Г. ПОЛИА, Г. СЕГЕ

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ИЗ АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ (специальная часть). РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ. ПОЛИНОМЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Перевод с немецкого
Д. А. РАЙКОВА

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE AUS DER ANALYSIS

von

G. PÓLYA und G. SZEGÖ

Professoren an der Stanford University
California, USA.

ZWEITER BAND
FUNKTIONENTHEORIE.
NULLSTELLEN. POLYNOME.
DETERMINANTEN, ZAHLENTHEORIE

Dritte berichtigte Auflage

Springer—Verlag
Berlin · Göttingen · Heidelberg · New York
1964

$П\frac{20203—051}{053(02)-78}23\text{-}78$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1

Максимальный член и центральный индекс, максимум модуля и число нулей

Глава 2

Однолистные конформные отображения

Глава 3

Смешанные задачи

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ

Глава 1

Теорема Ролля и правило Декарта

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Глава 1

Теоретико-числовые функции

Глава 2

Целочисленные полиномы и целозначные фуикции

Глава 3

Теоретико-числовые свойства степенных рядов

Глава 4

Об алгебраических целых числах

Глава 5

Смешанные задачи

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ (приложение)

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В обозначениях и сокращениях мы старались быть возможно более последовательными и по крайней мере в пределах одного параграфа однотипные величины обозначали одинаковыми буквами. Отдельные обозначения, сохраняемые на протяжении одного-двух параграфов, вводятся специальными пояснениями. Независимо от этого значение каждой буквы объясняется заново в каждой задаче, если только нет ссылки на предыдущую задачу. Если задача непосредственно примыкает к предшествующей, то она начинается пометкой «продолжение». Если она примыкает к одной из более ранних задач, то пометка сопровождается номером этой задачи, например «продолжение **286**». В этих двух случаях обозначения заново не разъясняются.

Отделы обозначаются римскими, главы (если это необходимо) — арабскими цифрами. Нумерация задач в каждом отделе новая. Номера задач печатаются жирно. При ссылке на задачу указывается только ее номер, если задача принадлежит тому же отделу; если же задача принадлежит другому отделу, то указывается также номер отдела. Например, мы пишем IV **123**, если не находимся в отделе IV (задач или решений); но мы пишем просто **123** на протяжении всего отдела IV.

Замечания в квадратных скобках [ ] в задачах обозначают всегда указания, а в решениях — цитату (особенно в начале решения) или ссылку на другую задачу, из которой можно использовать для решения отдельные заключения. Замечания иного рода заключены в простые скобки. Цитируя номер задачи, мы имеем в виду как задачу, так и ее решение, обязательно отмечая иные случаи, например: [решение **38**].

Источники, из которых заимствована задача, почти всегда указаны в решении. Если задача ранее уже публиковалась, то это указывается в цитате. Если указывается только фамилия автора без указания литературного источника, то это значит, что задача была нам сообщена в качестве новой. Сокращения названий журналов приняты те же, что и в «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik». Наиболее частые сокращения приводим здесь:

Acta Math. — Acta Mathematica.

Arch. d. Math. u. Phys. — Archiv der Mathematik und Physik.

C. R. — Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris.

Deutsche Math.-Ver. — Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Gött. Nachr. — Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

J. für Math. — Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Proc. Lond. M. S. — Proceedings of the London Mathematical Society.

Math. Ann. — Mathematische Annalen.

Math. Zeitschr. — Mathematische Zeitschrift.

Nouv. Ann. — Nouvelles Annales de mathématiques.

Rom. Acc. L. Rend. — Atti della Reale Accademia dei Lincei, Roma.

S. M. F. Bull. — Bulletin de la Société mathématiqe de France.

Следующие учебники цитируются наиболее часто, а потому только по фамилиям авторов (например, Cesàro, Hecke и т. д.):

E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904 *).

E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, Akademische Verlagsbuchhandlung, 1923 **).

A. Hurwitz-R. Courant, Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Geometrische Funktionentheorie. Berlin, J. Springer, 1922 ***).

K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, изд. 2-е, Berlin, J. Springer, 1924.

G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, Veit & Co, 1909.

Далее особо упомянем следующие обозначения:

$a_n \to a$ означает: a_n стремится к a (при $n \to \infty$).

$a_n \sim b_n$ (читать: a_n асимптотически равно b_n) означает: $b_n \neq 0$ при достаточно большом n и $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ (при $n \to \infty$).

$O(a_n)$, соотв. $o(a_n)$, $a_n > 0$, означает величину, отношение которой к a_n остается ограниченным или соответственно стремится к нулю (при $n \to \infty$).

Аналогичные обозначения употребляются и в других предельных переходах, отличных от $n \to \infty$.

$x \to a+0$, соответственно $x \to a-0$, означает, что x стремится к a справа или соответственно слева.

$\exp x = e^x$, где e — основание натуральных логарифмов.

$\operatorname{Max}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ означает то (или те) из n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которого не превосходят все остальные. Подобное же значение имеет $\operatorname{Min}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Аналогичный смысл имеют $\operatorname{Max} f(x)$, $\operatorname{Min} f(x)$ для вещественной функции, определенной в интервале $[a, b]$, если она имеет в нем максимум или минимум. Если их нет, то эти же знаки для удобства сохранены для обозначения верхней или нижней граней функции $f(x)$. Все это распространяется и на случай комплексного переменного z.

$\operatorname{sgn} x$ означает *символ Кронекера*:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

$[x]$ означает наибольшее целое число, не превышающее числа x. Однако, если это не может вызвать ложного понимания, квадратные скобки без особых указаний употребляются также и в своем обычном смысле.

$\bar{z}$ означает комплексное число, сопряженное с числом z, если только идет речь о комплексных числах.

Определитель с общим элементом $a_{\lambda\mu}$, $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n$, сокращенно обозначается так:

$$|a_{\lambda\mu}|_1^n \quad \text{или} \quad |a_{\lambda\mu}|_{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n} \quad \text{или} \quad |a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \ldots, a_{\lambda n}|_1^n.$$

---

*) Эрнесто Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. I—II, Одесса, 1913 («Матезис»); ч. I, 2-е изд., Л., 1936 (ОНТИ). В дальнейшем ссылки даются на издание 1913 г.

**) Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, Гостехиздат, 1940.

***) А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1936; Р. Курант, Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГТТИ, 1934; А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, «Наука», 1968.

Под *областью* мы понимаем связное множество, которое состоит из одних внутренних точек, под *замкнутой областью* — область, дополненную ее предельными точками.

Под *непрерывной кривой* мы понимаем однозначный и непрерывный образ интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$, т. е. совокупность точек $z = x + iy$ таких, что $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Непрерывная кривая *замкнута*, если $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$. Кривая *не имеет двойных точек*, если из $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$ $(t_1 < t_2)$ необходимо следует $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Кривую без двойных точек мы называем *простой*. Незамкнутую простую непрерывную кривую мы называем *простой дугой*.

Простая замкнутая непрерывная кривая (так называемая *кривая Жордана*) разбивает плоскость на две области, общей границей которых она является.

Контуры интегрирования в криволинейных и комплексных интегралах всегда будут предполагаться непрерывными и спрямляемыми.

ЗАДАЧИ

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

ГЛАВА 1

МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН И ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ИНДЕКС, МАКСИМУМ МОДУЛЯ И ЧИСЛО НУЛЕЙ

Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — комплексные числа, не все равные нулю, и пусть степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

имеет радиус сходимости $R > 0$. Когда $R = \infty$, $f(z)$ называется *целой функцией*. Для всякого r из полузамкнутого интервала $0 \leqslant r < R$ последовательность чисел

$$|a_0|, \ |a_1| r, \ |a_2| r^2, \ \ldots, \ |a_n| r^n, \ \ldots$$

стремится к нулю. Поэтому среди членов этой последовательности есть наибольший, так называемый *максимальный член*, обозначаемый через $\mu(r)$. Таким образом, имеем:

$$|a_n| r^n \leqslant \mu(r)$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, r \geqslant 0$ [I, гл. 3, § 3].

Центральным индексом $\nu(r)$ называется индекс (номер) максимального члена: $\mu(r) = |a_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}$. Если среди чисел $|a_n| r^n$ имеется несколько равных $\mu(r)$, то за $\nu(r)$ принимается наибольший из индексов этих чисел. Здесь предполагается $r > 0$; по поводу $r = 0$ см. 15.

Максимум модуля функции $f(z)$ на окружности $|z| = r$ обозначается через $M(r)$; $M(r)$ служит одновременно максимумом модуля $f(z)$ на всем круге $|z| \leqslant r$ [III 266]. Имеем:

$$|a_n| r^n \leqslant M(r) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, r > 0);$$

равенство достигается только тогда, когда за исключением a_n все коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... равны нулю [III 122].

Число нулей функции $f(z)$ в замкнутом круге $|z| \leq r$ обозначают через $N(r)$; каждый нуль засчитывается соответственно своей кратности.

Указанные обозначения сохраняют силу на протяжении всей главы.

§ 1. Аналогия между $\mu(r)$ и $M(r)$, $\nu(r)$ и $N(r)$

1. Вычислить $\mu(r)$ и $\nu(r)$ для степенного ряда

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

2. Вычислить $M(r)$ и $N(r)$ для

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

3. Вычислить $\mu(r)$ и $\nu(r)$ для

$$\frac{1}{1!}+\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\ldots+\frac{z^n}{(2n+1)!}+\ldots$$

4. Вычислить $M(r)$ и $N(r)$ для

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\frac{1}{1!}-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots+\frac{(-z)^n}{(2n+1)!}+\ldots$$

5. Вычислить $\nu(r)$ для геометрической прогрессии

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

6. Вычислить $N(r)$ для

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

7. Для всякого полинома n-й степени

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n \qquad (a_n\neq 0)$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r)}{\ln r}=\lim_{r\to\infty}\nu(r)=n.$$

8. Для всякого полинома n-й степени

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n \qquad (a_n\neq 0)$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{\ln r}=\lim_{r\to\infty}N(r)=n.$$

9. Для всякой целой трансцендентной функции оба указанных в задаче 7 предела равны бесконечности.

10. Для целой трансцендентной функции первый из указанных в задаче 8 пределов равен бесконечности, второй — не обязательно.

11. Обозначим максимальный член и центральный индекс ряда

$$a_0+a_1z^k+a_2z^{2k}+\ldots+a_nz^{nk}+\ldots \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

соответственно через $\mu_k(r)$ и $\nu_k(r)$. Выразить $\mu_k(r)$ и $\nu_k(r)$ через $\mu_1(r)$ и $\nu_1(r)$.

12. Обозначим максимум модуля и число нулей функции $f(z^k)$ в круге $|z|\leqslant r$ соответственно через $M_k(r)$ и $N_k(r)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Выразить $M_k(r)$ и $N_k(r)$ через $M_1(r)$ и $N_1(r)$.

13. Вычислить $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}$ для степенных рядов

$$1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$1+\frac{2z^2}{2!}+\frac{2^3z^4}{4!}+\frac{2^5z^6}{6!}+\ldots+\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{4}.$$

14. Пусть теперь $M_k(r)$ и $N_k(r)$ обозначают максимум модуля и число нулей в круге $|z|\leqslant r$ для функции $(f(z))^k$ (а не $f(z^k)$, как в задаче 12), $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Показать, что отношение $\dfrac{N_k(r)}{\ln M_k(r)}$ не зависит от k.

15. Для $a_0=a_1=\ldots=a_{q-1}=0$, $a_q\neq 0$ будем считать $\nu(0)=q$. Функция $\nu(r)$ кусочно-постоянна, возрастает в точках разрыва на целые положительные значения и всюду непрерывна справа [I 120].

16. Если $a_0=a_1=\ldots=a_{q-1}=0$, $a_q\neq 0$, то $N(0)=q$. Функция $N(r)$ кусочно-постоянна, возрастает в точках разрыва на целые положительные значения и всюду непрерывна справа.

17. Для $a_0=0$, $0<r_1<r_2<R$ имеем

$$\frac{\mu(r_2)}{\mu(r_1)}\geqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

18. Для $f(0)=0$, $0<r_1<r_2<R$ имеем

$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)}\geqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

19. Функция $\eta=\ln\mu(e^\xi)$ представляется в прямоугольной системе координат ξ, η в виде кривой, не убывающей и не вогнутой снизу. [Рассмотреть совокупность прямых

$$\eta=\ln|a_0|,\quad \eta=\xi+\ln|a_1|,$$
$$\eta=2\xi+\ln|a_2|,\ \ldots,\ \eta=n\xi+\ln|a_n|,\ \ldots,$$

предварительно отбросив не имеющие смысла члены с $a_n=0$. Какую интерпретацию допускают здесь $\mu(r)$ и $\nu(r)$?]

20. Функция $\eta=\ln M(e^\xi)$ представляется в прямоугольной системе координат ξ, η всюду возрастающей и выпуклой снизу кривой, за исключением некоторых полиномов весьма специального вида, для которых кривая вырождается в прямую.

21. Показать, что отношение $\frac{\mu(\alpha r)}{\mu(r)}$, где α — фиксированное число, $0<\alpha<1$, нигде не возрастает при возрастании r.

22. Показать, что отношение $\frac{M(\alpha r)}{M(r)}$, где α — фиксированное число, $0<\alpha<1$, постоянно убывает с возрастанием r.

23. Пусть $R=\infty$. Показать, что отношение $\frac{\mu(\alpha r)}{\mu(r)}$, где α — фиксированное число, $0<\alpha<1$, при $r\to\infty$ стремится к нулю, если степенной ряд не обрывается, и стремится к α^n, если он сводится к полиному n-й степени.

24. Пусть $f(z)$ — целая функция. Показать, что отношение $\frac{M(\alpha r)}{M(r)}$, где α — фиксированное число, $0<\alpha<1$, при $r\to\infty$ стремится к нулю, когда $f(z)$ — трансцендентная функция, и к α^n, когда $f(z)$ — рациональная функция степени n.

Будем обозначать точки разрыва функции $\nu(r)$, расположенные в порядке возрастания, через

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n,\ \ldots;$$
$$\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_q=0,\quad \rho_{q+1}>0,\quad q\geqslant 0,$$

где каждая точка повторена столько раз, сколько единиц содержится в величине соответствующего скачка; в точке $r=0$ за величину скачка принимаем $\nu(0)$ [15]. Эта последовательность может обрываться на конечном числе членов.

Будем обозначать нули функции $f(z)$, расположенные в порядке возрастания их модулей, а при равных модулях — в порядке возрастания аргументов, через

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n,\ \ldots;$$
$$w_1=w_2=\ldots=w_q=0,\quad w_{q+1}\neq 0,\quad q\geqslant 0,$$

где каждый нуль повторен столько раз, сколько единиц содержится в его кратности. Пусть $|w_n|=r_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, т. е.

$$r_1\leqslant r_2\leqslant\ldots\leqslant r_n\leqslant\ldots$$

Эта последовательность может обрываться на конечном числе членов.

Мы будем придерживаться введенных только что обозначений на протяжении всей главы.

25. Если $\rho_n < \rho_{n+1}$, то в полузамкнутом интервале $\rho_n \leqslant r < \rho_{n+1}$

$$\nu(r) = n.$$

26. Если $r_n < r_{n+1}$, то в полузамкнутом интервале $r_n \leqslant r < r_{n+1}$

$$N(r) = n.$$

27. Вычислить числа ρ_n для степенных рядов

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$1 + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \ldots + \frac{z^n}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

28. Вычислить числа r_n для функций

$$e^z + i, \quad \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad \cos z.$$

29. Если чисел ρ_n имеется бесконечное множество, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = R.$$

30. Если чисел r_n имеется бесконечное множество, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = R.$$

31. Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда

$$\mu(r) = \frac{|a_0|\, r^n}{\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n}$$

для $\rho_n \leqslant r \leqslant \rho_{n+1}$.

32. Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда

$$M(r) \geqslant \frac{|f(0)|\, r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \qquad [\text{III } 120].$$

Для каких целых функций здесь может стоять знак равенства?

33. Пусть $a_0 \neq 0$. Показать, что тогда

$$\ln \mu(r) - \ln|a_0| = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, dt.$$

34. Пусть $a_0 \neq 0$. Показать, что тогда

$$\ln M(r) - \ln|f(0)| \geqslant \int_0^r \frac{N(t)}{t}\, dt.$$

35. Для всякой целой функции

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\nu(r)}{\ln r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\mu(r)}{\ln r}.$$

36. Для всякой целой функции

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln N(r)}{\ln r}\leqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

37. Показать, что бесконечный ряд $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\rho_n^{-k}$ и несобственный интеграл

$$\int_1^\infty r^{-k-1}\ln\mu(r)\,dr\qquad(k>0),$$

соответствующие некоторому всюду сходящемуся степенному ряду, одновременно оба сходятся или расходятся.

38. Показать, что если несобственный интеграл

$$\int_1^\infty r^{-k-1}\ln M(r)\,dr\qquad(k>0),$$

соответствующий некоторой целой функции, сходится, то сходится также бесконечный ряд

$$\sum_{n=q+1}^{\infty}r_n^{-k}$$

(обратное неверно!).

39. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho_n)^{k+1}\qquad(k>0)$$

и интеграл

$$\int_0^1(1-t)^{k-1}\ln\mu(t)\,dt,$$

соответствующие некоторому степенному ряду, сходящемуся внутри единичного круга, либо оба сходятся, либо оба расходятся.

40. Показать, что если интеграл

$$\int_0^1(1-t)^{k-1}\ln M(t)\,dt\qquad(k>0),$$

соответствующий некоторой функции, регулярной внутри единичного круга, сходится, то сходится также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-r_n)^{k+1}.$$

§ 2. Дальнейшие свойства функций $\mu(r)$ и $\nu(r)$

41. Наметим на плоскости точки с прямоугольными координатами $(0, -\ln|a_0|)$, $(1, -\ln|a_1|)$, $(2, -\ln|a_2|)$, ..., $(n, -\ln|a_n|)$, ... (отбрасывая те точки, для которых $a_n = 0$) и из каждой точки восставим луч, направленный вертикально вверх. Наименьшая выпуклая область $\mathfrak{K}$, охватывающая все эти лучи, простирается в бесконечность. Проведем опорную прямую (т. е. прямую, на которой лежит по крайней мере одна граничная точка и не содержится ни одной внутренней точки области $\mathfrak{K}$) с угловым коэффициентом $\ln r$. Как можно интерпретировать на полученном чертеже величины $\ln \mu(r)$, $\nu(r)$, $\ln \rho_n$?

42. Пусть m — одно из целых положительных значений, принимаемых функцией $\nu(r)$, $m > \nu(0)$. Показать, что

$$\rho_m = \operatorname{Max}\left(\left|\frac{a_0}{a_m}\right|^{\frac{1}{m}}, \left|\frac{a_1}{a_m}\right|^{\frac{1}{m-1}}, \ldots, \left|\frac{a_{m-1}}{a_m}\right|\right).$$

43. Для того чтобы каждый член степенного ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

играл для некоторого значения $r > 0$ роль максимального члена, необходимо и достаточно выполнение условий

$$0 < \left|\frac{a_0}{a_1}\right| \leqslant \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \leqslant \left|\frac{a_2}{a_3}\right| \leqslant \ldots \leqslant \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant \ldots \quad [31,\ \mathrm{I}\ 117].$$

44. Показать, что центральный индекс $\nu(r)$ степенного ряда

$$1 + e^{\alpha^{-1}1^\alpha} z + e^{\alpha^{-1}2^\alpha} z^2 + \ldots + e^{\alpha^{-1}n^\alpha} z^n + \ldots \quad (0 < \alpha < 1),$$

сходящегося в круге $|z| < 1$, принимает последовательно все значения 0, 1, 2, 3, ... Показать далее, что при $r \to 1$ максимальный член этого ряда удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\mu(r) \sim \exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\left(-\frac{1}{\ln r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right).$$

45. (Продолжение). Показать, что при $r \to 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha^{-1}n^\alpha} r^n \sim \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} [\ln \mu(r)]^{\frac{1}{2}+\frac{1-\alpha}{\alpha}} \mu(r).$$

$\left[\text{Рассмотреть } \int\limits_0^\infty e^{\alpha^{-1}x^\alpha} r^x\,dx;\ \text{II } 208.\right]$

46. Вычислить ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... для всюду сходящегося степенного ряда

$$1 + 1^{-\alpha} z + 2^{-2\alpha} z^2 + \ldots + n^{-n\alpha} z^n + \ldots$$

$(\alpha > 0)$ и показать, что при $r \to +\infty$ его максимальный член удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\mu(r) \sim \exp\left(\alpha e^{-1} r^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

47. (Продолжение.) Показать, что при фиксированном $\alpha > 0$ и $r \to +\infty$

$$1 + 1^{-\alpha} r + 2^{-2\alpha} r^2 + \ldots + n^{-n\alpha} r^n + \ldots \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} [\ln \mu(r)]^{\frac{1}{2}} \mu(r). \quad [\text{II } 209.]$$

§ 3. Связь между $\mu(r)$, $\nu(r)$, $M(r)$, $N(r)$

48. Пусть для некоторой целой функции $f(z)$

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{r} = l.$$

Показать, что вопрос о сходимости ряда

$$f(z) + f'(z) + f''(z) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(z)}{dz^n}$$

решается в положительном или в отрицательном смысле или же остается открытым, смотря по тому, будет ли

$$l < 1, \quad l > 1 \text{ или } l = 1.$$

49. Показать, что если параллелограмм периодов функции Вейерштрасса $\sigma(z)$ представляет собой квадрат со стороной 1, то при $r \to \infty$ имеем

$$N(r) \sim \pi r^2, \quad \ln M(r) \sim \frac{\pi}{2} r^2.$$

[Hurwitz-Courant, стр. 174—175 *).]

50. Определить для целых функций

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad \cos z, \quad \cos^2 z, \quad e^z + i, \quad e^z, \ \sigma(z)$$

пределы отношений

$$\frac{r_n}{\rho_n}, \ \frac{N(r)}{\nu(r)}, \ \frac{N(r)}{\ln M(r)}, \ \frac{\nu(r)}{\ln \mu(r)}, \ \frac{M(r)}{\mu(r)\sqrt{\ln \mu(r)}}, \ \frac{\ln N(r)}{\ln r}$$

при $r \to \infty$ (соответственно $n \to \infty$ для первого); представить результат в виде таблицы. [Для e^z первое и последнее отношения не имеют смысла, для $\sigma(z)$ вычислить лишь третье и последнее, считая параллелограмм периодов квадратом. Последнее отношение

---

*) Гурвиц, стр. 238—240. Гурвиц—Курант, стр. 180—181.

дает показатель сходимости для последовательности нулей (I **113**). Использовать **1—4**, **13**, **27**, **28** и для асимптотического выражения $\mu(r)$ — формулу Стирлинга.]

51. Для всех целых функций

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\mu(r)}{\ln r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

(Что имеет место $\leqslant$, — тривиально.) Общее значение этих двух пределов называют *порядком* целой функции.

52. Порядок целой функции можно также определить как показатель сходимости [I, гл. 3, § 2] последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$

53. Порядок целой функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с положительными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ можно также определить как

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln[rf'(r)f(r)^{-1}]}{\ln r}.$$

54. Для целых функций конечного порядка имеет место более сильное, чем в **51**, соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{\ln\mu(r)}=1.$$

55. Интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty}\mu(t)[M(t)]^{-l}\,dt,$$

где $t_0>0$ и $l>1$, сходится для всякой нерациональной целой функции.

56. Все целые функции обладают следующим свойством: для всякого заданного $\varepsilon>0$ существуют произвольно большие значения r такие, что

$$M(r)<\mu(r)[\ln\mu(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad [45, \text{ I } 122.]$$

57. Целые функции конечного порядка λ обладают следующим свойством, более сильным, чем **56**: для всякого заданного $\varepsilon>0$ существуют произвольно большие значения r такие, что

$$M(r)<(\lambda+\varepsilon)\sqrt{2\pi\ln\mu(r)}\,\mu(r). \qquad [47, \text{ I } 118.]$$

Пусть c — постоянная, $c\neq 0$, q — целое число, $q\geqslant 0$, и $w_1, w_2, w_3, \ldots$ — бесконечная последовательность комплексных чисел,

$$w_1=w_2=\ldots=w_q=0<|w_{q+1}|\leqslant|w_{q+2}|\leqslant|w_{q+3}|\leqslant\ldots,$$

такая, что ряд

$$\frac{1}{|w_{q+1}|}+\frac{1}{|w_{q+2}|}+\frac{1}{|w_{q+3}|}+\ldots$$

сходится. Целая функция вида

$$cz^q\left(1-\frac{z}{w_{q+1}}\right)\left(1-\frac{z}{w_{q+2}}\right)\ldots$$

называется *функцией рода нуль*. Как доказал Адамар, каждая целая функция порядка, меньшего единицы, будет рода нуль. (36, 58, III 332 являются важными опорными пунктами в доказательстве этой теоремы.)

58. Порядок каждой целой функции рода нуль равен показателю сходимости последовательности ее нулей.

59. Для целой функции конечного порядка $\lambda > 0$, центральный индекс которой обладает точками разрыва $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n, \ldots$, распределенными регулярно в смысле II, гл. 4, § 1, $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}$ существует и равен λ. [II 159.]

60. Для целых функций конечного порядка $\lambda > 0$ независимо от особых предположений относительно регулярности имеют место неравенства

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)} \leqslant \lambda \leqslant \limsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}. \qquad \text{[II 160.]}$$

61. Пусть λ, $0<\lambda<1$, — показатель сходимости последовательности $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, регулярной в смысле II, гл. 4, § 1. Показать, что для целой функции рода нуль

$$f(z)=\left(1+\frac{z}{r_1}\right)\left(1+\frac{z}{r_2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{r_n}\right)\ldots$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln f(re^{i\vartheta})}{N(r)}=\frac{e^{i\vartheta\lambda}\pi}{\sin\pi\lambda}$$

при всяком фиксированном ϑ, $-\pi<\vartheta<\pi$. [II 159.]

62. Для целой функции задачи 61 независимо от предположения регулярности распределения последовательности $r_1, r_2, \ldots$ $\ldots, r_n, \ldots$ имеет место неравенство

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{\ln M(r)} \geqslant \frac{\sin\pi\lambda}{\pi}. \qquad \text{[II 161.]}$$

63. Для каждой целой функции, последовательность нулей которой обладает конечным показателем сходимости λ,

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{N(r)}{\ln M(r)} \leqslant \lambda. \qquad \text{[32.]}$$

64. Пусть $f(z)$ — целая функция и $\mathfrak{G}(r)$, соответственно $\mathfrak{g}(r)$, — геометрическое среднее модуля $f(z)$ на окружности $|z|=r$, соответственно в круге $|z| \leqslant r$ [III 121]. Если модули нулей функции $f(z)$ распределены регулярно [II, гл. 4, § 1], то тогда

$$\lim_{r \to \infty} \left(\frac{\mathfrak{g}(r)}{\mathfrak{G}(r)}\right)^{\frac{1}{N(r)}} = e^{-\frac{1}{\lambda+2}},$$

где λ означает показатель сходимости последовательности нулей, $0 < \lambda < \infty$. Для полиномов интересующий нас предел точно так же существует и равен $e^{-\frac{1}{2}}$.

65. (Продолжение.) Независимо от предположения регулярности распределения нулей имеют место неравенства

$$\liminf_{r \to \infty} \left(\frac{\mathfrak{g}(r)}{\mathfrak{G}(r)}\right)^{\frac{1}{N(r)}} \leqslant e^{-\frac{1}{\lambda+2}} \leqslant \limsup_{r \to \infty} \left(\frac{\mathfrak{g}(r)}{\mathfrak{G}(r)}\right)^{\frac{1}{N(r)}}.$$

66. Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка λ и $\mathfrak{M}(r)$, соотв. $\mathfrak{m}(r)$, — арифметическое среднее $|f(z)|^2$ на окружности $|z| = r$, соответственно в круге $|z| \leqslant r$. Тогда

$$\liminf_{r \to \infty} \left(\frac{\mathfrak{m}(r)}{\mathfrak{M}(r)}\right)^{\frac{1}{\ln r}} = e^{-\lambda}.$$

§ 4. $\mu(r)$ и $M(r)$ при специальных предположениях правильности роста

67. Пусть целая функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\alpha} \ln M(r) = a,$$

где α и a — положительные постоянные. Доказать, что

1) если $b > a$, то при достаточно больших n

$$|a_n| < \left(\frac{\alpha b e}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}};$$

2) каковы бы ни были фиксированные k и ε, где k вещественно, $0 < \varepsilon < 1$, всегда существует такое $\delta > 0$, что, начиная с некоторого значения r,

$$\left(\sum_{1}^{\alpha a r^{\alpha}(1-\varepsilon)} + \sum_{\alpha a r^{\alpha}(1+\varepsilon)}^{\infty}\right) n^k |a_n| r^n < M(r)\, e^{-\delta r^{\alpha}}.$$

Если бы мы взяли $k = 0$ и произвели суммирование от 0 до ∞, не выбрасывая центральной части ряда, то сумма была бы больше или равна $M(r)$. Это означает, что центральная часть ряда значительно перевешивает оба его «фланга». [Неравенство 1) нужно для подготовки доказательства утверждения 2).]

68. Если для целой функции имеет место одно из трех предельных соотношений

$$(1)\quad \ln M(r) \sim ar^{\alpha}, \qquad (2)\quad \ln \mu(r) \sim ar^{\alpha}, \qquad (3)\quad \nu(r) \sim \alpha a r^{\alpha},$$

то имеют место также два других ($r \to \infty$, a и α — положительные постоянные). [(3) получается из (2) формальным дифференцированием обеих частей, см. 33.] Без предположений о регулярности распределения имеют место **51**, **54**, **35**, **60**.

69. Если коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ целой функции $f(z)$ задачи **67** положительны и удовлетворяют неравенствам

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots,$$

то можно утверждать, что

$$\ln a_n \sim -\frac{n \ln n}{\alpha};$$

если же они удовлетворяют неравенствам

$$\frac{a_1}{a_0} \geqslant \frac{a_2}{a_1} \geqslant \frac{a_3}{a_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \ldots,$$

то тогда, более того,

$$\sqrt[n]{a_n} \sim \left(\frac{\alpha a e}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

70. Присоединим к предположениям задачи **67**, что $a_n \geqslant 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда для всякого фиксированного вещественного k

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k a_n r^n}{(\alpha a r^{\alpha})^k f(r)} = 1.$$

71. В предположениях задач **67**, **70** предельное соотношение

$$\ln f(r) \sim ar^{\alpha}$$

можно «продифференцировать», т. е. заключить из его наличия, что

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \sim \alpha a r^{\alpha - 1}.$$

72. (Обобщение теоремы I **94**.) Пусть

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots = f(z)$$

— всюду сходящийся степенной ряд. Показать, что если

$$b_n > 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \quad \lim_{r\to+\infty} r^{-\beta}\ln f(r) = b, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k b_n} = s$$

(β, b — положительные, k и s — любые вещественные постоянные), то

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_nr^n+\ldots}{(\beta b r^\beta)^k f(r)} = s.$$

73. Показать, что при $r\to+\infty$

$$J_0(ir) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(2n)!} \sim \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}}. \quad \text{(II 204.)}$$

74. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_q$ — вещественные постоянные, отличные от $0, -1, -2, -3, \ldots$, и $p<q$, далее

$$P(z) = (z+a_1-1)(z+a_2-1)\ldots(z+a_p-1),$$
$$Q(z) = (z+b_1-1)(z+b_2-1)\ldots(z+b_q-1).$$

Показать, что при $r\to\infty$ сумма всюду сходящегося степенного ряда

$$1+\frac{P(1)}{Q(1)}r+\frac{P(1)P(2)}{Q(1)Q(2)}r^2+\ldots+\frac{P(1)P(2)\ldots P(n)}{Q(1)Q(2)\ldots Q(n)}r^n+\ldots$$

асимптотически равна

$$\frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_p)}(2\pi)^{\frac{1-l}{2}} l^{-\frac{1}{2}} r^{\frac{2\Delta+l+1}{2l}} e^{lr^{\frac{1}{l}}},$$

где

$$l = q-p, \quad \Delta = a_1+a_2+\ldots+a_p-b_1-b_2-\ldots-b_q.$$

[Убеждаемся, что 73 вытекает отсюда после замены переменных как частный случай. Применяем в качестве «ряда сравнения»

$$1+\frac{l^l}{l!}r+\frac{l^{2l}}{(2l)!}r^2+\ldots+\frac{l^{nl}}{(nl)!}r^n+\ldots\sim\frac{1}{l}e^{lr^{\frac{1}{l}}}.]$$

75. Получить асимптотическую формулу задачи 74 без помощи теоремы 72, опираясь на I 94 и II 207.

76. Пусть все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ степенного ряда $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ положительны и удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}}-1\right) = \frac{1}{\lambda} \quad (0<\lambda<\infty).$$

(Этому условию удовлетворяет, например, ряд 74.)

Доказать, что

1) указанный ряд представляет целую функцию порядка λ;

2) $\nu(r) \sim \lambda \ln \mu(r)$ при $r \to \infty$;

3) намеченные в плоскости x, y точки с прямоугольными координатами

$$\left(\frac{l}{\sqrt{\nu(r)}}, \frac{a_{\nu(r)+l} r^{\nu(r)+l}}{\mu(r)}\right), \quad l = -\nu(r), \ -\nu(r)+1, \ \ldots, \ -1, 0, 1, 2, \ldots$$

стремятся в своей совокупности к гауссовой кривой распределения ошибок, т. е.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{a_{\nu(r)+l} r^{\nu(r)+l}}{\mu(r)} = e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}, \quad \text{если} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{l}{\sqrt{\nu(r)}} = x.$$

Сравнить с площадью под гауссовой кривой распределения сумму площадей прямоугольников с нижними основаниями $\nu(r)^{-\frac{1}{2}}$ на оси x и с верхними основаниями, делящимися пополам точками, указанными в 3).

ГЛАВА 2

ОДНОЛИСТНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Задачи подготовительного характера

77. Если целая рациональная функция

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n$$

однолистна в единичном круге $|z| < 1$, то $n|a_n| \leqslant 1$.

78. Если функция $w = f(z)$ однолистно отображает единичный круг $|z| < 1$ на область $\mathfrak{G}$ и $\varphi(w)$ однолистна в $\mathfrak{G}$, то $\varphi[f(z)]$ однолистна в $|z| < 1$.

79. Пусть функция $f(z)$ однолистна в единичном круге $|z| < 1$ и $f(0) = 0$. Тогда функция

$$\varphi(z) = \sqrt{f(z^2)} = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$$

(где взята какая-нибудь определенная ветвь квадратного корня) также будет однолистна в $|z| < 1$. То же самое справедливо для $\sqrt[n]{f(z^n)}$ при любом целом положительном n.

80. Функция $\varphi(z)$, определенная в задаче 79, является наиболее общей нечетной функцией, однолистной в единичном круге $|z| < 1$. Точнее говоря: какова бы ни была нечетная функция $\varphi(z)$, однолистная в $|z|<1$, существует такая функция $f(z)$, однолистная в $|z|<1$, из которой $\varphi(z)$ получается указанным в **79** образом.

---

81. Пусть открытый круг $\mathfrak{K}$ взаимно однозначно и конформно отображается на область $\mathfrak{G}$, и при этом, в частности, содержащийся в $\mathfrak{K}$ концентрический круг $\mathfrak{k}$ отображается на некоторую часть $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$. Обозначим площади соответствующих областей через $|\mathfrak{K}|$, $|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{k}|$, $|\mathfrak{g}|$. Тогда

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{g}|} \geqslant \frac{|\mathfrak{K}|}{|\mathfrak{k}|}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда отображение осуществляется с помощью целой линейной функции. [III **124**.]

82. Пусть открытый круг $\mathfrak{K}$ взаимно однозначно и конформно отображается на область $\mathfrak{G}$, причем центр k круга $\mathfrak{K}$ переходит в точку g области $\mathfrak{G}$. Пусть a^2 — поверхностное искажение в k [III, часть I, стр. 123]. Тогда (в обозначениях задачи **81**)

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{K}|} \geqslant a^2.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда отображение осуществляется с помощью целой линейной функции. (Предельный случай теоремы **81**.)

83. Пусть открытое круговое кольцо $\mathfrak{R}$ однозначно и конформно отображается на двусвязную область $\mathfrak{S}$. Обозначим наименьший открытый круг, содержащий $\mathfrak{R}$, через $\mathfrak{K}$; точки этого круга, не принадлежащие $\mathfrak{R}$, заполняют некоторый замкнутый круг $\mathfrak{k}$. Аналогично через $\mathfrak{G}$ обозначим наименьшую односвязную область, содержащую $\mathfrak{S}$, и через $\mathfrak{g}$ — множество точек области $\mathfrak{G}$, не принадлежащих $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{g}$ замкнуто). Если окружности кольца $\mathfrak{R}$, концентрические с $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{K}$, и кривые области $\mathfrak{S}$, в которые переходят эти окружности при отображении, обходятся в одинаковом направлении, то для площадей $|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{g}|$, $|\mathfrak{K}|$ и $|\mathfrak{k}|$ имеет место соотношение

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{g}|} \geqslant \frac{|\mathfrak{K}|}{|\mathfrak{k}|}.$$

Равенство достигается только тогда, когда отображение осуществляется с помощью целой линейной функции. (Обобщение теоремы **81**, но не ее следствие!)

§ 2. Теоремы единственности

84. Взаимно однозначное конформное отображение, при котором открытый круг преобразуется сам в себя с сохранением центра, представляет собой поворот около центра. [**82**.]

85. Пусть два открытых круговых кольца, ограниченных попарно концентрическими окружностями и имеющих общую внешнюю границу, взаимно однозначно и конформно отображаются друг на друга так, что при этом окружности, концентрической с граничной окружностью в одном кольце, соответствует в другом кольце кривая, обходимая в том же направлении. Тогда оба круговых кольца совпадают и конформное отображение представляет поворот около центра. [83.]

86. Не существует двух различных функций $w=f(z)$, однолистно отображающих единичный круг $|z|<1$ на заданную область $\mathfrak{G}$ так, что при этом $z=0$ переходит в заданную точку $w=w_0$ области $\mathfrak{G}$ и $f'(0)>0$.

87. Единственными функциями, однолистно и конформно отображающими единичный круг $|z|<1$ сам на себя, являются линейные функции

$$e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},$$

где α вещественно, $|z_0|<1$.

§ 3. Существование отображающей функции

88. При отображении, осуществляемом с помощью формулы

$$\frac{a-z}{1-\bar{a}z}=\left(\frac{\sqrt{a}-\eta w}{1-\sqrt{\bar{a}}\eta w}\right)^2,$$

точке плоскости z соответствуют, вообще говоря, две точки плоскости w. Какие точки z составляют исключение? ($a=|a|e^{i\alpha}$, $0<|a|<1$, α вещественно, $|\eta|=1$ и η определено так, что $\frac{dz}{dw}>0$ при $w=0$.) Отображение не зависит от (одного и того же в числителе и знаменателе) выбора знака при $\sqrt{a}$.

89. Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная область плоскости z, лежащая в круге $|z|<1$ и содержащая точку $z=0$. Осуществим отображение задачи 88, принимая за a ближайшую к $z=0$ точку на границе области $\mathfrak{G}$, $|a|<1$ (если таких точек не одна, то выбираем из них, скажем, точку с наименьшим аргументом, $0\leqslant\arg a<2\pi$). Тогда это отображение относит области $\mathfrak{G}$ две области $\mathfrak{G}^*$ и $\mathfrak{G}^{**}$ плоскости w, из которых одна, $\mathfrak{G}^*$, содержит точку $w=0$, а другая, $\mathfrak{G}^{**}$, ее не содержит. $\mathfrak{G}^*$ и $\mathfrak{G}^{**}$ не имеют общих точек, хотя и обладают по меньшей мере одной общей граничной точкой; обе они содержатся внутри единичного круга.

Определённая в задаче 89 область $\mathfrak{G}^*$ в дальнейшем называется *областью Кёбе*, соответствующей области $\mathfrak{G}$. Области $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ удобнее рассматривать в одной и той же плоскости. Между ними существует взаимно однозначное соответствие с сохранением нулевой точки и направления в ней. Как $\mathfrak{G}$, так и $\mathfrak{G}^*$ представляют собой правильные части единичного круга.

90. Исследовать область Кёбе для области, получаемой из единичного круга $|z|<1$ посредством удаления отрезка $a \leqslant z < 1$, $0<a<1$. Определить, в частности, граничную точку, ближайшую к нулевой.

91. Исследовать область Кёбе для круга $|z|<a$, $0<a<1$ и определить ближайшую к нулевой и наиболее удаленную от нее граничные точки.

92. Каждая точка области Кёбе для $\mathfrak{G}$ более удалена от нулевой точки, чем соответствующая ей точка области $\mathfrak{G}$.

93. Пусть $\mathfrak{G}_1$ — область Кёбе для $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_2$ — область Кёбе для $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_3$ — для $\mathfrak{G}_2$ и т. д. Пусть далее $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — ближайшие к нулевой граничные точки соответственно областей $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, ... Тогда $|a|<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\ldots$

94. (Продолжение.) При помощи отображения Кёбе $\mathfrak{G}$ однозначно и конформно отображается на $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1$ — на $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_{n-1}$ — на $\mathfrak{G}_n$. Пусть результирующее отображение области $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}_n$ осуществляется посредством аналитической функции $f_n(z)$ (z пробегает точки области $\mathfrak{G}$). Имеем

$$f_n(0)=0, \quad 0<f_n'(0)<\frac{1}{|a|}.$$

Выразить $f_n'(0)$ через $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

95. Показать на основании **94**, что для точек $a, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ задачи **93** имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1.$$

96. (Продолжение задач **93**, **94**.) В каждой точке z области $\mathfrak{G}$ существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),$$

причем во всякой внутренней замкнутой области сходимость равномерна. Предельная функция $f(z)$ однолистно отображает область $\mathfrak{G}$ на внутреннюю область единичной окружности. [III 258.]

§ 4. Внутренний и внешний радиусы. Нормированная отображающая функция

В нижеследующих задачах [97—163] под $\mathfrak{G}$ понимается произвольная односвязная область плоскости z, обладающая более чем одной граничной точкой, под a — произвольная конечная точка области $\mathfrak{G}$. Бесконечно удаленная точка может быть как внутренней, так и граничной точкой области $\mathfrak{G}$. Область $\mathfrak{G}$ однолистно и конформно отображается на внутреннюю область некоторой окружности в плоскости w так, что при этом a переходит в центр окружности и линейное искажение в точке a [III, часть I, стр. 123] равно единице. Радиус окружности однозначно определяется заданием области $\mathfrak{G}$ и точки a. Мы называем его *внутренним конформным радиусом* области $\mathfrak{G}$ относительно точки a и обозначаем длину его через r_a. Существует [96] однозначно определенная [86] функция $w=f(a;\ z)=f(z)$, осуществляющая указанное отображение, т. е. конформно отображающая область $\mathfrak{G}$ на круг $|w|<r_a$ и разлагающаяся в окрестности точки a в ряд вида

$$w=f(z)=z-a+c_2(z-a)^2+c_3(z-a)^3+\ldots \qquad (*)$$

Функцию (*) мы называем *нормированной отображающей функцией*, соответствующей точке a. Под конформным радиусом замкнутой простой непрерывной кривой L (относительно некоторой лежащей внутри нее точки) мы понимаем внутренний радиус области, ограничиваемой этой кривой.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — односвязная область плоскости z, содержащая бесконечно удаленную точку $z=\infty$. Тогда дополнение к $\mathfrak{G}$ представляет собой ограниченную замкнутую область $\mathfrak{B}$. *Внешний конформный радиус* области $\mathfrak{B}$ мы определяем следующим образом: отображаем область $\mathfrak{G}$ конформно и однолистно на внешнюю область некоторой окружности в плоскости w таким образом, что при этом бесконечно удаленная точка переходит сама в себя и модуль производной отображающей функции в точке $z=\infty$ (линейное искажение в бесконечно удаленной точке) равен единице. Радиус этой окружности однозначно определяется заданием области $\mathfrak{G}$. Его мы и называем *внешним радиусом* области $\mathfrak{B}$ и обозначаем его длину через $\bar{r}$. Существует однозначно определенная функция $w=f(z)$, осуществляющая это отображение, т. е. конформно отображающая $\mathfrak{G}$ на внешнюю круговую область $|w|>\bar{r}$ и допускающая в окрестности бесконечно удаленной точки разложение вида

$$w=f(z)=z+c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots \qquad (**)$$

Функцию (**) мы называем *нормированной отображающей функцией*, соответствующей бесконечно удаленной точке. Под внешним радиусом непрерывной кривой L, которая может частично (или даже целиком) носить характер «разреза», мы понимаем внешний радиус замкнутой области, ограничиваемой этой кривой; обозначенная выше через $\mathfrak{G}$ область представляет собой внешнюю область кривой L, если эта кривая замкнутая, или же всю плоскость, разрезанную по кривой L, если она представляет собой незамкнутую дугу [1]).

[1]) Точнее говоря, здесь имеется в виду непрерывная кривая L следующего рода: та односвязная часть дополнения к L, которая содержит бесконечно удаленную точку (т. е. область $\mathfrak{G}$), обладает границей, целиком совпадающей с L. См., например, **101**, **105**.

При отображении внутренней (или внешней) области замкнутой простой непрерывной кривой L на внутреннюю (внешнюю) область окружности замкнутая внутренняя (внешняя) область кривой L взаимно однозначно и непрерывно отображается на замкнутую внутреннюю (внешнюю) круговую область. (См. С. Carathéodory, Math. Ann., т. 73, стр. 314—320, 1913.)

97. Вычислить внутренний радиус r_a и внешний радиус $\bar{r}$ окружности $|z|=\rho$, $\rho>0$, $|a|<\rho$.

98. Вычислить внутренний радиус r_a внешней круговой области $|z|>\rho$ (a конечно, $|a|>\rho$), а также $\lim\limits_{a\to\infty} r_a$.

99. Вычислить r_a для угла $0<\arg z<\vartheta_0$, $0<\vartheta_0\leqslant 2\pi$.

100. При преобразованиях подобия $z'=hz+k$ с отличным от нуля линейным искажением $|h|$ внешний, соотв. внутренний, радиус увеличивается в отношении $1:|h|$. Точнее: если область $\mathfrak{G}$ переходит в $\mathfrak{G}'$, конечная точка a — в $a'=ha+k$, то между внутренним радиусом r_a области $\mathfrak{G}$ относительно точки a и внутренним радиусом $r_{a'}$ области $\mathfrak{G}'$ относительно точки a' имеет место следующее соотношение:

$$r_{a'}=|h|\,r_a.$$

Аналогично для внешнего радиуса.

101. Внешний радиус отрезка длины l дается равенством

$$\bar{r}=\frac{l}{4}.$$

102. Внешний радиус эллипса, оси которого в сумме составляют l, дается равенством

$$\bar{r}=\frac{l}{4}.$$

103. Вычислить внутренний радиус открытой полуплоскости относительно содержащейся в ней точки, отстоящей от границы на расстояние d.

104. Пусть r_a — внутренний радиус области $\mathfrak{G}$ плоскости z и однолистное отображение

$$z'-b=\gamma(z-a)+\gamma_2(z-a)^2+\ldots$$

преобразует $\mathfrak{G}$ в некоторую область $\mathfrak{G}'$ плоскости z'. Пусть, далее, r'_b — внутренний радиус области $\mathfrak{G}'$ относительно точки $z'=b$. Тогда

$$r'_b=|\gamma|\,r_a.$$

Аналогичное соотношение имеет место при отображении вида

$$z'=\gamma z+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots$$

105. Вычислить внешний радиус $\bar{r}$ кривой, составленной из окружности $|z|=1$ и вещественных отрезков

$$1 < z \leqslant a_1, \quad -a_2 \leqslant z < -1; \quad a_1 > 1, \ a_2 > 1.$$

106. Вычислить внутренний радиус бесконечной параллельной полосы ширины D относительно содержащейся в ней точки, кратчайшее расстояние которой до границы полосы равно d $(2d \leqslant D)$.

107. Пусть a — любая конечная точка области $\mathfrak{G}$ плоскости z. Дробно-линейное преобразование $z' = \frac{1}{z-a}$ переводит $\mathfrak{G}$ в область $\mathfrak{G}'$, содержащую бесконечно удаленную точку. Показать, что внутренний радиус области $\mathfrak{G}$ относительно a равен обратной величине внешнего радиуса области, дополнительной к $\mathfrak{G}'$.

108. Рассмотрим область $\mathfrak{G}$, получающуюся при удалении из единичного круга $|z|<1$ вещественных отрезков $b_1 \leqslant z < 1$, $-1 < z \leqslant -b_2$, $0 < b_1 < 1$, $0 < b_2 < 1$. Вычислить внутренний радиус области $\mathfrak{G}$ относительно нулевой точки.

109. Неравенства

$$\vartheta_1 \leqslant \arg \frac{z-z_1}{z-z_2} \leqslant \vartheta_2$$
$$(z_1 \neq z_2, \quad 0 < \vartheta_1 \leqslant \vartheta_2 < 2\pi)$$

выделяют в плоскости z круговой двуугольник K; вершинами его служат z_1 и z_2, а стороны составляют между собой угол $\vartheta_2 - \vartheta_1$. Чему равен внешний радиус области K? Рассмотреть случаи

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi; \quad \vartheta_1 = \vartheta_2; \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_2 = \pi.$$

110. Пусть a и b — точки области $\mathfrak{G}$, $f(z)$ — нормированная отображающая функция, соответствующая точке b. Тогда

$$r_a = \frac{r_b^2 - |f(a)|^2}{r_b |f'(a)|}.$$

111. Вычислить нормированную отображающую функцию плоскости, разрезанной вдоль прямой $\frac{1}{4} \leqslant z < +\infty$, относительно нулевой точки и исследовать изменение внутреннего радиуса r_a, когда a пробегает все вещественные значения от $-\infty$ до $\frac{1}{4}$.

112. Пусть L — замкнутая аналитическая кривая. (Следовательно, нормированная отображающая функция, соответствующая произвольной точке внутренней области кривой L, продолжаема за L и в различных точках L принимает различные значения.) Показать, что если точка a, заключающаяся во внутренней области кривой L, приближается к некоторой точке этой кривой, то внутренний радиус r_a стремится к нулю.

113. Пусть в точке a области $\mathfrak{G}$ внутренний радиус r_a достигает относительного максимума. Показать, что тогда у нормированной отображающей функции

$$f(z)=z-a+c_2(z-a)^2+c_3(z-a)^3+\ldots,$$

соответствующей точке a, коэффициент c_2 равен нулю.

114. Каково геометрическое место тех точек a верхней полуплоскости $\Im z>0$, для которых внутренний радиус r_a этой полуплоскости сохраняет постоянное значение?

115. Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная область плоскости z, a — произвольная точка этой области и n — целое положительное число. Преобразование $z'=\sqrt[n]{z-a}$ сопоставляет $\mathfrak{G}$ некоторую область $\mathfrak{G}'$, «n-кратно симметричную» относительно нулевой точки. Точка z' тогда и только тогда принадлежит области $\mathfrak{G}'$, когда z'^n+a есть точка области $\mathfrak{G}$. Показать, что внутренний радиус r_a области $\mathfrak{G}$ относительно точки a и внутренний радиус r_0' области $\mathfrak{G}'$ относительно точки $z'=0$ связаны соотношением

$$r_0'=r_a^{\frac{1}{n}}.$$

Аналогичное соотношение имеет место для внешнего радиуса при преобразовании $z'=\sqrt[n]{z}$, если $z=0$ не содержится в $\mathfrak{G}$.

116. Вычислить внутренний радиус r_a плоскости z, разрезанной вдоль n лучей

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}}\leqslant|z|<+\infty,\quad \arg z=\frac{2\pi\nu}{n}\quad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

К какому пределу стремится r_a, когда a приближается к концу соответствующего выреза вдоль отрезка

$$0\leqslant|z|<\sqrt[n]{\frac{1}{4}},\quad \arg z=\frac{2\pi\nu}{n}?$$

117. Вычислить внешний радиус плоскости, разрезанной вдоль отрезков

$$-\alpha\leqslant z\leqslant\alpha,\quad -\beta\leqslant iz\leqslant\beta\quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

118. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная область плоскости z и a — некоторая конечная точка этой области. Нормированная отображающая функция $f(z)$, соответствующая точке a, и внутренний радиус r_a обладают следующим экстремальным свойством: среди всех функций вида

$$F(z)=z-a+d_2(z-a)^2+d_3(z-a)^3+\ldots,$$

регулярных в области $\mathfrak{G}$, $f(z)$ обладает наименьшим максимумом модуля в $\mathfrak{G}$; этот „minimum maximorum" равен r_a. Точнее говоря: если M — верхняя грань модуля $F(z)$ в области $\mathfrak{G}$, то

$$M \geqslant r_a.$$

Равенство достигается только тогда, когда $F(z) \equiv f(z)$.

В случае, если $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку, аналогичным свойством обладают отображающая функция, соответствующая бесконечно удаленной точке, и внешний радиус области, дополнительной к $\mathfrak{G}$; отображение на круг выделяется посредством "maximum minimorum".

119. Пусть $\mathfrak{G}$ — область, симметричная относительно вещественной оси, a вещественно. Тогда в разложении по степеням $z-a$ нормированной отображающей функции, соответствующей a, все коэффициенты вещественны. Если $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку, то аналогичным свойством обладает нормированная отображающая функция, соответствующая бесконечно удаленной точке.

120. Пусть $\mathfrak{G}$ — область, симметричная относительно нулевой точки. Тогда в степенном ряде для нормированной отображающей функции, соответствующей нулевой точке, содержатся только нечетные степени z. Если $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку, то аналогичным свойством обладает нормированная отображающая функция, соответствующая бесконечно удаленной точке.

§ 5. Связи между отображениями различных областей

121. Пусть $\mathfrak{G}^*$ — правильная часть области $\mathfrak{G}$, r_a и r_a^* — внутренние радиусы областей $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ относительно одной и той же точки a, лежащей в $\mathfrak{G}^*$. Тогда

$$r_a^* < r_a.$$

Аналогичное неравенство имеет место для внешних радиусов.

122. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная область, a — некоторая конечная точка этой области и r, соответственно R, — радиус наибольшей (соответственно наименьшей) окружности с центром в a, содержащейся в $\mathfrak{G}$ (соответственно содержащей $\mathfrak{G}$). Имеем $r > 0$, $R \geqslant r$, R конечно или бесконечно. Далее

$$r \leqslant r_a \leqslant R,$$

причем равенство имеет место только тогда, когда $\mathfrak{G}$ — открытый круг с центром a.

123. Пусть область $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку и b — точка дополнительной области $\mathfrak{B}$. Обозначим через r, соотв. R, радиус наибольшего, соотв. наименьшего, замкнутого круга с центром в a, содержащегося в $\mathfrak{B}$, соотв. содержащего $\mathfrak{B}$. Имеем $r \geqslant 0$, $R \geqslant r$, R конечно. Далее

$$r \leqslant \bar{r} \leqslant R,$$

причем равенство имеет место только тогда, когда $\mathfrak{B}$ — замкнутый круг.

124. Пусть l — длина замкнутой простой непрерывной кривой L. Показать, что для всякой точки a, лежащей во внутренней области кривой L,

$$2\pi r_a \leqslant l.$$

Равенство имеет место только для окружностей с центром в a. Аналогичное неравенство имеет место для внешнего радиуса.

125. Пусть область $\mathfrak{G}$ имеет внутреннюю жорданову меру $|\mathfrak{G}|_i$. Показать, что для любой конечной точки a, содержащейся в $\mathfrak{G}$,

$$|\mathfrak{G}|_i \geqslant \pi r_a^2.$$

Равенство имеет место лишь для круга $|z-a| < r_a$.

126. Пусть дополнение $\mathfrak{B}$ области $\mathfrak{G}$, содержащей бесконечно удаленную точку, имеет внешнюю жорданову меру $|\mathfrak{B}|_e$. Тогда

$$|\mathfrak{B}|_e \leqslant \pi \bar{r}^2.$$

Равенство имеет место лишь в том случае, когда $\mathfrak{B}$ — круг.

127. Пусть замкнутая простая непрерывная кривая L имеет внешний радиус $\bar{r}$ и внутренний радиус r_a, где a — произвольная точка внутренней области кривой L. Тогда

$$r_a \leqslant \bar{r}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда L — окружность и a — ее центр.

128. Пусть L — замкнутая простая непрерывная кривая, охватывающая нулевую точку, $\bar{r}$ — ее внешний радиус и r_0 — внутренний радиус относительно нулевой точки. Пусть, далее, $P(z)$ — полином с младшим членом $a_k z^k$ и старшим членом $a_n z^n$:

$$P(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_n z^n,$$

и M — максимум $|P(z)|$ на кривой L. Тогда

$$M \geqslant |a_k| r_0^k, \quad M \geqslant |a_n| \bar{r}^n.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда L — окружность с центром в нулевой точке и полином $P(z)$ имеет вид cz^n.

129. Пусть функция $f(z)$ регулярна, имеет положительную вещественную часть внутри области, ограниченной замкнутой простой непрерывной кривой L, и непрерывна, включая границу. Если вещественная часть функции $f(z)$ обращается в нуль на некоторой дуге L' кривой L, то мнимая часть функции $f(z)$ монотонно убывает при положительном обходе дуги L'. [III 233.]

130. Отобразим полосу $0 < \Im z < D$ на круг $|w| < 1$ таким образом, чтобы при этом точка $z = i$ переходила в центр круга $w = 0$ ($D > 1$). Чему равна длина дуги окружности $|w| = 1$, отвечающей при этом отображении вещественной оси $\Im z = 0$? (При $D = 2$ и $D = \infty$ тривиально.) Как изменяется указанная дуга при возрастании D?

131. Пусть замкнутые простые непрерывные кривые L_1 и L_2 имеют конечное число общих дуг и внутренняя область кривой L_1 содержится во внутренней области кривой L_2. (L_1 состоит из четного числа дуг, проходящих попеременно внутри и на границе области, ограничиваемой кривой L_2).

Отобразим внутреннюю область кривой L_1, а затем кривой L_2 на одну и ту же внутреннюю круговую область так, чтобы в том и другом случае некоторая точка O, принадлежащая внутренней области кривой L_1, переходила в центр круга. Оба отображения сопоставляют дугам кривых L_1 и L_2 вполне определенные дуги граничной окружности (стр. 27).

Доказать, что длина дуги круга, соответствующей какой-либо о б щ е й дуге кривых L_1 и L_2, при отображении меньшей области (ограниченной L_1) будет меньше, чем при отображении большей (ограниченной L_2). Пример: 130. [129.]

132. Дать электростатическую интерпретацию теоремы 131.

133. Пусть замкнутые простые непрерывные кривые L_1 и L_2 имеют лишь конечное число общих точек и ограничиваемые ими области — общую часть $\mathfrak{T}$. Пусть далее O — точка области $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}^*$ — связная часть области $\mathfrak{T}$, содержащая O. Дуги кривых L_1 и L_2, лежащие на границе $\mathfrak{T}^*$, назовем «видимыми» из O, не лежащие же на этой границе — «закрытыми». (Слова «видимые» и «закрытые» имеют обычный смысл, если кривые L_1 и L_2 звездообразны относительно O.)

Отобразим сначала внутреннюю область кривой L_1, а затем кривой L_2 на внутреннюю область единичного круга так, чтобы в обоих случаях O переходила в центр круга. Тогда образы «видимых» частей кривой L_1 займут бо́льшую часть единичной окружности, чем образы «закрытых» частей кривой L_2. (Для большей наглядности представим себе L_2 в виде окружности с центром в O.) [131.]

134. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая замкнутая область, ζ — ее внутренняя точка и $\mathfrak{R}$ — совокупность граничных точек области $\mathfrak{B}$, отстоящих от ζ на расстояние, не превышающее ρ. Пусть дуги окружности радиуса ρ с центром в ζ, не принадлежащие $\mathfrak{B}$, имеют общую длину $\rho\Omega$.

Пусть, далее, функция $f(z)$ регулярна и однозначна внутри и непрерывна на границе области $\mathfrak{B}$, причем в точках множества $\mathfrak{R}$ имеем $|f(z)| \leqslant a$, а в остальных граничных точках области $\mathfrak{B}$ $|f(z)| \leqslant A$, $a < A$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant a^{\frac{\Omega}{2\pi}} A^{1-\frac{\Omega}{2\pi}}.$$

(Более точная оценка, чем в III 276.)

---

135. Пусть односвязная область $\mathfrak{G}_n$ плоскости z удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathfrak{G}_n$ лежит в круге $|z| < a$, $a > 1$,
2) $\mathfrak{G}_n$ содержит круг $|z| < 1$,
3) $\mathfrak{G}_n$ содержит дугу единичной окружности

$$|z| = 1, \quad -\alpha_n < \arg z < \alpha_n \quad (0 < \alpha_n < \pi),$$

4) дополнительная дуга единичной окружности

$$|z| = 1, \quad \alpha_n \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \alpha_n$$

принадлежит границе области $\mathfrak{G}_n$.

Пусть, далее, $\mathfrak{G}_n$ взаимно однозначно и конформно отображается с помощью функции $w = f_n(z)$ на единичный круг $|w| < 1$ так, что при этом $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$.

Если при возрастании n «перешеек», соединяющий единичный круг с остальной частью области $\mathfrak{G}_n$, все более и более стягивается, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = z$$

независимо от того, как ведет себя часть области $\mathfrak{G}_n$, лежащая за пределами единичного круга. [Применить метод доказательства теоремы III 335.]

§ 6. Теорема Кёбе об искажении

136. Пусть функция

$$w = g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots$$

регулярна во внешней круговой области $|z| > 1$ и однолистно отображает эту область на область $\mathfrak{G}$, содержащую бесконечно удаленную точку. Тогда

$$|b_1|^2 + 2|b_2|^2 + 3|b_3|^2 + \ldots \leqslant 1.$$

В частности, $|b_1| \leqslant 1$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ представляет собой плоскость, разрезанную вдоль отрезка длины 4.

137. (Продолжение.) Во внешней круговой области $|z|>1$

$$|g'(z)| \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{|z|^2}}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ имеет вид

$$g(z)=z+b_0-\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{\rho\varepsilon z-1}$$

($|\varepsilon|=1$, $\rho>1$), и достигается в точке $\frac{\rho}{\varepsilon}$. Какой вид имеет в этом случае область $\mathfrak{G}$?

При отображении, указанном в задаче 136, все кривые плоскости w, соответствующие концентрическим окружностям радиуса больше единицы с центром в $z=0$, — так называемые *линии уровня* — имеют общий конформный центр тяжести b_0 [III 129]. Мы будем называть b_0 *конформным центром тяжести* области $\mathfrak{G}$.

138. Пусть односвязная область $\mathfrak{G}$ содержит бесконечно удаленную точку и симметрична относительно некоторой точки P. Тогда P служит конформным центром тяжести области $\mathfrak{G}$.

139. (Продолжение задачи 136.) Если область $\mathfrak{G}$ не содержит нулевой точки, то конформный центр тяжести этой области лежит внутри круга радиуса 2 с центром в нулевой точке. Иными словами,

$$|b_0| \leqslant 2.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ представляет собой плоскость, разрезанную вдоль отрезка длины 4, выходящего из нулевой точки. [Применяем 136 к $\sqrt{g(z^2)}$.]

140. (Продолжение.) Расстояние d произвольной граничной точки области $\mathfrak{G}$ от конформного центра тяжести не превосходит двух. Более того, для всех $\mathfrak{G}$, за исключением особого случая, указанного в конце задачи 136, $d<2$.

141. (Продолжение.) Максимальное расстояние D между граничными точками области $\mathfrak{G}$ (диаметр границы области $\mathfrak{G}$) заключается между двумя и четырьмя:

$$2 \leqslant D \leqslant 4.$$

Равенство в нижней оценке имеет место только тогда, когда $\mathfrak{G}$ представляет собой внешнюю область некоторого круга радиуса 1, а в верхней оценке — когда $\mathfrak{G}$ есть плоскость с вырезом вдоль отрезка длины 4 (см. задачу 136.)

142. Среди всех непрерывных криволинейных дуг, соединяющих две неподвижные точки, наименьший внешний радиус имеет прямолинейный отрезок.

143. Пусть область $\mathfrak{G}$ задачи 136 имеет конформным центром тяжести 0. Тогда

$$|g(z)| \leqslant |z| + \frac{1}{|z|}, \quad |z| > 1.$$

Равенство имеет место только для отображения $w = z + \frac{e^{i\alpha}}{z}$, α вещественно.

144. (Продолжение.) При указанном отображении ни одна точка z не может сместиться со своего первоначального положения больше чем на $\frac{3}{|z|}$. Иными словами,

$$|g(z) - z| < \frac{3}{|z|}, \quad |z| > 1.$$

145. Исследовать смещение [144] при отображении внешней круговой области на плоскость, разрезанную вдоль подковообразной кривой, состоящей из трех прямолинейных отрезков, последовательно соединяющих точки

$$a + i\delta, \quad -a + i\delta, \quad -a - i\delta, \quad a - i\delta; \quad a > 0, \ \delta > 0.$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда $a \to 2$, $\delta \to 0$, и показать на этом примере, что коэффициент 3 в неравенстве задачи 144 не может быть заменен меньшим.

---

146. Пусть функция

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

регулярна и однолистна в единичном круге $|z| < 1$. Тогда

$$|a_2| \leqslant 2,$$

причем равенство имеет место лишь для функций вида

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}, \quad \alpha \text{ вещественно.} \tag{111}$$

[Применить 139 к $(f(z^{-1}))^{-1}$.]

147. Пусть функция

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

однолистна в круге $|z| < R$. Если область $\mathfrak{G}$ плоскости w, на которую отображается этот круг, не содержит бесконечно удаленной точки, то она целиком содержит открытый круг $|w| < \frac{R}{4}$. Иными словами, обозначая через d кратчайшее расстояние границы области $\mathfrak{G}$ от точки $w=0$, имеем $d \geqslant \frac{R}{4}$. Более того, $d > \frac{R}{4}$, если только $\mathfrak{G}$ не представляет собой плоскости, разрезанной вдоль луча $\arg w = \text{const.}$, $\frac{R}{4} \leqslant |w| < +\infty$. [Применяем 146 к $\frac{f(z)}{1-h^{-1}f(z)}$, где h — граничная точка области $\mathfrak{G}$.]

148. Неравенство задачи 147 можно уточнить следующим образом:

$$d \geqslant \frac{R}{|a_2|+2}.$$

(См. 146.) Равенство достигается для области, указанной в 147.

149. (Продолжение задачи 147.) Отрезок, соединяющий две граничные точки области $\mathfrak{G}$ и проходящий через нулевую точку, мы будем называть *главной хордой* области $\mathfrak{G}$. Всякая главная хорда области $\mathfrak{G}$ имеет длину, не меньшую чем R. Указанная нижняя граница R достигается лишь в том случае, когда область $\mathfrak{G}$ представляет собой плоскость, разрезанную вдоль обоих лучей $w = \pm |w| e^{i\alpha}$, α вещественно, $\frac{R}{2} \leqslant |w| < +\infty$. (116.)

150. (Продолжение задачи 146.) В единичном круге $|z|<1$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{1-|z|^2}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} - \bar{z} \right| \leqslant 2.$$

Равенство имеет место только тогда, когда область, в которую отображается указанный круг, представляет собой плоскость с прямолинейным вырезом. [Преобразовать единичный круг сам в себя так, чтобы при этом произвольная фиксированная точка z_0 ($|z_0|<1$) перешла в центр круга, и затем применить 146.]

151. (*Теорема Кёбе о линейном искажении,* так называемый Verzerrungssatz.) Пусть функция

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

регулярна и однолистна в единичном круге $|z|<1$ и r — положительное число, $r<1$. Тогда в круге $|z| \leqslant r$ имеют место неравенства

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Равенство может достигаться только при отображениях вида

$$f(z) = \frac{z}{(1+e^{i\alpha}z)^2}, \quad \alpha \text{ вещественно.} \qquad [150.]$$

152. (Продолжение.) В круге $|z| \leqslant r$ имеет место неравенство

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Равенства достигаются только при отображениях, указанных в задаче **151**.

153. Неравенство задачи **152** можно уточнить следующим образом: в круге $|z| \leqslant r$

$$\frac{r}{1+|a_2|r+r^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r^2)}.$$

Равенства достигаются для тех же отображений, что и в **151**. (Обобщение теоремы **148**.) [См. решение **148**, кроме того, **143**.]

154. Для нечетных функций $f(z) = -f(-z)$ неравенство задачи **152** можно уточнить следующим образом:

$$\frac{r}{1+r^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{1-r^2}.$$

Равенство достигается только для $f(z) = \frac{z}{1-z^2}$.

155. (Продолжение.) Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2\, d\vartheta \leqslant \frac{r^2}{1-r^2}.$$

[Площадь области, на которую отображается круг $|z| \leqslant \rho < r$, не превосходит $\pi \operatorname{Max} |f(z)|^2$, $|z| \leqslant \rho$; III **128**.]

156. (Продолжение задачи **152**.) Пусть n — целое положительное число. Существует такая функция $\omega_n(r)$, зависящая только от n и r, $0 \leqslant r < 1$, что для *каждой* функции $f(z)$ задачи **151** в круге $|z| \leqslant r$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \omega_n(r).$$

157. (Продолжение.) Пусть n — целое положительное число, $n \geqslant 2$. Существует такая зависящая только от n постоянная ω_n, что для каждой функции $f(z)$ задачи **151** выполняется неравенство

$$|a_n| \leqslant \omega_n.$$

Пусть ω_n — *наименьшая* из этих постоянных. Тогда

$$\omega_n \leqslant \frac{1}{4}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}\,[1].$$

158. (Продолжение.) Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqslant \frac{r}{1-r}. \qquad \textbf{[155.]}$$

---

[1] Эта граница $< \frac{e^2}{4} n^2$.

159. (Продолжение.) Имеет место следующее уточнение неравенства задачи **157**:

$$n \leqslant \omega_n < en.$$

160. Для функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

в единичном круге $|z| < 1$ однолистных и по модулю меньших, чем M, неравенство задачи **146** можно уточнить следующим образом: $M \geqslant 1$ (равенство только для $f(z) = z$) и

$$|a_2| \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{M}\right).$$

Когда достигается равенство? $\left[\text{Применить } \mathbf{146} \text{ к } \frac{f(z)}{[1 + e^{i\alpha} M^{-1} f(z)]^2}.\right]$

161. Пусть функция

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна в круге $|z| < 1$ и отображает его на область, з в е з д о о б р а з н у ю относительно нулевой точки [III **109**]. Тогда

$$|a_n| \leqslant n \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Равенство имеет место только для функций вида

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}, \quad \alpha \text{ вещественно.}$$

162. Пусть функция

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна в единичном круге $|z| < 1$ и отображает его на некоторую в ы п у к л у ю область [III **108**]. Тогда

$$|a_n| \leqslant 1 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Равенство имеет место лишь для функций вида

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z};$$

при этом круг переходит в полуплоскость, которая содержит нулевую точку и граничная прямая которой отстоит от этой точки на расстояние $\frac{1}{2}$.

163. Если функция $f(z)$ регулярна и однолистна в единичном круге $|z| < 1$, то все круги $|z| < r$ при $r \leqslant 2 - \sqrt{3} = 0{,}26\ldots$ отображаются с ее помощью на выпуклые области. Это число $2 - \sqrt{3}$ — *граница выпуклости* — не может быть заменено меньшим.

ГЛАВА 3

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Varia

164. Если функция $f(z)$ в полосе $0 \leqslant \Re z \leqslant \pi$ регулярна, однозначна и ограничена и обращается в этой полосе в нуль в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ $(z_n = x_n + iy_n)$, то либо ряд с положительными членами

$$e^{-|y_1|}\sin x_1 + e^{-|y_2|}\sin x_2 + \ldots + e^{-|y_n|}\sin x_n + \ldots$$

сходится, либо $f(z) \equiv 0$. [III 297.]

165. Пусть коэффициент $f_1(z)$ однородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + f_1(z)\,y^{(n-1)} + f_2(z)\,y^{(n-2)} + \ldots + f_n(z)\,y = 0$$

является целой функцией. Для того чтобы и общий интеграл этого уравнения был целой функцией, необходимо и достаточно, чтобы целыми функциями были все остальные коэффициенты $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots, f_n(z)$.

166. Пусть функция $w = \varphi(z)$ регулярна (возможно многозначна) в кольцевой области $0 < |z| < \rho$, $\rho > 0$, и удовлетворяет в ней тождественно уравнению вида

$$F_0(z)\,w^l + F_1(z)\,w^{l-1} + \ldots + F_{l-1}(z)\,w + F_l(z) = 0,$$

где $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_{l-1}(z), F_l(z)$ регулярны в некоторой окрестности точки $z = 0$. Если существует степенной ряд $c_0 + c_1 z + \ldots$ такой, что функция $(\varphi(z) - c_0 - c_1 z - c_2 z^2 - \ldots - c_{n-1} z^{n-1})\, z^{-n}$ ограничена в окрестности точки $z = 0$ для бесчисленного множества значений n, то $\varphi(z)$ регулярна в окрестности точки $z = 0$ и $\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$

167. Пусть функция $f(z)$ регулярна и однозначна в области $R \leqslant |z| < \infty$, $R > 0$. Тогда существуют такие целое число $p \geqslant 0$, целая функция $G(z)$ и сходящийся при $|z| \geqslant R$ степенной ряд

$$\psi(z) = \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots,$$

что

$$f(z) = z^{-p}G(z)\,e^{\psi(z)} \qquad (R \leqslant |z| < \infty).$$

При одновременной замене как в предположении, так и в утверждении неравенства $R \leqslant |z| < \infty$ на $R < |z| < \infty$ теорема становится уже неверной.

168. Пусть $f(z) = f(x + iy)$ — мероморфная периодическая функция с периодом 2π, имеющая в полосе $0 \leqslant \Re z < 2\pi$ лишь конечное число нулей и полюсов. Обозначим через $M(y)$ максимум и через $\mu(y)$ — минимум модуля $f(x+iy)$ для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Если

$$\limsup_{|y|\to\infty} \frac{\ln\ln M(y)}{|y|} < 1 \quad \text{или} \quad \liminf_{|y|\to\infty} \frac{\ln\ln \mu(y)}{|y|} > -1,$$

то $f(z)$ наверное является рациональной функцией от e^{iz}.

169. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, $z=x+iy$, и квадрат ее модуля

$$|f(z)|^2 = \varphi(x, y)$$

является алгебраической функцией от вещественных переменных x и y. Тогда $f(z)$ сама является алгебраической функцией от z.

170. Не существует аналитической функции, регулярной вдоль вещественной оси и принимающей для вещественных значений переменного все значения внутри фиксированного круга. Короче: не существует «аналитической кривой Пеано».

171. Исследовать, существует ли $n+1$ аналитических функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), f(z)$, отличающихся друг от друга не просто на постоянные множители, регулярных в некоторой области $\mathfrak{B}$ и связанных в ней соотношением

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \ldots + |f_n(z)| = |f(z)|.$$

172. Исследовать, существуют ли две аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$, не тождественно постоянные, регулярные в некоторой области $\mathfrak{B}$ и связанные в ней соотношением

$$|g(z)| = \Re f(z). \qquad \text{[III 58.]}$$

173. Говорят, что $f(z)$ и $g(z)$ имеют одинаковые a-точки, если функции

$$\frac{f(z)-a}{g(z)-a} \quad \text{и} \quad \frac{g(z)-a}{f(z)-a}$$

обе одновременно являются целыми.

Найти две различные целые функции, обладающие одинаковыми a-, b- и c-точками. (При этом, конечно, предполагается, что $b \neq c$, $c \neq a$, $a \neq b$.)

174. Существует ли целая функция $G(z)$, удовлетворяющая условиям

$$G(0) = a_0, \quad G'(1) = a_1, \quad G''(2) = a_2, \; \ldots, \; G^{(n)}(n) = a_n, \; \ldots,$$

где последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана произвольно? (По поводу аналогичной интерполяционной задачи для полиномов см. VI 75, VI 76.)

§ 2. Об одном приеме Э. Ландау

Если теорему, утверждающую, что функция $f(z)$, регулярная и однозначная в области $\mathfrak{B}$, достигает своего максимума по модулю на границе, мы хотим вывести непосредственно из интеграла Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

(где z заключено во внутренней области кривой L), то мы можем рассуждать следующим образом. Пусть $|f(\zeta)|\leqslant M$ на L, тогда

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int\limits_L\left|\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right|=KM,$$

где постоянная K зависит только от кривой L и положения точки z, но не от специального выбора функции $f(z)$. Но теперь эту грубую оценку мы можем улучшить, применяя ее к $[f(z)]^n$, где n — целое положительное число:

$$|f(z)|^n\leqslant KM^n,\ |f(z)|\leqslant K^{\frac{1}{n}}M.$$

Беря $n\to\infty$, мы получим в пределе $|f(z)|\leqslant M$.

Этот интересный метод доказательства показывает, что грубые оценки можно иногда преобразовать в точные, если надлежащим образом воспользоваться их общностью. [E. Landau; см. M. Riesz, Acta Math., т. 40, стр. 340, сноска[1]), 1916.]

175. Пусть $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ регулярна в круге $|z|<R$. Положим $\mathfrak{M}(r)=|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots$ Тогда

$$M(r)\leqslant\mathfrak{M}(r)<\frac{r+\delta}{\delta}M(r+\delta)\quad(\delta>0,\ r+\delta<R).$$

176. (Продолжение.) Пусть $\mathfrak{M}_n(r)$ имеет то же значение для $[f(z)]^n$, какое $\mathfrak{M}(r)$ имеет для $f(z)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}[\mathfrak{M}_n(r)]^{\frac{1}{n}}=M(r).$$

177. Получить с помощью II **123** новое доказательство теоремы Адамара о трех кругах [III **304**].

178. Доказать следующее обобщение теоремы **160**. Пусть ω_n имеет то же значение, что и в задаче **157**; тогда в предположениях теоремы **160** имеет место оценка

$$|a_n|\leqslant\omega_n(1-M^{1-n}).$$

179. Пусть теорема С. Н. Бернштейна о тригонометрических полиномах [VI **82**] известна в следующей неточной форме: существует такая абсолютная постоянная K, $K>0$, что для тригонометрического полинома n-го порядка $\varphi(\vartheta)$, не превосходящего по модулю единицы, выполняется неравенство

$$|\varphi'(\vartheta)|\leqslant n+K.$$

Как от этой оценки перейти к точной оценке

$$|\varphi'(\vartheta)|\leqslant n?$$

§ 3. Прямолинейное приближение к существенно особой точке

180. Существуют целые функции, возрастающие с произвольно большой скоростью, когда $z\to\infty$ вдоль некоторого луча. Точнее говоря, какова бы ни была функция $\varphi(x)$, положительная и монотонно возрастающая при $x\geqslant 0$, всегда найдется целая функция $g(z)$, принимающая вещественные значения при вещественных z и удовлетворяющая при $x\geqslant 0$ неравенству $g(x)>\varphi(x)$. (III 290.)

181. Существуют целые функции, которые при $z\to\infty$ вдоль положительной вещественной оси стремятся к нулю, а вдоль всех остальных лучей, исходящих из начала, — к бесконечности. Может ли вести себя так целая рациональная функция?

182. Существуют целые трансцендентные функции, стремящиеся к бесконечности вдоль всех лучей, исходящих из начала. Может ли это стремление к бесконечности быть равномерным?

183. Существуют целые функции, которые вдоль вещественной положительной оси принимают вещественные значения и стремятся к $+\infty$, а вдоль всех остальных лучей, исходящих из начала, стремятся к нулю. Может ли вести себя так целая функция конечного порядка?

184. Существуют целые функции $\not\equiv 0$, которые стремятся к нулю вдоль всех лучей, исходящих из начала.

185. Существуют целые функции, которые вдоль лучей, выходящих из начала в верхнюю (открытую) полуплоскость, стремятся к $+1$, а вдоль лучей, выходящих из начала в нижнюю (открытую) полуплоскость, стремятся к -1. Более того, сходимость равномерна в каждом угле $\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$, соотв. $-\pi+\varepsilon<$ $<\arg z<-\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

186. Пусть плоскость разбита n лучами, выходящими из нулевой точки, на n углов. Существует целая функция, которая в каждом из этих углов (с тем же уточнением, что и в **185**) стремится соответственно к $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольно заданные комплексные числа.

187. Разобьем каким-нибудь образом лучи, выходящие из нулевой точки, на две категории. Существует ли для каждого такого разбиения целая функция, которая вдоль лучей первой категории стремится к нулю, а вдоль лучей второй — к бесконечности?

§ 4. Асимптотические значения целых функций

Если целая функция $g(z)$, не тождественно постоянная, стремится вдоль некоторой непрерывной, уходящей в бесконечность кривой к пределу a, то этот предел a называется *асимптотическим значением* функции $g(z)$. Например, 0 есть асимптотическое значение функции e^z.

188. 0 и ∞ являются единственными асимптотическими значениями функции e^z.

189. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и ∞ являются единственными асимптотическими значениями функции $\int\limits_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

190. Целая функция порядка n (n — целое положительное)

$$z-\frac{z^{2n+1}}{3!\,(2n+1)}+\frac{z^{4n+1}}{5!\,(4n+1)}-\ldots$$

имеет в точности $2n$ различных конечных асимптотических значений.

191. Пусть последовательность положительных чисел a_0, a_1, a_2, ..., a_m, ... выбрана так, чтобы ряд

$$g(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}a_m\int\limits_0^{z^{8m}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

равномерно сходился в каждой конечной области плоскости z и представлял, таким образом, некоторую целую функцию $g(z)$. [Полагаем, например, $a_m=\exp(-m^{8^m})$.]

Показать, что множество асимптотических значений определенной так целой функции $g(z)$ имеет мощность континуума. Точнее: все значения вида

$$\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m a_m \qquad (\varepsilon_m=+1 \text{ или } -1)$$

являются асимптотическими.

192. Если целая функция стремится вдоль n лучей, выходящих из начала, к n различным конечным пределам, то ее порядок больше или равен $\frac{n}{2}$.

193. ∞ является асимптотическим значением для каждой целой не тождественно постоянной функции.

194. Комплексное число a называется *исключительным значением* (в смысле Пикара) целой функции $g(z)$, если функция $g(z)-a$ имеет только конечное число нулей. Показать, что если исключительное значение существует, то оно является асимптотическим значением функции.

§ 5. Дальнейшие приложения метода Фрагмена-Линделёфа

195. Пусть функция $f(z)$ неограниченно продолжаема в круговом кольце $0<|z|<1$. Если при этом $f(z)$ и все ее производные $f'(z)$, $f''(z)$, ... остаются ограниченными, то $f(z)$ однозначна в указанной области и регулярна в точке $z=0$.

196. Пусть $g(z)$ — целая функция рода 0 и ε — наперед заданное положительное число. Показать, что на всех окружностях с достаточно большими радиусами

$$|g(z)|<e^{\varepsilon|z|}$$

и на некоторых окружностях с произвольно большими радиусами

$$|g(z)|>e^{-\varepsilon|z|}.$$

197. Пусть $M(r)$ — максимум и $m(r)$ — минимум модуля целой функции на окружности $|z|=r$. Если

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}=\lambda$$

и $\lambda<\frac{1}{2}$, то тогда также

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln m(r)}{\ln r}=\lambda. \qquad [196,\ \text{III}\ 332.]$$

198. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — положительные числа и ряд

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n}+\ldots$$

расходится. Если функция $h(t)$, собственно интегрируемая в интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 t^{\lambda_n}h(t)\,dt=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то $h(t)=0$ во всякой точке непрерывности t. (Обобщение теоремы II 139.) $\left[\int_0^1 t^z h(t)\,dt\right.$ является аналитической функцией от z, III 298.$\left.\right]$

199. Пусть $g(z)$ — целая трансцендентная функция порядка $\lambda<\frac{1}{2}$ с коэффициентами, отличными от нуля, и простыми нулями $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ ($w_k\neq w_l$, если $k\neq l$). Если функция $h(t)$, собственно интегрируемая в интервале $0\leqslant t\leqslant 1$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 g(w_n t)\,h(t)\,dt=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то $h(t)=0$ во всякой точке непрерывности t. [II 139.]

200. Пусть $g(z)$ — целая трансцендентная функция рода 0, имеющая лишь вещественные и простые нули $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ Если функция $h(t)$, собственно интегрируемая в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяет условию

$$\int_0^1 g(w_n t)\, h(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

то $h(t) = 0$ во всякой точке непрерывности t. [Можно, например, положить $g(z) = J_0(\sqrt{z})$ или $\cos \pi \sqrt{z}$.]

201. Положим

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} z^n + \ldots = F(z),$$

и пусть существуют две такие положительные постоянные ρ и M, что

1) последовательность a_0, $a_1\rho^{-1}$, $a_2\rho^{-2}$, $\ldots$, $a_n\rho^{-n}$, $\ldots$ остается ограниченной и

2) $|F(z)| \leqslant M$ при всех вещественных значениях z.

Тогда для всех вещественных значений z имеет место также неравенство

$$|F'(z)| \leqslant \rho M,$$

причем равенство достигается лишь для $F(z) = A \cos \rho z + B \sin \rho z$, где A и B — постоянные. (Обобщение теоремы VI 82.) [III 165.]

202. (Продолжение.) Пусть d — расстояние точки z от вещественной оси ($d = |\Im z|$). Показать, что

$$|F(z)| \leqslant M e^{\rho d}.$$

(Аналог теоремы III 270.)

203. Пусть целая функция $G(z)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $F(z)$ в **201**, и, кроме того, является нечетной: $G(-z) = -G(z)$. Тогда при вещественных z

$$\left| \frac{G(z)}{z} \right| \leqslant \rho M.$$

Равенство может достигаться лишь для функции $G(z) = cM \sin \rho z$, $|c| = 1$, и при $z = 0$. (Аналог теоремы VI 81.) [III 166.]

204. (Продолжение.) Вывести **201** из **203**.

205. Пусть целая функция $f(z)$ порядка λ, $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$, ограничена вдоль положительной вещественной оси. Тогда для всякого положительного ε при x, стремящемся к $+\infty$ по положительным значениям, имеем

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1-\lambda-\varepsilon} f'(x) = 0.$$

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ

ГЛАВА I

ТЕОРЕМА РОЛЛЯ И ПРАВИЛО ДЕКАРТА

В настоящей главе мы рассматриваем вещественные функции вещественного переменного x; в частности, вещественными предполагаются и коэффициенты a_0, a_1, a_2, ... рассматриваемых полиномов $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ и степенных рядов $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Далее, в случае, если не оговорено противное, все вводимые функции предполагаются в указанных интервалах аналитическими. Однако утверждаемые теоремы нуждаются лишь в небольшом изменении или даже вовсе ни в каком при замене этого предположения более слабым, например при требовании существования производных до некоторого порядка включительно. Всюду в дальнейшем нули считаются по своей кратности.

Далее мы рассматриваем последовательности a_0, a_1, a_2, ... вещественных чисел, содержащие конечное или бесконечное множество членов; порядок членов имеет существенное значение. Индекс m называется *местом перемены знака*, если

$$a_{m-1}a_m < 0, \quad m \geqslant 1,$$

либо если

$$a_{m-1} = a_{m-2} = \ldots = a_{m-k+1} = 0 \text{ и } a_{m-k}a_m < 0,$$

$m \geqslant k \geqslant 2$. В первом случае a_{m-1} и a_m, во втором a_{m-k} и a_m образуют *перемену знака*. Число перемен знака (= число мест перемены знака) некоторой последовательности останется неизменным, если члены, равные нулю, будут опущены, а оставшиеся члены сохранят свое взаимное расположение.

§ 1. Нули функций, перемены знака последовательностей

1. Последовательности

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ и } a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$$

обладают одним и тем же числом перемен знака.

2. При вычеркивании членов последовательности число перемен знака не увеличивается.

3. При вставке между членами последовательности любого количества членов, равных нулю, число перемен знака не изменяется. Точно так же это число не изменится, если рядом с некоторым членом последовательности вставить новый, одного с ним знака.

4. Последовательность $a_0, \ a_0+a_1, \ a_1+a_2, \ \ldots, \ a_{n-1}+a_n, \ a_n$ обладает не бо́льшим числом перемен знака, чем последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. Пусть бесконечная последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет лишь конечное число W перемен знака. Показать, что образованная с ее помощью последовательность

$$a_0, \ a_0+a_1, \ a_0+2a_1+a_2, \ \ldots, \ a_0+\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2+\ldots+a_n, \ \ldots$$

также обладает лишь конечным, притом не бо́льшим, чем W, числом перемен знака. [4.]

Наметим на плоскости прямоугольных координат точки $(0, a_0)$ $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $\ldots$, (n, a_n), $\ldots$ и соединим их в последовательном порядке прямолинейными отрезками (горизонтальные проекции которых, таким образом, все равны единице). На получающемся чертеже чрезвычайно ясно выступают все места перемены знака. На кривой $y=f(x)$, изображающей вещественную аналитическую функцию $f(x)$, нули этой функции не выступают так отчетливо, ибо даже при самом точном чертеже не всегда возможно отличить между собой нули кратности 2 и 4 или нули кратности 3 и 5 и т. д.

6. В интервале, в котором всюду $\varphi(x)>0$, функции $f(x)$ и $f(x)\varphi(x)$ имеют одни и те же нули.

7. Если $p_0>0, \ p_1>0, \ p_2>0, \ \ldots,$ то последовательности

$$a_0, a_1, a_2 \ldots \text{ и } a_0p_0, a_1p_1, a_2p_2, \ldots$$

имеют одни и те же места перемены знака.

8. Пусть значения $f(x)$ в точках a и b отличны от нуля. Тогда интервал $a<x<b$ будет содержать четное или нечетное число нулей этой функции, смотря по тому, будут ли $f(a)$ и $f(b)$ иметь одинаковые или же противоположные знаки.

9. Пусть a_j и a_k отличны от нуля. Ограниченная ими часть последовательности $a_j, \ a_{j+1}, \ \ldots, \ a_{k-1}, \ a_k$ будет иметь четное или нечетное число перемен знака, смотря по тому, будут ли a_j и a_k иметь одинаковые или же разные знаки.

10. (Теорема Ролля.) Если a и b — два соседних нуля функции $f(x)$ [т. е. $f(a)=f(b)=0, \ f(x)\neq 0$ при $a<x<b$], то

в интервале $a<x<b$ производная $f'(x)$ имеет нечетное число нулей (следовательно, по меньшей мере один).

11. Если $j+1$ и $k+1$ суть соседние места перемены знака последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$, то разностная последовательность

$$a_{j+1}-a_j,\ a_{j+2}-a_{j+1},\ \ldots,\ a_k-a_{k-1},\ a_{k+1}-a_k$$

имеет нечетное число перемен знака (следовательно, по меньшей мере одну).

12. Если в интервале a, b функция $f(x)$ имеет N нулей, то $f'(x)$ имеет в этом же интервале самое меньшее $N-1$ нулей. Теорема справедлива независимо от того, будет ли интервал a, b открытым, замкнутым или полуоткрытым; он может даже приводиться к одной точке.

13. Если последовательность

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

имеет W перемен знака, то составленная из нее разностная последовательность

$$a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1}$$

будет иметь самое меньшее $W-1$ перемену знака.

14. Если $f(x)$ в конечном интервале $a<x<b$ имеет N нулей и удовлетворяет одному из условий

$$\operatorname{sgn} f(a)=\operatorname{sgn} f'(a)\neq 0,\quad \operatorname{sgn} f(b)=-\operatorname{sgn} f'(b)\neq 0,$$

то $f'(x)$ имеет в том же интервале (a, b) не менее N нулей. Если выполнены оба условия, то $f'(x)$ в (a, b) будет иметь их не менее чем $N+1$.

15. Если конечная последовательность

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

имеет W перемен знака, то образованная из нее последовательность

$$a_0,\ a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1},\ -a_n$$

будет иметь их не менее $W+1$. (За исключением того тривиального случая, когда все члены a_ν последовательности равны нулю.)

16. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, то $f'(x)$ между a и $+\infty$ имеет не меньшее количество нулей, чем $f(x)$. (То же, конечно, будет справедливо, если вместо $+\infty$ взять $-\infty$.)

17. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то бесконечная последовательность

$$a_0,\ a_1-a_0,\ a_2-a_1,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1},\ \ldots$$

обладает бо́льшим числом перемен знака, чем первоначальная последовательность

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

18. Пусть $f(x)$ имеет в интервале $0<x<\infty$ N нулей. Тогда функция

$$\alpha f(x)+f'(x),$$

где α вещественно, будет иметь в этом интервале по меньшей мере $N-1$ нулей; более того, если выполнено условие $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}f(x)=0$, то указанная функция имеет минимум N нулей.

19. Пусть бесконечная последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет W перемен знака. Тогда последовательность

$$\alpha a_0,\ \alpha a_1-a_0,\ \alpha a_2-a_1,\ \ldots,\ \alpha a_n-a_{n-1},\ \ldots,$$

где $\alpha>0$, имеет по меньшей мере W перемен знака. Если, кроме того, выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\alpha^n=0$, то указанная последовательность имеет даже минимум $W+1$ перемену знака.

20. Если функция $f(x)$ имеет в интервале $0<x<\infty$ N нулей, то функция $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ имеет в том же интервале не более N нулей.

21. Если последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет W перемен знака, то последовательность

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots,\ a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ldots$$

имеет не более W перемен знака.

§ 2. Изменения знака функции

Мы говорим, что функция $f(x)$ в некотором интервале *сохраняет знак*, в двух случаях, а именно: 1) если она постоянно $\leqslant 0$, 2) если она постоянно $\geqslant 0$. Пусть интервал $a<x<b$ разделен на $Z+1$ подинтервалов так, что 1) функция $f(x)$ не обращается тождественно в нуль ни в одном из этих интервалов; 2) в каждом отдельном интервале она сохраняет постоянный знак и 3) в каждых двух соседних интервалах $f(x)$ имеет противоположные знаки. Тогда говорят, что в интервале $a<x<b$ *$f(x)$ имеет Z изменений знака.* При переходе через нуль нечетного порядка аналитическая функция претерпевает изменение знака, при переходе через нуль четного порядка — нет. Понятие изменения знака оказывается полезным и при изучении многих неаналитических функций.

22. Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля и имеет постоянный знак как в некоторой окрестности точки a, так и в некоторой окрестности точки b. Показать, что в интервале $a<x<b$ функция имеет четное или нечетное количество изменений знака, смотря по тому, будут ли $f(a)$ и $f(b)$ иметь одинаковые или же противоположные знаки.

23. Если функция $f(x)$ имеет в интервале $0 < x < \infty$ Z изменений знака, то функция $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ имеет в том же интервале не более Z изменений знака.

24. Пусть Z — число изменений знака и N — число нулей функции $f(x)$ в одном и том же открытом интервале. Показать, что тогда $N-Z$ будет неотрицательным четным числом.

25. Если $f(a)=f(b)=0$, то в интервале $a<x<b$ производная $f'(x)$ имеет нечетное число изменений знака.

26. Пусть вещественные числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не равны нулю и $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. В некоторых случаях можно утверждать, что дробно-рациональная функция

$$f(x)=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

имеет лишь вещественные нули. В частности, это имеет место в следующих двух случаях:

1) $A_1>0,\ A_2>0,\ \ldots,\ A_{n-1}>0$;

2) $A_1>0,\ A_2>0,\ \ldots,\ A_{k-1}>0,\ A_{k+1}>0,\ \ldots,\ A_n>0,$

$$A_1+A_2+\ldots+A_n<0,\quad 1<k<n.$$

27. Тригонометрический полином

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots+a_n\cos nx$$

с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ наверное имеет лишь вещественные нули, если выполняется неравенство

$$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{n-1}|<a_n.$$

§ 3. Первое доказательство правила Декарта

Под *переменами знака* и *местами перемены знака* полинома

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

или же степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

понимают перемены знака и места перемены знака конечной или бесконечной последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \text{соотв.}\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

его коэффициентов.

28. Если α положительно, то полиномы $P(x)$ и $P(\alpha x)$ имеют одинаковое число перемен знака.

29. Обозначим числа перемен знака полиномов

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$
$$P(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-\ldots+(-1)^n a_nx^n$$

через W^+, соотв. W^-. Показать, что

$$W^+ + W^- \leqslant n.$$

30. Пусть $\alpha>0$. При переходе от полинома

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

к полиному

$$(\alpha-x)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)=$$
$$=\alpha a_0+(\alpha a_1-a_0)x+(\alpha a_2-a_1)x^2+\ldots-a_nx^{n+1}$$

число перемен знака возрастает и притом на нечетное число. [Для случая $\alpha=1$ см. 15.]

31. Пусть $\alpha>0$. При переходе от степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

к степенному ряду

$$(\alpha-x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=$$
$$=\alpha a_0+(\alpha a_1-a_0)x+(\alpha a_2-a_1)x^2+\ldots$$

число перемен знака не уменьшается. Более того, оно наверное возрастает, если первоначальный ряд $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ сходится при $x=\alpha$.

32. Пусть $\alpha>0$. При переходе от степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

к степенному ряду

$$(\alpha+x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)=$$
$$=\alpha a_0+(\alpha a_1+a_0)x+(\alpha a_2+a_1)x^2+\ldots$$

число перемен знака не может возрасти.

33. При переходе от степенного ряда

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

к степенному ряду

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{1-x}=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\ldots$$

число перемен знака не может возрасти.

34. Пусть $\alpha > 0$. При переходе от степенного ряда

$$a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \ldots$$

к степенному ряду

$$e^{\alpha x}\left(a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0\alpha^n + \binom{n}{1}a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n}{n!}x^n$$

число перемен знака не может возрасти.

35. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — положительные числа. Положим

$$a_0 + \frac{a_1 x}{p_1 - x} + \frac{a_2 x^2}{(p_1 - x)(p_2 - x)} + \ldots + \frac{a_n x^n}{(p_1 - x)(p_2 - x)\ldots(p_n - x)} =$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

(для достаточно малых x ряд сходится). Показать, что число перемен знака в конечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ будет не меньше числа перемен знака в бесконечной последовательности $A_0, A_1, A_2, \ldots$ [Полная индукция, 31.]

---

36. (*Правило знаков Декарта.*) Пусть N — число положительных нулей полинома $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ и W — число перемен знака в последовательности его коэффициентов. Показать, что

$$W - N \geqslant 0. \qquad [30.]$$

37. (Продолжение.) $W - N$ есть четное число.

38. Пусть ρ — радиус сходимости степенного ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, N — число его нулей в интервале $0 < x < \rho$ и W — число перемен знака в последовательности коэффициентов этого ряда. Показать, что

$$N \leqslant W.$$

Значит, в частности, если W конечно, то N также конечно. [Наряду с 31 применить некоторые сведения из теории функций.]

39. Степенной ряд

$$2 - \frac{x}{1\cdot 2} - \frac{x^2}{2\cdot 3} - \frac{x^3}{3\cdot 4} - \ldots$$

не имеет нулей в своем круге сходимости. (Последовательность его коэффициентов имеет одну перемену знака — теорема 37 на степенные ряды автоматически не переносится!)

40. (Продолжение задачи 38.) Если $\rho = \infty$ или же ρ конечно, но ряд $a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots$ расходится, то разность $W - N$ представляет собой неотрицательное четное число (здесь предполагается, что W конечно).

41. Обозначим наименьшее из вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n$ через ξ_α, а наибольшее — через ξ_ω. Число нулей полинома

$$a_0+a_1(x-\xi_1)+a_2(x-\xi_1)(x-\xi_2)+\ldots+a_n(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n),$$

лежащих в интервале $\xi_\omega<x<\infty$, либо равно, либо на четное число меньше числа перемен знака в последовательности

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

а число нулей этого полинома, лежащих в интервале $-\infty<$ $<x<\xi_\alpha$, точно так же либо равно, либо на четное число меньше числа перемен знака в последовательности

$$a_0,\ -a_1,\ a_2,\ -a_3,\ \ldots,\ (-1)^n a_n.$$

(При $\xi_1=\xi_2=\ldots=\xi_n$ равносильно 36, 37.) [35.]

§ 4. Применения правила Декарта

42. Трансцендентное уравнение

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}=\lambda e^x,$$

где λ — положительная правильная дробь, имеет единственный положительный корень; с возрастанием n этот корень монотонно возрастает до бесконечности.

43. Функция $x^{-5}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^{-1}$ положительного переменного x при $x\to 0$ и $x\to\infty$ стремится к нулю, а в промежутке между нулем и бесконечностью имеет один максимум и вовсе не имеет минимума.

44. Пусть радиус сходимости степенного ряда a_0+a_1x+ $+a_2x^2+\ldots$ будет $\geqslant 1$. Показать, что число нулей этого степенного ряда в интервале $0<x<1$ не превышает числа перемен знака в последовательности

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots,\ a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n,\ \ldots$$

45. Уравнение

$$\left(\frac{1}{19}\right)x+\left(\frac{2}{19}\right)x^2+\left(\frac{3}{19}\right)x^3+\ldots+\left(\frac{18}{19}\right)x^{18}=0,$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра *), имеет только один положительный

*) По поводу символа Лежандра см., например, И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд. 8-е, Гостехиздат, 1972.

корень, именно $x=1$. [Уравнение — возвратное, так что достаточно исследовать нули в интервале $0<x<1$, применяя 44, 33.]

46. Уравнение 162-й степени

$$\left(\frac{1}{163}\right)x+\left(\frac{2}{163}\right)x^2+\left(\frac{3}{163}\right)x^3+\ldots+\left(\frac{162}{163}\right)x^{162}=0$$

имеет ровно пять положительных корней, причем все эти корни — простые. [Исследовать точку $x=0{,}7$.]

47. (Дополнение к 36.) Если полином $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ имеет лишь вещественные нули, то $N=W$.

48. Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — целые числа, $0\leqslant\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_n$, далее $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$. Показать, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\nu_1} & \alpha_1^{\nu_2} & \ldots & \alpha_1^{\nu_n} \\ \alpha_2^{\nu_1} & \alpha_2^{\nu_2} & \ldots & \alpha_2^{\nu_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^{\nu_1} & \alpha_n^{\nu_2} & \ldots & \alpha_n^{\nu_n} \end{vmatrix} > 0.$$

(Этот определитель является обобщением определителя Вандермонда, получающегося при $\nu_1=0, \nu_2=1, \ldots, \nu_n=n-1$.) [Доказать сначала, что определитель не равен нулю, 36.]

49. Пусть $a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$ и $2m$ последовательных коэффициентов полинома $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ равны нулю (m — целое положительное). Тогда полином имеет по меньшей мере $2m$ мнимых нулей.

50. Пусть полином $P(x)$ имеет лишь вещественные нули, причем $P(0)=1$, $P(x)\neq\mathrm{const}$. Положим

$$\frac{1}{P(x)}=1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots$$

Полиномы $1+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{2m}x^{2m}$ имеют лишь мнимые нули. [49.]

51. Пусть m — целое число, большее или равное единице, и

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n},$$

где сумма распространена на все системы неотрицательных целых чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$, удовлетворяющих соотношению

$$l_1+l_2+\ldots+l_n=2m.$$

Показать, что однородная симметрическая функция $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является положительно определенной, т. е. больше нуля при всех системах значений x_1, $x_2, \ldots, x_n$, кроме $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

52. Пусть полином $P(x) = x^n + \ldots$ имеет лишь положительные нули. Показать, что в разложении

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^n} + \frac{B_n}{x^{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{x^{n+2}} + \ldots$$

все коэффициенты B_n, B_{n+1}, ... положительны.

§ 5. Применения теоремы Ролля

53. Производная полинома имеет не больше мнимых нулей, чем сам полином.

54. Кратные нули производной полинома, имеющего лишь вещественные нули, являются также кратными нулями самого полинома.

55. Все производные полинома, имеющего лишь вещественные и притом простые нули, также имеют лишь вещественные и простые нули, причем каждый нуль $(\nu+1)$-й производной лежит между двумя соседними нулями ν-й производной.

56. Последовательные производные функции $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеют лишь вещественные и притом простые нули, причем каждый нуль ν-й производной лежит между двумя соседними нулями $(\nu+1)$-й.

57. То же, что в 56, имеет место и для последовательных производных функции $x(1+x^2)^{-1}$.

58. Полиномы Лежандра, Лагерра и Эрмита можно определить посредством формул

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad e^{-x} L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^n,$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

[VI 84, VI 99, VI 100]. Показать, исходя из этого определения, что указанные полиномы имеют лишь вещественные и притом простые нули, расположенные соответственно в интервалах

$$(-1, +1), \ (0, +\infty), \ (-\infty, +\infty).$$

(VI 97, VI 99, VI 100.)

59. Пусть q — целое число $\geqslant 2$. Положим

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x^{q-1}}{1+x^q} \right) = \frac{Q_n(x)}{(1+x^q)^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^q} = e^{-x^q} R_n(x).$$

Проведем в плоскости комплексного переменного из начала координат q лучей, делящих полный угол 2π на q равных частей, причем одним из этих лучей пусть служит положительная вещественная полуось. Показать, что нули полиномов $Q_n(x)$, $R_n(x)$ лежат на этих лучах и распределены на них совершенно одинаково, причем не совпадающие с началом координат являются простыми. (Частный случай $q=2$ рассмотрен уже в 57, 58.)

---

60. Пусть μ, ν — целые числа, $0 \leqslant \mu < \mu+\nu \leqslant n$. Показать, что ни один из полиномов

$$a_\mu + \binom{\nu}{1} a_{\mu+1}x + \binom{\nu}{2} a_{\mu+2}x^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1} a_{\mu+\nu-1}x^{\nu-1} + a_{\mu+\nu}x^\nu$$

не имеет больше мнимых корней, чем полином

$$a_0 + \binom{n}{1} a_1x + \binom{n}{2} a_2x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

(Обобщение теоремы 53.)

61. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, не все равные между собой. Положим

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n + \binom{n}{1} m_1x^{n-1} + \binom{n}{2} m_2^2x^{n-2} + \ldots + m_n^n,$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ положительны. Очевидно, m_1 есть среднее арифметическое, а m_n — среднее геометрическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Показать, что

$$m_1 > m_2 > m_3 > \ldots > m_{n-1} > m_n.$$

---

62. Пусть α вещественно, $P(x)$ — произвольный полином. Показать, что полином $\alpha P(x) + P'(x)$ имеет не больше мнимых нулей, чем первоначальный полином $P(x)$. (Обобщение теоремы 53.)

63. Если уравнение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

имеет лишь вещественные корни, то полином

$$a_0P(x) + a_1P'(x) + \ldots + a_nP^{(n)}(x),$$

где $P(x)$ — произвольный полином, имеет не более мнимых нулей, чем сам полином $P(x)$.

64. Полином

$$P(x) - \frac{P''(x)}{1!} + \frac{P^{(IV)}(x)}{2!} - \frac{P^{(VI)}(x)}{3!} + \ldots$$

имеет не больше мнимых нулей, чем сам полином $P(x)$.

65. Если уравнение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

имеет лишь вещественные корни, то тем же свойством обладает и уравнение

$$a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}x^n=0.$$

---

66. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени. Если вещественное число α лежит вне интервала $[-n, 0]$, то $\alpha P(x)+xP'(x)$ имеет не больше мнимых нулей, чем $P(x)$. (Обобщение теоремы 53, отличное от 60 и 62.)

67. Если все нули полинома $Q(x)$ вещественные и лежат вне интервала $[0, n]$, то уравнение

$$a_0Q(0)+a_1Q(1)x+a_2Q(2)x^2+\ldots+a_nQ(n)x^n=0$$

имеет не больше мнимых корней, чем уравнение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0.$$

68. Пусть $0<q<1$. Показать, что уравнение

$$a_0+a_1qx+a_2q^4x^2+\ldots+a_nq^{n^2}x^n=0$$

имеет не больше мнимых корней, чем уравнение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0.$$

69. Пусть $q>0$. Показать, что уравнение

$$2a_0+(q+q^{-1})a_1x+\left(q^{\sqrt{2}}+q^{-\sqrt{2}}\right)a_2x^2+\ldots+\left(q^{\sqrt{n}}+q^{-\sqrt{n}}\right)a_nx^n=0$$

имеет не больше мнимых корней, чем уравнение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0.$$

---

70. Если кривая $y=f(x)$ пересекает некоторую прямую в трех различных точках, то между крайними точками пересечения находится по крайней мере одна точка перегиба кривой.

71. Если данная функция совпадает с некоторым полиномом $(n-1)$-й степени в $n+1$ точке, то n-я производная этой функции обращается в нуль по крайней мере в одной промежуточной точке.

72. Разность

$$(1+x)^\alpha-\left(1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}x^{n-1}\right),$$

где $\alpha \neq 0$ — вещественное постоянное число, обращается в нуль в точке $x=0$ и больше ни в одной точке интервала $(-1, \infty)$.

73. Остаток показательного ряда

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots$$

не обращается в нуль ни при каком вещественном значении x кроме $x=0$.

74. Показать, что n-я частичная сумма показательного ряда

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

либо совсем не имеет вещественных нулей, либо имеет только один, смотря по тому, будет ли n четным или нечетным.

75. Пусть полиномы $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_l(x) \not\equiv 0$ и имеют соответственно степени m_1-1, m_2-2, ..., m_l-1, далее $a_1, a_2, \ldots$ ..., a_l — отличные друг от друга вещественные числа. Показать, что

$$g(x)=P_1(x)e^{a_1x}+P_2(x)e^{a_2x}+\ldots+P_l(x)e^{a_lx}$$

имеет самое большее $m_1+m_2+\ldots+m_l-1$ вещественных нулей.

76. Пусть $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$, $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$. Тогда

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1\beta_1} & e^{\alpha_1\beta_2} & \ldots & e^{\alpha_1\beta_n} \\ e^{\alpha_2\beta_1} & e^{\alpha_2\beta_2} & \ldots & e^{\alpha_2\beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{\alpha_n\beta_1} & e^{\alpha_n\beta_2} & \ldots & e^{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix} > 0.$$

(Обобщение теоремы 48.)

§ 6. Доказательство правила Декарта, принадлежащее Лагерру

77. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — вещественные числа, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n$. Обозначим через N число вещественных нулей целой функции

$$F(x)=a_1e^{\lambda_1x}+a_2e^{\lambda_2x}+\ldots+a_ne^{\lambda_nx}$$

и через W — число перемен знака в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ ..., a_n. Показать, что $W-N$ представляет собой неотрицательное четное число. (Отличное от 41 обобщение теорем 36, 37: заменить e^x на x.)

Доказательство. Без нарушения общности можно принять, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отличны от нуля. Что $W-N$ — четное, усматриваем из того, что при $x\to-\infty$ главным является член $a_1e^{\lambda_1x}$, а при $x\to+\infty$ — член $a_ne^{\lambda_nx}$. [8, 9, 37.] Что $W-N\geq 0$, доказываем посредством полной индукции, от $W-1$ к W, с помощью теоремы Ролля [решение 75]. В самом деле, если нет ни одной перемены знака, то, очевидно, N также равно нулю, и теорема, таким образом, верна. Примем, что она верна для случая, когда имеет место $W-1$ перемена знака. По предположению, $F(x)$ имеет W перемен знака, $W \geqslant 1$. Пусть $\alpha+1$ будет одно из мест перемены знака, $1 \leqslant \alpha < n$, $a_\alpha a_{\alpha+1} < 0$. Выберем некоторое число λ в промежутке $\lambda_\alpha < \lambda < \lambda_{\alpha+1}$ и рассмотрим функцию

$$F^*(x) = e^{\lambda x} \frac{d\,[e^{-\lambda x} F(x)]}{dx} = a_1 (\lambda_1 - \lambda) e^{\lambda_1 x} + \ldots + a_\alpha (\lambda_\alpha - \lambda) e^{\lambda_\alpha x} + \\ + a_{\alpha+1} (\lambda_{\alpha+1} - \lambda) e^{\lambda_{\alpha+1} x} + \ldots + a_n (\lambda_n - \lambda) e^{\lambda_n x}.$$

Обозначим число нулей этой функции $F^*(x)$ через N^*. Имеем [6, 12]

$$N^* \geqslant N - 1.$$

Далее, обозначим число перемен знака в последовательности ее коэффициентов $-a_1(\lambda - \lambda_1)$, $-a_2(\lambda - \lambda_2)$, ..., $-a_\alpha(\lambda - \lambda_\alpha)$, $a_{\alpha+1}(\lambda_{\alpha+1} - \lambda)$, ..., $a_n(\lambda_n - \lambda)$ через W^*. Очевидно,

$$W^* = W - 1.$$

Но согласно предположению индукции (справедливость теоремы для $W-1$)

$$W^* \geqslant N^*.$$

Отсюда получаем

$$W \geqslant N,$$

что и требовалось доказать.

Была ли необходимость заранее принимать, что все $a_1, a_2, \ldots$ ..., a_n не равны нулю? Можно ли было бы выбрать $\lambda = \lambda_\alpha$ или $\lambda = \lambda_{\alpha+1}$?

78. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$. Показать, что ряд Дирихле

$$a_1 e^{-\lambda_1 x} + a_2 e^{-\lambda_2 x} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n x} + \ldots$$

внутри своей области сходимости (некоторой ограниченной слева полуплоскости) имеет не больше вещественных нулей, чем последовательность коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеет перемен знака. (Обобщение теоремы 38.)

79. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$n \geqslant 2, \quad a_\nu \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n.$$

Пусть, далее, полином

$$P(x) = a_1 (x - \lambda_1)^m + a_2 (x - \lambda_2)^m + \ldots + a_n (x - \lambda_n)^m$$

(m — целое положительное число) не обращается тождественно в нуль. Показать, что число N вещественных нулей полинома $P(x)$ не превосходит числа W перемен знака в последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ (-1)^m a_1. \qquad [77,\ 14.]$$

80. Пусть Z — число изменений знака функции $\varphi(\lambda)$ в интервале $0<\lambda<\infty$ и N — число вещественных нулей интеграла

$$F(x)=\int_0^\infty \varphi(\lambda)\,e^{-\lambda x}\,d\lambda.$$

Показать, что $N\leqslant Z$.

В число N входят, конечно, лишь нули, находящиеся внутри области сходимости (некоторой ограниченной слева полуплоскости). [Не предельным переходом от 77, а надлежащим переносом проведенных там доказательств!]

81. Интегралы

$$\int_0^\infty f(x)\,x^n\,dx=M_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(предполагаемые сходящимися) называются *моментами* функции $f(x)$. Рассмотрим случай, когда не все моменты равны нулю [II 139, III 153]. Примем, например, что $M_\mu\neq 0$, и положим

$$\begin{aligned}
&1)\ a_n= M_n, && \text{если } M_n\neq 0,\\
&2)\ a_n=-\operatorname{sgn} a_{n+1}, && \text{если } M_n=0 \text{ и } n<\mu,\\
&3)\ a_n=-\operatorname{sgn} a_{n-1}, && \text{если } M_n=0 \text{ и } n>\mu.
\end{aligned}$$

(Рекуррентное определение последовательности a_n; сначала надо определить знак a_μ.) Показать, что число изменений знака функции $f(x)$ не меньше числа перемен знака в последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$ (II 140 представляет собой частный случай этого предложения.)

82. (Продолжение задачи 80.) Число положительных нулей, лежащих внутри области сходимости, не превосходит числа изменений знака функции $\Phi(\lambda)=\int_0^\lambda \varphi(x)\,dx$. (Аналог теоремы 44.)

83. (Продолжение задачи 78.) Число положительных нулей, лежащих внутри области сходимости, не превышает числа перемен знака в последовательности

$$a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots$$

(Обобщение теоремы 44.) [80.]

84. Число положительных нулей факториального ряда

$$a_0+\frac{1!a_1}{x}+\frac{2!a_2}{x(x+1)}+\frac{3!a_3}{x(x+1)(x+2)}+\ldots,$$

лежащих внутри его области сходимости, не превосходит числа перемен знака в последовательности

$$a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \ldots$$

[Оно не превосходит даже числа нулей степенного ряда

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

лежащих в интервале $0<x<1$; 80, 44.]

85. Пусть коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \ldots$ бесконечного (необрывающегося) ряда

$$F(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots,$$

имеющего радиус сходимости ρ, неотрицательны. Пусть, далее, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вещественны и

$$0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n\leqslant 1.$$

Тогда число нулей функции

$$a_1F(\alpha_1x)+a_2F(\alpha_2x)+\ldots+a_nF(\alpha_nx),$$

лежащих в интервале $0<x<\rho$, не превышает числа перемен знака в последовательности

$$a_n,\ a_n+a_{n-1},\ a_n+a_{n-1}+a_{n-2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1 \quad [38,\ 83].$$

86. (Продолжение.) Если $0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$ и $\alpha_n\beta_n$ еще заключено внутри круга сходимости ряда $F(x)$, то

$$\begin{vmatrix} F(\alpha_1\beta_1) & F(\alpha_1\beta_2) & \ldots & F(\alpha_1\beta_n) \\ F(\alpha_2\beta_1) & F(\alpha_2\beta_2) & \ldots & F(\alpha_2\beta_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F(\alpha_n\beta_1) & F(\alpha_n\beta_2) & \ldots & F(\alpha_n\beta_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Отсюда без труда вытекает **76.**)

§ 7. На чем основывается правило Декарта?

Из **36**, **41**, **77**, **84**, **85** явствует, что рассматриваемые в них последовательности функций

$$\begin{array}{lllll} 1, & x, & x^2, & x^3, & \ldots, \\ 1, & x-\xi_1, & (x-\xi_1)(x-\xi_2), & & \ldots, \\ e^{\lambda_1x}, & e^{\lambda_2x}, & e^{\lambda_3x}, & & \ldots, \\ 1, & \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{x(x+1)}, & \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}, & \ldots, \\ F(\alpha_1x), & F(\alpha_2x), & F(\alpha_3x), & & \ldots \end{array}$$

обладают следующим общим свойством: число лежащих в некотором определенном интервале нулей всякой линейной комбинации из этих функций с постоянными коэффициентами не превосходит числа перемен знака в последовательности взятых коэффициентов. На чем же основывается эта применимость правила Декарта к столь разнообразным последовательностям функций?

87. Пусть последовательность функций

$$h_1(x),\ h_2(x),\ \dots,\ h_n(x)$$

следует правилу Декарта в открытом интервале $a<x<b$, т. е., точнее говоря, обладает следующим свойством: какова бы ни была последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ вещественных чисел, не всех равных нулю, число нулей линейной комбинации

$$a_1h_1(x)+a_2h_2(x)+\dots+a_nh_n(x),$$

лежащих в интервале $a<x<b$, не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Показать, что тогда последовательность $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ должна обладать следующим свойством: определители Вронского [VII, § 5]

$$W[h_{\nu_1}(x),\ h_{\nu_2}(x),\ h_{\nu_3}(x),\ \dots,\ h_{\nu_l}(x)],$$

образованные для всех систем целых чисел

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l \quad (1\leqslant\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_l\leqslant n),$$

не должны обращаться в нуль в интервале $a<x<b$. Кроме того, любые два из этих определителей, имеющие один и тот же порядок, должны иметь и общий знак. ($l=1, 2, 3, \dots$ — число строк). [Принять во внимание кратность нулей.]

88. (Продолжение.) В частности, для применимости правила Декарта необходимо, чтобы в интервале $a<x<b$ отношения

$$\frac{h_2(x)}{h_1(x)},\ \frac{h_3(x)}{h_2(x)},\ \dots,\ \frac{h_n(x)}{h_{n-1}(x)}$$

были все положительны и либо все постоянно убывали, либо все постоянно возрастали.

89. (Продолжение.) Пусть $1\leqslant\alpha\leqslant n$. Перечисленным в 87 условиям, налагаемым на определители Вронского, одновременно с $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ удовлетворяют также $n-1$ функций

$$H_1=-\frac{d}{dx}\frac{h_1}{h_\alpha},\qquad H_2=-\frac{d}{dx}\frac{h_2}{h_\alpha},\ \dots,\quad H_{\alpha-1}=-\frac{d}{dx}\frac{h_{\alpha-1}}{h_\alpha},$$

$$H_\alpha=\frac{d}{dx}\frac{h_{\alpha+1}}{h_\alpha},\ \dots,\quad H_{n-2}=\frac{d}{dx}\frac{h_{n-1}}{h_\alpha},\qquad H_{n-1}=\frac{d}{dx}\frac{h_n}{h_\alpha}.$$

[VII 58.]

