определяется формулой (2.4).

Преобразования (3.1), (3.2) называются *унимодулярными*, если

$$A = 1, \tag{3.6}$$

преобразованиями *переноса (трансляцией)*, если

$$A^{i'}{}_i = \delta^{i'}{}_i, \quad B^i{}_{i'} = \delta^i{}_{i'}. \tag{3.7}$$

Если рассматривается прямоугольная декартова система координат $x^1 = x_1$, $x^2 = x_2$, $x^3 = x_3$ и переход к новой прямоугольной декартовой системе координат $x^{1'} = x_{1'}$, $x^{2'} = x_{2'}$, $x^{3'} = x_{3'}$ и обратно осуществляется с помощью преобразований

$$x_{i'} = A_{i'i} x_i + A_{i'}, \tag{3.8}$$

$$x_i = B_{ii'} x_{i'} + B_i, \tag{3.9}$$

причем справедливы условия

$$B_{ii'} = A_{i'i} \qquad (3.10)$$

и (3.3), то преобразования (3.8), (3.9) называются *ортогональными*.

Множество M элементов называется *группой*, если в M установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, $b \in M$ некоторый элемент $c \in M$. Результат этой операции (обычно называемый умножением) обозначается через ab:

$$c = ab. \qquad (3.11)$$

При этом выполняются следующие аксиомы:

1°. Ассоциативность: для всяких трех элементов a, b, $c \in M$ выполнено соотношение

$$(ab)c = a(bc). \qquad (3.12)$$

2°. В M имеется левая единица, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент e, что

$$ea = a \qquad (3.13)$$

для каждого элемента $a \in M$.

3°. Для всякого элемента $a \in M$ существует левый обратный элемент, т. е. такой элемент a^{-1}, что

$$a^{-1}a = e. \qquad (3.14)$$

Если кроме этих аксиом в группе выполняется еще условие коммутативности, т. е. для всяких двух элементов a, $b \in M$ имеет место равенство

$$ab = ba, \qquad (3.15)$$

то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Упражнение 3.2. Доказать, что квадратные матрицы 3-го порядка, определители которых отличны от нуля (неособенные матрицы), образуют группу.

Упражнение 3.3. Доказать, что преобразования (2.1) при условии (2.4) образуют группу, причем роль единичного элемента играет тождественное преобразование, а роль обратного элемента к преобразованию (2.1) — преобразование (2.2). ●

Подгруппой N группы M называется подмножество элементов группы M, которые образуют группу в силу того же закона умножения, который имеет место в M.

Упражнение 3.4. Показать, что преобразования вида (3.1) образуют подгруппу группы преобразований вида (2.1), которая называется *группой аффинных преобразований* (условия (2.4) считаются выполненными).

Упражнение 3.5. Показать, что преобразования вида (3.1) при условиях (2.4), (3.4) образуют группу, которая называется *группой центроаффинных преобразований.*

Упражнение 3.6. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.5) образуют группу, которая называется *эквиаффинной группой преобразований.*

Упражнение 3.7. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.6) образуют группу, которая называется *унимодулярной группой преобразований.*

Упражнение 3.8. Показать, что преобразования вида (3.1) при условии (3.7) образуют группу, которая называется *группой трансляций.*

Упражнение 3.9. Показать, что преобразования вида (3.8) при условиях (3.3), (3.10) образуют группу, которая называется *полной группой движения* в евклидовом пространстве R_3, причем выполняется (3.5).

Упражнение 3.10. Показать, что преобразования вида (3.8) при условиях (3.4), (3.10) образуют группу I, которая называется *полной ортогональной группой* трехмерного евклидова пространства; она состоит из всех вращений и отражений в R_3 (см. упражнение 3.16).

Упражнение 3.11. Показать, что преобразования (3.8) при условиях (3.4), (3.10), (3.6) образуют группу I_0, которая называется *собственной ортогональной группой,* или *группой вращения* в R_3.

Упражнение 3.12. Показать, что преобразования

$$x_{\alpha'} = \varkappa_\alpha x_\alpha \quad \langle \alpha = 1, 2, 3 \rangle, \tag{3.16}$$

где $\varkappa_\alpha$ — следующие наборы чисел $(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$:

$$(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1),$$
$$(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1), \tag{3.17}$$

образуют группу O, которая является подгруппой группы I и называется *группой ортотропии.*

Упражнение 3.13. Показать, что преобразования вида

$$x_{1'} = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$

$$x_{2'} = -x_2 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \tag{3.18}$$

$$x_{3'} = x_3,$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, образуют группу T_3, которая является подгруппой группы I_0 и называется *группой трансверсальной изотропии.* ●

В предыдущем параграфе было введено понятие инвариантных величин относительно преобразований (2.1). Точно так же можно ввести понятие инвариантных величин относительно преобразований (3.1), (3.8), (3.16), (3.18) и т. д.

Поэтому всякий раз, когда мы будем говорить об инвариантности той или иной величины, мы будем иметь в виду некоторую вполне определенную группу преобразований. Инвариант относительно общей группы преобразований (2.1) будем иногда называть просто *инвариантом.*

Длина вектора $\vec{a}$ является инвариантом (см. упражнение 2.1), причем единственным для общей группы преобразований (2.1). Однако относительно некоторых подгрупп этой группы вектор $\vec{a}$ может иметь инвариантов больше одного.

Упражнение 3.14. Показать, что инвариантами относительно группы преобразований O (см. упражнение 3.12) для вектора

$$\vec{a} = a_i \vec{k}_i \tag{3.19}$$

являются величины

$$|a_1|, \ |a_2|, \ |a_3|. \tag{3.20}$$

Упражнение 3.15. Показать, что инвариантами относительно группы преобразований T_3 (см. упражнение 3.13) для вектора (3.18) являются величины

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \ a_3. \tag{3.21}$$

Упражнение 3.16. Показать, что преобразования (3.16), где $\varkappa_\alpha$ — следующий набор чисел:

$$(1, 1, 1), \ (-1, 1, 1), \tag{3.22}$$

образуют подгруппу группы O, которая называется *группой отражений* относительно плоскости $x_1 = 0$.

Упражнение 3.17. Показать, что преобразования (3.16), где $\varkappa_\alpha$ — следующий набор чисел:

$$(1, 1, 1), (-1, -1, -1), \tag{3.23}$$

образуют подгруппу группы O, которая называется *группой инверсии*.

§ 4. Алгебра геометрических объектов. Понятие тензора

Пусть в каждой системе координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и в каждой точке пространства задано 3^{n+m} чисел

$$Q^{i_1 i_2 \dots i_n}{}_{j_1 j_2 \dots j_m}. \tag{4.1}$$

В этом случае будем говорить, что в пространстве определен *геометрический объект*, или *экстенсив* Q, порядка (валентности, ранга) $(n+m)$ с n контравариантными и m ковариантными компонентами (4.1).

Закон преобразования компонент геометрического объекта Q при новом выборе системы координат может быть весьма разнообразным. Примеры таких законов см. в упр. 2.4, 2.7, 2.9, 2.12 и др. В частности, если рассматривается геометрический объект 1-го порядка и для его контравариантных компонент справедлив закон преобразования (2.14), то согласно определению, данному в § 2, такой геометрический объект называется *вектором*.

Рассмотрим алгебраические операции, производимые над геометрическими объектами.

1. Сложение. В сложении могут участвовать два (или несколько) объекта (экстенсива) одинакового строения, т. е. число ковариантных (и контравариантных) компонент каждого слагаемого должно быть одинаковым и, кроме того, одинаково чередование ковариантных и контравариантных индексов у каждого слагаемого. Например, суммой двух экстенсивов Q и P соответственно с компонентами $Q^i{}_j{}^{kl}$ и $P^i{}_j{}^{kl}$ называется экстенсив S с компонентами $S^i{}_j{}^{kl}$, вычисленными по формулам

$$S^i{}_j{}^{kl} = Q^i{}_j{}^{kl} + P^i{}_j{}^{kl}. \tag{4.2}$$

2. Умножение на число. В результате умножения экстенсива Q с компонентами (4.1) на число α получается экстенсив P с компонентами

$$P^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m} = \alpha Q^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m}. \tag{4.3}$$

3. **Произведение.** Произведением двух экстенсивов Q и P произвольного строения, например $Q^{i}{}_{j}{}^{k}$, P^{mn} называется экстенсив S, компоненты которого определяются следующим образом:

$$S^{i}{}_{j}{}^{kmn} = Q^{i}{}_{j}{}^{k}P^{mn}. \tag{4.4}$$

Отсюда видно, что произведение экстенсивов некоммутативно.

Заметим, что при сложении экстенсивов порядок суммы равен порядку каждого слагаемого, при умножении экстенсива на число его порядок не изменяется. При произведении экстенсивов порядок произведения равен сумме порядков сомножителей.

4. **Подстановка индексов.** Если у компонент некоторого экстенсива Q переставить произвольным образом один или несколько индексов, то полученные таким образом компоненты образуют некоторый новый экстенсив P. Частным случаем подстановки индексов является симметрирование экстенсива по двум индексам

$$P_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}(Q_{ij}{}^{k} + Q_{ji}{}^{k}). \tag{4.5}$$

Операция симметрирования обозначается взятием индексов, по которым производится суммирование, в круглые скобки, т. е. из (4.5) следует

$$P_{ij}{}^{k} = Q^{k}{}_{(ij)}. \tag{4.6}$$

Если между индексами, участвующими в симметрировании, стоят другие индексы, то их выделяют вертикальной чертой, например:

$$S_{(i|kl|j)} \equiv \frac{1}{2}(S_{iklj} + S_{jkli}). \tag{4.7}$$

Операция симметрирования по трем индексам определяется следующим образом:

$$Q_{(ijk)} \equiv \frac{1}{6}(Q_{ijk} + Q_{kij} + Q_{jki} + Q_{jik} + Q_{kji} + Q_{ikj}). \tag{4.8}$$

Аналогично можно определить операцию симметрирования по n индексам:

$$Q_{(i_1 \ldots i_n)} \equiv \frac{1}{n!}(Q_{i_1 \ldots i_n} + Q_{i_n \ldots i_1} + \ldots), \tag{4.9}$$

где в правой части в скобках сумма $n!$ членов с различными перестаиовками индексов.

Операция альтериироваиия или кососимметрироваиия экстеисива P по двум иидексам обозначается взятием этих индексов в квадратиые скобки и определяется следующим образом:

$$P_{[kl]} \equiv \frac{1}{2} (P_{kl} - P_{lk}). \qquad (4.10)$$

Аналогичио определяется операция альтериирования по n индексам $(n \geqslant 2)$:

$$P_{[i_1 \dots i_n]} \equiv \frac{1}{n!} (P_{i_1 \dots i_n} + P_{i_n i_1 \dots i_{n-1}} + \dots), \qquad (4.11)$$

где в правой части в скобках стоит сумма $n!/2$ членов со зиаком плюс с четиыми подстановками индексов $i_1, \dots, i_n$ и $n!/2$ члеиов со зиаком мииус с нечетиыми подстановками этих иидексов.

5. Свертка. Операция свертки экстенсива может производиться только над экстенсивами, компоненты которых имеют не менее одного ковариантного и одного контравариантного индекса. Свертка заключается в замене одного ковариантного (контравариантного) индекса на соответствующий контравариантный (ковариантный) индекс и проведения по повторяющемуся иидексу суммирования от 1 до 3. В результате свертки порядок экстенсива уменьшается на две единицы. Например, свертка экстеисива Q с компонентами $Q^{ij}{}_k$ по индексам j, k заключается в замеие индекса j иа k (или индекса k иа j) и последующем суммировании

$$P^i = Q^{ij}{}_j \equiv Q^{i1}{}_1 + Q^{i2}{}_2 + Q^{i3}{}_3. \qquad (4.12)$$

Скалярное произведение двух векторов, например, содержит две операции: произведение двух экстенсивов и свертку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b_i \equiv a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3. \qquad (4.13)$$

Дадим определение тензора: *если при переходе от одной системы координат к другой (2.1) компоненты экстенсива (4.1) преобразуются по закону*

$$Q^{i'_1 i'_2 \dots i'_n}{}_{j'_1 j'_2 \dots j'_m} = A^{i'_1}{}_{i_1} A^{i'_2}{}_{i_2} \dots A^{i'_n}{}_{i_n} \times$$

$$\times B^{j_1}_{\ i_1'} B^{j_2}_{\ i_2'} \dots B^{j_n}_{\ i_n'} Q^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_m}, \qquad (4.14)$$

то экстенсив Q — тензор относительно группы преобразований (2.1).

Экстенсив, являющийся тензором относительно одной группы преобразований, может не быть таковым относительно другой группы преобразований.

Упражнение 4.1. Доказать тензорный характер величин g_{ij}, g^{ij}, $\delta_j^{\ i}$, определенных в § 1. Таким образом, величины g_{ij} образуют так называемый фундаментальный тензор.

Упражнение 4.2. Определим экстенсив ϵ с компонентами

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса совпадают,} \\ +1, & \text{если все индексы различны и образуют четную подстановку,} \\ -1, & \text{если все индексы различны и образуют нечетную подстановку.} \end{cases} \qquad (4.15)$$ ●

Доказать, что ϵ является тензором относительно группы I_0 и не является тензором относительно более широкой группы I (см. упр. 3.10 и 3.11).

Упражнение 4.3. Доказать, что ковариантные производные вектора $a^i{}_{,j}$ и $a_{i,j}$ являются компонентами тензора второго порядка.

Упражнение 4.4. Доказать, что частные производные $\frac{\partial a^i}{\partial a^j}$ и $\frac{\partial a_i}{\partial a^j}$ не образуют тензора. ●

Легко показать, что линейная комбинация тензоров одного строения является тензором того же строения. В самом деле, пусть даны два числа α, β (действительных или комплексных) и два тензора T и Q ($T_i^{\ j}$ и $Q_i^{\ j}$). Тогда экстенсив $S=\alpha T+\beta Q$ является тензором. В самом деле, согласно определению суммы экстенсивов и умножения их на число имеем

$$S_i^{\ j}=\alpha T_i^{\ j}+\beta Q_i^{\ j}. \qquad (4.16)$$

Так как экстенсивы T и Q — тензоры, то при переходе к другой (штрихованной) системе координат

$$T_{i'}^{\ j'} = B^i_{i'} A^{j'}_j T^j_i; \; Q^{j'}_{i'} = B^i_{i'} A^{j'}_j Q^j_i. \qquad (4.17)$$

Поэтому в новой системе координат

$$S_{i'}^{j'} = \alpha T_{i'}^{j'} + \beta Q_{i'}^{j'} = B_{i'}^{i} A^{j'}_{j} (\alpha T_{i}^{j} + \beta Q_{i}^{j}) = B_{i'}^{i} A_{j}^{j'} S_{i}^{j}, \quad (4.18)$$

что и требовалось доказать.

В частности, из доказанного следует, что сумма тензоров является тензором и в результате умножения тензора на число получается тензор.

Упражнение 4.5. Доказать, что произведением двух тензоров является тензор, порядок которого равен сумме порядков сомножителей.

Упражнение 4.6. Доказать, что геометрический объект, образованный подстановкой индексов у тензора, является тензором.

Упражнение 4.7. Доказать, что всякий ковариантный тензор второго порядка (т. е. тензор, имеющий ковариантные компоненты) можно представить в виде суммы симметричного и косимметричного тензоров. ●

Покажем теперь, что геометрический объект, полученный сверткой двух тензоров, является тензором. В самом деле, пусть два тензора $T(T_i{}^{kl})$ и $Q(Q_{jm})$ свертываются по индексам $k=m$. Тогда для геометрического объекта $S(S_{ij}{}^{l})$

$$S_{ij}^{l} = T_{i}^{ml} Q_{jm}; \quad S_{ij}^{l} = S_{ijm}^{kl}\,|_{k=m}. \quad (4.19)$$

В новой (штрихованной) системе координат в силу тензорного характера T и Q

$$S_{i'}{}^{l'}{}_{j'} = T_{i'}{}^{k'l'} Q_{j'm'}\,|_{k'=m'} =$$

$$= B_{i'}^{i} \underline{A^{k'}{}_{k}} A^{l'}{}_{l} T_{i}{}^{kl} B^{j}{}_{j'} \underline{B^{m}{}_{m'}} Q_{jm}\,|_{k'=m'}. \quad (4.20)$$

Так как матрицы $A_{i}^{i'}$ и $B_{j'}^{j}$ взаимно обратные, то для подчеркнутых величин имеем

$$A_{k}^{k'} B_{m'}^{m}\,|_{k'=m'} = \widehat{A_{k}^{m'} B_{m'}^{m}} = \delta_{k}^{m}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.20) и используя свойство символов Кронекера, получим

$$S_{i'}^{l'}{}_{j'} = B_{i'}^{i} A_{l}^{l'} B_{j'}^{j} T_{i}^{ml} Q_{jm}, \quad (4.22)$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 4.8. Доказать, что в результате полного свертывания тензора, имеющего одинаковое число ковариантных и контравариантных индексов, получается скаляр. ●

При выяснении вопроса о тензориальности того или иного экстенсива часто полезен так называемый «обратный тензорный признак», который заключается в следующем. Пусть дан некоторый экстенсив $Q(Q_j{}^i)$ и известно, что для произвольного вектора $S(S^j)$ в результате свертки

$$Q_j{}^i S^j = T^i \tag{4.23}$$

получается вектор $T(T^i)$. В этом случае экстенсив $Q(Q_j{}^i)$ является тензором.

В самом деле, в новой (штрихованной) системе координат

$$Q_{j'}^{i'} S^{j'} = T^{i'}. \tag{4.24}$$

Кроме того, известно, что

$$S^{j'} = A_j^{j'} S^j; \quad T^{i'} = A_i^{i'} T^i. \tag{4.25}$$

Подставляя (4.25) в (4.24), получим

$$Q_{j'}^{i'} A_j^{j'} S^j = A_i^{i'} T^i. \tag{4.26}$$

Умножая (4.26) на $B^k{}_{i'}$, суммируя по i' и заменяя индекс k на i, имеем

$$Q_{j'}^{i'} A_j^{j'} B_{i'}^i S^j = T^i. \tag{4.27}$$

Вычтем теперь из равенства (4.27) равенство (4.23):

$$(Q_j^i - A_j^{j'} B_{i'}^i Q_{j'}^{i'}) S^j = 0. \tag{4.28}$$

Откуда в силу произвольности вектора S

$$Q_j^i = A_j^{j'} B_{i'}^i Q_{j'}^{i'}. \tag{4.29}$$

Умножим обе части (4.29) на $A_i^{k'} B_{m'}^j$, используем свойство символов Кронекера и, заменив в окончательном выражении k' на i', m' на j', получим

$$Q_{j'}^{i'} = A_i^{i'} B_{j'}^j Q_j^i, \tag{4.30}$$

т. е. экстенсив Q является тензором второго порядка, что и требовалось доказать.

Упражнение 4.9. Пусть для произвольных векторов $a(a^i)$ и $\vec{b}(b_j)$ и для экстенсива $Q(Q_i{}^j)$ выполняется тождество

$$Q_i{}^j a^i b_j = 1. \qquad (4.31)$$

Доказать, что Q — тензор. ●

В заключение покажем, как понятие ковариантной производной, введенное в предыдущем параграфе для векторов (т. е. тензоров первого порядка), обобщается на тензоры более высокого порядка. Прежде всего обратим внимание на тот факт, что частные производные скалярной функции $\mathcal{J}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ по координатам являются ковариантными компонентами вектора (см. упр. 2.2):

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^{i'}} = B^i_{i'} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^i}. \qquad (4.32)$$

Поэтому можно сказать, что ковариантная производная скаляра совпадает с его частной производной.

Пусть теперь известно, что $T\,(T_j{}^i)$ — тензор второго порядка. Тогда путем свертки этого тензора с двумя произвольными векторами $\overleftarrow{b}(b_i)$ и $\vec{c}(c^j)$ получим скаляр

$$\mathcal{J} = T_j{}^i b_i c^j. \qquad (4.33)$$

Продифференцируем частным образом равенство (4.33) и воспользуемся равенствами (2.35) и (2.42):

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^k} = \frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} b_i c^j + T^i{}_j \left(b_{i,k} + \Gamma^l_{ik} b_l\right) c^j + \\ + T^i{}_j b_i \left(c^j{}_{,k} - \Gamma^j_{lk} c^l\right). \qquad (4.34)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \alpha^k} - T^i{}_j b_{i,k} c^j - T^i{}_j b_i c^j{}_{,k} = \\ = \left(\frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} + T^l{}_j \Gamma^i_{kl} - T^i{}_l \Gamma^l_{jk}\right) b_i c^j. \qquad (4.35)$$

Выражение в скобках в правой части (4.35) согласно обратному тензорному признаку носит тензорный характер. Назовем это выражение ковариантной производной компонент $T^i{}_j$ тензора T

$$T^i{}_{j,k} \equiv \frac{\partial T^i{}_j}{\partial \alpha^k} + T^l{}_j \Gamma^i_{kl} - T^i{}_l \Gamma^l_{jk}. \qquad (4.36)$$

Аналогично опеделяется ковариаитная пронзводная тензора любого строения, а именно: для того чтобы образовать ковариантную производную произвольного тензора T (например, по k-й координате), необходимо составить сумму выражений трех типов.

При этом выражения 1-го типа составляются как соответствующие частные производные по k-й координате.

Выражения 2-го типа (со знаком плюс) составляются для каждого контравариантного индекса компонент тензора T в виде пронзведения этой компоненты на символ Кристоффеля 2-го рода. При этом один из контравариантных индексов компоненты T присванвается символу Кристоффеля, а взамен его ставится немой индекс, который приписывается символу Кристоффеля (и по которому производится суммирование). Вторым нижним индексом символа Кристоффеля является индекс коварнантного дифференцирования.

Выражения 3-го типа (со знаком минус) составляются для каждого ковариантного индекса компонент тензора T аналогичным образом (но замене подлежит каждый ковариантный индекс).

Упражнение 4.10. Доказать, что для ковариантного дифференцирования справедливы правила дифференцирования суммы и произведения тензоров, аналогичные правилам для дифференцирования скалярных функций:

$$(T^i_j + S^i_j)_{,k} = T^i_{j,k} + S^i_{j,k}, \tag{4.37}$$

$$(T^i_j Q^{mn})_{,k} = T^i_{j,k} Q^{mn} + T^i_i Q^{mn}{}_{,k}. \quad \bullet \tag{4.38}$$

Упражнение 4.11. Показать, что для фундаментальных тензоров (см. (1.17), (1.18)) выполняются соотношения

$$g_{ij,k} = 0; \quad g^{ij}{}_{,k} = 0. \quad \bullet \tag{4.39}$$

Абсолютным дифференциалом тензора T называется произведение его ковариантной производной на дифференциал криволинейных координат с последующей сверткой. Например, для тензора $T(T_j{}^i)$ координаты его абсолютной производиой определяются следующим образом:

$$DT_j{}^i \equiv T_{j,k}{}^i d\alpha^k. \tag{4.40}$$

Упражнение 4.12. Доказать, что абсолютный дифференциал тензора T является тензором того же порядка, что и тензор T.

Упражнение 4.13. Доказать, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого скаляра $\varkappa$ справедливы следующие правила дифференцирования:

$$D(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot D\vec{b}+\vec{b}\cdot D\vec{a}, \tag{4.41}$$

$$D(\vec{a}+\vec{b})=D\vec{a}+D\vec{b}, \tag{4.42}$$

$$D(\varkappa\vec{a})=\varkappa D\vec{a}+d\varkappa\vec{a}. \quad \bullet \tag{4.43}$$

§ 5. Физические компоненты тензоров

В механике и физике чаще всего используются ортогональные криволинейные системы координат, т. е. системы координат, в которых три семейства поверхностей, определяемых уравнениями (1.9), взаимно пересекаются под прямыми углами. В этом случае локальный базис $\vec{e}_i$ (1.15) ортогональный и для фундаментального тензора g_{ij} (1.19) имеем соотношение

$$g_{ij}=0 \quad (i\neq j). \tag{5.1}$$

Поэтому отличных от нуля независимых компонент тензора g_{ij} только три. Иногда их обозначают следующим образом:

$$\sqrt{g_{\beta\beta}}=H_\beta \, (\beta=1,\,2,\,3), \tag{5.2}$$

где величины H_β называются параметрами Ламе. Поэтому для компонент сопряженного фундаментального тензора получим

$$g^{\beta\beta}=1/H_\beta^2. \tag{5.3}$$

Определитель матрицы g_{ij}:

$$g=H_1H_2H_3. \tag{5.4}$$

Символы Кристоффеля 1-го рода определим по формулам (2.50):

$$\Gamma_{\beta\beta,\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\beta}=H_\beta^1\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\beta},$$

$$\Gamma_{\beta\gamma,\beta}=-\Gamma_{\beta\beta,\gamma}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial\alpha^\gamma}=H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\gamma} \tag{5.5}$$

$$\langle \beta \neq \gamma;\ \gamma = 1,\ 2,\ 3 \rangle,$$

откуда по формулам (2.51) иаходим символы Кристоффеля 2-го рода:

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\beta} = g^{\beta\beta}\Gamma_{\beta\beta,\beta} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\beta},$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\beta} = g^{\gamma\gamma}\Gamma_{\beta\beta,\gamma} = -\frac{H_\beta \partial H_\beta}{H^2_\gamma \partial \alpha^\gamma}, \tag{5.6}$$

$$\Gamma^{\beta}_{\beta\gamma} = g^{\beta\beta}\Gamma_{\beta\gamma,\beta} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\gamma}$$

$$\langle \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3 \rangle.$$

Символы Кристоффеля, у которых все иидексы различиы, тождественно равны нулю.

Пример 5.1. Рассмотрим сферическую систему координат (см. упр. 1.3)

$$x^1 = \alpha^1 \cos\alpha^2 \cos\alpha^3,$$

$$x^2 = \alpha^1 \sin\alpha^2 \cos\alpha^3,$$

$$x^3 = \alpha^1 \sin\alpha^3 \quad \text{(рис. 7)}. \tag{5.7}$$

Чтобы иайти компоненты фундаментального теизора g_{ij}, можно воспользоваться формулами (1.15) и (1.19). Одиако мы используем другой подход. Для этого отметим, что квадрат расстояиия между двумя бескоиечио близкими точками ds^2 может быть подсчитаи по формуле

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \tag{5.8}$$

ио

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} d\alpha^i = \vec{e}_i d\alpha^i. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.8) и используя (1.19), получим

$$ds^2 = g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j, \tag{5.10}$$

или, пользуясь тем, что сферическая система координат (5.7) ортогоиальна,

$$ds^2 = g_{11}(d\alpha^1)^2 + g_{22}(d\alpha^2)^2 + g_{33}(d\alpha^3)^2. \tag{5.11}$$

Рассмотрим теперь элемеитариый объем, ограиичеииый координатиыми поверхностями α^i и $\alpha^i + d\alpha^i$

$(i=1, 2, 3)$ (рис. 8). Очевидно, что квадрат расстояния между точками A и E может быть подсчитан как сумма квадратов расстояний AB, AD и AC, т. е.

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(\alpha^1 d\alpha^2)^2+(\alpha^1 \sin\alpha^2 d\alpha^3)^2, \qquad (5.12)$$

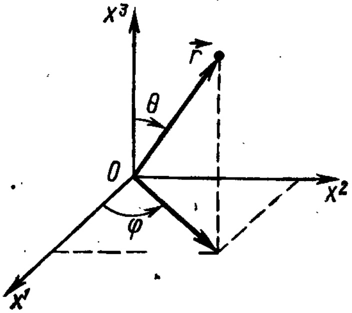

Рис. 7

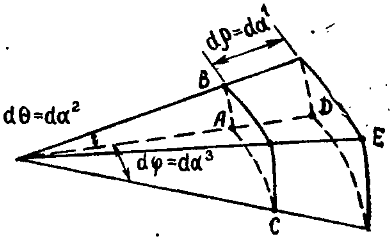

Рис. 8

откуда находим матрицу

$$g_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha^1\sin\alpha^2)^2 \end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

и векторы локального базиса

$$\vec{e}_1=(1, 0, 0),$$

$$\vec{e}_2=(0, \alpha^1, 0),$$

$$\vec{e}_3=(0, 0, \alpha^1\sin\alpha^2). \qquad (5.14)$$

Из формул (5.14) видно, что если $\rho=\alpha^1$ измеряется в единицах длины, а углы $\varphi=\alpha^2$ и $\Theta=\alpha^3$ — в радианах, то векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (или $\vec{e}_3$) имеют разную размерность. Это бывает неудобно при записи физических соотношений. Поэтому вводят единичный базис k_i, т. е. базис из единичных векторов

$$\vec{k}_\beta=\frac{\vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\beta|}. \qquad (5.15)$$

Длина вектора $\vec{e}_\beta$ подсчитывается по формуле

$$|\vec{e}_\beta| = \sqrt{g_{\beta\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\beta\beta}}}. \qquad (5.16)$$

Для произвольного вектора $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = \sum_{\beta=1}^{3} a^\beta\, |\vec{e}_\beta|\, \frac{\vec{e}_\beta}{|\vec{e}_\beta|} = a^i_{(\Phi)} \vec{k}_i, \qquad (5.17)$$

где $a_{(\Phi)}{}^i$ — компоненты вектора $\vec{a}$ в единичном базисе $\vec{k}_i$, причем

$$a^\beta_{(\Phi)} = a^\beta\, |\vec{e}_\beta| = a^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}}. \qquad (5.18)$$

Аналогично образуем единичный базис $\vec{k}^i$ из векторов взаимного репера

$$\vec{k}^\beta \equiv \frac{\vec{e}^\beta}{|\vec{e}^\beta|} = \frac{\vec{e}^\beta}{\sqrt{g^{\beta\beta}}} = \vec{e}^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}}. \qquad (5.19)$$

Используя определение взаимного репера (или формулу (1.28)), получим

$$\vec{k}_\beta = \frac{\vec{e}_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \sum_{\gamma=1}^{3} \frac{g_{\beta\gamma}\vec{e}^\gamma}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} = \frac{g_{\beta\beta}\vec{e}^\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} =$$

$$= \sqrt{g_{\beta\beta}}\, \vec{e}^\beta = \frac{\vec{e}^\beta}{\sqrt{g^{\beta\beta}}} = \vec{k}^\beta. \qquad (5.20)$$

Следовательно, единичные базисы $\vec{k}^i$ и $\vec{k}_i$ совпадают.

Для ковариантных компонент вектора a_i имеем

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^i = \sum_{\beta=1}^{3} a_\beta\, |\vec{e}^\beta|\, \frac{\vec{e}^\beta}{|\vec{e}^\beta|} = a_{i(\Phi)} \vec{k}^i, \qquad (5.21)$$

где

$$a_{\beta(\Phi)} = a_\beta \sqrt{g^{\beta\beta}}. \qquad (5.22)$$

Учитывая (5.20), из (5.21) и (5.17) получим

$$a_{i(\Phi)} = a^{i(\Phi)}. \qquad (5.23)$$

Величины $a_{i(\Phi)}$ (или $a^{i(\Phi)}$) называются физическими компонентами вектора $\vec{a}$ и не преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по законам (2.14) или (2.16). Поэтому они являются компонентами экстенсива, который, вообще говоря, не есть вектор. Пользуясь физическими компонентами векторов, следует помнить об этом.

Аналогично для любого тензора T можно ввести физические компоненты. При этом для каждого ковариантного индекса компоненты тензора T нужно пользоваться формулой (5.22), а для контравариантного — формулой (5.18), например:

$$T_{\alpha(\Phi)}^{\beta} = T_{\alpha}^{\beta}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}} = T_{\alpha}^{\beta}\,\frac{H_\alpha}{H_\beta}. \qquad (5.24)$$

§ 6. Матричная запись

Пусть задано соотношение

$$b_i = Q_i{}^j a_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (6.1)$$

Его можно записать на «матричном языке», не используя индексов:

$$b = Qa. \qquad (6.2)$$

При этом маленькими латинскими буквами будем обозначать одностолбцовую матрицу

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad (6.3)$$

а большими латинскими буквами — квадратные матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1^1 & Q_1^2 & Q_1^3 \\ Q_2^1 & Q_2^2 & Q_2^3 \\ Q_3^1 & Q_3^2 & Q_3^3 \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Транспонированные матрицы будем помечать волной над соответствующей буквой*. Например,

* Часто транспонирование обозначают верхним индексом т : $a^{т}$.

$$\tilde{a} = (a_1 a_2 a_3). \tag{6.5}$$

В частности, для репера имеем

$$e = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}; \quad \tilde{e} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3). \tag{6.6}$$

Если две матрицы записаны одна за другой, будем считать, что они перемножаются обычным образом. Фундаментальную матрицу обозначим через G. Согласно (1.19) имеем

$$G = e\tilde{e} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Матрицу, обратную к квадратной невырожденной матрице Q, обозначим через Q^{-1}.

Произвольный вектор $\vec{a}$ можно в матричной записи изобразить следующим образом:

$$\vec{a} = \tilde{a}e = \widetilde{(\tilde{a}e)} = \tilde{e}a. \tag{6.8}$$

Обозначим через $\mathcal{I}$ единичную матрицу. Вводим взаимный базис e^*:

$$e^* = G^{-1}e, \tag{6.9}$$

где

$$G^{-1}G = GG^{-1} = \mathcal{I}. \tag{6.10}$$

Умножая (6.9) слева на G, получим

$$e = Ge^*. \tag{6.11}$$

Матрица Q называется симметричной, если $Q = \tilde{Q}$, и кососимметричной (или антисимметричной), если $Q = -\tilde{Q}$.

Упражнение 6.1. Доказать, что всякую матрицу Q можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц.

Упражнение 6.2. Показать, что для любой матрицы Q

$$\tilde{\tilde{Q}} = Q. \quad \bullet$$

Используя формулу (6.11), дадим другое представление вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\tilde{a}e=\tilde{a}Ge^*=\tilde{a}^*e^*, \tag{6.12}$$

где введено обозначение

$$\tilde{a}G=\tilde{a}^*. \tag{6.13}$$

Из (6.13), пользуясь симметричностью матрицы G, получим

$$Ga=a^*. \tag{6.14}$$

Упражнение 6.3. Пользуясь матричной записью, показать, что

$$e^*\tilde{e}=\mathcal{I};\quad e\tilde{e}^*=\mathcal{I}. \tag{6.15}$$

Пусть теперь задан закон перехода от одной системы координат к другой. При этом новый локальный базис e' выражается через старый следующим образом:

$$e'=Ce. \tag{6.16}$$

Тогда

$$\vec{a}=\tilde{a}e=\tilde{a}'e'=\tilde{a}'Ce, \tag{6.17}$$

откуда

$$\tilde{a}=\tilde{a}'C;\quad a'=\tilde{C}^{-1}a. \tag{6.18}$$

Для фундаментальной матрицы G

$$G'=e'\tilde{e}'=Ce\tilde{e}\tilde{C}=CG\tilde{C}. \tag{6.19}$$

Далее из формулы (6.14) и второго соотношения (6.18), используя (6.19), имеем

$$a^{*\prime}=G'a'=(CG\tilde{C})\tilde{C}^{-1}a=CGa=Ca^*. \tag{6.20}$$

Запишем теперь выражение (6.11) в новой системе координат и к левой части применим соотношение (6.16). Тогда, воспользовавшись (6.19), получим

$$Ce=G'e^{*\prime}=CG\tilde{C}e^{*\prime}, \tag{6.21}$$

откуда

$$e=G\tilde{C}e^{*\prime}. \tag{6.22}$$

Воспользовавшись (6.11), получим

$$Ge^*=G\tilde{C}e^{*\prime}. \tag{6.23}$$

Умножив (6.23) на G^{-1}, имеем

$$e^*=\tilde{C}e^{*\prime}, \tag{6.24}$$

или

$$e^{*\prime} = \tilde{C}^{-1} e^{*}. \tag{6.25}$$

Упражнение 6.4. Обозначим матрицу $A_i^{i'}$, фигурирующую в § 2, через A, а матрицу $B_{i'}^{i}$ — через B. Доказать, что эти матрицы связаны с матрицей C следующим образом:

$$A = \tilde{C}^{-1}; \quad B = \tilde{C}. \; ● \tag{6.26}$$

Пусть матрицей Q задано преобразование (6.2), при котором каждый вектор $\vec{a}$ в некоторой точке трехмерного евклидова пространства преобразуется в вектор $\vec{b}$. Предположим, что длина вектора при этом преобразовании не меняется:

$$\tilde{b}b = \tilde{a}a. \tag{6.27}$$

Таким образом,

$$\tilde{b}b = \tilde{a}\tilde{Q}Qa = \tilde{a}a, \tag{6.28}$$

т. е.

$$\tilde{Q}Q = \mathcal{I}. \tag{6.29}$$

Следовательно,

$$\tilde{Q} = Q^{-1}. \tag{6.30}$$

Матрица Q, для которой выполняется равенство (6.30), называется ортогональной. Из (6.29) видно, что для такой матрицы $\det |Q| = \pm 1$.

Пусть теперь задан закон преобразования от одной системы координат к другой, в результате которого величины a и b преобразуются следующим образом:

$$a' = Da; \quad b' = Db. \tag{6.31}$$

Тогда в новой системе координат

$$b' = Q'a' \tag{6.32}$$

имеем

$$Db = Q'Da, \tag{6.33}$$

откуда

$$b = D^{-1}Q'Da. \tag{6.34}$$

Сравнивая это выражение с (6.2), получим

$$D^{-1}Q'D = Q, \tag{6.35}$$

или

$$Q' = DQD^{-1}. \tag{6.36}$$

В этом случае говорят, что матрицы Q' и Q связаны между собой преобразованием подобия D.

Если матрица D коммутирует с матрицей Q, т. е.

$$DQ = QD, \tag{6.37}$$

то матрица Q называется инвариантиой отиосительно преобразования D:

$$Q' = DQD^{-1} = QDD^{-1} = Q\mathcal{I} = Q. \tag{6.38}$$

Например, единичная матрица $\mathcal{I}$ коммутирует с любой матрицей, т. е. всякая матрица инвариантна относительно тождественного преобразования, и, наоборот, единичная матрица $\mathcal{I}$ инвариантна относительно любого преобразования.

Упражнение 6.5. Доказать, что $\mathcal{I}$ — единственная матрица, инвариантная относительно произвольного ортогонального преобразования D. ●

Обозначим след матрицы Q (т. е. Q_i^i) через $\langle Q \rangle$. Существуют и другие обозначения следа, иапример $tr\,Q$ (английское trace), $Sp\,Q$ (немецкое Spur).

Упражнение 6.6. Доказать следующие свойства следов матриц:

а) $\langle \tilde{Q} \rangle = \langle Q \rangle$, (6.39)

б) $\langle AB \rangle = \langle BA \rangle$, (6.40)

в) $\langle ABC \rangle = \langle CAB \rangle$. (6.41)

Упражнение 6.7. Доказать, что при преобразовании подобия (5.36) след матрицы не измеияется, т. е.

$$\langle Q' \rangle = \langle Q \rangle. \; ● \tag{6.42}$$

С помощью матричного исчисления можно построить фундаментальные матрицы G и G^{-1}. Обозначим якобиеву матрицу преобразования (1.10) (т. е. преобразования, которым задается криволинейная система координат) через X, а якобиеву матрицу обратного преобразования (1.14) — через Y. Тогда из (1.19) или (6.7) видно, что

$$G = \tilde{X}X. \tag{6.43}$$

Поэтому определить матрицы G

$$g = (\det|X|)^2. \tag{6.44}$$

Из формулы (6.43) имеем для обратной матрицы G^{-1}

$$G^{-1} = X^{-1}\tilde{X}^{-1} = Y\tilde{Y}. \tag{6.45}$$

Очевидно, что каждая неособеииая матрица третьего порядка определяет некоторое преобразование системы координат в евклидовом пространстве R_3. Каждая ортогональная матрица определяет преобразование одной прямоугольной декартовой системы координат в другую.

Поэтому группу I (см. упр. 3.10) можно описать с помощью ортогональных матриц, а группу I_0 (упр. 3.11) — с помощью ортогональных матриц, определитель которых равен $+1$. Такое описание называется *матричным представлением группы.*

Например, группу инверсии (см. упр. 3.16) можно описать с помощью матриц

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\tag{6.46}$$

группу отражений относительно плоскости $x_1=0$ (см. упр. 3.13) — матрицами

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{6.47}$$

а группу O (см. упр. 3.12) — матрицами

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$S_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$D_3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.\tag{6.48}$$

Описанные представления являются конечными группами G, ибо состоят из конечного числа элементов (группы матриц (6.46), (6.47) из двух, а группа (6.48) — из восьми).

Группу T_3 (см. упр. 3.18) можно описать с помощью бесконечного числа матриц

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.49)$$

То же относится и к группам I и I_0.

Упражнение 6.8. Доказать, что матрицы (6.49) образуют группу (которая называется *непрерывной*).

Упражнение 6.9. Доказать, что группу I_0 (см. упр. 3.11) можно описать непрерывной группой матриц, каждый элемент которой представляется в виде произведения

$$g = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2} \quad (0 \leqslant \varphi_1,\ \varphi_2 \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \pi), \qquad (6.50)$$

где g_{φ_1} и g_{φ_2} описываются формулой (6.49), а

$$g_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (6.51)$$

так что элементы g имеют вид

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \\
g_{12} &= -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
g_{13} &= \sin\varphi_1 \sin\theta, \\
g_{21} &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \sin\varphi_2, \\
g_{22} &= -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
g_{23} &= -\cos\varphi_1 \sin\theta, \\
g_{31} &= \sin\varphi_2 \sin\theta, \\
g_{32} &= \cos\varphi_2 \sin\theta, \\
g_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned} \qquad (6.52)$$

Матрица Q называется *изотропной*, если она инвариантна относительно группы I, и *гиротропной*, если она инвариантна относительно группы I_0 (часто и в этом случае матрицу Q называют изотропной).

Матрица Q называется *ортотропной*, если она инвариантна относительно группы O (см. упр. 3.12), и *трансверсально-изотропной (монотропной)*, если она инвариантна относительно группы преобразований T_3 (см. упр. 3.13).

Характером матричного представления G группы преобразований называется функция $\chi(g)$, определяемая как след матриц g, образующих группу G

$$\chi(g)=\langle g\rangle. \tag{6.53}$$

Упражнение 6.10. Показать, что характер представления (6.46)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.54}$$

Упражнение 6.11. Показать, что характер представления (6.47)

$$\chi(E)=3, \quad \chi(S_1)=1. \tag{6.55}$$

Упражнение 6.12. Показать, что характер представления (6.48)

$$\chi(E)=3,\ \chi(S_1)=\chi(S_2)=\chi(S_3)=1,\ \chi(D_1)= =\chi(D_2)=\chi(D_3)=-1, \quad \chi(C)=-3. \tag{6.56}$$

Упражнение 6.13. Показать, что характер представления (6.49)

$$\chi(g_\varphi)=1+2\cos\varphi. \tag{6.57}$$

Упражнение 6.14. Показать, что характер представления (6.52)

$$\chi(g)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\cos\theta. \tag{6.58}$$

§ 7. Диады

Совокупность двух векторов a и b называется диадой

$$\underset{\sim}{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}. \tag{7.1}$$

Вектор $\vec{a}$ называется первым (или левым) вектором диады, а вектор $\vec{b}$ — вторым (или правым). Символ $\otimes$ между векторами диады называется символом диадного умножения. Совокупность чисел a^ib^j называется компонентами диады D

$$\begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Так как при переходе от одной системы координат к другой контравариантные векторы базиса преобразуются по закону (2.14), то для компонент диады

$$a^{i'}b^{j'} = A^{i'}_i A^{j'}_j a^i b^j. \tag{7.3}$$

Таким образом, компоненты диады $\underset{\sim}{D}$ являются компонентами тензора, а значит, сама диада — тензором второго порядка, правда, специального вида: например, из (7.2) видно, что все строки (и столбцы) компонент этого тензора пропорциональны.

Обозначим скалярное произведение

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\varkappa \tag{7.4}$$

и определим скалярное умножение диады $\underset{\sim}{D}$ слева на вектор $\vec{c}$

$$\vec{c}\cdot\underset{\sim}{D}=\vec{c}\cdot\vec{a}\otimes\vec{b}=\varkappa\vec{b}. \tag{7.5}$$

Таким образом, скалярное умножение некоторого вектора слева на диаду как бы проектирует этот вектор на направление правого вектора диады. Можно видеть, что умножение некоторого вектора на диаду справа проектирует этот вектор на направление левого вектора диады.

Транспонированием диады $\underset{\sim}{D}$ называется операция перестановки векторов диадного произведения

$$\underset{\sim}{\tilde{D}} = \vec{b}\otimes\vec{a}. \tag{7.6}$$

Диада называется симметричной, если

$$\underset{\sim}{\tilde{D}}=\underset{\sim}{D}. \tag{7.7}$$

Упражнение 7.1. Доказать, что векторы, образующие симметричную диаду, являются коллинеарными.

Упражнение 7.2. Доказать, что сумма двух диад образует тензор. ●

Обозначим тензор, образованный суммой двух диад, через

$$\underset{\sim}{D}_2=\vec{a}_{(1)}\otimes\vec{b}_{(1)}+\vec{a}_{(2)}\otimes\vec{b}_{(2)}. \tag{7.8}$$

Умножим скалярно вектор $\vec{c}$ на $\underset{\sim}{D}_2$ слева и обозначим скалярные произведения векторов

$$\vec{c}\cdot\vec{a}_{(1)}=\varkappa_1; \qquad \vec{c}\cdot\vec{a}_{(2)}=\varkappa_2. \tag{7.9}$$

Тогда

$$\vec{c}\cdot\underset{\sim}{D}_2=\varkappa_1\vec{b}_{(1)}+\varkappa_2\vec{b}_{(2)}. \tag{7.10}$$

Таким образом, любой вектор $\vec{c}$ путем скалярного умножения на $\underset{\sim}{D}_2$ преобразуется в некоторую линейную комбинацию векторов $\vec{b}_{(1)}$ и $\vec{b}_{(2)}$. Следовательно, комбинация двух диад (7.8) операцией левого (правого) скалярного умножения отображает векторное пространство на плоскость, параллельную двум векторам $\vec{b}_{(1)}$ и $\vec{b}_{(2)}$ ($\vec{a}_{(1)}$ и $\vec{a}_{(2)}$), если эти векторы не коллинеарны.

Рассмотрим тензор, образованный суммой трех диад, т. е.

$$\underset{\sim}{D}_3 = \vec{a}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{a}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)} + \vec{a}_{(3)} \otimes \vec{b}_{(3)}. \tag{7.11}$$

Если среди векторов $\vec{a}_i$ (или $\vec{b}_i$) существует линейная зависимость, то $\underset{\sim}{D}_3$ сводится к $\underset{\sim}{D}_2$ (7.8) или $\underset{\sim}{D}$ (7.1). Пусть, например,

$$\vec{b}_{(3)} = \varkappa_1 \vec{b}_{(1)} + \varkappa_2 \vec{b}_{(2)}. \tag{7.12}$$

Тогда

$$\underset{\sim}{D}_3 = \vec{a}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{a}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)} + \vec{a}_{(3)} \otimes (\varkappa_1 \vec{b}_{(1)} + \varkappa_2 \vec{b}_{(2)}), \tag{7.13}$$

или в компонентах, используя правило сложения матриц,

$$D_3^{ij} = a^i_{(1)} b^j_{(1)} + a^i_{(2)} b^j_{(2)} + a^i_{(3)} (\varkappa_1 b^j_{(1)} + \varkappa_2 b^j_{(2)}) = \\ = (a^i_{(1)} + \varkappa_1 a^i_{(3)})\, b^j_{(1)} + (a^i_{(2)} + \varkappa_2 a^i_{(3)})\, b^j_{(2)}. \tag{7.14}$$

Отсюда

$$\underset{\sim}{D}_3 = (\vec{a}_{(1)} + \varkappa_1 \vec{a}_{(3)}) \otimes \vec{b}_{(1)} + (\vec{a}_{(2)} + \varkappa_3 \vec{a}_{(3)}) \otimes \vec{b}_{(2)} = \\ = \vec{c}_{(1)} \otimes \vec{b}_{(1)} + \vec{c}_{(2)} \otimes \vec{b}_{(2)}. \tag{7.15}$$

Так как в трехмерном пространстве всякие четыре вектора линейно зависимы, то сумму любого числа диад можно представить в виде (7.11). Поэтому $\underset{\sim}{D}_3$ называется полной диадой.

Полная диада, составленная из векторов основного и взаимного репера

$$\underset{\sim}{E} = \vec{e}^i \otimes \vec{e}_i, \tag{7.16}$$

называется единичной диадой.

Используя правило обращения с компонентами диады как с матрицами, получим другие представления единичной диады:

$$\underset{\sim}{E}=\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i=g^{ij}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_i=\vec{e}_j\otimes\vec{e}^j=g_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \qquad (7.17)$$

Умножая скалярно вектор $\vec{a}$ на диаду $\underset{\sim}{E}$ (7.16) слева, получим разложенне вектора $\vec{a}$ по векторам основного базиса, а умножая $\vec{a}$ скалярно на $\underset{\sim}{E}$ справа, получим разложение вектора $\vec{a}$ по векторам взаимного базиса:

$$\vec{a}\cdot\underset{\sim}{E}=\vec{a}\cdot\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i=a^i\vec{e}_i, \qquad (7.18)$$

$$\underset{\sim}{E}\cdot\vec{a}=\vec{e}^i\otimes\vec{e}_i\cdot\vec{a}=a_i\vec{e}^i. \qquad (7.19)$$

Нетрудно видеть, что всякую диаду можно представить как разложение по девяти диадам, составленным из векторов репера:

$$\underset{\sim}{D}=\vec{a}\otimes\vec{b}=a^i\vec{e}_i\otimes b^j\vec{e}_j=a^ib^j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \qquad (7.20)$$

Поэтому естественно назвать девятку этих диад

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \qquad (7.21)$$

диадным базисом. Таким образом, компоненты диады $\underset{\sim}{D}$ (7.2) являются компонентами (или координатами) именно в базисе $\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$. Можно, разумеется, выбрать вместо (7.21) н другие базисы, например

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}^k. \qquad (7.22)$$

Но базис (7.22) можно выразнть через базис (7.21):

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}^k=g^{kj}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \qquad (7.23)$$

Упражнение 7.3. Показать, что в качестве диадного базиса можно выбрать девятку диад

$$\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \qquad (7.24)$$

При этом каждая диада (7.21) выражается через базис (7.24) следующим образом:

$$\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=g_{ik}g_{jl}\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \qquad (7.25)$$

Упражнение 7.4. Показать, что в прямоугольной системе координат разложение радиус-вектора $\vec{r}$ по векторам единичного репера $\vec{k}_i$ можно представить как скалярное произведение $\vec{r}$ на единичную диаду $\underset{\sim}{E}$:

$$\vec{r}=\vec{r}\cdot\underset{\sim}{E}=\vec{r}\cdot\vec{k}_i\otimes\vec{k}_i. \quad \bullet \tag{7.26}$$

Рассмотрим снова диаду $\underset{\sim}{D}$ (7.1) в виде разложения ее по диадному базису (7.21):

$$\underset{\sim}{D}=a^ib^j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j. \tag{7.27}$$

Используя формулы (7.25) и правила жонглирования индексами, получим

$$\underset{\sim}{D}=a^ib^jg_{ik}g_{jl}\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l=a_kb_l\vec{e}^k\otimes\vec{e}^l. \tag{7.28}$$

Таким образом, диаду $\underset{\sim}{D}$ можно представить ковариантными компонентами, т. е. совокупностью ковариантных компонент векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое представление диады $\underset{\sim}{D}$ дается в диадном базисе (7.24).

Упражнение 7.5. Доказать, что компоненты диады (7.28) являются компонентами тензора.

Упражнение 7.6. Доказать тензорный характер диадных базисов (7.21), (7.22), (7.24).

Упражнение 7.7. Показать, что след диады, представленный в базисе (7.22), равен скалярному произведению векторов, составляющих эту диаду, т. е.

$$\langle D\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}. \quad \bullet \tag{7.29}$$

Мы установили, что диада является тензором второго порядка, хотя и очень специальным. Далее мы увидим, что всякий тензор второго порядка можно представить в виде суммы диад, а следовательно, в виде разложения по диадному базису. Сами диады (тензоры) носят инвариантный характер, т. е. не зависят от выбора системы координат, а изменяются только их компоненты, зависящие от выбора диадного базиса.

Понятие диады можно обобщить, определяя совокупность более двух векторов. Так, выражение

$$\underset{\sim}{\tau}=\vec{a}\otimes\vec{b}\otimes\vec{c} \tag{7.30}$$

называется триадой и вообще совокупность n векторов ($n>2$) — полиадой

$$\underset{\sim}{\Pi}=\vec{a}_{(1)}\otimes\vec{a}_{(2)}\otimes\ldots\otimes\vec{a}_{(n)}. \qquad (7.31)$$

Упражнение 7.8. Доказать, что компоненты полиады $\underset{\sim}{\Pi}$

$$a_{(1)}^{i_1}a_{(2)}^{i_2}\ldots a_{(n)}^{i_n} \qquad (7.32)$$

являются контравариантными компонентами тензора n-го порядка.

ГЛАВА 2

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Линейное (векторное) пространство

Рассмотрим n-мерные пространства. Но прежде всего напомним определение линейного (векторного, аффинного) пространства, известное из курса линейной алгебры. Пусть дано множество $\mathcal{R}$ с элементами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., называемыми векторами, и пусть в $\mathcal{R}$ задана операция сложения, ставящая паре векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ однозначно определенный элемент $\vec{a}+\vec{b}$, и операция умножения на число α из некоторого поля $\mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — поле комплексных чисел, то $\mathcal{R}$ называется комплексным линейным пространством; если $\mathcal{K}$ — поле действительных чисел, то $\mathcal{R}$ — действительное линейное пространство.

Введенные две операции должны удовлетворять следующим аксиомам:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность).

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность).

3°. Существует элемент $\vec{0}$, называемый нулевым, такой, что для любого $\vec{a}\in\mathcal{R}$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

4°. Для каждого вектора $\vec{a}\in\mathcal{R}$ существует обратный $-\vec{a}$, такой, что

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

5°. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

6°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

7°. $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$.

8°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Линейные пространства, определенные аксиомами 1°—8°, могут быть конечномерными, а могут быть и бесконечномерными. Заметим также, что эти аксиомы не используют понятия системы координат.

Упражнение 1.1. Показать, что следующие множества являются линейными пространствами:

а) множество, состоящее из нулевого элемента 0 (нуль-пространство);

б) совокупность всех векторов на плоскости;

в) множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке [0, 1].

Упражнение 1.2. Доказать, что следующие множества не образуют линейного пространства:

а) множество конечного числа элементов;

б) совокупность векторов, лежащих на двух взаимно перпендикулярных прямых на плоскости (см. пример Минакова в предисловии);

в) многочлены степени n. ●

Базисом пространства $\mathscr{R}$ называется последовательность элементов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ этого пространства, если любой элемент $\vec{a}\in\mathscr{R}$ однозначно представим в виде

$$\vec{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\vec{e}_i=\alpha^i\vec{e}_i \quad (i=1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где n — любое натуральное положительное число (или ∞), которое называется размерностью пространства $\mathscr{R}$ (правила суммирования см. на с. 10). Числа $\alpha^j\in\mathscr{K}$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_i$.

Базисом (1.1) обладает всякое конечномерное пространство (среди бесконечномерных пространств счетным базисом обладают сепарабельные пространства).

Подпространством $\mathscr{R}_1$ линейного пространства $\mathscr{R}$ $(\mathscr{R}_1\subseteq\mathscr{R})$ называется совокупность элементов $\vec{a}\in\mathscr{R}$, таких, что из $\vec{a}_1, \vec{a}_2\in\mathscr{R}_1$ следует $\vec{a}_1+\vec{a}_2\in\mathscr{R}_1$, $\alpha\vec{a}\in\mathscr{R}_1$.

Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — два линейных пространства. Говорят, что на множестве $\mathscr{R} \subset \mathscr{M}$ задан оператор $\mathfrak{f}$ со значениями в $\mathscr{N}$ (оператор, действующий из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{N}$), если каждому элементу $\vec{a} \in \mathscr{R}$ поставлен в соответствие элемент $\vec{b} \in \mathscr{N}$

$$\vec{b} = \mathfrak{f}(\vec{a}). \tag{1.2}$$

Множество $\mathscr{R}$ называется областью определения оператора $\mathfrak{f}$, а совокупность всех элементов $\vec{b} \in \mathscr{N}$, представимых в виде (1.2), называется *областью значений оператора* $\mathfrak{f}$ и обозначается через $\mathscr{R}_1(\mathscr{R})$, $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{N}$.

Если множество $\mathscr{R}$ является линейным пространством и для любых $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathscr{R}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathscr{K}$

$$\mathfrak{f}(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) = \alpha_1 \mathfrak{f}(\vec{a}_1) + \alpha \mathfrak{f}(\vec{a}_2), \tag{1.3}$$

то оператор $\mathfrak{f}$ называется линейным и записывается часто в виде

$$\mathfrak{f}(\vec{a}) = \mathfrak{f}\vec{a}. \tag{1.3^1}$$

Если значениями оператора $\mathfrak{f}$ являются числа, то оператор $\mathfrak{f}$ называется *функционалом*, а если при этом его область определения является числовым множеством, то оператор $\mathfrak{f}$ называется *функцией*.

В частности, если $\mathscr{M}$ — множество всевозможных систем из n чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, составляющих пространство $\mathscr{E}_n$, то $\mathfrak{f}$ называется функцией n переменных. Пространство $\mathscr{E}_n$ называется n-мерным *арифметическим пространством.*

Упражнение 1.3. Доказать, что для всякого линейного оператора $\mathfrak{f}$, действующего из $\mathscr{R}$ в $\mathscr{R}_1$

$$\mathfrak{f}(\vec{0}) = \vec{0}. \quad \bullet \tag{1.4}$$

Всякому линейному оператору, действующему из n-мерного векторного пространства $\mathscr{R}$ в себя в некотором базисе

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \tag{1.5}$$

пространства $\mathscr{R}$, можно поставить в соответствие матрицу. В самом деле, пусть линейный оператор $\mathfrak{f}$ переводит каждый из векторов базиса (1.5) в некоторый вектор

$$\vec{b}_i = \mathfrak{f}(\vec{e}_i). \tag{1.6}$$

Так как каждый вектор $\vec{b}_i \in \mathscr{R}$, то он однозначно разлагается по векторам базиса $\vec{e}_i$ (1.5):

$$\check{f}(\vec{e}_i) \equiv \vec{b}_i = B_i{}^j \vec{e}_j. \qquad (1.7)$$

Следовательно, для любого вектора $\vec{a} \in \mathscr{R}$

$$\vec{b} = \check{f}(\vec{a}) = \check{f}(a^i \vec{e}_i) = a^i \check{f}(\vec{e}_i) = a^i B_i{}^j \vec{e}_j, \qquad (1.8)$$

откуда для вектора $\vec{b} = b^j \vec{e}_j$

$$b^j = B_i{}^j a^i. \qquad (1.9)$$

Значит, оператор $\check{f}$ в базисе (1.5) представляется в виде матрицы $B_i{}^j$ (1.9).

Пусть даны множества $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ (совпадающие или нет). Множество упорядоченных пар элементов (т. е. взятых в определенном порядке), из которых первый принадлежит $\mathscr{M}$, а второй — $\mathscr{N}$, называется *декартовым произведением множеств* $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ и обозначается $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$. Назовем *отношением эквивалентности* между элементами одного и того же множества $\mathscr{M}$ отношение $\sim \subset \mathscr{M} \times \mathscr{M}$, обладающее следующими свойствами для любых $a, b, c \in \mathscr{M}$:

1) $a \sim a$ (рефлексивность);

2) $a \sim b = b \sim a$ (симметричность);

3) из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует $a \sim c$ (транзитивность).