90. (Продолжение.) Приведенное в 87 необходимое условие применимости правила Декарта является также достаточным [77].

91. Проверить выполнение критерия 87 для рассмотренных в 77 функций $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$.

§ 8. Обобщения теоремы Ролля

92. Пусть $0 < a < b$. Если $f(x)$ обращается в нуль в $n+1$ точке интервала $[a, b]$ и все нули полинома $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ $\ldots + a_n x^n$ — вещественные, то в некоторой внутренней точке ξ интервала a, b имеет место равенство

$$a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + a_2 f''(\xi) + \ldots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0. \qquad [63.]$$

93. (Обобщение теоремы Ролля на однородные линейные дифференциальные выражения.) Пусть дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + \varphi_1(x) y^{(n-1)} + \varphi_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_n(x) y = 0. \qquad (*)$$

имеет $n-1$ решений $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, удовлетворяющих в интервале $a < x < b$ условиям

$$h_1(x) > 0, \quad \begin{vmatrix} h_1(x) & h_1'(x) \\ h_2(x) & h_2'(x) \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

$$\ldots, \begin{vmatrix} h_1(x) & h_1'(x) & \ldots & h_1^{(n-2)}(x) \\ h_2(x) & h_2'(x) & \ldots & h_2^{(n-2)}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{n-1}(x) & h_{n-1}'(x) & \ldots & h_{n-1}^{(n-2)}(x) \end{vmatrix} > 0. \qquad (**)$$

Если в интервале $a < x < b$ лежит $n+1$ нуль функции $f(x)$, то в этом интервале существует такая точка ξ, что

$$f^{(n)}(\xi) + \varphi_1(\xi) f^{(n-1)}(\xi) + \varphi_2(\xi) f^{(n-2)}(\xi) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_n(\xi) f(\xi) = 0. \qquad [\text{VII } 62.]$$

94. (Продолжение.) Утверждение теоремы сохраняет силу и при замене предположения менее сильным, именно, что $f(x)$ совпадает в $n+1$ точке с одним из решений дифференциального уравнения (*). (Обобщение теоремы 71, относящейся к уравнению $y^{(n)} = 0$.)

95. (Обобщение дифференциальной теоремы о среднем значении на систему функций.) Отношение определителей

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

где $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, можно приравнять отношению определителей

$$\begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) & \ldots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) & \ldots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) & \ldots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \varphi_1'(\xi_2) & \ldots & \varphi_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ \varphi_2(\xi_1) & \varphi_2'(\xi_2) & \ldots & \varphi_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n(\xi_1) & \varphi_n'(\xi_2) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix},$$

если числам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ придать надлежащие промежуточные значения:

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_1 < \xi_2 < x_2, \quad \xi_2 < \xi_3 < x_3, \ldots, \xi_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

96. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Показать, что

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \ldots & \binom{x_n}{1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1(\xi_1) & f_1'(\xi_2) & \ldots & f_1^{(n-1)}(\xi_n) \\ f_2(\xi_1) & f_2'(\xi_2) & \ldots & f_2^{(n-1)}(\xi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(\xi_1) & f_n'(\xi_2) & \ldots & f_n^{(n-1)}(\xi_n) \end{vmatrix},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам, приведенным в конце предыдущей задачи.

97. Показать, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu+1})\ldots(x_\nu - x_n)} = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!},$$

где ξ — точка, заключенная внутри наименьшего интервала, содержащего попарно различные точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

98. Показать, что

$$f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n f(x) = h^n f^{(n)}(\xi),$$

где ξ заключено между x и $x+nh$ (h может принимать и отрицательные значения). В частности, при $n=1$ имеем обычную теорему о среднем значении.

99. (Отличное от 95 обобщение теоремы о среднем значении на системы функций.) Пусть функции $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ удовлетворяют неравенствам (**) задачи 93, $f(x)$ — произвольная функция и $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Показать, что существует такое ξ,

$x_1 < \xi < x_n$, что

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} h_1(x_1) & h_1(x_2) & \dots & h_1(x_n) \\ h_2(x_1) & h_2(x_2) & \dots & h_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1}(x_1) & h_{n-1}(x_2) & \dots & h_{n-1}(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn}\begin{vmatrix} h_1(\xi) & h_1'(\xi) & \dots & h_1^{(n-1)}(\xi) \\ h_2(\xi) & h_2'(\xi) & \dots & h_2^{(n-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-1}(\xi) & h_{n-1}'(\xi) & \dots & h_{n-1}^{(n-1)}(\xi) \\ f(\xi) & f'(\xi) & \dots & f^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix}.$$

[Полной индукцией; принять во внимание 89.]

100. Доказать 76, основываясь на 91.

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ

§ 1. Центр тяжести системы точек относительно некоторой точки

101. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ — произвольные конечные точки комплексной плоскости и в каждой из них сосредоточена соответственно неотрицательная масса $m_1, m_2, \dots, m_n$, где $m_1+m_2+ +\dots+m_n=1$. Показать, что при каждом линейном преобразовании комплексной плоскости, оставляющем бесконечно удаленную точку неподвижной, центр тяжести ζ этих масс также подвергается тому же преобразованию. Иными словами: если сосредоточить массы m_ν в соответствующих точках z_ν', в которые перешли при преобразовании старые точки z_ν, то центр тяжести этого нового распределения масс попадает как раз в ту точку ζ', в которую переходит при преобразовании старый центр тяжести ζ.

В последующем (102—156) под «точкой» комплексной плоскости будет пониматься любая, безразлично конечная или же бесконечно удаленная точка; под «окружностью» — окружность или прямая; последняя будет рассматриваться как окружность, проходящая через бесконечно удаленную точку; под «круговой областью» — замкнутая область, ограниченная «окружностью», т. е. либо замкнутая внутренняя, либо замкнутая внешняя область окружности, либо замкнутая полуплоскость, смотря по тому, будет ли бесконечно удаленная точка либо совсем не содержаться, либо содержаться внутри, либо находиться на границе этого «круга».

102. Пусть даны точки $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$, причем z отлично от всех $z_1, z_2, \ldots, z_n$, в то время как среди последних могут быть и совпадающие. Пусть, далее, даны массы

$$m_1 \geqslant 0, \quad m_2 \geqslant 0, \ldots, \quad m_n \geqslant 0, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1.$$

Требуется найти такую точку ζ, чтобы при линейном преобразовании плоскости, переводящем $n+2$ точки

$$z_1, z_2, \ldots, z_n; \ z; \ \zeta$$

соответственно в точки

$$z_1', z_2', \ldots, z_n'; \ \infty; \ \zeta',$$

центр тяжести масс m_ν, сосредоточенных в точках z_ν' ($\nu = 1, 2, \ldots \ldots, n$), попал как раз в ζ'.

Существует бесчисленное множество линейных преобразований, переводящих z в бесконечность. Однако точка ζ не зависит от выбора преобразования.

Точка $\zeta = \zeta_z$, однозначно определяемая в задаче 102 системой точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, сосредоточенными в них массами $m_1, m_2, \ldots \ldots, m_n$ ($m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$) и заданной точкой z, отличной от всех $z_1, z_2, \ldots, z_n$, называется *центром тяжести* системы точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *относительно* z. Если z — бесконечно удаленная точка ∞, то $\zeta_z = \zeta_\infty$ совпадает с обыкновенным центром тяжести.

103. Будем брать в фиксированных точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ самые различные распределения масс с общей суммой 1. Показать, что центры тяжести ζ_z всех таких распределений, взятые относительно некоторой точки z, не совпадающей ни с одной из $z_1, z_2, \ldots, z_n$, заполнят некоторую область $\mathfrak{K}_z$, ограниченную дугами «окружностей».

104. Пусть $\mathfrak{K}_z$ — определенный в предыдущей задаче «круговой» полигон и w_1, w_2 — две его точки. Рассмотрим «окружность», проходящую через w_1, w_2 и z. Показать, что та из двух дуг w_1, w_2, которая не проходит через z, содержится в $\mathfrak{K}_z$, иными словами, что область $\mathfrak{K}_z$ «выпукла» относительно z. (Мы будем называть $\mathfrak{K}_z$ *наименьшей «выпуклой» относительно z областью, содержащей точки* $z_1, z_2, \ldots, z_n$.)

105. Если все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ содержатся в некоторой круговой области K, а точка z — вне K, то «круговой» полигон $\mathfrak{K}_z$ задачи 103 целиком содержится внутри K.

Если в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ сосредоточены равные массы $\frac{1}{n}$, то ζ_z называется центром тяжести системы самих точек $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$ относительно точки z. В нижеследующих задачах имеются в виду только такие центры тяжести.

106. Пусть ζ_z — центр тяжести точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно точки z. Показать, что каждая «окружность», проходящая через z и ζ_z, разделяет точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ между собой, т. е. либо каждая из двух круговых областей, определяемых рассматриваемой «окружностью», содержит внутри хотя бы одну из точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, либо все эти точки лежат на самой «окружности».

107. (Продолжение.) Пусть все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ содержатся в некоторой круговой области K. Показать, что точки z и ζ_z не могут одновременно лежат вне K. Если одна из них, например z, лежит вне K, то тогда другая, ζ_z, будет находиться внутри K, за исключением того случая, когда все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат на границе K: в этом случае и ζ_z будет находиться на той же «окружности».

108. Рассмотрим все возможные системы чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, могущих принимать лишь k различных фиксированных значений w_1, $w_2, \ldots w_k$. Показать, что центры тяжести всех таких систем, взятые относительно точки z, не совпадающей ни с одной из точек w_1, $w_2, \ldots, w_k$, лежат всюду плотно в наименьшей области, «выпуклой» относительно z, содержащей точки $w_1, w_2, \ldots, w_k$.

109. Пусть точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ фиксированы, а переменная точка z стремится к z_1. К какому предельному положению стремится центр тяжести ζ_z системы точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно точки z?

110. Центр тяжести ζ_z системы конечных фиксированных точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно переменной точки z может быть разложен для достаточно больших z по убывающим степеням z. Вычислить первые два члена разложения.

§ 2. Центр тяжести полинома относительно некоторой точки. Теорема Лагерра

В последующем **(111—156)** под целой рациональной функцией (полиномом) n-й степени мы понимаем не равную тождественно нулю функцию

$$f(z) = a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

При этом коэффициент a_n не обязательно отличен от нуля. В случае, если $a_n \neq 0$, мы будем говорить, что n есть точная степень полинома $f(z)$. Если $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-k+1} = 0$, $a_{n-k} \neq 0$, то мы будем говорить, что $f(z)$ имеет точку $z=\infty$ нулем кратности k[1]). В этом понимании каждая целая рациональная функция n-й степени имеет вообще n нулей, из которых некоторые могут лежать в бесконечности. Таким образом, функцией $f(z)$ определяется в комплексной плоскости некоторая система точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нулей этой функции. И обратно, каждой системе точек можно отнести некоторую целую рациональную функцию, коэффициенты которой определены с точностью до множителя пропорциональности. Мы часто будем отвлекаться от этого несущественного множителя и говорить просто о полиноме, имеющем нулями z_1, $z_2, \ldots, z_n$.

111. Под центром тяжести ζ целой рациональной функции понимают центр тяжести ее нулей. Выразить центр тяжести $f(z)$ относительно переменной точки z: 1) через $f(z)$ и $f'(z)$ и 2) через коэффициенты $f(z)$. Рассмотреть случаи $z=\infty$ и $f(z)=z^n$.

112. Пусть ζ — центр тяжести $f(z)$ относительно z. Для того чтобы $f(z)$ имела лишь вещественные нули, необходимо и достаточно, чтобы при всех значениях z мнимые части z и ζ имели противоположные знаки, либо обе одновременно исчезали ($z=\infty$ причисляем к вещественным нулям).

113. Относительно какой точки z плоскости бесконечно удаленная точка является центром тяжести функции $f(z)$? Что означают для этой точки теоремы **106** и **107**?

114. Пусть $f(z)$ — полином точной степени n, K — круговая область, содержащая нули полинома $f(z)$, и $c \neq 0$. Показать, что нули производной от трансцендентной функции $e^{-z/c} f(z)$ лежат либо в K, либо в $K+nc$, т. е. в круговой области, получаемой из K параллельным смещением на вектор nc. [См. III 33; рассмотреть центр тяжести $f(z)$ относительно одного из интересующих нас нулей.]

115. Пусть z_1 — один из нулей полинома n-й степени $f(z)$, далее x $(x \neq z_1)$ конечно и $f'(x)=0$. Тогда $f(z)$ имеет в каждом круге, проходящем через точки x и $x-(n-1)(z_1-x)$, по меньшей мере один нуль.

116. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени, все нули которого по модулю $\geqslant 1$. Пусть, далее, α_1 и α_2 — такие положительные числа, что $n\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq 1$. Тогда все нули функции $\alpha_1 z f'(z) - \alpha_2 f(z)$ по модулю $\geqslant \operatorname{Min}\left(1, \left|1-n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|^{-1}\right)$.

---

[1]) При введении несобственных элементов и употреблении однородных координат, что находилось бы в полной гармонии с проективным характером рассматриваемых здесь вопросов, всех этих специальных разъяснений относительно бесконечно удаленной точки и связанных с этих отдельных рассмотрений различных случаев можно было бы избежать вовсе.

117. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени, все нули которого лежат в круговом кольце $r \leqslant |z| \leqslant R$. Пусть, далее, α_1 и α_1 — любые положительные числа, для которых $n\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq 1$. Тогда все нули функции $\alpha_1 z f'(z) - \alpha_2 f(z)$ лежат в круговом кольце

$$r\,\mathrm{Min}\left(1, \left|1 - n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|^{-1}\right) \leqslant |z| \leqslant R\,\mathrm{Max}\left(1, \left|1 - n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|^{-1}\right).$$

118. Пусть z_1 — один из конечных нулей целой рациональной функции n-й степени $f(z)$. Показать, что центр тяжести остальных $n-1$ нулей $f(z)$, взятый относительно z_1, равен

$$z_1 - \frac{2(n-1)f'(z_1)}{f''(z_1)}.$$

Как нужно изменить эту формулу, если z_1 — бесконечно удаленная точка?

119. Полином Эрмита n-го порядка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f''(z) - zf'(z) + nf(z) = 0$$

[VI **100**, решение ж)]. Показать, основываясь на **118**, что полиномы Эрмита имеют лишь вещественные нули [VI **100**, решение и)]. [Рассмотреть гипотетический нуль с наибольшей не равной нулю мнимой частью.]

120. Полином n-й степени, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$(1 - z^2)f''(z) - 2zf'(z) + n(n+1)f(z) = 0$$

(полином Лежандра n-го порядка, см. VI **90**), имеет лишь вещественные нули. (VI **97**.)

---

121. Теорема Гаусса [III **31**] равносильна следующей: если все нули полинома $f(z)$ лежат в круге K, то и нули его производной $f'(z)$ лежат в K [**113**]. Установить, верна или неверна следующая теорема: если все нули полинома $f(z)$ лежат в двух кругах K_1, K_2, то и нули производной лежат в K_1 или K_2.

Пусть K_1 и K_2 — два круга или даже две любые круговые области. Совокупность точек

$$z = \frac{n_1 z_2 + n_2 z_1}{n_1 + n_2},$$

где n_1 и n_2 — фиксированные положительные числа, а z_1 и z_2 независимо от друга пробегают соответственно K_1 и K_2, условимся называть *средней областью* круговых областей K_1 и K_2

и символически обозначать

$$K=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}.$$

K вполне определяется заданием K_1, K_2, n_1 и n_2. [См. H. Minkowski, Werke, т. 2, стр. 176, Leipzig, B. G. Teubner, 1911.]

122. Пусть K_1 и K_2 — два круга с центрами соответственно $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$ и радиусами r_1 и r_2. Показать, что тогда

$$K=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}$$

будет тоже кругом, центр которого $z^{(0)}$ и радиус r определяются равенствами

$$z^{(0)}=\frac{n_1z_2^{(0)}+n_2z_1^{(0)}}{n_1+n_2}, \quad r=\frac{n_1r_2+n_2r_1}{n_1+n_2}.$$

Круги K_1, K_2 и K имеют общий центр подобия.

123. Пусть K_1 и K_2 — полуплоскости с параллельными краями, одна из которых содержит другую. Тогда «средняя область»

$$K=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}$$

тоже будет полуплоскостью, край которой параллелен краям плоскостей K_1 и K_2 и делит расстояние между ними в отношении $n_1:n_2$.

124. Пусть $f(z)=f_1(z)f_2(z)$, где $f_1(z)$ — полином n_1-й степени, а $f_2(z)$ — полином n_2-й степени. Пусть, далее, все нули полинома лежат в круговой области K_1, а все нули полинома $f_2(z)$ — в круговой области K_2. Тогда нули производной $f'(z)$ лежат либо в K_1, либо в K_2, либо в «средней области»

$$K=\frac{n_1K_2+n_2K_1}{n_1+n_2}.$$

(Здесь под степенями полиномов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ понимаются их точные степени.)

125. Пусть $f(z)$ — дробно-рациональная функция, числитель и знаменатель которой — взаимно простые. Пусть, далее, ее нули (полюсы) в числе n_1 лежат в круговой области K_1, а полюсы (нули) в числе n_2 — в круговой области K_2. (Мы рассматриваем лишь конечные нули и полюсы.) Пусть, наконец, $n_1\neq n_2$. Тогда нули производной $f'(z)$ лежат или в K_1, или в K_2, или в области K, образованной точками

$$z=\frac{n_1z_2-n_2z_1}{n_1-n_2},$$

где z_1 и z_2 пробегают независимо друг от друга соответственно K_1 и K_2; в символическом обозначении:

$$K=\frac{n_1K_2-n_2K_1}{n_1-n_2}.$$

Если $n_1 = n_2$ и круговые области K_1 и K_2 не пересекаются, то все нули производной $f'(z)$ лежат либо в K_1, либо в K_2.

126. Пусть все корни уравнения

$$f(z) = a,$$

где $f(z)$ — данный полином, лежат в некотором овале*) O_1. Показать, что все точки a, для которых это будет иметь место, также будут находиться в некотором овале O_2.

127. Пусть $f(z)$ — некоторый полином, пусть, далее, его a-точки (нули полинома $f(z) - a$) лежат в круговой области K_1, а его b-точки — в круговой области K_2. Пусть, наконец,

$$c = \frac{n_1 b + n_2 a}{n_1 + n_2},$$

где n_1 и n_2 — положительные числа. Показать, что c-точки полинома $f(z)$, не лежащие ни в K_1, ни в K_2, лежат в «средней области»

$$K = \frac{n_1 K_2 + n_2 K_1}{n_1 + n_2}.$$

[n_1 и n_2 можно предполагать целыми.]

§ 3. Производная полинома относительно некоторой точки. Теорема Грэйса

Под *производной* целой рациональной функции n-й степени $f(z)$ *относительно точки* ζ, символически $A_\zeta f(z)$, мы будем понимать при $\zeta = \infty$ обыкновенную производную, а при конечных значениях ζ — выражение

$$A_\zeta f(z) = (\zeta - z) f'(z) + n f(z);$$

$A_\zeta f(z)$ есть целая рациональная функция $(n-1)$-й степени [1]).

128. Пусть коэффициенты функции $f(z)$ (в записи стр. 67) будут

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Как запишутся n коэффициентов функции $\frac{A_\zeta f(z)}{n}$?

129. Показать, что операция $A_\zeta f(z)$, где ζ произвольно, линейна: если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — два полинома n-й степени, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные коэффициенты, то

$$A_\zeta [c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] = c_1 A_\zeta f_1(z) + c_2 A_\zeta f_2(z).$$

---

*) Под о в а л о м здесь можно подразумевать любое выпуклое множество точек.

[1]) При употреблении однородных координат это образование называют *первой полярой*, у старых авторов также é m a n a n t; см. L a g u e r r e, Oeuvres, т. 1, стр. 48. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

130. Пусть $f(z)=g(z)h(z)$ — разложение полинома $f(z)$ n-й степени на два множителя $g(z)$ и $h(z)$ соответственно степеней k и l, $k+l=n$. Показать, что при всех значениях ζ

$$A_\zeta f(z)=g(z)A_\zeta h(z)+h(z)A_\zeta g(z).$$

131. Пусть $f(z)$ — полином n-й степени; ζ_1 и ζ_2 — произвольные постоянные. Показать, что операции $A_{\zeta_1}f(z)$ и $A_{\zeta_2}f(z)$ переставочны; иными словами,

$$A_{\zeta_1}[A_{\zeta_2}f(z)]=A_{\zeta_2}[A_{\zeta_1}f(z)]=A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}f(z).$$

132. Показать, что $A_\zeta f(z)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда все нули полинома $f(z)$ совпадают с ζ.

Под *производной системой* системы n точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно $(n+1)$-й точки ζ понимают $n-1$ нулей $z_1', z_2', \ldots, z_{n-1}'$ функции $A_\zeta f(z)$, где $f(z)$ — полином n-й степени, имеющий нулями $z_1, z_2, \ldots, z_n$; нули считаются согласно общему определению (стр. 68). Производная система вполне определена, за единственным исключением того случая, когда все $n+1$ точки $z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta$ совпадают (см. 132).

133. Если ζ конечно, то в производной системе относительно точки ζ содержатся вообще точки четырех родов:

1) Конечные отличные от $z_1, z_2, \ldots, z_n, \zeta$ точки, относительно которых центром тяжести системы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ служит как раз ζ.

2) Отличные от ζ кратные конечные нули функции $f(z)$, каждый уменьшенной на единицу кратности.

3) Само ζ лишь в том случае, когда оно является нулем $f(z)$, и тогда с той же кратностью.

4) Точка ∞, либо если она является по меньшей мере двукратным нулем $f(z)$, либо если она совсем не является нулем $f(z)$, но зато ζ является обыкновенным, т. е. взятым относительно точки ∞, центром тяжести $f(z)$.

134. Всякая круговая область, граница которой проходит через точку ζ и одну из точек производной системы, содержит и точки первоначальной системы.

135. Всякая круговая область, содержащая точки $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$ и не содержащая точки ζ, содержит также все точки производной системы системы точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно ζ.

136. Производная система системы точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ относительно точки ζ заключается в наименьшем выпуклом относительно ζ круговом полигоне, содержащем $z_1, z_2, \ldots, z_n$. (Обобщение теоремы III 31.)

137. Если $f(z)$ n-й степени, то $(A_\zeta)^{n-1}f(z)$ будет первой степени. Вычислить единственный нуль функции $(A_\zeta)^{n-1}f(z)$.

138. Пусть

$$f(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

— произвольный полином n-й степени и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — произвольные точки комплексной плоскости. Показать, что выражение

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)f(z)=\frac{1}{n!}A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n}f(z)$$

представляет собой симметрическую функцию переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\ldots, \zeta_n$, линейную относительно каждой из переменных; именно: $A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)f(z)=a_0\sum_0+a_1\sum_1+a_2\sum_2+\ldots+a_{n-1}\sum_{n-1}+a_n\sum_n$, где $\sum_0, \sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_{n-1}, \sum_n$ — элементарные симметрические функции от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_0=1,\\
&\textstyle\sum_1=\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_n,\\
&\textstyle\sum_2=\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta_3+\ldots+\zeta_{n-1}\zeta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\textstyle\sum_n=\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n.
\end{aligned}$$

Если из чисел $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, скажем, k последних (и только они) лежат в бесконечности, то нужно положить

$$\textstyle\sum_0=\sum_1=\ldots=\sum_{k-1}=0,\ \sum_k=1,\ \sum_{k+1}=\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_{n-k},$$
$$\textstyle\sum_{k+2}=\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta_3+\ldots+\zeta_{n-k-1}\zeta_{n-k},\ \ldots,\ \sum_n=\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n-k}.$$

139. Пусть

$$f(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

— произвольный полином n-й степени с нулями $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и

$$g(z)=b_0+\binom{n}{1}b_1z+\binom{n}{2}b_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}b_{n-1}z^{n-1}+b_nz^n$$

— произвольный полином n-й степени с нулями $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Вычислить $A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)f(z)$ и $A(z_1, z_2, \ldots, z_n)g(z)$.

Если оба полинома задачи 139 связаны друг с другом таким образом, что

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)f(z)=0$$

или, что то же [решение 139],

$$A(z_1, z_2, \ldots, z_n)g(z)=0,$$

то они называются *аполярными*. Название имеет своим основанием обращение в нуль n-й поляры $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n}f(z)$. Условие аполярности таково:

$$a_0b_n-\binom{n}{1}a_1b_{n-1}+\binom{n}{2}a_2b_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_{n-1}b_1+ \\ +(-1)^n a_nb_0=0.$$

[139]. Системы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ также называются *взаимно аполярными*.

140. Истолковать геометрически аполярность z_1 и ζ_1, а также z_1, z_2 и ζ_1, ζ_2.

141. Найти системы $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, аполярные к системе корней двучленного уравнения $z^n-1=0$.

142. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольная система точек. Существует n систем совпадающих точек $\zeta, \zeta, \ldots, \zeta$, аполярных к заданной системе. Определить их.

143. Полином n-й степени

$$f(z)=1-z+cz^n$$

аполярен к любой системе чисел, сумма которых равна n, а произведение — нулю.

144. Пусть $f(z)$ — любой полином n-й степени, все нули которого лежат в круговой области K. Пусть, далее, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ $(k<n)$ — любые точки, лежащие вне K. Показать, что все нули полинома $(n-k)$-й степени $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_k}f(z)$ также лежат в K.

145. Пусть полиномы n-й степени $f(z)$ и $g(z)$ взаимно аполярны. Показать, что каждая круговая область, содержащая все нули одного полинома, содержит по крайней мере один нуль другого.

146. Пусть полиномы n-й степени $f(z)$ и $g(z)$ взаимно аполярны. Показать, что наименьшие выпуклые полигоны, содержащие соответственно все нули $f(z)$ или $g(z)$, имеют по меньшей мере одну общую точку. Вообще: всякие два наименьших «выпуклых» относительно одной и той же точки круговых полигона, содержащих соответственно все нули $f(z)$ или $g(z)$, имеют по крайней мере одну общую точку.

147. Полином

$$1-z+cz^n$$

всегда имеет нуль в круге $|z|\leqslant 2$.

148. Полином

$$1-z+cz^n$$

всегда имеет нуль в круге $|z-1|\leqslant 1$.

149. Показать, что $(k+1)$-членный полином

$$1-z+c_2z^{\nu_2}+c_3z^{\nu_3}+\ldots+c_kz^{\nu_k} \qquad (1=\nu_1<\nu_2<\nu_3<\ldots<\nu_k)$$

всегда имеет нуль в круге

$$|z|\leqslant\left[\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)\left(1-\frac{1}{\nu_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\nu_k}\right)\right]^{-1}$$

и, значит, в круге $|z|\leqslant k$. (Обобщение теоремы **147**.)

150. Если полином n-й степени в двух точках a и b $(a\neq b)$ принимает одинаковые значения, то его производная имеет по меньшей мере один нуль в круге, имеющем центром середину отрезка ab и радиусом $\frac{|a-b|}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. (Аналог теоремы Ролля для комплексной области.)

151. Пусть

$$f(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

— полином n-й степени, все нули которого лежат в круговой области K, далее

$$g(z)=b_0+\binom{n}{1}b_1z+\binom{n}{2}b_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}b_{n-1}z^{n-1}+b_nz^n$$

— полином n-й степени с нулями $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Показать, что каждый нуль γ составленного путем их «композиции» полинома

$$h(z)=a_0b_0+\binom{n}{1}a_1b_1z+\binom{n}{2}a_2b_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}b_{n-1}z^{n-1}+a_nb_nz^n$$

имеет вид

$$\gamma=-\beta_\nu k,$$

где ν — надлежаще выбранный индекс, а k — надлежаще выбранная точка в K (при этом полагаем $\infty\cdot\infty=\infty$ и $0\cdot\infty$ = неопределенности).

152. Пусть нули полиномов n-й степени $f(z)$ и $g(z)$ лежат все в единичном круге $|z|\leqslant 1$ и притом по крайней мере у одного — в $|z|<1$. Тогда и у полинома, полученного из этих двух посредством композиции [151], все нули будут лежать внутри круга $|z|<1$.

153. Пусть все нули полинома n-й степени $f(z)$ лежат в некоторой выпуклой замкнутой области $\mathfrak{K}$, содержащей начало координат. Пусть, далее, полином той же степени $g(z)$ имеет лишь вещественные нули, лежащие в интервале $[-1, 0]$. Тогда и у полинома n-й степени $h(z)$, составленного посредством композиции [151] из $f(z)$ и $g(z)$, все нули будут содержаться в области $\mathfrak{K}$.

154. Если все нули полинома n-й степени

$$f(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

лежат в вещественном интервале $-a$, a, все же нули полинома n-й степени

$$g(z)=b_0+\binom{n}{1}b_1z+\binom{n}{2}b_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}b_{n-1}z^{n-1}+b_nz^n$$

— в интервале $-b$, 0 (или 0, b), то нули полинома n-й степени

$$h(z)=a_0b_0+\binom{n}{1}a_1b_1z+\binom{n}{2}a_2b_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}b_{n-1}z^{n-1}+a_nb_nz^n$$

лежат все в интервале $-ab$, ab (a, b — положительные числа).

155. Пусть все нули полинома n-й степени

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$$

— вещественные, а все нули полинома n-й степени

$$b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_nz^n$$

— вещественные и одинакового знака. Тогда все нули полинома

$$a_0b_0+a_1b_1z+a_2b_2z^2+\ldots+a_nb_nz^n$$

— точно так же вещественные ($z=\infty$ причисляется к вещественным нулям).

156. При сохранении предположений задачи 155 все нули полинома

$$a_0b_0+1!a_1b_1z+2!a_2b_2z^2+\ldots+n!a_nb_nz^n$$

— также вещественные.

ГЛАВА 3

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Приближение нулей трансцендентных функций нулями рациональных

157. Показать, исходя из соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n=\cos z+i\sin z,$$

что $\cos z$ и $\sin z$ не имеют мнимых корней.

158. Показать, исходя из соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n=e^{-z^2},$$

что ни одна из производных от функции e^{-z^2} не имеет мнимых нулей.

159. Функция Бесселя

$$J_0(z)=1-\frac{1}{1!1!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2!2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4-\frac{1}{3!3!}\left(\frac{z}{2}\right)^6+\ldots$$

не имеет мнимых нулей. Доказать это четырьмя различными способами, исходя из следующих четырех различных представлений этой функции:

а) $J_0(z)=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{z^2}{4n^2}\right)^n P_n\left(\frac{z^2-4n^2}{z^2+4n^2}\right)$ [VI 85],

б) $J_0(z)=\lim\limits_{n\to\infty}L_n\left(\frac{z^2}{4n}\right)$ [VI 99, решение б)],

в) $J_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\vartheta}\,d\vartheta$ [III 148, 56],

г) $J_0(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\cos zt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ [III 205].

160. Целая функция

$$F(z)=1+\frac{z}{q!}+\frac{z^2}{(2q)!}+\frac{z^3}{(3q)!}+\ldots,$$

где q — целое число $\geqslant 2$, не имеет мнимых нулей. Опираясь на 59, можно дать этому два различных доказательства.

161. Пусть $\alpha\geqslant 0$, $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\leqslant\ldots$ и ряд $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\ldots$ сходится. Показать, что целую трансцендентную функцию

$$g(z)=e^{-\alpha z}\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_3}\right)\ldots$$

можно представить в виде предела некоторой последовательности полиномов, имеющих лишь вещественные положительные нули.

162. (Продолжение.) Пусть

$$g(z)=1+\frac{a_1}{1!}z+\frac{a_2}{2!}z^2+\frac{a_3}{3!}z^3+\ldots$$

Показать, что полиномы

$$1+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$$

($n=1, 2, 3, \ldots$) имеют лишь вещественные положительные нули [63].

163. (Продолжение.) В интервале $0<x\leqslant\alpha_1$

$$g(x)<1$$

и вообще

$$1+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{a_{2m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}<g(x)<$$

$$<1+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{a_{2m}}{(2m)!}x^{2m}\qquad(m=1, 2, 3, \ldots).$$

[Таким образом, в интервале $0 < x \leqslant \alpha_1$ функция $g(x)$ обвертывается своим рядом Маклорена; 55, 72.]

164. (Продолжение.) Пусть $\alpha < 1$. Показать, что целая функция от z, определяемая интегралом

$$\int_0^\infty e^{-t^2} g(-t^2) \cos zt\, dt,$$

имеет лишь вещественные нули [63].

165. Пусть α, β, β_1, β_2, β_3, ... — вещественные числа, $\alpha \geqslant 0$, $\beta_\nu \neq 0$, и ряд $\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + \ldots$ сходится. Показать, что целую трансцендентную функцию

$$G(z) = e^{-\alpha z^2 + \beta z} \left(1 - \frac{z}{\beta_1}\right) e^{\frac{z}{\beta_1}} \left(1 - \frac{z}{\beta_2}\right) e^{\frac{z}{\beta_2}} \ldots$$

можно тогда представить в виде предела некоторой последовательности полиномов с вещественными лишь нулями.

166. (Продолжение.) Если

$$G(z) = 1 + \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \frac{b_3}{3!} z^3 + \ldots,$$

то

$$b_m^2 + b_{m+1}^2 > 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \qquad [49.]$$

167. (Продолжение.) Если $G(z)$ не имеет положительных нулей и a_0, a_1, a_2, ..., a_n — вещественные числа, то полином

$$a_0 G(0) + a_1 G(1) z + a_2 G(2) z^2 + \ldots + a_n G(n) z^n$$

не может иметь больше мнимых нулей, чем полином

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n.$$

[68, 69 — частные случаи этой теоремы.]

168. Показать, основываясь на 167, что функция Бесселя $J_0(z)$ не имеет мнимых нулей [II 31].

169. Показать, основываясь на 167, что целая функция задачи 160 не имеет мнимых нулей.

170. Интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t^\alpha} \cos zt\, dt = F_\alpha(z),$$

где α — целое четное число $\geqslant 2$, представляет собой целую функцию, не имеющую мнимых нулей. [167.]

171. (Продолжение.) При $\alpha > 1$ интеграл все еще представляет собой целую функцию; если α н е я в л я е т с я четным целым числом, то эта функция имеет лишь конечное число вещественных нулей.

172. Уравнение

$$\operatorname{tg} z - z = 0$$

имеет лишь вещественные корни. [26.]

173. Пусть в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ функция $f(t)$ дважды дифференцируема, причем $f''(t)$ непрерывна, далее $f(t) > 0$, $f'(t) < 0$, $f''(t) < 0$. Тогда четная целая функция

$$F(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt \, dt$$

имеет бесконечное множество и притом вещественных нулей. (Это утверждение связано с теоремой III 205, однако отлично от нее.) [26, III 165.]

174. Пусть $\varphi(t)$ собственно интегрируема в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если

$$\int_0^1 |\varphi(t)| \, dt \leqslant 1,$$

то целая функция

$$F(z) = \sin z - \int_0^1 \varphi(t) \sin zt \, dt$$

имеет лишь вещественные нули. [27.]

175. Пусть функция $f(t)$ вещественна и имеет непрерывную производную в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если

$$|f(1)| \geqslant \int_0^1 |f'(t)| \, dt,$$

то целая функция

$$F(z) = \int_0^1 f(t) \cos zt \, dt$$

имеет лишь вещественные нули. (Условие выполняется, в частности, если $f(0) \geqslant 0$ и $f'(t) \geqslant 0$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$; см. III 205.)

176. Целая функция

$$F(z) = 1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^4} + \frac{z^3}{a^9} + \ldots + \frac{z^n}{a^{n^2}} + \ldots,$$

где $a \geqslant 2$, равно как и все частичные суммы ее степенного ряда имеет лишь отрицательные вещественные простые нули. [III 200.]

177. Пусть функция $f(t)$ положительна и имеет непрерывную производную в интервале $0 < t < 1$. Пусть, далее, $\int\limits_0^1 f(t)\,dt$ существует. Показать, что определяемая интегралом

$$\int\limits_0^1 f(t)\,e^{zt}\,dt = F(z)$$

целая функция не имеет нулей:

в полуплоскости $\Re z \geqslant 0$, если $f'(t) > 0$,

в полуплоскости $\Re z \leqslant 0$, если $f'(t) < 0$.

[Доказывается не как III 205 предельным переходом из III 22, а целесообразным перенесением самого доказательства теоремы III 22.]

178. Доказать III 189, основываясь на 177.

179. Остаток показательного ряда

$$\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots$$

не обращается в нуль ни в одной точке полуплоскости $\Re z \leqslant n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), кроме $z = 0$. Случай $n = 0$ представляет исключение: все нули лежат на граничной прямой полуплоскости $\Re z \leqslant 0$, т. е. на оси y. (Отсюда легко вытекает 73.) [177.]

180. Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^2$ сходится, то

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

— целая функция. Обозначим нули $F(z)$ через $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. Показать, что ряд

$$\frac{1}{|z_1|^2} + \frac{1}{|z_2|^2} + \ldots + \frac{1}{|z_n|^2} + \ldots$$

сходится.

181. Если все нули некоторого полинома с вещественными коэффициентами — вещественные и простые, то между двумя соседними нулями полинома лежит лишь один нуль его производной. Верна ли эта теорема также для целых трансцендентных функций?

182. Пусть

$$F(x) = e^{H(x)},$$

где $H(x)$ — полином степени $\geqslant 3$. Показать, что по крайней мере одна из двух первых производных $\frac{dF}{dx}$ и $\frac{d^2F}{dx^2}$ имеет не только вещественные нули.

§ 2. Точное определение числа нулей при помощи правила Декарта

Полиномом m-й степени

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_mz^m$$

с вещественными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a_m\neq 0)$ порождаются следующие три *сопровождающих полинома*, зависящие от параметра ω:

$$\begin{aligned}
P(z,\ \omega)&=a_0+a_1z+a_2z(z-\omega)+\ldots+a_mz(z-\omega)\ldots[z-(m-1)\omega],\\
Q(z,\omega)&=a_0[1+z-(m-1)\omega][1+z-(m-2)\omega]\ldots(1+z-\omega)(1+z)+\\
&+a_1[1+z-(m-1)\omega][1+z-(m-2)\omega]\ldots(1+z-\omega)z+\\
&+a_2[1+z-(m-1)\omega][1+z-(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_{m-1}[1+z-(m-1)\omega][z-(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z+\\
&+a_m[z-(m-1)\omega][z-(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z,\\
R(z,\omega)&=a_0[1-z+(m-1)\omega][1-z+(m-2)\omega]\ldots(1-z+\omega)(1-z)+\\
&+a_1[1-z+(m-1)\omega][1-z+(m-2)\omega]\ldots(1-z+\omega)z+\\
&+a_2[1-z+(m-1)\omega][1-z+(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+a_{m-1}[1-z+(m-1)\omega][z-(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z+\\
&+a_m[z-(m-1)\omega][z-(m-2)\omega]\ldots(z-\omega)z.
\end{aligned}$$

При одновременной замене z на $-z$, ω на $-\omega$ и a_ν на $(-1)^\nu a_\nu$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots, m)$ $Q(z, \omega)$ переходит в $R(z, \omega)$.

183. Положим

$$f(z)e^{kz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{n!}A_n^{(k)}z^n \qquad (k>0),$$

$$f(z)(1-z)^{-k-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+n+1-m)}{\Gamma(k+1)}\frac{k^m}{n!}B_n^{(k)}z^n \qquad (k-\text{целое}>m-1),$$

$$f(z)(1+z)^{k-1}=\sum_{n=0}^{k+m-1}\frac{(k-1)!\,k^m}{n!\,(k-n+m-1)!}C_n^{(k)}z^n \qquad (k-\text{целое}\geqslant 1).$$

Выразить коэффициенты $A_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ через сопровождающие полиномы $P(z, \omega)$, $Q(z, \omega)$, $R(z, \omega)$ полинома $f(z)$.

184. Доказать формулу

$$\frac{Q(z,\ \omega)}{\omega^m} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1+z}{\omega}-m+1\right)\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}\right)} \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{1+z}{\omega}} t^{-\frac{z+\omega}{\omega}} f\left(\frac{t}{t-1}\right) dt,$$

где

$$\omega > 0, \quad -1+(m-1)\omega < \Re z < 0.$$

Найти аналогичные формулы для $P(z,\ \omega)$ и $R(z,\ \omega)$.

185. Обозначим число нулей полиномов

$$f(z),\ P(z,\ \omega),\ Q(z,\ \omega),\ R(z,\ \omega)$$

в открытом интервале $a < z < b$ соответственно через

$$\mathfrak{F}_a^b,\ \mathfrak{P}_a^b,\ \mathfrak{Q}_a^b,\ \mathfrak{R}_a^b.$$

Показать, что имеют место неравенства

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{F}_0^\infty \leqslant \mathfrak{P}_0^\infty, & \mathfrak{F}_{-\infty}^0 \geqslant \mathfrak{P}_{-\infty}^0, \\ \mathfrak{F}_0^1 \leqslant \mathfrak{Q}_0^\infty, & \mathfrak{F}_{-\infty}^0 \geqslant \mathfrak{Q}_{-1+(m-1)\omega}^0, \\ \mathfrak{F}_0^\infty \leqslant \mathfrak{R}_0^{1+(m-1)\omega}, & \mathfrak{F}_{-1}^0 \geqslant \mathfrak{R}_{-\infty}^0,\ \mathfrak{F}_{-\infty}^{-1} \geqslant \mathfrak{R}_{1+(m-1)\omega}^\infty \end{array}$$

в предположении, что $\omega > 0$; во второй строке, кроме того, должно быть $(m-1)\omega < 1$ и, наконец, в последнем неравенстве первого столбца ω^{-1} должно быть целым числом. [38, 80.]

186. (Продолжение.) Если еще предположить, что на концах соответствующего интервала (т. е. в точке $z=0$, или 1, или -1) функция $f(z)$ не обращается в нуль, то по поводу неравенств предыдущей задачи можно добавить, что разность обеих частей представляет собой четное число (возможно равное нулю). Почему нет необходимости вводить новые предположения относительно точки $z=+\infty$?

187. Три степенных ряда задачи 183 обладают следующими свойствами:

1. Они содержат не меньше перемен знака, чем полином $f(z)$ имеет нулей соответственно в интервалах $(0,\ +\infty)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ +\infty)$.

2. С возрастанием k число перемен знака не возрастает.

3. При достаточно большом k число перемен знака *сравняется* с числом нулей $f(z)$ в соответствующем интервале.

188. Отнесем вещественному полиному m-й степени $f(z)$ в качестве четвертого сопровождающего полинома

$$J(z,\ \omega) = f(m\omega) - \binom{m}{1} f[(m-1)\omega]\, z + \\ + \binom{m}{2} f[(m-2)\omega]\, z^2 - \ldots + (-1)^m f(0)\, z^m,$$

где $\omega > 0$. Обозначим аналогично 185 через $\mathfrak{Z}_a^b$ число нулей полинома $J(z, \omega)$ в открытом интервале $a < z < b$. Показать, что имеют место неравенства

$$\mathfrak{F}_{m\omega}^{\infty} \leq \mathfrak{Z}_0^1, \quad \mathfrak{F}_{-\infty}^0 \leq \mathfrak{Z}_1^{\infty}, \quad \mathfrak{F}_0^{m\omega} \geq \mathfrak{Z}_{-\infty}^0.$$

Если, кроме того, $f(0) \neq 0$, $f(m\omega) \neq 0$, то разности двух частей этих неравенств будут четными числами.

189. Число нулей вещественного полинома m-й степени $f(z)$ в интервале $m\omega < z < \infty$ не превышает числа нулей полинома

$$\Delta^m f(0) + \binom{m}{1} \Delta^{m-1} f(0)\, z + \binom{m}{2} \Delta^{m-2} f(0)\, z^2 + \ldots + f(0)\, z^m$$

в интервале $0 < z < 1$. Здесь

$$\Delta^\nu f(0) =$$
$$= f(\nu\omega) - \binom{\nu}{1} f[(\nu-1)\omega] + \binom{\nu}{2} f[(\nu-2)\omega] - \ldots + (-1)^\nu f(0)$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

§ 3. Прочие задачи, относящиеся к нулям полиномов

190. [1]) Каждый полином можно представить в виде отношения двух таких полиномов, что в знаменателе вовсе не будет содержаться перемен знаков, а в числителе их будет ровно столько, сколько у заданного полинома положительных нулей.

191. Пусть полином m-й степени $f(x)$ обладает следующим свойством: каков бы ни был полином $P(x)$, произведение $P(x) f(x)$ содержит по меньшей мере на m перемен знака больше, чем сам $P(x)$. Показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имел лишь положительные вещественные нули.

192. Пусть полином $f(x)$ обладает следующим свойством: каков бы ни был полином $P(x)$, $P(x) f(x) + P'(x)$ имеет не больше мнимых нулей, чем сам $P(x)$. Показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = a - bx$, где a произвольно, $b \geq 0$.

193. Полином $f(x)$, обладающий тем свойством, что уравнение $f(x) + p = 0$ для всех положительных p имеет лишь вещественные корни, может быть самое большее второй степени. Если все корни уравнений указанного вида будут вещественные и притом одного знака, то $f(x)$ будет первой степени.

Геометрически это очевидно; найти доказательство, исходящее из иных принципов.

---

[1]) В задачах **190—195** имеются в виду полиномы с вещественными коэффициентами.

194. Пусть a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 — вещественные числа. Показать, что выражение

$$a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0a_2b_1^2 - 2a_0a_2b_0b_2 + a_1^2b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2$$

тогда и только тогда отрицательно, когда оба полинома

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$$

имеют вещественные и притом простые нули, разделяющие друг друга, т. е. лежащие так, что между двумя нулями одного полинома содержится один и только один нуль другого.

195. Пусть $P(x)$ — полином, имеющий лишь вещественные нули. Тогда, вообще говоря, не существует ни одного первообразного по отношению к $P(x)$ полинома, который имел бы лишь вещественные нули. Точнее говоря, пусть n — точная степень полинома $P(x)$; пусть, далее, a — такое вещественное число, для которого полином $(n+1)$-й степени

$$Q(x) = \int_a^x P(x)\,dx$$

имеет максимальное число вещественных нулей. Тогда можно утверждать лишь, что это максимальное число

$$\begin{aligned} &= 2 \text{ при } n = 1, \\ &\geqslant 3 \text{ » } n = 2, 4, 6, 8, \ldots, \\ &\geqslant 4 \text{ » } n = 3, 5, 7, 9, \ldots, \end{aligned}$$

и больше ничего утверждать нельзя, ибо при всех значениях n можно указать такие $P(x)$, для которых будет достигаться равенство.

196. Пусть L — максимум модулей коэффициентов полинома

$$f(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \ldots + a_n$$

и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — нули этого полинома. Тогда

$$(1+|z_1|)(1+|z_2|)\ldots(1+|z_n|) \leqslant 2^n\sqrt{n+1}\,L. \qquad [\text{II } 52.]$$

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ПОЛИНОМЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

§ 1. Полиномы Чебышева

Положим $\cos\vartheta = x$; тогда

$$T_n(x) = \cos n\vartheta, \quad U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

будут полиномы n-й степени от x (*полиномы Чебышева*); наивысший коэффициент полинома $T_n(x)$ равен 2^{n-1}, а полинома $U_n(x)$ равен 2^n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

1. Все нули полиномов $T_n(x)$ и $U_n(x)$ — вещественные, отличны друг от друга и лежат внутри интервала $[-1,\ 1]$. Определить эти нули.

2. Доказать соотношения

$$\left.\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= xT_n(x) - (1-x^2)\,U_{n-1}(x), \\ U_n(x) &= xU_{n-1}(x) + T_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

3. Показать, что полиномы $T_n(x)$ и $U_n(x)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$(1-x^2)\,T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0,$$
$$(1-x^2)\,U''_n(x) - 3xU'_n(x) + n(n+2)\,U_n(x) = 0.$$

4. Показать, что $T_n(x)$ и $U_n(x)$ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, T_m(x)\, T_n(x)\, dx = 0, \\ &\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_m(x)\, U_n(x)\, dx = 0 \end{aligned}\right\} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m \neq n).$$

Вычислить эти интегралы при $m = n$.

5. Показать, что

$$\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{1-x^2}\,U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}.$$

6. Показать, что если $f(x)$ имеет в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ непрерывную n-ю производную, то

$$\int_0^\pi f(\cos\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos\vartheta)\sin^{2n}\vartheta\, d\vartheta.$$

7. Показать, что при $n=1, 2, 3, \ldots, -1 \leqslant x \leqslant 1$, имеют место неравенства

$$|T_n(x)| \leqslant 1, \quad |U_n(x)| \leqslant n+1.$$

В первом из них равенство достигается ровно в $n+1$ точке, а именно в $n-1$ нулях полинома $U_{n-1}(x)$ и, кроме того, на концах, т. е. для $x=-1$ и $x=1$. Во втором равенство достигается только на концах.

§ 2. Общие сведения о тригонометрических полиномах

Под *тригонометрическим полиномом* n-го порядка понимают выражение вида

$$g(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1\cos\vartheta + \mu_1\sin\vartheta + \lambda_2\cos 2\vartheta + \mu_2\sin 2\vartheta + \ldots \\ \ldots + \lambda_n\cos n\vartheta + \mu_n\sin n\vartheta.$$

Если все μ_ν равны нулю, то $g(\vartheta)$ — *полином* n-го порядка *по косинусам*, если же все λ_ν равны нулю, то $g(\vartheta)$ — *полином* n-го порядка *по синусам*.

8. Всякий полином n-го порядка по косинусам можно представить в виде $P(\cos\vartheta)$, где $P(x)$ — полином n-й степени. Обратное также верно.

9. Всякий полином n-го порядка по синусам можно представить в виде $\sin\vartheta\, P(\cos\vartheta)$, где $P(x)$ — полином $(n-1)$-й степени. Обратное также верно.

10. Произведение двух тригонометрических полиномов m-го и n-го порядков есть тригонометрический полином $(m+n)$-го порядка.

11. Всякий тригонометрический полином n-го порядка

$$g(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1\cos\vartheta + \mu_1\sin\vartheta + \lambda_2\cos 2\vartheta + \mu_2\sin 2\vartheta + \ldots \\ \ldots + \lambda_n\cos n\vartheta + \mu_n\sin n\vartheta,$$

имеющий лишь вещественные коэффициенты, можно представить в форме

$$g(\vartheta)=e^{-in\vartheta}G(e^{i\vartheta}),$$

где $G(z)=u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots+u_{2n}z^{2n}$ — некоторый полином $2n$-й степени, не изменяющийся, если, заменив z на z^{-1}, умножить его на z^{2n} и одновременно заменить все коэффициенты сопряженными:

$$G(z)=\bar{u}_{2n}+\bar{u}_{2n-1}z+\bar{u}_{2n-2}z^2+\ldots+\bar{u}_0z^{2n}=z^{2n}\bar{G}(z^{-1}).$$

Вычислить коэффициенты $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$.

12. Обратно, если $G(z)$ — полином $2n$-й степени, удовлетворяющий тождественно для всех значений z соотношению

$$z^{2n}\bar{G}(z^{-1})=G(z),$$

то

$$e^{-in\vartheta}G(e^{i\vartheta})=g(\vartheta)$$

есть тригонометрический полином n-го порядка от ϑ, имеющий лишь вещественные коэффициенты.

13. Пусть $G(z)$ — полином $2n$-й степени, удовлетворяющий условию

$$z^{2n}\bar{G}(z^{-1})=G(z).$$

Как распределены его нули в комплексной плоскости?

14. Тригонометрический полином n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta,$$

где коэффициенты вещественные, причем λ_n и μ_n не равны одновременно нулю, имеет ровно $2n$ нулей, если рассматривать все комплексные значения ϑ и считать нули по их кратности (ϑ и $\vartheta+2\pi$ не рассматриваются как различные).

15. Определить все тригонометрические полиномы n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta$$

с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождественно при всех значениях α и β соотношению

$$\sum_{\nu=0}^{n} g\left(\alpha-\frac{\nu\pi}{n+1}\right)g\left(\frac{\nu\pi}{n+1}-\beta\right)=g(\alpha-\beta).$$

§ 3. Специальные тригонометрические полиномы

16. $$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}},$$

$$\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\cos 3\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta=\frac{\sin\frac{n}{2}\vartheta\cos\frac{n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}},$$

$$\cos\vartheta+\cos 3\vartheta+\cos 5\vartheta+\ldots+\cos(2n-1)\vartheta=\frac{\sin 2n\vartheta}{2\sin\vartheta},$$

$$\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\sin 3\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta=\frac{\sin\frac{n}{2}\vartheta\sin\frac{n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

17. $$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta}+\frac{\sin 3\vartheta}{\sin\vartheta}+\frac{\sin 5\vartheta}{\sin\vartheta}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)\vartheta}{\sin\vartheta}=\left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2.$$

Что отсюда вытекает при $\vartheta=0$?

18.

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\vartheta+(n-1)\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2.$$

19. Определить нули тригонометрических полиномов

$$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta,$$

$$\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta,$$

$$\cos\vartheta+\cos 3\vartheta+\cos 5\vartheta+\ldots+\cos(2n-1)\vartheta,$$

$$\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta,$$

$$\sin\vartheta+\sin 3\vartheta+\ldots+\sin(2n-1)\vartheta,$$

$$\frac{n+1}{2}+n\cos\vartheta+(n-1)\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta.$$

20. Доказать тождество

$$\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta=\frac{1}{2}\sin(n+1)\vartheta\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}-\cos^2\frac{n+1}{2}\vartheta.$$

21. Показать, что сумма

$$\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta+\frac{\sin(n+1)\vartheta}{2}$$

неотрицательна при $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$.

22. Средние арифметические отрезков ряда

$$\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos n\vartheta+\ldots$$

неотрицательны при всех значениях ϑ и с возрастанием n равномерно стремятся к нулю во всяком интервале $\varepsilon\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$.

23. Тригонометрический полином

$$A(n,\ \vartheta)=\sin\vartheta+\frac{\sin 2\vartheta}{2}+\frac{\sin 3\vartheta}{3}+\ldots+\frac{\sin n\vartheta}{n}$$

в интервале $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ имеет максимумы в точках

$$\frac{\pi}{n+1},\ 3\frac{\pi}{n+1},\ 5\frac{\pi}{n+1},\ \ldots,\ (2q-1)\frac{\pi}{n+1}\quad\left(q=\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

(и только в них) и минимумы в точках

$$\frac{2\pi}{n},\ 2\frac{2\pi}{n},\ 3\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ (q-1)\frac{2\pi}{n}$$

(и только в них).

24. (Продолжение.) Максимумы полинома $A(n,\ \vartheta)$ в интервале $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ монотонно убывают, так что абсолютный максимум для всего интервала $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ равен $A\left(n,\ \frac{\pi}{n+1}\right)$. [20.]

25. (Продолжение.) С возрастанием n максимум $A\left(n,\ \frac{\pi}{n+1}\right)$ монотонно возрастает, причем

$$\lim_{n\to\infty} A\left(n,\ \frac{\pi}{n+1}\right)=\int_0^\pi\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}\,d\vartheta=1{,}8519\ldots$$

26. Тригонометрический полином

$$B(n,\ \vartheta)=\cos\vartheta+\frac{\cos 2\vartheta}{2}+\frac{\cos 3\vartheta}{3}+\ldots+\frac{\cos n\vartheta}{n}$$

в интервале $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ имеет максимумы в точках

$$0,\ \frac{2\pi}{n},\ 2\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ p\frac{2\pi}{n}\quad\left(p=\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

(и только в них) и минимумы в точках

$$\frac{2\pi}{n+1},\ 2\frac{2\pi}{n+1},\ 3\frac{2\pi}{n+1},\ \ldots,\ q\frac{2\pi}{n+1}\quad\left(q=\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$$

(и только в них).

27. (Продолжение.) Наименьшее значение полином $B(n, \vartheta)$ принимает при

$$\vartheta = \left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{2\pi}{n+1}. \qquad [21.]$$

28. При всех значениях n и ϑ

$$B(n, \vartheta) = \cos\vartheta + \frac{\cos 2\vartheta}{2} + \frac{\cos 3\vartheta}{3} + \ldots + \frac{\cos n\vartheta}{n} \geqslant -1.$$

§ 4. Из теории рядов Фурье

Пусть $f(\vartheta)$ — периодическая функция с периодом 2π, собственно интегрируемая в интервале $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$. Числа

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \; b_0 = 0)$$

мы будем называть *коэффициентами Фурье*, а формально образованный ряд

$$a_0 + 2a_1\cos\vartheta + 2b_1\sin\vartheta + 2a_2\cos 2\vartheta + 2b_2\sin 2\vartheta + \ldots$$
$$\ldots + 2a_n\cos n\vartheta + 2b_n\sin n\vartheta + \ldots$$

— *рядом Фурье* функции $f(\vartheta)$. Если $f(\vartheta)$ — функция с ограниченным изменением, то этот ряд сходится и имеет сумму

$$\frac{f(\vartheta+0) + f(\vartheta-0)}{2}.$$

29. Пусть функция $f(\vartheta)$ — периодическая, $f(\vartheta + 2\pi) = f(\vartheta)$. Каждое из выписанных уравнений (или пар уравнений)

1) $f(-\vartheta) = f(\vartheta)$,

2) $f(-\vartheta) = -f(\vartheta)$,

3) $f(\vartheta + \pi) = -f(\vartheta)$,

4а) $f(-\vartheta) = f(\vartheta)$, $\quad f(\vartheta + \pi) = -f(\vartheta)$,

4б) $f(-\vartheta) = -f(\vartheta)$, $\quad f(\vartheta + \pi) = -f(\vartheta)$,

5) $f(\vartheta + \pi) = f(\vartheta)$

характеризует какого-либо рода симметрию кривой $y = f(x)$. Показать, что каждый из этих родов симметрии влечет исчезновение бесчисленного множества коэффициентов Фурье функции $f(\vartheta)$.

30. Каков будет ряд Фурье для тригонометрического полинома $f(\vartheta)$ n-го порядка?

31. Пусть n и ν — целые положительные числа. Показать, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^n\cos\left(\frac{n}{2}-\nu\right)\vartheta\,d\vartheta=\binom{n}{\nu}.$$

32. Пусть последовательность

$$a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots$$

обладает тем свойством, что «тригонометрический ряд»

$$a_0+2a_1\cos\vartheta+2b_1\sin\vartheta+2a_2\cos 2\vartheta+2b_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+2a_n\cos n\vartheta+2b_n\sin n\vartheta+\ldots$$

равномерно сходится при всех значениях ϑ и, таким образом, представляет некоторую непрерывную периодическую функцию $f(\vartheta)$ с периодом 2π. Каков будет ряд Фурье для функции $f(\vartheta)$?

33. $$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}=\begin{cases} x-[x] & \text{для нецелых } x,\\ \dfrac{1}{2} & \text{для целых } x.\end{cases}$$

34. $$|\sin\vartheta|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\vartheta}{4n^2-1}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\vartheta}{4n^2-1}.$$

35. Числа

$$\rho_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin m\vartheta|}{\sin\vartheta}\,d\vartheta\qquad(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(находящиеся в тесной связи с так называемыми *константами Лебега* ряда Фурье) монотонно возрастают вместе с возрастанием m. А именно, их можно представить в виде

$$\rho_m=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2nm-1}}{4n^2-1}.$$

[Вместо $|\sin m\vartheta|$ подставить его разложение из 34 и применить 17.]

36. Пусть функция $f(\vartheta)$ — периодическая с периодом π и «четная», т. е. тождественно при всех значениях ϑ имеет место равенство $f(-\vartheta)=f(\vartheta)$. Если в интервале $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ $f(\vartheta)$ выпукла сверху, то ее ряд Фурье имеет вид

$$c_0-c_1\cos 2\vartheta-c_2\cos 4\vartheta-\ldots-c_n\cos 2n\vartheta-\ldots,$$

где все коэффициенты $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$ неотрицательны.

37. Если функция $f(\vartheta)$ предыдущей задачи удовлетворяет еще условию $f(0)=0$ и, кроме того, для некоторого $p>0$ выражение $\vartheta^{-p}f(\vartheta)$ ограничено, то последовательность

$$\rho_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(m\vartheta)}{\sin\vartheta}\,d\vartheta \qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

монотонно возрастает вместе с m. [Обобщение теоремы 35.]

38. Пусть M_n — максимум функции

$$\Gamma(n,\ \vartheta)=\frac{|\sin\vartheta|}{1}+\frac{|\sin 2\vartheta|}{2}+\frac{|\sin 3\vartheta|}{3}+\ldots+\frac{|\sin n\vartheta|}{n}$$

по отношению ко всем значениям ϑ. Показать, что

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}<M_n<\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}+\frac{2}{\pi}. \qquad [34,\ 28.]$$

§ 5. Неотрицательные тригонометрические полиномы

39. Пусть $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — произвольные комплексные числа ($x_0\neq 0,\ x_n\neq 0$) и ϑ вещественно. Показать, что

$$|x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n|^2 \qquad (z=e^{i\vartheta})$$

представляет неотрицательный тригонометрический полином в точности n-го порядка. Вычислить его коэффициенты.

40. Всякий тригонометрический полином n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta,$$

принимающий лишь неотрицательные значения, может быть представлен в форме

$$g(\vartheta)=|h(z)|^2 \qquad (z=e^{i\vartheta}),$$

где $h(z)=x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n$ — некоторый полином n-й степени и ϑ вещественно. [Разложить рассмотренный в задаче **11** полином $G(z)$ на линейные множители.]

41. Всякий неотрицательный полином по косинусам может быть представлен в виде

$$g(\vartheta)=|h(z)|^2 \qquad (z=e^{i\vartheta}),$$

где $h(z)=x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n$ — полином с вещественными коэффициентами и ϑ вещественно.

42. Показать, что указанное в задаче 40 представление неотрицательного тригонометрического полинома возможно, вообще говоря, несколькими способами.

43. Показать, что в задаче 40 среди всех полиномов $h(z)$ можно выбрать обладающий следующими свойствами:

1) при $|z|<1$ $h(z)$ отличен от нуля;

2) $h(0)$ — положительное вещественное число.

Предполагается, что $g(\vartheta)\not\equiv 0$.

§ 6. Неотрицательные полиномы

44. Всякую целую рациональную функцию, имеющую для всех вещественных x неотрицательные значения, можно представить в форме $[A(x)]^2+[B(x)]^2$, где $A(x)$ и $B(x)$ — целые рациональные функции с вещественными коэффициентами.

45. Всякую целую рациональную функцию, неотрицательную для неотрицательных x, можно представить в форме

$$[A(x)]^2+[B(x)]^2+x\{[C(x)]^2+[D(x)]^2\},$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — целые рациональные функции с вещественными коэффициентами.

46. Всякую целую рациональную функцию n-й степени, имеющую в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ лишь неотрицательные значения, можно представить в форме

$$[A(x)]^2+(1-x^2)[B(x)]^2,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — целые рациональные функции соответственно n-й и $(n-1)$-й степеней, имеющие вещественные коэффициенты. [41.]

47. Всякую целую рациональную функцию n-й степени $P(x)$, принимающую в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ лишь неотрицательные значения, можно представить в форме

$$[A(x)]^2+(1-x)[B(x)]^2+(1+x)[C(x)]^2+(1-x^2)[D(x)]^2$$

и притом так, чтобы все четыре слагаемых были самое большее n-й степени.

Если $P(x)$ — степени $2m$, то можно выбрать такое представление, при котором $B(x)=C(x)=0$, $A(x)$ — степени m и $D(x)$ — степени $m-1$.

48. Можно ли каждую целую рациональную функцию n-й степени $P(x)$, положительную в интервале $-1<x<1$, представить в форме

$$P(x)=\sum A(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

где $A\geqslant 0$, $\alpha+\beta\leqslant n$, α и β — целые неотрицательные числа?

49. Каждая целая рациональная функция $P(x)$, положительная в интервале $-1 < x < 1$, может быть представлена в форме

$$P(x) = \sum A\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta},$$

где $A \geqslant 0$, α и β — целые неотрицательные числа.

§ 7. Максимумы и минимумы тригонометрических полиномов

50. Пусть

$$g(\vartheta) = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\vartheta + \mu_1 \sin\vartheta + \lambda_2 \cos 2\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \ldots \\ \ldots + \lambda_n \cos n\vartheta + \mu_n \sin n\vartheta$$

— неотрицательный тригонометрический полином n-го порядка со свободным членом, равным единице, т. е.

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta = 1.$$

Тогда

$$g(\vartheta) \leqslant n+1.$$

Равенство будет достигаться только при условии

$$g(\vartheta) = \frac{1}{n+1}\,|\,1 + z + z^2 + \ldots + z^n\,|^2 = 1 + 2\,\frac{n}{n+1}\cos(\vartheta - \vartheta_0) + \\ + 2\,\frac{n-1}{n+1}\cos 2(\vartheta - \vartheta_0) + \ldots + 2\,\frac{1}{n+1}\cos n(\vartheta - \vartheta_0) \qquad (z = e^{i(\vartheta - \vartheta_0)})$$

и $\vartheta = \vartheta_0$ (или вообще $\vartheta = \vartheta_0 + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

51. (Продолжение.) Показать, что

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 \leqslant 1.$$

Равенство достигается лишь когда

$$g(\vartheta) = 1 + \cos n(\vartheta - \vartheta_0).$$

52. (Продолжение.) Показать, что

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 \leqslant 4\cos^2\frac{\pi}{n+2}.$$

53. Среднее геометрическое [II 48] неотрицательного, не равного тождественно нулю полинома $g(\vartheta)$ есть

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln g(\vartheta)\,d\vartheta} = |\,h(0)\,|^2 = [h(0)]^2,$$

где $g(\vartheta) = |\,h(e^{i\vartheta})\,|^2$ — определенное в задаче 43 «нормальное представление» полинома $g(\vartheta)$.

54. Пусть неотрицательный не равный тождественно нулю полином n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta$$

имеет в качестве среднего геометрического единицу. Тогда

$$g(\vartheta)\leqslant 4^n.$$

Равенство достигается только для полинома

$$g(\vartheta)=\left(2\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right)^{2n}$$

и при условии $\vartheta=\vartheta_0$ (или вообще $\vartheta=\vartheta_0+2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

55. (Продолжение.) Среднее арифметическое полинома $g(\vartheta)$ удовлетворяет неравенству

$$\lambda_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta\leqslant\binom{2n}{n}.$$

Когда достигается равенство?

56. (Продолжение). Показать, что

$$\sqrt{\lambda_\nu^2+\mu_\nu^2}\leqslant 2\binom{2n}{n+\nu} \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Когда здесь будет достигаться равенство?

---

57. Тригонометрический полином без свободного члена

$$g(\vartheta)=\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta,$$

не равный тождественно нулю, не может сохранять для всех значений ϑ постоянный знак. Доказать это без применения интегрального исчисления.

58. Пусть через $-m$ и M обозначены минимум и максимум тригонометрического полинома n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta, \quad m\geqslant 0,\ M\geqslant 0. \quad [57.]$$

Показать, что

$$M\leqslant nm, \quad m\leqslant nM.$$

59. Первая интегральная теорема о среднем значении может быть для тригонометрических полиномов уточнена следующим образом. Если $g(\vartheta)$ — тригонометрический полином n-го порядка с минимумом m и максимумом M, то

$$m+\frac{M-m}{n+1}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta\leqslant M-\frac{M-m}{n+1}.$$

60. Пусть $-m$ есть минимум, а M — максимум тригонометрического полинома n-го порядка

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta.$$

Тогда либо m, либо M больше чем $\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2}$. Равенство

$$m=M=\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2}$$

будет выполняться лишь для полиномов

$$g(\vartheta)=c\cos n(\vartheta-\vartheta_0).$$

61. Сложим n гармонических движений, периоды которых находятся в отношениях $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\ldots:\frac{1}{n}$; фазы произвольны. Показать, что максимальная элонгация результирующего движения будет самое меньшее равна среднему арифметическому амплитуд слагающих гармонических движений.

Вопрос сводится в обозначениях задачи 58 к доказательству неравенства

$$M\geqslant\frac{\sqrt{\lambda_1^2+\mu_1^2}+\sqrt{\lambda_2^2+\mu_2^2}+\ldots+\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2}}{n}.$$

(Уточнение теоремы 50.)

§ 8. Максимумы и минимумы полиномов

62. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени со старшим коэффициентом 1. Показать, что максимум $|P(x)|$ в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ не может быть меньше чем $\frac{1}{2^{n-1}}$. Если в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$|P(x)|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},$$

то $P(x)$ отличается от определенного на стр. 85 полинома $T_n(x)$ лишь постоянным множителем. [60.]

Рассмотрим совокупность всех полиномов n-й степени со старшим коэффициентом 1, т. е. полиномов

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

с любыми комплексными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через $\mu_n(\alpha, \beta)$ минимум максимумов всех $|P(x)|$ в интервале

$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Теорему 62 можно тогда формулировать следующим образом: при $\alpha = -1$, $\beta = 1$ этот «minimum maximorum»

$$\mu_n(-1,\ 1) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

63. Показать, что

$$\mu_n(\alpha,\ \beta) = 2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^n = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n.$$

Таким образом, для существования полиномов со старшим коэффициентом 1, произвольно малых равномерно во всем заданном интервале, необходимо и достаточно, чтобы длина l этого интервала была меньше чем 4.

64. Пусть переменная x изменяется в двух равных интервалах, получающихся путем удаления из интервала $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ интервала длины d с центром $\frac{\alpha+\beta}{2}$; $d < \beta - \alpha = l$. Пусть, далее, μ_n будет нижняя грань максимумов всех полиномов n-й степени со старшим коэффициентом 1, взятых в этих двух интервалах. Тогда

$$\mu_n = 2\left(\frac{l^2-d^2}{16}\right)^{\frac{n}{2}}$$

при n четном и

$$d\left(\frac{l^2-d^2}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leqslant \mu_n \leqslant l\left(\frac{l^2-d^2}{16}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

при n нечетном. [63.]

65. Рассмотрим совокупность полиномов n-й степени

$$Q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n,$$

где коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные комплексные числа. Показать, что максимум $|Q(z)|$ на единичной окружности $|z| = 1$ не может быть меньше единицы и равен единице лишь для $Q(z) = z^n$.

66. Теоремам 63 и 65 можно дать следующую геометрическую интерпретацию.

Пусть в плоскости даны n фиксированных точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и переменная точка P. Тогда функция

$$\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \ldots \overline{PP_n}$$

этой точки P ($\overline{PP_\nu}$ — расстояние между точками P и P_ν) имеет на каждом отрезке длины l максимум не меньше чем $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$ и на каждой окружности радиуса r максимум не меньше чем r^n. Единственный возможный предельный случай будет для отрезка, когда точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ распределены на заданном отрезке как нули полинома Чебышева $T_n(x)$ [1] в интервале $[-1, 1]$, а для окружности — когда все точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ совпадают с ее центром.

Доказать, что эта теорема верна и в том случае, когда точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ произвольно распределены в пространстве.

§ 9. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые отличные друг от друга вещественные или комплексные числа. Положим

$$f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad (a_0 \neq 0),$$

$$f_\nu(x) = \frac{1}{f'(x_\nu)}\frac{f(x)}{x-x_\nu} = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\ldots(x-x_n)}{(x_\nu-x_1)\ldots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\ldots(x_\nu-x_n)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда каждый полином $(n-1)$-й степени можно будет выразить через его значения в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующим образом:

$$P(x) = P(x_1)f_1(x) + P(x_2)f_2(x) + \ldots + P(x_n)f_n(x) \qquad (*)$$

(*интерполяционная формула Лагранжа*). Полиномы $f_\nu(x)$ будем называть *фундаментальными полиномами* интерполяции.

67. Пусть полином n-й степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

имеет отличные друг от друга нули $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$\sigma_k = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^k}{f'(x_\nu)} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant n-2, \\ a_0^{-1}, & \text{если } k = n-1. \end{cases}$$

Далее при $k = n, n+1, \ldots, 2n-2$ σ_k не зависит от a_n; при $k = 2n-1$ оно выражается линейно через a_n с коэффициентами $-a_0^{-2}$.

68. (Продолжение.)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{kx_\nu^{k-1}f'(x_\nu) - x_\nu^k f''(x_\nu)}{[f'(x_\nu)]^3} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant k \leqslant 2n-2, \\ a_0^{-2}, & \text{если } k = 2n-1. \end{cases}$$

69. (Продолжение.) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отличны от 0 и -1. Доказать, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^n f(x_\nu^{-1})}{f'(x_\nu)(1+x_\nu)} = (-1)^{n-1}(1 - x_1x_2\ldots x_n).$$

70. Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные целые числа, $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Показать, что каждый полином n-й степени вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

принимает в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения, из которых по крайней мере одно по абсолютной величине больше или равно $\frac{n!}{2^n}$.

71. Возьмем в качестве точек интерполяции нули полинома $T_n(x)$ [1], т. е. числа

$$x_\nu = \cos(2\nu - 1)\frac{\pi}{2n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда фундаментальные полиномы будут

$$f_\nu(x) = \frac{(-1)^{\nu-1}\sqrt{1 - x_\nu^2}}{n} \frac{T_n(x)}{x - x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, каждый полином $(n-1)$-й степени $P(x)$ может быть представлен в форме

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \sqrt{1 - x_\nu^2}\, P(x_\nu) \frac{T_n(x)}{x - x_\nu}.$$

72. Возьмем в качестве точек интерполяции нули полинома $U_n(x)$ [1], т. е. числа

$$x_\nu = \cos \nu \frac{\pi}{n+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда фундаментальные полиномы будут

$$f_\nu(x) = (-1)^{\nu-1} \frac{1 - x_\nu^2}{n+1} \frac{U_n(x)}{x - x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, каждый полином $(n-1)$-й степени $P(x)$ может быть представлен в форме

$$P(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} (1 - x_\nu^2) P(x_\nu) \frac{U_n(x)}{x - x_\nu}.$$

73. Возьмем в качестве точек интерполяции нули полинома $U_{n-1}(x)(x^2 - 1)$, т. е. числа $x_\nu = \cos \nu \frac{\pi}{n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$, а также точки $x_0 = 1$, $x_n = -1$. Тогда фундаментальные полиномы будут

$$f_\nu(x) = \frac{(-1)^\nu}{n} \frac{U_{n-1}(x)(x^2 - 1)}{x - x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2n} U_{n-1}(x)(x + 1),$$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n} U_{n-1}(x)(x - 1).$$

Таким образом, каждый полином n-й степени $P(x)$ может быть представлен в форме

$$P(x)=\frac{1}{2n}U_{n-1}(x)\left[P(1)(x+1)+(-1)^n P(-1)(x-1)\right]+\\+\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}(-1)^\nu P(x_\nu)\frac{U_{n-1}(x)(x^2-1)}{x-x_\nu}.$$

74. Возьмем в качестве точек интерполирования корни n-й степени из единицы $\varepsilon_\nu=e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Тогда фундаментальные полиномы будут

$$f_\nu(x)=\frac{\varepsilon_\nu}{n}\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_\nu}\qquad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, для любого полинома $P(x)$ степени $n-1$ имеет место разложение

$$P(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu P(\varepsilon_\nu)\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_\nu}.$$

---

75. Пусть полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ оба n-й степени и $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ — произвольные $n+1$ отличных друг от друга или частично совпадающих вещественных или комплексных чисел. Показать, что из $n+1$ уравнения

$$P(x_0)=Q(x_0),\ P'(x_1)=Q'(x_1),\ P''(x_2)=Q''(x_2),\ \ldots\\ \ldots,\ P^{(n)}(x_n)=Q^{(n)}(x_n)$$

вытекает тождественно

$$P(x)=Q(x).$$

76. Для любых $n+1$ чисел $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ возможно и притом единственным образом построить полином $P(x)$ степени $\leqslant n$, удовлетворяющий условиям

$$P(0)=c_0,\ P'(1)=c_1,\ P''(2)=c_2,\ \ldots,\ P^{(n)}(n)=c_n\qquad [75].$$

Показать, что этот полином $P(x)$ может быть представлен в форме

$$P(x)=P(0)A_0(x)+P'(1)A_1(x)+P''(2)A_2(x)+\ldots+P^{(n)}(n)A_n(x),$$

где

$$A_0(x),\ A_1(x),\ \ldots,\ A_n(x)$$

представляют собой численно вполне определенные, не зависящие от произвольно заданных значений

$$c_0=P(0),\ c_1=P'(1),\ \ldots,\ c_n=P^{(n)}(n)$$

полиномы (в известном смысле «фундаментальные полиномы» этой, существенно отличной от лагранжевой, интерполяции).

§ 10. Теоремы С. Бернштейна и А. Маркова

77. Для совокупности полиномов $(n-1)$-й степени

$$P(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1},$$

удовлетворяющих в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ неравенству

$$\sqrt{1-x^2}\,|P(x)|\leqslant 1,$$

наибольшее значение, которое может принимать коэффициент $|a_0|$, равно 2^{n-1}, т. е.

$$|a_0|\leqslant 2^{n-1}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $P(x)=\gamma U_{n-1}(x)$, где $|\gamma|=1$. [71.]

78. Получить из 73 новое доказательство теоремы 62.

79. Получить из 74 новое доказательство теоремы 65.

80. Рассмотрим все полиномы $(n-1)$-й степени $P(x)$, удовлетворяющие в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ неравенству

$$\sqrt{1-x^2}\,|P(x)|\leqslant 1.$$

Показать, что в этом интервале

$$|P(x)|\leqslant n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Равенство достигается лишь для $P(x)=\gamma U_{n-1}(x)$, где $|\gamma|=1$, и при $x=\pm 1$.

81. Доказать следующее обобщение второго неравенства задачи 7. Пусть

$$S(\vartheta)=\mu_1\sin\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\mu_3\sin 3\vartheta+\ldots+\mu_n\sin n\vartheta$$

— любой полином n-го порядка по синусам с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий неравенству

$$|S(\vartheta)|\leqslant 1.$$

Тогда

$$\left|\frac{S(\vartheta)}{\sin\vartheta}\right|\leqslant n.$$

Равенство достигается только для $S(\vartheta)=\pm\sin n\vartheta$.

82. Пусть тригонометрический полином n-го порядка с вещественными коэффициентами

$$g(\vartheta)=\lambda_0+\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta+\lambda_2\cos 2\vartheta+\mu_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\lambda_n\cos n\vartheta+\mu_n\sin n\vartheta$$

удовлетворяет при всех вещественных значениях ϑ неравенству

$$|g(\vartheta)| \leqslant 1.$$

Тогда

$$|g'(\vartheta)| \leqslant n.$$

$\left[\text{Рассмотреть } S(\vartheta) = \frac{g(\vartheta_0+\vartheta)-g(\vartheta_0-\vartheta)}{2},\ \vartheta = 0.\right]$

83. Пусть полином n-й степени $P(x)$ удовлетворяет в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ неравенству $|P(x)| \leqslant 1$. Тогда

$$|P'(x)| \leqslant n^2.$$

Равенство достигается только для $P(x) = \gamma T_n(x)$, $|\gamma| = 1$, $x = \pm 1$. [Рассмотреть $P(\cos\vartheta)$.]

§ 11. Полиномы Лежандра и родственные им

Полиномы Лежандра

$$P_0(x),\quad P_1(x),\quad P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

определяются следующими условиями:

1) $P_n(x)$ — полином n-й степени с вещественными коэффициентами[1]), для которого

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^\nu\, dx = 0 \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ n \geqslant 1).$$

2)

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3) Коэффициент при x^n в полиноме $P_n(x)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ положителен.

Первое условие означает, что, каков бы ни был полином $K(x)$ $(n-1)$-й степени, имеет место соотношение

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) K(x)\, dx = 0.$$

Отсюда следует, что условием 1) полином $P_n(x)$ однозначно определяется с точностью до постоянного множителя. Действительно, пусть $P_n^*(x)$ — полином, удовлетворяющий этому условию; тогда

[1]) Предположение вещественности коэффициентов можно отбросить, надлежащим образом изменив детали определения. См. также **98**, **99**, **100**.

этому же условию будет удовлетворять и $aP_n(x) - bP_n^*(x)$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Выберем постоянные a и b так, чтобы $aP_n(x) - bP_n^*(x)$ было полиномом $(n-1)$-й степени; тогда из тождества

$$\int_{-1}^{1} [aP_n(x) - bP_n^*(x)]^2\,dx = a\int_{-1}^{1} P_n(x)[aP_n(x) - bP_n^*(x)]\,dx - \\ - b\int_{-1}^{1} P_n^*(x)[aP_n(x) - bP_n^*(x)]\,dx = 0$$

будет следовать, что $aP_n(x) - bP_n^*(x) = 0$. Из 2) следует, далее, что $|a| = |b|$, а из 3) — что $a = b$.

Интегральные условия 1), 2) можно объединить в следующей формуле:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n \end{cases} \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(условия ортогональности).

84. Показать, что $P_n(x)$ с точностью до постоянного множителя равен n-й производной от $(x^2-1)^n$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

(*формула Родрига*).

85. $(1-t)^n P_n\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) =$

$$= 1 + \binom{n}{1}^2 t + \binom{n}{2}^2 t^2 + \binom{n}{3}^2 t^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 t^{n-1} + t^n.$$

86. Полином $P_n(x)$ может быть представлен в интегральной форме

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi$$

(*формула Лапласа*).

87. Между тремя последовательными полиномами Лежандра существует рекуррентное соотношение

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

88. Существует единственный полином n-й степени $S_n(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий соотношению

$$\int_{-1}^{1} S_n(x)\,K(x)\,dx = K(1)$$

для всех полиномов n-й степени $K(x)$. Представить $S_n(x)$ и $(1-x)S_n(x)$ в виде линейной комбинации полиномов Лежандра. [Представить так же $K(x)$.]

89. (Продолжение.) Полиномы

$$S_0(x), \quad S_1(x), \quad S_2(x), \ \ldots, \ S_n(x), \ \ldots$$

удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^{1}(1-x)S_m(x)S_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n \\ \dfrac{n+1}{2}, & \text{если } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

90. Показать, что $P_n(x)$ удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

91. Для достаточно малого w имеет место разложение в степенной ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+w^2}} = P_0(x) + P_1(x)w + P_2(x)w^2 + \ldots + P_n(x)w^n + \ldots$$

(«производящий ряд» для полиномов Лежандра).

92. Вывести 84, 86, 87, 90 непосредственно из 91. (91 можно принять также за определение полиномов Лежандра и притом за определение, занимающее «центральное положение», ибо от него к большинству свойств этих полиномов ведут наиболее удобные пути.)

93. Показать, что $P_n(\cos\vartheta)$ представляет собой полином по косинусам с неотрицательными коэффициентами. Определить эти коэффициенты. Вывести отсюда неравенство

$$|P_n(x)| \leqslant 1 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Если $n > 0$, равенство достигается лишь при $x = 1$ или $x = -1$.

94. При $x > 1$ последовательность

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \ \ldots, \ P_n(x), \ \ldots$$

монотонно возрастает.

95. Сумма n первых полиномов Лежандра неотрицательна в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x) \geqslant 0.$$

Равенство достигается лишь когда n нечетно и $x = -1$. [III 157.]

96. При четном n сумма n первых полиномов Лежандра

$$P_0(x)+P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x)$$

положительна при всех значениях x. При n нечетном эта сумма имеет в точке $x=-1$ единственное изменение знака. [94.]

97. Показать, что n-й полином Лежандра $P_n(x)$ имеет лишь вещественные и притом простые нули; все эти нули лежат внутри интервала $[-1, 1]$. [II 140.]

98. Обобщить теоремы **84—91, 97** на *полиномы Якоби* (гипергеометрические полиномы)

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x),\quad P_1^{(\alpha,\beta)}(x),\quad P_2^{(\alpha,\beta)}(x),\ \ldots,\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ \ldots\quad (\alpha,\beta>-1),$$

определяемые следующими условиями:

1), 2) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ есть полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий соотношениям

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq n,\\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\,\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & \text{если } m=n\end{cases}$$

$$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

(при $n=0$ последнее выражение должно быть заменено следующим:

$$2^{\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\Bigg).$$

3) Коэффициент при x^n полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ положителен.

При некоторых специальных значениях α, β эти полиномы приводятся к уже известным полиномам $P_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$ и $U_n(x)$. Именно при

$$\begin{array}{llll}\alpha=0, & 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\\ \beta=0, & 0, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2},\\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=P_n(x), & \dfrac{2}{n+1}S_n(x), & \dfrac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}T_n(x), & 2\,\dfrac{1\cdot3\ldots(2n+1)}{2\cdot4\ldots(2n+2)}U_n(x).\end{array}$$

[См. стр. 102, 89, 4, 4.]

(Коэффициент при $T_n(x)$ в случае $n=0$ заменить на 1.)

99. Распространить теоремы **84, 85, 87—91, 97** на *обобщенные полиномы Лагерра*

$$L_0^{(\alpha)}(x),\quad L_1^{(\alpha)}(x),\quad L_2^{(\alpha)}(x),\ \ldots,\ L_n^{(\alpha)}(x),\ \ldots\ (\alpha>-1),$$

определяемые следующими условиями:

1), 2) $L_n^{(\alpha)}(x)$ есть полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий соотношениям

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}, & \text{если } m = n \end{cases} \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3) Коэффициент при x^n в полиноме $L_n^{(\alpha)}(x)$ имеет знак $(-1)^n$.

100. Доказать теоремы, аналогичные 84, 87, 88, 90, 91, 97, для *полиномов Эрмита*

$$H_0(x),\quad H_1(x),\quad H_2(x),\ \ldots,\ H_n(x),\ \ldots,$$

определяемых следующими условиями:

1), 2) $H_n(x)$ — полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий соотношениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\,H_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n!}, & \text{если } m = n \end{cases} \qquad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

3) Коэффициент при x^n в полиноме $H_n(x)$ имеет знак $(-1)^n$.

101. Для определенных в 98 и 99 функций $P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$ и $L_n^{(\alpha)}(x)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\beta\to+\infty} P_n^{(\alpha,\ \beta)}(1-\varepsilon) = L_n^{(\alpha)}(x),$$

где ε при возрастании β стремится к нулю таким образом, что

$$\lim_{\beta\to+\infty} \varepsilon\beta = 2x.$$

102. Определенные в 99 и 100 функции $L_n^{(\alpha)}(x)$ и $H_n(x)$ связаны между собой соотношениями

$$H_{2q}(x) = \frac{(-1)^q}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2q-1)}\,L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

$$H_{2q+1}(x) = \frac{(-1)^{q+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2q+1)}\,xL_q^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

§ 12. Прочие задачи на максимумы и минимумы полиномов

103. Пусть $P(x)$ — любой полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$\int_{-1}^{1} [P(x)]^2\,dx = 1.$$

Тогда в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$|P(x)| \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{2}}.$$

Равенство достигается лишь для

$$P(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{n+1} S_n(x) \ [88] \ \text{при} \ x = 1$$

или

$$P(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{n+1} S_n(-x) \quad \text{при} \ x = -1$$

($n > 0$). [Интеграл от $[P(x)]^2$ представляет собой квадратичную форму от $n+1$ определяющих полином величин; постараться выбрать их так, чтобы эта квадратичная форма привелась к сумме $n+1$ квадратов.]

104. Пусть $P(x)$ — любой полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию'

$$\int_{-1}^{1} (1-x)[P(x)]^2\,dx = 1.$$

Тогда

$$|P(1)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{n+2}{2}, \quad |P(-1)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\binom{n+2}{2}}.$$

Эти границы нельзя понизить.

105. Пусть $P(x)$ — произвольный полином n-й степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} [P(x)]^2\,dx = 1,$$

где α и β — постоянные > -1. Определить максимумы значений $|P(1)|$ и $|P(-1)|$ для всей совокупности указанных полиномов. Как ведут себя эти максимумы для больших значений n?

106. Определить максимум значения $|P(0)|$ для совокупности всех полиномов n-й степени $P(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} [P(x)]^2\,dx = 1,$$

где α — постоянная > -1. Как ведет себя этот максимум для больших значений n?

107. Определить максимум значения $|P(0)|$ для совокупности полиномов n-й степени $P(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} [P(x)]^2 \, dx = 1.$$

Как ведет себя этот максимум для больших значений n?

---

108. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени, неотрицательный в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющий условию

$$\int_{-1}^{1} P(x) \, dx = 1.$$

Тогда

$$P(1) \leqslant \begin{cases} \dfrac{q(q+1)}{2} & \text{при нечетном } n, \ n = 2q-1, \\[2mm] \dfrac{(q+1)^2}{2} & \text{при четном } n, \ n = 2q. \end{cases}$$

Аналогичная оценка имеет место и для $P(-1)$. Эти границы не могут быть понижены.

109. Первая интегральная теорема о среднем значении может быть следующим образом уточнена для полиномов n-й степени. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени, имеющий в интервале $a \leqslant \leqslant x \leqslant b$ минимум m и максимум M. Тогда

$$m + \frac{M-m}{\alpha_n} \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b P(x) \, dx \leqslant M - \frac{M-m}{\alpha_n},$$

где при нечетном n, $n = 2q-1$, имеем

$$\alpha_n = q(q+1),$$

а при четном n, $n = 2q$,

$$\alpha_n = (q+1)^2.$$

110. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени, неотрицательный в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющий условию

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P(x) \, dx = 1,$$

где α и β — постоянные > -1. Тогда

$$P(1) \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \dfrac{\Gamma(q+\alpha+1)\,\Gamma(q+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(q)\,\Gamma(q+\beta+1)} \\ \qquad\qquad \text{при нечетном } n,\ n=2q-1, \\ \dfrac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \dfrac{\Gamma(q+\alpha+2)\,\Gamma(q+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(q+\beta+1)} \\ \qquad\qquad \text{при четном } n,\ n=2q. \end{cases}$$

Эти границы не могут быть понижены.

Меняя местами α и β, получаем соответствующие границы для $P(-1)$.

111. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени, принимающий для неотрицательных x лишь неотрицательные значения и удовлетворяющий условию

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha P(x)\,dx = 1,$$

где постоянная $\alpha > -1$. Тогда

$$P(0) \leqslant \frac{\Gamma(p+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(p+1)} \quad \left(p=\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Эта граница не может быть понижена.

112. Пусть $P(x)$ — полином n-й степени, неотрицательный для неотрицательных x и удовлетворяющий условию

$$\int_0^\infty e^{-x} P(x)\,dx = 1.$$

Тогда

$$P(0) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

113. (Продолжение.) Вообще при любом неотрицательном ξ выполняется неравенство

$$e^{-\xi} P(\xi) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. Вычисление определителей. Решение линейных уравнений

1. Перенумеруем n вершин многогранника в некотором определенном порядке и зададим затем определитель n-го порядка $|a_{\lambda\mu}|$ следующими условиями:

Если λ-я и μ-я вершины многогранника представляют собой концы одного и того же ребра, то $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda} = 1$.

Если же отрезок, соединяющий λ-ю и μ-ю вершины, не является ребром многогранника, то $a_{\lambda\mu} = 0$. В частности, $a_{\lambda\lambda} = 0$ для всех λ.

Показать, что значение этого определителя не зависит от порядка нумерации вершин. Составить и вычислить указанные определители для тетраэдра, гексаэдра (т. е. куба) и октаэдра.

2. Вычислить

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

3. Доказать тождество

$$\left|\frac{1}{a_\lambda + b_\mu}\right|_1^n = \frac{\prod\limits_{j>k}^{1,\,2,\,\dots,\,n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)}{\prod\limits_{\lambda,\,\mu}^{1,\,2,\,\dots,\,n} (a_\lambda + b_\mu)}.$$

4. Обозначим определитель квадратичной формы

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda+\mu}$$

через D_n. Показать, что

$$D_n = \frac{[1!\,2!\dots(n-1)!]^3\,n!}{(n+1)!\,(n+2)!\dots(2n)!}.$$

Вычислить, кроме того, определитель $D_n(\alpha)$ квадратичной формы

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{x_\lambda x_\mu}{\lambda+\mu+\alpha} \qquad (\alpha > -2).$$

5. $|(a_\lambda - b_\mu)^{n-1}|_1^n = \prod\limits_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{n-2\nu}\prod\limits_{j>k}^{1,\,2,\,\dots,\,n}(a_j-a_k)(b_j-b_k).$

6. Посредством преобразования определителя $|F(\alpha_\lambda\beta_\mu)|$ свести доказательство теоремы V 86 к теореме V 48.

7. Пусть $f(x) = (r_1-x)(r_2-x)\dots(r_n-x)$. Показать, что

$$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \dots & a \\ b & r_2 & a & \dots & a \\ b & b & r_3 & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & b & b & \dots & r_n \end{vmatrix} = \frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

[Прибавить ко всем n^2 элементам переменную x; получающийся таким образом определитель будет линейной функцией от x и, следовательно, определится заданием двух частных значений.]

8. Положим $\Delta = ad - bc$. Тогда

$$\frac{\partial(a\Delta,\ b\Delta,\ c\Delta,\ d\Delta)}{\partial(a,\ b,\ c,\ d)} = 3\Delta^4,$$

где стоящее слева выражение означает функциональный определитель Якоби.

9. Доказать, что выражение

$$\begin{vmatrix} \rho & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \frac{n}{l}+\frac{l}{n} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & \rho & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \\ \frac{n}{l}+\frac{l}{n} & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} & \rho \end{vmatrix}, \quad l \neq 0, \quad m \neq 0, \quad n \neq 0$$

делится на $\rho - 2$. Определить остальные множители.

10. Определитель

$$|1,\ x_\nu,\ x_\nu^2,\ \dots,\ x_\nu^{n-q-1},\quad x_\nu^{n-q+1},\ \dots,\ x_\nu^{n-1},\quad x_\nu^n| \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

как знакопеременная целая рациональная функция n чисел x_1, x_2, $\dots$, x_n делится во всяком случае на произведение

$$\prod_{j>k}^{1,\,2,\,\dots,\,n}(x_j - x_k).$$

Показать, что частное от деления определителя на это произведение равно q-й элементарной симметричной функции n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

11. Пусть числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ все отличны от нуля. Показать, что при любом z имеет место тождество

$$a_0 \begin{vmatrix} z+\frac{a_1}{a_0} & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_2} & \ldots & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ -\frac{a_1}{a_0} & z & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{a_1} & z & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & z \end{vmatrix} = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n.$$

12. Система уравнений

$$\begin{aligned} -a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1, \\ a_3x_1 \qquad - a_1x_3 &= b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \qquad &= b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= c, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c$ — вещественные числа, совместна в двух различных случаях. При этом в одном случае неизвестные x_1, x_2, x_3 совершенно неопределенны, во втором должны иметь совершенно определенные значения.

13. Пусть целая функция

$$1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots$$

имеет лишь различные между собой нули $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$

$$0 < |a_1| < |a_2| < \ldots < |a_n| < \ldots$$

Рассмотрим систему n уравнений

$$\begin{aligned} 1 + a_1u_1^{(n)} + a_1^2u_2^{(n)} + \ldots + a_1^nu_n^{(n)} &= 0, \\ 1 + a_2u_1^{(n)} + a_2^2u_2^{(n)} + \ldots + a_2^nu_n^{(n)} &= 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; \\ 1 + a_nu_1^{(n)} + a_n^2u_2^{(n)} + \ldots + a_n^nu_n^{(n)} &= 0, \end{aligned}$$

которыми вполне определяются $u_k^{(n)}$. Показать, что при сходимости ряда $\frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_2|} + \ldots + \frac{1}{|a_n|} + \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_k^{(n)}$ существует, однако не обязательно равен c_k. ($u_1 = c_1$, $u_2 = c_2, \ldots$ является о д н и м из решений б е с к о н е ч н о й системы

$$1 + a_\nu u_1 + a_\nu^2 u_2 + \ldots = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).)$$

14. Пусть в системе уравнений

$$\begin{aligned} c_{11}z_1+c_{12}z_2+\ldots+c_{1n}z_n&=0,\\ c_{21}z_1+c_{22}z_2+\ldots+c_{2n}z_n&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{n1}z_1+c_{n2}z_2+\ldots+c_{nn}z_n&=0 \end{aligned}$$

коэффициенты и неизвестные представляют собой комплексные числа

$$c_{\lambda\mu}=a_{\lambda\mu}+ib_{\lambda\mu}, \quad z_\mu=x_\mu+iy_\mu,$$

где $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$, x_μ, y_μ вещественны. Чтобы эти уравнения допускали не только тривиальное нулевое решение

$$z_1=z_2=\ldots=z_n=0,$$

т. е.

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=y_1=y_2=\ldots=y_n=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель $|c_{\lambda\mu}|_1^n$ был равен нулю. Это дает д в а у р а в н е н и я между $2n^2$ вещественными величинами $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$. С другой стороны, заданные уравнения можно представить в виде системы $2n$ однородных линейных уравнений с $2n$ вещественными неизвестными. Но тогда необходимым и достаточным условием наличия нетривиального решения будет являться обращение в нуль некоторого вещественного определителя, что дает о д н о у р а в н е н и е между $a_{\lambda\mu}$, $b_{\lambda\mu}$. Как согласовать между собой эти два результата?

15. Все шесть членов в разложении определителя третьего порядка не могут быть одновременно положительны.

16. Правило разложения определителя состоит из двух частей: первая часть указывает, из каких элементов составляются произведения, тогда как второй частью определяются знаки перед произведениями, образованными указанным образом.

В случае определителей второго порядка вторую часть можно представить в виде следующего простого правила:

Каждому из элементов

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

мы сопоставляем соответственно знак

$$\begin{matrix} + & +\\ - & +. \end{matrix}$$

Тогда каждый элемент произведения, составленного согласно первой части правила, нужно взять с соответствующим знаком.

Показать теперь, что аналогичное правило для определителей выше чем второго порядка невозможно; иными словами, невозможно n^2 элементам определителя так поставить в соответствие n^2 фиксированных знаков, чтобы у всех произведений, составленных согласно первой части общего правила разложения, но с учетом соответствующих знаков, получался в итоге надлежащий знак.

§ 2. Разложение рациональных функций в степенные ряды

В задачах 17—34 рассматриваются определители, обычно называемые *определителями Ганкеля* или *рекуррентными*:

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+r-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \dots & a_{n+r} \\ a_{n+2} & a_{n+3} & a_{n+4} & \dots & a_{n+r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+r-1} & a_{n+r} & a_{n+r+1} & \dots & a_{n+2r-2} \end{vmatrix} = A_n^{(r)},$$

составленные из коэффициентов степенного ряда

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

17. Пусть степенной ряд $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ представляет рациональную функцию, у которой знаменатель имеет степень q, а числитель — степень $p-1$ (предполагается, что числитель и знаменатель — взаимно простые; степени — точные). Пусть, далее, $d = \operatorname{Max}(0,\ p-q)$. Показать, что

$$A_d^{(q+1)} = A_{d+1}^{(q+1)} = A_{d+2}^{(q+1)} = \dots = 0.$$

18. Пусть d, q — неотрицательные целые числа. Если

$$A_d^{(q)} \neq 0, \quad A_{d+1}^{(q)} \neq 0, \quad A_{d+2}^{(q)} \neq 0, \quad A_{d+3}^{(q)} \neq 0, \ \dots,$$
$$A_d^{(q+1)} = 0, \quad A_{d+1}^{(q+1)} = 0, \quad A_{d+2}^{(q+1)} = 0, \ \dots,$$

то степенной ряд может быть представлен в виде отношения двух полиномов, из которых стоящий в знаменателе имеет степень q, а в числителе — степень $\leqslant q+d-1$. [Исследовать зависимость линейных форм

$$L_n(x) = a_n x_0 + a_{n+1} x_1 + a_{n+2} x_2 + \dots + a_{n+q} x_q.]$$

19. $A_n^{(r)} A_{n+2}^{(r)} - A_n^{(r+1)} A_{n+2}^{(r-1)} = \left(A_{n+1}^{(r)}\right)^2$.

20. Если

$$A_m^{(q+1)} = A_{m+1}^{(q+1)} = A_{m+2}^{(q+1)} = A_{m+3}^{(q+1)} = \dots = A_{m+t-1}^{(q+1)} = 0,$$

то t определителей

$$A_{m+1}^{(q)}, \quad A_{m+2}^{(q)}, \quad A_{m+3}^{(q)}, \ \dots, \ A_{m+t}^{(q)}$$

либо все одновременно равны нулю, либо все одновременно не равны нулю.

21. Если в треугольной схеме

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_0^{(1)} & A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & A_3^{(1)} & A_4^{(1)} & * & * & * & * \\
 & A_0^{(2)} & A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & * & * & * & * & * \\
 & & A_0^{(3)} & * & * & * & A_{n+2}^{(r-1)} & * & * \\
 & & & * & * & A_n^{(r)} & A_{n+1}^{(r)} & A_{n+2}^{(r)} & * \\
 & & & & * & * & A_n^{(r+1)} & * & *
\end{array}$$

построить на произвольном элементе (определителе), как на вершине, открытый сверху прямой угол с вертикальной биссектрисой, то все определители, содержащиеся в этом угле, будут служить минорами определителя, находящегося в вершине.

22. Условимся говорить, что в схеме **21**

$A_n^{(r)}$ и $A_{n+1}^{(r)}$ образуют горизонтальную пару,

$A_{n+1}^{(r)}$ и $A_n^{(r+1)}$ образуют вертикальную пару,

$A_n^{(r)}$ и $A_n^{(r+1)}$ образуют диагональную пару,

$A_{n+1}^{(r)}$ и $A_{n-1}^{(r+1)}$ образуют точно так же диагональную пару, накрест лежащую с $A_n^{(r)}$, $A_n^{(r+1)}$.

Показать, что

1) при обращении в нуль диагональной пары обращается в нуль и накрест лежащая с ней пара;

2) при обращении в нуль горизонтальной пары обращается также в нуль расположенная либо над, либо под ней горизонтальная пара;

3) при обращении в нуль вертикальной пары обращается также в нуль находящаяся либо слева, либо справа соседняя вертикальная пара.

Свойства 1), 2), 3) сохраняют силу также на наклонном крае схемы **21**.

23. Если лишь конечное число определителей бесконечной последовательности

$$A_0^{(k+1)},\quad A_1^{(k+1)},\quad A_2^{(k+1)},\ \ldots,\ A_n^{(k+1)},\ \ldots$$

отлично от нуля, то степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ представляет рациональную функцию, степень знаменателя которой не превосходит k. [**20**, **18**.]

24. Если лишь конечное число определителей бесконечной последовательности

$$A_0^{(1)},\quad A_0^{(2)},\quad A_0^{(3)},\ \ldots,\ A_0^{(n)},\ \ldots$$

отлично от нуля, то степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ представляет рациональную функцию.

25. Если лишь конечное число определителей бесконечной схемы

$$\begin{array}{cccccc} A_0^{(1)}, & A_1^{(2)}, & A_2^{(3)}, & A_3^{(4)}, \ldots, & A_n^{(n+1)}, & \ldots \\ & A_1^{(1)}, & A_2^{(2)}, & A_3^{(3)}, \ldots, & A_n^{(n)}, & \ldots \end{array}$$

отлично от нуля, то степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ представляет рациональную функцию.

26. Показать, что указанные в задачах 23, 24, 25 достаточные условия рациональности функции, представляемой степенным рядом $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$, являются также необходимыми.

О бесконечной матрице

$$\begin{array}{cccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

говорят, что она *конечного ранга* r, если все содержащиеся в ней определители $(r+1)$-го порядка равны нулю и хотя бы один определитель r-го порядка не равен нулю.

У бесконечной *матрицы Ганкеля*

$$(\mathfrak{H}) \qquad \begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$(a_{\lambda\mu}=a_{\lambda+\mu})$ определенный только что ранг условимся называть также *брутто-рангом*. Обозначим через r_k ранг матрицы

$$(\mathfrak{H}_k) \qquad \begin{array}{cccc} a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ a_{k+1} & a_{k+2} & a_{k+3} & \ldots \\ a_{k+2} & a_{k+3} & a_{k+4} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array},$$

получающейся из $\mathfrak{H}$ вычеркиванием первых k столбцов (или строк). Имеем

$$\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}, \quad r_0=r, \quad r_0\geqslant r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots$$

Минимум последовательности чисел $r_0, r_1, r_2, \ldots$, необходимо достигающийся через конечное число шагов, условимся называть *нетто-рангом* матрицы $\mathfrak{H}$.

27. Ранг матрицы $\mathfrak{H}$ конечен тогда и только тогда, когда степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ представляет рациональную функцию.

28. Брутто-ранг матрицы $\mathfrak{H}$ равен порядку последнего не обращающегося в нуль определителя из бесконечной последовательности

$$A_0^{(1)},\ A_0^{(2)},\ A_0^{(3)},\ A_0^{(4)},\ \ldots$$

Пусть таковым является $A_0^{(p)}$; тогда нетто-ранг равен порядку первого не равного нулю определителя из конечной последовательности

$$A_1^{(p)},\ A_2^{(p-1)},\ A_3^{(p-2)},\ \ldots,\ A_p^{(1)}.$$

(Если все эти p определителей равны нулю, то и нетто-ранг равен нулю.)

29. Нетто-ранг матрицы $\mathfrak{H}$ в случае, если он конечен, равен степени знаменателя рациональной функции, представляемой рядом $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ Эта рациональная функция будет правильной дробью тогда и только тогда, когда брутто-ранг равен нетто-рангу. Если брутто-ранг больше нетто-ранга, то он превосходит на единицу степень числителя. (Числитель и знаменатель рациональной функции предполагаются, конечно, взаимно простыми; степень числителя — точной.)

---

30. Функция, представляемая степенным рядом

$$a_0+\frac{a_1z}{1!}+\frac{a_2z^2}{2!}+\ldots+\frac{a_nz^n}{n!}+\ldots,$$

тогда и только тогда удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, когда все определители

$$A_0^{(1)},\ A_0^{(2)},\ A_0^{(3)},\ \ldots,\ A_0^{(n)},\ \ldots,$$

за исключением нескольких, равны нулю.

31. Пусть $Q_n(z)$ — полином n-й степени, $Q_n(0)=1$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Положим для краткости

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots=f(z),\quad Q_k(z)f(z)=\square_k a_0+\square_k a_1 z+\square_k a_2 z^2+\ldots,$$
$$Q_k(z)\,Q_l(z)\,f(z)=\square_k\square_l a_0+\square_k\square_l a_1 z+\square_k\square_l a_2 z^2+\ldots$$

($\square_k\square_l a_n$ есть однородное линейное выражение, составленное из a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_{n-k-l}).

Показать, что

$$A_0^{(n+1)}=\begin{vmatrix} a_0 & \square_1 a_1 & \ldots & \square_n a_n \\ \square_1 a_1 & \square_1\square_1 a_2 & \ldots & \square_1\square_n a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \square_n a_n & \square_n\square_1 a_{n+1} & \ldots & \square_n\square_n a_{2n} \end{vmatrix}.$$

32. Пусть $\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z^3}+\ldots$ будет степенное разложение рациональной функции со знаменателем $z^q-c_1z^{q-1}-c_2z^{q-2}-\ldots-c_q$. Числитель и знаменатель предполагаются взаимно простыми. Показать, что матрицы

$$\mathfrak{A}_m=\begin{pmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+q-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m+q-1} & a_{m+q} & \ldots & a_{m+2q-2} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_q \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{q-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{q-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{q-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_1 \end{pmatrix}$$

связаны соотношением

$$\mathfrak{A}_m=\mathfrak{A}_0\mathfrak{C}^m \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Обозначим ранг бесконечной матрицы

$$(\mathfrak{M}) \qquad \begin{matrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \ldots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \ldots \end{matrix}$$

с конечным числом $(=m)$ строк через r_0; ранг матрицы, получающейся из $\mathfrak{M}$ вычеркиванием n первых столбцов, — через r_n. Имеем $r_0\geqslant r_1\geqslant r_2\geqslant\ldots$ Будем теперь $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ называть *нетто-рангом* матрицы $\mathfrak{M}$.

Матрица $\mathfrak{M}$ принадлежит системе m степенных рядов

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a_{10}+a_{11}z+a_{12}z^2+\ldots+a_{1n}z^n+\ldots, \\ f_2(z) &= a_{20}+a_{21}z+a_{22}z^2+\ldots+a_{2n}z^n+\ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(z) &= a_{m0}+a_{m1}z+a_{m2}z^2+\ldots+a_{mn}z^n+\ldots \end{aligned}$$

Эти ряды называются *линейно зависимыми*, если можно подобрать такие постоянные $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m$, где $|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_m|>0$, что имеет место тождество

$$c_1f_1(z)+c_2f_2(z)+\ldots+c_mf_m(z)=0.$$

Они называются *квази-линейно зависимыми* между собой, если можно подобрать такие постоянные $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m$, $|c_1|+|c_2|+\ldots$ $\ldots+|c_m|>0$, что справедливо тождество

$$c_1f_1(z)+c_2f_2(z)+\ldots+c_mf_m(z)=P(z),$$

где $P(z)$ — полином.

Утверждения: «между степенными рядами $f(z)$, $zf(z)$, $z^2f(z), \ldots$ $\ldots, z^m f(z)$ при достаточно большом m существует квази-линейная зависимость» и «$f(z)$ — рациональная функция» равносильны.

Говорят, что $f(z)$ представляет *алгебраическую функцию*, если между $(m+1)^2$ степенными рядами $z^\mu [f(z)]^\nu$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, m)$ при достаточно большом m имеет место линейная зависимость. Говорят, что $f(z)$ удовлетворяет *алгебраическому дифференциальному уравнению* r-го порядка, если между $(m+1)^{r+2}$ степенными рядами

$$z^\mu [f(z)]^\nu [f'(z)]^{\nu_1} [f''(z)]^{\nu_2} \ldots [f^{(r)}(z)]^{\nu_r}$$

$(\mu, \nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r = 0, 1, 2, \ldots, m)$ при достаточно большом m существует линейная зависимость.

33. Если ранг матрицы системы конечного числа степенных рядов равен r, то между этими рядами имеются r линейно независимых, все же остальные линейно зависят от этих r рядов.

34. Если нетто-ранг матрицы системы конечного числа степенных рядов равен r, то между этими рядами имеются r квази-линейно независимых, все же остальные квази-линейно зависят от указанных r рядов.

§ 3. Положительные квадратичные формы

35. Если квадратичные формы

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

положительны, то квадратичная форма

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$$

точно так же положительна. Если, кроме того, одна из этих двух форм является определенной, а в матрице другой элементы главной диагонали отличны от нуля, то третья также будет определенной.

36. Рассмотрим симметрические матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & e^{a_{12}} & \ldots & e^{a_{1n}} \\ e^{a_{21}} & e^{a_{22}} & \ldots & e^{a_{2n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e^{a_{n1}} & e^{a_{n2}} & \ldots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Если квадратичная форма, определяемая матрицей $(a_{\lambda\mu})$, положительна, то положительной будет и форма, определяемая матрицей $(e^{a_{\lambda\mu}})$. Если, кроме того, в матрице $(a_{\lambda\mu})$ нет тождественно совпадающих строк, то форма, определяемая матрицей $(e^{a_{\lambda\mu}})$, будет даже определенной. [V 76.]

37. Пусть степенной ряд

$$p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots=F(x),$$

имеющий неотрицательные коэффициенты, сходится при $x=a_{11}$, a_{12}, ..., a_{nn}. Если квадратичная форма, определяемая симметрической матрицей n-го порядка $(a_{\lambda\mu})$, положительна, то положительной также будет форма, принадлежащая матрице $(F(a_{\lambda\mu}))$; если, кроме того, между коэффициентами p_0, p_2, p_4, ... имеется по крайней мере n отличных от нуля, а все строки матрицы $(a_{\lambda\mu}^2)$ различны, то последняя форма будет даже определенной.

38. Пусть вещественные числа a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n} обладают следующим свойством: для любого полинома $f(x)$ степени не выше $2n$, неотрицательного и не равного тождественно нулю, имеет место неравенство

$$a_0f(x)+\frac{a_1}{1!}f'(x)+\frac{a_2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{a_{2n}}{(2n)!}f^{(2n)}(x)\geqslant 0 \qquad (\text{соотв. } >0)$$

при всех значениях x.

Показать, что необходимым и достаточным условием для этого является положительность (соотв. положительность и определенность) квадратичной формы

$$\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n}a_{\lambda+\mu}x_\lambda x_\mu .$$

39. Пусть числа a_0, a_1, ..., a_n $(n\geqslant 1)$ обладают следующим свойством: для любого полинома $f(x)$ степени не выше n, неотрицательного для неотрицательных значений x и не равного тождественно нулю, имеет место неравенство

$$a_0f(x)+\frac{a_1}{1!}f'(x)+\frac{a_2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(x)\geqslant 0 \qquad (\text{соотв. } >0)$$

при любых неотрицательных значениях x.

Показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичные формы

$$\sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{\lambda+\mu}x_\lambda x_\mu, \qquad \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}a_{\lambda+\mu+1}x_\lambda x_\mu$$

были обе положительны (соотв. положительно определенны).

40. Пусть числа a_0, a_1, a_2, ..., a_n $(n\geqslant 1)$ обладают следующим свойством: для всякого полинома $f(x)$ степени $\leqslant n$, неотрицательного в интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ и не равного тождественно нулю, выполняется неравенство

$$a_0f(x)+\frac{a_1}{1!}f'(x)+\frac{a_2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(x)\geqslant 0$$

при любых x в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Показать, что тогда непременно

$$a_0 \geqslant 0, \quad a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

41. Пусть обе квадратичные формы

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} a_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} b_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu$$

положительны. Положим

$$c_\nu = a_0 b_\nu + \binom{\nu}{1} a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \ldots + a_\nu b_0.$$

Тогда квадратичная форма

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} c_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu$$

будет также положительной и притом определенной, если по крайней мере одна из данных форм определенная.

42. Пусть

$$c_\nu = a_0 b_\nu + \binom{\nu}{1} a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \ldots + a_\nu b_0.$$

Показать, что из положительности четырех квадратичных форм

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} a_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu,$$
$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} b_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} b_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu$$

вытекает положительность двух следующих:

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} c_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m-1} \sum_{\mu=0}^{m-1} c_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu.$$

Далее из положительности четырех форм

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} a_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu,$$
$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} b_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} b_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu$$

вытекает положительность обеих форм

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} c_{\lambda+\mu} x_\lambda x_\mu, \quad \sum_{\lambda=0}^{m} \sum_{\mu=0}^{m} c_{\lambda+\mu+1} x_\lambda x_\mu.$$

43. Пусть комплексные числа

$$c_{-n},\ c_{-n+1},\ \ldots,\ c_{-1},\ c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n,\ c_{-\nu}=\bar{c}_\nu\quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

обладают следующим свойством: если любой тригонометрический полином порядка не выше n вида

$$g(\vartheta)=\alpha_0+2(\alpha_1\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta+\alpha_2\cos 2\vartheta+\beta_2\sin 2\vartheta+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_n\cos n\vartheta+\beta_n\sin n\vartheta)=\sum_{\nu=-n}^{n}\gamma_\nu e^{-i\nu\vartheta}$$
$$(\gamma_\nu=\bar{\gamma}_{-\nu}=\alpha_\nu+i\beta_\nu,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \beta_0=0)$$

неотрицателен и не равен тождественно нулю, то имеет место неравенство

$$\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu\gamma_\nu e^{-i\nu\vartheta}\geqslant 0\quad (\text{соотв. }>0).$$

Показать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма

$$\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} c_{\mu-\lambda}x_\lambda\bar{x}_\mu$$

была положительной (соотв. положительно определенной).

§ 4. Смешанные задачи

44. Будем рассматривать n^2 элементов $a_{\lambda\mu}$ определителя n-го порядка как независимые переменные. Показать, что между $n!$ слагаемыми $\pm a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$ в разложении определителя имеется лишь $N=n^2-2n+2$ независимых между собой, и указать N таких членов, через которые все остальные могут быть выражены рационально.

45. Обозначим через s'_n число отличных друг от друга положительных слагаемых в разложении симметрического определителя n-го порядка (с произвольными элементами), а через s''_n — соответствующее число отрицательных слагаемых. Для $s_n=s'_n+s''_n$ уже Кэли указал рекуррентную формулу

$$s_{n+1}=(n+1)\,s_n-\binom{n}{2}s_{n-2}.$$

Показать, что для $d_n=s'_n-s''_n$ имеет место рекуррентная формула

$$d_{n+1}=-(n-1)\,d_n-\binom{n}{2}d_{n-2}$$

и что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}s_n}{n!}=\frac{e^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^{\frac{3}{2}}d_n}{n!}=\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{2\sqrt{\pi}}.$$

46. Обозначим через σ'_n число отличных друг от друга положительных слагаемых в разложении симметрического определителя n-го порядка $|a_{\lambda\mu}|$, у которого все элементы главной диагонали $a_{\lambda\lambda}$ равны нулю, а через σ''_n — соответствующее число отрицательных слагаемых. Положим

$$\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n, \qquad \delta_n = \sigma'_n - \sigma''_n.$$

Тогда

$$\sigma_{n+1} = n\sigma_n + n\sigma_{n-1} - \binom{n}{2}\sigma_{n-2}, \qquad \delta_{n+1} = -n\delta_n - n\delta_{n-1} - \binom{n}{2}\delta_{n-2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}\sigma_n}{n!} = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{\frac{3}{2}}\delta_n}{n!} = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}}.$$

47. Обозначим произведение $\prod\limits_{j<k}^{1,\,2,\,\ldots,\,n} (x_j - x_k)$ через Δ. Тогда, как известно, выражение вида

$$\Phi = \frac{1}{\Delta}\sum \pm\, \varphi(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}),$$

где сумма распространена на все $n!$ перестановок из $1, 2, \ldots, n$ и для четных перестановок берется знак плюс, а для нечетных — минус, будет симметрической функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показать, что если

$$\varphi = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - x_1 x_2 \ldots x_\nu},$$

то тогда

$$\Phi = \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1-x_\nu) \prod\limits_{j>k}^{1,\,2,\,\ldots,\,n}(1-x_j x_k)}.$$

48. Пусть характеристическое уравнение системы n^2 величин $a_{\lambda\mu}$

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} a_{11}-z & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-z & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{r2} & \ldots & a_{nn}-z \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю. Обозначим через $\chi_{\lambda\mu}(z)$ алгебраические дополнения элементов определителя $\chi(z)$. Доказать, что характеристическое уравнение величин $\chi_{\lambda\mu}(z)$ имеет корни

$$\zeta_\rho = \frac{\chi(z)}{\alpha_\rho - z} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n).$$

49. Линейные преобразования

$$S_\alpha:\quad y_p=\frac{\sin\alpha\pi}{n+1}\sum_{q=0}^{n}\frac{x_q}{\sin\frac{\pi}{n+1}(p-q+\alpha)}\qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

где α произвольно, образуют группу в том смысле, что

$$S_\alpha S_\beta=S_{\alpha+\beta}.$$

50. Пусть $g(\vartheta)$ — тригонометрический полином с вещественными коэффициентами порядка не выше n. Указать, каким условиям он должен удовлетворять, чтобы линейные преобразования

$$S_\alpha:\quad y_p=\sum_{q=0}^{n}x_q g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-q+\alpha)\right)\qquad (p=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

где α произвольно, образовывали группу в смысле задачи 49.

51. (Продолжение.) Определитель преобразования S_α тождественно равен нулю, за тем единственным исключением, когда

$$g(\vartheta)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}\qquad [49];$$

в этом случае он тождественно равен единице.

52. (Продолжение задачи 49.) Преобразование S_α ортогонально, т. е. тождественно для всех $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=x_0^2+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Линейное преобразование

$$\begin{aligned}
y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+\ldots,\\
y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

называется *ортогональным* [этот термин часто относят и к соответствующей матрице (a_{mn})], если имеют место соотношения

$$a_{m1}^2+a_{m2}^2+a_{m3}^2+\ldots+a_{mn}^2+\ldots=1\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$a_{\lambda1}a_{\mu1}+a_{\lambda2}a_{\mu2}+a_{\lambda3}a_{\mu3}+\ldots+a_{\lambda n}a_{\mu n}+\ldots=0$$
$$(\lambda\neq\mu,\ \lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и одновременно соотношения

$$a_{1n}^2+a_{2n}^2+a_{3n}^2+\ldots+a_{mn}^2+\ldots=1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$a_{1\lambda}a_{1\mu}+a_{2\lambda}a_{2\mu}+a_{3\lambda}a_{3\mu}+\ldots+a_{m\lambda}a_{m\mu}+\ldots=0$$
$$(\lambda\neq\mu;\ \lambda,\ \mu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Аналогично определяется ортогональность бесконечной по всем направлениям матрицы

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, & a_{-m,\,-n}, & \ldots, & a_{-m,\,-1}, & a_{-m,\,0}, & a_{-m,\,1}, & \ldots, & a_{-m,\,n}, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, & a_{m,\,-n}, & \ldots, & a_{m,\,-1}, & a_{m,\,0}, & a_{m,\,1}, & \ldots, & a_{m,\,n}, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

53. Числа Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... определяются условиями $u_0=0$, $u_1=1$, $u_n+u_{n+1}=u_{n+2}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Показать, что линейное преобразование

$$y_n=\frac{u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_nx_n-u_nx_{n+1}}{\sqrt{u_nu_{n+2}}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ортогонально.

54. Линейное преобразование

$$y_m=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x_n}{m+n-\alpha} \qquad (m=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где α — не целое вещественное число, ортогонально.

§ 5. Определители систем функций

Определителем Вронского или *вронскианом* системы функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ называют определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & f_1''(x) & \ldots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & f_2''(x) & \ldots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & f_n''(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=W[f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)].$$

55. При любых постоянных $c_{\lambda\mu}$

$$W(c_{11}f_1+c_{12}f_2+\ldots+c_{1n}f_n,\quad c_{21}f_1+c_{22}f_2+\ldots+c_{2n}f_n,\ \ldots$$
$$\ldots,\ c_{n1}f_1+c_{n2}f_2+\ldots+c_{nn}f_n)=$$
$$=|c_{\lambda\mu}|_1^n\cdot W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n).$$

56. Показать, что

$$W[f_1(\varphi(x)),\ f_2(\varphi(x)),\ \ldots,\ f_n(\varphi(x))] = \\ = [\varphi'(x)]^{\frac{n(n-1)}{2}}\, W[f_1(y),\ f_2(y),\ \ldots,\ f_n(y)],$$

где в правой части надо подставить $y = \varphi(x)$.

57. $W(\varphi f_1,\ \varphi f_2,\ \ldots,\ \varphi f_n) = \varphi^n W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$.

58. $\frac{1}{f_1^n} W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n) = W\left[\left(\frac{f_2}{f_1}\right)',\ \left(\frac{f_3}{f_1}\right)',\ \ldots,\ \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right]$.

59. $$\frac{d}{dx}\,\frac{W(f_1,\ \ldots,\ f_{n-2},\ f_n)}{W(f_1,\ \ldots,\ f_{n-2},\ f_{n-1})} = \\ = \frac{W(f_1,\ \ldots,\ f_{n-2})\, W(f_1,\ \ldots,\ f_{n-2},\ f_{n-1},\ f_n)}{[W(f_1,\ \ldots,\ f_{n-2},\ f_{n-1})]^2}.$$

60. Если $W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{n-1},\ f_n)$ обращается в нуль во всех точках интервала $(a,\ b)$, а $W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{n-1})$ — ни в одной, то можно указать $n-1$ таких постоянных $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1}$, чтобы во всем интервале $(a,\ b)$ соблюдалось тождество

$$f_n(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_{n-1} f_{n-1}(x).$$

61. Если $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ суть n линейно независимых интегралов однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \varphi_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_n(x)\, y = 0,$$

то для каждой функции y имеет место соотношение

$$y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \varphi_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_n(x)\, y \equiv \frac{W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ y)}{W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)}.$$

62. (Продолжение.) Положим

$$1 = W_0,\ f_1 = W_1,\ W(f_1,\ f_2) = W_2,\ \ldots,\ W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n) = W_n.$$

Тогда для всех функций y имеет место соотношение

$$y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \varphi_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_n(x)\, y \equiv \\ \equiv \frac{W_n}{W_{n-1}}\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{W_{n-1}^2}{W_{n-2}W_n} \cdots \frac{d}{dx}\left[\frac{W_2^2}{W_1W_3}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{W_1^2}{W_0W_2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{y}{W_1}\right)\right]\right\}.$$

Это представление линейного дифференциального выражения, предполагающее знание n независимых интегралов, имеет сходство с разложением на множители полинома n-й степени, предполагающим знание n его нулей.

63. Пусть $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ — вещественные функции, непрерывные в интервале $a,\ b$. Показать, что определитель

$$\left|\int_a^b f_\lambda(x) f_\mu(x)\,dx\right|_{\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n}$$

неотрицателен, причем обращается в нуль тогда и только тогда, когда между функциями $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ существует линейная зависимость.

64. (Продолжение.) Определитель

$$\begin{vmatrix} \int_a^b (f_2^2+f_3^2+\ldots+f_n^2)\,dx & -\int_a^b f_1 f_2\,dx & \ldots & -\int_a^b f_1 f_n\,dx \\ -\int_a^b f_2 f_1\,dx & \int_a^b (f_1^2+f_3^2+\ldots+f_n^2)\,dx & \ldots & -\int_a^b f_2 f_n\,dx \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\int_a^b f_n f_1\,dx & -\int_a^b f_n f_2\,dx & \ldots & \int_a^b (f_1^2+f_2^2+\ldots+f_{n-1}^2)\,dx \end{vmatrix}$$

неотрицателен, причем обращается в нуль тогда и только тогда, когда функции $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ отличаются друг от друга лишь постоянными множителями или, иными словами, все являются кратными одной из них.

65. (Продолжение.) Определитель

$$\left|\int_{e^a}^b f_\lambda(x) f_\mu(x)\,dx\right|_{\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n}$$

неотрицателен, причем обращается в нуль тогда и только тогда, когда какие-нибудь две из функций $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ тождественно совпадают.

66. Нижеследующая теорема представляет собой обобщение теоремы, упомянутой по одному поводу Гауссом в его «Theoria combinationis observationum» [Opera omnia, т. 4, стр. 12, см. две последние строки в Art. 11].

Пусть $f(x)$ для $x>0$ представляет собой функцию невозрастающую неотрицательную и вместе с тем не равную тождественно нулю. Пусть, далее, все числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ различны между собой. Показать, что (при допущении существования всех входящих интегралов) определитель

$$\left|(a_\lambda+a_\mu+1)\int_0^\infty x^{a_\lambda+a_\mu} f(x)\,dx\right|_{\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n}$$

неотрицателен; он обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f(x)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию с не более чем $n-1$ точкой разрыва.

Пусть функция $f(\vartheta)$ собственно интегрируема в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ и имеет ряд Фурье [VI, § 4]

$$f(\vartheta) \sim a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Эрмитовы формы

$$T_n(f) = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} c_{\mu-\lambda} x_\lambda \bar{x}_\mu,$$

образованные посредством чисел

$$c_0 = a_0, \quad c_n = a_n + ib_n, \quad c_{-n} = \bar{c}_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

мы будем называть *формами Тёплица* (Toeplitz), принадлежащими функции $f(\vartheta)$. (См. 43.)

67. Образовать формы Тёплица, принадлежащие функциям

$$f(\vartheta) = c = \text{const.}, \quad f(\vartheta) = a_0 + 2(a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta),$$

$$f(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2}, \quad 0 < r < 1.$$

68. Если функция $f(\vartheta)$ положительна в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$, то все формы Тёплица положительно определенны. Более точно: если $f(\vartheta)$ в интервале $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$ заключена в границах $m \leqslant f(\vartheta) \leqslant M$, то тогда и

$$m \leqslant T_n(f) \leqslant M,$$

в предположении, что переменные $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ подчинены условию $T_n(1) = 1$. Равенство может быть достигнуто лишь в том случае, если $f(\vartheta) = \text{const.}$ у каждой точки непрерывности.

69. Вычислить определитель $D_n(f)$ формы $T_n(f)$ для функций задачи 67 и показать, что если $f(\vartheta)$ всюду положительна, то

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f(\vartheta)\, d\vartheta} = \mathfrak{G}(f).$$

70. Пусть $f(\vartheta)$ — тригонометрический полином первого порядка и h — параметр. Показать, что определитель $D_n(f-h)$ формы Тёплица $T_n(f-h)$, принадлежащей функции $f(\vartheta) - h$, представляет собой целую рациональную функцию $(n+1)$-й степени от h, имеющую лишь вещественные нули. Вычислить эти нули.

71. (Продолжение.) Все нули $h_{0n}, h_{1n}, \ldots, h_{nn}$ определителя $D_n(f-h)$ расположены между минимумом и максимумом функции $f(\vartheta)$, т. е. если $m \leqslant f(\vartheta) \leqslant M$ в интервале $[0, 2\pi]$, то также $m \leqslant h_{\nu n} \leqslant M$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Далее, для любой функции $F(h)$, собственно интегрируемой в интервале $m \leqslant h \leqslant M$, имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(h_{0n}) + F(h_{1n}) + \ldots + F(h_{nn})}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(\vartheta)]\, d\vartheta.$$

72. Если эрмитова форма

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} c_{\lambda-\mu} x_\lambda \bar{x}_\mu \qquad (c_{-\nu} = \bar{c}_\nu)$$

положительно определенная, то все нули полинома

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & c_{-n+3} & \ldots & c_1 \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \end{vmatrix}$$

лежат внутри единичного круга.

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Задачи на целые части чисел

Пусть x — вещественное число. Через $[x]$ обозначают *целую часть* числа x, т. е. целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$[x] \leqslant x < [x]+1.$$

Так, например,

$$[\pi]=3, \quad [2]=2, \quad [-0{,}73]=-1.$$

1. Пусть n — целое, x — произвольное. Тогда

$$[x+n]=[x]+n.$$

2. В разложении определителя n-го порядка произведение членов, стоящих в диагоналях, соседних с главной диагональю, имеет знак $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

3.
$$[2x]-2[x]=0 \text{ или } 1,$$
смотря по тому, будет ли

$$x-[x]<\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \geqslant \frac{1}{2}.$$

4. Если $0<\alpha<1$, то

$$[x]-[x-\alpha]=0 \quad \text{или} \quad 1,$$

смотря по тому, будет ли

$$x-[x] \geqslant \alpha \quad \text{или} \quad <\alpha.$$

5. В предположении, что x не имеет вида $n+\frac{1}{2}$ (n — целое), выразить ближайшее к x целое число посредством символа [ ].

6. $[x]$ можно было бы назвать целым числом, ближайшим слева к x. Выразить посредством символа $[\ ]$ целое число, ближайшее справа к x. (Замена данного числа ближайшим справа целым числом — обычный прием мелких торговых расчетов.)

7. $[\alpha]+[\beta]$ либо $=[\alpha+\beta]$, либо $=[\alpha+\beta]-1$,
$[\alpha]-[\beta]$ либо $=[\alpha-\beta]$, либо $=[\alpha-\beta]+1$.

8. $[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha]+[\alpha+\beta]+[\beta]$.

9. Пусть n — целое положительное число. Тогда

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

10. Пусть n — целое положительное число, x произвольно. Тогда

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x].$$

11. Пусть m — целое положительное число. Показать, что наивысшей степенью 2, содержащейся в

$$[(1+\sqrt{3})^{2m+1}],$$

является 2^{m+1}.

§ 2. Подсчет целых точек

12. Пусть a и n — целые положительные числа. Число тех из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, которые делятся на a, равно $\left[\frac{n}{a}\right]$.

13. Сколько нулей имеет функция $\sin x$ в интервале $a<x\leqslant b$? Сколько в интервале $a\leqslant x<b$?

14. Пусть $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Обозначим через $V_n(\alpha)$ число перемен знака в последовательности

$$1,\quad \cos\alpha,\quad \cos 2\alpha,\ \ldots,\quad \cos(n-1)\alpha,\quad \cos n\alpha;$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n(\alpha)}{n}=\frac{\alpha}{\pi}.$$

15. Пусть θ — иррациональное число, $0<\theta<1$ и g_n равно нулю или единице, смотря по тому, равны между собой или же различны числа $[n\theta]$ и $[(n-1)\theta]$. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_1+g_2+\ldots+g_n}{n}=\theta.$$

16. Определить число $N(r, a, \alpha)$ нулей целой функции $e^z-ae^{i\alpha}$ в круге $|z|\leqslant r$ (r, a, α — вещественные постоянные числа, $r>0$, $a>0$).

17. Пусть a и b — целые числа, $f(x)$ — функция, определенная и положительная в интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Выразить посредством символа [ ] число *целых точек* (точек с целочисленными координатами, I 28), находящихся в области, определяемой неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 < y \leqslant f(x).$$

18. Пусть p и q — взаимно простые целые положительные числа. Доказать путем подсчета целых точек формулу

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)\,q}{p}\right]=\frac{(p-1)\,(q-1)}{2}.$$

19. Пусть p и q — нечетные взаимно простые целые положительные числа. Обозначим $\frac{p-1}{2}=p'$, $\frac{q-1}{2}=q'$. Показать, что

$$\left(\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{p'q}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{q'p}{q}\right]\right)=p'q'.$$

20. Для простого числа p вида $4n+1$ имеет место формула

$$[\sqrt{p}]+[\sqrt{2p}]+[\sqrt{3p}]+\ldots+\left[\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right]=\frac{p^2-1}{12}.$$

§ 3. Одна теорема формальной логики и ее применения

21. Пусть дано N любых объектов. Пусть N_α — число тех из них, которые обладают некоторым свойством α, N_β — число тех, которые обладают свойством $\beta, \ldots, N_\varkappa$, соотв. N_λ, — число тех, которые обладают свойством $\varkappa$, соотв. λ. Аналогично пусть $N_{\alpha\beta}$, $N_{\alpha\gamma}, \ldots, N_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, N_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda}$ обозначают число тех из этих объектов, которые одновременно обладают свойствами α и β, соотв. α и $\gamma, \ldots$, соотв. α, β и $\gamma, \ldots$, соотв. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ и λ. Тогда число объектов, которые не обладают ни одним из свойств $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, равно

$$\begin{aligned}N&-N_\alpha-N_\beta-N_\gamma-\ldots-N_\varkappa-N_\lambda+\\&+N_{\alpha\beta}+N_{\alpha\gamma}+\ldots+N_{\varkappa\lambda}-\\&-N_{\alpha\beta\gamma}-\ldots+\\&\ldots\ldots\ldots\\&\pm N_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda}.\end{aligned}$$

22. Пусть дано n объектов ($n>1$) и пусть свойством α обладают все кроме первого, свойством β — все кроме второго, ..., свойством λ — все кроме последнего, n-го объекта. Что дает **21** в этом случае?

23. Сколько из $n!$ членов в разложении определителя n-го порядка обращается в нуль, если положить все элементы главной диагонали равными нулю? [См. **21**: свойством α обладают члены, содержащие множителем a_{11}, и т. д.]

24. Пусть $a, b, c, \ldots, k, l$ — взаимно простые целые положительные числа. Сколько из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ не делится ни на одно из этих чисел $a, b, c, \ldots, k, l$? [**12.**]

25. Пусть $p, q, r, \ldots$ будут различные простые множители числа n. Число чисел, меньших n и взаимно простых с ним, равно

$$n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots$$

Это число обозначают обычно $\varphi(n)$. При этом полагается, по определению, $\varphi(1)=1$; таким образом, $\varphi(n)$ представляет число взаимно простых с n чисел до n включительно; $n \geqslant 1$, ибо 1 взаимно просто само с собой.

26. Пусть дано N произвольных объектов, могущих, как в **21**, обладать свойствами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$. Пусть каждому отдельному объекту приписано некоторое числовое значение. Обозначим через W_α сумму числовых значений тех объектов, которые обладают свойством α, через W_β сумму числовых значений объектов со свойством β и т. д. Аналогично будем обозначать через $W_{\alpha\beta}, W_{\alpha\gamma}, \ldots$ $\ldots, W_{\alpha\beta\gamma}, \ldots, W_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda}$ сумму числовых значений тех объектов, которые одновременно обладают свойствами α и β, соотв. α и $\gamma, \ldots$, соотв. α, β и $\gamma, \ldots$, соотв. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa$ и λ. Пусть, наконец, W — сумма числовых значений всех объектов. Тогда сумма числовых значений объектов, не обладающих ни одним из свойств $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, будет равна

$$\begin{aligned} &W - W_\alpha - W_\beta - W_\gamma - \ldots - W_\varkappa - W_\lambda + \\ &\quad + W_{\alpha\beta} + W_{\alpha\gamma} + \ldots + W_{\varkappa\lambda} - \\ &\quad - W_{\alpha\beta\gamma} - \ldots + \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &\quad \pm W_{\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda}. \end{aligned} \qquad [\mathbf{21.}]$$

27. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ — взаимно простые с n числа, меньшие, чем n $(n>1)$. Показать, что

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{\varphi(n)}^2 = \frac{\varphi(n)}{3}\left(n^2 + \frac{(-1)^\nu}{2}\, pqr\ldots\right),$$

где $p, q, r, \ldots$ — различные простые множители n, а ν — их число.

§ 4. Части и делители

Пусть n — целое неотрицательное число. Под «частью» n мы будем понимать всякое целое неотрицательное число, которое меньше или равно n. Числа 0 и n называются «несобственными частями» числа n. Число 0 содержит в качестве части, и притом несобственной, лишь само себя.

Пусть n — целое положительное число. Под «делителем» n мы будем понимать всякое целое положительное число, на которое n делится без остатка. Числа 1 и n называются «несобственными делителями». Число 1 содержит в качестве делителя, и притом несобственного, лишь само себя.

Пусть m и n — целые неотрицательные числа. Под наибольшей общей частью m и n мы понимаем число, содержащее в качестве своей части всякую общую часть чисел m и n. Это будет меньшее (не большее) из чисел m и n или, в символах, $\operatorname{Min}(m, n)$.

Пусть m и n — целые положительные числа. Под наибольшим общим делителем m и n понимают число, содержащее в качестве своего делителя всякий общий делитель чисел m и n. Его символически обозначают (m, n).

Под $\operatorname{Min}(l, m, n, \ldots)$ понимают вообще наименьшее из чисел $l, m, n, \ldots$, под $(l, m, n, \ldots)$ — их наибольший общий делитель.

Существует наименьшее число, содержащее в качестве частей одновременно m и n, именно наибольшее (не меньшее) из этих чисел. Символически: $\operatorname{Max}(m, n)$.

Существует наименьшее число, содержащее в качестве делителей одновременно m и n, именно их наименьшее общее кратное.

Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — произвольные числа. Под $\sum\limits_{t \leqslant n} a_t$ понимают сумму, распространенную на все части числа n (включая и несобственные части 0 и n):

$$\sum_{t \leqslant n} a_t = \sum_{t=0}^{n} a_t.$$

Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — произвольные числа. Под $\sum\limits_{t \mid n} a_t$ понимают сумму, распространенную на все делители числа n (включая и несобственные делители 1 и n). Например,

$$\sum_{t \mid 6} a_t = a_1 + a_2 + a_3 + a_6.$$

28. Пусть $a, b, c, \ldots, k, l$ — произвольные неотрицательные целые числа. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Max}(a, b, c, \ldots, k, l) = {} & a + b + c + \ldots + k + l - \\ & - \operatorname{Min}(a, b) - \operatorname{Min}(a, c) - \ldots - \operatorname{Min}(k, l) + \\ & + \operatorname{Min}(a, b, c) + \ldots - \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \operatorname{Min}(a, b, c, \ldots, k, l). \end{aligned}$$

29. Наименьшее общее кратное M целых положительных чисел $a, b, c, \ldots, k, l$ можно представить следующим образом:

$$M = abc \ldots kl\,(a, b)^{-1}(a, c)^{-1} \ldots (k, l)^{-1}(a, b, c) \ldots (a, b, c, \ldots, k, l)^{\pm 1}.$$

30.

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \ldots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \end{vmatrix}.$$

Здесь общий элемент первого определителя $\eta_{\lambda\mu} = 1$, когда μ является частью λ (собственной или несобственной), и равен нулю в противном случае; во втором определителе общий элемент $c_{\lambda\mu}$ равен числу общих частей чисел λ и μ, т. е. наименьшему из чисел $\lambda + 1$ и $\mu + 1$ $(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n)$.

31. Определитель, общий элемент которого $c_{\lambda\mu}$ равен числу общих делителей чисел λ и μ или, иными словами, числу делителей наибольшего общего делителя чисел λ и μ $(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$, равен единице.

32. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа и

$$A_\nu = \sum_{t \leqslant \nu} a_t \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Показать что

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_0 & A_0 & A_0 & \ldots & A_0 \\ A_0 & A_1 & A_1 & A_1 & \ldots & A_1 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_2 & \ldots & A_2 \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_n \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Здесь общий элемент $c_{\lambda\mu}$ определителя равен A_r, где $r = \operatorname{Min}(\lambda, \mu)$ $(\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, n)$. (Обобщение тождества 30.)

33. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные числа и

$$A_\nu = \sum_{t \mid \nu} a_t \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Показать что

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & \ldots & A_1 \\ A_1 & A_2 & A_1 & A_2 & \ldots & A_{(2, n)} \\ A_1 & A_1 & A_3 & A_1 & \ldots & A_{(3, n)} \\ A_1 & A_2 & A_1 & A_4 & \ldots & A_{(4, n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & A_{(n, 2)} & A_{(n, 3)} & A_{(n, 4)} & \ldots & A_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Здесь общий элемент $c_{\lambda\mu}$ определителя равен A_r, где $r=(\lambda, \mu)$ $(\lambda, \mu=1, 2, \ldots, n)$. (Обобщение теоремы 31.)

34. Если $a_0, a_1, a_2, \ldots$ произвольны и

$$A_n=\sum_{t\leqslant n} a_t \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

то, очевидно,

$$a_0=A_0, \quad a_1=A_1-A_0, \quad a_2=A_2-A_1, \ldots, a_n=A_n-A_{n-1}, \ldots$$

При произвольных $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и

$$A_n=\sum_{t\mid n} a_t \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

имеем

$$a_1=A_1, \quad a_2=A_2-A_1, \quad a_3=A_3-A_1, \quad a_4=A_4-A_2,$$
$$a_5=A_5-A_1, \quad a_6=A_6-A_3-A_2+A_1, \ldots$$

и вообще

$$a_n=\sum_{t\mid n}\mu(t)A_{\frac{n}{t}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса (см. определение на стр. 137).

35. Пусть $\psi(y)$ — произвольная функция, определенная в интервале $0\leqslant y\leqslant 1$, и

$$g(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\psi\left(\frac{\nu}{n}\right),$$
$$f(n)=\sum_{(r, n)=1}\psi\left(\frac{r}{n}\right),$$

где последняя сумма распространена на значения r, взаимно простые с n и не превосходящие n. Тогда

$$f(n)=\sum_{t\mid n}\mu(t)g\left(\frac{n}{t}\right)=\sum_{t\mid n}\mu\left(\frac{n}{t}\right)g(t).$$

36. Как известно,

$$\prod_{\nu=1}^{n}\left(x-e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}\right)=x^n-1.$$

Положим

$$\prod_{(r, n)=1}\left(x-e^{\frac{2\pi ir}{n}}\right)=K_n(x),$$

где произведение распространено на значения r, взаимно простые с n и не превосходящие n (n-й полином деления круга). Нулями полинома x^n-1 служат корни n-й степени из единицы, нулями полинома $K_n(x)$ — примитивные корни n-й степени из единицы. Доказать формулу

$$K_n(x)=\prod_{t\mid n}\left(x^{\frac{n}{t}}-1\right)^{\mu(t)}.$$

37. Показать, что

$$\sum_{(r,\,n)=1} e^{\frac{2\pi i r}{n}}=\mu(n),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

§ 5. Теоретико-числовые функции. Степенные ряды и ряды Дирихле

Под *теоретико-числовой* функцией $f(n)$ понимают функцию, определенную для целых значений $n=1, 2, 3, \ldots$ аргумента. В этом общем смысле задание «теоретико-числовой функции» равносильно заданию произвольной бесконечной числовой последовательности. Ниже мы приводим некоторые из таких функций, имеющие значение в теории чисел:

$\varphi(n)$ (*функция Эйлера*): число чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n [25];

$\tau(n)=\sum_{t\mid n} 1$: число делителей числа n;

$\sigma(n)=\sum_{t\mid n} t$: сумма делителей числа n;

$\sigma_\alpha(n)=\sum_{t\mid n} t^\alpha$: сумма α-х степеней делителей числа n; $\sigma_1(n)=\sigma(n)$, $\sigma_0(n)=\tau(n)$;

$\nu(n)$: число различных простых множителей числа n;

$\mu(n)$ (*функция Мёбиуса*): $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$, если n делится на квадрат какого-либо целого числа (кроме единицы), и $\mu(n)=(-1)^{\nu(n)}$ в остальных случаях;

$\lambda(n)$ (*функция Лиувилля*) $\lambda(1)=1$, $\lambda(n)=(-1)^k$, где k — число простых множителей числа n, засчитываемых соответственно своей кратности;

$\Lambda(n)$ (*функция Мангольдта*): $\Lambda(n)=\ln p$, если n — целая степень простого числа, $n=p^m$; $\Lambda(n)=0$ в остальных случаях.

38. Составить таблицы указанных функций от $n=1$ до $n=10$. (Для $\sigma_\alpha(n)$ ограничиться значениями $\alpha=0, 1, 2$.)

Наряду со степенными рядами

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

мы будем рассматривать *ряды Дирихле*

$$a_1 1^{-s}+a_2 2^{-s}+\ldots+a_n n^{-s}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}.$$

Степенные ряды служат мощным орудием в аддитивной (см. I, гл. 1), ряды Дирихле — в мультипликативной теории чисел [1]).

Произведение (по правилу Коши) двух степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k\sum_{l=0}^{\infty}b_lz^l=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

определяется формулой

$$c_n=\sum_{k+l=n}a_kb_l=\sum_{t\leqslant n}a_tb_{n-t} \qquad [\text{I } 34],$$

где t пробегает все части числа n, включая и несобственные 0 и n. Произведение (по правилу Дирихле) двух рядов Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kk^{-s}\sum_{l=1}^{\infty}b_ll^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}c_nn^{-s}$$

определяется формулой

$$c_n=\sum_{kl=n}a_kb_l=\sum_{t\,|\,n}a_tb_{\frac{n}{t}},$$

где t пробегает все делители числа n, включая и несобственные 1 и n.

Полагая все коэффициенты степенного ряда равными единице, получаем геометрический ряд

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\frac{1}{1-z}.$$

Полагая все коэффициенты ряда Дирихле равными единице, получаем *дзета-функцию*

$$1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\ldots+n^{-s}+\ldots=\zeta(s).$$

[1]) В настоящей главе мы совершенно отвлекаемся от вопросов сходимости. В случае абсолютной сходимости все выкладки законны.

39. Число частей n равно $\sum\limits_{t \leqslant n} 1 = n+1$. Число делителей n равно $\sum\limits_{t \mid n} 1 = \tau(n)$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = \zeta(s)^2.$$

40. n-й коэффициент в разложении произведения

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ соотв. } \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

равен

$$\sum_{t \leqslant n} a_t, \text{ соотв. } \sum_{t \mid n} a_t.$$

41. Показать, что

$$1 - z = \frac{1}{1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots},$$

$$\mu(1)1^{-s} + \mu(2)2^{-s} + \mu(3)3^{-s} + \ldots + \mu(n)n^{-s} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\ldots+n^{-s}+\ldots} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

42. Пусть, как в 32, $\sum\limits_{t \leqslant n} a_t = A_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; тогда

$$(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots)(1-z) =$$
$$= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Пусть, далее, как в 33, $\sum\limits_{t \mid n} a_t = A_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; тогда

$$(A_1 1^{-s} + A_2 2^{-s} + \ldots + A_n n^{-s} + \ldots) \cdot (\mu(1)1^{-s} + \mu(2)2^{-s} + \ldots$$
$$\ldots + \mu(n)n^{-s} + \ldots) = a_1 1^{-s} + a_2 2^{-s} + \ldots + a_n n^{-s} + \ldots$$

§ 6. Мультипликативные теоретико-числовые функции

Под *мультипликативной* теоретико-числовой функцией $f(n)$ понимают функцию, такую, что $f(1) = 1$, удовлетворяющую для взаимно простых m и n уравнению

$$f(m) f(n) = f(mn).$$

43. Показать, что

$$n^{\alpha},\ \sigma_{\alpha}(n),\ 2^{\nu(n)},\ \mu(n),\ \lambda(n),\ \varphi(n)$$

— мультипликативные теоретико-числовые функции. [Для $\varphi(n)$ использовать 25.]

44. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_\nu^{k_\nu}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ — отличные друг от друга простые числа. Тогда

$$\sigma_\alpha(n) = \frac{1-p_1^{\alpha(k_1+1)}}{1-p_1^{\alpha}} \cdot \frac{1-p_2^{\alpha(k_2+1)}}{1-p_2^{\alpha}} \ldots \frac{1-p_\nu^{\alpha(k_\nu+1)}}{1-p_\nu^{\alpha}};$$

в частности,

$$\sigma(n) = \frac{1-p_1^{k_1+1}}{1-p_1} \cdot \frac{1-p_2^{k_2+1}}{1-p_2} \ldots \frac{1-p_\nu^{k_\nu+1}}{1-p_\nu},$$

$$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_\nu+1).$$

45. Показать, что при $n > 30$

$$\varphi(n) > \tau(n).$$

46. Пусть $a, b, c, d, \ldots, k, l$ — целые положительные числа, M — их наименьшее общее кратное, $(a, b), (a, c), \ldots, (a, b, c), \ldots$, как обычно, — наибольший общий делитель чисел a и b, соотв. a и $c, \ldots$, соотв. a, b и $c, \ldots$ Если $f(n)$ — мультипликативная функция, то

$$f(M) f((a, b)) f((a, c)) \ldots f((k, l)) f((a, b, c, d)) \ldots =$$
$$= f(a) f(b) \ldots f(l) f((a, b, c)) \ldots$$

(Аргументами функции $f(n)$ в правой части служат наибольшие общие делители всевозможных комбинаций из нечетного числа чисел $a, b, c, \ldots, k, l$.) [29 представляет собой частный случай, когда $f(n) = n$.]

47. Пусть $f(n)$ — мультипликативная теоретико-числовая функция. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \prod_p \left(1^{-s} + f(p) p^{-s} + f(p^2) p^{-2s} + f(p^3) p^{-3s} + \ldots\right),$$

где бесконечное произведение распространено на все простые числа p и раскрывается таким образом, что составляются только произведения из конечного числа множителей, отличных от 1^{-s}.

48. $\zeta(s) = \prod\limits_p \dfrac{1}{1-p^{-s}}$.

49. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha(n) n^{-s} = \zeta(s)\zeta(s-\alpha), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu(n)} n^{-s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}. \quad [43,\ 44,\ 25.]$$

50. Обозначим через $a(n)$ наибольший нечетный делитель числа n. Показать, что

$$a(1)\,1^{-s} + a(2)\,2^{-s} + \ldots + a(n)\,n^{-s} + \ldots = \frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\zeta(s-1).$$

51. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

52. $\sum\limits_{t \mid n} \mu(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1, \\ 0 \text{ при } n > 1. \end{cases}$

53. $\sum\limits_{t \mid n} \lambda(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \text{ есть точный квадрат}, \\ 0, \text{ если } n \text{ — не квадрат}. \end{cases}$

54. $\sum\limits_{t \mid n} \varphi(t) = n.$

55. $\sum\limits_{t \mid n} \frac{\mu(t)}{t} = \frac{\varphi(n)}{n}.$

56. $\sum\limits_{t \mid n} \Lambda(t) = \ln n.$

57. $\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n,1) & (n,2) & \ldots & (n,n) \end{vmatrix} = \varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n).$

58. Рассмотрим все возможные разложения $n = \alpha\beta$ четного числа n такие, что α — нечетное (включая $\alpha = 1$), β — четное. Показать, что разность

$$\sum \beta - \sum \alpha$$

равна сумме делителей числа $\frac{n}{2}$.

59. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — мультипликативные теоретико-числовые функции. Тогда теоретико-числовая функция

$$h(n)=\sum_{t,n} f(t)\,g\left(\frac{n}{t}\right)$$

также мультипликативна.

---

60. Число различных правильных замкнутых n-угольников равно $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

61. Сумма всех положительных правильных дробей, имеющих в несократимой форме знаменатель n, равна $\frac{1}{2}\varphi(n)$ $(n \geqslant 2)$.

62. Пусть a, b, c — целые положительные числа. Если $(a, b, c)=1$, то между c дробями

$$\frac{a}{c},\ \frac{a+b}{c},\ \frac{a+2b}{c},\ \ldots,\ \frac{a+(c-1)\,b}{c}$$

имеется $\frac{\varphi(bc)}{\varphi(b)}$ несократимых. Если $(a, b, c)>1$, то все указанные дроби, очевидно, сократимы.

63. Сколько несократимых имеется среди n^2 дробей

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, & \frac{1}{n},\\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \ldots, & \frac{2}{n},\\
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \ldots, & \frac{3}{n},\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{n}{1}, & \frac{n}{2}, & \frac{n}{3}, & \frac{n}{4}, & \ldots, & \frac{n}{n}?
\end{array}$$

64. Обозначим через $\Phi(n)$ число несократимых среди следующих n^2 дробей:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1+i}{n}, & \frac{1+2i}{n}, & \ldots, & \frac{1+ni}{n},\\
\frac{2+i}{n}, & \frac{2+2i}{n}, & \ldots, & \frac{2+ni}{n},\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{n+i}{n}, & \frac{n+2i}{n}, & \ldots, & \frac{n+ni}{n}.
\end{array}$$

$(i=\sqrt{-1}$; дробь $\frac{a+ib}{n}$ называется сократимой, если $(a, b, n)>1$, и несократимой, если $(a, b, n) = 1$.) Функция $\Phi(n)$ обладает следующими свойствами:

$$\Phi(m)\Phi(n) = \Phi(mn) \text{ для } (m, n) = 1, \ \Phi(1) = 1, \tag{1}$$

$\Phi(p^k) = p^{2k} - p^{2k-2}$, если p — простое число $(k = 1, 2, 3, \ldots)$;

$$\Phi(n) = n^2\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\ldots, \tag{2}$$

где $p, q, r, \ldots$ — различные простые множители числа n;

$$\sum_{t \mid n} \Phi(t) = n^2, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}. \tag{4}$$

Доказать свойства (1), (2), (3) независимо друг от друга, исходя непосредственно из определения. Показать, кроме того, что

$$(1) \Rightarrow (4), \ (2) \Rightarrow (4), \ (3) \Rightarrow (4),$$
$$(4) \Rightarrow (1), \ (4) \Rightarrow (2), \ (4) \Rightarrow (3)\,[1].$$

§ 7. Ряды Ламберта и родственные им

65. Из тождества

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-s},$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $A_1, A_2\ A_3, \ldots$ — постоянные коэффициенты, вытекает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$$

и обратно. (В левой части второго равенства стоит так называемый *ряд Ламберта*.)

66. Тождества

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n n^{-s},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1 + x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n$$

равносильны.

---

[1]) То есть из (1) следует (4), из (2) следует (4) и т. д.

67. Пусть между числами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $A_1, A_2, A_3, \ldots$ имеет место то же соотношение, что и в задаче 65. Тогда

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{x}\sin\frac{x}{n}\right)^{a_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^{A_n}.$$

68. Пусть между числами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ имеет место то же соотношение, что и в задаче 66. Тогда

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2n}\right)^{a_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^{B_n}.$$

69. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,x^n}{1-x^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)\,x^n}{1-x^n}$$

являются рациональными функциями от x. Какими именно?

70. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)\,x^n}{1-x^n}=x+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+\ldots$

71. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\,x^n}{1+x^n}=x-2x^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)\,x^n}{1+x^n}=x\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\frac{x^n}{1+x^n}=$

$$=x-2x^2+x^4-2x^8+x^9+x^{16}-2x^{18}+x^{25}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n,$$

где $b_n=1$, если n — квадрат, $b_n=-2$, если n — удвоенный квадрат, и $b_n=0$ во всех остальных случаях.

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)\frac{x^n}{1-x^n}=x\frac{1+x}{(1-x)^3},$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)\frac{x^n}{1+x^n}=x\frac{1+2x+6x^2+2x^3+x^4}{(1-x^2)^3} \qquad [64].$$

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=x\frac{1+x}{1-x}+x^4\frac{1+x^2}{1-x^2}+x^9\frac{1+x^3}{1-x^3}+\ldots$

75. $$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \ldots = \frac{x+2x^2-5x^5-7x^7+\ldots}{1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots}.$$

Показатели степеней в последней дроби составлены по формуле $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$. [I 54.] Вывести отсюда рекуррентную формулу для $\sigma(n)$.

76. Значение выражения

$$\frac{1}{1-q} + \frac{p}{1-qx} + \frac{p^2}{1-qx^2} + \frac{p^3}{1-qx^3} + \ldots$$

не изменяется при перестановке чисел p и q.

77. $$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x^3}{1+x^6} + \frac{x^4}{1+x^8} + \ldots = \frac{x}{1-x} - \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^5}{1-x^5} - \frac{x^7}{1-x^7} + \ldots$$

78. $$\frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \frac{x^8}{1-x^{16}} + \ldots = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \frac{8x^8}{1+x^8} + \ldots$$

§ 8. Дальнейшие задачи на подсчет целых точек

79. Показать, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

[Обе части представляют число целых точек, заключенных в фигуре $x > 0$, $y > 0$, $xy \leqslant n$[1]).]

80. Пусть $\nu = [\sqrt{n}]$. Показать, что

$$\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = 2\left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + 2\left[\frac{n}{\nu}\right] - \nu^2.$$

81. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s} \sum_{l=1}^{\infty} b_l l^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}.$$

Тогда между суммами коэффициентов

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A_n, \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n = B_n,$$
$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = \Gamma_n$$

---

[1]) Разобранную в задачах 28—42 аналогию (часть, делитель) можно было бы здесь проследить несколько дальше.

имеет место следующее соотношение:

$$\Gamma_n=\sum_{r=1}^{n} a_r B_{\left[\frac{n}{r}\right]}=\sum_{s=1}^{n} b_s A_{\left[\frac{n}{s}\right]}.$$

82. Показать, что

$$\ln n!=\sum_{p\leq n} \ln p\left(\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots\right),$$

где суммирование распространяется на все простые числа p, не превосходящие n. [Применить 81 к произведению Дирихле

$$-\zeta'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(k) k^{-s} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s}.]$$

83. В обозначениях задачи 81 имеет место также соотношение

$$\Gamma_n=\sum_{r=1}^{\nu} a_r B_{\left[\frac{n}{r}\right]}+\sum_{s=1}^{\nu} b_s A_{\left[\frac{n}{s}\right]}-A_\nu B_\nu,$$

где $\nu=[\sqrt{n}]$.

ГЛАВА 2

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ И ЦЕЛОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Целочисленность и целозначность полиномов

Полином

$$P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

называется *целочисленным*, если его коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}, a_m представляют собой целые числа. Полином $P(x)$ называется *целозначным*, если значения $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$, ... — целые числа. Целочисленный полином всегда целозначен.

84. Полином

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}=\binom{x}{m}$$

— целозначный, однако не целочисленный, если $m\geq 2$.

85. Каждый полином $P(x)$ степени m можно представить в форме

$$P(x)=b_0\binom{x}{m}+b_1\binom{x}{m-1}+\ldots+b_{m-1}\binom{x}{1}+b_m.$$

Полином $P(x)$ является целозначным тогда и только тогда, когда все коэффициенты b_0, b_1, ..., b_{m-1}, b_m — целые числа.

86. Если полином $P(x)$ степени m — целозначный, то полином $m!P(x)$ — целочисленный.

87. Если целая рациональная функция степени m принимает целые значения для $m+1$ последовательных целых значений переменной, то она принимает целые значения для всех вообще целых значений переменной.

88. Каждый нечетный полином $P(x)$ степени $2m-1$ можно представить в форме

$$P(x)=c_1\binom{x}{1}+c_2\binom{x+1}{3}+c_3\binom{x+2}{5}+\ldots+c_m\binom{x+m-1}{2m-1}.$$

Полином $P(x)$ тогда и только тогда целозначный, когда все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m$ — целые числа.

89. Каждый четный полином $P(x)$ степени $2m$ можно представить в форме

$$P(x)=d_0+d_1\frac{x}{1}\binom{x}{1}+d_2\frac{x}{2}\binom{x+1}{3}+\ldots+d_m\frac{x}{m}\binom{x+m-1}{2m-1}.$$

Полином $P(x)$ тогда и только тогда целозначный, когда все коэффициенты $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}, d_m$ — целые числа.

90. Целочисленные полиномы степени m, абсолютное значение которых равно единице при $m+1$ целых значениях, существуют, если $m\leqslant 3$, и не существуют, если $m\geqslant 4$. [VI 70.]

91. Если целая рациональная функция степени m принимает рациональные значения при $m+1$ целых значениях x, то все ее коэффициенты рациональны.

92. Если дробная рациональная функция во всех положительных целых точках принимает рациональные значения, то она представляет собой отношение двух взаимно простых целочисленных полиномов. [Решающим обстоятельством является рациональность коэффициентов.]

93. Рациональная функция, принимающая целые значения для бесчисленного множества целых значений аргумента, является *целой* рациональной функцией.

§ 2. Целозначные функции и их простые делители

94. В числовой последовательности

$$2^1+1,\quad 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ \ldots,\ 2^{2^n}+1,\ \ldots$$

все члены — попарно взаимно простые. (Отсюда, между прочим, вытекает, что число простых чисел бесконечно.)

95. В арифметической прогрессии

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

где a и d — целые числа, $d\neq 0$, содержится бесконечное множество членов, имеющих одни и те же простые множители.

96. Каждый член последовательности

$$5,\quad 11,\quad 17,\quad 23,\quad 29,\quad 35,\ \ldots,\ 6n-1,\ \ldots$$

обладает простым множителем, который $\equiv -1 \pmod 6$.

97. Пусть $P(x)$ — целозначный полином. Могут ли все члены последовательности

$$P(1),\ P(2),\ P(3),\ \ldots,\ P(n),\ \ldots$$

представлять собой простые числа? (Как заметил Эйлер, в случае полинома $P(x) = x^2 - x + 41$ простыми оказываются первые 40 членов.)

Функция $f(x)$, обладающая тем свойством, что все значения

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

являются целыми, называется *целозначной*. Например, функция 2^x целозначна. Дробная рациональная функция не может быть целозначной [93]. Простое число p называется *простым делителем* целозначной функции $f(x)$, если существует такое целое число n $(n \geqslant 0)$, что $f(n) \neq 0$ и $f(n) \equiv 0 \pmod p$. 2^x обладает одним единственным простым делителем 2. Согласно **94** функция $2^x + 1$ имеет бесчисленное множество простых делителей.

98. Полином x^2+1 имеет простыми делителями числа 2, 5, 13, 17, ..., т. е. 2 и нечетные простые числа вида $4n+1$. Ни одно простое число вида $4n+3$ не может служить простым делителем указанного полинома.

99. Определить простые делители полинома x^2+15.

100. Каков бы ни был заданный неприводимый полином второй степени, существует бесчисленное множество простых чисел, не являющихся его простыми делителями.

[Доказывается путем привлечения довольно глубоких вспомогательных средств. См. сноску к задаче **110**.]

101. Если целозначный полином, не равный тождественно нулю, имеет рациональный нуль, то все простые числа, за исключением, быть может, нескольких, являются его простыми делителями.

102. Все простые числа служат простыми делителями полинома $x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36$, не обладающего вовсе рациональными нулями.

103. Нечетные простые делители m-го полинома деления круга $K_m(x)$ [36] либо делят m, либо $\equiv 1 \pmod m$. [**104**.]

104. Если простое число p $(p > 2)$ не делит m и

$$K_m(a) \equiv 0 \pmod p,$$

то a — взаимно простое с p и принадлежит $(\mathrm{mod}\ p)$ показателю m.

---

105. Существует бесконечное множество простых чисел вида $6n-1$. [Рассмотреть разложение на простые множители числа $6P-1$, где $P=5\cdot 11\cdot 17\cdot 23\cdot 29\cdot 41\ldots$ — произведение уже известных простых чисел вида $6n-1$.]

106. Существует бесконечное множество простых чисел вида $4n-1$.

107. Целозначная функция ab^x+c, где a, b, c — целые числа, $a\neq 0$, $b\geqslant 2$, $c\neq 0$, имеет бесконечное множество простых делителей. [ab^x+c периодична по некоторому модулю n, взаимно простому с b; абсолютное значение этой функции возрастает до бесконечности.]

108. Целозначный полином $P(x)$, не тождественно постоянный, обладает бесконечным множеством простых делителей.

109. Утверждению, содержащемуся в теореме 108, можно придать такой вид: если $P(x)$ — целозначный не тождественно постоянный полином, то все члены последовательности

$$P(0),\ P(1),\ P(2),\ \ldots,\ P(n),\ \ldots$$

нельзя составить из конечного числа простых чисел. Может ли какая-нибудь *бесконечная* часть этой последовательности быть составлена из конечного числа простых чисел?

110. Пусть m — целое положительное число. В арифметической прогрессии

$$1,\ 1+m,\ 1+2m,\ 1+3m,\ \ldots$$

содержится бесконечное множество простых чисел[1]).

111. Пусть целозначные полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ взаимно просты. Тогда существуют произвольно большие целые числа n, обладающие тем свойством, что наименьшее общее кратное чисел $P(n)$ и $Q(n)$ содержит простые множители, не входящие в их наибольший общий делитель.

112. Пусть $P(x)$ — *неприводимый* целозначный полином (см. стр. 150). Тогда существуют произвольно большие целые числа n, обладающие тем свойством, что в $P(n)$ по крайней мере один простой множитель p входит в первой степени, т. е.

$$P(n)\equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad P(n)\not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

113. Пусть $P(x)$ — целозначный полином, *наименьшая* кратность нулей которого равна m. (Все простые множители, входящие в $P(n)$, за исключением, быть может, нескольких, должны тогда входить по меньшей мере в m-й степени, $n=0$, 1, 2, $\ldots$). Существуют произвольно большие целые числа n, обла-

---

[1]) Теоремы **105**, **106**, **110** являются частными случаями следующей важной теоремы, доказанной Дирихле: в каждой арифметической прогрессии, первый член и разность которой взаимно просты, содержится бесконечное множество простых чисел.

дающие тем свойством, что по крайней мере один простой делитель входит в $P(n)$ не более чем в m-й степени.

114. Если целая рациональная функция $P(x)$ для каждого целого положительного значения x принимает значение, равное квадрату целого числа, то $P(x)$ представляет собой квадрат целой рациональной функции. (Аналогичная теорема имеет место и для высших степеней.)

115. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — различные целые положительные числа $(0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_k)$ и $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ — целочисленные полиномы. Показать, что функция

$$P_1(x) b_1^x + P_2(x) b_2^x + \ldots + P_k(x) b_k^x$$

имеет бесконечное множество простых делителей.

§ 3. Неприводимость полиномов

Полином степени n с рациональными коэффициентами называется *приводимым*, если он может быть представлен в виде произведения двух полиномов степени меньшей, чем n, с рациональными же коэффициентами. Каждый полином либо приводим, либо *неприводим*; в первом случае он представляет собой произведение неприводимых полиномов.

116. Всякий приводимый целочисленный полином может быть представлен в виде произведения целочисленных же полиномов низших степеней.

117. Целочисленный полином $f(x)$ не может обращаться в нуль ни в одной целой точке, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечетные числа.

118. Целочисленный полином $P(x)$ n-й степени, принимающий в n различных целых точках значения, отличные от нуля и по абсолютной величине меньшие, чем $\dfrac{\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)!}{2^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}}$, неприводим [VI 70].

119. Пусть d — наименьшее расстояние между целыми точками, указанными в задаче 118. Тогда приведенную в этой задаче границу можно заменить следующей:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)!.$$

120. Если целочисленный полином $P(x)$ при бесконечном множестве целых x принимает значения, являющиеся простыми числами, то он должен быть неприводимым и наибольший общий делитель совокупности его коэффициентов должен быть равен единице. Это очевидное положение не может быть обращено: полином

$$x(x-(n!+1))(x-2(n!+1))\ldots(x-(n-1)(n!+1))+n! = x^n+\ldots$$

неприводим и, однако, если $n \geqslant 3$, не равен простому числу ни при каком целом значении x.

121. Полином
$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1,$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа, всегда неприводим.

122. (Продолжение.) В каких случаях полином
$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$$
будет приводимым?

123. (Продолжение.) Полином
$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$
неприводим.

124. (Продолжение.) Полином
$$(x-a_1)^4(x-a_2)^4\ldots(x-a_n)^4+1$$
также неприводим.

125. (Продолжение.) Если $F(z)=z^4+Az^3+Bz^2+Az+1$ есть положительно определенный неприводимый целочисленный полином, то полином
$$F((x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n))$$
приводим лишь в том случае, если $F(z)=z^4-z^2+1$ (12-й полином деления круга) и
$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\alpha-2)$$
с целым α.

126. (Продолжение.) Полином
$$A(x-a_1)^4(x-a_2)^4\ldots(x-a_n)^4+1,$$
где A — целое положительное число, приводим лишь в том случае, если $\frac{A}{4}$ является четвертой степенью целого числа.

127. Пусть $P(x)$ — целочисленный полином и пусть существует целое число n, удовлетворяющее следующим трем условиям:

1) нули полинома $P(x)$ лежат в полуплоскости $\Re x < n-\frac{1}{2}$,
2) $P(n-1) \neq 0$,
3) $P(n)$ есть простое число.

Тогда полином $P(x)$ неприводим.

128. Пусть
$$p=a_0a_1\ldots a_m=a_0 10^m+a_1 10^{m-1}+\ldots+a_m$$
— простое число, записанное по десятичной системе ($0 \leqslant a_\nu \leqslant 9$, $\nu=0, 1, \ldots, m$; $a_0 \geqslant 1$). Показать, что полином
$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$
неприводим. [127, III 24.]

129. Пусть r и s — нечетные простые числа, удовлетворяющие соотношениям

$$r \equiv 1 \pmod 8) \text{ и } \left(\frac{r}{s}\right) = \left(\frac{s}{r}\right) = 1.$$

Такими простыми числами являются, например, $r=41$ и $s=5$. Тогда полином

$$(x-\sqrt{r}-\sqrt{s})(x-\sqrt{r}+\sqrt{s})(x+\sqrt{r}-\sqrt{s})(x+\sqrt{r}+\sqrt{s})=$$
$$=x^4-2(r+s)x^2+(r-s)^2=$$
$$=(x^2+r-s)^2-4rx^2= \qquad (1)$$
$$=(x^2-r+s)^2-4sx^2= \qquad (2)$$
$$=(x^2-r-s)^2-4rs \qquad (3)$$

в обычном смысле неприводим, однако, как можно элементарно показать с помощью формул (1), (2) и (3), «приводим» (именно, может быть разложен на два множителя второй степени) *по любому модулю* m.

ГЛАВА 3

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

§ 1. Подготовительные задачи о биномиальных коэффициентах

130. Произведение любых m последовательных целых чисел делится на $m!$.

131. Произведение m последовательных целых чисел в арифметической прогрессии делится на $m!$, если разность прогрессии взаимно проста с $m!$.

132. Разностное произведение любых m различных целых чисел всегда делится на разностное произведение первых m целых положительных чисел. (Разностное произведение $\prod\limits_{j<k}^{1,2,\ldots,m}(x_k-x_j)$ m величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ состоит из $\frac{1}{2}m(m-1)$ множителей.) [Решение V 96.]

133. Для каких целых n число $(n-1)!$ *не* делится на n? Для каких *не* делится на n^2?

134. Определить показатель высшей степени простого числа p, входящей в $n!$.

135. Сколькими нулями заканчивается число 1000!, записанное по десятичной системе?

136. Пусть a и b — целые положительные числа. Тогда произведение $(2a)!\,(2b)!$ делится на $a!\,(a+b)!\,b!$.

137. Если h и n — целые положительные числа, то $\frac{(hn)!}{(h!)^n\,n!}$ — целое число.

§ 2. К теореме Эйзенштейна

Степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

называется *рационально-численным*, если все его коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... рациональны, и *целочисленным*, если все коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... — целые числа. Рационально-численный степенной ряд можно представить в форме

$$\frac{s_0}{t_0}+\frac{s_1}{t_1}z+\frac{s_2}{t_2}z^2+\ldots+\frac{s_n}{t_n}z^n+\ldots,$$

где s_n, t_n — целые рациональные числа, $(s_n, t_n)=1$, $t_n\geqslant 1$, s_n — числитель, t_n — знаменатель n-го коэффициента.

138. Пусть s — целое число, t — целое положительное число, $(s, t)=1$. Показать, что знаменатели коэффициентов рационально-численного степенного ряда

$$(1+z)^{\frac{s}{t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s}{t}\left(\frac{s}{t}-1\right)\ldots\left(\frac{s}{t}-n+1\right)\frac{z^n}{n!}$$

содержат лишь простые множители, входящие в t.

139. Пусть p — простой множитель числа t и p^{α}, p^{α_0}, p^{α_1}, ..., p^{α_n}, ... — высшие степени p, входящие соответственно в t, t_0, t_1, ..., t_n, ..., где t_n — знаменатель n-го коэффициента разложения бинома $(1+z)^{\frac{s}{t}}$ в степенной ряд, $(s, t)=1$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}$.

Функция $f(z)$ называется *алгебраической*, если она тождественно удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(z)\,[f(z)]^l+P_1(z)\,[f(z)]^{l-1}+\ldots+P_{l-1}(z)\,f(z)+P_l(z)=0,$$

где $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_l(z)$ — полиномы, $P_0(z)\not\equiv 0$.

Правильную точку зрения для оценки частных результатов задач 138, 139 дает следующая общая *теорема Эйзенштейна*:

«Если рационально-численный степенной ряд

$$a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

представляет алгебраическую функцию от z, то существует такое целое число T, что ряд

$$a_1Tz + a_2T^2z^2 + a_3T^3z^3 + \ldots + a_nT^nz^n + \ldots$$

является целочисленным». [153.]

140. Найти наименьшее целое число T, обладающее тем свойством, что все коэффициенты ряда для $(1+Tz)^{\frac{s}{t}}$ являются целыми числами.

141. Доказать теорему Эйзенштейна для простейшего случая, когда ряд представляет *рациональную* функцию.

Говорят, что ряд

$$\frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1}z + \frac{s_2}{t_2}z^2 + \ldots + \frac{s_n}{t_n}z^n + \ldots$$

с рациональными коэффициентами (s_n, t_n — целые, $t_n \geqslant 1$, $(s_n, t_n) = 1$) удовлетворяет *условию Эйзенштейна*, если существует такое целое число T, что T^n делится на t_n при $n = 1, 2, 3, \ldots$

142. Если два рационально-численных степенных ряда $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условию Эйзенштейна, то этому же условию удовлетворяют также ряды

$$f(z) + g(z),\quad f(z) - g(z),\quad f(z)\,g(z),$$

а кроме того

$$\frac{f(z)}{g(z)}\ (\text{если } g(0) \neq 0) \quad \text{и} \quad f(g(z))\ (\text{если } g(0) = 0).$$

143. Если рационально-численные ряды

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots,\quad b_0 + b_1z + b_2z^2 + \ldots + b_nz^n + \ldots$$

удовлетворяют условию Эйзенштейна, то ему удовлетворяет также ряд

$$a_0b_0 + a_1b_1z + a_2b_2z^2 + \ldots + a_nb_nz^n + \ldots$$

144. Показать, что условие Эйзенштейна равносильно одновременному выполнению двух следующих условий:

1) Знаменатели $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ содержат лишь конечное число различных простых множителей.

2) Отношение $\frac{\ln t_n}{n}$ ограничено ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

145. Разложить по степеням z функции

$$\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4-z} + \ldots + \frac{1}{2^n-z} + \ldots,$$

$$\frac{z}{2-z} + \frac{z^2}{2^4-z^2} + \frac{z^3}{2^9-z^3} + \ldots + \frac{z^n}{2^{n^2}-z^n} + \ldots$$

Удовлетворяют ли полученные степенные ряды условиям 1), 2) задачи 144? Являются ли алгебраическими функции, представляемые этими рядами?

146. *Гипергеометрическим рядом* называется ряд

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n.$$

Если α и β рациональны, однако не одновременно целые, и γ — целое положительное число, то можно найти такое целое положительное число T, чтобы все коэффициенты гипергеометрического ряда были целыми. (Например,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-zx^2)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{1\cdot 2\ldots n}\right)^2 z^n$$

не является алгебраической функцией [I 90]: условие Эйзенштейна необходимо, однако не достаточно для того, чтобы функция была алгебраической.)

147. Пусть $\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ и α, β, γ не все одновременно рациональны, однако все коэффициенты гипергеометрического ряда $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ рациональны. Тогда α и β являются корнями некоторого неприводимого квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.

148. В указанном в задаче 147 случае $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ не представляет алгебраической функции от z. Доказать это, основываясь на теореме Эйзенштейна.

§ 3. К доказательству теоремы Эйзенштейна

149. Рациональная функция, все коэффициенты разложения которой по возрастающим степеням z рациональны, представляет собой отношение двух полиномов с рациональными коэффициентами.

150. Пусть рационально-численный ряд $f(z)$ удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(z)[f(z)]^l+P_1(z)[f(z)]^{l-1}+\ldots+P_{l-1}(z)f(z)+P_l(z)=0,$$

где $P_0(z)$, $P_1(z)$, $\ldots$, $P_l(z)$ — полиномы, $P_0(z)\not\equiv 0$. Показать, что $f(z)$ удовлетворяет также некоторому уравнению того же вида, в котором указанные полиномы имеют коэффициентами целые рациональные числа.

151. Пусть рационально-численный ряд

$$y=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению, т. е. уравнению вида

$$R(z,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(r)})=0,$$

где R — целая рациональная функция от своих $r+2$ аргументов. Показать, что тогда y удовлетворяет также уравнению

$$R^*(z,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(r)})=0,$$

где R^* — целая рациональная функция с целыми коэффициентами.

152. Пусть функции $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$, $F_0(z)$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\ldots$, $F_l(z)$ $(F_0(z)\not\equiv 0)$ регулярны в некоторой окрестности точки $z=0$ и связаны между собой уравнением

$$F_0(z)\,[f(z)]^l+F_1(z)\,[f(z)]^{l-1}+\ldots+F_{l-1}(z)\,f(z)+F_l(z)=0.$$

Тогда при некотором m степенной ряд

$$f^*(z)=c_m+c_{m+1}z+c_{m+2}z^2+\ldots$$

удовлетворяет уравнению вида

$$G_0(z)\,[f^*(z)]^k+G_1(z)\,[f^*(z)]^{k-1}+\ldots+G_{k-1}(z)\,f^*(z)+G_k(z)=0,$$

где $k\leqslant l$, $G_0(0)=G_1(0)=\ldots=G_{k-2}(0)=0$, $G_{k-1}(0)\neq 0$, $G_0(z)\not\equiv 0$ и $G_\varkappa(z)$ представляет собой рациональное выражение с целыми коэффициентами относительно $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_l(z), z, c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$, деленное, возможно, на некоторую степень z; $\varkappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. (Теоретико-функциональная теорема, подготовляющая к задачам 153, 154.)

153. Если для рационально-численных степенных рядов $P_0(z)$, $P_1(z), \ldots, P_l(z)$ выполняется условие Эйзенштейна, а рационально-численный степенной ряд $f(z)$ тождественно удовлетворяет уравнению

$$P_0(z)\,[f(z)]^l+P_1(z)\,[f(z)]^{l-1}+\ldots+P_{l-1}(z)\,f(z)+P_l(z)=0,$$

то для ряда $f(z)$ также выполнено условие Эйзенштейна.

154. Пусть s_n, t_n — целые, $(s_n,\ t_n)=1$, $t_n\geqslant 1$ и P_n — наибольший простой множитель, входящий в t_n. Говорят, что степенной ряд

$$\frac{s_0}{t_0}+\frac{s_1}{t_1}z+\frac{s_2}{t_2}z^2+\ldots+\frac{s_n}{t_n}z^n+\ldots$$

удовлетворяет *условию Чебышева*, если отношение $\frac{P_n}{n}$ ограничено, и *условию Гурвица*, если отношение $\frac{\ln P_n}{\ln n}$ ограничено $(n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$. Как для условия Чебышева, так и для условия Гурвица имеют место теоремы, аналогичные теоремам **142**, **143**, **153** для условия Эйзенштейна.

§ 4. Целочисленные степенные ряды рациональных функций

155. Целочисленный степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

называется *примитивным*, если его коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ не имеют иных общих делителей кроме единицы. Доказать, что произведение двух примитивных степенных рядов снова представляет собой примитивный степенной ряд.

156. Если степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

с целыми коэффициентами представляет рациональную функцию, то эта последняя может быть представлена в форме $\frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы с целыми коэффициентами и $Q(0)=1$. [155.]

157. Пусть

$$\theta=0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$$

— положительное число, не превосходящее единицы, записанное по десятичной системе ($0\leqslant a_\nu\leqslant 9$, $\nu=1, 2, 3, \ldots$). Целочисленный степенной ряд

$$a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

представляет рациональную функцию тогда и только тогда, когда θ — рациональное число.

158. Пусть бесконечная последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ составлена лишь из конечного числа различных чисел. Степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

будет представлять рациональную функцию тогда и только тогда, когда последовательность его коэффициентов, начиная с некоторого члена, будет периодической.

159. Пусть l — целое неотрицательное число и $P(z)$ — целочисленный полином. Тогда в степенном разложении $P(z)(1-z)^{-l-1}$ коэффициенты являются целыми числами и образуют периодическую последовательность по любому простому модулю p; длина периода равна некоторой степени p.

160. Пусть D — целое число, не делящееся на заданное нечетное простое число p. Тогда коэффициенты в разложении дроби $\frac{(D-1)z}{(1-Dz)(1-z)}$ — периодические по модулю p и длина периода является (собственным или несобственным) делителем числа $p-1$.

161. Пусть D и p — те же числа, что и в задаче 160. В степенном разложении выражения $(1-Dz^2)^{-1}$ коэффициенты — периодические по модулю p. Длина периода во всех случаях является делителем $2(p-1)$; она является делителем $p-1$ или нет, смотря по тому, будет ли $\left(\frac{D}{p}\right)=+1$ или -1.

162. Последовательность чисел Фибоначчи (VII 53) — периодическая по любому модулю. Вычислить длину периода для всех простых чисел, меньших, чем 30.

163. Если рациональная функция представляется целочисленным степенным рядом, то коэффициенты этого ряда, начиная с некоторого, — периодические по любому модулю m.

164. Степенной ряд, представляющий алгебраическую функцию $\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$, имеет целые коэффициенты. Эти коэффициенты не являются периодическими ни по какому нечетному простому модулю. (Теорема 163 не может быть распространена на алгебраические функции.)

§ 5. Теоретико-функциональные свойства целочисленных степенных рядов

165. Радиус сходимости необрывающегося целочисленного степенного ряда всегда $\leqslant 1$.

166. Необрывающийся целочисленный степенной ряд, сходящийся внутри единичного круга, не может представлять ограниченную в этом круге функцию.

167. Если целочисленный степенной ряд представляет алгебраическую иррациональную функцию, то его радиус сходимости меньше единицы.

168. Верхнюю границу 1 в теореме 167 нельзя заменить меньшей. Иными словами, каково бы ни было $\varepsilon>0$, всегда существует целочисленный степенной ряд, представляющий алгебраическую иррациональную функцию и имеющий радиус сходимости, больший, чем $1-\varepsilon$.

169. Пусть коэффициенты полинома

$$P(x)=a_0x^r+a_1x^{r-1}+\ldots+a_{r-1}+a_r \qquad (a_0\neq 0,\ r\geqslant 1)$$

вещественны. Аналитическая функция, определяемая рядом

$$[P(0)]+[P(1)]z+[P(2)]z^2+\ldots+[P(n)]z^n+\ldots,$$

будет рациональной тогда и только тогда, когда первые r коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ рациональны. (См. II 168.) [I 85.]

170. Если последовательность целых неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ограничена и содержит бесконечное множество членов, отличных от нуля, то ряд

$$a_1 \frac{z}{1-z} + a_2 \frac{z^2}{1-z^2} + \ldots + a_n \frac{z^n}{1-z^n} + \ldots$$

не может представлять рациональную функцию.

171. Ряд

$$a_1 \frac{z}{1+z} + a_2 \frac{z^2}{1+z^2} + \ldots + a_n \frac{z^n}{1+z^n} + \ldots,$$

коэффициенты которого подчинены тем же условиям, что и в задаче **170**, также не может представлять рациональную функцию.

172. Обозначим через Q_n сумму цифр числа n. Например, $Q_{137} = 1+3+7 = 11$. Показать, что степенной ряд

$$Q_1 z + Q_2 z^2 + Q_3 z^3 + \ldots + Q_n z^n + \ldots$$

имеет единичную окружность своей естественной границей.

173. Пусть логарифмы всех целых положительных чисел 1, 2, 3, ... записаны один под другим в порядке возрастания так, чтобы при этом единицы одинаковых разрядов стояли в одном и том же столбце. Показать, что степенной ряд, имеющий в качестве коэффициентов цифры любого столбца, имеет единичную окружность своей естественной границей.

Иными словами, пусть в десятичном разложении чисел $\ln 1$, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\ln n$, ... j-я цифра справа от запятой будет соответственно d_1, d_2, d_3, ..., d_n, ... Тогда аналитическая функция, определенная степенным рядом

$$d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots + d_n z^n + \ldots,$$

имеет своей естественной границей окружность $|z| = 1$.

§ 6. Степенные ряды, целочисленные в смысле Гурвица

Степенной ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!} z^n + \ldots$$

называется *целочисленным в смысле Гурвица*, кратко: «*целочисленным* (H)», если a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... — целые рациональные числа [A. Hurwitz, Math. Ann., т. 51, стр. 196—226, 1899].

174. Если функция $f(z)$ целочисленна (H), то также

$$\frac{df(z)}{dz} \quad \text{и} \quad \int_0^z f(z)\, dz$$

целочисленны (H).

175. Если $f(z)$ и $g(z)$ целочисленны (H), то также

$$f(z)+g(z), \quad f(z)-g(z), \quad f(z)g(z)$$

целочисленны (H), а при $g(0)=\pm 1$ еще и отношение

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

целочисленно (H).

176. Если функция $f(z)$ целочисленна (H) и $f(0)=0$, то также

$$\frac{[f(z)]^m}{m!}$$

целочисленно (H) $(m=1, 2, 3, \ldots)$ [174].

177. Если $f(z)$ и $g(z)$ целочисленны (H) и $f(0)=0$, то функция $g[f(z)]$ также целочисленна (H).

178. Функция $\varphi(z)$, однозначно определяемая дифференциальным уравнением

$$\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)^2 = 1-[\varphi(z)]^4$$

и начальными условиями $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)>0$, разлагается в степенной ряд, целочисленный (H).

Говорят, что два степенных ряда

$$a_0+\frac{a_1}{1!}z+\frac{a_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}z^n+\ldots,$$
$$b_0+\frac{b_1}{1!}z+\frac{b_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{b_n}{n!}z^n+\ldots,$$

целочисленных (H), сравнимы по модулю m:

$$a_0+\frac{a_1}{1!}z+\frac{a_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}z^n+\ldots \equiv$$
$$\equiv b_0+\frac{b_1}{1!}z+\frac{b_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{b_n}{n!}z^n+\ldots \pmod{m},$$

если их коэффициенты удовлетворяют сравнениям

$$a_0\equiv b_0 \pmod{m},\quad a_1\equiv b_1 \pmod{m},\quad \ldots,\quad a_n\equiv b_n \pmod{m},\quad \ldots$$

179. $(e^z-1)^3\equiv 2\left(\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots\right) \pmod{4}$.

180. При всяком простом p

$$(e^z-1)^{p-1}\equiv -\left(\frac{z^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{z^{2(p-1)}}{(2p-2)!}+\frac{z^{3(p-1)}}{(3p-3)!}+\ldots\right) \pmod{p}.$$

181. При каждом составном m, превосходящем 4, получаем

$$(e^z-1)^{m-1}\equiv 0 \pmod{m}.$$

182. *Бернуллиевы числа* B_n определяются как коэффициенты в разложении

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}z^{2n} \qquad \text{(I 154).}$$

Имеем

$$B_1=\frac{1}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \qquad B_2=\frac{1}{30}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5},$$

$$B_3=\frac{1}{42}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}, \quad B_4=\frac{1}{30}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5},$$

$$B_5=\frac{5}{66}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{11}, \quad B_6=\frac{691}{2730}=-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13},$$

$$B_7=\frac{7}{6}=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \qquad B_8=\frac{3617}{510}=6+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17}.$$

Вообще

$$B_n=G_n+(-1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots\right),$$

где G_n — целое число, а $2, 3, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — простые числа, на единицу превосходящие какой-нибудь делитель числа $2n$. [Разложить сначала z, затем $\frac{z}{e^z-1}$ по возрастающим степеням e^z-1 и применить 179—181.]

183. Коэффициенты C_n ряда

$$\frac{z}{\varphi(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(4n)!}z^{4n},$$

где $\varphi(z)$ — функция задачи 178, рациональны, причем знаменатели их не делятся ни на один квадрат, кроме единицы, и содержат лишь простые множители, которые $\equiv 1 \pmod 4$. [Разложить сначала z, затем $\frac{z}{\varphi(z)}$ по возрастающим степеням $\varphi(z)$.]

184. Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d\wp(z)}{dz}\right)^2=4\left[\wp(z)\right]^3-4\wp(z)$$

обладает вполне определенным интегралом вида

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_n}{(4n)!}z^{4n-2}$$

($\wp(z)$ есть частная эллиптическая, так называемая «лемнискатическая» функция; параллелограммом периодов служит квадрат). Коэффициенты D_n рациональны, причем знаменатели их не делятся ни на один квадрат, кроме единицы, и содержат лишь простые множители, которые $\equiv 1 \pmod 4$). [Показать, что $\wp(z) = [\varphi(z)]^{-2}$ (183). Разложить сначала z^2, затем $z^2[\varphi(z)]^{-2}$ по возрастающим степеням $\varphi(z)$; z^2, как функция от $\varphi(z)$, удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка.]

185. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, целочисленный (H), удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициентов этого ряда — периодическая по любому модулю, начиная с некоторого места. (Примерами этому служат уже 179, 180.)

186. Степенной ряд

$$y = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{6x^2}{2!} + \frac{20x^3}{3!} + \ldots + \binom{2n}{n}\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

показывает, что теорема 185 не может быть непосредственно распространена на однородные линейные дифференциальные уравнения, коэффициентами которых служат полиномы.

187. Если степенной ряд целой трансцендентной функции $g(z)$ целочислен (H), то максимум модуля функции $g(z)$ (IV, гл. 1) удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{r\to\infty} M(r)\, e^{-r}\sqrt{r} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

§ 7. Значения степенных рядов, сходящихся в окрестности точки $z = \infty$, в целочисленных точках

188. Пусть ряд

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \ldots,$$

расположенный по убывающим степеням z, сходится вне некоторого круга, и числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ рациональны. Если этот ряд принимает целые значения для бесконечного множества целых значений z, то b_0 рационально и

$$b_{-1} = b_{-2} = b_{-3} = \ldots = 0.$$

(Обобщение теоремы 93.) [Hurwitz-Courant, стр. 30 *).]

189. Ряд

$$\sqrt{2z^2+1} = \sqrt{2}z + \frac{\sqrt{2}}{4z} - \frac{\sqrt{2}}{32z^3} + \frac{\sqrt{2}}{128z^5} - \frac{5\sqrt{2}}{2048z^7} + \ldots$$

---

*) Гурвиц, стр. 46. Гурвиц—Курант, стр. 37.

принимает целые значения для бесконечного множества целых значений z.

190. Доказать 114, основываясь на 188.

191. Если не всюду расходящийся ряд

$$F(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \ldots$$

принимает целые значения при всех достаточно больших целых значениях z, то $F(z)$ является целозначным полиномом.

192. Если два полинома принимают целые значения в одних и тех же точках комплексной числовой плоскости, то либо их сумма, либо разность является постоянной. (Эта постоянная, разумеется, представляет собой целое число.)

193. Если полином $g(x)$ принимает вещественные значения во всех точках x, в которых другой полином $f(x)$ принимает значения из некоторого двусторонне-неограниченного множества вещественных чисел, то полином $g(x)$ вообще всюду вещественный, раз только вещественен полином $f(x)$. (Если $f(x)$ нечетной степени, то достаточно предположить лишь, что множество односторонне-неограниченно.) Именно, тогда имеет место тождественное соотношение

$$g = \varphi(f),$$

где $\varphi(y)$ — полином относительно y с вещественными коэффициентами. (Отсюда, между прочим, легко следует 192.)

ГЛАВА 4

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Алгебраические целые числа. Поля

Вещественное или комплексное число α называется *алгебраическим*, если оно служит нулем некоторого целочисленного полинома [стр. 146], т. е. если при некоторых целых рациональных $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_0 \neq 0)$ имеет место равенство

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Если $a_0 = 1$, то α называется *целым алгебраическим* числом или, короче, «целым числом», как мы будем говорить в **194—237**. Существуют, следовательно, иррациональные и комплексные целые числа; рациональными целыми числами являются обыкновенные целые числа

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Если α и β — алгебраические числа, то алгебраическими будут также числа

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta};$$

алгебраические числа образуют *поле*. Если при этом α и β — целые алгебраические числа, то целыми будут и

$$\alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\beta.$$

Целые числа образуют *область целости*.

194. Если α — целое, то и $\sqrt{\alpha}$ — целое.

195. Если r и s — рациональные числа и $r+s\sqrt{-1}$ — целое, то r и s должны быть целыми рациональными.

196. Если r и s — рациональные числа и $r+s\sqrt{-5}$ — целое, то r и s должно быть целыми рациональными.

197. Если r и s — рациональные числа и $r+s\sqrt{-3}$ — целое, то $2r$ и $2s$ должны быть целыми рациональными и $2r \equiv 2s \pmod 2$; однако сами r и s могут и не быть целыми.

Алгебраические числа, являющиеся нулями одного и того же неприводимого полинома [стр. 150], называются *сопряженными*. Алгебраические числа, являющиеся нулями неприводимого полинома n-й степени, называются сами алгебраическими *числами n-й степени*. Рациональные числа суть числа первой степени и сопряжены лишь сами с собой.

198. Существует лишь ограниченное количество целых чисел заданной степени n, содержащихся вместе со всеми своими сопряженными в фиксированном круге $|z|<k$ комплексной числовой плоскости.

199. Единственным целым числом, содержащимся вместе со всеми своими сопряженными в открытом единичном круге, является нуль.

200. Пусть все нули полинома с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом 1 лежат в замкнутом единичном круге. Один из этих нулей должен лежать либо в центре, либо на периферии единичного круга; в последнем случае он является корнем из единицы [т. е. один из нулей должен удовлетворять уравнению вида $x^h=x^k$, где h, k — целые рациональные, $0<h<k$; 198].

201. Если целое число α со всеми своими сопряженными вещественно и по модулю меньше 2, то $\alpha=2\cos\frac{2\pi p}{q}$, где p и q — целые рациональные числа.

Совокупность чисел, представимых в виде рациональных функций с рациональными коэффициентами от некоторого алгебраического числа ϑ, называется *алгебраическим полем*, или просто «полем», и притом полем, *порожденным числом* ϑ; степень порождающего числа ϑ называется также *степенью поля*. Например, поле, порожденное числом второй степени, называется квадратичным и притом вещественно-квадратичным или же мнимо-квадратичным, смотря по тому, будет ли производящее число вещественным или нет.

202. Иррациональные целые числа

$$\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-3}, \quad \sqrt{-5}$$

порождают три различных мнимо-квадратичных поля, в которых целые числа имеют соответственно вид

$$a+b\sqrt{-1}, \quad a+b\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad a+b\sqrt{-5},$$

где a, b — целые рациональные числа.

203. Множество $\mathfrak{M}$ комплексных (в частности, вещественных) чисел называется «дискретной областью целости», если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) Если ζ' и ζ'' принадлежат множеству $\mathfrak{M}$, то и $\zeta'+\zeta''$, $\zeta'-\zeta''$, $\zeta'\zeta''$ принадлежат этому множеству.

2) Точка 0 не является предельной точкой множества $\mathfrak{M}$ (согласно свойству 1) сама точка $0=\zeta'-\zeta'$ принадлежит множеству $\mathfrak{M}$).

Дискретная область целости состоит либо из всех, либо из части целых чисел некоторого мнимого квадратичного числового поля (например, лишь из чисел 0, ± 6, ± 12, $\pm 18, \ldots$ или даже из одного единственного числа 0).

§ 2. Наибольший общий делитель

Говорят, что целое число α *делится* на целое число ϑ, если существует такое целое число $\varkappa$ (частное), что $\alpha=\varkappa\vartheta$. Говорят также, что «$\vartheta$ есть делитель числа α» или же «ϑ входит в α» и т. д. Целые числа, являющиеся делителями числа 1, называют *единицами*. Число ϑ называют *наибольшим общим делителем* m целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, если существуют такие $2m$ целых чисел $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что

$$\alpha_1=\varkappa_1\vartheta, \quad \alpha_2=\varkappa_2\vartheta, \ \ldots, \ \alpha_m=\varkappa_m\vartheta, \quad \alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_m\lambda_m=\vartheta.$$

Два целых числа α, β, наибольший общий делитель которых равен единице, называют *взаимно простыми*.

204. Если бы мы согласились называть «целыми числами» не любые целые алгебраические числа, а лишь те, которые принадлежат полю, порождаемому числом $\sqrt{-5}$, то числа 3 и $1+2\sqrt{-5}$ совсем не имели бы в смысле приведенного выше определения наибольшего общего делителя, т. е. в поле, порождаемом числом $\sqrt{-5}$ (и содержащем 3 и $1+2\sqrt{-5}$), невозможно найти такие пять целых чисел α, β, γ, δ, ϑ, которые удовлетворяли бы уравнениям

$$3=\alpha\vartheta, \quad 1+2\sqrt{-5}=\beta\vartheta, \quad 3\gamma+(1+2\sqrt{-5})\delta=\vartheta.$$

[Исследовать наименьшее значение, принимаемое произведением $(a+b\sqrt{-5})(a-b\sqrt{-5})$, где a, b — целые рациональные; 202.]

205. (Продолжение.) Квадраты $3^2=9$ и $(1+2\sqrt{-5})^2=-19+4\sqrt{-5}$ обладают наибольшим общим делителем даже при ограничении понятия целого числа, принятом в задаче 204.

206. (Продолжение.) Найти (не лежащий в поле, порожденном числом $\sqrt{-5}$) наибольший общий делитель чисел 3 и $1+2\sqrt{-5}$. [194.]

Нижеследующие задачи **не** требуют для своего решения применения глубокой теоремы, что любые два целых числа **обладают** некоторым наибольшим общим делителем [Hecke, стр. 121 *)].

207. Наибольший общий делитель ϑ чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ делится на любой общий делитель этих чисел.

208. Если ϑ и ϑ' — два различных наибольших общих делителя чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то частное $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$ является единицей.

209. Если ϑ — наибольший общий делитель чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то $\gamma\vartheta$ является наибольшим общим делителем чисел $\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_m$.

210. Если α взаимно простое с $\beta\gamma$, то оно взаимно простое как с β, так и с γ.

211. Если α взаимно простое как с β, так и с γ, то оно взаимно простое и с $\beta\gamma$.

212. Если α и β — взаимно простые, то наибольший общий делитель чисел α и γ будет также наибольшим общим делителем чисел α и $\beta\gamma$.

213. Если δ — наибольший общий делитель чисел α и β, то δ^n является наибольшим общим делителем α^n и β^n при любом $n=1, 2, 3, \ldots$

214. Если δ — наибольший общий делитель чисел α и β, то $\sqrt[n]{\delta}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ является наибольшим общим делителем чисел $\sqrt[n]{\alpha}$ и $\sqrt[n]{\beta}$.

215. Если m чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — попарно взаимно простые и $\mu=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$, то 1 является наибольшим общим делителем m чисел $\frac{\mu}{\alpha_1}, \frac{\mu}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\mu}{\alpha_m}$.

---

*) Гекке, стр. 125.

216. Всякое целое число $\alpha \neq 0$ взаимно просто со всеми рациональными простыми числами, за исключением конечного их числа.

217. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — нули полинома

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые рациональные числа. Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обладают наибольшим общим делителем δ и притом $\delta = \sqrt[N]{d}$, где $N = n!$ и d — наибольший общий делитель чисел

$$a_1^{\frac{N}{1}}, \quad a_2^{\frac{N}{2}}, \quad \ldots, \quad a_n^{\frac{N}{n}}.$$

Под *нормой* числа α, принадлежащего полю n-й степени K, символически: $N(\alpha)$, понимают произведение n сопряженных с ним чисел [Hecke, стр. 81 *)]. Слово «сопряженные» имеет здесь другой смысл, чем в пояснении, предшествующем задаче 198 [Hecke, стр. 70 **)].

218. Если α и β принадлежат K и α — делитель β, то $N(\alpha)$ есть делитель $N(\beta)$.

219. Пусть поле K обладает тем свойством, что вместе с любыми двумя целыми числами α и β оно содержит и их наибольший общий делитель в том смысле, что в K имеются пять целых чисел $\alpha', \beta', \gamma, \delta, \vartheta$, которые удовлетворяют равенствам

$$\alpha = \alpha'\vartheta, \quad \beta = \beta'\vartheta, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = \vartheta.$$

(Это имеет место не всегда! См. 204.) Показать, что для этого необходимо и достаточно выполнение следующего требования: если α и β — два целых числа поля K, не делящихся одно на другое, то в этом поле существуют два таких целых числа ξ и η, что одновременно

$$0 < |N(\alpha\xi + \beta\eta)| < |N(\alpha)|, \qquad 0 < |N(\alpha\xi + \beta\eta)| < |N(\beta)|.$$

(Если a и b — целые рациональные числа, $|a| > |b|$, и b не является делителем a, то требуемым здесь свойством выражения $\alpha\xi + \beta\eta$ обладает остаток от деления a на b, т. е. $r = a \cdot 1 - b\left[\frac{a}{b}\right]$.)

220. Любые два целых числа поля, порожденного числом $\sqrt{-1}$, обладают наибольшим общим делителем, принадлежащим этому же полю.

---

*) Гекке, стр. 85.
**) Гекке, стр. 74.

§ 3. Сравнения

Пусть α, β, μ — целые числа. Делимость разности $\alpha-\beta$ на μ выражают, как и в теории целых рациональных чисел, в виде сравнения

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\mu}.$$

221. Отношение сравнимости между двумя целыми алгебраическими числами по некоторому целому алгебраическому модулю коммутативно и транзитивно, т. е.

из $\alpha \equiv \beta \pmod{\mu}$ следует $\beta \equiv \alpha \pmod{\mu}$,

из $\alpha \equiv \beta$, $\beta \equiv \gamma \pmod{\mu}$ следует $\alpha \equiv \gamma \pmod{\mu}$.

222. Из

$$\alpha \equiv \beta, \quad \gamma \equiv \delta \pmod{\mu}$$

следует

$$\alpha+\gamma \equiv \beta+\delta, \quad \alpha-\gamma \equiv \beta-\delta, \quad \alpha\gamma \equiv \beta\delta \pmod{\mu}.$$

223. Если α и μ — взаимно простые и μ не является единицей, то

$$\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mu}.$$

224. Пусть α, β, ... — целые числа, $f(x, y, \ldots)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами и p — рациональное простое число. Тогда

$$(f(\alpha, \beta, \ldots))^p \equiv f(\alpha^p, \beta^p, \ldots) \pmod{p}.$$

225. Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$$

($\alpha_k \neq 0$, $\omega_k \neq 0$, $\omega_k \neq \omega_l$ при $k \neq l$, $k, l = 1, 2, 3, \ldots, m$) — целые числа. Тогда не все числа

$$\frac{\alpha_1\omega_1^n+\alpha_2\omega_2^n+\ldots+\alpha_m\omega_m^n}{n} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

могут быть целыми. [Выберем надлежащим образом простое число p и положим $n=p, 2p, 3p, \ldots, rp$; 216, 224.]

---

226. Нули полинома деления круга $K_m(x)$ [36] являются также нулями полинома x^m-1, т. е. целыми числами. Они равны $\alpha^{r_1}, \alpha^{r_2}, \ldots, \alpha^{r_h}$, где положено $e^{\frac{2\pi i}{m}}=\alpha$, $\varphi(m)=h$ и $r_1, r_2, \ldots, r_h$ образуют приведенную систему вычетов по модулю m, т. е. $r_1, r_2, \ldots, r_h$ — целые рациональные числа, взаимно простые с m и попарно несравнимые по модулю m.

Является ли полином $K_m(x)$ приводимым или же неприводимым?

Решение. Рассмотрим среди неприводимых целочисленных множителей полинома $K_m(x)$ [116] множитель $f(x)$, имеющий нулем α. Нули полинома $f(x)$, т. е. целые числа, сопряженные с α, имеют все вид α^g, где g — целое, и их число не превосходит h [если $K_m(x)$ приводим, то меньше h]. Во всех случаях для любого целого рационального g

$$|f(\alpha^g)| \leqslant 2^h, \qquad (*)$$

так как модули отдельных множителей полинома $f(\alpha^g)$, как длины хорд единичного круга, не превосходят двух. Пусть теперь p — простое число. Так как $f(\alpha)=0$, то мы получаем [224]

$$f(\alpha^p) \equiv (f(\alpha))^p \equiv 0 \pmod p.$$

Значит, $\frac{f(\alpha^p)}{p}$ есть целое число. Его сопряженные будут точно так же целыми числами вида $\frac{f(\alpha^{gp})}{p}$. Если, стало быть, $p > 2^h$, то все числа, сопряженные с $\frac{f(\alpha^p)}{p}$, будут в силу неравенства (*) по модулю меньше единицы, и следовательно [199], $f(\alpha^p)=0$, что и показывает, что α^p является нулем полинома $f(x)$.

По теореме Дирихле [стр. 149, сноска] каждая из $\varphi(m)=h$ прогрессий

$$\begin{array}{l} r_1,\ r_1+m,\ r_1+2m,\ \ldots, \\ r_2,\ r_2+m,\ r_2+2m,\ \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_h,\ r_h+m,\ r_h+2m,\ \ldots \end{array}$$

содержит бесконечное множество простых чисел. Следовательно, можно указать приведенную систему вычетов по модулю m, состоящую исключительно из простых чисел, бо́льших 2^h. Но тогда согласно доказанному выше множитель $f(x)$ полинома $K_m(x)$ имел бы своими нулями все нули $\alpha^{r_1}, \alpha^{r_2}, \ldots, \alpha^{r_h}$ этого полинома, т. е. был бы той же степени, что и $K_m(x)$, и, следовательно, вообще совпал бы тождественно с $K_m(x)$. Таким образом, доказано, что полином $K_m(x)$ неприводим.

227. Доказать неприводимость полинома $K_m(x)$, не опираясь на теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Эту теорему можно обойти при помощи, правда, более громоздкого, но зато и более элементарного построения приведенной системы вычетов по модулю m.

§ 4. Теоретико-числовые свойства степенных рядов

228. Если разложения рациональной функции как по возрастающим, так и по убывающим степеням оба рациональночисленны, то полюсы этой функции, отличные от 0 и ∞, являются единицами (в смысле теории алгебраических чисел).

229. Пусть степенной ряд, расположенный по возрастающим степеням аргумента, сходится в единичном круге и представляет дробную рациональную функцию. Если его коэффициенты являются целыми рациональными числами, то полюсы его равны корням из единицы. [156, 200.]

230. Если ряд

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \ldots$$

с целыми алгебраическими коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ представляет рациональную функцию, то полюсы этой функции также будут целыми алгебраическими числами.

231. Если

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \quad \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$$

$$(\alpha_k \neq 0, \quad \omega_k \neq 0, \quad \omega_k \neq \omega_l \quad \text{при} \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

— целые алгебраические числа, то коэффициенты в разложении выражения

$$\frac{\alpha_1}{1-\omega_1 z} + \frac{\alpha_2}{1-\omega_2 z} + \ldots + \frac{\alpha_m}{1-\omega_m z}$$

по степеням z точно так же являются целыми алгебраическими числами. Это, однако, не имеет места для разложения, получаемого отсюда почленным интегрированием.

232. Пусть функция $f(z)$ представляется рационально-численным степенным рядом и производная ее $f'(z)$ — рациональная функция. Показать, что сама $f(z)$ рациональна, если ее степенной ряд удовлетворяет условию Эйзенштейна, и трансцендентна в противном случае.

233. Пусть алгебраическая функция $f(z)$ определена уравнением

$$P_0(z)[f(z)]^l + P_1(z)[f(z)]^{l-1} + \ldots + P_{l-1}(z) f(z) + P_l(z) = 0,$$

где $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_l(z)$ — полиномы с алгебраическими коэффициентами. Если α — алгебраическое число, то коэффициенты в разложении $f(z)$ по степеням $z-\alpha$ будут точно так же алгебраическими числами. [В частности, если $z=\alpha$ — регулярная точка функции $f(z)$, то $f(\alpha)$ есть алгебраическое число.]

234. Целая рациональная функция $F(z, y)$ двух переменных z, y с рациональными коэффициентами называется *неприводимой*, если она не может быть представлена в виде произведения двух целых функций с рациональными коэффициентами, имеющих низшую степень относительно y.

Если $F(z, y)$ неприводима, то либо ни одно, либо все решения уравнения

$$F(z, y) = 0$$

являются рациональными функциями от z.

[Более того: либо ни одно, либо все решения суть целые рациональные функции от z. Следует принять во внимание 233 и главную характерную особенность неприводимых уравнений: их корни имеют скверную привычку ходить в гости целой семьей. См. Hecke, стр. 64, теорема 49 *).]

235. Если степенное разложение алгебраической функции имеет алгебраические коэффициенты, то эти последние все содержатся в некотором конечном поле (т. е. поле, порожденном одним единственным алгебраическим числом, см. стр. 164). [151, 152.]

236. (Продолжение.) Пусть рассматриваемый степенной ряд будет

$$\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$$

Тогда существует такое целое число τ, что все числа $\alpha_1\tau$, $\alpha_2\tau^2$, $\alpha_3\tau^3$, ... являются целыми (обобщение теоремы Эйзенштейна).

237. Пусть расположенный по убывающим степеням z ряд

$$a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_1 z+a_0+\frac{a_{-1}}{z}+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-3}}{z^3}+\ldots$$

сходится вне некоторого круга и принимает целые рациональные значения для бесконечного множества целых рациональных значений z. Если все коэффициенты a_m, a_{m-1}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, ... рациональны, то ряд представляет целую рациональную функцию (обрывается, 188); если коэффициенты все принадлежат одному и тому же конечному полю, то ряд представляет алгебраическую функцию (пример: 189).

ГЛАВА 5

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Плоская квадратная целая решетка

238. Треугольник, вершины которого являются целыми точками плоской квадратной решетки, не может быть равносторонним.

239. До какой толщины должны вырасти стволы в правильно засаженном лесе, имеющем форму круга, чтобы они полностью заслонили вид из центра?

Пусть s — заданное целое положительное число. Опишем возле каждой целой точки p, q, удовлетворяющей неравенствам $1\leqslant p^2+q^2\leqslant s^2$, как из центра, окружность радиуса r. Если r достаточно мало, то имеются выходящие из нулевой точки лучи, не

*) Гекке, стр. 69.

пересекающие ни одного из описанных кругов (лес имеет «просветы»); таких лучей уже больше не существует, когда r достаточно велико $\left(\text{при } r=\frac{1}{2} \text{ круги соприкасаются}\right)$. Пусть $r=\rho$ — значение, разделяющее эти два случая (граница «просвечиваемости»). Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \leqslant \rho < \frac{1}{s}.$$

240. Проведем в плоской квадратной точечной решетке *максимально широкую* прямую бесконечную «дорогу», составляющую с осью ординат угол $\operatorname{arctg} x$. Обозначая ширину этой дороги через $\varphi(x)$, определить $f(x)=\varphi(x)\sqrt{1+x^2}$.

241. Две целые точки x, y и x', y' называются сравнимыми по модулю n, если

$$x \equiv x' \pmod{n}, \quad y \equiv y' \pmod{n}.$$

Среди любых kn^2+1 различных целых точек всегда существует $k+1$ сравнимых между собой по модулю n.

242. Пусть в плоскости, на которую нанесена плоская квадратная решетка со сторонами квадратов, равными единице, лежит область с (жордановой) площадью F. Если даже область эта не содержит ни одной целой точки, то тем не менее ее всегда можно так передвинуть параллельно самой себе, чтобы на ней оказалось $[F]+1$ целых точек.

243. Целые точки, лежащие в замкнутом первом квадранте, образуют *счетное* множество, т. е. существует функция $f(x, y)$, определенная для целых неотрицательных значений x и y и обладающая следующими двумя свойствами:

1) $f(x, y)$ принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, ...

2) $f(x, y)$ — инъективная, т. е. если x, y, x', y' — целые числа, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x' \geqslant 0$, $y' \geqslant 0$, $(x-x')^2+(y-y')^2>0$, то $f(x, y) \neq f(x', y')$.

Существует даже *целая рациональная* функция $f(x, y)$, перенумеровывающая целые точки, т. е. обладающая свойствами 1), 2), а именно функция

$$f(x, y)=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+3x+y+2)=\binom{x+y+1}{2}+x+1,$$

а также функция, получающаяся из нее, если поменять местами x и y [указанная функция последовательно перенумеровывает целые точки на прямолинейных отрезках

$$x+y=0,\ x+y=1,\ x+y=2,\ \ldots,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0].$$

Пусть $f(x, y)$ — целая рациональная функция степени m,

$$f(x, y)=\varphi_0(x, y)+\varphi_1(x, y)+\ldots+\varphi_m(x, y),$$

где $\varphi_\mu(x, y)$ обозначает однородную целую рациональную функцию степени μ. Если $f(x, y)$ перенумеровывает целые точки, то, очевидно, $\varphi_m(x, y) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Если $\varphi_m(x, y) > 0$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y > 0$ и $f(x, y)$ перенумеровывает целые точки, то функция $f(x, y)$ имеет степень $m=2$. [Число целых точек, заключающихся в области, ограничиваемой линией уровня $f(x, y) = \text{const.}$, связано с площадью этой области.]

244. Будем рассматривать квадрат $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n+\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant$ $\leqslant n+\frac{1}{2}$ как шахматную доску с n^2 полями, т. е. разделим его прямыми, параллельными осям, на n^2 равных квадратов (полей) каждый площадью, равной единице. «Проблема n ферзей» состоит в следующем: из n^2 целых точек, образующих центры n^2 полей, требуется выбрать n целых точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, удовлетворяющих $2n(n-1)$ неравенствам

$$x_\mu \neq x_\nu, \quad y_\mu \neq y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \neq y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \neq -(y_\mu - y_\nu) \quad (\mu \neq \nu);$$
$$\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Заменяя неравенства более ограничительными условиями — «несравнениями»

$$x_\mu \not\equiv x_\nu, \quad y_\mu \not\equiv y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv y_\mu - y_\nu, \quad x_\mu - x_\nu \not\equiv -(y_\mu - y_\nu) \pmod{n},$$

показать, что эти последние тогда и только тогда имеют решение, когда n — взаимно простое с 6.

§ 2. Смешанные задачи

245. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_q$ и $s_1, s_2, \ldots, s_q$ — две полные системы вычетов mod q, где q — нечетное простое число. Тогда q чисел $r_1 s_1$, $r_2 s_2, \ldots, r_q s_q$ н е могут образовывать полной системы вычетов mod q.

246. Пусть p^α, где $\alpha \geqslant 1$, — наивысшая степень, в которой нечетное простое число p входит в число n. Показать, что

$$1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \ldots + n^\lambda \equiv -\frac{n}{p} \text{ или } 0 \pmod{p^\alpha},$$

смотря по тому, делится ли λ на $p-1$ или нет ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$).

247. Пусть p — наименьшее простое число, входящее в n. Тогда существуют две такие полные системы вычетов mod n

$$r_1, r_2, \ldots, r_n,$$
$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

что каждая из $p-2$ строк

$$\begin{array}{llll}
r_1+s_1, & r_2+s_2, & \ldots, & r_n+s_n, \\
r_1+2s_1, & r_2+2s_2, & \ldots, & r_n+2s_n, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
r_1+(p-2)s_1, & r_2+(p-2)s_2, & \ldots, & r_n+(p-2)s_n
\end{array}$$

также представляет собой полную систему вычетов. Что касается системы

$$r_1+(p-1)s_1, \quad r_2+(p-1)s_2, \ \ldots, \ r_n+(p-1)s_n,$$

то она никак не может быть полной системой вычетов $\bmod n$.

248. Каждая степень может быть представлена в виде суммы стольких последовательных нечетных чисел, сколько единиц содержится в ее основании.

249. Число из ряда $2, 3, 4, \ldots, n$ $(n>2)$ тогда и только тогда — взаимно простое со всеми остальными, когда оно представляет собой простое число, превосходящее $\frac{n}{2}$. (Что такое число всегда существует при $n>2$, было доказано Чебышевым. См. Собр. соч., т. I, стр. 63, СПб, 1899.)

250. Частичные суммы

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

гармонического ряда не могут быть целыми при $n>1$. Это сразу же получается из теоремы Чебышева [249], но может быть доказано и без нее.

251. Сумма двух или большего числа последовательных членов гармонического ряда, т. е. сумма вида

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{m} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots; \ n<m),$$

не может быть целым числом; если представить ее в виде несократимой дроби, то знаменатель будет четный, числитель — нечетный.

252. Если целое положительное число n делится на все числа, меньшие или равные $\sqrt{n}$, то n есть либо 24, либо делитель этого числа.

Доказать элементарными средствами более общую теорему: каково бы ни было α, $0<\alpha<1$, имеется лишь конечное число целых положительных чисел n, делящихся на все числа $1, 2, 3, \ldots, [n^\alpha]$.

253. Пусть Q — простое число, не являющееся делителем $10P$. Среднее арифметическое цифр в периоде десятичной дроби, в которую разлагается $\frac{P}{Q}$, будет тогда и только тогда равно 4,5, когда длина периода представляет собой четное число.

254. Число $n=2^h+1$ $(h\geqslant 2)$ в том и только том случае является простым, когда

$$3^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{n}.$$

255. Доказать справедливость следующей теоремы, высказанной Эйлером в качестве предположения:

Диофантово уравнение

$$4xyz - x - y - t^2 = 0$$

не имеет решений в положительных целых числах x, y, z, t.

256. Если q — простое число $\geqslant 11$, то существуют положительные нечетные простые числа p_1, p_2, p_3, p_4, все меньшие, чем q, но не обязательно различные, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\left(\frac{p_1}{q}\right) = +1, \quad \left(\frac{p_2}{q}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{q}{p_3}\right) = +1, \quad \left(\frac{q}{p_4}\right) = -1.$$

$\left[\left(\frac{p_1}{q}\right)\right.$ и т. д. — символы Лежандра.$\left.\right]$

257. Десятичная дробь

$$0{,}23571113171923\ldots$$

(все простые числа выписаны одно за другим) иррациональна. [249, 110.]

258. Число

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

иррационально.

259. Число e не только иррационально, но и не является квадратической иррациональностью, т. е. не может удовлетворять никакому уравнению вида

$$ae + be^{-1} + c = 0,$$

где a, b, c — целые числа, не все равные нулю.

260. Если бы *постоянная Эйлера-Маскерони* $C = -\Gamma'(1)$ была рациональным числом, то $\Gamma'(n+1)$ должно было бы быть целым числом при всех достаточно больших целых n.

261. Неизвестно, обладает ли число π тем свойством, что среднее арифметическое первых n его десятичных знаков стремится к 4,5. Однако, если π обладает этим свойством, то им обладает также $4 - \pi$.

262. Пусть q_n обозначает знаменатель n-го числа Бернулли B_n [182]. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{q_1 q_2 q_3 \ldots q_n}{(2n)!}} = \frac{1}{2}.$$

263. Пусть теоретико-числовая функция $f(n)$ мультипликативна [стр. 139] и стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности по простым числам и их степеням. В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=0,$$

если n стремится к бесконечности по всем вообще целым положительным числам.

264. При всяком положительном δ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-\delta}}{\varphi(n)}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\tau(n)}{n^{\delta}}=0.$$

265. Пусть целочисленный квадратный трехчлен ax^2+bx+c представлен целой точкой a, b, c в трехмерной кубической числовой решетке. Обозначим число целых точек, содержащихся в кубе

$$-n\leqslant a\leqslant n, \quad -n\leqslant b\leqslant n, \quad -n\leqslant c\leqslant n$$

и представляющих приводимый трехчлен, через r_n. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{(2n+1)^3}=0.$$

(Неприводимость квадратного трехчлена представляет в некотором смысле «нормальный случай».)

266. «Вероятность» того, что целочисленный полином заданной степени приводим, равна нулю. Точнее говоря: пусть h — целое число, $h\geqslant 2$, и r_n обозначает число целых точек $(h+1)$-мерного пространства, лежащих в кубе

$$-n\leqslant a_0\leqslant n, \quad -n\leqslant a_1\leqslant n, \quad \ldots, \quad -n\leqslant a_h\leqslant n$$

и представляющих приводимые полиномы $a_0x^h+a_1x^{h-1}+\ldots$ $\ldots+a_h$. Тогда

$$r_n=O(n^h\ln^2 n).$$

(Обобщение и уточнение теоремы 265.) [II 46.]

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Если бросить тяжелый выпуклый полиэдр с произвольным внутренним распределением массы на горизонтальную плоскость, то он останется лежать на одной из своих граней. Иными словами, для любой точки P, содержащейся внутри выпуклого полиэдра, найдется (по меньшей мере) одна грань F такая, что основание перпендикуляра, опущенного из P на плоскость грани F, будет лежать внутри этой грани. Дать чисто геометрическое доказательство, независимое от всяких механических представлений.

2. Если на круглой площадке ссыпано данное количество зерна, то максимальный «наклон» получающейся кучи будет тогда наименьшим, когда этой куче придана форма прямого кругового конуса. Доказать следующую теорему, являющуюся аналитической перефразировкой указанного факта:

Пусть функция $f(x, y)$ обладает обеими частными производными

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Если $f(x, y) = 0$ на границе единичного круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то в единичном круге имеется точка ξ, η, в которой

$$\sqrt{[f'_x(\xi, \eta)]^2 + [f'_y(\xi, \eta)]^2}\ ^{*)} > \frac{3}{\pi} \int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

причем двойной интеграл распространен по единичному кругу.

3. Если материальная точка, проходя в единицу времени единицу длины, переходит от состояния покоя к состоянию покоя, то где-нибудь между двумя этими состояниями она должна испытать ускорение, по абсолютной величине превышающее 4. Дать аналитическое истолкование этому факту.

4. Если кривая всюду выпукла относительно точки O, то она занимает угол зрения, меньший $180°$, если же она относительно O

---

*) Это и есть «наклон».

всюду вогнута и простирается в бесконечность, то угол зрения, занимаемый ею, будет больше 180°.

Пусть O — полюс полярной системы координат r, φ и $r=\frac{1}{f(\varphi)}$ — уравнение кривой, причем $f(x)$ имеет непрерывные первую и вторую производные. Вычисление радиуса кривизны приводит к следующим двум теоремам:

1. Если $f(x)>0$ в интервале $a\leqslant x\leqslant a+\pi$, то существует такая точка ξ $(a<\xi<a+\pi)$, что

$$f(\xi)+f''(\xi)>0.$$

2. Если $f(x)>0$, $f(x)+f''(x)>0$ при $a<x<b$ и $f(a)=f(b)=0$, то $b-a>\pi$.

Доказать эти теоремы чисто аналитически.

Пусть дана замкнутая выпуклая плоская кривая $\mathfrak{L}$ с непрерывной кривизной. Пусть, далее, $h(\varphi)$ есть опорная функция кривой $\mathfrak{L}$ (соответственно ограниченной кривою $\mathfrak{L}$ выпуклой области $\mathfrak{K}$, см. ч. I, стр. 133), $r(\varphi)$ — радиус кривизны этой кривой в точке, где угловой коэффициент касательной равен $\varphi+\frac{\pi}{2}$. Функция $h(\varphi)$ имеет непрерывные первую и вторую производные, $r(\varphi)$ непрерывна. Имеем

$$r(\varphi)=h(\varphi)+h''(\varphi).$$

Для площади f области, ограниченной кривою $\mathfrak{L}$ (т. е. области $\mathfrak{K}$), и для длины l кривой $\mathfrak{L}$ имеют место формулы

$$f=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} h(\varphi)\,r(\varphi)\,d\varphi, \qquad l=\int\limits_0^{2\pi} h(\varphi)\,d\varphi.$$

5. На замкнутой выпуклой кривой с непрерывной кривизной существуют всегда по меньшей мере три различные пары точек, обладающие тем свойством, что касательные в обеих точках одной и той же пары параллельны, а кривизна кривой одинакова.

6. Если выпуклая кривая длины l, охватывающая площадь f, может свободно катиться по внутренней стороне некоторой другой кривой длины L, охватывающей площадь F, то

$$lL\leqslant 2\pi(f+F).$$

Пусть в пространстве x, y, z дана замкнутая выпуклая поверхность $\mathfrak{F}$ с непрерывной кривизной. Выражение $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$, где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, имеет в выпуклой области $\mathfrak{K}$, ограниченной поверхностью $\mathfrak{F}$, некоторый определенный максимум $h(\alpha, \beta, \gamma)$. Величина $h(\alpha, \beta, \gamma)$ является функцией направления α, β, γ и называется *опорной функцией* области $\mathfrak{K}$. Плоскость

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-h(\alpha, \beta, \gamma)=0$$

есть касательная плоскость (*опорная плоскость*) поверхности $\mathfrak{F}$ и притом такая, нормаль к которой, направленная в сторону от $\mathfrak{F}$, имеет направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Пусть r и r' — главные радиусы кривизны в точке касания. Величины h, r, r' можно представлять себе как функции точки ω, движущейся по поверхности единичной сферы. Они являются непрерывными функциями от ω. Для объема v, площади o и интеграла m от средней кривизны поверхности $\mathfrak{F}$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{3}\int\int hrr'\,d\omega,\\ o &= \int\int rr'\,d\omega=\frac{1}{2}\int\int h(r+r')\,d\omega,\\ m &= \frac{1}{2}\int\int (r^{-1}+r'^{-1})\,rr'\,d\omega=\int\int h\,d\omega, \end{aligned}$$

где интегрирование распространяется на единичную сферу и $d\omega$ обозначает элемент ее поверхности.

7. Пусть объем, поверхность и интеграл от средней кривизны для двух выпуклых поверхностей будут соответственно v, o, m и V, O, M. Если первая из этих поверхностей может свободно катиться по внутренней стороне второй, то имеют место неравенства

$$\begin{aligned} mO+oM &\leqslant 12\pi(V+v),\\ mO-oM &\leqslant 4\pi(V-v). \end{aligned}$$

---

8. Замкнутая поверхность, подвергнутая всестороннему равномерному давлению, остается в равновесии. Для обоснования этого факта доказать следующие формулы, справедливые для всех замкнутых поверхностей:

$$\int\int\cos\alpha\,dS=0,\quad \int\int\cos\beta\,dS=0,\quad \int\int\cos\gamma\,dS=0,$$
$$\int\int(y\cos\gamma-z\cos\beta)\,dS=0,\qquad \int\int(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\,dS=0,$$
$$\int\int(x\cos\beta-y\cos\alpha)\,dS=0.$$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ обозначают направляющие косинусы внешней нормали, dS — элемент площади.

9. Если на каждый элемент dS замкнутой твердой поверхности с непрерывной кривизной действует направленная по внутренней нормали сила величиной в $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)dS$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, то поверхность остается в равновесии.

10. (Продолжение.) Если величина силы, действующей на элемент dS в направлении внутренней нормали, равна $\frac{1}{R_1R_2}dS$ (т. е. пропорциональна гауссовой кривизне, а не, как выше, средней кривизне), то поверхность также остается в равновесии.

11. На каждое ребро k твердого полиэдра действует сила K, приложенная к центру ребра, перпендикулярная к этому ребру и лежащая в плоскости, делящей внутренний угол между гранями, встречающимися в ребре k, пополам. Величина силы K равна $l\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$, где l — длина ребра k и α — упомянутый только что внутренний угол. Наконец, сила K направлена внутрь или вовне, смотря по тому, является ли ребро k выпуклым или же вдавленным, т. е. сообразно знаку $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Система сил K оставляет полиэдр в равновесии.

12. Если на каждый элемент ds замкнутой твердой пространственной кривой, имеющей непрерывную кривизну, действует сила, равная по величине $\frac{ds}{r}$, где r — радиус кривизны, и направленная в положительную сторону главной нормали, то кривая остается в равновесии.

13. Пусть из начала координат проведены единичные векторы, параллельные направлению касательной в различных точках непрерывно дифференцируемой пространственной кривой. Концы этих единичных векторов описывают *сферическую индикатрису* пространственной кривой. Если эта кривая замкнута, то ее сферическая индикатриса пересекает все главные окружности единичной сферы.

---

14. Пусть функция $f(x)$ определена в конечном интервале $a\leqslant x\leqslant b$ и удовлетворяет в нем следующим условиям:

1) $f(x)$ положительна внутри и равна нулю на концах интервала $[a, b]$;

2) $f(x)$ в интервале $a<x<b$ имеет непрерывные первую и вторую производные;

3) $f'(x)\to+\infty$ при $x\to a$, $f'(x)\to-\infty$ при $x\to b$.

При этих предположениях функция

$$\frac{f''(x)}{f(x)\left(1+[f'(x)]^2\right)^2}=F(x)$$

не может оставаться монотонной во всем интервале $a<x<b$, за исключением случая

$$f(x)=\sqrt{(x-a)(b-x)},\quad F(x)=-\left(\frac{2}{b-a}\right)^2.$$

15. На замкнутой поверхности вращения с непрерывной кривизной всегда существуют две различные параллели с одинаковой гауссовой кривизной.

---

16. Пусть a, b, c — стороны, α, β, γ — углы (в радианах) некоторого треугольника; a лежит против α, b — против β, c — против γ. Тогда

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Равенство слева имеет место тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний, а справа — когда треугольник вырождается в сложенный вдвое отрезок.

17. Пусть k_1, k_2, ..., k_6 — длины шести ребер тетраэдра и α_1, α_2, ..., α_6 — соответствующие углы между гранями, выраженные в радианах. Тогда

$$\frac{\pi}{3} < \frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_6\alpha_6}{k_1 + k_2 + \ldots + k_6} < \frac{\pi}{2}.$$

Указанные границы не могут быть сближены.

18. Пусть $P_0P_1P_2$ — прямоугольный треугольник с прямым углом в P_2, P_2P_3 — перпендикуляр из P_2 на P_0P_1, точно так же $P_3P_4 \perp P_1P_2$, $P_4P_5 \perp P_2P_3$ и т. д. Найти предельную точку $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

19. Пусть в пространстве даны две окружности K и K', каждая в виде пересечения шаровой поверхности с плоскостью:

$$(K) \quad x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0,$$
$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$(K') \quad x^2+y^2+z^2+a'x+b'y+c'z+d'=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Найти целую рациональную функцию от 16 вещественных коэффициентов a, ..., d, A, ..., D, a', ..., d', A', ..., D', которая была бы отрицательна тогда и только тогда, когда обе окружности сцеплены, т. е. находятся в таком взаимном положении, что хотя и не имеют общих точек, однако, будучи материализованы (скажем, изготовлены из проволоки), не могут быть удалены друг от друга на достаточное расстояние без разрыва.

20. Пусть X_1, X_2, X_3 — проективные координаты точки на плоскости и X_0 определено соотношением $X_0+X_1+X_2+X_3 \equiv 0$. В трехпараметрическом семействе конических сечений

$$\lambda_0X_0^2+\lambda_1X_1^2+\lambda_2X_2^2+\lambda_3X_3^2=0$$

существует двухпараметрическое подсемейство конических сечений, вырождающихся в пары прямых, причем каждая точка плоскости служит особой точкой (вершиной) такой пары. Найти интегральные кривые этих пар прямых. (Во всякой точке P искомой кривой касательная должна совпадать с одной из прямых пары, имеющей вершиной P.)

21. Пусть точка P описывает плоскую кривую. Пусть, далее, ρ — радиус кривизны в точке P, и отрезок нормали в P, заключающийся между осями прямоугольной системы координат, имеет длину ν. Определить те кривые, для которых ρ и ν находятся в данном отношении:

$$\rho = 2n\nu.$$

Постоянная n может считаться положительной, так как n перейдет в $-n$, если поменять ролями x и y.

При целом n одно из решений получается в виде рациональной кривой порядка $2n$, имеющей с бесконечно удаленной прямой $2n$-кратную точку пересечения. [Ввести в качестве параметра угол τ между осью x и касательной в P.]

22. Семейство поверхностей второго порядка

$$F(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{x_1^2}{a_1-t} + \frac{x_2^2}{a_2-t} + \frac{x_3^2}{a_3-t} - t = 0 \quad (0 < a_1 < a_2 < a_3)$$

с параметром t имеет огибающую поверхность H порядка 10 и класса 4. Определить линии кривизны поверхности H. [Составить дифференциальное уравнение, связывающее один из радиусов кривизны поверхности H с параметром t.]

23. (Продолжение.) Вывести параметрическое представление поверхности H, в котором параметрическими линиями были бы линии кривизны. Эти последние представляют собой алгебраические кривые 12-го порядка.

24. (Продолжение.) Поверхность центров кривизны поверхности H и параллельные поверхности служат также огибающими поверхностями некоторого семейства поверхностей второго порядка.

25. Пусть $F(x, y)$ — непрерывная функция, периодическая с периодом 1 относительно обеих переменных x, y:

$$F(x+1, y) = F(x, y+1) = F(x, y).$$

Пусть, кроме того, функция $F(x, y)$ обладает тем свойством (достаточно предположить, например, что она удовлетворяет условию Липшица), что через каждую точку плоскости проходит одна и только одна неограниченно продолжаемая интегральная кривая дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

Тогда функции $F(x, y)$ соответствует такое число ω, что для каждой интегральной кривой $y = f(x)$ разность $f(x) - \omega x$ остается ограниченной при всех значениях x.

РЕШЕНИЯ

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. [Относительно **1 — 76** см. A. Wiman, Acta Math., т. 37, стр. 305—326, 1914; дальнейшая литература указана в книге G. Valiron, General theory of integral functions, Toulouse, É. Privat, 1923. См. также 1. с. I **110**.] Речь идет о максимальном числе последовательности

$$1,\ \frac{r}{1},\ \frac{r}{1}\frac{r}{2},\ \frac{r}{1}\frac{r}{2}\frac{r}{3},\ \ldots,\ \frac{r}{1}\frac{r}{2}\cdots\frac{r}{n},\ \ldots$$

Множители $\frac{r}{1}, \frac{r}{2}, \ldots, \frac{r}{n}, \ldots$ убывают. При

$$\frac{r}{n} \geqslant 1 > \frac{r}{n+1}, \text{ т. е. } n \leqslant r < n+1,$$

максимальным членом служит n-й член $\frac{r^n}{n!}$. Поэтому

$$\mu(r) = \frac{r^{[r]}}{[r]!},\quad \nu(r) = [r].$$

2. Так как все коэффициенты положительны, то

$$M(r) = e^r,\quad N(r) = 0.$$

3. $\mu(r) = \frac{r^n}{(2n+1)!}$ при $2n(2n+1) \leqslant r \leqslant (2n+2)(2n+3)$,

$$\nu(r) = \left[\frac{\sqrt{1+4r}-1}{4}\right] \sim \frac{\sqrt{r}}{2}.$$

4. Так как коэффициенты имеют чередующиеся знаки, то максимум модуля достигается для отрицательного z.

$$M(r) = \frac{e^{\sqrt{r}} - e^{-\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}},\quad N(r) = \left[\frac{\sqrt{r}}{\pi}\right] \sim \frac{\sqrt{r}}{\pi}.$$

5. $\nu(r)=0$.

6. $N(r)=0$.

7. $|a_n|r^n$ служит максимальным членом для значений r, превосходящих все числа

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right|^{\frac{1}{n}},\quad \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{\frac{1}{n-1}},\ \ldots,\ \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|.$$

8. По основной теореме алгебры и вследствие того, что при $|z|\to\infty$ модуль полинома $\sim|a_n|\,|z|^n$.

9. Что второй предел равен бесконечности, вытекает из I 119, I 120. Из неравенства $\mu(r)\geqslant|a_n|r^n$ вытекает, далее, если $a_n\neq 0$, что

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r)}{\ln r}\geqslant n,\quad \text{т. е.}\quad \lim_{r\to\infty}\frac{\ln\mu(r)}{\ln r}=\infty.$$

10. Первую половину утверждения доказываем так же, как первую половину теоремы 9. По поводу второй половины см., например, 2.

11. $\mu_k(r)=\mu_1(r^k)$, $\nu_k(r)=k\nu_1(r^k)$.

Индексом члена a_nz^{nk} считается, естественно, nk.

12. $M_k(r)=M_1(r^k)$, $N_k(r)=kN_1(r^k)$.

13. 1. При $(2n-1)\,2n\leqslant r^2<(2n+1)(2n+2)$

$$\nu(r)=2n\sim r,\quad \mu(r)=\frac{r^{2n}}{(2n)!},$$

$$\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}=-\frac{2n}{r}\,\frac{1}{\frac{1}{r}\left(\ln\frac{1}{r}+\ln\frac{2}{r}+\ldots+\ln\frac{2n}{r}\right)}\sim-\frac{1}{\int\limits_0^1\ln x\,dx}=1.$$

2. При $\frac{(2n-1)\,2n}{4}\leqslant r^2<\frac{(2n+1)(2n+2)}{4}$

$$\nu(r)=2n\sim 2r,\quad \mu(r)=\frac{1}{2}\,\frac{(2r)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}=-\frac{2n}{2r}\,\frac{1}{\frac{1}{2r}\left(\ln\frac{1}{2r}+\ln\frac{2}{2r}+\ldots+\ln\frac{2n}{2r}\right)+\frac{\ln 2}{2r}}\sim-\frac{1}{\int\limits_0^1\ln x\,dx}=1.$$

Казалось бы естественным стараться доказать теорему, содержащую этот пример и по аналогии с 14 звучащую примерно так: «Если $f(z)$ — целая функция и $\mu_k(r)$, соотв. $\nu_k(r)$, — максимальный член, соотв. центральный индекс, разложения $(f(z))^k$ (а не $f(z^k)$, как в 11) по возрастающим степеням z, $k=1, 2, 3, \ldots$, то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\nu_k(r)}{\ln\mu_k(r)}$$

не зависит от k». Однако в такой общей формулировке эта теорема не верна [предел может вовсе не существовать], хотя и верна при некоторых специальных предположениях, например в предположениях теоремы 67 [68]. См. также 59, 60.

14. $M_k(r) = (M_1(r))^k$, $N_k(r) = kN_1(r)$.

15. [19.]

16. $N(r)$ есть числовая функция, см. II, гл. 4, § 1.

17. Пусть $\nu(r_1) = l \geqslant 1$, тогда

$$\mu(r_2) \geqslant |a_l| r_2^l \geqslant |a_l| r_1^{l-1} r_2 = \mu(r_1)\frac{r_2}{r_1}.$$

18. [III 280.]

19. Так как максимальный член существует, то существуют точки, заключающиеся одновременно во всех полуплоскостях $\eta \geqslant n\xi + \ln|a_n|$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Множество $\mathfrak{G}$ этих точек простирается в бесконечность и как общая часть бесконечного множества выпуклых областей (именно полуплоскостей) само представляет собой выпуклую область. Эту область ограничивает снизу полигон с уравнением $\eta = \ln\mu(e^\xi)$. Правая производная $\frac{d \ln \mu(e^\xi)}{d\xi}$ существует также в вершинах и всюду равна $\nu(e^\xi)$. Производная — кусочно постоянная функция и вследствие выпуклости нигде не убывает. Отсюда следует 15.

20. [III 304.]

21. Пусть $0 < r < r'$. Обе пары точек

$$(\ln \alpha r,\ \ln\mu(\alpha r)),\quad (\ln r',\ \ln\mu(r'))$$

и

$$(\ln r,\ \ln\mu(r)),\quad (\ln \alpha r',\ \ln\mu(\alpha r'))$$

лежат на границе области $\mathfrak{G}$ [решение 19] и притом первая охватывает вторую. Центры соединяющих их отрезков (секущих) имеют общую абсциссу

$$\frac{\ln \alpha r + \ln r'}{2} = \frac{\ln r + \ln \alpha r'}{2},$$

а для ординат вследствие выпуклости [19] имеем

$$\frac{\ln\mu(\alpha r) + \ln\mu(r')}{2} \geqslant \frac{\ln\mu(r) + \ln\mu(\alpha r')}{2}.$$

22. Из 20, как 21 из 19.