Пусть R — векторное пространство над полем чисел $\mathscr{K}$. Введем в нем отношение эквивалентности $\sim$, обладающее следующими свойствами. Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2 \in \mathscr{R}$ эквивалентны, т. е. $a_1 \sim a_2$, то для любого $\vec{b} \in \mathscr{R}$ и числа $\alpha \in \mathscr{K}$

$$\vec{a}_1 + \vec{b} \sim \vec{a}_2 + \vec{b}, \qquad (1.10)$$

$$\alpha \vec{a}_1 \sim \alpha \vec{a}_2. \qquad (1.11)$$

Множество всех элементов, эквивалентных вектору $\vec{a}$, образует класс $\{\vec{a}\}$, который обозначим через τ_a. Множество всех таких классов обозначим через τ и назовем класс τ_{a+b} (т. е. множество всех векторов, эквивалентных вектору $\vec{a} + \vec{b}$) суммой классов τ_a и τ_b, а класс $\tau_{\alpha a}$ (т. е. множество всех векторов, эквивалентных вектору $\alpha \vec{a}$) — произведением класса τ_a на число α.

Упражнение 1.4. Доказать, что множество τ является векторным пространством.

Пространство τ называется фактор-пространством пространства $\mathscr{R}$ по отношению эквивалентности $\sim$.

Упражнение 1.5. Пусть $\mathscr{L}$ является подпространством векторного пространства $\mathscr{R}$. Говорят, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сравнимы по модулю $\mathscr{L}$ и пишут

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \pmod{\mathscr{L}}, \tag{1.12}$$

если $\vec{a} - \vec{b} \in \mathscr{L}$. Доказать, что сравнимость по модулю $\mathscr{L}$ является отношением эквивалентности и пространство $\mathscr{R}$ распадается на классы векторов, сравнимых по модулю $\mathscr{L}$.

Упражнение 1.6. Доказать, что если

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \pmod{\mathscr{L}}, \quad \vec{a}_1 \equiv \vec{b}_1 \pmod{\mathscr{L}}, \tag{1.13}$$

то

$$\vec{a} + \vec{a}_1 \equiv (\vec{b} + \vec{b}_1) \pmod{\mathscr{L}}; \quad \alpha\vec{a} \equiv \alpha\vec{b} \pmod{\mathscr{L}}. \tag{1.14}$$

Упражнение 1.7. Доказать, что фактор-пространство τ пространства $\mathscr{R}$ по модулю $\mathscr{L}$, где $\mathscr{L} = 0$ (т. е. $\mathscr{L}$ является нуль-пространством), совпадает с пространством $\mathscr{R}$, а фактор-пространство τ пространства $\mathscr{R}$ по модулю $\mathscr{R}$ является нуль-пространством. ●

Векторное пространство $\mathscr{R}$ называется *алгеброй*, если в нем определена операция умножения векторов $\perp$, дистрибутивная и перестановочная с операцией умножения на число:

$$\vec{a} \perp (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \perp \vec{b}_1 + \vec{a} \perp \vec{b}_2, \tag{1.15}$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \perp \vec{b} = \vec{a}_1 \perp \vec{b} + \vec{a}_2 \perp \vec{b}, \tag{1.16}$$

$$\vec{a} \perp (\alpha\vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \perp \vec{b} = \alpha(\vec{a} \perp \vec{b}). \tag{1.17}$$

Если умножение подчиняется ассоциативному закону

$$\vec{a} \perp (\vec{b} \perp \vec{c}) = (\vec{a} \perp \vec{b}) \perp \vec{c}, \tag{1.18}$$

то алгебра называется *ассоциативной*.

Упражнение 1.8. Доказать, что трехмерное векторное евклидово пространство с введенной операцией векторного умножения является алгеброй, причем неассоциативной. ●

Итак, если множество $\mathscr{M}$ наделяется некоторой *структурой*, т. е. операциями иад элементами самого множества (*внутренние операции*) или над элементами множества $\mathscr{M}$ и некоторого другого множества $\mathscr{N}$ (*внешние операции*), а также определенными правилами, которым подчиняются эти операции, то множество $\mathscr{M}$ превращается в некоторое *пространство*.

Бинарной внутренней операцией называется закон (обозначим его символом $\perp$), дающий возможность по произвольным элементам $a\in\mathscr{M}$, $b\in\mathscr{M}$, взятым в определенном порядке, однозиачно определить их произведение $c\in\mathscr{M}$

$$a\perp b=c. \tag{1.19}$$

Множество $\mathscr{M}$ с заданной на нем бинарной операцией $\perp$ называется *группоидом*. Другими словами, структура группоида состоит во введении в множестве $\mathscr{M}$ внутренней операции (1.19). Структура *полугруппы* заключается во введении в множестве $\mathscr{M}$ ассоциативной внутренней бинарной операции (1.19).

Наряду с бинарной операцией можно ввести *нульарную*, которая ставит в соответствие каждому элементу $a\in\mathscr{M}$ один и тот же элемент e из $\mathscr{M}$ (называемый единичным элементом)

$$a^0=e, \tag{1.20}$$

обладающий таким свойством, что для произвольного $a\in\mathscr{M}$

$$a\perp e=e\perp a=a. \tag{1.21}$$

Полугруппа с единичным элементом называется *моноидом*.

Унарная внутренняя операция ставит в соответствие каждому элементу $a\in\mathscr{M}$ так называемый обратный элемент a^{-1}, такой, что

$$a^{-1}\perp a=a\perp a^{-1}=e. \tag{1.22}$$

Моноид с унарной операцией, обладающей свойством (1.22), называется *группой*. (В § 3 предыдущей главы структуру группы мы ввели несколько иначе.)

Бинарной операцией $\perp$, обладающей свойствами (1.15)—(1.17), мы ввели *структуру алгебры*.

Для введения *структуры векторного пространства* нам понадобилось наряду с внутренней операцией (сложением векторов) ввести еще внешнюю операцию (умножения вектора на число), причем эти операцни обладают свойствами 1°—8°.

§ 2. Сопряженные пространства

Пусть $\mathscr{R}$ — векторное пространство. Рассмотрим множество всех линейных функционалов, заданных на $\mathscr{R}$. Часто эти функционалы называют *линейными формами* на $\mathscr{R}$. Выберем в пространстве $\mathscr{R}$ произвольный базис $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Каждый вектор $\vec{a} \in \mathscr{R}$ можно представить в виде (1.1)

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i, \tag{2.1}$$

где a^i — некоторые числа ($a^i \in \mathscr{K}$). Тогда в силу линейности каждого функционала f (1.3) имеем

$$f(\vec{a}) = f(a^i \vec{e}_i) = a^i f(\vec{e}_i). \tag{2.2}$$

Обозначим числа, являющиеся значениями функционала f на векторах базиса $\vec{e}_i$, через

$$x_i = f(\vec{e}_i). \tag{2.3}$$

Разумеется, эти числа зависят от выбора базиса пространства $\mathscr{R}$.

Упражнение 2.1. Показать, что если в $\mathscr{R}$ задан другой базис $\vec{e}_{i'}$, причем

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i, \tag{2.4}$$

то значения линейного функциоиала f на новых базисных векторах выражаются через его значения на старых базисных векторах по тем же формулам

$$x_{i'} = A^i_{i'} x_i. \; \bullet \tag{2.5}$$

Итак, всякий линейный функционал f, заданный на $\mathscr{R}$, может быть представлен в базисе $\{\vec{e}_i\}$ по формуле

$$f(\vec{a}) = x_i a^i, \tag{2.6}$$

где a^i — компоненты вектора $\vec{a}$ в этом базисе, а x_i — некоторые числа, определяющие функционал f в этом же базисе. Следовательно, правая часть (2.6) представляет собой значение функционала f на векторе a.

Назовем суммой двух линейных функционалов f^1

и f^2 функционал, ставящий в соответствие каждому вектору $\vec{a}$ число $f^1(\vec{a})+f^2(\vec{a})$, а произведением линейного функционала f на число α — функционал, ставящий в соответствие каждому вектору $\vec{a}$ число $\alpha f(\vec{a})$.

Упражнение 2.2. Доказать, что множество $\mathfrak{R}^*$ всех линейных функционалов, определенных на $\mathfrak{R}$, образует векторное пространство. ●

Это пространство $\mathfrak{R}^*$ называется *сопряженным* (или дуальным) к пространству $\mathfrak{R}$.

Упражнение 2.3. Доказать, что если пространство $\mathfrak{R}$ является n-мерным, то пространство $\mathfrak{R}^*$ тоже n-мерное. ●

Будем обозначать элементы сопряженного пространства $\mathfrak{R}^*$ через $\overleftarrow{a}$, $\overleftarrow{b}$, ... Эти векторы часто называют ковариантными, а векторы пространства $\mathfrak{R}$ — контравариантными. Само пространство $\mathfrak{R}$ можно назвать контравариантным векторным пространством, а сопряженное к нему пространство $\mathfrak{R}^*$ — ковариантным векторным пространством. Если в пространстве $\mathfrak{R}^*$ выбрать какой-либо базис $\overleftarrow{e}^i$ $(i=1, \ldots, n)$, то всякий ковариантный вектор $\overleftarrow{a}$ может быть однозначно представлен в виде

$$\overleftarrow{a}=a_i\overleftarrow{e}^i. \tag{2.7}$$

Однако мы сейчас найдем специальный базис пространства $\mathfrak{R}^*$, связанный определенным образом с выбранным базисом пространства $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим всевозможные наборы из n-линейных функционалов f^i $(i=1, \ldots, n)$ и обозначим значения, принимаемые этими функционалами на векторном базисе пространства $\mathfrak{R}$, через

$$b^i_j=f^i(\vec{e}_j). \tag{2.8}$$

Очевидно, что если определитель матрицы $\|b^i_j\|$ отличен от нуля, то в качестве векторов базиса пространства $\mathfrak{R}^*$ можно принять векторы $e^i=\{b^i{}_1, b^i_2, \ldots, b^i_n\}$. Рассмотрим теперь такой набор линейных функционалов f^i, для которых $b^i_j=\delta^i_j$, т. е.

$$f^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j. \tag{2.9}$$

Назовем эти функционалы *базисными*. Базис пространства $\mathcal{R}^*$ $\overleftarrow{e}^1=\{1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, \overleftarrow{e}^n=\{0, 0, \ldots, 1\}$, определенный базисными функционалами, назовем взаимным к базису $\{\vec{e}_i\}$ пространства $\mathcal{R}$.

Базисные функционалы ставят в соответствие каждому вектору $\vec{a}\in\mathcal{R}$ его соответствующую координату. В самом деле,

$$f^j(\vec{a}) = f^j(a^i\vec{e}_i) = a^i f^j(\vec{e}_i) = a^i\delta_i{}^j = a^j. \tag{2.10}$$

Каждому линейному функционалу f соответствует некоторый вектор $\overleftarrow{x}$. В самом деле, значения этого функционала x_i на векторах базиса $\vec{e}_i$

$$x_i = f(\vec{e}_i) \tag{2.11}$$

определяют единственный вектор $\overleftarrow{x}$, являясь его компонентами разложения по векторам взаимного базиса $\overleftarrow{e}^i$:

$$\overleftarrow{x} = x_i\overleftarrow{e}^i. \tag{2.12}$$

Покажем, что каждому линейному функционалу φ на $\mathcal{R}^*$ соответствует линейный функционал f на $\mathcal{R}$. В самом деле, пусть $\overleftarrow{x}\in\mathcal{R}^*$ и φ — некоторый линейный функционал на $\mathcal{R}^*$:

$$\varphi(\overleftarrow{x}) = \varphi(x_i\overleftarrow{e}^i) = x_i\varphi(\overleftarrow{e}^i) = x_i a^i. \tag{2.13}$$

Определим вектор $\vec{a}\in\mathcal{R}$, компонентами которого в базисе $\vec{e}_i$ являются числа a^i. Тогда из (2.6) и (2.13) видим, что

$$\varphi(\overleftarrow{x}) = f(\vec{a}). \tag{2.14}$$

Если теперь выберем в пространстве $\mathcal{R}^*$ произвольный базис $\overleftarrow{e}^i$ и рассмотрим n линейных функционалов φ_i, определениых на $\mathcal{R}^*$, таких, что

$$\varphi_i(\overleftarrow{e}^j) = \delta_i{}^j, \tag{2.15}$$

то видим, что базису $\vec{e}^i$ в простраистве $\mathcal{R}^*$ соответствует $\vec{e}_i$ в $\mathscr{R}$. Поэтому базисы $\vec{e}_i$ и $\vec{e}^i$ называются взаимными по отношению друг к другу, или *каноническими*, а пространства $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ — *взаимно сопряженными.* Таким образом, всякий линейный функционал в пространствах $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ можно представить в виде (2.6) и (2.13), где a^i — компоненты вектора $\vec{a}\in\mathscr{R}$, а x_i — компоненты вектора $\overleftarrow{x}\in\mathscr{R}^*$ во взаимных базисах.

Упражнение 2.4. Доказать, что если $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\overleftarrow{e}^j\}$ — произвольные базисы в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$, то линейные функционалы f и φ представляются в виде

$$f(\vec{a})=b_j{}^i a^j x_i;\quad \varphi(\overleftarrow{x})=c_i{}^j x_j a^i, \tag{2.16}$$

где величины $b_j{}^i$ определены формулами (2.8), а

$$c_i{}^j=\varphi_i(\overleftarrow{e}^j). \quad \bullet$$

Значением вектора $\overleftarrow{x}\in\mathscr{R}^*$ на векторе $\vec{a}\in\mathscr{R}$ называется значение линейного функционала f, соответствующего вектору $\overleftarrow{x}$, на этом векторе $\vec{a}$ (и обозначается $\overleftarrow{x}(\vec{a})$). Нетрудно видеть, что если выбраны канонические базисы, то

$$\overleftarrow{x}(\vec{a})=x_i a^i. \tag{2.17}$$

Упражнение 2.5. Пусть в $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}^*$ выбраны канонические базисы. Вычислить значение вектора $\overleftarrow{x}=(1, 1, \ldots, 1)$ на векторе $\vec{a}=(1, 1, \ldots, 1)$.

Упражнение 2.6. Пусть дано множество линейных операторов $\breve{A}$, действующих из одного векторного пространства $\mathscr{R}_1$ в другое $\mathscr{R}_2$. Зафиксируем некоторый линейный функционал f_2, которому соответствуют векторы $\overleftarrow{x}_2\in\mathscr{R}_2{}^*$. Очевидно, что можно рассмотреть линейный функционал f_1 (которому соответствуют векторы $\overleftarrow{x}_1\in\mathscr{R}_1{}^*$), такой, что

$$f_2(\breve{A}\vec{a}_1)=f_1(\vec{a}_1). \tag{2.18}$$

Оператором $\breve{A}^*$, *сопряженным* к оператору $\breve{A}$, называется оператор, определяющий отображение $\mathscr{R}_2{}^*$ в $\mathscr{R}_1{}^*$ по закону

$$\overleftarrow{x}_1=\breve{A}^*\overleftarrow{x}_2. \tag{2.19}$$

Пусть имеются два линейных оператора $\tilde{A}^*$ (из $\mathcal{R}_1$ в $\mathcal{R}_2$) и $\tilde{B}^*$ (из $\mathcal{R}_2$ в $\mathcal{R}_3$). Доказать, что

$$(\tilde{B}\tilde{A})^* = \tilde{A}^*\tilde{B}^*. \tag{2.20}$$

Упражнение 2.7. Пусть в некотором базисе $\vec{e}_i$ пространства $\mathcal{R}$ линейный оператор $\tilde{A}$ представляется матрицей $A^i_{\cdot j}$. Доказать, что сопряженный оператор $\tilde{A}^*$ в этом же базисе представляется матрицей $A_j^{\cdot i}$. ●

Рассмотрим теперь евклидово пространство, т. е. действительное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение, — каждой паре векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{R}$ поставлено в соответствие число, которое обозначается через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$, при этом удовлетворяются аксиомы:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$,

2°. $(\vec{a}\alpha, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$,

3°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$,

4°. $(\vec{a}, \vec{a}) \equiv \|\vec{a}\|^2 \geqslant 0$,

причем длина вектора $\vec{a}$ равна нулю ($\|\vec{a}\| = 0$) только при $\vec{a} = \vec{0}$.

Упражнение 2.8. Доказать неравенство Коши—Буняковского

$$(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|. \tag{2.21}$$

Упражнение 2.9. Доказать неравенство треугольника

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|. \quad ● \tag{2.22}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0. \tag{2.23}$$

Если $\{\vec{e}_i\}$ — базис пространства $\mathcal{R}$, то матрица g_{ij}, составленная из попарных скалярных произведений векторов базиса

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \equiv (\vec{e}_i, \vec{e}_j), \tag{2.24}$$

называется *фундаментальной*. В курсе линейной алгебры доказывается, что во всяком n-мерном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы, т. е. базисы, для которых

$$g_{ij}=\delta_{ij}\equiv\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j,\\ 1, & \text{если } i=j.\end{cases} \tag{2.25}$$

Теорема Рисса. *Всякий линейный функционал f в n-мерном евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$ можно представить в виде скалярного произведения*

$$f(\vec{a})=(\vec{b}, \vec{a}), \tag{2.26}$$

где $\vec{b}$ — фиксированный вектор $\in\mathfrak{R}$, однозначно определяемый функционалом f. И обратно, каждый вектор $\vec{b}\in\mathfrak{R}$ определяет линейный функционал f.

В самом деле, выберем в $\mathfrak{R}$ ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и рассмотрим вектор b, имеющий компоненты в этом базисе $x^i=x_i$ (в ортонормированной системе координат ковариантиые и контравариантные компоненты совпадают). Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b})=a^i\vec{e}_i x^j\vec{e}_j=a^i x_i. \tag{2.27}$$

Сравнивая (2.27) с (2.6), заключаем, что в $\mathfrak{R}$ найдется такой вектор $\vec{b}$, что выполняется равенство (2.26). Для доказательства единственности этого представления предположим противное, т. е. существуют b_1 и $\vec{b}_2$, такие, что

$$f(\vec{a})=(\vec{a}, \vec{b}_1);\ f(\vec{a})=(\vec{a}, \vec{b}_2). \tag{2.28}$$

Следовательно, для любого $\vec{a}$

$$(\vec{a}, \vec{b}_1-\vec{b}_2)=0, \tag{2.29}$$

откуда

$$\vec{b}_1=\vec{b}_2. \tag{2.30}$$

Теорема доказана.

Умножим обе части равенства (2.9) на g_{ki} и просуммируем по i от 1 до n:

$$g_{ki}f^i(\vec{e}_j)=g_{kj}. \tag{2.31}$$

Сравнивая это выражение с (2.24), имеем

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_j)=g_{ki}f^i(\vec{e}_j). \tag{2.32}$$

Применяя к (2.32) теорему Рисса и используя определение взаимного базиса $\overleftarrow{e}^i$, получим

$$\vec{e}_k = g_{ki}\overleftarrow{e}^i. \qquad (2.33)$$

Следовательно, в евклидовом пространстве исчезает разница между взаимными базисами $\vec{e}_i$ и $\overleftarrow{e}^i$, а значит, пространства R и R^* можно считать тождественными.

Упражиение 2.10. Показать, что в евклидовом пространстве

$$\overleftarrow{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j, \qquad (2.34)$$

где g^{ij} — матрица, обратная к фундаментальной.

Упражнение 2.11. Доказать, что

$$g^{ij} = (\overleftarrow{e}^i, \overleftarrow{e}^j). \qquad (2.35)$$

Упражнение 2.12. Пусть в пространство $\mathscr{R}$ выбран базис $\vec{e}_i$ и дан закон перехода к новому базису $\vec{e}_{i'}$

$$\vec{e}_{i'} = B_{i'}^{\cdot i}\,\vec{e}_i. \qquad (2.36)$$

Доказать, что в этом случае взаимный базис изменяется по закону

$$\overleftarrow{e}^{i'} = A_{\cdot i}^{i'}\,\overleftarrow{e}^i, \qquad (2.37)$$

где матрица A (2.37) является транспонированной к матрице, обратной к матрице B (2.36).

§ 3. Миоготочечные тензоры

Пусть $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{R}_m$ — m векторных пространств над полем $\mathscr{K}$. Рассмотрим множество элементов их декартова пронзведення $\mathscr{R}_1 \times \mathscr{R}_2 \times \ldots \times \mathscr{R}_m$, т. е. множество упорядоченных наборов m элементов $\vec{a}_i \in \mathscr{R}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ вида

$$\underset{\sim}{a} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m). \qquad (3.1)$$

Образуем векторное пространство $\mathscr{A}$, базисом которого являются наборы (3.1), т. е. элементы пространства $\mathscr{A}$ будут формальными линейными комбинациями элементов вида (3.1):

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underset{\sim}{a}_{(i)}, \quad \alpha_i \in \mathscr{K}. \qquad (3.2)$$

Будем говорить, что два элемента $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B} \in \mathscr{A}$ связаны *отношением* $\sim$, если существуют выражения элементов $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$, сводящиеся друг к другу при помощи следующих преобразований.

1°. Если $\vec{c}_i = \vec{a}_i + \vec{b}_i$; $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i \in \mathscr{R}_i$, то

$$\underset{\sim}{C} \equiv (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_i, \ldots, \vec{c}_m) \sim$$
$$\sim (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{c}_m) +$$
$$+ (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{c}_m).$$

2°. Если $\vec{b}_i = \alpha \vec{a}_i$, $\vec{a}_i, \vec{b}_i \in \mathscr{R}_i$, $\alpha \in \mathscr{K}$, то

$$\underset{\sim}{B} \equiv (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{b}_m) \sim \alpha (\vec{b}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{b}_m).$$

Другими словами, $\underset{\sim}{A} \sim \underset{\sim}{B}$ тогда и только тогда, когда существует конечная последовательность элементов пространства $\mathscr{A}$, в которой первым элементом является $\underset{\sim}{A}$, а последним — $\underset{\sim}{B}$, причем любые два соседних элемента связаны между собой введенным отношением $\sim$.

Упражнение 3.1. Доказать, что введенное условиями 1° и 2° отношение является отношением эквивалентности (т. е. показать, что выполняются аксиомы 1, 2, 3, введенные в § 1).

Упражнение 3.2. Доказать, что размерность векторного пространства $\mathscr{A}$ равна $n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_m$, где n_i — размерность пространства $\mathscr{R}_i$. ●

Построим фактор-пространство пространства A (см. § 1) и дадим следующее определение:

Тензорным произведением $R_1 \otimes \ldots \otimes R_m$ *векторных пространств* $\mathscr{R}_1, \ldots, \mathscr{R}_m$ *называется фактор-пространство* τ_m *пространства* $\mathscr{A}$ *по отношению введенной* (п. 1° *и* 2°) *эквивалентности.*

Элементы пространства τ_m называются *тензорами* m-го порядка (m-точечными).

Пусть $\underset{r}{\vec{e}_i}$ — базис пространства $\mathscr{R}_j$. Рассмотрим полиады вида

$$\underset{\sim}{E} = \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \underset{2}{\vec{e}_{i_2}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что эти полиады являются тензорами m-го порядка, так как они принадлежат пространству τ_m.

Упражнение 3.3. Доказать, что тензоры (3.3) линейно независимы. ●

Таким образом, тензоры (3.3) можно принять за базис пространства τ_m (будем говорить, что пространство τ_m «порождается» базисом (3.3)). Тогда всякий тензор $\underset{\sim}{T} \in \tau_m$ может быть представлен в базисе (3.3) следующим образом

$$\underset{\sim}{T} = t^{i_1 i_2 \dots i_m} \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \underset{2}{\vec{e}_{i_2}} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}. \tag{3.4}$$

Коэффициенты $t^{i_1 i_2 \dots i_m}$ называются компонентами тензора $\underset{\sim}{T}$ (m-точечного) относительно базиса (3.3). Если пространство τ_m является *тензорным произведением,* образованным из m экземпляров одного векторного пространства $\mathscr{R}$: $\mathscr{R} \otimes \dots \otimes \mathscr{R}$, элементами пространства τ_m являются одноточечные тензоры (в гл. 1 рассматривались только одноточечные тензоры).

Пусть даны векторные пространства $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \dots, \mathscr{R}_m$ соответственно размерности $n_1, n_2, \dots, n_m$. Рассмотрим их сопряженные пространства $\mathscr{R}_1^*, \mathscr{R}_2^*, \dots, \mathscr{R}_m^*$ и построим тензорное произведение

$$\Gamma_m = \mathscr{R}_1^* \otimes \mathscr{R}_2^* \otimes \dots \otimes \mathscr{R}_m^*. \tag{3.5}$$

Выберем в каждом из пространств $\mathscr{R}_j^*$ базис $\underset{j}{\overleftarrow{e}^i}$, взаимный к базису $\underset{j}{\vec{e}_i}$ пространства $\mathscr{R}_j$, и рассмотрим полиады вида

$$\underset{\sim}{E}^* = \underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}} \otimes \underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \tag{3.6}$$

Тогда каждый элемент $\underset{\sim}{P}$ пространства Γ_m можно представить в виде

$$\underset{\sim}{P} = p_{i_1 \dots i_m} \underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}} \otimes \underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \tag{3.7}$$

Коэффициенты $p_{i_1 \dots i_m}$ являются компонентами тензора $\underset{\sim}{P}$ (m-точечного) относительно базиса (3.6).

Пусть в каждом пространстве $\mathscr{R}_\alpha$ выбран новый базис $\underset{\alpha}{\vec{e}_{i'}}$, причем (см. упр. 2.12)

$$\underset{\alpha}{\vec{e}_{i'}} = \underset{\alpha}{B}{}_{i'}^{i} \underset{\alpha}{\vec{e}_i}; \quad \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i'}} = \underset{\alpha}{A}{}^{i'}{}_{i} \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i}}, \tag{3.8}$$

где

$$\underset{\alpha}{B}_{i'}{}^{i}\underset{\alpha}{A}^{i'}{}_{j}=\delta^{i}{}_{j};\quad \underset{\alpha}{A}^{i'}{}_{i}\underset{\alpha}{B}_{j'}{}^{i}=\underset{\alpha}{\delta}^{i'}{}_{j'}. \tag{3.9}$$

Тогда из (3.4) и (3.7) видно, что

$$t^{i'_1 i'_2\ldots i'_m}=\underset{1}{A}{}^{i'_1}_{i_1}\underset{2}{A}{}^{i'_2}_{i_2}\ldots\underset{m}{A}{}^{i'_m}_{i_m}t^{i_1 i_2\ldots i_m} \tag{3.10}$$

$$p_{i'_1 i'_2\ldots i'_m}=\underset{1}{B}{}^{i_1}_{i'_1}\underset{2}{B}{}^{i_2}_{i'_2}\ldots\underset{m}{B}{}^{i_m}_{i'_m}p_{i_1 i_2\ldots i_m}, \tag{3.11}$$

т. е. компоненты тензора $\underset{\sim}{T}$ преобразуются по каждому индексу как контравариантные компоненты вектора в каждом пространстве $\mathcal{R}_\alpha$, а компоненты тензора $\underset{\sim}{P}$ — как ковариантные компоненты вектора в каждом пространстве $\mathcal{R}_\alpha^*$. Поэтому тензоры $\underset{\sim}{T}$ иногда называются контравариантными, а тензоры $\underset{\sim}{P}$ — ковариантными тензорами m-го порядка. Если тензоры $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ являются одноточечными (все пространства $\mathcal{R}_\alpha$, $\alpha=1,\ldots,m$ совпадают), то компоненты тензора $\underset{\sim}{T}$ называются контравариантными, компоненты тензора $\underset{\sim}{P}$ — ковариантными.

Можно рассмотреть смешанные тензоры, т. е. тензоры, являющиеся элементами тензорного произведения пространств, часть из которых является основными векторными пространствами $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_l$, а другая часть — сопряженными к соответствующим векторным пространствам $\mathcal{R}^*_{l+1}, \ldots, \mathcal{R}^*_m$.

В качестве базисных тензоров таких пространств можно выбрать полиады вида

$$\underset{\sim}{E}=\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\underset{l}{\vec{e}}_{i_l}\otimes\underset{l+1}{\overleftarrow{e}}{}^{i_{l+1}}\otimes\ldots\otimes\underset{m}{\overleftarrow{e}}{}^{i_m}. \tag{3.12}$$

Очевидно, что среди одноточечных тензоров m-го порядка при выбранных взаимных базисах $\vec{e}_i$ и $\overleftarrow{e}^i$ существует 2^m различных наборов базисных полиад.

Упражнение 3.4. Подсчитать, сколько будет различных наборов таких полиад среди многоточечных тензоров m-го порядка. (*Ответ:* $m!2^m$) ●

Определим алгебраические операции, производимые над тензорами. Прежде всего заметим, что самим определением тензоров как элементов некоего векторного пространства вводятся операции сложения тензоров и умножения их на число.

1. Произведение тензоров. Если $\underset{\sim}{T}$ — элемент тензорного произведения l пространств $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_l$, а $\underset{\sim}{P}$ — элемент тензорного произведения $(m-l)$ пространств $\mathcal{R}_{l+1}, \ldots, \mathcal{R}_m$, то произведение

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{P} \tag{3.13}$$

есть тензор $\underset{\sim}{S}$, принадлежащий тензорному произведению m пространств $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_m$. Таким образом, если

$$\underset{\sim}{T} = t^{i_1 \ldots i_l} \underset{1}{\vec{e}}_{i_1} \otimes \ldots \underset{l}{\vec{e}}_{i_l}, \tag{3.14}$$

$$\underset{\sim}{P} = p^{i_{l+1} \ldots i_m} \underset{l+1}{\vec{e}}_{i_{l+1}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}}_{i_m}, \tag{3.15}$$

то

$$\underset{\sim}{S} = s^{i_1 \ldots i_m} \underset{1}{\vec{e}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}}_{i_m}. \tag{3.16}$$

Упражнение 3.5. Доказать, что произведение двух тензоров дистрибутивно относительно сложения и ассоциативно, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{T} \otimes (\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{S}) &= \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{S} \\ (\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{P}) \otimes \underset{\sim}{S} &= \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{P} \otimes \underset{\sim}{S} \end{aligned}\right\}, \tag{3.17}$$

$$(\underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{P}) \otimes \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{T} \otimes (\underset{\sim}{P} \otimes \underset{\sim}{S}). \quad \bullet \tag{3.18}$$

Пользуясь свойствами (3.17), (3.18), можно определить произведение k тензоров

$$\underset{\sim}{T}_1 \otimes \underset{\sim}{T}_2 \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{T}_k. \tag{3.19}$$

В частности, полиада (3.3) есть не что иное, как тензорное произведение векторов $\underset{1}{\vec{e}}_{i_1}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{i_m}$. Это и позволяет записывать любой тензор m-го порядка в виде (3.4).

2. Подстановка индексов. Операция, согласно которой каждому тензору m-го порядка

$$\underset{\sim}{T} \in \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_k \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_l \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_m$$

$$(1 \leqslant k < l \leqslant m),$$

$$\underset{\sim}{T} = t^{i_1 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_m} \underset{1}{\vec{e}}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \underset{k}{\vec{e}}_{i_k} \otimes \ldots \otimes \underset{l}{\vec{e}}_{i_l} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}}_{i_m} \tag{3.20}$$

ставится в соответствие тензор m-го порядка

$$\underset{\sim}{P} \in \mathcal{R}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_l \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_k \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}_m,$$

$$\underset{\sim}{P} = t^{i_1 \ldots i_l \ldots i_k \ldots i_m} \underset{1}{\vec{e}_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \underset{l}{\vec{e}_{i_l}} \otimes \ldots \otimes \underset{k}{\vec{e}_{i_k}} \otimes \ldots \otimes \underset{m}{\vec{e}_{i_m}}, \tag{3.21}$$

называется *операцией подстановки индексов* $\{k, l\}$. Если пространства $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_l$ имеют одну размерность и при операции подстановки индексов $\{k, l\}$ $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{P}$, то тензор $\underset{\sim}{T}$ называется симметричным по индексам k и l; если же при операции подстановки индексов $\{k, l\}$ $\underset{\sim}{T} = -\underset{\sim}{P}$, то тензор $\underset{\sim}{T}$ называется антисимметричным (или кососимметричным) по индексам k и l.

Упражнение 3.6. Пусть векторные пространства $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_l$ имеют одинаковую размерность ($n_k = n_l$). Доказать, что всякому тензору m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ (3.20) может быть поставлен в соответствие тензор m-го порядка $\underset{\sim}{S}$, симметричный по индексам $\{k, l\}$. Построить этот тензор.

Упражнение 3.7. Доказать, что при условиях, высказанных в предыдущем упражнении, каждому $\underset{\sim}{T}$ может быть поставлен в соответствие тензор m-го порядка $\underset{\sim}{A}$, антисимметричный по индексам $\{k, l\}$. Построить этот тензор. ●

Пусть дан одноточечный тензор m-го порядка $\underset{\sim}{T}$, т. е. определенный в пространстве $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \otimes \ldots \otimes \mathcal{R}$. Говорят, что тензор $\underset{\sim}{S}$ получен операцией симметрирования, например, по первым l индексам ($l \leqslant m$), если в базисе

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_m} \tag{3.22}$$

его компоненты имеют вид

$$s^{i_1 \ldots i_l \ldots i_m} = t^{(i_1 \ldots i_l) i_{l+1} \ldots i_m} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \ldots, i_l} t^{i_1 \ldots i_l \ldots i_m}, \tag{3.23}$$

где сумма распространяется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_l$. Аналогично определяется операция альтернирования, например, по первым l индексам (см. § 3 гл. 1). Компоненты тензора $\underset{\sim}{A}$, полученного этой операцией, имеют в базисе (3.22) вид

$$a^{i_1 \dots i_l \dots i_m} = t^{[i_1 \dots i_l] i_{l+1} \dots i_n} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{i_1, \dots, i_l} \pm t^{i_1 \dots i_l \dots i_n}, \tag{3.24}$$

где сумма распространяется по всем перестановкам индексов $i_1, \dots, i_l$; причем четные перестановки берутся со знаком плюс, а нечетные — со знаком минус.

Рассмотрим одноточечные тензоры 2-го порядка $\underset{\sim}{T} \in \mathscr{R} \otimes \mathscr{R}$. Обозначим

$$\vec{a} \overset{s}{\otimes} \vec{b} \equiv \frac{1}{2} (\vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{b} \otimes \vec{a}). \tag{3.25}$$

Упражнение 3.8. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.25), является пространством симметричных тензоров

$$\underset{\sim}{S} = s^{il} \vec{e}_i \overset{S}{\otimes} \vec{e}_j = s^{ji} \vec{e}_i \overset{S}{\otimes} \vec{e}_j. \; \bullet \tag{3.26}$$

Пусть теперь образован базис, для любых двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{R}$ которого справедливо

$$\vec{a} \overset{A}{\otimes} \vec{b} \equiv \frac{1}{2} (\vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}). \tag{3.27}$$

Упражнение 3.9. Доказать, что пространство, порождаемое базисом (3.27), является пространством антисимметричных тензоров

$$\underset{\sim}{A} = a^{il} \vec{e}_i \overset{A}{\otimes} \vec{e}_j = -a^{ji} \vec{e}_i \overset{A}{\otimes} \vec{e}_j. \tag{3.28}$$

Упражнеиие 3.10. Проделать все выкладки этого параграфа для случая одноточечных тензоров m-го порядка ($m > 2$). ●

Тензор, получающийся из данного при перестаиовках индексов в базисных полиадах, называется изомером тензора. Например, $\underset{\sim}{\tilde{a}}$ — изомер тензора $\underset{\sim}{a}$.

§ 4. Полилинейные формы

В § 2 мы рассматривали линейные функционалы, действующие в линейном пространстве $\mathscr{R}$. Рассмотрим теперь обобщение линейных функционалов, а имеино полилинейный функционал (или полилинейную форму), которым называется функционал, зависящий от m векторов $\underset{j}{\vec{a}} \in \mathscr{R}_j$ ($j = 1, \dots, m$) и линейный относительно каждого аргумента. Например, для

$\vec{a}_j = \vec{b}_j + \vec{c}_j;\ \alpha \in \mathcal{K}$

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_m) = f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{a}_m) + \\ + f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{c}_j, \ldots, \vec{a}_m), \tag{4.1}$$

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, (\alpha\vec{a}_j), \ldots, \vec{a}_m) = \alpha f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_m). \tag{4.2}$$

Заметим, что, векторы $\vec{a}$, фигурирующие в формулах (4.1) и (4.2), могут быть выбраны из одного пространства $\mathcal{R}$. В этом случае говорим, что полилинейный функционал задан на $\mathcal{R}$. Другим частным случаем является случай, когда p векторов $\vec{a}_i$ выбираются из пространства $\mathcal{R}$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, а остальные q векторов $(q=m-p)$ выбираются из пространства $\mathcal{R}^*$, сопряженного к $\mathcal{R}$:

$$f(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p, \overleftarrow{a}_1, \overleftarrow{a}_2, \ldots, \overleftarrow{a}_q). \tag{4.3}$$

Полилинейные функционалы типа (4.3) называют функционалами типа (p, q). В частности, как следует из результатов § 2, функционал типа (1, 0) является линейным функционалом, определенным в пространстве $\mathcal{R}$, т. е. вектором пространства $\mathcal{R}^*$.

Упражнение 4.1. Доказать, что каждому линейному оператору из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$ однозначно соответствует билинейный функционал типа (1, 1) и, обратно, каждому билинейному функционалу типа (1, 1) соответствует линейный оператор, действующий из $\mathcal{R}$ в $\mathcal{R}$. ●

Выберем в каждом из пространств $\mathcal{R}_i$ произвольный базис

$$\vec{e}_{1\,i}, \vec{e}_{2\,i}, \ldots, \vec{e}_{n_i\,i}\ (i=1, 2, \ldots, m). \tag{4.4}$$

Каждый вектор $\vec{a}_i \in \mathcal{R}_i$ можно представить в виде

$$\vec{a}_i = a^k_i \vec{e}_{k\,i}\ (k=1, 2, \ldots, n_i),\ \langle i=1, 2, \ldots, m\rangle. \tag{4.5}$$

Тогда в силу свойств (4.1) и (4.2) полилинейный (m-линейный) функционал f можно представить в виде

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{1}{a}^{k_1} \underset{2}{a}^{k_2} \ldots \underset{m}{a}^{k_m} f(\underset{1}{\vec{e}}_{k_1}, \underset{2}{\vec{e}}_{k_2}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{k_m})$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i). \tag{4.6}$$

Числа, являющиеся значениями полилинейного функционала f на векторах базиса (4.4), обозначим через

$$x_{k_1 k_2 \ldots k_m} = f(\underset{1}{\vec{e}}_{k_1}; \underset{2}{\vec{e}}_{k_2}, \ldots, \underset{m}{\vec{e}}_{k_m}). \tag{4.7}$$

Упражиеиие 4.2. Показать, что при переходе к другому базису (4.4)

$$\underset{i}{\vec{e}}_{k'} = \underset{i}{B}_{k'}{}^{k} \underset{i}{\vec{e}}_k \; (k', k = 1, 2, \ldots, n_i), \; \langle i = 1, 2, \ldots, m \rangle \tag{4.8}$$

система величин (4.7), определяющая значения полилинейного функционала f иа новых векторах базиса, выражается через значеиия этого полилинейного функционала на старых векторах базиса по закону

$$x_{k'_1 k'_2 \ldots k'_m} = x_{k_1 k_2 \ldots k_m} \underset{1}{B}{}^{k_1}_{k'_1} \underset{2}{B}{}^{k_2}_{k'_2} \ldots \underset{m}{B}{}^{k_m}_{k'_m}. \bullet \tag{4.9}$$

Таким образом, всякий полилинейный функционал f (4.6) может быть представлеи по формуле

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{1}{a}^{k_1} \underset{2}{a}^{k_2} \ldots \underset{m}{a}^{k_m} x_{k_1 k_2 \ldots k_m}, \tag{4.10}$$

где $\underset{i}{a}^{k_i}$ — компоненты вектора $\underset{i}{\vec{a}}$ в базисе (4.4), а $x_{k_1 k_2 \ldots k_m}$ — некоторые числа, определяющие полилинейный функционал f в базисе (4.4), выбранном в каждом $\mathcal{R}_i$, т. е. правая часть (4.10) представляет собой значение полилинейного функционала на векторах $\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}$.

В частности, если полилинейный (m-лииейный) функциоиал задан на $\mathcal{R}$, то значения такого функционала можно записать также в виде (4.10), при этом $\underset{i}{a}^{k_i}$ — компоненты вектора $\underset{i}{\vec{a}}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, общем для всех $\underset{i}{\vec{a}}$.

Выберем в каждом из пространств $\mathfrak{R}_i^*$ базис

$$\underset{i}{\overleftarrow{e}^1}, \underset{i}{\overleftarrow{e}^2}, \ldots, \underset{i}{\overleftarrow{e}^{n_i}} \ \langle i=1,2,\ldots,m\rangle. \qquad (4.11)$$

Каждый вектор $\underset{i}{\overleftarrow{a}} \in \mathfrak{R}_i^*$ запишем в виде

$$\underset{i}{\overleftarrow{a}} = \underset{i}{a_k} \underset{i}{\overleftarrow{e}^k} (k=1,2,\ldots,n_i) \ \langle i=1,2,\ldots,m\rangle. \qquad (4.12)$$

Опять-таки в силу свойств (4.1) и (4.2) полилинейный функционал f представим следующим образом:

$$f(\underset{1}{\overleftarrow{a}}, \underset{2}{\overleftarrow{a}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{a}}) = \underset{1}{a_{k_1}} \underset{2}{a_{k_2}} \ldots \underset{m}{a_{k_m}} f(\underset{1}{\overleftarrow{e}^{k_1}}, \underset{2}{\overleftarrow{e}^{k_2}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{e}^{k_m}})$$

$$(k_i = 1, 2, \ldots, n_i). \qquad (4.13)$$

Числа, являющиеся значениями полилинейного функционала f на векторах базиса (4.11), обозначим через

$$x^{k_1k_2\ldots k_m} = f(\underset{1}{\overleftarrow{e}^{k_1}}, \underset{2}{\overleftarrow{e}^{k_2}}, \ldots, \underset{m}{\overleftarrow{e}^{k_m}}). \qquad (4.14)$$

Упражнение 4.3. Показать, что при переходе к другому базису (4.11)

$$\underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^{i'}} = \underset{\alpha}{A^{i'}}{}_i \underset{\alpha}{\overleftarrow{e}^i} (i, i' = 1, 2, \ldots, n_\alpha), \ \langle \alpha = 1, 2, \ldots, m\rangle \qquad (4.15)$$

система величин (4.14), определяющая значения полилинейного функционала f на новых векторах базиса (4.15), выражается через значения этого полилинейного функционала на старых векторах базиса (4.11) по закону

$$x^{i'_1 i'_2 \ldots i'_m} = x^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{A^{i'_1}}{}_{i_1} \underset{2}{A^{i'_2}}{}_{i_2} \ldots \underset{m}{A^{i'_m}}{}_{i_m}. \ \bullet \qquad (4.16)$$

Используем теперь определение многоточечного тензора, данное в § 3. Сравнивая выражения (4.16) с (3.10), а (4.9) с (3.11), заключаем, что величины (4.7) являются ковариантными компонентами, а величины (4.14) — контравариантными компонентами m-точечного тензора. Тем самым каждому полилинейному (m-линейному) функционалу (4.10) или (4.13) соответствует многоточечный тензор m-го порядка

$$\underset{\sim}{F}=x^{i_1 i_2 \dots i_m}\underset{1}{\vec{e}_{i_1}}\otimes\underset{2}{\vec{e}_{i_2}}\otimes\dots\otimes\underset{m}{\vec{e}_{i_m}}=$$

$$=x_{i_1 i_2 \dots i_m}\underset{1}{\overleftarrow{e}^{i_1}}\otimes\underset{2}{\overleftarrow{e}^{i_2}}\otimes\dots\otimes\underset{m}{\overleftarrow{e}^{i_m}}. \qquad (4.17)$$

В частности, каждому полилинейному (m-линейному) функционалу, заданному на $\mathcal{R}$, соответствует тензор (одноточечный) m-го порядка

$$\underset{\sim}{F}=x^{i_1 i_2 \dots i_m}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}^{i}\otimes\dots\otimes\vec{e}_{i_m}=$$

$$=x_{i_1 i_2 \dots i_m}\overleftarrow{e}^{i_1}\otimes\overleftarrow{e}^{i_2}\otimes\dots\otimes\overleftarrow{e}^{i_m}. \qquad (4.18)$$

В евклидовом пространстве $\mathcal{R}$ всякий тензор $\underset{\sim}{T}$ m-го порядка может быть скалярно умножен на вектор $\vec{a}$. При этом под $[i]$-скалярным произведением тензора $\underset{\sim}{T}$ m-го порядка на вектор $\vec{a}$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ будем понимать тензор $(m-1)$-го порядка $\underset{\sim}{A}$, образованный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным произведением j-го вектора базисной полиады на вектор $\vec{a}$. Например, $[2]$-скалярным произведением тензора $\underset{\sim}{T}$

$$T=t^{ijk}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k \qquad (4.19)$$

на вектор $\vec{a}=a^l\vec{e}_l$ называется тензор $\underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{A}=[2]\,\underset{\sim}{T}\cdot\vec{a}=t^{ijk}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_k(\vec{e}_j\cdot\vec{a})=t^{ijk}q_{jl}a^l\vec{e}_i\otimes\vec{e}_k. \qquad (4.20)$$

Аналогично под $[i, j]$-скалярным произведением тензора m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ на векторы $(\vec{a}, \vec{b})$ $(1\leqslant i<j\leqslant m)$ понимаем тензор $(m-2)$-го порядка $\underset{\sim}{A}$, полученный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным произведением i-го вектора базисной полиады на вектор $\vec{a}$ и j-го вектора полиады на вектор $\vec{b}$. Под полным скалярным произведением тензора m-го порядка $\underset{\sim}{T}$ на совокупность векторов $(\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \dots, \underset{m}{\vec{a}})$ понимается скаляр, образованный из тензора $\underset{\sim}{T}$ скалярным умножением каждого i-го вектора полиады на вектор $\underset{i}{\vec{a}}$:

$$A = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{1}{\vec{a}}, \underset{2}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = t^{i_1 i_2 \ldots i_m} \underset{1}{a}_{i_1} \underset{2}{a}_{i_2} \ldots \underset{m}{a}_{i_m}. \quad (4.21)$$

Упражнение 4.4. *Доказать обобщенную теорему Рисса: всякий полилинейный (m-линейный) функционал в n-мерном евклидовом пространстве $\mathfrak{R}$ можно представить в виде полного скалярного произведения*

$$f(\underset{1}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}) = \underset{\sim}{T} \cdot (\underset{1}{\vec{a}}, \ldots, \underset{m}{\vec{a}}), \quad (4.22)$$

где Γ — фиксированный тензор m-го порядка, однозначно определяемый полилинейным функционалом f. И обратно, каждый тензор $\underset{\sim}{T}$ определяет полилинейный функционал.

Упражнение 4.5. Доказать, что можно установить взаимно однозначное соответствие между полилинейными (m-линейными) функционалами на $\mathfrak{R}$ и линейными функционалами на пространстве τ, являющемся m-кратным тензорным произведением пространств $\mathfrak{R}$ ($\tau = \mathfrak{R} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{R}$).

§ 5. Внешние формы

Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}$ антисимметричных тензоров 2-го порядка пространства $\mathfrak{R}^* \otimes \mathfrak{R}^*$ (упр. 3.9). В этом пространстве произвольно выбранные базисные диады $\overleftarrow{e^i} \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e^j}$ обладают свойством

$$\overleftarrow{e^i} \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e^j} = -\overleftarrow{e^j} \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e^i}. \quad (5.1)$$

Элементы $\underset{\sim}{A}$ этого пространства $\mathcal{A}$ назовем *внешними* формами 2-го порядка (степени), а сами базисные диады (5.1) обозначим следующим образом:

$$\overleftarrow{e^i} \overset{A}{\otimes} \overleftarrow{e^j} \equiv \overleftarrow{e^i} \wedge \overleftarrow{e^j}.$$

Очевидно,

$$\underset{\sim}{A} = a_{ij} \overleftarrow{e^i} \wedge \overleftarrow{e^j} = -a_{ji} \overleftarrow{e^i} \wedge \overleftarrow{e^j}. \quad (5.2)$$

Так как внешние формы 2-го порядка являются тензорами, то они обладают всеми свойствами тензоров и дополнительно свойством (5.1) (или (5.2)).

Аналогично рассмотрим подпространство Q_0 пространства Q, образованного m-кратным тензорным произведением n-мерного пространства $\mathscr{R}^*$ на самого себя, т. е.

$$Q = \mathscr{R}^* \otimes \mathscr{R}^* \otimes \ldots \otimes \mathscr{R}^*. \tag{5.3}$$

При этом считаем, что базисные диады, составленные из любой пары векторов $\mathscr{R}^*$, обладают свойством антикоммутативности (5.1) и записываются в виде (5.2). Элементы $\underset{\sim}{\Phi}$ пространства Q_0 назовем внешними формами m-го порядка (степени)

$$\underset{\sim}{\Phi} = \varphi_{i_1 \ldots i_m} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \overleftarrow{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.4}$$

Назовем внешним умножением (произведением) произвольного числа векторов результат альтернирования тензорного произведения этих векторов (см. (3.24)). Так, внешним умножением двух внешних форм $\underset{\sim}{\Phi}$ и $\underset{\sim}{\Psi}$ m-го и p-го порядка соответственно называется внешняя форма Θ $(m+p)$-го порядка

$$\underset{\sim}{\Theta} = \underset{\sim}{\Phi} \wedge \underset{\sim}{\Psi} = \varphi_{i_1 \ldots i_m} \psi_{i_{m+1} \ldots i_{m+p}} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \overleftarrow{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_{m+p}}. \tag{5.5}$$

Справедливы следующие утверждения.

1°. Внешнее произведение m векторов, среди которых хотя бы два совпадают, равно нулю.

2°. Если $\underset{\sim}{\Phi}$ — внешняя форма p-го порядка, а $\underset{\sim}{\Psi}$ — внешняя форма q-го порядка, то

$$\underset{\sim}{\Phi} \wedge \underset{\sim}{\Psi} = (-1)^{pq} \underset{\sim}{\Psi} \wedge \underset{\sim}{\Phi}. \tag{5.6}$$

3°. При перестановке двух любых векторов, участвующих во внешнем произведении, знак внешнего произведения изменяется на противоположный.

4°. Каждая внешняя форма порядка больше чем n равна нулю (т. е. имеет компоненты, равные нулю).

5°. Число базисных элементов порядка m в n-мерном пространстве равно числу сочетаний из n элементов по m : C_n^m.

Упражнение 5.1. Доказать справедливость высказанных выше утверждений 1°—5°. ●

Существуют различные формы записи внешних форм. Так, кроме записи внешней формы в виде (5.4) в литературе встречается следующая запись:

$$\underset{\sim}{\Phi} = \varphi_{i_1 \ldots i_m} [\overleftarrow{e}^{i_1} \ldots \overleftarrow{e}^{i_m}]. \tag{5.7}$$

Рассмотрим для примера внешнюю форму 3-го порядка

$$\underset{\sim}{B}=b_{ijk}\overleftarrow{e}^{i}\wedge\overleftarrow{e}^{j}\wedge\overleftarrow{e}^{k}. \qquad (5.8)$$

Пользуясь свойством (5.3), произведем объединение подобных членов в (5.8):

$$\underset{\sim}{B}= b_{123}\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{3}+b_{213}\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{3}+b_{231}\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{3}\wedge\overleftarrow{e}^{1}+$$

$$+b_{321}\overleftarrow{e}^{3}\wedge\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{1}+b_{312}\overleftarrow{e}^{3}\wedge\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{2}+b_{132}\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{3}\wedge\overleftarrow{e}^{2}=$$

$$=(b_{123}+b_{312}+b_{231}-b_{213}-b_{321}-b_{132})\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{3}. \qquad (5.9)$$

Воспользовавшись операцией альтернирования (см. гл. 1, § 3), запишем (5.9) в виде

$$\underset{\sim}{B}=3!\,b_{[123]}\,\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{2}\wedge\overleftarrow{e}^{3}=b_{[ijk]}\,\overleftarrow{e}^{i}\wedge\overleftarrow{e}^{j}\wedge\overleftarrow{e}^{k}, \qquad (5.10)$$

где $b_{[ijk]}$ — *альтернированный коэффициент* внешней формы $\underset{\sim}{B}$, антисимметричный относительно всех индексов. Таким образом, всякую внешнюю форму (5.7) можно представить с помощью альтернированного коэффициента в виде

$$\underset{\sim}{\Phi}=m!\,\varphi_{[12\ldots m]}\overleftarrow{e}^{1}\wedge\overleftarrow{e}^{2}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{m}=$$

$$=\varphi_{[i_1\ldots i_m]}\,\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_m}. \qquad (5.11)$$

Назовем внешними формами нулевого порядка элементы произвольного поля чисел $\mathscr{K}$ (скаляров), а внешними формами первого порядка — векторы пространства $\mathscr{R}$. Так как множество линейных функционалов (линейных форм) векторного пространства $\mathscr{R}^*$ образует векторное пространство $\mathscr{R}$ (см. § 2), то внешние формы первого порядка называют линейными формами. Систему гиперкомплексных единиц *алгебры Грассмана* образуют единицы нулевого порядка — числа поля $\mathscr{K}$, единицы первого порядка — линейные формы, единицы второго порядка — внешние формы второго порядка и т. д. В качестве элементов алгебры Грассмана принимаются формально построенные полиномы вида

$$a+a_i\overleftarrow{e}^{i}+a_{i_1i_2}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\overleftarrow{e}^{i_2}+\ldots+a_{i_1\ldots i_m}\,\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_m}. \qquad (5.12)$$

Над этими полиномами устанавливаются кольцевые операции сложения (почленного) и внешнего умножения (прочленное с сохранением порядка членов).

Упражнение 5.2. Доказать, что алгебра Грассмана конечна (т. е. содержит конечное число элементов).

Упражнение 5.3. Доказать, что алгебра Грассмана содержит 2^n базисиых элемента, где n — размерность векторного пространства $\mathscr{R}^*$.

Упражнение 5.4. Пусть имеются три внешние формы $\underset{\sim}{\Phi}$, $\underset{\sim}{\Theta}$, $\underset{\sim}{\Psi}$ соответственно порядка p, q, r. Доказать, что

$$\underset{\sim}{\Phi}\wedge\underset{\sim}{\Theta}\wedge\underset{\sim}{\Psi}=(-1)^{pr+qr+qp}\underset{\sim}{\Psi}\wedge\underset{\sim}{\Theta}\wedge\underset{\sim}{\Phi}. \quad ● \tag{5.13}$$

Рассмотрим внешнюю форму $\underset{\sim}{A}$, образоваиную внешним произведением двух векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$:

$$\underset{\sim}{A}=\overleftarrow{x}\wedge\overleftarrow{y}=x_i y_j \overleftarrow{e^i}\wedge\overleftarrow{e^j}=x_{[i}y_{j]}\overleftarrow{e^i}\wedge\overleftarrow{e^j}. \tag{5.14}$$

Значением внешней формы $\underset{\sim}{A}$ на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является, очевидно, значение билинейного функционала f, соответствующего $\underset{\sim}{A}$ на этих векторах (см. § 4):

$$f(\vec{a}, \vec{b})=a^i b^j f(\vec{e}_i\wedge\vec{e}_j)=a^{[i}b^{j]}x_{[i}y_{j]}, \tag{5.15}$$

но

$$a^i b^j x_{[i}y_{j]}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a^i x_i & b^i x_i \\ a^j y_j & b^j y_j \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overleftarrow{x}(\vec{a}) & \overleftarrow{x}(\vec{b}) \\ \overleftarrow{y}(\vec{a}) & \overleftarrow{y}(\vec{b}) \end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Следовательно, значение внешней формы, составленной из внешнего умножения векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$, на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно определителю, составленному из значений векторов $\overleftarrow{x}$ и $\overleftarrow{y}$ на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\underset{\sim}{A}(\vec{a}, \vec{b})=\overleftarrow{x}\wedge\overleftarrow{y}(\vec{a}\,\vec{b})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overleftarrow{x}(\vec{a}) & \overleftarrow{x}(\vec{b}) \\ \overleftarrow{y}(\vec{a}) & \overleftarrow{y}(\vec{b}) \end{vmatrix}. \tag{5.17}$$

Аналогнчно, значение любой внешней формы

$$\underset{\sim}{\Phi}=\overleftarrow{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{x}_{i_m} \tag{5.18}$$

на вектроах $\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_m}$ имеет вид

$$a^{[i_1}a^{i_2}\ldots a^{i_m]}x_{[i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m]}=\frac{1}{m!}\begin{vmatrix}\overleftarrow{x}_1(\vec{a}_1)\ldots\overleftarrow{x}_1(\vec{a}_m)\\ \ldots\qquad\ldots\\ \overleftarrow{x}_m(\vec{a}_1)\ldots\overleftarrow{x}_m(\vec{a}_m)\end{vmatrix}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим базисные кососимметричные полиады в пространстве Q (5.3), образованном n-мерным векторным пространством $\mathcal{R}^*$:

$$\overleftarrow{e}^1\wedge\overleftarrow{e}^2\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^n. \tag{5.20}$$

Пусть теперь в $\mathcal{R}^*$ выбран другой базис $\overleftarrow{e}^{i'}$, причем

$$\overleftarrow{e}^{i'}=A_i^{i'}\overleftarrow{e}^i\ (i, i'=1, 2, \ldots, n). \tag{5.21}$$

Тогда

$$\overleftarrow{e}^{i'_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i'_n}=A_{i_1}^{i'_1}\ldots A_{i_n}^{i'_n}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_n}=$$

$$=A^{i'_1}_{[i_1}A^{i'_2}_{i_2}\ldots A^{i'_n}_{i_n]}\overleftarrow{e}^{i_1}\wedge\ldots\wedge\overleftarrow{e}^{i_n}, \tag{5.22}$$

но

$$A^{i'_1}_{[i_1}\ldots A^{i'_n}_{i_n]}=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}A^{i'_1}_{i_1}\ldots A^{i'_1}_{i_n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ A^{i'_n}_{i_1}\ldots A^{i'_n}_{i_n}\end{vmatrix}. \tag{5.23}$$

Упражнение 5.5. Доказать, что значением внешней формы, составленной из внешнего умножения векторов $\overleftarrow{e}^{i'}$ $(i'=1, \ldots, n)$ на векторах $\vec{e}_i$, является определитель матрицы $A_i^{i_1}$ (5.21).

Следовательно, при переходе от одного базиса к другому (5.21) в $\mathcal{R}^*$ базисные полиады пространства Q преобразуются с помощью определителя матрицы перехода (5.21). ●

Назовем ϵ — объектом совокупность величин

$$\epsilon^{i_1i_2\ldots i_m};\quad \epsilon_{i_1i_2\ldots i_m}\ \langle i_1, i_2\ldots, i_m=1, 2, \ldots, n\rangle \tag{5.24}$$

со следующим свойством: $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m}$ (или $\epsilon^{i_1 \dots i_m}$) равны нулю, если хотя бы два индекса совпадают; равны $+1$, если все индексы различны и образуют четную подстановку; равны -1, если все индексы различны и образуют нечетную подстановку.

В силу свойства косой симметрии полиад (5.20) имеем тождество

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_m} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \overleftarrow{e}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{\alpha_m}, \quad (5.25)$$

или по-другому

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \frac{1}{m!} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_m} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_m} \overleftarrow{e}^{j_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{j_m}. \quad (5.26)$$

С другой стороны, ввиду очевидного тождества

$$\overleftarrow{e}^{i} = \delta^{i}{}_{j} \overleftarrow{e}^{j} \quad (5.27)$$

согласио (5.22) имеем

$$\overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = \delta^{i_1}{}_{[j_1} \dots \delta^{i_m}{}_{j_m]} \overleftarrow{e}^{j_1} \wedge \dots \wedge \overleftarrow{e}^{j_m}. \quad (5.28)$$

Сравнивая (5.26) и (5.28) и учитывая формулу (5.23), получим

$$\epsilon^{i_1 \dots i_m} \epsilon_{j_1 \dots j_m} = \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \dots & \delta^{i_1}_{j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta^{i_m}_{j_1} & \dots & \delta^{i_m}_{j_m} \end{vmatrix} \equiv \delta^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m}. \quad (5.29)$$

Упражнение 5.6. Доказать, что

$$\delta^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m} \equiv 0 \text{ при } m > n. \quad (5.30)$$

Упражнение 5.7. Доказать, что при $m \leqslant n$

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_{m-1} i_m}_{j_1 j_2 \dots j_{m-1} i_m} = (n - m + 1) \delta^{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}_{j_1 j_2 \dots j_{m-1}}$$
$$(i_m = 1, 2, \dots, n). \quad (5.31)$$

Упражнение 5.8. Доказать, что при $m \leqslant n$

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_m}_{i_1 i_2 \dots i_m} = n(n-1) \dots (n-m+1)$$

$$(i_1, i_2, \ldots i_m = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.32}$$

откуда, в частности, следует

$$\delta^{i_1 \ldots i_n}_{i_1 \ldots i_n} = n! \quad \bullet \tag{5.33}$$

Рассмотрим теперь m $(m \leqslant n)$ произвольных векторов $\overleftarrow{a}^k$:

$$\overleftarrow{a}^k = a_i{}^k \overleftarrow{e}^i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5.34}$$

Образуем внешнее произведение этих векторов. Тогда

$$\underset{\sim}{A} = \overleftarrow{a}^1 \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{a}^m = a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^m_{i_m} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \overleftarrow{e}^{i_2} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m} = a^1_{[i_1} \ldots a^m_{i_m]} \overleftarrow{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \overleftarrow{e}^{i_m}. \tag{5.35}$$

Альтернированный коэффициент внешней формы A представляет собой определитель

$$a^1_{[i_1} \ldots a^m_{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a^1_{i_1} \ldots a^1_{i_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^m_{i_1} \ldots a^m_{i_m} \end{vmatrix}. \tag{5.36}$$

При этом элементы этого определителя взяты из матрицы

$$\begin{pmatrix} a^1_{i_1} \ldots a^1_{i_m} \ldots a^1_{i_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a^m_{i_1} \ldots a^m_{i_m} \ldots a^m_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

т. е. из матрицы (5.37) выбрано m столбцов.

Покажем, что справедлива

Теорема. *Необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов является равенство нулю их внешнего произведения.*

В самом деле, пусть векторы $\vec{a}^k$ (5.34) линейно зависимы. Тогда матрица (5.37) является вырожденной, так как все определители порядка m равны нулю. Следовательно, внешнее произведение (5.35) равно нулю.

Пусть, обратно, внешнее произведение векторов (5.34) равно нулю

$$\overleftarrow{a}^1\wedge \ldots \wedge\overleftarrow{a}_m=0. \tag{5.38}$$

Тогда коэффициенты в (5.35) после приведения подобных членов должны равняться нулю. Следовательно, все определители m-го порядка равны нулю, а значит, матрица (5.37) — вырожденная и векторы (5.34) линейно зависимы.

Из этой теоремы вытекает

следствие:

необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов является отличие от нуля их внешнего произведения.

Упражнение 5.9. Доказать, что всякую систему линейно независимых векторов (5.34) можно дополнить до базиса, т. е. если имеется m лннейно независимых векторов $\overleftarrow{a}^1, \ldots, \overleftarrow{a}^m$ и $m<n$, то можно найти $(n-m)$ векторов $\overleftarrow{a}^{m+1}, \ldots, \overleftarrow{a}^n$, таких, что

$$\overleftarrow{a}^1\wedge \ldots \wedge\overleftarrow{a}^n\neq 0. \; \bullet \tag{5.39}$$

Как следует из результатов § 2, множество линейных форм, определенных на векторном пространстве $\mathcal{R}^*$, образует векторное пространство $\mathcal{R}$. Очевидно, что все высказанные утверждения этого параграфа остаются справедливыми, если в качестве исходного векторного пространства выбрать $\mathcal{R}$. Так, например, внешнюю форму m-го порядка $\underset{\sim}{\Phi}$, определенную на $\mathcal{R}$, можно записать в виде

$$\underset{\sim}{\Phi}=\varphi^{i_1i_2\ldots i_m}\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{i_2}\wedge \ldots \wedge\vec{e}_{i_m}. \tag{5.40}$$

Упражнение 5.10. Доказать следующее утверждение (лемма Картана).

Пусть $\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^m$ — линейно независимые векторы. Линейные формы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ удовлетворяют уравнению

$$\vec{a}_i\wedge\vec{e}^i=0 \tag{5.41}$$

тогда и только тогда, когда они имеют вид

$$\vec{a}_i=a_{ij}\overleftarrow{e}^j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{5.42}$$

причем коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям

$$a_{ij}=a_{ji}. \tag{5.43}$$

§ 6. Дифференциальное кольцо Картана

В предыдущем параграфе при построении Грассмановой алгебры использовалось кольцо (поле) коэффициентов $\mathscr{K}$ (внешние формы нулевого порядка). Рассмотрим теперь в качестве кольца коэффициентов функции n переменных

$$a(x^1, x^2, \ldots, x^n). \tag{6.1}$$

Эти функции будем считать в некоторой n-мерной области принадлежащими классу C^q $(q \geqslant 1)$, т. е. q раз непрерывно дифференцируемыми, а следовательно, обладающими непрерывными частными производными порядка q включительно.

В качестве базисных элементов выберем дифференциалы независимых переменных

$$dx^1, dx^2, \ldots, dx^n \tag{6.2}$$

и будем смотреть на них как на абстрактные единицы. Всякую внешнюю форму, построенную на этих единицах, например

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \tag{6.3}$$

назовем *внешней дифференциальной формой* m-го порядка. Очевидно, внешние дифференциальные формы обладают всеми свойствами внешних форм и потому для них справедливы все утверждения, высказанные в предыдущем параграфе. Грассманова алгебра, построениая на базе внешних дифференциальных форм, носит название дифференциального кольца Картана.

В этом кольце введем операцию *внешнего дифференцирования* по следующим правилам.

1°. Внешний дифференциал от функции (6.1) определяется как обычный дифференциал этой функции

$$\mathscr{T}a \equiv da = \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^i \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.4}$$

2°. Внешний дифференциал от внешней дифференциальной формы (6.3) определяется так:

$$\mathscr{D}\omega \equiv da_{i_1 \ldots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} =$$

$$= \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.5}$$

Таким образом, операция внешнего дифференцирования увеличивает порядок внешней дифференциальной формы на единицу.

Легко установить основные свойства внешнего дифференцирования.

1°. Внешний дифференциал алгебраической суммы двух внешних дифференциальных форм равен алгебраической сумме внешних дифференциалов этих форм

$$\mathscr{D}(\omega \pm \theta) = \mathscr{D}\omega \pm \mathscr{D}\theta, \tag{6.6}$$

где форма ω имеет вид (6.3), а

$$\theta = b_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^m)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.7}$$

В самом деле, из (6.3) и (6.7) следует, что

$$\omega \pm \theta = (a_{i_1 \ldots i_m} \pm b_{i_1 \ldots i_m})\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \tag{6.8}$$

а из правила 1° внешнего дифференцирования —

$$\mathscr{D}(\omega \pm \theta) = (da_{i_1 \ldots i_m} + db_{i_1 \ldots i_m}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.9}$$

Отсюда и следует форма (6.6).

2°. Пусть внешняя дифференциальная форма ω имеет порядок m (6.3). Тогда внешний дифференциал от внешнего произведения формы ω на некоторую другую φ подсчитывается по формуле

$$\mathscr{D}(\omega \wedge \varphi) = \mathscr{D}\omega \wedge \varphi + (-1)^m \omega \wedge \mathscr{D}\varphi. \tag{6.10}$$

В самом деле, пусть для определенности внешняя дифференциальная форма φ имеет порядок q

$$\varphi = c_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{6.11}$$

Тогда

$$\mathscr{D}(a_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge c_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} =$$
$$= [(da_{i_1 \ldots i_m} c_{j_1 \ldots j_q} + a_{i_1 \ldots i_m} dc_{j_1 \ldots j_q}) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge$$
$$\wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}] = da_{i_1 \ldots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \wedge$$
$$\wedge c_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} + (-1)^m a_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx^{i_m} \wedge dc_{j_1 \ldots j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{6.12}$$

3°. Второй внешний дифференциал от внешней дифференциальной формы тождественно равен нулю (теорема Пуанкаре).

$$\mathscr{D}\mathscr{D}\omega \equiv 0. \tag{6.13}$$

Пусть ω имеет вид (6.3). Тогда ее внешний дифференциал подсчитывается по формуле (6.5). Дифференцируем выражение (6.5) внешним образом:

$$\mathscr{D}\mathscr{D}\omega = \frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}. \tag{6.14}$$

В силу предполагаемой гладкости функций (6.1)

$$\frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 a_{i_1 \ldots i_m}}{\partial x^k \partial x^j}. \tag{6.15}$$

Однако внешняя форма $dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \ldots \wedge dx^{i_m}$ кососимметрична по индексам k и j. Отсюда следует (6.13).

Упражнение 6.1. Доказать, что если внешний дифференциал некоторой внешней дифференциальной формы ω равен нулю, то форма ω сама является внешним дифференциалом другой внешней дифференциальной формы.

Упражнение 6.2. Пусть задано невырожденное преобразование

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n) \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.16}$$

Доказать, что базисные внешние формы

$$dx^{i'_1} \wedge dx^{i'_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_n} \tag{6.17}$$

преобразуются из старых базисных внешних форм

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n} \tag{6.18}$$

с помощью якобиана преобразования (6.16)

$$dx^{1'} \wedge \ldots \wedge dx^{n'} = \det \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right| dx^1 \wedge \ldots dx^n. \; ●$$

Дифференциалы независимых переменных мы рассматриваем как функции независимых переменных

$$dx^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n). \tag{6.19}$$

Это означает, что мы рассматриваем векторные и тензорные поля, определенные в некоторой точке арифметического пространства с координатами $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$. Точнее говоря, мы имеем дело с многообразием, строгое определение которого будет дано позже.

Введем m символов дифференцирования

$$\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}. \tag{6.20}$$

Каждый из этих символов определяет направление смещения. Условимся, что два символа дифференцирования перестановочны

$$\underset{\alpha\beta}{dd}x^k = \underset{\beta\alpha}{dd}x^k. \tag{6.21}$$

Тогда дифференциал функции (6.1) имеет вид

$$\underset{\alpha}{d}a = \frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\alpha}{d}x^k. \tag{6.22}$$

Рассмотрим выражение $\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}a(x^1, \ldots, x^k)$. Очевидно,

$$\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}a = \underset{\alpha}{d}\left(\frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\beta}{d}x^k\right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^k \partial x^l}\underset{\alpha}{d}x^k \underset{\beta}{d}x^l +$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial x^k}\underset{\alpha}{d}\,\underset{\beta}{d}x^k. \tag{6.23}$$

Отсюда видно, что если символы дифференцирования (6.21) перестановочны для независимых переменных (6.19), то они перестановочны и для функций.

Упражнение 6.3. Показать, что свойство перестановочности для символов дифференцирования не зависит от выбора независимых переменных. ●

Значением внешнего произведения

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \tag{6.24}$$

на дифференциалах

$$\underset{1}{d}x^i, \underset{2}{d}x^i, \ldots, \underset{m}{d}x^i \tag{6.25}$$

естественно назвать выражение (см. упр. 5.5)

$$\underset{[1}{d}x^{i_1} \ldots \underset{m]}{d}x^{i_m} = \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} \underset{1}{d}x^{i_1} & \ldots & \underset{1}{d}x^{i_m} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \underset{m}{d}x^{i_1} & \ldots & \underset{m}{d}x^{i_m} \end{vmatrix}, \tag{6.26}$$

а значением внешней дифференциальной формы ω (6.3) на дифференциалах (6.25) —

$$\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = a_{i_1\ldots i_m} \underset{[1}{d}x^{i_1} \ldots \underset{m]}{d}x^{i_m}. \tag{6.27}$$

Вычислим значение внешней дифференциальной формы (6.5) на дифференциалах (6.25)

$$\mathcal{D}\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = \frac{\partial a_{i_1\ldots i_m}}{\partial x^j}\underset{0}{d}x^j \wedge \underset{1}{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \underset{m}{d}x^{i_m} =$$
$$= \underset{[0}{d}a_{i_1\ldots i_m}\underset{1}{d}x^{i_1}\underset{2}{d}x^{i_2}\ldots\underset{m]}{d}x^{i_m} = \underset{[0}{d}(a_{i_1\ldots i_m}\underset{1}{d}x^{i_1}\ldots\underset{m]}{d}x^{i_m}). \tag{6.28}$$

Отсюда видно, что значение формы $\mathcal{D}\omega$ на дифференциалах (6.25) равно значению формы ω на дифференциалах $\underset{0}{d}, \underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}$

$$\mathcal{D}\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = \omega(\underset{0}{d}, \underset{1}{d}, \ldots, \underset{m}{d}) = \underset{[0}{d}\omega(\underset{1}{d}, \ldots, \underset{m]}{d}). \tag{6.29}$$

Пример 6.1. Рассмотрим линейную дифференциальную форму

$$\omega = P\,dx + Q\,dy. \tag{6.30}$$

Подсчитаем ее внешний дифференциал

$$\mathcal{D}\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx +$$
$$+ \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \tag{6.31}$$

Значением формы (6.30) на дифференциале δ является выражение

$$\omega(\delta) = P\delta x + Q\delta y. \tag{6.32}$$

Из формулы (6.29) имеем

$$\mathcal{D}\omega(\delta) = \omega(\underset{1}{\delta}, \underset{2}{\delta}) = 2\underset{[1}{\delta}\omega(\underset{2]}{\delta}) = \underset{1}{\delta}\omega(\underset{2}{\delta}) - \underset{2}{\delta}\omega(\underset{1}{\delta}) =$$
$$= \underset{1}{\delta}P\underset{2}{\delta}x + \underset{1}{\delta}Q\underset{2}{\delta}y - \underset{2}{\delta}P\underset{1}{\delta}x - \underset{2}{\delta}Q\underset{1}{\delta}y =$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(\underset{1}{\delta}x\underset{2}{\delta}y - \underset{2}{\delta}x\underset{1}{\delta}y). \tag{6.33}$$

Упражнение 6.4. Доказать, что внешняя дифференциальная форма равна нулю тогда и только тогда, когда тождественно равно нулю ее значение.

Упражнение 6.5. Доказать, что при значении формы ω, равном нулю, интеграл

$$\int_{M_0}^{M} \omega(d) \qquad (6.34)$$

между двумя точками $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^m)$ и $M_1(x_1^1, \ldots, x_1^n)$ не зависит от выбора пути интегрирования. ●

Большое значение имеют внешние дифференциальные формы при изучении многократных интегралов. Ввиду того что замена переменных в интеграле приводит к умножению подынтегральной функции на якобиан матрицы соответствующего преобразования, естественно записывать многократные интегралы в виде

$$\int_{\Omega} a_{i_1 \ldots i_m}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} = \int_{\Omega} \omega. \qquad (6.35)$$

С помощью внешних дифференциальных форм можно доказать

Теорему:

Пусть в n-мерном пространстве задан n-мерный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью Σ с выбранной ориентацией. Пусть дана внешняя дифференциальная форма n-го порядка

$$\omega = a_{i_1 \ldots i_n} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \qquad (6.36)$$

Тогда справедлива формула Стокса

$$\int_{V} \mathscr{D}\omega = \int_{\Sigma} \omega. \qquad (6.37)$$

Упражнение 6.6. Убедиться, что из (6.37) следует формула Грина

$$\int_{L} P dx + Q dy = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \qquad (6.38)$$

(положив ω по формуле (6.30)).

Упражнение 6.7. Убедиться, что из (6.37) следует формула Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}+\frac{\partial P_3}{\partial z}\right) dxdydz=$$

$$=\iint\limits_\Sigma (P_1dydz+P_2dzdx+P_3dxdy), \tag{6.39}$$

(положив

$$\omega=P_1dx+P_2dy+P_3dz). \bullet \tag{6.40}$$

С помощью внешнего дифференцирования легко объяснить, почему криволинейные координаты мы снабжаем верхним индексом α^i. Рассмотрим евклидово пространство $\mathcal{R}_n$. Дифференциалы независимых переменных $d\alpha^i$ являются контравариантными компонентами вектора (гл. 1, упр. 2.3). Поэтому по определению

$$d\alpha_i=g_{ij}d\alpha^j \quad (i, j=1, 2, \ldots, n). \tag{6.41}$$

Для того чтобы наряду с системой координат α^i существовала система координат α_i, необходимо, чтобы левая часть (6.41) была полным дифференциалом, т. е. второй внешний дифференциал от α_i по теореме Пуанкаре должен обращаться в нуль

$$dg_{ij}\wedge d\alpha^j=0. \tag{6.42}$$

Отсюда по лемме Картана

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} \tag{6.43}$$

или (см. гл. 1, упр. 2.11)

$$\Gamma_{ki,j}=\Gamma_{ji,k}. \tag{6.44}$$

Итак, условия (6.43) или (6.44) — необходимые и достаточные условия существования координат α_i.

ГЛАВА 3

ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Формы записи тензоров

Рассмотрим прежде всего тензоры второго ранга в трехмерном евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$, ибо именно такие тензоры чаще всего встречаются в приложениях. Пусть в $\mathscr{R}_3$ выбрана система координат α^i ($i=1, 2, 3$) и построена в каждой точке система базисных векторов $\vec{e}_i$, связанная с этой системой координат (см. § 1 гл. 1). Тогда, вводя фундаментальный тензор

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j,\quad g^{ij}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}},\tag{1.1}$$

можем построить в каждой точке $\mathscr{R}_3$ взаимный репер

$$\vec{e}^i=g^{ij}\vec{e}_j.\tag{1.2}$$

Если теперь в $\mathscr{R}_3$ задан тензор второго ранга $\underset{\sim}{T}$, то его можно в каждой точке представить одним из следующих способов:

$$T=T^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=T_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j=T_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j=$$
$$=T^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j.\tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что

$$T^{ij}=T_{kl}g^{ik}g^{jl}=T_k{}^jg^{ik}=T^i{}_kg^{kj}.\tag{1.4}$$

Разумеется, что в $\mathscr{R}_3$ можно выбрать в каждой точке произвольный локальный базис $\vec{n}_i$, не связанный с системой координат α^i (неголономный базис, примером которого является базис $\vec{e}^i$). При этом предполагается, что заданы функции $Q_i{}^j(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ перехода $\vec{n}_i$ от некоторого голономного базиса:

$$\vec{n}_i = Q_i^{\,j}\vec{e}_j. \qquad (1.5)$$

Тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ может быть представлен и в этом неголономном базисе

$$\underset{\sim}{T} = t^{ij}\vec{n}_i \otimes \vec{n}_j, \qquad (1.6)$$

причем

$$t^{ij}Q_i^{\,k}Q_j^{\,l} = T^{kl}. \qquad (1.7)$$

Мы уже встречались с операцией скалярного произведения тензора $\underset{\sim}{T}$ на вектор $\vec{a}$, в результате чего получается вектор. Если тензор $\underset{\sim}{T}$ не симметричен, то это скалярное произведение некоммутативно

$$\vec{a}\cdot\underset{\sim}{T} \neq \underset{\sim}{T}\cdot\vec{a}. \qquad (1.8)$$

В литературе встречается и такая запись указанного скалярного произведения:

$$\underset{\sim}{T}^{\cdot}\vec{a}; \qquad \underset{\sim}{T}_{.}\vec{a}. \qquad (1.9)$$

При этом первое выражение в (1.9) означает, что вектор $\vec{a}$ умножается скалярно на первый вектор базисной диады тензора $\underset{\sim}{T}$, а второе — что вектор $\vec{a}$ умножается на второй вектор диады. В такой записи полное скалярное произведение тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ имеет вид

$$\underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{P} = t^{ij}p_{ij}. \qquad (1.10)$$

При этом верхний значок скалярного умножения указывает на то, что умножаются первые векторы диад тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$, а нижний — что умножаются вторые векторы этих диад. Точно так же запись

$$\underset{\sim}{T} \underset{\cdot}{\otimes} \underset{\sim}{P} \qquad (1.11)$$

означает, что первые векторы диад тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$ умножаются тензорно, а вторые — скалярно.

В результате умножения (1.11) получится тензор $\underset{\sim}{S}$:

$$s^{ij} = t^{i}{}_{k}p^{jk}. \qquad (1.12)$$

Для того чтобы записать скалярное произведение двух тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{P}$, в котором участвует первый вектор диады $\underset{\sim}{P}$ и второй вектор диады $\underset{\sim}{T}$, нужно сначала транспонировать тензор $\underset{\sim}{T}$, а затем воспользоваться записью (1.9): $\underset{\sim}{\tilde{T}}{}^{\cdot}\underset{\sim}{P}$. Знак тензорного умножения при этом часто опускают:

$$\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{P}=t^{ik}\vec{e}_i\vec{e}_k\cdot p^{jl}\vec{e}_j\vec{e}_l=t^i{}_k p^{jk}\vec{e}_i\vec{e}_j. \qquad (1.13)$$

Заметим, что записью (1.8) можно воспользоваться, чтобы одному вектору $\vec{a}$ поставить в соответствие другой вектор $\vec{b}$:

$$\vec{b}=\underset{\sim}{T}.\vec{a}. \qquad (1.14)$$

Тем самым *тензор второго ранга* $\underset{\sim}{T}$ (1.3) можно рассматривать как преобразование вектора в вектор. Это третье определение тензора (считая первым определение с помощью преобразования его компонент (3.14) главы 1, а вторым «бескоординатное» определение, данное в § 3 гл. 2).

Заметим также, что запись (1.14) носит инвариантный характер и не зависит от координат. В ней тензор $\underset{\sim}{T}$ — не матрица его компонент, как было в записи (5.2) гл. 1, а инвариантный объект, не связанный с выбором того или иного базиса.

Поэтому такая запись, так же как и (1.8), (1.9), (1.11), называется *безындексной записью*. При такой форме записи не нужно обращаться к выбору системы координат, что и определяет ее инвариантный характер.

Замечание. В дифференциальной геометрии построение уравнения структуры в методе подвижного репера заключается в следующем. В произвольной точке M пространства $\mathscr{R}_3$ выбирается репер $\vec{n}_i$ (тройка некомпланарных векторов). Определяется инфинитезимально близкий к этому реперу трехгранник приращением радиус-вектора вершины $d\vec{r}$ и векторов репера $d\vec{n}_i$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$d\vec{r}=\omega^i\vec{n}_i;\quad d\vec{n}_i=\omega_i{}^j\vec{n}_j. \qquad (1.15)$$

В частности, для голономного репера, связанного с системой координат α^i,

$$d\vec{r}=\vec{e}_i d\alpha^i;\quad d\vec{e}_i=\Gamma^j{}_{ik}d\alpha^k\vec{e}_j. \qquad (1.16)$$

Пусть теперь справедливы формулы (1.5) связи неголономного репера $\vec{n}_i$ с голономным $\vec{e}_i$. Подставляя (1.5) в (1.15) и сравнивая с (1.16), получим

$$\begin{gathered} d\alpha^j=\omega^i Q_i{}^j; \\ dQ_i{}^k=\omega_i{}^j Q_j{}^k-Q_i{}^n Q_l{}^m\Gamma^k_{nm}\omega^l. \end{gathered} \qquad (1.17)$$

Если система координат α^i является прямоугольной декартовой, то

$$d\alpha^j=\omega^i Q_i{}^j;\quad dQ_i{}^k=\omega_i{}^j Q_j{}^k. \qquad (1.18)$$

Пусть дан тензор $\underset{\sim}{T}$. Для него справедливы формулы (1.7), причем $T^{ij}=\mathrm{const}$. Дифференцируя выражение (1.7), получим уравнение

$$dT^{ij}+\omega_k{}^iT^{kj}+\omega_k{}^jT^{ik}=0, \tag{1.19}$$

которое носит название структурного уравнения тензора.

Упражнение 1.1. Доказать, что для матрицы $P_i{}^j$, обратной к $Q_i{}^j$, справедливо уравнение

$$dP_i{}^j=-P_i{}^m\omega_m{}^j. \tag{1.20}$$

Упражнение 1.2. Вывести структурные уравнения

$$dT_{ij}-\omega_i{}^kT_{kj}-\omega_j{}^kT_{ik}=0, \tag{1.21}$$

$$dT_i{}^j-\omega_i{}^kT_k{}^j+\omega_k{}^jT_i{}^k=0. \tag{1.22}$$

Упражнение 1.3. Доказать, что интегралом уравнений (1.19) является (1.7).

Упражнение 1.4. Доказать, что интегралом уравнений (1.21) и (1.22) являются соответственно выражения

$$t_{ij}P_k{}^iP_l{}^j=T_{kl}, \tag{1.23}$$

$$t_i{}^jP_k{}^iQ_j{}^l=T_k{}^l. \quad \bullet \tag{1.24}$$

При исследовании различных физических вопросов, связанных с исследованием алгебраических свойств тензора 4-го ранга, часто бывает удобно перейти от трехмерного тензора 4-го ранга к матрице 9-го порядка, элементы которой, как у всякой матрицы, зависят от двух индексов. Этот переход осуществляется путем замены пары индексов ij ($i, j=1, 2, 3$) одним индексом α ($\alpha=1, 2, \ldots, 9$). Тем самым каждому трехмерному тензору 2-го ранга ставится в соответствие девятимерный вектор. Если тензор 2-го ранга симметричен, то ему соответствует шестимерный вектор, а тензору 4-го ранга, симметричному по первой и второй паре индексов, — шестимерный тензор 2-го ранга. При этом стараются сохранить соответствие между одним из инвариантов тензора T_{ij} и инвариантом шестимерного вектора $\vec{t}$:

$$T_{ij}T^{ji}=t_qt^q \quad (i, j=1, 2, 3;\ q=1, \ldots, 6); \tag{1.25}$$

поэтому полагают

$$t_1=T_{11},\ t_2=T_{22},\ t_3=T_{33},$$

$$t_4=\sqrt{2}\,T_{23},\ t_5=\sqrt{2}\,T_{31},\ t_6=\sqrt{2}\,T_{12}. \tag{1.26}$$

Упражнение 1.5. Доказать, что всякий тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ можно представить в виде суммы двух тензоров симметричного $\underset{\sim}{S}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{A}$

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{A}. \quad \bullet \tag{1.27}$$

Очевидно, что в евклидовом пространстве можно выбрать ортонормированный базис $\vec{k}_i$, в котором различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров исчезает. Поэтому в таком базисе тензорные соотношения могут быть записаны, как уже указывалось, только при помощи одних нижних индексов. Например, для вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\vec{k}_i$ можно записать

$$\vec{a}=a_i\vec{k}_i, \tag{1.28}$$

а тензор, скажем, 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$

$$\underset{\sim}{a}=a_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j, \tag{1.29}$$

где суммирование производится по повторяющимся нижним индексам. Фундаментальная матрица, соответствующая этому базису, будет единичной и записывается с помощью символов Кронекера δ_{ij}.

§ 2. Псевдотензоры

В главе 2 были установлены свойства ϵ-объектов, согласно которым, например, определитель матрицы a_{ij} (обозначим его через $|a|$) имеет вид

$$|a|=\epsilon_{ijk}a_1^i\,a_2^j\,a_3^k; \quad |a|\,\epsilon_{mnl}=\epsilon_{ijk}\,a_m^i\,a_n^j\,a_l^k$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{2.1}$$

Умножая второе соотношение (2.1) на ϵ^{mnl} и суммируя по индексам m, n, l от 1 до 3, получим

$$|a|=\frac{1}{6}\,\epsilon^{mnl}\,\epsilon_{ijk}\,a_m^i\,a_n^j\,a_l^k\equiv\frac{1}{6}\,\delta_{ijk}^{mnl}\,a_m^i\,a_n^j\,a_l^k. \tag{2.2}$$

Из формул (5.29) гл. 2 имеем для трехмерного случая

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{lmk}^{ijk}=\delta_{lm}^{ij}=(\delta_l^i\,\delta_m^j-\delta_m^i\,\delta_l^j),$$

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ljk}=\delta_{lj}^{ij}=2\delta_l^i,$$

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk}=2\delta_i{}^i=6. \tag{2.3}$$

Обозначим через $A_i{}^m$ алгебраическое дополнение к элементу $a_m{}^i$. Так как по определению

$$A_i^m=\frac{\partial|a|}{\partial a_m^i}, \tag{2.4}$$

то из формулы (2.2) имеем

$$A_i^m=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}a_n^j a_l^k. \tag{2.5}$$

Умножая (2.5) на $a_s{}^i$, суммируя по i и воспользовавшись второй формулой (2.1), получим теорему Крамера

$$A_i^m a_s^i=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}\epsilon_{ijk}a_n^j a_l^k a_s^i=\frac{1}{2}\epsilon^{mnl}|a|\epsilon_{snl}=\delta_s^m|a|. \tag{2.6}$$

Введенные ϵ-объекты позволяют проводить аналитические выкладки с определителями. Так, например, пусть нам нужно подсчитать определитель разности двух матриц $a\{a_j{}^i\}$ и $b\{b_j{}^i\}$. Как и прежде, обозначим след матрицы a через $\langle a\rangle$. Воспользовавшись формулой (2.2), запишем

$$|a-b|=\frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn}(a_i^l-b_i^l)(a_j^m-b_j^m)(a_k^n-b_k^n)=$$

$$=\frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn}[a_i^l a_j^m a_k^n-3a_i^l a_j^m b_k^n+3a_i^l b_j^m b_k^n-b_i^l b_j^m b_k^n]=$$

$$=|a|-\langle Ab\rangle+\langle aB\rangle-|b|. \tag{2.7}$$

Здесь B — алгебраическое дополнение матрицы b. Обозначим значение внешней формы $\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}$ на векторах базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через

$$S(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}). \tag{2.8}$$

Рассмотрим два вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$. Их *векторным произведением* называется такой вектор $\vec{c}$,

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}, \tag{2.9}$$

что для любого вектора $\vec{x}\in\mathscr{R}_3$ значение внешнего произведения векторов $\vec a, \vec b, \vec x$

$$S(\vec a\wedge\vec b\wedge\vec x)=\vec c\cdot\vec x. \tag{2.10}$$

Пусть, например, в качестве векторов $\vec a$ и $\vec b$ выбраны векторы ортонормированного репера $\vec k_1$ и $\vec k_2$, а в качестве $\vec x$ — вектор $\vec k_3$. Тогда из формулы (2.10) получим

$$\vec c\cdot\vec k_3=1. \tag{2.11}$$

Таким образом, вектор $\vec c$ совпадает с вектором $\vec k_3$,

$$\vec k_3=\vec k_1\times\vec k_2. \tag{2.12}$$

Если вектор $\vec x$ выбрать лежащим в плоскости векторов $\vec a$ и $\vec b$, то правая часть (2.10) обратится в нуль. Следовательно, вектор $\vec c$ (2.9) ортогонален к векторам $\vec a$ и $\vec b$.

Ранее было установлено, что при переходе от одного базиса к другому по формуле

$$\vec e_{i'}=X^i_{i'}\vec e_i;\quad \vec e_i=Y^{i'}_i\vec e_{i'} \tag{2.13}$$

внешнее произведение векторов базиса преобразуется по закону

$$\vec e_{1'}\wedge\vec e_{2'}\wedge\vec e_{3'}=\det|X^i_{i'}|\,\vec e_1\wedge\vec e_2\wedge\vec e_3. \tag{2.14}$$

Если в качестве $\vec e_i$ взять ортонормированный репер $\vec k_i$, то

$$S(\vec e_{i'}\wedge\vec e_{j'}\wedge\vec e_{k'})=\sqrt{g}\,\epsilon_{i'j'k'}, \tag{2.15}$$

так как

$$g=\det|\vec e_{i'}\cdot\vec e_{j'}|=\{\det|X^i_{i'}|\}^2 \tag{2.16}$$

(см. гл. 1, (6.44)). Поэтому значение внешней формы $\vec a\wedge\vec b\wedge\vec x$ на векторах ортонормированного репера $\vec k_i$ имеет вид

$$S(\vec a\wedge\vec b\wedge\vec x)=\epsilon_{ijk}a^ib^jx^k, \tag{2.17}$$

а на векторах репера $\vec{e}_i$, полученного из ортонормированного преобразованием (2.13), —

$$S(\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{x})=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^ib^jx^k. \qquad (2.18)$$

Сравнивая (2.18) с правой частью (2.10), получим

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^ib^j\vec{e}^k; \qquad (2.19)$$

так как

$$\vec{c}\cdot\vec{x}=c_kx^k;\quad \vec{c}=c_k\vec{e}^k. \qquad (2.20)$$

Упражнение 2.1. Определив значение внешней формы (2.8) на векторах взаимного репера $\vec{e}^i$, доказать, что из определения (2.9), (2.10) следует

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}a_ib_j\vec{e}_k. \qquad (2.21)$$

Упражнение 2.2. Пользуясь определениями (2.19), (2.21) и формулами (2.3), доказать, что

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}), \qquad (2.22)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) \quad \bullet$$

Рассмотрим тройку некомпланарных векторов $\vec{a}_i$. Построим другую тройку векторов $\vec{a}^i$ по формулам

$$\vec{a}^i=\frac{\epsilon^{ijk}\vec{a}_j\times\vec{a}_k}{2S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3)}, \qquad (2.23)$$

или

$$\vec{a}^1=\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{V};\quad \vec{a}^2=\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{V};\quad \vec{a}^3=\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{V}; \qquad (2.24)$$

где

$$V\equiv S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3). \qquad (2.25)$$

Умножим скалярно обе части равенства (2.23) на $\vec{a}_l$:

$$\vec{a}^i\cdot\vec{a}_l=\frac{\epsilon^{ijk}S(\vec{a}_j\wedge\vec{a}_k\wedge\vec{a}_l)}{2S(\vec{a}_1\wedge\vec{a}_2\wedge\vec{a}_3)}=\frac{V\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl}}{2V}=\delta^i_l. \qquad (2.26)$$

Тройки векторов, обладающие свойством (2.26), называются взаимными. В частности, если $\vec{e}_i$ — тройка векторов репера, то из формул (2.19) и (2.23) вытекает

$$\vec{e}^i = \frac{1}{2\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \vec{e}_j \times \vec{e}_k. \tag{2.27}$$

Упражнение 2.3. Доказать справедливость формулы

$$\vec{e}_i = \frac{\sqrt{g}}{2} \epsilon_{ijk} \vec{e}^j \times \vec{e}^k. \quad \bullet \tag{2.28}$$

Умножим (2.27) на ϵ_{imn} и просуммируем по i. Воспользовавшись второй формулой (2.3), получим

$$\vec{e}^i \epsilon_{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{e}_j \times \vec{e}_k, \tag{2.29}$$

отсюда

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} \vec{e}^k. \tag{2.30}$$

Упражнение 2.4. Доказать, что

$$\vec{e}^i \times \vec{e}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} \vec{e}_k. \quad \bullet \tag{2.31}$$

Сравнивая формулы (2.19) и (2.20), видим

$$c_k = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} a^i b^j. \tag{2.32}$$

Умножим теперь (2.32) на ϵ^{klm} и просуммируем по k. Тогда, воспользовавшись формулой (2.3), получим

$$a^l b^m - a^m b^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{klm} c_k. \tag{2.33}$$

Следовательно, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ можно представить в виде кососимметричного тензора 2-го ранга, компонентами которого являются величины, стоящие в левой части соотношений (2.33). Вообще, любой кососимметричный тензор 2-го ранга можно представить в виде вектора и, обратно, каждому вектору соответствует кососимметричный тензор 2-го ранга.

Пусть a^{ij} — компоненты кососимметричного тензора 2-го ранга $(a^{ij}=-a^{ji})$. Тогда

$$a^{ij}=\frac{1}{2}(a^{ij}-a^{ji})=\frac{1}{2}(\delta^i_l\delta^j_m-\delta^j_l\delta^i_m)a^{lm}=$$

$$=\frac{1}{2}\epsilon^{kij}\epsilon_{klm}a^{lm}. \qquad (2.34)$$

Обозначим

$$a_k=\sqrt{g}\,\epsilon_{klm}a^{lm}. \qquad (2.35)$$

Тогда из (2.34) следует

$$a^{ij}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{kij}a_k. \qquad (2.36)$$

Следовательно, взаимно обратное соотношение между вектором $\vec{a}$ и кососимметричным тензором второго ранга $\underset{\sim}{a}$ представлено соотношениями (2.35) и (2.36). Правда, нужно еще доказать, что величины (2.36) являются компонентами тензора $\underset{\sim}{a}$ и всякий ли вектор можно представить в виде (2.35). (Ведь в векторном анализе вектор, который является векторным произведением двух полярных векторов, называют осевым (аксиальным) вектором.) В самом деле, вопрос о тензориальности величин (2.35), (2.36) нуждается в уточнении.

Прежде всего заметим, что соотношение (2.1)

$$\epsilon_{ijk}a^i_{i'}a^j_{j'}a^k_{k'}=|a|\epsilon_{i'j'k'} \qquad (2.37)$$

можно рассматривать как преобразование компонент є-экстенсива ϵ_{ijk} при переходе от одной системы координат к другой (2.13). Поэтому є-объект, вообще говоря, тензором не является. Однако ввиду большого распространения величин типа (2.37) в физике придумано специальное название — *относительные тензоры.*

Предположим, что $\det|X^i_{i'}|>0$, тогда экстенсив 2-го ранга

$$\underset{\sim}{Q}=Q_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j \qquad (2.38)$$

называется *относительным тензором веса p, если* при переходе от одной системы координат к другой (2.13) компоненты этого тензора преобразуются по закону

$$Q^{j'}_{i'}=\{\det|X^i_{i'}|\}^pX^i_{i'}Y^{j'}_jQ^j_i. \qquad (2.39)$$

Относительный тензор веса нуль называется *истинным тензором* или просто тензором. Нетрудно дать обобщение этого определения на относительные тензоры любого ранга и произвольной размерности пространства $\mathscr{R}_n$. Таким образом, ϵ-объект является относительным псевдотензором 3-го ранга веса — 1.

Упражнение 2.5. Доказать, что экстенсив, компонентами которого являются величины ϵ^{ijk}, является относительным псевдотензором 3-го ранга веса $+1$. ●

Легко видеть, что для метрического тензора g_{ij}

$$g_{i'j'} = X^i_{i'} X^j_{j'} g_{ij}, \tag{2.40}$$

поэтому

$$\det|g_{i'j'}| = \{\det|X^{i'}_i|\}^2 \det|g_{ij}|, \tag{2.41}$$

откуда следует, что величина $\sqrt{g}$ — относительный скаляр веса 1.

Упражнение 2.6. Доказать, что тензорное произведение двух относительных тензоров, один из которых имеет вес $+p$, а другой $-p$, является истинным тензором.

Упражнение 2.7. Доказать, что величины $\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}$ и $\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}$ являются компонентами истинных тензоров 3-го ранга, которые называются *тензорами Леви-Чивиты*. ●

Всюду ранее мы предполагали, что преобразование (2.13) — непрерывное, т. е. непрерывно может быть получено из тождественного. Если же это не так, то $\det|X^i_{i'}|$ может быть и отрицательным. Обозначим через $|X^i_{i'}|$ абсолютное значение $\det|X^i_{i'}|$:

$$|X^i_{i'}| \equiv |\det|X^i_{i'}||. \tag{2.42}$$

Пусть $\varkappa$ — знак определителя $\det|X^i_{i'}|$

$$\varkappa \equiv \operatorname{sign}\det|X^i_{i'}|. \tag{2.43}$$

Дадим определение, обобщающее (2.39). Пусть дан экстенсив

$$\underset{\sim}{P} = \{P^{i_1 \ldots i_m}{}_{j_1 \ldots j_n}\}. \tag{2.44}$$

Экстенсив $\underset{\sim}{P}$ (2.44) называется *относительным псевдотензором $(\widetilde{m}+n)$-го ранга веса p*, если при переходе от одной системы координат к другой (2.13) компоненты этого экстенсива преобразуются по закону*

$$P^{i'_1 \ldots i'_m}{}_{j'_1 \ldots j'_n} = \varkappa |X^{i}_{i'}|^p X^{j_1}_{j'_1} \ldots X^{j_n}_{j'_n} Y^{i'_1}_{i_1} \ldots$$

$$\ldots Y^{i'_m}_{i_m} P^{i_1 \ldots i_m}{}_{j_1 \ldots j_n}. \tag{2.45}$$

Если $\varkappa = 1$, то $\underset{\sim}{P}$ называется *относительным тензором $(m+n)$-го ранга веса p.*

Относительный псевдотензор веса нуль называется истинным псевдотензором или просто псевдотензором, а относительный тензор веса нуль — абсолютным тензором (или истинным, или тензором).

Упражнение 2.8. Доказать, что величины δ^{ijk}_{lmn} являются компонентами абсолютного тензора шестого ранга, трижды ковариантного и трижды контравариантного. ●

В случае, если допускается значение $\varkappa = -1$, считаем, что

$$g = |\det|g_{ij}||. \tag{2.46}$$

Упражнение 2.9. Доказать, что величины $\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}$ и $\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk}$ являются компонентами псевдотензора 3-го ранга ковариантного и контравариантного соответственно. ●

С помощью полученных формул (2.23) можно доказать следующую теорему (см. гл. 1, § 6).

Теорема. *Всякий тензор 2-го ранга $\underset{\sim}{T}$ можно представить в $\mathfrak{R}_3$ суммой трех диад, в которых в качестве первых или вторых векторов диад можно выбрать три произвольных линейно-независимых вектора.*

Для доказательства выберем три произвольных некомпланарных вектора $\vec{a}_i$ и положим

$$\underset{\sim}{T} \cdot \vec{a}_i = \vec{b}_i. \tag{2.47}$$

Построим три вектора $\vec{a}^j$ по формулам (2.23) или (2.24). Тогда тензор $\underset{\sim}{T}$ можно представить в виде

* При этом вид самого экстенсива $\underset{\sim}{P}$ также меняется.

$$\underset{\sim}{T}=\vec{b}_j\otimes\vec{a}^j. \tag{2.48}$$

В самом деле, умножая скалярно (2.48) на $\vec{a}_i$ справа, получим в силу (2.26) выражение (2.47). Но тензор, удовлетворяющий условию (2.47) для двух фиксированных троек векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$, может быть только один. Предполагая противное, для $\underset{\sim}{T}'$ имеем

$$\underset{\sim}{T}'\cdot\vec{a}_i=\vec{b}_i. \tag{2.49}$$

Следовательно,

$$(\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}')\cdot\vec{a}_i=0. \tag{2.50}$$

Но тогда тензор $\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}'$ при скалярном умножении справа на произвольный вектор $\vec{c}$ даст нулевой вектор, ибо всякий вектор $\vec{c}$ можно единственным образом разложить по векторам $\vec{a}_i$. Поэтому тензор $\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}'$ является нулевым, что и требовалось доказать.

Упражнение 2.10. Доказать последнее утверждение, а именно: если при скалярном умножении заданного тензора $\underset{\sim}{T}$ на произвольный вектор $\vec{c}$

$$\underset{\sim}{T}\cdot\vec{c}=0, \tag{2.51}$$

то $\underset{\sim}{T}\equiv 0$.

Упражнение 2.11. Провести доказательство теоремы, умножая векторы $\vec{a}_i$ слева на тензор $\underset{\sim}{T}$. ●

§ 3. Инварианты тензора второго ранга

Из соотношения (2.6) следует, что для произведения матриц A и a справедливо соотношение

$$Aa=\mathcal{I}\,|a|. \tag{3.1}$$

При этом формулу (2.4) в матричном виде можно представить так:

$$A=\frac{\partial|a|}{\partial a}. \tag{3.2}$$

Упражнение 3.1. Доказать, что для симметричной матрицы справедливы соотношения

$$\frac{\partial\langle a\rangle}{\partial a}=\mathcal{I}, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\langle a^2\rangle}{\partial a}=2a, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial\langle a^3\rangle}{\partial a}=3a^2. \; \bullet \tag{3.5}$$

Упражнение 3.2. Обобщая предыдущие формулы для n-й степени матрицы a

$$\langle a^n\rangle_i^j\equiv a_i^{i_1}a_{i_1}^{i_2}\ldots a_{i_{n-2}}^{i_{n-1}}a_{i_{n-1}}^j, \tag{3.6}$$

$$\langle a^n\rangle\equiv a_i^{i_1}a_{i_1}^{i_2}\ldots a_{i_{n-2}}^{i_{n-1}}a_{i_{n-1}}^i, \tag{3.7}$$

доказать, что

$$\frac{\partial\langle a^n\rangle}{\partial a}=na^{n-1}. \tag{3.8}$$

Упражнение 3.3. Обобщить формулы (3.3), (3.4), (3.5) и (3.8) на случай несимметричной матрицы a. ●

Раскрывая формулу (2.2), получим

$$6|a|=\delta_{lmn}^{ijk}a_i^la_j^ma_k^n=\begin{vmatrix}\delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i\\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j\\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k\end{vmatrix}a_i^la_j^ma_k^n=$$

$$=\delta_l^i\delta_m^j\delta_n^ka_i^la_j^ma_k^n+(\delta_n^i\delta_l^j\delta_m^k+\delta_l^k\delta_m^i\delta_n^j)a_i^la_j^ma_k^n-$$

$$-(\delta_n^i\delta_m^j\delta_l^k+\delta_m^i\delta_l^j\delta_n^k+\delta_l^i\delta_n^j\delta_m^k)a_i^la_j^ma_k^n=$$

$$=(a_l^l)^3+2a_n^la_l^ma_m^n-3a_n^la_m^ma_l^n, \tag{3.9}$$

отсюда

$$|a|=\frac{1}{6}[\langle a\rangle^3+2\langle a^3\rangle-3\langle a\rangle\langle a^2\rangle]. \tag{3.10}$$

Дифференцируя выражение (3.10) согласно (3.2) и используя соотношения (3.3)—(3.5), получим

$$A=a^2+\frac{1}{2}\langle a\rangle^2\mathcal{I}-\frac{1}{2}\langle a^2\rangle\mathcal{I}-\langle a\rangle a. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в формулу (3.1), получим

$$a^3=\langle a\rangle a^2-\frac{1}{2}[\langle a\rangle^2-\langle a^2\rangle]a+|a|\mathcal{I}. \tag{3.12}$$

Выражение (3.12) носит название *формулы Гамильтона — Кели.*

Согласно этой формуле любую степень матрицы выше второй можно выразить через первые две степени матрицы a и единичную $\mathcal{I}$, причем коэффициентами являются полиномиальные функции от следов матриц a, a^2 и a^3. Из этой же формулы следует, что след любой степени $n>3$ матрицы a (3.7) может быть выражен в виде полиномиальной функции через следы матриц a, a^2, a^3. А так как всякий тензор 2-го ранга в каждой точке $\mathcal{R}_3$ имеет компонентами матрицу второго порядка, то ***всякий симметричный тензор второго ранга S имеет три независимых алгебраических инварианта****. В качестве этих инвариантов можно выбрать величины

$$\langle s\rangle,\ \langle s^2\rangle,\ \langle s^3\rangle \text{ или } \langle s\rangle,\ \langle s^2\rangle,\ |s| \tag{3.13}$$

и т. д., где под s будем понимать матрицы, образующие, вообще говоря, смешанные компоненты тензора

$$\underset{\sim}{S}=s_i{}^j\vec{e}^i\otimes\vec{e}_j, \tag{3.14}$$

т. е.

$$\langle s\rangle=s_i{}^i=g_{ij}s^{ij}=g^{ij}s_{ij};$$

$$\langle s^2\rangle=s_j{}^is_i{}^j=g^{ij}g^{kl}s_{il}s_{kj}=s_{ij}s^{ji}=g_{il}g_{kj}s^{ij}s^{kl};$$

$$\langle s^3\rangle=s_j{}^is_k{}^js_i{}^k=g^{ij}g^{kl}g^{mn}s_{il}s_{kn}s_{mj}=$$

$$=g_{il}g_{kn}g_{mj}s^{ij}s^{kl}s^{mn};$$

$$6|s|=\epsilon^{ijk}_{lmn}\,s_i^l\,s_j^m\,s_k^n=g\,\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmn}\,s^{il}\,s^{jm}\,s^{kn}=$$

$$=\frac{1}{g}\,\epsilon^{ijk}\,\epsilon^{lmn}\,s_{il}\,s_{jm}\,s_{kn}. \tag{3.15}$$

Под следами $\langle\underset{\sim}{S}\rangle$, $\langle\underset{\sim}{S}^2\rangle$, $\langle\underset{\sim}{S}^3\rangle$ понимаем следы соответствующих матриц (3.15), вычисленные в каждой точке M пространства $\mathcal{R}_3$. При этом из соотношений (1.4) видно, что

$$s_i{}^j=s^{kj}g_{ik}=s_{ik}g^{kj}. \tag{3.16}$$

Пусть с помощью тензора $\underset{\rightleftarrows}{T}$ задается преобразование, т. е. каждому вектору $\vec{a}\in\mathcal{R}_3$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{b}\in\mathcal{R}_3$:

---

* Вопрос о функционально независимых инвариантах будет рассмотрен в § 3 гл. 4.

$$\vec{b} = \underset{\sim}{T} \cdot \vec{a} \tag{3.17}$$

или, разлагая векторы и тензор по базису $\vec{e}_i$,

$$b^i \vec{e}_i = t^i{}_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j \cdot a^k \vec{e}_k; \quad \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_k{}^j. \tag{3.18}$$

Следовательно,

$$b^i e_i = t^i{}_j a^j \vec{e}_i, \tag{3.19}$$

или

$$b^i = t^i{}_j a^j. \tag{3.20}$$

Преобразование (3.20) задается в каждой точке M пространства $\mathscr{R}_3$.

Отыщем теперь такой вектор $\vec{a}$, который после преобразования (3.17) в некоторой точке M остается коллинеарным самому себе, т. е. не поворачивается:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}; \qquad b^i = \lambda a^i. \tag{3.21}$$

Такой вектор называется *собственным вектором тензора* $\underset{\sim}{T}$, направление собственного вектора — главной осью тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M, а число λ называется *собственным значением* $\underset{\sim}{T}$ в точке M. Согласно (3.20) и (3.21) имеем

$$(\lambda \delta^i{}_j - t^i{}_j) a^j = 0. \tag{3.22}$$

Для нахождения собственных значений нужно решить систему алгебраических уравнений (3.22) относительно компонент вектора $\vec{a}$. Эта система однородная. Следовательно, определитель этой системы нужно приравнять нулю. В матричной записи имеем

$$P(\lambda) \equiv |\lambda \mathscr{I} - t| = 0, \tag{3.23}$$

где $P(\lambda)$ — *характеристический полином*. Найдем его корни. Для этого воспользуемся формулой (2.7)

$$P(\lambda) \equiv |\lambda \mathscr{I} - t| \equiv \lambda^3 - \lambda^2 \langle t \rangle + \lambda \langle T \rangle - |t| = 0, \tag{3.24}$$

где T — алгебраическое дополнение матрицы t.

Заметим, что характеристический полином не изменяется при любом преобразовании подобия Q (см. § 6 гл. 1). В самом деле, пусть

$$t' = QtQ^{-1}, \tag{3.25}$$

тогда

$$|\lambda\mathcal{I}-t'|=|Q(\lambda\mathcal{I}-t)Q^{-1}|=$$
$$=|Q|\,|\lambda\mathcal{I}-t|\,|Q|^{-1}=|\lambda\mathcal{I}-t|. \qquad (3.26)$$

Таким образом, характеристический полином инвариантен по отношению ко всем преобразованиям подобия. Поэтому всякий тензор $\underset{\sim}{T}$ имеет три независимых инварианта

$$\langle t\rangle,\ \langle T\rangle,\ |t|. \qquad (3.27)$$

Согласно основной теореме алгебры уравнение (3.24), как и всякое кубическое, имеет три корня. Эти корни и являются собственными значениями тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M. Если тензор $\underset{\sim}{T}$ симметричный, то корни являются действительными. В самом деле, обозначим через $\vec{a}^*$ вектор, комплексно сопряженный к вектору $\vec{a}$ (т. е. компоненты образуются из a_i комплексным сопряжением). Умножим равенство (3.22) на a_i^* и просуммируем по i. Получим

$$\lambda a^i a_i^* = t_j{}^i a^j a_i^*. \qquad (3.28)$$

Производя теперь операцию комплексного сопряжения над левой и правой частью (3.28) и учитывая симметрию тензора $\underset{\sim}{T}$, получим

$$\lambda^* a^{i*} a_i = t_j{}^i a_i^* a^j; \qquad (3.29)$$

из сравнения (3.28) и (3.29) вытекает, что

$$\lambda=\lambda^*. \qquad (3.30)$$

Далее, предположим, что λ_1 — собственное значение, соответствующее собственному вектору $\vec{a}_{(1)}$, а λ_2 — собственное значение, соответствующее собственному вектору $\vec{a}_{(2)}$. Тогда

$$t_j{}^i a^j{}_{(1)}=\lambda_1 a^i{}_{(1)};\quad t_j{}^i a^j{}_{(2)}=\lambda_2 a^i{}_{(2)}. \qquad (3.31)$$

Умножим первое равенство (3.31) на $a_{(2)i}$, а второе равенство (3.31) — на $a_{(1)i}$, просуммируем по i и вычтем одно равенство из другого. Тогда получим

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,a^i{}_{(1)}a_{(2)i}=0. \qquad (3.32)$$

Отсюда следует, что при $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$g_{ij}a^i{}_{(1)}a^j{}_{(2)}=0, \qquad (3.33)$$

т. е. собственные векторы симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. Поэтому если все собственные значения симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ различны, то он имеет три взаимно ортогональных собственных вектора, которые можно считать единичными (определены с точностью до константы). Эти три вектора могут быть выбраны в качестве локального репера в точке M. Если система координат в $\mathscr{R}_3$ ортогональна, то три собственных вектора тензора $\underset{\sim}{T}$ могут служить базисными векторами для всего пространства $\mathscr{R}_3$, а матрица t_j^i, выражающая тензор в этой системе координат, будет диагоиальной. В случае общей криволинейной системы координат матрица t_j^i является диагональной, вообще говоря, только в точке M.

§ 4. Поверхность Коши

Со всяким симметричным тензором второго ранга $\underset{\sim}{T}$ в каждой точке M можно связать центральную поверхность 2-го порядка. Рассмотрим в точке M квадратичную форму

$$2f \equiv t_{ij}x^i x^j. \tag{4.1}$$

Очевидно, что поверхность

$$f = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

является либо эллипсоидом, либо гиперболоидом (или их вырождением). Поверхность f (4.2) называется *тензорной поверхностью* тензора $\underset{\sim}{T}$ или его поверхностью Коши в точке M. Из (4.1) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = t_{ij}x^j \equiv y_i, \tag{4.3}$$

или

$$\vec{y} = \mathrm{grad}\, f. \tag{4.4}$$

Таким образом поверхность (4.2), соответствующая квадратичной форме (4.1), связанной с тензором $\underset{\sim}{S}$, допускает следующее геометрическое толкование. Всякому вектору

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{4.5}$$

поверхность Коши ставит в соответствие вектор $\vec{y} \in \in \mathscr{R}_3$

$$\vec{y} = \vec{y}_i e^i, \tag{4.6}$$

причем для него справедливо выражение (4.4).

Пусть, например, поверхность Коши тензора $\underset{\sim}{T}$ является эллипсоидом (рис. 9). Очевидно, что если три полуоси этого эллипсоида имеют различные значения, то существуют только три взаимно перпендикулярных направления, по которым вектор $\vec{x}$ коллинеарен вектору $\vec{y}$. Эти направления и называются *главными направлениями* тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M.

Пусть теперь $\underset{\sim}{T}$ — произвольный симметричный тензор в $\mathscr{R}_3$. Рассмотрим соответствующую ему в точке

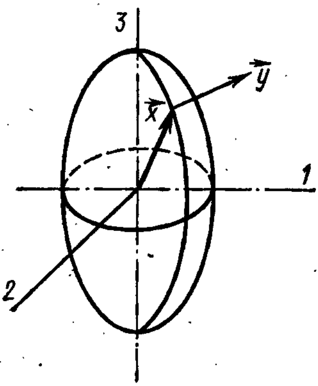

Рис. 9

M квадратичную форму (4.1). Найдем экстремальные значения функции f на единичных векторах $\vec{x}$, т. е. при дополнительных условиях

$$g_{ij}x^i x^j = 1. \qquad (4.7)$$

Для решения поставленной задачи на условный экстремум воспользуемся методом Лагранжа, т. е. разыщем экстремум функции

$$F = 2f - \lambda(g_{ij}x^i x^j - 1). \qquad (4.8)$$

Для этого приравняем нулю частные производные этой функции

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \equiv 2\left(t_{ij} - \lambda g_{ij}\right) x^j = 0. \qquad (4.9)$$

Умножая левую часть (4.9) на g^{ki} и суммируя по i, получим систему (3.22), а значит, для определения экстремальных значений тензора $\underset{\sim}{T}$ в точке M нужно решить характеристическое уравнение (3.24), т. е. экстремальными значениями тензора $\underset{\sim}{T}$ являются его главные значения.

В главных осях уравнение (4.2), таким образом, имеет вид

$$\lambda_1(x^1)^2+\lambda_2(x^2)^2+\lambda_3(x^3)^2=\text{const}. \tag{4.10}$$

Если все $\lambda_i>0$, то поверхность Коши является эллипсоидом.

Итак, всякий симметричный тензор 2-го порядка $\underset{\sim}{T}$ порождает в каждой точке M преобразование, переводящее всякую сферу в поверхность 2-го порядка.

Поверхностью Коши для единичного тензора является сфера. Поэтому тензор

$$\underset{\sim}{P}=p\underset{\sim}{\mathcal{I}}=pg_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j=p\delta_j{}^i\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j=pg^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j, \tag{4.11}$$

где p — некоторый скаляр, называется *шаровым тензором*.

Девиатором $\underset{\sim}{D}$ называется симметричный тензор 2-го ранга, след которого равен нулю, т. е.

$$\langle\underset{\sim}{D}\rangle\equiv d_i{}^i\equiv d_{ij}g^{ij}\equiv d^{ij}g_{ij}=0. \tag{4.12}$$

Девиатором симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ называется тензор $\underset{\sim}{\overline{T}}$

$$\underset{\sim}{\overline{T}}=\underset{\sim}{T}-\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{T}\rangle\underset{\sim}{\mathcal{I}}, \tag{4.13}$$

или для компонент тензора $\underset{\sim}{\overline{T}}$

$$\begin{gathered}\bar{t}_{ij}=t_{ij}-\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{T}\rangle g_{ij},\\ \bar{t}^{ij}=t^{ij}-\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{T}\rangle g^{ij},\\ \bar{t}^i_j=t^i_j=\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{T}\rangle\delta^i_j,\end{gathered} \tag{4.14}$$

где след $\langle\underset{\sim}{T}\rangle$ тензора $\underset{\sim}{T}$ определяется формулами (3.15) или (4.12).