23. Для полиномов утверждение очевидно [решение 7]. Для степенных рядов с бесконечным радиусом сходимости $\nu(r)$ должно безгранично возрастать, так как при $m < n$ член $|a_m| r^m$ будет превзойден по величине членом $|a_n| r^n$, как только r станет больше чем

$$\left(\frac{|a_m|}{|a_n|}\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Пусть $\mu(\alpha r) = |a_m|(\alpha r)^m$; тогда $\mu(r) \geqslant |a_m| r^m$ и, следовательно,

$$\frac{\mu(\alpha r)}{\mu(r)} \leqslant \alpha^m.$$

Но $m \to \infty$ при безграничном возрастании r.

24. Искомый предел существует и меньше единицы для каждой целой функции, не сводящейся к постоянной [22]. Если он положителен и равен α^k, где k — надлежащим образом выбранное число, $k > 0$, то тогда $\frac{M(\alpha^{-n+1})}{M(\alpha^{-n})} \geqslant \alpha^k$ и, значит,

$$M(\alpha^{-n}) \leqslant \alpha^{-nk} M(1) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Но это показывает, что целая функция представляет собой полином степени $\leqslant k$ [8, 10]. Для полиномов утверждение очевидно.

25. Среди чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots$ будет равно нулю $\nu(0)$, т. е. ни одно, если $\nu(0) = 0$. Пусть ξ_0 есть абсцисса вершины полигона, ограничивающего $\mathfrak{G}$ [решение 19], в которой сходятся стороны с угловыми коэффициентами m и n, $m < n$. Тогда $\rho_{m+1} = \rho_{m+2} = \ldots$ $\ldots = \rho_{n-1} = \rho_n = e^{\xi_0}$, и $|a_n| r^n$ служит максимальным членом между рассматриваемой вершиной и ближайшей соседней справа.

26. Среди чисел $r_1, r_2, \ldots$ будет равно нулю $N(0)$, т. е. ни одно, если $N(0) = 0$. См. 16.

27. $\rho_n = n$, $\rho_n = 2n(2n+1)$, $\rho_{2n-1} = \rho_{2n} = \sqrt{(2n-1)2n}$.

28. $w_1 = -\frac{\pi i}{2}$, $w_2 = \frac{3\pi i}{2}$, $w_3 = -\frac{5\pi i}{2}, \ldots$, $r_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$;

$$w_n = r_n = n^2\pi^2; \quad r_{2n-1} = r_{2n} = (2n-1)\frac{\pi}{2}.$$

29. Имеем $\rho_n \leqslant R$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. В интервале $[0, r]$, $r < R$, лежит лишь конечное число, а именно $\nu(r)$ членов последовательности $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ Точкой сгущения этой последовательности может быть только правый конец интервала $(0, R)$.

30. Последовательность нулей не может иметь точки сгущения внутри круга сходимости.

31. Доказательство проводим методом математической индукции, рассматривая последовательно интервалы, на которые разбивают числовую прямую точки $\rho_1, \rho_2, \ldots$ Для $0 \leqslant r < \rho_1$ имеем $\mu(r) = |a_0|$. Пусть $0 \leqslant m < n$ и роль наибольшего члена переходит от $|a_m| r^m$ к $|a_n| r^n$. Допустим, что в интервале $\rho_m \leqslant r < \rho_{m+1}$

$$\mu(r) = \frac{|a_0| r^m}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m} = |a_m| r^m,$$

и, значит, $|a_m| = \frac{|a_0|}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_m}$. Так как $|a_n| r^n$ вступает в роль наибольшего члена в точке $r = \rho_{m+1} = \rho_{m+2} = \ldots = \rho_{n-1} = \rho_n$ [25], то,

следовательно,

$$\mu(\rho_{m+1}) = |a_m|\rho_{m+1}^m = |a_n|\rho_n^n = |a_n|\rho_{m+1}^m\rho_{m+1}\rho_{m+2}\ldots\rho_n,$$

$$|a_n| = \frac{|a_m|}{\rho_{m+1}\rho_{m+2}\ldots\rho_n} = \frac{|a_0|}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_m\rho_{m+1}\ldots\rho_n}$$

и $\mu(r) = |a_n| r^n$ для $\rho_n \leqslant r < \rho_{n+1}$, ч. и тр. д.

32. Неравенство Иенсена [III 120]. Равенство не может достигаться ни для какой не тождественно постоянной целой функции.

33. Это достигается интегрированием (с некоторыми предосторожностями) соотношения

$$r\frac{d\ln\mu(r)}{dr} = \nu(r),$$

доказанного в решении **19**.

34. Равносильно теореме 32, так как вследствие II **147**

$$\int_0^r \frac{N(t)}{t}\,dt = N(r)\ln r - \int_0^r \ln r\,dN(r).$$

35. Обозначим предел слева через α, предел справа — через β и примем сначала, что α конечно. Пусть $\varepsilon > 0$. При достаточно больших r имеем $\nu(r) < r^{\alpha+\varepsilon}$, далее $|a_{\nu(r)}| < 1$, следовательно,

$$\mu(r) < r^{\nu(r)} < r^{r^{\alpha+\varepsilon}},$$

$$\frac{\ln\ln\mu(r)}{\ln r} < \alpha + \varepsilon + \frac{\ln\ln r}{\ln r}.$$

Отсюда $\beta \leqslant \alpha$. Но, с другой стороны [33],

$$\int_r^{2r} \frac{\nu(t)}{t}\,dt = \ln\mu(2r) - \ln\mu(r).$$

Для достаточно больших r $\mu(r) > 1$, следовательно,

$$\nu(r)\ln 2 < \ln\mu(2r),$$

т. е. $\alpha \leqslant \beta$. Если α бесконечно, то первая половина доказательства излишня.

36. См. вторую половину доказательства теоремы 35. [34.]

37. Пусть $a_0 = 1$. Имеем [33, II **147**]

$$-r^{-k}\nu(r) + \sum_{0 < \rho_\nu \leqslant r} \rho_\nu^{-k} = k\int_0^r t^{-k-1}\nu(t)\,dt = k\int_0^r t^{-k}\,d\ln\mu(t) =$$

$$= kr^{-k}\ln\mu(r) + k^2\int_0^r t^{-k-1}\ln\mu(t)\,dt.$$

Если интеграл $\int\limits_1^\infty t^{-k-1}\ln\mu(t)\,dt$ сходится, то $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-k}\ln\mu(r)=0$ [II 113], и, значит, сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\rho_\nu^{-k}-\rho_n^{-k})$ ограничена [I 78]. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_n^{-k}$ сходится, то доказательство проще.

38. [G. Valiron, Bull. d. Sciences Math., серия 2, т. 45, стр. 258—270, 1921.] В предположении $f(0)=1$ и обозначениях задачи III **121** получаем, как в 37,

$$-r^{-k}N(r)+\sum_{0<r_\nu\leqslant r} r_\nu^{-k}=kr^{-k}\ln\mathfrak{G}(r)+k^2\int\limits_0^r t^{-k-1}\ln\mathfrak{G}(t)\,dt.$$

Из неравенства $\mathfrak{G}(r)\leqslant M(r)$ заключаем, как в 37.

39.

$$-(1-r)^{k+1}\nu(r)+\sum_{\rho_\nu\leqslant r}(1-\rho_\nu)^{k+1}=$$

$$=(k+1)\int\limits_0^r(1-t)^k\nu(t)\,dt\quad [\text{II } \mathbf{147}],$$

$$(1-r)^k\ln\mu(r)+k\int\limits_0^r(1-t)^{k-1}\ln\mu(t)\,dt=\int\limits_0^r(1-t)^k t^{-1}\nu(t)\,dt\quad [33].$$

Пусть $a_0=1$. Интегралы в правых частях одинаково ведут себя при $r\to 1$. Если второй из них сходится, то

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^k\ln\mu(r)=0$$

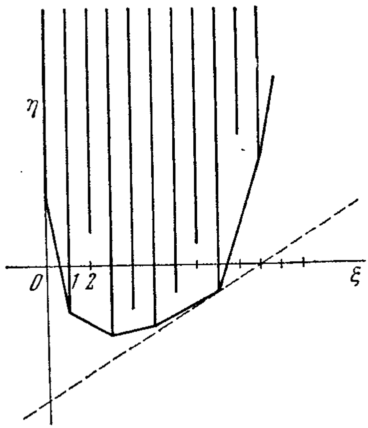
[II **112**] и сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{n}[(1-\rho_\nu)^{k+1}-(1-\rho_n)^{k+1}]$ ограничена [I 78].

40. [F. и R. Nevanlinna, Acta Soc. Sc. Fennicae, т. 50, № 5, 1922.] Так же относится к 39, как 38 к 37.

41. [J. Hadamard, Journ. de Math., серия 4, т. 9, стр. 174, 1893.] Прямая, проходящая через точку $(n, -\ln|a_n|)$ с угловым коэффициентом $\ln r$, имеет уравнение

$$\eta=-\ln|a_n|+(\xi-n)\ln r$$

и отсекает на оси η отрезок $-\ln(|a_n|r^n)$. Среди всех этих прямых опорная прямая пересекается с вертикальной осью в наиболее низкой точке. Следовательно, отрезок этой прямой на вертикальной оси равен $-\ln\mu(r)$, абсцисса вершины, в которой опорная прямая касается области $\mathfrak{K}$ (или самой правой из этих вершин, если их имеется несколько), равна $\nu(r)$, угловой коэффициент граничного отрезка области $\mathfrak{K}$, заключающегося между абсциссами $n-1$ и n, равен $\ln\rho_n$. Из рисунка явствует, что $\ln\rho_{n+1}\geqslant\ln\rho_n$ и что при $a_0\neq 0$



$$-\ln|a_n|=-\ln|a_0|+ \\ +\ln\rho_1+\ln\rho_2+\ldots+\ln\rho_n,$$

если точка $(n,\ -\ln|a_n|)$ лежит на границе области $\mathfrak{K}$ [31]; если опорная прямая поворачивается вокруг вершины с абсциссой n так, что ее угловой коэффициент изменяется от $\ln\rho_n$ до $\ln\rho_{n+1}$, то тогда $\ln\mu(\rho_{n+1})-\ln\mu(\rho_n)=$ $=n(\ln\rho_{n+1}-\ln\rho_n)$, и т. д.

42. $|a_m|r^m$ вступает в роль наибольшего члена, начиная с наименьшего значения r, удовлетворяющего неравенствам

$$|a_0|\leqslant|a_m|r^m,\quad |a_1|r\leqslant|a_m|r^m,\ \ldots,\ |a_{m-1}|r^{m-1}\leqslant|a_m|r^m.$$

Это значение r равно, следовательно, ρ_m. На рисунке решения 41 угловые коэффициенты

$$\frac{-\ln|a_n|+\ln|a_0|}{n-0},\quad \frac{-\ln|a_n|+\ln|a_1|}{n-1},\ \ldots,\ \frac{-\ln|a_n|+\ln|a_{n-1}|}{n-(n-1)}$$

все не превосходят угловой коэффициент $\ln\rho_n$.

43. Раз a_0 служит максимальным членом для некоторого r $(r>0)$, то $a_0\neq 0$. Тогда, как было показано в решении 31,

$$|a_n|=\frac{|a_0|}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n},\quad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\rho_{n+1}\geqslant\rho_n=\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

На рисунке решения 41 все точки $(n,\ -\ln|a_n|)$ лежат на границе, неравенство

$$\frac{-\ln|a_{n-1}|-\ln|a_{n+1}|}{2}\geqslant-\ln|a_n|$$

выражает выпуклость.

44. Кривая $y=\alpha^{-1}x^\alpha$, $x>0$, выпукла сверху, так как $y''=$ $=(\alpha-1)x^{\alpha-2}<0$; отсюда вытекает [43] утверждение относительно

$\nu(r)$. Выражение $\alpha^{-1}x^{\alpha}+x\ln r$, где x — переменная, $x>0$ и фиксировано, достигает своего максимума при

$$x=(-\ln r)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \tag{*}$$

и в этой точке равно

$$(\alpha^{-1}-1)\,x^{\alpha}=(\alpha^{-1}-1)(-\ln r)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Если, стало быть, (*) принимает целое значение n, то n-й член равен $e^{(\alpha^{-1}-1)\,n^{\alpha}}$ и является максимальным [второе доказательство утверждения относительно $\nu(r)$], и приведенное для $\mu(r)$ асимптотическое значение является точным (в противном случае оно несколько больше точного значения $\mu(r)$). Что асимптотическое равенство имеет место, следует из соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{(\alpha^{-1}-1)\,(n+1)^{\alpha}}}{e^{(\alpha^{-1}-1)\,n^{\alpha}}}=1.$$

45. Полагаем $-\ln r=\tau$ и сравниваем рассматриваемый ряд с интегралом

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha^{-1}x^{\alpha}-\tau x}\,dx\sim\sqrt{\frac{2\pi}{1-\alpha}}\,\tau^{-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}-1}\exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right) \quad [\text{II } 208].$$

Переход от ряда к интегралу дает ошибку порядка максимального члена ряда [см. II 8]; отношение этого последнего к интегралу имеет порядок $\tau^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}+1}$ [44]; этим и обосновывается указанный переход.

46. Кривая $y=\alpha x\ln x$ выпукла снизу, так как $y''=\frac{\alpha}{x}>0$. Выражение $-\alpha x\ln x+x\ln r$, где x — переменная, $x>0$, и r фиксировано, достигает максимума при $\alpha(1+\ln x)=\ln r$. Если x при этом принимает целое значение, равное n, то n-й член является максимальным. Если же $x=n+t$, $0\leqslant t\leqslant 1$, то

$$r=(e\,(n+t))^{\alpha},$$

$$n^{-n\alpha}r^{n}=e^{n\alpha}(1+tn^{-1})^{n\alpha}\sim e^{\alpha\,(n+t)}=\exp\left(\alpha e^{-1}r^{\frac{1}{\alpha}}\right);$$

$$\rho_n=\frac{n^{n\alpha}}{(n-1)^{(n-1)\alpha}}\sim(ne)^{\alpha} \quad [34.]$$

47. [46, 45, II 209.]

48. Достаточно исследовать рассматриваемый ряд в одной лишь точке, например $z=0$ [III 251]. Пусть $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$; тогда нужно исследовать ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$. Имеем

$$|a_n|<n!\frac{M(r)}{r^n}.$$

а) Пусть $l<1$, т. е. $M(r)<Ae^{(l+\varepsilon)r}$, $A>0$, $\varepsilon>0$, $l+\varepsilon<1$. Для $r=\frac{n}{l+\varepsilon}$ получаем

$$|a_n|<An!\left(\frac{e}{n}\right)^n(l+\varepsilon)^n,$$

и, следовательно [I 69], ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится. Значение r следует подобрать таким образом, чтобы функция $An!\,r^{-n}e^{(l+\varepsilon)r}$ обращалась в минимум.

б) Если $l>1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ не может сходиться. В противном случае мы имели бы $|a_n|<K$, следовательно, $|f(z)|<Ke^{|z|}$, что противоречит предположению $l>1$.

в) Если $l=1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ может как сходиться, так и расходиться. Выберем, например, a_n так, чтобы $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ сходился. Тогда $l\leqslant 1$ [б)], далее $M(r)>\frac{a_n}{n!}r^n$ для всех n. При $n=[r]$ получаем, что $l\geqslant 1$, т. е. $l=1$. Выберем, с другой стороны, a_n так, чтобы $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ расходился. Тогда $l\leqslant 1$ [б)], далее $l\geqslant 1$ [а)], следовательно, $l=1$.

49. $N(r)$ равно числу целых точек в круге $|z|\leqslant r$. Имеем $\omega_1=1$, $\omega_2=i$; так как iw пробегает одновременно с w все периоды, то

$$\sigma(iu)=i\sigma(u); \qquad (*)$$

$$\sigma(u+1)=-e^{\eta_1\left(u+\frac{1}{2}\right)}\sigma(u), \qquad \sigma(u+i)=-e^{\eta_2\left(u+\frac{1}{2}i\right)}\sigma(u).$$

Заменяя в первом уравнении u на $iu-1$ и умножая полученное таким образом уравнение на второе, получаем

$$\sigma(iu)\,\sigma(u+i)=e^{(\eta_1 i+\eta_2)\,u+\frac{1}{2}(-\eta_1+i\eta_2)}\,\sigma[i(u+i)]\,\sigma(u).$$

Отсюда вследствие равенств (*) и $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=2\pi i$ получаем последовательно

$$\eta_1=i\eta_2=\pi,$$

и для любых целых чисел m_1, m_2

$$\sigma(u+m_1+im_2)=\pm\sigma(u)\,e^{\pi(m_1-im_2)\,u+\frac{\pi}{2}(m_1^2+m_2^2)}.$$

Ограничимся значениями $u\neq 0$, лежащими в параллелограмме периодов, охватывающем точку $u=0$. Полагая $z=u+m_1+im_2$ и беря $m_1^2+m_2^2\to\infty$, будем иметь

$$|z|^2\sim m_1^2+m_2^2,\qquad \ln|\sigma(z)|\sim\frac{\pi}{2}|z|^2.$$

50. Чтобы вычислить $\mu(r)$ для $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, замечаем, что если r и n связаны неравенствами

$$2n\sqrt{1+\frac{1}{2n}}\leqslant\sqrt{r}<2n\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)}\qquad(*)$$

и положено $\sqrt{r}=2n+t$, то при безграничном возрастании n t остается ограниченным. В интервале (*) в силу 3

$$\mu(r)=\frac{\sqrt{r}^{\,2n}}{(2n+1)\cdot(2n)!}\sim\frac{\sqrt{r}^{\,2n}}{2n\cdot\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2n)^{-\frac{3}{2}}e^{\sqrt{r}}\left(1+\frac{t}{2n}\right)^{2n}e^{-t};$$

$$\mu(r)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}r^{-\frac{3}{4}}e^{\sqrt{r}},\quad \ln\mu(r)\sim\sqrt{r}.$$

	$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$	$\cos z$	$(\cos z)^2$	e^z+i	e^z	$\sigma(z)$
$\frac{r_n}{\rho_n}$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	—	—
$\frac{N(r)}{\nu(r)}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	0	—
$\frac{N(r)}{\ln M(r)}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	0	2
$\frac{\nu(r)}{\ln\mu(r)}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	—
$\frac{M(r)}{\sqrt{2\pi\ln\mu(r)}\,\mu(r)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	—
$\frac{\ln N(r)}{\ln r}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	—	2

Выступающие в этой таблице зависимости частично разъясняются последующими теоремами.

51. $\mu(r)\leqslant M(r)$ [определение]. Если $\limsup\limits_{r\to\infty}\frac{\ln\ln\mu(r)}{\ln r}=\lambda$, λ конечно, $\lambda<\beta$, то для достаточно больших ρ $|a_n|\rho^n\leqslant\mu(\rho)<e^{\rho^\beta}$, следовательно [решение 48, а)], беря $\rho=\left(\frac{n}{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, будем иметь для достаточно больших n $|a_n|<\left(\frac{e\beta}{n}\right)^{\frac{n}{\beta}}$, $|a_n|r^n<\left(\frac{e\beta r^\beta}{n}\right)^{\frac{n}{\beta}}$. Положим $2e\beta=k$; тогда [1])

$$M(r)\leqslant\sum_{n=0}^{kr^\beta}|a_n|r^n+\sum_{n=kr^\beta+1}^{\infty}|a_n|r^n<(kr^\beta+1)\mu(r)+\sum_{n=kr^\beta}^{\infty}2^{-\frac{n}{\beta}}.$$

[1]) В настоящей главе под $\sum\limits_{n=a}^{b}c_n$ при любых a и b, $a\leqslant b$, как целых, так и нецелых, понимается $\sum\limits_{n=[a]}^{[b]}c_n=c_{[a]}+c_{[a]+1}+\ldots+c_{[b]-1}+c_{[b]}$.

52. [51, 35, II 149, I 113.]

53. Если порядок равен λ, то согласно решению 51 при $\varepsilon > 0$ и достаточно больших r

$$rf'(r) = \left(\sum_{n=1}^{kr^{\lambda+\varepsilon}} + \sum_{n=kr^{\lambda-\varepsilon}+1}^{\infty}\right) na_n r^n <$$

$$< kr^{\lambda+\varepsilon} \sum_{n=0}^{kr^{\lambda+\varepsilon}} a_n r^n + \sum_{n=kr^{\lambda+\varepsilon}+1}^{\infty} n \cdot 2^{-\frac{n}{\beta}} < kr^{\lambda+\varepsilon} f(r) + k',$$

где k, k' — постоянные, откуда

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln(rf'(r) f(r)^{-1})}{\ln r} \leqslant \lambda + \varepsilon,$$

где ε сколь угодно мало. Если, с другой стороны, при $r > r_0$ $rf'(r) f(r)^{-1} < r^\beta$, то интегрированием получаем, что при $r > r_0$

$$\ln f(r) < \frac{r^\beta}{\beta} + C,$$

где C — некоторая постоянная.

54. При достаточно больших r имеем

$$\mu(r) < M(r) < kr^{\lambda+\varepsilon} \mu(r),$$

где λ — порядок и $\varepsilon > 0$ [решение 51].

55. Пусть σ выбрано так, что $\sigma(l-1) > 1$. При достаточно больших t имеем $M(t) > t^\sigma$ [10], следовательно,

$$\mu(t) M(t)^{-l} \leqslant M(t)^{1-l} < t^{-\sigma(l-1)}.$$

По поводу $l = 1$ ср. частный случай $f(z) = e^z$. В этом случае интеграл в III 156 расходится.

56. [A. Wiman, l. c. 1.] Как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существуют такие степенные ряды

$$1 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots + b_n r^n + \ldots$$

с конечным радиусом сходимости и положительными коэффициентами b_n, что, обозначая через n центральный индекс, имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu y^\nu}{b_n y^n} < [\ln(b_n y^n)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

при всех положительных значениях y, достаточно близких к границе круга сходимости [45]. Для целой функции $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (предполагая, что $a_0=1$) в точке r, с которой сопряжено y в смысле I **122**, выполняется неравенство

$$\frac{|a_\nu| r^\nu}{|a_n| r^n} \leqslant \frac{b_\nu y^\nu}{b_n y^n}$$

для всех $\nu=0, 1, 2, \ldots$; значит, в частности, для $\nu=0$

$$b_n y^n \leqslant |a_n| r^n;$$

в такой точке r и выполняется требуемое неравенство. Предположение $a_0=1$ не нарушает общности.

57. [A. Wiman, l. c. 1.] Пусть $\lambda<\beta<\lambda+\varepsilon=\frac{1}{\alpha}$. Тогда [52] для достаточно больших n

$$\ln n<\beta \ln \rho_n,$$

следовательно,

$$\rho_n n^{-n\alpha}(n-1)^{(n-1)\alpha} \sim \rho_n e^{-\alpha} n^{-\alpha} > n^{\frac{1}{\beta}-\alpha} e^{-\alpha} \to \infty.$$

Утверждение вытекает теперь из I **118** и **47** таким же образом, как **56** из I **122** и **45**.

58. Пусть

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln N(r)}{\ln r}=\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln r_n}=\lambda \qquad [\text{II } \mathbf{149}];$$

тогда $\lambda \leqslant 1$. Из **51**, **36** явствует, что порядок $\geqslant \lambda$. Что он вместе с тем $\leqslant \lambda$, показываем следующим образом. Имеем

$$M(r) \leqslant |c| r^q \prod_{n=q+1}^{\infty}\left(1+\frac{r}{r_n}\right).$$

Если $\lambda=1$, то по задании положительного ε выбираем целое число N так, чтобы $N>q$, $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{r_n}<\varepsilon$. Тогда

$$M(r)<|c| r^q \prod_{n=q+1}^{N}\left(1+\frac{r}{r_n}\right) \cdot e^{\varepsilon r}, \quad \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leqslant 1.$$

Если $\lambda<1$, то выбираем столь малое положительное η, что $\lambda+\eta<1$; тогда [I **113**] для достаточно большого n $\frac{1}{r_n}<\frac{1}{n^{\frac{1}{\lambda+\eta}}}$.

К логарифму функции $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{r}{n^{\frac{1}{\lambda+\eta}}}\right)$ применяем II **37**.

59. [По поводу 59—63 см. также G. Pólya, Math. Ann., т. 88, стр. 177—183, 1923.] Мы можем, нисколько не нарушая общности, принять как здесь, так и в задачах 60—65, что $f(0)=1$. Тогда имеем [31, II 159]

$$\frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)}=\frac{1}{\nu(r)}\sum_{\rho_n\leqslant r}\ln\frac{r}{\rho_n}\sim\int_0^1\ln x^{-\frac{1}{\lambda}}\,dx.$$

Примеры в **13**.

60. Как 59; вместо II 159 применяем II 160.

61. $$\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{re^{i\vartheta}}{r_n}\right)\sim\int_0^{\infty}\ln\left(1+x^{-\frac{1}{\lambda}}e^{i\vartheta}\right)dx.$$

62. Как 61; применяем II 161 вместо II 159:

$$\frac{\ln M(r)}{N(r)}\leqslant\frac{1}{N(r)}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{r_n}\right).$$

63. Согласно 32

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{N(r)}\geqslant\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant r}\ln\frac{r}{r_n}\geqslant\int_0^1\ln x^{-\frac{1}{\lambda}}dx\ [\text{II } 160].$$

64. Согласно III 121

$$\left(\frac{\mathfrak{g}(r)}{\mathfrak{G}(r)}\right)^{\frac{1}{N(r)}}=e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2N(r)}\sum\limits_{r_n\leqslant r}\left(\frac{r_n}{r}\right)^2}.$$

Но в силу II 159

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N(r)}\sum_{r_n\leqslant r}\left(\frac{r_n}{r}\right)^2=\int_0^1 x^{\frac{2}{\lambda}}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+2}.$$

Для полиномов сумма $\sum\limits_{r_n\leqslant r} r_n^2$ остается ограниченной.

65. Как 64; вместо II 159 применяем II 160.

66. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$; тогда [III 122, III 130]

$$\mathfrak{M}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n},\qquad \mathfrak{m}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2r^{2n}}{n+1}.$$

Положим $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}z^{2n+2}$; $g(z)$ будет того же порядка λ, что и $f(z)$, так как

$$\frac{r^2[\mu(r)]^2}{\nu(r)+1}<g(r)<r^2[M(r)]^2$$

[35, 51]; применяем 53 к

$$\frac{\mathfrak{M}(r)}{\mathfrak{m}(r)}=\frac{rg'(r)}{2g(r)}.$$

67. 1) $|a_n|<r^{-n}M(r)<r^{-n}e^{br^{\alpha}}$, если только $r>r_0$, где r_0 не зависит от n. Правая часть достигает своего минимума $\left(\frac{\alpha be}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}$ при $r=\left(\frac{n}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2) Приводим доказательство для случая произвольного положительного k и при достаточно малом ε. (Этого вполне достаточно!) По предположению,

$$e^{\alpha(1-\varepsilon^3)r^{\alpha}}<M(r)<e^{\alpha(1+\varepsilon^4)r^{\alpha}}. \qquad (*)$$

Отсюда и из неравенства

$$|a_0|^2+|a_1|^2r^2+|a_2|^2r^4+\ldots\leqslant[M(r)]^2$$

[III 122] вытекает [II 80]

$$\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|r^n\right)^2\leqslant\sum_{n=1}^{m}1\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2r^{2n}<me^{2a(1+\varepsilon^4)r^{\alpha}},$$

$$\sum_{n=1}^{m}|a_n|n^kr^n<m^{k+\frac{1}{2}}e^{a(1+\varepsilon^4)r^{\alpha}}. \qquad (**)$$

Положим для сокращения

$$\sum_{1}^{\alpha ar^{\alpha}(1-\varepsilon)}=\sum\nolimits^{\mathrm{I}},\quad \sum_{\alpha ar^{\alpha}(1+\varepsilon)}^{3\alpha ar^{\alpha}}=\sum\nolimits^{\mathrm{II}},\quad \sum_{3\alpha ar^{\alpha}}^{\infty}=\sum\nolimits^{\mathrm{III}}.$$

Из этого определения и (**) вытекает, что при достаточно больших r, когда $(6\alpha ar^{\alpha})^{k+\frac{1}{2}}<\exp[a(\varepsilon^3-\varepsilon^4)r^{\alpha}]$,

$$\sum\nolimits^{\mathrm{I}}|a_n|n^kr^n<e^{a(1+\varepsilon^3)r^{\alpha}},\quad \sum\nolimits^{\mathrm{II}}|a_n|n^kr^n<e^{a(1+\varepsilon^3)r^{\alpha}},$$

где суммы в левых частях можно было бы взять от любой неотрицательной нижней границы до любой верхней, не превосходящей $6\alpha ar^{\alpha}$. Поэтому мы можем (что имеет решающее значение) заменить r в обеих частях неравенств — в первом на $r(1-\lambda)$, во втором — на $r(1+\lambda)$ (λ — фиксированное число, $0<\lambda<1$), не меняя границ суммирования. Это дает

$$(1-\lambda)^{\alpha a r^{\alpha}(1-\varepsilon)} \sum\nolimits^{\mathrm{I}} |a_n| n^k r^n < e^{a(1+\varepsilon^3)(1-\lambda)^{\alpha} r^{\alpha}};$$
$$(1+\lambda)^{\alpha a r^{\alpha}(1+\varepsilon)} \sum\nolimits^{\mathrm{II}} |a_n| n^k r^n < e^{a(1+\varepsilon^3)(1+\lambda)^{\alpha} r^{\alpha}}.$$

Отсюда, привлекая первое (до сих пор не использованное) из неравенств (*), получаем

$$[M(r)]^{-1} \sum\nolimits^{\mathrm{I}} |a_n| n^k r^n <$$
$$< \exp[-a(1-\varepsilon^3) r^{\alpha} + a(1+\varepsilon^3)(1-\lambda)^{\alpha} r^{\alpha} - \alpha a r^{\alpha}(1-\varepsilon)\ln(1-\lambda)],$$
$$[M(r)]^{-1} \sum\nolimits^{\mathrm{II}} |a_n| n^k r^n <$$
$$< \exp[-a(1-\varepsilon^3) r^{\alpha} + a(1+\varepsilon^3)(1+\lambda)^{\alpha} r^{\alpha} - \alpha a r^{\alpha}(1+\varepsilon)\ln(1+\lambda)].$$

Но разложение по возрастающим степеням ε и λ дает

$$-(1-\varepsilon^3)+(1+\varepsilon^3)(1\mp\lambda)^{\alpha}-\alpha(1\mp\varepsilon)\ln(1\mp\lambda)=$$
$$=\frac{\alpha^2}{2}\lambda^2-\alpha\lambda\varepsilon+\ldots=-\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots<0,$$

если только $\alpha\lambda=\varepsilon$ и ε столь мало, что разложение сходится и знак суммы ряда определяется знаком члена наинизшей степени.

Тем самым доказательство, поскольку речь идет о $\sum^{\mathrm{I}}$ и $\sum^{\mathrm{II}}$, завершено. $\sum^{\mathrm{III}}$ не играет никакой роли. Действительно, если $e<3h<3$, $3ah=be$, имеем на основании 1)

$$\sum\nolimits^{\mathrm{III}} n^k |a_n| r^n < \sum\nolimits^{\mathrm{III}} n^k \left(\frac{\alpha b e r^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}} = \sum\nolimits^{\mathrm{III}} n^k \left(\frac{3\alpha a r^{\alpha}}{n}h\right)^n < \sum\nolimits^{\mathrm{III}} n^k h^n,$$

что при $r\to\infty$ как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю.

68. Пусть имеет место соотношение (1). Тогда функция будет конечного порядка [51], откуда вытекает (2) [54]. Соотношение (3) также должно выполняться; действительно, если бы $\nu(r)$ для произвольно больших значений r выходило за границы $\alpha a r^{\alpha}(1-\varepsilon)$ и $\alpha a r^{\alpha}(1+\varepsilon)$, то для этих значений должно было бы выполняться также неравенство $\ln\mu(r)<\ln M(r)-\delta r^{\alpha}$ [67], в противоречие с (2).

Если имеет место (2), то функция будет конечного порядка [51], откуда вытекает (1) [54].

Если, наконец, имеет место (3), то, предполагая, что $a_0\neq 0$ (это нисколько не нарушает общности), выводим (2) с помощью 33.

69. 1) a_n убывает. Пусть

$$m-1\leqslant\alpha a r^{\alpha}(1-\varepsilon)<m<n<\alpha a r^{\alpha}(1+\varepsilon)\leqslant n+1,$$

где $0<\varepsilon<1$, тогда согласно **67** 2) при достаточно больших r

$$0<f(r)-\sum_{\nu=m}^{n} a_\nu r^\nu<\varepsilon f(r),$$

$$a_m r^n \cdot 2\varepsilon\alpha a r^\alpha > f(r)(1-\varepsilon), \quad a_n r^m \cdot 2\varepsilon\alpha a r^\alpha < f(r)(1+\varepsilon).$$

Замечая еще, что $\ln r \sim \frac{1}{\alpha}\ln m \sim \frac{1}{\alpha}\ln n$ и $\frac{m}{1-\varepsilon}\sim\frac{m}{1+\varepsilon}$, получаем отсюда

$$\liminf_{m\to\infty}\frac{\ln a_m}{m\ln m}\geqslant-\frac{1}{\alpha}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n\ln n}\leqslant-\frac{1}{\alpha}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

2) Если $\frac{a_1}{a_0}\geqslant\frac{a_2}{a_1}\geqslant\frac{a_3}{a_2}\geqslant\ldots$, то всякий член $a_n r^n$ для надлежащего значения r становится максимальным членом **[43]**. Отсюда следует, что в выражении $\ln\left(n^{\frac{1}{\alpha}}a_n^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{\alpha}\ln n+\frac{1}{n}\ln a_n$, подлежащем исследованию, число n можно заменить на $\nu(r)$. Так как $a_{\nu(r)}r^{\nu(r)}=\mu(r)$, то согласно **68** имеем

$$\frac{1}{\alpha}\ln\nu(r)+\frac{1}{\nu(r)}\ln a_{\nu(r)}=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\nu(r)}{r^\alpha}+\frac{\ln\mu(r)}{\nu(r)}\to\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha a)+\frac{1}{\alpha}.$$

70. Как в $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n r^n$, так и в $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ центральная часть, т. е. сумма членов с индексами, заключенными между $\alpha a r^\alpha(1-\varepsilon)$ и $\alpha a r^\alpha(1+\varepsilon)$, главенствует над всей остальной частью ряда **[67]**.

71. Частный случай теоремы **70**: $k=1$. Без предположения регулярности получаем **53**.

72. Из I **94** и **70**:

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n}{(\beta b r^\beta)^k\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n r^n}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k b_n r^n}\cdot\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k b_n r^n}{(\beta b r^\beta)^k\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n r^n}.$$

73. Заменяя r на $\sqrt{r}$, приходим к **72**:

$$a_n=\frac{1}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}}, \quad b_n=\frac{1}{(2n)!}, \quad f(r)=\cos i\sqrt{r}\sim\frac{e^{\sqrt{r}}}{2},$$

$$\beta=\frac{1}{2}, \quad b=1, \quad k=-\frac{1}{2}, \quad s=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

В самом деле, согласно формуле Стирлинга [II **205**, также II **202**]

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n}}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

74. Положим $\omega = e^{\frac{2\pi}{l}}$. Тогда при $x \to +\infty$

$$1 + \frac{x^l}{l!} + \frac{x^{2l}}{(2l)!} + \frac{x^{3l}}{(3l)!} + \ldots = \frac{e^x + e^{\omega x} + e^{\omega^2 x} + \ldots + e^{\omega^{l-1} x}}{l} \sim \frac{1}{l} e^x.$$

Берем $x = lr^{\frac{1}{l}}$. Имеем [II 31]

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} n^{a-1} n!;$$

следовательно, с помощью формулы Стирлинга находим

$$\frac{P(1)P(2)\ldots P(n)(nl)!}{Q(1)Q(2)\ldots Q(n)l^{nl}} \sim \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_p)} (2\pi)^{\frac{1-l}{2}} l^{\frac{1}{2}} n^{\Delta + \frac{l+1}{2}}.$$

Применяем теперь **72**.

75. На основании вычислений, проведенных в решении **74**, а также формулы Стирлинга и I **94** получаем

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(1)P(2)\ldots P(n)}{Q(1)Q(2)\ldots Q(n)} r^n \sim$$

$$\sim \frac{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_p)} (2\pi)^{-\frac{l}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\Delta + \frac{l}{2}} \left(\frac{er^{\frac{1}{l}}}{n}\right)^{ln}.$$

Заменяя последний ряд интегралом

$$\int_1^{\infty} x^{\Delta + \frac{l}{2}} \left(\frac{er^{\frac{1}{l}}}{x}\right)^{lx} dx = l^{-\frac{l}{2} - \Delta - 1} \int_l^{\infty} x^{\frac{l}{2} + \Delta + 1} \left(\frac{elr^{\frac{1}{l}}}{x}\right)^x \frac{dx}{x},$$

а этот интеграл на основании II **207** — выражением

$$l^{-\frac{l}{2} - \Delta - 1} \sqrt{2\pi} \left(lr^{\frac{1}{l}}\right)^{\frac{l+1}{2} + \Delta} e^{lr^{\frac{1}{l}}},$$

мы и получаем требуемую формулу. Переход от ряда к интегралу приводит к ошибке порядка максимального члена ряда [II 8]; выражение $\left(er^{\frac{1}{l}} x^{-1}\right)^{lx}$ имеет при фиксированном r максимум $e^{lr^{\frac{1}{l}}}$, максимальный член будет порядка $r^{\frac{2\Delta + l}{2l}} e^{lr^{\frac{1}{l}}}$, и, значит, отношение его к интегралу — порядка $r^{-\frac{1}{2l}}$; тем самым указанный переход обоснован. [45, 47.]

76. Мы можем принять, изменяя для этого, если нужно, лишь конечное число коэффициентов, что $a_0 = 1$, $a_n^2 > a_{n-1} a_{n+1}$

$(n=1, 2, 3, \ldots)$. Тогда [43, 31] $\rho_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ и

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} n \ln\left[1 + \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}a_{n+1}} - 1\right)\right] = \frac{1}{\lambda}.$$

1) $$\frac{\ln \rho_n}{\ln n} \sim \frac{\ln \rho_1 + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} + \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \ldots + \ln \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} \to \frac{1}{\lambda} \quad [\text{I } 70;\ 52].$$

2) Если $\rho_n \leqslant r < \rho_{n+1}$, то

$$\nu(r) = n, \quad \mu(r) = \frac{r^n}{\rho_1\rho_2 \cdots \rho_n}$$

[25, 31] и

$$\frac{\ln \mu(r)}{\nu(r)} = \ln \frac{r}{\rho_n} + \frac{(n-1)\ln \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} + (n-2)\ln \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} + \ldots + 1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}{n} \sim 0 + \frac{1}{\lambda}$$

[I 67].

3) Пусть $\rho_n \leqslant r < \rho_{n+1}$, $l > 0$ (аналогично в случае $l < 0$). Тогда

$$\ln \frac{a_{n+l} r^{n+l}}{a_n r^n} = \ln \frac{r^l}{\rho_{n+1}\rho_{n+2} \cdots \rho_{n+l}} =$$
$$= l \ln \frac{r}{\rho_{n+1}} - (l-1) \ln \frac{\rho_{n+2}}{\rho_{n+1}} - \ldots - \ln \frac{\rho_{n+l}}{\rho_{n+l-1}} \sim$$
$$\sim 0 - \frac{(l-1) + (l-2) + \ldots + 1}{n} \cdot \frac{1}{\lambda} \sim -\frac{x^2}{2\lambda}.$$

Сумма площадей прямоугольников равна

$$\frac{M(r)}{\mu(r)\sqrt{\nu(r)}} \sim \frac{M(r)}{\mu(r)\sqrt{\ln \mu(r)}},$$

площадь под гауссовой кривой равна $\sqrt{2\pi}\,\lambda$; см. 57.

77. Так как производная функции, однолистной в некоторой области, в этой области всюду отлична от нуля, то все нули полинома

$$1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + n a_n z^{n-1}$$

лежат вне единичного круга. Поэтому модуль их произведения больше или равен единице.

78. Пусть z_1 и z_2 — произвольные точки единичного круга $|z| < 1$. Положим $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$. Если $\varphi[f(z_1)] = \varphi[f(z_2)]$, т. е. $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, то должно быть $w_1 = w_2$ и, значит, $z_1 = z_2$.

79. $\varphi(z)$ во всяком случае регулярна в единичном круге $|z| < 1$, ибо в этом круге $\frac{f(z^2)}{z^2}$ регулярна и отлична от нуля.

Кроме того, $\varphi(z)$ — нечетная функция, $\varphi(-z)=-\varphi(z)$. Пусть теперь $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$ для некоторых точек z_1 и z_2 единичного круга $|z|<1$. Тогда $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ и, значит, $z_1^2=z_2^2$. Возможность $z_1=-z_2\neq 0$ отпадает, так как тогда мы имели бы $\varphi(z_1)=-\varphi(z_2)\neq 0$.

80. $[\varphi(z)]^2$ — четная функция, т. е. функция от $z^2=\zeta$; пусть $[\varphi(z)]^2=f(\zeta)$. Пусть теперь для некоторых ζ_1 и ζ_2, $|\zeta_1|<1$, $|\zeta_2|<1$, имеем $f(\zeta_1)=f(\zeta_2)$. Выберем z_1 и z_2, для которых $z_1^2=\zeta_1$, $z_2^2=\zeta_2$. Тогда будем иметь

$$[\varphi(z_1)]^2=[\varphi(z_2)]^2, \quad \varphi(z_1)=\pm\varphi(z_2)=\varphi(\pm z_2),$$

и, значит, $z_1=\pm z_2$, $\zeta_1=\zeta_2$.

81. Примем, что общим центром кругов $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{k}$ служит точка $z=0$. Пусть радиус круга $\mathfrak{K}$ равен R, радиус круга $\mathfrak{k}$ равен r $(r<R)$ и отображение осуществляется функцией

$$w=f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

Имеем [III 124]

$$|\mathfrak{G}|=\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2R^{2n}, \quad |\mathfrak{g}|=\pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2r^{2n}, \quad |\mathfrak{K}|=\pi R^2, \quad |\mathfrak{k}|=\pi r^2,$$

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{g}|}-\frac{|\mathfrak{K}|}{|\mathfrak{k}|}=\frac{r^2R^2\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|^2(R^{2n-2}-r^{2n-2})}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2r^{2n+2}}\geqslant 0.$$

Равенство может иметь место только тогда, когда $a_2=a_3=a_4=\ldots$ $\ldots=0$. Употребленное для $|\mathfrak{G}|$ выражение не содержится в III **124**, так как там предполагалось, что отображающая функция регулярна на границе $\mathfrak{K}$. Однако можно показать путем предельного перехода, что эта формула справедлива в более общих предположениях, представляя так называемую *внутреннюю жорданову меру* области $\mathfrak{G}$. При всяком другом мероопределении теорема была бы подавно справедлива.

82. $$|\mathfrak{G}|=\pi(|a_1|^2R^2+2|a_2|^2R^4+3|a_3|^2R^6+\ldots$$
$$\ldots+n|a_n|^2R^{2n}+\ldots)\geqslant\pi|a_1|^2R^2=\pi a^2R^2.$$

Обозначения и дальнейшие рассуждения, как в **81**.

83. Пусть рассматриваемое круговое кольцо определяется неравенствами $0<r<|z|<R$ и отображение осуществляется функцией

$$w=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_nz^n.$$

Образы всех окружностей $|z|=\text{const.}$ обходятся одновременно с этими окружностями в положительном направлении [III **190**] и содержат $\mathfrak{g}$ в своей внутренней области [решение III 188]. Из III **127** заключаем (площади положительны!):

$$|\mathfrak{G}| = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 R^{2n}, \quad |\mathfrak{g}| = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n}, \quad |\mathfrak{K}| = \pi R^2, \quad |\mathfrak{k}| = \pi r^2,$$

где под $|\mathfrak{G}|$ понимается внутренняя и под $|\mathfrak{g}|$ — внешняя жорданова мера [решение **81**; при других мероопределениях требуемое неравенство выполняется тем более].

Оставляя в стороне случай $|\mathfrak{g}| = 0$, имеем

$$\frac{|\mathfrak{G}|}{|\mathfrak{g}|} - \frac{|\mathfrak{K}|}{|\mathfrak{k}|} = \frac{r^2R^2 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 (R^{2n-2} - r^{2n-2})}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r^{2n+2}} \geqslant 0,$$

ибо при целых значениях n, за исключением 0 и 1, $n(R^{2n-2} - r^{2n-2}) > 0$.

84. Пусть центром рассматриваемого круга служит точка $z = 0$ и отображение осуществляется посредством функции $w = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$

1) Примем, что $f(z)$ непрерывна на границе круга; так как функция $\frac{f(z)}{z}$ внутри круга регулярна и (вследствие взаимной однозначности отображения) отлична от нуля, а на его границе постоянна по модулю, то она является постоянной [III **142**, III **274**].

2) Без ограничивающего общность предположения непрерывности на границе рассуждаем так: согласно 82 в центре круга

$$\left|\left(\frac{dw}{dz}\right)_0\right|^2 = |f'(0)|^2 \leqslant 1,$$

и так как соотношение между z и w взаимно, то также

$$\left|\left(\frac{dz}{dw}\right)_0\right|^2 = \frac{1}{|f'(0)|^2} \leqslant 1,$$

значит, $|f'(0)|^2 = 1$ и, следовательно [82], $f(z) = f'(0)\,z$.

85. Зависимость между обоими круговыми кольцами взаимна. Поэтому в неравенстве задачи 83 в применении к нашему случаю нужно взять знак равенства. Следовательно, отображение представляет поворот вокруг центра и гомотетию или, вследствие совпадения границ, простой поворот. Направление обхода существенно: отображение кругового кольца $\frac{1}{2} < |z| < 2$ на круговое кольцо $\frac{1}{2} < |w| < 2$ посредством соотношения $zw = 1$ не было бы уже простым поворотом.

86. Если бы существовало два отображения, то мы могли бы сначала перейти посредством одного из них от единичного круга к области $\mathfrak{G}$, затем посредством обращения другого — обратно от области $\mathfrak{G}$ к единичному кругу. В совокупности это дало бы отображение единичного круга на самого себя с сохранением центра, т. е. поворот [84] и притом поворот на угол 0, так как $f'(0)>0$.

Доказанное утверждение сохраняет силу и в том случае, если вместо условия $f'(0)>0$ приписать аргументу $f'(0)$ произвольное фиксированное значение.

87. Функция $w=f(z)$ взаимно однозначно отображает единичный круг $|z|<1$ сам на себя, $f(0)=w_0$, $\arg f'(0)=\alpha$. Но то же самое дает линейная функция

$$\frac{w_0+e^{i\alpha}z}{1+\bar{w}_0e^{i\alpha}z}=w_0+(1-|w_0|^2)e^{i\alpha}z+\ldots,$$

следовательно [86], она совпадает с $f(z)$. Полагаем

$$-w_0e^{-i\alpha}=z_0.$$

88. [По поводу 88—96 см. P. Koebe, J. für Math., т. 145, стр. 177—225, 1915; см. также E. Lindelöf, Quatrième congrès des math. scandinaves à Stockholm, 1916, стр. 59—75, Upsala, Almqvist & Wicksells, 1920.] Исключение составляют точки $z=a$ и $z=\frac{1}{\bar{a}}$ (точки разветвления), которым соответствует лишь по одной точке плоскости w, именно $w=\sqrt{a}\,\eta^{-1}$ и $w=\frac{1}{\sqrt{\bar{a}}\,\eta}$. Разрешая относительно z, получаем

$$z=w\eta^2\frac{2\eta^{-1}\sqrt{a}-(1+|a|)w}{1+|a|-2\eta\sqrt{\bar{a}}\,w};$$

таким образом, η нужно выбрать так, чтобы $\eta\sqrt{\bar{a}}>0$. Но одновременная замена $\sqrt{a}$ и η на $-\sqrt{a}$ и $-\eta$ оставляет соотношение в силе.

89. По предположению, $|a|<1$, т. е. $\mathfrak{G}$ не совпадает с кругом $|z|<1$. Если z лежит в единичном круге, то в этом же круге лежат оба образа этой точки z, определенные в задаче 88 [III 5]; они отличны друг от друга, если $z\neq a$. Но образ точки $z=a$, т. е. $w=\sqrt{a}\,\eta^{-1}$ [88], не принадлежит ни $\mathfrak{G}^*$, ни $\mathfrak{G}^{**}$, а является их общей граничной точкой.

90. В настоящем случае выбрано $a>0$; стало быть, $\sqrt{a}>0$, $\eta=1$. Образы w^* и w^{**} точки z служат корнями уравнения

$$(1+a)w^2-2\sqrt{a}(1+z)w+(1+a)z=0.$$

Если z лежит на разрезе, т. е. z вещественно, $a<z<1$, то $(1+a)^2z-(1+z)^2a>0$, стало быть, w^* и w^{**} имеют сопряженные комплексные значения, и так как $w^* w^{**} = z$, то $|w^*| = \sqrt{z}$. Значит, ближайшей к нулю точкой на линии, в которую отображается разрез, служит $\sqrt{a}$. Это и есть искомая ближайшая граничная точка, ибо граничные точки, лежащие на окружности $|z| = 1$, отображаются на точки окружности $|w| = 1$. Область, в которую переходит при отображении Кёбе единичный круг, разрезанный вдоль указанного отрезка, имеет вид лунного серпа; углу в 360° вокруг конца выреза соответствует в области Кёбе угол в 180°.

91. Если образы w_1 и w_2 точек z_1 и z_2 окружности $|z| = a$ равноудалены от нулевой точки, т. е. оба лежат на одной и той же окружности $|w| = \text{const.}$, то из соотношения

$$\frac{w}{z} = \frac{1 + a - 2\sqrt{a}\,w}{2\sqrt{a} - (1 + a)\,w}$$

вытекает, что эти точки w_1 и w_2 лежат также на окружности

$$\left| \frac{1 + a - 2\sqrt{a}\,w}{2\sqrt{a} - (1 + a)\,w} \right| = \text{const.},$$

т. е. служат точками пересечения этих двух окружностей. Тогда точки w_1 и w_2, а также z_1 и z_2 расположены симметрично относительно вещественной оси. Следовательно, когда точка обходит полуокружность $|z| = a$, $\mathfrak{J} z \geqslant 0$ по направлению от $z = +a$ к $z = -a$, то расстояние ее образа w от точки $w = 0$ изменяется монотонно и притом, как это вытекает из последнего уравнения, монотонно убывает. $w = \sqrt{a}$, образ точки $z = +a$, будет наиболее удаленной, а

$$w = \frac{\sqrt{a}}{1 + a}\left(1 - a - \sqrt{2(1 + a^2)}\right),$$

образ точки $z = -a$, — ближайшей граничной точкой области Кёбе.

92. По формуле, приведенной в решении 88, $\frac{z}{w}$ является функцией от w, отображающей круг $|w| < 1$ сам на себя [III 5]; это означает, что при $|w| < 1$ будет $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$, $|z| < |w|$.

93. Круг $|z| < |a|$, целиком содержащийся в области $\mathfrak{G}$, преобразуется в область, содержащую круг радиуса, большего, чем $|a|$ [92]; поэтому $|a_1| > |a|$. Можно также и непосредственно [91] показать, что

$$\frac{|\sqrt{a}|}{1 + |a|}\left(-1 + |a| + \sqrt{2(1 + |a|^2)}\right) > |a|.$$

94. Введем вспомогательные переменные $z, z_1, z_2, \ldots, z_n$, пробегающие соответственно области $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Согласно решению 88 имеют место разложения (выписываем только первые члены)

$$z_1=\frac{1+|a|}{2|\sqrt{a}|}z+\ldots,$$
$$z_2=\frac{1+|a_1|}{2|\sqrt{a_1}|}z_1+\ldots,$$
$$z_3=\frac{1+|a_2|}{2|\sqrt{a_2}|}z_2+\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n=\frac{1+|a_{n-1}|}{2|\sqrt{a_{n-1}}|}z_{n-1}+\ldots$$

Отсюда

$$f'_n(0)=\frac{1+|a|}{2|\sqrt{a}|}\cdot\frac{1+|a_1|}{2|\sqrt{a_1}|}\cdots\frac{1+|a_{n-1}|}{2|\sqrt{a_{n-1}}|}.$$

Так как $f_n(z)$ регулярна в круге $|z|<|a|$ и $|f_n(z)|<1$, то

$$|f'_n(0)||a|\leqslant 1.$$

95. В силу 94 бесконечное произведение

$$\left(1+\frac{(1-|\sqrt{a}|)^2}{2|\sqrt{a}|}\right)\left(1+\frac{(1-|\sqrt{a_1}|)^2}{2|\sqrt{a_1}|}\right)\cdots\left(1+\frac{(1-|\sqrt{a_n}|)^2}{2|\sqrt{a_n}|}\right)\cdots$$

сходится и $\leqslant\frac{1}{|a|}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(1-|\sqrt{a_n}|)=0.$$

96. Так как отображение взаимно однозначно и точка $z=0$ остается неподвижной, то функции

$$\frac{f_1(z)}{z},\quad \frac{f_2(z)}{z},\quad \ldots,\quad \frac{f_n(z)}{z},\quad \ldots$$

в области $\mathfrak{G}$ регулярны и отличны от нуля. Модули их в каждой точке z возрастают с возрастанием индекса [92]. Следовательно, функции

$$\psi_1(z)=\ln\frac{f_1(z)}{z},\qquad \psi_n(z)=\ln\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

в области $\mathfrak{G}$ регулярны и их вещественные части положительны. При этом логарифмы берутся так, чтобы $\psi_n(0)$ было вещественно. Далее, во всей области

$$\left|\frac{f_n(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{|a|}$$

[III 278] и, значит,

$$\Re\psi_1(z)+\Re\psi_2(z)+\ldots+\Re\psi_n(z)\leqslant-\ln|a|.$$

Отсюда непосредственно заключаем, что вещественная часть ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(z)$ сходится, и, применяя III 257, III 258 (учитывая при этом $z=0$), заключаем также, что сходится и мнимая часть. Функция $f_n(z)$ принимает значение w, $|w|<1$, если $|a_n|>|w|$. На основании 95 отсюда следует, что $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(z)$ также принимает значение w [III 201]. Что $f(z)$ однолистна, вытекает из однолистности функций $f_n(z)$ [III 202].

97. Нормированной отображающей функцией служит [III 76]

$$f(a;\ z)=(\rho^2-|a|^2)\frac{z-a}{\rho^2-\bar{a}z}.$$

Имеем

$$r_a=\frac{\rho^2-|a|^2}{\rho},\quad \bar{r}=\rho.$$

98.

$$r_a=\frac{|a|^2-\rho^2}{\rho},\quad \lim_{a\to\infty}r_a=\infty.$$

99. Посредством вспомогательного отображения $\zeta=z^{\frac{\pi}{\vartheta_0}}$ заданный угол преобразуется в верхнюю полуплоскость $\Im\zeta>0$, точка a — в точку $\zeta_0=a^{\frac{\pi}{\vartheta_0}}$. Дальнейшее отображение

$$w=r_a\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0}$$

преобразует верхнюю полуплоскость в круг $|w|<r_a$, где r_a определяется из уравнения

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=a}=\left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_0}\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=a}=1.$$

Полагая $a=|a|e^{i\alpha}$, $0<\alpha<\vartheta_0$, имеем

$$r_a=\frac{2\vartheta_0}{\pi}|a|\sin\frac{\alpha\pi}{\vartheta_0}.$$

100. Пусть $f(z)$ — нормированная отображающая функция области $\mathfrak{G}$, соответствующая точке a, и $\varphi(z')$ — то же для области $\mathfrak{G}'$ и точки a'. Тогда $h^{-1}\varphi(hz+k)$ обладает всеми характерными свойствами функции $f(z)$, следовательно, $h^{-1}\varphi(hz+k)=f(z)$. Аналогично для внешнего радиуса.

101. Мы можем принять, что речь идет о вещественном отрезке $-2\leqslant z\leqslant 2$ [100]. Нормированной отображающей функцией, соответствующей бесконечно удаленной точке, будет тогда [III 79]

$$w = f(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} = z - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^5} - \ldots$$

При $z = 2\cos\vartheta$ имеем $w = e^{i\vartheta}$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, т. е. $|w| = 1$, $\bar{r} = 1$.

102. При отображении, указанном в **101**, эллипс с фокусами -2, 2 и суммой осей $4R = l$ переходит в окружность $|w| = R = \frac{l}{4}$ [III 80].

103. $r_a = 2d$. [III 6 или частный случай теоремы 99.]

104. [100.]

105. Отображение $\zeta = z + \frac{1}{z}$ преобразует внешнюю область рассматриваемой кривой в плоскость, разрезанную вдоль вещественного отрезка $-(a_2 + a_2^{-1}) \leqslant z \leqslant a_1 + a_1^{-1}$. При этом внешний радиус остается неизменным [104]; т. е. [101]

$$\bar{r} = \frac{a_1 + a_1^{-1} + a_2 + a_2^{-1}}{4} = \frac{(a_1 + a_2)(1 + a_1 a_2)}{4a_1 a_2}.$$

106. $r_a = \frac{2D}{\pi}\sin\frac{\pi d}{D}$. При доказательстве мы можем принять, что речь идет о полосе $|\Im z| < \frac{\pi}{2}$, $D = \pi$ и $a = i\left(\frac{\pi}{2} - d\right)$. Отображение $z' = e^z$ преобразует эту полосу в полуплоскость $\Re z' > 0$, а точку a — в точку ie^{-id} [103, 104].

107. Определение.

108. Преобразование $\zeta = \frac{1}{z}$ вследствие теоремы **107** приводит задачу к 105; полагая $a_1 = b_1^{-1}$, $a_2 = b_2^{-1}$, получаем

$$r_0 = \frac{4b_1^{-1}b_2^{-1}}{(b_1^{-1} + b_2^{-1})(1 + b_1^{-1}b_2^{-1})} = \frac{4b_1 b_2}{(b_1 + b_2)(1 + b_1 b_2)}.$$

109. При отображении $\zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ внешняя область двуугольника K преобразуется в угол

$$\vartheta_2 - 2\pi < \arg\zeta < \vartheta_1,$$

и точка $z = \infty$ — в $\zeta = 1$. Для внутреннего радиуса r_1 этого угла относительно $\zeta = 1$ получаем [100, 107]

$$r_1 = \frac{|z_2 - z_1|}{\bar{r}}.$$

Кроме того, вследствие 99

$$r_1 = \frac{2(\vartheta_1 + 2\pi - \vartheta_2)}{\pi}\sin\frac{\vartheta_1\pi}{\vartheta_1 + 2\pi - \vartheta_2}.$$

Следовательно,

$$\bar{r} = \frac{|z_2 - z_1|}{2(2-\delta)\sin\frac{\vartheta_1}{2-\delta}},$$

где $\pi\delta = \vartheta_2 - \vartheta_1$. Если $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 2\pi$, то двуугольник K «симметричен», $\bar{r} = |z_2 - z_1| \frac{\pi}{4\vartheta_1}$; см. случаи $\vartheta_1 = \pi$ [101], $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$ [97].

При $\vartheta_2 = \vartheta_1$ K приводится к дуге окружности, $\bar{r} = \frac{|z_2 - z_1|}{4\sin\frac{\vartheta_1}{2}}$; вводя радиус кривизны ρ и центральный угол φ дуги K, записываем $\bar{r}$ также в форме $\bar{r} = \rho\sin\frac{\varphi}{4}$. При $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta_2 = \pi$ получается внешний радиус полукруга с диаметром d, $\bar{r} = \frac{2d}{3\sqrt{3}}$.

110. Нормированной отображающей функцией, соответствующей точке a, служит [III 76]

$$f(a;\ z) = c\frac{\frac{f(z)}{r_b} - \frac{f(a)}{r_b}}{1 - \frac{\overline{f(a)}}{r_b}\frac{f(z)}{r_b}} = cr_b\frac{f(z) - f(a)}{r_b^2 - \overline{f(a)}f(z)},$$

где постоянная c определяется из уравнения

$$\left(\frac{df(a;\ z)}{dz}\right)_{z=a} = \frac{cr_b f'(a)}{r_b^2 - |f(a)|^2} = 1.$$

Имеем $r_a = |c|$.

111. Отображение $\zeta = \frac{1}{z} - 2$ переводит указанную область в плоскость ζ, разрезанную вдоль интервала —2, 2. Поэтому искомой отображающей функцией является

$$w = f(z) = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4}}{2} = \frac{1 - 2z - \sqrt{1 - 4z}}{2z},\quad \frac{w}{(1+w)^2} = z.$$

Согласно **110** для вещественных a

$$r_a = \left(\frac{1 - f(a)}{1 + f(a)}\right)^2 = 1 - 4a.$$

В частности, $r_0 = 1$. Когда a пробегает интервал $-\infty$, $\frac{1}{2}$, то r_a монотонно убывает от ∞ до 0.

112. На основании **110**. Когда a приближается изнутри к некоторой точке кривой L, то $|f'(a)|$ остается ограниченным. При этом $|f(a)|$ стремится к r_b.

113. Заменяем в **110** b на a и a на $a+\varepsilon$, где ε — произвольный вектор с модулем, стремящимся к нулю. Обозначая через $((\varepsilon^2))$ величину, стремящуюся к нулю не медленнее, чем ε^2, имеем

$$|f'(a+\varepsilon)| = |1 + 2c_2\varepsilon + ((\varepsilon^2))| = 1 + 2\Re c_2\varepsilon + ((\varepsilon^2)).$$

Следовательно,

$$r_{a+\varepsilon} = r_a (1 - 2\Re c_2 \varepsilon) + ((\varepsilon^2)),$$

т. е. для достаточно малых $|\varepsilon|$ имеет место неравенство $\Re c_2 \varepsilon \geqslant 0$ независимо от $\arg \varepsilon$. Отсюда заключаем, что $c_2 = 0$.

114. Интересующие нас точки лежат на прямой $\Im a = \text{const}$. [103.]

115. Из выражения (*), стр. 26, для нормированной отображающей функции путем его обращения

$$z - a = \varphi(w) = w + c_2' w^2 + c_3' w^3 + \ldots,$$

где $\varphi(w)$ однолистна в круге $|w| < r_a$ и отображает его на область $\mathfrak{G}$. Тогда функция

$$\sqrt[n]{\varphi(w^n)} = w + c_2'' w^{1+n} + c_2'' w^{2+n} + \ldots$$

однолистна в круге $|w| < r_a^{\frac{1}{n}}$ [79] и преобразует его точно в область $\mathfrak{G}'$.

116. Имеем [решение **115**]

$$w = f(z) = \left(\frac{1 - 2z^n - \sqrt{1 - 4z^n}}{2z^n}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{w}{(1 + w^n)^{\frac{2}{n}}} = z,$$

откуда легко вытекает [**110**]

$$r_a = (1 - |f(a)|^2) \left|\frac{f(a)}{a}\right|^{n-1} \frac{|1 - [f(a)]^n|}{|1 + [f(a)]^n|^3}.$$

В частности, $r_0 = 1$. Когда a пробегает отрезок $\arg z = \frac{2\pi\nu}{n}$, $0 \leqslant |a| < \sqrt[n]{\frac{1}{4}}$, то $f(a)$ описывает радиус единичного круга, составляющий с положительной вещественной осью угол $\frac{2\pi\nu}{n}$. Искомый предел равен нулю для всех значений ν.

117. Применяем надлежащим образом **115** к плоскости, разрезанной вдоль вещественного отрезка $-\beta^2, \alpha^2$. Последний имеет внешний радиус $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$ [**101**], следовательно,

$$\bar{r} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

118. Функция $\varphi(z) = \frac{F(z)}{f(z)}$ регулярна в области $\mathfrak{G}$, а также в точке $z = a$; $\varphi(a) = 1$. Пусть $0 < \varepsilon < r_a$. Возле каждой граничной точки области $\mathfrak{G}$ существует столь малая окрестность, что для всех содержащихся в ней точек области $\mathfrak{G}$ имеет место неравенство

$$|f(z)| > r_a - \varepsilon,$$

т. е.

$$|\varphi(z)| < \frac{M}{r_a - \varepsilon}.$$

Тем самым в $\mathfrak{G}$ [III 278] $|\varphi(z)| \leqslant \frac{M}{r_a}$, в частности, $1 = |\varphi(a)| \leqslant \leqslant \frac{M}{r_a}$. Равенство имеет место только для $\varphi(z) \equiv 1$, т. е. $F(z) \equiv f(z)$.

119. Пусть

$$f(z) = z - a + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots$$

— нормированная отображающая функция. Тогда функция

$$\bar{f}(z) = z - a + \bar{c}_2(z-a)^2 + \ldots + \bar{c}_n(z-a)^n + \ldots$$

с сопряженными коэффициентами также регулярна в области $\mathfrak{G}$. Пусть в самом деле z_0 — произвольная точка области $\mathfrak{G}$ и $F_0(z-a) = f(z)$, $F_1(z-a_1)$, ..., $F_{l-1}(z-a_{l-1})$, $F_l(z-a_l)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ — надлежащим образом выбранные точки $\mathfrak{G}$, $a_l = z_0$ — отдельные элементы, осуществляющие продолжение $f(z)$ до точки z_0. Тогда $\bar{f}(z)$ при помощи элементов $\bar{F}_0(z-a) = \bar{f}(z)$, $\bar{F}_1(z-\bar{a}_1)$, ..., $\bar{F}_{l-1}(z-\bar{a}_{l-1})$, $\bar{F}_l(z-\bar{a}_l)$ будет продолжена до точки $\bar{a}_l = \bar{z}_0$. Таким образом, $\bar{f}(z)$ регулярна в области, полученной зеркальным отражением области $\mathfrak{G}$ относительно вещественной оси, т. е. в самой области $\mathfrak{G}$. Кроме того, $f(\bar{z}) = \overline{\bar{f}(z)}$, следовательно, $|\bar{f}(z)| < r_a$ в $\mathfrak{G}$. Согласно 118 имеем тогда $\bar{f}(z) = f(z)$.

120. $-f(-z)$ регулярна в $\mathfrak{G}$ и $|-f(-z)| < r_a$. Поэтому согласно 118 имеем $-f(-z) = f(z)$.

121. Пусть $f(z)$, соотв. $f^*(z)$ — нормированная отображающая функция области $\mathfrak{G}$, соотв. $\mathfrak{G}^*$, соответствующая точке a. Тогда [118]

$$r_a = \underset{(\mathfrak{G})}{\mathrm{Max}}\, |f(z)| \geqslant \underset{(\mathfrak{G}^*)}{\mathrm{Max}}\, |f(z)| \geqslant \underset{(\mathfrak{G}^*)}{\mathrm{Max}}\, |f^*(z)| = r_a^*.$$

В обоих неравенствах может достигаться равенство, однако не одновременно.

122. Из 121, принимая во внимание 97.

123. [118, 121, 122.]

124. [III 309.]

125. [82.]

126. III 126; см. также решение 83.

127. [G. Pólya, Deutsche Math.-Ver., т. 31, стр. 111, сноска, 1922.] Обозначим внешнюю жорданову меру внутренней области кривой L через $|L|_e$ и внутреннюю — через $|L|_i$. Тогда [125, 126]

$$\pi r_a^2 \leqslant |L|_i \leqslant |L|_e \leqslant \pi \bar{r}^2.$$

128. Пусть $f(z)$ — нормированная отображающая функция, соответствующая нулевой точке. Тогда функция $\frac{P(z)}{[f(z)]^k}$ регулярна во внутренней области кривой L и равна a_k при $z=0$. Аналогично для второго неравенства.

129. Пусть $z=\varphi(\zeta)$ — функция, отображающая круг $|\zeta|<1$ на внутреннюю область кривой L. Отображение взаимно однозначно и непрерывно для $|\zeta|\leqslant 1$ [стр. 27]. Применяем III 233 к $f[\varphi(\zeta)]$.

130.
$$w=\frac{e^{\frac{\pi z}{D}}-e^{\frac{\pi i}{D}}}{e^{\frac{\pi z}{D}}-e^{-\frac{\pi i}{D}}}.$$

Длина интересующей нас дуги равна $2\pi(1-D^{-1})$ и монотонно возрастает с возрастанием D.

131. [K. Löwner.] Мы можем принять, что как O, так и центр круга — образа лежат в нулевой точке; пусть радиус последнего будет r. Обозначим через $f_1(z)$ отображающую функцию кривой L_1 и через $f_2(z)$ — кривой L_2. Тогда функция
$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$
регулярна и отлична от нуля во внутренней области кривой L_1. Кроме того, на общих дугах кривых L_1 и L_2
$$|f_1(z)|=|f_2(z)|=r,\quad |F(z)|=1,$$
тогда как на дополнительной части кривой L_1
$$|f_1(z)|=r,\quad |f_2(z)|\leqslant r,\quad |F(z)|\geqslant 1.$$

Отсюда следует, что $|F(z)|>1$ во внутренней области кривой L_1. Регулярная ветвь функции $\ln F(z)$, вещественная для $z=0$, удовлетворяет предположениям теоремы **129**. Поэтому при положительном обходе какой-нибудь общей дуги кривых L_1 и L_2 изменение выражения $\mathfrak{J}\ln F(z)=\mathfrak{J}\ln f_1(z)-\mathfrak{J}\ln f_2(z)$ отрицательно.

132. Пусть изолированный цилиндрический конденсатор имеет проволочную внутреннюю обкладку. Деформируем внешнюю обкладку, не нарушая изоляции, так, чтобы новое поперечное сечение содержало старое в виде части, в некоторых местах выдаваясь за его пределы, в других — нет. Тогда в этих последних местах, где, следовательно, стенка конденсатора осталась несдвинутой, плотность электричества возрастает; этот факт можно сделать наглядным и посредством соображений физического характера.

133. Область $\mathfrak{T}^*$ односвязна (замкнутые простые кривые, содержащиеся внутри $\mathfrak{T}^*$, лежат одновременно внутри L_1 и внутри L_2). Отобразим также $\mathfrak{T}^*$ на единичный круг так, чтобы при этом O перешла снова в центр круга. В нижеследующей таблице указана общая длина дуг, падающих при отображении I, соотв. II, соотв. III (внутренняя область кривой L_1, соотв. кривой L_2, соотв. $\mathfrak{T}^*$) на границу единичного круга.

Длины дуг единичной окружности, соответствующих

	I	II	III
видимым дугам кривой L_1	σ_1	—	σ_1^*
закрытым » » L_1	τ_1	—	—
видимым » » L_2	—	σ_2	σ_2^*
закрытым » » L_2	—	τ_2	—

Очевидно,

$$\sigma_1+\tau_1=2\pi, \quad \sigma_2+\tau_2=2\pi, \quad \sigma_1^*+\sigma_2^*=2\pi.$$

Согласно **131**

$$\sigma_1^*\leqslant\sigma_1, \quad \sigma_2^*\leqslant\sigma_2.$$

Следовательно,

$$\tau_2=2\pi-\sigma_2\leqslant 2\pi-\sigma_2^*=\sigma_1^*\leqslant\sigma_1,$$
$$\tau_1=2\pi-\sigma_1\leqslant 2\pi-\sigma_1^*=\sigma_2^*\leqslant\sigma_2.$$

Если L_2 — окружность с центром в O, то результат можно выразить несколько неточно, но зато наглядно следующим образом: при отображении на круг те части граничной кривой, которые более близко расположены к точке, переходящей в центр, сильнее растягиваются, чем части, более далеко отстоящие.

134. Примем, что граница области $\mathfrak{B}$ представляет собой замкнутую простую кривую, пересекающую окружность $|z-\zeta|=\rho$ лишь в конечном числе точек. Удаляя из $\mathfrak{B}$ границу, мы получаем односвязную область, пересечение которой с кругом $|z-\zeta|<\rho$ имеет односвязную часть $\mathfrak{T}$, содержащую O в качестве внутренней точки [решение **133**]. Пусть $\rho\gamma$ — совокупная длина общей части границы области $\mathfrak{T}$ и круга $|z-\zeta|<\rho$. Тогда

$$\gamma+\Omega\leqslant 2\pi.$$

При отображении области $\mathfrak{T}$ на единичный круг $|w|<1$ точка O пусть переходит в центр круга и совокупность дуг, засчитанных в $\rho\gamma$, — в совокупность дуг на окружности с общей протяженностью δ. Согласно **131**

$$\delta\leqslant\gamma.$$

Определяем функцию $\varphi(w)$, регулярную в круге $|w|<1$ и удовлетворяющую в точках дуг, засчитанных в δ, условию

$$\Re\varphi(w)=\ln A,$$

а во внутренних точках прочих дуг окружности — условию

$$\Re\varphi(w)=\ln a$$

[III 231]. Имеем

$$2\pi\Re\varphi(0) = \delta \ln A + (2\pi - \delta) \ln a$$

[III 118]. Положим

$$e^{\varphi(w)} = \Phi(w).$$

Тогда получаем

$$|\Phi(0)|^{2\pi} = a^{2\pi}\left(\frac{A}{a}\right)^{\delta} \leqslant a^{2\pi}\left(\frac{A}{a}\right)^{\gamma} \leqslant a^{2\pi}\left(\frac{A}{a}\right)^{2\pi-\Omega}.$$

Если отображение области $\mathfrak{T}$ на круг $|w| < 1$ осуществляется функцией

$$\psi(z) = w, \quad \psi(\zeta) = 0,$$

то $\Phi[\psi(z)]$ внутри $\mathfrak{T}$ отлична от нуля и на всех граничных точках области $\mathfrak{T}$, за исключением конечного числа, по модулю не меньше чем $f(z)$. Отсюда следует [III 335], что

$$|f(\zeta)| \leqslant |\Phi[\psi(\zeta)]| = |\Phi(0)|.$$

Обращая эти рассуждения, получаем из III **276** часть теорем **131**, **133**. См. также решение III **177**.

135. $f_n(z)$ обращается в нуль только в точке $z = 0$ (взаимно однозначное отображение). Применяя III **278** к функциям $z^{-1}f_n(z)$ и $zf_n(z)^{-1}$, регулярным в $\mathfrak{G}_n$, находим, что в $\mathfrak{G}_n$

$$\frac{1}{1} < \left|\frac{z}{f_n(z)}\right| < \frac{a}{1}.$$

Пусть положительное число ε_n определено уравнением

$$\left|\frac{e^{i\alpha_n} - 1}{2}\right|^{\varepsilon_n} = \frac{1}{a};$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Полагая

$$\frac{z}{f_n(z)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{\varepsilon_n} = \varphi_n(z),$$

в круге $|z| < 1$ имеем $|\varphi_n(z)| < 1$ [III **278**]. Из неравенств

$$|z|\left|\frac{1}{2}(z-1)\right|^{\varepsilon_n} < |f_n(z)| < |z|$$

получаем сначала, что в круге $|z| < 1$ при $n \to \infty$

$$|f_n(z)| \to |z|.$$

Принимаем во внимание неравенство $f_n'(0) > 0$ и применяем III **258** к $\ln(f_n(z)z^{-1})$.

136. [L. Bieberbach, Berl. Ber. 1916, стр. 940—955; G. Faber, Münch. Ber. 1916, стр. 39—42.] Из III **126** вытекает, что для каждого $R > 1$

$$\frac{|b_1|^2}{R^2} + \frac{2|b_2|^2}{R^4} + \frac{3|b_3|^2}{R^6} + \ldots < 1,$$

следовательно, также n-й отрезок этого ряда меньше единицы. Полагая $R \to 1$, видим, что

$$|b_1|^2+2|b_2|^2+\ldots+n|b_n|^2 \leqslant 1.$$

Так как это неравенство имеет место при всяком n, то $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant$ $\leqslant 1$. Если $|b_1|=1$, $b_1=e^{i\beta}$, то тогда $b_2=b_3=\ldots=0$, т. е. $g(z) = z+b_0+\frac{e^{i\beta}}{z}$ [III 79].

137. [K. Löwner, Math. Zeitschr., т. 3, стр. 69—72, 1919.] Применяя неравенство Коши [II 80], находим [136]

$$|g'(z)|=\left|1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nb_n}{z^{n+1}}\right| \leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|z|^{n+1}}\sqrt{n}\,|b_n| \leqslant$$

$$\leqslant 1+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|z|^{2n+2}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{|z|^2}}.$$

Если $g'(\rho\bar{\varepsilon})=\frac{1}{1-\rho^{-2}}$, $\rho>1$, $|\varepsilon|=1$, то $-b_n\varepsilon^{n+1}$ должно быть вещественно и неотрицательно, далее, $\sqrt{n}\,|b_n|=\lambda\frac{\sqrt{n}}{\rho^{n+1}}$, где множитель λ, не зависящий от n, определяется из уравнения $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 = 1$. Имеем

$$\lambda=\rho^2-1, \quad b_n=-\frac{\rho^2-1}{(\rho\varepsilon)^{n+1}}, \; g(z)=z+b_0-\frac{1}{\varepsilon}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{\rho\varepsilon z-1}.$$

Эта функция однолистна в области $|z|>1$, так как при $|z|>1$

$$\left|\frac{1-\rho^2}{\rho\varepsilon z-1}+1\right| \leqslant \rho,$$

и поэтому

$$\frac{1-\rho^2}{\rho\varepsilon z_1-1}+1 \neq \rho\varepsilon z_2, \; g(z_2)-g(z_1)\neq 0; \; |z_1|>1, \; |z_2|>1, \; z_1\neq z_2.$$

Преобразование

$$\varepsilon[g(z)-b_0]-\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{\rho\varepsilon z(\varepsilon z-\rho)}{\rho\varepsilon z-1}$$

показывает, далее, что единичная окружность отображается на некоторую круговую дугу с центром $b_0+\bar{\varepsilon}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)$ и радиусом ρ.

138. Принимаем во внимание **120**.

139. [G. Faber, l. c. **136**.] Согласно **79** функция

$$\sqrt{g(z^2)}=z+\frac{\frac{1}{2}b_0}{z}+\frac{\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{8}b_0^2}{z^3}+\ldots$$

регулярна и однолистна в области $|z|>1$, следовательно [136], $\left|\frac{1}{2}b_0\right|\leqslant 1$. Только в том случае $\left|\frac{1}{2}b_0\right|=1$, если $\sqrt{g(z^2)}=z+\frac{e^{i\beta}}{z}$, где β вещественно, т. е. когда $g(z)=z+2e^{i\beta}+\frac{e^{2i\beta}}{z}$.

140. [L. Bieberbach, l. c. 136.] Применяем 139 к $g(z)-h$, где h — произвольная граничная точка области $\mathfrak{G}$. Тогда нулевая точка лежит на границе образа. Конформным центром тяжести является b_0-h, следовательно, $|b_0-h|\leqslant 2$.

141. [См. L. Bieberbach, Math. Ann., т. 77, стр. 153—172, 1916.] Нижняя оценка для D получается как в III **239**, верхняя оценка — из **140** следующим образом. Если h_1 и h_2 — граничные точки области $\mathfrak{G}$, то

$$|b_0-h_1|\leqslant 2,\quad |b_0-h_2|\leqslant 2,\ \text{следовательно,}\ |h_1-h_2|\leqslant 4.$$

142. Пусть d — расстояние между двумя неподвижными точками и D — диаметр соединяющей дуги. Тогда [141]

$$d\leqslant D\leqslant 4\bar{r}.$$

143. [K. Löwner, l. c. **137**, стр. 74—75.] Достаточно доказать, что $|g(\rho)|\leqslant\rho+\frac{1}{\rho}$, $\rho>1$. Удаляя из $\mathfrak{G}$ два криволинейных отрезка, в которые переходят отрезки $1<z\leqslant\rho$, $-\rho\leqslant z<-1$ при отображении $g(z)=w$, получаем некоторую область $\mathfrak{G}^*$. Если мы разрежем внешнюю круговую область $|z|>1$ от 1 до ρ и от -1 до $-\rho$, то полученная область сможет быть отображена на внешнюю круговую область $|\zeta|>\frac{\rho+\frac{1}{\rho}}{2}$ [105] и будет иметь [138] конформный центр тяжести 0. К получаемому при этом отображению внешней круговой области $|\zeta|>\frac{\rho+\frac{1}{\rho}}{2}$ на $\mathfrak{G}^*$ применяем **140**.

144. [G. Faber, Münch. Ber. 1920, стр. 49—64.] Так как $g(z)-z$ в области $|z|>1$ регулярна и все граничные значения $g(z)-z$ по модулю $\leqslant 3$ [140], то $|g(z)-z|\leqslant 3$ также во всей области $|z|>1$; III **280** дает тогда $|g(z)-z|\leqslant\frac{3}{|z|}$. Равенство могло бы достигаться вообще только для $g(z)-z=\frac{e^{i\alpha}}{z}$, α вещественно, но тогда $|g(z)-z|=\frac{1}{|z|}$ и, следовательно, равенство никогда не достигается.

145. [K. Löwner.] Внешний радиус $\bar{r}$ указанной в задаче кривой превышает внешний радиус отрезка длины $2a$ [121] и меньше, чем внешний радиус содержащего этот отрезок эллипса, сумма осей которого стремится к 4, когда $a\to 2$, $\delta\to 0$. Отсюда вытекает [101, 102], что $\bar{r} \to 1$ при $a \to 2$, $\delta \to 0$. Из 119 вытекает, далее, что при рассматриваемом отображении две граничные точки, находящиеся на противоположных краях выреза в $z = -a$, переходят в $z = +1$ и $z = -1$, так что одна из граничных точек претерпевает смещение $1 + a$. При $a \to 2$ оно становится сколь угодно близким к 3.

146. [L. Bieberbach, l. c. 136.] Полагая $\zeta = \frac{1}{z}$, имеем

$$g(\zeta) = [f(\zeta^{-1})]^{-1} = \zeta - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{\zeta} + \ldots \neq 0$$

при $|\zeta| > 1$ (139). $|a_2| = 2$ тогда и только тогда, когда $g(\zeta) = \zeta + 2e^{i\alpha} + \frac{e^{2i\alpha}}{\zeta}$, $f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha}z)^2}$, α вещественно.

147. [G. Faber, l. c. 136, 144; L. Bieberbach, l. c. 136. Теорема содержится, правда, без приведения точных значений постоянных, уже у P. Koebe, Gött. Nachr. 1907, стр. 197—210.] Пусть $R = 1$. Функция

$$\frac{f(z)}{1 - h^{-1} f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{h}\right) z^2 + \ldots$$

однолистна в круге $|z| < 1$, следовательно,

$$\left| a_2 + \frac{1}{h} \right| \leqslant 2, \quad \left| \frac{1}{h} \right| \leqslant |a_2| + 2 \leqslant 4 \qquad [146].$$

[Этот вариант доказательства принадлежит Ф. Хаусдорфу.] Равенство имеет место только для функции

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha}z)^2}, \quad \alpha \text{ вещественно.}$$

148. Пусть $\zeta = \frac{1}{z}$, $g(\zeta) = [f(\zeta^{-1})]^{-1}$ [решение 146]. Применяя 140 к $g(\zeta)$, находим, что для любой граничной точки h

$$\left| a_2 + \frac{1}{h} \right| \leqslant 2, \quad \left| \frac{1}{h} \right| \leqslant |a_2| + 2.$$

[См. также решение 147.]

149. [См. G. Szegö, Deutsche Math.-Ver., т. 31, стр. *42*, 1922; т. 32, стр. *45*, 1923.] Пусть h_1 и h_2 — две граничные точки области $\mathfrak{G}$ и $\arg h_1 - \arg h_2 = \pi$. Применяя 147 к $\frac{f(z)}{1 - h_1^{-1} f(z)}$, находим, что $\left| \frac{1}{h_2^{-1} - h_1^{-1}} \right| \geqslant \frac{R}{4}$, т. е.

$$\frac{2}{\frac{1}{|h_1|} + \frac{1}{|h_2|}} \geqslant \frac{R}{2}.$$

Тем самым по теореме об арифметическом и гармоническом средних (часть I, стр. 74) и подавно $|h_1|+|h_2|\geqslant R$. Когда имеет место знак равенства, то должно быть прежде всего $|h_1|=|h_2|=\frac{R}{2}$, $h_1=-h_2=\frac{R}{2}e^{i\gamma}$, и, далее, $\frac{f(z)}{1-h_1^{-1}f(z)}=\frac{R^2z}{(R+e^{i\alpha}z)^2}$, γ, α вещественны. Эта функция в круге $|z|\leqslant R$ достигает модуля $\frac{R}{4}$ лишь для $z=Re^{-i\alpha}$. Отсюда заключаем, что

$$e^{-i\alpha}=-e^{i\gamma} \quad \text{и} \quad f(z)=\frac{R^2z}{R^2+e^{2i\alpha}z^2}.$$

[В указанном месте утверждается, что $\operatorname{Max}(|h_1|, |h_2|)\geqslant R$. Замечание, что уже $|h_1|+|h_2|\geqslant R$, принадлежит T. Radó.]

150. [См. G. Pick, l. c. 151; далее L. Bieberbach, Math. Zeitschr., т. 4, стр. 295—305, 1919; R. Nevanlinna, Översikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh., т. 62 (A), № 7, 1919—1920.] Пусть $|z_0|<1$. Применяем 146 к функции

$$\varphi(z)=A+Bf\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right),$$

также однолистной в единичном круге $|z|<1$. Постоянные A и B определяем из условий $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$.

151. [По поводу **151, 152, 156, 157** см. P. Koebe, l. c. **147**; G. Plemelj, Verhandl. d. deutschen Naturforsch., т. 85, III, стр. 163, 1913; G. Pick, Leipz. Ber., т. 68, стр. 58—64, 1916; G. Faber, L. Bieberbach, l. c. **136**; см., кроме того, T. H. Gronwall, C. R., т. 162, стр. 249—252, 1916.] Имеем

$$\ln f'(z)+\ln(1-|z|^2)=\int_0^z\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\right)dz,$$

где интегрирование производится вдоль прямолинейного отрезка от 0 до z, $|z|=r<1$. Отсюда [150]

$$|\ln f'(z)+\ln(1-|z|^2)|\leqslant\int_0^r\frac{4}{1-r^2}dr=2\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

Отделение вещественной части дает

$$-2\ln\frac{1+r}{1-r}\leqslant\ln|f'(z)|+\ln(1-r^2)\leqslant 2\ln\frac{1+r}{1-r},$$

ч. и тр. д. Отделение мнимой части дает, кроме того,

$$|\Im\ln f'(z)|\leqslant 2\ln\frac{1+r}{1-r}$$

(теорема об искажении угла поворота при отображении). Равенство не достигается. [L. Bieberbach, l. c. **150**.]

152. Из $f(z)=\int_0^z f'(z)\,dz$ вытекает, что [151]

$$|f(z)|\leqslant\int_0^r \frac{1+r}{(1-r)^3}\,dr=\frac{r}{(1-r)^2}.$$

Нижняя оценка модуля $|f(z)|$ получается двояким образом:

1) Пусть w — ближайшая к нулевой точке точка образа окружности $|z|=r$ и L — кривая плоскости z, отображающаяся на отрезок, соединяющий 0 и w. Тогда из $|w|=\int_L |f'(z)|\,|dz|$ вследствие неравенства $|dz|\geqslant dr$ вытекает

$$|w|\geqslant\int_0^r |f'(z)|\,dr\geqslant\int_0^r \frac{1-r}{(1+r)^3}\,dr=\frac{r}{(1+r)^2}.$$

2) Отображаем круг $|z|<1$, разрезанный вдоль вещественного отрезка, соединяющего r и 1, посредством функции $z=g(\zeta)=\zeta+$ $+b_2\zeta^2+b_3\zeta^3+\ldots$ на круг $|\zeta|<\frac{4r}{(1+r)^2}$ [108] и применяем тогда **147** к граничной точке $f(r)$ отображения $w=f[g(\zeta)]$.

153. [T. H. Cronwall, Nat. Acad. Proc., т. 6, стр. 300—302, 1920; R. Nevanlinna, 1. с. **161**, стр. 17, сноска.] Полагаем $\zeta=\frac{1}{z}$ и применяем **143** к $[f(\zeta^{-1})]^{-1}+a_2$.

154. [T. Radó, задача; Deutsche Math.-Ver., т. 32, стр. *15*, 1923.] Согласно **80** $f(z)=\sqrt{g(z^2)}$, где $g(z)$ регулярна и однолистна в единичном круге $|z|<1$. Таким образом, при $|z|=r$ [152]

$$\frac{r^2}{(1+r^2)^2}\leqslant|g(z^2)|\leqslant\frac{r^2}{(1-r^2)^2}.$$

155. В обозначениях задачи III **128** имеем

$$J(\rho)\leqslant\pi\left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\right)^2 \qquad [154],$$

следовательно, так как $f(0)=0$,

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta\leqslant 4\pi\int_0^r\frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\,d\rho.$$

156. По теореме Коши

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,$$

где интегрирование производится вдоль окружности $|\zeta - z| = \rho$, $0 < \rho < 1 - |z| = 1 - r$. Понимая под $\omega_n(r)$ наименьшую функцию указанного рода, имеем

$$\omega_n(r) < \frac{n!}{\rho^n} \frac{r+\rho}{(1-r-\rho)^2}.$$

157. [L. Bieberbach, Math. Zeitschr., т. 2, стр. 161—162, сноска 5, 1918.] Имеем

$$\omega_n = \frac{\omega_n(0)}{n!} \qquad [156],$$

следовательно,

$$\omega_n < \frac{1}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \quad (0 < \rho < 1).$$

Полагаем здесь $\rho = \frac{n-1}{n+1}$.

158. Заменяя в 155 $f(z)$ на $\sqrt{f(z^2)}$ [80] и r на $\sqrt{r}$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{2i\vartheta})|\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{r}{1-r}.$$

159. [J. E. Littlewood. См. Proc. Lond. M. Soc. (2), т. 22, № 4, 1923.] Что $\omega_n \geqslant n$, вытекает из рассмотрения функции $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. Верхняя оценка для ω_n получается из неравенства

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta < \frac{1}{r^{n-1}(1-r)} \qquad [158]$$

при $r = \frac{n-1}{n}$. Имеем

$$|a_n| < \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en \qquad [\text{I } 170].$$

160. [G. Pick, Wien. Ber., т. 126, стр. 247—263, 1917.] Утверждение относительно M вытекает из **122** или из III **280**. Из разложения

$$\frac{f(z)}{[1+e^{i\alpha}M^{-1}f(z)]^2} = z + (a_2 - 2e^{i\alpha}M^{-1})z^2 + \ldots$$

заключаем, далее, что $|a_2 - 2e^{i\alpha}M^{-1}| \leqslant 2$ [146]. Выбирая здесь $\alpha = \pi + \arg a_2$, получаем требуемое неравенство. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(z)}{[1+e^{i\alpha}M^{-1}f(z)]^2} = \frac{z}{(1+e^{i\beta}z)^2},$$

β вещественно. Тогда значения $w=e^{i\alpha}M^{-1}f(z)$ заполняют ту часть единичного круга, которая соответствует при отображении $\frac{w}{(1+w)^2}=W$ [111] плоскости, разрезанной вдоль луча $\arg W=\alpha-\beta$, $\frac{1}{4M}\leqslant|W|<\infty$. Поэтому α должно быть равно β; части $\frac{1}{4M}\leqslant W\leqslant\frac{1}{4}$ выреза соответствует отрезок $2M-1-2\sqrt{M(M-1)}\leqslant w\leqslant 1$. Равенство достигается, когда $f(z)$ осуществляет однолистное отображение единичного круга на круг радиуса M, разрезанный вдоль отрезка, идущего от произвольной граничной точки перпендикулярно внутрь на расстояние

$$2M\sqrt{M-1}\left(\sqrt{M}-\sqrt{M-1}\right).$$

161. [R. Nevanlinna, Översikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh., т. 63 (A), № 6, 1920—1921.] Согласно III **109** функция

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=1+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<1$ и имеет в нем положительную вещественную часть. Следовательно [III 235],

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ll\frac{1+z}{1-z}.$$

Отсюда заключаем [I 63], что

$$|a_n|\leqslant n \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

$|a_n|=n$ может быть лишь тогда (и притом тогда уже для всех n), когда $z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1+e^{i\alpha}z}{1-e^{i\alpha}z}$, α вещественно.

162. [T. H. Gronwall, l. с. **151**; K. Löwner, Leipz. Ber., т. 69, стр. 89—106, 1917.] Если $f(z)$ осуществляет отображение на выпуклую область, то образ при отображении $w=zf'(z)$ будет звездообразен [III **110**]. Тем самым [**161**]

$$zf'(z)\ll\frac{z}{(1-z)^2},\ \text{т. е.}\ |a_n|\leqslant 1 \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

$|a_n|=1$ тогда и только тогда (и притом тогда уже для всех n), когда $zf'(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$, $f(z)=\frac{z}{1-e^{i\alpha}z}$, α вещественно.

163. [См. E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, Heft 2, Leipzig, B. G. Teubner, 1913; R. Nevanlinna, l. с. **161**.] Из **150** заключаем, что при $|z|<r$

$$\Re\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>\frac{-4r+2r^2}{1-r^2}.$$

Для значений r, не превосходящих меньшего корня уравнения $r^2-4r+1=0$, правая часть $\geqslant -1$. [III 108.]

164. Посредством отображения $\frac{e^{iz}-i}{e^{iz}+i}=\zeta$ вопрос приводится к III 297. Если $f(z)\not\equiv 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{e^{i(x_n+iy_n)}-i}{e^{i(x_n+iy_n)}+i}\right|\right)$$

должен сходиться. Далее во всяком случае $y_n\to\infty$. Но для положительных y, стремящихся к ∞,

$$1-\left|\frac{e^{i(x+iy)}-i}{e^{i(x+iy)}+i}\right|=1-\left(\frac{1+e^{-2y}-2e^{-y}\sin x}{1+e^{-2y}+2e^{-y}\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}\sim 2e^{-y}\sin x.$$

Аналогичным образом для отрицательных y заменяем общий член выписанного выше ряда через $2e^{y}\sin x$.

165. Достаточность условия вытекает из общей теоремы существования для линейных дифференциальных уравнений. Но условие также необходимо. Действительно, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ будут n линейно независимых целых функций, удовлетворяющих заданному уравнению. Тогда коэффициенты $f_\nu(z)$ определяются из уравнений

$$-u_j^{(n)}=f_1(z)\,u_j^{(n-1)}+f_2(z)\,u_j^{(n-2)}+\ldots+f_n(z)\,u_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

как дроби, в числителях которых стоят целые функции; общим знаменателем всех этих дробей служит вронскиан функций $u_1, u_2, \ldots, u_n$, т. е. $e^{-\int f_1(z)\,dz}$ [VII, § 5], значит — целая функция, не имеющая нулей.

166. Для достаточно малых ненулевых значений z имеем

$$\varphi(z)=\gamma_{-k}z^{-\frac{k}{q}}+\gamma_{-k+1}z^{-\frac{k-1}{q}}+\ldots+\gamma_0+\gamma_1 z^{\frac{1}{q}}+\gamma_2 z^{\frac{2}{q}}+\ldots,$$

где $q>0$, q — целое и для $z^{\frac{1}{q}}$ выбрана определенная ветвь. Из предположения вытекает сначала, что при $z\to 0$ функция $\varphi(z)$ остается ограниченной, следовательно, $\gamma_{-k}=\gamma_{-k+1}=\ldots=\gamma_{-1}=0$. Кроме того, $\gamma_0=c_0$. Если бы q было больше единицы и не все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}$ были равны нулю, скажем $\gamma_1=$ $=\gamma_2=\ldots=\gamma_{s-1}=0$, $\gamma_s\neq 0$, $1\leqslant s\leqslant q-1$, то при $z\to 0$ функция

$$z^{-\frac{s}{q}}(\varphi(z)-c_0)$$

оставалась бы по модулю больше некоторого фиксированного положительного числа, откуда следовало бы, что

$$\lim_{z\to 0} z^{-1}(\varphi(z)-c_0)=\infty,$$

а это противоречит предположению. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots$ $\ldots = \gamma_{q-1} = 0$. Далее $\gamma_q = c_1$, затем снова $\gamma_{q+1} = \gamma_{q+2} = \ldots = \gamma_{2q-1} = 0$ и т. д.

167. Если функция $f(z)$ регулярна и однозначна в полуоткрытом круговом кольце $R \leqslant |z| < \infty$, то ее нули, находящиеся в этой области, могут сгущаться только в бесконечности. Поэтому можно построить целую функцию $g(z)$, которая в указанной области имеет те же нули, что и $f(z)$. Тогда функция $\ln \frac{f(z)}{g(z)}$ будет в области $R \leqslant |z| < \infty$ регулярна, однако не необходимо однозначна; вещественная ее часть однозначна, мнимая изменяется при положительном обходе окружности $|z| = r$, $r > R$ на $2\pi i m$, где m — некоторое целое число, не зависящее от r [III 190, $a = 0$]. Поэтому разность

$$\ln \frac{f(z)}{g(z)} - m \ln z$$

будет в области $R \leqslant |z| < \infty$ однозначна и регулярна и разлагается в этой области в ряд Лорана

$$\ln \frac{f(z)}{g(z)} - m \ln z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \gamma(z) + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \gamma(z) + \psi(z),$$

где $\gamma(z)$ — целая функция и ряд $\psi(z)$ сходится при $|z| \geqslant R$. Можно положить $z^m g(z) e^{\gamma(z)} = z^{-p} G(z)$. Если относительно функции $f(z)$ предположено лишь, что она регулярна в открытом круговом кольце $R < |z| < \infty$, то ее нули могут сгущаться также на окружности $|z| = R$.

168. Положим $e^{-iz} = w$, следовательно, $e^y = |w|$. Вследствие периодичности функции $f(z)$

$$f(i \ln w) = F(w)$$

является однозначной функцией от w, имеющей в области $0 < |w| < \infty$ лишь конечное число нулей и полюсов. Следовательно, можно так определить два полинома $P(w)$, $Q(w)$ и сходящийся в указанной области степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n = \psi(w)$ [решение 167], что в этой области

$$f(w) = \frac{P(w)}{Q(w)} e^{\psi(w)}.$$

Обозначим через $A(r)$ максимум $\Re \psi(w)$ на окружности $|w| = r$ и через w_0 точку, в которой этот максимум $A(r)$ достигается. Имеем

$$\ln M(y) - \ln |P(w_0)| + \ln |Q(w_0)| \geqslant A(r).$$

Из предположения следует, кроме того, что существует такое число θ, $0<\theta<1$, что

$$\ln M(y) < e^{\theta|y|} = \begin{cases} |w|^{\theta} & \text{при} \quad |w| \geqslant 1, \\ |w|^{-\theta} & \text{при} \quad |w| \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что $A(r)\,r^{-\theta}$ ограничено для $r>1$ и $A(r)\,r^{\theta}$ ограничено для $r<1$. Согласно решению III 237 отсюда следует, что $\psi(w) = \text{const}$.

169. [H. A. Schwarz; по устной передаче.] Пусть функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

регулярна и не тождественно постоянна в некотором круге $|z|<\rho$ с центром в нулевой точке. Тогда в этом круге также функция

$$F(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \ldots + \bar{a}_n z^n + \ldots$$

регулярна и не тождественно постоянна, кроме того, для вещественных x и y, $x^2+y^2<\rho^2$,

$$\varphi(x,\ y) = f(x+iy)\,F(x-iy) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k \bar{a}_l (x+iy)^k (x-iy)^l.$$

Этот ряд сходится также для комплексных x и y с достаточно малыми модулями. Так как он представляет алгебраическую функцию от x и y, то имеет место, тождественно относительно x и y, равенство

$$\sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(x,\ y)\,[\varphi(x,\ y)]^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu(x,\ y)\,[f(x+iy)\,F(x-iy)]^\nu = 0,$$

где $\Phi_\nu(x,\ y)$ — некоторые полиномы относительно x и y и $\Phi_n(x, y) \not\equiv 0$. Мы можем принять, что $\Phi_n(0,\ 0) \neq 0$, ибо в противном случае можно было бы вместо $f(z)$ заранее рассматривать $f(z-a)$ с надлежаще выбранным a.

Пусть переменная ζ ограничена единичным кругом и постоянная t выбрана следующим образом:

1) $t \neq 0$,

2) рассматриваемый степенной ряд функции $\varphi(x,\ y)$ сходится для $|x| \leqslant |t|$, $|y| \leqslant |t|$,

3) $F(t) \neq 0$,

4) полином $\Phi_n\left(\frac{(\zeta+1)\,t}{2},\ \frac{(\zeta-1)\,t}{2i}\right)$ не равен нулю тождественно для всех ζ. Этому условию можно всегда удовлетворить, ибо свободный член этого полинома относительно ζ и t совпадает со свободным членом полинома $\Phi_n(x,\ y)$ и, значит, отличен от нуля.

Тогда в круге $|\zeta|<1$ тождественно

$$\sum_{\nu=0}^{n} \Phi_\nu\left(\frac{(\zeta+1)t}{2}, \frac{(\zeta-1)t}{2i}\right)[F(t)]^\nu [f(\zeta t)]^\nu = 0.$$

170. [E. Landau.] Пусть указанным в задаче кругом служит единичный круг. Он содержит вещественный отрезок $-1<w<1$. Рассмотрим множество тех вещественных точек z, в которых $w=f(z)$ вещественно и по модулю меньше единицы. Эти точки имеют по крайней мере одну конечную предельную точку z_0, в противном случае их было бы лишь счетное множество, и, следовательно, функция $f(z)$ не могла бы принимать всех значений из отрезка $-1<w<1$, имеющего мощность континуума. Значение $f(z_0)$ вещественно, и точно так же вещественно

$$f'(z_0)=\lim\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

ибо ведь мы можем ограничиться выбором для z тех вещественных значений, для которых $f(z)$ также вещественно. Аналогично убеждаемся в том, что все коэффициенты в разложении $f(z)$ по степеням $z-z_0$ вещественны. Продолжая степенной ряд, мы находим, что функция $f(z)$ вещественна для всех вещественных z, что противоречит предположению.

171. Таких функций не существует. Пусть, в самом деле, требуемое соотношение выполнено. Если $f(z)$ тождественно равно нулю, то тогда, очевидно, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ также тождественно равны нулю. Если же $f(z)\not\equiv 0$, то мы можем принять, что $f(z)$ в области $\mathfrak{B}$ вообще не обращается в нуль ни в одной точке (заменяя в противном случае эту область некоторой ее частью). Но тогда функции $f_\nu(z)f(z)^{-1}$ регулярны в $\mathfrak{B}$ и функция

$$\left|\frac{f_1(z)}{f(z)}\right|+\left|\frac{f_2(z)}{f(z)}\right|+\ldots+\left|\frac{f_n(z)}{f(z)}\right|=1$$

достигает максимума также внутри области $\mathfrak{B}$; следовательно [III 300],

$$f_\nu(z)f(z)^{-1}=\text{const.} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

172. Таких функций не существует. В самом деле, ограничимся некоторой частью области $\mathfrak{B}$, в которой $g(z)\neq 0$ и $\sqrt{g(z)}=\varphi(z)$ — регулярная функция. Тогда $|g(z)|=|\varphi(z)|^2$. Согласно предположению $|\varphi(z)|^2$ является регулярной гармонической функцией, т. е. [III 87]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|\varphi(x+iy)|^2=0.$$

В силу III 58 отсюда вытекает, что $\varphi(z)=\text{const.}$, $g(z)=\text{const.}$, $f(z)=\text{const.}$

173. Пусть $h(z)$ — целая функция; $f(z) = e^{h(z)}$ и $g(z) = e^{-h(z)}$ удовлетворяют указанным условиям для $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, ибо

$$\frac{e^h - 1}{e^{-h} - 1} = -e^h, \quad \frac{e^h + 1}{e^{-h} + 1} = e^h, \quad \frac{e^h - 0}{e^{-h} - 0} = e^{2h}$$

суть целые функции без нулей. Двух различных целых функций конечного рода, имеющих одни и те же a-, b-, c- и d-точки, где a, b, c и d различны, вообще не существует [G. Pólya, Nyt Tidsskr. for Math. (B), т. 32, стр. 21, 1921].

174. Опираясь на уже доказанные положения, легче решить следующую, более сильную интерполяционную задачу. Дана треугольная числовая схема

$$\begin{array}{l} a_{00} \\ a_{10},\ a_{11}, \\ a_{20},\ a_{21},\ a_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

найти целую функцию $G(z)$, удовлетворяющую уравнениям

$$G^{(\nu)}(n) = \nu! a_{n\nu} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где $n! a_{nn} = a_n$. Для решения пользуемся целой функцией

$$W(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2}} \right]^{n+1}$$

[Hurwitz-Courant, стр. 123 *)]. В окрестности точки $z = n$ имеет место разложение

$$\frac{1}{W(z)} = \frac{1}{(z-n)^{n+1}} [b_{n0} + b_{n1}(z-n) + b_{n2}(z-n)^2 + \ldots$$
$$\ldots + b_{nn}(z-n)^n + \ldots],$$

$b_{n0} \neq 0$. Полагаем

$$a_{n0} b_{n\nu} + a_{n1} b_{n,\,\nu-1} + a_{n2} b_{n,\,\nu-2} + \ldots + a_{n\nu} b_{n0} = c_{n\nu}$$

и ищем мероморфную функцию $F(z)$, регулярную всюду, за исключением точек $z = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, и такую, что разность

$$F(z) - (z-n)^{-n-1} [c_{n0} + c_{n1}(z-n) + \ldots + c_{nn}(z-n)^n]$$

остается регулярной также в точке $z = n$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ [Hurwitz-Courant, стр. 108—111 **)]. Тогда искомая целая функция $G(z) = F(z) W(z)$.

---

*) Гурвиц, стр. 168. Гурвиц—Курант, стр. 127.

**) Гурвиц, стр. 147—151. Гурвиц—Курант, стр. 113—115.

175. Первое неравенство очевидно. Из неравенства

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r+\delta)}{(r+\delta)^n} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

вытекает, далее,

$$\mathfrak{M}(r) \leqslant M(r+\delta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n = \frac{r+\delta}{\delta} M(r+\delta).$$

176. [E. Landau.] Имеем [175]

$$[M(r)]^n \leqslant \mathfrak{M}_n(r) \leqslant \frac{r+\delta}{\delta}[M(r+\delta)]^n,$$

поэтому

$$M(r) \leqslant [\mathfrak{M}_n(r)]^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\frac{r+\delta}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} M(r+\delta).$$

Берем $n \to \infty$; $\delta > 0$ произвольно мало, $M(r)$ является непрерывной функцией от r, как легко усмотреть из определения.

177. [E. Landau.] $\frac{1}{n}\ln \mathfrak{M}_n(r)$ является невогнутой функцией от $\ln r$ [II 123]. Предел невогнутой кривой представляет собой также невогнутую кривую.

178. [I. Schur.] Функция

$$\varepsilon^{-1}Mf[\varepsilon M^{-1}f(z)] = z + A_2z^2 + A_3z^3 + \ldots + A_nz^n + \ldots$$

в круге $|z| < 1$ однолистна и по модулю меньше M^2. Коэффициент A_n является полиномом $(n-1)$-й степени от ε со свободным членом a_n и старшим коэффициентом $M^{-n+1}a_n$. Подставляя вместо ε последовательно все корни $(n-1)$-й степени из единицы, складывая и принимая во внимание неравенство $|A_n| \leqslant \omega_n[M^2]$, получаем

$$|a_n + M^{-n+1}a_n| \leqslant \omega_n[M^2], \quad \text{т. е.} \quad \omega_n[M] \leqslant \frac{\omega_n[M^2]}{1+M^{-n+1}}.$$

Здесь $\omega_n[M]$ обозначает верхнюю грань модуля $|a_n|$ в предположениях задачи 160. Повторное применение этого неравенства дает, так как $\omega_n[M] \leqslant \omega_n$,

$$\omega_n[M] \leqslant \omega_n \prod_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{1+M^{(-n+1)2^\nu}} = \omega_n(1-M^{-n+1})$$

[решение I 14].

179. Пусть m — произвольное целое положительное число. Тогда $\varphi(m\vartheta)$ является тригонометрическим полиномом mn-го порядка, удовлетворяющим предположению. Тем самым при всех значениях ϑ выполняется неравенство

$$|m\varphi'(m\vartheta)| \leqslant mn + K, \quad \text{т. е.} \quad |\varphi'(\vartheta)| \leqslant n + \frac{K}{m}.$$

Берем теперь $m \to \infty$.

180. [H. Poincaré, American J., т. 14, стр. 214, 1892; см. H. Bohr, Nyt Tidsskr. for Math. (B), т. 27, стр. 73—78, 1916.] Определим целые положительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ так, чтобы было

$$\lambda_1=1,\ \lambda_n>\lambda_{n-1},\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda_n}>\varphi(n+1)\qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Функция

$$g(z)=\varphi(2)+1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{z}{n-1}\right)^{\lambda_n}$$

является целой; при $n\leqslant x\leqslant n+1$, $n\geqslant 2$, имеем

$$g(x)\geqslant g(n)>\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda_n}>\varphi(n+1)\geqslant\varphi(x).$$

181. Пример: $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots$; целые рациональные функции (не являющиеся тождественно постоянными) стремятся по всем направлениям к бесконечности.

182. [H. von Koch, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 1, стр. 627—641, 1903.] Пример: e^z+z. При доказательстве нужно различать два случая: $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}$. Равномерность исключена. [Hurwitz-Courant, стр. 96 *).]

183. [См. J. Malmquist, Acta Math., т. 29, стр. 203—215, 1905.] [III 158, III 160.] Целые функции конечного порядка не могут себя так вести [III 330].

184. [G. Mittag-Leffler, Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1904, стр. 258—264, Leipzig, B. G. Teubner, 1905; Atti del IV. congr. internaz. dei mat. Roma 1908, т. 1, стр. 67—85, Roma, Tip. della Acc. dei Lincei, 1909.]

$$e^{-E(z)}-e^{-E(2z)}\quad\text{или}\quad E(z)e^{-E(z)},$$

где $E(z)$ — функция задачи 183.

185. Функция $E(z)$ [III 158] либо совсем не имеет, либо обладает самое большее конечным числом отрицательных нулей [III 160]. Полагаем в первом случае

$$F(z)=E(z),$$

во втором

$$F(z)=\frac{E(z)}{(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_l)},$$

где $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_l$ — все имеющиеся в наличии отрицательные нули функции $E(z)$. В том и другом случае $F(z)$ при

*) Гурвиц, стр. 136. Гурвиц — Курант, стр. 104—105.

вещественных отрицательных z вещественна и сохраняет постоянный знак. Следовательно,

$$i\int_0^\infty F(-t^2)\,dt = C \neq 0;$$

существование интеграла вытекает из III **160**. Нечетная целая функция

$$g(z) = C^{-1}\int_0^z F(z^2)\,dz$$

и доставляет требуемый пример, как нетрудно показать путем изменения контура интегрирования [III **160**].

186. [G. Pólya, Interméd. des math., серия 2, т. 1, стр. 81—82, 1922.] Пусть $0 < \alpha < 2\pi$ и $g(z)$ — нечетная целая функция, построенная в задаче 185. Функция

$$\frac{1 + g(\sqrt{z})\,g(\sqrt{e^{i\alpha}z})}{2}$$

— целая и при должном выборе знаков перед обоими радикалами в угле $0 < \arg z < 2\pi - \alpha$ стремится к единице, а в угле $2\pi - \alpha < \arg z < 2\pi$ — к нулю. Остается составить надлежащую линейную комбинацию таких функций.

187. Нет, ибо множество всех разбиений имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, высшую, чем мощность континуума $\mathfrak{c}$, тогда как множество всех целых функций имеет мощность $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, т. е. мощность континуума.

188. Допустим, напротив, что существует простирающаяся в бесконечность непрерывная кривая L, вдоль которой e^z стремится к пределу, отличному от нуля и бесконечности. Тогда для всякого положительного ε на кривой L можно указать такую точку z_0, что $|\arg e^z - \arg e^{z_0}| < \varepsilon$ для всех точек z кривой L, следующих за z_0. Если $\varepsilon < \pi$, то вследствие непрерывности аргумента должно быть также $|\Im z - \Im z_0| < \varepsilon$ и, следовательно, начиная с z_0, L заключается внутри полосы шириной в 2ε, параллельной вещественной оси. Но внутри такой полосы z может стремиться к бесконечности лишь двумя способами: либо так, что $e^z \to \infty$, либо так, что $e^z \to 0$.

189. Функция

$$\int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{z^{2n+1}}{2^n(2n+1)}$$

стремится к бесконечности, когда $z \to \infty$ вдоль положительной или отрицательной мнимой оси. Она, далее, равномерно сходится к $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, соотв. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, когда $z \to \infty$ в угле $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$, соотв. $\frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{4}$. В самом деле, например, в первом случае, $z = re^{i\vartheta}$, $r > 0$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{4}$, имеем

$$\int\limits_0^{re^{i\vartheta}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int\limits_0^r e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int\limits_r^{re^{i\vartheta}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

и второй член по модулю меньше чем $r \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{r^2}{2}\cos 2\vartheta} d\vartheta$ [решение III 151]. Если бы существовала простирающаяся в бесконечность непрерывная кривая, вдоль которой рассматриваемая функция стремилась бы к конечному пределу, отличному от $\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, то на достаточном удалении эта кривая не могла бы иметь точек в указанных углах и на мнимой оси. Мы могли бы, таким образом, принять, что она целиком содержится, например, в угле $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Но тогда функция была бы ограниченной в области, заключающейся между этой кривой и лучом $\arg z = \frac{\pi}{4}$ [опираемся на некоторое расширение теоремы III 330, относящееся к этой последней, как III 324 к III 322], и, следовательно, должна была бы [III 340] и вдоль указанной кривой стремиться к $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. [См. A. Hurwitz, C. R., т. 143, стр. 879, 1906 и т. 144, стр. 65, 1907.]

190. Рассматриваемая функция вдоль $2n$ лучей

$$\arg z = (2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

стремится к бесконечности, а вдоль биссектрис $2n$ углов, образуемых этими лучами, стремится к конечным пределам, а именно вдоль луча $\arg z = k\frac{\pi}{n}$ к пределу

$$e^{ik\frac{\pi}{n}} \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x^n)}{x^n} dx = e^{ik\frac{\pi}{n}} \frac{1}{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

[III 152.] Дальше рассуждаем, как в решении 189.

191. [F. Iversen, Öfversikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh., т. 58 (A), № 3, 1915—1916.] Пусть $\delta_m = 2(1-\varepsilon_m)$, тогда $\delta_m = 0$ или 4, смотря по тому, будет ли $\varepsilon_m = +1$ или -1. Когда z стремится к ∞ вдоль луча

$$\arg z = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{8^{m+1}},$$

то тогда для $m=0, 1, 2, \ldots$

$$\arg z^{8^m} = 2\pi\left(\frac{\delta_m}{8} + \frac{\delta_{m+1}}{8^2} + \ldots\right).$$

Так как δ_m может принимать лишь значения 0 и 4, то z^{8^m} лежит либо в угле $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, либо в угле $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ и именно в первом, когда $\varepsilon_m = +1$, и во втором, когда $\varepsilon_m = -1$. Полагая для сокращения

$$\gamma(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

имеем, таким образом [189],

$$\lim \gamma\left(z^{8^m}\right) = \varepsilon_m.$$

Кроме того, существует [решение 189] такое число G, что для всех z на указанном луче и для всех значений m

$$\left|\gamma\left(z^{8^m}\right)\right| < G.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и m столь велико, что $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots < \varepsilon$. Тогда функция

$$a_0\gamma(z) + a_1\gamma(z^8) + \ldots + a_m\gamma\left(z^{8^m}\right)$$

при указанном выше способе стремления z к ∞ стремится к пределу

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_m a_m.$$

Остаточный член по модулю меньше $G\varepsilon$ при всех z.

192. Пусть интересующая нас целая функция $g(z)$ будет конечного порядка λ, $\lambda > 0$, т. е. $|g(z)| < Ae^{B|z|^{\lambda+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $B > 0$, ε, A, B — постоянные. Пусть, далее, $\lim g(z) = a$, когда $z \to \infty$ вдоль некоторого луча, и $\lim g(z) = b \neq a$, когда $z \to \infty$ вдоль некоторого другого луча (оба выходят из точки $z = 0$), составляющего с первым угол γ. Из III 330 [$\gamma = \beta - \alpha$] вытекает, что если $(\lambda + \varepsilon)\gamma < \pi$, то $g(z)$ остается ограниченной в угле между обоими лучами. Но тогда согласно III 340 должно было бы быть $a = b$, что противоречит предположению. Следовательно, $(\lambda + \varepsilon)\gamma \geq \pi$. Так как это справедливо при любом положительном ε, то $\lambda\gamma \geq \pi$, т. е. $\lambda \geq \frac{\pi}{\gamma}$. Но в силу предположения имеется по крайней мере одно $\gamma \leq \frac{2\pi}{n}$. Следовательно, $\lambda \geq \frac{n}{2}$. [По поводу дальнейших обобщений см. T. Carleman, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 15, № 10, 1920.]

193. [См. F. Iversen, Thèse, Helsingfors, 1914.] Пусть $g(z)$ — заданная целая функция, $z^{-1}[g(z) - g(0)] = h(z)$ не тождественно постоянно. Обозначим через $\mathfrak{G}$ некоторую область, в конечных граничных точках которой $|h(z)|=1$, а внутри $|h(z)|>1$. Точка $z=\infty$ лежит на границе области $\mathfrak{G}$ [III 338]. Вдоль линии, лежащей в $\mathfrak{G}$ или на ее границе и простирающейся в бесконечность, имеем

$$|g(z)| \geqslant |zh(z)|-|g(0)| \geqslant |z|-|g(0)|.$$

194. Пусть m — число нулей функции $g(z)-a$. Определяем полином m-й степени $P(z)$ так, чтобы отношение $\frac{P(z)}{g(z)-a}$ было регулярно во всей плоскости z, и затем полином самое большее m-й степени $Q(z)$ так, чтобы также выражение

$$\frac{1}{z^{m+1}}\left(\frac{P(z)}{g(z)-a}-Q(z)\right)$$

было регулярно во всей плоскости z. Тогда существует [193] простирающаяся в бесконечность непрерывная кривая, вдоль которой на достаточном удалении

$$\left|\frac{P(z)}{g(z)-a}-Q(z)\right|>|z|^{m+1}.$$

Так как там $|Q(z)|<A|z|^m$, $|P(z)|<B|z|^m$, где A и B — положительные постоянные, то

$$\left|\frac{P(z)}{g(z)-a}\right|>|z|^{m+1}-A|z|^m, \quad \left|\frac{1}{g(z)-a}\right|>\frac{|z|-A}{B}.$$

195. [T. Carleman.] Пусть $|f(z)|\leqslant M$ в кольце $0<|z|<1$. Для $|z_0|=\frac{1}{2}$ имеем неравенство Коши

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|\leqslant\frac{M}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Так как, по предположению, $f^{(n)}(z)$ ограничена, то [III 337] в кольце $0<|z|\leqslant\frac{1}{2}$ и, значит, в частности, в точке $z=\frac{1}{4}$

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant n!\,2^nM.$$

Следовательно,

$$f(z)=f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{f'\left(\frac{1}{4}\right)}{1!}\left(z-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{4}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{4}\right)^n+\ldots,$$

причем ряд сходится в круге $\left|z-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$, а значит и в некотором круге с центром в точке $z=0$.