Упражнение 4.1. Доказать, что всякий симметричный тензор 2-го ранга можно разложить на сумму шарового и девиатора.

Упражнение 4.2. Доказать, что у девиатора $\overline{\underset{\sim}{T}}$ тензора $\underset{\sim}{T}$ имеется только два независимых инварианта. ●

Инвариант $\sqrt{\langle \overline{\underset{\sim}{T}}^2 \rangle}$ называется *интенсивностью тензора* $\underset{\sim}{T}$ и обозначается $t_и$:

$$t_и^2 \equiv \langle \overline{\underset{\sim}{T}}^2 \rangle \equiv \overline{T}_{ij}\overline{T}^{ji} \equiv \overline{T}^i_j \overline{T}^j_i \equiv g_{il} g_{kj} \overline{T}^{ij} \overline{T}^{kl}; \qquad (4.15)$$

направляющим тензором $\underset{\sim}{T}$ называется тензор $\underset{\sim}{\widetilde{T}}$

$$\underset{\sim}{\widetilde{T}} = \overline{\underset{\sim}{T}}/t_и. \qquad (4.16)$$

Так как

$$\langle \underset{\sim}{\widetilde{T}} \rangle = 0; \ \langle \underset{\sim}{\widetilde{T}}^2 \rangle = 1, \qquad (4.17)$$

то направляющий тензор $\underset{\sim}{\widetilde{T}}$ тензора $\underset{\sim}{T}$ имеет только один независимый инвариант, т. е. определяется в каждой точке M тремя углами Эйлера, характеризующими положение главных осей тензора $\underset{\sim}{T}$, и, например, инвариантом $|\underset{\sim}{\widetilde{T}}|$.

Упражнение 4.3. Доказать, что

$$\langle \underset{\sim}{T} \rangle^2 \leqslant 3 \langle \underset{\sim}{T}^2 \rangle, \qquad (4.18)$$

т. е.

$$|T^i_i| \leqslant \sqrt{3}\,(t^{ij} t_{ij})^{1/2}. \qquad (4.19)$$

Упражнение 4.4. Доказать, что

$$|\langle \overline{\underset{\sim}{T}}^3 \rangle| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}\, t_и^3, \qquad (4.20)$$

т. е.

$$|\overline{t}^i_k \overline{t}^k_j \overline{t}^j_i| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}\, (\overline{t}^{ij} \overline{t}_{ji})^{3/2}. \qquad (4.21)$$

Упражнение 4.5. Доказать, что для девиатора и направляющего тензора $\underset{\sim}{T}$ поверхностью Коши является гиперболоид.

Упражнение 4.6. Доказать, что преобразование (4.3), ставящее в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$, можно записать в виде

$$\vec{y}=\underset{\sim}{T}\cdot\vec{x};\quad \vec{y}=t_{ij}x^j\vec{e}^i. \bullet \tag{4.22}$$

Очевидно, что величина

$$N\equiv\vec{y}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\vec{x}=2f \tag{4.23}$$

при условии (4.7), т. е.

$$\vec{x}\cdot\vec{x}=1, \tag{4.24}$$

является инвариантом тензора $\underset{\sim}{T}$, зависящим от направления $\vec{x}$. Величина N имеет экстремальные значения, соответствующие экстремальным направлениям $\vec{x}$.

В механике сплошной среды часто бывает нужным представить вектор $\vec{y}$ в виде суммы двух составляющих: вектора $\vec{n}$, коллинеарного единичному вектору $\vec{x}$,

$$\vec{n}=N\vec{x}, \tag{4.25}$$

и вектора $\vec{\tau}$, ортогонального вектору $\vec{n}$,

$$\vec{y}=\vec{n}+\vec{\tau}. \tag{4.26}$$

Из (4.22) и (4.23) следует, что

$$\tau^2=y_iy_jg^{ij}-(t_{ij}x^ix^j)^2=t_{ik}t_{jl}(g^{ij}-x^ix^j)x^kx^l. \tag{4.27}$$

Положим, что $\vec{z}$ — единичный вектор, причем

$$\vec{\tau}=\Gamma\vec{z};\quad \vec{z}\cdot\vec{z}=1. \tag{4.28}$$

Тогда из (4.26) следует, что

$$\Gamma\vec{z}=\vec{y}-N\vec{x}. \tag{4.29}$$

Умножая (4.29) скалярно на вектор $\vec{e}_i$, получим

$$z_i=\frac{y_i-Nx_i}{\Gamma}=\frac{1}{\Gamma}(t_{ij}-t_{kj}x^kx_i)x^j. \tag{4.30}$$

Упражнение 4.7. Доказать, что формулы (4.27) и (4.30) могут быть записаны только через девиатор тензора $\underset{\sim}{T}$ или через направляющий тензор $\underset{\sim}{\boldsymbol{T}}$:

$$\frac{\Gamma^2}{t_{\text{и}}^2}=\tilde{t}_{ik}\tilde{t}_{jl}(g^{ij}-x^ix^j)x^kx^l, \tag{4.31}$$

$$\frac{\Gamma}{t_н} z_i = (\tilde{t}_{ij} - \tilde{t}_{kj} x^k x_i) x^j. \bullet \qquad (4.32)$$

При заданном тензоре $\underset{\sim}{T}$ формула (4.27) или (4.31) позволяет построить так называемую поверхность Колосова, определяющую изменение величины Г, т. е. модуля вектора $\vec{\tau}$ в зависимости от направления вектора $\vec{x}$. Предположим, что в точке M выбран единичный репер $\vec{k}_i$, векторы которого коллинеарны главным направлениям тензора $\underset{\sim}{T}$. Введем полярные координаты: $r = \frac{\Gamma}{t_н}$ — радиус (направлен по вектору $\vec{x}$) и углы θ и φ (рис. 10). Тогда компоненты единичного вектора $\vec{x}$ имеют координаты в базисе $\vec{k}_i$:

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = \cos\theta, \qquad (4.33)$$

направляющий тензор $\underset{\sim}{T}$ в главной системе координат выражается диагональной матрицей. Обозначим его компоненты (т. е. главные значения) через $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$,

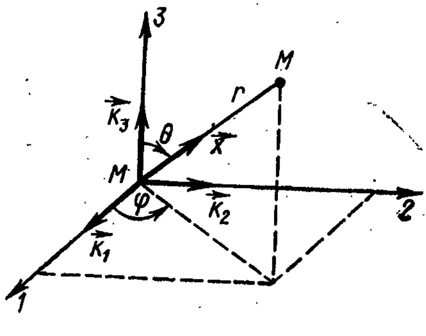

Рис. 10

$\tilde{t}_3$. Тогда согласно (4.17) имеем

$$\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 = 0;\ \tilde{t}_1^2 + \tilde{t}_2^2 + \tilde{t}_3^2 = 1. \qquad (4.34)$$

Упражнение 4.8. Доказать, что экстремальные значения величины Г

$$\Gamma^2 = \tilde{t}_{ik}\tilde{t}_{jl}(g^{ij} - x^i x^j) x^k x^l \qquad (4.35)$$

находятся в направлениях вектора $\vec{x}$:

$$x^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^3 = 0;$$

$$x^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^2 = 0;\ x^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad (4.36)$$

$$x^1 = 0;\ x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ x^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Упражнение 4.9. Доказать, что компоненты $\bar{t}_{ij}$ тензора $\underset{\sim}{\bar{T}}$ в ортогональной системе координат, определяемой одним из направлений (4.36) вектора $\vec{x}$ $\left(\text{например, } \vec{x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}\right)$, вектором $\vec{k}_3$ и вектором $\vec{x}\times\vec{k}_3$, имеют экстремальные значения и связаны с главными значениями тензора $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ и $\bar{t}_3$ соотношениями

$$\bar{t}_{12} = \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{2}. \qquad (4.37)$$

Упражнение 4.10. Значение величины Г в направлении вектора $\vec{x}$

$$\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}_3 \qquad (4.38)$$

называется Г-октаэдрическим и обозначается $\Gamma_н$. Доказать, что

$$\Gamma_н = \frac{1}{\sqrt{3}} t_н = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\bar{t}_1^2 + \bar{t}_2^2 + \bar{t}_3^2}. \qquad (4.39)$$

Условиям (4.34) можно удовлетворить, полагая

$$\tilde{t}_1 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}};\ \tilde{t}_2 = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}};$$

$$\tilde{t}_3 = -\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2+\sin 2\alpha}}, \qquad (4.40)$$

где угол α является единственным параметром, полностью определяющим направляющий тензор $\underset{\sim}{\tilde{T}}$ в главных осях.

Уравнение поверхности Колосова принимает вид

$$r^2 = \tilde{t}_i^2 x_i^2 - (\tilde{t}_i x_i^2)^2. \qquad (4.41)$$

Упражнение 4.11. Доказать, что начало координат M принадлежит поверхности Колосова.

Упражнение 4.12. Доказать, что величина Г имеет экстремальные значения при следующих r:

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+4\sin 2\alpha+3\cos 2\alpha}{2(2+\sin 2\alpha)}};\quad \theta=\frac{\pi}{4};\quad \varphi=0;\ \pi;$$

$$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+4\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{2(2+\sin 2\alpha)}};\quad \theta=\frac{\pi}{4};$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{2}\pi; \tag{4.42}$$

$$r_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}};\quad \theta=\frac{\pi}{2};\quad \varphi=\frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi.$$

Упражнение 4.13. Доказать, что при

$$\theta=\frac{\pi}{4};\ \varphi=\pm\frac{\pi}{4};\ \varphi=\pm\frac{3}{4}\pi;$$

$$\Gamma=\Gamma_{\text{н}};\quad r=r_{\text{н}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7+3\sin 2\alpha}{2+\sin 2\alpha}}. \tag{4.43}$$

Упражнение 4.14. Пусть r_* — максимальные значения из величин r_i ($i=1,\ 2,\ 3$) (4.42). Доказать, что

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\geqslant\frac{r_{\text{н}}}{r_*}\geqslant\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{4.44}$$

Упражнение 4.15. Доказать, что плоскости

$$\theta=0;\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \varphi=0;\ \theta=\frac{\pi}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{2}$$

являются плоскостями симметрии поверхности Колосова. ●

В теоретической механике часто пользуются понятием *тензора моментов инерции* $\underset{\sim}{J}$. Этот симметричный тензор 2-го ранга определяется следующим образом (см. предисловие):

$$J_{ij}=\Sigma m(x^k x_k g_{ij}-x_i x_j). \tag{4.45}$$

Здесь x^k — координаты радиус-вектора $\vec{x}=x^k\vec{e}_k$ некоторой материальной точки, m — масса этой материальной точки. Суммирование происходит по всем таким материальным точкам, причем индекс суммирования опущен.

Шаровая часть этого тензора $\underset{\sim}{J}$

$$J_0 \equiv \frac{1}{2} J_{ij} g^{ij} = \Sigma m x^k x_k \tag{4.46}$$

называется полярным моментом инерции, а диагональные члены в прямоугольной декартовой системе координат — осевыми моментами инерции. Например,

$$J_{11} = \Sigma m[(x_2)^2 + (x_3)^2] \tag{4.47}$$

— осевой момент инерции относительно оси x_1.

Упражнение 4.16. Образовать девиатор тензора момента инерции

$$\overline{J}_{ij} = J_{ij} - \frac{2}{3} J_0 g_{ij} \tag{4.48}$$

и записать его выражения в случае прямоугольной декартовой системы координат. ●

В этом случае его диагональные члены называются моментом инерции относительно соответствующей плоскости, а недиагональные (общие для полного тензора и его девиатора) — центробежными моментами инерции.

§ 5. Тензоры третьего ранга

В этом параграфе рассмотрим представление некоторых тензоров, наиболее часто встречающихся в приложениях. Это представление будет напоминать представление тензора второго ранга, которое было дано в виде суммы антисимметричного тензора (псевдовектора), шарового тензора (скаляра) и девиатора.

Рассмотрим тензор третьего ранга

$$\underset{\sim}{a} = a_{ijk} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k. \tag{5.1}$$

Очевидно, его уже нельзя, как тензор второго ранга, представить в виде суммы антисимметричного и симметричного тензоров. Поэтому выделим из него составляющую, антисимметричную по всем трем индексам, и составляющую, симметричную по всем трем индексам. Оставшуюся часть обозначим через

$$\underset{\sim}{b} = b_{ijk}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k, \tag{5.2}$$

тогда

$$a_{ijk} = \overset{1}{a}_{ijk} + \overset{2}{a}_{ijk} + b_{ijk},$$

$$\overset{1}{a}_{ijk} \equiv a_{[ijk]}; \quad \overset{2}{a}_{ijk} \equiv a_{(ijk)}. \tag{5.3}$$

Легко подсчитать, что первое слагаемое в правой части (5.3) содержит всего одну независимую компоненту, причем

$$\overset{1}{\underset{\sim}{a}} = a_{[ijk]}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k = a_{ijk}\vec{e}^i \wedge \vec{e}^j \wedge \vec{e}^k,$$

$$\overset{1}{a}_{123} = \frac{1}{6\sqrt{g}} e^{ijk} a_{ijk}, \tag{5.4}$$

т. е. тензору $\overset{1}{\underset{\sim}{a}}$ ставится в соответствие псевдоскаляр. Второе слагаемое содержит десять независимых компонент: $\overset{2}{a}_{111}$, $\overset{2}{a}_{222}$, $\overset{2}{a}_{333}$, $\overset{2}{a}_{122}$, $\overset{2}{a}_{133}$, $\overset{2}{a}_{211}$, $\overset{2}{a}_{233}$, $\overset{2}{a}_{311}$, $\overset{2}{a}_{322}$, $\overset{2}{a}_{123}$. При этом из этого тензора можно образовать вектор путем свертки

$$a_{(ijk)} g^{ij} = p_k. \tag{5.5}$$

Выделяя эту векторную составляющую, получим

$$\overset{2}{a}_{ijk} \equiv \frac{3}{5} p_{(i} g_{jk)} + s_{ijk}, \tag{5.6}$$

где

$$s_{ijk} \equiv a_{(ijk)} - \frac{3}{5} p_{(i} g_{jk)} \tag{5.7}$$

— так называемый *септор* [13], который имеет семь независимых компонент (отсюда и название).

Так как тензор $\underset{\sim}{a}$ (5.1) имеет 27 компонент, то на долю тензора $\underset{\sim}{b}$ (5.2) остается 16 независимых компонент. Записав разложение (5.3) для a_{kij} и a_{jki} и воспользовавшись определениями (3.7) и (3.11) гл. 1, получим тождество

$$b_{ijk} + b_{kij} + b_{jki} = 0. \tag{5.8}$$

Упражнение 5.1. Показать, что для компонент тензора (5.2), удовлетворяющих тождеству (5.8), справедливо представление

$$b_{ijk}=\frac{2}{3}(b_{[ij]k}+b_{[ik]j})+\frac{2}{3}(b_{i[jk]}+b_{j[ik]}). \qquad (5.9)$$

Упражнение 5.2. Доказать, используя формулу (5.9), что

$$\epsilon^{ijk}b_{ijk}\equiv 0. \bullet \qquad (5.10)$$

Так как каждому антисимметричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие псевдотензор и, обратно, каждому псевдотензору — антисимметричный тензор второго ранга (формулы (2.35) и (2.36)), то тензору третьего ранга

$$\underset{\sim}{b}\equiv b_{[ij]k}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j\otimes\vec{e}^k, \qquad (5.11)$$

кососимметричному по первым двум индексам, можно поставить в соответствие псевдотензор второго ранга

$$\underset{\sim}{\omega}=\omega^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j=\omega^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j \qquad (5.12)$$

по формуле

$$b_{[ij]k}=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijm}\omega^m_k=\sqrt{g}\,\epsilon_{mij}g_{kl}\omega^{lm}. \qquad (5.13)$$

Аналогично вводим псевдотензор второго ранга

$$\underset{\sim}{\nu}=\nu^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j=\nu^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j, \qquad (5.14)$$

такой, что

$$b_{i[jk]}=\sqrt{g}\,\epsilon_{mjk}\nu^m_i=\sqrt{g}\,\epsilon_{kmj}g_{il}\nu^{lm}. \qquad (5.15)$$

Упражнение 5.3. Используя формулу (2.3), показать, что из (5.13) следует

$$\omega^{ln}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{ijn}b_{[ij]k}g^{kl}=\frac{1}{2\sqrt{g}}g^{kl}\epsilon^{ijn}b_{ijk}. \qquad (5.16)$$

Упражнение 5.4. Показать, что из формулы (5.15) следует выражение для тензора $\underset{\sim}{\nu}$:

$$\nu^{ln}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\epsilon^{njk}b_{i[jk]}g^{il}=\frac{1}{2\sqrt{g}}g^{il}\epsilon^{njk}b_{ijk}. \bullet \qquad (5.17)$$

Таким образом, компоненты тензора $\underset{\sim}{b}$ можно представить, используя формулы (5.13) и (5.15), в виде

$$b_{ijk}=\frac{4}{3}\sqrt{g}\,[\epsilon_{mi(j}g_{k)l}\omega^{lm}+\epsilon_{km(j}g_{i)l}\nu^{lm}]. \qquad (5.18)$$

Упражнение 5.5. Показать, что из выражений (5.16) и (5.17) следует, что

$$\omega^{ln}g_{ln}\equiv 0, \qquad (5.19)$$

$$\nu^{ln}g_{ln}\equiv 0. \; \bullet \qquad (5.20)$$

Разобьем теперь тензоры $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ на симметричную и антисимметричную части:

$$\omega^{lm}=\omega^{(lm)}+\omega^{[lm]}, \qquad (5.21)$$

$$\nu^{lm}=\nu^{(lm)}+\nu^{[lm]}, \qquad (5.22)$$

причем, как следует из (5.19) и (5.20), симметричные части тензоров $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ являются девиаторами $\underset{\sim}{\overline{\omega}}$, $\underset{\sim}{\overline{\nu}}$, т. е. имеют по пяти независимым составляющим

$$\overline{\omega}^{ln}=\omega^{(ln)}, \qquad (5.23)$$

$$\overline{\nu}^{ln}=\nu^{(ln)}. \qquad (5.24)$$

Антисимметричные составляющие тензоров $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ можно выразить с помощью формулы (2.36) через соответствующие псевдовекторы

$$\omega^{[ij]}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\,e^{kij}\omega_k, \qquad (5.25)$$

$$\nu^{[ij]}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\,e^{kij}\nu_k, \qquad (5.26)$$

где согласно (2.35)

$$\omega_k\equiv\sqrt{g}\,e_{klm}\omega^{[lm]}=\sqrt{g}\,e_{klm}\omega^{lm}, \qquad (5.27)$$

$$\nu_k\equiv\sqrt{g}\,e_{klm}\nu^{[lm]}=\sqrt{g}\,e_{klm}\nu^{lm}; \qquad (5.28)$$

причем так как $\underset{\sim}{\omega}$ и $\underset{\sim}{\nu}$ — псеводотензоры, то $\vec{\omega}$ и $\vec{\nu}$ — истинные векторы.

Таким образом, тензор $\underset{\sim}{b}$ может быть выражен через два вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{\nu}$ и два девиатора псевдотензоров $\underset{\sim}{\overline{\omega}}$ и $\underset{\sim}{\overline{\nu}}$, которые в общей сложности имеют 16 независимых компонент. Подставляя выражения (5.21)—(5.26) в (5.18) и используя формулы (2.3), получим

$$b_{ijk}=\frac{2}{3}\left(g_{jk}\omega_i-g_{ij}\nu_k-g_{i(j}\omega_{k)}+g_{k(i}\nu_{j)}\right)+$$

$$+\frac{4}{3}\sqrt{g}\left[\epsilon_{mi(j}g_{k)l}\bar{\omega}^{lm}+\epsilon_{km(j}g_{i)l}\bar{\nu}^{lm}\right]. \qquad (5.29)$$

Итак, искомое представление произвольного тензора третьего ранга $\underset{\sim}{a}$ имеет вид

$$a_{ijk}=a_{[ijk]}+\frac{3}{5}p_{(i}g_{jk)}+\frac{2}{3}\left(g_{jk}\omega_i-g_{i(j}\omega_{k)}-\right.$$

$$\left.-g_{ij}\nu_k+g_{k(i}\nu_{j)}\right)+\frac{4}{3}g\left(\epsilon_{mi(j}g_{k)l}\bar{\omega}^{lm}+\epsilon_{km(j}g_{i)l}\bar{\nu}^{lm}\right)+s_{ijk},$$

$$(5.30)$$

где компоненты векторов $\vec{p}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\nu}$ выражаются соответственно по формулам (5.5), (5.25), (5.26), девиаторов $\underset{\sim}{\bar{\omega}}$ и $\underset{\sim}{\bar{\nu}}$ — (5.23), (5.16); (5.24), (5.17), а септора s — по формуле (5.7).

Пусть теперь тензор $\underset{\sim}{a}$ (5.1) симметричен по первым двум индексам. Именно такие тензоры чаще всего встречаются в физике. Рассмотрим для простоты прямоугольную декартову систему координат. Как отмечалось в § 1, в такой системе координат исчезает разница между ковариантными и контравариантными компонентами, а фундаментальная матрица совпадает с символами Кронекера δ_{ij}. Тогда (5.1) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{a}=a_{ijk}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j\otimes\vec{k}_k;\ a_{ijk}=a_{jik}. \qquad (5.31)$$

Обозначим теперь компоненты векторов, полученные сверткой тензора (5.31) с единичным тензором, следующим образом:

$$a_{ijk}\delta_{ij}\equiv p_k, \qquad (5.32)$$

$$a_{ijk}\delta_{jk}\equiv q_i. \qquad (5.33)$$

Компоненты септора s_{ijk} обладают, очевидно, следующими свойствами:

$$s_{ijk}\delta_{ij}=0,\ s_{ijk}\delta_{jk}=0,\ s_{ijk}\epsilon_{ijk}=0. \qquad (5.34)$$

Тем самым накладывается 11 ограничительных соотношений на, вообще говоря, 18 независимых компонент тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам. Следовательно, и в этом случае имеется только семь независимых компонент септора.

Упражнение 5.6. Доказать, что компоненты ортогонального тензора (5.31) представляются в виде

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_k\delta_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}\delta_{j)k}-\frac{1}{5}q_k\delta_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}\delta_{j)k}+\frac{2}{3}\epsilon_{km(i}\bar{\omega}_{j)m}+s_{ijk}, \qquad (5.35)$$

где $\bar{\omega}_{jm}$ — компоненты девиатора симметричного тензора $\underset{\sim}{\omega}=\omega_{ij}\vec{k}_i\otimes\vec{k}_j$, определяемые соотношениями

$$\bar{\omega}_{in}\equiv a_{ijk}\epsilon_{jkn}+\frac{1}{2}\epsilon_{ikn}(q_k-p_k). \qquad (5.36)$$

Упражнение 5.7. Показать, что в произвольной криволинейиой системе координат представление (5.35) имеет вид

$$a_{ijk}=\frac{2}{5}p_kg_{ij}-\frac{1}{5}p_{(i}g_{j)k}-\frac{1}{5}q_kg_{ij}+$$
$$+\frac{3}{5}q_{(i}g_{j)k}+\frac{2}{3}\sqrt{g}\,\epsilon_{km(i}g_{j)l}\bar{\omega}^{lm}+s_{ijk}, \qquad (5.37)$$

где

$$p_k\equiv a_{ijk}g^{ij},\quad q_i\equiv a_{ijk}g^{jk}, \qquad (5.38)$$

$$\bar{\omega}^{ln}\equiv\frac{1}{\sqrt{g}}\left[g^{kl}\epsilon^{ijn}a_{ijk}\right]+\frac{1}{2}\epsilon^{kln}(q_k-p_k), \qquad (5.39)$$

а компоненты септора удовлетворяют соотношениям

$$s_{ijk}g^{ij}=0,\ s_{ijk}g^{jk}=0,\ s_{ijk}\epsilon^{ijk}=0. \qquad (5.40)$$

§ 6. Тензоры четвертого ранга

Рассмотрим теперь тензор четвертого ранга

$$\underset{\sim}{C}=c^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l. \qquad (6.1)$$

Пусть выполняются свойства, связанные с симметрией этого тензора:

$$c^{ijkl}=c^{jikl}=c^{ijlk}=c^{klij}. \qquad (6.2)$$

Благодаря этим свойствам тензор $\underset{\sim}{C}$ имеет всего 21 независимую компоненту.

Образуем два тензора второго ранга:

$$c^{ijkl}g_{kl}\equiv a^{ij}, \qquad (6.3)$$

$$c^{ijkl}g_{ik}\equiv b^{jl}. \qquad (6.4)$$

Из (6.2) следует, что тензоры $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$ являются симметричными. Разложим их на шаровую и девиаторную составляющие:

$$a^{ij}=\frac{1}{3}\alpha g^{ij}+\bar{a}^{ij},\quad \alpha\equiv\langle\underset{\sim}{a}\rangle=a^{ij}g_{ij}; \qquad (6.5)$$

$$b^{ij}=\frac{1}{3}\beta g^{ij}+\bar{b}^{ij},\quad \beta\equiv\langle\underset{\sim}{b}\rangle=b^{ij}g_{ij}. \qquad (6.6)$$

Определим теперь тензор четвертого ранга

$$\underset{\sim}{n}=n^{ijkl}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l, \qquad (6.7)$$

который удовлетворяет следующим 12 соотношениям:

$$n^{ijkl}g_{kl}=0,\qquad n^{ijkl}g_{ik}=0. \qquad (6.8)$$

Очевидно, этот тензор имеет всего девять независимых компонент и поэтому называется *нонором* [13].

Упражнение 6.1. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{C}$ может быть представлен в виде

$$c^{ijkl}=\frac{11\beta-12\alpha}{35}g^{ij}g^{kl}+\frac{11\alpha-13\beta}{70}(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk})+$$

$$+\frac{5}{7}(g^{ij}a^{kl}+g^{kl}a^{ij})-\frac{4}{7}(g^{ij}b^{kl}+g^{kl}b^{ij})-$$

$$-\frac{2}{7}(g^{ik}a^{jl}+g^{il}a^{jk}+g^{jk}a^{il}+g^{jl}a^{ik})+$$

$$+\frac{3}{7}(g^{ik}b^{jl}+g^{il}b^{jk}+g^{jk}b^{il}+g^{jl}b^{ik})+n^{ijkl}, \qquad (6.9)$$

или

$$c^{ijkl}=\frac{2\alpha-\beta}{15}g^{ij}g^{kl}+\frac{3\beta-\alpha}{30}(g^{ik}g^{jl}+g^{il}g^{jk})+$$

$$+\frac{5}{7}(g^{ij}\bar{a}^{kl}+g^{kl}\bar{a}^{ij})-\frac{4}{7}(g^{ij}\bar{b}^{kl}+g^{kl}\bar{b}^{ij})-$$

$$-\frac{2}{7}\left(g^{ik}\bar{a}^{jl}+g^{il}\bar{a}^{jk}+g^{jk}\bar{a}^{il}+g^{jl}\bar{a}^{ik}\right)+$$

$$+\frac{3}{7}\left(g^{ik}\bar{b}^{jl}+g^{il}\bar{b}^{jk}+g^{jk}\bar{b}^{il}+g^{jl}\bar{b}^{ik}\right)+n^{ijkl}. \quad (6.10)$$

Следовательно, каждый тензор четвертого ранга $\underset{\sim}{C}$ (6.1), обладающий свойствами (6.2), может быть выражен через два скаляра, два девиатора и специальный тензор четвертого ранга — нонор.

Упражнение 6.2. Пусть два симметричных тензора второго ранга

$$\underset{\sim}{\sigma}=\sigma^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j; \quad \underset{\sim}{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j \quad (6.11)$$

связаны между собой с помощью тензора $\underset{\sim}{C}$ (6.1), (6.2):

$$\sigma^{ij}=c^{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (6.12)$$

Обозначим разложение тензоров $\underset{\sim}{\sigma}$ и $\underset{\sim}{\varepsilon}$ на шаровую и девиаторную составляющие следующим образом:

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{3}\Theta g^{ij}+s^{ij}, \ \Theta\equiv\langle\underset{\sim}{\sigma}\rangle=\sigma^{ij}g_{ij}; \quad (6.13)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{3}\theta g_{ij}+e_{ij}, \quad \theta\equiv\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle=\varepsilon_{ij}g^{ij}. \quad (6.14)$$

Доказать, что соотношения (6.12) могут быть записаны в виде

$$\theta=\frac{1}{3}\alpha\theta+e^{(a)}, \quad (6.15)$$

$$s_{ij}=\frac{1}{3}\bar{a}_{ij}\theta+\frac{3\beta-\alpha}{15}e_{ij}+\frac{8}{21}e^{(a)}g_{ij}-$$

$$-\frac{8}{7}e^{(a)}_{ij}+\frac{12}{7}e^{(b)}_{ij}-\frac{4}{7}e^{(b)}g_{ij}+n^{kl}_{ij}e_{kl}, \quad (6.16)$$

где

$$e^{(a)}\equiv\bar{a}^{ij}e_{ij}, \ e^{(a)}_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\bar{a}^k_i e_{kj}+\bar{a}^k_j e_{ki}\right), \quad (6.17)$$

$$e^{(b)}\equiv\bar{b}^{ij}e_{ij}; \quad e^{(b)}_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\bar{b}^k_i e_{kj}+b^k_j e_{ki}\right). \ ● \quad (6.18)$$

Если соотношения (6.12) можно обратить, т. е. выразить тензор $\underset{\sim}{\varepsilon}$ через $\underset{\sim}{\sigma}$:

$$\varepsilon_{ij}=d_{ijkl}\sigma^{kl}, \quad (6.19)$$

то очевидно тензоры $\underset{\sim}{C}$ (6.1) и $\underset{\sim}{D}$:

$$\underset{\sim}{D} = d_{ijkl}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \otimes \vec{e}^k \otimes \vec{e}^l \qquad (6.20)$$

являются взаимообратными:

$$\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D} : \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{\Delta}, \qquad (6.21)$$

где $\underset{\sim}{\Delta}$ — так называемый единичный тензор четвертого ранга:

$$\underset{\sim}{\Delta} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta^i_m \delta^j_n + \delta^i_n \delta^j_m\right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}^m \otimes \vec{e}^n. \qquad (6.22)$$

Поэтому соотношения (6.21) в «индексной» записи имеют вид

$$c^{ijkl} d_{klmn} = d_{mnkl} c^{klij} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_m \delta^j_n + \delta^i_n \delta^j_m\right). \qquad (6.23)$$

Тензор $\underset{\sim}{D}$ обладает такой же симметрией, что и тензор $\underset{\sim}{C}$ (6.2). Образуя симметричные тензоры второго ранга $\underset{\sim}{p}$ и $\underset{\sim}{q}$,

$$p_{ij} = \frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{p}\rangle g_{ij} + \bar{p}_{ij}, \quad p_{ij} \equiv d_{ijkl} g^{kl}, \qquad (6.24)$$

$$q_{ij} = \frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{q}\rangle g_{ij} + \bar{q}_{ij}, \quad q_{ij} \equiv d_{klij} g^{kl}, \qquad (6.25)$$

можно и для тензора $\underset{\sim}{D}$ построить разложения, аналогичные (6.9), (6.10).

Упражнение 6.3. Доказать, что

$$\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{a}\rangle \langle \underset{\sim}{p}\rangle + \bar{a}^{ij}\bar{p}_{ij} \equiv a^{ij} p_{ij} = 3. \qquad (6.26)$$

Упражнение 6.4. Выбрав в качестве девяти независимых компонент нонора

$$\begin{array}{l} n^{1111},\ n^{2222},\ n^{1122}, \\ n^{1112},\ n^{1113},\ n^{2212}, \\ n^{2223},\ n^{3313},\ n^{3323}, \end{array} \qquad (6.27)$$

показать, что остальные его компоненты с учетом симметрии (6.2) выражаются через них следующим образом:

$$n^{3333} = n^{1111} + n^{2222} + 2n^{1122},$$
$$n^{1133} = n^{1313} = -\left(n^{1111} + n^{1122}\right),$$

$$
\begin{aligned}
&n^{2233}=n^{2323}=-(n^{2222}+n^{1122}),\\
&n^{1212}=n^{1122},\\
&n^{2213}=n^{1223}=-(n^{1113}+n^{3313}),\\
&n^{3312}=n^{1323}=-(n^{1112}+n^{2212}),\\
&n^{1123}=n^{1213}=-(n^{2223}+n^{3323}).
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

§ 7. Вычисление площадей и объемов

Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$ даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда их скалярное произведение имеет вид

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=g_{ij}a^ib^j=g^{ij}a_ib_j=a_ib^i=a^ib_i, \tag{7.1}$$

где g_{ij} — фундаментальная матрица

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j, \tag{7.2}$$

а векторы $\vec{e}_i$ называются *векторами локального базиса*

$$\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \tag{7.3}$$

($\vec{r}$ — радиус-вектор). Очевидно, что площадь параллелограмма s, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в каждой точке $\mathscr{R}_3$:

$$s=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha, \tag{7.4}$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражаются согласно (7.1)

$$|\vec{a}|=\sqrt{g_{ij}a^ia^j},\quad |\vec{b}|=\sqrt{g_{ij}b^ib^j}. \tag{7.5}$$

Далее (как следует из § 2)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^ib^j\vec{e}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{ijk}a_ib_j\vec{e}_k. \tag{7.6}$$

Выберем теперь такую систему координат α^i, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными базисным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ соответственно, т. е.

$$\vec{a}=a^1\vec{e}_1,\quad \vec{b}=b^2\vec{e}_2. \tag{7.7}$$

Тогда из формулы (7.4) согласно (7.5) имеем

$$s=\sqrt{g_{11}a^1a^1}\,\sqrt{g_{22}b^2b^2}\sin\alpha, \tag{7.8}$$

а формула (7.6) принимает вид

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\,a^1b^2\vec{e}^3. \tag{7.9}$$

Для косинуса угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ согласно той же формуле (7.5) и (7.1)

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}\,||\vec{b}\,|}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \tag{7.10}$$

Так как для компоненты g^{33} матрицы g^{ij}, обратной к фундаментальной матрице g_{ij}, справедливо

$$g^{33}=\frac{1}{g}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2), \tag{7.11}$$

где g, как и прежде, обозначает определитель матрицы g_{ij}, то

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{g}\,\sqrt{g^{33}}}{\sqrt{g_{11}}\,\sqrt{g_{22}}}. \tag{7.12}$$

Поэтому для (7.8) имеем

$$s=\sqrt{g}\;a^1b^2\sqrt{g^{33}},$$

и из (7.9)

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{g}\,a^1b^2|\vec{e}^3|=\sqrt{g}\,a^1b^2\sqrt{g^{33}}. \tag{7.13}$$

Сравнивая (7.12) и (7.13), находим

$$s=|\vec{a}\times\vec{b}|, \tag{7.14}$$

т. е. площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна длине вектора, полученного векторным произведением этих векторов.

Упражнение 7.1. Доказать, что формула (7.14) справедлива для произвольной ориентации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно векторов репера, т. е.

$$s=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{g}\,|\epsilon_{ijk}a^i b^j \vec{e}^k|=\frac{1}{\sqrt{g}}|\epsilon^{ijk}a_i b_j \vec{e}_k|. \quad \bullet \tag{7.15}$$

Обозначим теперь векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектором $\vec{d}$:

$$\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}, \tag{7.16}$$

и пусть вектор $\vec{c}$ не лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. не ортогонален вектору $\vec{d}$. Тогда объем v параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен

$$v=s|\vec{c}|\cos\alpha, \tag{7.17}$$

или (в силу (7.16))

$$v=\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \tag{7.18}$$

Сравнивая теперь формулы (7.18), (2.10) и (2.18) или (2.21), приходим к заключению, что

$$v=\sqrt{g}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j c^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}a_i b_j c_k, \tag{7.19}$$

т. е. объем v параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен смешанному произведению этих векторов.

Учитывая, что $\cos\alpha$ в (7.17) может быть отрицательным, нужно в формулах (7.19) взять абсолютное значение соответствующих выражений, т. е.

$$v=\sqrt{g}\,|\epsilon_{ijk}a^i b^j c^k|=\frac{1}{\sqrt{g}}|\epsilon^{ijk}a_i b_j c_k|. \tag{7.20}$$

Рассмотрим теперь преобразование пространства $\mathcal{R}_3$, которое назовем *деформацией пространства* и которое заключается в том, что каждому радиус-вектору $\vec{r}\in\mathcal{R}_3$ соответствует некоторый радиус-вектор $\vec{R}\in\mathcal{R}_3'$ таким образом, что каждой тройке базисных векторов (7.3) соответствует тройка некомпланарных векторов

$$\vec{E}_i=\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha^i}. \tag{7.21}$$

При этом каждому вектору $\vec{a} \in \mathcal{R}_3$ соответствует вектор $\vec{A} \in \mathcal{R}_3'$, а тензору второго ранга $\underset{\sim}{t} \in \mathcal{R}_3 \otimes \mathcal{R}_3$ — тензор второго ранга $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{R}_3' \otimes \mathcal{R}_3'$, причем компоненты вектора $\vec{a}$ в базисе (7.3) совпадают с компонентами вектора $\vec{A}$ в базисе (7.21), а компоненты тензора $\underset{\sim}{t}$ в базисе (7.3) — с соответствующими компонентами тензора $\underset{\sim}{T}$.

Обозначим фундаментальную матрицу пространства $\mathcal{R}_3'$ через G_{ij}

$$G_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j, \tag{7.22}$$

определитель этой матрицы G, а матрицу, обратную к G_{ij}, через G^{ij}. Тогда в $\mathcal{R}_3'$ базис, взаимный к (7.21), выражается следующим образом:

$$\vec{E}^i = G^{ij}\vec{E}_j. \tag{7.23}$$

Итак, в результате деформации квадрат линейного элемента

$$ds_0^2 = g_{ij}da^i da^j \tag{7.24}$$

преобразуется в

$$ds^2 = G_{ij}da^i da^j, \tag{7.25}$$

так что изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками l подсчитывается по формуле

$$l = \frac{ds}{ds_0} = \sqrt{\frac{G_{ij}\,da^i\,da^j}{g_{ij}\,da^i\,da^j}}. \tag{7.26}$$

Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор в $\mathcal{R}_3$, характеризующий площадку s, построенную на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из (7.15) следует, что

$$s\vec{n} = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} a^i b^j \vec{e}^k, \tag{7.27}$$

откуда

$$sn_k = \sqrt{g}\, \epsilon_{ijk} a^i b^j. \tag{7.28}$$

Пусть $\vec{N}$ — единичный вектор в $\mathcal{R}_3'$

$$\vec{N} = N_i\vec{E}^i, \quad N_i N^i = 1, \tag{7.29}$$

характеризующий площадку S, построенную на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$, в которые перешли соответственно векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в результате деформации. Таким образом,

$$S\vec{N} = \sqrt{G}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j \vec{E}^k, \tag{7.30}$$

откуда

$$SN_k = \sqrt{G}\,\epsilon_{ijk}a^i b^j. \tag{7.31}$$

Сравнивая (7.28) и (7.31), видим, что в результате деформации площадь бесконечно малого параллелограмма s, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, связана с площадью S бесконечно малого параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$, следующим образом (индекс k заменим на α):

$$\frac{SN_\alpha}{sn_\alpha} = \sqrt{\frac{G}{g}}, \tag{7.32}$$

причем

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i, \quad \vec{A} = a^i\vec{E}_i,$$

$$\vec{b} = b^i\vec{e}_i, \quad \vec{B} = b^i\vec{E}_i. \tag{7.33}$$

Если теперь построим на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ параллелепипед, то его объем v выразится по формуле (7.20). Объем параллелепипеда V, построенного на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, в которые перешли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, в результате деформации, подсчитывается по формуле

$$V = \sqrt{G}\,|\epsilon_{ijk}a^i b^j c^k|. \tag{7.34}$$

Сравнивая (7.20) и (7.34), находим

$$\frac{V}{v} = \sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{7.35}$$

Формулы (7.32) и (7.35) можно объединить

$$\frac{SN_\alpha}{sn_\alpha} = \frac{V}{v} = \sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{7.36}$$

Рассмотрим теперь некоторую точку M евклидова пространства $\mathscr{R}_3$. И пусть дан некоторый вектор $\vec{q}$

$$\vec{q}=q^i\vec{e}_i. \tag{7.37}$$

Проведем плоскость, ортогональную вектору $\vec{q}$ и проходящую на расстоянии h от точки M (рис. 11). Тогда эта плоскость пересечет линии направлений векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ соответственно в точках P, Q, R. Обозначим объем тетраэдра $MPQR$ через v_1, а пло-

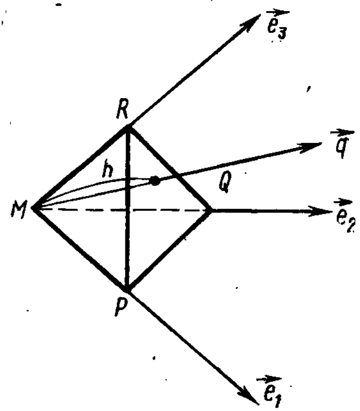

Рис. 11

щадь его грани MQR — через s_1, площадь треугольника MPR — через s_2, треугольника MPQ — через s_3, а треугольника PQR — через Σ. Обозначим также

$$\overrightarrow{MP}=\vec{a}=a^1\vec{e}_1, \quad \overrightarrow{MQ}=\vec{b}=b^2\vec{e}_2, \tag{7.38}$$
$$\overrightarrow{MR}=\vec{c}=c^3\vec{e}_3.$$

Тогда согласно формулам (7.20) и (7.15)

$$v=6v_1=\sqrt{g}\,a^1b^2c^3,$$
$$2s_1=\sqrt{g}\,b^2c^3\sqrt{g^{11}}\,,\quad 2s_2=\sqrt{g}\,a^1c^3\sqrt{g^{22}}\,, \tag{7.39}$$
$$2s_3=\sqrt{g}\,a^1b^2\sqrt{g^{33}}\,.$$

Так как объем тетраэдра $MPQR$ равен

$$v_1 = \frac{1}{3} h\Sigma, \tag{7.40}$$

то из (7.39) следует, например,

$$\frac{3v_1}{c^3} = \frac{s_3}{\sqrt{g^{33}}} = \frac{\Sigma h}{c^3}. \tag{7.41}$$

Обозначим через β угол между векторами $\vec{q}$ и $\vec{e}_3$. Тогда очевидно, что

$$|\vec{c}| = \frac{h}{\cos\beta}. \tag{7.42}$$

Учитывая (7.38), получим

$$c^3 = \frac{h}{\cos\beta\sqrt{g_{33}}}. \tag{7.43}$$

Для косинуса́ угла β из (7.37) следует

$$\cos\beta = \frac{\vec{q}\cdot\vec{e}_3}{|\vec{q}|\sqrt{g_{33}}} = \frac{q_3}{\sqrt{g_{ij}q^iq^j}\sqrt{g_{33}}}. \tag{7.44}$$

Обозначим

$$q_0 \equiv |\vec{q}| = \sqrt{g_{ij}q^iq^j}. \tag{7.45}$$

Тогда формулы (7.41) можно записать в виде

$$\frac{3v_1}{hq_0} = \frac{\Sigma}{q_0} = \frac{s_1}{q_1\sqrt{g^{11}}} = \frac{s_2}{q_2\sqrt{q^{22}}} = \frac{s_3}{q_3\sqrt{g^{33}}}. \tag{7.46}$$

Упражнение 7.2. Пусть $\vec{n}$ — единичный вектор, сонаправлениый вектору $\vec{q}$ (7.37):

$$\vec{n} = n_i\vec{e}^i, \quad n_in^i = 1. \tag{7.47}$$

Доказать, что

$$n_i = \frac{q_i}{q_0}. \tag{7.48}$$

Упражнение 7.3. *Тензором деформации* называется симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{\varepsilon}$, компоненты которого определяются соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}). \tag{7.49}$$

Вектором перемещения $\vec{u}$ называется разность двух радиус-векторов $\vec{R}$ и $\vec{r}$:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}. \tag{7.50}$$

Доказать, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u^k{}_{,i}u_{k,j}). \tag{7.51}$$

Упражнение 7.4. Относительным удлинением называется величина ε

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2}}. \tag{7.52}$$

Доказать, что для вектора $\vec{\xi} \in \mathscr{R}_3$ удлинение подсчитывается по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j} + 1} - 1. \tag{7.53}$$

Упражнение 7.5. Пусть два вектора $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ коллинеарны соответственно $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Доказать, что $\cos\alpha$ (α — угол между векторами, соответствующими $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$ после деформации) подсчитывается по формуле

$$\cos\alpha = \frac{2\varepsilon_{12}}{\sqrt{(g_{11} + 2\varepsilon_{11})(g_{22} + 2\varepsilon_{22})}}. \tag{7.54}$$

§ 8. Дифференциальные операторы и интегральные теоремы

Мы познакомились с тремя видами умножения векторов в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$. Пусть даны векторы $\vec{a}, \vec{b} \in \mathscr{R}_3$. Тогда в результате скалярного произведения этих векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i \tag{8.1}$$

получается скалярная величина. В результате их векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \qquad (8.2)$$

получается вектор, а в результате их тензорного произведения

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a_i b_j \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \qquad (8.3)$$

получается тензор второго ранга. При этом, как уже было отмечено, в литературе иногда символ тензорного произведения опускается, т. е. соотношения (8.3) могут быть записаны в виде

$$\vec{a}\vec{b} = a_i b_j \vec{e}^i \vec{e}^j. \qquad (8.4)$$

Конечно же, указанные выше операции умножения могут быть применены и к тензорам произвольного ранга. Отметим только, что если в умножении участвуют тензоры $\underset{\sim}{a}$ и $\underset{\sim}{b}$, один из которых имеет порядок n, а другой m, то при их скалярном произведении результирующий тензор имеет порядок $n+m-2$, при векторном произведении — порядок $n+m-1$, а при тензорном произведении $m+n$.

Введем дифференциальный вектор-оператор $\vec{\nabla}$ (набла), компонентами которого служат ковариантные производные:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^i \nabla_i. \qquad (8.5)$$

Умножим формально оператор $\vec{\nabla}$ на некоторый вектор $\vec{a}$ каждым из указанных выше способов, т. е. подействуем на векторное поле $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ дифференциальным оператором $\vec{\nabla}$ соответствующим образом.

В результате скалярного произведения имеем согласно (8.1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \nabla_i a^i = a^i{}_{,i}. \qquad (8.6)$$

В векторном анализе такая операция называется *дивергенцией вектора* $\vec{a}$ и обозначается

$$\operatorname{div} \vec{a} = a^i{}_{,i}. \qquad (8.7)$$

Следовательно, формальное скалярное произведение оператора $\vec{\nabla}$ называется оператором div, т. е.

$$\vec{\nabla}\cdot \equiv \mathrm{div}. \qquad (8.8)$$

Умножим теперь вектор-оператор $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$ векторно (8.2)

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\nabla_i a_j \vec{e}_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk} a_{j,i}\vec{e}_k. \qquad (8.9)$$

Такая операция в векторном анализе носит название *ротора или вращения вектора* $\vec{a}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ijk}\nabla_i a_j \vec{e}_k. \qquad (8.10)$$

Итак,

$$\vec{\nabla}\times \equiv \mathrm{rot}. \qquad (8.11)$$

Теперь подвергнем воздействию оператором $\vec{\nabla}$ некоторую скалярную функцию $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ путем тензорного произведения. Тогда согласно (8.3) или (8.4) получим

$$\vec{\nabla}\otimes\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \nabla_i\varphi\vec{e}^i = \mathrm{grad}\,\varphi. \qquad (8.12)$$

Тем самым операцию градиента можно записать формально в виде

$$\vec{\nabla}\otimes \equiv \mathrm{grad}. \qquad (8.13)$$

Разумеется, все эти операции можно проводить с тензорами произвольного ранга. Так, например, градиент вектора $\vec{u}$

$$\mathrm{grad}\,\vec{u} = \vec{\nabla}\otimes\vec{u} = \nabla_i u_j \vec{e}^i\otimes\vec{e}^j \qquad (8.14)$$

является тензором второго ранга. Транспонирование этого выражения означает следующее:

$$\overset{\frown}{\mathrm{grad}}\,\vec{u} = \vec{u}\otimes\vec{\nabla} = \nabla_j u_i \vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \qquad (8.15)$$

Тем самым симметрирование градиента вектора $\vec{u}$ дает оператор деформирования def, который благодаря (8.14) и (8.15) имеет вид

$$\mathrm{def}\,\vec{u} \equiv \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\otimes\vec{u} + \vec{u}\otimes\vec{\nabla}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j. \qquad (8.16)$$

Аналогично оператор rot, примененный к тензору второго ранга, дает в результате тензор второго ранга

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ilk} \nabla_l \varepsilon_{jl} \vec{e}^{\,l} \otimes \vec{e}_k. \qquad (8.17)$$

Транспонированное выражение (8.17) имеет вид

$$\overset{\frown}{\operatorname{rot}} \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ilk} \nabla_j \varepsilon_{il} \vec{e}^{\,l} \otimes \vec{e}_k. \qquad (8.18)$$

Тем самым оператор несовместимости $\operatorname{In} k$ имеет вид

$$\operatorname{In} \underset{\sim}{k} \varepsilon \equiv \overset{\frown}{\operatorname{rot}} \operatorname{rot} \underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{g} \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \nabla_i \nabla_m \varepsilon_{jl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_n. \qquad (8.19)$$

В математической физике часто встречается оператор Лапласа

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \otimes = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \otimes. \qquad (8.20)$$

Например, для скалярной функции $\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$

$$\Delta\varphi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi = g^{ij} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^i}\right)_{,j}. \qquad (8.21)$$

Упражнение 8.1. Доказать формулу

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u^i}{\partial\alpha^i} + \frac{u^i}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\alpha^i} \sqrt{g} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\alpha^i} (\sqrt{g}\, u^i). \qquad (8.22)$$

Упражнение 8.2. Вычислить оператор Δ в цилиндрической и сферической системах координат применительно к скалярной величине φ, т. е. $\Delta\varphi$.

Упражнение 8.3. Вычислить оператор Δ в цилиндрической и сферической системе координат применительно к векторной величине $\vec{\varphi}$, т. е. $\Delta\vec{\varphi}$ и доказать различие величин $\Delta\varphi$ и $\Delta\varphi^i$.

Упражнение 8.4. Пусть дано векторное уравнение относительно некоторого симметричного тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{\sigma}$ и заданного вектора $\vec{f}$:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma} = \vec{f}, \qquad (8.23)$$

причем тензор $\underset{\sim}{\sigma}$ связан с другим симметричным тензором 2-го ранга $\underset{\sim}{\varepsilon}$ следующим образом:

$$\underset{\sim}{\sigma}=\lambda\langle\underset{\sim}{\varepsilon}\rangle\underset{\sim}{\mathcal{I}}+2\mu\underset{\sim}{\varepsilon}, \qquad (8.24)$$

где λ, μ — некоторые постоянные, а тензор $\underset{\sim}{\varepsilon}$ связан с вектором $\vec{u}$ дифференциальными соотношениями (см. (8.16))

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\operatorname{def}\vec{u}. \qquad (8.25)$$

Доказать, что в этом случае уравнения (8.23) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{\Lambda}\cdot\vec{u}=\vec{f}, \qquad (8.26)$$

где $\underset{\sim}{\Lambda}$ — дифференциальный тензор-оператор 2-го ранга (оператор Ламе)

$$\underset{\sim}{\Lambda}\equiv(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla}+\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\underset{\sim}{\mathcal{I}}. \qquad (8.27)$$

Упражнение 8.5. Доказать, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\equiv 0, \qquad (8.28)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\operatorname{div}\operatorname{grad}. \qquad (8.29)$$

Упражнение 8.6. Доказать, что если $\underset{\sim}{\varepsilon}=\operatorname{def}\vec{u}$, то

$$\operatorname{Ink}\underset{\sim}{\varepsilon}\equiv 0. \quad ●$$

Из математического анализа известно, что для непрерывных однозначных векторных функций $\vec{a}$, для которых существуют непрерывные частные производные в некотором объеме V евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ и на поверхности Σ, ограничивающей этот объем (причем V ограничен и пространственно односвязан, а Σ замкнута и регулярна), справедливы: теорема Остроградского — Гаусса (теорема о дивергенции)

$$\int_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV=\int_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{a}\,d\Sigma, \qquad (8.30)$$

теорема Стокса (теорема о роторе)

$$\int_V \operatorname{rot}\vec{a}\,dV=\int_\Sigma \vec{n}\times\vec{a}\,d\Sigma,\ \int_\Sigma \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\Sigma=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r}, \qquad (8.31)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ

$$\vec{n}=n_i\vec{e}^{\,i}, \quad n_in_jg^{ij}=1, \qquad (8.32)$$

а вектор $\vec{dr}$, касательный к контуру, определяет положительное направление контура L:

$$\vec{dr} = d\alpha^i \vec{e}_i. \tag{8.33}$$

В силу того что формулы (8.30) — (8.31) имеют инвариантный характер, они могут быть применены к тензорам более высокого ранга. Например, для тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{\sigma}$ (8.31) следует,

$$\int\limits_V \operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma}\, dV = \int\limits_\Sigma \vec{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma}\, d\Sigma, \quad \int\limits_V \sigma^{ij}{}_{,i}\, dV = \int\limits_\Sigma \sigma^{ij} n_i\, d\Sigma. \tag{8.34}$$

Упражнение 8.7. Доказать, что для гладкого тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$ справедливо

$$\int\limits_\Sigma \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ijk} a_{jm,i} n_k\, d\Sigma = \oint\limits_L a_{im}\, d\alpha^i.$$

ГЛАВА 4

ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Группа симметрии тензора

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R_3 задан закон перехода от одной системы координат (α^1, α^2, α^3) к другой ($\alpha^{1'}$, $\alpha^{2'}$, $\alpha^{3'}$):

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \tag{1.1}$$

и обратно

$$\alpha^{i} = \alpha^{i}(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}). \tag{1.2}$$

Разумеется, как и прежде (§ 2 гл. 1), мы считаем, что определители якобиевых матриц

$$A^{i'}{}_{i} \equiv \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^{i}}, \quad B^{i}{}_{i'} \equiv \frac{\partial \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}} \tag{1.3}$$

отличны от нуля и связаны между собой соотношениями

$$A^{i'}{}_{j} B^{j}{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}, \quad B^{i}{}_{j'} A^{j'}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь некоторый произвольный тензор $\underset{\sim}{a}$:

$$\underset{\sim}{a} = a^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}^{i_2} \otimes \vec{e}_{i_3} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_n} \tag{1.5}$$

относительно группы преобразований (1.1). Очевидно, что

$$a^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_n}_{\cdot i'_2} = A^{i'_1}_{\cdot i_1} B^{i_2}_{\cdot i'_2} A^{i'_3}_{\cdot i_3} \ldots A^{i'_n}_{\cdot i_n} a^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2}. \tag{1.6}$$

Если группа преобразований (1.1) не изменяет значений компонент тензора $\underset{\sim}{a}$, т. е. из (1.6) следует

$$a^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_n}_{\cdot i'_2} = \delta^{i'_1}_{i_1} \delta^{i_2}_{i'_2} \delta^{i'_3}_{i_3} \ldots \delta^{i'_n}_{i_n} a^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_n}_{\cdot i_2}, \tag{1.7}$$

то говорят, что группа преобразований (1.1) является *группой симметрии тензора* $\underset{\sim}{a}$ (группой G_a), или что тензор является *инвариантным относительно группы преобразований* (1.1).

Разумеется, группа симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ относительно группы преобразований (1.1) может быть подгруппой группы преобразований (1.1). Например, тензор $\underset{\sim}{a}$, для которого справедливы соотношения (1.6), называется инвариантным относительно группы I (полной ортогональной группы трехмерного евклидового пространства):

$$x_{i'} = Q_{i'i} x_i, \tag{1.8}$$

где

$$Q_{i'i} Q_{i'j} = \delta_{ij}, \quad Q_{i'i} Q_{j'i} = \delta_{i'j'}, \tag{1.9}$$

если из

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = Q_{i'_1 i_1} Q_{i'_2 i_2} \ldots Q_{i'_n i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{1.10}$$

следует (1.7), т. е.

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = \delta_{i'_1 i_1} \delta_{i'_2 i_2} \ldots \delta_{i'_n i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \tag{1.11}$$

В этом случае группой симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ является группа I. Если к (1.9) добавить требование

$$Q \equiv \det |Q_{i'i}| = 1, \tag{1.12}$$

то группой симметрии G_a тензора $\underset{\sim}{a}$ будет группа I_0 (собственная ортогональная группа).

Упражнение 1.1. Показать, что множество тензоров заданного ранга n, инвариантных относительно группы G_a, образует конечномерное пространство R. ●

Обозначив через $\underset{\sim}{a}_{(1)}, \underset{\sim}{a}_{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{a}_{(k)}$ базис этого пространства, любой тензор $\underset{\sim}{a}$ ранга n с группой симметрии G_a можно представить в виде линейной комбинации

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{\alpha=1}^{k} \gamma_\alpha \underset{\sim}{a}_{(\alpha)}, \quad k \leqslant 3^n, \tag{1.13}$$

где γ_α — некоторые скаляры.

С помощью теории характеров матричных представлений (см. § 6 гл. 1) можно подсчитать k — число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{a}$ ранга n, инвариантного относительно группы G_a, или, что то же самое, размерность линейного пространства R (см. упр. 1.1):

$$k = \frac{1}{N} \sum_{g \in G_a} \chi^0(g), \tag{1.14}$$

где N — порядок группы G_a (число ее элементов), а сумма производится по всем элементам g группы G_a.

Величины $\chi^0(g)$ подсчитываются по формуле

$$\chi^0(g) = \frac{1}{N_p} \sum_{p \in \mathscr{P}} \chi(g^{l_1})\, \chi(g^{l_2}) \ldots \chi(g^{l_n}), \tag{1.15}$$

где N_p — порядок симметрической группы индексов тензора $\underset{\sim}{a}$ ранга n, χ — характер матричного представления группы G_a, а $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — длины циклов подстановок группы $\mathscr{P}$.

Пусть, например, нам нужно найти число независимых компонент тензора четвертого ранга $\underset{\sim}{C}$, обладающего симметрией (см. (6.2) гл. 3):

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \tag{1.16}$$

Нетрудно видеть, что симметрия (1.16) определяется группой подстановок $\mathscr{P}$:

$$\begin{gathered} e;\ (12);\ (34);\ (12)\,(34);\ (13)\,(24); \\ (14)\,(23);\ (1423);\ (1324), \end{gathered} \tag{1.17}$$

где e — тождественная подстановка. Таким образом, имеем 8 элементов p_α группы $\mathscr{P}$ ($\alpha = 1, \ldots, 8$) с длинами циклов

$$\begin{aligned} &p_1\colon\ l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1, \\ &p_2\colon\ l_1 = 2,\ l_2 = l_3 = 1, \\ &p_3\colon\ l_1 = 2,\ l_2 = l_3 = 1, \\ &p_4\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_5\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_6\colon\ l_1 = l_2 = 2, \\ &p_7\colon\ l_1 = 4, \\ &p_8\colon\ l_1 = 4. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Поэтому формула (1.15) для данного случая имеет вид

$$\chi^0(g) = \frac{1}{8}\left[\chi^4(g) + 2\chi(g^2)\chi^2(g) + 3\chi^2(g^2) + 2\chi(g^4)\right]. \tag{1.19}$$

Пусть, например, рассматривается ортотропная среда. Тогда, используя характеры (6.56) представления (6.48) группы O (глава 1), получим

$$\chi^0(g_1) = \frac{1}{8}(3^4 + 2\cdot 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3) = 21,$$

$$\chi^0(g_2) = \chi^0(g_3) = \chi^0(g_4) = \frac{1}{8}(1^4 + 2\cdot 3\cdot 1^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3) = 5,$$

$$\chi^0(g_5) = \chi^0(g_6) = \chi^0(g_7) = \frac{1}{8}\left[(-1)^4 + 2\cdot 3\cdot(-1)^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right] = 5, \tag{1.20}$$

$$\chi^0(g_8) = \frac{1}{8}\left[(-3)^4 + 2\cdot 3\cdot(-3)^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\right] = 21,$$

где

$$g_1 = E,\ g_2 = S_1,\ g_3 = S_2,\ g_4 = S_3,\ g_5 = D_1,\ g_6 = D_2,\ g_7 = D_3,\ g_8 = C. \tag{1.21}$$

Поэтому из (1.14) имеем

$$k = \frac{1}{8}(21 + 3\cdot 5 + 3\cdot 5 + 21) = 9. \tag{1.22}$$

Упражнение 1.2. Показать, используя формулы (1.14), (1.19) и (6.55), (6.47) гл. 1, что для тензора четвертого ранга C, инвариантного относительно группы отражения относительно плоскости $x_1 = 0$ и обладающего симметрией (1.16), число независимых компонент $k = 13$.

Упражнение 1.3. Показать, используя формулы (1.14), (1.19) и (6.54), (6.46) гл. 1, что для тензора четвертого ранга C, инвариантного относительно группы инверсий и обладающего симметрией (1.10), число независимых компонент $k = 21$. ●

Для тензора третьего ранга, симметричного относительно первых двух индексов, группа $\mathscr{P}$ состоит из двух элементов:

$$e, \ (12), \tag{1.23}$$

причем

$$p_1: \ l_1 = l_2 = l_3 = 1, \tag{1.24}$$

$$p_2: \ l_1 = 2, \ l_2 = 1.$$

Поэтому из (1.15) имеем

$$\chi^0(g) = \frac{1}{2}[\chi^3(g) + \chi(g^2)\chi(g)]. \tag{1.25}$$

Для симметричного тензора второго ранга группа $\mathscr{P}$ также состоит из двух элементов (1.23), причем

$$p_1: \ l_1 = l_2 = 1, \tag{1.26}$$

$$p_2: \ l_1 = 2.$$

Тогда из (1.15) получается

$$\chi^0(g) = \frac{1}{2}[\chi^2(g) + \chi(g^2)]. \tag{1.27}$$

Заметим, что если тензор n-ранга не обладает никакой симметрией, то

$$\chi^0(g) = \chi^n(g), \tag{1.28}$$

и в этом случае формула (1.14) имеет вид

$$k = \frac{1}{N}\sum_{g \in G_a} \chi^n(g). \tag{1.29}$$

Упражнение 1.4. Показать, что для тензоров, инвариантных относительно группы O (ортотропных тензоров), число независимых компонент k: а) равно нулю для любого тензора нечетного ранга (что следует из (1.29)), в частности, для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам (что следует из (1.25); б) равно 3 для симметричного тензора второго ранга (что следует из (1.27)).

Упражнение 1.5. Показать, что для тензоров, инвариантных относительно группы отражений относительно плоскости $x_1 = 0$, число независимых компонент k: а) равно 10 для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам; б) равно 4 для симметричного тензора второго ранга; в) равно 2 для вектора. ●

Для непрерывных групп формула (1.14) несколько видоизменяется. Так, для группы T_3 трансверсальной изотропии

$$k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C}^{2\pi} \chi^0 (g)\, d\varphi, \tag{1.30}$$

а для собственной ортогональной группы I_0:

$$k = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_2 \int\limits_0^{\pi} \chi^0 (g) \sin\theta\, d\theta. \tag{1.31}$$

Упражнение 1.6. Показать, используя формулу (1.30), что для тензоров, инвариантных относительно группы T_3 (трансверсально изотропных), число независимых компонент k: а) равно 5 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.57) гл. 1; б) равно 4 для тензора третьего ранга, симметричного по первым двум индексам, что следует из (1.25); в) равно 2 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27); г) равно 1 для вектора, что следует из $\chi^0(g) = \chi(g)$.

Упражнение 1.7. Показать, используя формулу (1.31), что для тензоров, инвариантных относительно группы I_0 (изотропных тензоров), число независимых компонент k: а) равно 2 для тензора четвертого ранга, обладающего симметрией (1.16), что следует из (1.19) и (6.58) гл. 1; б) равно нулю для всех тензоров нечетного ранга, в том числе и для тензора третьего ранга, симметричного относительно первых двух индексов, что следует из (1.28) и (1.25); в) равно 1 для симметричного тензора второго ранга, что следует из (1.27). ●

Часто при рассмотрении групп бесконечного порядка полезной оказывается теорема о том, что любой тензор ранга $r<n$, инвариантный относительно группы поворотов вокруг некоторой оси на углы, кратные $2\pi/n$, инвариантен также и относительно группы поворотов вокруг той же оси на любой угол φ.

§ 2. Тензорный базис

В предыдущем параграфе мы дали определение группы симметрии произвольного тензора $\underset{\sim}{a}$. Любой тензор произвольного ранга в трехмерном евклидовом пространстве R_3, инвариантный относительно заданной подгруппы G полной ортогональной группы I, можно представить в виде линейной комбинации тензоров, составленных при помощи операций тензорного умножения и свертывания из соответствующих наборов тензоров, определяющих эту подгруппу G (см. раздел «Некоторые литературные указания» [4.5]).

Таким образом, для каждой группы преобразований G можно построить некоторый конечный тензорный базис (каждый тензор, входящий в него, является инвариантным относительно группы G) и на его основе конструировать различные тензоры, инвариантные относительно рассматриваемой группы G. Тензоры, входящие в такой базис, будем называть также *образующими тензорами группы G*.

Чтобы найти эти образующие тензоры группы G, рассмотрим некий полином P от $\varkappa$ векторов $\vec{b}^{(1)}$, $\vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, являющийся инвариантом относительно группы G. Это означает, что если

$$b_i^{\prime(n)} = Q_{ij} b_j^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \varkappa, \tag{2.1}$$

где матрица Q является элементом группы G, то

$$P(\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}) = P(\vec{b}^{\prime(1)}, \vec{b}^{\prime(2)}, \ldots, \vec{b}^{\prime(\varkappa)}). \tag{2.2}$$

Предположим, что полином P имеет вид

$$P = a_{i_1 i_2 \ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{(1)} b_{i_2}^{(2)} \ldots b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $a_{i_1 i_2 \ldots i_\varkappa}$ удовлетворяют условиям (1.10), (1.11), инвариантны относительно группы G (которая является подгруппой группы I). Тогда из (2.1) имеем

$$P' \equiv a_{i_1 \ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{\prime(1)} \ldots b_{i_\varkappa}^{\prime(\varkappa)} = a_{i_1 \ldots i_\varkappa} Q_{i_1 j_1} \ldots Q_{i_\varkappa j_\varkappa} \times$$
$$\times b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} = a_{j_1 \ldots j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} \equiv P, \tag{2.4}$$

т. е. P инвариантен относительно группы G.

Таким образом, если коэффициенты полинома P векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, линейного относительно каждого вектора, инвариантны относительно некоторой группы G, то и сам полином инвариантен относительно этой же группы.

Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, пусть полином P, линейный относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, инвариантен относительно группы G: $P=P'$, т. е.

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{(1)} \ldots b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)} = a_{i_1\ldots i_\varkappa} b_{i_1}^{\prime(1)} \ldots b_{i_\varkappa}^{\prime(\varkappa)} =$$

$$= a_{i_1\ldots i_\varkappa} Q_{i_1 j_1} \ldots Q_{i_\varkappa j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)} = a'_{j_1\ldots j_\varkappa} b_{j_1}^{(1)} \ldots b_{j_\varkappa}^{(\varkappa)}. \quad (2.5)$$

Сравнивая первое и последнее выражения и учитывая, что каждый индекс j_α $(\alpha=1, \ldots, \varkappa)$ — немой, получим

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} = a'_{i_1\ldots i_\varkappa}, \quad (2.6)$$

т. е. коэффициенты полинома P инвариантны относительно группы G. Предположим теперь, что какой-то полином P_α составлен только из векторов $\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots$ $\ldots, \vec{b}^{(\alpha)}$ $(\alpha \leqslant \varkappa)$, полином P_β — из векторов $\vec{b}^{(\alpha+1)}$, $\vec{b}^{(\alpha+2)}, \ldots, \vec{b}^{(\beta)}$ $(\alpha \leqslant \beta \leqslant \varkappa)$ и т. д., полином $P_\varkappa$ составлен из векторов $\vec{b}^{(\gamma+1)}, \vec{b}^{(\gamma+2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$ $(\alpha \leqslant \beta \leqslant \ldots \leqslant \gamma \leqslant \varkappa)$. Пусть все указанные полиномы инвариантны относительно группы G, причем полином P может быть представлен в виде некой суммы

$$P = \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa. \quad (2.7)$$

В силу того что полином P линеен относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \vec{b}^{(2)}, \ldots, \vec{b}^{(\varkappa)}$, то и каждый из полиномов $P_\alpha, P_\beta, \ldots, P_\varkappa$ обладает таким же свойством.

Очевидно, что

$$a_{i_1\ldots i_\varkappa} = \frac{\partial^\varkappa P}{\partial b_{i_1}^{(1)} \partial b_{i_2}^{(2)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}} = \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} \frac{\partial^\varkappa (P_\alpha P_\beta \ldots P_\varkappa)}{\partial b_{i_1}^{(1)} \partial b_{i_2}^{(2)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}} =$$

$$= \Sigma A_{\alpha\beta\ldots\varkappa} \frac{\partial^\alpha P_\alpha}{\partial b_{i_1}^{(1)} \ldots \partial b_{i_\alpha}^{(\alpha)}} \frac{\partial^{\beta-\alpha} P_\beta}{\partial b_{i_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} \ldots \partial b_{i_\beta}^{(\beta)}} \cdots \frac{\partial^{\varkappa-\gamma} P_\varkappa}{\partial b_{i_{\gamma+1}}^{(\gamma+1)} \ldots \partial b_{i_\varkappa}^{(\varkappa)}}. \quad (2.8)$$

Следовательно, любой тензор с компонентами $a_{i_1\ldots i_\varkappa}$, инвариантный относительно группы G, можно представить в виде суммы произведений тензоров типа $\partial^\alpha P^\alpha / \partial b_{i_1}^{(1)} \ldots \partial b_{i_\alpha}^{(\alpha)}$.

Рассмотрим, например, группу ортотропии O (см. упр. 3.12 гл. 1). Тогда полином, линейный относительно каждого из векторов $\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(\alpha)}$ и коэффициентами которого являются компоненты искомого тензора, инвариантного относительно группы ортотропии, должен быть инвариантным относительно преобразований, описывающих группу ортотропии, т. е. полином не должен изменяться в результате данных преобразований. Поэтому должны выполняться, например, соотношения

$$\begin{aligned} &P(b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}, \ldots, b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} b_3^{(\alpha)}) = \\ &= P(-b_1^{(1)} b_2^{(1)} b_3^{(1)}, \ldots, -b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} b_3^{(\alpha)}) = \\ &= P(b_1^{(1)} (-b_2^{(1)}) b_3^{(1)}, \ldots, b_1^{(\alpha)} (-b_2^{(\alpha)}) b_3^{(\alpha)}) = \\ &= P(b_1^{(1)} b_2^{(1)} (-b_3^{(1)}), \ldots, b_1^{(\alpha)} b_2^{(\alpha)} (-b_3^{(\alpha)})). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что полином P должен выражаться через полиномы

$$b_1^{(\alpha)} b_1^{(\beta)}, \; b_2^{(\alpha)} b_2^{(\beta)}, \; b_3^{(\alpha)} b_3^{(\beta)}, \; \alpha \neq \beta. \quad (2.10)$$

Следовательно, для *ортотропного тензора образующими* будут тензоры:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(1)} &= \frac{\partial^2 (b_1^{(\alpha)} b_1^{(\beta)})}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{1i}\delta_{1j}, \\ \gamma_{ij}^{(2)} &= \frac{\partial^2 (b_2^{(\alpha)} b_2^{(\beta)})}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{2i}\delta_{2j}, \\ \gamma_{ij}^{(3)} &= \frac{\partial^2 (b_3^{(\alpha)} b_3^{(\beta)})}{\partial b_i^{(\alpha)} \partial b_j^{(\beta)}} = \delta_{3i}\delta_{3j}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поэтому любой ортотропный тензор можно выразить через эти три линейно независимых тензора.

Упражнение 2.1. Доказать, что всякие ортотропные тензоры второго и четвертого рангов (см. (6.3) и (6.1) гл. 3) могут быть выражены в виде

$$a_{ij} = a_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + a_2 \delta_{i2} \delta_{j2} + a_3 \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad (2.12)$$

$$\begin{gathered}
c_{ijkl}=c_1\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{l1}+c_2\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k2}\delta_{l2}+\\
+c_3\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3}+c_4(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k2}\delta_{l2}+\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k1}\delta_{l1})+\\
+c_5(\delta_{i1}\delta_{j1}\delta_{k3}\delta_{l3}+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k1}\delta_{l1})+c_6(\delta_{i2}\delta_{j2}\delta_{k3}\delta_{l3}+\\
+\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k2}\delta_{l2})+c_7(\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{j2}\delta_{l2}+\delta_{i2}\delta_{k2}\delta_{l1}\delta_{j1})+\\
+c_8(\delta_{i1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3}+\delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{j1}\delta_{l1})+\\
+c_9(\delta_{i2}\delta_{k2}\delta_{j3}\delta_{l3}+\delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{j2}\delta_{l2}). \qquad (2.13)
\end{gathered}$$

Упражнение 2.2. Доказать, что образующие тензоры группы трансверсальной изотропии T_3 могут быть выбраны, например, в одном из следующих видов:

$$\delta_{ij}, \quad \delta_{3i}, \qquad (2.14)$$

$$\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}, \quad \delta_{3i}. \qquad (2.15)$$

Упражнение 2.3. Доказать, что образующими тензорами *гиротропии,* т. е. тензорами, инвариантными относительно собственно ортогональной группы I_0 (группы вращений), являются тензоры

$$\delta_{ij}, \quad \epsilon_{ijk}. \qquad (2.16)$$

Упражнение 2.4. Доказать, что образующим тензором изотропии, т. е. тензором, инвариантным относительно полной ортогональной группы I, является единственный тензор

$$\delta_{ij}. \qquad (2.17)$$

Упражнение 2.5. Доказать, что трансверсально изотропные тензоры второго и четвертого рангов, обладающие симметрией, указанной в упражнении (2.1), могут быть представлены в виде

$$a_{ij}=a_1(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2})+a_2\delta_{3i}\delta_{3j}, \qquad (2.18)$$

$$\begin{gathered}
c_{ijkl}=c_1\delta_{ij}\delta_{kl}+c_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\\
+c_3\delta_{3i}\delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{3l}+c_4(\delta_{ij}\delta_{3k}\delta_{3l}+\delta_{kl}\delta_{3.}\delta_{3j})+\\
+c_5(\delta_{ik}\delta_{3j}\delta_{3l}+\delta_{il}\delta_{3j}\delta_{3k}+\delta_{jk}\delta_{3i}\delta_{3l}+\delta_{jl}\delta_{3i}\delta_{3k}). \qquad (2.19)
\end{gathered}$$

Упражнение 2.6. Доказать, что изотропные и гиротропные тензоры второго и четвертого рангов, обладающие указанной в предыдущих упражнениях симметрией, выражаются однозначно в виде

$$a_{ij}=a\delta_{ij}, \qquad (2.20)$$

$$c_{ijkl}=c_1\delta_{ij}\delta_{kl}+c_2(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \quad \bullet \tag{2.21}$$

В § 4 предыдущей главы было показано, что всякий симметричный тензор второго ранга может быть однозначно представлен в виде суммы шарового тензора и девиатора

$$\underset{\sim}{b}=\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{b}\rangle\underset{\sim}{\mathcal{I}}+\underset{\sim}{\bar{b}} \tag{2.22}$$

или для компонент тензора (в этой главе мы рассматриваем исключительно прямоугольные декартовы системы координат):

$$b_{ij}=\frac{1}{3}\langle\underset{\sim}{b}\rangle\delta_{ij}+\bar{b}_{ij}. \tag{2.23}$$

Заметим, что тензоры $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ и $\underset{\sim}{\bar{b}}$ ортогональны между собой:

$$\underset{\sim}{\bar{b}}:\underset{\sim}{\mathcal{I}}=\bar{b}_{ij}\delta_{ij}=0. \tag{2.24}$$

Кроме того, шаровой тензор, как следует из упражнений 2.3, 2.4, инвариантен относительно групп I, I_0. Покажем, что всякое, в том числе ортогональное, преобразование

$$x_{i'}=Q_{i'i}x_i, \quad Q_{i'i}Q_{j'i}=\delta_{i'j'}, \quad Q_{i'i}Q_{i'j}=\delta_{ij} \tag{2.25}$$

переводит девиатор в девиатор. В самом деле, пусть

$$\bar{b}_{ij}=Q_{ii'}Q_{jj'}\bar{b}'_{i'j'}. \tag{2.26}$$

По определению девиатора и из (2.24)

$$\bar{b}'_{i'j'}\delta_{i'j'}=0 \tag{2.27}$$

следует, что

$$Q_{ii'}Q_{jj'}\bar{b}'_{i'j'}\delta_{ij}=0, \tag{2.28}$$

откуда, учитывая (2.25), получаем

$$\bar{b}'_{i'j'}\delta_{i'j'}=0. \tag{2.29}$$

Таким образом, пространство симметричных тензоров второго ранга разбивается на два взаимно ортогональных подпространства, инвариантных относительно полной ортогональной группы I.

Рассмотрим теперь какую-нибудь подгруппу G полной ортогональной группы I. Всякий симметричный тензор второго ранга можно разложить на сумму попарно ортогональных симметричных тензоров второго ранга (*спектральное представление тензора*):

$$\underset{\sim}{b}=\sum_{\alpha=1}^{n}\underset{\sim}{p}^{(\alpha)},\quad n\leqslant 6, \tag{2.30}$$

$$\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}:\underset{\sim}{p}^{(\beta)}=0,\ \text{если}\ \alpha\neq\beta. \tag{2.31}$$

Если каждая матрица группы G отображает подпространство p-*тензоров* $\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}$ в себя, то это *подпространство инвариантно* относительно G. Очевидно, что величины

$$I_\alpha\equiv(\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}:\underset{\sim}{p}^{(\alpha)})^{1/2} \tag{2.32}$$

будут инвариантами тензора $\underset{\sim}{b}$. Объединяя (2.31) и (2.32), имеем

$$\frac{p_{ij}^{(\alpha)}\,p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta}=\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.33}$$

Инвариант $I_\varkappa$ (2.32) назовем *линейным*, если

$$p_{ij}^{(\varkappa)}=\frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa}I_\varkappa,\quad a_\varkappa\equiv(a_{ij}^{(\varkappa)}a_{ij}^{(\varkappa)})^{1/2}\quad(\varkappa=1,\ldots,m;\ m<n), \tag{2.34}$$

где $a_{ij}^{\varkappa}$ — компоненты тензора $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, инвариантного относительно группы G, причем всегда можно их выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{a_{ij}^{(\varkappa)}\,a_{ij}^{(\rho)}}{a_\varkappa a_\rho}=\delta_{\varkappa\rho};\quad \sum_{\varkappa=1}^{m}a_{ij}^{(\varkappa)}=\delta_{ij}. \tag{2.35}$$

Итак, разложение произвольного симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ на взаимно ортогональные тензоры, принадлежащие инвариантным подпространствам относительно подгруппы G полной ортогональной группы I, имеет вид

$$b_{ij}=\sum_{\varkappa=1}^{m}I_\varkappa\frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa}+\sum_{\gamma=m+1}^{n}p_{ij}^{(\gamma)}. \tag{2.36}$$

Если подгруппой G является сама группа I, то, как следует из (2.23),

$$n=2,\ m=1,\ a_{ij}^{(1)}=\delta_{ij},\ a_1=\sqrt{3},\ I_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle,$$

$$I_2=b_{\text{и}}=\sqrt{\bar{b}_{ij}\bar{b}_{ij}},\ p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\delta_{ij},\ p_{ij}^{(2)}=\bar{b}_{ij}. \qquad (2.37)$$

Упражнение 2.7. Показать, что если подгруппа G является группой трансверсальной изотропии T_3, то в (2.36) можно положить $n=4$, $m=2$:

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2},\ a_1=\sqrt{2},\ a_{ij}^{(2)}=\delta_{i3}\delta_{j3},\ a_2=1, \qquad (2.38)$$

$$I_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(b_{11}+b_{22}),\ I_2=b_{33},$$

$$I_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}^2},\ I_4=\sqrt{2(b_{13}^2+b_{23}^2)}, \qquad (2.39)$$

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22})(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2}),\ p_{ij}^{(2)}=b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3},$$

$$p_{ij}^{(3)}=b_{ij}-\frac{1}{2}(b_{11}+b_{22})(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2})+b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}-$$

$$-b_{i3}\delta_{j3}-b_{j3}\delta_{i3},\ p_{ij}^{(4)}=b_{i3}\delta_{j3}+b_{j3}\delta_{i3}-2b_{33}\delta_{i3}\delta_{j3}. \qquad (2.40)$$

Упражнение 2.8. Показать, что если подгруппой G является группа ортотропии O, то в (2.36) можно положить $n=6$, $m=3$:

$$a_{ij}^{(\varkappa)}=\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa},\ a_\varkappa=1\ (\varkappa=1,2,3), \qquad (2.41)$$

$$I_\varkappa=b_{\varkappa\varkappa}\ (\varkappa=1,2,3),\ I_4=\sqrt{2}|b_{23}|,\ I_5=\sqrt{2}|b_{13}|,\ I_6=$$
$$=\sqrt{2}|b_{12}|, \qquad (2.42)$$

$$p_{ij}^{(\varkappa)}=b_{\varkappa\varkappa}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa}\ (\varkappa=1,2,3),\ p_{ij}^{(6)}=b_{12}(\delta_{1i}\delta_{2j}+\delta_{2i}\delta_{1j}),$$

$$p_{ij}^{(5)}=b_{13}(\delta_{1i}\delta_{3j}+\delta_{3i}\delta_{1j}),\ p_{ij}^{(4)}=b_{23}(\delta_{2i}\delta_{3j}+\delta_{3i}\delta_{2j}). \qquad (2.43)$$

Упражнение 2.9. Показать, что тензоры (2.38) $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2$, инвариантные относительно группы трансверсальной изотропии T_3, могут быть выбраны с точностью до одного параметра φ, если выбрать их компоненты в виде

$$
\underset{\sim}{a}^{(1)}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix},
$$

$$
\underset{\sim}{a}^{(2)}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi \end{pmatrix}. \qquad (2.44)
$$

Упражнение 2.10. Показать, что тензоры (2.41) $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2, 3$, инвариантные относительно группы ортотропии O, могут быть выбраны с точностью до трех параметров: φ_1, φ_2, θ, если выбрать их компоненты в виде

$$
a^{(\varkappa)}_{ij} = \begin{pmatrix} g^2_{\varkappa 1} & g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 3} \\ g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 2} & g^2_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 2}g_{\varkappa 3} \\ g_{\varkappa 1}g_{\varkappa 3} & g_{\varkappa 2}g_{\varkappa 3} & g^2_{\varkappa 3} \end{pmatrix} \quad (\varkappa=1, 2, 3), \qquad (2.45)
$$

где величины $g_{\varkappa 1}$, $g_{\varkappa 2}$, $g_{\varkappa 3}$ ($\varkappa=1, 2, 3$) определены формулой (6.52) гл. 1.

Упражнение 2.11. Показать, что тензоры (2.44) и (2.45) удовлетворяют условиям (2.35). ●

Мы всюду выбирали ось трансверсальной изотропии, совпадающей с координатной осью x_3 прямоугольной системы координат. Однако можно ее выбрать произвольно ориентированной в пространстве и характеризующейся единичным вектором $\vec{c}$. Более того, этот вектор $\vec{c}$ может зависеть от координат. В таком случае трансверсальная изотропия называется *криволинейной* и образующие тензоры группы трансверсальной изотропии вместо (2.14) можно выбрать в виде

$$
\underset{\sim}{g}\,(g_{ij}), \quad \vec{c} = c^i\vec{e}_i \; (g_{ij}c^ic^j = 1). \qquad (2.46)
$$

Упражнение 2.12. Показать, что для *криволинейной трансверсальной изотропии* можно положить вместо (2.38) — (2.40):

$$
a^{(1)}_{ij} = g_{ij} - c_ic_j, \; a_1 = \sqrt{2}, \; a^{(2)}_{ij} = c_ic_j, \; a_2 = 1, \qquad (2.47)
$$

$$
I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} b_{ij}(g^{ij} - c^ic^j), \; I_2 = b_{ij}c^ic^j,
$$

$$I_3=[b_{ij}b^{ij}-(b_{ij}g^{ij})^2+\frac{1}{2}(I_2+b_{ij}g^{ij})^2-2c^ib_{i\cdot}^{\cdot k}b_{kj}c^j]^{1/2},$$

$$I_4=[2(c^ib_{i\cdot}^{\cdot k}b_{kj}c^j-I_2^2)]^{1/2}, \qquad (2.48)$$

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}b_{kl}(g^{kl}-c^kc^l)(g_{ij}-c_ic_j), \quad p_{ij}^{(2)}=b_{kl}c^kc^lc_ic_j,$$

$$p_{ij}^{(3)}=b_{ij}-\frac{\sqrt{2}}{2}I_1(g_{ij}-c_ic_j)+I_2c_ic_j-c^k(b_{ki}c_j+b_{kj}c_i), \qquad (2.49)$$

$$p_{ij}^{(4)}=c^k(b_{ki}c_j+b_{kj}c_i)-2I_2c_ic_j. \bullet$$

Точно так же для криволинейной ортотропии можно выбрать три единичных вектора $\vec{c}^{(\varkappa)}$, $\varkappa=1, 2, 3$, зависящих от координат и характеризующих три главных направления ортотропии в каждой точке пространства, причем

$$g^{ij}c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\rho)}=\delta_{\varkappa\rho} \quad (\varkappa, \rho=1, 2, 3). \qquad (2.50)$$

Упражнение 2.13. Доказать, исходя из (2.50), что для матрицы, составленной из образующих векторов $\vec{c}^{(\varkappa)}$ $(\varkappa=1, 2, 3)$ ортотропии в прямоугольной декартовой системе координат

$$\begin{pmatrix} c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} \end{pmatrix} \qquad (2.51)$$

следует, что:

а) сумма квадратов элементов одной строки или столбца (2.51) равна 1;

б) сумма произведений соответствующих элементов двух строк или двух столбцов (2.51) равна нулю.

Упражнение 2.14. Показать, что для криволинейной ортотропии можно положить вместо (2.41)—(2.43)

$$a_{ij}^{(\varkappa)}=c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\varkappa)}, \quad a_\varkappa=1 \quad (\varkappa=1, 2, 3), \qquad (2.52)$$

$$I_\varkappa=b^{ij}c_i^{(\varkappa)}c_j^{(\varkappa)}, \quad I_{\varkappa+3}=\sqrt{V_iV^i-2V_\varkappa^2},$$

$$V_\varkappa^2\equiv c_i^{(\varkappa)}b_{\cdot k}^{i\cdot}b^{kj}c_j^{(\varkappa)}-I_\varkappa^2 \quad (\varkappa=1, 2, 3), \qquad (2.53)$$

$$p_{ij}^{(\varkappa)}=I_\varkappa a_{ij}^{(\varkappa)}, \quad p_{ij}^{(\varkappa+3)}=\sum_{\gamma=1}^{3}V_{ij}^{(\gamma)}-2V_{ij}^{(\varkappa)},$$

$$V_{ij}^{(\varkappa)} \equiv \frac{1}{2}\left(c_i^{(\varkappa)} b_{j\cdot}^{\cdot k} + c_j^{(\varkappa)} b_{i\cdot}^{\cdot k}\right) c_k^{(\varkappa)} - I_\varkappa c_i^{(\varkappa)} c_j^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{2.54}$$

§ 3. Независимые инварианты тензора

В § 3 гл. 1 было показано, что инвариант (скалярный инвариант) относительно одной группы G_1 может не являться инвариантом относительно другой G_2. Очевидно, однако, что если группа G_2 является подгруппой группы G_1, то инвариант относительно группы G_1 является одновременно и инвариантом группы G_2 (но не наоборот). Поэтому если имеется последовательность групп $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$, такая, что каждая G_{n+1} является подгруппой группы G_n

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots, \tag{3.1}$$

то с возрастанием номера n число инвариантов относительно группы G_n, вообще говоря, возрастает.

В § 3 гл. 1 было показано, например, что вектор (тензор первого ранга) имеет один инвариант относительно полной ортогональной группы I в R_3, два инварианта относительно трансверсально изотропной группы T_3 и три относительно ортотропной группы O.

В § 3 гл. 3 было подчеркнуто, что симметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта, ибо след всякой степени n ($n>3$) такого тензора

$$\langle \underset{\sim}{b}^n \rangle = b_{i_1\cdot}^{\cdot i_2} b_{i_2\cdot}^{\cdot i_3} \ldots b_{i_{n-1}}^{\cdot i_n} b_{i_n}^{\cdot i_1} \tag{3.2}$$

согласно формуле Гамильтона — Кели (см. (3.12) гл. 3) выражается через следы первых трех степеней тензора.

Однако сама формула Гамильтона — Кели справедлива не только для симметричного тензора. Так может быть и несимметричный тензор второго ранга имеет три независимых инварианта относительно общей группы преобразований? Для того чтобы разобраться в этом вопросе, посмотрим, какими способами формируются инварианты тензора. Для симметричного тензора второго ранга, кроме инвариантов типа (3.2), могут быть образованы также инварианты с помощью тензоров Леви-Чивиты (см. упр. 2.7

гл. 3). Например, таким инвариантом является определитель тензора $\underset{\sim}{b}$ (см. (2.2) гл. 3). Для несимметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{c}$ число возможностей построения его инвариантов повышается. Ведь всякий несимметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{c}$ может быть представлен в виде суммы симметричного $\underset{\sim}{b}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{\omega}$ (упр. 1.5 гл. 3):

$$\underset{\sim}{c}=\underset{\sim}{b}+\underset{\sim}{\omega};\quad \underset{\sim}{b}\equiv\frac{1}{2}(\underset{\sim}{c}+\underset{\sim}{\tilde{c}}),\quad \underset{\sim}{\omega}\equiv\frac{1}{2}(\underset{\sim}{c}-\underset{\sim}{\tilde{c}}), \tag{3.3}$$

причем со всяким антисимметричным тензором $\underset{\sim}{\omega}$ можно однозначно связать аксиальный вектор $\vec{\omega}$ (см. (2.35) гл. 3).

Упражнение 3.1. Доказать, что всякая четная степень антисимметричного тензора является симметричным тензором, а нечетная степень — антисимметричным. ●

Следовательно, инварианты несимметричного тензора можно образовать с помощью следов произведений (и сверткой с тензором Леви-Чивиты) различных степеней симметричной части этого тензора и четных степеней несимметричной его части.

Возможности получения новых инвариантов тензоров увеличиваются, если рассматривать подгруппы G полной ортогональной группы I евклидового пространства R_3. В этом случае можно образовать инварианты путем сверток различных их степеней с тензорами, образующими G (базисными тензорами).

В § 2 мы ввели понятие линейных инвариантов симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$. Эти инварианты как раз и строятся с помощью свертки тензора $\underset{\sim}{b}$ с тензорами второго ранга, составленными из тензоров, образующих группу G.

Упражнение 3.2. Доказать, что для симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ линейный инвариант относительно группы I всего один и имеет вид

$$I_1=\underset{\sim}{b}:\underset{\sim}{\mathcal{I}}=b_{ij}\delta_{ij}\doteq\langle\underset{\sim}{b}\rangle. \tag{3.4}$$

Упражнение 3.3. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет два линейных инварианта относительно группы T_3:

$$I_1=b_{ij}(\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2})=b_{11}+b_{22},$$

$$I_2 = b_{ij}\delta_{i3}\delta_{j3} = b_{33}. \qquad (3.5)$$

Упражнение 3.4. Доказать, что тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет три линейных инварианта относительно группы O:

$$I_\varkappa = b_{ij}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa\varkappa} \quad (\varkappa = 1,\ 2,\ 3). \; \bullet \qquad (3.6)$$

Вообще говоря, каждый тензор имеет бесконечное число инвариантов относительно группы G. Однако между этими инвариантами могут существовать всякого рода зависимости. Одним из видов таких зависимостей является алгебраическая. Примером алгебраической зависимости служит уже упомянутое следствие теоремы Гамильтона — Кели, согласно которому среди следов произвольной степени тензора второго ранга (3.2) независимыми могут быть только три, все остальные через них выражаются. Между инвариантами могут существовать и неалгебраические зависимости или полиномиальные соотношения, которые не сводятся к полиномиальной зависимости какого-либо из инвариантов от остальных инвариантов (такие соотношения называются *сизигиями*).

При исследовании тензорных функций большое значение имеют *функциональные зависимости* между инвариантами (если их рассматривать как функции от компонент тензоров, из которых эти инварианты образованы). При этом важно установить *функционально независимые инварианты*. Рассмотрим, например, симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$. В каждой системе координат он имеет шесть независимых компонент, а так как мы рассматриваем евклидово пространство R_3, то в качестве системы координат всегда можно выбрать прямоугольную декартову. Согласно известной теореме алгебры можно выбрать такую прямоугольную систему координат, в которой тензор $\underset{\sim}{b}$ будет представляться диагональной матрицей. Следовательно, всякий инвариант тензора $\underset{\sim}{b}$ будет зависеть не более чем от трех компонент b_{11}, b_{22}, b_{33} (более подробно этот вопрос будет изучен в следующем параграфе). Поэтому функционально независимых инвариантов симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ будет не более трех.

Если же мы рассматриваем инварианты относительно группы G, являющейся подгруппой полной ортогональной группы I, то допустимыми будут не все ортогональные преобразования и поэтому не всякую симметричную матрицу с помощью таких преобразований можно привести к диагональному виду. Поэтому число функционально независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{b}$ относительно группы G может повыситься. Однако в любом случае их не может быть более шести, ибо в любой системе координат симметричный тензор $\underset{\sim}{b}$ имеет не более шести независимых компонент, которые можно считать аргументами инвариантов, рассматриваемых как функции.

Очевидно также, что функционально независимых инвариантов относительно группы I для несимметричного тензора $\underset{\sim}{c}$ будет не более шести. В самом деле, представляя тензор $\underset{\sim}{c}$ в виде (3.3), т. е. суммы симметричного $\underset{\sim}{b}$ и антисимметричного $\underset{\sim}{\omega}$ тензоров и приводя ортогональным невырожденным преобразованием тензор $\underset{\sim}{b}$ к диагональному виду, мы будем в некоторой специальной системе координат иметь не более трех независимых компонент тензора $\underset{\sim}{b}$ и трех независимых компонент тензора $\underset{\sim}{\omega}$. Поэтому все инварианты тензора $\underset{\sim}{c}$ можно рассматривать как функцин не более чем шести аргументов, а значит, и число функционально независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{c}$ не более шести.

Обратимся теперь к p-представлению симметричного тензора второго ранга $\underset{\sim}{b}$ (2.30). Очевидно, что каждый нз тензоров $\underset{\sim}{p}^{(\alpha)}$, составляющих это представление, линейно зависит от компонент тензора $\underset{\sim}{b}$. Поэтому инвариант

$$I_\alpha^2 = p_{ij}^{(\alpha)}\, p_{ij}^{(\alpha)} \qquad (3.7)$$

завнсит квадратично от компонент тензора $\underset{\sim}{b}$.

Эти соображения помогают отыскать независимые инварианты относительно группы G тензора $\underset{\sim}{b}$. Построим всевозможные инварианты путем сверток различных степеней тензора $\underset{\sim}{b}$ и образующих тензоров группы G. Оставим среди этнх инварнантов только линейные (определение линейных инвариантов дано в § 2) и *квадратичные* (3.7). Если число таких инвариантов n не превышает шести, то это и независимые инварианты. В противном случае, среди них следует выбрать шесть функционально независимых инвариантов.

Упражнение 3.5. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующего тензора группы I (2.16) можно построить только один линейный ($m=1$) и один квадратичный инвариант ($n=2$), см. (2.37)

$$I_1' = b_{ij}\delta_{ij} = \langle \underset{\sim}{b} \rangle = \sqrt{3}\, I_1,\ I_2'^2 \equiv b_{ik}b_{kj}\delta_{ij} = b_{ij}b_{ij} = I_1^2 + I_2^2. \tag{3.8}$$

Упражнение 3.6. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующих тензоров группы T_3 (2.15) можно построить только два линейных ($m=2$) и два квадратичных инварианта ($n=4$), см. (2.39)

$$\begin{gathered} I_1' = b_{ij}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) = b_{11} + b_{22} \equiv \sqrt{2}\, I_1, \\ I_2 = b_{ij}\delta_{3i}\delta_{3j} = b_{33},\ I_3'^2 = b_{ik}b_{kj}(\delta_{i1}\delta_{j1} + \delta_{i2}\delta_{j2}) = \\ = b_{1k}b_{k1} + b_{2k}b_{k2} \equiv I_1^2 + I_3^2 + \frac{1}{2} I_4^2, \\ I_4'^2 = b_{ik}b_{kj}\delta_{3i}\delta_{3j} = b_{3k}b_{k3} \equiv I_2^2 + \frac{1}{2} I_4^2. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Или для криволинейной трансверсальной изотропии (2.48):

$$\begin{gathered} I_1' = b^{ij}a_{ij}^{(1)} = \sqrt{2}\, I_1,\ I_2 = b^{ij}a_{ij}^{(2)}, \\ I_3'^2 = b^{i}_{\cdot k}b^{kj}a_{ij}^{(1)} = I_1^2 + I_3^2 + \frac{1}{2} I_4^2, \\ I_4'^2 = b^{i}_{\cdot k}b^{kj}a_{ij}^{(2)} = I_2^2 + \frac{1}{2} I_4^2. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Упражнение 3.7. Показать, что для симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$ с помощью образующих тензоров группы O (2.11) можно построить только три линейных ($m=3$) и три квадратичных инварианта ($n=6$), см. (2.42):

$$\begin{gathered} I_\varkappa = b_{ij}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa\varkappa}, \\ I_{\varkappa+3}'^2 = b_{ik}b_{kj}\delta_{i\varkappa}\delta_{j\varkappa} = b_{\varkappa k}b_{k\varkappa}\ (\varkappa = 1, 2, 3), \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$I'^{2} = I_1^2 + I_4^2 + I_5^2, \quad I_5'^{2} = I_2^2 + I_4^2 + I_6^2,$$

$$I_6'^{2} = I_3^2 + I_5^2 + I_6^2.$$

Или для криволинейной ортотропии (2.53):

$$I_\varkappa = b^{ij} a_{ij}^{(\varkappa)}, \quad I'_{\varkappa+3} = b^{i}_{\cdot k} b^{kj} a_{ij}^{(\varkappa)} \equiv V_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, 3). \tag{3.12}$$

§ 4. Матричные функции

В механике очень часто встречается ситуация, когда один тензор является функцией другого (а иногда даже оператором). При этом в основном рассматриваются тензоры второго ранга. Итак, пусть в каждой точке евклидова пространства $\mathscr{R}_3$ каждому тензору второго ранга $\underset{\sim}{a}$ ставится в соответствие некоторый тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}), \tag{4.1}$$

причем закон соответствия (4.1) называется *тензорной функцией.*

Ясно, что такое определение почти ничего не дает, так как не определяет свойств тензорной функции $\underset{\sim}{f}$. Эта функция может быть тензором второго ранга, образованным из различных тензорных степеней тензора $\underset{\sim}{a}$, может быть тензором более высокого ранга, который свертывается с тензорными степенями тензора $\underset{\sim}{a}$, образуя тензор второго ранга.

Для некоторых случаев понятие тензорной функции $\underset{\sim}{f}$ вводится естественным образом. Так, если под $\underset{\sim}{f}$ понимается полиномиальная функция n-го порядка, то

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) = \alpha_0 \underset{\sim}{\mathscr{I}} + \alpha_1 \underset{\sim}{a} + \alpha_2 \underset{\sim}{a}^2 + \ldots + \alpha_n \underset{\sim}{a}^n, \tag{4.2}$$

где каждое слагаемое в (4.2) имеет очевидный смысл, а α_i $(i=0, \ldots, n)$ — некоторые скаляры.

Чаще всего в механике рассматриваются тензорные функции симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$, инвариантные относительно какой-либо группы преобразования, связанной, например, с материальной симметрией. Пусть некоторая группа преобразования G характеризуется в некоторой точке $\mathscr{R}_3$ матрицей Q. В системе координат с базисом $\vec{e}_i$

$$\underset{\sim}{b}=b^i_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j,\ \underset{\sim}{a}=a^i_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j. \tag{4.3}$$

Поэтому соотношение (4.1) можно записать в виде

$$b^i_j=f^i_j(a^k_l). \tag{4.4}$$

Тогда при переходе к другой системе координат преобразованием, определяющим группу G,

$$\vec{e}_{i'}=Q^i_{i'}\vec{e}_i, \tag{4.5}$$

для тензорной функции f, инвариантной относительно группы преобразования G и характеризующейся матрицей Q, можно записать в матричном виде выражение

$$Q^{-1}bQ=f(Q^{-1}aQ). \tag{4.6}$$

Если под G понимается полная ортогональная группа евклидова пространства $\mathscr{R}_3$, то тензорная функция $\underset{\sim}{f}$, удовлетворяющая соотношениям (4.1) и (4.6) для всякой ортогональной матрицы Q, называется изотропной. Как известно из алгебры, всякая симметричная матрица a путем некоторого невырожденного ортогонального преобразования Q приводится к диагональному виду. Таким образом,

$$Q^{-1}aQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения (спектр) матрицы a.

Можно рассмотреть частный случай изотропной тензорной функции, обычно рассматриваемый в теории матриц [10]:

$$Q^{-1}bQ=\begin{pmatrix}f(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & 0\\ 0 & 0 & f(\lambda_3)\end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

т. е. с каждой тензорной функцией f можно естественным образом связать скалярную функцию $f(\lambda)$, значения которой на спектре матрицы a определяют матрицу b (4.1) в некоторой специальной системе координат. Так как (4.1) отражает ковариантную зависимость двух тензоров, то, зная эту зависимость в одной системе координат, можно вычислить ее в любой другой.

Пусть скалярная функция $f(\lambda)$ может быть представлена в окрестности некоторой точки λ_0 степенным рядом

$$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i (\lambda-\lambda_0)^i, \tag{4.9}$$

сходящимся в некотором круге сходимости $|\lambda-\lambda_0|<R$. Тогда, очевидно, это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент заменить матрицей a, собственные числа которой лежат внутри этого круга сходимости. Тем самым определяются тензорные функции

$$e^{\underset{\sim}{a}}=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\underset{\sim}{a}^i}{i!}, \tag{4.10}$$

$$\cos \underset{\sim}{a}=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2!)!} \underset{\sim}{a}^{2i}, \quad \sin \underset{\sim}{a}=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \underset{\sim}{a}^{2i+1}, \tag{4.11}$$

$$(\underset{\sim}{\mathcal{J}}-\underset{\sim}{a})^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty} \underset{\sim}{a}^i, \tag{4.12}$$

$$\ln \underset{\sim}{a}=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} (\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{\mathcal{J}})^i \text{ и т. д.}, \tag{4.13}$$

причем на главные значения тензоров $\underset{\sim}{a}$ в (4.10) и (4.11) не накладывается ограничений, для (4.12) предполагается выполненным условие $|\lambda_j|<1$, а для (4.13) — $|\lambda_j-1|<1$ ($j=1, 2, 3$). Разумеется, правые части выражений (4.2), (4.10)—(4.13) можно с помощью формулы Гамильтона — Кели (3.12) гл. 3 свернуть так, чтобы тензор $\underset{\sim}{b}$ выражался через степени тензора $\underset{\sim}{a}$ не выше второй:

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(a)\equiv\beta_0 \underset{\sim}{I}+\beta_1 \underset{\sim}{a}+\beta_2 \underset{\sim}{a}^2, \tag{4.14}$$

где функции β_0, β_1, β_2 являются соответствующими скалярными функциями трех независимых инвариантов тензора $\underset{\sim}{a}$.

Для того чтобы построить явную зависимость этих функций от инвариантов, воспользуемся тем обстоятельством, что матрица b, выражающая тензор $\underset{\sim}{b}$ в некоторой системе координат, полностью определяется по значениям функции f на спектре матрицы a. Следовательно, нужно отыскать скалярную функцию f, приннмающую в трех точках λ_1, λ_2, λ_3 спектра матрицы a заданные значения $f(\lambda_1)$, $f(\lambda_2)$, $f(\lambda_3)$.

Предположим вначале, что все значения λ_1, λ_2, λ_3 различны между собой и отличны от нуля. Полином

$$P(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2, \tag{4.15}$$

принимающий заданные значения в точках λ_1, λ_2, λ_3, называется интерполяционным полиномом Лагранжа. Для отыскания коэффициентов этого полинома α_0, α_1, α_2 нужно решить алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_1{}^2&=f(\lambda_1),\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_2+\alpha_2\lambda_2{}^2&=f(\lambda_2),\\ \alpha_0+\alpha_1\lambda_3+\alpha_2\lambda_3{}^2&=f(\lambda_3). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Определитель этой системы является определителем Вандермонда

$$d=(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1), \tag{4.17}$$

который в силу сделанных предположений отличен от нуля. Решение системы (4.16) имеет вид

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{d}[f(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)-f(\lambda_2)\lambda_1\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)+\\ &\qquad+f(\lambda_3)\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)],\\ a_1&=\frac{1}{d}[-f(\lambda_1)(\lambda_3^2-\lambda_2^2)+f(\lambda_2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)-\\ &\qquad-f(\lambda_3)(\lambda_2^2-\lambda_1^2)],\\ a_2&=\frac{1}{d}[f(\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)-f(\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)+f(\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)]. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Подставляя (4.18) в (4.15), получим искомый полином

$$P(\lambda)=f(\lambda_1)\frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+$$

$$+f(\lambda_2)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}+f(\lambda_3)\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_2)}. \tag{4.19}$$

Так как функция $f(\lambda)$ и полином $P(\lambda)$ совпадают на спектре матрицы a, то

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})\equiv\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathcal{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_3\underset{\sim}{\mathcal{I}})}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}f(\lambda_1)+$$

$$+\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathcal{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_3\underset{\sim}{\mathcal{I}})}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}f(\lambda_2)+$$

$$+\frac{(\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathcal{I}})(\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathcal{I}})}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}f(\lambda_3). \tag{4.20}$$

Учитывая, что

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\langle a\rangle\equiv I,$$
$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\langle a^2\rangle\equiv II, \tag{4.21}$$
$$\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=\langle a^3\rangle\equiv III,$$

и разрешая (4.21) относительно инвариантов I, II, III, а затем подставляя в (4.20), получим (4.14) и явное выражение скалярных функций β_0, β_1, β_2 от инвариантов I, II, III.

Если теперь $\lambda_2=\lambda_3$, но $\lambda_1\neq\lambda_2$, то получим соотношения (4.1), совершая в (4.20) предельный переход

$$f'(\lambda_2)=\lim_{\lambda_3\to\lambda_2}\frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}, \tag{4.22}$$

т. е. в этом случае для непрерывности тензорной функции $\underset{\sim}{f}$ необходимо потребовать дифференцируемости соответствующей ей скалярной функции f, точно так же для случая $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ нужно потребовать существования (и ограниченности) второй производной

$$|f'(\lambda_1)|<\infty,\quad |f''(\lambda_1)|<\infty. \tag{4.23}$$

Упражнение 4.1. Доказать, что при $\lambda_2=\lambda_3$ справедлива формула

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathcal{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_1)-\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathcal{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}f(\lambda_2). \tag{4.24}$$

Упражнение 4.2. Доказать, что при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ тензор $\underset{\sim}{b}$ является шаровым:

$$\underset{\sim}{b}=f(\lambda_1)\underset{\sim}{\mathcal{I}}. \tag{4.25}$$

Упражнение 4.3. Какие условия требуется наложить, чтобы последовательность матриц

$$b_{(n)}=b_{(n-1)}+\frac{1}{2}\left(a-b_{(n-1)}^2\right),\ n>0,$$

$$b_{(0)}=0 \tag{4.26}$$

сходилась к положительно-определенному квадратному корню из матрицы a, т. е.

$$b^2=a. \tag{4.27}$$

Упражнение 4.4. Найти все решения уравнения (4.27), имеющие вид

$$b=\varkappa_1\mathcal{I}+\varkappa_2 a, \tag{4.28}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — некоторые скаляры.

Упражнение 4.5. Выразить с помощью формулы (4.14) a^{-1}, где a — матрица, соответствующая девиатору некоторого тензора $\underset{\sim}{a}$.

Упражнение 4.6. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}e^{\underset{\sim}{a}t}=e^{\underset{\sim}{a}t}\otimes\underset{\sim}{a} \tag{4.29}$$

(использовать формулу (4.10)). ●

Следует еще раз отметить, что выведенные формулы справедливы только для симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$. В случае, если тензор $\underset{\sim}{a}$ несимметричен, формулу (4.14) необходимо дополнить тензорами, которые образуют линейно независимый базис и среди которых могут встречаться выражения

$$\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2\cdot\underset{\sim}{c},\ \underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{b}^2\cdot\underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}^2,$$

а в качестве инвариантов, от которых зависят скалярные функции, могут быть выбраны следы следующих тензоров:

$$\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{b}^3,\ \underset{\sim}{c}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}^2,\ \underset{\sim}{c}^2\cdot\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b}^2, \tag{4.30}$$

где $\underset{\sim}{b}$ — тензор, образованный из $\underset{\sim}{a}$ симметрированием, а $\underset{\sim}{c}$ — образованный из $\underset{\sim}{a}$ антисимметрированием.

Упражнение 4.7. Построить вид изотропной тензорной функции от несимметричного тензора 2-го ранга $\underset{\sim}{a}$ [12].

Упражнение 4.8. Доказать, что для тензорных функций $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{\tilde{a}}$, $\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{\tilde{a}}$ невозможно подобрать $\underset{\sim}{f}$ вида (4.14). Найти $\underset{\sim}{f}$ для этих случаев. ●

Изотропная тензорная функция $\underset{\sim}{f}$ симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$ называется квазилинейной, если в (4.14)

$$\beta_2\equiv 0. \tag{4.31}$$

Легко доказать, что в этом случае скалярные функции β_0 и β_1, входящие в (4.14), зависят только от двух инвариантов тензора $\underset{\sim}{a}$. В самом деле, как следует из (4.20), условие (4.31) означает, что

$$\frac{f(\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}=-\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}-\\-\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}. \tag{4.32}$$

Подставляя (4.32) в (4.20), получим

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})=f(\lambda_1)\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_2\underset{\sim}{\mathcal{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}-f(\lambda_2)\frac{\underset{\sim}{a}-\lambda_1\underset{\sim}{\mathcal{I}}}{\lambda_1-\lambda_2}. \tag{4.33}$$

Упражнение 4.9. Пусть $\underset{\sim}{c}$ — тензор-девиатор, у которого в некоторой системе координат $c_i{}^3=0$ $(i=1,$ $2, 3)$, и пусть для некоторой функции $f(\lambda)$

$$f(0)=0. \tag{4.34}$$

Доказать, что для того, чтобы изотропная тензорная функция была квазилинейной, необходимо и достаточно, чтобы она была нечетной, т. е.

$$f(\lambda)=-f(-\lambda).\ \bullet \tag{4.35}$$

Тензорная функция $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$ называется потенциальной, если существует такая скалярная функция W тензора $\underset{\sim}{a}$, что

$$\frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}), \tag{4.36}$$

функция W называется в этом случае потенциалом функции $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$.

Из определения тензорной изотропной функции, данного выше, следует, что если скалярная функция $f(\lambda)$ интегрируема, то всегда существует потенциал W. Если же под функцией $\underset{\sim}{f}$ понимается изотропная функция тензора $\underset{\sim}{a}$ и еще некоторых шаровых тензоров, то такого утверждения сделать, вообще говоря, уже нельзя.

Пусть W зависит от инвариантов симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$, т. е. $W(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{II}, \underset{\sim}{III})$. Тогда

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{a}} = \frac{\partial W}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial \underset{\sim}{a}} + \frac{\partial W}{\partial II}\frac{\partial II}{\partial \underset{\sim}{a}} + \frac{\partial W}{\partial III}\frac{\partial III}{\partial \underset{\sim}{a}}. \tag{4.37}$$

Из формул (3.3)—(3.5) гл. 3 и (4.21) следует, что

$$\frac{\partial I}{\partial \underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{\mathcal{I}}, \quad \frac{\partial II}{\partial \underset{\sim}{a}} = 2a, \quad \frac{\partial III}{\partial \underset{\sim}{a}} = 3\underset{\sim}{a}^2. \tag{4.38}$$

Подставляя (4.38) в (4.37), получим

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) = \frac{\partial W}{\partial I}\underset{\sim}{\mathcal{I}} + 2\frac{\partial W}{\partial II}\underset{\sim}{a} + 3\frac{\partial W}{\partial III}\underset{\sim}{a}^2. \tag{4.39}$$

Сравнивая (4.39) с (4.14), заключаем, что

$$\beta_0 = \frac{\partial W}{\partial I}, \quad \beta_1 = 2\frac{\partial W}{\partial II}, \quad \beta_2 = 3\frac{\partial W}{\partial III}. \tag{4.40}$$

А если W — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, то

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial II} = \frac{\partial \beta_1}{\partial I}, \quad \frac{\partial \beta_0}{\partial III} = \frac{\partial \beta_2}{\partial I}, \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial III} = \frac{\partial \beta_2}{\partial II}. \tag{4.41}$$

Из (4.41) следует, что для квазилинейной тензорной функции (см. (4.31)) функции W, β_0 и β_1 зависят только от первых двух инвариантов I, II, и, кроме того, выполняются условия взаимности *

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial II} = \frac{\partial \beta_1}{\partial I}. \tag{4.42}$$

Аналогично можно рассмотреть изотропные тензорные функции нескольких тензорных аргументов. За

---

* Победря Б. Е. — Механика полимеров, 1967, № 4, с. 645—658.

подробностями мы отсылаем читателя к книге [12]. Здесь же мы приведем без доказательства наиболее общий результат, касающийся ортогональных симметричных тензоров второго ранга, а именно: пусть известно, что тензор $\underset{\sim}{b}$ является изотропной функцией N симметричных тензоров $\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, \underset{\sim}{a}_N$; $N \geqslant 2$:

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \ldots, a_N). \tag{4.43}$$

Тогда эту фуикцию можно представить в виде

$$\underset{\sim}{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{(i)} \underset{\sim}{E}_{(i)}, \quad n \leqslant 6, \tag{4.44}$$

где $\underset{\sim}{E}_{(i)}$ — произвольные линейно независимые тензоры из набора

$$\begin{gathered}
\underset{\sim}{I},\ \underset{\sim}{a}_k,\ a_k^2,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l + \underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\\
\underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l + \underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k^2,\ a_k^2a_l^2 + a_l^2a_k^2,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\ a_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l a_k^2,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m + \underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k^2,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_k^2 + \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k^2,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n + \underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p + \underset{\sim}{a}_p\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k,
\end{gathered} \tag{4.45}$$

а коэффициенты $\alpha_{(i)}$ зависят от следов следующих тензоров:

$$\begin{gathered}
\underset{\sim}{a}_k,\ \underset{\sim}{a}_k^2,\ \underset{\sim}{a}_k^3,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\\
\underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l^2\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n,\\
\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p,\ \underset{\sim}{a}_k^2\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_p,\ \underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_l\underset{\sim}{a}_m\underset{\sim}{a}_n\underset{\sim}{a}_k\underset{\sim}{a}_q,
\end{gathered} \tag{4.46}$$

где числа k, l, m, n, p, q представляют собой всевозможные наборы из N, все различные. (Среди инвариантов (4.46), разумеется, нужно выбрать функционально независимые.)

Обобщением тензорных функций являются *тензор-*

ные операторы, которые играют важную роль при построении новых моделей механики сплошной среды. Частным случаем таких операторов являются тензорные функции нескольких тензоров, а также неизотропные функции.

В связи с этим введем понятие дифференциала $D\check{\underset{\sim}{f}}$ тензора-оператора $\check{\underset{\sim}{f}}$ и его функциональной производной, а именно

$$D\check{\underset{\sim}{f}}\{\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{h}\} \equiv \left[\frac{\partial \check{\underset{\sim}{f}}}{\partial \underset{\sim}{a}} \underset{\sim}{h}\right] = \frac{d}{d\xi} \check{\underset{\sim}{f}}\{\underset{\sim}{a} + \xi \underset{\sim}{h}\}_{\xi=0}. \qquad (4.47)$$

При этом будем считать, что $D\check{\underset{\sim}{f}}$ линеен относительно $\underset{\sim}{h}$. Пусть тензоры второго ранга $\underset{\sim}{h}^{(1)}, \underset{\sim}{h}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{h}^{(m)}$ принадлежат некоторым линейным нормированным пространствам $E_1, E_2, \ldots, E_m$. Назовем *m-линейной формой* выражение

$$\check{\underset{\sim}{A}}_m \underset{\sim}{h}^{(1)} \underset{\sim}{h}^{(2)} \ldots \underset{\sim}{h}^{(m)} =$$

$$= A^{ij i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_m j_m} h^{(1)}_{i_1 j_1} \ldots h^{(m)}_{i_m j_m} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \qquad (4.48)$$

где $\vec{e}_i$ — векторы репера пространства $\mathscr{R}_3$.

Форма называется однородной, если

$$E_1 = E_2 = \ldots = E_m, \ \underset{\sim}{h}^{(1)} = \underset{\sim}{h}^{(2)} = \ldots = \underset{\sim}{h}^{(n)}.$$

Однородная форма второй степени называется квадратичной. Сумму однородных форм

$$\sum_{m=0}^{M} \check{\underset{\sim}{A}}_m \underbrace{\underset{\sim}{h} \ldots \underset{\sim}{h}}_{m} \equiv \sum_{m=0}^{M} \check{\underset{\sim}{A}}_m \underset{\sim}{h}^m \qquad (4.49)$$

назовем многочленом M-степени относительно $\underset{\sim}{h}$.

Пусть теперь оператор $\check{\underset{\sim}{f}}$ в окрестности точки $\underset{\sim}{a} = 0$ представляется в виде ряда, сходящегося внутри некоторого круга сходимости радиуса R:

$$\underset{\sim}{b} = \check{\underset{\sim}{f}}(\underset{\sim}{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \check{A}_m \underset{\sim}{h}^m. \qquad (4.50)$$

Очевидно, что характеристические числа матрицы $\underset{\sim}{h}$ должны лежать внутри этого круга сходимости. Величины $\breve{A}_m$, входящие в выражение (4.50), представляют собой тензоры-операторы 2 $(m+1)$-го ранга. Если тензоры $\underset{\sim}{h}$ и $\underset{\sim}{b}$ симметричны, то тензоры $\breve{A}_m^{iji_1j_1\ldots i_mj_m}\vec{e}_i\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{j_m}$ также симметричны по индексам i, j, i_k, j_k $(k=1, \ldots, m)$. Кроме того, они симметричны по парам индексов i_kj_k, i_lj_l $(k=1, \ldots, m)$. Если они еще симметричны по парам индексов ij и i_kj_k:

$$\breve{A}_m^{iji_1j_1\ldots,i_kj_k\ldots i_mj_m}=\breve{A}_m^{i_kj_ki_lj_l\ldots ij\ldots i_mj_m}, \tag{4.51}$$

то говорят, что выполнены *условия взаимности.* В соотношениях (4.51) $\partial\breve{f}/\partial a$ представляет собой тензор-оператор четвертого ранга. Можно определить тензорные функциональные производные второго и более высокого порядка.