196. Пусть $w_\nu \neq 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ и

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{w_\nu}\right), \quad g^*(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{|w_\nu|}\right),$$

$$M^*(r) = g^*(r), \; m^*(r) = |g^*(-r)|.$$

Тогда при $|z| = r$, очевидно,

$$m^*(r) \leqslant |g(z)| \leqslant M^*(r).$$

Мы, разумеется, нисколько не нарушим общности, если предположим, что имеет место самый неблагоприятный случай, а именно что все нули функции $g(z)$ вещественны и отрицательны, т. е.

$$g(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{|w_\nu|}\right).$$

Утверждение гласит тогда: $g(r) < e^{\varepsilon r}$ при всех достаточно больших r и $|g(-r)| > e^{-\varepsilon r}$ при произвольно больших r, где ε — любое наперед заданное положительное число. С первым неравенством справляемся так же, как в решении **58** со случаем $\lambda = 1$. Для доказательства второго применяем к $g(z)\,g(-z)$ как функции от z^2 теорему III **332**. Для произвольно больших r имеем

$$|g(r)\,g(-r)| > 1, \; |g(-r)| > \frac{1}{g(r)} > e^{-\varepsilon r}.$$

197. [A. Wiman, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 2, № 14, 1905; см. E. Lindelöf, Rend. Palermo, т. 25, стр. 228, 1908.] Предположим, что нули рассматриваемой целой функции $g(z)$, которая, по Адамару (стр. 18), должна быть рода нуль, вещественны и отрицательны [решение **196**]. Рассмотрим функцию $g(z)\,e^{-z^{\lambda-\varepsilon}}$ в угле $-\pi < \vartheta < +\pi$, где она регулярна. Она непрерывна на $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant +\pi$ и принимает на положительной вещественной оси произвольно большие значения [предположение относительно $M(r)$]. Если бы она была ограничена на вещественной отрицательной оси, скажем, не превосходила единицы, то она была бы вообще ограниченной [III **332**], что, как выше было указано, не имеет места. Следовательно, для некоторых произвольно больших значений r

$$m(r)\,e^{-r^{\lambda-\varepsilon}\cos\pi(\lambda-\varepsilon)} = |g(-r)\,e^{-(-r)^{\lambda-\varepsilon}}| > 1,$$

ч. и тр. д.

198. [Ch. H. Müntz; см. Math. Abhd., H. A. Schwarz gewidmet, стр. 303—312, Berlin, J. Sringer, 1914; T. Carleman, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 17, № 9, стр. 15, 1923.] В полуплоскости $\Re z > -1$ интеграл

$$\int_0^1 t^z h(t)\,dt = f(z)$$

сходится и функция $f(z)$ регулярна. Для $\Re z \geqslant 0$ интеграл будет собственным и $|f(z)|$ ограниченным, $|f(z)| \leqslant \int_0^1 |h(t)|\,dt$. Если бесконечное множество чисел $\lambda_\nu \leqslant 1$, то они имеют на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 1$ предельную точку и $f(z) \equiv 0$; если все λ_ν, за исключением конечного числа, $\geqslant 1$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1}$ точно так же следует, что $f(z) \equiv 0$ [III 298]. В том и другом случае $f(n) = \int_0^1 t^n h(t)\,dt = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ [II 139].

199. [T. Carleman.] Функция $\int_0^1 g(zt)\,h(t)\,dt$ — целая и порядка $\leqslant \lambda$, следовательно, согласно предположению также функция

$$\gamma(z) = \frac{\int_0^1 g(zt)\,h(t)\,dt}{g(z)}$$

— целая и порядка $\leqslant \lambda$. Пусть $M(r)$ — максимум $|g(z)|$ на окружности $|z| = r$. Минимум $|\gamma(z)|$ на окружности $|z| = r$ не будет превосходить $\frac{M(\alpha r)}{M(r)} \int_0^\alpha |h(t)|\,dt + \int_\alpha^1 |h(t)|\,dt$, где $0 < \alpha < 1$, α сколь угодно близко к единице, и, следовательно, при $r \to \infty$ стремится к нулю [24], тогда как он должен был бы быть [см. 197] неограниченным. Значит, $\gamma(z)$ тождественно постоянна и именно равна нулю. Следовательно, все коэффициенты функции $\int_0^1 g(zt)\,h(t)\,dt$ равны нулю, и, стало быть, согласно предположению $\int_0^1 t^n h(t)\,dt = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ [II 139.]

200. [T. Carleman.] Пусть $g(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_\nu}\right)$, $w_\nu \neq 0$ (достаточно рассмотреть только этот случай). Тогда $|g(iy)|^2 = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{w_\nu^2}\right)$. Из этой формулы вытекает, что $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{|g(i\alpha y)|}{|g(iy)|} = 0$ при постоянном α, $0 < \alpha < 1$ [24]. Поэтому функция

$$\gamma(z) = \frac{\int_0^1 g(zt)\,h(t)\,dt}{g(z)}$$

вдоль положительной и отрицательной мнимых осей стремится к нулю. Кроме того, согласно предположению она — целая. На всех достаточно больших окружностях $|z|=r$ имеем $|g(z)|<e^{\varepsilon r}$ и на произвольно больших $|g(z)|>e^{-\varepsilon r}$ [196]. Кроме того, при всех достаточно больших r

$$\left|g\left(re^{\frac{i\pi}{4}}\right)\right|>e^{-\varepsilon r} \text{ и } \left|g\left(re^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right|>e^{-\varepsilon r}.$$

Действительно,

$$|g(z)\,g(-z)|^2=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|1-\frac{z^2}{\omega_\nu^2}\right|^2=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{r^2\cos 2\vartheta}{\omega_\nu^2}+\frac{r^4}{\omega_\nu^4}\right)\geqslant 1$$

при $\vartheta=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$.

Применяем III 325 в слегка измененном виде к функции $\gamma(z)$ в обеих полуплоскостях $\Re z\geqslant 0$ и $\Re z\leqslant 0$. Предположение 1) нужно здесь расширить в смысле III 323; вместо луча $\vartheta=0$ берем теперь $\vartheta=\frac{\pi}{4}$, соотв. $\vartheta=\frac{3\pi}{4}$. [Заключительное замечание в решении III 325.] Получаем, что во всей плоскости $|\gamma(z)|\leqslant \text{const.}$ и, значит, $\gamma(z)\equiv\text{const.}$, $\gamma(z)\equiv 0$. Следовательно, $\int\limits_0^1 t^n h(t)\,dt=0$, если в разложении $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ коэффициент $a_n\neq 0$. Но так как корни вещественны, то из коэффициентов a_n, a_{n+1} по крайней мере один отличен от нуля [V 166]. В заключение применяем 198.

201. [S. Bernstein, C. R., т. 176, стр. 1603—1605, 1923 *).] Из $|a_n|\leqslant K\rho^n$ вытекает, что

$$|F(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K\rho^n|z|^n}{n!}=Ke^{\rho|z|}.$$

Функция $F(z)\,e^{i\rho z}$ в обоих углах $0\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ удовлетворяет условиям, которые аналогичны указанным в III 322, ибо (x, y вещественны, $y>0$)

$$|F(x)\,e^{i\rho x}|\leqslant M,\quad |F(iy)\,e^{-\rho y}|\leqslant K.$$

---

*) С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. I, Изд. АН СССР, 1952, стр. 269—270.

Рассматривая еще $F(z)e^{-i\rho z}$ в нижней полуплоскости, находим на основании III 322, что во всей плоскости z

$$|F(x+iy)| \leqslant Le^{\rho|y|},$$

где $L = \operatorname{Max}(M, K)$. При вещественных значениях x получаем [III 165]

$$\left|\frac{F'(x)}{\sin\rho x}\right| = \left|\frac{\rho F(x)\cos\rho x}{\sin^2\rho x} - \rho\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n F\left(\frac{n\pi}{\rho}\right)}{(\rho x - n\pi)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho|F(x)\cos\rho x|}{\sin^2\rho x} + \rho M\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\rho x - n\pi)^2} = \frac{\rho|F(x)\cos\rho x| + \rho M}{\sin^2\rho x}. \qquad (*)$$

Отсюда заключаем прежде всего, что $\left|F'\left(\frac{\pi}{2\rho}\right)\right| \leqslant \rho M$. Но теперь те же рассуждения мы можем применить также к функции

$$F\left(z + x_0 - \frac{\pi}{2\rho}\right),$$

где x_0 — вещественная постоянная, ибо

$$\left|F\left(z + x_0 - \frac{\pi}{2\rho}\right)\right| \leqslant Ke^{\rho\left|x_0 - \frac{\pi}{2\rho}\right|}e^{\rho|z|}.$$

Если в (*) имеет место знак $=$, то $(-1)^n F(n\pi) = A$ (независимо от n) и $\frac{d}{dz}\left(\frac{F(z)}{\sin\rho z}\right) = -\frac{\rho A}{\sin^2\rho z}$.

202. $F'(z)$ есть функция того же типа, что и $F(z)$. Последовательным применением теоремы 201 получаем, что для всех вещественных значений x

$$|F'(x)| \leqslant M\rho, \quad |F''(x)| \leqslant M\rho^2, \ \ldots, \ |F^{(n)}(x)| \leqslant M\rho^n, \ \ldots$$

и, значит,

$$|F(x+iy)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|F^{(n)}(x)|}{n!}|y|^n \leqslant Me^{\rho|y|}.$$

203. Условия теоремы III 166 выполняются [решение 201]. Следовательно, для вещественных значений z, $\rho|z| < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{|G(z)|}{2\rho|z|\cos\rho z} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2 - \rho^2 z^2} = M\frac{\sin\rho z}{2\rho z\cos\rho z} \leqslant M\frac{\rho|z|}{2\rho|z|\cos\rho z}.$$

$\left(\text{При } z = 0 \text{ считаем } \frac{G(z)}{z} = G'(0),\ \frac{\sin\rho z}{\rho z} = 1.\right)$ Если здесь имеет место знак $=$, то $(-1)^n G\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{\rho}\right) = cM$ ($|c| = 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$z=0$). При $\rho|z|\geqslant\frac{\pi}{2}$ интересующее нас неравенство (даже со знаком $<$) тривиально.

204. Применяем 203 к функции

$$G(z)=\frac{F(z_0+z)-F(z_0-z)}{2},$$

z_0 вещественно. (См. VI 82.)

205. Пусть $\lambda<\mu<2\lambda$. Функция $f(z)e^{iz^\mu}$ ограничена на лучах $\arg z=0$ и $\arg z=\frac{\pi}{2\mu}$ и, следовательно [III 330], также в образованном ими угле с раствором $\frac{\pi}{2\mu}<\frac{\pi}{2\lambda}\leqslant\pi$. Находим, что функция $f(z)(\sin z^\mu)^{-1}$ ограничена на лучах $\arg z=-\frac{\pi}{2\mu}$ и $\arg z=\frac{\pi}{2\mu}$, а также на дугах окружностей $|z|^\mu=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, содержащихся в угле $-\frac{\pi}{2\mu}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2\mu}$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)}{\sin\zeta^\mu}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{\sin z^\mu}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n f\left((n\pi)^{\frac{1}{\mu}}\right)}{\mu(n\pi)^{1-\frac{1}{\mu}}\left(z-(n\pi)^{\frac{1}{\mu}}\right)^2},$$

где интегрирование производится в положительном направлении вдоль границы бесконечного сектора $-\frac{\pi}{2\mu}<\arg z<\frac{\pi}{2\mu}$, $|z|>\rho$, причем $0<\rho<\pi^{\frac{1}{\mu}}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\frac{1}{\mu}}$ сходится и $f(x)$ ограничена при $x>0$, то на основании I 182 находим, что $f'(x)=O(x^{\mu-1})$, когда x стремится к бесконечности по интервалам

$$\left(\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\mu}}\leqslant x\leqslant\left(\left(n+1-\frac{1}{4}\right)\pi\right)^{\frac{1}{\mu}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

С помощью аналогичной формулы, с заменой $\sin z^\mu$ на $\cos z^\mu$, находим, что $f'(x)=O(x^{\mu-1})$ также в дополнительных интервалах.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ

1. [По поводу всей главы см. Laguerre, Oeuvres, т. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1898.] Ясно.

2. Пусть вычеркнут член $a_\mu \neq 0$, причем, например,

$$a_{\mu-k} \neq 0, \quad a_{\mu-k+1} = \ldots = a_{\mu-1} = a_{\mu+1} = \ldots = a_{\mu+l-1} = 0, \quad a_{\mu+l} \neq 0.$$

Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}, a_{\mu+1}, \ldots$ будет иметь на две перемены знака меньше, чем последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}, a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots$, если

$$\operatorname{sgn} a_{\mu-k} = -\operatorname{sgn} a_\mu = \operatorname{sgn} a_{\mu+1},$$

и одинаковое количество перемен знака при других комбинациях знаков. В случае, если a_μ является первым или последним не равным нулю членом, при его вычеркивании либо пропадет одна перемена знака, либо число перемен знака не изменится.

3. Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots$ и $a_0, a_1, \ldots, a_\mu, b, a_{\mu+1}, \ldots$ будут иметь одинаковое число перемен знака в следующих трех случаях: 1) $b = 0$, 2) $\operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} a_\mu$, 3) $\operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} a_{\mu+1}$. Ясно!

4. Последовательность $a_0, a_0 + a_1, a_1, a_1 + a_2, a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_\mu, a_\mu + a_{\mu+1}, a_{\mu+1}, \ldots$ будет иметь столько же перемен знака, сколько и последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$, ибо, полагая $a_\mu + a_{\mu+1} = b$, видим, что должен встретиться один из трех случаев, перечисленных в решении 3. Принять во внимание 2.

5. [A. Hurwitz.] Количество перемен знака не увеличится при перебирании таблицы последовательностей

$$\begin{array}{llllll}
a_0, & a_1, & a_2 & a_3, & \ldots, a_l, & a_{l+1}, \ldots \\
a_0, & a_0 + a_1, & a_1 + a_2, & a_2 + a_3, & \ldots, a_{l-1} + a_l, & a_l + a_{l+1}, \ldots \\
a_0, & a_0 + a_1, & a_0 + 2a_1 + a_2, & a_1 + 2a_2 + a_3, \ldots, & a_{l-2} + 2a_{l-1} + a_l, \ldots & \\
a_0, & a_0 + a_1, & a_0 + 2a_1 + a_2, & a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3, \ldots & &
\end{array}$$

сверху вниз [решение 4]. Но n-я строка этой таблицы совпадает с интересующей нас последовательностью до своего n-го члена включительно. Значит, в этих n членах не может быть больше чем W перемен знака. Так как n произвольно, то все доказано.

6. Ясно, также для случая кратных корней.

7. Ясно.

8. Так как $f(x)$ — аналитическая функция, интервал a, b может содержать лишь конечное число нулей. При переходе через нуль знак $f(x)$ меняется или нет, смотря по тому, будет ли рассматриваемый нуль нечетной или четной кратности.

9. Ясно. См. 8.

10. Пусть ε $(\varepsilon > 0)$ достаточно мало; имеем

$$f(a+\varepsilon) = f(a+\varepsilon) - f(a) = \varepsilon f'(a+\varepsilon_1) \qquad (0 < \varepsilon_1 < \varepsilon),$$
$$-f(b-\varepsilon) = f(b) - f(b-\varepsilon) = \varepsilon f'(b-\varepsilon_2) \qquad (0 < \varepsilon_2 < \varepsilon).$$

Из

$$\operatorname{sgn} f(a+\varepsilon) = \operatorname{sgn} f(b-\varepsilon) \neq 0$$

вытекает, что

$$\operatorname{sgn} f'(a+\varepsilon_1) = -\operatorname{sgn} f'(b-\varepsilon_2) \neq 0.$$

Применяем 8 к $f'(x)$ в интервале $(a+\varepsilon_1, b-\varepsilon_2)$. Приведенная формулировка теоремы Ролля имеет то преимущество перед обычно излагаемой в дифференциальном исчислении, что, относясь к более тесному классу функций, содержит и более точный результат.

11. По предположению

$$\operatorname{sgn} a_{j+1} = \operatorname{sgn}(a_{j+1} - a_j), \qquad \operatorname{sgn} a_{k+1} = \operatorname{sgn}(a_{k+1} - a_k).$$

Из $\operatorname{sgn} a_{j+1} = -\operatorname{sgn} a_{k+1} \neq 0$ вытекает, что $\operatorname{sgn}(a_{j+1} - a_j) = -\operatorname{sgn}(a_{k+1} - a_k) \neq 0$. Применяем 9 к последовательности разностей.

12. α) Если $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет нуль кратности $N > 0$, то $f'(x)$ имеет в той же точке нуль кратности $N-1$. Это — для случая, когда интервал свелся к одной точке.

β) Пусть теперь $a < b$ и $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — нули функции $f(x)$, $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_l \leqslant b$. Разделим замкнутый интервал $x_1 \leqslant x \leqslant x_l$ на следующие l частей: 1) точку x_1 и 2) $l-1$ полуоткрытых интервалов $x_1 < x \leqslant x_2$, $x_2 < x \leqslant x_3, \ldots, x_{l-1} < x \leqslant x_l$. При переходе от $f(x)$ к $f'(x)$ в точке x_1 теряется один нуль [случай α)], а в полуоткрытых интервалах $x_1 < x \leqslant x_2, \ldots, x_{l-1} < x \leqslant x_l$ — ни один [**10** и случай α)].

13. Обозначим интересующие нас места перемены знака через $\nu_1 + 1$, $\nu_2 + 1, \ldots, \nu_W + 1$, $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_W \leqslant n-1$. Тогда каждая из $W-1$ подпоследовательностей

$$a_{\nu_1+1} - a_{\nu_1}, \quad a_{\nu_1+2} - a_{\nu_1+1}, \quad \ldots, \quad a_{\nu_2+1} - a_{\nu_2},$$
$$a_{\nu_2+1} - a_{\nu_2}, \quad a_{\nu_2+2} - a_{\nu_2+1}, \quad \ldots, \quad a_{\nu_3+1} - a_{\nu_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{\nu_{W-1}+1} - a_{\nu_{W-1}}, \quad a_{\nu_{W-1}+2} - a_{\nu_{W-1}+1}, \quad \ldots, \quad a_{\nu_W+1} - a_{\nu_W}$$

будет иметь по меньшей мере одну перемену знака [**11**].

14. Пусть $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f'(a) \neq 0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — нули функции $f(x)$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_l < b$. Разобьем интервал $a < x \leqslant x_l$ на подинтервалы

$$a < x \leqslant x_1, \quad x_1 < x \leqslant x_2, \; \ldots, \; x_{l-1} < x \leqslant x_l.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$-f(x_1 - \varepsilon) = f(x_1) - f(x_1 - \varepsilon) = \varepsilon f'(x_1 - \eta) \qquad (0 < \eta < \varepsilon),$$

откуда, по предположению,

$$\operatorname{sgn} f'(a) = \operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(x_1 - \varepsilon) = -\operatorname{sgn} f'(x_1 - \eta) \neq 0,$$

следовательно, $f'(x)$ между a и $x_1 - \eta$ имеет по крайней мере один нуль [8]. По поводу точки x_1 и других подинтервалов см. решение **12**. Подобным же образом доказываем, что если $\operatorname{sgn} f(b) = -\operatorname{sgn} f'(b) \neq 0$, то в интервале $x_l < x < b$ прибавляется еще один нуль производной $f'(x)$.

15. Придерживаемся обозначений задачи **13**. Последовательности

$$a_0, \quad a_1 - a_0, \quad \ldots, \quad a_{\nu_1+1} - a_{\nu_1},$$
$$a_{\nu_W+1} - a_{\nu_W}, \; a_{\nu_W+2} - a_{\nu_W+1}, \; \ldots, \; a_n - a_{n-1}, \quad -a_n$$

прибавляют каждая еще по одной перемене знака к переменам знака, содержащимся в $W - 1$ подпоследовательностях, рассмотренных в задаче **13**. Действительно, пусть a_α — первый не равный нулю член первой последовательности, тогда $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu_1$, $\operatorname{sgn}(a_\alpha - a_{\alpha-1}) = \operatorname{sgn} a_\alpha = -\operatorname{sgn} a_{\nu_1+1} = -\operatorname{sgn}(a_{\nu_1+1} - a_{\nu_1})$; применяем **9**. Аналогично рассуждаем относительно второй из написанных последовательностей.

16. В случае бесконечного количества нулей утверждение ясно [10]. Пусть теперь x_l — последний нуль функции $f(x)$. Тогда $f'(x)$ будет иметь в интервале $a \leqslant x \leqslant x_l$ самое большее на один нуль меньше, чем $f(x)$ [12]. Так как $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \int\limits_{x_l}^{\infty} f'(x)\,dx = 0$, то $f'(x)$ не может сохранять в интервале $x_l < x < \infty$ постоянный знак.

17. В случае бесконечного количества перемен знака утверждение ясно [11]. Пусть теперь последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ имеет W перемен знака и $\nu_W + 1$ — последнее место перемены знака. Тогда последовательность

$$a_0, \quad a_1 - a_0, \quad \ldots, \quad a_{\nu_W+1} - a_{\nu_W}$$

будет содержать по меньшей мере W перемен знака [решение **13**, **15**]. Далее,

$$\operatorname{sgn} a_{\nu_W+1} = \operatorname{sgn}(a_{\nu_W+1} - a_{\nu_W}) \neq 0.$$

Но так как бесконечный ряд

$$a_{\nu_{W+1}}+(a_{\nu_{W+2}}-a_{\nu_{W+1}})+(a_{\nu_{W+3}}-a_{\nu_{W+2}})+\ldots=0,$$

то члены его, отличные от нуля, не могут быть все одного знака.

18. Применяем 12, соотв. 16, к функции $e^{\alpha x}f(x)$ [6]; производная ее есть $e^{\alpha x}[\alpha f(x)+f'(x)]$.

19. Рассматриваем последовательности

$$\begin{array}{llllll}
a_0, & a_1, & a_2 & \ldots, & a_n, & \ldots,\\
a_0, & a_1\alpha, & a_2\alpha^2, & \ldots, & a_n\alpha^n, & \ldots,\\
a_0, & a_1\alpha-a_0, & a_2\alpha^2-a_1\alpha, & \ldots, & a_n\alpha^n-a_{n-1}\alpha^{n-1}, & \ldots,\\
a_0\alpha, & a_1\alpha-a_0, & a_2\alpha-a_1, & \ldots, & a_n\alpha-a_{n-1}, & \ldots
\end{array}$$

и применяем 7, затем решения 15 и 17, затем снова 7.

20. Полагаем $\int\limits_0^x f(x)\,dx=F(x)$; тогда $F(x)$ и $F'(x)=f(x)$ в окрестности справа от точки $x=0$ имеют одинаковый знак. [14.]

21. Полагаем $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n=A_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ и применяем первую половину теоремы 19 (приняв $\alpha=1$) к последовательности $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$

22. Ясно.

23. Непрерывная кривая $y=\int\limits_0^x f(x)\,dx$ состоит из $Z+1$ монотонных дуг. Первая дуга начинается в точке $x=0$, $y=0$, так что на ней не может произойти перемены знака. Каждая из остальных Z дуг может самое большее один раз пересечь ось x, перейдя с одной ее стороны на другую. (Это легко уточнить.) Для аналитической функции $f(x)$ см. еще 20, 24.

24. Пусть интервал будет $a<x<b$. Если функция $f(x)$ — аналитическая, то существует такое ε $(\varepsilon>0)$, что $f(x)\neq 0$ при $a<x<a+\varepsilon$ и при $b-\varepsilon<x<b$ [8, 22].

25. См. 10, 24.

26. $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ и $P(x)$ — вещественный полином степени $\leqslant n-1$.

1. При достаточно малом $\varepsilon>0$ имеем

$$\operatorname{sgn} f(a_1+\varepsilon)=+1,\quad \operatorname{sgn} f(a_2-\varepsilon)=-1;$$

следовательно, $f(x)$, а значит, и $P(x)$ имеют нуль в интервале $a_1<x<a_2$ [8]. Так как это рассуждение сохраняет силу и для остальных интервалов, то получаем, что в интервалах $a_1<x<a_2$, $a_2<x<a_3$, $\ldots$, $a_{n-2}<x<a_{n-1}$ полином $P(x)$ имеет в совокупности $n-2$ нуля. Но остающийся еще один нуль должен быть

тогда также вещественным, ибо полиномы с вещественными коэффициентами имеют лишь попарно сопряженные комплексные нули.

2. Как и выше, показываем, что $f(x)$ в каждом из $n-3$ интервалов (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\ldots$, (a_{k-2}, a_{k-1}), (a_{k+1}, a_{k+2}), $\ldots$, (a_{n-1}, a_n) имеет по одному нулю. При достаточно малом $\varepsilon>0$ и достаточно большом $\omega>0$ имеем

$$\operatorname{sgn} f(-\omega) = -\operatorname{sgn} f(a_1-\varepsilon) = \operatorname{sgn} f(a_n+\varepsilon) = -\operatorname{sgn} f(\omega) = +1.$$

Отсюда следует, что и внутри интервалов $(-\infty, a_1)$ и $(a_n, +\infty)$ имеется также по нулю [8].

27. Имеем

$$f(0)>0,\ f\left(\frac{\pi}{n}\right)<0,\ f\left(\frac{2\pi}{n}\right)>0,\ \ldots,\ f\left(\frac{2n\pi}{n}\right)>0.$$

Следовательно [8], $f(x)$ в полосе $0<\Re x<2\pi$ имеет $2n$ вещественных нулей. Но большего количества нулей $f(x)$ в этой полосе иметь не может [VI 14].

28. См 7.

29. Пусть $a_0=a_1=\ldots=a_{\alpha-1}=0$, $a_\alpha\neq 0$. Будем обозначать через a_kx^k и a_lx^l два члена, для которых

$$a_k\neq 0,\ a_{k+1}=a_{k+2}=\ldots=a_{l-1}=0,\ a_l\neq 0,$$
$$P(x)=a_\alpha x^\alpha+\ldots+a_kx^k+a_lx^l+\ldots$$

Таким образом, α есть частное значение k. Если $l-k$ нечетно, то пара $a_kx^k+a_lx^l$ привносит единицу либо в W^+, либо в W^-. Если $l-k$ четно, то от $a_kx^k+a_lx^l$ либо обе величины W^+ и W^- получают по единице, либо обе ничего. Отсюда следует, что при $a_n\neq 0$

$$(n-\alpha)-(W^+ + W^-)=\sum\nolimits^{\mathrm{I}}(l-k-1)+\sum\nolimits^{\mathrm{II}}\{l-k-[1-\operatorname{sgn}(a_ka_l)]\}.$$

$\sum^{\mathrm{I}}$ распространяется на нечетные $l-k$, $\sum^{\mathrm{II}}$ — на четные; действительно, $n-\alpha=\sum^{\mathrm{I}}(l-k)+\sum^{\mathrm{II}}(l-k)$. Как в $\sum^{\mathrm{I}}$, так и в $\sum^{\mathrm{II}}$ все члены — неотрицательные.

30. Заменяем x на αx [28] и применяем 15.

31. [G. Pólya, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 23, стр. 22, 1914.] Из 19 вытекает еще несколько больше: для справедливости второго утверждения вместо сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n$ достаточно уже, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\alpha^n=0$.

32. При $\alpha=1$ вытекает из 4. См. 28.

33. Тождественно с 21. Вытекает также из 31.

34. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 22. В доказательстве имеются пробелы.] При $\alpha=1$ вытекает из 5 [28].

35. Если среди чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ лишь одно, скажем a_α, отлично от нуля, то выражение слева приводится к произведению

$$\frac{a_\alpha}{p_1 p_2 \ldots p_\alpha}\left(1+\frac{x}{p_1}+\frac{x^2}{p_1^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{x}{p_2}+\frac{x^2}{p_2^2}+\ldots\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1+\frac{x}{p_\alpha}+\frac{x^2}{p_\alpha^2}+\ldots\right).$$

Ряд, получающийся в результате перемножения, очевидно, совсем не будет содержать перемен знака. Примем теперь, что теорема доказана для всех последовательностей, содержащих одним (ненулевым) членом меньше, чем интересующая нас последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть a_α будет первый ненулевой член этой последовательности, $0 \leqslant \alpha < n$. Положим

$$0+\frac{a_{\alpha+1}x}{p_{\alpha+1}-x}+\frac{a_{\alpha+2}x^2}{(p_{\alpha+1}-x)(p_{\alpha+2}-x)}+\ldots+\frac{a_n x^{n-\alpha}}{(p_{\alpha+1}-x)\ldots(p_n-x)}=$$
$$=0+B_1x+B_2x^2+\ldots$$

Обозначим число перемен знака в последовательности

$a_0,$	$a_1, \ldots,$	$a_\alpha,$	$a_{\alpha+1}, \ldots,$	a_n	через	$\{a\}$,
$0,$	$a_{\alpha+1},$	$a_{\alpha+2},$	$\ldots,$	a_n	»	$\{b\}$,
$A_0,$	$A_1,$	$A_2,$	$A_3,$	$\ldots$	»	$\{A\}$,
$0,$	$B_1,$	$B_2,$	$B_3,$	$\ldots$	»	$\{B\}$.

Согласно предположению

$$\{B\} \leqslant \{b\}.$$

Пусть a_β будет первый ненулевой член последовательности $0, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n$. Тогда

$$\{a\}=\{b\}+\frac{1-\operatorname{sgn}(a_\alpha a_\beta)}{2}.$$

Но первый ненулевой член последовательности $0, B_1, B_2, \ldots$ совпадает по знаку с a_β. Поэтому число перемен знака в последовательности $a_\alpha, B_1, B_2, B_3, \ldots$ равно

$$\{B\}+\frac{1-\operatorname{sgn}(a_\alpha a_\beta)}{2}.$$

Теперь

$$(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots)(p_1-x)(p_2-x)\ldots(p_\alpha-x)=$$
$$=x^\alpha(a_\alpha+B_1x+B_2x^2+\ldots),$$

следовательно [31],

$$\{A\} \leqslant \{B\} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(a_\alpha a_\beta)}{2}.$$

Отсюда $\{A\} \leqslant \{a\}$, ч. и тр. д.

36. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ — положительные нули полинома

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Имеем

$$P(x) = Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ldots(\alpha_N - x),$$

где $Q(x)$ — полином $(n-N)$-й степени с вещественными коэффициентами. Но теперь у $Q(x)$ количество перемен знака $\geqslant 0$, у $Q(x)(\alpha_1 - x)$ оно $\geqslant 1$ [30], у $Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)$ оно $\geqslant 2, \ldots$, наконец, у $Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ldots(\alpha_N - x)$ оно $\geqslant N$, ч. и тр. д.

37. Пусть a_α будет первый и a_ω — последний ненулевой коэффициент полинома $P(x)$, $\alpha \leqslant \omega$ (интерес представляет лишь случай $\alpha < \omega$), далее $0 < \xi < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_N < X < \infty$. Для ξ, достаточно близкого к нулю, и X достаточно большого, очевидно,

$$\operatorname{sgn} P(\xi) = \operatorname{sgn} a_\alpha, \quad \operatorname{sgn} P(X) = \operatorname{sgn} a_\omega \qquad [8,\ 9].$$

В соединении с 36 получаем: если $W = 1$, то также и $N = 1$. Впрочем, это нетрудно усмотреть и непосредственно [III 16].

38. [Laguerre, l. c. 1, стр. 5.] Если W конечно (а только этот случай нас здесь и интересует), то все ненулевые коэффициенты должны сохранять, начиная с некоторого a_ω, постоянный знак. Отсюда следует, что ω-я производная степенного ряда вообще не обращается в нуль в интервале $0 < x < \rho$, значит, в этом интервале степенной ряд имеет лишь конечное число положительных нулей [12]; обозначим их через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$. Тогда степенной ряд

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ldots(\alpha_N - x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

будет представлять функцию, регулярную в круге сходимости ряда $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, и, значит, будет сам сходиться в том же круге [Hurwitz-Courant, стр. 49, 266 *)]. Число перемен знака в ряде $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ неотрицательно, и утверждение теоремы выводится теперь из второго случая теоремы 31 совершенно таким же образом, как 36 из 30.

39. Радиус сходимости равен единице. Степенной ряд при $x = 0$ имеет значение 2, а при $x = 1$ — значение

$$2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \ldots = 1.$$

Таким образом, число нулей в интервале $0 < x < 1$ — четное [8]. Но, с другой стороны, оно не превосходит единицы [38]. Следова-

*) Гурвиц, стр. 75 и Курант, стр. 92. Гурвиц—Курант, стр. 62, 341—342.

тельно, оно равно нулю. Также и непосредственно видно, что для всех комплексных значений z внутри единичного круга $|z|<1$

$$\left|2-\frac{z}{1\cdot 2}-\frac{z^2}{2\cdot 3}-\ldots\right|\geqslant 2-\frac{|z|}{1\cdot 2}-\frac{|z|^2}{2\cdot 3}-\ldots>$$
$$>2-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\ldots=1.$$

40. Пусть a_α — первый ненулевой коэффициент и ω — последнее место перемены знака. Тогда

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=a_\alpha,$$
$$\lim_{x\to\rho-0}(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)=+\infty\cdot\operatorname{sgn}a_\omega \qquad [8, 9].$$

41. [C. Runge, см. 1. с. 31, стр. 25.] Случай нулей $<\xi_\alpha$ заменой x на $-x$ приводим к случаю нулей $>\xi_\omega$, а последний заменой x на $x+\text{const}$. — к тому частному случаю, когда $\xi_\alpha>0$. В этом частном случае полагаем

$$\frac{a_0+a_1(x-\xi_1)+a_2(x-\xi_1)(x-\xi_2)+\ldots+a_n(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)}=$$
$$=a_n+\frac{a_{n-1}}{\xi_n}\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{1}{\xi_n}-\frac{1}{x}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_0}{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n}\frac{1}{x^n}\frac{1}{\left(\frac{1}{\xi_1}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\xi_2}-\frac{1}{x}\right)\ldots\left(\frac{1}{\xi_n}-\frac{1}{x}\right)}=$$
$$=A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^2}+\ldots$$

Полученный степенной ряд сходится при $x>\xi_\omega$ и обладает всеми требуемыми нулями, число их не превосходит числа перемен знака в последовательности $A_0, A_1, A_2, \ldots$ [38], последнее же не превосходит числа перемен знака в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ [35, 6, 7], что и требовалось доказать. Что разность между обоими числами не может быть нечетной — доказываем, как в 37.

42. Для степенного ряда

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}-\lambda e^x=$$
$$=(1-\lambda)+\frac{1-\lambda}{1!}x+\ldots+\frac{1-\lambda}{n!}x^n-\frac{\lambda}{(n+1)!}x^{n+1}-\ldots$$

в обозначениях 38, 40 имеем $W=1$, следовательно, $N\leqslant 1$ [38], далее, так как $\rho=\infty$, то $1-N$ — четное [40], следовательно, $1-N=0$. Пусть x_n будет теперь единственный нуль функции $f_n(x)$. При прохождении x через x_n $\operatorname{sgn} f_n(x)$ переходит от $+1$ к -1

[решение 40], следовательно, при $f_n(a)>0$ также $x_n - a > 0$. Но при фиксированном a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = (1-\lambda)e^a$. Так как a произвольно, то отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Наконец,

$$f_n(x_{n-1}) = f_{n-1}(x_{n-1}) + \frac{x_{n-1}^n}{n!} = \frac{x_{n-1}^n}{n!} > 0,$$

т. е.

$$x_n > x_{n-1}.$$

43. $x^{-5}(e^x - 1)$ имеет один минимум и ни одного максимума, ибо

$$\frac{d}{dx}[x^{-5}(e^x-1)] = -x^{-6}(5e^x - 5 - xe^x) = -x^{-6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-n}{n!}x^n,$$

а этот ряд имеет лишь одно место перемены знака, именно $n=6$ [38, 40]. (*Закон излучения Планка.*)

44. Рассматриваемые нули принадлежат также ряду

$$(1-x)^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) = \\ = a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \ldots \quad [38].$$

45. [См. M. Fekete, Rend. Palermo, т. 34, стр. 89, 1912.] Полином имеет нулем $x=1$ и при умножении на $(1-x)^{-2}$ дает степенной ряд с неотрицательными коэффициентами.

46. [G. Pólya, Deutsche Math.-Ver., т. 28, стр. 37, 1919.] Положим

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{163}\left(\frac{\nu}{163}\right)x^{\nu}.$$

Произведение

$$(1-x)^{-2}f(x) = x + x^2 - x^5 - x^6 - \ldots - x^{65} + 7x^{66} + 14x^{67} + \ldots \\ \ldots + 163x^{161} + 163x^{162}(1-x)^{-1}$$

имеет две перемены знака. Отсюда следует, что число нулей в интервале $0<x<1$ должно быть равно 0 или 2 [38, 40]. Что оно равно 2, убеждаемся следующим образом: при $0<x<1$ имеем

$$x^{-1}f(x) = \sum_{\nu=1}^{10}\left(\frac{\nu}{163}\right)x^{\nu-1} - x^{10} - x^{11} - x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + \ldots < \\ < \sum_{\nu=1}^{10}\left(\frac{\nu}{163}\right)x^{\nu-1} + x^{16}(1-x)^{-1},$$

последнее же выражение при $x=0{,}7$ будет равно $-0{,}00995\ldots$

47. Пусть N^- — число отрицательных нулей, N^+ — число положительных нулей, значит, в обозначениях решения 29 $n = N^- + \alpha + N^+$. Имеем [решение 29]

$$n - (W^- + \alpha + W^+) = (N^- - W^-) + (N^+ - W^+) \geqslant 0$$

и [36]

$$N^- - W^- \leqslant 0, \quad N^+ - W^+ \leqslant 0,$$

следовательно,

$$N^- - W^- = 0, \quad N^+ - W^+ = 0,$$

ч. и тр. д.

48. Если бы определитель был равен нулю, то соответствующая однородная система имела бы нетривиальные решения, т. е. существовали бы такие n вещественных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 > 0$, что полином

$$c_1 x^{\nu_1} + c_2 x^{\nu_2} + \ldots + c_n x^{\nu_n}$$

обращался бы в нуль для $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Но это противоречит теореме 36, ибо последовательность коэффициентов содержит не более n отличных от нуля членов, значит, не может иметь n перемен знака, и тем менее указанный полином может иметь n положительных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Итак, определитель не равен нулю. Если $n = 1$, он больше нуля. Предположим, что того же вида определитель $(n-1)$-го порядка больше нуля. Будем считать α_n переменным. Так как при возрастании α_n от α_{n-1} до $+\infty$ определитель не равен нулю, то он сохраняет постоянный знак. Но при $\alpha_n \to +\infty$ знак определителя будет совпадать со знаком его главного минора, являющегося определителем такого же вида, но $(n-1)$-го порядка. Следовательно, согласно предположению это будет знак плюс.

49. Согласно 36 число вещественных нулей в обозначениях решения 29 будет меньше или равно $W^- + \alpha + W^+$, следовательно, число мнимых нулей больше или равно

$$n - (W^- + \alpha + W^+) = \sum\nolimits^{\mathrm{I}} (l - k - 1) + \sum\nolimits^{\mathrm{II}} \{l - k - [1 - \operatorname{sgn}(a_k a_l)]\}.$$

Если $a_k \neq 0$, $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_{k+2m} = 0$, то $l - k$ либо нечетно и $\geqslant 2m + 1$, либо четно и $\geqslant 2m + 2$.

50. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 111.] Имеем

$$P(x)(1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2m} x^{2m}) = 1 - b_{2m+1} x^{2m+1} + \ldots$$

Выражение в правой части не равно постоянной, ибо $P(x)$ не есть постоянная. Следовательно, это есть полином, наверное имеющий $2m$ мнимых нулей [49]; так как $P(x)$, по предположению, имеет лишь вещественные нули, то все эти мнимые нули должны принадлежать полиному $1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2m} x^{2m}$.

51. [J. Grommer, J. für Math., т. 144, стр. 130—131, 1914.] Для полинома $P(x) = (1 - x_1 x)(1 - x_2 x) \ldots (1 - x_n x)$ имеем [50]

$b_{2m} = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если бы b_{2m} было неположительно, то полином $1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2m} x^{2m}$ не мог бы иметь $2m$ мнимых корней.

52. Первое доказательство. Явствует из представления через нули полинома $P(x)$ [51].

Второе доказательство. Примем для упрощения, что

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

где

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n.$$

Тогда [VI, § 9]

$$1 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{P'(a_\nu)} \frac{P(x)}{x - a_\nu},$$

стало быть,

$$B_k = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^k}{P'(a_\nu)}.$$

Рассмотрим полином p-й степени $(p \geq n)$

$$x^p - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^p}{P'(a_\nu)} \frac{P(x)}{x - a_\nu} = x^p - B_p x^{n-1} + \ldots = L_p(x);$$

$L_p(x)$ обращается в нуль для $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ и, следовательно [36], имеет по меньшей мере n перемен знака. Но число его коэффициентов $\leq n + 1$. Следовательно $B_p > 0$.

53. Если для полинома степень, число вещественных нулей и число мнимых нулей будут соответственно равны $n, r, n - r$, то для его производной те же величины будут $= n - 1, \geq r - 1$ [12], $\leq n - 1 - (r - 1)$.

54. Пусть полином будет n-й степени. Кроме $n - 1$ нулей, существование которых доказано в решении **12**, производная не имеет никаких других.

55. [53, 54.]

56. Положим

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = Q_\nu(x)(1 + x^2)^{-\nu - \frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_{\nu+1}(x) = -(2\nu + 1)\, x Q_\nu(x) + (1 + x^2)\, Q'_\nu(x).$$

Следовательно, $Q_\nu(x)$ есть полином ν-й степени. Примем, что $Q_\nu(x)$ имеет ν вещественных отличных друг от друга нулей. Тогда $Q_{\nu+1}(x)$ будет иметь по одному нулю между каждыми двумя нулями $Q_\nu(x)$ [**10**], между $-\infty$ и наименьшим из нулей $Q_\nu(x)$ и между наибольшим и $+\infty$. Кроме этих $(\nu-1)+2$ нулей иных нулей полином $Q_{\nu+1}(x)$ иметь не может.

57. Ход доказательства — тот же, что в 56. Возможна также и непосредственная проверка, так как n корней уравнения

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{x}{1+x^2}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left(\frac{1}{(x+i)^n}+\frac{1}{(x-i)^n}\right)=0$$

имеют следующие значения:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n},\quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \operatorname{ctg}\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

58. Для $H_n(x)$ доказывается, как в 56, в остальных двух случаях требуются некоторые модификации [16].

Функции	$(1-x^2)^n$;	$e^{-x}x^n$;	e^{-x^2}
имеют нули в точках $x=$	$-1,\ +1$;	$0,\ +\infty$;	$-\infty,\ +\infty$,
соответственно порядка	$n,\ n$;	$n,\ \infty$;	$\infty,\ \infty$.

59. $Q_n(x)$ имеет степень $n(q-1)$ [получаем с помощью рекуррентной формулы, как 56]. Пусть p_n — число положительных нулей и ν_n — кратность нуля $x=0$. Из соотношения

$$(1+x^q)^n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{q-1}-x^{2q-1}+x^{3q-1}-\ldots)=Q_n(x)$$

получаем

$$\nu_1=q-1,\quad \nu_2=q-2,\ \ldots,\ \nu_q=0,\quad \nu_{q+1}=q-1,\ \ldots$$

и т. д. с периодом q. Так как, далее, положив $\omega=e^{\frac{2\pi i}{q}}$, имеем $Q_n(\omega x)=\omega^{\nu_n}Q_n(x)$, то каждому нулю, лежащему на положительной вещественной оси, соответствует аналогично расположенный нуль на каждом из $q-1$ остальных лучей.

Пусть теперь теорема верна для некоторого n, тогда

$$\nu_n+qp_n=n(q-1).$$

Так как $(n-1)$-я производная от $x^{q-1}(1+x^q)^{-1}$ при $x=+\infty$ обращается в нуль, то [16] $p_{n+1}\geqslant p_n$, если $\nu_n=0$; $p_{n+1}\geqslant p_n+1$, если $\nu_n>0$. И в том и в другом случае

$$\nu_{n+1}+qp_{n+1}\leqslant n(q-1)+q-1=\nu_n+qp_n+q-1,$$

$$p_{n+1}\leqslant p_n+\frac{\nu_n-\nu_{n+1}+q-1}{q}=\begin{cases}p_n, & \text{если } \nu_n=0,\\ p_n+1, & \text{если } \nu_n>0.\end{cases}$$

Поэтому знак $\leqslant$ нужно всюду заменить знаком равенства, и

$$\nu_{n+1}+qp_{n+1}=(n+1)(q-1).$$

По поводу простоты нулей см. 55, 56. Аналогично проводится доказательство для $R_n(x)$. Введенные q лучей представляют собой симметрали соседних полюсов функции $\frac{1}{1+z^q}$, тем отличающиеся от других лучей, проходящих через начало координат, что вдоль них функция e^{-z^q} наиболее быстро убывает. (См. G. Pólya, Math. Zeitschr., т. 12, стр. 38, 1922.)

60. При переходе от

$$a_0+\binom{n}{1}a_1x+\binom{n}{2}a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

к

$$a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

число мнимых нулей не изменяется, при переходе к

$$n\left[a_1+\binom{n-1}{1}a_2x+\binom{n-1}{2}a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}\right]$$

— не увеличивается [53].

61. Уточняя теорему 60 [см. 54], находим, что полиномы

$$x^2+2m_1x+m_2^2,\quad m_1x^2+2m_2^2x+m_3^3,\ \ldots,\ m_{n-2}^{n-2}x^2+2m_{n-1}^{n-1}x+m_n^n$$

имеют вещественные и притом *простые* нули. Поэтому

$$m_1^2>m_2^2,\quad m_2^4>m_1m_3^3,\ \ldots,\ m_{n-1}^{2n-2}>m_{n-2}^{n-2}m_n^n,$$

откуда последовательно получаем

$$m_1>m_2,\quad m_2^4>m_2m_3^3,\ \ldots,\ m_{n-1}^{2n-2}>m_{n-1}^{n-2}m_n^n.$$

62. Приводится к исследованию нулей функции $e^{-\alpha x}\frac{d}{dx}[e^{\alpha x}P(x)]$ [6, 16].

63. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_n\neq 0$. Положим

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=a_n(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\ldots(x+\alpha_n);$$

задача приводится тогда к исследованию нулей функции

$$a_ne^{-\alpha_nx}\frac{d}{dx}e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x}\frac{d}{dx}\ldots\frac{d}{dx}e^{(\alpha_2-\alpha_1)x}\frac{d}{dx}e^{\alpha_1x}P(x).$$

Повторное применение 62.

64. Предельный случай теоремы 63; принимая во внимание III 201 и полагая $n=2m$, имеем

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{2m}x^{2m}=\left(1-\frac{x^2}{m}\right)^m\to e^{-x^2}$$

при $m\to\infty$.

65. И $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет лишь вещественные нули, следовательно, также [63]

$$\frac{1}{n!}\left(a_nx^n+a_{n-1}\frac{dx^n}{dx}+a_{n-2}\frac{d^2x^n}{dx^2}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{a_n}{n!}x^n+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots$$

66. Полином

$$\alpha P(x)+xP'(x)=x^{-\alpha+1}\frac{d}{dx}[x^\alpha P(x)]=-(-x)^{1-\alpha}\frac{d}{dx}[(-x)^\alpha P(x)]$$

обладает не меньшим (соответственно) числом нулей >0, $=0$ и <0, чем полином $P(x)$. Действительно, при $\alpha<-n$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha P(x)=0$ [16] и при $\alpha>0$ $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha P(x)=0$.

67. [Laguerre, l. c. 1, стр. 200.] Уравнение

$$a_0(0+\alpha)+a_1(1+\alpha)x+a_2(2+\alpha)x^2+\ldots+a_n(n+\alpha)x^n=0$$

имеет не меньше мнимых корней, чем уравнение

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

[66]. Здесь $Q(x)=x+\alpha$. Применяем повторно.

68. Предельный случай теоремы 67. Полагаем

$$Q(x)=\left(1+\frac{x^2\ln q}{m}\right)^m\to q^{x^2}.$$

69. [Laguerre, задача; решение — G. Pólya, Interméd. des math., т. 20, стр. 127, 1913.] Пусть α вещественно. Полином

$$Q(x)=\left(1+\frac{\alpha\sqrt{x}}{m}\right)^m+\left(1-\frac{\alpha\sqrt{x}}{m}\right)^m$$

имеет лишь вещественные отрицательные нули, именно [57]

$$x=-\left(\frac{m}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2m}\right)^2,\quad -\left(\frac{m}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2m}\right)^2,\quad\ldots,\quad -\left(\frac{m}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)^2.$$

При $q=e^\alpha$ уравнение задачи является предельным случаем уравнения

$$a_0Q(0)+a_1Q(1)x+a_2Q(2)x^2+\ldots+a_nQ(n)x^n=0,$$

когда $m\to\infty$ [67, III 201].

70. Полагаем $\Phi(x)=f(x)-a-bx$, $\Phi(x_1)=\Phi(x_2)=\Phi(x_3)=0$, $x_1<x_2<x_3$. Тогда $\Phi'(x)$ имеет по одному нулю в каждом из интервалов $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и $x_2\leqslant x\leqslant x_3$ [10], и, следовательно, $\Phi''(x)=f''(x)$ имеет одно изменение знака между x_1 и x_3 [25].

71. По предположению,

$$\Phi(x) = f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1} x^{n-1}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — постоянные коэффициенты) имеет в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ $n+1$ нуль. Применяя последовательно n раз **10**, находим, что внутри указанного интервала существует такая точка ξ, что $\Phi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) = 0$.

72. Рассматриваемая разность имеет в точке $x=0$ n совпадающих нулей. Если бы она имела в интервале $-1 < x < \infty$ еще один, $(n+1)$-й нуль, то в этом интервале должна была бы обращаться в нуль функция $(1+x)^{\alpha-n}$ [**71**], что неверно.

73. Разность $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ имеет в точке $x=0$ нуль кратности n, тогда как e^x вообще не имеет нулей. Утверждение вытекает из **71** тем же путем, что и **72**; впрочем, по существу оно равносильно тому факту, что функция e^x при $x < 0$ обвертывается своим степенным рядом [I **141**].

74. [J. J. Sylvester, Mathematical Papers, т. 2, стр. 516, Cambridge, University Press, 1908.] Достаточно показать, что

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = f_n(x)$$

не может иметь двух *соседних отрицательных* нулей. Действительно, если бы a и b были таковыми, то мы имели бы

$$f_n(a) = f_n'(a) + \frac{a^n}{n!} = 0, \quad f_n(b) = f_n'(b) + \frac{b^n}{n!} = 0,$$

$$\operatorname{sgn} f_n'(a) = \operatorname{sgn} f_n'(b) \neq 0;$$

$f_n'(x)$ имела бы в интервале $a < x < b$ согласно **8** четное, а согласно **10** нечетное число нулей!

75. При $l=1$ ясно. Пусть теорема доказана для случая $l-1$ показательных функций. Если $g(x)$ имеет N и

$$g^*(x) = \frac{d^{m_l}}{dx^{m_l}}\left[e^{-\alpha_l x} g(x)\right] = \frac{d^{m_l}}{dx^{m_l}}\left[e^{-\alpha_l x} g(x) - P_l(x)\right]$$

N^* вещественных нулей, то

$$N^* \geqslant N - m_l \qquad [\mathbf{12}].$$

Но, с другой стороны, в $g^*(x)$ входят лишь $l-1$ показательных функций [с показателями $(a_1 - a_l)x, \ldots, (a_{l-1} - a_l)x$; относительно степеней входящих полиномов см. **62**]. Отсюда согласно предположению получаем

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{l-1} - 1 \geqslant N^*.$$

76. [См. G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 28, стр. 173, 1920.] Если бы определитель обращался в нуль, то соответствующая однородная система имела бы нетривиальное решение, т. е. существовали бы такие n вещественных чисел c_1, c_2 ..., c_n, $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2>0$, что целая функция

$$c_1e^{\beta_1x}+c_2e^{\beta_2x}+\ldots+c_ne^{\beta_nx},$$

не будучи тождественно равной нулю, обращалась бы в нуль для $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Но это противоречит доказанной в **75** теореме, по которой так построенная функция имеет самое большое $n-1$ вещественный нуль. По поводу знака см. **48**.

77. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 3.]

78[1]. «Ряд Дирихле» $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_ne^{-\lambda_ns}$ можно внутри его области сходимости дифференцировать почленно; следуем без всяких изменений ходу доказательства теоремы **77**.

79. [J. J. Sylvester, l. c. **74**, стр. 360, 401; см. l. c. **31**, стр. 30.]

1. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все одного знака и m — четное, то $W=0$ и, очевидно, также $N=0$.

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — все одного знака и m — нечётное, то $W=1$, и так как

$$P'(x)=m[a_1(x-\lambda_1)^{m-1}+a_2(x-\lambda_2)^{m-1}+\ldots+a_n(x-\lambda)^{m-1}]$$

нигде не обращается в нуль (см. случай 1), то $N\leqslant 1$ [**10**].

3. Пусть $a_\alpha a_{\alpha+1}<0$, $1\leqslant\alpha<n$, и теорема доказана для случая $W-1$ перемены знака. Пусть $P(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$. Выберем λ так, чтобы $\lambda_\alpha<\lambda<\lambda_{\alpha+1}$, $P(\lambda)\neq 0$ и $b_1+\lambda mb_0\neq 0$ в предположении, что $b_0\neq 0$. Положим

$$P(x)(x-\lambda)^{-m}=F(x),$$

$$(x-\lambda)^{m+1}F'(x)=a_1^*(x-\lambda_1)^{m-1}+\ldots+a_n^*(x-\lambda_n)^{m-1}=P^*(x),$$

где $a_\nu^*=m(\lambda_\nu-\lambda)a_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$. Число перемен знака в последовательности $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, (-1)^{m-1}a_1^*$ равно

$$W^*=W-1.$$

Обозначая через N^* число вещественных нулей полинома $P^*(x)$, будем иметь, по предположению,

$$W^*\geqslant N^*.$$

---

[1]) В решениях 78, 80—84 необходимые рассмотрения вопросов сходимости не проводятся, однако результат их используется. По поводу их рассмотрений см., например, E. Landau, Münch. Ber., т. 36, стр. 151, 1906.

3а. При $b_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{F(x)}{x^2 F'(x)} = -\frac{b_0}{b_1 + \lambda m b_0} \neq 0.$$

Тогда либо $\operatorname{sgn} F(x) = \operatorname{sgn} F'(x)$ в окрестности точки $x = -\infty$, либо $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} F'(x)$ в окрестности точки $x = +\infty$. Применяя либо **14** к $(-\infty, \lambda)$ (надлежащим образом) и одновременно **12** к $(\lambda, +\infty)$, либо в случае необходимости наоборот, в том и другом случае получаем

$$N^* \geqslant N - 1.$$

3б. При $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0$, $b_s \neq 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{xF'(x)} = -\frac{1}{s}.$$

Теперь при $x \to -\infty$ имеем $\operatorname{sgn} F(x) = \operatorname{sgn} F'(x)$, при $x \to +\infty$ имеем $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} F'(x)$. Применяя **14** к $(-\infty, \lambda)$ и $(\lambda, +\infty)$, получаем даже, что $N^* \geqslant N$.

80. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 29; см. G. Pólya, C. R., т. 156, стр. 996, 1913.] Если $Z = 0$, то, очевидно, $W = 0$. Пусть теперь $Z > 0$ и λ_0 — общий конец двух соседних интервалов, в которых $\varphi(\lambda)$ имеем постоянные, но противоположные знаки [стр. 49]. Тогда число изменений знака функции

$$\varphi^*(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)\,\varphi(\lambda)$$

будет $Z^* = Z - 1$. Число N^* нулей функции

$$F^*(x) = e^{-\lambda_0 x} \frac{d}{dx} [e^{\lambda_0 x} F(x)] = \int_0^\infty \varphi^*(\lambda)\, e^{-\lambda x} d\lambda$$

будет больше или равно $N - 1$ [**12**]. Дальше применяем рассуждение по методу полной индукции, как в **77**, **79**.

81. [См. L. Fejér, C. R., т. 158, стр. 1328—1331, 1914.] Число N вещественных нулей функции

$$F(x) = \int_0^\infty f(t)\, t^x\, dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda} f(e^{-\lambda})\, e^{-\lambda x}\, d\lambda$$

не меньше числа перемен знака в последовательности $a_0, a_1, a_2 \ldots$, в чем убеждаемся прямым подсчетом [**8**, **9**]. В случае 1 имеем $F(n) = a_n$, в случаях 2, 3 $F(n) = 0$. Выбор пределов интегрирования $(0, \infty$ или $-\infty, \infty)$ не оказывает влияния на доказательство **80**.

82. Интегрированием по частям получаем

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda)\, e^{-\lambda x}\, d\lambda = x \int_0^\infty \Phi(\lambda)\, e^{-\lambda x}\, d\lambda$$

в случае, если интеграл в левой части сходится и $x > 0$ [80].

83. Суммируя по частям, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}\right),$$

если ряд в левой части сходится и $x > 0$. Положим

$$\varphi(\lambda) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \text{ при } \lambda_n \leqslant \lambda < \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда рассматриваемый ряд принимает вид

$$x \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda x}\, d\lambda = x \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(\lambda)\, e^{-\lambda x}\, d\lambda.$$

Число изменений знака кусочно-постоянной функции $\varphi(\lambda)$ равно числу перемен знака в последовательности $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ [80].

84. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\, dt = \int_0^1 t^{x-1} f(1-t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(1 - e^{-\lambda})\, d\lambda.$$

[80, 24, 44.]

85. [L a g u e r r e, l. c. 1, стр. 28.] Положим

$$f(x) = a_n \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{-x} + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right)^{-x} + \ldots + a_1 \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{-x}.$$

Тогда будет существовать самое большее $n-1$ целое число k, для которого $f(k) = 0$ [75, также 48]. Поэтому ряд

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu F(\alpha_\nu x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(a_1 \alpha_1^k + a_2 \alpha_2^k + \ldots + a_n \alpha_n^k\right) x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k f(k)\, x^k$$

не может тождественно обращаться в нуль. Применяя 38, 8, 83, получаем, что число положительных нулей функции $\Phi(x)$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $p_0 f(0)$, $p_1 f(1)$, $p_2 f(2)$, ..., число положительных нулей функции $f(x)$ не превосходит числа перемен знака в последовательности a_n, a_n+a_{n-1}, $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}$, ...

86. Функция вида

$$c_1 F(x\beta_1)+c_2 F(x\beta_2)+\ldots+c_n F(x\beta_n)$$

не может иметь более $n-1$ положительного нуля [85], следовательно, наверное не может обращаться в нуль при всех значениях $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Теперь рассуждаем, как в 48, 76. Можно показать, что определитель больше нуля. Это утверждение в случае $\alpha_\nu=\beta_\nu$ вытекает на основании теории квадратичных форм из того, что

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} F(\alpha_\lambda\alpha_\mu)\, x_\lambda x_\mu=\sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(\alpha_1^k x_1+\alpha_2^k x_2+\ldots+\alpha_n^k x_n\right)^2 \geqslant 0.$$

87. Примем, что правило Декарта применимо.

1. Пусть

$$1 \leqslant \nu_1<\nu_2<\nu_3<\ldots<\nu_l \leqslant n;$$

тогда $W\left[h_{\nu_1}(x), \ldots, h_{\nu_l}(x)\right] \neq 0$ в интервале $a<x<b$. Действительно, если бы этот вронскиан обращался в нуль в некоторой точке $x=x_0$, то можно было бы найти l постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_l$, $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_l^2>0$, удовлетворяющих системе однородных уравнений

$$\begin{aligned}
&c_1 h_{\nu_1}(x_0) &&+c_2 h_{\nu_2}(x_0) &&+\ldots+c_l h_{\nu_l}(x_0) &&=0,\\
&c_1 h'_{\nu_1}(x_0) &&+c_2 h'_{\nu_2}(x_0) &&+\ldots+c_l h'_{\nu_l}(x_0) &&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_1 h_{\nu_1}^{(l-1)}(x_0) &&+c_2 h_{\nu_2}^{(l-1)}(x_0) &&+\ldots+c_l h_{\nu_l}^{(l-1)}(x_0) &&=0,
\end{aligned}$$

и, значит, функция $c_1 h_{\nu_1}(x)+c_2 h_{\nu_2}(x)+\ldots+c_l h_{\nu_l}(x)$ имела бы в точке x_0 нуль l-го порядка. Но это противоречит тому, что коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_l$ могут иметь самое большее $l-1$ перемену знака.

2. Докажем, например, что все вронскианы $(n-1)$-го порядка имеют общий знак. Пусть $a<x_0<b$; определим $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&a_1 h_1(x_0) &&+a_2 h_2(x_0) &&+\ldots+a_n h_n(x_0) &&=0,\\
&a_1 h'_1(x_0) &&+a_2 h'_2(x_0) &&+\ldots+a_n h'_n(x_0) &&=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1 h_1^{(n-2)}(x_0) &&+a_2 h_2^{(n-2)}(x_0) &&+\ldots+a_n h_n^{(n-2)}(x_0) &&=0,\\
&a_1 h_1^{(n-1)}(x_0) &&+a_2 h_2^{(n-1)}(x_0) &&+\ldots+a_n h_n^{(n-1)}(x_0) &&=1,
\end{aligned}$$

определитель которой не равен нулю (см. 1). Функция

$$a_1h_1(x)+a_2h_2(x)+\ldots+a_nh_n(x)$$

внутри интервала $[a, b]$ имеет $n-1$ нуль (именно нуль $(n-1)$-го порядка в точке x_0). Поэтому последовательность коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет в точности $n-1$ перемену знака. Положим $(-1)^{n-1}W[h_1(x_0), h_2(x_0), \ldots, h_n(x_0)]=W$. Тогда все числа

$$a_1W=W(h_2, h_3, \ldots h_n), \quad -a_2W=W(h_1, h_3, \ldots, h_n),$$
$$a_3W=W(h_1, h_2, h_4, \ldots, h_n), \ldots$$

(т. е. вронскианы $(n-1)$-го порядка, взятые в точке $x=x_0$) будут иметь одинаковый знак, ч. и тр. д.

88. Признак 87 для случаев $l=1, 2$ означает, что, с одной стороны, $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x)$ имеют одинаковые знаки, с другой стороны, также

$$W(h_1, h_2)=h_1^2\frac{d}{dx}\frac{h_2}{h_1}, \quad W(h_2, h_3)=h_2^2\frac{d}{dx}\frac{h_3}{h_2}, \ldots$$

имеют одинаковые знаки. В этом можно убедиться также и непосредственно.

89. Пусть $l\leqslant n-1$, $1\leqslant\nu_1<\ldots<\nu_j<\alpha<\nu_{j+1}<\ldots<\nu_l\leqslant n$. Имеем [VII 57]

$$W(h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, \ldots, h_{\nu_j}, h_\alpha, h_{\nu_{j+1}}, \ldots, h_{\nu_l})=$$
$$=h_\alpha^{l+1}W\left[\frac{h_{\nu_1}}{h_\alpha}, \frac{h_{\nu_2}}{h_\alpha}, \ldots, \frac{h_{\nu_j}}{h_\alpha}, 1, \frac{h_{\nu_{j+1}}}{h_\alpha} \ldots, \frac{h_{\nu_l}}{h_\alpha}\right]=$$
$$=h_\alpha^{l+1}W\left[-\left(\frac{h_{\nu_1}}{h_\nu}\right)', \ldots, -\left(\frac{h_{\nu_j}}{h_\alpha}\right)', \left(\frac{h_{\nu_{j+1}}}{h_\alpha}\right)' \ldots, \left(\frac{h_{\nu_l}}{h_\alpha}\right)'\right].$$

90. Пусть правило Декарта применимо к системе $n-1$ любых функций, удовлетворяющих условиям, наложенным на составленные из них вронскианы. Пусть функция

$$F(x)=a_1h_1(x)+a_2h_2(x)+\ldots+a_nh_n(x)$$

имеет N нулей внутри интервала $[a, b]$, а последовательность коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет W перемен знака. Случай $W=0$ ясен. Пусть теперь $\alpha+1$ — какое-нибудь место перемены знака. В обозначениях 89 имеем

$$\frac{d}{dx}\frac{F(x)}{h_\alpha(x)}=$$
$$=a_1\frac{d}{dx}\frac{h_1}{h_\alpha}+\ldots+a_{\alpha-1}\frac{d}{dx}\frac{h_{\alpha-1}}{h_\alpha}+a_{\alpha+1}\frac{d}{dx}\frac{h_{\alpha+1}}{h_\alpha}+\ldots+a_n\frac{d}{dx}\frac{h_n}{h_\alpha}=$$
$$=-a_1H_1(x)-\ldots-a_{\alpha-1}H_{\alpha-1}(x)+a_{\alpha+1}H_\alpha(x)+\ldots+a_nH_{n-1}(x)=F^*(x).$$

Если N^* — число нулей функции $F^*(x)$ в интервале $a<x<b$ и W^* — число перемен знака в последовательности

$$-a_1,\ -a_2,\ \ldots,\ -a_{\alpha-1},\ a_{\alpha+1},\ \ldots,\ a_n,$$

или, что то же [3], — в последовательности

$$-a_1,\ -a_2,\ \ldots,\ -a_{\alpha-1},\ -a_\alpha,\ a_{\alpha+1},\ \ldots,\ a_n,$$

то [12]

$$N^* \geqslant N-1, \quad W^* = W-1.$$

Вронскианы, составленные из функций $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_{n-1}(x)$, удовлетворяют условиям 87 [89]. Поэтому по принципу полной индукции

$$N^* \leqslant W^*.$$

91. Имеем

$$W\left(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x} \prod_{j<k}^{1,2,\ldots,n} (\lambda_k-\lambda_j) > 0.$$

92. В обозначениях решения 63 имеем

$$a_n e^{-\alpha_n x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_n-\alpha_{n-1})x} \frac{d}{dx} \ldots \frac{d}{dx} e^{(\alpha_2-\alpha_1)x} \frac{d}{dx} e^{\alpha_1 x} f(x) =$$
$$= a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \ldots + a_n f^{(n)}(x).$$

Применяем **12** n раз, **6** $n+1$ раз.

93. [G. Pólya, Tsans. American M. S., т. 24, стр. 312—324, 1922; см. H. Poincaré, Interméd. des math., т. 1, стр. 141—144, 1894.] Применяя формулу VII **62**, доказываем, как **92**.

94. Предположение равносильно тому, что имеет место тождество

$$h^{(n)}(x) + \varphi_1(x) h^{(n-1)}(x) + \varphi_2(x) h^{(n-2)}(x) + \ldots + \varphi_n(x) h(x) \equiv 0,$$

и разность $f(x) - h(x)$ в указанном интервале $n+1$ раз обращается в нуль. Применяем **93** к функции $f(x) - h(x)$.

95. [См. H. A. Schwarz, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, т. 2, стр. 296, Berlin, J. Springer, 1890; T. J. Stieltjes, Oeuvres, т. 2, стр. 110, Groningen, P. Noordhoff, 1918.] Принимаем, что $|\varphi_\lambda(x_\mu)| \neq 0$. Обозначим через Q значение отношения $|f_\lambda(x_\mu)| : |\varphi_\lambda(x_\mu)|$. Функция от x

$$|f_k(x_1) f_k(x_2) \ldots f_k(x_{n-1}) f_k(x)| - Q\,|\varphi_k(x_1)\varphi_k(x_2)\ldots\varphi_k(x_{n-1})\varphi_k(x)|$$

обращается в нуль в точках $x = x_{n-1}$ и $x = x_n$. По теореме Ролля будем иметь

$$|f_k(x_1) f_k(x_2) \ldots f_k(x_{n-1}) f_k'(\eta_n)| -$$
$$- Q\,|\varphi_k(x_1)\varphi_k(x_2)\ldots\varphi_k(x_{n-1})\varphi_k'(\eta_n)| = 0,$$

где

$$x_{n-1} < \eta_n < x_n.$$

Заменим теперь в левой части этого уравнения x_{n-1} на x. Получающаяся функция от x будет обращаться в нуль в точках $x = x_{n-2}$ и $x = x_{n-1}$ и т. д. Затем заменим η_n через x и т. д. Таким образом, после $[(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1]$-кратного применения теоремы Ролля мы придем к требуемому соотношению для Q.

96. Частный случай теоремы 95 при

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = x^2, \ \ldots, \ \varphi_n(x) = x^{n-1}.$$

Посредством сложения строк получаем

$$\frac{1}{1^{n-1}2^{n-2}3^{n-3}\ldots(n-1)^1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \ldots & \binom{x_n}{1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \ldots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\sum\limits_{j<k}^{1,2,\ldots,n}(x_k - x_j)}{\sum\limits_{j<k}^{1,2,\ldots,n}(k-j)}.$$

97. Частный случай теоремы 96:

$$f_1(x) = 1, \ f_2(x) = x, \ f_3(x) = x^2, \ \ldots, \ f_{n-1}(x) = x^{n-2}.$$

98. Частный случай теоремы 97:

$$x_1 = x, \ x_2 = x+h, \ x_3 = x+2h, \ \ldots, \ x_n = x+(n-1)h.$$

99. [L. c. 93.] Неравенства 93 (**) при $n=2$ дают лишь одно условие: $h(x) > 0$. По теореме о среднем значении

$$\frac{1}{h(x_1)\,h(x_2)}\begin{vmatrix} h(x_1) & h(x_2) \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = \frac{f(x_2)}{h(x_2)} - \frac{f(x_1)}{h(x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{[h(\xi)]^2}\begin{vmatrix} h(\xi) & h'(\xi) \\ f(\xi) & f'(\xi) \end{vmatrix}.$$

Полагаем

$$\frac{d}{dx}\frac{h_2(x)}{h_1(x)} = H_1(x), \ \ldots, \ \frac{d}{dx}\frac{h_{n-1}(x)}{h_1(x)} = H_{n-2}(x), \ \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{h_1(x)} = F(x).$$

После $(n-1)$-кратного применения теоремы Ролля получаем [решение 95]

$$\frac{1}{h_1(x_1)\,h_1(x_2)\ldots h_1(x_n)}\begin{vmatrix} h_1(x_1) & h_1(x_2) & \ldots & h_1(x_n)\\ h_2(x_1) & h_2(x_2) & \ldots & h_2(x_n)\\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\\ h_{n-1}(x_1) & h_{n-1}(x_2) & \ldots & h_{n-1}(x_n)\\ f(x_1) & f(x_2) & \ldots & f(x_n)\end{vmatrix} =$$

$$=(x_n-x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})\ldots(x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ \dfrac{h_2(x_1)}{h_1(x_1)} & H_1(\xi_1) & \ldots & H_1(\xi_{n-1})\\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\\ \dfrac{h_{n-1}(x_1)}{h_1(x_1)} & H_{n-2}(\xi_1) & \ldots & H_{n-2}(\xi_{n-1})\\ \dfrac{f(x_1)}{h_1(x_1)} & F(\xi_1) & \ldots & F(\xi_{n-1})\end{vmatrix},$$

где $x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\ldots<x_{n-1}<\xi_{n-1}<x_n$. Преобразуем вронскиан, стоящий в правой части доказываемого соотношения, согласно VII 58. Условия 93 (**) функциями $H_1(x)$, $H_2(x)$, ..., $H_{n-2}(x)$ удовлетворяются. [89.] Если мы примем, что теорема доказана для $n-1$ функции $H_1(x)$, $H_2(x)$, ..., $H_{n-2}(x)$, $F(x)$, то из указанного преобразования будет вытекать, что она справедлива также для n функций $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_{n-1}(x)$, $f(x)$.

100. Частный случай теоремы 99:

$$h_\nu(x)=e^{\beta_\nu x}\quad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$
$$f(x)=e^{\beta_n x},\quad x_\mu=\alpha_\mu\quad(\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Соответствующие вронскианы положительны [91].

101. Линейные преобразования плоскости Z в плоскость Z', оставляющие бесконечно удаленную точку неподвижной, имеют вид

$$Z'=aZ+b.$$

Из соотношений

$$\zeta=m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n\quad(m_1+m_2+\ldots+m_n=1),$$
$$z_1'=az_1+b,\ z_2'=az_2+b,\ \ldots,\ z_n'=az_n+b,$$
$$\zeta'=m_1z_1'+m_2z_2'+\ldots+m_nz_n'$$

получаем

$$\zeta'=a\zeta+b.$$

102. Пусть сначала z, z_1, z_2, ..., z_n конечны. Требуемое преобразование имеет вид

$$Z'=\frac{a}{Z-z}+b\qquad(a\neq 0).$$

Из соотношений

$$z_1' = \frac{a}{z_1 - z} + b, \quad z_2' = \frac{a}{z_2 - z} + b, \quad \ldots, \quad z_n' = \frac{a}{z_n - z} + b,$$
$$\zeta' = m_1 z_1' + m_2 z_2' + \ldots + m_n z_n' \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1),$$
$$\zeta' = \frac{a}{\zeta - z} + b$$

получаем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{m_1}{z_1 - z} + \frac{m_2}{z_2 - z} + \ldots + \frac{m_n}{z_n - z} \qquad (*)$$

независимо от a и b. Если $z_\nu = \infty$ для некоторого ν, так что z конечно, то ν-й член в правой части формулы (*) пропадает. Если $z = \infty$, следовательно, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ конечны, то преобразование приводится к повороту и растяжению и ζ совпадает с обыкновенным центром тяжести [101].

103. При $z = \infty$ ясно. Отсюда в результате линейного отображения получаем: прямые, проходящие через z_i, z_k $(z_i \neq z_k)$, отображаются в «окружности», проходящие через z_i, z_k и z; каждая такая окружность ограничивает две круговые области; выбрасываются внутренние области всех таких круговых областей, которые не содержат ни одной точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Оставшаяся невыброшенной замкнутая часть плоскости и составляет как раз $\mathfrak{K}_z$. Если все точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, z лежат на одной «окружности», то $\mathfrak{K}_z$ приводится к дуге этой «окружности», содержащей $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и не содержащей z.

104. См. 103 или же непосредственно с помощью отображения фигуры, соответствующей случаю $z = \infty$.

105. [103.]

106. Обобщение случая $z = \infty$ посредством линейного отображения.

107. Если бы z и ζ_z обе лежали вне K, то «окружность», проходящая через z и ζ_z вне K, не разделяла бы точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — в противоречие с 106. Если z лежит вне K, а ζ_z — на его границе, то применяем 106 к «окружности», проходящей через z и ζ_z и касающейся извне K.

108. Так как теперь все массы равны $\frac{1}{n}$, то согласно 102 центр тяжести ζ_z определяется формулой

$$\frac{1}{\zeta_z - z} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2 - z} + \ldots + \frac{1}{z_n - z}\right) =$$
$$= \frac{n_1}{n}\frac{1}{w_1 - z} + \frac{n_2}{n}\frac{1}{w_2 - z} + \ldots + \frac{n_k}{n}\frac{1}{w_k - z},$$

где через $n_1, n_2, \ldots, n_k$ обозначено число тех из точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, которые совпадают соответственно с $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Точки w_1,

$w_2, \ldots, w_k$, z предполагаются конечными. Но рациональными массами $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n}$ можно аппроксимировать с произвольной степенью точности любые k масс с суммой **1**. Относительно случаев $w_\nu = \infty$ или $z = \infty$ см. решение **102**.

109. К точке z_1, также в том случае, когда $z_1 = \infty$. См. формулу в решении **102**.

110. Так как теперь все массы равны $\frac{1}{n}$, то согласно **102** имеем

$$\zeta = z - \frac{n}{\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n}} =$$

$$= \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} + \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} (z_\mu - z_\nu)^2}{2n^2} \frac{1}{z} + \ldots$$

111. Согласно решению **110**

$$\zeta = z - \frac{nf(z)}{f'(z)} = -\frac{a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 z - \binom{n-1}{2} a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}}{a_1 + \binom{n-1}{1} a_2 z + \binom{n-1}{2} a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1}},$$

если z конечно, и $\zeta = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, если $z = \infty$; предполагается, что полином $f(z)$ записан, как на стр. 67. Для случая $f(z) = z^n$ имеем $\zeta = 0$, что и само по себе ясно [**107**]. Лагерр называет ζ «производной точкой точки z» [1. с. **1**, стр. 56].

112. [Laguerre, 1. с. **1**, стр. 61.] Если все нули функции $f(z)$—вещественные, то их можно рассматривать как лежащие в замкнутой нижней (верхней) полуплоскости, внутри которой должна содержаться также ζ, если мнимая часть точки z положительна (отрицательна), за исключением того случая, когда все нули $f(z)$ совпадают [**107**]. Если же $f(z)$ имеет комплексный нуль z_1, то z и ζ одновременно приближаются к z_1 [**109**] и, следовательно, их мнимые части в достаточной близости точки z_1 принимают один и тот же знак.

113. На основании **111** заключаем, что при $a_n \neq 0$ $\zeta = \infty$ тогда и только тогда, когда z есть нуль производной $f'(z)$, не совпадающий ни с одним нулем самой функции $f(z)$. Каждая прямая, проходящая через такой нуль производной $f'(z)$, разделяет нули функции $f(z)$ [**106**], и, значит, всякая круговая область, покрывающая все нули функции $f(z)$, содержит в себе также нули производной $f'(z)$ [**107**]. Таким образом, как из **106**, так и из **107** получается новое доказательство теоремы Гаусса [III **31**]; в частности, из **107** эта теорема вытекает на основании того замечания, что наибольшей общей частью (или «пересечением») всех собственно кругов (т. е. круговых областей, не содержащих ∞), покрывающих точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$, является наименьший выпуклый полигон, обтягивающий эти точки.

114. Если x есть нуль функции $e^{-\frac{z}{c}}\left(-\frac{f(z)}{c}+f'(z)\right)$ и $f(x)\neq 0$, а следовательно, и $f'(x)\neq 0$, то центр тяжести $f(z)$ относительно x [111] будет равен

$$x-\frac{nf(x)}{f'(x)}=x-nc=\zeta.$$

Если бы точка x не лежала ни в K, ни в $K+nc$, то x и ζ обе находились бы вне K, что, однако, согласно **107** невозможно.

115. [J. v. Sz. Nagy; см. L. Fejér, Deutsche Math.-Ver., т. 26, стр. 119, 1917.] Пусть z_1 конечно. Полагая $f(z)=(z-z_1)\,g(z)$, будем иметь $(x-z_1)\,g'(x)+g(x)=0$. Центр тяжести ζ функции $g(z)$ относительно x определится тогда по формуле [111]

$$\zeta=x-\frac{(n-1)\,g(x)}{g'(x)}=x-(n-1)(z_1-x)$$

[106]. Относительно $z_1=\infty$ см. III **31**.

116. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 56, 133.] Пусть z — один из нулей функции $\alpha_1 zf'(z)-\alpha_2 f(z)$ и $f(z)\neq 0$, следовательно, z конечно, $f'(z)\neq 0$. Центр тяжести $f(z)$ относительно z будет

$$\zeta=z-n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}z=\left(1-n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)z.$$

Если бы поэтому имело место неравенство

$$|z|<\operatorname{Min}\left(1, \left|1-n\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|^{-1}\right),$$

то должно было бы быть также $|\zeta|<1$ в противоречие с **107**.

117. [116.]

118. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 161.] Чтобы интересующий нас центр тяжести вообще имел смысл, необходимо, чтобы z_1 был простым нулем. Полагая $f(z)=(z-z_1)\,g(z)$, имеем

$$f'(z_1)=g(z_1),\quad f''(z_1)=2g'(z_1),$$

и центр тяжести [111] равен

$$z_1-\frac{(n-1)\,g(z_1)}{g'(z_1)}.$$

При $z_1=\infty$ остальные нули должны быть конечны, $a_n=0$, $a_{n-1}\neq 0$. Центр тяжести тогда [111] равен $-\frac{1}{2}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

119. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 142.] По отношению к гипотетическому нулю $z_1=\alpha+i\beta$ с наибольшей мнимой частью $\beta>0$ центр тяжести остальных $n-1$ нулей имел бы мнимую часть, меньшую, чем β [107]. С другой стороны, из дифференциального уравнения при $\beta > 0$ в случае $f(z_1) = 0$, следовательно,

$$f'(z_1) \neq 0, \quad f''(z_1) \neq 0,$$

мы имели бы [118]

$$\Im\left(z_1 - \frac{2(n-1)f'(z_1)}{f''(z_1)}\right) = \Im\left(z_1 - \frac{2(n-1)}{z_1}\right) = \beta + \frac{2(n-1)\beta}{\alpha^2+\beta^2} > \beta.$$

120. При $f(z_1) = 0$, $z_1 = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$, мы имели бы

$$\Im\left(z_1 - \frac{2(n-1)f'(z_1)}{f''(z_1)}\right) = \Im\left(z_1 + \frac{(n-1)(z_1^2-1)}{z_1}\right) =$$
$$= \beta + (n-1)\left(\beta + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right) > \beta.$$

См. 119.

121. Неверна. Пусть $a \neq b$ и K_1, K_2 — два круга с центрами соответственно в a и b, радиусы которых настолько малы, что эти круги не содержат точку $\frac{a+b}{2}$. Достаточно рассмотреть тогда $f(z) = (z-a)(z-b)$.

122.

$$\frac{n_1 z_2 + n_2 z_1}{n_1+n_2} - \frac{n_1 z_2^{(0)} + n_2 z_1^{(0)}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\left(z_2 - z_2^{(0)}\right) + n_2\left(z_1 - z_1^{(0)}\right)}{n_1+n_2}.$$

Имеем

$$\left(z^{(0)} - z_1^{(0)}\right) : \left(z_2^{(0)} - z^{(0)}\right) = (r - r_1) : (r_2 - r) = n_1 : n_2.$$

123. Мы можем принять, что K_1 и K_2 — полуплоскости $\Re z \geqslant c_1$ и $\Re z \geqslant c_2$. Тогда

$$\Re \frac{n_1 z_2 + n_2 z_1}{n_1+n_2} \geqslant \frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1+n_2}.$$

С помощью надлежащего выбора чисел z_1 и z_2 можно добиться, чтобы среднее значение $\frac{n_1 z_2 + n_2 z_1}{n_1+n_2}$ было равно любому числу c с вещественной частью

$$\Re c \geqslant \frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1+n_2}.$$

124. [J. L. Walsh, Trans. American M. S., т. 22, стр. 115, 1921.] Пусть z — один из нулей функции $f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)$ и притом z лежит вне K_1 и K_2. Таким образом, $f_1(z) \neq 0$, $f_1'(z) \neq 0$, $f_2(z) \neq 0$, $f_2'(z) \neq 0$, z конечно. Обозначим центр тяжести $f_1(z)$ относительно z через ζ_1 и центр тяжести $f_2(z)$ относительно z через ζ_2. Имеем

$$\zeta_1 = z - \frac{n_1 f_1(z)}{f_1'(z)}, \quad \zeta_2 = z - \frac{n_2 f_2(z)}{f_2'(z)}.$$

ζ_1 лежит в K_1, ζ_2 — в K_2 [107]. Но отсюда

$$z=\frac{n_1\zeta_2+n_2\zeta_1}{n_1+n_2}.$$

125. [J. L. Walsh, l. c. **124**.] Полагаем аналогично **124**

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Если z есть нуль производной $f'(z)$, лежащий вне K_1 и K_2, далее, ζ_1 и ζ_2 — центры тяжести соответственно $f_1(z)$ и $f_2(z)$ относительно точки z, то при $n_1\neq n_2$ будем иметь [**124**]

$$z=\frac{n_1\zeta_2-n_2\zeta_1}{n_1-n_2}.$$

При $n_1=n_2$ мы получили бы из нашего предположения, что $\zeta_1=$ $=\zeta_2$, что невозможно, если K_1 и K_2 не имеют общих точек.

126. [R. Jentzsch, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 196, 1917; см. M. Fekete, Deutsche Math.-Ver., т. 31, стр. *42—48*, 1922.] Пусть a и b — два числа, для которых все нули разностей $f(z)-a$ и $f(z)-b$ лежат в O_1. Нужно доказать, что если c лежит на отрезке, соединяющем a и b, то все нули разности $f(z)-c$ также лежат в O_1. [Определение выпуклости!] Но нули функции $F(z)=[f(z)-a]^m[f(z)-b]^n$, где m и n — положительные целые числа, наверное лежат в O_1. Имеем

$$F'(z)=(m+n)[f(z)-a]^{m-1}[f(z)-b]^{n-1}f'(z)\left[f(z)-\frac{na+mb}{m+n}\right],$$

откуда все нули разности $f(z)-\frac{na+mb}{m+n}$ также должны лежать в O_1 [III 31]. Числа $\frac{na+mb}{m+n}$ лежат всюду плотно на отрезке, соединяющем a и b, когда m и n пробегают независимо друг от друга все целые положительные значения.

127. Применяем **124** к $F(z)=[f(z)-a]^{n_1}[f(z)-b]_{n_2}$ [решение **126**].

128. Коэффициенты полинома $\frac{A_\zeta f(z)}{n}$ будут

$$a_0+a_1\zeta_1,\quad a_1+a_2\zeta,\quad a_2+a_3\zeta,\ \ldots,\ a_{n-1}+a_n\zeta$$

или

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

смотря по тому, будет ли ζ конечно или бесконечно. Таким образом, для конечного ζ

$$(\zeta-z)f'(z)+nf(z)=n\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\nu}(a_\nu+a_{\nu+1}\zeta)z^\nu.$$

129. Следует из определения.

130. При $\zeta=\infty$ тривиально. При $z\neq\infty$ получаем

$$g(z)[(\zeta-z)h'(z)+lh(z)]+h(z)[(\zeta-z)g'(z)+kg(z)]=$$
$$=(\zeta-z)[g(z)h'(z)+g'(z)h(z)]+(k+l)g(z)h(z).$$

131. Если ζ_1 и ζ_2 оба равны бесконечности, — непосредственно ясно. Если оба конечны, то вытекает из симметричности выражения

$$(\zeta_1-z)[(\zeta_2-z)f'(z)+nf(z)]'+(n-1)[(\zeta_2-z)f'(z)+nf(z)]=$$
$$=(\zeta_1-z)(\zeta_2-z)f''(z)+(n-1)(\zeta_1+\zeta_2-2z)f'(z)+n(n-1)f(z)$$

относительно ζ_1 и ζ_2. Если, наконец, $\zeta_1=\zeta$ конечно, $\zeta_2=\infty$, то вытекает из соотношения

$$[(\zeta-z)f'(z)+nf(z)]'=(\zeta-z)f''(z)+(n-1)f'(z).$$

Представить также в терминах символического исчисления задачи 137.

132. Если $\zeta=\infty$, то из $f'(z)\equiv 0$ вытекает, что $f(z)$ — константа, т. е. все ее n нулей равны бесконечности. Если ζ конечно, то решением однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$(\zeta-z)f'+nf(z)=0$$

будет $f(z)=c(z-\zeta)^n$, где c — постоянная.

133. Пусть z' — точка производной системы.

1) z' конечна, $f(z')\neq 0$, $z'\neq\zeta$, значит, также $f'(z')\neq 0$. Имеем $\zeta=z'-\frac{nf(z')}{f'(z')}$ [111].

2) z' конечна, $f(z')=0$, $f(z)=(z-z')^k\varphi(z)$, $\varphi(z')\neq 0$, $z'\neq\zeta$. Тогда $(z-z')^{-k+1}A_\zeta f(z)$ приводится при $z=z'$ к $k(\zeta-z')\varphi(z')\neq 0$.

3) $z'=\zeta$, $f(z)=(z-\zeta)^k\varphi(z)$, $\varphi(\zeta)\neq 0$, $k<n$. Тогда $(z-\zeta)^{-k}A_\zeta f(z)$ приводится при $z=\zeta$ к $(n-k)\varphi(\zeta)\neq 0$.

4) Если $a_n\neq 0$ и $a_{n-1}+a_n\zeta=0$ [128], то $\zeta=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ [111].

134. При $\zeta=\infty$ см. III 31. При конечном ζ рассматриваем случаи, перечисленные в 133. Либо ζ есть центр тяжести $f(z)$ относительно z', как в 1 и 4, и тогда применимо 106, либо z' сама является нулем $f(z)$, и тогда z' лежит в указанной круговой области, а именно на ее границе.

135. Вытекает из 107 посредством тех же рассуждений, какими 134 выводится из 106.

136. На основании 135. Рассматриваемый круговой полигон представляет собой наибольшую общую часть всех круговых областей, содержащих $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и не содержащих ζ [решение 113].

137. Если $\zeta=\infty$, то уравнение $f^{(n-1)}(z)=0$ дает либо обыкновенный центр тяжести функции $f(z)$, либо ∞, либо ничего определенного, смотря по тому, будет ли точная степень $f(z)$ n, $n-1$ или же $\leqslant n-2$. Пусть теперь ζ конечно. Будем говорить, что полином m-й степени $\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m}{\nu}b_\nu z^\nu$ и степенной ряд $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}c_\nu u^\nu$ сопряжены, и символически записывать:

$$b_0+\binom{m}{1}b_1z+\binom{m}{2}b_2z^2+\ldots+b_mz^m\wedge\ldots+c_{-1}u^{-1}+c_0+c_1u+\ldots,$$

если $c_0=b_0$, $c_1=b_1$, ..., $c_m=b_m$, c_{-1}, c_{-2}, ..., c_{m+1}, c_{m+2}, ... произвольны. Тогда имеем [128]

$$f(z)=a_0+\binom{n}{1}a_1z+\binom{n}{2}a_2z^2+\ldots+a_nz^n\wedge$$
$$\wedge a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_nu^n,$$
$$f'(z)=n\left[a_1+\binom{n-1}{1}a_2z+\binom{n-1}{2}a_3z^2+\ldots+a_nz^{n-1}\right]\wedge$$
$$\wedge\ (a_0+a_1u+a_2u^2+\ldots+a_nu^n)\frac{n}{u},$$
$$A_\zeta f(z)=n\left[(a_0+a_1\zeta)+\binom{n-1}{1}(a_1+a_2\zeta)z+\ldots+(a_{n-1}+a_n\zeta)z^{n-1}\right]\wedge$$
$$\wedge\ (a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n)\,n\left(1+\frac{\zeta}{u}\right),$$
$$A_\zeta^{n-1}f(z)\wedge(a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n)\,n(n-1)\ldots2\left(1+\frac{\zeta}{u}\right)^{n-1},$$
$$A_\zeta^{n-1}f(z)=n!\left(a_0+\binom{n-1}{1}a_1\zeta+\binom{n-1}{2}a_2\zeta^2+\ldots+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\left[a_1+\binom{n-1}{1}a_2\zeta+\binom{n-1}{2}a_3\zeta^2+\ldots+a_n\zeta^{n-1}\right]z\right).$$

Отсюда видим, что интересующим нас нулем будет центр тяжести функции $f(z)$ относительно ζ [111].

138. Согласно решению **137** при конечных ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n

$$A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n}f(z)\wedge$$
$$\wedge n!\,(a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n)\left(1+\frac{\zeta_1}{u}\right)\left(1+\frac{\zeta_2}{u}\right)\ldots\left(1+\frac{\zeta_n}{u}\right),$$

в остальных же случаях

$$A_{\zeta_1}A_{\zeta_2}\ldots A_{\zeta_n}f(z)\wedge$$
$$\wedge n!\,(a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n)\left(1+\frac{\zeta_1}{u}\right)\left(1+\frac{\zeta_2}{u}\right)\ldots\left(1+\frac{\zeta_{n-k}}{u}\right)\frac{1}{u^k}.$$

При $k > 2$ необходимо повторное применение теоремы 135, т. е. полная индукция. Обозначим рассматриваемый полином через $f(z)$. Тогда

$$A_0 f(z) = \nu_k - (\nu_k - 1) z + c_2 (\nu_k - \nu_2) z^{\nu_2} + \ldots + c_{k-1} (\nu_k - \nu_{k-1}) z^{\nu_{k-1}}.$$

По крайней мере одна точка производной системы лежит в круге

$$|z| \leqslant \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - 1} \frac{\nu_3}{\nu_3 - 1} \cdots \frac{\nu_{k-1}}{\nu_{k-1} - 1}\right) \frac{\nu_k}{\nu_k - 1}.$$

Чтобы убедиться в этом, заменяем z на $\frac{\nu_k}{\nu_k - 1} u$ и применяем к получающемуся уравнению относительно u предположение индукции. Имеем

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\nu_2}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\nu_k}\right)\right]^{-1} \leqslant \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]^{-1} = k.$$

Заметим, что $(k+1)$-членный полином

$$\left(1 - \frac{z}{k}\right)^k = 1 - z + \ldots$$

обладает единственным нулем k.

150. [J. H. Grace, l. c. 145, стр. 356; см. также P. J. Heawood, Quart. J., т. 38, стр. 84—107, 1907.] Пусть

$$f(z) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 z + \binom{n-1}{2} a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$$

— производная рассматриваемого полинома. Тогда

$$\int_a^b f(z)\, dz = a_0 b_{n-1} - \binom{n-1}{1} a_1 b_{n-2} + \binom{n-1}{2} a_2 b_{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} b_0 = 0,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ сохраняют постоянные значения для всех полиномов $f(z)$, т. е. независимо от изменения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n-1}$. Тем самым полиномы $(n-1)$-й степени $f(z)$ и

$$g(z) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 z + \binom{n-1}{2} b_2 z^2 + \ldots + b_{n-1} z^{n-1}$$

аполярны. Явное выражение для $g(x)$ получаем, полагая, в частности, $a_\nu = (-1)^\nu x^{n-1-\nu}$, т. е. $f(z) = (x - z)^{n-1}$. Из равенства

$$g(x) = \int_a^b (x - z)^{n-1}\, dz = \frac{(x-a)^n - (x-b)^n}{n}$$

получаем нули функции $g(x)$:

$$\zeta_\nu = \frac{a+b}{2} + i\frac{a-b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Применяем теперь **145**.

151. [См. G. Szegö, l. c. **145**, стр. 35.] Если $\gamma = 0$, то либо между нулями $f(z)$, либо между нулями $g(z)$ должно содержаться $z = 0$. Тогда утверждение ясно. (Для $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \infty$ нужно положить $k = 0$: $0 \cdot \infty$ неопределенно.) Аналогично рассуждаем и при $\gamma = \infty$. Пусть теперь $\gamma \neq 0, \infty$. Тогда полиномы $f(z)$ и $z^n g(-\gamma z^{-1})$ будут аполярны. Следовательно, среди нулей последнего, именно $-\gamma\beta_\nu^{-1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ (принимаем $-\gamma \cdot 0^{-1} = \infty$, $-\gamma \cdot \infty^{-1} = 0$), согласно **145** по крайней мере один лежит в K, т. е. $-\gamma\beta_\nu^{-1} = k$.

152. [151.]

153. [I. Schur, см. G. Szegö, l. c. **145**, стр. 37.] Пусть $\mathfrak{K}$ — пересечение всех замкнутых кругов, содержащих начало координат и все нули функции $f(z)$. Согласно **151** каждый нуль γ компонированного полинома имеет форму ϑk, где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, а k лежит в K. Но тогда γ должно лежать во всех K, следовательно, также в $\mathfrak{K}$.

154. [По поводу постановки вопроса см. Laguerre, l. c. **1**, стр. 199—200, 1898; G. Pólya, Interméd. des math., т. 20, стр. 145—146, 1913. G. Szegö, l. c. **145**, стр. 38 и J. Egerváry, l. c. **145**.] Заменяем $g(z)$ на $g(bz)$ или $g(-bz)$, смотря по тому, будут ли нули $g(z)$ лежать в $-b$, 0 или в 0, b, затем применяем **153**.

155. [E. Malo, Journ. de math. spéc., серия 4, т. 4, стр. 7, 1895.] Согласно VI **85**

$$Q_n(z) = 1 + \binom{n}{1}^2 z + \binom{n}{2}^2 z^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 z^{n-1} + z^n = \\ = (1-z)^n P_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

где $P_n(x)$ обозначает n-й полином Лежандра. Поэтому $Q_n(z)$ имеет лишь отрицательные нули [VI **97**]. Компонируем сначала первый полином с $Q_n(cz)$, а затем получающийся полином

$$a_0 + \binom{n}{1} a_1 z + \binom{n}{2} a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

со вторым, в котором необходимо заменить z на dz, причем c и d выбираются так, чтобы все нули соответствующих полиномов лежали в интервале -1, 0. При этом в обоих случаях применяем **153**, беря за $\mathfrak{K}$ в первом случае верхнюю, во втором — нижнюю (замкнутую) полуплоскость. Тогда получается, что нули

139. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ все конечны, т. е. $b_n \neq 0$. Тогда [138]

$$\Sigma_\nu = (-1)^\nu \binom{n}{n-\nu} \frac{b_{n-\nu}}{b_n} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

следовательно,

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) f(z) = \frac{1}{b_n}\left[a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + (-1)^n a_n b_0\right].$$

Если же k и только k последних из $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ равны бесконечности, то [138]

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = \ldots = \Sigma_{k-1} = 0.$$

$$\Sigma_\nu = (-1)^{\nu-k} \frac{\binom{n}{\nu} b_{n-\nu}}{\binom{n}{k} b_{n-k}} \qquad (\nu = k, k+1, \ldots, n, \; b_{n-k} \neq 0),$$

следовательно,

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) f(z) =$$
$$= \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k} b_{n-k}}\left[(-1)^k \binom{n}{k} a_k b_{n-k} + (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} a_{k+1} b_{n-k-1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + (-1)^n a_n b_0\right]$$

[при $k = n$ следует читать: $(-1)^n a_n$]. Таким образом, во всех случаях

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) f(z) = \lambda_f \left[a_0 b_n - \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} a_{n-1} b_1 + (-1)^n a_n b_0\right],$$

где $\lambda_f^{-1} = (-1)^k \binom{n}{k} b_{n-k}$ и b_{n-k} — наивысший отличный от нуля коэффициент функции $g(z)$. Имеем

$$\lambda_f^{-1} A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) f(z) = \lambda_g^{-1} A(z_1, z_2, \ldots, z_n) g(z).$$

140. Аполярность точек z_1 и ζ_1 означает, что $z_1 = \zeta_1$. Аполярность пар z_1, z_2 и ζ_1, ζ_2 означает (за некоторыми легко выделяемыми исключениями), что

$$(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2) + (z_1 - \zeta_2)(z_2 - \zeta_1) = 0, \qquad \frac{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)}{(z_1 - \zeta_2)(z_2 - \zeta_1)} = -1,$$

т. е. обе пары расположены на одной и той же окружности и притом гармонически одна по отношению к другой.

141. Согласно **139** $\sum_0 - \sum_n = 0$, т. е. $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ все конечны и

$$\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_n = 1.$$

142. $\zeta = z_1, z_2, \ldots, z_n$.

143.

$$A(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) f(z) = \sum_0 - \frac{\sum_1}{n} + c\sum_n =$$
$$= 1 - \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n}{n} + c\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_n.$$

144. Повторно применить **135**.

145. [J. H. Grace, Proc. Cambr. Phil. Soc., т. 11, стр. 352—357, 1900—1902; см. G. Szegö, Math. Zeitschr., т. 13, стр. 31, 1922; J. Egerváry, Acta Univ. Hung. Francisco-Josephinae, т. 1, стр. 39—45; Math. és phys. lapok, т. 29, стр. 21—43, 1922.] Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат внутри, а $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — вне круговой области K, далее $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2} \ldots A_{\zeta_k} f(z) \not\equiv 0$, тогда как уже $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2} \ldots A_{\zeta_k}A_{\zeta_{k+1}} f(z) \equiv 0$, $k \leqslant n-1$. Согласно **144** нули $A_{\zeta_1}A_{\zeta_2} \ldots$ $\ldots A_{\zeta_k} f(z)$ также лежат внутри K, а по **132** все они должны совпадать с точкой ζ_{k+1}; следовательно, последняя лежит внутри K.

146. [145.] Если два выпуклых полигона не имеют общих точек, то существует прямая, разделяющая эти два полигона. Такой прямой будет, например, служить перпендикуляр к середине линии кратчайшего расстояния между полигонами.

147. [E. Landau, Ann. de l'Éc. Norm., т. 24, стр. 180, 1907.] [148.]

148. [A. Hurwitz; см. E. Landau, l. c. **147**.] Согласно **143** рассматриваемый полином аполярен полиному с нулями

$$\zeta_\nu = 1 - e^{\frac{2\pi i\nu}{n}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

последние лежат в круге $|z-1| \leqslant 1$ [145].

149. [L. Fejér, C. R., т. 145, стр. 459, 1907; Math. Ann., т. 65, стр. 413—423, 1908; Deutsche Math.-Ver., т. 26, стр. 114—128, 1917; см. также S. Sarantopoulos, C. R., т. 174, стр. 592, 1922; P. Montel, C. R., т. 174, стр. 851, 1220, 1922; Ann. de l'Éc. Norm., серия 3, т. 40, стр. 1—34, 1923.] При $k=2$ применяем **135**, где положено $\zeta = 0$. Имеем

$$A_0(1 - z + c_2 z^{\nu_2}) = \nu_2 - (\nu_2 - 1) z,$$

откуда производная система состоит из точки $\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ и кратной бесконечно удаленной точки. Поэтому вне круга $|z| > \frac{\nu_2}{\nu_2 - 1}$ не могут содержаться все нули функции $1 - z + c_2 z^{\nu_2}$.

рассматриваемых полиномов лежат все одновременно в верхней и в нижней замкнутой полуплоскости. Вытекает также из 154 с двукратным применением теоремы 65.

156. [I. Schur, J. für Math., т. 144, стр. 75—88, 1914.] Доказательство ведется аналогично 155, причем опирается на то, что полиномы [VI 99]

$$1+\binom{n}{1}\frac{z}{1!}+\binom{n}{2}\frac{z^2}{2!}+\ldots+\binom{n}{n-1}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{z^n}{n!}$$

имеют лишь положительные вещественные нули.

157. Так как нули выражения $\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n$ лежат в полуплоскости $\mathfrak{J}z>0$, то нули полиномов

$$1-\binom{n}{2}\frac{z^2}{n^2}+\binom{n}{4}\frac{z^4}{n^4}-\ldots\to\cos z$$

— вещественные [III 25]. Принимаем во внимание III 203.

158. Утверждение вытекает из того, что $\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n$ имеет лишь вещественные нули [58] и при фиксированном ν и $n\to\infty$ в каждой конечной области стремится к $\frac{d^\nu e^{-z^2}}{dz^\nu}$ [Hurwitz-Courant, стр. 63 *)] [III 203].

159. а) A. Hurwitz, Math. Ges. Hamburg, Festschrift, стр. 25, 1890.]

$$(-1)^n\left(1+\frac{z^2}{4n^2}\right)^n P_n\left(\frac{z^2-4n^2}{z^2+4n^2}\right)=$$
$$=1-\binom{n}{1}^2\left(\frac{z}{2n}\right)^2+\binom{n}{2}^2\left(\frac{z}{2n}\right)^4-\binom{n}{3}^2\left(\frac{z}{2n}\right)^6+\ldots,$$

$P_n(z)$ имеет лишь вещественные нули, лежащие в интервале —1, +1 [VI 97].

б) $$L_n\left(\frac{z^2}{4n}\right)=1-\frac{z^2}{2\cdot 2}+\frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4}\left(1-\frac{1}{n}\right)-$$
$$-\frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots,$$

$L_n(z)$ имеет лишь положительные вещественные нули [VI 99, решение и)].

в) Следует из соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta-iz}=\frac{2\pi i}{\sqrt{1+z^2}}$$

*) Гурвиц, стр. 91. Гурвиц — Курант, стр. 71.

[III 148]; посредством n-кратного дифференцирования и замены переменных получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{iz\sin\vartheta}{n}\right)^{-n-1}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{n!}\left(-\frac{z}{n}\right)^{n}Q_n\left(\frac{n}{z}\right)\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iz\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

при $n\to\infty$; $Q_n(z)$ есть рассмотренный в решении 56 полином, обладающий лишь вещественными нулями.

г) Получаем из III 205, полагая $f(t)=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$. а), б), в) опираются непосредственно, г) не непосредственно на III 203.

160. [G. Pólya, Tôhoku Math. J., т. 19, стр. 241, 1921.] Положим

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^{q-1}}{z^q-1}\right)=\frac{\bar{Q}_n(z)}{(z^q-1)^n},\qquad \frac{d^n e^{z^q}}{dz^n}=\bar{R}_n(z)\,e^{z^q}.$$

Тогда нули полиномов $\bar{Q}_n(z)$ и $\bar{R}_n(z)$ располагаются на q исходящих из начала координат лучах, делящих всю плоскость на q равных углов, из которых один делится положительной вещественной полуосью пополам [59]. Но нули функции $F(z^q)$ лежат на тех же лучах, ибо

$$\bar{R}_{qn}(z)\,e^{z^q}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(qn+qk)!}{(n+k)!}\frac{z^{qk}}{(qk)!},$$

$$\frac{n!}{(qn)!}\bar{R}_{qn}\left(zq^{-1}n^{-\frac{q-1}{q}}\right)e^{z^q q^{-q}n^{-q+1}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{qn+1}{q(n+1)}\frac{qn+2}{q(n+2)}\cdots\frac{qn+k}{q(n+k)}\left(1+\frac{k+1}{qn}\right)\left(1+\frac{k+2}{qn}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1+\frac{qk}{qn}\right)\frac{z^{qk}}{(qk)!}\to\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{qk}}{(qk)!}=F(z^q)$$

при $n\to\infty$ [III 203]. Второе доказательство оперирует аналогично с $\bar{Q}_n(z)$.

161. [G. Pólya und I. Schur, J. für Math., т. 144, стр. 89—113, 1914.] Положим

$$\left(1-\frac{\alpha z}{k}\right)^k\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)=P_k(z).$$

Имеем $\lim\limits_{k\to\infty}P_k(z)=g(z)$ равномерно во всякой ограниченной области.

162. [J. L. W. V. Jensen, Acta Math., т. 36, стр. 181, 1912.] Пусть рассмотренный в предыдущем решении полином

$$P_k(z) = a_{0k} + \frac{a_{1k}}{1!} z + \frac{a_{2k}}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_{nk}}{n!} z^n + \ldots$$

Тогда [Hurwitz-Courant, стр. 61—64 *)]

$$\lim_{k \to \infty} a_{nk} = a_n,$$

и полином

$$a_{0k} z^n + \frac{a_{1k}}{1!} \frac{dz^n}{dz} + \frac{a_{2k}}{2!} \frac{d^2 z^n}{dz^2} + \ldots =$$

$$= a_{0k} z^n + \binom{n}{1} a_{1k} z^{n-1} + \binom{n}{2} a_{2k} z^{n-2} + \ldots + a_n$$

имеет лишь вещественные нули [63]. Посредством перехода к пределу при $k \to \infty$ [III 203] и замены z на $\frac{1}{z}$ получаем, что нули рассматриваемых полиномов вещественны. Что они, кроме того, положительны, вытекает из того, что в разложении

$$g(-z) = 1 - \frac{a_1}{1!} z + \frac{a_2}{2!} z^2 - \ldots$$

все коэффициенты, очевидно, положительны, стало быть,

$$a_1 < 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 < 0, \ \ldots \qquad [47].$$

163. Из **161**, **55** (с некоторым изменением) и III **201** вытекает, что ни одна производная от $g(x)$ не обращается в нуль в интервале $-\infty < x < \alpha_1$. Отсюда, как и в **72**, заключаем, что разность

$$g(x) - a_0 - \frac{a_1}{1!} x - \ldots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}$$

в интервале $-\infty < x \leqslant \alpha_1$, кроме точки $x = 0$, нигде не обращается в нуль. Следовательно, знак ее совпадает в интервале $0 < x < \alpha_1$ со знаком a_n. [I 144.]

164. Выражение

$$e^{-z^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos 2zt \, dt$$

можно рассматривать как предел последовательности полиномов лишь с вещественными нулями [158]. Отсюда следует [63], если $p > 0$, что

$$e^{-z^2} - p \frac{d^2 e^{-z^2}}{dz^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} (1 + 4pt^2) \cos 2zt \, dt$$

*) Гурвиц, стр. 88—92. Гурвиц — Курант, стр. 69—72.

имеет лишь вещественные нули. Повторяя это рассуждение, приходим под знаком интеграла к полиномам, затем, переходя к пределу **[161]**, к $g(z)$.

165. [L. c. **161**.] Определим целое число m_k так, чтобы, полагая $\beta+\beta_1^{-1}+\beta_2^{-1}+\ldots+\beta_k^{-1}=B_k$, мы в круге $|z|\leqslant k$ имели

$$\left|\left(1+\frac{B_k z}{m_k}\right)^{m_k}-e^{B_k z}\right|<\frac{1}{k}.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{\alpha z^2}{k}\right)^k\left(1-\frac{B_k z}{m_k}\right)^{m_k}\left(1-\frac{z}{\beta_1}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)=G(z)$$

равномерно в каждой конечной области.

166. Показываем, как в **162**, что полином

$$1+\binom{n}{1}b_1 z+\binom{n}{2}b_2 z^2+\ldots+b_n z^n$$

имеет лишь вещественные нули. Поэтому, если он в точности степени n, у него могут обращаться в нуль два соседних коэффициента [49]; $G(z)$ трансцендентна; определяем $n>m+1$ так, чтобы $b_n\neq 0$.

167. По предположению, $\beta_\nu<0$ $(\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Пусть $\sqrt{k}>n\sqrt{\alpha}$; положим

$$\left(1-\frac{\alpha x^2}{k}\right)^k\left(1-\frac{x}{\beta_1}\right)\left(1-\frac{x}{\beta_2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\beta_k}\right)=Q(x),$$
$$B=\beta+\beta_1^{-1}+\beta_2^{-1}+\ldots+\beta_k^{-1}.$$

При переходе от уравнения

$$a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n=0$$

к уравнению

$$a_0+a_1 e^{B}z+a_2 e^{2B}z^2+\ldots+a_n e^{nB}z^n=0$$

число мнимых корней не изменяется, а при дальнейшем переходе к уравнению

$$a_0 Q(0)+a_1 Q(1)e^{B}z+a_2 Q(2)e^{2B}z^2+\ldots+a_n Q(n)e^{nB}z^n=0$$

оно не возрастает [67]. Теперь берем $k\to\infty$ [III **201**].

168. Функция

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-\frac{z}{1}}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\ldots$$

имеет форму **165** и нули ее отрицательны. Так как полином

$$\left(1-\frac{z^2}{4n}\right)^n=$$
$$=1-\frac{1}{1!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

имеет лишь вещественные нули, то $\left[167,\quad G(z)=\left[\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\right]^{-1}\right]$ то же будет справедливо и для полинома

$$\frac{1}{\Gamma(1)}-\frac{1}{\Gamma(2)\,1!}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{\Gamma(3)\,2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ldots\to J_0(z)$$

при $n\to\infty$ [III 203]. Как видим, **65** есть также частный случай теоремы **167**.

169. [L. с. 160.] Если q — целое положительное число, то отношение

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(qz+1)}=G(z)$$

представляет собой целую функцию, ибо полюсы числителя $-\frac{q}{q}$, $-\frac{2q}{q}, \ldots$ содержатся между полюсами знаменателя $-\frac{1}{q}, -\frac{2}{q}, \ldots$, причем функция имеет форму **165** [решение **168**]. Применяем **167** к этой функции $G(z)$ и полиному

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots$$

Затем берем $n\to\infty$ [III 203].

170. [G. Pólya, Messenger, т. 52, стр. 185—188, 1923.] Имеем

$\alpha F_\alpha(z)=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\alpha\int_0^\infty e^{-t^\alpha}t^{2k}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{k!}\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(2k+1)}.$$

Применяем **167** к полиному

$$\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{z^{2k}}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

и целой функции

$$\frac{\Gamma\left(\frac{z}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2q}\right)}{\Gamma(z+1)}=G(z)$$

($\alpha=2q$, q — целое). Затем переходим к пределу [III 203]. Функция $G(z)$ — целая, ибо полюсы

$$-2,\ -4,\ -6,\ \ldots;\ -1,\ -(1+2q),\ -(1+4q),\ \ldots$$

числителя содержатся среди полюсов $-1, -2, -3, \ldots$ знаменателя; кроме того, $G(z)$ имеет форму **165** [решение **168**]. Функция $F_2(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{z^2}{4}}$ вообще не имеет нулей.

171. Если $\alpha \neq 2, 4, 6, \ldots$ и x стремится к $+\infty$, пробегая вещественные значения, то $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+1} F_\alpha(x) \neq 0$ [III 154]. Поучительно, что функция $F_\alpha(x)$ при $\alpha \neq 2$ имеет бесчисленное множество нулей [l. c. 170]; таким образом, при $\alpha = 4, 6, 8, \ldots$ она имеет бесчисленное множество вещественных нулей и ни одного мнимого, в других же случаях — конечное число вещественных и бесчисленное множество мнимых. См. III **201**.

172. [Cauchy, Exercices de mathématiques (anciens exercices), 1826, Oeuvres, серия 2, т. 6, стр. 354—400, Paris, Gauthier-Villars, 1887.]

а) [A. Hurwitz, l. c. **159**.] За исключением корня $z=0$ речь идет в нулях мероморфной функции

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{z+n\pi} + \ldots + \frac{1}{z+2\pi} + \frac{1}{z+\pi} + \frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{z-2\pi} + \ldots + \frac{1}{z-n\pi}\right).$$

Под знаком предела стоит правильная дробно-рациональная функция, числитель которой имеет степень, меньшую или равную $2n-1$. Между $2n$ нулями знаменателя лежит $2n-1$ интервалов, и в каждом из них содержится по одному нулю числителя [26]. Следовательно, числитель в точности степени $2n-1$ и не имеет мнимых нулей. Переходим к пределу [III **203**].

б) Имеем

$$z^{-2}\cos z\,(\operatorname{tg} z - z) = \int_0^1 t \sin zt\,dt.$$

Теорема III **185**, относящаяся к полиномам по косинусам, может быть распространена и на полиномы по синусам (доказательство то же). Отсюда посредством предельного перехода получаем аналог теоремы III **205**, который и применяем к интегралу в правой части.

в) Имеем

$$2z^{-3}\cos z\,(\operatorname{tg} z - z) = \int_0^1 (1-t^2)\cos zt\,dt.$$

Теорема **173** позволяет утверждать, кроме вещественности, также существование бесконечного множества нулей.

173. Двукратное интегрирование по частям дает

$$z^2 F(z) = zf(1)\sin z - f'(0)(1-\cos z) + \int_0^1 f''(t)(\cos z - \cos zt)\,dt,$$

откуда вытекает

$$F[(2m-1)\pi] > 0, \quad F(2m\pi) < 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

следовательно, существование бесчисленного множества нулей. Имеем $F(0)>0$. Поэтому правильная дробно-рациональная функция

$$(-1)^n \frac{F(-n\pi)}{z+n\pi}+\ldots+\frac{F(-2\pi)}{z+2\pi}-\frac{F(-\pi)}{z+\pi}+\frac{F(0)}{z}-\frac{F(\pi)}{z-\pi}+$$
$$+\frac{F(2\pi)}{z-2\pi}+\ldots+(-1)^n \frac{F(n\pi)}{z-n\pi}$$

имеет $2n-2$ вещественных и самое большее два мнимых нуля [см. 26]. Так как она стремится к $\frac{F(z)}{\sin z}$ [см. III 165], то [III 201] $F(z)$ либо не имеет ни одного, либо имеет два мнимых нуля. Но $F(z)$ есть четная функция; если бы она имела ровно два мнимых нуля, то они были бы чисто мнимыми, однако для вещественного y имеем

$$F(iy)=\int_0^1 f(t)\,\frac{e^{yt}+e^{-yt}}{2}\,dt>0.$$

174. Достаточно рассмотреть случай $\int_0^1 |\varphi(t)|\,dt<1$ [III 203]. Тогда для достаточно большого целого n

$$\frac{1}{n}\left|\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right|+\frac{1}{n}\left|\varphi\left(\frac{2}{n}\right)\right|+\ldots+\frac{1}{n}\left|\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)\right|<1,$$

следовательно, функция

$$\sin\frac{nz}{n}-\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{z}{n}-\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2z}{n}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)z}{n}$$

не имеет мнимых нулей. [Доказывается тем же рассуждением, что и в 27.] Теперь $n\to\infty$ [III 203].

175. Оставляя в стороне тривиальный случай $f(1)=0$, имеем

$$\frac{z}{f(1)}\int_0^1 f(t)\cos zt\,dt=\sin z-\int_0^1 \frac{f'(t)}{f(1)}\sin zt\,dt \qquad [174].$$

176. Модули членов ряда монотонно возрастают от начального члена 1 до максимального члена и затем от максимального члена до бесконечности монотонно убывают [I 117]. Пусть n — центральный индекс, т. е. $(-x)^n a^{-n^2}$ обозначает максимальный член для $z=-x$, $x>0$. Тогда на основании вышесказанного

$$(-1)^n F(-x)=x^n a^{-n^2}-x^{n-1}a^{-(n-1)^2}+x^{n-2}a^{-(n-2)^2}-\ldots$$
$$\ldots-x^{n+1}a^{-(n+1)^2}+x^{n+2}a^{-(n+2)^2}-\ldots>$$
$$>x^n a^{-n^2}-x^{n-1}a^{-(n-1)^2}-x^{n+1}a^{-(n+1)^2}.$$

Если $x=a^{2n}$, то n — центральный индекс [III 200]. Получаем

$$(-1)^n F(-a^{2n}) > a^{n^2} - 2a^{n^2-1} \geqslant 0.$$

Те же соображения с соответствующими изменениями распространяются также на частичные суммы

$$F_n(-x) = 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n^2}};$$

находим

$$F_n(0) > 0,\ F_n(-a^2) < 0,\ F_n(-a^4) > 0,\ \ldots,\ (-1)^n F_n(-a^{2n}) > 0$$

(во втором неравенстве при $n=2$, $a=2$ знак $<$ следует заменить знаком $=$), откуда вытекает, что $F_n(x)$ имеет лишь вещественные и простые нули и притом ровно по одному внутри каждого из интервалов $(-a^2, 0)$, $(-a^4, -a^2)$, $(-a^6, -a^4)$, ..., $(-a^{2n}, -a^{2n-2})$. Переходя к пределу [III 201], получаем требуемый результат относительно $F(z)$. (См. III 200.)

177. [См. G. Pólya, Math. Zeitschr., т. 2, стр. 355—358, 1918.] Преобразование полинома $p_0+p_1z+\ldots+p_nz^n$ в доказательстве теоремы III 22 представляет собой в существенной части суммирование по частям. Функция $F(z)$ не имеет вещественных нулей. Пусть $f'(t)>0$, $z=x+iy$, $x \geqslant 0$, $y>0$, $e^{xt}f(t)=f_1(t)$, следовательно, также $f_1(t)>0$, $f_1'(t)>0$; пусть, далее, $0<\tau<1$. Интегрирование по частям дает

$$iyF(z) - iy\int_\tau^1 f_1(t)\,e^{iyt}\,dt = f_1(\tau)\,e^{iy\tau} - f_1(0) - \int_0^\tau f_1'(t)\,e^{iyt}\,dt,$$

откуда

$$y\,|F(z)| + y\left|\int_\tau^1 f_1(t)\,e^{iyt}\,dt\right| \geqslant f_1(\tau) - f_1(0) - \left|\int_0^\tau f_1'(t)\,e^{iyt}\,dt\right|.$$

Правая часть равна $\int_0^\tau f_1'(t)\,dt - \left|\int_0^\tau f_1'(t)\,e^{iyt}\,dt\right|$ и при возрастании τ возрастает [III 14]. Второй член в левой части при $\tau \to 1$ стремится к нулю. Поэтому $y\,|F(z)|>0$.

178. Имеем

$$\frac{1}{z}\int_0^z e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-z^2t}\,t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Так как $t^{-\frac{1}{2}}$ убывает, то [177] в области $\mathfrak{R}(-z^2) \leqslant 0$ не содержится нулей.

179. Имеем

$$\frac{1}{\mu+1}+\frac{z}{(\mu+1)(\mu+2)}+\frac{z^2}{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^{\mu}\,dt=$$
$$=\int_0^1 e^{zt}(1-t)^{\mu}\,dt=\int_0^1 e^{(z-\mu)t}[e^t(1-t)]^{\mu}\,dt; \qquad \mu>-1.$$

Но в интервале $0<t<1$ функция $e^t(1-t)$ возрастает (продифференцировать). Поэтому [177] нули ряда

при $\mu>0$ лежат все в полуплоскости $\Re z>\mu$,
при $-1<\mu<0$ лежат все в полуплоскости $\Re z<\mu$,
при $\mu=0$ лежат все на прямой $\Re z=0$.

В нашей задаче $\mu=n$ — целое.