Заметим, что если оператор $\breve{f}$ представим в окрестности точки $\underset{\sim}{a}$ в виде ряда Тейлора, то под $\breve{A}_m$ в выражении (4.50) понимается m-я тензорная функциональная производная в данной точке (которая является тензором 2 $(m+1)$-го ранга), поделенная на m! Очевидно, чтобы тензорный оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$, представимый в виде (4.50), был инвариантен относительно группы преобразования G, необходимо, чтобы каждая m-линейная однородная форма была инвариантна относительно G. Если под $\underset{\sim}{\breve{f}}$ понимается функция $\underset{\sim}{f}$, а G является полной ортогональной группой I, то, подставляя в (4.50) выражения тензоров $\underset{\sim}{A_m}$ в виде комбинации единичных тензоров, получим (4.2), а после применения формулы Гамильтона — Кели — выражение (4.14).

Оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ называется квазилинейным, если он является тензорно-линейным, а его нелинейность отражается нелинейной зависимостью от инвариантов тензора-аргумента. Оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ называется потенциальным, если существует такой скалярный оператор $\underset{\sim}{\breve{W}}$, что

$$\underset{\sim}{b}\equiv\underset{\sim}{\breve{f}}\{\underset{\sim}{a}\}=\frac{\partial\breve{W}}{\partial\underset{\sim}{a}}\cdot \tag{4.52}$$

Если оператор $\underset{\sim}{\breve{f}}$ аналитический (т. е. существуют все его производные по Фреше), то его всегда можно представить в виде (4.50). Если $\underset{\sim}{f}$ является непрерывным, то его можно аппроксимировать с наперед заданной точностью выражением (4.50) *. Легко видеть, что выполнение условий взаимности (4.51) эквивалентно потенциальности оператора $\underset{\sim}{f}$ (4.52).

Теорема. Если оператор $\underset{\sim}{f}$ является квазилинейным и потенциальным (выполнены условия взаимности), то в правую часть выражения (4.50) не могут входить скалярные степени тензора $\underset{\sim}{a}$ выше второй.

Скалярной степенью m симметричного тензора $\underset{\sim}{a}$ называется выражение

$$I_m \equiv a_{i_2}^{i_1}(\lambda_1)\, a_{i_3}^{i_2}(\lambda_3) \ldots a_{i_m}^{i_{m-1}}(\lambda_{m-1})\, a_{i_1}^{i_m}(\lambda_m), \tag{4.53}$$

а тензорной степенью m этого же тензора — выражение

$$\underset{\sim}{I}_m \equiv a_{i_2}^{i}(\lambda_1)\, a_{i_3}^{i_2}(\lambda_2) \ldots a_{i_m}^{i_{m-1}}(\lambda_{m-1})\, a_j^{i_m}(\lambda_m)\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j}, \tag{4.54}$$

где λ_i — значения параметра $\lambda \in [l_0, l_1]$. В самом деле, пусть оператор $\underset{\sim}{f}$

$$\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{f}\{\underset{\sim}{a}\} \tag{4.55}$$

является квазилинейным и потенциальным. Тогда соотношения (4.55) в силу (4.52) можно записать в виде

$$\underset{\sim}{b} = \sum_m \frac{\partial W}{\partial I_m} \frac{\partial I_m}{\partial \underset{\sim}{a}}, \quad \frac{\partial I_m}{\partial \underset{\sim}{a}} = m \underset{\sim}{I}_{m-1}. \tag{4.56}$$

Так как $\underset{\sim}{b}$ выражается квазилинейно через $\underset{\sim}{a}$, то в разложение (4.56) должны входить только $\underset{\sim}{I}_m$ ($m \leqslant 2$. $\underset{\sim}{I}_0 \equiv \underset{\sim}{\mathcal{I}}$ — единичный тензор). Для этого, как следует из (4.56), нужно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial \breve{w}}{\partial I_m} \equiv 0, \quad m > 2, \tag{4.57}$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 4.10. Доказать, что справедлива и об-

---

* Frechet M. M. — Ann. L'Ecole Normal Supérieure, 1910, v. 27.

ратная теорема. Если оператор $\underset{\sim}{f}$ допускает разложение (4.46) и квазилинейный, то выполняются условия взаимности и оператор $\underset{\sim}{f}$ является потенциальным.

§ 5. Общее определение тензорной функции

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частное определение тензорной функции, основанное на известном определении функции от матриц [2]. Здесь мы рассмотрим общий случай.

Будем говорить, что тензор $\underset{\sim}{S}$ ранга r является *тензорной функцией* от тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$ (соответственно, рангов $r_1 \equiv m, \quad r_2, \ldots, r_N \equiv n$)

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}), \tag{5.1}$$

если независимо от выбора системы координат компоненты тензора $\underset{\sim}{S}$ являются одними и теми же функциями компонент тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}, \underset{\sim}{T}^{(2)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}$. Иначе говоря, если в некоторой фиксированной системе координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ имеем

$$S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} = F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}), \tag{5.2}$$

то в любой другой, полученной из исходной преобразованием (1.1),

$$S^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2} = F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(T^{(1)}_{j'_1 \ldots j'_m}, \ldots, T^{(N)k'_2 \ldots k'_n}_{k'_1}), \tag{5.3}$$

причем

$$A^{i'_1}_{\cdot i_1} B^{i_2 \cdot}_{\cdot i'_2} A^{i'_3 \cdot}_{\cdot i_3} \ldots A^{i'_r \cdot}_{\cdot i_r} S^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2} =$$

$$= F^{i'_1 \cdot i'_3 \ldots i'_r}_{\cdot i'_2}(B^{j_1 \cdot}_{\cdot j'_1} \ldots B^{j_m \cdot}_{\cdot j'_m} T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, B^{k_1 \cdot}_{\cdot k'_1} A^{k'_2 \cdot}_{\cdot k_2} A^{k'_3 \cdot}_{\cdot k_3} \ldots A^{k'_n \cdot}_{\cdot k_n} T^{(N)k_2 k_3 \ldots k_n}_{k_1}), \tag{5.4}$$

где взаимно обратные матрицы A и B являются якобиевыми матрицами преобразований (1.1) и (1.2) соответственно.

Обозначим группу симметрии тензора $\underset{\sim}{S}$ через G_S, а группы симметрии тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}$, $\underset{\sim}{T}^{(2)}$, ..., $\underset{\sim}{T}^{(N)}$ — через G_1, G_2, ..., G_N.

Упражнение 5.1. Доказать, что группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$, являющегося тензорной функцией (5.1), содержит в себе пересечение групп симметрии тензоров, являющихся аргументами этой функции, т. е.*

$$G_S \supseteq G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_N. \quad \bullet \tag{5.5}$$

В силу того что множество тензоров ранга r, инвариантных относительно группы G_S, образует конечномерное линейное пространство K (см. упр. 1.1), можно представить тензор $\underset{\sim}{S}$ в виде линейной комбинации тензорного базиса пространства K:

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^{k} \Omega_\alpha (I_1, \ldots, I_\beta) \underset{\sim}{S}^{(\alpha)}, \tag{5.6}$$

где $\Omega(I_1, \ldots, I_\beta)$ — скалярные функции *совместных инвариантов* $I_1, \ldots, I_\beta$ тензоров $\underset{\sim}{T}^{(1)}$, $\underset{\sim}{T}^{(2)}$, ..., $\underset{\sim}{T}^{(N)}$, а тензоры $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ образуют базис пространства K. Число элементов этого базиса k (размерность пространства K) совпадает с числом независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$ и в зависимости от его ранга r, симметрии и характера группы G_S может быть подсчитано по формулам (1.14), (1.30), (1.31) и т. п.

В число аргументов функций $\Omega_\alpha(I_1, \ldots, I_\beta)$ должны быть включены, разумеется, только функционально независимые инварианты. Их число β не должно превышать числа функционально независимых инвариантов γ (относительно G_S) тензора $\underset{\sim}{S}$.

В самом деле, пусть $Y_1, \ldots, Y_\gamma$ — независимые инварианты тензора $\underset{\sim}{S}$. Тогда, как следует из (5.6), существуют скалярные функции

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_1(I_1, I_2, \ldots, I_\beta), \\ Y_2 &= Y_2(I_1, I_2, \ldots, I_\beta), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_\gamma &= Y_\gamma(I_1, I_2, \ldots, I_\beta). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Если предположить, что $\beta > \gamma$, то из (5.7) следовало бы, что инварианты $I_{\gamma+1}, I_{\gamma+2}, \ldots, I_\beta$ можно было бы

---

* Это утверждение по существу является математической формулировкой известного в физике *принципа Неймана*.

выразить через $I_1, \ldots, I_\gamma$, откуда следовало бы, что инвариаиты $I_1, \ldots, I_\beta$ функционально зависимы. Поэтому должно быть:

$$\beta \leqslant \gamma. \tag{5.8}$$

Упражиение 5.2. Доказать, что число функционально иезависимых инвариантов γ теизора $\underset{\sim}{S}$ не может быть больше числа независимых компонент этого тензора k. Поэтому

$$\beta \leqslant \gamma \leqslant k. \quad ● \tag{5.9}$$

Рассмотрим, например, случай, когда один симметричный тензор второго ранга является *изотропной тензорной функцией* другого симметричного тензора второго ранга.

Очевидно, $r=2$, $r_1 \equiv m=2$ и в качестве второго аргумента тензорйой функции (5.1) можно выбрать единичный тензор (или тензор $\underset{\sim}{g}$), т. е. $r_2 \equiv N=2$. Тогда в некоторой прямоугольной декартовой системе координат можио записать

$$S_{ij}=F_{ij}(T_{kl}, \delta_{mn}). \tag{5.10}$$

Группой симметрии единичного тензора $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ является группа I, а симметричного тензора $\underset{\sim}{T}$ — группа ортотропии O, так как поверхность Коши тензора $\underset{\sim}{T}$ (см. § 4 гл. 3) имеет три плоскости симметрии. Таким образом группой симметрии тензора $\underset{\sim}{S}$ является пересечение этих групп, т. е. группа O.

Число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$, инвариантного относительно группы O, равно трем (упр. 1.4). Поэтому в разложении (5.6) следует положить $k=3$, а число функционально иезависимых инвариантов $I_1, \ldots, I_\beta$ и $Y_1, \ldots, Y_\gamma$ согласио (5.9) будет не более трех (положим $\beta=\gamma=3$).

Очевидно также, что тензоры $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ являются инвариантными относительно группы O. Для того чтобы найти недостающий тензор базиса $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ в (5.6), воспользуемся теоремой, сформулированной в § 1, о том, что любой тензор, инвариантный относительно группы O, можно представить в виде операций тензорного умножения и свертывания тензоров $\underset{\sim}{T}$ и $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$. Выберем, например, тензор $\underset{\sim}{T}^2$. Тогда из (5.6) имеем для данного случая

$$\underset{\sim}{S}=\Omega_1(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{\mathcal{I}}+\Omega_2(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{T}+\Omega_3(I_1, I_2, I_3)\underset{\sim}{T}^2, \tag{5.11}$$

где в качестве функционально независимых инвариантов можно выбрать, например,

$$I_1=\langle \underset{\sim}{T}\rangle,\ I_2=\langle \underset{\sim}{T}^2\rangle,\ I_3=\langle \underset{\sim}{T}^3\rangle. \tag{5.12}$$

Итак, мы пришли к выражению изотропной функции (5.11), совпадающей с представлением (4.14), полученным в предыдущем параграфе из частных предпосылок.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда симметричный тензор второго ранга является *трансверсально изотропной тензорной функцией* другого симметричного тензора второго ранга. Совершенно очевидно (см. упр. 5.1), что для этого в число аргументов функции (5.1) необходимо включить образующие тензоры группы T_3 (2.15).

Таким образом, аргументами функции (5.1) являются симметричные тензоры с компонентами T_{ij}, δ_{ij} и вектор с компонентами δ_{i3}. Следовательно, $r=2$, $r_1\equiv\equiv m=2$, $r_2=2$, $r_3\equiv N=1$.

Если ни одна из главных осей тензора $\underset{\sim}{T}$ не совпадает с осью x_3, то группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$ согласно (5.5) состоит только из единичной матрицы. Применяя формулы (1.30) и (1.27), получаем, что число независимых компонент тензора $\underset{\sim}{S}$ $k=6$. Согласно теореме, сформулированной в § 1, в качестве тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ (5.6) можно выбрать, например, тензоры с компонентами

$$\delta_{ij},\ \delta_{i3}\delta_{j3},\ T_{ij},\ \delta_{i3}T_{3j}+\delta_{j3}T_{3i},\ T_{ik}T_{kj},\ T_{i3}T_{3j}. \tag{5.13}$$

В качестве функционально независимых инвариантов можно выбрать, например, дополнительно к инвариантам (5.12) еще следующие [12]:

$$I_4=T_{33},\ I_5=T_{3i}T_{i3}, \tag{5.14}$$

т. е. $\beta=\gamma=5$, и неравенства (5.9) удовлетворяются.

Таким образом, для трансверсально изотропной функции имеем из (5.6):

$$S_{ij}=\Omega_1(\cdot)\,\delta_{ij}+\Omega_2(\cdot)\,\delta_{i3}\delta_{j3}+\Omega_3(\cdot)\,T_{ij}+$$
$$+\Omega_4(\cdot)\,(\delta_{i3}T_{3j}+\delta_{j3}T_{3i})+\Omega_5(\cdot)\,T_{ik}T_{kj}+$$
$$+\Omega_6(\cdot)\,T_{i3}T_{3j}, \tag{5.15}$$

где функции $\Omega_\alpha(\cdot)$ $(\alpha=1,\ \ldots,\ 6)$ являются функциями инвариантов $I_1,\ \ldots,\ I_5$ (5.14), (5.12).

Упражнение 5.3. Показать, что для случая, когда симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{S}$ является *ортотропной функцией* симметричного тензора второго ранга T: $\gamma=\beta=k=6$ и представление (5.6) имеет вид

$$S_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{3}\Omega_\alpha(I_1,\ \ldots,\ I_6)\,\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha j}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\Omega_{\alpha+1}(I_1,\ \ldots,\ I_6)\,(T_{i\alpha}\delta_{\alpha j}+T_{j\alpha}\delta_{\alpha i}),\qquad(5.16)$$

где функции $\Omega_\alpha(\cdot)$ $(\alpha=1,\ldots,6)$ зависят, например, от инвариантов

$$I_\varkappa=T_{\varkappa\varkappa}\ \ (\varkappa=1,\ 2,\ 3),\ \ I^2_{\rho+1}=T_{\rho i}T_{i\rho}\ \ (\rho=1,\ 2,\ 3).\quad(5.17)$$

Итак, для того чтобы построить тензорную функцию, инвариантную относительно подгруппы G полной ортогональной группы I, связывающую два симметричных тензора второго ранга $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$, нужно рассмотреть функцию (5.1), включив в число аргументов кроме тензора $\underset{\sim}{T}$ (группой симметрии которого является группа ортотропии O) конечное число образующих тензоров группы G:

$$\underset{\sim}{a}^{(1)},\ \underset{\sim}{a}^{(2)},\ \ldots,\underset{\sim}{a}^{(m)}\qquad(5.18)$$

(для кристаллографических точечных групп и текстур эти тензоры имеют ранг 1, 2, 3, 4 и 6 [4.6]).

Группа симметрии G_S тензора $\underset{\sim}{S}$ определится тогда пересечением групп O и G:

$$G_S\supseteqq O\cap G,\qquad(5.19)$$

а тензорный базис $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ (5.6) будет состоять из k линейно независимых тензоров $(k\leqslant 6)$, выбранных из тензоров

$$\underset{\sim}{\mathcal{I}},\ \underset{\sim}{T},\ \underset{\sim}{T}^2,\qquad(5.20)$$

и симметричных тензоров второго ранга, образованных из набора (5.18) и тензоров, полученных путем тензорного умножения и свертывания тензоров (5.18) и (5.20). При этом функции Ω_α (5.6) зависят от β $(\beta\leqslant k)$ функционально независимых инвариантов тензоров $S^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,\ \ldots,\ k)$.

Назовем построенную таким обазом тензорную функцию *квазилинейной,* если среди тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$ в разложении (5.6) оставлены только тензоры, линейно зависящие от тензора $\underset{\sim}{T}$ или не зависящие от него вовсе, а среди инвариантов $I_1, \ldots, I_\beta$, являющихся аргументами функций Ω_α (5.6), — только линейные и квадратичные инварианты тензора $\underset{\sim}{T}$ (см. § 3).

Заметим, что для некоторых групп G можно построить квазилинейные функции без введения каких-либо предположений, ограничивающих общность. Так будет, если возможно на основе тензоров $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$, $\underset{\sim}{T}$ и (5.18) образовать не менее k ($k \leqslant 6$) тензоров базиса $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$, линейно зависящих от тензора $\underset{\sim}{T}$ или вовсе не зависящих от него. Для этого достаточно, чтобы кроме единичного тензора $\underset{\sim}{\mathcal{I}}$ нашлось не более двух линейно независимых тензоров второго ранга, построенных на основе тензоров (5.18) путем тензорного умножения и сверток. Например, ортотропная тензорная функция (5.16), построенная из общих соображений, является квазилинейной функцией.

Упражнение 5.4. Пусть два симметричных тензора $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$, обладающие одной группой симметрии G, имеют спектральное представление (2.36) в виде

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\sim}{P}^{(\alpha)}, \quad \underset{\sim}{T} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underset{\sim}{p}^{(\alpha)} \quad (n \leqslant 6), \tag{5.21}$$

где

$$\frac{P_{ij}^{(\alpha)} P_{ij}^{(\beta)}}{Y_\alpha Y_\beta} = \frac{p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

Доказать, что *квазилинейная тензорная функция*

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}), \tag{5.23}$$

инвариантная относительно группы G, может быть представлена в виде

$$P_{ij}^{(\alpha)} = \frac{Y_\alpha}{I_\alpha} p_{ij}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.24}$$

где Y_α — некоторые функции инвариантов I_α:

$$Y_\alpha = Y_\alpha(I_1, \ldots, I_n) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.25}$$

Упражнение 5.5. Показать, что если *тензорная функция потенциальна* (4.36), то число независимых инвариантов β равно числу линейно независимых тензоров $\underset{\sim}{S}^{(\alpha)}$, составляющих базис. В частности, для трансверсально изотропной потенциальной функции в предположении, что существует скалярная функция $W(I_1, \ldots, I_5)$ инвариантов (5.12) и (5.14), из (5.15) следует, что

$$\Omega_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial W}{\partial I_4}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad \Omega_4 = \frac{\partial W}{\partial I_5},$$

$$\Omega_5 = \frac{1}{3}\frac{\partial W}{\partial I_3}, \quad \Omega_6 \equiv 0. \tag{5.26}$$

§ 6. Производная по тензорному аргументу

При изложении материала мы не раз сталкивались с проблемой дифференцирования скалярных и тензорных функций по тензорному аргументу (см. § 3 гл. 3, предыдущие параграфы настоящей главы).

Теперь мы займемся этим вопросом подробнее. Для этого обратимся к понятиям дифференциала и функциональной производной (4.47), введенным в § 4.

Прежде всего заметим, что *дифференциал тензорной функции* (или оператора) имеет тот же ранг, что и сама функция.

Из (5.1) согласно (4.47) будем иметь

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{DF}(\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)}; \delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \delta\underset{\sim}{T}^{(N)}) = \\ &= \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(1)}} \cdot d\underset{\sim}{T}^{(1)} + \ldots + \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial \underset{\sim}{T}^{(N)}} \cdot \delta\underset{\sim}{T}^{(N)} \equiv \\ &\equiv \frac{d}{d\xi}[\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{(1)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(1)}, \ldots, \underset{\sim}{T}^{(N)} + \xi\,\delta\underset{\sim}{T}^{(N)})]_{\xi=0}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где под точкой понимается скалярное произведение порядка, равного рангу соответствующего тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$ $(i=1, \ldots, N)$. (Здесь под $\delta\underset{\sim}{T}^{(i)}$ мы понимаем «приращение» тензора $\underset{\sim}{T}^{(i)}$, по которому линеен дифференциал $\underset{\sim}{DF}$ и который в § 4 мы обозначали через $\underset{\sim}{h}$.)

Запишем выражение (6.1) в компонентах, исходя из (5.2) и (4.47):

$$DF^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots, T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}; \delta T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m}, \ldots$$

$$\ldots, \delta T^{(N)k_2 \ldots k_n}_{k_1}) = \frac{d}{d\xi}\{F^{i_1 \cdot i_3 \ldots i_r}_{\cdot i_2}(T^{(1)}_{j_1 \ldots j_m} +$$

$$+\xi\,\delta T^{(1)}_{j_1\dots j_m},\ \dots,\ T^{(N)k_2\dots k_n}_{k_1}+\xi\,\delta T^{(N)k_2\dots k_n}_{k_1}\}_{\xi=0}=$$

$$=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\dots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(1)}_{j_1\dots j_m}}\,\delta T^{(1)}_{j_1\dots j_m}+\dots+\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\dots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(N)k_2\dots k_n}_{k_1}}\,\delta T^{(N)k_2\dots k_n}_{k_1}. \tag{6.2}$$

Естественно назвать производные

$$\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{T}^{(1)}}=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\dots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(1)}_{j_1\dots j_m}}\,\vec e_{i_1}\otimes\vec e^{\,i_2}\otimes\vec e_{i_3}\otimes\dots\otimes\vec e_{i_r}\otimes\vec e_{j_1}\otimes\dots\otimes\vec e_{j_m}.$$

. . . .

$$\frac{\partial F}{\partial \underset{\sim}{T}^{(N)}}=\frac{\partial F^{i_1\cdot i_3\dots i_r}_{\cdot i_2}}{\partial T^{(N)k_2\dots k_n}_{k_1}}\,\vec e_{i_1}\otimes\vec e^{\,i_2}\otimes\vec e_{i_3}\otimes\dots\otimes\vec e_{i_r}\otimes\vec e_{k_1}\otimes\vec e^{\,k_2}\otimes\dots\vec e^{\,k_n}, \tag{6.3}$$

которые являются тензорами ранга $r+r_1\equiv r+m$, $r+r_2,\ \dots,\ r+r_N\equiv r+n$, производными тензорной функции по тензорному аргументу.

Следовательно, для того чтобы вычислить производную скалярной или тензорной функцнн по тензорному аргументу $\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$, необходимо по формуле (6.1) найти дифференциал рассматриваемой функции. Выражение при $\delta\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$ и будет искомой производной. При этом индексы компонент тензора $\delta\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$ должны совпадать с индексами компонент тензорного аргумента $\underset{\sim}{T}^{(\alpha)}$, по которому ведется дифференцирование. Для этого иногда следует воспользоваться заменой немого индекса или операцией жонглирования индексов (см. § 1 гл. 1).

Пусть, например, нужно вычислить производную

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}};\quad S^{i\cdot}_{\cdot j}\equiv T^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot j}. \tag{6.4}$$

Нетрудно видеть, что величины (6.4) являются компонентами тензора четвертого ранга.

Образуем согласно (6.1) дифференциал

$$D(S^{i\cdot}_{\cdot j},\ \delta S^{i\cdot}_{\cdot j})=\frac{d}{d\xi}\left[(T^{i\cdot}_{\cdot k}+\xi\,\delta T^{i\cdot}_{\cdot k})\,(T^{k\cdot}_{\cdot j}+\xi\,\delta T^{k\cdot}_{\cdot j})\right]_{\xi=0}=$$

$$=T^{i\cdot}_{\cdot k}\,\delta T^{k\cdot}_{\cdot j}+\delta T^{i\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot j}, \tag{6.5}$$

но аргументом дифференцирования в (6.4) являются компоненты T_{mn}. Поэтому выражаем

$$\delta T^{k\cdot}_{\cdot j}=\delta T_{mn}g^{km}\delta^n_j,\quad \delta T^{i\cdot}_{\cdot k}=\delta T_{mn}g^{im}\delta^n_k. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.5) и рассматривая выражение при δT_{mn}, получаем искомую производную

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}}=T^{i\cdot}_{\cdot k}g^{km}\delta^n_j+g^{im}\delta^n_k T^{k\cdot}_{\cdot j}=T^{im}\delta^n_j+T^{n\cdot}_{\cdot j}g^{im}. \tag{6.7}$$

Заметим, что если тензор $\underset{\sim}{T}$, по которому ведется дифференцирование, — симметричный $(T_{mn}=T_{nm})$, то выражения (6.6) нужно записать так, чтобы эта симметрия была учтена:

$$\delta T^{k\cdot}_{\cdot j}=\delta T_{mn}\cdot\frac{1}{2}(g^{km}\delta^n_j+g^{kn}\delta^m_j),$$

$$\delta T^{i\cdot}_{\cdot k}=\delta T_{mn}\cdot\frac{1}{2}(g^{im}\delta^n_k+g^{in}\delta^m_k). \tag{6.8}$$

Тогда, подставляя (6.8) в (6.5), получим вместо (6.7):

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}}=\frac{1}{2}\left[T^{i\cdot}_{\cdot k}(g^{km}\delta^n_j+g^{kn}\delta^m_j)+(g^{im}\delta^n_k+g^{in}\delta^m_k)T^{k\cdot}_{\cdot j}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(T^{im}\delta^n_j+T^{in}\delta^m_j+T^{n\cdot}_{\cdot j}g^{im}+T^{m\cdot}_{\cdot j}g^{in}). \tag{6.9}$$

Упражнение 6.1. Показать, что если тензор $\underset{\sim}{T}$ — антисимметричный $(T_{mn}=-T_{nm})$, то соотношения (6.7) имеют вид

$$\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}}=\frac{1}{2}(T^{im}\delta^n_j-T^{in}\delta^m_j+T^{n\cdot}_{\cdot j}g^{im}-T^{m\cdot}_{\cdot j}g^{in}).\ \bullet \tag{6.10}$$

Если считать, что все действия происходят в евклидовом пространстве R_3, то, используя в базисных полиадах различные наборы векторов ковариантного и контравариантного базисов, производным тензорных функций по тензорному аргументу, носящим инвариантный характер, можно придать различные формы записи. Например,

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}}=\frac{\partial S^{i\cdot}_{\cdot j}}{\partial T_{mn}}\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j\otimes\vec{e}_m\otimes\vec{e}_n=\frac{\partial S_{ij}}{\partial T^{mn}}\vec{e}^i\otimes\vec{e}^j\otimes\vec{e}^m\otimes\vec{e}^n=$$

$$= \frac{\partial S^{ij}}{\partial T_{mn}} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_m \otimes \vec{e}_n \tag{6.11}$$

и т. д.

Поэтому выражения (6.6) в инвариантной форме (бескоординатной записи) будут иметь вид

$$\delta \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\Delta} : \delta \underset{\sim}{T}, \tag{6.12}$$

где $\underset{\sim}{\Delta}$ — единичный тензор четвертого ранга (см. (6.22) гл. 3), а выражения (6.7), учитывая (6.4), в виде

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}} = \frac{\partial \underset{\sim}{T}^2}{\partial \underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{T} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{J}} + \underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{T}. \tag{6.13}$$

Частным случаем рассматриваемых производных являются производные *скалярных функций тензорного аргумента,* а еще более частным — *производные инвариантов по тензору.*

Упражнение 6.2. Показать, что производные инвариантов (5.12) и (5.14) по симметричному тензору $\underset{\sim}{T}$ имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_1}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_1}{\partial T_{ji}}\right) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_2}{\partial T_{ji}} = T_{ij} + T_{ji},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_3}{\partial T_{ji}} = 3T_{i\cdot}^{\cdot k} T_{kj}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial I_4}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_4}{\partial T_{ji}}\right) = \delta_{3i}\delta_{3j},$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial T_{ij}} + \frac{\partial I_5}{\partial T_{ji}} = \delta_{3i} T_{3j} + \delta_{3j} T_{3i}. \tag{6.14}$$

Упражнение 6.3. Показать, что *ортотропная потенциальная функция* (5.16) имеет вид

$$S_{ij} = \sum_{\varkappa=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial I_\varkappa} \delta_{\varkappa i}\delta_{\varkappa j} + \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial I_{\rho+3}} (T_{i\rho}\delta_{\rho j} + T_{j\rho}\delta_{i\rho}), \tag{6.15}$$

где потенциал W зависит от шести инвариантов (5.17).

Упражнение 6.4. Показать, что для *изотропной потенциальной функции* (5.11) *производная* симметричного тензора $\underset{\sim}{S}$ по симметричному тензору $\underset{\sim}{T}$ имеет вид

$$\frac{\partial \underset{\sim}{S}}{\partial \underset{\sim}{T}} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{J}} + \left(2\frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} + 3\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)(\underset{\sim}{\mathcal{J}} \otimes \underset{\sim}{T} +$$

$$+\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{\mathcal{J}})+4\frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}+3\frac{\partial^2 W}{\partial I_1\partial I_3}(\underset{\sim}{\mathcal{J}}\otimes\underset{\sim}{T}^2+$$

$$+T^2\otimes\mathcal{J})+6\frac{\partial^2 W}{\partial I_2\partial I_3}(\underset{\sim}{T}\otimes\underset{\sim}{T}^2+\underset{\sim}{T}^2\otimes T)+$$

$$+9\frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2}\underset{\sim}{T}^2\otimes\underset{\sim}{T}^2+2\frac{\partial W}{\partial I_2}\underset{\sim}{\Delta}, \qquad (6.16)$$

где потенциал W зависит от трех инвариантов (5.12).

§ 7. Дифференцирование тензорного поля по параметру

Дифференцирование тензорных полей по параметру (в качестве которого в приложениях нередко выступает время t) можно понимать в различных смыслах. С одним из них, основанным на так называемом абсолютном дифференцировании, мы познакомимся в следующей главе. Можно рассматривать также дифференцирование тензоров, принадлежащих некоторой «движущейся» поверхности в евклидовом пространстве R_3.*

Здесь мы рассмотрим дифференцирование по параметру тензоров при деформации пространства R_3.

Пусть задана криволинейная система координат введением функций

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3). \qquad (7.1)$$

Известным способом мы вводим векторы локального базиса $\vec{e}_i$, фундаментальные матрицы g_{ij} и g^{ij}. Деформация пространства R_3 описывается согласно § 7 гл. 3 законом

$$\vec{R}=\vec{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.2)$$

где t — некоторый параметр. Мы вводим локальный базис $\vec{E}_i$, фундаментальные матрицы G_{ij}, G^{ij} и т. д.

Записав соотношения (7.2) в виде

$$\xi^i=\xi^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t), \qquad (7.3)$$

---

* См., например, работу: Повстенко Ю. З., Подстригач Я. С. Дифференцирование по времени тензоров, заданных на поверхности, движущейся в трехмерном евклидовом пространстве. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 1038—1045.

где ξ^1, ξ^2, ξ^3 — некоторая криволинейная система координат, можно ввести локальный базис $\vec{э}_i$:

$$Э_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \xi^i}. \qquad (7.4)$$

Будем считать, что при некотором фиксированном значении параметра t (в некоторый момент времени t) все три базиса $\vec{e}_i$, $\vec{E}_i$, $\vec{э}_i$ совпадают между собой [10]. (Два первых базиса связаны с *лагранжевой системой координат* α^i, а третий — с *эйлеровой* ξ^i.)

Тогда каждому вектору $\vec{a}$ соответствует вектор $\vec{A}$, причем

$$\vec{a} = \mathring{A}^i \vec{e}_i = \mathring{A}_i \vec{e}^i, \quad \vec{A} = A^i \vec{E}_i = A_i \vec{E}^i = a^i \vec{Э}_i = a_i \vec{Э}^i. \qquad (7.5)$$

Согласно сделанному предположению при фиксированном t $\vec{e}_i = \vec{E}_i$ и поэтому (см. § 7 гл. 3)

$$\mathring{A}^i = A^i, \quad \mathring{A}_i = A_i. \qquad (7.6)$$

Однако в последующие моменты $t_1 > t$ уже $\vec{e}_i \neq \vec{E}_i$ и хотя по определению $\mathring{A}^i = A^i$ и при t_1, но

$$\mathring{A}_j \equiv g_{ji} \mathring{A}^i \neq A_j \equiv G_{ji} A^i. \qquad (7.7)$$

Разумеется, можно в связи с деформацией пространства поставить в соответствие вектору $\vec{a}$ вектор $\vec{A}$ так, чтобы в момент $t_1 > t$ $\mathring{A}_i = A_i$, но при таком соответствии уже, вообще говоря, $\mathring{A}^i \neq A^i$.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании векторов базиса по параметру. Прежде всего заметим, что из (7.1) при фиксированных координатах α^i следует

$$\left(\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t}\right)_\alpha = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial t}\right)_\alpha = 0. \qquad (7.8)$$

Введем теперь понятие вектора скорости $\vec{v}$, используя определение (7.4):

$$\vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{R}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, t)}{\partial t}\right)_\alpha = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \vec{э}_i = v^i \vec{э}_i. \qquad (7.9)$$

Согласно (7.21) гл. 3 имеем

$$\vec{E}_i=\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha^i}=\frac{\partial\vec{R}}{\partial\xi^j}\frac{\partial\xi^j}{\partial\alpha^i}=\frac{\partial\xi^j}{\partial\alpha^i}\vec{э}_j, \tag{7.10}$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial\vec{E}_i}{\partial t}\right)_\alpha=\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial\alpha^i\,\partial t}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\alpha^i}=\nabla_i v^j\vec{E}_j, \tag{7.11}$$

где ∇_i — символы ковариантной производной, построенные с использованием фундаментальной матрицы G_{ij}. С другой стороны,

$$\left(\frac{\partial\vec{E}_i}{\partial t}\right)_\alpha=\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial\alpha^i\,\partial t}=\frac{\partial\xi^j}{\partial\alpha^i}\left(\frac{\partial\vec{э}_j}{\partial t}\right)_\xi+\frac{\partial v^j}{\partial\alpha^i}\vec{э}_j. \tag{7.12}$$

Сравнивая (7.11) и (7.12), получаем

$$\left(\frac{\partial v^j}{\partial\alpha^i}+\Gamma^j_{ik}v^k\right)\vec{E}_j=\frac{\partial\xi^j}{\partial\alpha^i}\left(\frac{\partial\vec{э}_j}{\partial t}\right)_\xi+\frac{\partial v^j}{\partial\alpha^i}\vec{э}_j. \tag{7.13}$$

Предположим, что в фиксированный момент времени t: $\vec{E}_j=\vec{e}_j$, $\xi^i=\alpha^i$ и потому из (7.13) следует, что

$$\left(\frac{\partial\vec{э}_i}{\partial t}\right)_\xi=\Gamma^j_{ik}v^k\vec{э}_j. \tag{7.14}$$

Упражнение 7.1. Используя формулу

$$\vec{E}^i\cdot\vec{E}_j=\delta^i_j, \tag{7.15}$$

показать, что из (7.11) следует

$$\left(\frac{\partial\vec{E}^i}{\partial t}\right)_\alpha=-\nabla_j v^i\vec{E}^j. \tag{7.16}$$

Упражнение 7.2. Используя формулу

$$\vec{э}^i\cdot\vec{э}_j=\delta^i_j, \tag{7.17}$$

показать, что из (7.14) следует

$$\left(\frac{\partial\vec{э}^i}{\partial t}\right)_\xi=-\Gamma^i_{jk}v^j\vec{э}^k. \tag{7.18}$$

Упражнение 7.3. Используя формулы (7.8), (7.11), (7.14), (7.16), (7.18) дифференцирования по параметру t векторов базиса, показать, что из (7.5) следует

$$\frac{d\vec{a}}{dt}=\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha \vec{e}_i=\left(\frac{\partial \mathring{A}_i}{\partial t}\right)_\alpha \vec{e}^i, \tag{7.19}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha+A^k\nabla_k v^i\right]\vec{E}_i=\left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha-A_k\nabla_i v^k\right]\vec{E}^i, \tag{7.20}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha+a^k\Gamma^i_{kj}v^j\right]\vec{э}_i=\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha-a_k\Gamma^k_{ij}v^j\right]\vec{э}^i. \bullet \tag{7.21}$$

Заметим, что если в момент времени t

$$\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha=\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha,\quad \frac{d\vec{a}}{dt}=\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\vec{E}_i\equiv\frac{d\vec{A}_1}{dt}, \tag{7.22}$$

то в момент $t_1>t$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}_1}{dt}+A^k\nabla_k v^i\vec{E}_i, \tag{7.23}$$

причем если $\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial \mathring{A}^i}{\partial t}\right)_\alpha$, $\left(\frac{\partial \mathring{A}_i}{\partial t}\right)_\alpha$ являются компонентами вектора, то $\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha$ и $\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha$ таковыми не являются.

Формулу (7.21) можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{A}}{\partial t}=\left[\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\xi+v^j\left(\frac{\partial a^i}{\partial \xi^j}+a^k\Gamma^i_{kj}\right)\right]\vec{э}_i\equiv\frac{da^i}{dt}\vec{э}_i, \tag{7.24}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\xi+v^j\left(\frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}-a_k\Gamma^k_{ij}\right)\right]\vec{э}^i\equiv\frac{da_i}{dt}\vec{э}^i, \tag{7.25}$$

где $\frac{da^i}{dt}$ и $\frac{da_i}{dt}$ — так называемые *полные производные* по параметру t.

Таким образом, можно вводить производные по параметру t в различных смыслах, причем полученные формулы легко обобщаются на случай тензора произвольного ранга.

Упражнение 7.4. Показать, что из (7.20) и (7.21) следует

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\alpha - a^k\frac{\partial v^i}{\partial \alpha^k}, \quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\alpha + a_k\frac{\partial v^k}{\partial \alpha^i}, \tag{7.26}$$

$$\left(\frac{\partial A^i}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_\xi + La^i, \quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}\right)_\xi + La_i, \tag{7.27}$$

где L — так называемая *производная Ли* [13]:

$$La^i \equiv v^j\nabla_j a^i - a^j\nabla_j v^i, \quad La_i \equiv v^j\nabla_j a_i + a_j\nabla_i v^j. \tag{7.28}$$

Упражнение 7.5. Показать, что для тензора

$$\underset{\sim}{b} = B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{e}_{i_1}\otimes\vec{e}^{\,i_2}\otimes\vec{e}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{i_n}, \tag{7.29}$$

$$\underset{\sim}{B} = B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{E}_{i_1}\otimes\vec{E}^{i_2}\otimes\vec{E}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{E}_{i_n} = b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\vec{\text{э}}_{i_1}\otimes\vec{\text{э}}^{i_2}\otimes\vec{\text{э}}_{i_3}\otimes\ldots\otimes\vec{\text{э}}_{i_n} \tag{7.30}$$

справедливо

$$\left(\frac{\partial B^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}}{\partial t}\right)_\alpha = \left(\frac{\partial b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}}{\partial t}\right)_\xi + Lb^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}, \tag{7.31}$$

где

$$Lb^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2} \equiv v^j\nabla_j b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2} - b^{j\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot i_2}\nabla_j v^{i_1} + b^{i_1\cdot i_3\ldots i_n}_{\cdot j}\nabla_{i_2}v^j - \ldots - b^{i_1\cdot i_3\ldots i_{n-1}j}_{\cdot i_2}\nabla_j v^{i_n}. \tag{7.32}$$

Полученные выражения упрощаются, если соотношения (7.2) описывают движение среды как жесткого целого. Положим, например,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0(t) + \underset{\sim}{Q}(t)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{7.33}$$

где $\underset{\sim}{Q}$ — ортогональный тензор:

$$\underset{\sim}{\tilde{Q}} = \underset{\sim}{Q}^{-1}, \quad \underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}} = \underset{\sim}{\mathcal{I}}, \tag{7.34}$$

а $\vec{R}_0$ — радиус-вектор некоторой точки, которой в начальный момент t соответствует точка с радиус-вектором $\vec{r}$.

Дифференцируя (7.33) по времени, получаем

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0). \tag{7.35}$$

Выражая согласно (7.34) $\vec{r}-\vec{r}_0$ через $\vec{R}-\vec{R}_0$ из (7.33)

$$\vec{r}-\vec{r}_0=\underset{\sim}{\tilde{Q}}\cdot(R-R_0) \tag{7.36}$$

и подставляя в (7.35), получим

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\underset{\sim}{Q}\cdot(\vec{R}-\vec{R}_0). \tag{7.37}$$

Согласно (7.34)

$$\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}}+\underset{\sim}{Q}\cdot\frac{d\underset{\sim}{\tilde{Q}}}{dt}=0 \tag{7.38}$$

и поэтому тензор $\underset{\sim}{S}$

$$\underset{\sim}{S}\equiv\underset{\sim}{Q}\cdot\frac{d\underset{\sim}{\tilde{Q}}}{dt}=-\frac{d\underset{\sim}{Q}}{dt}\cdot\tilde{Q} \tag{7.39}$$

является антисимметричным. Следовательно (см. (2.35), (2.36) гл. 3), с ним можно однозначно связать осевой вектор $\vec{\omega}$:

$$S^{ij}=\frac{1}{\sqrt{G}}\,\epsilon^{kij}\omega_k,\quad \omega_k=2\sqrt{G}\,\epsilon_{klm}S^{lm}. \tag{7.40}$$

Тогда соотношение (7.37) можно переписать в виде

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times(\vec{R}-\vec{R}_0), \tag{7.41}$$

что соответствует известной теореме Эйлера в теоретической механике.

Из (7.33) следует, что

$$\vec{E}_i\equiv\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha^i}=Q_i^{\cdot j}\vec{e}_j, \tag{7.42}$$

поэтому, дифференцируя по t соотношение (7.5)

$$\vec{A}=A^i\vec{E}_i=A^iQ_i^{\cdot j}\vec{e}_j, \tag{7.43}$$

получим

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A_i\frac{d\vec{E}_i}{dt}=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A^i\frac{dQ_{i\cdot}^{\cdot j}}{dt}\vec{e}_j=$$

$$=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i+A^i\frac{dQ_{i\cdot}^{\cdot j}}{dt}Q_{\cdot j}^{k\cdot}\vec{E}_k=\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i-A^iS_{i\cdot}^{\cdot k}\vec{E}_k=$$

$$=\frac{d\vec{A}_1}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{A},\quad \frac{d\vec{A}_1}{dt}\equiv\frac{dA^i}{dt}\vec{E}_i. \tag{7.44}$$

Производные по параметру, вычисленные в подвижной системе координат, когда вектор скорости имеет вид (7.41), называются *производными Яумана* [10].

Вектор $\vec{\omega}$ при этом может быть связан с некоторым тензором второго ранга согласно так называемой *теореме о полярном разложении*.

Упражнение 7.6. Доказать, что всякий невырожденный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}=b^{ij}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j$ может быть представлен в виде произведения

$$\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{Q}, \tag{7.45}$$

где $\underset{\sim}{Q}$ — ортогональный тензор, а $\underset{\sim}{S}$ и $\underset{\sim}{T}$ положительно-определенные симметричные тензоры, однозначно определяемые тензором $\underset{\sim}{b}$, причем

$$\underset{\sim}{T}=\underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{\tilde{Q}},\quad \underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{\tilde{Q}}\cdot\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{Q}, \tag{7.46}$$

$$\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{\tilde{b}}=\underset{\sim}{T}^2,\quad \underset{\sim}{\tilde{b}}\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{S}^2,\quad \underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{T}^{-1}\cdot\underset{\sim}{b}=\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{S}^{-1}, \tag{7.47}$$

где $\underset{\sim}{T}^{-1}$ — тензор, обратный к $\underset{\sim}{T}$, а $\underset{\sim}{S}^{-1}$ — обратный к $\underset{\sim}{S}$.

ГЛАВА 5

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Элементарное многообразие

До сих пор мы задавали криволинейную систему координат евклидова пространства $\mathcal{R}_3$ введением радиус-вектора

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3) \tag{1.1}$$

с отличным от нуля якобианом

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^1},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^3}\right|\neq 0, \tag{1.2}$$

т. е. предполагали, что существует некоторая декартова система координат с базисом $\vec{k}_i$, общим для всего пространства $\mathcal{R}_3$.

Собственно говоря, такое пространство называется *аффинным*, а евклидовым оно становится после введения соответствующей «метрики»

$$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j, \tag{1.3}$$

где

$$\vec{e}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \tag{1.4}$$

векторы локального репера. В локальном репере, вообще говоря, уже невозможно представить радиус-вектор $\vec{r}$, так как он принадлежит «целиком всему пространству $\mathcal{R}_3$», а локальный базис «ответствен» только за бесконечно малую окрестность некоторой точки M пространства $\mathcal{R}_3$.

Под заданием вектора $\vec{a}$ в пространстве $\mathcal{R}_3$ мы понимали задание векторного поля $\vec{a}(\alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3)$, т. е. в каждой точке M пространства $\mathscr{R}_3$ рассматрнвался вектор $\vec{a}$ как объект алгебраического векториого пространства, «пришпиленного» в точке M и порождаемого векторами локального базиса $\vec{e}_i$. Поэтому в каждой точке M вектор $\vec{a}$ мы раскладывали по векторам базнса $\vec{e}_i$ или взаимного с ним базиса $\vec{e}^i$:

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i=a_i\vec{e}^i. \tag{1.5}$$

Для достаточно гладкого векторного поля $\vec{a}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ его частные производные $\partial\vec{a}/\partial\alpha^i$ выражались через векторы локального репера

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\alpha^i}=a^j{}_{,i}\,\vec{e}_j\equiv\nabla_i a^j\vec{e}_j \tag{1.6}$$

в силу того, что из формул (1.1), (1.3) можно было вычислить изменение векторов локального репера

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial\alpha^j}=\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k, \tag{1.7}$$

при этом

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial\alpha^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial\alpha^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}\right). \tag{1.8}$$

Разумеется, все сказанное для векторов, т. е. тензоров первого порядка, справедливо и для тензоров более высокого порядка. С введением новой системы координат $\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}$ (гл. 1, § 2), мы устанавливали закон перехода компонент различных геометрических объектов при переходе от нештрихованной системы криволинейных координат α^1, α^2, α^3 к штрихованной $\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \alpha^{3'}$.

Подчеркнем еще раз, что всюду мы пользовались следующим обстоятельством: криволинейная система координат вводится формулами (1.1), т. е. законом перехода от некоторой декартовой системы координат.

Откажемся теперь от выделения среди координатных систем особенной (декартовой) и будем считать все системы равноправными. Тогда совокупность точек M перестает быть евклидовым и даже аффинным пространством и становится некоторым абстрактным множеством, которое наделяется теми или иными геометрическими свойствами. Не будем вдаваться в подробности определения многообразия, являющегося важным понятием дифференциальной геометрии, а дадим только не вполне строгое определение, которое позволит нам в дальнейшем рассмотреть некоторые свойства *римановых пространств,* широко используемых в современной механике.

Назовем *элементарным многообразием* n измерений класса D некоторое множество U_n, для которого задано взаимно-однозначное отображение иа связную область изменения n переменных $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ с точностью до произвольного преобразования этих переменных:

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n), \tag{1.9}$$

$$\alpha^{i} = \alpha^{i}(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \ldots, \alpha^{n'}), \tag{1.10}$$

при этом функции (1.9) и (1.10) считаются достаточное число раз дифференцируемыми.

Из разрешимости уравнений (1.9) в виде (1.10) и обратно видим, что якобиевы матрицы

$$A^{i'}{}_{i} \equiv \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial \alpha^{i}}, \quad B^{i}{}_{i'} \equiv \frac{\partial \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}} \ (i, i' = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.11}$$

являются взаимно обратными

$$A^{i'}{}_{i} B^{i}{}_{j'} = \delta^{i'}{}_{j'}, \quad B^{i}{}_{i'} A^{i'}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}, \tag{1.12}$$

так что определители этих матриц отличны от нуля.

Элементы множества $\mathfrak{M}$ назовем точками M элементарного многообразия, отображения

$$M \leftrightarrow (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \tag{1.13}$$

координатными системами этого *многообразия,* а значения $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, отвечающие точке M в отображении (1.3), — координатами точки M в соответствующей координатной системе.

В соответствии с введенным определением рассмотрим некоторые свойства многообразий. Будем говорить, что в многообразии задана кривая, если задано множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\alpha^{i} = f^{i}(t), \tag{1.14}$$

где t — некоторый параметр, а f^i — совокупность n функций. Зададим теперь множество точек, удовлетворяющих уравнениям

$$\alpha^i = f^i(u^1, u^2, \ldots, u^m), \tag{1.15}$$

где $u^1, u^2, \ldots, u^m$ являются параметрами, а число $m<n$.

Совокупность этих точек назовем *подмножеством* $\mathscr{V}_m$ *множества* $\mathscr{V}_n$. При $m=n-1$ это *подмножество может быть названо поверхностью в* $\mathscr{V}_n$, ибо обладает свойством поверхности делить все пространство $\mathscr{V}_n$ на две части. В самом деле, из (1.15) при $m=n-1$ следует, что можно исключить из $(n-1)$-го уравнения параметры $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$ и получить вместо (1.15) одно уравнение

$$\varphi(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) = 0. \tag{1.16}$$

Находящаяся в соседстве с $\mathscr{V}_{n-1}$ часть пространства $\mathscr{V}_n$ делится на две части, для которых функция φ является положительной или отрицательной. Часть $\mathscr{V}_{n-1}$ называется *гиперповерхностью.*

Упражнение 1.1. Параметрическое задание гиперповерхности в $\mathscr{V}_n$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\alpha^1 = \cos u^1,\\
&\alpha^2 = \sin u^1 \cos u^2,\\
&\alpha^3 = \sin u^1 \sin u^2 \cos u^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha^{n-1} = \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \ldots \sin u^{n-2} \cos u^{n-1},\\
&\alpha^n = \sin u^1 \sin u^2 \sin u^3 \ldots \sin u^{n-2} \sin u^{n-1}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Найти единственное уравнение этой поверхности в виде (1.16) и проверить, точки $\left(\frac{1}{k}, 0, 0, \ldots, 0\right)$ и $(0, 0, 0, \ldots, k)$ (где k — некоторое положительное число) лежат по одну или по разные стороны от этой поверхности. ●

Рассмотрим в каждой точке M многообразия $\mathscr{V}_n$ различного рода экстенсивы (гл. 1, § 3) и аналогично тому, как это было сделано ранее, определим алгебраические операции, производимые над ними. Среди этих экстенсивов выделим относительные и абсолютные тензоры и псевдотензоры (гл. 3, § 3). При этом назовем, как это принято в литературе, тензором, m раз ковариантным и k раз контравариантным, совокупность $(m+k)^n$ величин $T_{i_1\ldots i_m}{}^{j_1\ldots j_k}(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, преобразующихся при переходе от одной системы координат к другой (1.9) по закону

$$T_{i'_1 \ldots i'_m}{}^{j'_1 \ldots j'_k} = B_{i'_1}{}^{i_1} \ldots B_{i'_m}{}^{i_m} A^{j'_1}{}_{j_1} \ldots A^{j'_k}{}_{j_k} T_{i_1 \ldots i_m}{}^{j_1 \ldots j_k}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим некоторую кривую (1.14) в $\mathscr{V}_n$ и закон преобразования от одной системы координат к другой (1.9). Тогда в точке M мы имеем

$$d\alpha^{i'} = A^{i'}{}_i d\alpha^i, \tag{1.19}$$

т. е. дифференциалы $d\alpha^i$ являются контравариантными компонентами тензора 1-го ранга. Пусть в $\mathscr{V}_n$ выбрана какая-то система координат, которая хотя и не отличается от любой другой, но фиксирована. Например, это система $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$. В силу невырожденности матриц $A^{i'}{}_i(M)$ в каждой точке M многообразия $\mathscr{V}_n$ элементы матрицы $A^{i'}_i$ можно трактовать как i'-компоненты векторов локального репера $\vec{e}_i(M)$. Тогда в каждой точке M на эти векторы репера можно натянуть векторное пространство $\mathscr{R}_n(M)$, которое было подробно изучено в предыдущих главах.

Итак, всякое многообразие $\mathscr{V}_n$ порождает континуальную систему векторных пространств $\mathscr{R}_n(M)$, причем в каждом из них имеется «особый» базис $\vec{e}_i$ в том смысле, что порожден выбором некоторой системы координат $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ во всем многообразии $\mathscr{V}_n$.

Для того чтобы связать между собой различные пространства $\mathscr{R}_n(M_1)$ и $\mathscr{R}_n(M_2)$, необходимо снабдить многообразие $\mathscr{V}_n$ дополнительными свойствами *связности.* Мы не будем здесь касаться этого вопроса. Заметим только, что если в каждом евклидовом пространстве мы умели подсчитывать расстояние между любыми двумя точками и определять углы между двумя любыми прямыми, исходящими из одной точки, то для многообразия само понятие прямых и расстояния между двумя точками нуждается в определении. Так, если бы существовали двумерные создания, живущие, например, на поверхности, показанной на рис. 12, то мы с высоты своего «трехмерного» положения могли бы заметить, что у двумерных созданий отсутствуют прямые в нашем смысле, а линейки, которыми они пытаются измерять расстояния между двумя точками, с н а ш е й   т о ч к и зрения являются кривыми (рис. 12). Возникает вопрос, сумели бы эти двумерные создания измерениями в двумерном мире догадаться, что они живут в «кривом» пространстве, и установить меру искривленности этого пространства?

Аналогичные вопросы могут возникнуть и возникают в пространствах большего числа измерений, и

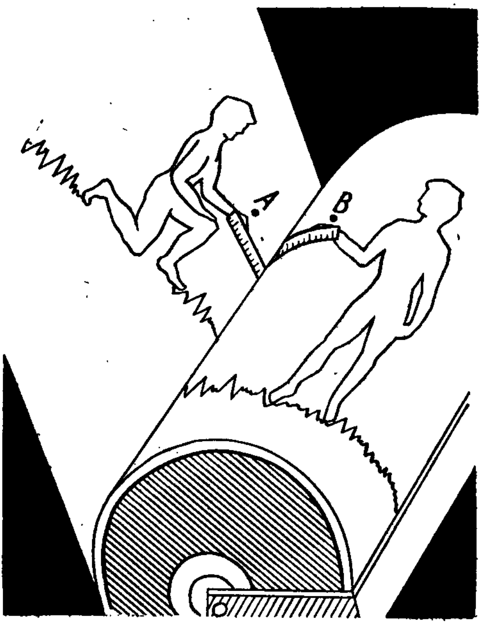

Рис. 12

для того чтобы на них ответить, нужно иаучиться определять расстояния между двумя точками и другие величины, не пользуясь введением прямоугольной декартовой системы координат, которой (как мы видим из приведенного двумерного примера) может и ие существовать.

Упражнение 1.2. Дифференцированием соотношений (1.12) доказать тождества

$$\frac{\partial^2\alpha^{l'}}{\partial\alpha^j\partial\alpha^k}+\frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{j'}\partial\alpha^{k'}}A^{j'}{}_jA^{k'}{}_kA^{l'}{}_l=0, \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\alpha^{j'}\cdot\partial\alpha^{k'}}+\frac{\partial^2\alpha^{i'}}{\partial\alpha^j\partial\alpha^k}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}B^i{}_{i'}=0. \qquad (1.21)$$

Упражнение 1.3. Доказать, что если все компоненты тензора в одной системе координат обращаются в нуль, то они равны нулю во всех других системах координат.

§ 2. Метрический тензор

Попытаемся ввести понятие расстояния между двумя точками многообразия, причем, разумеется, такое понятие должно быть пригодно, в частности, для описания расстояния в евклидовом пространстве $\mathcal{R}_3$, а также расстояния на поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем говорить, что пространство $\mathcal{V}_n$ является *пространством Римана*, если в нем задана фундаментальная (метрическая) форма

$$\Phi=g_{ij}d\alpha^id\alpha^j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (2.1)$$

т. е. некая скалярная функция точки M пространства $\mathcal{V}_n$. Очевидно, тем самым задан симметричный метрический (фундаментальный) тензор второго порядка, ковариантные компоненты которого есть величины g_{ij}.

Можно определить теперь расстояние между двумя бесконечно близкими точками $\mathcal{V}_n$ равенством

$$ds^2=\Phi. \qquad (2.2)$$

Однако в евклидовом пространстве форма (2.1) является положительно-определенной, т. е. она положительна для всех $\vec{dr}\neq0$, и расстояние между двумя точками равно нулю только в том случае, если эти точки совпадают. При определении риманова пространства мы не требуем положительной определенности формы (2.1). Следовательно, может случиться, например, что

$$\Phi=(d\alpha^1)^2-(d\alpha^2)^2, \qquad (2.3)$$

т. е. метрическая форма обращается в нуль при

$$d\alpha^1=d\alpha^2. \qquad (2.4)$$

Итак, для некоторых направлений форма Φ является положительной, для других — отрицательной. Направления типа (2.4), где метрическая форма Φ обращается в нуль, называются *изотропными направлениями.* Для каждого неизотропного направления существует *знаковое число* ε, равное либо $+1$, либо -1, такое, что форма $\varepsilon\Phi$ является положительной. Введение знакового числа позволит нам избежать трудности определения расстояния между двумя точками с помощью неопределенной формы.

Расстоянием между двумя бесконечно близкими точками в направлении $d\alpha^i$ называется величина

$$ds^2 = \varepsilon\Phi = \varepsilon g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j, \quad ds > 0. \tag{2.5}$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками в изотропном направлении считаем нулевым, т. е. в римановом пространстве расстояние между двумя точками может быть равно нулю даже в том случае, если эти точки не совпадают.

Заметим, что риманова геометрия конструируется с помощью понятия расстояния между двумя бесконечно близкими точками, а не точками, удаленными между собой на конечное расстояние. Так как в каждой точке M риманова пространства имеется фундаментальная матрица g_{ij}, то с ее помощью можно построить в каждой точке M *касательное евклидово пространство* с базисом $\vec{e}_i$, таким, что

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \tag{2.6}$$

Следовательно, направление, рассмотренное при определении (2.5), в касательном евклидовом пространстве может трактоваться как вектор

$$\vec{dr} = d\alpha^i \vec{e}_i. \tag{2.7}$$

Предположим, что определитель фундаментальной матрицы g_{ij} в каждой точке M отличен от нуля, т. е.

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

Тогда в каждой точке M существует матрица g^{ij}, обратная к g_{ij}, т. е.

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \tag{2.9}$$

С помощью величин g_{ij} и g^{ij} можно производить жонглирование индексами (гл. 1, § 1)

$$T^{ij}=T^{i}{}_{k}g^{kj}, \quad T^{j}{}_{k}=g_{ki}T^{ij}. \tag{2.10}$$

В каждом касательном евклидовом пространстве можно, таким образом, построить векторы взаимного репера $\vec{e}^i$

$$\vec{e}^i=g^{ij}\vec{e}_j. \tag{2.11}$$

Упражнение 2.1. Доказать, что

$$g^{ij}=g^{ji}. \tag{2.12}$$

Упражнение 2.2. Доказать, что величины g^{ij} преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как контравариантные компоненты тензора второго ранга.