180. а) [G. Pólya, Ens. math., т. 21, стр. 217, 1920.] Опираемся на следующую важную теорему [I. Schur, Math. Ann., т. 66, стр. 489—501, 1909]: корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ уравнения

$$\begin{vmatrix} z-a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & z-a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & z-a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

удовлетворяют неравенству

$$|\omega_1|^2+|\omega_2|^2+\ldots+|\omega_n|^2\leqslant\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}|a_{\lambda\mu}|^2.$$

Отсюда, обозначая нули полинома

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$$

через $z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{nn}$, получаем [VII 11]

$$\frac{1}{|z_{1n}|^2}+\frac{1}{|z_{2n}|^2}+\ldots+\frac{1}{|z_{nn}|^2}\leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|^2+\left|\frac{a_2}{a_1}\right|^2+\ldots+\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|^2\right)+\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|^2.$$

Переходим к пределу [III 201].

б) [G. Valiron, Bull. d. Sc. Math., серия 2, т. 45, стр. 269, 1921.] Полагаем $|a_{n-1}a_n^{-1}|=l_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} l_n=\infty$, то из $l_1, l_2, \ldots, l_p, \ldots$ перестановкой можно получить монотонно возрастающую последовательность $l_{n_1}, l_{n_2}, l_{n_3}, \ldots, l_{n_p}, \ldots$:

$$l_{n_1}\leqslant l_{n_2}\leqslant l_{n_3}\leqslant\ldots\leqslant l_{n_p}\leqslant\ldots$$

Имеем

$$|a_p| = \frac{|a_0|}{l_1 l_2 \ldots l_p} \leqslant \frac{|a_0|}{l_{n_1} l_{n_2} \ldots l_{n_p}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Обозначим через $M(r)$ максимум $|F(z)|$ при $|z| \leqslant r$ и через $\mu(r)$ — максимальный член всюду сходящегося ряда [IV 29]

$$|a_0| + \frac{|a_0|}{l_{n_1}} z + \frac{|a_0|}{l_{n_1} l_{n_2}} z^2 + \ldots = \Phi(z).$$

Из предположения, соответственно из IV 37, IV 54, IV 38, вытекает последовательно сходимость выражений

$$\sum_{p=1}^{\infty} l_{n_p}^{-2}, \quad \int_1^{\infty} \mu(r) r^{-3} dr, \quad \int_1^{\infty} \Phi(r) r^{-3} dr, \quad \int_1^{\infty} M(r) r^{-3} dr, \quad \sum_{p=1}^{\infty} |\alpha_p|^{-2}.$$

Этот способ доказательства, в противоположность изложенному в п. а), может быть распространен на показатели, отличные от двух.

181. Нет. Пример: $f(z) = (z^2 - 4) e^{\frac{z^2}{3}}$, $f'(z) = \frac{2}{3} z (z^2 - 1) e^{\frac{z^2}{3}}$. H. M. Macdonald (Proc. Lond. M. Soc., т. 29, стр. 578, 1898) утверждал противоположное *).

182. [G. Pólya, Arch. der Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 337, 1917. Решение — H. Prüfer, там же, серия 3, т. 27, стр. 92—94, 1918.] Пусть $H'(x) = g(x)$. Утверждение задачи содержится в следующей, более точной, теореме: если полином n-й степени $g(x)$ имеет лишь вещественные нули, то $G(x) = [g(x)]^2 + g'(x)$ имеет самое большее $n+1$ вещественный нуль ($2n > n+1$ для $n \geqslant 2$). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — различные нули полинома $g(x)$,

$$g(x) = a(x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_k)^{m_k}.$$

а) Нулей $G(x)$, являющихся одновременно нулями $g(x)$, будет $n - k$.

б) Вещественный нуль $G(x)$, не являющийся нулем $g(x)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{g'}{g^2} = -1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{g}\right)^2 \frac{g'}{a} = -a.$$

Если, следовательно, имеется по крайней мере один такой нуль, то a — вещественное. Но теперь

$$g \frac{d}{dx}\left(\frac{g'}{g^2}\right) = \left(\frac{g'}{g}\right)' - \left(\frac{g'}{g}\right)^2 =$$

$$= -\frac{m_1}{(x - x_1)^2} - \frac{m_2}{(x - x_2)^2} - \ldots - \frac{m_k}{(x - x_k)^2} - \left(\frac{g'}{g}\right)^2 < 0.$$

*) Этим вопросом занимался уже Лагерр, см. Oeuvres, т. 1.

Нули $g(x)$ разбивают вещественную ось на $k+1$ интервалов. В каждом из этих интервалов кривая $y=g'(x)[g(x)]^{-2}$ монотонна и пересекает прямую $y=-1$ самое большее один раз. Таким образом, общее количество перечисленных в пп. а) и б) нулей полинома $G(x)$ будет $\leqslant (n-k)+k+1$.

183. Имеем

$$A_n^{(k)}=P\left(\frac{n}{k},\ \frac{1}{k}\right),\quad B_n^{(k)}=Q\left(\frac{n}{k},\ \frac{1}{k}\right),\quad C_n^{(k)}=R\left(\frac{n}{k},\ \frac{1}{k}\right).$$

Выражение для $B_n^{(k)}$ остается в силе также при нецелых значениях $k>m-1$.

184. Имеем

$$\frac{Q(z,\ \omega)}{\omega^m}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+z}{\omega}-\overline{m-1}\right)\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}\right)}\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu a_\nu\Gamma\left(\frac{1+z}{\omega}-\overline{\nu-1}\right)\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}+\nu\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\omega}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1+z}{\omega}-\overline{m-1}\right)\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}\right)}\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu a_\nu\int_0^1(1-t)^{\frac{1+z}{\omega}-\nu}t^{-\frac{z}{\omega}-1+\nu}\,dt.$$

Далее,

$$\frac{R(z,\ \omega)}{\omega^m}=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1-z}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\omega}\right)\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}\right)}\int_0^1 t^{-\frac{z}{\omega}-1}(1-t)^{\frac{1}{\omega}-1}f(-t)\,dt$$

при $\omega>0$, $\Re r<0$;

$$\frac{R(z,\ \omega)}{(-\omega)^m}=\frac{\Gamma\left(\frac{\omega+z}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{(1-m)\,\omega+z-1}{\omega}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\omega}\right)}\int_0^1 t^{\frac{z-1}{\omega}}(1-t)^{\frac{1}{\omega}-1}f\left(-\frac{1}{t}\right)dt$$

при $\omega>0$, $\Re z>1+(m-1)\,\omega$;

$$P(z,\ \omega)=\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{z}{\omega}\right)}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{z}{\omega}-1}f(-\omega t)\,dt$$

при $\omega>0$, $\Re z<0$.

185. [См. Laguerre, l. c. 1, стр. 23; G. Pólya, задача, Arch. der Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 84, 1916.] Три неравенства первого столбца получаются из **183**, **38**, **8**, четыре остальных — из **184**, **80** (замена переменных!), **24**.

186. Мы уже предположили, что $a_m \gtreqless 0$. Пусть запись $\alpha \| \beta$ означает, что вещественные числа α и β имеют одинаковый знак. Тогда

$f(-\infty)\|P(-\infty)$,
$f(-\infty)\|Q(-1+(m-1)\omega)$,
$f(-1)\|R(-\infty)$,
$f(-\infty)\|(-1)^m R(1+(m-1)\omega)$,
$f(0)\|P(0)$,
$f(0)\|Q(0)$,
$f(0)\|R(0)$,
$f(\infty)\|P(\infty)$,
$f(1)\|Q(+\infty)$,
$f(+\infty)\|R(1+(m-1)\omega)$,
$f(-1)\|(-1)^m R(+\infty)$.

187. [Laguerre, l. c. **1**, стр. 13—25; M. Fekete und G. Pólya, Rend. Palermo, т. 34, стр. 89—120, 1912; E. Bálint, Diss., Budapest, 1916; D. R. Curtiss, Annals of Math. (2), т. 19, стр. 251—278, 1918.] 1 следует из **38**, 2—из **34**, **33**, **32**, 3—из **183**, **24**, III **201**, причем принимаем во внимание, что $P(z, \omega)$, $Q(z, \omega)$, $R(z, \omega)$ непрерывны по ω и

$$P(z, 0)=f(z),\quad Q(z, 0)=(1+z)^m f\left(\frac{z}{1+z}\right),\quad R(z, 0)=(1-z)^m f\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

Вторая из доказанных теорем теоретически позволяет точно определить число нулей $f(z)$ в интервале $0<x<1$. Что этот метод часто бывает практически полезен, показывают задачи **45**, **46**.

188. [G. Pólya, l. c. **80**.] Из формулы

$$\frac{m!f(z)}{\frac{z}{\omega}\left(\frac{z}{\omega}-1\right)\cdots\left(\frac{z}{\omega}-m\right)}=\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu}\frac{f(\nu\omega)}{\frac{z}{\omega}-\nu}=$$
$$=\omega\int_0^\infty J(e^{-\lambda\omega}, \omega)\, e^{-\lambda(z-m\omega)}\, d\lambda,$$

справедливой для $\Re z>m\omega$ [VI, § 9], вытекает $\mathfrak{F}_{n\omega}^{\infty}\leqslant\mathfrak{Z}_0^1$ [**80**, **24**]; из аналогичной формулы

$$\frac{(-1)^m m!f(-z)}{\frac{z}{\omega}\left(\frac{z}{\omega}+1\right)\cdots\left(\frac{z}{\omega}+m\right)}=\omega\int_0^\infty e^{-\lambda m\omega}J(e^{\lambda\omega}, \omega)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda,$$

справедливой для $\Re z>0$, вытекает таким же образом $\mathfrak{F}_{-\infty}^{0}\leqslant\mathfrak{Z}_1^{\infty}$, наконец, из определения $J(z, \omega)$ следует [**36**], что $\mathfrak{Z}_{-\infty}^{0}$ не превосходит числа перемен знака в последовательности $f(0), f(\omega), \ldots$ $\ldots, f(n\omega)$. Замечаем, наконец, что (см. решение **186**)

$f(-\infty)\|(-1)^m J(1, \omega)$, $f(0)\|(-1)^m J(+\infty, \omega)\|J(-\infty, \omega)$,
$f(m, \omega)\|J(0, \omega)$, $f(+\infty)\|J(1, \omega)$.

189. Находим [188]

$$J(1, \omega) = \Delta^m f(0), \quad J'(1, \omega) = -m\Delta^{m-1} f(0), \ldots$$

Отсюда рассматриваемый полином равен $J(1-z, \omega)$.

190. [H. Poincaré, C. R., т. 97, стр. 1418, 1883; E. Meissner, Math Ann., т. 70, стр. 223—235, 1911.]

$$f(z) = \frac{f(z)\,(1+z)^k}{(1+z)^k}.$$

Выбираем k достаточно большим [187, 3].

191. Условие достаточно [30]; для доказательства необходимости выбираем $P(x) = (1+x)^k$, где k достаточно велико [187, 3].

192. Условие достаточно, ибо $e^{-ax+\frac{1}{2}bx^2} \frac{d}{dx}\left(P(x)\,e^{ax-\frac{1}{2}bx^2}\right)$ имеет не более мнимых нулей, чем $P(x)$ (доказательство, как в 58). Для доказательства необходимости выбираем сначала $P(x) = 1 + \varepsilon x$, получаем, что $(1+\varepsilon x) f(x) + \varepsilon$ и $[\varepsilon \to 0]$ $f(x)$ имеют лишь вещественные нули. Затем выбираем $P(x) = f(x)$; тогда приходим к заключению, что степень $f(x)$ равна либо нулю, либо единице. В последнем случае, когда, стало быть, $f(x) = a - bx$, полагаем снова $P(x) = f(x)$; всегда $(a-bx)(a-bx) - b > 0$ при $b < 0$.

193. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys, серия 3, т. 21, стр. 289, 1913. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 23, стр. 81—82, 1915.]

194. Интересующее нас выражение представляет собой результант полиномов $f(x)$ и $g(x)$, т. е. равно $b_0^2 f(\beta_1) f(\beta_2)$, где β_1, β_2 — нули полинома $g(x)$. Если β_1 — не вещественное, стало быть, $\beta_2 = \bar{\beta}_1$, то результант будет неотрицателен. Если β_1, β_2 — вещественные и результант меньше нуля, то $\operatorname{sgn} f(\beta_1) = -\operatorname{sgn} f(\beta_2) \neq 0$ [8].

195. Случай $n=1$ ясен. Пусть $n=2$. Обозначая нули полинома $P(x)$ через x_1, x_2, $x_1 \leqslant x_2$, определяем a так, чтобы было $a \leqslant x_1$, $\int\limits_a^{\frac{x_1+x_2}{2}} P(x)\,dx = 0$. Таким образом достаточно рассмотреть случай $n \geqslant 3$. Примем сначала, что первые три из нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полинома $P(x)$, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, отличны друг от друга, $x_1 < x_2 < x_3$. Определим такое δ, чтобы было $x_1 < x_2 - \delta < x_2 < x_2 + \delta < x_3$ и $\int\limits_{x_2-\delta}^{x_2+\delta} P(x)\,dx = 0$, затем a так, чтобы было $a < x_1$ и $\int\limits_a^{x_2-\delta} P(x)\,dx = 0$. Тогда полином $Q(x)$ имеет во всяком случае нули $x = a$, $x = x_2 - \delta$, $x = x_2 + \delta$. Если кроме того, n — нечетное, то существование четвертого вещественного нуля полинома $Q(x)$ обеспечивается тем, что мнимые нули входят в $Q(x)$ попарно. Если теперь $P(x)$ имеет нуль кратности $m \geqslant 2$, то достаточно выбрать этот нуль за a, чтобы $Q(x)$ имел по меньшей мере $m+1 \geqslant 3$ нулей. Знак равенства будет иметь место, например, для

$$P(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \ldots \left(x - \frac{n-1}{2}\right)^2, \quad n \text{ — нечетное,}$$

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \ldots \left(x - \frac{n}{2}\right)^2, \quad n \text{ — четное.}$$

196. [I. Schur; см. C. Siegel, Math. Zeitschr., т. 10, стр. 175, 1921.] Посредством перемножения неравенств

$$1 + |z_\nu| \leqslant 2 \operatorname{Max}(1, |z_\nu|) \leqslant 2e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|e^{i\vartheta} - z_\nu|\, d\vartheta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

[II 52] получаем

$$\prod_{\nu=1}^{n} (1 + |z_\nu|) \leqslant 2^n e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta} \leqslant 2^n \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})|^2\, d\vartheta} =$$

$$= 2^n \sqrt{1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

[II 69, III 122].

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ПОЛИНОМЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ

1. $T_n(x)$ имеет нули $\cos(2\nu-1)\frac{\pi}{2n}$, $U_n(x)$ имеет нули $\cos\nu\frac{\pi}{n+1}$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

2. Вытекает из соотношений

$$\cos(n+1)\vartheta=\cos\vartheta\cos n\vartheta-\sin\vartheta\sin n\vartheta,$$
$$\sin(n+1)\vartheta=\sin\vartheta\cos n\vartheta+\cos\vartheta\sin n\vartheta.$$

3. Вводим в дифференциальных уравнениях

$$\frac{d^2\cos n\vartheta}{d\vartheta^2}=-n^2\cos n\vartheta,\quad \frac{d^2\sin n\vartheta}{d\vartheta^2}=-n^2\sin n\vartheta$$

новую независимую переменную $\cos\vartheta=x$. (Частный случай теоремы 98; см. решение ж.)

4. Положим $x=\cos\vartheta$. Тогда рассматриваемые интегралы преобразуются в

$$t_{mn}=\int_0^\pi\cos m\vartheta\cos n\vartheta\,d\vartheta,\quad u_{mn}=\int_0^\pi\sin(m+1)\vartheta\sin(n+1)\vartheta\,d\vartheta.$$

Отсюда

$$t_{mn}=u_{mn}=0\quad\text{при}\quad m\neq n,$$
$$t_{nn}=u_{nn}=\frac{\pi}{2}\quad\text{при}\quad n>0,$$
$$t_{00}=\pi,\quad u_{00}=\frac{\pi}{2}.$$

Указанное в задаче условие ортогональности определяет полиномы $T_n(x)$ и $U_n(x)$ с точностью до постоянного множителя. Оно равносильно условию

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}K(x)\,dx=0,\ \text{соотв.}\ \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,U_n(x)\,K(x)\,dx=0$$

для всех полиномов $K(x)$ $(n-1)$-й степени (см. стр. 102).

5. Частный случай теоремы 98; см. решение а).

6. [C. G. J. Jacobi, J. fur Math., т. 15, стр. 3, 1836.] Так как все производные от $(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ ниже n-го порядка обращаются в нуль в точках $x=-1$ и $x=1$, то из **5**, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}dx.$$

7. $|\cos n\vartheta|\leqslant 1$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Равенство достигается лишь для $n\vartheta$, кратных π [1]. Далее, второе неравенство выводим посредством полной индукции из соотношения

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}=\cos n\vartheta+\cos\vartheta\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Здесь равенство достигается лишь для $|\cos\vartheta|=1$.

8. $\cos\nu\vartheta$ есть полином ν-й степени от $\cos\vartheta$; $\cos^\nu\vartheta$ есть полином ν-го порядка по косинусам.

9. $\frac{\sin(\nu+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$ есть полином ν-й степени от $\cos\vartheta$; $\sin\vartheta\cos^\nu\vartheta$ есть полином $(\nu+1)$-го порядка по синусам.

10. $\cos p\vartheta\cos q\vartheta$, $\cos p\vartheta\sin q\vartheta$, $\sin p\vartheta\sin q\vartheta$, где p и q — целые неотрицательные числа, представляют собой тригонометрические полиномы $(p+q)$-го порядка.

11. Имеем

$$\cos\nu\vartheta=\frac{z^\nu+z^{-\nu}}{2},\quad \sin\nu\vartheta=\frac{z^\nu-z^{-\nu}}{2i},\quad z=e^{i\vartheta}\qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя эти выражения в $g(\vartheta)$ и умножая на $e^{in\vartheta}$, получаем

$$G(z)=\lambda_0 z^n+\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\lambda_\nu(z^{n+\nu}+z^{n-\nu})+\frac{1}{2i}\mu_\nu(z^{n+\nu}-z^{n-\nu})\right].$$

Имеем

$$u_\nu=\bar{u}_{2n-\nu}=\frac{\lambda_{n-\nu}+i\mu_{n-\nu}}{2}\qquad(\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

далее $u_n=\lambda_0$. Если $g(\vartheta)$ точно n-го порядка, то $G(z)$ будет точно $2n$-й степени (и не будет обращаться в нуль при $z=0$). Обратное также справедливо.

12. Пусть $G(z)=u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots+u_{2n}z^{2n}$. Тогда

$$u_\nu=\bar{u}_{2n-\nu}\qquad(\nu=0, 1, 2, \ldots, 2n),$$

так что u_n — вещественное и

$$g(\vartheta)-u_n=e^{-in\vartheta}\sum_{\nu=0}^{n-1}(u_\nu e^{i\nu\vartheta}+u_{2n-\nu}e^{i(2n-\nu)\vartheta})=2\Re\sum_{\nu=0}^{n-1}u_\nu e^{i(\nu-n)\vartheta}$$

представляет собой тригонометрический полином n-го порядка с вещественными коэффициентами.

13. Пусть z_0 — отличный от $z=0$ нуль полинома $G(z)$. Тогда $z_0^{2n}\bar{G}(z_0^{-1})=0$, т. е. $G(\bar{z}_0^{-1})=0$, так что $\bar{z}_0^{-1}$ (а это — не что иное, как результат отражения точки z_0 в единичном круге) также является нулем полинома $G(z)$. С помощью дифференцирования получаем аналогично, что если z_0 есть нуль кратности k, то таковым же будет и $\bar{z}_0^{-1}$. Далее, если $G(z)$ имеет $z=0$ нулем кратности k, то при переходе к $z^{2n}\bar{G}(z^{-1})$ степень понизится ровно на k единиц [т. е. $z^{2n}\bar{G}(z^{-1})$, рассматриваемый как полином $2n$-й степени, будет иметь k нулей в бесконечности].

Таким образом, нули полинома $G(z)$ разбиваются на пары, такие, что нуль, входящий в одну из них, является результатом отражения другого в единичном круге.

14. Обозначим нули полинома $G(z)$, определенного в задаче **11**, через $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ ($z_\nu \neq 0$; $\nu=1, 2, \ldots, 2n$). Тогда нули тригонометрического полинома $g(\vartheta)$ будут

$$\vartheta_\nu = \frac{1}{i}\ln z_\nu, \quad 0 \leqslant \Re\vartheta_\nu < 2\pi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

15. В обозначениях задачи **11** должно иметь место тождественно для всех α и β соотношение

$$\sum_{k,\, l=0}^{2n} u_k u_l \sum_{\nu=0}^{n} e^{i(k-n)\left(\alpha-\frac{\nu\pi}{n+1}\right)+i(l-n)\left(\frac{\nu\pi}{n+1}-\beta\right)} = \sum_{k=0}^{2n} u_k e^{i(k-n)(\alpha-\beta)}.$$

Но

$$\sum_{\nu=0}^{n} e^{i(l-k)\frac{\nu\pi}{n+1}} = \begin{cases} n+1 & \text{при } k=l, \\ \dfrac{1-(-1)^{l-k}}{1-e^{i\frac{(l-k)\pi}{n+1}}} = \gamma_{kl} & \text{при } k \neq l. \end{cases}$$

Следовательно,

$$(n+1)\sum_{k=0}^{2n} u_k^2 e^{i(k-n)(\alpha-\beta)} + \sum_{\substack{k,\, l=0 \\ k\neq l}}^{2n} \gamma_{kl} u_k u_l e^{i(k-n)\alpha+i(n-l)\beta} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} u_k e^{i(k-n)(\alpha-\beta)}.$$

Очевидно, $\gamma_{kl}=0$ для четного и $\gamma_{kl}\neq 0$ для нечетного $l-k$. Так как сумма

$$\sum_{\substack{k,\, l=0 \\ k\neq l}}^{2n} \gamma_{kl} u_k u_l e^{i(k\alpha - l\beta)}$$

должна являться полиномом относительно $e^{i(\alpha-\beta)}$, то отсюда заключаем, что $u_k u_l = 0$ для нечетных $l-k$ и, кроме того, что

$$(n+1)\, u_k^2 = u_k,$$

откуда

$$u_k = 0 \quad \text{или} \quad = \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, интересующие нас полиномы характеризуются следующими условиями:

1. Они представляют собой полиномы по косинусам и содержат члены либо лишь с нечетными, либо лишь с четными кратными ϑ.

2. Действительно содержащиеся в них члены имеют все один и тот же коэффициент $\frac{2}{n+1}$, за исключением свободного члена, который, в случае, если он имеется, равен $\frac{1}{n+1}$.

Таких тригонометрических полиномов будет

$$2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + 2^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} - 1.$$

Пример.

$$g(\vartheta) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin (n+1)\vartheta}{\sin \vartheta}. \qquad [16.]$$

16. Положим $z = e^{i\vartheta}$; тогда первая сумма будет равна

$$\Re\left(\frac{1}{2} + z + z^2 + \ldots + z^n\right) = \Re \frac{1+z-2z^{n+1}}{2(1-z)} =$$

$$= \Re \frac{e^{-\frac{i\vartheta}{2}} + e^{\frac{i\vartheta}{2}} - 2e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}}{2\left(e^{-\frac{i\vartheta}{2}} - e^{\frac{i\vartheta}{2}}\right)}.$$

Аналогично вычисляем другие три суммы. Можно провести доказательство также путем полной индукции.

17. Из последней формулы предыдущей задачи получаем, что рассматриваемое выражение равно

$$\frac{1}{\sin \vartheta}\left(\frac{\sin n\vartheta \sin \frac{2n+1}{2}\vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} - \frac{\sin n\vartheta \sin (n+1)\vartheta}{\sin \vartheta}\right).$$

(Либо непосредственным вычислением.) При $\vartheta = 0$ отсюда получается, что сумма n первых нечетных чисел равна n^2.

18. Комбинируя 16 и 17, получаем

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+\cos\vartheta+\cos 2\vartheta+\ldots+\cos\nu\vartheta\right)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2.$$

19. Из 16—18:

1) $\nu\frac{2\pi}{2n+1}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$;

2) $\nu\frac{2\pi}{n}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ и $(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$;

3) $\nu\frac{\pi}{2n}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n+1,\ \ldots,\ 4n-1$;

4) $\nu\frac{2\pi}{n}$, $\nu\frac{2\pi}{n+1}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

5) $\nu\frac{\pi}{n}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n$, все двукратные, за исключением $\nu=n$ и $\nu=2n$;

6) $\nu\frac{2\pi}{n+1}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, все двукратные.

20. Из 16, 2 или 1.

21. Рассматриваемая сумма равна

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu\vartheta+\sum_{\nu=1}^{n+1}\sin\nu\vartheta}{2}=\sin^2(n+1)\frac{\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}. \qquad [16.]$$

22. [L. Fejér, Math. Ann., т. 58, стр. 53, 1903.] Из 18.

23. [См. T. H. Gronwall, Math. Ann., т. 72, стр. 229—230, 1912.] Согласно 16

$$\frac{dA(n,\vartheta)}{d\vartheta}=\frac{\sin\frac{n}{2}\vartheta\cos\frac{n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

Это выражение обращается в нуль в интервале $0\leqslant\vartheta<\pi$ лишь в указанных в задаче точках, причем переходит в этих точках попеременно от положительных к отрицательным и от отрицательных к положительным значениям. Оно обращается в нуль также при $\vartheta=\pi$, если n — четное. Однако точка $x=\pi$, $y=0$ является центром симметрии для кривой $y=A(n,x)$, следовательно, в ней нет ни минимума, ни максимума.

24. [D. Jackson, Rend. Palermo, т. 32, стр. 257—258, 1911; T. H. Gronwall, l. c. 23, стр. 231; равенство $\operatorname{Max} A(n,\vartheta)=$

$=A\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right)$ было найдено L. Fejér'ом, см. D. Jackson, l. c.]. Согласно формуле 20

$$A\left(n, (2\nu+1)\frac{\pi}{n+1}\right)-A\left(n, (2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}\right)=$$

$$=\int\limits_{(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}}^{(2\nu+1)\frac{\pi}{n+1}} \frac{dA(n, \vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}}^{(2\nu+1)\frac{\pi}{n+1}} \sin(n+1)\vartheta \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{(2\nu-1)\frac{\pi}{n+1}}^{2\nu\frac{\pi}{n+1}} \sin(n+1)\vartheta\left(\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\vartheta+\frac{\pi}{n+1}}{2}\right)d\vartheta$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, q-1;\ n\geqslant 3).$$

В последнем интеграле $\sin(n+1)\vartheta\leqslant 0$, а выражение в скобках положительно, так как $\operatorname{ctg} x$ в интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$ монотонно убывает.

25. [L. Fejér; см. D. Jackson, l. c. **24**, стр. 259; T. H. Gronwall, l. c. **23**, стр. 233.] Согласно **24**

$$A\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right)>A\left(n, \frac{\pi}{n}\right)=A\left(n-1, \frac{\pi}{n}\right).$$

По поводу $\lim\limits_{n\to\infty} A\left(n, \frac{\pi}{n+1}\right)$ см. II 6.

26. [W. H. Young, Proc. Lond. M. S. (2), т. 11, стр. 359, 1913.] Согласно **16**

$$\frac{dB(n, \vartheta)}{d\vartheta}=-\frac{\sin\frac{n}{2}\vartheta\sin\frac{n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{\vartheta}{2}}. \qquad [19, 23.]$$

27. [W. H. Young, l. c. **26**.] Пусть $n\geqslant 3$, $\varkappa$, λ — целые, $1\leqslant\varkappa<\lambda\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Тогда [21]

$$B\left(n, \lambda\frac{2\pi}{n+1}\right)-B\left(n, \varkappa\frac{2\pi}{n+1}\right)=\int\limits_{\varkappa\frac{2\pi}{n+1}}^{\lambda\frac{2\pi}{n+1}} \frac{dB(n, \vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta=$$

$$=-\int\limits_{\varkappa\frac{2\pi}{n+1}}^{\lambda\frac{2\pi}{n+1}} \left(\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots+\sin n\vartheta+\frac{\sin(n+1)\vartheta}{2}\right)d\vartheta<0.$$

28. [W. H. Young, 1. c. 26.] Согласно 27

$$\operatorname{Min} B(n, \vartheta)=\begin{cases} B(n, \pi), & \text{если } n \text{ — нечетное,} \\ B\left(n, n\frac{\pi}{n+1}\right), & \text{если } n \text{ — четное.}\end{cases}$$

В первом случае имеем

$$B(n, \pi)=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\geqslant-1.$$

При нечетном $n\geqslant 5$ имеем даже

$$B(n, \vartheta)\geqslant-1+\frac{13}{60}>-1+\frac{1}{n}.$$

Во втором случае

$$B\left(n, n\frac{\pi}{n+1}\right)=B\left(n+1, n\frac{\pi}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1},$$

т. е. при четном $n\geqslant 4$ имеем

$$B\left(n, n\frac{\pi}{n+1}\right)>-1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=-1.$$

При $n=2$

$$B\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}>-1.$$

29. В нижеследующем $n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$; мы отмечаем особо те элементы симметрии, которые не могут быть приведены в совпадение вращениями в себе плоскости кривой $y=f(x)$.

1) Прямые $x=2n\pi$ и $x=(2n-1)\pi$ являются осями симметрии; $b_1=b_2=b_3=\ldots=0$.

2) Точки $x=2n\pi$ и $x=(2n-1)\pi$ оси абсцисс $y=0$ являются центрами симметрии; $a_0=a_1=a_2=a_3=\ldots=0$.

3) Кривая $y=f(x)$ приводится в совпадение сама с собой горизонтальным смещением на π и последующим отражением от оси абсцисс (ось абсцисс — «скользящая ось отражения»); $a_0=a_2=b_2=$ $=a_4=b_4=a_6=b_6=\ldots=0$.

4а) Вертикальные прямые $x=n\pi$ являются осями симметрии; точки $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $y=0$ являются центрами симметрии; $b_1=$ $=b_2=b_3=\ldots=0$, $a_0=a_2=a_4=\ldots=0$.

4б) Вертикальные прямые $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ являются осями симметрии, точки $x=n\pi$, $y=0$ — центрами симметрии; $a_0=a_1=a_2=$ $=a_3=\ldots=0$, $b_2=b_4=b_6=\ldots=0$. (С чисто геометрической точки зрения ничего нового по сравнению с 4а.)

5) Периодом является уже половина 2π; $a_1=b_1=a_3=b_3=$ $=a_5=b_5=\ldots=0$. Симметрия состоит лишь в инвариантности при горизонтальных смещениях на целые кратные π. (С чисто геометрической точки зрения — никакого нового вида симметрии по сравнению с общим рядом Фурье.)

(Кроме пяти перечисленных, существуют еще два (получающихся отражением от оси x), следовательно, всего семь типов симметрии для периодического «бордюрного узора», т. е. семь различных групп движений, переводящих неограниченный ряд равноотстоящих точек и проходящую через них плоскость в самих себя.)

30. $2n+1$ первых коэффициентов Фурье полинома $f(\vartheta)$ совпадают с соответствующими коэффициентами этого полинома (в обозначениях задачи **11**: $a_0=\lambda_0$, $2a_\nu=\lambda_\nu$, $2b_\nu=\mu_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$ $\ldots, n$), все остальные равны нулю.

31. Имеем

$$\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^n=\left(e^{i\frac{\vartheta}{2}}+e^{-i\frac{\vartheta}{2}}\right)^n=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(e^{i\frac{\vartheta}{2}}\right)^{n-\nu}\left(e^{-i\frac{\vartheta}{2}}\right)^{\nu}=$$

$$=\Re\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}e^{i\left(\frac{n}{2}-\nu\right)\vartheta}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\cos\left(\frac{n}{2}-\nu\right)\vartheta. \qquad [\text{III } \mathbf{117}.]$$

32. Умножая на $\cos n\vartheta$, соотв. $\sin n\vartheta$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) и интегрируя в пределах от 0 до 2π, получаем, что коэффициенты Фурье функции $f(\vartheta)$ совпадают с $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, т. е. что ряд Фурье функции $f(\vartheta)$ совпадает с заданным тригонометрическим рядом.

33. Раскладываем функцию, заданную равенствами

$$f(\vartheta)=\begin{cases}\dfrac{\pi-\vartheta}{2} & \text{при } 0<\vartheta<2\pi,\\ 0 & \text{при } \vartheta=0,\end{cases}$$

в ряд Фурье.

34. Первый ряд получается в результате непосредственного вычисления коэффициентов Фурье. Полагая в нем $\vartheta=0$ и вычитая полученный таким образом ряд, получаем второй.

35. [G. Szegö, Math. Zeitschr., т. 9, стр. 163, 1921.] Согласно 34

$$\rho_m=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nm\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta. \qquad [\mathbf{17}.]$$

36. Что члены с синусами, а также члены с косинусами, стоящими на нечетных местах, отсутствуют, вытекает из **29**, 1), 5). Далее, имеем

$$-c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\cos 2n\vartheta\,d\vartheta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\vartheta)\cos 2n\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{4n}}\left[f\left(\frac{\nu\pi}{n}+\vartheta\right)-f\left(\frac{\nu\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}-\vartheta\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{\nu\pi}{n}+\frac{\pi}{2n}+\vartheta\right)+f\left(\frac{\nu\pi}{n}+\frac{\pi}{n}-\vartheta\right)\right]\cos 2n\vartheta\,d\vartheta.$$

Но в интервале $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$, очевидно, $\cos 2n\vartheta > 0$. С другой стороны, для любой функции $f(x)$, выпуклой сверху в интервале a, b, при $a < x - v < x - u < x + u < x + v < b$ имеем

$$f(x-u) \geqslant \frac{(v+u) f(x-v) + (v-u) f(x+v)}{2v},$$

$$f(x+u) \geqslant \frac{(v-u) f(x-v) + (v+u) f(x+v)}{2v} \qquad [\text{II } 74];$$

следовательно, что геометрически также ясно,

$$f(x-v) - f(x-u) - f(x+u) + f(x+v) \leqslant 0.$$

37. Доказательство как для частного случая 35 с применением теоремы 36.

38. В обозначениях задач **26—28** имеем [34]

$$\Gamma(n, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B(n, 2\nu\vartheta)}{4\nu^2 - 1} \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4\nu^2 - 1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} + \frac{2}{\pi}.$$

Далее,

$$M_n > \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Gamma(n, \vartheta)\, d\vartheta = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

39. Положим $z = e^{i\vartheta}$ и

$$|x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_n z^n|^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\vartheta + \mu_1 \sin\vartheta +$$
$$+ \lambda_2 \cos 2\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \ldots + \lambda_n \cos n\vartheta + \mu_n \sin n\vartheta.$$

Тогда

$$\lambda_0 = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_\nu + i\mu_\nu) = x_0 \bar{x}_\nu + x_1 \bar{x}_{\nu+1} + \ldots + x_{n-\nu} \bar{x}_n \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

$\lambda_n + i\mu_n = 2x_0\bar{x}_n \neq 0$. (При $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ получаем новое доказательство формулы **18**.)

40. [F. Riesz, см. L. Fejér, J. für Math., т. 146, стр. 53—82, 1916.] Определенный в задаче **11** полином $G(z)$ состоит из следующих трех множителей, из которых один или два могут и отсутствовать [13]:

$$\prod_{\mu=1}^{k} (z - \zeta_\mu), \quad \prod_{\nu=1}^{l} (z - z_\nu)\left(z - \frac{1}{\bar{z}_\nu}\right), \quad cz^r,$$

где $k+2l+r=2n$; k, l, r — целые неотрицательные числа, $|\zeta_\mu| = 1$, $0<|z_\nu|<1$, $\mu=1, 2, \ldots, k$, $\nu=1, 2, \ldots, l$ и c — произвольное комплексное число. Нулям $\zeta_\mu=e^{i\vartheta_\mu}$ полинома $G(z)$, лежащим на границе единичного круга, соответствуют нули ϑ_μ полинома $g(\vartheta)$ в вещественном интервале $0\leqslant\vartheta<2\pi$. И притом, как можно убедиться дифференцированием соотношения $g(\vartheta) = e^{-in\vartheta}G(e^{i\vartheta})$, каждому нулю $\zeta_\mu=e^{i\vartheta_\mu}$ полинома $G(z)$ соответствует нуль ϑ_μ полинома $g(\vartheta)$ с той же кратностью. Так как $g(\vartheta)\geqslant 0$, то каждый нуль ζ_μ должен входить с четной кратностью. Пусть тогда

$$\prod_{\mu=1}^{k}(z-\zeta_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\frac{k}{2}}(z-\zeta_\mu)^2.$$

Отсюда следует

$$g(\vartheta)=|g(\vartheta)|=|G(e^{i\vartheta})|=|c|\prod_{\mu=1}^{\frac{k}{2}}|e^{i\vartheta}-\zeta_\mu|^2\prod_{\nu=1}^{l}\frac{|e^{i\vartheta}-z_\nu|^2}{|z_\nu|}.$$

41. [40.] В этом случае полином $G(z)$ имеет вещественные коэффициенты, так что комплексные нули ζ_μ и z_ν являются попарно сопряженными.

42. Любой линейный множитель $z-z_0$ полинома $h(z)$ можно заменить на $1-\bar{z}_0 z$, ибо на окружности единичного круга $|z-z_0|=|1-\bar{z}_0 z|$ [III 5]. При этом z_0, в частности, может быть равно нулю.

43. Способом, указанным в решении 42, можно избавиться от всех нулей $h(z)$, меньших по абсолютной величине, чем 1. Условию 2 можно удовлетворить умножением на некоторую постоянную γ, $|\gamma|=1$. И тогда из III **274** вытекает, что этот полином $h(z)$ однозначно определен.

44. Рассматриваемая целая рациональная функция разлагается на множители вида $(x-x_0)^2+y_0^2$, где x_0, y_0 — вещественные числа. Теперь принимаем во внимание тождество

$$(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)=(p_1p_2+q_1q_2)^2+(p_1q_2-p_2q_1)^2.$$

45. Рассматриваемая целая рациональная функция разлагается на множители вида

$$(x-x_0)^2+y_0^2 \quad (x_0,\ y_0 \text{ — вещественные}),\quad x+x_1\ (x_1\geqslant 0).$$

Принимаем во внимание тождество

$$\begin{aligned}[p_1^2+q_1^2+x(r_1^2+s_1^2)][p_2^2+q_2^2+x(r_2^2+s_2^2)] &= \\ =[(p_1^2+q_1^2)(p_2^2+q_2^2)+x^2(r_1^2+s_1^2)(r_2^2+s_2^2)] &+ \\ +x[(p_1^2+q_1^2)(r_2^2+s_2^2)+(r_1^2+s_1^2)(p_2^2+q_2^2)]&.\end{aligned}$$

Далее применяем дважды теорему 44.

46. [M. Fekete.] Обозначим рассматриваемый полином через $P(x)$. Применяем к $P(\cos\vartheta)$ теорему **41** и принимаем во внимание 8, 9. Имеем

$$P(\cos\vartheta)=|A(\cos\vartheta)+iB(\cos\vartheta)\sin\vartheta|^2,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

47. [F. Lukács.] Пусть $P(x)$ — полином степени $2m$. Согласно **41**

$$P(\cos\vartheta)=|h(e^{i\vartheta})|^2=|e^{-im\vartheta}h(e^{i\vartheta})|^2,$$
$$e^{-im\vartheta}h(e^{i\vartheta})=A(\cos\vartheta)+iD(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

где $h(z)$ — полином $2m$-й степени с вещественными коэффициентами, $A(x)$ степени m, $D(x)$ степени $m-1$. Если $P(x)$ степени $2m+1$, то имеем

$$P(x)=(x-\alpha)P_1(x)=(x+1)P_1(x)+(-\alpha-1)P_1(x),$$

или

$$P(x)=(\beta-x)P_1(x)=(\beta-1)P_1(x)+(1-x)P_1(x),$$

где $\alpha\leqslant-1$, соотв. $\beta\geqslant1$, затем к $P_1(x)$ применяем предыдущие рассуждения.

48. [Ch. Hermite, задача, Interméd. des math., т. 1, стр. 65, 1894. Решение — J. Franel, Ê. Goursat, J. Sadier, там же, т. 1, стр. 251, 1894.] Нет. Действительно, в противном случае можно было бы написать

$$x^2+\varepsilon=\sum A(\varepsilon)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

где $\varepsilon>0$, $A(\varepsilon)\geqslant0$, α и β пробегают все целые неотрицательные числа, для которых $\alpha+\beta\leqslant2$. Таким образом, при любом ε в этой сумме будет содержаться ровно шесть членов. Полагая здесь $x=0$, получаем, что $A(\varepsilon)$ ограничено для $0<\varepsilon\leqslant1$. Будем теперь так приближать ε к нулю, чтобы существовал $\lim A(\varepsilon)=A$ и при том во всех шести членах; тогда в пределе получим

$$x^2=\sum A(1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

Но при $x=0$ это тождество невозможно.

49. [F. Hausdorff, Math. Zeitschr., т. 9, стр. 98—99, 1921.]

Первое решение. Достаточно рассмотреть следующие два частных случая:

1. $P(x)$ — линейная функция:

$$P(x)=\frac{P(-1)}{2}(1-x)+\frac{P(1)}{2}(1+x).$$

2. $P(x)$ — полином второй степени:

$$P(x)=a+2b(1-x)+c(1-x)^2,\quad c>0,\quad ac-b^2>0.$$

Имеем при любом целом $p \geqslant 2$

$$2^p P(x) = a \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (1-x)^\nu (1+x)^{p-\nu} +$$
$$+ 2b(1-x)\, 2 \sum_{\nu=1}^{p} \binom{p-1}{\nu-1} (1-x)^{\nu-1} (1+x)^{p-\nu} +$$
$$+ c(1-x)^2\, 4 \sum_{\nu=2}^{p} \binom{p-2}{\nu-2} (1-x)^{\nu-2} (1+x)^{p-\nu} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{(p-2)!}{\nu!\,(p-\nu)!} f(\nu) (1-x)^\nu (1+x)^{p-\nu}.$$

Но

$$f(\nu) = ap(p-1) + 4b(p-1)\nu + 4c\nu(\nu-1) =$$
$$= 4c\nu^2 + 2(2bp - 2b - 2c)\nu + (ap^2 - ap)$$

как полином второй степени относительно ν будет положительно определенным при достаточно больших p, именно при p, удовлетворяющих неравенству

$$4c(ap^2 - ap) - (2bp - 2b - 2c)^2 = 4(ac - b^2) p^2 + \ldots > 0.$$

Второе решение. Введем новое переменное z посредством уравнения

$$(1+x)(1+z) = 2.$$

Пусть $P(x)$ — полином n-й степени. Тогда и

$$P\left(\frac{1-z}{1+z}\right)(1+z)^n = f(z)$$

также будет полиномом n-й степени, причем при $z > 0$ будет $f(z) > 0$. Следовательно, для достаточно большого целого p будет иметь место разложение

$$f(z)(1+z)^{p-n} = \sum_{\alpha=0}^{p} A_\alpha z^\alpha,$$

где все $A_\alpha \geqslant 0$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, p)$ [решение V 187]. А отсюда будем иметь

$$P(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)^n = 2^{-p} \sum_{\alpha=0}^{p} A_\alpha (1-x)^\alpha (1+x)^{p-\alpha}.$$

50. Первое доказательство. [L. Fejér, C. R., т. 157, стр. 506—509, 1913; вопрос об условиях достижения равенства не разбирается.] Положим

$$Q(z) = n + 1 - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 + ze^{i\vartheta_\nu}}{1 - ze^{i\vartheta_\nu}}, \quad \vartheta_\nu = \nu \frac{2\pi}{n+1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда [см. III 6] при $|z|<1$

$$\Re Q(z) < n+1,$$

далее [см. второе доказательство],

$$Q(z) = 1+2z+2z^2+\ldots+2z^n+q_{n+1}z^{n+1}+q_{n+2}z^{n+2}+\ldots$$

Таким образом, при $0 \leqslant r < 1$ имеем

$$\lambda_0+\lambda_1 r+\lambda_2 r^2+\ldots+\lambda_n r^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)(1+2r\cos\vartheta+\ldots+2r^n\cos n\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\,[\Re Q(re^{i\vartheta})]\,d\vartheta < (n+1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta = n+1.$$

Для получения требуемой оценки $g(0)$ устремляем r к 1. Рассматриваем, далее, $g(\vartheta+\vartheta_0)$, где ϑ_0 фиксировано.

Второе доказательство. [L. Fejér, C. R., т. 157, стр. 571—572, 1913.] Достаточно доказать, что $g(0) \leqslant n+1$. Положим $\vartheta_\nu = \nu\frac{2\pi}{n+1}$ $(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда

$$\sum_{\nu=0}^{n}\cos k\vartheta_\nu = \sum_{\nu=0}^{n}\sin k\vartheta_\nu = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

так как

$$\sum_{\nu=0}^{n} e^{ik\vartheta_\nu} = \frac{1-e^{i(n+1)k\frac{2\pi}{n+1}}}{1-e^{ik\frac{2\pi}{n+1}}} = 0.$$

Имеем, следовательно,

$$g(0)+g(\vartheta_1)+g(\vartheta_2)+\ldots+g(\vartheta_n) = n+1,$$

т. е. $g(0) \leqslant n+1$. Для того чтобы имело место равенство, необходимо, чтобы $g(\vartheta_1)=g(\vartheta_2)=\ldots=g(\vartheta_n)=0$. Так как $g(\vartheta) \geqslant 0$, то

$$\vartheta_\nu = \nu\frac{2\pi}{n+1} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

будут двукратными нулями. Это условие вместе с начальным условием $\lambda_0=1$ вполне однозначно определяет $g(\vartheta)$. [18.]

Третье доказательство. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 65—66.] Согласно теореме 40 всякий тригонометрический полином $g(\vartheta)$ рассматриваемого типа может быть представлен в форме

$$g(\vartheta) = |x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n|^2 \qquad (z=e^{i\vartheta}),$$

где

$$\lambda_0 = |x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2 = 1. \qquad [39.]$$

Применяя неравенство II 80, получаем, что для каждого значения $\vartheta=\vartheta_0$

$$g(\vartheta_0)\leqslant(n+1)(|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2)=n+1.$$

Равенство достигается лишь при $x_\nu=\gamma e^{-i\nu\vartheta_0}$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots, n$); $|\gamma|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

51. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 73.] Имеем

$$\lambda_n+i\mu_n=2x_0\bar{x}_n$$

и

$$2|x_0\bar{x}_n|\leqslant|x_0|^2+|x_n|^2\leqslant|x_0|^2+|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2=1.$$

Равенство будет иметь место лишь для случая $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$, $|x_0|=|x_n|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. когда

$$g(\vartheta)=\frac{1}{2}|1+\gamma e^{in\vartheta}|^2,$$

где $|\gamma|=1$.

52. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 79.] Согласно 39, 40 задача приводится к отысканию максимума выражения

$$4|x_0\bar{x}_1+x_1\bar{x}_2+\ldots+x_{n-1}\bar{x}_n|^2$$

при дополнительном условии $|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2=1$. Мы можем ограничиться вещественными $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Максимум выражения

$$2|x_0x_1+x_1x_2+\ldots+x_{n-1}x_n|$$

будет равен [см. Kowalewski, стр. 275] наибольшему по абсолютной величине нулю определителя $D_n(f-h)$ задачи VII 70 при $f(\vartheta)=2\cos\vartheta$, т. е. равен $h_{n,n}=2\cos\frac{\pi}{n+2}$.

53. Пусть $h(z)=c(1+z_1z)(1+z_2z)\ldots(1+z_nz)$, $|z_\nu|\leqslant 1$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, c вещественно и больше нуля. Согласно II 52

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1+z_\nu e^{i\vartheta}|^2\,d\vartheta=0,$$

следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln g(\vartheta)\,d\vartheta=\ln c^2.$$

54. Все тригонометрические полиномы $g(\vartheta)$ интересующего нас типа имеют вид

$$g(\vartheta)=|h(e^{i\vartheta})|^2,$$

где $h(z)=(1+z_1z)(1+z_2z)\ldots(1+z_nz)=x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n$ независимо друг от друга пробегают все комплексные значения, по модулю не превосходящие единицы. Поэтому при $|z|\leqslant 1$ имеем

$$|h(z)|\leqslant(1+1)^n=2^n.$$

Равенство достигается лишь в том случае, когда все z_ν равны между собой, $|z_\nu|=1$ и, кроме того, $z=\bar{z}_\nu$.

55. Имеем

$$h(z)\ll(1+z)^n,$$

следовательно,

$$\lambda_0=|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2\leqslant 1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$$

[I 32]. Относительно достижения равенства рассуждаем, как в 54.

56. Как в 55:

$$|\lambda_\nu+i\mu_\nu|=2|x_0\bar{x}_\nu+x_1\bar{x}_{\nu+1}+\ldots+x_{n-\nu}\bar{x}_n|\leqslant$$
$$\leqslant 2\left[\binom{n}{0}\binom{n}{\nu}+\binom{n}{1}\binom{n}{\nu+1}+\ldots+\binom{n}{n-\nu}\binom{n}{n}\right]=2\binom{2n}{n+\nu}.$$

57. Первое доказательство. На основании 40 и 39 из $g(\vartheta)\geqslant 0$ и $\lambda_0=0$ вытекает

$$g(\vartheta)=|x_0+x_1e^{i\vartheta}+x_2e^{2i\vartheta}+\ldots+x_ne^{ni\vartheta}|^2,$$
$$|x_0|^2+|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_n|^2=0,$$

т. е. $x_0=x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Второе доказательство. [L. Fejér, 1. с. 50, второе доказательство. Как и во втором доказательстве в решении 50, заключаем, что при

$$\vartheta_\nu=\nu\frac{2\pi}{n+1}\qquad(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

будем иметь

$$g(0)+g(\vartheta_1)+g(\vartheta_2)+\ldots+g(\vartheta_n)=0,$$

т. е.

$$g(0)=g(\vartheta_1)=g(\vartheta_2)=\ldots=g(\vartheta_n)=0.$$

Таким образом, $g(\vartheta)$ имеет нули $0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ и притом вследствие условия $g(\vartheta)\geqslant 0$ все — двукратные. Согласно теореме 14 отсюда следует, что $g(\vartheta)\equiv 0$.

Третье доказательство. Полная индукция. При $n=1$

$$\lambda_1\cos\vartheta+\mu_1\sin\vartheta=\sqrt{\lambda_1^2+\mu_1^2}\cos(\vartheta-\vartheta_0),\ \ \operatorname{tg}\vartheta_0=\frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

и справедливость утверждения очевидна. Так как $g(\vartheta) \geqslant 0$, то при $n > 1$ функция

$$g^*(\vartheta) = \frac{g(\vartheta) + g(\vartheta+\pi)}{2} = \lambda_2 \cos 2\vartheta + \mu_2 \sin 2\vartheta + \\ + \lambda_4 \cos 4\vartheta + \mu_4 \sin 4\vartheta + \ldots + \lambda_{2p} \cos 2p\vartheta + \mu_{2p} \sin 2p\vartheta,$$

где $p = \left[\frac{n}{2}\right]$, представляет собой неотрицательный тригонометрический полином p-го порядка от 2ϑ, не имеющий свободного члена. Из $g^*(\vartheta) \equiv 0$, $g(\vartheta) \geqslant 0$ вытекает, что также $g(\vartheta) \equiv 0$.

58. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 67—68; l. c. 50, второе доказательство, стр. 573—574.] Если $g(\vartheta) \not\equiv 0$, то $m > 0$, $M > 0$ [57]. Применяем теорему 50 к $\frac{g(\vartheta)+m}{m}$, соотв. $\frac{M-g(\vartheta)}{M}$.

59. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 69.] Применяем теорему 58 к тригонометрическому полиному

$$g(\vartheta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta.$$

60. [L. Fejér, l. c. 40, стр. 80—81.] Пусть $g(\vartheta) \not\equiv \text{const}$. Применение теоремы 51 к $\frac{g(\vartheta)+m}{\lambda_0+m}$, соотв. $\frac{M-g(\vartheta)}{M-\lambda_0}$, дает

$$\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2} \leqslant \lambda_0 + m, \quad \sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2} \leqslant M - \lambda_0,$$
$$\sqrt{\lambda_n^2+\mu_n^2} \leqslant \frac{m+M}{2} \leqslant \operatorname{Max}(m, M).$$

61. [O. Szász, Münch. Ber., 1917, стр. 307—320.] Согласно теореме 40 можно положить

$$M - \sum_{\nu=1}^{n} (\lambda_\nu \cos \nu\vartheta + \mu_\nu \sin \nu\vartheta) = |x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_n z^n|^2,$$

$z = e^{i\vartheta}$. Отсюда [39]

$$\sqrt{\lambda_\nu^2+\mu_\nu^2} \leqslant 2(|x_0||x_\nu| + |x_1||x_{\nu+1}| + \ldots + |x_{n-\nu}||x_n|)$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как, далее, $M = |x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2$, то

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{\lambda_\nu^2+\mu_\nu^2} \leqslant$$
$$\leqslant (|x_0| + |x_1| + \ldots + |x_n|)^2 - (|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2) \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)M - M = nM. \quad [\text{II } 80.]$$

62. [П. Л. Чебышев, Собр. соч., т. I, стр. 387—469, СПб, 1899; см. L. Fejér, l. c. 40, стр. 81—82.] Если $P(x)$ имеет лишь вещественные коэффициенты, то применяем теорему 60 к тригонометрическому полиному $P(\cos\vartheta) = 2^{1-n}\cos n\vartheta + \ldots$ *). Пусть теперь $P(x)$ имеет произвольные комплексные коэффициенты. Тогда, отделяя вещественную и мнимую части, мы разобьем его на два полинома с вещественными коэффициентами:

$$P(x) = P_1(x) + iP_2(x).$$

Здесь коэффициент при x^n у $P_1(x)$ будет снова 1, а $P_2(x)$ будет $(n-1)$-й степени. Из соотношения $|P(x)|^2 = [P_1(x)]^2 + [P_2(x)]^2$ вытекает, что в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\operatorname{Max}|P(x)| \geqslant \operatorname{Max}|P_1(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Для того чтобы здесь достигалось равенство, необходимо, чтобы $P_1(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ и, кроме того, в каждой точке, в которой $|P_1(x)|$ достигает максимума (т. е. в $n+1$ точке), должно быть $P_2(x) = 0$, откуда $P_2(x) \equiv 0$. Несколько сильнее, чем предельный случай в III **270**.

63. При линейном преобразовании $\frac{2}{\beta-\alpha}(x-\alpha) - 1 = y$ интервал $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ переходит в интервал $-1 \leqslant y \leqslant 1$, далее, $P(x)$ преобразуется в $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^n Q(y)$, где $Q(y)$ так же выражено через y, как $P(x)$ через x.

64. Мы можем предположить, что $\beta > 0$, $\alpha = -\beta$, $d < 2\beta$. Для любого из «допустимых» полиномов $P(x)$ имеем

$$\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2} = \begin{cases} Q(x^2) & \text{при четном } n, \\ xQ(x^2) & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

где $Q(\xi)$ — полином степени $\left[\frac{n}{2}\right]$ от $\xi = x^2$ со старшим коэффициентом 1. Когда переменная x пробегает любой из интервалов $-\beta \leqslant x \leqslant -\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2} \leqslant x \leqslant \beta$, то переменная ξ пробегает интервал $\left(\frac{d}{2}\right)^2 \leqslant \xi \leqslant \beta^2$. Тем самым [63], полагая $2\left(\frac{\beta^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}{4}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]} = \mu$, будем иметь

$$\operatorname{Max}|P(x)| \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{Max}\left|\frac{P(x) + (-1)^n P(-x)}{2}\right| \begin{cases} = \operatorname{Max}|Q(\xi)| \geqslant \mu, \\ \geqslant \frac{d}{2}\operatorname{Max}|Q(\xi)| \geqslant \frac{d}{2}\mu, \end{cases} \qquad (*)$$

*) Рекомендуем читателю вывести основное свойство полиномов Чебышева $T_n(x)$, формулированное в этой задаче, непосредственно, не обращаясь к тригонометрическим полиномам (от противного).

смотря по тому, будет ли n четно или нечетно. Та же оценка остается в силе и для μ_n. С другой стороны, пусть $Q_0(\xi)$ будет полином степени $\left[\frac{n}{2}\right]$ со старшим коэффициентом 1, для которого $\operatorname{Max}|Q_0(\xi)|=\mu$ [62, 63]. Положим $P_0(x)=Q_0(x^2)$ или $xQ_0(x^2)$, смотря по тому, будет ли n четно или нечетно. Тогда будем иметь

$$\mu_n \leqslant \operatorname{Max}|P_0(x)| \begin{cases} =\mu, \\ \leqslant \beta\mu, \end{cases}$$

смотря по тому, будет ли n четно или нечетно.

В первом случае μ_n будет достигаться и притом **только** для $P(x)=P_0(x)$. Действительно, если $\operatorname{Max}|P(x)|=\mu$, то согласно (*) будет также

$$\operatorname{Max}\left|\frac{P(x)+P(-x)}{2}\right|=\mu,$$

следовательно,

$$\frac{P(x)+P(-x)}{2}=Q_0(x^2).$$

Далее, будем иметь

$$\left|\frac{P(x_\nu)+P(-x_\nu)}{2}\right|=\mu$$

в $\frac{n}{2}+1$ различных точках x_ν интервала $\frac{d}{2}\leqslant x\leqslant\beta$. Но теперь

$$\mu=\left|\frac{P(x_\nu)+P(-x_\nu)}{2}\right|\leqslant\frac{|P(x_\nu)|+|P(-x_\nu)|}{2}\leqslant\mu,$$

откуда $P(x_\nu)=P(-x_\nu)$. Тем самым полином $(n-1)$-й степени $P(x)-P(-x)$ обращается в нуль в $n+2$ точках, следовательно,

$$P(x)=P(-x)=Q_0(x^2)=P_0(x).$$

65. Пусть $M=\operatorname{Max}|Q(z)|$ при $|z|=1$. Тригонометрический полином $(n+1)$-го порядка

$$\Re\left(1+\frac{1}{M}e^{i\vartheta}Q(e^{i\vartheta})\right)$$

неотрицателен, имеет свободный член 1 и член наивысшего порядка $\frac{1}{M}\cos(n+1)\vartheta$ [51]. См. III 269.

66. Если точка P пробегает любой отрезок прямой g, а P_0 — любая фиксированная точка пространства, то $\overline{PP_0}\geqslant\overline{PP_0'}$, где P_0' означает проекцию P_0 на g. Таким образом, интересующий нас «minimum maximorum» может достигаться лишь для тех систем точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$, которые лежат в одной плоскости с заданным отрезком, соотв. кругом.

67. Из интерполяционной формулы Лагранжа получаем

$$x^k = \frac{x_1^k}{f'(x_1)}\frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{x_2^k}{f'(x_2)}\frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{x_n^k}{f'(x_n)}\frac{f(x)}{x-x_n}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

σ_k определяем сравнением коэффициентов при x^{n-1}. Далее, при $k=0$ имеем, разлагая по убывающим степеням x,

$$1 = f(x)\,(\sigma_0 x^{-1} + \sigma_1 x^{-2} + \sigma_2 x^{-3} + \ldots).$$

Рассматривая коэффициент при x^{-h-1}, получаем рекуррентную формулу

$$a_0\sigma_{n+h} + a_1\sigma_{n+h-1} + \ldots + a_{n-1}\sigma_{h+1} + a_n\sigma_h = 0 \qquad (h \geqslant 0),$$

так что имеем

$$\begin{aligned}
&a_0\sigma_n + a_1\sigma_{n-1} &&= 0,\\
&a_0\sigma_{n+1} + a_1\sigma_n + a_2\sigma_{n-1} &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0\sigma_{2n-2} + a_1\sigma_{2n-3} + \ldots + a_{n-1}\sigma_{n-1} &&= 0,\\
&a_0\sigma_{2n-1} + a_1\sigma_{2n-2} + \ldots + a_{n-1}\sigma_{n-2} + a_n\sigma_{n-1} &&= 0.
\end{aligned}$$

68. [I. Schur.] Пусть нули полинома $f(x)+\varepsilon$ будут $x_\nu = x_\nu(\varepsilon)$ $(\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$; при достаточно малом ε они представляют собой дифференцируемые функции от ε. Имеем $x_\nu(0) = x_\nu$, далее из $f[x_\nu(\varepsilon)] + \varepsilon = 0$ посредством дифференцирования получаем $f'(x_\nu)\,x'_\nu(0) = -1$. Применяем к $f(x)+\varepsilon$ теорему 67, дифференцируем по ε и полагаем затем $\varepsilon = 0$.

69. Полагаем в (*) (стр. 98) $P(x) = x^n f(x^{-1}) + (-1)^{n-1}x_1x_2\ldots$ $\ldots x_n f(x)$ и $x=-1$. Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(x_\nu)}{f'(x_\nu)\,(1+x_\nu)} = -\frac{P(-1)}{f(-1)} = (-1)^{n-1} + (-1)^n x_1x_2\ldots x_n.$$

70. Пусть $P(x)$ — рассматриваемый полином,

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Из тождества

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P(x_\nu)}{f'(x_\nu)}\frac{f(x)}{x-x_\nu},$$

сравнивая коэффициенты при x^n, получаем

$$1 = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P(x_\nu)}{f'(x_\nu)},$$

откуда

$$1 \leqslant M \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{|f'(x_\nu)|},$$

где M — наибольшая из абсолютных величин $|P(x_\nu)|$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$). Имеем дальше

$$|f'(x_\nu)| = |(x_\nu - x_0)(x_\nu - x_1)\ldots(x_\nu - x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu+1})\ldots(x_\nu - x_n)| \geqslant \geqslant \nu!\,(n-\nu)!,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{|f'(x_\nu)|} \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!\,(n-\nu)!} = \frac{2^n}{n!}.$$

71. $T'_n(x_\nu) = (-1)^{\nu-1} \frac{n}{\sqrt{1-x_\nu^2}}$ $\quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

72. $U'_n(x_\nu) = (-1)^{\nu-1} \frac{n+1}{1-x_\nu^2}$ $\quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

73. [См. I. Schur, Math. Zeitschr., т. 4, стр. 273—274, 1919.] При $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ имеем

$$\left[\frac{d}{dx}[U_{n-1}(x)(x^2-1)]\right]_{x=x_\nu} = U'_{n-1}(x_\nu)(x_\nu^2-1) = (-1)^\nu n;$$

далее,

$$\left[\frac{d}{dx}[U_{n-1}(x)(x^2-1)]\right]_{x=\pm 1} = \pm 2U_{n-1}(\pm 1) = 2n, \text{ соотв. } (-1)^n 2n.$$

74. $\left[\frac{d}{dx}(x^n-1)\right]_{x=\varepsilon_\nu} = n\varepsilon_\nu^{n-1} = n\varepsilon_\nu^{-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$

75. Последнее уравнение утверждает, что старшие члены обоих полиномов равны между собой. Тогда из предпоследнего уравнения заключаем, что также вторые члены совпадают, и т. д. Иначе говоря: положим

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

и зададим произвольные числа $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Тогда из уравнений

$$\begin{aligned}
P^{(n)}(x_n) &= n!a_0 &&= c_n,\\
P^{(n-1)}(x_{n-1}) &= n!a_0x_{n-1} + (n-1)!a_1 &&= c_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P'(x_1) &= na_0x_1^{n-1} + (n-1)a_1x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = c_1,\\
P(x_0) &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = c_0
\end{aligned}$$

коэффициенты a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_n последовательно определятся однозначно.

76. [G. H. Halphen, Oeuvres, т. 2, стр. 520, Paris, Gauthier-Villars, 1918.] $A_n(x)$ вполне определяется условиями

$$A_n(0) = A_n'(1) = A_n''(2) = \ldots = A_n^{(n-1)}(n-1) = 0, \quad A_n^{(n)}(n) = 1.$$

Очевидно, $A_0(x) = 1$, $A_1(x) = x$ и вообще $A_n'(1+x)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным на полином $A_{n-1}(x)$. Следовательно,

$$A_n'(x) = A_{n-1}(x-1).$$

Из этой рекуррентной формулы посредством повторного интегрирования получаем

$$A_n(x) = \frac{x(x-n)^{n-1}}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Последующая проверка дифференцированием совсем проста. Иным способом то же доказано в III **221**.

77. Из теоремы **71** в ее обозначениях имеем

$$a_0 = \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \sqrt{1-x_\nu^2}\, P(x_\nu),$$

следовательно, $|a_0| \leqslant \frac{2^{n-1}}{n} n = 2^{n-1}$. Равенство достигается здесь тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{1-x_\nu^2}\, P(x_\nu) = (-1)^{\nu-1}\gamma, \quad |\gamma| = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Этими n условиями полином $(n-1)$-й степени $P(x)$ определяется однозначно. Так как, с другой стороны, этим условиям удовлетворяет $\gamma U_{n-1}(x)$, то $P(x)$ необходимо равно $\gamma U_{n-1}(x)$.

78. Сравнивая члены высших степеней в интерполяционной формуле **73**, получаем для высшего коэффициента a_0 полинома $P(x)$ представление

$$a_0 = \frac{2^{n-2}}{n} [P(1) + (-1)^n P(-1)] + \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu P(x_\nu).$$

Если, следовательно, $|P(x)| \leqslant 1$ в интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$|a_0| \leqslant \frac{2^{n-2}}{n} 2 + \frac{2^{n-1}}{n}(n-1) = 2^{n-1}.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$P(1) = \gamma, \quad P(-1) = (-1)^n\gamma, \quad P(x_\nu) = (-1)^\nu\gamma, \quad |\gamma| = 1$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Этими $n+1$ условиями $P(x)$ определяется однозначно. Так как, однако, и $\gamma T_n(x)$ удовлетворяет этим условиям, то $P(x)=\gamma T_n(x)$.

79. Пусть $P(z)$ — полином $(n-1)$-й степени со старшим коэффициентом a_0. Тогда [74]

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu P(\varepsilon_\nu).$$

Если, следовательно, $|P(z)|\leqslant 1$ при $|z|=1$, то

$$|a_0|\leqslant\frac{1}{n}\cdot n=1.$$

Равенство будет иметь место только тогда, когда $P(\varepsilon_\nu)=\gamma\bar{\varepsilon}_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, $|\gamma|=1$, т. е. для $P(z)=\gamma z^{n-1}$.

80. Из теоремы 71 при $x_1=\cos\frac{\pi}{2n}\leqslant x\leqslant 1$ получаем

$$|P(x)|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_\nu}=\frac{T_n'(x)}{n}=U_{n-1}(x),$$

т. е. согласно 7 $|P(x)|\leqslant n$. Равенство достигается лишь для $P(x)=\gamma U_{n-1}(x)$, $|\gamma|=1$, $x=1$. Аналогичное положение и при $-1\leqslant x\leqslant x_n=-x_1$. Если же $x_n\leqslant x\leqslant x_1$, $n>1$, то

$$\sqrt{1-x^2}\geqslant\sin\frac{\pi}{2n}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{n}.$$

81. [См. M. Riesz, Deutsche Math.-Ver., т. 23, стр. 354, 1914.] Применяем теорему 80 к полиному

$$P(x)=P(\cos\vartheta)=\frac{S(\vartheta)}{\sin\vartheta}. \qquad [9.]$$

82. [S. Bernstein, Mém. Belg. 1912, стр. 19 *); см. M. Riesz, l. c. 81; указываемый здесь прием принадлежит Fejér'у. См. M. Fekete, J. für Math., т. 146, стр. 88—94, 1915.] Согласно теореме 81

$$|S'(0)|=|g'(\vartheta_0)|\leqslant n.$$

83. [А. А. Марков, Изв. Акад. наук, т. 62, стр. 1—24, 1889.] Применяем теорему 82 к $P(\cos\vartheta)$ и 80 к $n^{-1}P'(x)$. Равенство может иметь место, лишь когда $n^{-1}P'(x)=\gamma U_{n-1}(x)$, $|\gamma|=1$, т. е. когда $P(x)=c+\gamma T_n(x)$, где c — постоянная. Из неравенства $|c\pm\gamma|\leqslant 1$ получаем $c=0$.

84. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)x^\nu\,dx=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^n x^\nu}{dx^n}\,dx,$$

*) С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. I, Изд. АН СССР, 1952, стр. 25.

ибо все производные от $(x^2-1)^n$ низшего чем n порядка в точках $x=1$ и $x=-1$ обращаются в нуль. Отсюда вытекает, что выполняется условие 1) (стр. 102) и точно так же условие 2), так как вследствие условия 1)

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)^2 dx=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)x^n\,dx=$$
$$=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx.$$

Условие 3) очевидно. Коэффициент при x^n в полиноме $P_n(x)$ будет

$$k_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

85. Из теоремы 84 по правилу Лейбница получаем

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{n!}{(n-\nu)!}(x+1)^{n-\nu}\frac{n!}{\nu!}(x-1)^{\nu}.$$

86. Имеем [III 117]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}e^{i\varphi}\right)^n\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}e^{-i\varphi}\right)^n d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}e^{ik\varphi}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{n-l}{2}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{l}{2}}e^{-il\varphi}\right)d\varphi=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\nu}=P_n(x)\qquad[85].$$

87. Пусть k_n — коэффициент при x^n в полиноме $P_n(x)$, $k_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ [84]. Представим полином $(n-1)$-й степени $P_n(x)-\frac{k_n}{k_{n-1}}xP_{n-1}(x)$ в виде линейной комбинации полиномов Лежандра:

$$P_n(x)-\frac{k_n}{k_{n-1}}xP_{n-1}(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+\ldots+c_{n-1}P_{n-1}(x).$$

Условие 1) (стр. 102) дает

$$c_0=c_1=\ldots=c_{n-3}=0.$$

Из $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ [85] получаем c_{n-2} и c_{n-1}.

88. Если бы существовал еще полином $S_n^*(x)$, обладающий тем же свойством, то мы имели бы

$$\int_{-1}^{1}[S_n(x)-S_n^*(x)]^2\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}S_n(x)[S_n(x)-S_n^*(x)]\,dx-\int_{-1}^{1}S_n^*(x)[S_n(x)-S_n^*(x)]\,dx=$$
$$=S_n(1)-S_n^*(1)-[S_n(1)-S_n^*(1)]=0,$$

т. е. $S_n^*(x)=S_n(x)$. Положим теперь

$$S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu P_\nu(x),\quad K(x)=\sum_{\nu=0}^{n}t_\nu P_\nu(x).$$

Для того чтобы уравнение

$$\int_{-1}^{1}S_n(x)K(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2}{2\nu+1}s_\nu t_\nu=K(1)=\sum_{\nu=0}^{n}t_\nu$$

удовлетворялось тождественно для всех $t_0, t_1, \ldots, t_n$, необходимо, чтобы $s_\nu=\frac{2\nu+1}{2}$, т. е.

$$S_n(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{2}P_1(x)+\frac{5}{2}P_2(x)+\ldots+\frac{2n+1}{2}P_n(x).$$

Пусть, далее,

$$(1-x)S_n(x)=u_0P_0(x)+u_1P_1(x)+\ldots+u_nP_n(x)+u_{n+1}P_{n+1}(x).$$

Из уравнений

$$\int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)x^\nu\,dx=0\quad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ n\geqslant 1)$$

заключаем, что $u_0=u_1=\ldots=u_{n-1}=0$. Полагая затем $x=1$ и $x=-1$ и замечая, что

$$P_n(1)=1,\ P_n(-1)=(-1)^n,$$
$$S_n(1)=\frac{(n+1)^2}{2},\quad S_n(-1)=(-1)^n\frac{n+1}{2},$$

получаем

$$S_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+1}{2}P_\nu(x)=\frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(x)-P_{n+1}(x)}{1-x}$$

(*формула Кристоффеля*).

89. Полагаем в 88 $K(x)=(1-x)x^{\nu}$. Тогда будем иметь

$$\int_{-1}^{1}(1-x)S_n(x)x^{\nu}\,dx=0\quad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ n\geqslant 1).$$

Далее [решение 88]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)[S_n(x)]^2\,dx=$$
$$=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}[P_n(x)-P_{n+1}(x)]\left(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+1}{2}P_{\nu}(x)\right)dx=$$
$$=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx=\frac{n+1}{2}.$$

90. Интегрирование по частям дает

$$\int_{-1}^{1}x^{\nu}\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))\,dx=-\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_n'(x)\,\nu x^{\nu-1}\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}P_n(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)\nu x^{\nu-1})\,dx=0\qquad(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x))=cP_n(x),$$

где c — постоянная. Эту постоянную определяем, например, сравнивая члены n-й степени.

91. Коэффициент при w^n в разложении $(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}$ по возрастающим степеням w будет во всяком случае полиномом n-й степени от x с положительным старшим коэффициентом [стр. 102, условие 3)]. Обозначив его через $P_n(x)$, будем иметь тождественно относительно u и v

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}P_k(x)P_l(x)\,dx\cdot u^kv^l=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2xu+u^2}\cdot\sqrt{1-2xv+v^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{uv}}\ln\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^nv^n$$

[стр. 102, условия 1), 2)]. Производящий ряд можно вывести также непосредственно из 84 [III 219].

92. а) Читаем III **219** в обратном направлении.

б) [III **157**.] В обратном направлении вычисление производится следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\, d\varphi \cdot w^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\, w}.$$

Но при достаточно малых w и $x>1$ этот последний интеграл равен $(1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}}$ [III **149**, $n=0$].

в) Положим $F(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, w^n$. Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} [nP_n(x) - (2n-1)\, xP_{n-1}(x) + (n-1)\, P_{n-2}(x)]\, w^{n-1} =$$
$$= (1-2xw+w^2)\frac{\partial F}{\partial w} + (w-x)\, F \equiv 0.$$

г) $$\sum_{n=0}^{\infty} [(1-x^2)\, P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)\, P_n(x)]\, w^n =$$
$$= (1-x^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial F}{\partial x} + w\frac{\partial^2 (wF)}{\partial w^2} \equiv 0.$$

93. Из **91** вытекает

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\vartheta\cdot w+w^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{i\vartheta}w}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^{-i\vartheta}w}} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k} e^{ik\vartheta} w^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)}{2\cdot 4\ldots 2l} e^{-il\vartheta} w^l\right).$$

Отсюда, перемножая [I **34**] и сравнивая коэффициенты, будем иметь

$$P_n(\cos\vartheta) = g_0 g_n \cos n\vartheta + g_1 g_{n-1}\cos(n-2)\,\vartheta +$$
$$+ g_2 g_{n-2}\cos(n-4)\,\vartheta + \ldots + g_n g_0 \cos n\vartheta,$$

где для краткости положено

$$g_0 = 1, \quad g_n = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда

$$|P_n(\cos\vartheta)| \leqslant g_0 g_n + g_1 g_{n-1} + g_2 g_{n-2} + \ldots + g_n g_0 = P_n(1) = 1.$$

Равенство может иметь место только в том случае, когда $n\vartheta$, $(n-2)\,\vartheta, \ldots$ все одновременно будут четными или нечетными кратными π, т. е. только при $\vartheta = k\pi$, где k — целое.

94. Положим $x=1+\xi$, $\xi>0$. Тогда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(x)-P_{n-1}(x)]\,w^n=\frac{1-w}{\sqrt{(1-w)^2-2\xi w}}=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi\dfrac{w}{(1-w)^2}}}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left(\frac{2\xi w}{(1-w)^2}\right)^n.$$

Степенной ряд $w(1-w)^{-2}=w+2w^2+3w^3+\ldots$ имеет лишь положительные коэффициенты.

95. [L. Fejér, Math Ann., т. 67, стр. 83, 1909.] Согласно **17** и III **157**

$$P_0(\cos\vartheta)+P_1(\cos\vartheta)+P_2(\cos\vartheta)+\ldots+P_n(\cos\vartheta)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\left(\sin(n+1)\dfrac{t}{2}\right)^2}{\sin\dfrac{t}{2}\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos t)}}\,dt.$$

96. При $x\geqslant 1$ $P_n(x)>0$. При $x<-1$ $\operatorname{sgn}P_n(x)=(-1)^n$ и $|P_n(x)|=|P_n(-x)|$ монотонно возрастает вместе с n [94]. $P_n(-1)=$ $=(-1)^n$ [85].

97. Частный случай теоремы II **140** для $a=-1$, $b=+1$, $f(x)=P_n(x)$. Можно другим способом: из **84** и V **58**, или из **85** и V **65**, или из **90** и III **34**, или же из **90** и V **120**.

98.

а) $$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right).$$

Коэффициент при x^n в $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ дается равенством

$$k_n=\frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

б) $$(t-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{\nu}\binom{n+\beta}{n-\nu}t^{\nu},$$

откуда

$$(-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=\binom{n+\beta}{n},\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}.$$

в) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,e^{i\varphi}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,e^{i\varphi}\right)^{\beta}d\varphi,$$

где x лежит в любой точке плоскости вне интервала $[-1, +1]$. При этом для квадратных корней, а также α-х и β-х степеней берутся те ветви, на которых эти корни, соотв. степени, при $x > 1$ и $\varphi = 0$ положительны; при $\Re x \geqslant 0$ α должно иметь целое значение (β произвольно), при $\Re x \leqslant 0$ β должно иметь целое значение (α произвольно), при мнимых значениях x формула справедлива без ограничений.

г) $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \left(A_n^{(\alpha, \beta)} x + B_n^{(\alpha, \beta)}\right) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - C_n^{(\alpha, \beta)} P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x)$,

$$A_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}{2n(n+\alpha+\beta)},$$

$$B_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2n} \frac{2n+\alpha+\beta-1}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)},$$

$$C_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

д) Пусть $S_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ — полином n-й степени, обладающий тем свойством, что для любого полинома $K(x)$ n-й степени

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} S_n^{(\alpha, \beta)}(x) K(x)\, dx = K(1);$$

тогда

$$S_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2\nu+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+\beta+1)} P_\nu^{(\alpha, \beta)}(x) =$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{n+1}{n+\alpha+1} P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{1-x}$$

(*формула Кристофелля*).

е) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta} S_m^{(\alpha, \beta)}(x) S_n^{(\alpha, \beta)}(x)\, dx =$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq n, \\ \dfrac{2^{-\alpha-\beta}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2 (2n+\alpha+\beta+2)} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)}, \end{cases}$$

если $m = n$; $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

ж) $(1-x^2) P_n^{(\alpha, \beta)''}(x) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x] P_n^{(\alpha, \beta)'}(x) +$
$+ n(n+\alpha+\beta+1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0.$

з) $\dfrac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xw+w^2}} \left(1 - w + \sqrt{1-2xw+w^2}\right)^{-\alpha} \times$
$\times \left(1 + w + \sqrt{1-2xw+w^2}\right)^{-\beta} =$
$= P_0^{(\alpha, \beta)}(x) + P_1^{(\alpha, \beta)}(x) w + P_2^{(\alpha, \beta)}(x) w^2 + \ldots + P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n + \ldots$

и) Нули полиномов Якоби — вещественные, простые и лежат внутри интервала $[-1, 1]$.

Доказательства аналогичны приведенным в **84—91**, **97**. При доказательстве в) записываем сначала б) в форме

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{\nu}\binom{n+\beta}{n-\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\left(1+\frac{x+1}{2}z\right)^{n+\alpha}\left(1+\frac{x-1}{2}z\right)^{n+\beta}\frac{dz}{z^{n+1}};$$

интегрирование производится вдоль окружности $|z| = 2|x^2-1|^{-\frac{1}{2}}$, подинтегральная функция регулярна внутри и непрерывна на этой окружности $(n \geqslant 1)$.

99.

а)
$$e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x}x^{n+\alpha}.$$

Коэффициент при x^n у полинома $L_n^{(\alpha)}(x)$ есть

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

б)
$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-\nu}\frac{(-x)^{\nu}}{\nu!},$$

отсюда

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

г) $nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha-1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x)$
$(n = 2, 3, 4, \ldots)$.

д) Пусть $S_n^{(\alpha)}(x)$ — полином n-й степени, обладающий тем свойством, что для любого полинома $K(x)$ n-й степени

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha}S_n^{(\alpha)}(x)K(x)\,dx = K(0).$$

Тогда

$$S_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{\nu=0}^{n}L_{\nu}^{(\alpha)}(x) = \frac{n+\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{n+1}{n+\alpha+1}L_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{x}$$

(*формула Кристоффеля*).

е) $\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{\alpha+1} S_m^{(\alpha)}(x) S_n^{(\alpha)}(x)\,dx =$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)}\dbinom{n+\alpha+1}{n}, & \text{если } m = n \end{cases} \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

ж) $$xL_n^{(\alpha)''}(x)+(\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)'}(x)+nL_n^{(\alpha)}(x)=0.$$

з) $$\frac{e^{-\frac{xw}{1-w}}}{(1-w)^{\alpha+1}}=L_0^{(\alpha)}(x)+L_1^{(\alpha)}(x)\,w+L_2^{(\alpha)}(x)\,w^2+\ldots+L_n^{(\alpha)}(x)\,w^n+\ldots$$

и) Нули (обобщенных) полиномов Лагерра — вещественные, положительные и простые.

Доказательства аналогичны приведенным в 84, 85, 87—91, 97.

100.

а) $$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отсюда посредством дифференцирования получаем

$$H_n'(x)-xH_n(x)=(n+1)H_{n+1}(x),$$

откуда вытекает, что у полинома $H_n(x)$ коэффициент при x^n есть

$$k_n=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

г) $nH_n(x)=-xH_{n-1}(x)-H_{n-2}(x) \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$

д) Пусть $S_n(x)$ — полином n-й степени, обладающий тем свойством, что для любого полинома n-й степени $K(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}S_n(x)\,K(x)\,dx=K(0).$$

Тогда

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^\nu\frac{(2\nu)!}{2^\nu\nu!}H_{2\nu}(x)=\frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(2p+1)!}{2^p p!}\frac{H_{2p+1}(x)}{x},$$

где $p=\left[\frac{n}{2}\right]$ (*формула Кристоффеля*).

ж) $$H_n''(x)-xH_n'(x)+nH_n(x)=0.$$

з) $$e^{-xw-\frac{w^2}{2}}=H_0(x)+H_1(x)\,w+H_2(x)\,w^2+\ldots+H_n(x)\,w^n+\ldots$$

и) Все нули полиномов Эрмита — вещественные и простые.

Доказательства а), г), д), з), и) аналогичны приведенным в 84, 87, 88, 91, 97; ж) вытекает из а).

101. Следует из решения 98 б); именно, полагая

$$\frac{t+1}{t-1}=1-\varepsilon, \qquad t=1-\frac{2}{\varepsilon},$$

имеем

$$\lim_{\beta\to+\infty}\binom{n+\beta}{n-\nu}\frac{t^{\nu}}{(t-1)^{n}}=\frac{(-x)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}$$

[решение 99 б)].

102. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) x^{2k+1}\,dx=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1),$$

так как подинтегральное выражение представляет собой нечетную функцию и

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) x^{2k}\,dx=$$

$$=2^{k+\frac{1}{2}}\int_0^{\infty} e^{-y} L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(y)\, y^{k-\frac{1}{2}}\,dy=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1)$$

согласно определению полинома $L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(y)$. Следовательно,

$$L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\text{const.}\, H_{2q}(x).$$

Аналогично показываем, что

$$xL_q^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\text{const.}\, H_{2q+1}(x).$$

Постоянные множители определяются путем сравнения коэффициентов при x^{2q}, соотв. x^{2q+1} [решение 99 а), 100 а)].

103. Полагаем

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\, P_\nu(x).$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1}[P(x)]^2\,dx=t_0^2+t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2=1.$$

Далее, согласно II 80

$$[P(x)]^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^2 \sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+1}{2}[P_\nu(x)]^2=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2\nu+1}{2}[P_\nu(x)]^2.$$

Равенство при произвольном $x=x_0$ достигается здесь лишь при условии

$$t_\nu = t\sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\,P_\nu(x_0) \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где t определяется так, чтобы выполнялось условие

$$t_0^2+t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2=1.$$

См., кроме того, 93.

104. Полагаем

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu\sqrt{\frac{2}{\nu+1}}\,S_\nu(x).$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1}(1-x)[P(x)]^2\,dx=t_0^2+t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2=1 \qquad [89].$$

Далее, согласно II 80

$$[P(x)]^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}t_\nu^2\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2}{\nu+1}[S_\nu(x)]^2=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2}{\nu+1}[S_\nu(x)]^2.$$

Имеем [решение 88]

$$S_n(1)=\frac{(n+1)^2}{2},\qquad S_n(-1)=(-1)^n\frac{n+1}{2}.$$

Границы достигаются при $t_\nu=t\sqrt{\frac{2}{\nu+1}}\,S_\nu(\pm1)$ $(\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n)$, где t в обоих случаях определяется так, чтобы выполнялось условие

$$t_0^2+t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2=1.$$

105. Имеем [103, решение 98 д)]

$$\operatorname{Max}[P(1)]^2=S_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\,\frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\left(\frac{n+1}{n+\alpha+1}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)\prime}(1)-P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(1)\right).$$

Из решения 98 ж) и б) получаем

$$P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(1)=\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}\binom{n+\alpha}{n}$$

и следовательно

$$\operatorname{Max}[P(1)]^2=S_n^{(\alpha,\beta)}(1)=$$

$$=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{n^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

Далее

$$\operatorname{Max}[P(-1)]^2 = S_n^{(\beta,\alpha)}(1) = \\ = \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\beta+2)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\beta+2)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)} \sim \\ \sim \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{n^{2\beta+2}}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma(\beta+2)}.$$

При $\alpha=1$, $\beta=0$ получаем **104**.

106. Получаем так же, как в **103** [99],

$$\operatorname{Max}[P(0)]^2 = S_n^{(\alpha)}(0) = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(n+1)} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+2)}.$$

107. Имеем [103, 100]

$$\operatorname{Max}[P(0)]^2 = S_n(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2p+1)!}{2^p\,p!} H'_{2p+1}(0) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1\cdot 3 \ldots (2p+1)}{2\cdot 4 \ldots 2p}, \quad p = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Согласно II **202**

$$\operatorname{Max}[P(0)]^2 = S_n(0) \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{n}.$$

108. [F. Lukács, Math. Zeitschr., т. 2, стр. 299, 304, 1918.] Частный случай неравенства **110** для $\alpha=\beta=0$. При доказательстве опираться на **103**, **104**, но не **105**.

109. [F. Lukács, l. c. **108**.] Достаточно доказать одно из этих неравенств: заменяя $P(x)$ на $-P(x)$, получим другое. Далее можем принять, что $m=0$. Пусть $a<\xi<b$, тогда [108]

$$P(\xi) \leqslant \frac{\alpha_n}{\xi-a}\int_a^\xi P(x)\,dx, \quad P(\xi) \leqslant \frac{\alpha_n}{b-\xi}\int_\xi^b P(x)\,dx.$$

Отсюда следует

$$P(\xi) \leqslant \frac{\alpha_n}{b-a}\int_a^b P(x)\,dx, \quad M \leqslant \frac{\alpha_n}{b-a}\int_a^b P(x)\,dx.$$

110. Полагаем [47]

$$P(x) = [A(x)]^2 + (1-x)[B(x)]^2 + (1+x)[C(x)]^2 + (1-x^2)[D(x)]^2,$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ — полиномы соответственно степеней

$$\left[\frac{n}{2}\right] = p, \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] = q-1, \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] = q-1, \quad \left[\frac{n}{2}\right] - 1 = p-1.$$

Полагая $S_n^{(\alpha,\beta)}(1) = S_n^{(\alpha,\beta)}$, согласно **105** имеем

$$P(1) = [A(1)]^2 + 2[C(1)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant S_p^{(\alpha,\beta)} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [A(x)]^2\, dx +$$
$$+ 2S_{q-1}^{(\alpha,\beta+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta+1} [C(x)]^2\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Max}\left[S_p^{(\alpha,\beta)}, 2S_{q-1}^{(\alpha,\beta+1)}\right] \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Max}\left[S_p^{(\alpha,\beta)}, 2S_{q-1}^{(\alpha,\beta+1)}\right].$$

111. Полагаем [45]

$$P(x) = [A(x)]^2 + [B(x)]^2 + x\{[C(x)]^2 + [D(x)]^2\},$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — полиномы степени $\left[\frac{n}{2}\right] = p$, $C(x)$ и $D(x)$ — степени $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Полагая $S_p^{(\alpha)}(0) = S_p^{(\alpha)}$, согласно **106** имеем, следовательно,

$$P(0) = [A(0)]^2 + [B(0)]^2 \leqslant S_p^{(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \{[A(x)]^2 + [B(x)]^2\}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant S_p^{(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha P(x)\, dx = S_p^{(\alpha)}.$$

112. Частный случай неравенства **111** при $\alpha = 0$.

113. Применяем **112** к полиному

$$\frac{P(x+\xi)}{\int_0^\infty e^{-x} P(x+\xi)\, dx}.$$

Имеем

$$P(\xi) \leqslant \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) \int_0^\infty e^{-x} P(x+\xi)\, dx = \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) e^{\xi} \int_\xi^\infty e^{-x} P(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) e^{\xi}.$$

ОТДЕЛ СЕДЬМОЙ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. Перестановка номеров двух вершин сводится к одновременной перестановке пары строк и пары столбцов. Приписывая противоположным вершинам октаэдра номера, отличающиеся на 3, получаем определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель для тетраэдра равен -3, для куба равен 9.

2. Умножаем первую строку на $-a_1$ и складываем со второй. Посредством полной индукции получаем

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_n - b_n).$$

3. [Cauchy, Exercices d'analyse et de phys. math., т. 2, 2-е изд., стр. 151—159, Paris, Bachelier, 1841.] Вычитаем последнюю строку из всех предшествующих. Тогда из столбцов выносятся за знак определителя множители

$$\frac{1}{a_n+b_1},\ \frac{1}{a_n+b_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n+b_{n-1}},\ \frac{1}{a_n+b_n},$$

а из строк — множители

$$a_n - a_1,\quad a_n - a_2,\ \ldots,\ a_n - a_{n-1},\quad 1.$$

В остающемся определителе вычитаем последний столбец из всех предшествующих и выносим из столбцов и строк соответственно множители

$$b_n - b_1,\ b_n - b_2,\ \ldots,\ b_n - b_{n-1},\quad 1,$$
$$\frac{1}{a_1+b_n},\ \frac{1}{a_2+b_n},\ \ldots,\ \frac{1}{a_{n-1}+b_n},\quad 1.$$

Тогда остается главный минор, имеющий тот же вид, что и заданный определитель, только порядком на единицу меньше. Затем применяем полную индукцию.

4. Частный случай задачи 3 для $a_\lambda=\lambda$, $b_\mu=\mu+\alpha$. Имеем

$$D_n(\alpha)=[1!2!\ldots(n-1)!]^2\frac{\Gamma(2+\alpha)\,\Gamma(3+\alpha)\ldots\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)\,\Gamma(n+3+\alpha)\ldots\Gamma(2n+1+\alpha)}.$$

5. Построчное перемножение [см. также II 51, VIII 2] определителей дает

$$\left|a_\lambda^{n-1},\ -\binom{n-1}{1}a_\lambda^{n-2},\ \binom{n-2}{2}a_\lambda^{n-3},\ \ldots,\ (-1)^{n-1}\right|\times$$
$$\times\left|1,\ b_\mu,\ b_\mu^2,\ \ldots,\ b_\mu^{n-1}\right|.$$

6.

$$\left\|\begin{matrix} p_0 & p_1\alpha_1 & p_2\alpha_1^2 & \ldots \\ p_0 & p_1\alpha_2 & p_2\alpha_2^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_0 & p_1\alpha_n & p_2\alpha_n^2 & \ldots \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 & \ldots \\ 1 & \beta_2 & \beta_2^2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \beta_n & \beta_n^2 & \ldots \end{matrix}\right\|=$$

$$=\sum\ldots\sum p_{\nu_1}p_{\nu_2}\ldots p_{\nu_n}\begin{vmatrix} \alpha_1^{\nu_1} & \alpha_1^{\nu_2} & \ldots & \alpha_1^{\nu_n} \\ \alpha_2^{\nu_1} & \alpha_2^{\nu_2} & \ldots & \alpha_2^{\nu_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^{\nu_1} & \alpha_n^{\nu_2} & \ldots & \alpha_n^{\nu_n} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \beta_1^{\nu_1} & \beta_1^{\nu_2} & \ldots & \beta_1^{\nu_n} \\ \beta_2^{\nu_1} & \beta_2^{\nu_2} & \ldots & \beta_2^{\nu_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_n^{\nu_1} & \beta_n^{\nu_2} & \ldots & \beta_n^{\nu_n} \end{vmatrix}.$$

Суммирование распространяется на все группы неотрицательных целых чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, $0\leqslant\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_n$. Все слагаемые последней суммы неотрицательны. Если среди чисел $p_0, p_1, p_2, \ldots$ по крайней мере n не равны нулю, то в числе слагаемых будут также положительные.

7. [A. Hurwitz; см. O. Hölder, Leipz. Ber., т. 65, стр. 110—120, 1913.] Вычтем в определителе $D(x)$, полученном в результате прибавления x ко всем элементам исходного определителя, первый столбец из всех последующих. Тогда x останется только в первом столбце, и поэтому $D(x)$ есть линейная функция от x, $D(x)=D+x\Delta$. При $x=-a$ и $x=-b$ $D(x)$ приводится к произведению элементов главной диагонали:

$$D-\Delta a=(r_1-a)(r_2-a)\ldots(r_n-a)=f(a),$$
$$D-\Delta b=(r_1-b)(r_2-b)\ldots(r_n-b)=f(b).$$

В случае $b=a$ [M. Roberts, задача, Nouv. Ann., серия 2, т. 3, стр. 139, 1864] определитель равен $f(a)-af'(a)$, что, впрочем, и непосредственно нетрудно усмотреть.

8. [T. Muir, Amer. Math. Monthly, т. 29, стр. 12, 1922.] Вообще имеем

$$\frac{\partial(\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \varphi^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

В применении к нашему случаю определитель равен Δ^3, умноженному на

$$\begin{vmatrix} ad-bc & a & b & c & d \\ -d & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\Delta.$$

9. [Задача, Collège d'Aberystwyth; Mathesis (2), т. 3, стр. 79, 1893. Решение — R e t a l i и др., там же, стр. 172.] Рассматриваемый определитель в случае вещественных l, m, n принадлежит квадратичной форме

$$(\rho-2)(x^2+y^2+z^2)+2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)(lx+my+nz),$$

при $\rho=2$ равной

$$2\left(\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}\right)(lx+my+nz)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{l}+l\right)x+\left(\frac{1}{m}+m\right)y+\left(\frac{1}{n}+n\right)z\right]^2-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{l}-l\right)x+\left(\frac{1}{m}-m\right)y+\left(\frac{1}{n}-n\right)z\right]^2.$$

Таким образом, ранг ее при $\rho=2$ меньше чем 3 (он равен 2, за исключением того случая, когда $l^2=m^2=n^2$; тогда он равен 1). Полагаем, далее, $\rho=(\rho-2)+2$ и разлагаем по степеням $\rho-2$. Получаем

$$(\rho-2)^3+(2+2+2)(\rho-2)^2+$$
$$+\left(\begin{vmatrix} 2 & \frac{l}{m}+\frac{m}{l} \\ \frac{l}{m}+\frac{m}{l} & 2 \end{vmatrix}+\ldots\right)(\rho-2)+0=$$
$$=(\rho-2)^3+6(\rho-2)^2+(9-P)(\rho-2),$$

где

$$P=\left(\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)(l^2+m^2+n^2).$$

Два остальных множителя суть

$$\rho+1-\sqrt{P},\quad \rho+1+\sqrt{P}.$$

10. Определяем значение неизвестной $(-1)^{q-1}S_q$ из системы уравнений

$$(-1)^{n-1}S_n+x_\nu(-1)^{n-2}S_{n-1}+x_\nu^2(-1)^{n-3}S_{n-2}+\ldots+x_\nu^{n-1}S_1=x_\nu^n$$
$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

11. Из соображений непрерывности можно ограничиться случаем, когда полином $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ имеет n различных нулей. Обозначим какой-либо из этих нулей через z и положим

$$a_0z^{n-1}=x_0,\ a_1z^{n-2}=x_1,\ a_2z^{n-3}=x_2,\ \ldots,\ a_{n-2}z=x_{n-2},\ a_{n-1}=x_{n-1}.$$

Тогда числа $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ удовлетворяют однородной системе

$$\left(z+\frac{a_1}{a_0}\right)x_0+\frac{a_2}{a_1}x_1+\frac{a_3}{a_2}x_2+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x_{n-2}+\frac{a_n}{a_{n-1}}x_{n-1}=0,$$
$$-\frac{a_1}{a_0}x_0+zx_1=0,\ -\frac{a_2}{a_1}x_1+zx_2=0,\ \ldots,\ -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}x_{n-2}+zx_{n-1}=0,$$

определитель которой должен быть равен нулю. Таким образом, предложенный определитель представляет собой полином n-й степени относительно z со старшим коэффициентом 1, имеющий те же нули, что и $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$.

12. Дело сводится к исследованию ранга матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{pmatrix}.$$

Первая из этих матриц содержит четыре определителя третьего порядка со значениями соответственно

$$a_1(a_1^2+a_2^2+a_3^2),\quad -a_2(a_1^2+a_2^2+a_3^2),\quad a_3(a_1^2+a_2^2+a_3^2),\quad 0;$$

очевидно, она имеет либо ранг 0, либо ранг 3. В первом случае условием совместности является $b_1=b_2=b_3=c=0$, во втором $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$. Если четыре уравнения совместны, то в первом случае x_1, x_2, x_3 совершенно неопределенны, во втором — имеют вполне определенные значения. При знакомстве с векторным умножением результат очевиден.

13. Имеем тождественно по z

$$1+u_1^{(n)}z+u_2^{(n)}z^2+\ldots+u_n^{(n)}z^n=\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\left(1-\frac{z}{a_2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Так как бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ равномерно сходится в каждой ограниченной области, то то же имеет место и для последовательности полиномов

$$1+u_1^{(n)}z+u_2^{(n)}z^2+\ldots+u_n^{(n)}z^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} u_k^{(n)}=u_k$$

существует для всех k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ и

$$1+u_1z+u_2z^2+\ldots+u_nz^n+\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \qquad [\text{I } 179].$$

Эта функция, вообще говоря, отличается от заданной множителем $e^{g(z)}$, где $g(z)$ — целая функция.

14. Мы получаем (имеются в виду определители $2n$-го порядка, а не 2-го, с элементами $|a_{\lambda\mu}|$, $|-b_{\lambda\mu}|$, $|b_{\lambda\mu}|$, $|a_{\lambda\mu}|$)

$$\begin{vmatrix}(a_{\lambda\mu}) & (-b_{\lambda\mu})\\(b_{\lambda\mu}) & (a_{\lambda\mu})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a_{\lambda\mu}+ib_{\lambda\mu}) & (-b_{\lambda\mu}+ia_{\lambda\mu})\\(b_{\lambda\mu}) & (a_{\lambda\mu})\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}(a_{\lambda\mu}+ib_{\lambda\mu}) & (0)\\(b_{\lambda\mu}) & (a_{\lambda\mu}-ib_{\lambda\mu})\end{vmatrix}=|a_{\lambda\mu}+ib_{\lambda\mu}|\cdot|a_{\lambda\mu}-ib_{\lambda\mu}|=A^2+B^2,$$

где положено $|a_{\lambda\mu}+ib_{\lambda\mu}|=A+iB$, A и B — вещественные. Обращение в нуль суммы A^2+B^2 равносильно одновременному обращению A и B в нуль.

15. [G. Rados, задача, Math. és phys. lapok, т. 15, стр. 389, 1906. Решение — M. Fekete и др., там же, т. 16, стр. 310, 1907.] Произведение слагаемых $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ равно по абсолютной величине и противоположно по знаку произведению трех остальных.

16. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 20, стр. 271, 1913. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 21, стр. 291, 1913.] Если бы $\varepsilon_{\lambda\mu}$ были требуемые знаки, то согласно гипотетическому закону мы имели бы $|\varepsilon_{\lambda\mu}|_{\lambda,\mu=1,2,\ldots,n}=n!$ в противоречие с неравенством Адамара, согласно которому $|\varepsilon_{\lambda\mu}|_{\lambda,\mu=1,2,\ldots,n}\leqslant n^{\frac{n}{2}}$ [Kowalewski, стр. 460], ибо, начиная с $n=3$, $n^n<(n!)^2$. Впрочем, достаточно доказать невозможность лишь для определителей третьего порядка [15].

17. Пусть знаменатель будет $z^q - c_1 z^{q-1} - c_2 z^{q-2} - \ldots - c_q$. Произведение

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots)(z^q - c_1 z^{q-1} - \ldots - c_q)$$

есть не что иное, как полином степени $p-1$. Поэтому в разложении этого произведения коэффициент при z^{q+n}

$$a_n - a_{n+1}c_1 - a_{n+2}c_2 - \ldots - a_{n+q}c_q = 0 \qquad (*)$$

при $n = p-q,\ p-q+1, \ldots$, если $p \geqslant q$, и при $n = 0, 1, 2, \ldots$, если $p \leqslant q$. Из совместности $q+1$ линейных уравнений (*) при $n = k,\ k+1,\ k+2, \ldots, k+q$ вытекает, что $A_k^{(q+1)} = 0$.

18. Из $A_k^{(q+1)} = 0$, $A_n^{(q)} \neq 0$ вытекает, что $L_{n+q}(x)$ линейно зависит от $L_n(x), L_{n+1}(x), \ldots, L_{n+q-1}(x)$ [K o w a l e w s k i, стр. 53]. Поэтому при $n \geqslant d$ $L_n(x)$ линейно зависит от $L_d(x), L_{d+1}(x), \ldots$ $\ldots, L_{d+q-1}(x)$, и уравнение $L_n(x) = 0$ удовлетворяется общим решением q уравнений

$$L_d(x) = 0, \quad L_{d+1}(x) = 0, \ \ldots, \ L_{d+q-1}(x) = 0.$$

Так как $A_{d+1}^{(q)} \neq 0$, то эти уравнения имеют решение вида

$$x_0 = 1, \quad x_1 = -c_1, \quad x_2 = -c_2, \ \ldots, \ x_q = -c_q.$$

Но это означает обращение в нуль коэффициентов при z^{q+d}, $z^{q+d+1}, \ldots$ в произведении

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(z^q - c_1 z^{q-1} - c_2 z^{q-2} - \ldots - c_q).$$

19. [K o w a l e w s k i, стр. 80, 109.]

20. В силу теоремы 19 из предположения вытекает

$$(A_{m+1}^{(q)})^2 = A_m^{(q)} A_{m+2}^{(q)}, \quad (A_{m+2}^{(q)})^2 = A_{m+1}^{(q)} A_{m+3}^{(q)}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ (A_{m+t-1}^{(q)})^2 = A_{m+t-2}^{(q)} A_{m+t}^{(q)}, \quad (A_{m+t}^{(q)})^2 = A_{m+t-1}^{(q)} A_{m+t+1}^{(q)}.$$

Таким образом, обращение в нуль одного из t рассматриваемых определителей q-го порядка влечет обращение в нуль каждого соседнего определителя. Еще нагляднее — из **22**.

21. Ясно. Пример: $A_0^{(3)}$.

22. [A. Stoll.] 1) вытекает из **19**, 2), 3) — из **19** и 1). Следует обратить внимание на «крестообразное» расположение пяти определителей задачи **19** в схеме **21**. Для доказательства сохранения в силе свойств 1), 2), 3) также на крае схемы приписываем a_{-1} перед $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и соответствующий наклонный ряд перед схемой **21**.

23. [См. É. B o r e l, Bull. d. Sc. Math., серия 2, т. 18, стр. 22—25, 1894.] Если в первой строке схемы **21** содержится лишь конечное число элементов, отличных от нуля, то степенной ряд $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$ приводится к целой рациональной функции. В остальных случаях в результате повторного применения рассуждения задачи **20** получаем, что существуют два таких целых числа d и q, $1\leqslant q\leqslant k$, для которых выполняются предположения задачи **18**.

24. [L. Kronecker, Monatsber. d. Akad. Berlin, 1881, стр. 566—567.] Посредством повторного применения **22**, 1) привести к **23**.

25. [G. Pólya, Math. Ann., т. 77, стр. 507, 1916.] Посредством повторного применения **22**, 1) привести к **23**. Условия, налагаемые на определители в задачах **23**, **24**, **25**, перевести на язык схемы **21**.

26. См. **27**.

27. Если ранг конечен, то все определители задачи **23** для достаточно большого k обращаются в нуль и, следовательно, степенной ряд представляет рациональную функцию. Пусть, обратно, степенной ряд представляет рациональную функцию. Будем придерживаться обозначений задачи **17** и рассмотрим линейную форму

$$\lambda_n(x)=a_nx_0+a_{n+1}x_1+a_{n+2}x_2+\ldots$$

с произвольным (однако не бесконечно большим) числом переменных. Вследствие уравнений (*) решения **17** будем иметь

$$\lambda_n=c_1\lambda_{n+1}+c_2\lambda_{n+2}+\ldots+c_q\lambda_{n+q}$$

для $n=d,\ d+1,\ d+2,\ \ldots$, поэтому формы $\lambda_d,\ \lambda_{d+1},\ \ldots,\ \lambda_{d+\nu}$ $(\nu\geqslant q)$ зависят от q последних из них. Так как, таким образом, между любыми $q+1$ из этих форм существует линейная зависимость, то все содержащиеся в $\mathfrak{H}_d$ определители порядка $q+1$ равны нулю.

28. См. **29**.

29. Пусть, согласно предположению задачи **28**,

$$A_0^{(p)}\neq 0,\quad A_0^{(p+1)}=A_0^{(p+2)}=A_0^{(p+3)}=\ldots=0,$$
$$A_1^{(p)}=A_2^{(p-1)}=A_3^{(p-2)}=\ldots=A_{p-q}^{(q+1)}=0,\quad A_{p-q+1}^{(q)}\neq 0.$$

Примем для определенности, что

$$0<q<p.$$

Из этих предположений, принимая во внимание положение вышестоящих определителей в схеме **21**, получаем согласно **22**, 1), что

$$\left.\begin{array}{lll} A_{p-q}^{(q)}\neq 0, & A_{p-q+1}^{(q)}\neq 0, & A_{p-q+2}^{(q)}\neq 0,\ \ldots, \\ A_{p-q-1}^{(q+1)}\neq 0, & A_{p-q}^{(q+1)}=0, & A_{p-q+1}^{(q+1)}=0,\ \ldots \end{array}\right\}\qquad (**)$$

Иными словами, в окаймлении бесконечной трапециевидной, состоящей лишь из нулей полосы в схеме **21** все определители отличны от нуля.

Согласно **23** степень знаменателя $\leqslant q$; см. вторую строку в (**).

Согласно **17** степень знаменателя $\geqslant q$; см. первую строку в (**).

Нетто-ранг $\leqslant$ ранга матрицы $\mathfrak{H}_{p-q}$, следовательно, $\leqslant q$ согласно решению **27**.

Нетто-ранг $\geqslant q$; см. первую строку в (**).

Согласно **18** степень числителя $\leqslant q+(p-q)-1$; см. (**).

Согласно **17** степень числителя $> q+(p-q-1)-1$, так как $A_{p-q-1}^{(q+1)} \neq 0$.

Ранг матрицы $\mathfrak{H}_{p-q}$ равен точно q, следовательно, ранг $\mathfrak{H}_0$ во всяком случае $\leqslant q+(p-q)$.

Брутто-ранг, равный рангу $\mathfrak{H}_0$, будет $\geqslant p$, ибо $A_0^{(p)} \neq 0$.

30. [E. Beke, Math. és term. ért., т. 34, стр. 25, 1916.] Указанное свойство степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ имеет тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ представляет рациональную функцию. [24, 26.] В обоих случаях речь идет об одних и тех же рекуррентных формулах между коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots$

31. [G. Pólya, Proc. Lond. M. S. (2), т. 21, стр. 25—26, 1922.] Сложением строк и столбцов. По поводу случая $Q_n(z)=(1-z)^n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, см. Kowalewski, стр. 112.

32. Так как числитель имеет степень $\leqslant q-1$, то $a_n c_q + a_{n+1}c_{q-1} + a_{n+2}c_{q-2} + \ldots + a_{n+q-1}c_1 = a_{n+q}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Таким образом, в результате умножения λ-й строки (столбца) матрицы $\mathfrak{A}_m$ на μ-й столбец матрицы $\mathfrak{C}$ получаем $a_{m+\lambda+\mu-1}$, $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, q$, и следовательно $\mathfrak{A}_m \mathfrak{C} = \mathfrak{A}_{m+1}$.

33. Пусть ранг будет r и

$$\begin{vmatrix} a_{1\nu_1} & a_{1\nu_2} & \ldots & a_{1\nu_r} \\ a_{2\nu_1} & a_{2\nu_2} & \ldots & a_{2\nu_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r\nu_1} & a_{r\nu_2} & \ldots & a_{r\nu_r} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r$. Если $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \ldots + c_r f_r(z) \equiv 0$, то, в частности, коэффициенты при $z^{\nu_1}, z^{\nu_2}, \ldots, z^{\nu_r}$ в левой части должны быть равны нулю. Это дает r однородных линейных уравнений с не равным нулю определителем, откуда $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$. Если $m > r$, то полагаем $a_{1\nu}x_1 + a_{2\nu}x_2 + \ldots + a_{r\nu}x_r + a_{r+1,\nu}x_{r+1} \equiv L_\nu(x)$. Любое число линейных форм $L_1, L_2, \ldots, L_n$, по предположению, линейно зависит от $L_{\nu_1}, L_{\nu_2}, \ldots, L_{\nu_r}$

[Kowalewski, стр. 53]. Существует система значений $x_1=c_1$, $x_2=c_2, \ldots, x_r=c_r$, $x_{r+1}=-1$, удовлетворяющая уравнениям

$$L_{\nu_1}(x)=0, \quad L_{\nu_2}(x)=0, \ \ldots, \ L_{\nu_r}(x)=0. \qquad (*)$$

Для этой системы любая форма $L_\nu(x)$ обращается в нуль, т. е. тождественно относительно z

$$c_1 f_1(z)+c_2 f_2(z)+\ldots+c_r f_r(z)=f_{r+1}(z).$$

34. Из 33 и определений. В частности, принимаем во внимание, что существует такое N, что матрицы, получающиеся из $\mathfrak{M}$ (стр. 118) путем вычеркивания N, соотв. $N+1, N+2, \ldots$ столбцов, все имеют один и тот же ранг, а именно нетто-ранг матрицы $\mathfrak{M}$.

35. [I. Schur, J. für Math., т. 140, стр. 14, 1911.] Доказательство изложим при более ограничительных предположениях. Существует такая ортогональная матрица $(l_{\lambda\mu})$, что первая форма допускает разложение

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(l_{\nu 1}x_1+l_{\nu 2}x_2+\ldots+l_{\nu n}x_n)^2,$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — положительные, однозначно определяемые формой числа — ее собственные значения [Kowalewski, стр. 275]. Из равенств

$$a_{\lambda\mu}=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu l_{\nu\lambda}l_{\nu\mu} \qquad (\lambda, \mu=1, 2, \ldots, n),$$

полагая $h=\operatorname{Min}(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}b_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu\left\{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu}(l_{\nu\lambda}x_\lambda)(l_{\nu\mu}x_\mu)\right\}\geqslant$$

$$\geqslant h\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu\left(\sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu\lambda}l_{\nu\mu}\right)=h(b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+\ldots+b_{nn}x_n^2)$$

36. Из формулы

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} e^{a_{\lambda\mu}}x_\lambda x_\mu=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}^k x_\lambda x_\mu$$

в силу 35 вытекает первая часть теоремы. Вследствие положительности формы имеем

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_l^2,$$

где

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\alpha_1'x_1+\alpha_2'x_2+\ldots+\alpha_n'x_n,\\
\xi_2&=\alpha_1''x_1+\alpha_2''x_2+\ldots+\alpha_n''x_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_l&=\alpha_1^{(l)}x_1+\alpha_2^{(l)}x_2+\ldots+\alpha_n^{(l)}x_n.
\end{aligned}$$

Если в матрице $(a_{\lambda\mu})$ никакие две строки не совпадают, то будут различными между собой и все n l-мерных векторов $(\alpha'_\nu, \alpha''_\nu, \ldots$ $\ldots, \alpha^{(l)}_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, можно подобрать l таких чисел $\beta', \beta'', \ldots, \beta^{(l)}$, удовлетворяющих условию $\beta'^2 + \beta''^2 + \ldots$ $\ldots + \beta^{(l)2} = 1$, что все n чисел $\gamma_\nu = \alpha'_\nu\beta' + \alpha''_\nu\beta'' + \ldots + \alpha^{(l)}_\nu\beta^{(l)}$ $(\nu =$ $= 1, 2, \ldots, n)$ будут между собой различны; или геометрически: проекции n различных векторов на единичный вектор $(\beta', \beta'', \ldots$ $\ldots, \beta^{(l)})$ все между собой различны; или $(\beta', \beta'', \ldots, \beta^{(l)})$ лежит вне определенных $\frac{1}{2}n(n-1)$ плоскостей. Надлежащим образом выбирая ортогональное преобразование переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l$ в переменные $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$, причем

$$\eta_1 = \beta'\xi_1 + \beta''\xi_2 + \ldots + \beta^{(l)}\xi_l = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n,$$

получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_l^2 =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \gamma_\lambda\gamma_\mu x_\lambda x_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a'_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu;$$

обе формы в правой части $\geqslant 0$. Разность $\exp(\gamma_\lambda\gamma_\mu + a'_{\lambda\mu}) - \exp(\gamma_\lambda\gamma_\mu)$ составляется из произведений степеней величин $\gamma_\lambda\gamma_\mu$ и $a'_{\lambda\mu}$ с положительными коэффициентами. Отсюда на основании **35**, аналогично доказанной уже первой части утверждения, вытекает, что вторая форма в правой части равенства

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} e^{a_{\lambda\mu}}x_\lambda x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} e^{\gamma_\lambda\gamma_\mu}x_\lambda x_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} b_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu$$

положительна; первая даже определенна [V 76].

37. Аналогично 36 [35, V 86]. Что ограничения не излишни, убеждаемся на примере матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

38. [R. Remak, Math. Ann., т. 72, стр. 153, 1912; см. также A. Hurwitz, там же, т. 73, стр. 173, 1913.] Так как одновременно с $f(x)$ также $f(x+x_0)$, где x_0 — любое число, удовлетворяет условию задачи, то выставленное требование приводится к следующему:

$$A(f) = a_0 f(0) + \frac{a_1}{1!}f'(0) + \frac{a_2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{a_n}{n!}f^{(n)}(0) \geqslant 0 \text{ (соотв.} > 0).$$

Согласно VI 44 достаточно положить

$$f(x) = (t_0 + t_1 x + \ldots + t_n x^n)^2 = \sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} t_\lambda t_\mu x^{\lambda+\mu}$$

при произвольных $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$. Тогда

$$A(f)=\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} A(x^{\lambda+\mu})\,t_\lambda t_\mu=\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\lambda+\mu}t_\lambda t_\mu.$$

39. [См. G. Pólya, Math. és term. ért., т. 32, стр. 662—665, 1914.] Так как одновременно с $f(x)$ условию задачи удовлетворяет и $f(x+x_0)$, $x_0 \geqslant 0$, то выставленное требование приводится к следующему:

$$A(f)=a_0 f(0)+\frac{a_1}{1!}f'(0)+\frac{a_2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{a_n}{n!}f^{(n)}(0)\geqslant 0 \quad (\text{соотв.} > 0).$$

Полагаем [VI 45]

$$f(x)=(t_0+t_1x+\ldots+t_px^p)^2+x(u_0+u_1x+\ldots+u_{q-1}x^{q-1})^2,$$
$$p=\left[\frac{n}{2}\right],\qquad q=\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Тогда

$$A(f)=\sum_{\lambda=0}^{p}\sum_{\mu=0}^{p} a_{\lambda+\mu}t_\lambda t_\mu+\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{q-1} a_{\lambda+\mu+1}u_\lambda u_\mu.$$

40. Полагаем, во-первых,

$$f(x)=(1-x)\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{q-1} t_\lambda t_\mu (x-1)^{\lambda+\mu},\qquad x=1,$$

во-вторых,

$$f(x)=(1+x)\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{q-1} t_\lambda t_\mu (x+1)^{\lambda+\mu},\qquad x=-1,$$

где

$$q=\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Тогда согласно предположению получаем

$$-\sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{q-1} a_{\lambda+\mu+1}t_\lambda t_\mu \geqslant 0,\qquad \sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{\mu=0}^{q-1} a_{\lambda+\mu+1}t_\lambda t_\mu \geqslant 0,$$

откуда $a_1=a_2=\ldots=a_{2q-1}=0$. В случае нечетного n утверждение доказано. В случае четного n должны еще выполняться неравенства

$$a_0(t_0+t_1x+\ldots+t_px^p)^2+a_nt_p^2\geqslant 0, \tag{1}$$
$$a_0(1-x^2)(u_0+u_1x+\ldots+u_{p-1}x^{p-1})^2-a_nu_{p-1}^2\geqslant 0 \tag{2}$$

при всех значениях $t_0, t_1, \ldots, t_p, u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$, где $p=\frac{n}{2}$ и $-1\leqslant x\leqslant 1$. Полагая в (1) $t_0=t_1=\ldots=t_{p-1}=0$, $t_p=1$, $x=0$, получаем, что $a_n\geqslant 0$. С другой стороны, полагая в (2) $x=1$, $u_{p-1}=1$, получаем, что $a_n\leqslant 0$.

41. [См. 1. с. 39, стр. 665—667. См. также M. Fujiwara, Tôhoku Math. J., т. 6, стр. 20—26, 1914—1915.] Обе системы значений $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ и $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ обладают свойством, формулированным в задаче 38. Если $f(x)$ удовлетворяет условию задачи 38, то

$$f^*(x) = a_0 f(x) + \frac{a_1}{1!} f'(x) + \frac{a_2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{a_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x)$$

также удовлетворяет этому условию. Значит,

$$b_0 f^*(x) + \frac{b_1}{1!} f^{*\prime}(x) + \frac{b_2}{2!} f^{*\prime\prime}(x) + \ldots + \frac{b_{2n}}{(2n)!} f^{*(2n)}(x) =$$

$$= c_0 f(x) + \frac{c_1}{1!} f'(x) + \frac{c_2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{c_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x) \geqslant 0 \quad (\text{соотв. } > 0)$$

при всех значениях x. Следовательно, и система $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, обладает тем же свойством.

42. [См. 1. с. 39, стр. 667—668.] Получается из 39, как 41 из 38. Полагаем $n = 2m$, соотв. $n = 2m + 1$.

43. [См. O. Szász, Math. Zeitschr, т. 1, стр. 150—152, 1918.] Так как вместе с $g(\vartheta)$ также $g(\vartheta + \vartheta_0)$, при произвольном ϑ_0, удовлетворяет условию задачи, то требование задачи равносильно следующему:

$$A(g) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \gamma_\nu \geqslant 0 \quad (\text{соотв. } > 0).$$

Полагаем [VI 40]

$$g(\vartheta) = |x_0 + x_1 e^{i\vartheta} + x_2 e^{2i\vartheta} + \ldots + x_n e^{in\vartheta}|^2.$$

Тогда

$$A(g) = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} A(e^{i(\lambda-\mu)\vartheta}) x_\lambda \bar{x}_\mu = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} c_{\mu-\lambda} x_\lambda \bar{x}_\mu.$$

44. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 19, стр. 276, 1912. Решение — G. Pólya, там же, серия 3, т. 24, стр. 369, 1916.]

45. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 162, 1918.] См. 46.

46. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 163, 1918.] Рассматриваем совместно четыре случая: а) определители произвольны; б) элементы главной диагонали равны нулю, все прочие произвольны; в) определители симметричны

[45]; г) определители симметричны и элементы главной диагонали равны нулю [46]. Введем обозначения, указываемые в следующей таблице:

Число независимых элементов	Число различных слагаемых положительных	Число различных слагаемых отрицательных		
а) n^2	S_n'	S_n''	$S_n'+S_n''=S_n$	$S_n'-S_n''=D_n$
б) n^2-n	Σ_n'	Σ_n''	$\Sigma_n'+\Sigma_n''=\Sigma_n$	$\Sigma_n'-\Sigma_n''=\Delta_n$
в) $\frac{n^2+n}{2}$	s_n'	s_n''	$s_n'+s_n''=s_n$	$s_n'-s_n''=d_n$
г) $\frac{n^2-n}{2}$	σ_n'	σ_n''	$\sigma_n'+\sigma_n''=\sigma_n$	$\sigma_n'-\sigma_n''=\delta_n$.

Каждому члену разложения $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}$ мы ставим в соответствие подстановку $\begin{pmatrix}1 & 2 \ldots n\\ k_1 & k_2 \ldots k_n\end{pmatrix}$. Если такой член содержит произведение $a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}\ldots a_{\varkappa\lambda}a_{\lambda\alpha}$, то соответствующая подстановка содержит цикл $(\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\lambda)$; если рассматриваемый член входит в разложение симметрического определителя, то подстановка, соответствующая другому, равному ему члену, будет содержать либо цикл $(\alpha\beta\gamma\ldots$ $\ldots\varkappa\lambda)$, либо обратный цикл $(\lambda\varkappa\ldots\gamma\beta\alpha)$.

Число подстановок n элементов, содержащих k_1 одночленных, k_2 двучленных, k_3 трехчленных, ... циклов, как известно [см. J. A. Serret, Handbuch der höheren Algebra, т. 2, стр. 188—189, Leipzig, B. G. Teubner, 1868], равно

$$\frac{n!}{k_1!1^{k_1}\cdot k_2!2^{k_2}\cdot k_3!3^{k_3}\ldots}=Z_{k_1k_2k_3\ldots},$$

где $1k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n$. Умножая это число на $+1$ или -1, смотря по тому, будут ли рассматриваемые подстановки четными или нечетными, получаем

$$(-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots}Z_{k_1k_2k_3\ldots}=\frac{n!}{k_1!1^{k_1}\cdot k_2!(-2)^{k_2}\cdot k_3!3^{k_3}\cdot k_4!(-4)^{k_4}\ldots}$$

[Kowalewski, стр. 16] (нужно для вычисления D_n, Δ_n). Если подстановки, получающиеся одна из другой заменой некоторых циклов обратными, рассматривать как тождественные, то число различных будет

$$2^{-k_3-k_4-k_5-\ldots}Z_{k_1k_2k_3\ldots}=\frac{n!}{k_1!1^{k_1}\cdot k_2!2^{k_2}\cdot k_3!6^{k_3}\cdot k_4!8^{k_4}\ldots}$$

(нужно для вычисления s_n, d_n, σ_n, δ_n). Очевидно,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum Z_{k_1 k_2 k_3 \ldots},\\
\Sigma_n &= \sum{}^{*} Z_{0 k_2 k_3 \ldots},\\
D_n &= \sum (-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} Z_{k_1 k_2 k_3 \ldots},\\
\Delta_n &= \sum{}^{*} (-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} Z_{0 k_2 k_3 \ldots},\\
s_n &= \sum 2^{-k_3-k_4-\ldots} Z_{k_1 k_2 k_3 \ldots},\\
\sigma_n &= \sum{}^{*} 2^{-k_3-k_4-\ldots} Z_{0 k_2 k_3 \ldots},\\
d_n &= \sum (-1)^{k_2+k_4+\ldots} 2^{-k_3-k_4-\ldots} Z_{k_1 k_2 k_3 \ldots},\\
\delta_n &= \sum{}^{*} (-1)^{k_2+k_4+\ldots} 2^{-k_3-k_4-\ldots} Z_{0 k_2 k_3 \ldots}.
\end{aligned}$$

Здесь суммы $\sum$ распространяются на все системы положительных чисел k_1, k_2, k_3, ..., удовлетворяющие условию $k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n$, а суммы $\sum^{*}$ — на те из них, для которых $k_1=0$ (и, значит, $2k_2+3k_3+\ldots=n$). Имеем

$$\frac{S_n x^n}{n!} = \sum \frac{x^{k_1}}{k!\,1^{k_1}} \cdot \frac{x^{2k_2}}{k_2!\,2^{k_2}} \cdot \frac{x^{3k_3}}{k_3!\,3^{k_3}} \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n x^n}{n!} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{x^{k_1}}{k_1!\,1^{k_1}} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{x^{2k_2}}{k_2!\,2^{k_2}} \cdot \sum_{k_3=0}^{\infty} \frac{x^{3k_3}}{k_3!\,3^{k_3}} \cdots =$$

$$= e^x e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^3}{3}} \cdots = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots} = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots,$$

откуда $S_n = n!$, что может служить подтверждением правильности изложенных соображений. Тем же способом получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} = e^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots} = 1+x, \quad D_n = 0 \text{ для } n \geqslant 2$$

(ясно),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Sigma_n x^n}{n!} = e^{\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots} = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$\frac{\Sigma_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{[VIII 23]},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_n x^n}{n!} = e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots} = (1+x)\,e^{-x}, \quad \Delta_n = (-1)^n (1-n)$$

(частный случай теоремы 7 при $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$, $a=b=1$).

Далее

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!} = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n x^n}{n!} = e^{x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)} = \sqrt{1+x}\, e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!} = e^{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n x^n}{n!} = e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)} = \sqrt{1+x}\, e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}.$$

Четыре последних ряда удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям

$$2(1-x)y' = (2-x^2)y, \qquad 2(1+x)y' = (2-x^2)y,$$
$$2(1-x)y' = x(2-x)y, \qquad 2(1+x)y' = -x(2+x)y,$$

откуда и вытекают требуемые рекуррентные соотношения. Асимптотические формулы получаем из I 178, полагая

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}, \text{ соотв. } e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}}, \quad e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}, \quad e^{-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}},$$

$$b_n = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \text{ соотв. } (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\ldots 2n} \sim \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{\pi}\cdot n^{\frac{3}{2}}}$$

[II 202],

$$q = 1, \text{ соотв. } -1.$$

47. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 163, 1918.] Полагаем

$$\varphi = \frac{1}{1-x_1x_2\ldots x_n}\overline{\varphi}.$$

Тогда

$$\Sigma \pm \varphi(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_n}) =$$
$$= \frac{1}{1-x_1x_2\ldots x_n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\left[\Sigma_\nu \pm \overline{\varphi}(x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \ldots, x_{\mu_{n-1}})\right],$$

где сумма Σ_ν распространяется на все перестановки переменных x_1, $x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ и знак определяется так же, как для слагаемых в левой части.

Следовательно, в предположении, что утверждение справедливо для $n-1$, тождество, которое мы доказываем, можно представить в таком виде:

$$\Delta\Phi=\frac{1}{1-x_1x_2\ldots x_n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\Delta_\nu\Phi_\nu,$$

где Δ_ν и Φ_ν образованы из $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ аналогично тому, как Δ и Φ — из $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем Φ предполагается взятым в форме произведения, стоящего в конце задачи; Φ_ν содержат меньшее количество множителей. Применяем теперь VI 69, принимая во внимание уравнения (в обозначениях и предположениях задачи VI 69, $a_0=1$)

$$\frac{\Delta_\nu}{\Delta}=\frac{1}{(x_1-x_\nu)\ldots(x_{\nu-1}-x_\nu)(x_\nu-x_{\nu+1})\ldots(x_\nu-x_n)}=\frac{(-1)^{\nu-1}}{f'(x_\nu)},$$

$$\frac{\Phi_\nu}{\Phi}=(1-x_\nu)(1-x_\nu x_1)\ldots(1-x_\nu x_{\nu-1})(1-x_{\nu+1}x_\nu)\ldots(1-x_nx_\nu)=$$

$$=\frac{x_\nu^n f\left(x_\nu^{-1}\right)}{1+x_\nu}.$$

48. [P. Epstein, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 8, стр. 262, 1905.] Из системы равенств $\alpha_\rho x_\lambda=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\lambda\mu}x_\mu$ $(\lambda=1, 2, \ldots, n)$, принимая во внимание, что $\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\mu}\chi_{\lambda\sigma}(z)=z\chi_{\mu\sigma}(z)+\varepsilon_{\mu\sigma}\chi(z)$, где $\varepsilon_{\mu\sigma}=1$ при $\mu=\sigma$, $\varepsilon_{\mu\sigma}=0$ при $\mu\neq\sigma$, получаем систему равенств

$$(\alpha_\rho-z)\sum_{\lambda=1}^{n}x_\lambda\chi_{\lambda\sigma}(z)=x_\sigma\chi(z)\qquad(\sigma=1, 2, \ldots, n).$$

49. [M. Riesz.] См. 50.

50. Требование задачи равносильно условиям

$$\sum_{\nu=0}^{n}g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-\nu+\alpha)\right)g\left(\frac{\pi}{n+1}(\nu-q+\beta)\right)=g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-q+\alpha+\beta)\right).$$

См. VI 15. В задаче 49 (после замены x_p на $(-1)^p x_p$ и y_p на $(-1)^p y_p$) получаем

$$g(\vartheta)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

51. Определитель $D(\alpha)$ преобразования S_α удовлетворяет функциональному уравнению

$$D(\alpha)D(\beta)=D(\alpha+\beta).$$

Кроме того, он веществен, непрерывен и периодичен (с периодом $2n+2$). Следовательно, $D(\alpha)=0$ или 1. Первый случай имеет место тогда и только тогда, когда система линейных уравнений

$$\sum_{q=0}^{n} g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-q)\right)x_q=0 \qquad (p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

имеет ненулевое решение. А это будет во всяком случае иметь место, если $x_0, x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{q=0}^{n} x_q e^{ikq\frac{\pi}{n+1}}=0, \quad \sum_{q=0}^{n} x_q e^{-ikq\frac{\pi}{n+1}}=0, \tag{*}$$

где k пробегает все те значения, для которых коэффициент в $g(\vartheta)$ при $\cos k\vartheta$ отличен от нуля. (При $k=0$ указанные два уравнения приводятся к одному.) Согласно решению VI 15 k имеет либо только четные, либо только нечетные значения, следовательно, число указанных коэффициентов будет $\leqslant 1+\left[\frac{n}{2}\right]$, соотв. $\leqslant\left[\frac{n+1}{2}\right]$. В первом случае число уравнений (*) будет $\leqslant 1+2\left[\frac{n}{2}\right]\leqslant n+1$, во втором случае оно будет $\leqslant 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\leqslant n+1$. Равенство достигается лишь в случае, когда

$$g(\vartheta)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} \tag{49}$$

и n четно, соотв. нечетно. За исключением этого случая, число уравнений (*) будет всегда меньше $n+1$, т. е. числа неизвестных. Следовательно, решения указанного рода существуют.

В 49 получаем постоянное значение определителя, беря $\alpha\to 0$.

52. [M. Riesz.] Положим

$$g(\vartheta)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Речь идет о сумме

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k,\,l=0}^{n}(-1)^{k+l}x_k x_l g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-k+\alpha)\right)g\left(\frac{\pi}{n+1}(p-l+\alpha)\right)=$$

$$=\sum_{k,\,l=0}^{n}(-1)^{k+l}x_k x_l\sum_{p=0}^{n} g\left(\frac{\pi}{n+1}(k-\alpha-p)\right)g\left(\frac{\pi}{n+1}(p+\alpha-l)\right).$$

Согласно VI 15 она равна

$$\sum_{k,\,l=0}^{n}(-1)^{k+l}x_k x_l g\left(\frac{\pi}{n+1}(k-l)\right)$$

и, значит, $\sum_{p=0}^{n} y_p^2$ не зависит от α. Полагаем теперь $\alpha=0$.

53. [I. Schur.] Нужно доказать следующие равенства:

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2+u_n^2=u_nu_{n+2},$$

$$u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2 \qquad =u_nu_{n+1},$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_{n+1}}+u_n^2\left(\frac{1}{u_nu_{n+2}}+\frac{1}{u_{n+1}u_{n+3}}+\frac{1}{u_{n+2}u_{n+4}}+\ldots\right)=1,$$

$$-\frac{1}{u_{n+2}}+u_{n+1}\left(\frac{1}{u_{n+1}u_{n+3}}+\frac{1}{u_{n+2}u_{n+4}}+\frac{1}{u_{n+3}u_{n+5}}+\ldots\right)=0$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Из определения чисел u_n получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu^2=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu(u_{\nu+1}-u_{\nu-1})=\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu u_{\nu+1}-\sum_{\nu=1}^{n-1}u_\nu u_{\nu+1}=u_nu_{n+1},$$

т. е. второе равенство. Первое получается из второго посредством замены $u_{n+1}=u_{n+2}-u_n$. Замечаем, далее, что

$$\frac{1}{u_nu_{n+2}}+\frac{1}{u_{n+1}u_{n+3}}+\frac{1}{u_{n+2}u_{n+4}}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+2}}\right)+\frac{1}{u_{n+2}}\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+3}}\right)+$$

$$+\frac{1}{u_{n+3}}\left(\frac{1}{u_{n+2}}-\frac{1}{u_{n+4}}\right)+\ldots=\frac{1}{u_{n+1}u_n}.$$

54. [E. C. Titchmarch, Proc. Lond. M. Soc. (2), т. 22, вып. 5, III, 1924.] Очевидно,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda+n-\alpha}-\frac{1}{\mu+n-\alpha}\right)=0$$

($\lambda\neq\mu$; λ, $\mu=\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$). Как известно,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m+n-\alpha)^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-\alpha)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\right)^2.$$

55. Теорема умножения определителей.

56. Сложение столбцов.

57. Правило Лейбница для $(uv)^{(n)}$, сложение столбцов.

58. Положить в 57 $\varphi=f_1^{-1}$.

59. После выполнения дифференцирования получаем в числителе определитель второго порядка, имеющий в качестве элементов определители $(n-1)$-го порядка — алгебраические дополнения определителя $W(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n)$ [Kowalewski, стр. 80, 109].

60. Определяем $n-1$ функцию $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$ из $n-1$ уравнения

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \ldots + \varphi_{n-1} f_{n-1} = f_n,\\
&\varphi_1 f_1' + \varphi_2 f_2' + \ldots + \varphi_{n-1} f_{n-1}' = f_n',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_1 f_1^{(n-2)} + \varphi_2 f_2^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{n-1} f_{n-1}^{(n-2)} = f_n^{(n-2)},
\end{aligned}$$

определитель которых не равен нулю. Согласно 59 и предположению

$$\frac{d\varphi_{n-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{W(f_1, \ldots, f_{n-2}, f_n)}{W(f_1, \ldots, f_{n-2}, f_{n-1})} = 0$$

и аналогично

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \ldots = \varphi_{n-2}' = 0.$$

61. Исключаем φ_n, φ_{n-1}, ..., φ_1, 1 из $n+1$ однородного уравнения

$$\begin{aligned}
&\varphi_n f_1 + \varphi_{n-1} f_1' + \ldots + \varphi_1 f_1^{(n-1)} + 1 \cdot f_1^{(n)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n f_n + \varphi_{n-1} f_n' + \ldots + \varphi_1 f_n^{(n-1)} + 1 \cdot f_n^{(n)} = 0,\\
&\varphi_n y + \varphi_{n-1} y' + \ldots + \varphi_1 y^{(n-1)} + 1 \cdot (y^{(n)} - L) = 0
\end{aligned}$$

и вычисляем L через нули определителя.

62. Полагаем

$$y = Y_0,\ W(f_1, y) = Y_1,\ W(f_1, f_2, y) = Y_2, \ldots$$
$$\ldots, W(f_1, f_2, \ldots, f_n, y) = Y_n.$$

Тогда согласно 59

$$\frac{d}{dx}\frac{Y_0}{W_1} = \frac{W_0 Y_1}{W_1^2},\quad \frac{d}{dx}\frac{Y_1}{W_2} = \frac{W_1 Y_2}{W_2^2},\quad \ldots,\quad \frac{d}{dx}\frac{Y_{n-1}}{W_n} = \frac{W_{n-1} Y_n}{W_n^2}.$$

Отсюда определяем $\frac{Y_n}{W_n}$. [61.]

63. [J. P. Gram, J. für Math., т. 94, стр. 41—73, 1883.] Указанному определителю соответствует квадратичная форма

$$\int_a^b [t_1 f_1(x) + t_2 f_2(x) + \ldots + t_n f_n(x)]^2\, dx.$$

Этот интеграл неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$ имеет место тождественно $t_1 f_1(x) + t_2 f_2(x) + \ldots + t_n f_n(x) = 0$. См. также II 68.

64. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 20, стр. 271, 1913.] Соответствующая квадратичная форма

$$\int_a^b \{(t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2)[(f_1(x))^2+(f_2(x))^2+\ldots+(f_n(x))^2]-$$
$$-[t_1f_1(x)+t_2f_2(x)+\ldots+t_nf_n(x)]^2\}\,dx=$$
$$=\int_a^b \sum_{j>k}^{1,\,2,\,\ldots,\,n} [t_jf_k(x)-t_kf_j(x)]^2\,dx$$

положительна. Она обращается в нуль при $t_1^2+t_2^2+\ldots+t_n^2>0$ тогда и только тогда, когда $f_\nu(x)=t_\nu\varphi(x)$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, где $\varphi(x)$ не зависит от ν.

65. [E. H. Moore, задача, Amer. Math. Monthly, т. 24, стр. 293, 1916. Решение — C. F. Gummer, там же, стр. 293, 333—334 (как указано на стр. 333, первое решение на стр. 293 неправильно).] [36, 63.] Если совпадают, например, две первые строки, то имеем

$$\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}a_{12}}=e^{\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]^2\,dx}=1,\quad f_1(x)=f_2(x).$$

66. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 28, стр. 174, 1920.] Вследствие II 112, II 113 имеем

$$(a_\lambda+a_\mu+1)\int_0^\infty x^{a_\lambda+a_\mu}f(x)\,dx=x^{a_\lambda+a_\mu+1}f(x)\Big|_0^\infty-\int_0^\infty x^{a_\lambda+a_\mu+1}\,df(x)=$$
$$=-\int_0^\infty x^{a_\lambda+a_\mu+1}\,df(x),$$

где последний интеграл взят в смысле Стилтьеса. Следовательно,

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}(a_\lambda+a_\mu+1)\int_0^\infty x^{a_\lambda+a_\mu}f(x)\,dx\cdot t_\lambda t_\mu=$$
$$=-\int_0^\infty (t_1x^{a_1}+t_2x^{a_2}+\ldots+t_nx^{a_n})^2\,x\,df(x)\geqslant 0.$$

Если $f(x)$ — кусочно-постоянная функция и существует по меньшей мере n точек с отрицательными скачками, то последний интеграл может обратиться в нуль лишь тогда, когда $t_1=t_2=\ldots=t_n=0$ [V 76].

67. [По поводу 67, 68 см. O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1907, стр. 110—115; 1910, стр. 489—506.] Для

$$f(\vartheta)=a_0+2(a_1\cos\vartheta+b_1\sin\vartheta)$$

получаем

$$T_n(f) = a_0(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2) + \\ + 2\Re(a_1 + ib_1)(x_0\bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2 + \ldots + x_{n-1}\bar{x}_n).$$

Для

$$f(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2} = \\ = 1 + 2r\cos\vartheta + 2r^2\cos 2\vartheta + \ldots + 2r^n\cos n\vartheta + \ldots$$

получаем

$$T_n(f) = \sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} r^{|\mu-\lambda|} x_\lambda \bar{x}_\mu.$$

68. Имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, e^{in\vartheta}\, d\vartheta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Следовательно, для формы Тёплица $T_n(f)$ имеет место представление

$$T_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,|x_0 + x_1 e^{-i\vartheta} + x_2 e^{-2i\vartheta} + \ldots + x_n e^{-in\vartheta}|^2\, d\vartheta.$$

Утверждение вытекает отсюда, если принять во внимание равенство

$$T_n(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x_0 + x_1 e^{-i\vartheta} + x_2 e^{-2i\vartheta} + \ldots + x_n e^{-in\vartheta}|^2\, d\vartheta = \\ = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2.$$

69. [По поводу 69—71 см G. Szegö, Math. Ann., т. 76, стр. 490—503, 1915; Math. és term. ért., т. 35, стр. 185—222, 1917; Math. Zeitschr., т. 6, стр. 167—202, 1920.] Для $f(\vartheta) = a_0 + 2(a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta)$ имеем

$$D_n(f) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1+ib_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1-ib_1 & a_0 & a_1+ib_1 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1-ib_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по последней строке, получаем отсюда рекуррентную формулу

$$D_n(f) = a_0 D_{n-1}(f) - (a_1^2 + b_1^2) D_{n-2}(f) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$
$$D_0(f) = a_0, \quad D_1(f) = a_0^2 - (a_1^2 + b_1^2).$$

Пусть α и β — корни квадратного уравнения

$$x^2 = a_0 x - (a_1^2 + b_1^2).$$

Применяя полную индукцию, получаем

$$D_n(f) = \begin{cases} \dfrac{[D_1(f) - D_0(f)\beta]\,\alpha^n - [D_1(f) - D_0(f)\alpha]\,\beta^n}{\alpha - \beta}, & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ (n+2)\,\alpha^{n+1} = (n+2)\,\beta^{n+1} = (n+2)\left(\dfrac{a_0}{2}\right)^{n+1}, & \text{если } \alpha = \beta. \end{cases}$$

В случае, когда

$$f(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta + r^2},$$

имеем

$$D_n(f) = \begin{vmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^n \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-1} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^n & r^{n-1} & r^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая r-кратную вторую строку из первой, r-кратную третью из второй и т. д., получаем $D_n(f) = (1-r^2)^n$.

Если функция $f(\vartheta) = a_0 + 2(a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta)$ положительна, то α и β положительны, $\alpha \neq \beta$. Пусть, скажем, $\alpha > \beta > 0$; тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = \alpha$. Во втором случае этот предел равен $1 - r^2$. Геометрическое среднее [II 48] $\mathfrak{G}(f)$ функции $a_0 + 2(a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta)$ в интервале $[0, 2\pi]$ совпадает с геометрическим средним функции $a_0 - 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cos\vartheta = \alpha(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\vartheta)$, где ρ определено условием $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \alpha\rho$; $0 \leqslant \rho < 1$, $a_0 = \alpha(1+\rho^2)$. По поводу $\mathfrak{G}(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\vartheta)$ см. II 52.

70. Вследствие того, что $D_n(f)$ — определитель Эрмита, все нули определителя $D_n(f-h)$ вещественны и при $|x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$ расположены между минимумом и максимумом формы $T_n(f)$ [Kowalewski, стр. 130, 283]. Следовательно, согласно 68 они имеют вид

$$h = a_0 - 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cos\varphi \qquad (0 < \varphi < \pi).$$

Отсюда, заменяя в решении 69 всюду a_0 на $a_0 - h$, получаем

$$D_n(f-h) = (a_1^2 + b_1^2)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi}.$$

Поэтому нули определителя $D_n(f-h)$ будут

$$h_m = a_0 - 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cos\frac{\nu+1}{n+2}\pi \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n).$$

71. См. 70.

$$\frac{F(h_{0n})+F(h_{1n})+\ldots+F(h_{nn})}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} F\left(a_0-2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\frac{\nu+1}{n+2}\pi\right)\to$$

$$\to\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F\left(a_0-2\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cos\vartheta\right)d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F[f(\vartheta)]\,d\vartheta.$$

Указанное в задаче свойство чисел $h_{\nu m}$ имеет место не только в этом частном случае, когда $f(\vartheta)$ представляет собой тригонометрический полином первого порядка, но и вообще для любой собственно интегрируемой функции $f(\vartheta)$. [См. G. Szegö, 1. с. 69.]

72. Первое решение. Мы будем пользоваться следующим символическим способом записи [см. M. Riesz, Ark. för Mat., Astron. och Fys., т. 17, № 16, стр. 1, 1923]. Пусть

$$f(z)=\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\lambda\mu}z^{\lambda}\bar{z}^{\mu},$$

где $a_{\lambda\mu}$ — произвольные числа. Мы будем тогда писать

$$f(c)=\sum_{\lambda=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} a_{\lambda\mu}c_{\lambda-\mu}.$$

Так, предположение задачи записывается теперь следующим образом: если полином $x_0+x_1z+x_2z^2+\ldots+x_nz^n$ не равен тождественно нулю, то

$$|x_0+x_1c+x_2c^2+\ldots+x_nc^n|^2>0.$$

Обозначим полином, рассматриваемый в задаче, через $P(z)$. Пусть z_0 будет один из его нулей, $P(z)=(z-z_0)Q(z)$. Положим

$$Q(c)\bar{Q}(\bar{c})=C_0,$$
$$Q(c)\bar{Q}(\bar{c})\,c=C_1,$$
$$Q(c)\bar{Q}(\bar{c})\,\bar{c}=C_{-1},$$

где $\bar{Q}(z)$ — полином, сопряженный с $Q(z)$. Тогда при произвольных x_0, x_1, $|x_0|^2+|x_1|^2>0$,

$$C_0(|x_0|^2+|x_1|^2)+C_{-1}x_0\bar{x}_1+C_1\bar{x}_0x_1=$$
$$=Q(c)\bar{Q}(\bar{c})(|x_0|^2+|x_1|^2+\bar{c}x_0\bar{x}_1+c\bar{x}_0x_1)=$$
$$=Q(c)(x_0+x_1c)\bar{Q}(\bar{c})(\bar{x}_0+\bar{x}_1\bar{c})>0.$$

Следовательно, $|C_1|<C_0$.

Но теперь

$$P(c)\,\bar{c}^{\nu}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

следовательно,

$$(c-z_0)\,Q(c)\,\bar{Q}(\bar{c})=0,$$

$$z_0=\frac{Q(c)\,\bar{Q}(\bar{c})\,c}{Q(c)\,\bar{Q}(\bar{c})}=\frac{C_1}{C_0}.$$

Второе решение. Согласно одной теореме C. Carathéodory [Rend. Palermo, т. 32, стр. 205, 1911] существуют такие $2n$ чисел

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n,$$

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,$$

что $\rho_\nu \geqslant 0$, $|\varepsilon_\nu|=1$ $(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и

$$c_k=\rho_1\varepsilon_1^k+\rho_2\varepsilon_2^k+\ldots+\rho_n\varepsilon_n^k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Имеем

$$c_0-h=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n,$$

где h обозначает минимум рассматриваемой в задаче формы при дополнительном условии $|x_0|^2+|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2=1$. В нашем случае $h>0$. Отсюда вытекает

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu}x_\lambda\bar{x}_\mu=h\,(|x_0|^2+|x_1|^2+\ldots+|x_{n-1}|^2)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\rho_\nu\,|x_0+x_1\varepsilon_\nu+\ldots+x_{n-1}\varepsilon_\nu^{n-1}|^2,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu+1}x_\lambda\bar{x}_\mu=h\,(x_0\bar{x}_1+x_1\bar{x}_2+\ldots+x_{n-2}\bar{x}_{n-1})+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\rho_\nu\varepsilon_\nu\,|x_0+x_1\varepsilon_\nu+\ldots+x_{n-1}\varepsilon_\nu^{n-1}|^2,$$

следовательно,

$$\left|\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu+1}x_\lambda\bar{x}_\mu\right|<\sum_{\lambda=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu}x_\lambda\bar{x}_\mu,$$

в предположении, что не все числа $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}$ равны нулю.

Но наше уравнение можно записать так:

$$|c_{\lambda-\mu+1}-zc_{\lambda-\mu}|_{\lambda,\ \mu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1}=0.$$

Если, стало быть, z_0 — корень полинома, то существуют числа $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, не равные одновременно нулю, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} (c_{\lambda-\mu+1} - z_0 c_{\lambda-\mu}) \bar{x}_\mu = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Получаем

$$z_0 = \frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu+1} x_\lambda \bar{x}_\mu}{\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} \sum\limits_{\mu=0}^{n-1} c_{\lambda-\mu} x_\lambda \bar{x}_\mu}, \qquad |z_0| < 1.$$

ОТДЕЛ ВОСЬМОЙ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. $x+n-1<[x+n]\leqslant x+n$, $x-1<[x+n]-n\leqslant x$; следовательно, так как $[x+n]-n$ есть целое число,

$$[x+n]-n=[x].$$

2. Нужно показать, что

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}\equiv\left[\frac{n}{2}\right] \pmod 2.$$

При $n=0, 1, 2, 3$ убеждаемся в этом прямым подсчетом. При переходе же от n к $n+4$ обе части увеличиваются на четное число.

3. Если $x-[x]<\frac{1}{2}$, то $0\leqslant 2x-2[x]<1$. Если $x-[x]\geqslant\frac{1}{2}$, то $1\leqslant 2x-2[x]<2$. Согласно **1**

$$[2x-2[x]]=[2x]-2[x].$$

4. На основании **1**, так же как 3.

5. На основании 3

$$[2x]-2[x]+[x]=[2x]-[x].$$

6. Искомое целое число n удовлетворяет неравенствам

$$n-1<x\leqslant n, \text{ т. е. } -n\leqslant -x<-n+1,$$

следовательно, $n=-[-x]$.

7. $0\leqslant\alpha+\beta-[\alpha]-[\beta]=\alpha-[\alpha]+\beta-[\beta]<2$,

$$-1<\alpha-\beta-[\alpha]+[\beta]=\alpha-[\alpha]-(\beta-[\beta])<1.$$

8. На основании **1** при изменении α и β на целое число обе части изменяются на равные количества. Поэтому достаточно доказать теорему для случая $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$. В этом случае теорема утверждает, что

$$[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[\alpha+\beta].$$

Если $[\alpha+\beta]=0$, то доказывать нечего; если же $[\alpha+\beta]=1$, то $\alpha+\beta\geqslant 1$, значит, по крайней мере одно из обоих слагаемых, скажем α, $\geqslant\frac{1}{2}$; следовательно, $[2\alpha]+[2\beta]\geqslant[2\alpha]\geqslant 1$.

9. [Ch. Hermite, Acta Math., т. 5, стр. 315, 1884.] Достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant x < 1$ [решение 8]. Пусть k определено так, что

$$x + \frac{k-1}{n} < 1 \leqslant x + \frac{k}{n}, \text{ т. е. } -k = [nx - n] = [nx] - n.$$

Тогда обе части равны $n - k$.

10. Мы можем принять, что $0 \leqslant x < 1$ [решение 8, решение 9]. При $0 \leqslant x < 1$ в правой части стоит 0, далее

$$[nx] \leqslant nx, \quad \frac{[nx]}{n} \leqslant x < 1, \quad \left[\frac{[nx]}{n}\right] = 0.$$

11. [J. J. Sylvester, задача, Nouv. Ann., серия 1, т. 16, стр. 125, 1857. Решения — E. Prouhet, Lebesgue, там же, серия 1, т. 16, стр. 184, 262, 1857.]

$$\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right] = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1},$$

ибо $-1 < (1-\sqrt{3})^{2m+1} < 0$ и в правой части стоит целое число. Получаем, далее,

$$(1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^m + (1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^m =$$
$$= 2^m\left\{(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^m\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках имеет вид

$$2(a+b\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})(\sqrt{3})^m + 2(a-b\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})(-\sqrt{3})^m,$$

где a, b — целые рациональные числа, и, следовательно, содержит только первую степень числа 2.

12. Интересующими нас числами являются $a, 2a, 3a, \ldots, ka$, где $ka \leqslant n < (k+1)a$, следовательно, $k = \left[\frac{n}{a}\right]$.

Можно поставить вопрос также следующим образом: сколько среди дробей $\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{n}{a}$ целых чисел, т. е. сколько целых чисел содержится в интервале $0 < x \leqslant \frac{n}{a}$?

13. Число целых чисел в интервале $\frac{a}{\pi} < x \leqslant \frac{b}{\pi}$ равно [решение 12]

$$\left[\frac{b}{\pi}\right] - \left[\frac{a}{\pi}\right];$$

число целых чисел в интервале $-\frac{b}{\pi} < x \leqslant -\frac{a}{\pi}$ равно

$$\left[-\frac{a}{\pi}\right] - \left[-\frac{b}{\pi}\right].$$

14. [J. König, Math. Ann., т. 9, стр. 530, 1876. Задача; Nouv. Corresp. Math., т. 5, стр. 222, 1879. Решение — Radicke, там же, т. 6, стр. 82, 1880.] При $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$ утверждение очевидно; пусть, стало быть, $0<\alpha<\pi$. Тогда два соседних члена последовательности не могут одновременно обращаться в нуль. Если два соседних члена $\cos\nu\alpha$, $\cos(\nu+1)\alpha$ образуют перемену знака, то между $\nu\alpha$ и $(\nu+1)\alpha$ лежит только один нуль функции $\cos x$. Два несоседних члена $\cos(\nu-1)\alpha$ и $\cos(\nu+1)\alpha$, также могут образовывать перемену знака, а именно, когда $\cos\nu\alpha=0$. Таким образом, $V_n(\alpha)$ равно числу нулей функции $\cos x$ в интервале $0\leqslant x<n\alpha$, т. е. числу нулей функции $\sin x$ в интервале

$$\frac{\pi}{2}-n\alpha<x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Это число равно $-\left[\frac{1}{2}-n\frac{\alpha}{\pi}\right]$ [13].

15. $g_n=[n\theta]-[(n-1)\theta]$.

16. $N(r, a, \alpha)=0$ при $r<|\ln a|$; $N(r, a, \alpha)=l-k$ при $r\geqslant|\ln a|$, где

$$\alpha+2l\pi\leqslant\sqrt{r^2-(\ln a)^2}<\alpha+2(l+1)\pi,$$
$$\alpha+2k\pi<-\sqrt{r^2-(\ln a)^2}\leqslant\alpha+2(k+1)\pi,$$

т. е. в этом случае

$$N(r, a, \alpha)=1+\left[\frac{\sqrt{r^2-(\ln a)^2}-\alpha}{2\pi}\right]+\left[\frac{\sqrt{r^2-(\ln a)^2}+\alpha}{2\pi}\right].$$

См. III 73.

17. $[f(a)]+[f(a+1)]+[f(a+2)]+\ldots+[f(b-1)]+[f(b)]$.

18. Левая часть дает [17] число целых точек в области $1\leqslant x\leqslant p-1$, $0<y\leqslant\frac{q}{p}x$. Во всем прямоугольнике

$$1\leqslant x\leqslant p-1,\quad 1\leqslant y\leqslant q-1$$

лежит $(p-1)(q-1)$ целых точек. Они расположены симметрично относительно точки $x=\frac{p}{2}$, $y=\frac{q}{2}$ и находятся как выше, так и ниже прямой $y=\frac{q}{p}x$ в одинаковом числе; на самой же прямой их нет ни одной, ибо точка этой прямой может быть целой, лишь когда x — целое кратное p.

19. [Gauss, Theorematis arithmetici demonstratio nova, 1808, Opera omnia, т. 2, стр. 1—8; Göttingen, Königl. Ges. der Wiss., 1863; G. Eisenstein, задача, J. für Math., т. 27, стр. 281, 1844.] Речь идет о целых точках в прямоугольнике

$$1\leqslant x\leqslant p',\quad 1\leqslant y\leqslant q'.$$

Общее количество их равно $p'q'$. Первые p' членов в левой части дают число целых точек, лежащих ниже прямой $y=\frac{q}{p}x$, последние q' членов — число целых точек, лежащих выше этой прямой [17].

20. [V. Bouniakowski, C. R., т. 94, стр. 1459—1461, 1882.] Пусть переменная x пробегает значения $1, 2, \ldots, n$, переменная y при заданном x — значения $[\sqrt{(x-1)p}]+1$, $[\sqrt{(x-1)p}]+2, \ldots, [\sqrt{xp}]$. Положим $r=r(x, y)=xp-y^2$; тогда $0<r<p$ и $-r$ есть квадратичный вычет $\mathrm{mod}\, p$. Так как -1 — также квадратичный вычет, то то же имеет место и для r. Так как $4n=p-1$, то число всех r равно

$$\sum_{x=1}^{n}([\sqrt{xp}]-[\sqrt{(x-1)p}])=[\sqrt{np}]=\frac{p-1}{2},$$

что составляет столько же, сколько вообще существует квадратичных вычетов $\mathrm{mod}\, p$. Далее, все r различны: из $x_1p-y_1^2=x_2p-y_2^2$ вытекает, что p входит множителем в $y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$, т. е. $y_1=y_2$ и, следовательно, также $x_1=x_2$. Сумма всех r

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=[\sqrt{(x-1)p}]+1}^{[\sqrt{xp}]} r(x, y)=p\sum_{x=1}^{n}x([\sqrt{xp}]-[\sqrt{(x-1)p}])-$$
$$-\sum_{y=1}^{2n}y^2=-p\sum_{x=1}^{n}[\sqrt{xp}]+(n+1)p[\sqrt{np}]-\frac{n}{3}(2n+1)(4n+1)$$

равна, стало быть, сумме всех наименьших положительных квадратичных вычетов $\mathrm{mod}\, p$, т. е. равна $\frac{p-1}{4}p$.

21. [J. J. Sylvester, C. R., т. 96, стр. 463, 1883.] Пусть n — число свойств $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$. Если некоторый объект имеет k из этих свойств $(1\leqslant k\leqslant n)$, то в сумму, приведенную в задаче, он привносит ровно

$$1-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\ldots+(-1)^k\binom{k}{k}=0$$

единиц. Если, напротив, объект не обладает вообще ни одним из свойств $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, то он вносит ровно единицу, а именно в первое слагаемое N. По поводу доказательства этой теоремы, принадлежащей собственно к формальной логике, методом математической индукции см., например, U. Yule, An introduction to the theory of statistics, Ch. 2, London, Griffin 1916.

22. $N=n,\ N_\alpha=N_\beta=\ldots=n-1,\ N_{\alpha\beta}=N_{\alpha\gamma}=\ldots=n-2,\ \ldots$; получаем

$$n-\binom{n}{1}(n-1)+\binom{n}{2}(n-2)-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)=0,$$

так как объектов, не обладающих ни одним из свойств α, β, γ, ..., $\varkappa$, λ, не существует [I 37].

23. [В другой формулировке, как «jeu de rencontre», у Montmort A. de Moivre. См. Euler, Opera omnia, серия 1, т. 7, стр. 11, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1923.] Общее число членов в разложении определителя равно $n!$. Число членов, содержащих $a_{\nu\nu}$, равно $(n-1)!$, содержащих $a_{\mu\mu}a_{\nu\nu}$ равно $(n-2)!$ и т. д. Значит, согласно **21** искомое число равно

$$n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=$$
$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

(См. также решение VII 46.)

24. Число чисел, не превосходящих n и делящихся на a (свойство α), равно $\left[\frac{n}{a}\right]$ [12]. Число делящихся одновременно на a и b (свойства α и β) равно числу делящихся на ab, т. е. $\left[\frac{n}{ab}\right]$, и т. д. Поэтому [21] искомое число равно

$$\begin{aligned}
&n-\left[\frac{n}{a}\right]-\left[\frac{n}{b}\right]-\left[\frac{n}{c}\right]-\ldots-\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n}{l}\right]+\\
&+\left[\frac{n}{ab}\right]+\left[\frac{n}{ac}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{kl}\right]-\\
&-\left[\frac{n}{abc}\right]-\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm\left[\frac{n}{abc\ldots kl}\right].
\end{aligned}$$

25. [Euler.] Полагаем в **24** $a=p$, $b=q$, $c=r$, ... Искомое число равно

$$\begin{aligned}
&n-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\frac{n}{r}-\ldots+\\
&+\frac{n}{pq}+\frac{n}{pr}+\ldots-\\
&-\frac{n}{pqr}-\ldots+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm\frac{n}{pqr\ldots}=\\
&=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots
\end{aligned}$$

26. Доказывается рассуждениями, аналогичными примененным к частному случаю 21, где всем объектам приписано значение 1.

27. Применяем 26. Объекты — числа 1, 2, 3, ..., n, свойство α — делимость на p, свойство β — делимость на q и т. д. Под числовым значением объекта понимаем квадрат соответствующего числа. Имеем

$$W = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= An^3 + Bn^2 + Cn + D, \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{6}, \quad D = 0,$$

$$W_\alpha = p^2 + (2p)^2 + (3p)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{p}p\right)^2 =$$

$$= p^2\left[A\left(\frac{n}{p}\right)^3 + B\left(\frac{n}{p}\right)^2 + C\frac{n}{p} + D\right], \ldots,$$

$$W_{\alpha\beta} = p^2q^2\left[A\left(\frac{n}{pq}\right)^3 + B\left(\frac{n}{pq}\right)^2 + C\frac{n}{pq} + D\right], \ldots$$

Следовательно, интересующая нас сумма равна

$$An^3 + Bn^2 + Cn + D -$$
$$- \sum p^2\left[A\left(\frac{n}{p}\right)^3 + B\left(\frac{n}{p}\right)^2 + C\frac{n}{q} + D\right] +$$
$$+ \sum p^2q^2\left[A\left(\frac{n}{pq}\right)^3 + B\left(\frac{n}{pq}\right)^2 + C\frac{n}{pq} + D\right] -$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm p^2q^2r^2\ldots\left[A\left(\frac{n}{pqr\ldots}\right)^3 + B\left(\frac{n}{pqr\ldots}\right)^2 + C\frac{n}{pqr\ldots} + D\right] =$$
$$= an^3 + bn^2 + cn + d$$

где

$$a = A\left(1 - \sum\frac{1}{p} + \sum\frac{1}{pq} - \ldots \pm \frac{1}{pqr\ldots}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\ldots = \frac{\varphi(n)}{3n},$$
$$b = B\left(1 - \sum 1 + \sum 1 - \ldots \pm 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(1-1)(1-1)(1-1)\ldots = 0,$$
$$c = C\left(1 - \sum p + \sum pq - \ldots \pm pqr\ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(1-p)(1-q)(1-r)\ldots = \frac{(-1)^\nu}{6}\frac{\varphi(n)}{n}pqr\ldots,$$
$$d = 0.$$

28. Пусть $N = \mathrm{Max}(a, b, c, \ldots, k, l)$. При $N=0$ доказывать нечего. При $N > 0$ применяем **21** к числам $1, 2, \ldots, N$ в качестве объектов. Здесь свойство α состоит в том, что число является частью числа a (т. е. $\leqslant a$), свойство β — вхождение как часть в b и т. д. Число объектов, не обладающих ни одним из свойств α, $\beta, \ldots$, очевидно, равно нулю. Переносим N в другую сторону.

29. Пусть p — какое-нибудь простое число и

$$a = p^{\alpha}a', \quad b = p^{\beta}b', \quad c = p^{\gamma}c', \ldots, \quad k = p^{\varkappa}k', \quad l = p^{\lambda}l',$$

где $a', b', c', \ldots, k', l'$ уже не делятся на p. Показателем степени p в левой части служит $\mathrm{Max}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda)$, в правой части

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa+\lambda-\mathrm{Min}(\alpha, \beta)-\mathrm{Min}(\alpha, \gamma)-\ldots-\mathrm{Min}(\varkappa, \lambda)+\\ +\mathrm{Min}(\alpha, \beta, \gamma)+\ldots-\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm\mathrm{Min}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda).\end{aligned}$$

Согласно 28 эти выражения равны между собой. Так как это имеет место для любого простого числа p, то мы и получаем требуемое утверждение. См. **46**.

30. Доказывается с помощью умножения по строкам.

31. Определитель задачи равен квадрату определителя, общий элемент которого $\eta_{\lambda\mu}$ равен единице, если μ — делитель λ, и равен нулю в противном случае. Возвести в квадрат, перемножая по строкам.

32. Перемножаем по строкам определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

33. Перемножаем по строкам определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \eta_{n2} & \eta_{n3} & \eta_{n4} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_4 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & a_n \end{vmatrix},$$

где $\eta_{\lambda\mu}$ имеет то же значение, что и в **31**; второй определитель получается из первого заменой $\eta_{\lambda\mu}$ на $a_{\mu}\eta_{\lambda\mu}$.

34. Первая половина тривиальна. Пусть $p, q, r, \ldots$ — простые множители числа n. Применяем **26** к делителям t числа n. При этом объекту t приписываем числовое значение a_t. Свойство α состоит в том, что делитель входит не только в n, но и в $\frac{n}{p}$, свойство β, — что он входит не только в n, но и в $\frac{n}{q}$, и т. д. Сумма числовых значений, приписанных тем делителям t, которые не входят ни в $\frac{n}{p}$, ни в $\frac{n}{q}$, ни в $\frac{n}{r}$, ..., равна тогда

$$\begin{aligned}&\sum_{t|n} a_t - \sum_{t\left|\frac{n}{p}\right.} a_t - \sum_{t\left|\frac{n}{q}\right.} a_t - \ldots + \\ &+ \sum_{t\left|\frac{n}{pq}\right.} a_t + \sum_{t\left|\frac{n}{pr}\right.} a_t + \ldots - \\ &- \sum_{t\left|\frac{n}{pqr}\right.} a_t - \ldots + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \sum_{t\left|\frac{n}{pqr\ldots}\right.} a_t = \sum_{t|n} \mu(t) A_{\frac{n}{t}},\end{aligned}$$

согласно определению функции $\mu(n)$. Но единственным делителем, не обладающим ни свойством α, ни β, ни γ, ..., является n, и ему приписано значение a_n.

35. [A. Hurwitz.] Согласно 34 достаточно показать, что

$$g(n) = \sum_{t\,|\,n} f(t).$$

Но это очевидно: приводя дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ к несократимому виду, получаем дроби вида $\frac{r}{t}$, где $r \leqslant t$, $(r, t) = 1$, t — делитель числа n, причем каждую один раз.

36. Положим в 35

$$\psi(y) = \ln(x - e^{2\pi i y});$$

тогда $g(n) = \ln(x^n - 1)$, $f(n) = \ln K_n(x)$ и, следовательно,

$$\ln K_n(x) = \sum_{t\,|\,n} \mu(t) \ln\left(x^{\frac{n}{t}} - 1\right).$$

37. Положим в 35 $\psi(y) = e^{2\pi i y}$; тогда $g(1) = 1$, $g(n) = 0$ при $n > 1$, следовательно,

$$f(n) = \sum_{(r,\, n) = 1} e^{\frac{2\pi i r}{n}} = \mu(n).$$

38.

n	$\varphi(n)$	$\tau(n)$	$\sigma(n)$	$\sigma_2(n)$	$\nu(n)$	$\mu(n)$	$\lambda(n)$	$e^{\Lambda(n)}$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
2	1	2	3	5	1	−1	−1	2
3	2	2	4	10	1	−1	−1	3
4	2	3	7	21	1	0	1	2
5	4	2	6	26	1	−1	−1	5
6	2	4	12	50	2	1	1	1
7	6	2	8	50	1	−1	−1	7
8	4	4	15	85	1	0	−1	2
9	6	3	13	91	1	0	1	3
10	4	4	18	130	2	1	1	1

39. На основании правила умножения Коши, соответственно Дирихле, см. стр. 138, $a_n=b_n=1$.

40. На основании правила умножения Коши, соответственно Дирихле, см. стр. 138, $b_n=1$.

41. Частный случай формулы 42 при

$$A_0=A_1=A_2=A_3=\ldots=1.$$

42. На основании правила умножения Коши, соответственно Дирихле, и 34.

43. Если m и n — взаимно простые, то все делители произведения mn получаются от умножения каждого делителя числа m на каждый делитель числа n. Поэтому

$$\sum_{t_1\mid m} t_1^\alpha \cdot \sum_{t_2\mid n} t_2^\alpha = \sum_{t\mid mn} t^\alpha,$$

т. е.

$$\sigma_\alpha(m)\,\sigma_\alpha(n)=\sigma_\alpha(mn).$$

Для $\varphi(n)$ утверждение вытекает из 25. Для других функций утверждение очевидно. Для $f(n)=n^\alpha$, $\lambda(n)$ соотношение $f(mn)=f(m)f(n)$ имеет место не только при взаимно простых, но и вообще при всех m и n.

44. Согласно 43 достаточно рассмотреть случай $n=p^k$, где p — простое число. Делителями являются тогда $1, p, p^2, \ldots, p^k$, следовательно,

$$\sigma_\alpha(n)=1+p^\alpha+p^{2\alpha}+\ldots+p^{k\alpha}=\frac{1-p^{\alpha(k+1)}}{1-p^\alpha}.$$

45. Расположим значения отношения

$$\frac{\tau(p^k)}{\varphi(p^k)}=\frac{k+1}{p^{k-1}(p-1)}$$

в виде таблицы с двумя входами. В прилагаемой таблице неправильные дроби выделены жирным шрифтом:

$p \backslash k$	1	2	3	4
2	$\mathbf{\frac{2}{1}}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	$\mathbf{\frac{4}{4}}$	$\frac{5}{8}$
3	$\mathbf{\frac{2}{2}}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{54}$
5	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{5}{500}$

Значения указанного отношения убывают при возрастании как p, так и k (продифференцировать!) и стремятся к нулю. Так как $\frac{\tau(n)}{\varphi(n)}$ — мультипликативная функция от n, то дело сводится к разысканию всех произведений, имеющих значение $\geqslant 1$, множители которых (в числе, большем или равном единице) принадлежат различным строкам таблицы. Таких произведений имеется лишь 10 соответственно числам $n=2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 24, 30$; вместе с $n=1$ эти числа дают все решения неравенства

$$\tau(n) \geqslant \varphi(n).$$

46. Достаточно рассмотреть одно лишь фиксированное простое число p и мультипликативную функцию, связанную с p следующим образом: $f(n)=g(k)$, когда p^k — высшая степень p, содержащаяся в n, $g(0)=1$, в остальном $g(k)$ — произвольная функция показателя k. Все мультипликативные функции могут быть составлены путем умножения из функций такого вида. Но для такой функции теорема гласит

$$g(\mathrm{Max}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda))\, g(\mathrm{Min}(\alpha, \beta))\, g(\mathrm{Min}(\alpha, \gamma)) \ldots$$
$$\ldots g(\mathrm{Min}(\varkappa, \lambda))\, g(\mathrm{Min}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)) \ldots =$$
$$= g(\alpha)\, g(\beta) \ldots g(\lambda)\, g(\mathrm{Min}(\alpha, \beta, \gamma)) \ldots$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda$ — неотрицательные показатели наивысших степеней p, входящих соответственно в $a, b, c, d, \ldots, k, l$. А это представляет собой обобщение формулы **28**, допускающее аналогичное доказательство, с тем отличием, что при этом нужно использовать не **21**, а **26**, приписывая рассматриваемому как объект числу m числовое значение $\ln g(m) - \ln g(m-1)$, причем $\ln g(-1)=0$.

47. Каждое целое положительное число может быть одним и только одним способом представлено в виде произведения степеней простых чисел. Таким образом, по самому закону образования рассматриваемого бесконечного произведения мы получаем каждый член $f(n)\,n^{-s}$, где $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2},\ \ldots,\ p_\nu^{k_\nu}$, один и только один раз, а именно как $f(p_1^{k_1})\,p_1^{-k_1 s}f(p_2^{k_2})\,p_2^{-k_2 s}\ldots f(p_\nu^{k_\nu})\,p_\nu^{-k_\nu s}$. Теорема совершенно равносильна свойству мультипликативности функции $f(n)$.

48. [Euler, Introductio in analysin infinitorum, т. 1, Opera omnia, серия 1, т. 8, стр. 288, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1922 *).] $f(n)=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$ — мультипликативная функция [47].

49. Вследствие мультипликативности имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_\alpha(n)\,n^{-s}=\prod_p\frac{(1-p^\alpha)\,1^{-s}+(1-p^{2\alpha})\,p^{-s}+(1-p^{3\alpha})\,p^{-2s}+\ldots}{1-p^\alpha}=$$

$$=\prod_p\frac{1}{(1-p^{-s})\,(1-p^{\alpha-s})},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{\nu(n)}n^{-s}=\prod_p\,(1+2p^{-s}+2p^{-2s}+2p^{-3s}+\ldots)=\prod_p\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n)\,n^{-s}=\prod_p\,(1-p^{-s}+p^{-2s}-p^{-3s}+\ldots)=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{-2s}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\,n^{-s}=\prod_p\left[1+\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{1-s}+\left(1-\frac{1}{p}\right)p^{2-2s}+\ldots\right]=$$

$$=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}.$$

50. [E. Cesàro, задача, Mathesis, т. 6, стр. 192, 1886. Решение — Mantel, там же, т. 8, стр. 208, 1888.] $a(n)$ — мультипликативная функция, поэтому [47]

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\,n^{-s}=\prod_p\,[1+a(p)\,p^{-s}+a(p^2)\,p^{-2s}+\ldots]=$$

$$=(1^{-s}+2^{-s}+2^{-2s}+\ldots)\prod_{p>2}\,(1+p^{1-s}+p^{2(1-s)}+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{1-2^{-s}}\prod_{p>2}\frac{1}{1-p^{1-s}}.$$

51. Вследствие 48

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_p\frac{p^{-s}\ln p}{1-p^{-s}}.$$

52. $$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,n^{-s}=1.$$

*) Леонард Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, ОНТИ, 1936.

Равносильно второй формуле задачи 41. 52—56, 58 можно доказать также без помощи рядов Дирихле.

53. На основании 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, n^{-s}.$$

54. На основании 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, n^{-s}.$$

55. На основании 49

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\, n^{-s};$$

тот же результат получаем, применяя 34 к 54. Равносильно формуле 25.

56.
$$-\zeta'(s) = \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\zeta(s),$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

57. Из 33, 54. Другие частные случаи формулы 33 получаются из 52—56.

58. [Jacobi, задача, Nouv. Ann., т. 11, стр. 45, 1852. Решение — A. Dallot и др., там же, т. 11, стр. 126, 186, 1852.]

$$\sum \alpha^{-s} = 1^{-s} + 3^{-s} + 5^{-s} + \ldots = (1 - 2^{-s})\,\zeta(s),$$

$$\sum \beta^{-s} = 2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + \ldots = 2^{-s}\,\zeta(s),$$

следовательно,

$$\sum\sum (\beta - \alpha)(\alpha\beta)^{-s} = \sum\sum \alpha^{-s}\beta^{1-s} - \sum\sum \alpha^{1-s}\beta^{-s} =$$
$$= (1 - 2^{-s})\,\zeta(s)\, 2^{1-s}\zeta(s-1) - (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s-1)\, 2^{-s}\zeta(s) =$$
$$= 2^{-s}\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(m)\,(2m)^{-s}.$$

59. Согласно 47 функция $h(n)$ мультипликативна, если

$$\prod_p (1^{-s} + h(p)\,p^{-s} + h(p^2)\,p^{-2s} + \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\, n^{-s}.$$

Но в нашем случае

$$1^{-s}+h(p)\,p^{-s}+h(p^2)\,p^{-2s}+\ldots=$$
$$=(1^{-s}+f(p)\,p^{-s}+f(p^2)\,p^{-2s}+\ldots)(1^{-s}+g(p)\,p^{-s}+g(p^2)\,p^{-2s}+\ldots),$$

откуда и вытекает утверждение.

60. Пусть вершины выпуклого правильного n-угольника в порядке их следования будут $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Отрезок, соединяющий вершины A_k и A_l, принадлежит некоторому правильному (выпуклому или звездчатому) $\frac{n}{t}$-угольнику, где $t=(n,\ l-k)$; откладывая указанный отрезок $\frac{n}{t}$ раз, мы возвращаемся к исходному пункту. Тем самым из каждой вершины исходит при $t=1$ $\varphi(n)$ отрезков, принадлежащих различным n-угольникам; эти последние имеют, следовательно, в совокупности $\frac{1}{2}n\varphi(n)$ сторон.

61. Если $\frac{k}{n}$ несократимо, то несократимо также $\frac{n-k}{n}$. Обе дроби в сумме составляют 1.

62. [G. Frobenius; см. A. Errera, Rend. Palermo, т. 35, стр. 110, 1913.] Пусть $(b,\ c)=d$. Если $(a,\ b,\ c)=1$, то сократимыми будут лишь те дроби, числитель которых делится на простые числа, входящие в c, но не входящие в b, а значит — и в d. Отсюда следует аналогично тому, как в 25, что число несократимых дробей

$$N=c\prod_{\substack{p\,|\,c\\(p,\,d)=1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{c\prod\limits_{q\,|\,c}\left(1-\frac{1}{q}\right)}{\prod\limits_{r\,|\,d}\left(1-\frac{1}{r}\right)}=\frac{\varphi(c)}{\frac{\varphi(d)}{d}}.$$

Но $\varphi(bc)=d\varphi\left(\frac{bc}{d}\right)$, ибо bc и $\frac{bc}{d}$ содержат одинаковые простые множители; кроме того, согласно 46 $\varphi\left(\frac{bc}{d}\right)\varphi(d)=\varphi(b)\,\varphi(c)$.

63. $\varphi(1)+2[\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n)]$.

64. (1) Число столбцов, в которых мнимые части числителя имеют с n фиксированный наибольший общий делитель t, равно $\varphi\left(\frac{n}{t}\right)$. В каждом из этих столбцов число несократимых дробей равно числу чисел, меньших чем n и взаимно простых с t, т. е. равно $\frac{n}{t}\varphi(t)$. Поэтому число всех несократимых дробей будет равно

$$\sum_{t\,|\,n}\varphi(t)\,\frac{n}{t}\,\varphi\left(\frac{n}{t}\right)$$

и представляет, следовательно [43, 59], мультипликативную функцию. При $n=p^k$ число сократимых дробей равно $p^{k-1}\cdot p^{k-1}$, и, значит, число несократимых равно $p^{2k}-p^{2k-2}$.

Из формулы $\Phi(n)=\sum_{t\mid n}\varphi(t)\frac{n}{t}\varphi\left(\frac{n}{t}\right)$, между прочим, вытекает сразу также (4), ибо имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)n^{-s}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k)k^{-s}\sum_{l=1}^{\infty}\varphi(l)l^{1-s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\cdot\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s-1)}\ [49].$$

(2) Вытекает из **21**, как **25**.

(3) Число дробей, числитель и знаменатель которых можно сократить ровно на t, равно $\Phi\left(\frac{n}{t}\right)$. Суммируя по всем $\frac{n}{t}$, получаем

$$n^2=\sum_{t\mid n}\Phi\left(\frac{n}{t}\right)=\sum_{t\mid n}\Phi(t).$$

Из (4) вследствие **47** вытекает (1) и обратно.

Из (4) вытекает (2) и обратно. В самом деле,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)n^{-s}=\frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid n}\mu(d)\frac{n^2}{d^2}n^{-s}$$

[41], следовательно,

$$\Phi(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\frac{n^2}{d^2}=n^2\left(1-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}-\ldots+\frac{1}{p^2q^2}+\ldots\right)=$$
$$=n^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\ldots$$

Из (4) на основании правила умножения рядов Дирихле вытекает (3) и обратно.

65. Из первого тождества имеем

$$A_n=\sum_{t\mid n}a_t,$$

из второго

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nx^n}{1-x^n}=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\left(x^m+x^{2m}+x^{3m}+\ldots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{t\mid n}a_t\right)x^n.$$

66. Имеем

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+\ldots$$

Первое тождество дает, таким образом,

$$B_n=\sum_{t\mid n}(-1)^{t-1}a_{\frac{n}{t}},$$

а второе

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1+x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x^m - x^{2m} + x^{3m} - \ldots) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{t \mid n} (-1)^{t-1} a_{\frac{n}{t}} \right) x^n.$$

67. Записывая A_n в форме $A_n = \sum_{t \mid n} a_t$ и объединяя множители с показателем a_m, получаем в правой части произведение

$$\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)^{a_m} \left(1 - \frac{x^2}{(2m)^2\pi^2}\right)^{a_m} \left(1 - \frac{x^2}{(3m)^2\pi^2}\right)^{a_m} \ldots,$$

которому в левой соответствует a_m-я степень члена

$$\frac{m}{x} \sin \frac{x}{m} = \left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(2m)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(3m)^2\pi^2}\right)\ldots$$

68. См. решение 66:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(km)^2\pi^2}\right)^{(-1)^{k-1}} = \frac{x}{2m} \operatorname{ctg} \frac{x}{2m}.$$

69. Из 65 на основании 41 и 49 вытекает, что интересующие нас функции суть x и $\frac{x}{(1-x)^2}$.

70. [Baschwitz, задача, Mathesis (2), т. 3, стр. 80, 1893. Решение — E. Cesàro, там же (2), т. 3, стр. 205, 1893; Laguerre, Oeuvres, т. 1, стр. 216, Paris, Gauthier-Villars, 1898.] Из 65 и 49.

71. Из 66 с помощью 41, 49.

72. Из 66 с помощью 49. Согласно I 93 сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \frac{x^n}{1+x^n}$$

при $x \to 1$ стремится к $-\infty$. Если бы удалось доказать аналогичное утверждение для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) x^n$, то тем самым была бы доказана известная гипотеза Римана о нулях ζ-функции.

73. См. 64, 65, 66.

74. Согласно 39, 65

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = x &+ x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + \\ &+ x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots + \\ &+ x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \ldots + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Суммируем ряд по членам, стоящим справа и ниже каждого диагонального элемента x, x^4, x^9, ... См. также II 32.

75. [Euler, Opera omnia, серия 1, т. 2, стр. 373, Leipzig, B. G. Teubner, 1915.] Согласно 49, 65

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{1-x^n} = \begin{aligned}[t] & x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + \\ & + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots + \\ & + 3x^3 + 3x^6 + 3x^9 + 3x^{12} + \ldots + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Суммируем этот двойной ряд по столбцам. С другой стороны, рассматриваемый ряд представляет собой (с точностью до множителя $-x$) логарифмическую производную от эйлерова произведения

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)\ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}} \qquad [\text{I } 54].$$

Умножая на знаменатель $1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\sigma(n)-\sigma(n-1)-\sigma(n-2)+\sigma(n-5)+\sigma(n-7)-\ldots=0.$$

Слева стоят выражения $(-1)^k \sigma\left(n-\frac{3k^2 \pm k}{2}\right)$, $0 \leqslant \frac{3k^2 \pm k}{2} \leqslant n$, где вместо не определенного еще символа $\sigma(0)$ в случае его появления следует поставить число n.

76. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{1-qx^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p^n q^m x^{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{1-px^m}$.

77. Заменяем в 76 p на x, q на $-x^2$, x на x^2.

78. В разложении дроби $\frac{x}{1-x^2}$ содержатся в качестве показателей степеней нечетные числа, в разложении дроби $\frac{x^2}{1-x^4}$ — числа, делящиеся на 2, но не на 4, в разложении дроби $\frac{x^4}{1-x^8}$ — числа, делящиеся на 4, но не на 8, и т. д. См. решение I **19**, где также играет роль разбиение всех чисел сообразно содержащейся в них высшей степени двойки. Интересующее нас тождество получается также посредством логарифмического дифференцирования из I **164**. Второе тождество получается из **66** или же посредством логарифмического дифференцирования из решения I **14**.

79. [См. P. G. Lejeune-Dirichlet, Werke, т. 2, стр. 52, Berlin, G. Reimer, 1897.] Указанные целые точки можно подсчитать двумя различными способами. Число целых точек на гиперболе $xy=k$ равно $\tau(k)$; полагая $k=1, 2, \ldots, n$ и складывая, получаем левую часть. Число целых точек на прямой $x=k$, параллельной оси y, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$; полагая $k=1, 2, \ldots, n$ и складывая, получаем правую часть. См. II 46.

80. Указанные в задаче 79 целые точки можно подсчитать также, беря число целых точек в обеих полосах

$$1 \leqslant x \leqslant \nu, \quad xy \leqslant n \quad \text{и} \quad 1 \leqslant y \leqslant \nu, \quad xy \leqslant n$$

и вычитая из него число целых точек в квадрате $1 \leqslant x \leqslant \nu$, $1 \leqslant y \leqslant \nu$, т. е. ν^2. [В области $x > \nu$, $y > \nu$, $xy \leqslant n$ не содержится ни одной целой точки, ибо $(\nu+1)^2 > n$.]

81. Припишем каждой целой точке (k, l) в области $x>0$, $y>0$, $xy \leqslant n$ «числовое значение» $a_k b_l$. Подсчетами, аналогичными проведенным в 79, получаем различные представления для суммы «числовых значений» Γ_n всех указанных целых точек.

82. Полагаем в 81 $a_n=\Lambda(n)$, $b_n=1$; тогда $c_n=\ln n$ и $B_n=n$, $\Gamma_n=\ln n!$, следовательно,

$$\ln n! = \sum_{r=1}^{n} a_r B_{\left[\frac{n}{r}\right]} = \sum_{r=1}^{n} \Lambda(r)\left[\frac{n}{r}\right] = \sum_{p \leqslant n} \sum_{m=1}^{\infty} \ln p \left[\frac{n}{p^m}\right].$$

83. [80.]

84. Биномиальные коэффициенты являются целыми числами. $\binom{x}{m}$ является целым также и для отрицательных целых x, ибо $\binom{-x}{m} = (-1)^m \binom{x+m-1}{m}$.

85. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ можно последовательно выразить в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами через $1, \frac{x}{1}, \frac{x(x-1)}{2!}, \ldots, \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$. Коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_m$ *) определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&P(0) = b_m,\\
&P(1) = b_m + \binom{1}{1} b_{m-1},\\
&P(2) = b_m + \binom{2}{1} b_{m-1} + \binom{2}{2} b_{m-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P(m) = b_m + \binom{m}{1} b_{m-1} + \ldots + \binom{m}{m} b_0.
\end{aligned}$$

*) Последовательные (но в обратном порядке) конечные разности полинома $P(x)$, взятые в точке $x=0$. Аналогичные замечания можно сделать и относительно задач 88 и 89.

Если $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(m)$ — целые числа, то, как показывают приведенные уравнения, и b_0, b_1, ..., b_m будут целыми числами.

86. [85.]

87. Мы можем принять, что точками, в которых $P(x)$ принимает согласно предположению целые значения, служат 0, 1, ..., m; тогда утверждение вытекает из решения 85.

88. [G. Pólya, Rend. Palermo, т. 40, стр. 5, 1915.]

$$\binom{x+m-1}{2m-1} = \frac{x(x^2-1^2)(x^2-2^2)\dots[x^2-(m-1)^2]}{(2m-1)!}.$$

Коэффициенты c_1, c_2, ..., c_m последовательно определяются из уравнений

$$P(1) = c_1,$$
$$P(2) = c_1\binom{2}{1} + c_2,$$
$$P(3) = c_1\binom{3}{1} + c_2\binom{4}{3} + c_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

[Решение 85.]

89. Полином степени $2m$

$$\frac{x}{m}\binom{x+m-1}{2m-1} = 1, \quad 0, \quad \dots, \quad 0, 0, 0, \dots, \quad 0, \quad 1$$

при

$$x = -m, \; -m+1, \dots, \; -1, \; 0, \; 1, \dots, \; m-1, \; m$$

и, стало быть, целозначен [87]. Далее,

$$P(0) = d_0,$$
$$P(1) = d_0 + d_1,$$
$$P(2) = d_0 + d_1\frac{2}{1}\binom{2}{1} + d_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

[Решение 85, 88.]

90. [G. Pólya, Deutsche Math.-Ver., т. 28, стр. 31—40, 1919.] Согласно VI 70 целочисленный полином $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$, $a_0 \neq 0$, в $m+1$ различных целых точках принимает по меньшей мере один раз значение, которое по модулю $\geqslant \frac{m!}{2^m}|a_0| \geqslant \frac{m!}{2^m}$. При $m \geqslant 4$ имеем $\frac{m!}{2^m} > 1$. Для $m \leqslant 3$ можно указать следующие примеры:

$m=1$, $P(x) = x$ для $x = -1, 1$,
$m=2$, $P(x) = x(x-1)-1$ для $x = -1, 0, 1$,
$m=3$, $P(x) = (x+1)x(x-2)+1$ для $x = -1, 0, 1, 2$.

91. Из интерполяционной формулы Лагранжа, см. стр. 98.

92. Первое решение. Пусть интересующая нас функция будет $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$— взаимно простые полиномы и r — сумма их степеней. Для случая $r=0$ теорема тривиальна. Предположим, что степень $P(x)$ не ниже степени $Q(x)$ [в противном случае мы взяли бы $R(x)^{-1}$ вместо $R(x)$]. Пусть для некоторого целого положительного a $Q(a)\neq 0$. Тогда отношение $\frac{P(a)}{Q(a)}$ рационально и $\frac{1}{x-a}\left(R(x)-\frac{P(a)}{Q(a)}\right)=\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ представляет собой рациональную функцию, принимающую рациональные значения для целых x, $x>a$, причем степень числителя

$$P^*(x)=\frac{P(x)Q(a)-Q(x)P(a)}{Q(a)(x-a)}$$

меньше чем степень $P(x)$, так что сумма степеней $P^*(x)$ и $Q(x)$ меньше суммы степеней $P(x)$ и $Q(x)$. Утверждение получается теперь методом математической индукции.

Второе решение. Пусть интересующая нас функция будет $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые полиномы степеней соответственно m и n. Пусть, далее, в точках $x=0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, m+n$ эта функция принимает рациональные значения r_0, r_1, r_2, $\ldots$, r_{m+n}. Рассмотрим систему $m+n+1$ однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned}u_0+u_1k+u_2k^2+\ldots+u_mk^m-v_0r_k-\\ -v_1r_kk-v_2r_kk^2-\ldots-v_nr_kk^n=0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, m+n)\end{aligned}$$

с $m+n+2$ неизвестными $u_0, u_1, \ldots, u_m, v_0, v_1, \ldots, v_n$. Двум решениям этой системы соответствуют две пары полиномов $P(x)$, $Q(x)$ и $P^*(x)$, $Q^*(x)$, где $P(x)$ и $P^*(x)$ — степени $\leqslant m$, $Q(x)$ и $Q^*(x)$ — степени $\leqslant n$ такие, что

$$P(k)-r_kQ(k)=0, \quad P^*(k)-r_kQ^*(k)=0 \quad (k=0, 1, 2, \ldots, m+n).$$

Но из обращения в нуль функции $P(x)Q^*(x)-P^*(x)Q(x)$ степени $\leqslant m+n$ в точках $x=0, 1, 2, \ldots, m+n$ вытекает, что она тождественно равна нулю. Так как $P(x)$ и $Q(x)$ — взаимно простые, то $P(x)$ должно делить $P^*(x)$, т. е. $P^*(x)=cP(x)$, $Q^*(x)=cQ(x)$, c — постоянная. Следовательно, указанная система имеет, с точностью до множителя пропорциональности, лишь одно решение. Ее ранг равен, таким образом, $m+n+1$, и, значит, в матрице системы содержится по крайней мере один определитель порядка $m+n+1$, не равный нулю. Но все элементы матрицы являются рациональными числами. Следовательно, среди решений $u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_m, v_0, v_1, \ldots, v_n$ будут содержаться целочисленные.

Было бы достаточно предположить, что $R(x)$ принимает рациональные конечные значения при $m+n+1$ различных рациональных значениях x.

93. Интересующая нас функция $f(x)$ [решение **92**, см. последнее замечание] равна $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — целочисленные полиномы. Но тогда можно найти такое целое число g, что $gf(x) = G(x)+r(x)$, где $G(x)$ — целочисленный полином, а $r(x)$ — правильная рациональная дробь. Функция $r(x)$ должна принимать целые значения в бесконечном множестве целых точек. Но так как $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)=0$, то, начиная с некоторого x, будем иметь $|r(x)|<1$, следовательно, $r(x)=0$ и, значит, $r(x)\equiv 0$, ибо рациональная функция, не равная тождественно нулю, может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек.

94. Из сравнения

$$2^m \equiv -1 \pmod p$$

имеем

$$2^{2^k m} \equiv 1, \quad 2^{2^k m}+1 \equiv 2 \pmod p,$$

m и k — целые положительные, p — нечетное простое число. Отсюда вытекает, что число простых чисел, не превосходящих x, во всяком случае $\geqslant \text{const.} \cdot \ln\ln x$.

95. [G. Pólya, Math. Zeitschr., т. 1, стр. 144, 1918.] Мы можем предположить, отбрасывая тривиальный случай $a=0$, что $(a, d)=1$, $d\geqslant 1$, $a>d$. Числа

$$n=\frac{a}{b}\left(a^{\varphi(d)\nu}-1\right)$$

являются целыми при всех $\nu=1, 2, 3, \ldots$, а числа

$$a+nd=a^{\varphi(d)\nu+1}$$

содержат лишь простые множители, входящие в a.

96. Произведение чисел вида $6n+1$ представляет собой число снова того же вида.

97. [Goldbach; см. Euler, Opera omnia, серия 1, т. 3, стр. 4, 337, Leipzig, B. G. Teubner, 1917.]

Первое решение. Пусть [85]

$$P(x+n)=b_0\binom{x}{m}+b_1\binom{x}{m-1}+\ldots+b_{m-1}\binom{x}{1}+b_m,$$
$$b_m=P(n),$$

где b_0 положительно и n выбрано столь большим, что простое число $P(n)=p$ больше чем m и $P(p+n)>p$. [$P(x)$ возрастает до бесконечности и притом монотонно, начиная с достаточно большого значения x.] Тогда при $x=p$ все члены будут делиться на p, и p будет входить собственным множителем в $P(p+n)$.

Второе решение. Если $P(x)$ — полином степени m, то $m!\,P(x)$ будет целочисленным полиномом [86]. Пусть при целых положительных значениях a и b имеем $P(a)=p$ и $P(b)=q$, где p, q — простые числа, $q>p>m$. Выберем $c\equiv a \pmod p$, $c\equiv b \pmod q$. Тогда $m!\,P(c)\equiv 0 \pmod{pq}$ и, следовательно, $P(c)\equiv 0 \pmod{pq}$.

98. Нечетное простое число p является простым делителем полинома x^2+1 тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1.$$

99. Простое число p, $p\neq 2, 3, 5$, является делителем полинома x^2+15 тогда и только тогда, когда $\left(\frac{-15}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)=1$. Так как

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}},\quad \left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right),\quad \left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right),$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)\equiv p \pmod 3,\qquad \left(\frac{p}{5}\right)\equiv p^2 \pmod 5,$$

то $\left(\frac{-15}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{5}\right)=1$ тогда и только тогда, когда p либо содержится одновременно в обеих последовательностях

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \ldots,$$
$$4,\ 6,\ 9,\ 11,\ 14,\ 16,\ 19,\ 21,\ 24,\ 26,\ \ldots,$$

либо не содержится ни в одной из них. Искомыми простыми делителями служат 3, 5 и все простые числа вида $15x+y$, где $y=1$, 2, 4, 8.

100. Полином ax^2+bx+c неприводим тогда и только тогда, когда b^2-4ac не является квадратом. Пусть p не делит b^2-4ac. Из сравнения

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+4ac-b^2\equiv 0 \pmod p$$

вытекает, что $\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=1$. По закону взаимности, примененному как в решении **99**, и теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии [см. примечание к задаче **110**] существует бесконечное множество простых чисел p, для которых $\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)=-1$. С помощью более тонких средств эту теорему можно распространить на неприводимые полиномы любой степени. См. G. Frobenius, Berl. Ber. 1896, I, стр. 689—703.

101. После умножения на некоторое целое число, не равное нулю, мы можем записать рассматриваемый полином в виде

$(ax+b)Q(x)$, где a, b — целые, $a \neq 0$, $Q(x)$ целозначен, $Q(x) \not\equiv 0$. Если p — простое число, не входящее в a, то существует бесчисленное множество x, для которых $ax+b \equiv 0 \pmod p$, т. е. $(ax+b)Q(x) \equiv 0 \pmod p$.

102.

$$x^6 - 11x^4 + 36x^2 - 36 = (x^2-2)(x^2-3)(x^2-6).$$

При $p > 3$ равенства $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{6}{p}\right) = -1$ не могут одновременно выполняться, ибо $\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{6}{p}\right) = 1$.

103. Из 104 следует, что m входит множителем в $p-1$.

104. Из равенства

$$x^m - 1 = K_m(x) \prod_{t \mid m,\ t<m} K_t(x)$$

[36] вытекает, что $a^m - 1 \equiv 0 \pmod p$, следовательно, a взаимно просто с p. Если бы a не принадлежало показателю $m \pmod p$, то мы имели бы $a^t - 1 \equiv 0 \pmod p$ уже для некоторого собственного делителя t числа m. Так как

$$x^t - 1 = \prod_{t' \mid t} K_{t'}(x),$$

то тогда по крайней мере еще один множитель полинома $x^m - 1$, кроме $K_m(x)$, делился бы на p. Мы имели бы тем самым $a^m - 1 \equiv \equiv 0 \pmod{p^2}$ и точно так же $(a+p)^m - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, что невозможно, так как $(a+p)^m - 1 \equiv a^m - 1 + mpa^{m-1} \pmod{p^2}$.

105. $6P-1$ обладает простым множителем вида $6n-1$ [96], этот последний не может входить множителем в P и, стало быть, отличен от всех уже известных простых чисел вида $6n-1$.

106. См. решение 105.

107. [G. Pólya, J. für Math., т. 151, стр. 19—21, 1921.] Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l$ — простые делители функции $ab^x + c$, причем в b входят множителем все q и ни одно p. Тогда каждое q должно будет входить также в c; если $q_\nu^{\beta_\nu}$ — высшая степень, в которой q_ν входит в c, то $q_\nu^{\beta_\nu}$ при $x > \beta_\nu$ будет также высшей степенью, в которой q_ν входит в $ab^x + c$. Пусть x_0 — целое число, для которого $ab^{x_0} + c \gtrless 0$, и $p_\mu^{\alpha_\mu}$ — высшая степень, в которой p_μ входит в $ab^{x_0} + c$. Полагая

$$\varphi\left(p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \ldots p_k^{\alpha_k+1}\right) = r,$$

будем иметь для всех целых $x \geq 0$ и $\mu = 1, 2, \ldots, k$

$$ab^{x_0+rx} + c \equiv ab^{x_0} + c \not\equiv 0 \left(\operatorname{mod} p_\mu^{\alpha_\mu+1}\right).$$

Если бы теперь числами $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l$ исчерпывались все простые делители функции ab^x+c, то для всех достаточно больших целых x было бы

$$ab^{x_0+rx}+c \not\equiv 0 \quad \left(\operatorname{mod} p_1^{\alpha_1+1}\right), \left(\operatorname{mod} p_2^{\alpha_2+1}\right), \ldots, \left(\operatorname{mod} q_l^{\beta_l+1}\right),$$
$$\left|ab^{x_0+rx}+c\right| \leqslant p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\ldots q_l^{\beta_l},$$

т. е. функция ab^x+c была бы ограниченной, что на самом деле не имеет места.

108. Каждый не тождественно постоянный целозначный полином имеет по крайней мере один простой делитель, ибо он принимает значения 0, 1, —1 лишь в конечном числе точек. Пусть $P(x)$ есть целочисленный полином [86], $P(a)=b\neq 0$, и известны уже его простые делители $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Тогда полином

$$b^{-1}P(a+bp_1p_2\ldots p_lx)$$

является целочисленным и $\equiv 1 \pmod{p_1p_2\ldots p_l}$ для целых x и имеет, таким образом, хотя бы один простой делитель, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_l$; но таковой служит простым делителем также для $P(x)$. Можно доказать и методом, примененным в **107** [см. 1. с. **107**].

109. Да, если $P(x)$ — линейная функция или степень линейной функции [95], и, как можно доказать с помощью более тонких средств, ни в каком другом случае. См. 1. с. **95** и C. Siegel, Math. Zeitschr., т. 10, стр. 204—205, 1921.

110. [J. A. Serret и др.; см. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, стр. 436, 897, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1909.] [**108**, **103**.]

111. Существуют два таких целочисленных полинома $p(x)$ и $q(x)$, что $p(x)P(x)+q(x)Q(x)=m\neq 0$, где m — целое число. Следовательно, $(P(n), Q(n))$ делит m, тогда как $P(x)$ и $Q(x)$ имеют простые делители, не входящие в m [**108**].

112. Предположим сначала, что полином $P(x)$ — целочисленный. $P(x)$ — взаимно простой с $P'(x)$. Существует бесконечное множество простых делителей p полинома $P(x)$, для которых

$$P(n)\equiv P(n+p)\equiv 0 \pmod p \text{ и } P'(n)\not\equiv 0 \pmod p \quad [\mathbf{111}].$$

Так как $P(n+p)-P(n)\equiv pP'(n) \pmod{p^2}$ [**130**], то оба числа $P(n)$, $P(n+p)$ не могут одновременно делиться на p^2. В общем случае рассматриваем $m!\,P(x)$, где m есть степень $P(x)$.

113. Пусть $J(x), J_1(x), J_2(x), \ldots$ — различные неприводимые множители $P(x)$, расположенные в порядке возрастания их кратности, так что

$$P(x)=[J(x)]^m[J_1(x)]^{m_1}[J_2(x)]^{m_2}\ldots, \quad m\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant\ldots$$

Существует [**111**] бесконечное множество простых делителей p полинома $J(x)$ таких, что из $J(n)\equiv 0 \pmod p$ необходимо следует, что $J'(n) \not\equiv 0$, $J_1(n) \not\equiv 0$, $J_2(n) \not\equiv 0, \ldots \pmod p$. Тогда одно из двух чисел $J(n)$ и $J(n+p)$ делится лишь на первую степень p **[112]** и, следовательно, одно из двух чисел $P(n)$ и $P(n+p)$ — лишь на p^m и ни на какую более высокую степень p.

114. [Ch. Brisse, задача, Interméd. des math., т. 1, стр. 10, 1894; R. Jentzsch, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 19, ст. 361, 1912. Решение — W. Grosch, там же, серия 3, т. 21, стр. 368, 1913; см. также серия 3, т. 25, стр. 86, 1917.] Если $P(x)$ не представляет собой точной k-й степени, то существуют такое целое число a и два таких целочисленных полинома $Q(x)$, $R(x)$, что $a^k P(x) = [Q(x)]^k R(x)$, где $Q(x)$ может быть равно единице, а $R(x)$ во всех случаях обладает нулем кратности, меньшей k (это явствует из разложения $P(x)$ на неприводимые множители). Существуют произвольно большие целые n, для которых $R(n)$ делится на простое число p, не делясь на p^k **[113]**; следовательно, ни $R(n)$, ни $P(n)$ не представляют точной k-й степени. Другое решение — в **190.**

115. Обобщение метода, примененного в **107.** [См. 1. с. **107**, стр. 19—21.]

116. [Gauss. См. Hecke, стр. 14, 78 *).]

117. [Gauss. См. Nouv. Ann. de math., серия 1, т. 15, стр. 383, 1856. Решение — De Rochas и др., там же, серия 1, т. 16, стр. 9, 10, 71, 1857.] Если $f(a) = 0$, a — целое, то $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — целочисленный полином **[116]**. Из чисел $-a$, $1-a$ одно, и поэтому из чисел $f(0) = -a\varphi(0)$, $f(1) = (1-a)\varphi(1)$ по крайней мере одно, — четное.

118. [L. c. **90.**] Пусть $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$, $a_0 \neq 0$, — целочисленный множитель полинома $P(x)$ с наивысшей степенью m. Тогда

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] \leqslant m < n.$$

Согласно предположению полином $f(x)$ должен принимать в n, следовательно, самое меньшее в $m+1$ точках целые значения, по модулю меньшие, чем

$$\frac{\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)!}{2^{n - \left[\frac{n}{2}\right]}} \leqslant \frac{m!}{2^m}.$$

Из интерполяционной формулы Лагранжа (стр. 98) вытекает тогда [VI **70**], что $|a_0| < 1$, т. е. $a_0 = 0$, в противоречие с предположением. См. **116.**

119. [L. c. **90.**] Видоизменением метода доказательства теоремы **118.**

---

*) Гекке, стр. 19 и 82.

120. [P. Stäckel, J. für Math., т. 148, стр. 104, 1918; G. Pólya, l. c. 90.] Обозначая указанный полином через $P(x)$, имеем при всех целых x

$$P(x) \equiv x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \equiv 0 \pmod{n!} \qquad [130].$$

Неприводимость $P(x)$ вытекает из **119**, так как

$$n! < \left(\frac{n!+1}{2}\right)^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)!, \qquad n \geqslant 3.$$

Указанный неприводимый полином при всех x делится на $n!$. Этот множитель $n!$ является наибольшим, какой только вообще может иметь при всех x целочисленный полином n-й степени с взаимно простыми коэффициентами [86]. Другой противоречащий пример [A. и R. Brauer'ы]: полином $x^n+105x+12$ делится при всех целых x на 2, являясь вместе с тем по известному критерию Эйзенштейна неприводимым. Он не может принимать и значений ± 2, ибо по тому же критерию полиномы

$$x^n+105x+10, \quad x^n+105x+14$$

также неприводимы.

121. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 13, стр. 367, 1908. Решение — W. Flügel, там же, серия 3, т. 15, стр. 271—272, 1909.] Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — целочисленные полиномы [116] и

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1=\varphi(x)\psi(x),$$

то должно быть $\varphi(a_\nu)=-\psi(a_\nu)=\pm 1$ при всех $\nu=1, 2, \dots, n$. Но если бы полиномы $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и, значит, также их сумма $\varphi(x)+\psi(x)$ были степени $\leqslant n-1$, то эта сумма $\varphi(x)+\psi(x)$, обращаясь в нуль в n точках, должна была бы быть тождественно равна нулю, и следовательно, мы имели бы

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)-1 \equiv -[\varphi(x)]^2,$$

что невозможно вследствие различия знаков у коэффициентов при x^n.

122. [L. c. 121.] Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — целочисленные полиномы степени $\leqslant n-1$ и

$$F(x) \equiv x(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})+1 \equiv \varphi(x)\psi(x),$$

где $0<a_1<a_2<\dots<a_{n-1}$, то так же, как в **121**, заключаем, что

$$\varphi(x) \equiv \psi(x), \quad F(x) \equiv [\varphi(x)]^2, \quad n=2m,$$

где m — целое. Но

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}\,\frac{2a_1-1}{2}\,\frac{2a_2-1}{2}\dots\frac{2a_{n-1}-1}{2} \leqslant$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots\frac{4m-3}{2}<0$$

при $m \geqslant 3$, следовательно, $F(x)$ не может быть квадратом. Дальнейшее исследование необходимо лишь в случае $F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Полином $F(x)$ приводим (и, значит, является квадратом) лишь в следующих двух случаях:

$$m=2,\quad n=4,\quad a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_3=3,$$
$$m=1,\quad n=2,\quad a_1=2.$$

123. [I. Schur, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 15, стр. 259, 1909.] Если $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — целочисленные полиномы соответственно степеней k, l и если, кроме того, старший коэффициент полинома $\varphi(x)$ положителен и

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1 \equiv \varphi(x)\psi(x),$$

то тогда $\varphi(x)$, $\psi(x)$ положительны для всех вещественных значений x, $\varphi(a_\nu)=\psi(a_\nu)=1$, $\varphi(x)=x^k+\ldots$, $\psi(x)=x^l+\ldots$, $k+l=2n$. Если $k<l$, то $\varphi(x)\equiv 1$, ибо $\varphi(x)$ принимает значение 1 в $n \geqslant k+1$ точках. Если $k=l=n$, то полином $(n-1)$-й степени $\varphi(x)-\psi(x)$ обращается в нуль в n точках, и, следовательно, тождественно. Но тождество

$$1 \equiv [\varphi(x)]^2-(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2 \equiv$$
$$\equiv [\varphi(x)+(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)][\varphi(x)-(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)]$$

невозможно.

124. [I. Schur, задача, l. c. 123. Решение — A. и R. Brauer'ы.] Положим

$$p_0(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Если бы полином $p_0^4(x)+1$ был приводимым, то его можно было бы представить в форме

$$p_0^4(x)+1=[1-p_0(x)p_{-1}(x)][1-p_0(x)p_1(x)], \tag{1}$$

где $p_{-1}(x)$ и $p_1(x)$ — целочисленные полиномы со старшим коэффициентом -1. Из (1) вытекает

$$p_0^4(x)=-[p_{-1}(x)+p_1(x)]p_0(x)+p_{-1}(x)p_0^2(x)p_1(x),$$
$$p_{-1}(x)+p_1(x)=-p_0(x)t(x), \tag{2}$$

где $t(x)$ — некоторый целочисленный полином. Следовательно,

$$p_0^2(x)=t(x)+p_{-1}(x)p_1(x). \tag{3}$$

Если теперь степени n_{-1}, n_1 полиномов $p_{-1}(x)$, $p_1(x)$ равны, то из равенства (1) вытекает, что $n_{-1}=n_1=n$. Приравнивая тогда старшие коэффициенты в равенстве (2), заключаем, что $t(x)=2$.

Из (2) вытекает, далее, что $p_{-1}(a_\nu) = -p_1(a_\nu)$ и, значит, по формуле (3) $p_1^2(a_\nu) = 2$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Но это невозможно, ибо $p_1(a_\nu)$ — целые рациональные числа. Пусть, стало быть, $n_{-1} > n_1$. Имеем

$$1 \equiv p_1^4(x)\, p_0^4(x) \pmod{1 - p_1(x)\, p_0(x)}.$$

Из тождества (1) вытекает поэтому, что

$$p_1^4(x) + 1 \equiv p_1^4(x) + p_1^4(x)\, p_0^4(x) \equiv 0 \pmod{1 - p_1(x)\, p_0(x)},$$
$$p_1^4(x) + 1 = [1 - p_1(x)\, p_0(x)]\,[1 - p_1(x)\, p_2(x)], \tag{4}$$

где $p_2(x)$, как в последующем вообще $p_\lambda(x)$, $t_\lambda(x)$, означает целочисленный полином. При выводе (4) из (1) мы не опирались на свойства корней полинома $p_0(x)$; поэтому получаем по аналогии с равенствами (4), (2) и (3)

$$p_\lambda^4(x) + 1 = [1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda-1}(x)]\,[1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda+1}(x)], \tag{5}$$
$$p_{\lambda-1}(x) + p_{\lambda+1}(x) = -p_\lambda(x)\, t_\lambda(x), \tag{6}$$
$$p_\lambda^2(x) = t_\lambda(x) + p_{\lambda-1}(x)\, p_{\lambda+1}(x) \quad (\lambda = 0,\ 1,\ 2, \ldots). \tag{7}$$

Исключение полинома $p_{\lambda-1}(x)$, соотв. $p_{\lambda+1}(x)$, из (6) и (7) дает

$$\frac{p_\lambda^2(x) + p_{\lambda+1}^2(x)}{1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda+1}(x)} = t_\lambda(x) = \frac{p_\lambda^2(x) + p_{\lambda-1}^2(x)}{1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda-1}(x)} =$$
$$= t_{\lambda-1}(x) = t_{\lambda-2}(x) = \ldots = t(x).$$

Степени n_λ полиномов $p_\lambda(x)$ постоянно убывают на одно и то же число, ибо из (5) вследствие неравенства $n_{-1} > n_1$ вытекает

$$2n_\lambda = n_{\lambda-1} + n_{\lambda+1}, \quad n_{\lambda-1} - n_\lambda = n_\lambda - n_{\lambda+1}, \quad n_{\lambda+1} < n_\lambda.$$

Поэтому имеется первый тождественно равный нулю полином $p_{\nu+1}(x)$. Положим $p_\nu(x) = y$. Из (7) при $\lambda = \nu$ получаем $y^2 = t(x)$, следовательно, из (6)

$$p_{\nu-1}(x) = -y^3, \quad p_{\nu-2}(x) = -p_{\nu-1}(x)\, y^2 - p_\nu(x) = y^5 - y, \ \ldots$$

Из соотношения (6) вытекает, далее, что все p_λ являются полиномами относительно y, $p_\lambda(x) = q_\lambda(y)$; при этом в каждом полиноме q_λ все показатели сравнимы по модулю 4. Поэтому вместе с α также $i\alpha$ является корнем уравнения $q_\lambda(y) = 0$. За исключением $q_\nu(y)$ и $q_{\nu-1}(y)$ все $q_\lambda(y)$ имеют отличные от нуля и, значит, также не вещественные нули. То же имеет место и для $p_\lambda(x)$, так как $y(x)$ имеет рациональные коэффициенты. Так как $p_0(x)$ имеет лишь вещественные нули, то ν должно быть равно единице или нулю. Первая возможность отпадает, так как тогда было бы $p_0(x) = -p_1^3(x)$, что невозможно, ибо все нули полинома $p_0(x)$ различны.

125. [A. и R. Brauer'ы.] Так же как и в **124**, получаем ряд целочисленных полиномов $p_{-1}(x)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., удовлетворяющих уравнениям

$$F[p_\lambda(x)] = \{1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda-1}(x)\}\ \{1 - p_\lambda(x)\, p_{\lambda+1}(x)\}, \tag{1}$$

$$p_{\lambda-1}(x) + p_{\lambda+1}(x) = -p_\lambda(x)\, t(x) - A, \tag{2}$$

$$p_\lambda^2(x) + A p_\lambda(x) + B = t(x) + p_{\lambda-1}(x)\, p_{\lambda+1}(x) \quad (\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

где $t(x)$ обозначает некоторый целочисленный полином, не зависящий от λ. Если $p_{-1}(x)$ и $p_1(x)$ имеют одинаковую степень, то аналогично тому, как в **124**, получаем

$$p_1(a_k) = \frac{-A}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4B + 8} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, должно быть $A^2 - 4B + 8 = C^2$. Но если бы это было так, то полином $F(z)$ был бы приводимым:

$$F(z) = \left\{z^2 + \frac{1}{2}(A + C)\, z + 1\right\}\left\{z^2 + \frac{1}{2}(A - C)\, z + 1\right\}. \tag{4}$$

Если $n_{-1} > n_1$, то пусть снова $p_{\nu+1}(x)$ — первый полином, тождественно равный нулю, и $p_\nu(x) = y$. Тогда будем иметь

$$t(x) = u(y) = y^2 + Ay + B,$$

и $p_\lambda(x) = q_\lambda(y)$ будут целочисленными полиномами относительно y. Полином $q_0(y)$ вместе с $p_0(x)$ имеет лишь различные целочисленные нули b_1, b_2, ..., b_m. При $y = b_\mu$ ($\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$), полагая $q_1(b_\mu) = b_\mu^*$, будем иметь

$$q_1^2(b_\mu) + A q_1(b_\mu) + B = u(b_\mu) = b_\mu^2 + A b_\mu + B \tag{5}$$

[из (3) для $\lambda = 1$], следовательно,

$$u(b_\mu^*) = b_\mu^{*2} + A b_\mu^* + B = u(b_\mu) = b_\mu^2 + A b_\mu + B. \tag{6}$$

Таким образом, либо $b_\mu^* = b_\mu$, либо $b_\mu^* = -A - b_\mu$. Но теперь $q_0(b_\mu) = q_{\nu+1}(b_\mu^*) = 0$, $b_\mu^* = q_1(b_\mu) = q_\nu(b_\mu^*)$, так как $q_\nu(y) = y$. Из $q_\lambda(b_\mu) = q_{\nu-\lambda+1}(b_\mu^*)$, $q_{\lambda+1}(b_\mu) = q_{\nu-\lambda}(b_\mu^*)$ и (2) вытекает, что

$$\begin{aligned} q_{\lambda+2}(b_\mu) &= -A - q_{\lambda+1}(b_\mu)\, u(b_\mu) - q_\lambda(b_\mu) = \\ &= -A - q_{\nu-\lambda}(b_\mu^*)\, u(b_\mu^*) - q_{\nu-\lambda+1}(b_\mu^*) = q_{\nu-\lambda-1}(b_\mu^*) \\ &\qquad\qquad (\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu - 1), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$b_\mu = q_\nu(b_\mu) = q_1(b_\mu^*). \tag{7}$$

Те b_μ, для которых $b_\mu^* = b_\mu$, удовлетворяют соотношению

$$q_1(y) = y, \tag{8}$$

те же, для которых $b_\mu^* = -A - b_\mu$, удовлетворяют соотношению

$$q_1(y) = -y - A. \tag{9}$$

При $\nu > 1$ уравнения (8) и (9) будут степени $m-2$. Стало быть, по крайней мере два из b_μ, скажем b_1 и b_2, удовлетворяют уравнению (8) и по крайней мере два, скажем b_3 и b_4, — уравнению (9). Так как $b_3 \neq b_4$, то мы можем предположить, что $b_3 \neq -\frac{A}{2}$ и, значит, $b_3 \neq b_3^*$. Но теперь согласно (7)

$$\frac{q_1(b_3) - q_1(b_1)}{b_3 - b_1} = \frac{b_3^* - b_1}{b_3 - b_1} \quad \text{и} \quad \frac{q_1(b_3^*) - q_1(b_1)}{b_3^* - b_1} = \frac{b_3 - b_1}{b_3^* - b_1}$$

являются целыми числами; следовательно, $b_3^* - b_1 = \pm(b_3 - b_1)$. Знак $+$ не годится, так как $b_3^* \neq b_3$. Таким образом, мы получаем $b_1 = \frac{b_3^* + b_3}{2}$ и аналогично $b_2 = \frac{b_3^* + b_3}{2}$; следовательно, $b_1 = b_2$. Но это невозможно. Значит,

$$\nu = 1, \quad q_0(y) = -y(y^2 + Ay + B) - A = -(y^3 + Ay^2 + By + A).$$

Из равенства $b_1 + b_2 + b_3 = -A = b_1 b_2 b_3$ при надлежащей нумерации получаем, что $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, или $b_1 = -1$, $b_2 = -2$, $b_3 = -3$, или $b_1 = -b_2 > 0$, $b_3 = 0$. В первых двух случаях полином $F(z) = z^4 \pm 6z^3 + 11z^2 \pm 6z + 1$ будет согласно (4) приводимым, в последнем полином $F(z) = z^4 - b_1^2 z^2 + 1$ будет положительно определенным лишь при $b_1^2 = 1$. Значит,

$$F(z) = z^4 - z^2 + 1; \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 0;$$

$$q_0(y) = -y(y-1)(y+1) = p_0(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - a_\nu).$$

$y(x)$ может содержать лишь один линейный множитель, так как в противном случае $y(x)$ и $y(x) - 1$ имели бы не только целочисленные корни a_ν. Следовательно,

$$p_0(x) = (x - \alpha)(x - \alpha - 1)(x - \alpha - 2).$$

В этом случае полином $F[p_0(x)]$ действительно приводим.

126. [A. и R. Brauer'ы.] См. решение **124**, **125**. Рекуррентные формулы будут здесь таковы:

$$\left.\begin{aligned} &Ap_\lambda^4(x) + 1 = [1 - p_\lambda(x)p_{\lambda-1}(x)][1 - p_\lambda(x)p_{\lambda+1}(x)], \\ &p_{\lambda-1}(x) + p_{\lambda+1}(x) = -p_\lambda(x)t(x), \\ &Ap_\lambda^2(x) = t(x) + p_{\lambda-1}(x)p_{\lambda+1}(x) \end{aligned}\right\} \text{ при четных } \lambda;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A}p_\lambda^4(x) + 1 = [1 - p_\lambda(x)p_{\lambda-1}(x)][1 - p_\lambda(x)p_{\lambda+1}(x)], \\ &p_{\lambda-1}(x) + p_{\lambda+1}(x) = -p_\lambda(x)\cdot\frac{1}{A}t(x), \\ &\frac{1}{A}p_\lambda^2(x) = \frac{1}{A}t(x) + p_{\lambda-1}(x)p_{\lambda+1}(x) \end{aligned}\right\} \text{ при нечетных } \lambda.$$

$p_{-1}(x)$ и $p_1(x)$ — целочисленные полиномы со старшими коэффициентами, скажем A_{-1} и A_1; остальные $p_\lambda(x)$ не обязательно целочисленны. Несмотря на это, в случае $n_{-1} > n_1$ заключаем, как в **124**, **125**.

В случае $n_{-1} = n_1$ из рекуррентных формул вытекает, так как $A_{-1}A_1 = A > 0$, что

$$[p_{-1}(x) - p_1(x)]^2 = p_0^2(x)(A_{-1} - A_1)^2 - 4(A_{-1} + A_1),$$
$$\{p_{-1}(x) - p_1(x) + p_0(x)(A_{-1} - A_1)\} \times$$
$$\times \{p_{-1}(x) - p_1(x) - p_0(x)(A_{-1} - A_1)\} = -4(A_{-1} + A_1).$$

Из неравенства $A_{-1}A_1 > 0$ вытекает, что $A_{-1} + A_1 \neq 0$; оба множителя в левой части постоянны; старший коэффициент в первом множителе будет, таким образом, $2A_{-1} - 2A_1 = 0$. Следовательно,

$$A_{-1} = A_1, \; [p_{-1}(x) - p_1(x)]^2 = -8A_1, \; 2A_1 = -C^2,$$
$$A_1 = -2D^2, \; A = 4D^4.$$

Обратно, полином $4D^4z^4 + 1 = (2D^2z^2 + 2Dz + 1)(2D^2z^2 - 2Dz + 1)$, т. е. приводим.

127. [Обобщение одного замечания, принадлежащего O. Gmelin'y, см. P. Stäckel, 1. c. **120**, стр. 109—110.] Пусть $\varphi(x)$ — целочисленный множитель полинома $P(x) = \varphi(x)\psi(x)$ [**116**]; тогда также все нули полинома $\varphi(x)$ лежат в полуплоскости $\Re x < n - \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\left|\varphi\left(n - \frac{1}{2} - t\right)\right| < \left|\varphi\left(n - \frac{1}{2} + t\right)\right|$ при $t > 0$. Так как $\varphi(n-1) \neq 0$ и целое, то $|\varphi(n-1)| \geqslant 1$ и $\varphi(n)$ — целое, $|\varphi(n)| > 1$. Аналогично для $\psi(x)$. Но тогда $P(n)$ имело бы собственные делители $\varphi(n)$ и $\psi(n)$, что противоречит предположению.

128. [A. Cohn.] Применим **127** с $n = 10$ [III 24].

129. [D. Hilbert, Gött. Nachr., 1897, стр. 53; доказательство A. Hurwitz'a.] Числа $\sqrt{r}$, $\sqrt{s}$, $\sqrt{rs}$, $\sqrt{r} + \sqrt{s}$, $\sqrt{r} - \sqrt{s}$ — иррациональные. Поэтому в каждом линейном множителе коэффициенты будут находиться в иррациональном отношении, и то же будет иметь место в каждом множителе второй степени, получаемом комбинированием двух линейных множителей. Следовательно, рассматриваемый полином неприводим в обычном смысле [стр. 150]. Если имеет место функциональное сравнение [Hecke, стр. 11—12*)]

$$P(x) \equiv (x^2 + a_1x + a_2)(x^2 + a_3x + a_4) \pmod{a},$$
$$P(x) \equiv (x^2 + b_1x + b_2)(x^2 + b_3x + b_4) \pmod{b}$$

*) Гекке, стр. 17.

и $(a, b)=1$, то существуют такие числа c_1, c_2, c_3, c_4, что

$$c_\nu \equiv a_\nu \pmod{a}, \quad c_\nu \equiv b_\nu \pmod{b} \qquad (\nu=1, 2, 3, 4),$$
$$P(x) \equiv (x^2+c_1x+c_2)(x^2+c_3x+c_4) \pmod{ab}.$$

Таким образом, достаточно доказать разложимость по модулям, представляющим собой степени простых чисел. r является квадратичным вычетом mod 8, следовательно, также mod 2^n при любом n; $P(x)$ представлено в равенстве (1) в виде разности двух квадратов mod 2^n и распадается поэтому на два множителя второй степени. Вследствие (2) $P(x)$ приводимо mod r^n, вследствие (1) — mod s^n. Если p — простое число, $p \neq 2$, $p \neq r$, $p \neq s$, то по крайней мере один из символов $\left(\frac{r}{p}\right)$, $\left(\frac{s}{p}\right)$, $\left(\frac{rs}{p}\right)$ будет равен единице, ибо $\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{rs}{p}\right)=1$; смотря по тому, будет ли $\left(\frac{r}{p}\right)$, $\left(\frac{s}{p}\right)$ или $\left(\frac{rs}{p}\right)=1$, (1), (2) или (3) будет показывать разложимость mod p^n. Основания для возможности таких примеров см. у Frobenius'a, 1. с. **100**.

130.

$$\frac{a(a+1)\ldots(a+m-1)}{m!}=\binom{a+m-1}{m}.$$

[84, решение 136.]

131. Пусть рассматриваемые числа будут a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+(m-1)d$ и $(d, m!)=1$. Тогда существует такое d', $(d', m!)=1$, что $dd' \equiv 1 \pmod{m!}$. Полагая $ad'=a'$, имеем

$$d'^m a(a+d)(a+2d)\ldots(a+(m-1)d) \equiv$$
$$\equiv a'(a'+1)(a'+2)\ldots(a'+m-1) \pmod{m!} \qquad [130].$$

132. [K. Hensel, J. für Math., т. 116, стр. 354, 1896.] [Решение V 96.]

133. а) $n=4$ или простое число. Действительно, если n — составное, $n=ab$ и $a<b<n-1$, то $(n-1)!$ делится на n. Если n есть квадрат простого числа, $n=p^2$ и $p>2$, то $n-1>2p$ и $(n-1)!$ снова делится на p^2.

б) $n=8$, 9, p, $2p$, где p — произвольное простое число. Если n не имеет вида p, $2p$, p^2 и $n \neq 8$, 16, то $n=ab$, где $3 \leqslant a < b$. Либо числа a, $2a$, b, $2b$ все различны, либо все различны числа a, b, $3a$, $2b$; в том и другом случае из $2b<n$ вытекает, что $(n-1)!$ делится на a^2b^2. Теперь

$$\left[\frac{p^2-1}{p}\right]=p-1 \geqslant 4 \text{ при } p \geqslant 5,$$
$$\left[\frac{2^n-1}{2}\right]+\left[\frac{2^n-1}{4}\right]+\left[\frac{2^n-1}{8}\right]+\ldots=2^n-1-n>2n \text{ при } n \geqslant 4,$$

и, таким образом, вследствие 134 остаются лишь перечисленные случаи.

134. Согласно 82 искомый показатель равен

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots=\sum\left[\frac{n}{p^\nu}\right],$$

где сумма обрывается на l-м члене, для которого $p^l \leqslant n < p^{l+1}$.

135. [E. Lucas, Théorie des nombres, т. 1, стр. 363, Paris, Gauthier-Villars, 1891.] Высшая степень десяти, делящая 1000!, имеет, очевидно, тот же показатель, что и высшая степень пяти. Этот показатель равен [134]

$$\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{25}\right]+\left[\frac{1000}{125}\right]+\left[\frac{1000}{625}\right]=200+40+8+1=249.$$

136. [E. Catalan, Nouv. Ann., серия 2, т. 13, стр. 207, 1874; E. Landau, там же, серия 3, т. 19, стр. 344—362, 1900.] Пусть p — простое число, ν — целое положительное; положим $ap^{-\nu}=a'$, $bp^{-\nu}=b'$. Тогда достаточно [134] доказать, что

$$[2a']+[2b'] \geqslant [a']+[b']+[a'+b'].$$

См. 8.

137. [F. G. Teixeira, C. R., т. 92, стр. 1066, 1881; M. Weill, Bull. S. M. F., т. 9, стр. 172, 1881.] Достаточно [134] доказать, что

$$\left[\frac{hn}{p}\right]+\left[\frac{hn}{p^2}\right]+\ldots \geqslant n\left(\left[\frac{h}{p}\right]+\left[\frac{h}{p^2}\right]+\ldots\right)+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots,$$

где p — простое число.

а) $(h,\ p)=1$; $h \geqslant \left[\frac{h}{p^\nu}\right]p^\nu+1$, следовательно,

$$\left[\frac{nh}{p^\nu}\right] \geqslant n\left[\frac{h}{p^\nu}\right]+\left[\frac{n}{p^\nu}\right] \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

б) $h=p^\alpha h'$, $(h',\ p)=1$. Тогда в левой и правой частях первые α членов отпадают, и утверждение принимает вид

$$\left[\frac{h'n}{p}\right]+\left[\frac{h'n}{p^2}\right]+\ldots \geqslant n\left(\left[\frac{h'}{p}\right]+\left[\frac{h'}{p^2}\right]+\ldots\right)+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots$$

См. а).

138. Пусть $m!=\tau M$, где τ содержит лишь те простые множители, которые входят в t, и $(M,\ t)=1$. Пусть $tt' \equiv 1 \pmod{M}$. Тогда аналогично тому, как в 131,

$$t'^m s(s-t)(s-2t)\ldots[s-(m-1)t] \equiv$$
$$\equiv t's(t's-1)\ldots[t's-(m-1)] \equiv 0 \pmod{M}.$$

139. Согласно 134 и 138

$$\alpha_n=n\alpha+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=\alpha+\frac{1}{p-1}.$$

140. Если $t=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots$, где $p, q, r, \ldots$ — различные простые числа, то $T=p^{\alpha+1}q^{\beta+1}r^{\gamma+1}\ldots$ [139], ибо

$$n\alpha+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots<n\left(\alpha+\frac{1}{p-1}\right)\leqslant n(\alpha+1),$$

$$n\beta+\left[\frac{n}{q}\right]+\left[\frac{n}{q^2}\right]+\ldots<n(\beta+1), \ldots \text{ и т. д.}$$

141. Имеем $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(0)\neq 0$, $P(z)$ и $Q(z)$ — полиномы с целыми коэффициентами [149]. $Q(0)f[zQ(0)]$ можно по сокращении на $Q(0)$ представить в виде отношения двух целочисленных полиномов, причем знаменатель в точке $z=0$ принимает значение 1. См. конец решения 142.

142. Если $f(z)$, $g(z)$ удовлетворяют условию Эйзенштейна, то $f(z)-f(0)$ и $g(z)-g(0)$ можно также одновременно преобразовать в целочисленные ряды подстановкой Tz вместо z, выбирая надлежащим образом целое положительное T.

Если $F(z)$ и $G(z)$ — целочисленные ряды, то целочисленными являются также ряды $F(z)+G(z)$, $F(z)-G(z)$, $F(z)G(z)$ и, наконец, $F[G(z)]$, если $G(0)=0$, и $\frac{F(z)}{G(z)}$, если $G(0)=1$. В самом деле, если

$$G(z)=1-a_1z-a_2z^2-\ldots=1-H(z),$$

где $a_1, a_2, \ldots$ — целые числа, то функция

$$[G(z)]^{-1}=[1-H(z)]^{-1}=1+H(z)+[H(z)]^2+[H(z)]^3+\ldots$$

разлагается в ряд по возрастающим степеням z с целыми коэффициентами.

143. Следует из определения.

144. [См. G. Pólya, Acta Math., т. 42, стр. 314, 1920.] Условия 1), 2) непосредственно вытекают из условия Эйзенштейна. Что они, обратно, имеют его своим следствием, убеждаемся следующим образом. Пусть

$$\frac{\ln t_n}{n}<A \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

и простой множитель p входит в t_n ровно ν_n раз. Тогда

$$\frac{\nu_n}{n}\ln p<A, \quad \frac{\nu_n}{n}<\frac{A}{\ln 2}=B.$$

Обозначая через P произведение простых чисел, входящих в t_1, t_2, t_3, ..., мы можем положить $T=P^k$, где k — целое число, $k>B$. Действительно, каждый множитель p произведения P входит в T^n ровно kn раз, а $kn>\nu_n$ при $n=1, 2, 3, \ldots$

145.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}z^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2^{n^2}}z^n,$$

где $\frac{u_n}{2^{n^2}}=\sum_{t|n}\frac{1}{2^{nt}}$, следовательно, u_n — нечетное. Первый ряд удовлетворяет условию 2), но не 1) [107], второй — условию 1), но не 2); ни один не удовлетворяет полностью условию Эйзенштейна, ни один не представляет алгебраической функции.

146. Полагая

$$(1-z)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad (1-z)^{-\beta+\gamma-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,$$

имеем

$$\frac{\beta-\gamma+1}{1}\cdot\frac{\beta-\gamma+2}{2}\cdots\frac{\beta-1}{\gamma-1}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_{n+\gamma-1}z^n\qquad [140,\ 143].$$

По поводу дальнейших исследований и литературы см. A. Errera, Rend. Palermo, т. 35, стр. 107—144, 1913.

147. Отношение двух последовательных коэффициентов равно $\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$. Если $\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ и $\frac{(\alpha+x)(\beta+x)}{(1+x)(\gamma+x)}$ рационально при $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то $\alpha\beta$, $\alpha+\beta$ и γ — рациональные числа [92].

148. Пусть $a\neq 0$ выбрано так, что $a(\alpha+x)(\beta+x)=ax^2+bx+c$, где a, b и c — целые числа. Если бы $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)$ было алгебраической функцией, то [144, 1] каждое простое число p (за исключением, быть может, конечного их числа) должно было бы быть простым делителем квадратного трехчлена ax^2+bx+c. См., однако, 100.

149. Частный случай теоремы 150.

150. Частный случай теоремы 151.

151. [См. E. Heine, J. für Math., т. 48, стр. 269—271, 1854; Theorie der Kugelfunktionen, 2-е изд., стр. 52—53, Berlin, Reimer, 1878.]

Первое доказательство. Рассмотрим коэффициенты функции R. Если эта функция не равна тождественно нулю, то ее можно представить в форме

$$R_0+\alpha_1R_1+\alpha_2R_2+\ldots+\alpha_lR_l,$$

где R_0, R_1, R_2, $\ldots$, R_l — целые рациональные функции от z, y, y', $\ldots$, $y^{(r)}$ с рациональными коэффициентами и 1, α_1, α_2, $\ldots$, α_l рационально независимы, т. е. из соотношения $n_0+n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\ldots+n_l\alpha_l=0$ с рациональными коэффициентами n_0, n_1,

$n_2, \ldots, n_l$ вытекает, что $n_0 = n_1 = n_2 = \ldots = n_l = 0$. Если в $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_l$ вместо y подставить степенной ряд $a_0 + a_1 z + \ldots \ldots + a_n z^n + \ldots$, то получатся соответственно степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(\nu)} z^n$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, l)$ с рациональными коэффициентами $t_n^{(\nu)}$. Сравнение коэффициентов при z^n даст $t_n^{(0)} + \alpha_1 t_n^{(1)} + \ldots + \alpha_l t_n^{(l)} = 0$, т. е. $t_n^{(0)} = t_n^{(1)} = \ldots = t_n^{(l)} = 0$, так что $\sum_{n=0}^{\infty} t_n^{(\nu)} z^n \equiv 0$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots, l$.

Второе доказательство. Рассмотрим коэффициенты у y. Соотношение $R = 0$ означает, что степенные ряды некоторого конечного числа функций вида $z^{\mu} y^{\nu} (y')^{\nu_1} (y'')^{\nu_2} \ldots (y^{(r)})^{\nu_r}$ линейно зависимы [стр. 118]. Выражаем один из этих степенных рядов линейно через другие, линейно независимые; необходимые для этого постоянные множители в силу системы уравнений (*), приведенной в решении VII 33, составлены из коэффициентов степенного ряда для y рационально и, значит, в нашем случае рациональны.

152. [E. Heine, l. c. **151**, стр. 50.] Дискриминант уравнения l-й степени относительно w

$$F_0(z) w^l + F_1(z) w^{l-1} + \ldots + F_{l-1}(z) w + F_l(z) = 0 \qquad (*)$$

представляет собой целое рациональное выражение относительно $F_0, F_1, \ldots, F_{l-1}, F_l$ и является, следовательно, аналитической функцией, регулярной в некоторой окрестности точки $z = 0$. Если он тождественно равен нулю, то при помощи рациональных операций можно составить уравнение, которому удовлетворяет $f(z)$ и дискриминант которого уже не будет тождественно равен нулю. Предположим поэтому, что уже дискриминант уравнения (*) не равен тождественно нулю. Тогда существует l различных функций $w_1 = f(z), w_2, \ldots, w_l$, регулярных в некотором круговом кольце $0 < |z| < \rho$, $\rho > 0$, возможно, многозначных и удовлетворяющих уравнению (*); в точке $z = 0$ они могут иметь алгебраическую особенность. Если какая-нибудь функция $\varphi(z)$, построенная, как w_λ, обладает тем свойством, что

$$(\varphi(z) - c_0 - c_1 z - \ldots - c_{n-1} z^{n-1}) z^{-n}$$

в окрестности точки $z = 0$ остается ограниченным для произвольно больших значений n, то имеем тождественно $\varphi(z) = f(z)$ [IV 166]. Рассмотрим некоторое значение m, для которого $l - 1$ функция

$$(w_\lambda - c_0 - c_1 z - \ldots - c_{m-1} z^{m-1}) z^{-m} \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, l)$$

является неограниченной в окрестности точки $z = 0$. Полагая в уравнении (*)

$$w = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m y,$$

мы получим уравнение относительно y такого же вида, как и (*); путем деления коэффициентов на некоторую степень z мы можем представить это уравнение в форме

$$G_0(z)\,y^l+G_1(z)\,y^{l-1}+\ldots+G_{l-1}(z)\,y+G_l(z)=0, \qquad (**)$$

где не все числа $G_0(0)$, $G_1(0)$, ..., $G_{l-1}(0)$, $G_l(0)$ равны нулю. Если $G_0(0)=G_1(0)=\ldots=G_{h-1}(0)=0$, $G_h(0)\neq 0$, то уравнение (**) имеет [хотя бы по «подготовительной теореме» Вейерштрасса *)] $l-h$ решений, ограниченных в окрестности точки $z=0$. Но (**) имеет на самом деле лишь одно решение, ограниченное в окрестности точки $z=0$, а именно $c_m+c_{m+1}z+c_{m+2}z^2+\ldots$; следовательно, $l-h=1$, $h=l-1$, ч. и тр. д.

153. [L. с. 151.] Мы можем принять, что $P_0(0)=P_1(0)=\ldots$ $\ldots=P_{l-2}(0)=0$, $P_{l-1}(0)=a\neq 0$ [152], $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_l(z)$ целочисленны, и в $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ $c_0\neq 0$ и целое. Полагая $z=0$, получим $ac_0+P_l(0)=0$, так что $P_l(0)$ делится на a. Следовательно, $a^{-1}P_\lambda(az)$ целочисленно, $\lambda=0, 1, 2, \ldots, l$, и, в частности, $a^{-1}P_{l-1}(0)=1$. Поэтому мы можем положить

$$f(az)=Q_0(z)+Q_2(z)\,[f(az)]^2+\ldots+Q_l(z)\,[f(az)]^l, \qquad (*)$$

где $Q_\lambda(z)=-\dfrac{a^{-1}P_{l-\lambda}(az)}{a^{-1}P_{l-1}(az)}$ снова будет целочисленным [решение 142], $\lambda=0, 2, 3, \ldots, l$ и $Q_\lambda(0)=0$ для $\lambda=2, 3, \ldots, l$. Из тождества (*) путем сравнения коэффициентов получаем, что a^nc_n есть целая рациональная функция от c_0, ac_1, a^2c_2, ..., $a^{n-1}c_{n-1}$ и, значит [рекуррентное заключение], — целое число.

154. Пусть $P(z)$, $Q(z)$, $Q_2(z)$, $Q_3(z)$, ... — рационально-численные степенные ряды, и положим $y=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ Если имеет место одно из шести уравнений

$$y=P(z)+Q(z),\quad y=P(z)-Q(z),\quad y=P(z)\,Q(z),$$
$$y=\frac{P(z)}{Q(z)},\ \text{причем } Q(0)=1\ [142],$$
$$y=P[Q(z)],\ \text{причем } Q(0)=0,$$
$$y=Q(z)+Q_2(z)\,y^2+Q_3(z)\,y^3+\ldots+Q_l(z)\,y^l,\ \text{причем}$$
$$Q_2(0)=Q_3(0)=\ldots=Q_l(0)=0 \qquad [152],$$

то c_n является однозначно определенным рациональным числом, рационально- и ц е л о составленным из коэффициентов при 1, z, z^2, ..., z^n в разложениях функций $P(z)$, $Q(z)$, $Q_2(z)$, ... и, значит, может содержать в знаменателе лишь те простые числа, которые входят в знаменатели указанных коэффициентов. [См. 1. с. 144.]

*) См. Э. Г у р с а, Курс математического анализа, т. 2, гл. XVII, § 355, ОНТИ, 1936, или Б. В. Ш а б а т, Введение в комплексный анализ, ч. II, § 8, «Наука», 1976.

155. [A. Hurwitz; см. G. Pólya, Math. Ann., т. 77, стр. 510—512, 1916.] Пусть p — простое число, входящее во все $c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}$, но не во все a_n, $n=0, 1, 2, \ldots$ Пусть, скажем, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \equiv 0$, $a_k \not\equiv 0 \pmod p$. Из $c_k \equiv a_k b_0 \pmod p$ вытекает тогда, что $b_0 \equiv 0 \pmod p$, из $c_{k+1} \equiv a_k b_1 \equiv 0 \pmod p$ вытекает, что $b_1 \equiv 0 \pmod p$, из $c_{k+2} \equiv a_k b_2 \equiv 0 \pmod p$ вытекает, что $b_2 \equiv 0 \pmod p$, и т. д.