Упражнение 2.3. Доказать, что

$$g_{ij}g^{ij}=n. \tag{2.13}$$

Упражнение 2.4. Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^k}\ln g=g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}. \tag{2.14}$$

Упражнение 2.5. Найти смешанный метрический тензор $g_i{}^j$, который получается из g_{ij} подниманием второго индекса. ●

Если величины a^i при переходе от одной системы координат к другой (1.9) преобразуются по закону

$$a^{i'}=A^{i'}{}_{i}\,a^i, \tag{2.15}$$

то будем говорить, что в каждом касательном пространстве задан вектор

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i. \tag{2.16}$$

Если этот вектор не является изотропным, то его длину можно подсчитать по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{\varepsilon g_{ij}a^ia^j}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим теперь кривую (1.14) в римановом пространстве $\mathscr{V}_n$. Положим

$$\tau^j=\frac{df^j(t)}{dt}. \tag{2.18}$$

Тогда бесконечно малое смещение вдоль кривой (1.14) имеет вид

$$d\alpha^i = \tau^i(t)\,dt \tag{2.19}$$

и длина этого смещения определится формулой

$$ds = \sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,dt, \tag{2.20}$$

так что длину кривой (1.14) от точки $t=t_1$ до точки $t=t_2$ можно подсчитать следующим образом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,dt. \tag{2.21}$$

Следовательно, чтобы найти длину кривой (1.14) в пространстве $\mathscr{V}_n$, необходимо знать, как устроено это пространство, т. е. знать его метрический тензор. Так, например, если в $\mathscr{V}_3$ дано

$$\begin{gathered} \alpha^1 = a\cos t, \\ \alpha^2 = a\sin t, \\ \alpha^3 = bt \end{gathered} \tag{2.22}$$

и метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2 + (d\alpha^3)^2, \tag{2.23}$$

то согласно формуле (2.21) длина кривой от точки $t=0$ до точки $t=2\pi$ равна

$$s = \int_0^{2\pi} (a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)^{1/2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.24}$$

Если же метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2 - (d\alpha^3)^2, \tag{2.25}$$

то из (2.22) следует

$$s = \begin{cases} 2\pi\sqrt{a^2-b^2}, & \text{если } |a|>|b|, \\ 2\pi\sqrt{b^2-a^2}, & \text{если } |a|<|b|, \\ 0, & \text{если } |a|=|b|. \end{cases} \tag{2.26}$$

Из (2.26) следует, что в случае $a=b$ кривая (2.22) в пространстве $\mathscr{V}_3$ с метрикой (2.25) является изотропной. В случае, если кривая (1.14) не изотропна, за параметр кривой можно выбрать длину дуги s.

Тогда из формулы (2.5) находим, что

$$\varepsilon g_{ij}\frac{d\alpha^i}{ds}\frac{d\alpha^j}{ds}=1. \tag{2.27}$$

Следовательно, вектор

$$\tau^i=\frac{d\alpha^i}{ds} \tag{2.28}$$

единичный вектор, касательный к кривой (1.14).

Для того чтобы определить угол между двумя кривыми в некоторой точке M, предположим, что метрическая форма является положительно-определенной. И пусть τ^i и σ^i — два единичных вектора, касательных к рассматриваемым кривым в точке M. Тогда назовем углом между этими кривыми угол β, для которого

$$\cos\beta=g_{ij}\tau^i\sigma^j. \tag{2.29}$$

Заметим, что для векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\sigma}$

$$\vec{\tau}=\tau^i\vec{e}_i,\quad \vec{\sigma}=\sigma^j\vec{e}_j \tag{2.30}$$

касательного пространства точки M косинус угла между ними находится также по формуле (2.29). Определение (2.29) будет иметь смысл, если

$$|g_{ij}\tau^i\sigma^j|\leqslant 1. \tag{2.31}$$

Так как метрическая форма положительно-определена, то для любого числа λ

$$g_{ij}(\tau^i+\lambda\sigma^i)(\tau^j+\lambda\sigma^j)\geqslant 0. \tag{2.32}$$

Раскрывая в (2.32) скобки и учитывая, что векторы τ^i и σ^i единичные, получим

$$1+2\lambda g_{ij}\tau^i\sigma^j+\lambda^2\geqslant 0. \tag{2.33}$$

Дополняя левую часть до полного квадрата, получим тождество

$$(\lambda+g_{ij}\tau^i\sigma^j)^2+[1-(g_{ij}\tau^i\sigma^j)^2]\geqslant 0, \tag{2.34}$$

откуда следует (2.31).

Можно, разумеется, принять за определение угла между кривыми выражения (2.29) и для случая неопределенной метрической формы, но в этом случае угол может оказаться мнимым. Тем ие менее вне зависимости от того, определена или не определена метрическая форма, считаем, что векторы a^i, b^i ортогональны между собой, если

$$g_{ij}a^i b^j = 0. \qquad (2.35)$$

Упражнение 2.6. Доказать, что вектор, получаемый дифференцированием единичного вектора τ^i по параметру кривой t (1.14), ортогонален к самому вектору τ^i.

§ 3. Геодезические линии

В евклидовом трехмерном пространстве понятие прямой входит в основное, неопределяемое понятие. Однако, исходя из задания линейного элемента, прямую в евклидовом пространстве можно определить как кратчайшее расстояние между двумя точками.

Переходя к обобщенному понятию прямой в римановом пространстве $\mathscr{V}_n$, обратим внимание, что на двумерных поверхностях трехмерного евклидова пространства существуют кривые, соединяющие две точки, наименьшей длины. Таковы, например, окружности максимального радиуса на сфере. Линия, имеющая минимальную длину среди всех линий, соединяющих две заданные точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$ (если она существует), называется *геодезической линией.*

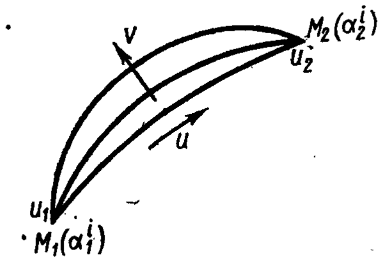

Рис. 13

Пусть некоторая кривая, соединяющая две точки M_1 и M_2, задается параметрически в виде

$$\alpha^i = \alpha^i(u), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2. \qquad (3.1)$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 и принадлежащих $\mathscr{V}_n$ (рис. 13):

$$\alpha^i = \alpha^i(u, v). \qquad (3.2)$$

Для каждой кривой указанного семейства выполняются условия

$$\alpha^i(u_1, v) = \alpha_1{}^i, \ \alpha^i(u_2, v) = \alpha_2{}^i. \qquad (3.3)$$

Зафиксировав параметр v, получим одну из кривых

(3.1) семейства (3.2). Обозначим через $L(v)$ длину каждой кривой семейства и будем считать, что $L(0)$ — наименьшее из значений $L(v)$, т. е. кривая со значением параметра $v=0$ имеет наименьшую длину, другими словами, функция $L(v)$ имеет минимум в точке $v=0$.

Так как длину каждой кривой семейства можно подсчитать по формуле (2.21), то имеем

$$L(v)=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\varepsilon g_{ij}\tau^i\tau^j}\,du. \qquad (3.4)$$

Обозначим

$$w\equiv g_{ij}\tau^i\tau^j. \qquad (3.5)$$

Тогда для каждой кривой семейства

$$L=\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\varepsilon w}\,du, \qquad (3.6)$$

где w зависит от координат пространства α^i и от направления кривой τ^i. Для того, чтобы отыскать экстремум функции $L(v)$, нужно решить уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial v}=0. \qquad (3.7)$$

Из (3.6) имеем

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\tau^i}{\partial v}\right]du. \qquad (3.8)$$

Очевидно, τ^i выражаются через координаты α^i

$$\frac{\partial\tau^i}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\alpha^i}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}. \qquad (3.9)$$

Поэтому, интегрируя по частям (3.8) и учитывая (3.3), получнм

$$\frac{\partial L}{\partial v}=\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}\,\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}\right]du=$$

$$=-\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}-\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}\right]\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}\,du. \qquad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.7) и учитывая, что $\frac{\partial\alpha^i}{\partial v}$ — произвольные функции u, получим для искомой кривой уравнение

$$\frac{d}{du}\frac{\partial}{\partial\tau^i}\sqrt{\varepsilon w}-\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sqrt{\varepsilon w}=0. \qquad (3.11)$$

Упражнение 3.1. Убедиться, что уравнение (3.11) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{du}\frac{\partial w}{\partial\tau^i}-\frac{\partial w}{\partial\alpha^i}=\frac{1}{2w}\frac{dw}{du}\frac{\partial w}{\partial\tau^i}. \bullet \qquad (3.12)$$

В соотношениях (3.11) и (3.12) $v=0$, т. е. α^i — координаты искомой геодезической линии. Если эта кривая неизотропная, то можно считать параметром u, характеризующим эту кривую, длину дуги s ($u=s$). Тогда

$$\tau^i=\frac{d\alpha^i}{ds},\ w=g_{ij}\tau^i\tau^j=\varepsilon,\ \frac{dw}{dv}=\frac{dw}{ds}=0. \qquad (3.13)$$

Поэтому из (3.12) следует

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial w}{\partial\tau^i}-\frac{\partial w}{\partial\alpha^i}=0. \qquad (3.14)$$

Подставляя выражение (3.5) в (3.14), получим

$$\frac{d}{ds}(2g_{kj}\tau^j)-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\tau^i\tau^j=0, \qquad (3.15)$$

откуда

$$g_{kj}\frac{d\tau^j}{ds}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial\alpha^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial\alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\right)\tau^i\tau^j=0. \qquad (3.16)$$

Назовем символами Кристоффеля 1-го рода величины

$$\Gamma_{ij,k}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial\alpha^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial\alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\right). \qquad (3.17)$$

Символами Кристоффеля 2-го рода называются величины, образованные из (3.17) следующим образом:

$$\Gamma_{ij}{}^l=g^{lk}\Gamma_{ij,k}. \qquad (3.18)$$

Тогда уравнения (3.16) можно записать в виде

$$g_{kj}\frac{d\tau^j}{ds}+\Gamma_{ij,k}\tau^i\tau^j=0. \qquad (3.19)$$

Умножая (3.19) на g^{lk} и суммируя по k от 1 до n, получим

$$\frac{d\tau^l}{ds} + \Gamma_{ij}^l \tau^i \tau^j = 0. \qquad (3.20)$$

Подставляя в (3.20) первую формулу (3.13), получим

$$\frac{d^2\alpha^l}{ds^2} + \Gamma_{ij}^l \frac{d\alpha^i}{ds} \frac{d\alpha^j}{ds} = 0. \qquad (3.21)$$

Итак, мы нашли дифференциальные уравнения для определения геодезических линий, которые имеют различную форму записи: (3.11), (3.12), (3.14), (3.19)—(3.21), причем в последних трех формах записи предполагается отсутствие в каждой точке кривой изотропного направления, ибо в противоположном случае следовало бы положить $ds=0$ и уравнения (3.19) — (3.21) потеряли бы смысл.

Отметим также, что система дифференциальных уравнений (3.21) имеет второй порядок. Ее решение $\alpha^i(s)$ будет определено однозначно, если заданы начальные условия α^l и $\frac{d\alpha^l}{ds}$. Геометрически это означает, что геодезическая линия определена однозначно, если задана некоторая точка M и направление касательной к ней в этой точке. Например, в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_n$ метрический тензор является единичным тензором. Поэтому из (3.17) и (3.18) следует, что все символы Кристоффеля 2-го рода равны нулю и решение уравнений (3.21) имеет вид

$$\alpha^l = C_1{}^l s + C_2{}^l, \qquad (3.22)$$

где $C_1{}^l$ и $C_2{}^l$ — некоторые постоянные.

Упражнение 3.2. Доказать равенства

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}, \qquad (3.23)$$

$$\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \alpha^i}, \qquad (3.24)$$

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij}{}^l g_{lk}. \; ● \qquad (3.25)$$

Пусть теперь u произвольный параметр, причем $u=u(s)$ — некоторая достаточно гладкая скалярная функция. Тогда

$$\frac{d\alpha^l}{ds} = \frac{d\alpha^l}{du} \frac{du}{ds},$$

$$\frac{d^2\alpha^l}{ds^2}=\frac{d^2\alpha^l}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\frac{d\alpha^l}{du}\frac{d^2u}{ds^2}. \qquad (3.26)$$

Из (3.21) получим

$$f^l\equiv\frac{d^2\alpha^l}{du^2}+\Gamma^l_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=\lambda\frac{d\alpha^l}{du}, \qquad (3.27)$$

где λ — некоторая скалярная функция:

$$\lambda=-\frac{d^2u}{ds^2}\Big/\left(\frac{du}{ds}\right)^2. \qquad (3.28)$$

Так как справа в (3.27) стоит вектор, то и слева должен быть тоже вектор. Следовательно, вектор f^l коллинеарен вектору $\frac{d\alpha^l}{du}$.

Упражнение 3.3. Проверить, что правая часть (3.27) преобразуется при переходе от одной системы координат к другой (1.9) как контравариантные компоненты вектора.

Упражнение 3.4. Доказать, что если вдоль кривой (1.14) вектор f^l (3.27) коллинеарен неизотропному вектору $\frac{d\alpha^l}{du}$, то кривая (1.14) геодезическая. ●

Вернемся теперь к уравнениям геодезической линии, отнесенной к произвольному параметру u. Обозначим левую часть (3.12) через

$$2f_i\equiv\frac{d}{du}\frac{\partial w}{\partial\tau^i}-\frac{\partial w}{\partial\alpha^i}. \qquad (3.29)$$

Так как τ^i — вектор, то при преобразовании (1.9)

$$\tau^i=B^i{}_{i'}\tau^{i'}, \qquad (3.30)$$

откуда, считая τ^i функцией $\tau^{i'}$ и $\alpha^{i'}$, получим

$$\frac{\partial\tau^i}{\partial\tau^{i'}}=B^i{}_{i'}, \qquad (3.31)$$

тогда

$$\frac{\partial w}{\partial\tau^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial\tau^i}\frac{\partial\tau^i}{\partial\tau^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial\tau^i}B^i{}_{i'}. \qquad (3.32)$$

Поэтому для первого слагаемого правой части (3.29) в новой системе координат

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i'}}\right)=\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\right)B^{i}{}_{i'}+\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\frac{d\alpha^{j'}}{du}. \tag{3.33}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i'}}=\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i}}B^{i}{}_{i'}+\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial \tau^{i}}{\partial \alpha^{i'}}. \tag{3.34}$$

Вычитая (3.34) из (3.33), согласно (3.29) имеем

$$2\left(f_{i'}-f_{i}B^{i}{}_{i'}\right)=\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\frac{d\alpha^{j'}}{du}-\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\frac{\partial^2 \alpha^{i}}{\partial \alpha^{i'}\partial \alpha^{j'}}\tau^{j'}=0. \tag{3.35}$$

Отсюда следует, что f_i преобразуются как ковариантные компоненты вектора.

Повторяя все рассуждения, сделанные при переходе от уравнений (3.14) к (3.19) — (3.21), получим для ковариантных компонент вектора

$$f_k\equiv g_{kj}\frac{d\tau^{j}}{du}+\Gamma_{ij,k}\tau^{i}\tau^{j}\equiv g_{kj}\frac{d^2\alpha^{j}}{du^2}+\Gamma_{ij,k}\frac{d\alpha^{i}}{du}\frac{d\alpha^{j}}{du}, \tag{3.36}$$

а для контравариантных

$$f^{l}\equiv\frac{d^2\alpha^{l}}{du^2}+\Gamma^{l}_{ij}\frac{d\alpha^{i}}{du}\frac{d\alpha^{j}}{du}, \tag{3.37}$$

где u — произвольный параметр кривой. Относительно w мы предполагали, что она является некоторой скалярной функцией τ^i и α^i.

Запишем теперь некоторую систему дифференциальных уравнений при произвольном параметре u

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\right)-\frac{\partial w}{\partial \alpha^{i}}=0. \tag{3.38}$$

Упражнение 3.5. Доказать, что первым интегралом системы (3.38) является

$$\frac{\partial w}{\partial \tau^{i}}\tau^{i}-w=\mathrm{const}. \tag{3.39}$$

Упражнение 3.6. Доказать, что из (3.39) следует

$$w\equiv g_{ij}\tau^{i}\tau^{j}=\mathrm{const}. \;● \tag{3.40}$$

Если в (3.38) за параметр u принять длину дуги

s, то получим дифференциальные уравнения (3.14) для неизотропной геодезической линии. Если же в точке M геодезическая линия имеет изотропное направление, то $w=0$ в каждой ее точке, что следует из (3.40). Таким образом, *изотропной геодезической линией* называется кривая, которая для некоторого параметра u удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.38) или уравнению

$$\frac{d^2\alpha^l}{du^2}+\Gamma^l_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0, \tag{3.41}$$

а также частному первому интегралу

$$g_{ij}\frac{d\alpha^i}{du}\frac{d\alpha^j}{du}=0. \tag{3.42}$$

Упражнение 3.7. Доказать, что достаточным условием для того, чтобы некоторая кривая являлась изотропной геодезической линией, есть условие пропорциональности вектора $\frac{d\alpha^i}{du}$ вектору f_i (3.37) и удовлетворение уравнениям (3.42).

Упражнение 3.8. Доказать, что в метрике (2.25) изотропная геодезическая линия имеет вид

$$\alpha^i=a^iu+b^i \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3.43}$$

где a^i, b^i — некоторые постоянные, причем

$$(a^1)^2+(a^2)^2-(a^3)^2=0. \tag{3.44}$$

Упражнение 3.9. Найти изотропные геодезические линии в четырехмерном пространстве с метрикой

$$ds^2=(d\alpha^1)^2+(d\alpha^2)^2+(d\alpha^3)^2-(d\alpha^4)^2. \tag{3.45}$$

§ 4. Ковариантное дифференцирование

Мы видели, что частные производные $\partial f/\partial\alpha^i$ скалярной функции $f(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ преобразуются при переходе от одной системы координат к другой как ковариантные компоненты вектора, т. е. частные производные от скаляра носят тензорный характер. Этого, вообще говоря, нельзя сказать про вторые частные производные $\partial^2 f/\partial\alpha^i\partial\alpha^j$. В самом деле, дифференцируя равенство

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha^{i'}}=\frac{\partial f}{\partial\alpha^i}\frac{\partial\alpha^i}{\partial\alpha^{i'}} \tag{4.1}$$

по $\alpha^{l'}$ получим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{l'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^i} \frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{l'}}, \tag{4.2}$$

откуда следует, что при $\frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{l'}} \not\equiv 0$ величины $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{l'}}$ тензора не образуют.

Используя векторный характер правой части (3.27)

$$\frac{d\alpha^{l'}}{du} = A^{l'}{}_l \frac{d\alpha^l}{du}, \tag{4.3}$$

получим

$$A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2} = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + A^{l'}{}_l \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{l'}} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{l'}}{du}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в новой системе координат соотношения (3.27) имеют вид

$$f^{l'} = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + \Gamma^{l'}_{i'j'} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{j'}}{du}, \tag{4.5}$$

поэтому

$$f^{l'} - A^{l'}{}_l f^l = \frac{d^2\alpha^{l'}}{du^2} + \Gamma^{l'}_{i'j'} \frac{d\alpha^{i'}}{du} \frac{d\alpha^{j'}}{du} - $$
$$- A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2} - A^{l'}{}_l \Gamma^l_{ij} \frac{d\alpha^i}{du} \frac{d\alpha^j}{du}. \tag{4.6}$$

Подставляя сюда из (4.4) выражения для $A^{l'}{}_l \frac{d^2\alpha^l}{du^2}$ и учитывая соотношения (4.3) и (3.27), получим

$$\Gamma^{l'}_{i'j'} = \Gamma^l_{ij} B^i{}_{i'} B^j{}_{j'} A^{l'}{}_l + A^{l'}_l \frac{\partial^2 \alpha^l}{\partial \alpha^{i'} \partial \alpha^{j'}}. \tag{4.7}$$

Следовательно, символы Кристоффеля 2-го рода не образуют тензора.

Этот результат следует сразу, если воспользоваться результатом упр. 1.3. В самом деле, если существует декартова система координат, т. е. система, для которой всюду $g_{ij} = \mathrm{const}$, то в этой системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, что следует из (3.17). Но, естественно, найдутся такие системы координат, для которых не все Γ_{ij}^k обращаются в нуль. Следовательно, Γ_{ij}^k тензора не образуют, так как в противном случае из результата упр. 1.3 следовало бы, что в любой системе координат $\Gamma_{ij}^k=0$.

Упражнение 4.1. Доказать, что символы Кристоффеля 1-го рода преобразуются при переходе от одной системы координат к другой по закону

$$\Gamma_{i'j',k'}=\Gamma_{ij,k}B^i{}_{i'}B^j{}_{j'}B^k{}_{k'}+g_{l'k'}A^{l'}{}_l\frac{\partial^2\alpha^l}{\partial\alpha^{i'}\partial\alpha^{j'}}. \quad (4.8)$$

Упражнение 4.2. Показать, что

$$\Gamma_{ij}^l=\Gamma_{i'j'}^{l'}A^{i'}{}_iA^{j'}{}_jB^l{}_{l'}+B^l{}_{l'}\frac{\partial^2\alpha^{l'}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}, \quad (4.9)$$

$$\Gamma_{ij,k}=\Gamma_{i'j',k}A^{i'}{}_iA^{j'}{}_jA^{k'}{}_k+g_{lk}B^l{}_{l'}\frac{\partial^2\alpha^{l'}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}. \bullet \quad (4.10)$$

Рассмотрим вектор a^i, определенный вдоль некоторой кривой

$$\alpha^i=\alpha^i(u). \quad (4.11)$$

Абсолютной производной $\frac{Da^i}{du}$ вектора a^i называется выражение

$$\frac{Da^i}{du}=\frac{da^i}{du}+\Gamma^i{}_{jk}a^j\frac{d\alpha^k}{du}. \quad (4.12)$$

Записывая (4.12) в новой системе координат, получим

$$\frac{Da^{i'}}{du}-A^{i'}{}_i\frac{Da^i}{du}=$$

$$=a^j\frac{d\alpha^k}{du}\left(\frac{\partial^2\alpha^{i'}}{\partial\alpha^j\partial\alpha^k}+\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\alpha^{j'}\partial\alpha^{k'}}A^{j'}{}_jA^{k'}{}_kA^{i'}{}_i\right). \quad (4.13)$$

Правая часть согласно (1.20) обращается в нуль. Тем самым доказан тензорный характер абсолютной производной (4.12). (Каждое слагаемое по отдельности в правой части (4.12) тензора не образует.)

Будем говорить, что вектор a^i переносится параллельно вдоль кривой (4.11), если удовлетворяются уравнения

$$\frac{Da^i}{du}=0. \quad (4.14)$$

В частности, если рассматривается евклидово пространство в прямоугольной системе координат, то символы Кристоффеля в (4.12) обращаются в нуль тождественно и параллельное перенесение вдоль кривой (4.11) означает постоянство компонент a^i вектора $\vec{a}$ вдоль этой кривой.

Заметим также, что уравнения геодезической линии (3.21) согласно (4.12) можно переписать в виде

$$\frac{D}{ds}\frac{d\alpha^i}{ds} \equiv \frac{D}{ds}\tau^i = 0, \tag{4.15}$$

что поддается следующей трактовке: вектор $\tau^i = \frac{d\alpha^i}{ds}$ (единичный), касательный к геодезической линии, переносится вдоль нее параллельно.

Для того чтобы сконструировать инвариантное определение абсолютной производной от ковариантных компонент вектора b_i, воспользуемся тем обстоятельством, что для произвольного вектора $a^i(u)$, который переносится параллельно вдоль кривой (4.11), величина

$$I(u) = a^i(u)\, b_i(u) \tag{4.16}$$

является скаляром. Тогда, очевидно, скаляром является и производная $\frac{dI}{du}$, и согласно (4.12) и (4.14)

$$\frac{dI}{du} = \frac{da^i}{du} b_i + a^i \frac{db_i}{du} = -\Gamma^i_{jk} a^j \frac{d\alpha^k}{du} b_i +$$
$$+ a^i \frac{db_i}{du} = a^i \left(\frac{db_i}{du} - \Gamma^l_{ik} b_l \frac{d\alpha^k}{du}\right). \tag{4.17}$$

Согласно обратному тензорному признаку (гл. 1, § 3) величины, стоящие в круглых скобках в выражении (4.17), образуют ковариантные компоненты вектора. Величины

$$\frac{Db_i}{du} \equiv \frac{db_i}{du} - \Gamma^l_{ik} b_l \frac{d\alpha^k}{du} \tag{4.18}$$

называются абсолютной производной вектора b_i.

Параллельное перенесение ковариантного вектора b_i вдоль кривой (4.11) означает обращение в нуль абсолютной производной (4.18)

$$\frac{Db_i}{du} = 0. \tag{4.19}$$

Используя теперь формулы (4.12) и (4.18), можем найти абсолютную производную от тензора любого ранга. Для этого образуем инвариант (скаляр), свертывая рассматриваемый тензор с произвольными векторами a^i и b_i, параллельно перенесенными вдоль кривой (4.11), и рассматриваем производную этого скаляра по параметру u. Например, для тензора T^{ij} конструируем скаляр $T^{ij}b_ib_j$ и, используя формулы (4.18) и (4.19), найдем

$$\frac{DT^{ij}}{du} = \frac{dT^{ij}}{du} + \Gamma^i_{kl}T^{kj}\frac{d\alpha^l}{du} + \Gamma^j_{kl}T^{ik}\frac{d\alpha^l}{du}. \tag{4.20}$$

Выражение (4.20) назовем *абсолютной производной тензора* T^{ij}. Аналогично строя скаляры $T_{ij}a^ia^j$ и $T_i{}^jb^ia_j$, получим

$$\frac{DT_{ij}}{du} = \frac{dT_{ij}}{du} - \Gamma^k_{il}T_{kj}\frac{d\alpha^l}{du} - \Gamma^k_{jl}T_{ik}\frac{d\alpha^l}{du}, \tag{4.21}$$

$$\frac{DT_i{}^j}{du} = \frac{dT_i{}^j}{du} - \Gamma^k_{il}T^j_k\frac{d\alpha^l}{du} + \Gamma^j_{kl}T_i{}^k\frac{d\alpha^l}{du}. \tag{4.22}$$

Формулами (4.21) и (4.22) представлены абсолютные производные тензоров T_{ij} и $T_i{}^j$.

Будем говорить, что тензор $T^{i_1\ldots i_m}{}_{j_1\ldots j_k}(u)$ параллельно переносится вдоль кривой (4.11), если

$$\frac{D}{du}T^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_k} = 0. \tag{4.23}$$

Заметим, что абсолютная производная от тензора m-го ранга является тензором того же ранга.

Запишем формулы (4.12) и (4.18) в другом виде:

$$\frac{Da^i}{du} = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^k} + \Gamma^i_{jk}a^j\right)\frac{d\alpha^k}{du}, \tag{4.24}$$

$$\frac{Db_i}{du} = \left(\frac{\partial b_i}{\partial \alpha^k} - \Gamma^j_{ik}b_j\right)\frac{d\alpha^k}{du}. \tag{4.25}$$

Выражения, стоящие в круглых скобках в (4.24) и (4.25), называются ковариантнымн производными векторов a^i и b_i соответственно

$$a^i{}_{,j} \equiv \nabla_j a^i \equiv a^i|_j \equiv \partial_j a_i \equiv \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} + \Gamma^i_{kj} a^k, \qquad (4.26)$$

$$b_{i,j} \equiv \nabla_j b_i \equiv b_i|_j \equiv \partial_j b_i \equiv \frac{\partial b_i}{\partial \alpha^j} - \Gamma^k_{ij} b_k. \qquad (4.27)$$

Аналогично определяются ковариантные производные тензоров любого ранга (см. гл. 1, § 3).

Упражнение 4.3. Подсчитать абсолютную и ковариантную производную тензоров $T_{jk}{}^l$, $S_{lm}{}^{ik}$.

Упражнение 4.4. Показать, что для тензора σ^{ij}

$$\sigma^{ij}{}_{,j} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \alpha^j} + \Gamma^i_{jk}\sigma^{jk} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha^k}(\ln g)\,\sigma^{ik}. \qquad (4.28)$$

Упражнение 4.5. Доказать формулы

$$g^{ij}{}_{,k} = 0; \quad g_{ij,k} = 0; \quad \delta^i{}_{j,k} = 0; \qquad (4.29)$$

$$Dg^{ij} = 0; \quad Dg_{ij} = 0; \quad D\delta^i{}_j = 0. \qquad (4.30)$$

Упражнение 4.6. Проверить справедливость формул

$$(\sqrt{g}\,\epsilon_{i_1 \ldots i_n})_{,k} = 0, \qquad (4.31)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{i_1 \ldots i_n}\right)_{,k} = 0. \qquad (4.32)$$

Упражнение 4.7. Доказать, что для скаляра $I(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$

$$\frac{DI}{du} = \frac{dI}{du}, \quad I_{,i} = \frac{\partial I}{\partial \alpha^i}. \; \bullet \qquad (4.33)$$

В заключение укажем один способ определения символов Кристоффеля, удобный при практическом вычислении. Если задана метрическая форма, то после составления выражения w (3.5) получим, произведя соответствующие дифференцирования по формуле (3.29), выражение для вектора f_i через компоненты метрического тензора g_{ij}. С другой стороны, имеем выражение для вектора f_i (3.36). Из сравнения этих выражений находим выражения символов Кристоффеля 1-го рода. Такой путь часто оказывается более простым, чем непосредственное вычисление по формулам (3.17).

Упражнение 4.8. Подсчитать указанным приемом символы Кристоффеля 1-го рода, если метрика задается формулой

$$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (\alpha^1 d\alpha^2)^2 + (\alpha^1 \sin \alpha^2 d\alpha^3)^2. \tag{4.34}$$

Упражнение 4.9. Доказать, что

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}\tau^i\tau^j) = 2g_{ij}\tau^i \frac{D\tau^j}{ds}, \tag{4.35}$$

где τ^i — произвольный вектор, заданный вдоль некоторой кривой, длиной дуги которой является s.

Упражнение 4.10. Доказать, что

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\ln g \tag{4.36}$$

(см. упр. 2.4).

§ 5. Формулы Френе

Рассмотрим некоторую кривую в пространстве Римана

$$\alpha^i = \alpha^i(s), \tag{5.1}$$

где параметром кривой s будем считать длину дуги этой кривой, отсчитываемой от некоторой определенной точки. Поначалу будем считать, что среди рассматриваемых нами векторов отсутствуют векторы с изотропными направлениями. Очевидно, вектор

$$\tau^i = \frac{d\alpha^i}{ds} \tag{5.2}$$

является единичным вектором, касательным к кривой (5.1). Тогда, учитывая возможность неопределенной метрики, имеем

$$g_{ij}\tau^i\tau^j = \varepsilon, \tag{5.3}$$

где ε — знаковое число. Дифференцируя (5.3) абсолютным образом (или используя (4.35)), получим

$$g_{ij}\tau^i\frac{D\tau^j}{ds} \equiv \tau_j\frac{D\tau^j}{ds} = 0. \tag{5.4}$$

Из (5.4) видно, что вектор $\dfrac{D\tau^i}{ds}$ ортогонален к касательному вектору τ^i (см. упр. 2.6).

Единичный вектор $\tau_{(1)}{}^i$, коллинеарный вектору

$\frac{D\tau^i}{ds}$, назовем *первым вектором нормали*, или первой нормалью, а длину вектора $\frac{D\tau^i}{ds}$ — *первой кривизной* $\varkappa_{(1)}$ кривой (5.1). Следовательно,

$$\frac{D\tau^i}{ds}=\varkappa_{(1)}\,\tau^i_{(1)},\quad g_{ij}\tau^i_{(1)}\tau^j{}_{(1)}=\varepsilon_{(1)}, \tag{5.5}$$

где $\varepsilon_{(1)}$ — знаковое число вектора $\tau_{(1)}{}^i$. Уравнение (5.5) носит название *первой формулы Френе.*

Определим теперь единичный вектор $\tau_{(2)}{}^i$ и скаляр $\varkappa_{(2)}$ так, чтобы удовлетворялись уравиеиия

$$\frac{D\tau^i_{(1)}}{ds}=\varkappa_{(2)}\,\tau^i_{(2)}-\varepsilon\varepsilon_{(1)}\,\varkappa_{(1)}\,\tau^i,\quad g_{ij}\tau^i_{(2)}\tau^j_{(2)}=\varepsilon_{(2)}, \tag{5.6}$$

где $\varepsilon_{(2)}$ — знаковое число вектора $\tau^i{}_{(2)}$. Вектор $\tau^i{}_{(2)}$ ортогонален к векторам τ^i и $\tau^i{}_{(1)}$. В самом деле, умножая последовательно (5.6) на τ_i и $\tau_{(1)i}$, получим

$$\varkappa_{(2)}\,\tau^i{}_{(2)}\,\tau_i=\frac{D\tau^i_{(1)}}{ds}\tau_i+\varepsilon_{(1)}\varkappa_{(1)},\quad \varepsilon_{(2)}\,\tau^i{}_{(2)}\tau_{(1)i}=0, \tag{5.7}$$

но так как

$$\frac{D\tau^i_{(1)}}{ds}\tau_i=-\tau^i{}_{(1)}\frac{D\tau_i}{ds}=-\frac{D\tau^i}{ds}\tau_{(1)i}, \tag{5.8}$$

то, умножая (5.5) на $\tau_{(1)i}$, получим

$$\frac{D\tau^i}{ds}\tau_{(1)i}=\varkappa_{(1)}\,\tau^i{}_{(1)}\,\tau_{(1)i}=\varepsilon_{(1)}\,\varkappa_{(1)}. \tag{5.9}$$

Подставляя (5.8) и (5.9) в первую формулу (5.7), получим доказательство ортогоиальиости $\tau^i{}_{(2)}$ и τ^i. Вектор $\tau^i{}_{(2)}$ называется *вторым единичным вектором нормали* (второй нормалью), а $\varkappa_{(2)}$ — *второй кривизной кривой* (5.1).

Вводим теперь единичиый вектор $\tau^i{}_{(3)}$ и скаляр $\varkappa_{(3)}$ так, чтобы выполнялись соотиошения

$$\frac{D\tau^i_{(2)}}{ds}=\varkappa_{(3)}\,\tau^i_{(3)}-\varepsilon_{(1)}\,\varepsilon_{(2)}\,\varkappa_{(2)}\,\tau^i_{(1)},\quad g_{ij}\,\tau^i_{(3)}\tau^j_{(3)}=\varepsilon_{(3)}, \tag{5.10}$$

где $\varepsilon_{(3)}$ — знаковое число вектора $\tau^i{}_{(3)}$. Аиалогичио, можно доказать, что вектор $\tau^i{}_{(3)}$ ортогонален векторам τ^i, $\tau^i{}_{(1)}$, $\tau^i{}_{(2)}$. Он называется *третьим единичным вектором нормали* (третьей нормалью), а $\varkappa_{(3)}$ — *третьей кривизной кривой.* Продолжая эти рассуждения, можно методом математической индукции доказать формулы

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds} = \varkappa_{(m)}\,\tau^i_{(m)} - \varepsilon_{(m-2)}\,\varepsilon_{(m-1)}\,\varkappa_{(m-1)}\,\tau^i_{(m-2)},$$

$$g_{ij}\tau_{(m)}{}^i\tau_{(m)}{}^j = \varepsilon_{(m)},\ \langle m=1,\,2,\,\ldots\rangle. \qquad (5.11)$$

При этом

$$\tau^i{}_{(0)} \equiv \tau^i, \quad \varkappa_{(0)} = 0,\ \varepsilon_{(0)} = \varepsilon. \qquad (5.12)$$

Векторы $\tau^i{}_{(1)}$, $\tau^i{}_{(2)}$, ... называются соответственно первым, вторым, ... вектором нормали, а скаляры $\varkappa_{(1)}$, $\varkappa_{(2)}$, ... — соответственно первой, второй, ... кривизной кривой.

Разумеется, набор векторов $\tau^i{}_{(m)}$ не может быть бесконечным, так как мы рассматриваем риманово пространство конечного числа измерений n. Поэтому можно рассматривать только n взаимно ортогональных векторов. Чтобы оборвать цепочку уравнений (5.11), следует положить $\varkappa_{(n)}=0$, тогда для $m=n$

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds} = -\varepsilon_{(n-2)}\,\varepsilon_{(n-1)}\,\varkappa_{(n-1)}\,\tau^i_{(n-2)}. \qquad (5.13)$$

Итак, формулы Френе имеют вид

$$\frac{D\tau^i_{(m-1)}}{ds}\ \varkappa_{(m)}\,\tau^i{}_{(m)} - \varepsilon_{(m-2)}\,\varepsilon_{(m-1)}\,\varkappa_{(m-1)}\tau^i{}_{(m-2)},$$

$$g_{ij}\,\tau^i_{(m-1)}\,\tau^j_{(m-1)} = \varepsilon_{(m-1)},\ \langle m=1,2,\ldots,n\rangle, \qquad (5.14)$$

при этом

$$\tau^i_{(0)} \equiv \tau^i,\ \varkappa_{(0)} \equiv 0,\ \varkappa_{(n)} \equiv 0. \qquad (5.15)$$

При выводе формул Френе (5.14) мы предполагали, что каждая введенная кривизна $\varkappa_{(m)} \neq 0$. Однако из уравнений (5.14) видно, что если $\varkappa_{(1)} \neq 0, \varkappa_{(2)} \neq 0, \ldots$ $\ldots, \varkappa_{(k-1)} \neq 0$, но $\varkappa_{(k)}=0$, $k<n$, то цепочка уравнений (5.11) обрывается раньше, чем $m=n$, и последнее уравнение этой цепочки имеет вид (5.13), где следует положить $n=k$. В частности, если $k=1$ (т. е. $\varkappa_{(1)}=0$),

то так как из (5.5) следует, что

$$\varkappa_{(1)}^2 = \varepsilon_{(1)} g_{ij} \frac{D\tau^i}{ds} \frac{D\tau^j}{ds}, \tag{5.16}$$

то это может случиться, если, например, $\dfrac{D\tau^i}{ds} = 0$, т. е. согласно (4.15) рассматриваемая кривая является геодезический. Если же даже не все компоненты $\dfrac{D\tau^i}{ds}$ обращаются в нуль, но вектор $\dfrac{D\tau^i}{ds}$ является изотропным, то $\varkappa_{(1)}=0$.

В обоих случаях уравнение (5.5) уже не определяет первого вектора нормали $\tau^i_{(1)}$. Тем самым цепочка уравнений (5.11) обрывается на первом шаге.

Однако и в этом случае можно ввести в некоторой точке кривой единичные взаимно ортогональные векторы $\tau^i_{(1)}, \ldots, \tau^i_{(n-1)}$ и ортогональные к вектору τ^i. Перемещая далее их параллельно вдоль кривой, получим в каждой точке кривой n взаимно ортогональных единичных векторов независимо от того, обращается в нуль какая-нибудь кривизна этой кривой или нет. Совокупность этих векторов называется *многогранником Френе.*

Если в каждой точке кривой рассмотреть касательное евклидово пространство, то многогранник Френе в каждом таком пространстве образует орто-

Если считать $\varkappa_{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ известными функциями длины дуги s, то на (5.14) можно смотреть

нормированный репер $\vec{\tau}, \vec{\tau}_{(1)}, \ldots, \vec{\tau}_{(n-1)}$.

как на систему дифференциальных уравнений первого порядка для определения векторов многогранника Френе (или сопровождающего репера) $\tau^i, \tau^i_{(1)}, \ldots, \tau^i_{(n-1)}$. Для решения этой системы нужно задать начальные условия, т. е. положение этого многогранника в начальной точке кривой.

Упражнение 5.1. Пусть в V_n задана метрическая форма в виде

$$\Phi = (da^1)^2 + \ldots + (da^n)^2. \tag{5.17}$$

Кривая, для которой в каждой точке

$$\varkappa_{(1)} \equiv \varkappa = \mathrm{const}, \quad \varkappa_{(2)} = 0, \tag{5.18}$$

называется *n-мерной окружностью.* Доказать, что для нее справедливо уравнение

$$\alpha^i = a^i \cos \varkappa s + b^i \sin \varkappa s + c^i, \tag{5.19}$$

где

$$a^i a_i = b^i b_i = \frac{1}{\varkappa^2}, \quad a^i b_i = 0. \tag{5.20}$$

Упражнение 5.2. Найти кривизну линии (2.22) в метриках (2.23) и (2.25).

Упражнение 5.3. Пусть в евклидовом пространстве R_3 задан симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{T}$, зависящий от некоторого параметра t. *Пятимерным пространством Ильюшина* называется евклидово пространство R_5, порожденное девиатором тензора $\underset{\sim}{T}(t)$, так что

$$\bar{t}^{11}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathfrak{э}^1 \cos\beta + \mathfrak{э}^2 \sin\beta,$$

$$\bar{t}^{22}\sqrt{\frac{3}{2}} = -\mathfrak{э}^1 \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + \mathfrak{э}^2 \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\bar{t}^{33}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathfrak{э}^1 \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - \mathfrak{э}^2 \cos\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right), \tag{5.21}$$

$$\bar{t}^{12}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathfrak{э}^3 \cos\frac{\pi}{6}, \quad \bar{t}^{23}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathfrak{э}^4 \cos\frac{\pi}{6},$$

$$\bar{t}^{31}\sqrt{\frac{3}{2}} = \mathfrak{э}^5 \cos\frac{\pi}{6},$$

причем $\mathfrak{э}^i$ ($i=1, \ldots, 5$) — компоненты так называемого *физического вектора* $\vec{\mathfrak{э}}$ в ортонормированном репере k_i:

$$\vec{\mathfrak{э}}(t) = \mathfrak{э}^i(t)\, \vec{k}_i \quad (i=1, \ldots, 5). \tag{5.22}$$

Построить в пространстве Ильюшина R_5 многогранник Френе, связанный с кривой

$$\vec{\mathfrak{э}} = \vec{\mathfrak{э}}(t). \quad \bullet \tag{5.23}$$

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство. Пусть в нем задана кривая уравнением для радиус-вектора $\vec{r}$ (рис. 14)

$$\vec{r}=\vec{r}(u) \tag{5.24}$$

или координатами радиус-вектора в прямоугольной декартовой системе координат

$$x^i=x^i(u) \quad (i=1,\ 2,\ 3). \tag{5.25}$$

Если за параметр кривой принять длину дуги s,

$$x^i=x^i(s), \tag{5.26}$$

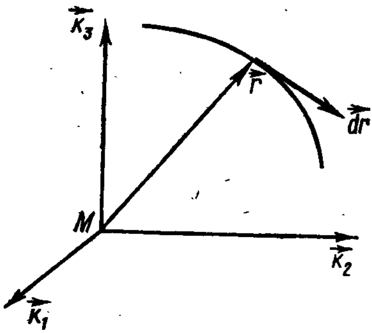

Рис. 14

то вектор

$$\vec{\tau}\equiv\frac{d\vec{r}}{ds}, \tag{5.27}$$

касательный к этой кривой, будет единичным, причем

$$\frac{d\vec{r}}{du}=\vec{\tau}\frac{ds}{du}. \tag{5.28}$$

Формулы (5.14) для этого случая примут вид

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=k\vec{\nu},$$

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds}=-k\vec{\tau}+\varkappa\vec{\beta}, \tag{5.29}$$

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds}=-\varkappa\vec{\nu}.$$

Первый вектор нормали $\vec{\tau}_{(1)}=\vec{\nu}$ носит название *вектора главной нормали*, второй вектор нормали $\vec{\tau}_{(2)}=$

$=\vec{\beta}$ — *вектора бинормали.* Первая кривизна $\varkappa_{(1)}=k$ *называется кривизной пространственной кривой*

$$k=\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| \tag{5.30}$$

и является существенно положительной. Величина, обратная к k, называется радиусом кривизны кривой в точке M и обозначается $\rho=1/k$. Вторая кривизна $\varkappa_{(2)}=\varkappa$ называется *кручением кривой*

$$|\varkappa|=\left|\frac{d\vec{\beta}}{ds}\right|. \tag{5.31}$$

Кручение может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Тройка единичных векторов $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ называется *трехгранником* Френе, или сопро-

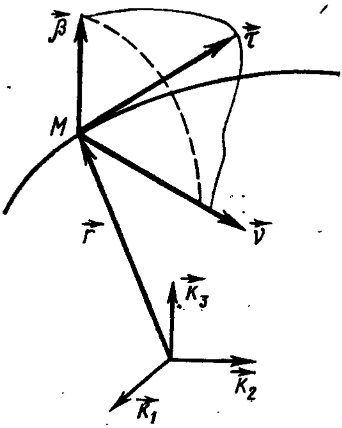

Рис. 15

вождающим репером (рис. 15). Плоскость, проходящая через точку M кривой (5.24), в которой лежат векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, называется *соприкасающейся плоскостью.* Плоскость, содержащая векторы $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, называется *нормальной плоскостью*, и, наконец, плоскость, в которой лежат векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$,— *спрямляющей* плоскостью.

Упражнение 5.4. Доказать, что

$$\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}. \tag{5.32}$$

Упражнение 5.5. Доказать, что

$$\varkappa=\frac{S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')}{(\vec{r}'\times\vec{r}'')^2}, \tag{5.33}$$

где штрих означает производную радиус-вектора по параметру s, $S(\vec{r}'\wedge\vec{r}''\wedge\vec{r}''')$ — смешанное произведение векторов $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{r}'''$.

Упражнение 5.6. Доказать, что если $\varkappa=0$, то кривая лежит в соприкасающейся плоскости (плоская кривая).

Упражнение 5.7. Доказать, что кривая, для которой $k=0$, имеет вид

$$\vec{r}=\vec{\tau}s+\vec{r}_0, \tag{5.34}$$

где $\vec{r}^0$ — постоянный вектор.

Упражнение 5.8. Доказать, что при $\varkappa=0$ задание кривизны k как функции длины дуги s определяет линию на плоскости с точностью до произвольного перемещения на плоскости.

Упражнение 5.9. Линии, для которых $k=\mathrm{const}$, $\varkappa=\mathrm{const}$, носят название *винтовых линий.* Найти параметрические уравнения винтовых линий.

Упражнение 5.10. При интегрировании уравнений Френе (5.29) нужно учитывать условия ортонормированности трехгранника Френе

$$\vec{\tau}^2=\vec{\nu}^2=\vec{\beta}^2=1,\ \vec{\tau}\cdot\vec{\nu}=\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}=0, \tag{5.35}$$

т. е. на девять координат векторов трехгранника накладывается шесть соотношений. Независимых координат, определяющих поворот трехгранника около точки M, только три. Найти три угла, являющихся независимыми параметрами задания трехгранника Френе (углы Эйлера).

§ 6. Тензор кривизны

Интуитивно ясно, чем, например, кривая отличается от прямой, поверхность от плоскости. Т. е. наблюдая в трехмерном пространстве геометрические образования меньшего числа измерений, мы под искривленностью понимаем их отличие от некоторых образований того же числа измерений, определяемых нами как плоские. Но можно ли определить кривизну пространства, не сравнивая это пространство с другим и не выходя для определения этого понятия в пространство бо́льшего числа измерений, или, как говорят, является ли кривизна внутренним свойством пространства?

Попробуем сделать понятие искривленности пространства более конкретным. А именно назовем пространство $\mathscr{V}_n$ *уплощенным,* если метрическую форму можно выразить в виде

$$\Phi=\varepsilon_{(1)}(d\alpha^1)^2+\varepsilon_{(2)}(d\alpha^2)^2+\ \dots\ +\varepsilon_{(n)}(d\alpha^n)^2, \qquad (6.1)$$

где знаковые числа $\varepsilon_{(i)}$ равны либо $+1$, либо -1. Пространства $\mathscr{V}_n$, для которых невозможно выразить метрику в виде (6.1), будем считать искривленными.

С позиций «внешней» геометрии мы предъявляем к понятию «уплощенного» пространства более жесткие требования. Так, например, рассматривая прямой круговой цилиндр радиуса a в трехмерном евклидовом пространстве, можно задать его метрику в виде (рис. 16)

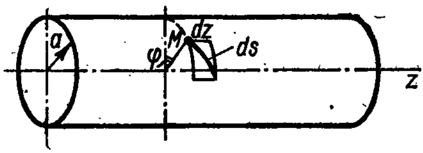

Рис. 16

$$ds^2=dz^2+a^2d\varphi^2, \qquad (6.2)$$

т. е. с точки зрения определения (6.1) поверхность такого цилиндра является уплощенным двумерным пространством.

Другими словами, мы будем считать $\mathscr{V}_n$ уплощенным, если существует такое преобразование системы координат, которое приводит метрическую форму

$$ds^2=\varepsilon\Phi=\varepsilon g_{ij}d\alpha^i d\alpha^j \qquad (6.3)$$

к виду (6.1). Из алгебры хорошо известно, что существует такое преобразование в каждой отдельной точке M, однако нас интересует преобразование, которое переводит (6.3) в (6.1) во всех точках $\mathscr{V}_n$ одновременно.

Упражнение 6.1. Вводя соответствующую замену переменных, доказать, что всякое пространство $\mathscr{V}_n$ с метрикой (6.3) «вложено» в уплощенное пространство $\frac{n(n+1)}{2}$ числа измерений. ●

Пусть A_i — произвольный ковариантный вектор. Тогда имеем согласно (4.27)

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial \alpha^j} - \Gamma^l_{ij} A_l. \tag{6.4}$$

Вычисляя ковариантную производную тензора $A_{i,j}$, получим

$$A_{i,jk} = \frac{\partial A_{i,j}}{\partial \alpha^k} - \Gamma^l_{ik} A_{l,j} - \Gamma^l_{jk} A_{i,l}. \tag{6.5}$$

Поменяв местами индексы j и k, из (6.5) получим

$$A_{i,kj} = \frac{\partial A_{i,k}}{\partial \alpha^j} - \Gamma^l_{ij} A_{l,k} - \Gamma^l_{jk} A_{i,l}. \tag{6.6}$$

Вычитая из (6.5) выражение (6.6), найдем

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} = -\frac{\partial}{\partial \alpha^k}(\Gamma^l_{ij} A_l) - \Gamma^l_{ik} A_{l,j} + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha^j}(\Gamma^l_{ik} A_l) + \Gamma^l_{ij} A_{l,k}. \tag{6.7}$$

Определим теперь тензор кривизны Римана 2-го рода $R_{ijk}{}^l$ формулой

$$A_{i,jk} - A_{i,kj} \equiv R_{jki}{}^l A_l. \tag{6.8}$$

То, что $R_{jki}{}^l$ действительно является тензором 4-го ранга, следует из обратного тензорного признака (гл. 1, § 3), хотя это можно проверить и непосредственно. Сравнивая (6.7) и (6.8), имеем

$$R^l_{jki} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \Gamma^l_{ki} - \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \Gamma^l_{ji} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} - \\ - \Gamma^m_{ji} \Gamma^l_{mk} \equiv 2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^j} \Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{mj} \right]_{[jk]}, \tag{6.9}$$

где $[jk]$ означает, что в выражении, заключенном в квадратные скобки, необходимо провести операцию альтернирования по индексам j, k (гл. 1, § 3).

Упражнение 6.2. Пусть в пространстве $\mathscr{V}_n$ выбрана двумерная поверхность

$$\alpha^i=\alpha^i(u, v) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{6.10}$$

где u, v — параметры. Пусть в каждой точке этой поверхности задан вектор B^i. Вычислив вторые абсолютные производные, доказать, что

$$\frac{D^2B^i}{du\,dv}-\frac{D^2B^i}{dv\,du}=R^i_{jkl}\frac{\partial\alpha^j}{\partial u}\frac{\partial\alpha^k}{\partial v}B^l. \; \bullet \tag{6.11}$$

Теперь мы можем отчасти ответить на вопрос, когда пространство $\mathscr{V}_n$ будет уплощенным. Так как в уплощенном пространстве должна существовать декартова система координат (что вытекает из формулы (6.1)), а в этой системе координат, как мы знаем, все символы Кристоффеля обращаются в нуль, то согласно (6.9) компоненты тензора Римана в этой системе координат равны нулю. Но поскольку он является тензором, его компоненты в любой другой системе координат обращаются в нуль (упр. 3.1). Следовательно, для того чтобы пространство $\mathscr{V}_n$ было уплощенным, необходимо, чтобы

$$R_{ijk}{}^l=0. \tag{6.12}$$

Достаточное условие будет нами разобрано в дальнейшем.

Для запоминания формулы (6.9) выражения компонент тензора Римана 2-го рода через символы Кристоффеля 2-го рода обратим внимание, что нужно записать сумму двух членов: производную по координате символа Кристоффеля 2-го рода и произведение двух символов Кристоффеля 2-го рода. В *первом* члене порядок расстановки индексов таков же, как и в левой части, а во *втором* члене у первого сомножителя записываются внизу два внутренних индекса левой части, а сверху — немой индекс, по которому ведется суммирование. Тогда индексы во втором сомножителе расстанавливаются автоматически. Затем следует со знаком минус дописать еще два члена, образованные из первых заменой первых двух индексов $(j \leftrightarrow k)$.

Таким образом, тензор Римана 2-го рода кососимметричен по первым двум индексам

$$R_{jki}{}^l=-R_{kji}{}^l. \tag{6.13}$$

Упражнение 6.3. Проверить справедливость тождества

$$R_{jki}{}^{l}+R_{ijk}{}^{l}+R_{kij}{}^{l}=0. \bullet \tag{6.14}$$

Тензором кривизны Римана 1-го рода называется четырежды ковариантный тензор, образованный из тензора Римана 2-го рода опусканием последнего индекса

$$R_{jkim}=R_{jki}{}^{l}g_{lm}. \tag{6.15}$$

Подставляя в (6.15) выражение (6.9) и учитывая тождество (3.24), получим

$$R_{jklm}=2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^{j}}\Gamma_{ki,m}-\Gamma^{l}_{ki}\Gamma_{jl,m}\right]_{[jk]}\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha^{j}}\Gamma_{ki,m}-\frac{\partial}{\partial\alpha^{k}}\Gamma_{ji,m}-\Gamma^{l}_{ki}\Gamma_{jl,m}+\Gamma^{l}_{ji}\Gamma_{kl,m}. \tag{6.16}$$

Подставляя теперь в (6.16) выражение (3.17) и учитывая (3.18), получим

$$R_{jkim}=\left[\frac{\partial^{2}g_{km}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{i}}+\frac{\partial^{2}g_{ji}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{m}}+2^{lq}\Gamma_{ji,l}\Gamma_{km,q}\right]_{[jk]}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}g_{km}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{i}}+\frac{\partial^{2}g_{ji}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{m}}-\frac{\partial^{2}g_{ki}}{\partial\alpha^{j}\,\partial\alpha^{m}}-\frac{\partial^{2}g_{jm}}{\partial\alpha^{k}\,\partial\alpha^{i}}\right)+$$

$$+g^{lq}\left(\Gamma_{ji,l}\Gamma_{km,q}-\Gamma_{ki,l}\Gamma_{jm,q}\right). \tag{6.17}$$

Упражнение 6.4. Доказать, что

$$R_{jkim}=-R_{kjim}=-R_{jkmi}. \tag{6.18}$$

Упражнение 6.5. Доказать, что

$$R_{jkim}=R_{imjk}. \tag{6.19}$$

Упражнение 6.6. Доказать тождество

$$R_{jkim}+R_{ijkm}+R_{kijm}=0. \tag{6.20}$$

Упражнение 6.7. Доказать, что в пространстве $\mathscr{V}_2$ все компоненты тензора Римана 1-го рода либо выражаются через компоненту R_{1212}, либо равны нулю.

Упражнение 6.8. Доказать тождества Бианки:

$$R_{jkim,q}+R_{qjim,k}+R_{kqim,j}=0, \tag{6.21}$$

$$R_{jki}{}^{l}{}_{,q}+R_{qji}{}^{l}{}_{,k}+R_{kqi}{}^{l}{}_{,j}=0. \tag{6.22}$$

Упражнение 6.9. Используя формулы (6.18) — (6.20), доказать, что число независимых компонент тензора Римана 1-го рода N в пространстве $\mathscr{V}_n$, $n > 1$, равно

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \qquad (6.23)$$

В силу высокой симметрии тензора Римана среди n^4 его компонент только N (6.23) независимых. Так, в $\mathscr{V}_3$ их всего шесть, а в $\mathscr{V}_2$ только одна. Поэтому иногда удобно пользоваться другими тензорами меньшего ранга, образованными из тензоров Римана.

Тензором Ричи называется тензор второго ранга, образованный из тензоров Римана одним из следующих способов:

$$R_{ki} = R_{jki}{}^{j} = R_{jkim} g^{jm}. \qquad (6.24)$$

Упражнение 6.10. Используя определение тензора Ричи (6.24) и формулу (4.36), доказать, что

$$R_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^k \partial \alpha^l} \ln g - \frac{1}{2} \Gamma^j_{kl} \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \ln g - \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \Gamma^j_{kl} + \Gamma^j_{kq} \Gamma^q_{jl}, \qquad (6.25)$$

откуда следует, что тензор Ричи — симметричный тензор.

Упражнение 6.11. Умножая (6.21) на $g^{jm}g^{ki}$, показать, что

$$g^{ki} R_{ki,q} - g^{ki} R_{qi,k} - g^{jm} R_{qm,j} = 0. \qquad (6.26)$$

В частности, для двумерного пространства $\mathscr{V}_2$ из (6.24) имеем

$$R_{11} = g^{22} R_{2112},\; R_{12} = g^{12} R_{2121},\; R_{22} = g^{11} R_{1221}. \qquad (6.27)$$

Но так как для $\mathscr{V}_2$ компоненты тензора g^{ij} имеют вид

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g},\; g^{12} = -\frac{g_{21}}{g},\; g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \qquad (6.28)$$

то

$$g R_{ij} = -g_{ij} R_{1212} \quad (i, j = 1, 2), \qquad (6.29)$$

т. е. в $\mathscr{V}_2$ компоненты тензора Ричи пропорциональны компонентам метрического тензора.

Скалярная величина

$$R = g^{ij} R_{ij} = R_i{}^{i} \quad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad (6.30)$$

называется *инвариантом кривизны*. Из (6.29) вытекает, что для $n=2$

$$R=-\frac{2}{g}R_{1212}, \tag{6.31}$$

а также

$$\frac{1}{g}\epsilon^{ij}\epsilon^{kl}R_{ijkl}=-\frac{R}{2} \quad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2). \tag{6.32}$$

В трехмерном пространстве $\mathscr{V}_3$ вводят так называемый *тензор несовместности*

$$\eta^{ij}=\frac{1}{g}\epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}R_{klmn} \quad (i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3). \tag{6.33}$$

Используя определение (6.30), тождество (6.26) для произвольного $\mathscr{V}_n$ можно записать в виде

$$R_{,q}-2R_{q,j}{}^{j}=0, \tag{6.34}$$

или

$$\left(R_q^j-\frac{1}{2}R\delta_q^j\right)_{,j}=0. \tag{6.35}$$

Тензором Эйнштейна называется тензор

$$G_q^j\equiv R_q^j-\frac{1}{2}R\delta_q^j. \tag{6.36}$$

Тогда тождество (6.34), часто используемое в теории относительности, можно записать в виде равенства нулю дивергенции тензора Эйиштейиа

$$G^j{}_{q,j}=0. \tag{6.37}$$

§ 7. Геометрический смысл теизора кривизны

Пусть M_1 и M_2 — две точки риманова пространства $\mathscr{V}_n$, а C_1 и C_2 — два различных контура (линии), соединяющие эти точки (рис. 17).