156. [P. Fatou, Acta Math., т. 30, стр. 369, 1906. Приведенное здесь решение принадлежит A. Hurwitz'у, см. G. Pólya, l. c. 155.] Достаточно доказать теорему для примитивных степенных рядов $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ [155]. Согласно 149 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ — целочисленные, с взаимно простыми коэффициентами. Обрывающийся степенной ряд $Q(z)$ примитивен; действительно, если бы его коэффициенты имели общий делитель t, то, вследствие равенства $P(z) = t\frac{Q(z)}{t} f(z)$, t входило бы делителем и в коэффициенты ряда $P(z)$. Определим два целочисленных полинома $p(z)$, $q(z)$ так, чтобы $p(z)P(z) + q(z)Q(z) = m \neq 0$, m — целое. Полагая $q(z) + p(z)f(z) = R(z)$, имеем $m = Q(z)R(z)$. Здесь ряд $R(z)$ — целочисленный и непримитивный, если $m \neq \pm 1$ (в противном случае m было бы [155] также примитивным); его коэффициенты во всех случаях делятся на m. Из равенства $1 = Q(0)\frac{R(0)}{m}$ вытекает, что $Q(0) = \pm 1$.

157. При рациональном θ последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$, начиная с некоторого места, — периодическая и, следовательно, функция $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$ рациональна. При иррациональном θ $f(z)$ не может быть рациональной функцией, ибо тогда [149] она представляла бы собой отношение двух целочисленных полиномов, и следовательно, число $f\left(\frac{1}{10}\right)$ было бы рациональным.

158. [См. E. Landau, Nouv. Ann., серия 4, т. 3, стр. 333—336, 1903; R. Jentzsch, Math. Ann., т. 78, стр. 277, 1918.] То, что функция, представляемая рядом, последовательность коэффициентов которого — периодическая, является рациональной, получается без труда (геометрическая прогрессия). Обратно: пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ могут принимать лишь m различных значений и пусть знаменатель рациональной функции будет равен $1 + l_1 z + l_2 z^2 + \ldots + l_k z^k$. Тогда при достаточно больших n $a_n + l_1 a_{n-1} + l_2 a_{n-2} + \ldots + l_k a_{n-k} = 0$. Так как существует лишь m^k различных комбинаций значений коэффициентов $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, то существуют два числа μ, ν, $\mu < \nu \leqslant \mu + m^k$, таких, что

$$a_{\mu-1} = a_{\nu-1}, \quad a_{\mu-2} = a_{\nu-2}, \quad \ldots, \quad a_{\mu-k} = a_{\nu-k}.$$

Но тогда и $a_\mu = a_\nu$ и, следовательно, также

$$a_{\mu+1} = a_{\nu+1}, \quad a_{\mu+2} = a_{\nu+2}, \ \ldots$$

159. Коэффициенты ряда

$$(1-z)^{-l-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{l+n}{l} z^n$$

являются периодическими по любому простому модулю p. Если $p > l$, то $l!$ — взаимно простое с p, и

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+l) \equiv$$
$$\equiv (n+p+1)(n+p+2)\ldots(n+p+l) \pmod p.$$

Если $p \leqslant l$, $l! = p^a L$, $(L, p) = 1$, то $\binom{n+p^{a+1}}{l} \equiv \binom{n}{l} \pmod p$, ибо символические «числители» этих биномиальных коэффициентов сравнимы $\operatorname{mod} p^{a+1}$. Последовательность коэффициентов в ряде, получаемом при умножении на $P(z)$, начиная с некоторого места — периодическая.

160. $$\frac{(D-1)z}{(1-Dz)(1-z)} = \sum_{n=1}^{\infty} (D^n - 1) z^n.$$

Если k — наименьшее число, для которого $D^{n+k} \equiv D^n \pmod p$, т. е. $D^k \equiv 1 \pmod p$, то k входит множителем в $p-1$.

161. $$(1-Dz^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} D^n z^{2n}.$$

Длина периода k является четным числом, $k = 2k'$; k' есть наименьшее целое положительное число, для которого $D^{k'} \equiv \equiv 1 \pmod p$. Так как $D^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, то k' входит множителем в $p-1$. Далее при нечетном p имеем

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p,$$

если $\left(\frac{D}{p}\right) = 1$, и, значит, тогда k' входит в $\frac{p-1}{2}$; и обратно, если $D^{k'} \equiv 1 \pmod p$ и k' является делителем $\frac{1}{2}(p-1)$, то

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

162.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
Длина периода	3	8	20	16	10	28	36	18	48	14
$p-1$	—	—	—	—	10	—	—	18	—	28
p^2-1	3	8	—	48	—	168	288	—	528	—

Из двух чисел $p-1$ и p^2-1 в этой таблице дано $p-1$, когда $p-1$ есть кратное длины периода, и p^2-1, когда кратным длины периода является p^2-1, но не $p-1$. Имеет ли место первый или второй случай, зависит от того, является ли p квадратичным вычетом $(\mathrm{mod}\, 5)$ или нет. Число 5 составляет исключение. См. A. Speiser, Transact. American M. S., т. 23, стр. 177, 1922.

163. Пусть a_n — коэффициенты интересующего нас разложения. Тогда для достаточно больших n

$$a_n+l_1a_{n-1}+l_2a_{n-2}+\ldots+l_ka_{n-k}=0;$$

$l_1, l_2, \ldots, l_k$ — целые [156]. Так как существуют лишь m^k различных систем $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, не сравнимых по модулю m, то существуют такие два числа μ, ν, что

$$a_{\mu-1}\equiv a_{\nu-1}, \quad a_{\mu-2}\equiv a_{\nu-2}, \ \ldots, \ a_{\mu-k}\equiv a_{\nu-k} \quad (\mathrm{mod}\, m), \qquad \mu\neq\nu.$$

Но тогда также $a_\mu\equiv a_\nu$ и, следовательно, $a_{\mu+1}\equiv a_{\nu+1}, \ldots \ (\mathrm{mod}\, m)$ [158].

164. [G. Pólya, Tôhoku Math. J., т. 22, стр. 79, 1922.] Имеем

$$(1-4z)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2m}{m}z^m.$$

Пусть p — нечетное простое число и p^{r-1} — его высшая степень, входящая в $(2k-1)!$, $k\geqslant 1$, $r\geqslant 1$. Из 134 заключаем, что

$$\binom{2p^r}{p^r}=\frac{(2p^r)!}{p^r!\,p^r!}\not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p).$$

С другой стороны,

$$\binom{2p^r}{p^r}=\frac{2}{1}\,\frac{2p^r-1}{p^r}\,\frac{2p^r-2}{p^r-1}\,\frac{2p^r-3}{p^r-1}\cdots\frac{2p^r-2q+2}{p^r-q+1}\,\frac{2p^r-2q+1}{p^r-q+1}\binom{2(p^r-q)}{p^r-q},$$

$$-2(2q-1)!\binom{2(p^r-q)}{p^r-q}\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p^r), \qquad \binom{2(p^r-q)}{p^r-q}\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p)$$

при $q=1, 2, 3, \ldots, k$. Так как k, а потому и r могут быть сколь угодно большими, то в последовательности коэффициентов, приведенных по модулю p, содержатся сколь угодно длинные конечные последовательности нулей.

165. При $z=1$ общий член не стремится к нулю.

166. [P. Fatou, Acta Math., т. 30, стр. 368—371, 1906.] Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. Тогда ряд $|a_0|^2+|a_1|^2+\ldots+|a_n|^2+\ldots$ должен был бы [III 122] сходиться.

167. [P. Fatou, l. c. 166.] Согласно 150 рассматриваемая алгебраическая функция удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(z)[f(z)]^l+P_1(z)[f(z)]^{l-1}+\ldots+P_{l-1}(z)f(z)+P_l(z)=0,$$

где $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_l(z)$ имеют целые рациональные коэффициенты. Отсюда вытекает, что $y=P_0(z)f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y^l+P_1(z)y^{l-1}+P_2(z)P_0(z)y^{l-2}+\ldots+P_l(z)P_0(z)^{l-1}=0.$$

y не может обращаться в бесконечность ни для какого конечного z, ибо в противном случае y^l в левой части перевешивало бы все остальные слагаемые и уравнение не могло бы удовлетворяться. Однако $y=P_0(z)f(z)$, по предположению, является необрывающимся целочисленным степенным рядом [166].

168. [F. Carlson, Math. Zeitschr., т. 9, стр. 1, 1921.]

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z^l}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}z^{ln},$$

l — произвольно большое целое число.

169. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 23, стр. 289, 1915.] Если все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_{r-1} рациональны, то числа $P(n)-[P(n)]$ — периодические [158]. Пусть теперь не все коэффициенты рациональны, и предположим, что функция $f(z)$, определенная указанным рядом, рациональна. Мы можем принять, что a_0 иррационально; в противном случае рассматриваем

$$\frac{f(z)+f\left(ze^{\frac{2\pi i}{k}}\right)+\ldots+f\left(ze^{(k-1)\frac{2\pi i}{k}}\right)}{k}=\sum_{n=0}^{\infty}[P(kn)]z^{kn},$$

выбирая k так, чтобы a_0k^r было целым и, следовательно,

$$[P(kn)]=a_0k^rn^r+[a_1k^{r-1}n^{r-1}+\ldots].$$

Применяя I 85, получаем

$$\lim_{z\to 1-0}(1-z)^{r+1}f(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{[P(n)]}{\binom{r+n}{r}}=r!a_0,$$

что невозможно, так как [149] предел в левой части должен быть рациональным.

170. [См. D. Hansen, Thèse, стр. 65, Kopenhagen, 1904; G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 161—162, 1918; Proc. Lond. M. S. (2), т. 21, стр. 36—38, 1922.] Что нельзя попросту отказаться от ограничения, наложенного на коэффициенты a_n, показывает 69.

171. [L. c. 170.] См. 71.

172. Имеем $Q_n-Q_{n-1}=1-9A_n$, где A_n есть число нулей в конце десятичного представления числа n. Следовательно,

$$(1-z)\sum_{n=1}^{\infty}Q_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}(Q_n-Q_{n-1})z^n=$$

$$=\frac{z}{1-z}-9\left(\frac{z^{10}}{1-z^{10}}+\frac{z^{100}}{1-z^{100}}+\frac{z^{1000}}{1-z^{1000}}+\ldots\right).$$

Функция

$$f(z)=\frac{z}{1-z}+\frac{z^{10}}{1-z^{10}}+\frac{z^{100}}{1-z^{100}}+\frac{z^{1000}}{1-z^{1000}}+\ldots$$

имеет своей естественной границей окружность $|z|=1$. Действительно, $z=1$ есть особая точка $[\lim\limits_{z\to 1-0} f(z)=+\infty]$, далее также $z=e^{\frac{2\pi i\nu}{10^m}}$, $\nu=1, 2, \ldots, 10^m-1$, является особой точкой, ибо функция, получаемая при отбрасывании первых m членов, переходит в $f(z)$ при замене z^{10^m} на z, тогда как отброшенные члены регулярны в корнях 10^m-й степени из единицы, не являющихся корнями 10^{m-1}-й степени.

173. [G. Pólya, задача; Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 85, 1917. Решение — R. Jentzsch, там же, серия 3, т. 27, стр. 90—91, 1918.] Применение теоремы Адамара о «пропусках» *) к функции $(1-z)\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n z^n$.

174. Дифференцирование заменяет последовательность коэффициентов $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ на $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, интегрирование в указанных пределах — на $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$

175. По поводу умножения см. I 34. Если

$$g(z)=1+\frac{b_1}{1!}z+\frac{b_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{b_n}{n!}z^n+\ldots=1-h(z),$$

то $h(z)$ целочисленно (H), равно как и

$$\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{1-h(z)}=1+h(z)+[h(z)]^2+[h(z)]^3+\ldots$$

176. Если $\frac{[f(z)]^m}{m!}$ целочисленно (H), то то же справедливо [174, 175] и относительно

$$\int_0^z \frac{[f(z)]^m}{m!}f'(z)\,dz=\frac{[f(z)]^{m+1}}{(m+1)!}.$$

177. $g(z)=b_0+\frac{b_1}{1!}z+\frac{b_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{b_m}{m!}z^m+\ldots$

и

$$g[f(z)]=b_0+\frac{b_1}{1!}f(z)+\frac{b_2}{2!}[f(z)]^2+\ldots+\frac{b_m}{m!}[f(z)]^m+\ldots$$

целочисленно (H) на основании **176**.

178. Вообще: если y определяется дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^ny}{dx^n}=P\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

*) Е. Титчмарш, Теория функций, Гостехиздат, 1951, стр. 253.

и начальными условиями $y=m_0$, $y'=m_1$, ..., $y^{(n-1)}=m_{n-1}$ в точке $x=0$, причем P — целая рациональная функция с целыми коэффициентами и m_0, m_1, ..., m_{n-1} — целые числа, то все производные от y целочисленны в точке $x=0$, т. е. y имеет степенной ряд, целочисленный (H). В данном случае

$$\varphi''=-2\varphi^3, \quad \varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=1.$$

179. $(e^z-1)^3=e^{3z}-3e^{2z}+3e^z-1=$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n-3\cdot 2^n+3}{n!}z^n\equiv\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n!}z^n \pmod 4.$$

180.

$$(e^z-1)^{p-1}=z^{p-1}+\ldots\equiv\frac{-1}{(p-1)!}z^{p-1}+\ldots \pmod p=$$

$$=e^{(p-1)z}-\binom{p-1}{1}e^{(p-2)z}+\binom{p-1}{2}e^{(p-3)z}-\ldots-\binom{p-1}{p-2}e^z+1=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p-1)^n-\binom{p-1}{1}(p-2)^n+\binom{p-1}{2}(p-3)^n-\ldots-\binom{p-1}{p-2}}{n!}z^n.$$

В первой строке использована теорема Вильсона $(p-1)!\equiv \equiv -1 \pmod p$. Из третьей строки (где, кстати, предполагается, что $p\geqslant 3$) вытекает, что коэффициенты при $\frac{z^n}{n!}$ — периодические $\bmod p$ с периодом $p-1$, $n=1, 2, 3, \ldots, p-1, p, \ldots$ Теперь еще раз возвращаемся к первой строке.

181. Из 176 и 133 или из I 41 и 133.

182. [Теорема K. G. Ch. v. Staudt'a и Th. Clausen'a. Доказательство см. в J. C. Kluyver, Math. Ann., т. 53, стр. 591—592, 1900.] Из

$$z=\ln[1+(e^z-1)],$$

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{e^z-1}{2}+\frac{(e^z-1)^2}{3}-\frac{(e^z-1)^3}{4}+\ldots$$

вытекает [179—181], что

$$\frac{z}{e^z-1}=g(z)-\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)-$$

$$-\sum_p\frac{1}{p}\left(\frac{z^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{z^{2p-2}}{(2p-2)!}+\frac{z^{3p-3}}{(3p-3)!}+\ldots\right),$$

где $g(z)$ — ряд, целочисленный (H), и сумма $\sum\limits_p$ распространена на все нечетные простые числа $p=3, 5, 7, 11, \ldots$

183.
$$\frac{dz}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^4}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{\varphi^{4n}}{2^{2n}},$$
$$\frac{z}{\varphi(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{(4n)!}{2^{2n}(4n+1)}\frac{[\varphi(z)]^{4n}}{(4n)!};$$

$(4n)!$ делится на 2^{2n} [134], а также на $4n+1$, если $4n+1$ не есть простое число [133]; $\frac{[\varphi(z)]^{4n}}{(4n)!}$ целочисленно (H) [178, 176].

184. Из дифференциального уравнения задачи **178** получаем
$$\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)\right]^2=4\frac{1}{\varphi^6}-4\frac{1}{\varphi^2},$$
следовательно, $\frac{1}{\varphi^2}=\wp$; далее
$$\frac{dz^2}{d\varphi}=\frac{2z}{\sqrt{1-\varphi^4}},\quad (1-\varphi^4)\frac{d^2z^2}{d\varphi^2}-2\varphi^3\frac{dz^2}{d\varphi}=2.$$

В качестве интеграла z^2, удовлетворяющего при $\varphi=0$ начальным условиям $z^2=\frac{dz^2}{d\varphi}=0$, находим
$$z^2=\varphi^2+\frac{3}{5}\frac{\varphi^6}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{\varphi^{10}}{5}+\frac{3}{5}\frac{7}{9}\frac{11}{13}\frac{\varphi^{14}}{7}+\ldots,$$
$$z^2\wp(z)=\left(\frac{z}{\varphi(z)}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{G_nH_n}{(4n+1)(2n+1)}\frac{[\varphi(z)]^{4n}}{(4n)!},$$

$G_n=3\cdot7\cdot11\ldots(4n-1)$, $H_n=2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\ldots(4n-2)(4n-1)4n$. Если $2n+1\equiv-1\pmod 4$, то $2n+1$ входит множителем в G_n. Пусть $2n+1\equiv1\pmod 4$ и $2n+1=ab$, $a>1$, $b>1$; если $a\equiv b\equiv-1\pmod 4$, то числа a и b входят множителями в G_n и H_n и, следовательно, ab входит в G_nH_n; если же $a\equiv b\equiv1\pmod 4$, то среди множителей числа H_n содержатся как $2a$, так и $4b$. Поэтому $2n+1$ лишь тогда не входит в G_nH_n, когда оно является простым числом и $\equiv1\pmod 4$; то же имеет место и для $4n+1$. Впрочем, $2n+1$ и $4n+1$ — взаимно простые, следовательно, если они оба в отдельности входят в G_nH_n, то входит и их произведение. Более глубокие и точные результаты см. у A. Hurwitz'a, l. c., стр. 145.

185. [Дальнейшее у M. Fujiwara, Tôhoku Math. J., т. 2, стр. 57, 1912.] Степенной ряд
$$a_0+\frac{a_1}{1!}z+\frac{a_2}{2!}z^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}z^n+\ldots$$

тогда и только тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению указанного вида, когда $a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$ является рациональной функцией. И то и другое связано с одним и тем же рекуррентным соотношением между коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots$ См. 163.

186. [G. Pólya, Tôhoku Math. J., т. 22, стр. 79, 1922.] См. 164; y удовлетворяет [I 48] дифференциальному уравнению

$$xy''+(1-4x)y'-2y=0.$$

187. [S. Kakeya, Tôhoku Math. J., т. 10, стр. 70, 1916; G. Pólya, там же, т. 19, стр. 65, 1921.] Если

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n \text{ и } a_n\neq 0,$$

то

$$|a_n|\geqslant 1,\ M(n)\geqslant\frac{|a_n|}{n!}n^n\geqslant\frac{n^n}{n!}\sim\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Равенство достигается, например, для функции

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n}}{(2^n)!}.$$

188. [Th. Skolem, Videnskapsselskapets Skrifter, 1921, № 17, теорема 8.] Пусть g — общий знаменатель рациональных чисел b_1, $b_2, \ldots, b_m$. Тогда ряд

$$gb_0+\frac{gb_{-1}}{z}+\frac{gb_{-2}}{z^2}+\ldots=gb_0+r(z)$$

также принимает целые значения в рассматриваемом бесконечном множестве целых значений z. Так как $\lim\limits_{z\to\infty} r(z)=0$, то gb_0 должно быть сколь угодно близким к целым числам, т. е. должно быть целым. Поэтому также $r(z)$ принимает целые значения для бесконечного множества целых z, и так как $\lim\limits_{z\to\infty} r(z)=0$, то $r(z)=0$ для бесконечного множества целых z, откуда $r(z)\equiv 0$, ибо функция $r(z^{-1})$ регулярна в некотором замкнутом круге с центром $z=0$, равна нулю в бесконечном множестве точек этого круга и, следовательно, тождественно равна нулю.

189. Уравнение $y^2-2z^2=1$ имеет бесчисленное множество решений в целых числах, как это явствует из формул

$$(3+2\sqrt{2})^n=y_n+z_n\sqrt{2},\qquad (3-2\sqrt{2})^n=y_n-z_n\sqrt{2},$$
$$(9-8)^n=y_n^2-2z_n^2$$

(y_n, z_n — целые, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$).

190. [J. Franel, Interméd. des math., т. 2, стр. 94, 1895.] Если целозначный и, следовательно, рационально-численный полином

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

при всех достаточно больших целых x принимает значения, равные k-м степеням целых чисел, и, однако, сам не является k-й степенью некоторого полинома, то теми же двумя свойствами обладает и полином

$$P(x+l_1)P(x+l_2)\ldots P(x+l_k)=a_0^kx^{nk}+b_1x^{nk-1}+\ldots,$$

где целые числа $l_1, l_2, \ldots, l_k$ выбраны так, что $P(x+l_1), P(x+l_2), \ldots$ $\ldots, P(x+l_k)$ не имеют общих нулей; пусть $l_1<l_2<\ldots<l_k$ и разности $l_2-l_1, l_3-l_2, \ldots, l_k-l_{k-1}$ достаточно велики. Но тогда рационально-численный степенной ряд

$$\sqrt[k]{P(x+l_1)P(x+l_2)\ldots P(x+l_k)}=$$
$$=a_0x^n\sqrt[k]{1+\frac{b_1}{a_0^k}\frac{1}{x}+\ldots}=a_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\ldots$$

принимает целые значения для всех достаточно больших целых x, не являясь сам рациональной функцией, что противоречит теореме 188.

191. [Доказательство H. Prüfer'a. Дальнейшие результаты см. 1. с. 188.] Если коэффициенты $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1$ все рациональны, то применяем 188. В противном случае мы можем принять, что b_m иррационально. (Если бы $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_{m-k+1}$ были рациональны, имея общим знаменателем g, тогда как b_{m-k} было бы уже иррациональным, $k\geqslant 1$, то мы рассмотрели бы

$$g[F(z)-b_mz^m-b_{m-1}z^{m-1}-\ldots-b_{m-k+1}z^{m-k+1}].)$$

m-я разность

$$F(z+m)-\binom{m}{1}F(z+m-1)+\binom{m}{2}F(z+m-2)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^mF(z)=m!b_m+\frac{b'_{-1}}{z}+\frac{b'_{-2}}{z^2}+\ldots$$

также целозначна при достаточно больших целых z, а отсюда согласно 188 вытекает, что b_m рационально, в противоречие с предположением.

192. [G. Pólya, задача, Deutsche Math.-Ver., т. 32, стр. *16*, 1923. Решение — T. Radó, там же, т. 33, стр. *30*, 1924.] По поводу доказательства по методу 188, **191** см. **193**. Пусть $f(z)$, $g(z)$ — рассматриваемые полиномы. Целые функции

$$e^{2\pi i f(z)}-1,\quad e^{2\pi i g(z)}-1$$

обладают одинаковыми нулями, быть может, только различной кратности. Их кратные нули содержатся соответственно среди нулей полиномов $f'(z)$, $g'(z)$. Поэтому функция

$$g'(z)\frac{e^{2\pi i f(z)}-1}{e^{2\pi i g(z)}-1}$$

является целой и имеет лишь конечное число нулей, притом она конечного рода. Следовательно, она равна $k(z)e^{h(z)}$, где $k(z)$, $h(z)$ — полиномы. Из тождества

$$g'(z)e^{2\pi i f(z)}-g'(z)=k(z)e^{h(z)+2\pi i g(z)}-k(z)e^{h(z)}$$

следует, что одна из функций $h(z)+2\pi i g(z)$, $h(z)$ равна const., другая равна $2\pi i f(z)+\text{const}$. [См. G. Pólya, Nyt Tidsskr. for Math. (B), т. 32, стр. 21, 1921.]

193. [G. Pick, задача, Deutsche Math.-Ver., т. 32, стр. *45*, 1923. Решение — G. Szegö, там же, т. *33*, стр. 31, 1924.] Пусть m — степень полинома $y=f(x)$ и n — степень полинома $z=g(x)$. Тогда при достаточно больших $|y|$ имеем

$$x=a_1y^{\frac{1}{m}}+a_0+\frac{a_{-1}}{y^{\frac{1}{m}}}+\frac{a_{-2}}{y^{\frac{2}{m}}}+\ldots,$$

$$z=b_ny^{\frac{n}{m}}+b_{n-1}y^{\frac{n-1}{m}}+\ldots+b_0+\frac{b_{-1}}{y^{\frac{1}{m}}}+\frac{b_{-2}}{y^{\frac{2}{m}}}+\ldots,$$

где для $y^{\frac{1}{m}}$ могут быть взяты все m ветвей.

Согласно предположению ряды Лорана

$$\sum_{k=-\infty}^{n} b_k e^{i\frac{2\nu}{m}k\pi}Y_1^k \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m-1), \tag{1}$$

равно как и ряды Лорана

$$\sum_{k=-\infty}^{n} b_k e^{i\frac{2\nu+1}{m}k\pi}Y_2^k \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,m-1), \tag{2}$$

принимают вещественные значения, когда Y_1 и Y_2 пробегают каждое некоторую последовательность положительных чисел, имеющую пределом бесконечность, т. е. числа

$$b_k e^{i\frac{2\nu}{m}k\pi}, \qquad b_k e^{i\frac{2\nu+1}{m}k\pi} \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots,m-1)$$

— вещественные, следовательно, $b_k=0$, когда k не делится на m. [В случае нечетных m достаточно рассмотреть лишь ряды (1).]

Поэтому $g(x)=\varphi(y)+P(y^{-1})$, где $\varphi(y)$ — некоторый полином относительно y, $P(y^{-1})$ — степенной ряд без свободного члена, оба с вещественными коэффициентами. Значит, полином $g(x)-\varphi[f(x)]$ при $x\to\infty$ стремится к нулю, т. е. $g(x)-\varphi[f(x)]\equiv 0$. В предположениях задачи **192** функция, обратная по отношению к полиному $\varphi(y)$, также должна быть полиномом. Поэтому $\varphi(y)$ будет первой степени. Кроме того, как $\varphi(y)$, так и обратная функция должны быть целозначны.

194. Из

$$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$$

следует

$$(\sqrt{\alpha})^{2n}+a_1(\sqrt{\alpha})^{2n-2}+\ldots+a_{n-1}(\sqrt{\alpha})^2+a_n=0.$$

195. Случай $s=0$ тривиален; пусть, стало быть, $s\neq 0$. Если $r+s\sqrt{-1}$ удовлетворяет уравнению с целыми рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом 1, то этому же уравнению удовлетворяет и сопряженное комплексное число $r-s\sqrt{-1}$; значит, оно — также целое. Поэтому целыми являются и числа

$$(r+s\sqrt{-1})+(r-s\sqrt{-1}),\qquad (r+s\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1});$$

они, кроме того, рациональны. Коэффициенты полинома

$$(x-r-s\sqrt{-1})(x-r+s\sqrt{-1})=x^2-2rx+r^2+s^2$$

являются поэтому обыкновенными целыми числами. Так как r^2+s^2, $2r$ — целые, то целые также $4(r^2+s^2)$, $2s$. Положим $2r=a$, $2s=b$. Сравнение $a^2+b^2=4(r^2+s^2)\equiv 0 \pmod 4$ не может иметь места в следующих трех случаях:

$$a\equiv 1,\ b\equiv 1;\quad a\equiv 1,\ b\equiv 0;\quad a\equiv 0,\ b\equiv 1 \pmod 2.$$

Поэтому должно быть $a\equiv b\equiv 0 \pmod 2$, т. е. $r=\frac{a}{2}$, $s=\frac{b}{2}$ — целые.

196. Как в **195**, получаем, что коэффициенты полинома

$$(x-r-s\sqrt{-5})(x-r+s\sqrt{-5}),$$

т. е. $2r$ и r^2+5s^2, а значит, также $5(2s)^2=4(r^2+5s^2)-(2r)^2$, — целые. Если бы, однако, рациональное число $2s$ не было целым, то в знаменатель числа $(2s)^2$ входил бы квадрат простого числа, и он не мог бы сократиться с 5. Следовательно, $2s=b$ — целое, точно так же $2r=a$ — целое. Дальше заключаем, как в **195**, исходя из сравнений

$$a^2+b^2\equiv a^2+5b^2\equiv 4(r^2+5s^2)\equiv 0 \pmod 4.$$

197. Как в **195**, **196**, получаем, что $2r$ и r^2+3s^2, а значит, также $2r=a$, $2s=b$ — целые. Что $a\equiv b \pmod 2$, показывают сравнения

$$(a+b)(a-b)\equiv a^2+3b^2\equiv 4(r^2+3s^2)\equiv 0 \pmod 4.$$

$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ является целым числом, как нуль полинома x^2+x+1.

198. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — сопряженные целые числа, $|\alpha_\nu|<k$ при $\nu=1, 2, \ldots, n$, и

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Тогда $|a_\nu|<\binom{n}{\nu}k^\nu$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. Таким образом, существует лишь ограниченное число систем возможных значений целых рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

199. Сохраняем обозначения решения 198. Согласно предположению $|a_n|=|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n|<1$, следовательно, $a_n=0$. Единственным неприводимым полиномом со старшим коэффициентом 1 и без свободного члена является x.

200. [L. Kronecker, Werke, т. 1, стр. 105, Leipzig, B. G. Teubner, 1895.] Пусть интересующий нас полином будет $F(x)$, и его нули (с учетом кратности) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Положим

$$(x-\alpha_1^h)(x-\alpha_2^h)\ldots(x-\alpha_n^h)=F_h(x),$$

$h=1, 2, \ldots$; $F_1(x)=F(x)$; $F_h(x)$ имеет целые рациональные коэффициенты. В бесконечной последовательности $F_1(x), F_2(x), \ldots$ $\ldots, F_h(x), \ldots$ содержится лишь конечное число различных полиномов [198]. Если $F_h(x)\equiv F_k(x)$, $1\leqslant h<k$, то системы $\alpha_1^h, \alpha_2^h, \ldots$ $\ldots, \alpha_n^h$ и $\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k$ совпадают с точностью до порядка. Если $\alpha_1^h=\alpha_1^k$, то все, что нужно, уже доказано. Пусть при надлежащей нумерации

$$\alpha_1^h=\alpha_2^k,\ \alpha_2^h=\alpha_3^k, \ldots, \alpha_{l-1}^h=\alpha_l^k,\ \alpha_l^h=\alpha_1^k.$$

Тогда

$$\alpha_1^{h^l}=\alpha_2^{kh^{l-1}}=\alpha_3^{k^2h^{l-2}}=\ldots=\alpha_{l-1}^{k^{l-2}h^2}=\alpha_l^{k^{l-1}h}=\alpha_1^{k^l}.$$

201. Уравнение $x^2-\alpha x+1$ имеет, по предположению, два комплексных корня с модулем 1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — рассматриваемые сопряженные числа, $\alpha_1=\alpha$. Полином

$$(x^2-\alpha_1x+1)(x^2-\alpha_2x+1)\ldots(x^2-\alpha_nx+1)$$

имеет целые рациональные коэффициенты, и все его нули имеют модуль 1, т. е. суть корни из единицы [200]. Пусть корень из единицы, обращающий в нуль первый множитель, будет $e^{\frac{2\pi ip}{q}}$; имеем

$$e^{\frac{4\pi ip}{q}}-\alpha e^{\frac{2\pi ip}{q}}+1=0.$$

202. Числа поля, порожденного числом ϑ второй степени, имеют вид $r+s\vartheta$, где r, s рациональны [Hecke, теорема 53, стр. 68*)]. Ср. 195—197. Равенство

$$\sqrt{-3}=a+b\sqrt{-5}$$

с рациональными a и b не может иметь места, так как из него вытекало бы $a=0$, $b=\sqrt{\frac{3}{5}}$, а этот последний квадратный корень, как известно, иррационален. То же рассуждение показывает, что все три поля различны.

203. [G. Pólya, Proc. Lond. M. S. (2), т. 21, стр. 27, 1921.] Если мы предварительно оставим в стороне требование относительно $\zeta'\zeta''$, то, как известно [Hurwitz-Courant, стр. 134—138**)], для $\mathfrak{M}$ имеются лишь следующие две возможности:

а) $\mathfrak{M}$ состоит из чисел nA, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

б) $\mathfrak{M}$ состоит из чисел $mA+nB$, $A\neq 0$, $\frac{B}{A}$ не вещественно, $m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Если мы теперь присовокупим еще требование относительно $\zeta'\zeta''$, то в случае а) будем иметь $A^2=nA$, т. е. если $A\neq 0$, то $A=n$, где n — некоторое целое рациональное число. В случае б) имеем

$$AB=lA+l'B, \quad B^2=mA+m'B, \quad AB^2=nA+n'B,$$

l, l', m, m', n, n' — целые рациональные. Исключая из этих трех линейных уравнений $1, B, B^2$, получаем

$$mA^2+(lm'-l'm-n)A=ln'-l'n.$$

$ln'-l'n$ принадлежит, стало быть, $\mathfrak{M}$; если $ln'-l'n=0$, то $lm'-l'm-n$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Если, далее, и это число равно нулю, то $m=0$, $m'=B\neq 0$, и m' принадлежит $\mathfrak{M}$. Во всех случаях $\mathfrak{M}$ содержит целые рациональные числа помимо нуля. Если $R=rA+r'B$ есть наименьшее из них по абсолютной величине, то r и r' — взаимно простые. Пусть s, s' — целые рациональные числа, такие, что $rs'-r's=1$. Тогда $S=sA+s'B$ есть число из множества $\mathfrak{M}$, а каждое число этого множества может быть представлено в форме $pR+qS$, $p, q=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; S во всяком случае не вещественно. Имеем

$$S^2=pR+qS.$$

204. Из $3=(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})$ следует

$$9=(a^2+5b^2)(c^2+5d^2).$$

---

*) Гекке, стр. 72.

**) Гурвиц, стр. 196—202. Гурвиц—Курант, стр. 149—155.

Значит, возможны лишь случаи

$$a^2+5b^2=1,\ 3,\ 9,$$

т. е.

$$a,\ b=\pm 1,\ 0;\quad \pm 2,\quad \pm 1;\quad \pm 3,\ 0.$$

Второй из них исключается, ибо в этом случае было бы $c^2+5d^2=1$, а $3\neq\pm 2\pm\sqrt{-5}$. Число 3 имеет лишь делители ± 1 и ± 3. Точно так же получаем, что $1+2\sqrt{-5}$ имеет лишь делители ± 1 и $\pm(1+2\sqrt{-5})$. Таким образом, наибольшим общим делителем могло бы быть лишь число 1. Однако равенство

$$3(d+D\sqrt{-5})+(1+2\sqrt{-5})(c+C\sqrt{-5})=1$$

невозможно, так как из равенств

$$\begin{aligned} 3d+\ c-10C&=1,\\ 3D+2c+\ \ C&=0 \end{aligned}$$

вытекало бы $3(-2d+D+7C)=-2$, что несовместимо с целостью чисел d, D, C.

205. В поле содержатся следующие делители числа 9: 1, 3, 9, $2+\sqrt{-5}$, $2-\sqrt{-5}$ [204]. На основании **196** находим, что $-19+4\sqrt{-5}$ не делится лишь на 3, 9 и $2-\sqrt{-5}$, тогда как на $2+\sqrt{-5}$ делится:

$$-19+4\sqrt{-5}=(2+\sqrt{-5})(-2+3\sqrt{-5}).$$

Постараемся теперь определить $\xi=x+u\sqrt{-5}$ и $\eta=y+v\sqrt{-5}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$9\xi+(-19+4\sqrt{-5})\eta=2+\sqrt{-5}.$$

Последовательные преобразования дают

$$(2-\sqrt{-5})\xi+(-2+3\sqrt{-5})\eta=1,$$

$$2x+5u-2y-15v=1,\qquad -x+2u+3y-2v=0,$$

$$x=2u+3y-2v,\qquad 9u+4y-19v=1.$$

Так как наибольший общий делитель чисел 9, 4, 19 действительно равен единице, то задача разрешима; например, можно взять $u=1$, $y=-2$, $v=0$, $x=-4$:

$$9(-4+\sqrt{-5})-(-19+4\sqrt{-5})2=2+\sqrt{-5},$$

$$9=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}),$$

$$-19+4\sqrt{-5}=(2+\sqrt{-5})(-2+3\sqrt{-5}).$$

206. Принимая во внимание **194** и три последних равенства в решении 205, получаем

$$3\sqrt{\frac{9}{2+\sqrt{-5}}}(-4+\sqrt{-5})-$$
$$-(1+2\sqrt{-5})\sqrt{\frac{-19+4\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-5}}}\cdot 2=\sqrt{2+\sqrt{-5}},$$
$$3=\sqrt{2+\sqrt{-5}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{-5}},$$
$$1+2\sqrt{-5}=\sqrt{2+\sqrt{-5}}\cdot\sqrt{-2+3\sqrt{-5}}.$$

Наибольший общий делитель чисел 3 и $1+2\sqrt{-5}$ равен, таким образом, $\sqrt{2+\sqrt{-5}}$.

207. Из равенств $\alpha_1=\gamma_1\delta$, $\alpha_2=\gamma_2\delta$, $\ldots$, $\alpha_m=\gamma_m\delta$ и

$$\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_m\lambda_m=\vartheta$$

(определение наибольшего общего делителя) вытекает

$$\vartheta=(\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2+\ldots+\gamma_m\lambda_m)\,\delta.$$

208. Оба частных $\frac{\vartheta}{\vartheta'}$ и $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$ являются целыми [207] и, следовательно, делителями единицы, так как $\frac{\vartheta}{\vartheta'}\cdot\frac{\vartheta'}{\vartheta}=1$.

209. Умножаем все $m+1$ равенства в определении наибольшего общего делителя (стр. 165) на γ.

210. Равенство $\alpha\alpha'+\beta\gamma\beta'=1$ можно переписать также в виде $\alpha\alpha'+\beta(\beta'\gamma)=1$ или же $\alpha\alpha'+\gamma(\beta\beta')=1$.

211. Частный случай теоремы 212.

212. Наибольший общий делитель δ чисел α и γ входит делителем и в $\beta\gamma$. Из равенств

$$\beta\beta'=1+\alpha\alpha',\quad \gamma\gamma'=\delta+\alpha x''$$

вытекает

$$\beta\gamma(\beta'\gamma')=\delta+\alpha(\alpha'\delta+\alpha''+\alpha x'\alpha'').$$

213. $\frac{\alpha}{\delta}$ и $\frac{\beta}{\delta}$ — взаимно простые [определение!, см. также **209**], поэтому [211] взаимно просты также $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n$, $\left(\frac{\beta}{\delta}\right)^n$; следовательно, δ^n является наибольшим общим делителем чисел α^n, β^n [209].

214. $\sqrt[n]{\alpha}$ является целым числом; см. 194. Из равенств $\alpha=x'\delta$, $\beta=\beta'\delta$, $\alpha\alpha''+\beta\beta''=\delta$ получаем

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{\alpha'}\sqrt[n]{\delta},\quad \sqrt[n]{\beta}=\sqrt[n]{\beta'}\sqrt[n]{\delta},$$
$$\sqrt[n]{\alpha}\left(\sqrt[n]{\alpha'}\right)^{n-1}\alpha''+\sqrt[n]{\beta}\left(\sqrt[n]{\beta'}\right)^{n-1}\beta''=\sqrt[n]{\delta}.$$

215. При $m=2$ очевидно. Проводим математическую индукцию от m к $m+1$. Пусть

$$\frac{\mu}{\alpha_1}\lambda_1+\frac{\mu}{\alpha_2}\lambda_2+\ldots+\frac{\mu}{\alpha_m}\lambda_m=1$$

и α_{m+1} взаимно просто с каждым из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Тогда α_{m+1} взаимно просто также с $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$ [211]. Подставляем в $\lambda\alpha_{m+1}+\lambda'\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m=1$ значение

$$\alpha_{m+1}=\frac{\mu\alpha_{m+1}}{\alpha_1}\lambda_1+\frac{\mu\alpha_{m+1}}{\alpha_2}\lambda_2+\ldots+\frac{\mu\alpha_{m+1}}{\alpha_m}\lambda_m.$$

216. Всякое целое число $\alpha\neq 0$ удовлетворяет уравнению вида

$$a_n=-\alpha(a_{n-1}+a_{n-2}\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые рациональные и $a_n\neq 0$. Пусть p — рациональное простое число, не входящее в a_n. Подставляем в

$$a_nu+pv=1$$

значение a_n из уравнения, определяющего α.

217. [D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Deutsche Math.-Ver., т. 4, стр. 218, 1897.] Из $a_\nu^N=d^\nu b_\nu^\nu$, где b_ν — целое рациональное, вытекает, что $a_\nu=\delta^\nu\beta_\nu$, где β_ν — целое. Пусть α — любое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда

$$\alpha^n+\delta\beta_1\alpha^{n-1}+\delta^2\beta_2\alpha^{n-2}+\ldots+\delta^n\beta_n=0,$$
$$\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n+\beta_1\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n-1}+\beta_2\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n-2}+\ldots+\beta_n=0$$

и, следовательно, $\frac{\alpha}{\delta}$ — целое [Hecke, стр. 79, теорема 62 *)]. С другой стороны, так как $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые рациональные числа, то существуют такие целые рациональные числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что

$$c_1a_1^N+c_2a_2^{\frac{N}{2}}+c_3a_3^{\frac{N}{3}}+\ldots+c_na_n^{\frac{N}{n}}=d.$$

Но $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являются однородными функциями от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$. Поэтому

$$c_1a_1^N+c_2a_2^{\frac{N}{2}}+c_3a_3^{\frac{N}{3}}+\ldots+c_na_n^{\frac{N}{n}}=\sum C_{k_1k_2\ldots k_n}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n},$$

где $C_{k_1k_2\ldots k_n}$ — целые рациональные числа, $k_1+k_2+\ldots+k_n=N$. Деля обе части равенства

$$\sum C_{k_1k_2\ldots k_n}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}=\delta^{N-1}\delta$$

*) Гекке, стр. 83.

на δ^{N-1} и принимая во внимание, что δ входит множителем в α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, получаем

$$\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\ldots+\alpha_n\gamma_n=\delta,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — целые числа. См. также **214**.

218. Из $\beta=\alpha\gamma$ получаем аналогичные равенства для сопряженных чисел. Перемножение их дает $N(\beta)=N(\alpha)N(\gamma)$.

219. [G. Rabinowitsch, J. für Math., т. 142, стр. 153—164, 1913.] Необходимость: если наибольший общий делитель ϑ чисел α и β существует, т. е. если

$$\alpha=\alpha'\vartheta, \quad \beta=\beta'\vartheta, \quad \alpha\gamma+\beta\delta=\vartheta,$$

причем α' и β' — не единицы, то $|N(\alpha')|>1$, $|N(\beta')|>1$, и так как $N(\alpha)=N(\alpha')N(\vartheta)$, $N(\beta)=N(\beta')N(\vartheta)$, то, следовательно, $0<|N(\vartheta)|=|N(\alpha\gamma+\beta\delta)|<|N(\alpha)|$ и также $<|N(\beta)|$.

Достаточность: пусть ξ и η пробегают всевозможные пары принадлежащих полю целых чисел, для которых линейная форма $\alpha\xi+\beta\eta$ отлична от нуля. Среди всех получаемых при этом целых рациональных положительных чисел $|N(\alpha\xi+\beta\eta)|$ будет иметься наименьшее, скажем, $|N(\alpha\xi_0+\beta\eta_0)|$. Положим $\alpha\xi_0+\beta\eta_0=\vartheta$, следовательно, $\vartheta\neq 0$. Здесь нужно различать два случая:

1) α — делитель ϑ; полагая $\vartheta=\vartheta'\alpha$, будем иметь $|N(\vartheta)|=$ $=|N(\vartheta')||N(\alpha)|\geqslant|N(\alpha)|$. Но, с другой стороны, по самому выбору числа ϑ, $|N(\vartheta)|\leqslant|N(1\cdot\alpha+0\cdot\beta)|=|N(\alpha)|$. Значит, $|N(\vartheta)|=|N(\alpha)|$, $N(\vartheta')=\pm 1$, т. е. ϑ' есть единица и ϑ в свою очередь является делителем числа α.

2) α не есть делитель ϑ. Если бы и ϑ не было делителем α, то мы могли бы в силу требования теоремы определить ξ и η так, чтобы было $0<|N(\alpha\xi+\vartheta\eta)|<|N(\vartheta)|$; но это противоречит выбору числа ϑ, ибо $\alpha\xi+\vartheta\eta=\alpha(\xi+\eta\xi_0)+\beta\eta\eta_0$ также является числом семейства, из которого было выбрано $\vartheta=\alpha\xi_0+\beta\eta_0$. Таким образом, в обоих случаях ϑ является делителем α и на том же основании делителем β. Следовательно, ϑ есть наибольший общий делитель.

220. Пусть α, β — целые числа поля, не делящиеся друг на друга, и $N(\beta)\leqslant N(\alpha)$. $\frac{\alpha}{\beta}$ есть число поля, однако не целое; поэтому $\frac{\alpha}{\beta}=r+s\sqrt{-1}$, где r, s рациональны, однако не одновременно целые [202]. Определим два целых рациональных числа R и S так, чтобы $|r-R|\leqslant\frac{1}{2}$, $|s-S|\leqslant\frac{1}{2}$. $r-R$, $s-S$ не равны одновременно нулю, поэтому, полагая $\gamma=r-R+(s-S)\sqrt{-1}$, будем иметь

$$0<N(\gamma)=(r-R)^2+(s-S)^2\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

Положим $\alpha-\beta(R+S\sqrt{-1})=\delta$; согласно своему определению δ — целое. С другой стороны,

$$\delta=\beta\left(r+s\sqrt{-1}-(R+S\sqrt{-1})\right)=\beta\gamma;$$

следовательно,

$$N(\delta)=N(\gamma)\,N(\beta)\leqslant\frac{1}{2}N(\beta)\leqslant\frac{1}{2}N(\alpha).$$

При $\xi=1$, $\eta=-R-S\sqrt{-1}$ требование теоремы **219** выполняется.

221. Как в теории целых рациональных чисел.

222. Как в теории целых рациональных чисел.

223. Из $\alpha\alpha_1+\mu\mu_1=1$, $\alpha\equiv 0 \pmod{\mu}$ вытекает $1\equiv\alpha\alpha_1\equiv 0 \pmod{\mu}$, т. е. μ есть делитель числа 1.

224. Повторно применяем сравнение

$$(\beta+\gamma)^p=\beta^p+p\beta^{p-1}\gamma+\frac{p(p-1)}{2}\beta^{p-2}\gamma^2+\ldots+\gamma^p\equiv\beta^p+\gamma^p \pmod{p},$$

очевидно, выполняющееся для любых двух целых чисел β, γ.

225. [G. Pólya, J. für Math., т. 151, стр. 7, 1921.] Обозначим определитель $|\omega_l^k|_{k,\,l=1,\,2,\ldots,\,m}$ через Δ. Пусть p — рациональное простое число, взаимно простое как с α_1, так и с Δ [**216**]. Тогда m сравнений

$$\alpha_1\omega_1^{rp}+\alpha_2\omega_2^{rp}+\ldots+\alpha_m\omega_m^{rp}\equiv 0 \pmod{p} \qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ m)$$

не могут одновременно выполняться. Действительно, из их одновременного выполнения вытекало бы [**222, 224**], что

$$\alpha_1\,|\,\omega_l^{kp}\,|\equiv\alpha_1\Delta^p\equiv 0 \pmod{p},$$

тогда как, с другой стороны, $\alpha_1\Delta^p$ взаимно просто с p [**211**]; одно другому противоречит [**223**].

226. [См. I. с. **227**.] Решение см. на стр. 168—169.

227. [F. Mertens, Wien. Ber., т. 117, стр. 689—690, 1908. См. K. Grandjot, Math. Zeitschr., т. 19, стр. 128—129, 1924.] Обозначения — те же, что и на стр. 168—169. Пусть P будет произведение всех простых чисел, не превосходящих 2^h, t — наибольший делитель P, взаимно простой с m, r — произвольное число, взаимно простое с m. Пусть, кроме того, y есть совместное решение сравнений

$$y\equiv r \pmod{m}, \qquad y\equiv 1 \pmod{t}.$$

y взаимно просто с m и t, следовательно, с P и содержит, таким образом, лишь простые множители, бо́льшие, чем 2^h.

Методом решения задачи **226** находим, что для простого множителя p числа y будет $f(\alpha^p)=0$. Если $y>p$, то те же рассуждения повторяем для произвольного простого множителя q числа $\frac{y}{p}$; получаем $f(\alpha^{pq})=0$. Продолжая так далее, получаем, наконец,

$$f(\alpha^y)=f(\alpha^r)=0,$$

следовательно, $f(x)$ имеет своими нулями все числа $\alpha^{r_1}, \alpha^{r_2}, \ldots, \alpha^{r_h}$, и потому $f(x) \equiv K_m(x)$.

228. Рассматриваемая рациональная функция представляет собой отношение двух рационально-численных полиномов [149], причем как первый, так и последний не равный нулю коэффициент знаменателя равен ± 1 [156].

229. [P. Fatou, C. R., т. 138, стр. 342—344, 1904.] Вследствие сходимости в единичном круге модули всех полюсов $\geqslant 1$. В силу 156 произведение этих модулей $\leqslant 1$, следовательно, все они равны единице, и старший коэффициент знаменателя равен ± 1. Теперь утверждение вытекает из **200**. **157** представляет частный случай.

230. В силу 235 или также на основании непосредственных соображений, аналогичных 149, рассматриваемая функция представляет собой отношение двух полиномов, коэффициентами которых служат целые алгебраические числа; конечному полю K, в котором содержатся эти числа, принадлежат также $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Заменяя все коэффициенты соответствующими числами из полей, сопряженных с K, и перемножая полученные таким образом степенные ряды по правилу Коши, мы получим справа целочисленный степенной ряд относительно z^{-1}, а слева — рациональную функцию, в числителе и знаменателе которой стоят целочисленные полиномы, причем полином в знаменателе со старшим коэффициентом 1 [156]. Значит, нули этого знаменателя будут целыми алгебраическими числами.

231. Другое толкование теоремы 225.

232. [G. Pólya, l. c. 225, стр. 3—9.] Посредством разложения рациональной функции $f'(z)$ на элементарные дроби (связанного с некоторыми предосторожностями: не вводить иррациональностей!) утверждение приводится к 231.

233. Мы можем принять, что алгебраическая функция $f(z)$ является целой; действительно, $P_0(z) f(z)$ удовлетворяет уравнению указанного вида со старшим коэффициентом 1. Мы можем, далее, принять, что $z=\alpha$ есть регулярная точка целой алгебраической функции $f(z)$: если эта функция разложена по возрастающим степеням выражения $(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}$ (где m — натуральное число), то полагаем $z=\alpha+\zeta^m$; при этом точка разветвления $z=\alpha$ преобразуется в регулярную точку $\zeta=0$, новое разложение по степеням ζ имеет те же коэффициенты, что и прежнее по степеням $(z-\alpha)^{\frac{1}{m}}$; заданное уравнение после замены z на $\alpha+\zeta^m$ преобразуется в некоторое другое уравнение того же типа. Если

$$f(z)=a_0+a_1(z-\alpha)+\ldots+a_m(z-\alpha)^m+\ldots,$$

то функция

$$(z-\alpha)^{-m}[f(z)-a_0-a_1(z-\alpha)-\ldots-a_{m-1}(z-\alpha)^{m-1}]=$$
$$=a_m+a_{m+1}(z-\alpha)+\ldots=\varphi(z)$$

регулярна в точке $z=\alpha$ и удовлетворяет уравнению, где коэффициентами интересующих нас полиномов служат лишь алгебраические числа, если только доказано, что a_0, $a_1, \ldots, a_{m-1}$ являются алгебраическими числами: нужно доказать, что

$$a_m=\varphi(\alpha)$$

является алгебраическим числом. Тем самым вся теорема приводится к выделенному частному ее случаю; этот последний, однако, очевиден, так как можно заранее предположить, что не все полиномы $P_0(z)$, $P_1(z), \ldots, P_l(z)$ делятся на $z-\alpha$. [Hecke, стр. 66, теорема 51*)].

234. [H. Weyl.] Пусть уравнение $F(z, y)=0$ обладает рациональным решением $f(z)$. Мы можем без всякого ограничения общности предположить, что $f(z)$ есть целая функция [решение 233]. Коэффициенты этой функции являются алгебраическими числами [233], принадлежащими одному и тому же конечному полю [Hecke, стр. 67, теорема 52**)]; пусть степень его будет n. Заменяя коэффициенты полинома $f(z)$ сопряженными числами, получаем полиномы $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_{n-1}(z)$. Уравнение

$$(y-f(z))(y-f_1(z))\ldots(y-f_{n-1}(z))=0$$

имеет рациональные коэффициенты и обладает общим корнем с неприводимым уравнением $F(z, y)=0$. Поэтому корни этого последнего содержатся среди $f(z)$, $f_1(z), \ldots, f_{n-1}(z)$ и являются, следовательно, рациональными функциями от z.

235. Если ряд $y=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots$ представляет алгебраическую функцию и α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$ — алгебраические числа, то этот ряд удовлетворяет некоторому уравнению $F(z, y)=0$, где $F(z, y)$ — целая рациональная функция, $F(z, y)\not\equiv 0$, *с алгебраическими коэффициентами* [151; оба доказательства могут быть распространены на рассматриваемый случай]. Коэффициенты α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots$, начиная с некоторого, рекуррентно определяются из уравнения вида

$$Y=\frac{P_1(z)}{Q(z)}+\frac{zP_2(z)}{Q(z)}Y^2+\frac{zP_3(z)}{Q(z)}Y^3+\ldots+\frac{zP_n(z)}{Q(z)}Y^n, \qquad (*)$$

*) Гекке, стр. 70.
**) Гекке, стр. 71.

где $Y = \alpha_m + \alpha_{m+1}z + \ldots$ с надлежаще выбранным m, $P_1(z)$, $P_2(z), \ldots, P_n(z)$, $Q(z)$ — полиномы с алгебраическими коэффициентами и $Q(0) \neq 0$ [152]. Следовательно, все коэффициенты рационально зависят от конечного числа алгебраических чисел [Hecke, стр. 67, теорема 52 *)].

236. Дальнейшее использование уравнения (*) решения 235, аналогичное проводимому в 153.

237. [Th. Skolem, Videnskapsselskapets Skrifter, 1921, № 17, теорема 41.]

238. [E. Lucas, Bull. S. M. F., т. 6, стр. 9, 1878.] Пусть x, y, ξ, η — целые числа с наибольшим общим делителем 1 и

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Тогда

$$2(x\xi + y\eta) = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2,$$
$$x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 = 4(x\xi + y\eta) \equiv 0 \pmod 4.$$

Так как $x \equiv y \equiv \xi \equiv \eta \equiv 0 \pmod 2$ исключено, то остается лишь возможность $x \equiv y \equiv \xi \equiv \eta \equiv 1 \pmod 2$. Но это противоречит уравнению

$$x^2 + y^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

ибо его левая и правая части оказываются несравнимыми по модулю 4.

239. [G. Pólya, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 135, 1918; принятая здесь редакция доказательства принадлежит A. Speiser'y.] Назовем целую точку p, q *примитивной*, если она видна из нулевой точки, т. е. если p и q — взаимно простые. Если имеет место соотношение $pv - qu = 1$, то обе точки p, q и u, v примитивны, и параллелограмм, построенный на соответствующих радиусах-векторах, имеет площадь 1 (остальными двумя вершинами параллелограмма служат 0, 0 и $p+u$, $q+v$); назовем u, v *левым соседом* точки p, q и p, q — *правым соседом* точки u, v. Говоря о *диагонали* построенного на этих точках параллелограмма, мы будет иметь в виду диагональ, выходящую из нулевой точки. Если диагональ параллелограмма, построенного на точках p, q и u, v, имеет длину d, то p, q и u, v лежат от нее на одинаковых расстояниях $\frac{1}{d}$. Каждая примитивная целая точка имеет бесконечно много левых соседей, все они лежат на одной прямой и притом на равных расстояниях.

1) 1, 0 и $s-1$, 1 являются соседями. Диагональ построенного на них параллелограмма имеет длину $\sqrt{s^2+1^2}$. Эта диагональ

*) Гекке, стр, 71.

может быть задержана в своем продолжении лишь кругом радиуса ρ с центром в 1, 0 или $s-1$, 1. Поэтому $\rho \geqslant \frac{1}{\sqrt{s^2+1^2}}$.

2) Исходя из произвольной примитивной целой точки p, q, лежащей в круге $x^2+y^2 \leqslant s^2$, отыскиваем самого крайнего из ее левых соседей, лежащих в этом круге; пусть это будет p', q' (значит, $p'+p$, $q'+q$ лежит уже вне круга $x^2+y^2 \leqslant s^2$). Таким же образом пусть p'', q'' будет самый крайний левый сосед точки p', q'; p''', q''' — самый крайний левый сосед точки p'', q'' и т. д. После некоторого числа n шагов мы приходим к такой точке $p^{(n)}$, $q^{(n)}$, что параллелограммы, построенные на p, q и p', q', на p', q' и p'', q'', ..., на $p^{(n-1)}$, $q^{(n-1)}$ и $p^{(n)}$, $q^{(n)}$, полностью покрывают круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. Диагональ параллелограмма, построенного на точках p, q и p', q', больше s, расстояния точек p, q и p', q' от этой диагонали меньше $\frac{1}{s}$. Если поэтому мы опишем возле каждой точки p, q; p', q'; ...; $p^{(n)}$, $q^{(n)}$ круг радиуса $\frac{1}{s}$, то каждый луч, выходящий из точки 0, 0, будет задержан одним из этих кругов, а диагонали — даже двумя. Следовательно, $\rho < \frac{1}{s}$.

240. [A. J. Kempner, Annals of Math. (2), т. 19, стр. 127—136, 1917.] Пусть x рационально, равно $\frac{p}{q}$, где p, q — примитивная целая точка [решение 239]. Если указанная дорога имеет точку 0, 0 на своем правом крае, то справа она ограничена прямой, соединяющей 0, 0 и p, q, слева — прямой, на которой лежат левые соседи точки p, q [решение 239]. Ширина дороги равна высоте параллелограмма площади 1 с основанием $\sqrt{p^2+q^2}$, т. е. равна $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} = \varphi\left(\frac{p}{q}\right)$. Тем самым

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{1+\frac{p^2}{q^2}} = \frac{1}{q}.$$

В случае иррационального x имеем $f(x) = \varphi(x) = 0$ [II 166]. (II 99, II 169.)

241. Соединим все целые точки, сравнимые по модулю n, в один класс. Тогда получится n^2 различных классов. Но kn^2+1 объектов нельзя так распределить по n^2 клеткам, чтобы по крайней мере в одной не оказалось более чем k объектов.

242. [H. F. Blichfeldt, Trans. American M. S., т. 15, стр. 227—235, 1914; W. Scherrer, Math. Ann., т. 86, стр. 99, 1922.] Рассмотрим решетку со сторонами квадратов $\frac{1}{N}$, т. е. совокупность чисел $\frac{x}{N}$, $\frac{y}{N}$, где x, y, N — целые числа. Пусть z_N точек этой решетки падают на область с площадью F. Тогда $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{z_N}{N^2}=F$. Пусть $F>[F]$. Среди z_N точек существует $[F]+1$ сравнимых mod N, если N достаточно велико [241]. Отбирая их (пользуясь тем, что $N\to\infty$), приходим к требуемому результату. Случай $F=[F]$ приводится по непрерывности к уже разобранному; можно рассмотреть и непосредственно, надлежащим образом изменив проведенные рассуждения.

243. [Дальнейшие результаты см. у R. Fueter und G. Pólya, Zürich. Naturf. Ges., т. 68, стр. 380, 1923.] Пусть N — целое число, $N>1$. В части плоскости, где одновременно удовлетворяются три неравенства

$$f(x, y)\leqslant N, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \qquad (*)$$

лежит в силу условий 1), 2) ровно N целых точек, т. е. точек, для которых x и y — целые числа. Первое из неравенств (*) можно записать следующим образом:

$$\varphi_m\left(xN^{-\frac{1}{m}},\ yN^{-\frac{1}{m}}\right)+N^{-\frac{1}{m}}\varphi_{m-1}\left(xN^{-\frac{1}{m}},\ yN^{-\frac{1}{m}}\right)+$$
$$+N^{-\frac{2}{m}}\varphi_{m-2}\left(xN^{-\frac{1}{m}},\ yN^{-\frac{1}{m}}\right)+\ldots\leqslant 1.$$

Обозначим через F площадь области, выделяемой неравенствами

$$\varphi_m(x, y)\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0 \qquad (**)$$

(F, по предположению, конечно), и рассмотрим точки $xN^{-\frac{1}{m}}$, $yN^{-\frac{1}{m}}$ с целыми x, y (эти точки образуют очень мелкую решетку). В области (**) лежит приблизительно $FN^{\frac{2}{m}}$ точек этой мелкой решетки; заключаем, что число точек решетки со сторонами 1, заключающихся в области (*), при бесконечно возрастающем N асимптотически равно $FN^{\frac{2}{m}}$. Но, как уже сказано, число этих точек в точности равно N. Из асимптотического соотношения

$$FN^{\frac{2}{m}}\sim N$$

заключаем, что

$$m=2, \quad F=1.$$

244. [См. W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, т. 2, стр. 364, Leipzig, B. G. Teubner, 1918.] Пусть четыре числовые системы

$$\begin{array}{llll} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, \\ x_1-y_1, & x_2-y_2, & \ldots, & x_n-y_n, \\ x_1+y_1, & x_2+y_2, & \ldots, & x_n+y_n \end{array}$$

образуют полную систему вычетов $\bmod n$. Полагая $x_\mu - y_\mu = r_\mu$, $y_\mu = s_\mu$, приходим к простейшим случаям $p=2$, $p=3$, соотв. $p \geqslant 5$ теоремы 247.

245. [A. Hurwitz, задача, Nouv. Ann., серия 3, т. 1, стр. 384, 1882.] $r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots, r_q s_q$, очевидно, не образует полной системы вычетов $\bmod q$, если $r_\alpha \equiv s_\beta \equiv 0 \pmod q$ и $\alpha \neq \beta$. Примем поэтому, что $r_q \equiv s_q \equiv 0 \pmod q$; тогда

$$r_1 r_2 \ldots r_{q-1} \equiv s_1 s_2 \ldots s_{q-1} \equiv 1 \cdot 2 \ldots (q-1) \equiv -1 \pmod q$$

и, значит,

$$r_1 s_1 \cdot r_2 s_2 \ldots r_{q-1} s_{q-1} \equiv 1 \not\equiv 1 \cdot 2 \ldots (q-1) \pmod q.$$

Беря приведенную систему вычетов $1, 2, \ldots, q-1$ в форме g, $g^2, \ldots, g^{q-1}$ (g — примитивный корень $\bmod q$), видим, что наша теорема представляет собой частный случай теоремы 247 при $n = q-1$, $p=2$.

246. [A. Hurwitz.] Достаточно рассмотреть сумму

$$S = 1^\lambda + 2^\lambda + \ldots + p^{\alpha\lambda}.$$

Если λ не кратно $p-1$ и g — примитивный корень $\bmod p$, то $g^\lambda - 1$ не делится на p; из сравнений

$$g^\lambda S \equiv g^\lambda + (g \cdot 2)^\lambda + (g \cdot 3)^\lambda + \ldots + (gp^\alpha)^\lambda \equiv S,$$
$$S(g^\lambda - 1) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

вытекает, что $S = 0 \pmod{p^\alpha}$. Если λ кратно $p-1$, то сравнение

$$1^\lambda + 2^\lambda + \ldots + (p^\alpha)^\lambda \equiv -p^{\alpha-1} \pmod{p^\alpha}$$

выполняется при $\alpha = 1$. Пусть оно выполняется при некотором α. Тогда

$$\begin{aligned}
&1^\lambda + 2^\lambda + \ldots + (p^{\alpha+1})^\lambda = \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} [(1+kp^\alpha)^\lambda + (2+kp^\alpha)^\lambda + \ldots + (p^\alpha + kp^\alpha)^\lambda] \equiv \\
&\equiv \sum_{k=0}^{p-1} (1^\lambda + 2^\lambda + \ldots + p^{\alpha\lambda}) + \lambda p^\alpha \sum_{k=0}^{p-1} k (1^{\lambda-1} + 2^{\lambda-1} + \ldots + p^{\alpha(\lambda-1)}) \equiv \\
&\equiv p(1^\lambda + 2^\lambda + \ldots + p^{\alpha\lambda}) + \lambda p^\alpha \frac{p(p-1)}{2} (1^{\lambda-1} + 2^{\lambda-1} + \ldots + p^{\alpha(\lambda-1)}) \equiv \\
&\equiv -p^\alpha \pmod{p^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

247. [A. Hurwitz, см. 1. с. 244.]

1) Положим $r_\mu = s_\mu$; тогда

$$(r+s) = (2r),\ (r+2s) = (3r),\ \ldots,\ (r+(p-2)s) = ((p-1)r)$$

будут полными системами вычетов $\bmod n$, ибо числа $2, 3, \ldots, p-1$ — взаимно простые с n.

2) Если $p=2$, следовательно, n — четное, и если бы (r), (s), $(r+s)$ одновременно являлись полными системами вычетов, то мы имели бы

$$r_1+r_2+\ldots+r_n\equiv s_1+s_2+\ldots+s_n\equiv(r_1+s_1)+(r_2+s_2)+\ldots$$
$$\ldots+(r_n+s_n)\equiv 1+2+\ldots+n\equiv\frac{n(n+1)}{2}\equiv\frac{n}{2}\pmod{n},$$

откуда

$$(r_1+s_1)+(r_2+s_2)+\ldots+(r_n+s_n)\equiv 0\equiv\frac{n}{2}\pmod{n},$$

что, очевидно, невозможно.

3) Пусть p — нечетное и p^{α} — высшая степень p, входящая в n. Положим

$$1^{p-1}+2^{p-1}+\ldots+n^{p-1}=S.$$

Если бы (r), (s), $(r+s)$, ..., $(r+(p-1)s)$ являлись одновременно полными системами вычетов, то мы имели бы

$$\sum_{\nu=1}^{n}(r_\nu+ks_\nu)^{p-1}\equiv S\pmod{n}$$

и, следовательно, полагая для сокращения

$$\binom{p-1}{\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}r_\nu^{p-1-\alpha}s_\nu^{\alpha}=S_\alpha,$$

пришли бы к системе сравнений

$$kS_1+k^2S_2+\ldots+k^{p-2}S_{p-2}+k^{p-1}S\equiv 0\pmod{n}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1).$$

Определитель этой системы составлен из множителей, бóльших 0 и меньших p, и, значит, взаимно прост с n. Но отсюда мы получили бы, наконец,

$$S_1\equiv S_2\equiv\ldots\equiv S_{p-2}\equiv S\equiv 0\pmod{n},$$

что невозможно, так как S не делится на p^{α} [246].

248.

n — четное:

$$n^{\alpha}=n\cdot n^{\alpha-1}=(n^{\alpha-1}+1)+(n^{\alpha-1}+3)+\ldots+(n^{\alpha-1}+n-1)+$$
$$+(n^{\alpha-1}-1)+(n^{\alpha-1}-3)+\ldots+(n^{\alpha-1}-n+1);$$

n — нечетное:

$$n^{\alpha}=n^{\alpha-1}+(n^{\alpha-1}+2)+(n^{\alpha-1}+4)+\ldots+(n^{\alpha-1}+n-1)+$$
$$+(n^{\alpha-1}-2)+(n^{\alpha-1}-4)+\ldots+(n^{\alpha-1}-n+1).$$

249. Каждый собственный делитель одного из чисел 2, 3, 4, ..., n содержится в этой же числовой последовательности; значит, интересующее нас число должно быть простым. Умножая на 2 число, меньшее или равное $\frac{n}{2}$, мы получаем число из указанной последовательности; значит, интересующее нас число должно быть больше $\frac{n}{2}$.

250. По теореме Чебышева: пусть $n>2$, p — простое число, $n \geq p > \frac{n}{2}$. Тогда

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{M}{N}=\frac{N+pM}{pN},$$

где $(M, N)=1$, $(p, N)=1$, откуда $(pN, N+pM)=1$. Дробь несократима. Без теоремы Чебышева: см. 251.

251. [J. Kürschák, Math. és phys. lapok, т. 27, стр. 299—300, 1918.] Мы будем говорить, что α есть «степень четности числа n», если n делится на 2^α, но уже не делится на $2^{\alpha+1}$. 2^α, $3\cdot 2^\alpha$, $5\cdot 2^\alpha$, $7\cdot 2^\alpha$, ... — числа степени четности α. Между ними лежат числа $2\cdot 2^\alpha$, $4\cdot 2^\alpha$, $6\cdot 2^\alpha$, ...; таким образом, между любыми двумя числами одинаковой степени четности лежит число большей степени четности. Поэтому среди чисел n, $n+1$, ..., $m-1$, m имеется в точности одно с максимальной степенью четности μ. Множитель 2^μ в знаменателе не сокращается.

252. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 23, стр. 289, 1915. Решение — S. Sidon, там же, серия 3, т. 24, стр. 284, 1916; излагаемое ниже решение принадлежит A. Fleck'у.] Достаточно рассмотреть случай $\alpha=\frac{1}{k}$, где k—целое. Пусть n делится на 1, 2, 3, ..., $[\sqrt[k]{n}]$ и, значит, также на наименьшее общее кратное V этих чисел. Пусть, далее,

$$p_l \leq \sqrt[k]{n} < p_{l+1}, \quad V=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_l^{m_l},$$

где p_ν обозначает ν-е простое число. Показатель m_λ определяется неравенством $p_\lambda^{m_\lambda} \leq \sqrt[k]{n} < p_\lambda^{m_\lambda+1}$; в частности, $\sqrt[k]{n} < p_\lambda^{2m_\lambda}$, $\lambda = 1, 2, \ldots, l$. Перемножая все эти последние неравенства, получаем $n^{\frac{l}{k}} < V^2$. Из предположения вытекает, далее, что $V \leq n$, таким образом, окончательно

$$\frac{l}{k}<2, \quad \sqrt[k]{n}<p_{2k}, \quad n<p_{2k}^k.$$

Например, при $k=2$ имеем $n<49$. К результату 24 приходим, перебирая эти значения n. При $k=3$ наибольшим допустимым значением для n служит 420.

253. [L. Kollros.] Пусть наименьшие положительные вычеты чисел P, $10P$, 10^2P, ... $(\mathrm{mod}\, Q)$ будут p_0, p_1, p_2, ... Если

$$\frac{P}{Q}=a{,}a_1a_2a_3\ \ldots,$$

где a_1, a_2, a_3, ... — десятичные знаки, то

$$\frac{p_0}{Q}=0{,}a_1a_2a_3\ldots,\ \frac{p_1}{Q}=0{,}a_2a_3a_4\ldots,\ \frac{p_2}{Q}=0{,}a_3a_4a_5\ldots$$

Отсюда вытекает, что длина кратчайшего периода l равна показателю десяти по модулю Q, т. е. $10^l\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, Q)$ и всякая низшая степень десяти $\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ Q)$. Если l — четное, $l=2\lambda$, стало быть, $(10^\lambda-1)(10^\lambda+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, Q)$, то $10^\lambda\equiv -1\ (\mathrm{mod}\, Q)$, следовательно,

$$\frac{p_0}{Q}+\frac{p_\lambda}{Q}=0{,}a_1a_2a_3\ \ldots a_la_1\ldots+0{,}a_{\lambda+1}a_{\lambda+2}\ldots a_la_1\ldots a_\lambda=0{,}999\ldots,$$

т. е.

$$a_1+a_{\lambda+1}=9,\ a_2+a_{\lambda+2}=9,\ \ldots,\ a_\lambda+a_l=9.$$

Если напротив, l — нечетное, то, очевидно,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_l}{l}\neq\frac{9}{2}.$$

254. [E. Lucas; см. A. Hurwitz, Interméd. des math., т. 3, стр 214, 1896.]

1) Если $3^{2^{h-1}}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ n)$, значит, $3^{2^h}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)$, то 3 принадлежит $(\mathrm{mod}\ n)$ к показателю $2^h=n-1$. Но показатель является делителем числа $\varphi(n)$, значит, $\varphi(n)\geqslant n-1$. Отсюда следует, что $\varphi(n)=n-1$ и n — простое число.

2) Если $n=2^h+1$ есть простое число, $h\geqslant 2$, то $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, ибо h должно быть четным, $h=2\nu$. (В противном случае было бы $2^{2\nu+1}+1=4^\nu\cdot 2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$.) По закону взаимности

$$\left(\frac{3}{n}\right)=\left(\frac{n}{3}\right)=\left(\frac{4^\nu+1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1;\quad 3^{\frac{n-1}{2}}\equiv\left(\frac{3}{n}\right)\ (\mathrm{mod}\, n).$$

255. [Euler, Opera Postuma, т. 1, стр. 220, Petropoli, 1862; G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 84, 1916. Решение — G. Szegö, там же, серия 3, т. 25, стр. 340, 1917.] Если бы x, y, z, t было решением, то число

$$\frac{4zt^2+1}{4yz-1}=4zx-1$$

было бы целым, т. е.

$$(2zt)^2\equiv -z\ (\mathrm{mod}\ 4yz-1).$$

Пусть $z=2^{\alpha}z'$, $\alpha\geqslant 0$ — целое, z' — нечетное. Тогда

$$\left(\frac{-z}{4yz-1}\right)=\left(\frac{-1}{4yz-1}\right)\left(\frac{2^{\alpha}}{4yz-1}\right)\left(\frac{z'}{4yz-1}\right).$$

Первый множитель равен -1. Третий множитель равен

$$\left(\frac{4yz-1}{z'}\right)(-1)^{\frac{z'-1}{2}}=\left(\frac{-1}{z'}\right)(-1)^{\frac{z'-1}{2}}=1.$$

Второй множитель, если $\alpha=2k+1$, $k\geqslant 0$ — целое, $z=2z''$, равен

$$\left(\frac{2}{4yz-1}\right)=\left(\frac{2}{8yz''-1}\right)=1,$$

и если $\alpha=2k$, $k\geqslant 0$ — целое, равен

$$\left(\frac{1}{4yz-1}\right)=1.$$

Итак,

$$\left(\frac{-z}{4yz-1}\right)=-1$$

в противоречие с выписанным выше сравнением.

256. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 24, стр. 84, 1916. См. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, стр. 125; Opera omnia, т. 1, стр. 94—95, Göttingen, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, 1863. Решение — P. Bernays.]

1) $q\equiv 1 \pmod 4$. Если p — простой делитель числа $q-4$, то $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)=1$; используется то, что $q>5$.

Далее, должно существовать нечетное простое число $p<q$, для которого $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=-1$. Действительно, в противном случае все нечетные числа u, меньшие чем q, значит, и все четные числа $q-u$ и, наконец, все вообще числа $1, 2, 3, \ldots, q-1$ были бы квадратичными вычетами числа q.

2) $q\equiv -1 \pmod 4$. По крайней мере один простой делитель p числа $q-4$ также $\equiv -1 \pmod 4$; для него $\left(\frac{q}{p}\right)=-\left(\frac{p}{q}\right)=1$.

2а) $q\equiv 7 \pmod 8$. Из четырех чисел $\frac{q+1}{8}$, $\frac{q+9}{8}$, $\frac{q+25}{8}$, $\frac{q+49}{8}$ одно и только одно имеет вид $4n+3$; оно обладает простым делителем p того же вида и притом $p<q$, если $q>7$. Имеем $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$, $\left(\frac{p}{q}\right)=1$.

2б) $q\equiv 3 \pmod 8$. Из двух нечетных чисел $\frac{q+1}{4}$ и $\frac{q+9}{4}$ одно и только одно будет вида $4n+3$; оно обладает простым делителем p того же вида, и $p<q$, если $q>3$; имеем $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=-1=-\left(\frac{p}{q}\right)$.

257. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 21, стр. 288, 1913. Решение — O. Szász, G. Szegö, L. Neder, там же, серия 3, т. 22, стр. 366, 1914. См. W. H. Young and Grace Chisholm Young, The theory of sets of points, стр. 3, Cambridge, University Press, 1906.]

Первое решение. Пусть n — целое положительное число. Существуют простые числа, в десятичном представлении которых содержится по меньшей мере n нулей, следующих один за другим. [Арифметическая прогрессия $10^{n+1}x+1$ содержит бесконечное множество простых чисел, **110**.] Поэтому указанная десятичная дробь не может быть периодической.

Второе решение. В силу теоремы Чебышева [1. с. **249**] существует по крайней мере одно простое число, имеющее заданное число десятичных знаков. Если указанная дробь периодическая с периодом $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $k \geqslant 2$, то выбираем r столь большим, чтобы простые числа с kr цифрами лежали за цифрой a_1 первого периода. Пусть x будет наименьшее из простых чисел с kr цифрами. Тогда возможны два случая:

$$1)\quad x = a_1a_2 \ldots \overset{1}{a_k}a_1a_2 \ldots \overset{2}{a_k} \ldots a_1a_2 \ldots \overset{r}{a_k},$$

$$2)\quad x = a_{l+1}a_{l+2} \ldots \overset{1}{a_k}a_1a_2 \ldots \overset{2}{a_k} \ldots a_1a_2 \ldots \overset{r}{a_k}a_1a_2 \ldots a_l, \qquad l > 0.$$

В первом случае предполагаемое простое число x делилось бы на $a_1a_2 \ldots a_k$, во втором — на $a_{l+1}a_{l+2} \ldots a_ka_1 \ldots a_l$!

258. Из формулы Тейлора получаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ Если бы e было равно $\frac{r}{s}$ (r, s — целые положительные взаимно простые числа, $s \geqslant 2$), то, положив $n = s$ и умножая обе части на $s!$, мы получили бы, что

$$s!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{s!}\right) = \frac{e^{\theta_s}}{s+1}$$

есть целое число. Но

$$0 < \frac{e^{\theta_s}}{s+1} < \frac{e}{3} < 1.$$

259. Если бы для некоторых целых a, b, c ($|a|+|b|>0$) удовлетворялось уравнение $ae+be^{-1}+c=0$, то формула Тейлора для функции ae^x+be^{-x} дала бы

$$-c = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a+(-1)^\nu b}{\nu!} + \frac{ae^{\theta_n}-(-1)^n be^{-\theta_n}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

$n=0, 1, 2, \ldots$ Пусть $n \geqslant 3|a|+|b|-1$ выбрано так, чтобы знак числа $(-1)^n b$ совпадал со знаком числа $-a$. Тогда [см. 258]

$$\frac{ae^{\theta_n}-(-1)^n be^{-\theta_n}}{n+1}$$

было бы целым. Но

$$0<\frac{|a|e^{\theta_n}+|b|e^{-\theta_n}}{n+1}=\left|\frac{ae^{\theta_n}-(-1)^n be^{-\theta_n}}{n+1}\right|<\frac{3|a|+|b|}{n+1}\leqslant 1.$$

260. [A. Hurwitz.] При целых n

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Следовательно,

$$\Gamma'(n+1)=n!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-C\right).$$

261. $\pi+(4-\pi)=3{,}9999\ldots$

262. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 161, 1918.] Интересующее нас выражение равно [182, 82]

$$\left\{2^{n-[n]-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]-\ldots}\prod_{p>2} p^{\left[\frac{2n}{p-1}\right]-\left[\frac{2n}{p}\right]-\left[\frac{2n}{p^2}\right]-\ldots}\right\}^{\frac{1}{n}}=2^{a_n}\prod\nolimits_1^{\frac{1}{n}}\prod\nolimits_2^{\frac{1}{n}},$$

где $\prod\limits_{p>2}$ распространено на все простые числа, меньшие или равные $2n+1$, $\prod_1$ — на простые числа, удовлетворяющие неравенствам $3\leqslant p\leqslant\sqrt{2\pi}$, $\prod_2$ — на простые числа, удовлетворяющие неравенствам $\sqrt{2n}<p\leqslant 2n+1$. Если $n\to\infty$, то

$$a_n=-\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\ldots\right).$$

При $p>\sqrt{2n}$ имеем $\left[\frac{2n}{p^2}\right]=\left[\frac{2n}{p^3}\right]=\ldots=0$. Как знакочередующийся ряд с убывающими членами,

$$\sum_{p>\sqrt{2n}}\left(\left[\frac{2n}{p-1}\right]-\left[\frac{2n}{p}\right]\right)\leqslant\left[\frac{2n}{[\sqrt{2n}]}\right]<\frac{2n}{\sqrt{2n}-1}.$$

Отсюда получаем

$$1\leqslant\prod\nolimits_2<(2n+1)^{\frac{2n}{\sqrt{2n}-1}},$$

и следовательно, $\prod_2^{\frac{1}{n}}\to 1$.

Пусть $m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_l p^l$ — натуральное число, записанное в p-ичной системе, стало быть,

$$0 \leqslant a_\lambda \leqslant p-1, \quad \lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ l,\ a_l > 0.$$

Тогда

$$\frac{m}{p} - \left[\frac{m}{p}\right] = \frac{a_0}{p},$$
$$\frac{m}{p^2} - \left[\frac{m}{p^2}\right] = \frac{a_0}{p^2} + \frac{a_1}{p},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сложение этой бесконечной последовательности равенств дает

$$\frac{m}{p-1} - \left[\frac{m}{p}\right] - \left[\frac{m}{p^2}\right] - \ldots = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_l}{p-1} \leqslant l + 1 \leqslant \frac{\ln m}{\ln p} + 1,$$

последнее — вследствие того, что $l \ln p \leqslant \ln m$. Следовательно, при $3 \leqslant p < \sqrt{2n}$

$$p^{\left[\frac{2n}{p-1}\right] - \left[\frac{2n}{p}\right] - \left[\frac{2n}{p^2}\right] - \ldots} \leqslant p^{\frac{\ln 2n}{\ln p} + 1} < p^{\frac{2 \ln 2n}{\ln p}} = (2n)^2,$$

$$1 \leqslant \prod\nolimits_1 < (2n)^{2\sqrt{2n}}, \quad \prod\nolimits_1^{\frac{1}{n}} \to 1.$$

263. [G. Pólya, Gött. Nachr., 1918, стр. 26.] Согласно предположению существует лишь конечное число степеней простых чисел $p'^{a'}$, для которых $|f(p'^{a'})| \geqslant 1$. Пусть произведение $\prod f(p'^{a'})$ будет равно C. Каково бы ни было ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует опять-таки лишь конечное число степеней простых чисел $p''^{a''}$, для которых

$$|f(p''^{a''})| \geqslant \varepsilon |C|^{-1}.$$

Следовательно, каждое натуральное число n за конечным числом исключений содержит в своем разложении по простым числам по меньшей мере одну степень простого числа P^A, для которой

$$|f(P^A)| < \varepsilon |C|^{-1}.$$

Тогда

$$|f(n)| = |f(p^a q^b \ldots P^A \ldots)| = |f(p^a)|\,|f(q^b)| \ldots |f(P^A)| \ldots <$$
$$< |C| \cdot \varepsilon |C|^{-1} = \varepsilon.$$

264. Применение теоремы 263 [25, 44]. См. 45.

265. Трехчлен $ax^2 + bx + c$ приводим тогда и только тогда, когда $b^2 - 4ac$ равно квадрату u^2 целого числа. Оценим r_n. Прежде всего мы оставим совершенно в стороне координатные плоскости ($a = 0$, $b = 0$, $c = 0$), которые могут привнести в r_n самое большее $3(2n+1)^2$ единиц. Таким образом, b может принимать $2n$

значений $-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$. При фиксированном b должны выполняться неравенства

$$b^2-u^2=4ac\geqslant -4n^2, \quad u^2\leqslant 4n^2+b^2\leqslant 5n^2,$$

поэтому u может принимать самое большее $2\sqrt{5}n$ значений, $u^2=b^2$ недопустимо. При фиксированных b и u, $b^2-u^2=4ac$, a принимает $2\tau\left(\frac{|b^2-u^2|}{4}\right)$ значений; ими c уже вполне определяется. Таким образом, обозначая через $T(n)$ наибольшее из чисел $\tau(1)$, $\tau(2), \ldots, \tau(n)$, имеем

$$r_n<3(2n+1)^2+2n\cdot 2\sqrt{5}n\cdot 2T(n^2).$$

Но $\tau(n)\cdot n^{-\varepsilon}\to 0$ для каждого фиксированного $\varepsilon>0$ [264].

266. Пусть $k>0$, $l>0$, $k+l=h$,

$$\alpha(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_kx^k,$$
$$\beta(x)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_lx^l$$

— два целочисленных полинома, в произведении которых $\alpha(x)\beta(x)=A(x)$ все коэффициенты по модулю не превосходят n. Пусть, кроме того, $\alpha_0, \alpha_k, \beta_0, \beta_l$ отличны от нуля. Так как число указанных в задаче полиномов, для которых $a_0=0$ или $a_h=0$, будет порядка n^h, то достаточно показать, что число допустимых систем $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l)$ равно $O(n^h\ln^2 n)$.

Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_h$ будут h наименьших натуральных чисел, для которых $A(x)$ не равно нулю. Тогда, очевидно, $x_h\leqslant 2h$. Далее $|\alpha(x_\nu)|$, $|\beta(x_\nu)|$ — целые положительные числа, оба входящие в $|A(x_\nu)|$. Следовательно,

$$|\alpha(x_\nu)|\leqslant|A(x_\nu)|\leqslant\{1+(2h)+(2h)^2+\ldots+(2h)^h\}n$$
$$(\nu=1, 2, \ldots, h).$$

Такое же неравенство имеет место и для $\beta(x_\nu)$. Отсюда по интерполяционной формуле Лагранжа (стр. 98) вытекает, что все коэффициенты полиномов $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ по модулю меньше чем Cn, где C зависит только от h. Имеем, далее, $1\leqslant|\alpha_0\beta_0|\leqslant n$, $1\leqslant|\alpha_k\beta_l|\leqslant n$. Число допустимых систем (α_0, β_0), соотв. (α_k, β_l), будет поэтому [79, II 46] равно $O(n\ln n)$, значит, число систем $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_k, \beta_l)$ будет равно $O(n^2\ln^2 n)$ и, наконец, искомое число равно $O(n^{k-1}n^{l-1}n^2\ln^2 n)=O(n^h\ln^2 n)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОТДЕЛ ДЕВЯТЫЙ

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Точки поверхности полиэдра образуют замкнутое множество $\mathfrak{O}$, так что расстояние точки P от различных точек $\mathfrak{O}$ достигает минимума. Это минимальное расстояние может достигаться только в такой точке M поверхности, где прямая, соединяющая M с P, перпендикулярна ко всем направлениям, выходящим из M по поверхности $\mathfrak{O}$. Поэтому M не может находиться ни в вершине, ни на ребре поверхности, а должно лежать внутри какой-либо грани.

2. [G. Pólya, Tôhoku Math. J., т. 19, стр. 1—3, 1921.]

3. [II **121**.]

4. [См. H. Dellac, Interméd. des math., т. 1, стр. 69—70, 1894; см. также H. Poincaré, там же, т. 1, стр. 141—144, 1894.] Положим $A\cos x + B\sin x = u$, где A, B — постоянные. Имеем

$$(f''+f)\,u = (f''+f)\,u - f\,(u''+u) = \frac{d}{dx}(f'u - fu');$$

отсюда следует

$$1.\quad \int\limits_a^{a+\pi} [f''(x)+f(x)]\sin(x-a)\,dx = f(a)+f(a+\pi) > 0,$$

$$2.\quad \int\limits_a^{b} [f''(x)+f(x)]\sin(x-a)\,dx = f'(b)\sin(b-a).$$

Но $f'(b) \leqslant 0$ [решение V **10**]; если бы было $b-a \leqslant \pi$, то левая часть была бы положительна, а правая неотрицательна.

5. [W. Blaschke, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 26, стр. 65, 1917. Решение — G. Szegö, так же, серия 3, т. 28, стр. 183—184, 1920; см. также W. Süss, Deutsche Math.-Ver., т. 33, стр. *32—33*, 1924.] Пусть

$$h(\varphi) \sim \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \cos n\varphi + k_n \sin n\varphi)$$

есть ряд Фурье функции $h(\varphi)$. Тогда $r(\varphi)$ имеет ряд Фурье

$$r(\varphi) \sim \frac{h_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1-n^2)(h_n \cos n\varphi + k_n \sin n\varphi),$$

ибо вследствие периодичности функций $h(\varphi)$ и $h'(\varphi)$

$$\int_0^{2\pi} r(\varphi) e^{in\varphi}\, d\varphi = (1-n^2) \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{in\varphi}\, d\varphi \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Далее

$$r(\varphi) - r(\varphi+\pi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (1-n^2)[1-(-1)^n](h_n \cos n\varphi + k_n \sin n\varphi) \sim$$

$$\sim 2\sum_{\nu=1}^{\infty} [1-(2\nu+1)^2][h_{2\nu+1}\cos(2\nu+1)\varphi + k_{2\nu+1}\sin(2\nu+1)\varphi]\ [\text{II } \mathbf{141}].$$

6. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 162, 1918.] Пусть $H(\Phi)$, $h(\varphi)$ — опорные функции, $R(\Phi)$, $r(\varphi)$ — радиусы кривизны указанных кривых. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [H(\Phi)-h(\varphi)][R(\Phi)-r(\varphi)]\, d\Phi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [H(\Phi)R(\Phi)+h(\varphi)r(\varphi)-h(\varphi)R(\Phi)-H(\Phi)r(\varphi)]\, d\Phi\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\cdot 2F + 2\pi\cdot 2f - lL - Ll.$$

Согласно предположению $H(\Phi) \geqslant h(\varphi)$, $R(\Phi) \geqslant r(\varphi)$ для всех пар значений Φ, φ. Следовательно, последнее выражение неотрицательно.

7. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 162, 1918.] Пусть $H(\Omega)$, $h(\omega)$ — опорные функции, $R(\Omega)$, $R'(\Omega)$, $r(\omega)$, $r'(\omega)$ — главные радиусы кривизны указанных выпуклых поверхностей. Тогда

$$\iint [H(\Omega)-h(\omega)][R(\Omega)R'(\Omega)-r(\omega)r'(\omega)]\, d\Omega\, d\omega =$$

$$= \iint [H(\Omega)R(\Omega)R'(\Omega)+h(\omega)r(\omega)r'(\omega)-h(\omega)R(\Omega)R'(\Omega)-$$

$$- H(\Omega)r(\omega)r'(\omega)]\, d\Omega\, d\omega = 4\pi\cdot 3V + 4\pi\cdot 3v - mO - Mo,$$

$$\iint [H(\Omega)-h(\omega)]\{[R(\Omega)-r(\omega)][R'(\Omega)-r'(\omega)]+$$

$$+ [R(\Omega)-r'(\omega)][R'(\Omega)-r(\omega)]\}\, d\Omega\, d\omega =$$

$$= \iint \{2H(\Omega)R(\Omega)R'(\Omega) - 2h(\omega)r(\omega)r'(\omega) + 2H(\Omega)r(\omega)r'(\omega) +$$

$$+ [R(\Omega)+R'(\Omega)]h(\omega)[r(\omega)+r'(\omega)] - 2h(\omega)R(\Omega)R'(\Omega) -$$

$$- [r(\omega)+r'(\omega)]H(\Omega)[R(\Omega)+R'(\Omega)]\}\, d\Omega\, d\omega =$$

$$= 6\cdot 4\pi V - 6\cdot 4\pi v + 2Mo + 2M\cdot 2o - 2mO - 2m\cdot 2O.$$

Согласно предположению

$$H(\Omega) \geqslant h(\omega), \quad \operatorname{Min}[R(\Omega),\ R'(\Omega)] \geqslant \operatorname{Max}[r(\omega),\ r'(\omega)]$$

для всех пар значений Ω, ω. Следовательно, оба выписанных двойных интеграла неотрицательны.

8. В формуле Гаусса

$$\iint (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

полагаем

$$X = 1,\ Y = 0,\ Z = 0, \text{ соотв. } X = 0,\ Y = -z,\ Z = y.$$

9. См. 10.

10. [См. Nouv. Ann. de Math., серия 4, т. 16, стр. 140, 1916.] Рассмотрим параллельную поверхность на расстоянии ρ, точки которой так сопряжены с точками заданной поверхности, что в соответствующих друг другу точках нормаль общая. Координаты, направляющие косинусы нормали, главные радиусы кривизны и элементы поверхности в сопряженных точках заданной и параллельной к ней поверхностей будут соответственно равны

$$\begin{array}{lll}
x,\quad y,\quad z, & & x+\rho\cos\alpha,\ \ y+\rho\cos\beta,\ \ z+\rho\cos\gamma \\
\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma & & \cos\alpha \qquad \cos\beta \qquad \cos\gamma \\
R_1,\ R_2 & & R_1+\rho, \qquad R_2+\rho \\
dS & & \dfrac{(R_1+\rho)(R_2+\rho)}{R_1R_2}\,dS.
\end{array}$$

Применяя 8 к параллельной поверхности, получаем

$$\iint \cos\alpha\left(1+\frac{\rho}{R_1}\right)\left(1+\frac{\rho}{R_2}\right) dS = 0,\ \ldots,$$

$$\iint (y\cos\gamma - z\cos\beta)\left(1+\frac{\rho}{R_1}\right)\left(1+\frac{\rho}{R_2}\right) dS = 0,\ \ldots$$

Рассматривая ρ как переменное и приравнивая коэффициенты при ρ^2, ρ, 1 нулю, снова получаем 10, 9, соотв. 8.

11. Совершаем предельный переход из 9, или применяем 8 к «параллельной поверхности» полиэдра и рассматриваем коэффициенты при ρ, или же, наконец, следующим образом: разлагаем силу K на две компоненты по граням полиэдра, сходящимся на ребре k; получаемая при этом новая система сил оставляет каждую грань в отдельности в равновесии, по аналогу теоремы 8 для плоскости.

12. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 25, стр. 337, 1917. Решение — K. Scholl, там же, серия 3, т. 28, стр. 180, 1920.]

Первое решение. Пусть координаты и направляющие косинусы главных нормалей будут соответственно

$$x,\ y,\ z;\ l = r\frac{d^2x}{ds^2},\quad m = r\frac{d^2y}{ds^2},\quad n = r\frac{d^2z}{ds^2};$$

при описывании кривой s изменяется от 0 до L; x, y, z и их производные принимают при $s=0$ и $s=L$ одинаковые значения. Имеем

$$\int_0^L l\frac{ds}{r} = \int_0^L \frac{d^2x}{ds^2}\,ds = \left[\frac{dx}{ds}\right]_0^L = 0,$$

$$\int_0^L (ny - mz)\frac{ds}{r} = \int_0^L \left(y\frac{d^2z}{ds^2} - z\frac{d^2y}{ds^2}\right) ds = \left[y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right]_0^L = 0.$$

Второе решение. Семейство сфер с радиусом ρ и точками кривой в качестве центров имеет огибающей «канальную поверхность»; применяем к ней **8** и заменяем систему сил, действующих на поверхность, системой сил, действующих на кривую.

13. [K. Löwner.] В обозначениях первого решения задачи **12** текущие координаты сферической индикатрисы имеют вид

$$\xi = \frac{dx}{ds},\quad \eta = \frac{dy}{ds},\quad \zeta = \frac{dz}{ds}.$$

Имеем

$$\int_0^L \xi\, ds = \int_0^L \eta\, ds = \int_0^L \zeta\, ds = 0.$$

Следовательно, вообще для любой системы вещественных чисел α, β, γ

$$\int_0^L (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, ds = 0.$$

Существуют по меньшей мере два значения s, для которых $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$.

14. [K. Löwner.] Вследствие условия 3) $F(x)$ принимает как вблизи точки a, так и вблизи точки b отрицательные значения. Если бы поэтому $F(x)$ была монотонной, то тогда мы имели бы $F(x) < 0$, $f''(x) < 0$ во всем интервале $a < x < b$. Пусть ξ, $a < \xi < b$, — единственный нуль производной $f'(x)$, так что $f'(x)$ от a до ξ положительна и от ξ до β отрицательна. Интеграл

$$\int_a^x F(x) f(x) f'(x)\, dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+[f'(x)]^2} \qquad (*)$$

сходится, и вследствие условия 3)

$$\int_a^b F(x) f(x) f'(x)\,dx = \int_a^\xi F(x) f(x) f'(x)\,dx + \int_\xi^b F(x) f(x) f'(x)\,dx = 0.$$

Отсюда следует, поскольку все множители сохраняют между a и ξ, соотв. между ξ и b, постоянный знак, что

$$F(x_1)\int_a^\xi f(x) f'(x)\,dx + F(x_2)\int_\xi^b f(x) f'(x)\,dx =$$
$$= (F(x_1) - F(x_2))\frac{[f(\xi)]^2}{2} = 0, \qquad a < x_1 < \xi < x_2 < b,$$

т. е. $F(x_1) = F(x_2) = -c$, $c > 0$. Значит, $F(x) = -c$ в интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Из двух последних равенств следует, что

$$\int_a^{x_1} (F(x) - F(x_1)) f(x) f'(x)\,dx + \int_{x_2}^b (F(x) - F(x_2)) f(x) f'(x)\,dx = 0.$$

Так как оба подинтегральных выражения имеют один и тот же постоянный знак, то $F(x) = -c$ во всем интервале $a < x < b$.

Из (*) получаем

$$-c\frac{[f(x)]^2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+[f'(x)]^2}, \quad f'(x) = \pm\frac{\sqrt{c^{-1} - [f(x)]^2}}{f(x)},$$

где знак $+$ принимается в интервале $a < x < \xi$ и знак $-$ принимается в интервале $\xi < x < b$. Во всем интервале интегрирования должно выполняться неравенство $[f(x)]^2 \leqslant c^{-1}$. Интегрирование дает

$$x - a = \sqrt{c^{-1}} - \sqrt{c^{-1} - [f(x)]^2}, \quad a < x < \xi,$$
$$b - x = \sqrt{c^{-1}} - \sqrt{c^{-1} - [f(x)]^2}, \quad \xi < x < b.$$

Из непрерывности функции $f(x)$ вытекает, что $\xi - a = b - \xi$, $\xi = \frac{a+b}{2}$; далее $[f(\xi)]^2 = c^{-1}$, ибо в противном случае дифференцирование по x дало бы $1 = -1$. Следовательно, $\xi - a = \sqrt{c^{-1}}$, откуда

$$c^{-1} = (\xi - a)^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2$$

и

$$f(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

15. [K. Löwner. См. также формулы (89) в H. Minkowski, Ges. Abhandlungen, т. 2, стр. 263, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.] Пусть меридианная кривая задана уравнением $y = f(x)$,

$a \leqslant x \leqslant b$. Для вычисления гауссовой кривизны $K(x) = K_1(x) K_2(x)$ в точках параллели, соответствующей данному значению x, замечаем, что меридианное сечение дает в качестве одной из главных кривизн

$$K_1(x) = \frac{f''(x)}{(1+[f'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}},$$

вторая же главная кривизна получается [*теорема Менье*; см. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2-е изд., т. 1, стр. 57—58, Berlin, J. Springer, 1924 *)] путем умножения кривизны соответствующей параллели на косинус угла между плоскостью этого сечения и нормалью к поверхности:

$$K_2(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}.$$

$f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы **14.**

16. [По J. Kürschák'у.]

$$(\beta-\gamma)(b-c)+(\gamma-\alpha)(c-a)+(\alpha-\beta)(a-b) \geqslant 0,$$
$$\alpha(b+c-a)+\beta(c+a-b)+\gamma(a+b-c) \geqslant 0.$$

17. [G. Pólya, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 27, стр. 162, 1918.] Обозначим ребра замкнутого выпуклого полиэдра через $k_1, k_2, \ldots, k_m$, внутренние углы при этих ребрах, образованные сходящимися в них гранями, — через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Мерой M совокупности всех плоскостей, пересекающих полиэдр, будет

$$M = \frac{1}{2}[(\pi-\alpha_1) k_1 + (\pi-\alpha_2) k_2 + \ldots + (\pi-\alpha_m) k_m].$$

[G. Pólya, Wien. Ber., т. 126, стр. 319, 1917.] В качестве предельного случая получаем, что мера совокупности всех плоскостей в пространстве, пересекающих выпуклый плоский полигон, равна $\frac{\pi}{2} \times$ периметр этого полигона. Обратимся теперь к тетраэдру, $m=6$. Пусть площади четырех граней этого тетраэдра будут U_1, U_2, U_3, U_4. Мера совокупности всех плоскостей, пересекающих тетраэдр, не задевая его первой грани, будет равна $M - \frac{\pi}{2} U_1$ и т. д. Пусть мера совокупности тех плоскостей, которые пересекают все четыре грани, будет T. Тогда

$$M = \left(M - \frac{\pi}{2} U_1\right) + \left(M - \frac{\pi}{2} U_2\right) + \left(M - \frac{\pi}{2} U_3\right) + \left(M - \frac{\pi}{2} U_4\right) + T.$$

---

*) В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I, ОНТИ, 1935, стр. 100—101.

Требуемое неравенство получается путем преобразования неравенства

$$0<T<M.$$

Выражение, стоящее в середине этого неравенства, приближается к его крайним членам, когда тетраэдр стягивается в отрезок: к правому, когда к каждому концу отрезка стремятся две вершины тетраэдра, к левому — когда к одному из концов отрезка стремятся три вершины.

18. [E. Steinitz, задача, Arch. d. Math. u. Phys., серия 3, т. 19, стр. 361, 1912. Решение — W. Gaedecke, там же, серия 3, т. 21, стр. 290, 1913.] Поместим P_2 в нулевую точку, P_0 — на положительную вещественную ось, P_1 — на положительную мнимую ось. Пусть гипотенуза P_0P_1 имеет длину d, $d>0$, угол $P_2P_0P_1$ равен α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, вектор $P_{n-1}P_n$ представляется комплексным числом z_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$; $P_{-1}=P_2$. Далее, пусть $z_n=r_ne^{i\vartheta_n}$, $r_n>0$, $0\leqslant\vartheta_n<2\pi$. r_0, r_1, r_2, ... будут иметь соответственно значения

$$d\cos\alpha,\ \underbrace{d,\ d\sin\alpha, d\sin\alpha\cos\alpha,\ d\sin^2\alpha\cos\alpha,}\ \underbrace{d\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\ d\sin^3\alpha\cos^2\alpha,}\ \ldots,$$

а ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ... — значения

$$0,\ \underbrace{\pi-\alpha,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \pi,}\ \underbrace{2\pi-\alpha,\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}-\alpha,\ 0,}\ \pi-\alpha,\ \ldots$$

Задача приводится к вычислению суммы бесконечного ряда

$$z_0+z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots=$$
$$=z_0+\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{1+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{d\cos^3\alpha\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}+i\frac{d\cos^2\alpha\sin\alpha}{1+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}.$$

19. [По A. Hirsch'y.] Пусть P_1, P_2, P_1', P_2' — точки, в которых прямая пересечения обеих плоскостей встречает заданные шаровые поверхности. Указанная прямая имеет уравнения

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-D & -Ax & C\\ -D' & -A'x & C'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}B & C\\ B' & C'\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}B & -D & -Ax\\ B' & -D' & -A'x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}B & C\\ B' & C'\end{vmatrix}}.$$

Подставив эти выражения в уравнения шаровых поверхностей, получим квадратные уравнения

$$A_0x^2+A_1x+A_2=0,\quad A_0'x^2+A_1'x+A_2'=0, \tag{1}$$

из которых последовательно получаем координаты x точек P_1, P_2, P_1', P_2'. Аналогичным образом получаем уравнения, доставляющие соответственно координаты y и z этих точек:

$$B_0y^2+B_1y+B_2=0, \qquad B'_0y^2+B'_1y+B'_2=0, \tag{2}$$
$$C_0z^2+C_1z+C_2=0, \qquad C'_0z^2+C'_1z+C'_2=0. \tag{3}$$

Здесь

$$A_0=A'_0=B_0=B'_0=C_0=C'_0=\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2.$$

Это выражение тогда и только тогда равно нулю, когда плоскости параллельны. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ будут соответственно результанты уравнений (1), (2), (3). Тогда сумма $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}$ удовлетворяет требованию задачи.

а) Пусть, в самом деле, обе окружности сцеплены. Тогда пара точек P_1P_2 будет разделяться парой точек $P'_1P'_2$; то же имеет, следовательно, место и для проекций этих точек на каждую из координатных осей, за исключением, быть может, одной оси или двух, если прямая P_1P_2 перпендикулярна к ним: тогда все проекции сливаются в одну точку. Как явствует из взаимного расположения корней квадратных уравнений (1), (2), (3), все результанты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ во всяком случае отрицательны (в крайнем случае один или два равны нулю) [V 194] и, значит, отрицательна и их сумма.

б) Пусть, обратно, $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}<0$. Тогда по крайней мере один из трех результантов отрицателен; пусть, скажем, $\mathfrak{A}<0$. Тогда $A_0>0$, $A'_0>0$, следовательно, плоскости не параллельны, и точки P_1, P_2, P'_1, P'_2 однозначно определены. Проекция пары точек P_1P_2 на ось x разделяет аналогичную проекцию пары $P'_1P'_2$ [V 194], и то же имеет место и для самих точек.

20. [A. Hirsch.] Особая точка (x_1, x_2, x_3) конического сечения

$$\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{rs}X_rX_s=0$$

удовлетворяет уравнениям

$$a_{\nu 1}x_1+a_{\nu 2}x_2+a_{\nu 3}x_3=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3).$$

[G. Kowalewski, Einführung in die analytische Geometrie, стр. 202, Leipzig, Veit, 1910.] В нашем случае, полагая $x_1+x_2+x_3=-x_0$, получаем $\lambda_0x_0=\lambda_1x_1=\lambda_2x_2=\lambda_3x_3$ и уравнение интересующего нас выродившегося конического сечения (пары прямых) будет

$$x_1x_2x_3X_0^2+x_0x_2x_3X_1^2+x_0x_1x_3X_2^2+x_0x_1x_2X_3^2=0,$$

причем $X_0+X_1+X_2+X_3=0$. Пусть dx_ν $(\nu=0,\ 1,\ 2,\ 3)$, dx_0+ $+dx_1+dx_2+dx_3=0$ — элемент интегральной кривой; тогда, полагая $X_\nu=x_\nu+dx_\nu$, находим

$$x_1x_2x_3(dx_0)^2+x_0x_2x_3(dx_1)^2+x_0x_1x_3(dx_2)^2+x_0x_1x_2(dx_3)^2=0. \tag{1}$$

Это и является дифференциальным уравнением искомого семейства кривых. Замена переменных $x_\nu = y_\nu^2$ дает

$$(y_0 y_1 y_2 y_3)^2 [(dy_0)^2 + (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2] = 0, \qquad (1')$$

откуда прежде всего в качестве особого решения получаем $x_\nu = 0$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$). Общее решение получается из уравнений

$$\begin{aligned} (dy_0)^2 + (dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2 &= 0, \\ y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 0, \\ y_0 dy_0 + y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая y_0, получаем

$$\begin{aligned} (y_0 dy_0)^2 = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) [(dy_1)^2 + (dy_2)^2 + (dy_3)^2] &= \\ = (y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3)^2; \end{aligned}$$

и, значит,

$$(y_2 dy_3 - y_3 dy_2)^2 + (y_3 dy_1 - y_1 dy_3)^2 + (y_1 dy_2 - y_2 dy_1)^2 = 0.$$

Положим

$$z_1 = y_2 y_3' - y_3 y_2', \quad z_2 = y_3 y_1' - y_1 y_3', \quad z_3 = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

где штрихи обозначают дифференцирование по параметру. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \sum y_r z_r = 0, \qquad & \sum y_r z_r' = 0, \\ \sum z_r z_r = 0, \qquad & \sum z_r z_r' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

причем суммирование производится по $r = 1, 2, 3$. Отсюда заключаем, что $z_1' : z_2' : z_3' = z_1 : z_2 : z_3$, за исключением того случая, когда $z_1 : z_2 : z_3 = y_1 : y_2 : y_3$. Но в этом последнем случае $y_0 = 0$, что снова приводит к $x_0 = 0$. В общем случае интегрирование дает

$$z_1 : z_2 : z_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3,$$

μ_r — постоянные, $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 > 0$, значит, вследствие уравнений (2) $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0$. Полагая $\mu_r^2 = \varkappa_r$ ($r = 1, 2, 3$), после освобождения от иррациональностей получаем

$$\begin{aligned} (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3)^2 - 2 (\varkappa_1^2 x_1^2 + \varkappa_2^2 x_2^2 + \varkappa_3^2 x_3^2) &= 0, \\ \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение представляет семейство конических сечений, вписанных в четырехсторонник $X_0 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. Действительно, уравнение касательной в точке (x_1, x_2, x_3) будет

$$\begin{aligned} (\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3)(\varkappa_1 X_1 + \varkappa_2 X_2 + \varkappa_3 X_3) &- \\ - 2 (\varkappa_1^2 x_1 X_1 + \varkappa_2^2 x_2 X_2 + \varkappa_3^2 x_3 X_3) &= 0. \end{aligned}$$

При $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, отличных от нуля, берем вместо (x_1, x_2, x_3) последовательно $(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ $(0, \varkappa_2^{-1}, \varkappa_3^{-1})$, $(\varkappa_1^{-1}, 0, \varkappa_3^{-1})$, $(\varkappa_1^{-1}, \varkappa_2^{-1}, 0)$.

21. [A. Hirsch.]

$$\nu = \frac{x}{\sin\tau} + \frac{y}{\cos\tau},$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \rho\cos\tau = 2n\,(x\operatorname{ctg}\tau + y),$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \rho\sin\tau = 2n\,(x + y\operatorname{tg}\tau).$$

Исключение y дает

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{2n}{\sin\tau\cos\tau}\frac{dx}{d\tau} + \frac{2n}{\sin^2\tau}x = 0.$$

Вводим сначала $u = -\operatorname{tg}^2\tau$ в качестве независимого, затем $\xi = xu^{-\frac{1}{2}}$ в качестве зависимого переменного. Мы получаем тогда дифференциальное уравнение

$$u(1-u)\frac{d^2\xi}{du^2} + \left[\frac{3}{2} - n - \left(\frac{1}{2} + 1 - n + 1\right)u\right]\frac{d\xi}{du} - \frac{1}{2}(1-n)\xi = 0,$$

которому удовлетворяет гипергеометрический ряд [VIII 146]

$$\xi = F\left(\frac{1}{2},\ 1-n,\ \frac{3}{2}-n,\ u\right).$$

Этим задача принципиально разрешена. На основании полученного мы можем теперь, в частности, рассмотреть вопрос о рациональных решениях. Чтобы получить их, введем в качестве новой зависимой переменной $z = x(\operatorname{tg}\tau)^{-n}$, а затем в качестве независимой переменной $v = i\operatorname{ctg}2\tau$. Это дает дифференциальное уравнение

$$(1-v^2)\frac{d^2z}{dv^2} - 2v\frac{dz}{dv} + n(n-1)z = 0,$$

одним из частных решений которого является $z = P_{n-1}(v)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ [VI 90]. Мы получаем, таким образом, выражения

$$x = \frac{1}{i}(i\operatorname{tg}\tau)^n P_{n-1}(i\operatorname{ctg}2\tau),$$

$$y = (i\operatorname{tg}\tau)^n P_n(i\operatorname{ctg}2\tau),$$

рациональные относительно $\operatorname{tg}\tau$. В частности, при $n = 1$ получаем в качестве частного решения параболу

$$x = \operatorname{tg}\tau,\quad y = \frac{\operatorname{tg}^2\tau - 1}{2},\quad 2y = x^2 - 1.$$

22. [A. Hirsch.]

1. Уравнение поверхности H получается путем исключения t из уравнений

$$F=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}\equiv\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu^2}{(a_\nu-t)^2}-1=0. \tag{2}$$

Запишем (1) в форме

$$t^4-\left(\sum a_1\right)t^3+\left[\sum(a_2a_3+x_1^2)\right]t^2-$$
$$-\left[a_1a_2a_3+\sum(a_2+a_3)x_1^2\right]t+\sum a_2a_3x_1^2\equiv$$
$$\equiv A_0t^4+4A_1t^3+6A_2t^2+4A_3t+A_4=0,$$

где индексы при суммировании циклически чередуются, и пусть Δ будет дискриминант полученного полинома относительно t. Тогда $\Delta=0$ будет уравнением поверхности H. Но теперь, полагая

$$I_2=A_0A_4-4A_1A_3+3A_2^2,$$

$$I_3=\begin{vmatrix}A_0 & A_1 & A_2\\ A_1 & A_2 & A_3\\ A_2 & A_3 & A_4\end{vmatrix}=A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_2^3-A_0A_3^2-A_1^2A_4$$

[Cesàro, стр. 387 *)], будем иметь

$$\Delta=I_2^3-27I_3^2=$$
$$=27A_2^4(A_0A_4-4A_1A_3)+54A_2^3(A_0A_2A_4+2A_1A_2A_3-A_0A_3^2)+Q,$$

где Q самое большее степени 8. Поэтому старший член дискриминанта Δ будет совпадать со старшим членом выражения

$$27A_2^3(3A_2A_4-2A_3^2),$$

т. е. будет равен

$$27\left(\frac{\sum x_1^2}{6}\right)^3\left[\frac{\sum x_1^2}{2}\sum a_2a_3x_1^2-\frac{1}{8}\left(\sum(a_2+a_3)x_1^2\right)^2\right]=$$
$$=-\frac{1}{64}\left(\sum x_1^2\right)^3\left[\sum(a_2-a_3)^2x_1^4+2\sum(a_1-a_2)(a_1-a_3)x_2^2x_3^2\right].$$

2. Пусть dx_1, dx_2, dx_3 — линейный элемент поверхности H; тогда [(2)]

$$\sum_{\nu=1}^{3}\frac{x_\nu\,dx_\nu}{a_\nu-t}=0. \tag{3}$$

*) Чезаро, ч. I, стр. 501.

Отсюда для направляющих косинусов X_1, X_2, X_3 надлежащим образом ориентированной нормали к поверхности H получаем

$$X_\nu = \frac{x_\nu}{a_\nu - t} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

Координаты касательной плоскости в точке x_1, x_2, x_3 будут иметь вид

$$u_\nu = \frac{X_\nu}{x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Вследствие уравнения (1) $x_\nu = t(a_\nu - t)\,u_\nu$ $(\nu = 1,\ 2,\ 3)$. Подставляя эти значения в (1), (2) и исключая t, получаем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} a_\nu u_\nu^2\right)^2 - 4\sum_{\nu=1}^{3} u_\nu^2 = 0.$$

3. Пусть ρ $(\neq 0)$ — один из главных радиусов кривизны поверхности H в точке $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Тогда линейный элемент вдоль соответствующей линии кривизны на H удовлетворяет уравнениям [W. Blaschke, l. c. 15, стр. 63 *)]

$$dx_\nu + \rho\, dX_\nu = 0 \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

или согласно 2

$$dx_\nu + \rho\, dt\, \frac{x_\nu}{(a_\nu - t)(a_\nu - t + \rho)} = 0 \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{5}$$

Вследствие уравнения (3) отсюда вытекает

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{(a_\nu - t)^2 (a_\nu - t + \rho)} = 0. \tag{6}$$

Это — квадратное уравнение для обоих главных радиусов кривизны. Оно может быть в силу тождества

$$\frac{1}{a^2(a+\rho)} = \frac{1}{\rho}\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{a} + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{a+\rho}$$

и уравнений (1), (2) записано так:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{a_\nu - t + \rho} - (t - \rho) = 0. \tag{6'}$$

*) В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I, ОНТИ, 1935, стр. 107.

Комбинируя полный дифференциал левой части уравнения (6′) с (5), получаем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{(a_\nu - t + \rho)^2} - 1\right)(3\,dt - d\rho) = 0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7), получающееся при приравнивании нулю первого множителя, не годится: оно означало бы, что уравнение $F(x, y, z, \lambda) = 0$ обладает двумя различными двукратными корнями t, $t - \rho$ ($\rho \neq 0$), что невозможно, ибо $F(\lambda)$ имеет нечетное количество нулей как в интервале (a_1, a_2), так и в интервале (a_2, a_3). Следовательно, вдоль линии кривизны, соответствующей ρ, имеем $\rho = 3t + \mathrm{const}$. Другой радиус кривизны [(6)] равен $t + \mathrm{const}$.

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: если $w = u$, $w = v$ означают корни уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{(a_\nu - t)^2 (a_\nu - w)} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{\nu=1}^{3} \frac{x_\nu^2}{a_\nu - w} - w = 0, \tag{8}$$

то линии кривизны будут иметь уравнения $u = \mathrm{const.}$, $v = \mathrm{const.}$ Параметры u, v являются теми двумя корнями уравнения $F(x, y, z, w) = 0$, которыми это последнее обладает наряду с двукратным корнем $w = t$.

Линия кривизны $u = u_0$ лежит на поверхности $t = u_0$: поверхности семейства касаются огибающей поверхности H вдоль своих линий кривизны.

23. [A. Hirsch.] В силу **22** (8), (2) имеем

$$\frac{x_1^2}{(a_1 - t)^2} = \frac{(a_1 - u)(a_1 - v)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \ldots$$

Комбинируя это с **22** (1), получаем

$$2t + u + v = a_1 + a_2 + a_3$$

и

$$x_1 = \sqrt{\frac{(a_1 - u)(a_1 - v)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}}\left(a_1 + \frac{u + v - (a_1 + a_2 + a_3)}{2}\right), \ldots$$

Определение точек пересечения линии кривизны $v = \mathrm{const.}$ с плоскостью приводит к уравнению вида

$$c_0 + \sum_{\nu=1}^{3} c_\nu \sqrt{a_\nu - u}\,(u + b_\nu) = 0,$$

где c_0, a_ν, b_ν, c_ν — постоянные, что после освобождения от иррациональностей приводится к уравнению 12-й степени относительно u.

24. [A. Hirsch.]

1. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты центра кривизны, соответствующего ρ; тогда [W. Blaschke, l. c. 15, стр. 63, (47) *)]

$$\xi_\nu = x_\nu + \rho X_\nu = x_\nu \frac{a_\nu - t + \rho}{a_\nu - t} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

[22 (4)], следовательно [22 (2), (6)],

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\xi_\nu^2}{(a_\nu - t + \rho)^2} = 1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\xi_\nu^2}{(a_\nu - t + \rho)^3} = 0.$$

Центральная поверхность для H является, таким образом, огибающей поверхностью семейства эллипсоидов

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\xi_\nu^2}{(a_\nu - s)^2} - 1 = 0.$$

2. Пусть h — постоянная и

$$\bar{x}_\nu = x_\nu + hX_\nu = x_\nu \frac{a_\nu - t + h}{a_\nu - t} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

Тогда [22 (1), (2)]

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\bar{x}_\nu^2}{(a_\nu - t + h)^2} = 1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\bar{x}_\nu^2}{a_\nu - t + h} = t + h.$$

Параллельная поверхность для H на расстоянии h является, таким образом, огибающей поверхностью семейства поверхностей второго порядка

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\bar{x}_\nu^2}{a_\nu - s} = s + 2h.$$

25. [E. E. Levi, C. R., т. 153, стр. 799, 1911.] Пусть $x'' - x'$, $y'' - y'$ суть целые числа; тогда через точки x', y' и x'', y'' проходят равные и равнорасположенные, т. е. получаемые друг из друга простым смещением, интегральные кривые. Рассмотрим

*) В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, т. I, ОНТИ, 1935, стр. 107.

интегральную кривую $y=f(x)$, проходящую через начало координат [т. е. для которой $f(0)=0$], и обе конгруэнтные с ней кривые, проходящие через целые точки $x=m$, $y=[f(m)]$ и $x=m$, $y=[f(m)]+1$. Так как две различные интегральные кривые не пересекаются, то

$$[f(m)]+f(n)\leqslant f(m+n)<[f(m)]+1+f(n) \quad (m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Последовательность $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... удовлетворяет предположениям задачи I 99. Добавим, что на тех же основаниях

$$[f(-n)]+f(2n)\leqslant f(n)<[f(-n)]+1+f(2n),$$

$$-\frac{1}{n}<\frac{f(n)}{n}+\frac{f(-n)}{-n}-2\frac{f(2n)}{2n}<\frac{1}{n}$$

и далее $|f(x)-f([x])|<M$, где M — максимум функции $|F(x,\ y)|$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

I. Определения. Теоремы. Формулы

II. Темы

Ниже приводятся группы задач, связанных между собой по теме, но расположенных разрозненно *). Римскими цифрами указаны отделы, следующими за ними жирными арабскими — номера задач.

Арифметическое, геометрическое и гармоническое средние: V **61**.

Арифметическое, геометрическое и гармоническое средние аналитических функций на окружностях и кругах: IV **64—66** (См. также «Формула Иенсена».)

Бернуллиевы числа: VIII **182**, **262**.

Бесселевы функции: IV **73**; V **159**, **168**.

Биномиальные коэффициенты. Теоретико-числовые свойства: VIII, гл. 3, §§ 1—2.

Выпуклое отображение: IV **162**, **163**.

*) См. также задачи на те же темы в первой части.