Пусть кривые C_1 и C_2 заданы параметрически в виде

$$C_1: \alpha^i=\varphi^i(u);\ C_2: \alpha^i=\psi^i(u), \tag{7.1}$$

$$u_1\leqslant u\leqslant u_2.$$

При этом значение параметра $u=u_1$ соответствует точке M_1, а значение $u=u_2$ — точке M_2.

Выберем теперь в точке M_1 некоторый вектор $a_{(0)}{}^i$ и перенесем его параллельно вдоль линии C_1. Тогда в точке M_2 получим вектор $a_{(1)}{}^i$. Если перенесем вектор $a_{(0)}{}^i$ параллельно вдоль линии C_2, то в точке M_2 получим значения $a_{(2)}{}^i$, вообще говоря, отличные от $a_{(1)}{}^i$. Обозначим разность этих значений через

$$\Delta a^i(M_2) = a_{(2)}{}^i - a_{(1)}{}^i. \tag{7.2}$$

Для того чтобы вычислить эту разность, создадим однопараметрическое семейство кривых, соединяющих точки M_1 и M_2 (будем предполагать рассматриваемую область $\mathscr{V}_n$ односвязной), причем параметр u каждой кривой изменяется в том же диапазоне (7.1), что и у кривых C_1 и C_2. Иначе говоря, кривые C_1 и C_2 принадлежат введенному семейству.

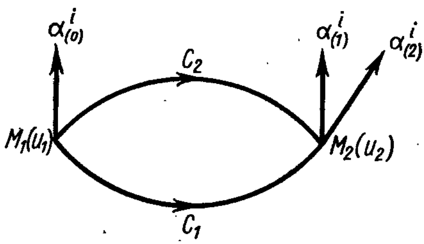

Рис 17

Будем считать, что параметр v, по которому одна кривая семейства отличается от другой, принимает значение v_1 для кривой C_1 и v_2 для кривой C_2. Итак, уравнения кривых семейства задаются в параметрическом виде следующим образом:

$$a^i = f^i(u, v), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2. \tag{7.3}$$

При этом

$$f^i(u, v_1) = \varphi^i(u), \quad f^i(u, v_2) = \psi^i(u) \tag{7.4}$$

и, кроме того, в точках M_1 и M_2

$$f^i(u_1, v) = \varphi^i(u_1) = \psi^i(u_1), \tag{7.5}$$

$$f^i(u_2, v) = \varphi^i(u_2) = \psi^i(u_2). \tag{7.6}$$

Другими словами, для точек M_1 и M_2

$$\frac{\partial a^i}{\partial v} = 0 \text{ при } u = u_1 \text{ и } u = u_2. \tag{7.7}$$

Теперь перенесем параллельно вдоль каждой кривой семейства вектор $a_{(0)}{}^i$. Тогда получим векторное поле a^i, заданное на двумерной поверхности $\mathscr{V}_n$, всюду однозначное, кроме, быть может, точки M_2. Это векторное поле подчиняется уравнению

$$\frac{Da^i}{\partial u}=0, \tag{7.8}$$

откуда

$$\frac{D^2a^i}{\partial v\,\partial u}=0. \tag{7.9}$$

Кроме того, в точке M_1

$$\frac{Da^i}{\partial v}=0 \quad \text{при } u=u_1. \tag{7.10}$$

Это равенство вытекает из формулы (4.12), если учесть (7.7) и то, что в точке M_1

$$\frac{\partial a^i}{\partial v}=\frac{\partial a^i_{(0)}}{\partial v}=0. \tag{7.11}$$

Пусть теперь b_i — произвольный вектор в точке M_2. Перенесем его параллельно вдоль всех кривых $v=$ $=\mathrm{const}$ параллельным образом до точки M_1. Тогда

$$\frac{Db_i}{\partial u}=0. \tag{7.12}$$

Образуем теперь скаляр (инвариант) a^ib_i. Тогда в силу того, что в точке M_2 вектор b_i определен однозначно и для скаляра частная производная по параметру совпадает с абсолютной производной, получим

$$\Delta a^i(M_2)\,b_i(M_2)\equiv\int\limits_{v_1}^{v_2}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a^ib_i)\right]_{u=u_2}dv=$$

$$=\int\limits_{v_1}^{v_2}\left[\frac{Da^i}{\partial v}\,b_i\right]_{u=u_2}dv. \tag{7.13}$$

Подынтегральное выражение правой части (7.13) запишем в виде

$$\left[\frac{Da^i}{\partial v} b_i\right]_{u=u_2} = \left[\frac{Da^i}{\partial v} b_i\right]_{u=u_1} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{Da^i}{\partial v} b_i\right] du. \qquad (7.14)$$

В силу (7.10) первое слагаемое правой части (7.14) обращается в нуль, а второе слагаемое согласно (6.11) и (7.12) запишем следующим образом:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{Da^i}{\partial v} b_i\right] du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{D^2 a^i}{\partial u\, \partial_v} b_i\, du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{D^2 a^i}{\partial v\, \partial u} + R_{klj}{}^i \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v} a^j\right] b_i\, du =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} R_{klj}{}^i \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v} a^j b_i\, du, \qquad (7.15)$$

где учтено еще условие (7.9).

Итак, выражение (7.13) имеет вид

$$\Delta a^i (M_2)\, b_i (M_2) = \iint R_{klj}{}^i a^j b_i \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v} du\, dv, \quad (7.16)$$

где интегрирование берется по всей двумерной поверхности, образованной семейством (7.3).

В точке M_2 имеются три вектора: b_i, $a_{(1)}{}^i$, $a_{(2)}{}^i$. Если теперь перенесем их параллельно вдоль C_2 в точку M_1, то в точке M_1 получим соответственно три вектора $b_i{}^{(2)}$, $a_{(0)}{}^i + \Delta a^i (M_1)$, $a_{(0)}{}^i$. Но скалярные величины при параллельном перенесении не изменяются. Поэтому так как из (7.2)

$$\Delta a^i (M_2)\;\; b_i (M_2) = [a_{(2)}{}^i - a_{(1)}{}^i]\, b_i (M_2), \qquad (7.17)$$

то, подставляя в правую часть (7.17) значения векторов, полученные параллельным перенесением в точку M_1, имеем равенство

$$\Delta a^i (M_2)\, b_i (M_2) = -\Delta a^i (M_1)\, b_i{}^{(2)}. \qquad (7.18)$$

Вектор b_i в точке M_2 был выбран произвольно. Поэтому вышесказанному можно дать следующую трактовку. Рассмотрим контур C, состоящий из контура C_1 (от точки M_1 до M_2) и контура C_2 (от точки M_2 до M_1).

Пусть M_1 — произвольная точка в $\mathscr{V}_n$ и пусть $\mathscr{V}_2$ — двумерное пространство, содержащее точку M_1. Пусть C — замкнутая кривая, лежащая в $\mathscr{V}_2$ и проходящая через M_1, причем выбрано положительное направление обхода этой кривой, указанное выше. Далее, пусть M_2 — произвольная точка кривой C, отличная от M_1, которую можно соединить с точкой M_1 семейством кривых, лежащих в $\mathscr{V}_2$. Пусть, наконец, $b_i^{(2)}$ — произвольный вектор, выбранный в точке M_1, перенесенный параллельно вдоль отрицательного направления кривой C до точки M_2, а затем вдоль кривой данного семейства. Тогда произвольный вектор a^i в точке M_1 после параллельного перенесения вдоль положительного направления по замкнутой кривой C получит приращение Δa^i

$$\Delta a^i b_i^{(2)} = -\iint R_{klj}^{\;\;\;i} a^j b_i \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v}\, du\, dv, \tag{7.19}$$

где интегрирование ведется по $\mathscr{V}_2$, ограниченному контуром C.

Если будем стягивать этот контур к точке M_1, то правую часть в (7.19) можно представить с точностью до величин высшего порядка малости в виде

$$-b_i^{(2)} \iint R_{klj}^{\;\;\;i} a^j \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \frac{\partial \alpha^l}{\partial v}\, du\, dv. \tag{7.20}$$

Или, учитывая произвольность вектора $b_i^{(2)}$, для бесконечно малого контура получим

$$\Delta a^i = -R_{klj}^{\;\;\;i} a^j \underset{(u)}{d}\, \alpha^k \underset{(v)}{d}\, \alpha^l, \tag{7.21}$$

где

$$\underset{(u)}{d}\, \alpha^k = \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} du, \quad \underset{(v)}{d}\, \alpha^l = \frac{\partial \alpha^l}{\partial v} dv. \tag{7.22}$$

Упражнение 7.1. Доказать, что для произвольных векторов a^i, b_i, параллельно переносимых вдоль некоторого семейства кривых, соединяющих точки M_1 и M_2, интегралы $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$

$$\mathscr{I}_1 = \int_{M_1}^{M_2} g_{ij} a^i d\alpha^j, \quad \mathscr{I}_2 = \int_{M_1}^{M_2} b_i\, d\alpha^i \tag{7.23}$$

не зависят от пути интегрирования, если выполняются условия в $\mathscr{V}_n$

$$R_{klj}{}^i=0. \quad \bullet \tag{7.24}$$

Итак, если выполняются условия (7.24), то пространство $\mathscr{V}_n$ является уплощенным. В самом деле, тогда во всем пространстве $\mathscr{V}_n$ можно выбрать в одной-единственной точке M_1 некоторый вектор $a^i(M^1)$ или $b_i(M_1)$, параллельным их перенесением получить однозначные векторные поля a^i, b_i во всем $\mathscr{V}_n$. Если мы выберем n ортонормированных векторов $e_{(l)j}$ в точке M_1, т. е. выполняются условия

$$g^{ij}e_{(k)i}e_{(l)j}=\varkappa_{kl}, \tag{7.25}$$

где $\varkappa_{kl}=0$ для $k\neq l$ и $\varkappa_{kl}=\varepsilon_{(k)}$ для $k=l$ (где $\varepsilon_{(k)}$ — знаковое число вектора $e_{(k)}{}^i$), тогда, переиося параллельным образом n векторов $e_{(l)j}$, в каждой точке M пространства $\mathscr{V}_n$ получим n векторных полей и можем ввести систему координат

$$x_k=\int\limits_{M_1}^{M} e_{(k)i}\,d\alpha^i. \tag{7.26}$$

Из предыдущего следует, что для точки M, бесконечно близкой к M_1, имеем

$$dx_k=e_{(k)i}d\alpha^i, \tag{7.27}$$

или

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i}=e_{(k)i}. \tag{7.28}$$

Тогда, сравнивая с (7.25), получим

$$g^{ij}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i}\frac{\partial x_l}{\partial \alpha^j}=\varkappa_{kl}, \tag{7.29}$$

и за систему координат в $\mathscr{V}_n$ можно приинять x_k, причем на (7.29) можно смотреть как на переход компонент метрического тензора от одной системы координат к другой, т. е.

$$g_{kl}=\varkappa_{kl}. \tag{7.30}$$

Поэтому метрическая форма имеет вид

$$\Phi=\varepsilon_{(1)}(dx_1)^2+\varepsilon_{(2)}(dx_2)^2+\ldots+\varepsilon_{(n)}(dx_n)^2. \tag{7.31}$$

Итак, условия (7.24) являются достаточными условиями того, чтобы пространство $\mathscr{V}_n$ было уплощенным.

Упражнение 7.2. Пусть в пространстве $\mathscr{V}_3$ компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{ij}=\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}, \tag{7.32}$$

где δ_{ij} — символы Кронекера, а ε_{ij} — малые величины, такие, что их произведением можно пренебречь по сравнению с первыми степенями. Доказать, что в этом случае условие (7.24) равносильно условию

$$\mathscr{I}nk\underset{\sim}{\varepsilon}=0 \tag{7.33}$$

(гл. 3, (7.19)).

Упражнение 7.3. Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{R}_3$ выбран в некоторой точке базис $\vec{e}_i$ и задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \alpha^j}=\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k, \tag{7.34}$$

где Γ^k_{ij} считаются заданными функциями координат. Доказать, что условиями интегрируемости системы (7.34) являются условия (7.24).

Упражнение 7.4. Пусть в ортогональной системе координат в $\mathscr{V}_2$ дано

$$ds^2=g_{11}(d\alpha^1)^2+g_{22}(d\alpha^2)^2. \tag{7.35}$$

Доказать, что

$$\frac{1}{g}R_{1212}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\alpha^1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial\alpha^2}\right)\right\}. \ \bullet \tag{7.36}$$

Понятие ковариантной производной можно ввести и без введения метрики. А именно, если считать заданными символы Кристоффеля 2-го рода как функции координат, для которых справедливы формулы (4.7), то говорят, что в n-мерном пространстве введена связность $\Gamma^k_{ij}(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, а само пространство носит название *пространства аффинной связности.* При этом коэффициенты связности не обязательно являются симметричными.

Упражнение 7.5. Доказать, что величины

$$S^k_{ij}=\Gamma^k_{[ij]}=\frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}) \tag{7.37}$$

образуют тензор. Этот тензор носит название *тензора кручения.*

§ 8. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

Важным случаем риманова пространства является двумерная поверхность в обычном трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим достаточно гладкие поверхности, т. е. будем считать, что функции

$$\vec{r}=\vec{r}(\alpha^1, \alpha^2), \tag{8.1}$$

с помощью которых параметрически задается поверхность, являются достаточное число раз дифференцируемыми. Под $\vec{r}$ понимаем радиус-вектор трехмерного евклидова пространства, т. е. вектор, который в ортонормированном репере $\vec{k}_I$ имеет вид

$$\vec{r}=x^I\vec{k}_I \quad (I=1,\ 2,\ 3). \tag{8.2}$$

(В этом параграфе считаем, что индексы, изображающиеся м а л ы м и латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 2, а индексы, изображающиеся б о л ь ш и м и латинскими буквами, пробегают значения от 1 до 3.) Будем считать, что в каждой точке поверхности (8.1) векторы

$$\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i} \quad (i=1,\ 2) \tag{8.3}$$

некомпланарные и потому могут быть приняты за векторы локального репера. Метрический тензор поверхности задается формулами

$$g_{ij}=\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j. \tag{8.4}$$

Плоскость, в которой лежат векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, называется касательной плоскостью поверхности (8.1) в точке M. (Заметим, что касательная плоскость является частным случаем касательного евклидова пространства в точке M риманова пространства $\mathscr{V}_2$.)

Для рассматриваемого случая определитель метрического тензора (8.4) имеет вид

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2. \tag{8.5}$$

Будем считать, что метрическая форма

$$ds^2 = g_{ij} da^i da^j \tag{8.6}$$

является положительно-определенной. В теории поверхностей ее называют *первой квадратичной формой поверхности*. В каждой точке поверхности введем вектор нормали $\vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2. \tag{8.7}$$

Упражнение 8.1. Доказать, что вектор $\vec{n}$ (8.71) единичный, т. е.

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = n^I n_I = 1. \tag{8.8}$$

Упражнение 8.2. Пусть поверхность вращения задается уравнением (рис. 18)

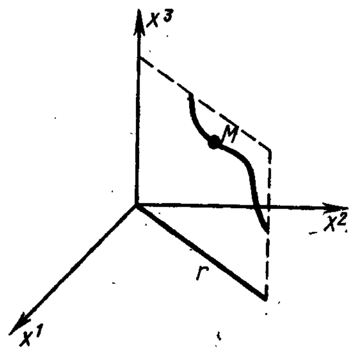

Рис. 18

$$x^3 = f(r). \tag{8.9}$$

Найти метрический тензор этой поверхности и векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{n}$. ●

Рассмотрим какую-либо кривую на поверхиости (8.1). Дифференцируя по длине дуги этой линии, получим единичный вектор касательной

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_i\frac{d\alpha^i}{ds}. \qquad (8.10)$$

Если продифференцировать по длине дуги вектор $\vec{\tau}$, то согласно (5.29) найдем вектор главной нормали кривой

$$k\vec{\nu}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\alpha^j}\frac{\partial\alpha^i}{\partial s}\frac{d\alpha^j}{ds}+\vec{r}_i\frac{d^2\alpha^i}{ds^2}. \qquad (8.11)$$

Спроектируем вектор $k\vec{\nu}$ на нормаль к поверхности.

При этом положим $\cos\theta=\vec{\nu}\cdot\vec{n}$. (8.12)

Величину $k_n=k\cos\theta$ (8.13)

назовем *нормальной кривизной линии* на поверхности. Тогда из (8.11)

$$k_n=k\vec{\nu}\cdot\vec{n}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{n}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\vec{n}. \qquad (8.14)$$

Обозначим теперь

$$\vec{r}_{ij}\equiv\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\alpha^j},\quad \vec{n}_i\equiv\frac{\partial\vec{n}}{\partial\alpha^i}. \qquad (8.15)$$

Тогда, учитывая, что

$$d^2\vec{r}=\vec{r}_{ij}d\alpha^i d\alpha^j+\vec{r}_i d^2\alpha^i, \qquad (8.16)$$

получим

$$d^2\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}d\alpha^i d\alpha^j. \qquad (8.17)$$

Определим тензор второй квадратичной формы поверхности b_{ij} следующим образом:

$$b_{ij}=\vec{r}_{ij}\cdot\vec{n}=-\vec{r}_i\cdot\vec{n}_j. \qquad (8.18)$$

Квадратичная форма

$$\varphi_2\equiv b_{ij}d\alpha^i d\alpha^j \qquad (8.19)$$

называется второй квадратичной формой поверхности.

Из (8.14) вытекает, что нормальная кривизна линии на поверхности определяется отношением второй и первой квадратичных форм поверхности

$$k_n = \frac{\varphi_2}{ds^2}. \qquad (8.20)$$

Формулы (8.20) можно переписать в виде

$$(b_{ij} - k_n g_{ij})\, da^i da^j = 0 \qquad (8.21)$$

Упражнение 8.3. Доказать, что все линии на поверхности, проходящие через точку M и имеющие общую касательиую, имеют одну и ту же нормальную кривизну k_n.

Упражнение 8.4. Доказать, что все линии на поверхиости, имеющие в точке M заданную соприкасающуюся плоскость (см. § 5), имеют в этой точке одну и ту же кривизну k.

Упражнение 8.5. Геодезической кривизной некоторой кривой на поверхности в точке M называется величина k_g

$$k_g = k \sin\theta. \qquad (8.22)$$

Доказать, что

$$k_g = k\vec{\nu}\cdot\vec{\tau}, \qquad (8.23)$$

и найти выражение для геодезической кривизны через векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_{ij}$.

Упражнение 8.6. Радиусом кривизны ρ, радиусом нормальной кривизны ρ_n и радиусом геодезической кривизны ρ_g называются соответственно величины, определяющиеся выражениями

$$k = \frac{1}{\rho}, \quad k_n = \frac{1}{\rho_n}, \quad k_g = \frac{1}{\rho_g}. \qquad (8.24)$$

Доказать, что

$$\rho^2 = \rho_n^2 + \rho_g^2. \qquad (8.25)$$

Упражнение 8.7. Центром кривизны называется точка, удаленная по нормали от точки M на расстояние радиуса кривизны. Пусть через вектор $\vec{\tau}$ в точке M проходят две плоскости: нормальная, т. е. проходящая через $\vec{n}$, и наклонная, образующая с первой угол θ. Доказать, что центр кривизны наклонного сечения является проекцией на плоскость сечения центра кривизны нормального сечения с той же касательной (теорема Менье). ●

Тензор b_{ij}, как следует из (8.18), является симметричным тензором второго ранга. Поэтому для него справедливы утверждения, доказанные в гл. 3. (При этом следует учесть, что тензор b_{ij} определен в двумерном пространстве.) В частности, тензор b_{ij} имеет два взаимно ортогональных главных направления, которым соответствуют главные значения $b_{(1)}$ и $b_{(2)}$ и которые называются главными направлениями поверхности.

Так как вектор $\vec{\tau}$ является единичным вектором

$$\tau^i = \frac{d\alpha^i}{ds}, \quad g_{ij}\tau^i\tau^j = 1, \tag{8.26}$$

то из (8.21) следует, что

$$k_n = b_{ij}\tau^i\tau^j, \tag{8.27}$$

т. е. значение второй квадратичной формы, соответствующее значению единичного вектора, равно нормальной кривизне, отвечающей направлению этого вектора. Если $\vec{\tau}_{(1)}$, $\vec{\tau}_{(2)}$ — единичные векторы, характеризующие главные направления тензора b_{ij}, то из (8.21) следует, что главные значения тензора b_{ij} равны значениям нормальной кривизны, отвечающим главным направлениям поверхности

$$\begin{aligned} k_{(1)} &\equiv \frac{1}{\rho_{(1)}} = b_{ij}\tau^i_{(1)}\tau^j_{(1)}, \\ k_{(2)} &\equiv \frac{1}{\rho_{(2)}} = b_{ij}\tau^i_{(2)}\tau^j_{(2)}. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Эти значения $k_{(1)}$ и $k_{(2)}$ называются *главными кривизнами поверхности* в данной точке.

Упражнение 8.8. Доказать, что формула Гамильтона — Кели для симметричного двумерного тензора второго ранга $\underset{\sim}{a}$ дает

$$\underset{\sim}{a}^2 = \underset{\sim}{a}\langle a\rangle - \underset{\sim}{\mathcal{I}}\,|a|. \quad \bullet \tag{8.29}$$

Таким образом, b_{ij}, как и всякий двумерный симметричный тензор второго ранга, имеет два независимых инварианта. Чаще всего за эти инварианты принимаются величины

$$2H = b_{ij}g^{ij} = b_i{}^i = k_{(1)} + k_{(2)}, \tag{8.30}$$

$$K = \frac{1}{2g}\,\epsilon^{ij}\epsilon^{kl}b_{ik}b_{jl} = \det|b^i_j| = k_{(1)}k_{(2)}, \tag{8.31}$$

называемые *средней кривизной* (H) и полной, или Гауссовой, кривизной (K).

Тензорная поверхность Коши для тензора b_{ij} называется *индикатрисой Дюпена.* Ее каноническое уравнение имеет вид

$$k_{(1)}(x^1)^2+k_{(2)}(x^2)^2=\pm 1. \tag{8.32}$$

Упражнение 8.9. Доказать формулу (Эйлера)

$$k_n=k_{(1)}\cos^2\varphi+k_{(2)}\sin^2\varphi, \tag{8.33}$$

где φ — угол между данным направлением и первым из главных направлений. ●

Как и всякая кривая второго порядка, индикатриса Дюпена может принадлежать к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу. В связи с этим точки поверхностей распределяются на три соответствующих класса. Чтобы определить, к какому классу принадлежит данная точка поверхности, достаточно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы φ_2 в этой точке и составить дискриминант

$$\Delta=b_{11}b_{22}-b_{12}^2. \tag{8.34}$$

Если в данной точке $\Delta>0$, то точка эллиптическая; если $\Delta<0$, то гиперболическая; если $\Delta=0$, то параболическая. Если же в данной точке все $b_{ij}=0$, то точка называется *точкой уплощения.*

Упражнение 8.10. Доказать, что если в точке M $K>0$, то точка M — эллиптическая; если $K<0$, то гиперболическая; если $K=0$, то параболическая. ●

Линией кривизны называется линия, которая в каждой точке касается главного направления поверхности.

Упражнение 8.11. Доказать, что через каждую точку поверхности проходят две линии кривизны.

Упражнение 8.12. Доказать, что на каждой поверхности (кроме сферы) есть два семейства линий кривизны. Они всегда действительны и их можно выбрать в качестве ортогональной системы координат на поверхности.

Упражнение 8.13. Доказать: чтобы поверхность была отнесена к линиям кривизны, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{12}=0, \quad b_{12}=0. \; ● \tag{8.35}$$

Асимптотической линией на поверхности называется линия, нормальная кривизна которой в каждой ее точке равна нулю. Из (8.21) следует, что уравнение асимптотической линии имеет вид

$$b_{ij}d\alpha^i d\alpha^j=0. \tag{8.36}$$

Упражнение 8.14. Доказать, что асимптотическая линия, состоящая из параболических точек или точек уплощения, является плоской кривой. ●

Разложим векторы $\vec{r}_{ij}$ по векторам локальиого репера $\vec{r}_i$ и $\vec{n}$:

$$\vec{r}_{ij}=G^k_{ij}\vec{r}_k+h_{ij}\vec{n}. \tag{8.37}$$

Для того чтобы определить коэффициенты разложения $G_{ij}{}^k$ и h_{ij}, умножим скалярио (8.37) на $\vec{r}_l$. Учитывая (8.18), получим

$$h_{ij}=b_{ij}. \tag{8.38}$$

Умножим теперь (8.37) скалярно на $\vec{r}_l$ и учтем очевидное равеиство

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}=\vec{r}_{il}\cdot\vec{r}_j+\vec{r}_i\cdot\vec{r}_{jl}. \tag{8.39}$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}=G^k_{il}g_{kj}+G^k_{jl}g_{ik}. \tag{8.40}$$

Переставляя индексы i, j, l в (8.40) круговым порядком, получим

$$G^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial\alpha^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial\alpha^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}\right). \tag{8.41}$$

Сравнивая (8.41) с (3.17), находим

$$G^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}. \tag{8.42}$$

Далее, разлагая векторы $\vec{n}_i$ по векторам локального репера и учитывая, что векторы $\vec{n}_i$ ортогональны вектору $\vec{n}$ (см. упр. 2.6), имеем

$$\vec{n}_i=a_i{}^j\vec{r}_j. \tag{8.43}$$

Умиожая (8.43) скалярно на $\vec{r}_k$ и учитывая (8.18), получим

$$a_i^{\ j} = -b_{ik}g^{kj} = -b_i^{\ j}. \qquad (8.44)$$

Подставим теперь (8.38), (8.42) в (8.37), а (8.44) в (8.43)

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\vec{r}_k + b_{ij}\vec{n}, \qquad (8.45)$$

$$\vec{n}_i = -b^j_i\vec{r}_j. \qquad (8.46)$$

Формулы (8.45) и (8.46) носят название *деривационных уравнений*. Заметим, что формулу (8.45) можно переписать, используя определение ковариантиой производной, в виде

$$\vec{r}_{,ij} = b_{ij}\vec{n}. \qquad (8.47)$$

Для иахождения условий интегрируемости дифференциальных уравнений (8.45) и (8.46) приравняем нулю внешние дифференциалы

$$D d\vec{r}_i = 0, \quad D d\vec{n} = 0. \qquad (8.48)$$

Следствием уравнений (8.48) являются уравнения

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial\alpha^j\,\partial\alpha^k}\,d\alpha^j \wedge d\alpha^k = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{n}}{\partial\alpha^i\,\partial\alpha^j}\,d\alpha^i \wedge d\alpha^j = 0. \quad (8.49)$$

Отсюда из первого уравнения (8.49)

$$\left\{\left(\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial\alpha^m} + \Gamma^n_{ij}\Gamma^k_{nm} - b_{ij}b_{mn}g^{nk}\right)\vec{r}_k + \right.$$

$$\left. + \left(\Gamma^k_{ij}b_{km} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial\alpha^m}\right)\vec{n}\right\}_{[jm]} = 0. \qquad (8.50)$$

Но так как векторы $\vec{r}_k$ и $\vec{n}$ — линейно независимые, то из (8.50) следует

$$b_{i[j}b_{m]n}g^{nk} = R_{mji}^{\ \ \ \ k}, \qquad (8.51)$$

$$b_{i[j}b_{m]n} = R_{mjin},$$

$$\left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial\alpha^m} + \Gamma^k_{ij}b_{mk}\right]_{[jm]} = 0. \qquad (8.52)$$

Формулу (8.52) можно перепнсать в виде

$$b_{i[j,m]} = 0. \qquad (8.53)$$

Как уже отмечалось, тензор Римаиа R_{mjin} в двумерном пространстве имеет всего одну независимую компоненту, например R_{1212}. Поэтому уравнения (8.51) можно записать в виде

$$b_{12}{}^2 - b_{11}b_{22} = R_{1212}, \tag{8.54}$$

где

$$R_{1212} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(\alpha^1)^2} + \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(\alpha^2)^2} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\alpha^1\,\partial\alpha^2}\right) + \\ + g^{kq}(\Gamma_{11,k}\Gamma_{22,q} - \Gamma_{12,k}\Gamma_{12,q}). \tag{8.55}$$

Формулы (8.53) и (8.54) носят название формул Петерсона— Кодацци.

Упражнение 8.15. Показать, что из второго уравнения (8.49) следуют уравнения (8.53), (8.54).

Упражнение 8.16. Показать, что

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}. \tag{8.56}$$

Упражнение 8.17. Доказать, что

$$b_{ij}b^{ij} = b_{ij}g^{ij} - 2\frac{\det|b_{ij}|}{g}. \tag{8.57}$$

Упражнение 8.18. Доказать, что линии, для которых в каждой точке геодезическая кривизна $k_g = 0$, являются геодезическими линиями.

Упражнение 8.19. Пусть определена тройка векторов

$$\vec{P}^i = T^{ij}\vec{r}_j + Q^i\vec{n}, \tag{8.58}$$

где T^{ij} — компоненты некоторого тензора, а Q^i — компоненты вектора. Доказать, что уравнение

$$\vec{P}^i{}_{,i} = 0 \tag{8.59}$$

эквивалентно системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} T^{ij}_{.,i} - Q^i b^j_i &= 0, \\ Q^i_{,i} + T^{ij}b_{ij} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

Упражнение 8.20. Пусть определена тройка векторов

$$\vec{M}^i = \vec{n} \times M^{ij}\vec{r}_j, \tag{8.61}$$

где M^{ij} — компоненты некоторого тензора. Доказать, что уравнение

$$\vec{M}^i_{,i} + \vec{r}_i \times \vec{P}^i = 0 \tag{8.62}$$

(где векторы $\vec{P}^i$ определены в упр. 8.19) эквивалентио системе

$$\left.\begin{aligned} M^{ij}_{,i} - Q^j = 0, \\ \epsilon_{ij}(M^{ki}b^j_k + T^{ij}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

Упражнение 8.21. Доказать справедливость формулы

$$\oint_L a^i \mu_i \, ds = \int_\Sigma a^i_{,i} \, d\Sigma, \tag{8.64}$$

где L — замкнутый контур, охватывающий поверхность Σ, a^i — контравариантные компоненты двумерного вектора $\vec{a}$, а

$$\mu_i = -\sqrt{g}\, \epsilon_{ij} \frac{da^j}{ds} \tag{8.65}$$

компоненты вектора, нормального в данной точке к контуру L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
3. Ильюшин А. А. Пластичность (основы общей математической теории). М.: Изд-во АН СССР, 1963.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
5. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962.
6. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
7. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
8. Новиков С. П. Лекции по дифференциальной геометрии, ч. I—II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
9. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
10. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
11. Сокольников И. С. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.
12. Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974.
13. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
14. Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. Toronto, 1959.
15. Фиников С. П. Дифференциальная геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961.

НЕКОТОРЫЕ ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

К главе 1

Глава носит характер введения в тензорное исчисление. Считается, что читатель знаком с понятиями двумерного и трехмерного евклидова пространства хотя бы из курса аналитической геометрии. Основная цель главы — как можно быстрее познакомить читателя с тензорной символикой. Уже в § 2 дается определение ковариантной производной, очень важного понятия тензорного анализа. Материала, изложенного в этой главе, вполне достаточно, чтобы без труда понимать тензорный язык современных курсов по основам аналитической механики, механики сплошной среды, теории упругости, гидроаэромеханики. Содержание первой главы по существу соответствует приложениям по тензорному анализу, имеющимся во многих книгах. Например,

1.1. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

Хорошим введением в тензорный анализ является книга

1.2. Гохман Э. Введение в тензорный анализ. Харьков: 1935.
С основами теории групп можно ознакомиться по книге
1.3. Курош А. Г. Теория групп. М.: Гостехиздат, 1953.

К главе 2

Если в первой главе было дано «геометрическое» определение тензора, то во второй главе рассматривается его «алгебраическая» трактовка. Более полное разъяснение структуры пространства читатель найдет в книгах:

2.1. Курош А. Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
2.2. Зайцев Г. А. Алгебраические проблемы математической и теоретической физики. М.: Наука, 1974.
Вопросам алгебраической трактовки тензорного аппарата посвящена книга
2.3. Вакуленко А. А. Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972.
С методом внешних форм Картана и его приложениями можно ознакомиться по книгам
2.4. Ефимов Н. В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977.
2.5. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
2.6. Фиников С. П. Метод внешних форм в дифференциальной геометрии. М.—Л.: Гостехиздат, 1948.

К главе 3

В последнее врмя широкое распространение получила «безындексная» форма записи тензорных величин. С изложением тензорной алгебры и тензорного анализа можно познакомиться, например, по приложениям к книге

3.1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

К главе 4

В основе теории тензорных функций лежит классическая теория инвариантов, изложенная, например, в книгах

4.1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1948.
4.2. Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.—Л.: ГТТИ, 1948.
4.3. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Физматгиз, 1958.
С современным состоянием теории инвариантов можно познакомиться по книге
4.4. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
Теорема о построении тензорного базиса для тензорной функции произвольного строения доказана в работе.
4.5. Лохин В. В. Нелинейные тензорные функции в пространстве Минковского. — В кн.: Научные труды Ин-та механики, № 31. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974, с. 6—66.

Для всех 32 классов у кристаллов и всех 7 тяпов текстур дано фактическое построеиие теизориого базиса в работе.
4.6. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелииейиые теизорные функции от нескольких теизориых аргумеитов. — ПММ, 1963, т. 27, № 3, с. 393—417.
Эта работа приведена полностью в внде добавлеияя к кииге
4.7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
Результаты этой же работы оформлены в виде справочиого руководства
4.8. Малолеткии Г. Н., Фомин В. Л. Тензорные базисы в кристаллофизике. Л.: Изд-во Леиингр. ун-та, 1972.
Использоваиие спектральиого разложеиии тензоров второго раига для построеиия иелииейных тензориых аиизотропных фуикций даио в работе
4.9. Победря Б. Е. Деформациониая теория пластичиости анизотропиых сред. — ПММ, 1984, с. 48. № 1, с. 29—37, а теизоров четвертого ранга при построеиин линейных тензориых функций в работе
4.10. Рыхлевский Я. «CEIIINOSSSTTUV». Математическая структура упругих тел. Препринт № 217. М.: Ии-т проблем механики АН СССР, 1983.

К главе 5

Вопросам теизориого аиализа в иеевклидовых простраиствах посвящеиа большая литература. Укажем, иапример, на киигу

5.1. Петров А. З. Простраиства Эйиштейиа. М.: Физматгиз, 1961.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА

Всякий симметричный тензор второго ранга $\underset{\sim}{b}$ может быть представлен в виде суммы n $(n \leqslant 6)$ взаимно ортогональных p-тензоров, принадлежащих инвариантным подпространствам относительно подгруппы G полной ортогональной группы I:

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{ij}^{(\alpha)}. \tag{1}$$

Для p-тензоров в прямоугольной декартовой системе координат должны выполняться условия

$$\frac{p_{ij}^{(\alpha)} p_{ij}^{(\beta)}}{I_\alpha I_\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle \alpha,\ \beta = 1, \ldots, n \rangle.$$

Инвариант p-тензора I_α называется линейным, если его можно представить в виде

$$p_{ij}^{(\varkappa)} = \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa} I_\varkappa, \quad \langle \varkappa = 1, \ldots, m \rangle; \ m \leqslant 3, \tag{2}$$

где $a_{ij}{}^{(\varkappa)}$ — компоненты симметричного тензора $\underset{\sim}{a}^{(\varkappa)}$, инвариантного относительно группы G, причем можно всегда потребовать выполнения условий:

$$\frac{a_{ij}^{(\varkappa)} a_{ij}^{(\rho)}}{a_\varkappa a_\rho} = \delta_{\varkappa\rho}, \quad \langle \varkappa,\ \rho = 1, \ldots, m \rangle,$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{m} a_{ij}^{(\varkappa)} = \delta_{ij}.$$

Из определения (2) следует, что линейный инвариант может быть определен сверткой

$$I_\varkappa = p_{ij}^{(\varkappa)} \frac{a_{ij}^{(\varkappa)}}{a_\varkappa}, \quad \langle \varkappa = 1, \ldots, m \rangle.$$

Рассмотрим три частных случая p-представления произвольного симметричного тензора $\underset{\sim}{b}$, когда тензоры

$$a_{ij}^{(1)}, \ a_{ij}^{(2)}, \ \ldots, \ a_{ij}^{(m)}$$

являются образующими группы G.

1°. Группа G совпадает со всей группой I (изотропия).

В этом случае $m=1$, $n=2$. Поэтому существует только один образующий тензор — единичный и

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{ij};\ a_1=\sqrt{3};\ I_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle;\quad p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\,\delta_{ij}.$$

Второй p-тензор является девиатором тензора $\underset{\sim}{b}$:

$$p_{ij}^{(2)}=\bar{b}_{ij};\ I_2=b_{\text{и}}=(\bar{b}_{ij}\bar{b}_{ij})^{1/2}.$$

Таким образом, в случае изотропии p-разложение (1) есть не что иное, как представление тензора $\underset{\sim}{b}$ в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$b_{ij}=\frac{1}{3}\langle \underset{\sim}{b}\rangle\,\delta_{ij}+\bar{b}_{ij}.$$

2°. Группа G является группой T_3 (трансверсальная изотропия).

В этом случае $m=2$, $n=4$ и образующих тензоров будет два, например

$$a_{ij}^{(1)}=\delta_{i1}\delta_{j1}+\delta_{i2}\delta_{j2};\ a_1=\sqrt{2};\ I_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(b_{11}+b_{22}),$$

$$a_{ij}^{(2)}=\delta_{i3}\delta_{j3};\ a_2=1;\ I_2=b_{33}.$$

Первые два p-тензора, соответствующие линейным инвариантам, будут иметь компоненты:

$$p_{ij}^{(1)}=\frac{1}{2}(b_{11}+b_{12})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad p_{ij}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&b_{33}\end{pmatrix}.$$

Остальные два p-тензора:

$$p_{ij}^{(3)}=\begin{pmatrix}\dfrac{b_{11}-b_{22}}{2}&b_{12}&0\\ b_{21}&\dfrac{b_{22}-b_{11}}{2}&0\\ 0&0&0\end{pmatrix};\quad p_{ij}^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&b_{13}\\0&0&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&0\end{pmatrix}.$$

При этом

$$I_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(b_{11}-b_{22})^2+4b_{12}^2};\quad I_4=\sqrt{2\,(b_{13}^2+b_{23}^2)}.$$

Заметим, что если ось трансверсальной изотропии направлена не по оси Ox_3, а составляет с ней угол φ, то можно ввести вектор $\vec{c}(0,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi)$, характеризующий эту ось. Тогда образующие тензоры примут вид

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{ij} - c_i c_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix},$$

$$a_{ij}^{(2)} = c_i c_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Как изменятся в этом случае остальные формулы, показано на с. 151, 152.

3°. Группа G является группой O (ортотропия). В этом случае $m=3$, $n=4$ и образующих тензоров будет три, например

$$a_{ij}^{(1)} = \delta_{i1}\delta_{j1}; \quad a_{ij}^{(2)} = \delta_{i2}\delta_{j2}; \quad a_{ij}^{(3)} = \delta_{i3}\delta_{j3};$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1; \quad I_1 = b_{11}; \quad I_2 = b_{22}; \quad I_3 = b_{33}.$$

Поэтому p-тензоры, соответствующие линейным инвариантам, будут иметь компоненты:

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Остальные три p-тензора:

$$p_{ij}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_{ij}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$I_4 = \sqrt{2}\,|b_{23}|; \; I_5 = \sqrt{2}\,|b_{13}|; \; I_6 = \sqrt{2}\,|b_{12}|.$$

Главные оси ортотропии могут быть направлены не по осям координат Ox_i, а по осям Ox_i', ориентация которых определяется с помощью углов Эйлера φ_1, φ_2, θ, часто используемых в теоретической механике:

$$x_i = g_{ij}\, x_j'$$

(компоненты матрицы g_{ij} выписаны на с. 46).

Обозначим через OL прямую пересечения плоскостей $Ox_1'x_2'$ и Ox_1x_2 (линия узлов). Тогда углы Эйлера определяются следующим образом.

Первый угол φ_1 (собственного вращения) — между OL и Ox_1, второй φ_2 (угол прецессии) — между Ox_1' и OL и третий θ (угол нутации) — между Ox_3' и Ox_3.

С их помощью можно определить три единичных вектора $c^{(\varkappa)}$ $(g_{\varkappa 1}, g_{\varkappa 2}, g_{\varkappa 3})$ и три образующих тензора

$$a_{ij}^{(\varkappa)} = c_i^{(\varkappa)} c_j^{(\varkappa)}, \; (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Как изменяются остальные формулы этого пункта показано на с. 152, 153 (см. также упражнение 2.10 на с. 151).

№ п/п	Название формул	Системы: произвольная	Системы: ортогональная криволинейная
1	Закон перехода от прямоугольной к криволинейной системе координат	$x^i = x^i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$	$x^1 = x^1(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ $x^2 = x^2(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ $x^3 = x^3(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$
2	Координаты локального базиса	$\vec{e}_i \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^i} \right\}$	$\vec{e}_1 \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^1}, \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^1} \right\}$ $\vec{e}_2 \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^2} \right\}$ $\vec{e}_3 \left\{ \frac{\partial x^1}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial x^2}{\partial \alpha^3}, \frac{\partial x^3}{\partial \alpha^3} \right\}$
3	Элемент длины	$ds^2 = g_{ij}\, d\alpha^i\, d\alpha^j$	$ds^2 = (H_1\, d\alpha^1)^2 +$ $+ (H_2\, d\alpha^2)^2 + (H_3\, d\alpha^3)^2$
4	Компоненты фундаментальной матрицы g_{ij} *	$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$	$g_{11} = H_1^2,\ g_{22} = H_2^2,$ $g_{33} = H_3^2$
5	Определитель фундаментальной матрицы g	$g = \det \lvert g_{ij} \rvert$	$g = (H_1 H_2 H_3)^2$
6	Компоненты матрицы g^{ij} *	$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}$	$g^{11} = \frac{1}{H_1^2},\ g^{22} = \frac{1}{H_2^2},$ $g^{33} = \frac{1}{H_3^2}$

* Остальные компоненты равны нулю.

системах координат

координат

прямоугольная	цилиндрическая	сферическая
$x^1 = \alpha^1$ $x^2 = \alpha^2$ $x^3 = \alpha^3$	$x^1 = \alpha^1 \cos \alpha^2$ $x^2 = \alpha^1 \sin \alpha^2$ $x^3 = \alpha^3$	$x^1 = \alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^3$ $x^2 = \alpha^1 \sin \alpha^2 \sin \alpha^3$ $x^3 = \alpha^1 \cos \alpha^2$
$\vec{e}_1 (1, 0, 0)$ $\vec{e}_2 (0, 1, 0)$ $\vec{e}_3 (0, 0, 1)$	$\vec{e}_1 \{\cos \alpha^2, \sin \alpha^2, 0\}$ $\vec{e}_2 \{-\alpha^1 \sin \alpha^2, \alpha^1 \cos \alpha^2, 0\}$ $\vec{e}_3 \{0, 0, 1\}$	$\vec{e}_1 \{\sin \alpha^2 \cos \alpha^3, \sin \alpha^2 \times$ $\times \sin \alpha^3, \cos \alpha^2\}$ $\vec{e}_2 \{\alpha^1 \cos \alpha^2 \cos \alpha^3,$ $\alpha^1 \cos \alpha^2 \sin \alpha^3, -\alpha^1 \sin \alpha^2\}$ $\vec{e}_3 \{-\alpha^1 \sin \alpha^2 \sin \alpha^3,$ $\alpha^1 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2, 0\}$
$ds^2 = (d\alpha^1)^2 +$ $+ (d\alpha^2)^2 +$ $+ (d\alpha^3)^2$	$ds^2 = (d\alpha^1)^2 +$ $+ (\alpha^1 d\alpha^2)^2 +$ $+ (d\alpha^3)^2$	$ds^2 = (d\alpha^1)^2 + (\alpha^1 d\alpha^2)^2 +$ $+ (\alpha^1 \sin \alpha^2 d\alpha^3)^2$
$g_{11} = g_{22} =$ $= g_{33} = 1$	$g_{11} = 1, \; g_{22} = (\alpha^1)^2,$ $g_{33} = 1$	$g_{11} = 1, \; g_{22} = (\alpha^1)^2,$ $g_{33} = (\alpha^1 \sin \alpha^2)^2$
$g = 1$	$g = (\alpha^1)^2$	$g = (\alpha^1)^4 \sin^2 \alpha^2$
$g^{11} = g^{22} =$ $= g^{33} = 1$	$g^{11} = 1, \; g^{22} = \dfrac{1}{(\alpha^1)^2},$ $g^{33} = 1$	$g^{11} = 1, \; g^{22} = \dfrac{1}{(\alpha^1)^2},$ $g^{33} = \dfrac{1}{(\alpha^1 \sin \alpha^2)^2}$

№ п/п	Название формул	Системы	
		произвольная	ортогональная криволинейная
7	Координаты взаимного базиса $\vec{e}^i$	$\vec{e}^i = g^{ij}\vec{e}_j$	$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_1}{H_1^2}$ $\vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_2}{H_2^2}$ $\vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_3}{H_3^2}$
8	Координаты ортонормированного базиса $\vec{k}_i$	—	$\vec{k}_1 = \frac{\vec{e}_1}{H_1}$ $\vec{k}_2 = \frac{\vec{e}_2}{H_2}$ $\vec{k}_2 = \frac{\vec{e}_3}{H_3}$
9	Физические компоненты вектора $\vec{a}$	$a^i_{(\text{ф})} \equiv A^i \equiv A_i = \vec{a}\cdot\vec{k}_i$	$A^\beta = \vec{a}\cdot\vec{k}_\beta = \frac{a_\beta}{H_\beta} =$ $= a^\beta H_\beta$ $\langle\beta = 1,\ 2,\ 3\rangle$
10	Символы Кристоффеля 1-го рода *	$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial\alpha^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial\alpha^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^k}\right)$	$\Gamma_{\beta\beta,\beta} = H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\beta}$, $\Gamma_{\beta\gamma,\beta} = -\Gamma_{\beta\beta,\gamma} =$ $= H_\beta\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha^\gamma}$ $\langle\beta\neq\gamma;\ \beta=\gamma=1,\ 2,\ 3\rangle$

* Остальные компоненты равны нулю.

координат		
прямоугольная	цилиндрическая	сферическая
$\vec{e}^1\{1, 0, 0\}$ $\vec{e}^2\{0, 1, 0\}$ $\vec{e}^3\{0, 0, 1\}$	$\vec{e}^1\{\cos\alpha^2, \sin\alpha^2, 0\}$ $\vec{e}^2\left\{-\frac{\sin\alpha^2}{\alpha^1}, \frac{\cos\alpha^2}{\alpha^1}, 0\right\}$ $\vec{e}^3\{0, 0, 1\}$	$\vec{e}^1\{\sin\alpha^2\cos\alpha^3, \sin\alpha^2 \times$ $\times \sin\alpha^3, \cos\alpha^2\}$ $\vec{e}^2\left\{\frac{\cos\alpha^2\cos\alpha^3}{\alpha^1},\right.$ $\left.\frac{\cos\alpha^2\sin\alpha^3}{\alpha^1}, -\frac{\sin\alpha^2}{\alpha^1}\right\}$, $\vec{e}^3\left\{-\frac{\sin\alpha^3}{\alpha^1\sin\alpha^2},\right.$ $\left.\frac{\cos\alpha^3}{\alpha^1\sin\alpha^2}, 0\right\}$
$\vec{k}_1\{1, 0, 0\}$ $\vec{k}_2\{0, 1, 0\}$ $\vec{k}_3\{0, 0, 1\}$	$\vec{k}_1\{\cos\alpha^2, \sin\alpha^2, 0\}$ $\vec{k}_2\{-\sin\alpha^2, \cos\alpha^2, 0\}$ $\vec{k}_3\{0, 0, 1\}$	$\vec{k}_1\{\sin\alpha^2\cos\alpha^3, \sin\alpha^2 \times$ $\times \sin\alpha^3, \cos\alpha^2\}$ $\vec{k}_2\{\cos\alpha^2, \cos\alpha^3, \cos\alpha^2 \times$ $\times \sin\alpha^3, -\sin\alpha^2\}$ $\vec{k}_3\{-\sin\alpha^3, \cos\alpha^3, 0\}$
$A^1 = a^1$ $A^2 = a^2$ $A^3 = a^3$	$A^1 = \vec{a}\cdot\vec{k}_1 = a^1$ $A^2 = \vec{a}\cdot\vec{k}_2 = a^2\alpha^1$ $A^3 = \vec{a}\cdot\vec{k}_3 = a^3$	$A^1 = \vec{a}\cdot\vec{k}_1 = a^1$ $A^2 = \vec{a}\cdot\vec{k}^2 = a^2\alpha^1$ $A^3 = \vec{a}\cdot\vec{k}_3 = a^3\alpha^1\sin\alpha^2$
	$\Gamma_{12,2} = -\Gamma_{22,1} = \alpha^1$	$\Gamma_{21,2} = -\Gamma_{22,1} = \alpha^1$ $\Gamma_{31,3} = -\Gamma_{33,1} =$ $= \alpha^1\sin^2\alpha^2$ $\Gamma_{33,3} = -\Gamma_{33,2} =$ $= (\alpha^1)^2\sin\alpha^2\cos\alpha^3$

№ п/п	Название формул	Системы: Произвольная	Системы: ортогональная криволинейная
11	Символы Кристоффеля 2-го рода*	$\Gamma_{ij}^{k} = g^{kl}\Gamma_{ij,l}$	$\Gamma_{\beta\beta}^{\beta} = \frac{1}{H_\beta} = \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\beta}$ $\Gamma_{\beta\gamma}^{\nu} = -\frac{H_\beta}{H_\gamma^2} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\gamma}$ $\Gamma_{\beta\gamma}^{\beta} = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha^\gamma}$ $\langle \beta = \gamma;\ \gamma = 1, 2, 3 \rangle$
12	Элемент объема	$dV = \sqrt{g}\, d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$	$dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$
13	Градиент скаляра φ	$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla_i \varphi \vec{e}^{\,i}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^1} \frac{\vec{k}_1}{H_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^2} \frac{\vec{k}_2}{H_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^3} \frac{\vec{k}_3}{H_3}$
14	Дивергенции вектора $\vec{a}$	$\mathrm{div}\,\vec{a} = \nabla_i a^i$	$\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha^1} (H_2 H_3 A^1) + \frac{\partial}{\partial \alpha^2} (H_1 H_3 A^2) + \frac{\partial}{\partial \alpha^3} (H_1 H_2 A^3) \right\} / H_1 H_2 H_3$

* Остальные компоненты равны нулю

координат

прямоугольная	цилиндрическая	сферическая
	$\Gamma^1_{22} = -\alpha^1$ $\Gamma^2_{21} = \frac{1}{\alpha^1}$	$\Gamma^1_{22} = -\alpha^1$ $\Gamma^1_{33} = -\alpha^1 \sin^2\alpha^2$ $\Gamma^2_{33} = -\sin\alpha^2\cos\alpha^2$ $\Gamma^2_{21} = \frac{1}{\alpha^1}$ $\Gamma^3_{31} = \frac{1}{\alpha^1}$ $\Gamma^3_{32} = \operatorname{ctg}\alpha^2$
$dV = dx^1 dx^2 dx^3$	$dV = \alpha^1 d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$	$dV = (\alpha^1)^2 \sin^2 d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$
$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\vec{k}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\vec{k}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\vec{k}_3$	$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\vec{k}_1 + \frac{1}{\alpha^1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\vec{k}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^3}\vec{k}_3$	$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\vec{k}_1 + \frac{1}{\alpha^1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^3}\vec{k}_2 - \frac{1}{\alpha^1\sin\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^3}\vec{k}_3$
$\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}$	$\frac{1}{\alpha^1}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}(\alpha^1 A^1) + \frac{\partial A^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left(\alpha^1\frac{\partial A^3}{\partial\alpha^3}\right)\right\}$	$\frac{1}{(\alpha^1)^2\sin\alpha^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}[(\alpha^1)^2 \times \sin\alpha^2 A^1] + \frac{\partial}{\partial\alpha^2}(\alpha^1\sin\alpha^2 A^2) + \frac{\partial}{\partial\alpha^3}(\alpha^1 A^3)\right\}$

№ п/п	Название формул	Системы	
		произвольная	ортогональная криволинейная
15	Ротор вектора $\vec{a}$	$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, e^{ijk}\nabla_i a_j \vec{e}_k$	$\frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{k}_1 & H_2\vec{k}_2 & H_3\vec{k}_3 \\ \frac{\partial}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial}{\partial\alpha^3} \\ H_1A^1 & H_2A^2 & H_3A^3 \end{vmatrix}$
16	Лапласиан скаляра φ	$\Delta\varphi = g^{ij}\Delta_i\Delta_j\varphi$	$\frac{1}{H_1H_2H_3}\times \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_3}\right)\right\}$
17	Лапласиан вектора $\vec{a}$	[1] $\Delta^*\vec{a} = g^{il}\nabla_l\nabla_j a_k \vec{e}^k$	

[1] Символ Δ^* обозначает оператор Лапласа вектора и тензора,

Продолжение

координат		
прямоугольная	цилиндрическая	сферическая
$\begin{vmatrix} \vec{k}_1 & \vec{k}_2 & \vec{k}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\alpha^1}\begin{vmatrix} \vec{k}_1 & \alpha^1\vec{k}_2 & \vec{k}_3 \\ \frac{\partial}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial}{\partial\alpha^3} \\ A^1 & \alpha^1 A^2 & A^3 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{(\alpha^1)^2\sin\alpha^2}\times \begin{vmatrix} \vec{k}_1 & \alpha^1\vec{k}_2 & \alpha^1\sin\alpha^2\,\vec{k}_3 \\ \frac{\partial}{\partial\alpha^1} & \frac{\partial}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial}{\partial\alpha^3} \\ A^1 & \alpha^1 A^2 & \alpha^1\sin\alpha^2\, A^3 \end{vmatrix}$
$\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^1)^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^2)^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(x^3)^2}$	$\frac{1}{\alpha^1}\left\{\frac{1}{\partial\alpha^1}\left(\alpha^1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha^1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left(\alpha^1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right)\right\}$	$\frac{1}{(\alpha^1)^2\sin\alpha^2}\times\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha^1}\left[(\alpha^1)^2\times\sin\alpha^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\right]+\frac{\partial}{\partial\alpha^2}\left(\sin\alpha^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left(\frac{1}{\sin\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right)\right\}$
$\Delta^*\vec{a}=\Delta\vec{a}$	$\Delta a_1-\frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^2}+\frac{a_2}{(\alpha^1)^4}-\frac{a_1}{(\alpha^1)^2}$ $\Delta a_2-\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^1}+\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha^2}+a_1$ Δa_3	$\Delta a_1-\frac{2}{(\alpha^1)^3\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^2}-\frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^2}-\frac{2a_1}{(\alpha^1)^2}-\frac{2a_2}{(\alpha^1)^2}\operatorname{ctg}\alpha^2$ $\Delta a_2+\frac{2}{(\alpha^1)^2\sin^3\alpha^2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^3}-\frac{a_2}{(\alpha^1)^3\sin^2\alpha^2}\Delta a_3+\frac{2}{\alpha^1}\times\left(\frac{\partial a_1}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^1}\right)+\frac{2}{(\alpha^1)^2}\times\operatorname{ctg}\alpha^2\left(\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial a_2}{\partial\alpha^2}\right)$

а символ Δ — оператор Лапласа скаляра.

№ п/п	Название формул	Системы	
		произвольная	цилиндрическая
18	Лапласиан тензора $\underset{\sim}{a}$ (симметричного)	$\Delta^* a = g^{il}\nabla_i\nabla_j a_{kl}\vec{e}^{\,k}\otimes\vec{e}^{\,l}$	$\Delta a_{11} - \frac{4}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^2} - \frac{2}{(\alpha^1)^2}a_{11} + \frac{2}{(\alpha^1)^4}a_{22}$ $\Delta a_{22} - \frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^1} + \frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{(\alpha^1)^2}a_{22} + 2a_{11}$ Δa_{33} $\Delta a_{12} - \frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^1} - \frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{11}}{\partial a^2} - \frac{5}{(\alpha^1)^2}a_{12}$ $\Delta a_{13} - \frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{(\alpha^1)^2}a_{13}$ $\Delta a_{23} - \frac{2}{a^1}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^1} + \frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha^2}$
		прямоугольная	
		$\Delta^*\underset{\sim}{a} = \Delta\,\underset{\sim}{a}$	

Продолжение

координат

	сферическая	
$\Delta a_{11}-\frac{4}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{11}}{\partial\alpha^2}-\frac{4}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha^3}-\frac{4}{(\alpha^1)^2}a_{11}-\frac{4}{(\alpha^1)^3}\times \operatorname{ctg} a^2 a_{12}+\frac{2}{(\alpha^1)^4}a_{22}+\frac{2}{(\alpha^1)^4\sin^2\alpha^2}a_{33}$	$\Delta a_{12}-\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^1}-\frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^2}-\frac{2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^3}+\frac{2}{\alpha_2}\frac{\partial a_{11}}{\partial\alpha^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha^3}-\frac{5}{(\alpha^1)^2}a_{12}-\frac{2}{(\alpha^1)^2}\operatorname{ctg}\alpha^2 a_{22}+\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^3\sin^2\alpha^2}a_{33}-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha^2}{(\alpha^1)^2}a_{12}$	$-\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^3}a_{23}-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha^2}{(\alpha^1)^2}a_{13}$
$\Delta a_{22}-\frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^1}+\frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^2}-\frac{4\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^3}-\operatorname{ctg}^2\alpha^2\alpha_{22}+\frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha^2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}a_{33}+2a_{11}$	$\Delta a_{12}-\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha_1}-\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha^2}-\frac{2}{(\alpha^1)^3}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^2}-\frac{2}{(\alpha^1)^3\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{32}}{\partial\alpha^2}+\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^2}-\frac{5}{(\alpha^1)^2}a_{13}+\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{11}}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}a_{13}-$	$\Delta a_{23}-\frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^1}-\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{23}}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{13}}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^1}\frac{\partial a_{12}}{\partial\alpha^3}-\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}\frac{\partial a_{33}}{\partial\alpha^3}+\frac{2\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}a_{23}-\frac{3\operatorname{ctg}\alpha^2}{\alpha^1}a_{13}-\frac{3\operatorname{ctg}^2\alpha^2}{(\alpha^1)^2}a_{33}$
$\Delta a_{33}-\frac{4}{\alpha^1}\frac{\partial a_{33}}{\partial\alpha^1}-\frac{4}{(\alpha^1)^2}\operatorname{ctg}\alpha^2\frac{\partial a_{33}}{\partial\alpha^2}+\frac{4}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{12}}{\partial q^2}+\frac{4\operatorname{ctg}\alpha^2}{(\alpha^1)^2}\frac{\partial a_{22}}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{(\alpha^1)^2\sin^2\alpha^2}a_{33}+2\sin^2\alpha^2 a_{11}+\frac{2\cos^2\alpha^2}{(\alpha^1)^2}a_{22}+\frac{4}{\alpha^1}\sin\alpha^2\cos\alpha^2 a_{12}$		

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Борис Ефимович Победря

ЛЕКЦИИ ПО ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

Издание третье, дополненное

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *Р. Д. Солод*
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*

ИБ № 2237

Сдано в набор 04.12.85
Подписано к печати 16.09.86
Л-67406 Формат 84×108/32 Бумага тип. № 3
Гарнитура литературная. Высокая печать
Усл. печ. л. 13,86 Уч.-изд. л. 13,4
Тираж 7500 экз. Заказ 260
Цена 60 коп. Изд. № 3979

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы