

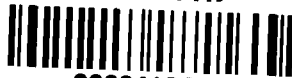
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКИЙ ИНСТИТУТ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА,  
ИОНОСФЕРЫ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

В. Л. Поляченко, А. М. Фридман

# РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

ФБ СПбГУ



0000410605



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1976

**Равновесие и устойчивость гравитирующих систем.** Поляченко В. Л., Фридман А. М. М., «Наука», 1976 г., 447 с.

Настоящая монография является первой в мировой литературе попыткой систематического изложения теории фигур равновесия и устойчивости «сжимаемых», прежде всего бесстолкновительных, гравитирующих систем.

Многие результаты, изложенные в книге, получены авторами с сотрудниками.

В качестве астрофизических приложений выбраны такие актуальные вопросы, как проблема образования спиральных рукавов галактик, закон планетных расстояний, вопросы устойчивости систем типа колец Сатурна и др.

Издание рассчитано на физиков, механиков, математиков, астрофизиков, интересующихся современным состоянием науки о равновесии и устойчивости гравитирующих систем.

Ил. 79, табл. 5, библиогр. 377 назв.

Ответственный редактор

член-корреспондент АН СССР

В. Е. СТЕПАНОВ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

По-видимому, любой специалист по физике плазмы, имеющий дело со средой, в которой сила взаимодействия между частицами зависит от расстояния так же, как и сила взаимодействия между звездами и любыми гравитирующими массами, достаточно уверенно скажет, что роль *коллективных эффектов* в динамике гравитирующих систем должна быть определяющей. Однако среди самих астрономов эта точка зрения получила признание лишь в самое последнее время. Так, еще сравнительно недавно серьезно рассматривались теории спиральной структуры галактик, в которых основную роль играли не коллективные эффекты, а свойства орбит отдельных звезд. В этой связи нам хотелось бы обратить внимание читателя на различие научных традиций у физиков-плазмистов и астрономов, вследствие которых первые объясняют затягивание работ по осуществлению реакции управляемого термоядерного синтеза «пронисками» коллективных процессов в плазме, в то время как многие поколения астрономов рассчитывали движения звезд, последовательность солнечных и лунных затмений и ряд других тонких эффектов на много десятилетий вперед, прекрасно пользуясь для этой цели лишь законами ньютоновской механики. Поэтому на месте астронома, возможно, нелегко согласиться с тем, что эволюцией звездных систем управляют в основном коллективные эффекты и привычные в астрономии методы теоретической механики должны здесь уступить место методу самосогласованного поля.

Простейшим явлением, где существенны коллективные эффекты, можно считать *малые колебания* среды. Систематическое изложение теории *малых колебаний, равновесия и устойчивости* гравитирующих систем как раз и является целью книги. Излагаемая ниже теория уже сейчас имеет многообразные применения. Особенно широкую известность получили ее приложения к проблеме спиральной структуры галактик, применение результатов теории устойчивости гравитирующего диска с центральным телом к задаче о законе планетных расстояний или о критической массе колец Сатурна.

В этой книге мы интересовались преимущественно системами, состоящими из большого числа *не сталкивающихся* между собой гравитирующих масс. К числу таких *бесстолкновительных* гравитирующих систем прежде всего относятся звездные системы различного масштаба (например, галактики или шаровые скопления звезд).

Теоретические исследования по звездной динамике, в частности по проблеме устойчивости звездных систем, поднялись на совершенно новый

уровень после проникновения в эту область методов исследования, ранее разработанных в физике плазмы. Здесь уместно отметить первые исследования коллективных эффектов в гравитирующей среде, выполненные в работах Антонова [4], Линден-Белла [281], Свита [330] и других. В них было введено представление о неустойчивости как о самопроизвольной раскачке коллективных мод колебаний среды, широко используемое в теории плазменных неустойчивостей. Таким образом из теории устойчивости гравитирующих систем оказались вытесненными устаревшие работы по устойчивости орбит индивидуальных частиц, и на смену «одночастичному» способу описания ньютоновской механики пришел статистический способ описания систем многих частиц, использующий понятие функции распределения, удовлетворяющей кинетическому уравнению. Основным методом исследования устойчивости стал обычный в теории плазмы метод *дисперсионного уравнения*. Из теории плазмы были заимствованы и многие методы *решения* кинетического уравнения. Примером может служить метод «интегрирования по траекториям», широко используемый в этой книге. Наконец, в теории гравитационной устойчивости привычными стали различные приближенные методы исследования, такие, как метод ВКБ (или локального анализа) и т. п.

Вслед за периодом всеобщего увлечения плазменными методами и несколько одностороннего их применения в гравитации последовал период более внимательного осмысливания возможностей теории, выявивший также и глубокие различия между плазмой и гравитирующей средой. Естественно, что они обусловлены различием в знаке взаимодействия электрически заряженных частиц и тяготеющих масс и отсутствием экранировки гравитационного притяжения.

Вопрос об аналогии между плазменной и гравитирующей средами мы рассматриваем во Введении. Там же приведены основные уравнения теории и обсуждается проблема гравитационной (*джинсовской*) неустойчивости *однородной* среды.

В главе I, которая также носит вводный характер, излагается теория устойчивости простейшей гравитирующей системы — однородного бесстолкновительного *плоского* слоя. На этом примере, в частности, проще всего пояснить применяемые в дальнейшем методы.

Основное содержание книги составляют главы II—V, посвященные исследованию равновесия и устойчивости четырех «классических» фигур равновесия: цилиндра, шара, эллипсоида и диска.

В первых параграфах каждой из этих глав дается обзор результатов теории *равновесия* соответствующих систем. Следует отметить, что теория равновесия бесстолкновительных гравитирующих систем стала развиваться намного раньше теории устойчивости. В становлении этой теории основную роль сыграли работы Эддингтона [196, 197], Джинса [241, 242], Камма [179, 180], Фримана [202—204] и других. Из работ советских исследователей прежде всего следует выделить работы Кузмина [58—62], Велтманна [32], Зельдовича и Бисноватого-Когана [21—23].

Малые возмущения *цилиндрических* конфигураций рассматриваются в главе II. Исследование устойчивости бесстолкновительного цилиндра относительно произвольных возмущений проведено нами совместно с



Михайловским; с ним же была исследована пучковая неустойчивость в гравитирующей среде [88]. Колебания «желобкового» типа рассматривались авторами (совместно с Шухманом) [112, 115], а также Антоновым [14].

Следующая, III глава посвящена *сферически-симметричным системам*. В этой главе мы излагаем результаты, которые в основном были получены в работах нашей группы и Антонова.

В IV главе дается анализ устойчивости *эллипсоидальных* гравитирующих систем, выполненный авторами совместно с Морозовым и Шухманом.

Проблема устойчивости *дисковых* систем (глава V) привлекла внимание большого числа исследователей.

Если говорить о *приложениях* теории устойчивости гравитирующего диска к проблеме образования спиральной структуры галактик, то здесь основные идеи и выводы принадлежат Линю и Шу [269—272], Калнайсу [250, 289], Тоомре [333, 334], Линден-Беллу [289]. Несмотря на бесспорно интересные результаты, полученные в этой области, у нас не сложилось впечатления, что даже качественно рисуемая сейчас картина образования спиральной структуры галактик является единственно возможной<sup>1</sup>.

Например, в процессе образования спиральной структуры определенная роль может принадлежать *неустойчивостям неджинсовского типа*, которым посвящена VI глава книги. Эти неустойчивости были рассмотрены нами совместно с Морозовым, Файнштейном и Шухманом, а также Бисноватым-Коганом и Михайловским, Марком и Калсрудом.

Глава VII выделена тем, что в ней изложены некоторые вопросы нелинейной теории. Здесь даются основные решенные на сегодняшний день задачи (совместно с А. Б. Михайловским, В. И. Петвиашвили, А. Л. Френкелем, И. Г. Шухманом). Один из параграфов этой главы посвящен результатам теории «блинов», полученным Я. Б. Зельдовичем с сотрудниками. Этот параграф по просьбе авторов написан А. Г. Дорошкевичем.

Некоторые астрофизические приложения теории равновесия и устойчивости гравитирующих систем рассматриваются в последней, VIII главе книги.

По теме каждой из глав мы подобрали ряд задач, раскрывающих те или иные детали механизмов, действующих в гравитирующих системах, либо лежащих несколько в стороне от основного круга вопросов. Задачи снабжены краткими решениями и расположены в конце каждой главы.

Нам показалось целесообразным в каждом параграфе (и даже в разделах внутри параграфов) дать свою нумерацию формул, поскольку ссылки на формулы других параграфов встречаются сравнительно редко.

Мы, конечно, не имели возможности изложить результаты работ всех авторов по интересующей нас теме. При отборе той или иной конкретной работы мы исходили прежде всего из надежности полученных в ней результатов. Поэтому мы опускали работы, выполненные на почти чисто

<sup>1</sup> Это мнение разделяется многими авторами (см., например, [11, 303, 304]). В обзорах по проблеме спиральной структуры галактик также отмечаются трудности существующей теории (например, [84]).

«интуитивном» уровне и недостаточно подкрепленные строгим математическим анализом. Имеется также довольно значительное дублирование результатов. В таких случаях мы, как правило, выбирали оригинальную работу. Возможно, однако, что даже с учетом сделанных оговорок не все работы, заслуживающие упоминания, нашли отражение в книге. Авторам этих работ мы приносим искренние извинения.

Для чтения книги достаточно общего знакомства с кинетическим уравнением и с основными понятиями теории потенциала. Безусловно, читателю, знакомому с началами теории неустойчивостей плазмы, будет легче ориентироваться в содержании книги. Тем не менее при ее написании мы не предполагали у читателя каких-либо специальных знаний по физике плазменных неустойчивостей (или по теории гравитационной устойчивости).

Мы с благодарностью вспоминаем совместную работу с Я. Б. Зельдовичем, А. Б. Михайловским, Р. З. Сагдеевым, без их помощи и советов не было бы этой книги.

Общий план книги обсуждался с Я. Б. Зельдовичем, А. Б. Михайловским и Л. М. Озерным, высказавшими ряд замечаний, которые мы постарались учесть в процессе работы над рукописью. Мы благодарим В. Е. Степанова за поддержку и интерес к работе, а также И. А. Масалову и Т. А. Кузовлеву за большую работу по оформлению рукописи.

\* \* \*

Эта книга возникла из древнейших задач астрономии о формах и эволюции небесных тел и их систем и написана физиками.

Сейчас среди физиков стало традиционным заниматься отдельными разделами астрофизики. Тридцать лет назад это было событием. Именно тогда первым среди советских физиков начал последовательно разрабатывать фундаментальные вопросы астрофизики профессор Д. А. Франк-Каменецкий. Будучи широко эрудированным ученым, Д. А. Франк-Каменецкий сумел заразить своей страстной любознательностью немало начинающих физиков, избравших затем астрофизику своей специальностью.

Памяти Д. А. Франк-Каменецкого мы посвящаем эту книгу.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

Теория гравитационной устойчивости имеет богатую событиями историей, связанную с именами Лапласа, Ковалевской, Максвелла, Ляпунова и Пуанкаре. Эти авторы создали глубокую по содержанию и математически изящную теорию фигур равновесия и устойчивости различных геометрических форм несжимаемой жидкости (шара, эллипсоида, цилиндра, кольца и т. п.). Результаты их исследований подытожены в целом ряде обзоров и монографий [15, 64, 77, 127]. В последнее время эта работа была продолжена Чандрасекаром и его сотрудниками, которые несколько дополнили, а главное систематизировали старые результаты [148].

На первый взгляд парадоксальным является то обстоятельство, что астрономами использовалась до сих пор лишь незначительная часть из огромного наследия классических результатов по теории гравитационной устойчивости, касающаяся заведомо устойчивых фигур равновесия, близких к сферической форме. Математически наиболее красивые результаты (в частности, о наличии критических фигур равновесия двух- и трехосных эллипсоидов, разделяющих устойчивые и неустойчивые решения) не были использованы в приложениях ввиду отсутствия подходящих астрономических объектов. В самом деле, применимость приближения несжимаемой жидкости практически ограничена исследованием фигур равновесия и колебаний планет<sup>1</sup>, вещество которых находится в твердой фазе, являющейся редкостью во Вселенной. Подавляющая часть вещества находится либо в сильно разреженном плазменном (или газообразном) состоянии, либо собрана в звезды, совокупности которых, например галактики, с очень хорошей точностью являются бесстолкновительными. Известные классические результаты, полученные в приближении несжимаемой жидкости, отличаются от результатов, полученных в бесстолкновительном приближении, вообще говоря, качественно уже в теории фигур равновесия (тем более при исследовании их устойчивости). Так, например, известно, что в приближении несжимаемой жидкости не существует вращающихся сферически-симметричных конфигураций: вращающийся шар несжимаемой жидкости должен неизбежно эволюционировать, превращаясь в двухосный эллипсоид (а затем в трехосный эллипсоид, если начальный момент вращения превосходит критический). Напротив, среди бесстолкновительных систем известны устойчивые вращающиеся сферически-симметричные системы [125], что указывает на принципиальное отсутствие связи между формой бесстолкновительной гравитирующей системы и моментом вращения [49, 279].

Таким образом, создание теории гравитационной устойчивости *сжимаемой* среды было связано с необходимостью описания большинства объектов во Вселенной. Решающий шаг в этом направлении был сделан,

<sup>1</sup> Считавшаяся долгое время весьма перспективной программа построения «бифуркационной» теории *происхождения* планет со спутниками (Пуанкаре) или двойных звезд («теория деления» Дарвина) в конце концов оказалась, как известно, несостоятельной [148].

как известно, Джинсом [242], который впервые исследовал устойчивость однородного распределения материи. Ниже мы вернемся к задаче Джинса и рассмотрим ее подробно, но сначала приведем в некоторую систему основные уравнения теории.

Мы будем иметь дело с системами большого числа ( $N$ ) взаимодействующих частиц, которые движутся в соответствии со вторым законом Ньютона. Для описания таких систем применяют различные приближенные модели, которые имеют статистический характер. В них вместо точных положений и скоростей каждой частицы в любой момент времени пользуются сравнительно небольшим количеством определенным образом усредненных величин. Справедливость той или иной модели зависит от характера рассматриваемой системы. Существенны такие параметры, как количество частиц, их плотность, частота столкновений частиц друг с другом и т. п. Помимо этого, способ описания определяется также характерными временами и пространственными масштабами тех процессов, которые мы хотели бы изучать. Уравнения любой модели должны быть при соответствующих предположениях выведены или непосредственно из ньютоновских уравнений движения, или же из другой модели, справедливость которой была ранее установлена на основе все тех же ньютоновских уравнений.

Одной из самых известных моделей является гидродинамика, с помощью которой описывают движение сплошной среды, жидкости или газа. При гидродинамическом способе описания состояние системы характеризуется плотностью  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , давлением  $P(\mathbf{r}, t)$  и скоростью движения жидкости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в данной точке. Основными уравнениями гидродинамики являются уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

и уравнение Эйлера

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}$  — сила на единицу массы, отличная от силы давления, которую мы выделили в правой части (2). Например, в магнитной гидродинамике, описывающей движение хорошо проводящей жидкости,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{H} \mathbf{H}], \quad (3)$$

а для частиц с зарядом  $e$ , движущихся в электрическом и магнитном полях с напряженностями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  представляет собой силу Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right). \quad (4)$$

Мы чаще всего будем понимать под  $\mathbf{F}$  ньютоновскую силу тяготения; тогда

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (5)$$

где  $\Phi$  — гравитационный потенциал.

Гидродинамическое описание при  $\mathbf{F}=0$  замыкается добавлением к (1) и (2) некоторого уравнения состояния вещества. Если же  $\mathbf{F} \neq 0$ , то нужно привлечь еще уравнения, описывающие связь  $\mathbf{F}$  с  $\rho$  и  $\mathbf{v}$ . В случае плазмы это уравнения Максвелла, а в случае гравитирующей среды — уравнение Пуассона ( $G$  — гравитационная постоянная)

$$\Delta \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho. \quad (6)$$

Тепловое движение частиц наиболее корректно учитывается методами, разработанными в кинетической теории. Кинетический способ описания также носит статистический характер (системы, например звездные, рассматриваются как статистические ансамбли), но является более общим по сравнению с гидродинамикой, так что гидродинамические уравнения могут быть выведены из кинетики.

Основной величиной, которая используется при статистическом описании поведения систем многих частиц в кинетике, является функция распределения частиц  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Она имеет смысл массы (или числа) частиц, находящихся в момент времени  $t$  в единичном элементе объема фазового пространства в окрестности точки  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . Таким образом, согласно этому определению масса  $dm$  (или число  $dn$ ) частиц в интервале  $\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}; \mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$  равна

$$dm(dn) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}/d\mathbf{v}. \quad (7)$$

«Частицами» в разных случаях могут быть объекты самой различной природы. Например, ими могут быть звезды, скопления звезд, галактики и даже скопления галактик. Функция  $f$  усреднена по флуктуациям, к которым неизбежно приводят тепловые движения частиц. Заметим, что по определению функция распределения  $f$  должна быть неотрицательной. Мы будем считать для простоты, что массы индивидуальных частиц  $M$  одинаковы и равны единице:  $M=1$  (поэтому мы не пишем  $M$  в аргументе функции распределения  $f$ ).

Функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}}) f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{F}$  по-прежнему обозначает силу, действующую на частицу,  $d/dt$  есть полная производная по (точной!) траектории частицы в поле силы  $\mathbf{F}$  ( $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \partial/\partial \mathbf{r} + d\mathbf{v}/dt \cdot \partial/\partial \mathbf{v}$ ,  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}/M$ ,  $M=1$ ), а  $C$  — так называемый столкновительный член, определяющий изменение  $f$  вследствие столкновений между частицами.

Вид столкновительного члена зависит от конкретной задачи. В бесстолкновительном приближении, которым мы будем пользоваться ниже, полагают  $C=0$ . Получающееся в результате *бесстолкновительное кинетическое уравнение* есть не что иное, как уравнение непрерывности в фазовом пространстве. Оно означает «несжимаемый» характер течения «фазовой жидкости» — функция распределения  $f$  не меняется:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{r}}) f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (9)$$

вдоль траектории частицы в фазовом пространстве.

Плотность  $\rho(\mathbf{r}, t)$  получается интегрированием по скоростям функции распределения:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (10)$$

Кинетическое уравнение (9), уравнение Пуассона (6) и соотношение (10) представляют собой полную систему уравнений, описывающую бесстолкновительные гравитирующие системы. Она называется системой уравнений с самосогласованным полем или уравнениями Власова.

Эта система вполне аналогична соответствующим уравнениям для плазмы. Сила взаимодействия между *электрически* заряженными частицами (заряды  $e_1$  и  $e_2$ ) определяется законом Кулона:

$$\mathbf{F} = + \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad (11)$$

Ньютоновский закон всемирного тяготения

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (12)$$

и закон Кулона (11) совпадают во всем, кроме знака (и, разумеется, относительной силы) взаимодействия. Знак плюс в (11) означает, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. В то же время гравитационные «заряды» (т. е. массы  $m_1, m_2, \dots$  всегда только «одноименные»), согласно (12), притягиваются. Соответственно уравнение Пуассона для электрического потенциала  $\psi$

$$\Delta\psi = -4\pi\rho \quad (13)$$

отличается от гравитационного уравнения Пуассона (6) знаком правой части.

Кинетическое уравнение для разреженной плазменной среды записывается в виде (9) с силой  $F$ , которая дается выражением (4). Для потенциальных движений однокомпонентной плазмы в отсутствие магнитного поля (когда  $E = -\text{grad}\psi$ ) кинетические уравнения в двух рассматриваемых случаях совпадают.

Напомним, что бесстолкновительное кинетическое уравнение (9), описывающее эволюцию одночастичной функции распределения  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , может быть строго выведено из точного кинетического уравнения (уравнения Лиувилля) для  $N$  — частичной функции распределения  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2; \dots; t)$ , зависящей от координат и скоростей всех  $N$  частиц системы:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [\mathcal{F}, H] = 0, \quad (14)$$

где скобка Пуассона

$$[\mathcal{F}, H] = \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right),$$

$H$  — гамильтониан системы,  $q_{\alpha}, p_{\alpha}$  — обобщенные координаты и импульсы. Уравнение (14) можно также представить в форме

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{\alpha} v_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha} F_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_{\alpha}} = 0. \quad (15)$$

Заметим, что теорема Лиувилля (15) является строгим результатом, вытекающим из гамильтоновой формулировки ньютоновской механики. Интегрированием уравнения (15) по фазовым координатам всех частиц, кроме одной, в предположении, что  $\mathcal{F}$  представляется в виде произведения одночастичных функций распределения

$$\mathcal{F} = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2, t) \dots f(\mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, t), \quad (16)$$

можно получить уравнение (9). Предположение (16), означающее статистическую независимость фазовых распределений разных частиц, оправдано в случае, когда силы взаимодействия между отдельными парами частиц («столкновения») пренебрежимо малы по сравнению с регулярной, «сглаженной» силой  $F$ . Последняя может быть обязана либо внешнему влиянию, либо коллективному самосогласованному действию всех частиц системы. Нас будет интересовать преимущественно последний случай. Самосогласованное поле называется потому, что оно создается распределением частиц  $f$ , которое в свою очередь определяется этим же полем.

Как известно [86, 138], в случае плазмы упомянутое выше условие пренебрежимости столкновениями выражается как требование, чтобы число частиц в сфере дебаевского радиуса  $r_d = \sqrt{T_e / 4\pi n e^2}$  ( $n$  — плотность,

$T_e$  — температура электронов) было велико, т. е.

$$nr_d^3 \gg 1. \quad (17)$$

Дебаевский радиус  $r_d$  определяет размеры области незаэкранированного взаимодействия: частицы, находящиеся за пределами дебаевской сферы, практически не взаимодействуют с теми, которые находятся в ее центре. Поэтому присутствие  $r_d$  в критерии (17) вполне естественно. В гравитационном случае, когда рассматривается, например, система, состоящая из  $N$  звезд в объеме с размером  $R$ , требуется просто, чтобы само  $N$  было большим:  $N \gg 1$ , так как эффект экранировки отсутствует и парное взаимодействие должно быть, грубо говоря, в  $N$  раз (а точнее — в  $N/\ln N$  раз) слабее коллективного взаимодействия.

Отметим, что в частном случае «холодной» среды кинетическое описание с помощью уравнений (9), (10) эквивалентно гидродинамическому описанию (уравнениям (1), (2) без давления,  $P=0$ ). Функция распределения тогда  $f_0 \sim \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_0(\mathbf{r})]$ . Уравнение непрерывности (1) получается из кинетического уравнения (9) интегрированием по скоростям, а уравнение Эйлера (2) — интегрированием кинетического уравнения, домноженного на  $\mathbf{v}$ . Впрочем, такой результат достаточно очевиден и без формального вывода, поскольку в холодной среде отсутствует разброс частиц по тепловым скоростям.

Кинетическое уравнение (9) записано в векторной форме. Но при решении конкретных задач приходится записывать кинетическое уравнение (как и второе основное уравнение теории — уравнение Пуассона) в той или иной криволинейной системе координат, причем выбор определяется симметрией задачи. В § 1 Приложения мы приводим запись кинетического уравнения в различных криволинейных координатах, а также во вращающейся системе отсчета, которая удобна при исследовании твердотельно-вращающихся систем.

Рассмотрим теперь отдельно уравнения, описывающие равновесные состояния и малые колебания гравитирующих систем.

**Равновесные состояния** бесстолкновительных гравитирующих систем описываются функцией распределения  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , плотностью массы  $\rho_0(\mathbf{r})$  и связанным с ней гравитационным потенциалом  $\Phi_0(\mathbf{r})$ .

Они должны, очевидно, удовлетворять упрощенной системе уравнений Власова (6), (9), (10), где нужно положить  $\partial/\partial t = 0$ :

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (18)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (19)$$

$$\rho_0 = \int f_0 d\mathbf{v}. \quad (20)$$

Обычно рассматриваются системы, обладающие той или иной пространственной симметрией (например, плоские или сферические). Учет симметрии, конечно, значительно упрощает общую формулировку задачи, содержащуюся в системе уравнений (18) — (20). Заметим еще, что эти уравнения описывают состояния, стационарные в покоящейся, инерциальной системе. В принципе могут существовать конфигурации, стационарные в некоторой неинерциальной, например вращающейся, системе координат. Пример такого рода мы подробно рассматриваем в главе IV — это вращающиеся трехосные эллипсоиды. В этом случае, очевидно, не может быть стационарности в инерциальной системе, поскольку в ней уже граница такого эллипсоида изменяется со временем. Однако равновесность существует во вращающейся с определенной угловой скоростью  $\Omega$  системе координат. Система функций  $f_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $\rho_0$ , определяющая стационарное состояние этого звездного эллипсоида, должна удовлетворять

уравнениям (18)—(20) и стационарному кинетическому уравнению во вращающейся системе координат (см. § 1 Приложения или главу IV).

Вернемся к системе (18)—(20). Кинетическое уравнение (18), если рассматривать его как уравнение на функцию распределения  $f_0$ , считая потенциал  $\Phi_0$  известным, представляет собой однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Характеристиками этого уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{r}} \quad (21)$$

являются уравнения движения частицы под действием гравитационной силы  $\left(-\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{r}}\right)$ . Соответственно общее решение кинетического уравнения (18) есть произвольная функция интегралов движения частицы в поле  $\Phi_0(\mathbf{r})$ <sup>1</sup>. При этом имеется еще естественное физическое требование однозначности функции распределения в любой точке фазового пространства системы, что в свою очередь требует однозначности тех интегралов движения, которые могут служить аргументами функции распределения. Уравнения характеристик (21) можно (в декартовых координатах) переписать в виде

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}} = \frac{dv_y}{-\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}} = \frac{dv_z}{-\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}} = dt. \quad (22)$$

Из такой записи очевидно, что всего имеется шесть независимых интегралов, причем пять из них не содержат явно времени  $t$ . Эти интегралы, однако, являются однозначными, вообще говоря, лишь в локальном смысле: при аналитическом продолжении вдоль траектории движения частицы их значения на разных витках траектории могут не совпадать.

В общем случае однозначными являются только те интегралы, существование которых связано со свойствами однородности времени (энергия) или однородности и изотропности пространства (соответственно импульсы и угловые моменты). Остальные интегралы движения, как правило, являются неоднозначными.

Таким образом, одним из аргументов  $f_0$  всегда может служить энергия частицы в поле  $\Phi_0$

$$E = v^2/2 + \Phi_0. \quad (23)$$

Если рассматриваемая система обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси  $z$ , то появляется еще один однозначный интеграл движения:  $z$  — компонента углового момента частицы  $L_z = rv_\phi$  (в цилиндрических координатах). В случае полной сферической симметрии интегралом является вектор углового момента  $\mathbf{L}$  и, в частности, его величина  $L$  ( $L^2 = r^2(v_\theta^2 + v_\phi^2)$  — в сферических координатах).

Если же система инвариантна по отношению к трансляциям вдоль какого-либо направления ( $x$ ), то интегралом является  $x$ -компонента импульса  $p_x$  (или скорости  $v_x$ ). Такие системы, очевидно, должны быть неограниченными. Примерами могут служить бесконечный и однородный по  $x, y$  плоский слой (рассматриваемый в главе I) и цилиндр с бесконечной образующей (глава II).

Системы, обладающие какими-либо дополнительными свойствами симметрии, могут иметь и некоторые дополнительные однозначные интегралы движения. В этой книге при рассмотрении равновесных состояний

<sup>1</sup> Этот результат устанавливается в теории дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, [156]).



многих простых систем мы часто будем сталкиваться именно с таким положением дел. В связи с этим мы вынуждены перечислять интегралы движения — аргументы функций распределения рассматриваемых систем — в каждом конкретном случае отдельно.

Мы закончим на этом общее рассмотрение кинетического уравнения (18). Сделаем только одно замечание, которое покажет, что существование дополнительных однозначных интегралов движения, отличных от энергии и углового момента, не обязательно связано с некоторой упрощенностью или, может быть, искусственностью упомянутых модельных систем. Замечание касается классического примера — проблемы так называемого *третьего интеграла* движения. Эта проблема возникает при определении минимального числа интегралов движения, от которых может зависеть функция распределения звезд в Галактике (см., например, [7]). Считается, что Галактика обладает аксиальной симметрией относительно оси вращения ( $z$ ). Следовательно, можно было бы пытаться строить модели Галактики, в которых функция распределения зависит только от двух заведомо однозначных интегралов движения: энергии  $E = (v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2)/2 + \Phi_0(r, z)$  и  $z$ -компоненты углового момента  $L_z = r v_\phi$ ,  $f_0 = f_0(E, L_z)$ . Но в такую функцию распределения  $v_r$  и  $v_z$  входят совершенно симметрично, откуда следует, в частности, что дисперсии скоростей звезд по  $r$ - и  $z$ -координатам должны совпадать в любой точке. Это, однако, противоречит наблюдениям, согласно которым дисперсия вертикальной компоненты скорости  $c_z$  меньше, чем дисперсия радиальной компоненты  $c_r$ :  $c_z < c_r$ . Поэтому (если считать Галактику стационарной или близкой к стационарности) должен существовать еще хотя бы один, третий по счету интеграл движения, зависимость от которого внесет необходимую асимметрию. Отыскание этого интеграла и составляет проблему, не решенную окончательно до сих пор. Можно, кстати, отметить (см. [7]), что в действительности этот третий интеграл должен быть в рассматриваемом случае и последним.

Обратимся снова к системе уравнений (18) — (20). Потенциал  $\Phi_0$ , который входит в (18) и от которого, следовательно, зависит функция распределения  $f_0$ , представляет самосогласованное гравитационное поле: оно определяется совместным действием всех звезд системы. Необходимость самосогласованного решения делает задачу о нахождении функций распределения довольно сложной, так что до настоящего времени найдено относительно небольшое число точных решений. Они рассматриваются в последующих главах книги.

**Малые колебания и устойчивость.** Рассмотрим теперь общую постановку задачи о малых колебаниях системы. Допустим, что в некоторый момент времени система, до этого находившаяся в равновесном состоянии, каким-либо способом выведена из этого состояния. Тогда в последующие моменты она будет описываться функциями  $f$ ,  $\Phi$ ,  $\rho$ , которые можно представить в виде

$$f = f_0 + f_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1. \quad (24)$$

Здесь величины с индексом «0» соответствуют равновесному невозмущенному состоянию, а величины с индексом «1» характеризуют отклонения от равновесия. Будем называть их возмущениями. Как правило, мы считаем возмущения малыми:

$$f_1 \ll f_0, \quad \Phi_1 \ll \Phi_0, \quad \rho_1 \ll \rho_0. \quad (25)$$

Тогда, линеаризуя уравнения (9), (10), (6), т. е. подставляя в них разложения (24) и пренебрегая малыми квадратичными членами, мы получим, с одной стороны, систему уравнений (18) — (20), описывающую исходное стационарное состояние, а с другой — систему уравнений для возмущенных величин:

$$\frac{df_1}{dt} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (26)$$

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (27)$$

$$\rho_1 = \int f_1 d\mathbf{v}. \quad (28)$$

В уравнении (26)  $df_1/dt$  обозначает теперь временную производную по невозмущенной траектории (21).

Задача значительно упрощается, если искать решения этой системы с временной зависимостью всех возмущений вида

$$f_1(\mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \quad \Phi_1(\mathbf{r}, t) = \Phi_1(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \\ \rho_1(\mathbf{r}, t) = \rho_1(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \omega = \text{const}. \quad (29)$$

Формально возможность такого представления решений связана с тем, что коэффициенты всех уравнений (26) — (28) не зависят от времени, что в свою очередь связано со стационарностью исходного равновесного состояния. При замене (29) операторы  $d/dt$  становятся числами:  $d/dt \rightarrow -i\omega$ . Строгое обоснование такого подхода получается методом Лапласа, с помощью которого решается задача с начальными условиями.

Решая систему уравнений (26) — (28) с соответствующими граничными условиями, находят спектр частот  $\omega$ , при которых уравнения имеют нетривиальные решения. Эти частоты называются *собственными частотами*, а сами решения — *собственными функциями*.

В общем случае частота  $\omega$  оказывается комплексной:  $\omega = \omega_0 + i\gamma$ , так что временная зависимость возмущений есть  $f_1, \Phi_1, \rho_1 \sim e^{i\omega_0 t} e^{\gamma t}$ . Если  $\gamma < 0$ , то возмущения затухают во времени (и  $\gamma$  называется *декрементом* затухания). При  $\gamma = 0$  мы имеем дело с гармоническими, нейтральными колебаниями. Если же хотя бы для одного из собственных колебаний системы мнимая часть частоты положительна ( $\gamma > 0$ ), то такая система является неустойчивой: соответствующие возмущения экспоненциально нарастают во времени, становясь формально бесконечными при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае  $\gamma$  называется *инкрементом* неустойчивости.

Для доказательства *устойчивости* системы, помимо отсутствия корней с  $\gamma > 0$ , необходимо еще убедиться в отсутствии *кратных* вещественных корней, которые могут приводить к степенным ( $\sim t^n$ ) неустойчивостям. Мы ограничиваемся обычно доказательством отсутствия *экспоненциальной* неустойчивости, но оставляем открытой возможность степенных неустойчивостей. Более полный анализ проводится для плоского слоя (I глава) и цилиндра (II глава).

**Джинсовская неустойчивость.** Теперь естественно рассмотреть для иллюстрации малые колебания и устойчивость какой-либо простой гравитирующей системы.

Самой простой мыслимой системой является бесконечная (по всем направлениям!) однородная среда. Именно она и была впервые исследована на устойчивость в классической работе Джинса (см. [242]).

Джинс принял, исходя из однородности и изотропии такого равномерно заполненного материей ньютоновского мира, что гравитационная сила в любой точке равна нулю и система стационарна.

Сразу нужно сказать, что эти предположения Джинса не могут быть вполне корректными, так как в действительности однородная бесконечная гравитирующая среда (в отличие, например, от плазменной) обязана быть нестационарной (см. ниже, с. 15). Поэтому, строго говоря, задача Джинса должна решаться на *нестационарном* фоне, что, естественно, несколько видоизменяет результаты. Тем не менее главные качественные выводы, сделанные Джинсом, оказываются справедливыми и при точном рассмотрении устойчивости сжимающегося или расширяющегося однородного мира. Меняется в основном математическое оформление

этой задачи, но физика неустойчивости, изучавшейся впервые Джинсом и носящей теперь его имя, остается неизменной. Она имеет простой, наглядный смысл: гравитационное сжатие достаточно больших масс под действием собственного тяготения.

Эта задача лежит несколько в стороне от основной линии нашей книги, посвященной изучению неустойчивостей *стационарных* систем. Однако на этом примере проще всего ввести некоторые понятия, важные для дальнейшего изложения (джинсовской неустойчивости, критической длины волны и т. п.). Этот простой пример имеет значение также для пояснения принципиального различия между гравитирующей и плазменной средами. По этим причинам мы достаточно подробно излагаем ниже решение задачи Джинса в традиционном варианте, который восходит к самому автору. Затем мы скажем об изменениях, являющихся следствием нестационарности фона.

Простота однородного случая связана с тем, что пространственную зависимость возмущения можно выбрать в виде плоской волны:  $f_1, \Phi_1, \rho_1 \sim e^{i\mathbf{k}r}$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор). Тогда исходные дифференциальные уравнения превращаются в систему алгебраических уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы, мы получаем соотношение между частотой собственных колебаний  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ :  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  — *дисперсионное уравнение*.

Для описания возмущений «холодной» среды можно использовать линейаризованные гидродинамические уравнения (1) — (2) с равным нулю давлением:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (31)$$

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (32)$$

Применяя описанный метод<sup>4</sup>, из этой системы легко получить дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -\omega_0^2. \quad (33)$$

Из уравнения (33) следует заключить, что рассмотренная гравитационная система неустойчива, поскольку один из корней  $\omega = \pm i\omega_0$  соответствует нарастанию возмущений. Такое заключение и было сделано Джинсом. Соответственно эта главная неустойчивость гравитирующей среды называется *джинсовской неустойчивостью*, а  $\omega_0$  — *джинсовской частотой*.

Мы уже отмечали, что принятые Джинсом упрощения не совсем корректны. В случае холодного вещества это наиболее очевидно. Действительно, бесконечную систему естественно рассматривать как получающуюся из конечной при неограниченном увеличении размеров. Но все такие системы нестационарны: они должны сжиматься под действием собственного тяготения, причем характерное время сжатия холодной системы не зависит от ее масштаба. Это видно также из уравнения (33), в которое не входит волновое число  $k$  (или длина волны  $\lambda = 2\pi/k$ ). Поэтому, строго говоря, предельную систему тоже нужно рассматривать как нестационарную, как это сейчас и делают в ньютоновской космологии [48].

<sup>4</sup> Впрочем, в данном случае можно поступить и следующим образом. Применяя операцию  $\operatorname{div}$  к уравнению (30) и выражая  $\operatorname{div} \mathbf{v}_1$  из (31), получим (учитывая, что  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_1 = \Delta \Phi_1$  и воспользовавшись уравнением Пуассона)  $\partial^2 \rho_1 / \partial t^2 = \omega_0^2 \rho_1$ ,  $\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0$ . Подставляя  $\rho_1 \sim e^{-i\omega t}$ , будем снова иметь  $\omega^2 = -\omega_0^2$ .

Вернемся, однако, к джинсовской модели *однородной* среды, но допустим теперь, что она «горячая». Если рассматривать *газовую* среду, обладающую определенным конечным давлением (которое можно учесть, добавив к правой части уравнения (30) член  $\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial r}\right)$ , то для возмущений с волновым вектором  $k$  вместо (33) легко получить следующее дисперсионное уравнение (см., например, [48]):

$$\omega^2 = -\omega_0^2 + k^2 D^2, \quad (34)$$

где  $D$  — скорость звука в среде,  $D^2 = \partial P_0 / \partial \rho_0$ . Из этого дисперсионного уравнения следует, что существует определенная критическая длина волны  $\lambda_{кр}$  (которая также называется *джинсовской*), разделяющая устойчивые (при  $\lambda < \lambda_{кр}$ ) и неустойчивые (при  $\lambda > \lambda_{кр}$ ) возмущения. Она определяется из условия  $\omega^2 = 0$ , так что

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k_{кр}} = D \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (35)$$

Дисперсионное уравнение для холодной среды (33) получается из (34) при  $k \rightarrow 0$  или  $\lambda \rightarrow \infty$ , т. е. для возмущений достаточно большого пространственного масштаба. В то же время возмущения с малой длиной волны распространяются, как звуковые волны:

$$\omega^2 \approx k^2 D^2. \quad (36)$$

Такое поведение возмущений вполне естественно [48]. Гравитационный потенциал сгустка вещества данной плотности с характерным размером  $\lambda$  пропорционален  $\lambda^2$ :  $\Phi \sim Gm/\lambda \sim G\rho\lambda^3/\lambda \sim \lambda^2$ , а сила пропорциональна  $\lambda$ :  $F \sim \partial\Phi/\partial r \sim \Phi/\lambda \sim \lambda$ . С другой стороны, градиент давления создает, очевидно, силу, обратно пропорциональную  $\lambda$ . Отсюда следует, что для больших длин волн преобладают силы тяготения, (что приводит к неустойчивости), а при  $\lambda \rightarrow 0$  доминирующим становится давление.

Подобным образом решается и вопрос о влиянии на джинсовскую неустойчивость хаотических скоростей частиц в *бесстолкновительной* (звездной) системе. Но характер этого влияния заранее очевиден хотя бы из аналогии между дисперсией скоростей звезд  $\langle v^2 \rangle^{1/2}$  и скоростью звука в газовой среде: джинсовская неустойчивость, имеющая место в случае холодного вещества на всех длинах волн, должна быть подавлена дисперсией скоростей на малых, но останется на больших масштабах.

Таким образом, здесь тоже должна возникнуть критическая длина волны Джинса, аналогичная (35). Качественные различия между газовыми и бесстолкновительными системами проявляются только для достаточно коротких длин волн возмущения (подробнее см. задачу 3 главы III).

Здесь, однако, снова нужно сделать замечания, аналогичные случаю холодной среды. Определяя размер покоящегося тела из условия, что в каждой его точке сила тяжести уравновешивается силой давления

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (37)$$

( $M$  — масса внутри радиуса  $r$ ), получим:  $R \sim \lambda_{кр}$ , т. е. этот размер всегда порядка критической джинсовской длины волны. Любые гравитирующие системы, размеры которых существенно больше  $\lambda_{кр}$ , являются нестационарными. Задачу об устойчивости однородной гравитирующей среды следует, строго говоря, рассматривать на нестационарном фоне. В обычной гидродинамике такое рассмотрение было проведено при исследовании устойчивости нестационарных фридмановских моделей Вселенной (в рамках общей теории относительности) в известной работе

Лифшица [75], а в ньютоновской теории аналогичную задачу решил Боннор [168]. Основные результаты оказались близкими к полученным Джинсом. Возмущения с  $\lambda > \lambda_{кр}$  нарастают, хотя и не по экспоненциальному закону ( $\delta\rho/\rho \sim t^{1/2}$ ). Неэкспоненциальный (степенной) характер нарастания возмущений связан с тем, что невозмущенное решение явно зависит от времени. Ясное изложение этого вопроса содержится в книге Зельдовича и Новикова [48]. Зависимость невозмущенной плотности  $\rho_0$  от времени приводит к переменности джинсовской частоты  $\omega_0(t) \sim \sqrt{\rho_0(t)}$ . В этом случае естественным обобщением джинсовского закона нарастания возмущенной плотности  $\rho_1(t) \sim e^{\omega_0 t}$ , который был бы справедлив при  $\omega_0 = \text{const}$ , является следующий:  $\rho_1(t) \sim e^{\int \omega_0(t) dt}$ . С такой модификацией джинсовских формул получается, как можно показать [48], закон нарастания возмущений, очень близкий к точному решению Лифшица — Боннора. Конечно, нельзя было ожидать полного совпадения. Действительно, предложенное выше обобщение джинсовского закона («ВКБ по времени») было бы строго справедливо только при условии, что скорость нарастания возмущения намного превосходит скорость изменения невозмущенных величин. Этого, вообще говоря, нет. Напомним, однако, еще раз, что принятый Джинсом подход, во всяком случае, приводит к правильному выражению (35) для критической длины волны  $\lambda_{кр}$  и качественно верным предсказаниям: неустойчивости для возмущений с  $\lambda > \lambda_{кр}$  и устойчивости при  $\lambda < \lambda_{кр}$ . Нужно только помнить, что полученные таким способом результаты приложимы отнюдь не к стационарным системам. Стационарные гравитирующие системы имеют размеры  $R \sim \lambda_{кр}$ , они должны быть существенно неоднородны, и их нужно исследовать по-другому.

Возможно, этот принципиальный для всего последующего изложения момент станет яснее, если провести сравнение с плазменной средой. Ленгмюровские колебания холодной плазмы описываются, как известно, дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = \omega_p^2, \quad (38)$$

где  $\omega_p^2 = \frac{4\pi l e^2}{m}$  — квадрат плазменной частоты,  $n$  — число частиц в единице объема,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Соответствие между уравнениями (38) и (33) очевидно, если вспомнить об аналогии между гравитационными и электростатическими силами.

Отношение  $v_T/\omega_p = r_d$  в плазме определяет дебаевский радиус экранирования — радиус сферы, вне которой электрический потенциал практически отсутствует. Как правило, дебаевский радиус много меньше других характерных размеров: длины свободного пробега, размеров экспериментальной камеры и т. п. Это обстоятельство определяет квазинейтральность плазмы, в результате чего естественным состоянием ионизованного газа является равновесное состояние, в котором может находиться однородная плазма.

Размер равновесной гравитирующей системы порядка  $\frac{\langle v^2 \rangle^{1/2}}{\omega_0}$ , и для обеспечения равновесия необходимы строго определенный для данной системы градиент давления или вращение с соответствующей зависимостью угловой скорости от радиуса.

Таким образом, стационарная гравитирующая система соответствует внутренней области дебаевской сферы в плазме. Поэтому в случае стационарных гравитирующих систем всегда приходится иметь дело со сложными краевыми задачами, в то время как в плазме уже модель однородного бесконечно протяженного фона (квазинейтрального) позволяет получить многие известные эффекты.

Во избежание недоразумений подчеркнем еще раз, что выше рассматривалась модель однородной гравитирующей среды, бесконечной *во всех направлениях*. Рассмотрение именно таких систем как стационарных не совсем корректно. Однако уже модель плоского слоя, т. е. системы, неограниченной в двух направлениях  $x, y$ , но ограниченной по направлению  $z$ , является равновесной. Тем более это справедливо для цилиндрической модели (бесконечной только в одном направлении). Обе модели оказываются *неустойчивыми* «по Джинсу» относительно возмущений с достаточно большими длинами волн (см. главы I и II), но инкременты этих неустойчивостей обращаются в нуль для бесконечно длинных волн  $\lambda \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow 0$ ). Последнее обстоятельство как раз и соответствует стационарности исходного состояния системы; нарастание возмущений с  $\lambda = \infty$  ( $k = 0$ ) (как в первоначальной модели Джинса — см. (34)) отвечало бы нестационарности.

Модели плоского слоя и бесконечного цилиндра удобны, в частности, для исследования некоторых принципиальных вопросов теории устойчивости гравитирующих систем. Например, важным представляется вопрос о возможности спонтанной раскачки колебаний в гравитирующей среде посредством механизмов, отличных от джинсовского. Этот вопрос не столь тривиален, как может показаться на первый взгляд, поскольку условие равновесия гравитирующей системы жестко связывает силу тяготения в каждой точке с другими силами (давления, центробежной и т. д.). Долгое время всякий положительный ответ на этот вопрос так или иначе оказывался связанным с выбором нестационарной модели, с нарушением условия равновесия (подробнее см. в [20]). Проблема заключалась в том, чтобы исследовать возможные неустойчивости гравитирующей среды при *условии подавления джинсовской* неустойчивости: в противном случае может, в частности, оказаться, что «вновь открытая» неустойчивость в действительности представляет собой завуалированную джинсовскую неустойчивость. В работе [88] в стационарной модели бесконечно протяженного по  $z$  цилиндра было строго доказано существование *пучковой* неустойчивости в гравитирующей среде, а в работах [28, 114] в той же модели — возможность *температурно-градиентной* неустойчивости. Инкременты этих неустойчивостей не превосходят джинсовский. Для специалиста по физике плазмы такой результат очевиден, поскольку в переводе на плазменный язык он означает, что  $\gamma_{\max} \sim \omega_{pe}$ .

После исследования пучковой и градиентной неустойчивостей естественно встал вопрос о возможности развития в гравитирующем газе неустойчивостей с инкрементами, намного превосходящими джинсовский. Положительный ответ на этот вопрос дан в работах [98—100], где показана возможность раскачки таких гидродинамических неустойчивостей, как неустойчивость тангенциального разрыва и желобковая. Для достаточно коротких длин волн (меньших джинсовских) гравитационные эффекты не играют никакой роли, и упомянутые неустойчивости развиваются так же, как в обычной (негравитирующей) жидкости. Заметим еще, что, поскольку инкременты этих неустойчивостей могут быть гораздо больше джинсовского, их можно вполне строго исследовать уже в модели бесконечной (во всех направлениях) среды: за время нарастания таких возмущений система под действием гравитационного притяжения практически не изменяется. Эти неустойчивости были исследованы и в простых *стационарных* моделях (например, в модели цилиндра). Неджинсовским неустойчивостям посвящена VI глава книги.

Мы с самого начала подчеркивали, что устойчивость гравитирующей системы как целого (коллективный эффект) не имеет, вообще говоря, отношения к устойчивости орбит индивидуальных частиц. Лишь для некоторых специальным образом устроенных систем рассмотрение устойчивости движения отдельных частиц может одновременно дать ответ и на вопрос об устойчивости всей системы. Речь идет о радиальных коле-

баниях гравитирующего шара или цилиндра в случае, когда равновесие обусловлено вращением масс, их составляющих. Случай *сферически-симметричной* системы с круговыми траекториями всех частиц наглядно представлен на рис. 1.

Устойчивость шара или вращающегося цилиндра относительно радиальных возмущений, при которых не происходит пересечений слоев, очевидна, так как при этом каждая частица движется в поле постоянной массы. При радиальных возмущениях момент вращения частицы сохраняется, стационарное состояние ее соответствует минимуму энергии (задача Кеплера) и потому устойчиво. Но это одновременно означает и

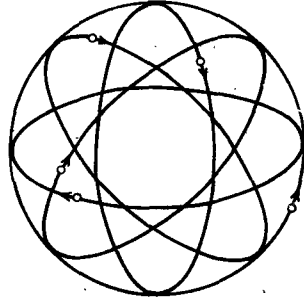


Рис. 1. Модель Эйнштейна сферически-симметричного скопления

Все частицы движутся по круговым траекториям вокруг общего центра масс, направления движения указаны стрелками

устойчивость системы как целого (для возмущений рассматриваемого типа), поскольку отдельные слои колеблются независимо от остальных.

Теперь представим себе, что систему подвергли нерадиальным возмущениям, вследствие чего форма кривой потенциальной энергии  $U=U(r)$  изменилась:  $U=U(r, \theta, \varphi)$ . В этом случае частица, перейдя из положения  $r_0$  в положение  $r_1$  ( $\theta=\theta_0, \varphi=\varphi_0$ ), может, например, вновь занять точку минимума на кривой  $U=U(r, \theta_0, \varphi_0)$ . Таким образом, устойчивость системы по отношению к таким возмущениям а priori не очевидна.

Устойчивость системы также не очевидна относительно радиальных возмущений при наличии пересечений слоев. Покажем [19], что пересечение обязательно возникнет с течением времени, т. е. обязательно появятся такие пары частиц, эйлеровы координаты которых  $r$  совпадают. Если  $r_0$  — лагранжев радиус частицы, а  $r$  — ее истинный, эйлеровский радиус, то наличие пересечения означает, что  $\partial r/\partial r_0=0$ , т. е. частицы разных слоев лежат на одном и том же радиусе. Зададимся возмущением вида  $r=r_0+\varepsilon z(r_0)$ ,  $dr/dt=0$ ,  $\varepsilon z(r_0)$  — малое возмущение.

Тогда уравнения движения определяют периодическую траекторию частицы:

$$r=r_0+\varepsilon z(r_0)\cos\Omega(r_0)t, \quad \frac{dr}{dr_0}=1+\varepsilon z'\cos\Omega t-\varepsilon z\Omega't\sin\Omega t,$$

где  $\Omega(r_0)$  — угловая скорость обращения частиц.

Отсюда видно, что в силу зависимости  $\Omega(r_0)$  в выражении для  $dr/dr_0$  имеется растущий со временем член, поэтому при любом начальном малом возмущении возникнет пересечение. Исключение составляют однородный шар и однородный цилиндр, для которых  $\Omega(r_0)=\text{const}$ .

Эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{эфф}}$  шара (см. рис. 1) равна

$$U_{\text{эфф}}=\sum_i\left(-\frac{GM_i m_i}{r_i}+\frac{L_i^2}{2m_i r_i^2}\right), \quad (39)$$

где  $M_i$  — масса внутри  $r=r_i$ ,  $m_i$  — масса  $i$ -го от начала координат шарового слоя,  $L_i^2$  — сумма квадратов моментов частиц  $i$ -го шарового слоя.

Отметим, что не исключается случай, когда  $L_i=\sum_k L_{ik}=0$ , где  $L_{ik}$  — мо-

мент  $k$ -й частицы  $i$ -го слоя, однако  $L_i^2 = \sum_k L_{ik}^2 \neq 0$ . Поскольку радиальные смещения сохраняют момент каждой частицы ( $L_{ik} = \text{const}$ ), то при этих смещениях  $L_i^2 = \text{const}$ . Пусть в результате радиального возмущения эффективная потенциальная энергия системы стала равной  $U'_{\text{эфф}}$ , которая получается из формулы (39) заменой  $r_i \rightarrow r'_i$ . Условие устойчивости системы есть

$$\Delta U_{\text{эфф}} = U'_{\text{эфф}} - U_{\text{эфф}} > 0. \quad (40)$$

В случае, когда при перемещении слоев  $r_i \rightarrow r'_i$  не происходит их пересечений, эффективная потенциальная энергия  $i$ -го слоя равна

$$U_{\text{эфф}(i)} = -\frac{GM_i m_i}{r_i} + \frac{L_i^2}{2m_i r_i^2}. \quad (41)$$

Условие равновесия  $i$ -го слоя есть

$$\frac{Gm_i M_i}{r_i^2} = \frac{L_i^2}{m_i r_i^3}, \quad (42)$$

что является условием минимума эффективной потенциальной энергии  $\partial U_{\text{эфф}(i)} / \partial r_i = 0$ , определяющим равновесную круговую орбиту радиуса  $r_i$ . Любое перемещение  $i$ -го шарового слоя в произвольную точку  $r'_i$  приведет к увеличению энергии (41). Поскольку изложенное выше справедливо для любого слоя, то для системы в целом условие устойчивости (40) выполняется.

При определении условия равновесия (42) из условия минимума энергии

$$\frac{\partial U_{\text{эфф}}}{\partial r_i} = \frac{Gm_i M_i}{r_i^2} - \frac{Gm_i}{r_i} \frac{\partial M_i}{\partial r_i} - \frac{L_i^2}{m_i r_i^3} = 0$$

предполагалось, что второй член левой части равенства ( $\sim \partial M_i / \partial r_i$ ) равен нулю. В случае пересечения слоев, когда в результате возмущения величина массы внутри  $i$ -го слоя меняется, член  $\frac{Gm_i}{r_i} \frac{\partial M_i}{\partial r_i} \neq 0$ . Для

установления влияния этого члена на устойчивость рассмотрим систему, состоящую из центральной массы  $M$  и двух слоев, пересекающихся в результате возмущений. Тогда

$$U_{\text{эфф}(1)} = -\frac{Gm_1 M}{r_1} + \frac{L_1^2}{2m_1 r_1^2}, \quad (43)$$

$$U_{\text{эфф}(2)} = -\frac{Gm_2 (M + m_1)}{r_2} + \frac{L_2^2}{2m_2 r_2^2}, \quad (44)$$

$$U'_{\text{эфф}(1)} = -\frac{Gm_1 (M + m_2)}{r'_1} + \frac{L_1^2}{2m_1 r_1'^2}, \quad (45)$$

$$U'_{\text{эфф}(2)} = -\frac{Gm_2 M}{r'_2} + \frac{L_2^2}{2m_2 r_2'^2}. \quad (46)$$

Выражения (43) и (44) определяют энергии слоев до их перемещений. Будем считать, что

$$r_1 < r_2; \quad r_1' > r_2', \quad (47)$$

т. е. «внутренний» слой после радиального возмущения становится «внешним» и наоборот. Определяя  $\Delta U_{\text{эфф}}$  согласно (40), приходим к сле-



дующей положительно определенной форме:

$$\Delta U_{\text{эфф}} = \frac{Gm_1M(r'_1 - r_1)^2}{2r_1r_1'^2} + \frac{Gm_1m_2(r'_1 - r'_2)^2}{r_1r_2'} + \frac{Gm_2(M+m_1)(r'_2 - r_2)^2}{2r_2r_2'^2}. \quad (48)$$

Второе слагаемое в (48) определяет изменение потенциальной энергии только за счет перестановки слоев. Согласно (47) это слагаемое всегда положительно. Таким образом, радиальные возмущения, приводящие к пересечению шаровых слоев, приводят к дополнительному увеличению эффективной потенциальной энергии системы.

Доказательство устойчивости бесконечно протяженного по  $z$  цилиндра относительно радиальных возмущений можно провести аналогично рассмотренному выше для шара. В случае пересечения слоев здесь также в  $U_{\text{эфф}}$  появляется положительное слагаемое, вызывающее дополнительную стабилизацию радиальных возмущений.

Итак, оказывается, что радиальные возмущения с пересечениями «более устойчивы», нежели возмущения типа растяжения — сжатия. Последний тип возмущений устойчив в шаре и цилиндре по той причине, что условие равновесия шарового или цилиндрического слоя является условием минимума эффективной потенциальной энергии слоя. Этот факт в свою очередь является следствием того, что напряженность поля в любой точке шара и цилиндра зависит только от внутренней по отношению к эквипотенциальной поверхности массы.

Устойчивость орбит отдельных частиц определяется для рассматриваемых систем очень похожими факторами. Если частицу сместить с равновесной круговой орбиты, то, как легко показать (см., например, § 1 главы II), она будет совершать колебания с *эпициклической* частотой  $\kappa$ , которая выражается формулой

$$\kappa^2 = 4\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr}.$$

Частота  $\kappa$  является мнимой (что соответствует неустойчивости орбиты), если  $\kappa^2 < 0$ . Но для этого необходимо, чтобы угловая частота  $\Omega$  спадала с радиусом быстрее чем  $\sim 1/r^2$ . В то же время максимально быстрое убывание (в кулоновском поле)  $\Omega \sim 1/r^{3/2}$ . Именно последнему случаю соответствует наименьшая возможная эпициклическая частота  $\kappa = \Omega$ . Для всех других  $\Phi_0(r)$  получаются большие  $\kappa$ . Движению частицы без пересечений слоев отвечает кулоновское поле  $\Phi_0(r)$ , а учет пересечений означает отклонение  $\Phi_0(r)$  от кулоновского закона. Поэтому учет пересечений слоев только «увеличивает» устойчивость.

Напомним, что в отличие от шара (или цилиндра) напряженность поля в гравитирующем *диске* определяется как внутренней, так и внешней массой. По этой причине пробное тело внутри гравитирующей сферы находится в безразличном равновесии, а внутри гравитирующего кольца притягивается к его ближайшей точке. Радиальные возмущения легко расслаивают гравитирующий диск (с круговыми орбитами частиц) на отдельные узкие кольца [333] (см. главу V).

## РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО СЛОЯ

Модель плоскопараллельного распределения масс с объемной плотностью  $\rho_0(z)$ , зависящей лишь от одной координаты  $z$  (и, следовательно, неограниченной по  $x, y$ ), была введена Оортом [296] для изучения распределения массы в нашей Галактике в направлении, перпендикулярном к ее экваториальной плоскости ( $z=0$ ). Дело в том, что Галактика представляет собой очень сильно сжатую дискообразную систему. Такое строение Галактики предполагает, очевидно, что скорость изменения плотности по вертикали ( $z$ ) намного превосходит скорость ее изменения в горизонтальном направлении. Соответственно в качестве первого приближения при изучении характера вертикального распределения массы в каком-то заданном месте диска Галактики можно принять модель плоского слоя, т. е. предположить, что плотность вообще не меняется вдоль плоскости ( $x, y$ ) (сохраняя свои значения  $\rho_0 = \rho_0(z)$  в выбранном месте).

Наша Галактика относится к числу спиральных (S) галактик, причем свойство сильной сплюснутости характерно для всех спиральных галактик. То же справедливо для линзообразных (SO) галактик и некоторых других объектов (см. главу VIII). Таким образом, модель плоского слоя имеет довольно широкую область применения как простейшая модель для описания локального равновесия всех таких систем в вертикальном направлении.

На этой модели удобно также изучать поведение локализованных возмущений сильно сплюснутых систем, причем не только в вертикальном ( $z$ ), но и в горизонтальном ( $x, y$ ) направлениях. Последнее особенно интересно, так как позволяет просто объяснить многие факты, играющие важную роль в теории устойчивости дисковых систем.

В § 1 кратко рассмотрены равновесные состояния бесстолкновительного плоского слоя. В § 2 изучаются длинноволновые возмущения ( $k_{\perp}c \ll 1$ ), где  $k_{\perp}$  — составляющая волнового вектора  $\mathbf{k}$  в плоскости  $x, y$ . В § 3 приведен вывод интегродифференциальных уравнений для симметричных и антисимметричных (по отношению к плоскости  $z=0$ ) нормальных мод произвольного плоского слоя (этот вывод принадлежит Марку [289a]). В следующем параграфе (§ 4) уравнение, описывающее симметричные моды, применяется для исследования возмущений вблизи от порога неустойчивости ( $k_{\perp} \simeq k_{кр}$ ). Наконец, § 5 посвящен детальному исследованию возмущений, перпендикулярных плоскости  $x, y$  ( $k_{\perp}=0$ ), в случае однородного по плотности слоя.

В задаче мы отнесли вопрос о колебаниях с  $k_{\perp}c \gg 1$ , а также рассмотренный Калнайсом [253] вопрос о нелинейной эволюции возмущения однородного слоя типа растяжения — сжатия (с сохранением однородности плотности), проверку установленного им же вида собственных функций путем их явного вычисления для нескольких простейших мод, и, наконец, вывод дисперсионного уравнения для коротковолновых колебаний слоя.

## § 1. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ПЛОСКОГО СЛОЯ

Рассмотрим сначала стационарные состояния *однородного* плоского слоя (рис. 2). Если интересоваться только движением звезд в  $z$ -направлении, то рассматриваемая система, по существу, является одномерной. Пусть плотность слоя есть  $\rho_0$ , а толщина  $2c$ . Тогда гравитационный потенциал  $\Phi_0(z)$  внутри слоя

$$\Phi_0 = \frac{\Omega_0^2 z^2}{2} + \text{const}, \quad (1)$$

где  $\Omega_0^2 = 4\pi G\rho_0$ . Удобно положить  $\Omega_0 = 1$ ,  $c = 1$ . Функция распределения рассматриваемой системы должна зависеть только от энергии движения

$$\text{частицы в } z\text{-направлении: } E_z = \frac{v_z^2}{2} + \frac{z^2}{2}.$$

Действительно, энергия есть единственный не зависящий от времени интеграл для случая одномерного движения, что очевидно, например, из системы уравнений характеристик

$$dt = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_z}{-\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}}. \quad (2)$$

Таким образом, полагая  $f_0 = f_0(E)$ , мы удовлетворим кинетическому уравнению

$$v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} - z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0. \quad (3)$$

Теперь нужно погребовать совпадения плотности  $\rho_0(z) = \int f_0(E_z) dv_z$  и плотности  $\rho_0(z)$  однородного слоя, создающей потенциал (1). Функцию  $\rho_0(z)$  можно записать в виде

$$\rho_0(z) = \rho_0 \theta(1 - z^2), \quad (4)$$

где  $\theta(x)$  — единичная функция Хэвисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Итак, условие самосогласованности есть

$$\rho_0 \theta(1 - z^2) = \int f_0(E_z) dv_z. \quad (6)$$

С помощью  $J = 1 - 2E_z$  уравнение (6) приводится к виду интегрального уравнения Абеля

$$\rho_0(x) = \rho_0 \theta(x) = \int_0^x \frac{f_0(J) dJ}{\sqrt{x - J}}, \quad (7)$$

где  $x = 1 - z^2$ . Уравнение Абеля решается (см., например, [132]) в общем виде, для произвольной функции  $\rho_0(x)$ :

$$f_0(J) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dJ} \int_0^J \frac{\rho_0(x) dx}{\sqrt{J - x}}. \quad (8)$$

В данном случае  $\rho_0(x) = \rho_0 \theta(x)$  получаем [8]

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\theta(1-z^2-v_0^2)}{\sqrt{1-z^2-v_0^2}} = \frac{\rho_0}{\pi} \begin{cases} J^{-1/2}, & J > 0, \\ 0, & J < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Эта функция распределения растет при увеличении скорости от нуля до  $\sqrt{1-z^2} \equiv v_0$ , после чего резко обрывается (рис. 3). Можно отметить [8], что такое усечение связано с необходимостью получить резкую пространственную границу системы и не имеет никакого отношения к скорости освобождения (которая в одномерном случае бесконечна).

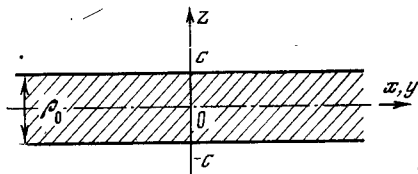


Рис. 2. Плоский гравитирующий слой

$\rho_0$  — плотность,  $c$  — полутолщина слоя в направлении оси  $z$ ; по  $x$  и  $y$  система является однородной и бесконечно протяженной

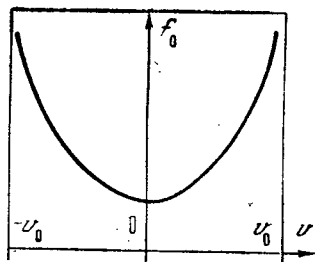


Рис. 3. Равновесная функция распределения  $f_0(v) \sim (v_0^2 - v^2)^{-1/2}$

Рассмотренная модель принадлежит к классу систем с квадратичным потенциалом,  $\Phi_0(z) = z^2/2 + \text{const}$ . Частицы в таком потенциале совершают гармонические колебания по  $z$  с частотой  $\Omega_0$  (которую мы приняли равной единице). Другие примеры таких систем рассматриваются в главах II—V.

Для определения  $f_0(E_z)$  в случае *неоднородного* слоя легко вывести уравнение, аналогичное (7):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho_0(x) = \int_0^x \frac{f_0(J) dJ}{\sqrt{x-J}}, \quad (10)$$

где  $x \equiv -\Phi_0(z)$ ,  $J \equiv -E_z$ . Отсюда следует, что для определения функции распределения бесстолкновительного плоского слоя с заданной плотностью  $\rho_0(z)$  нужно сначала, определив соответствующий потенциал  $\Phi_0(z)$ , исключить  $z$  из уравнений

$$\rho_0(z) = \rho_0, \quad -\Phi_0(z) = x. \quad (11)$$

С полученной таким образом функцией  $\rho_0(x)$  решение уравнения Абеля (10) находится по формуле (8) (с заменой  $\rho_0(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \rho_0(x)$ ).

После этого остается только проверить положительность получившейся функции распределения во всей области изменения аргумента  $J = -E_z$ .

При изучении колебаний слоя в его плоскости нужно задать зависимость равновесной функции распределения от скоростей  $v_x$  и  $v_y$ . Она может быть произвольной, поскольку  $v_x$  и  $v_y$  в рассматриваемом случае являются интегралами движения. Таким образом, общий вид стационарной функции распределения плоского гравитирующего слоя есть  $f_0 = f_0(E_z, v_x, v_y)$ .

Марк [289a] нашел равновесные решения для изотропных по скоростям распределений частиц следующего типа:

$$f_0 \sim (E_0 - E)^{n-3/2} \theta(E_0 - E), \quad (12)$$

где  $n$  — постоянный параметр модели,  $E$  обозначает полную энергию частицы:

$$E = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} + \Phi_0(z) = E_z + \frac{v_x^2 + v_y^2}{2}, \quad (13)$$

$E_0$  — максимальная возможная энергия (постоянная величина).

Соответствующая (12) плотность, как легко вычислить, равна

$$\rho_0(z) = \text{const}[E_0 - \Phi_0(z)]^n. \quad (14)$$

Для определения потенциала  $\Phi_0(z)$  (а затем по формуле (14) и плотности  $\rho_0(z)$ ) нужно решить нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} = 4\pi G \cdot \text{const}[E_0 - \Phi_0(z)]^n. \quad (15)$$

Численные решения написанного уравнения для  $n=2 \div 6$  в работе [289а] представлены в виде таблицы безразмерных параметров, характеризующих модели, и графиков функций  $\frac{E_0 - \Phi_0(z)}{E_0 - \Phi_0(0)}$ ,  $\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(0)}$ . Эти функции монотонно убывают при изменении  $z$  от нуля до  $z = z_{\text{max}}$ , где  $z_{\text{max}}$  есть первый нуль функции  $\rho_0(z)$ ,  $\rho_0(z_{\text{max}}) = 0$ .

Функции распределения, аналогичные (12) («политропные»), нам еще встретятся ниже (см. первые параграфы II и III глав), там они рассматриваются подробнее.

## §2. ГРАВИТАЦИОННАЯ (ДЖИНСОВСКАЯ)

### НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ

### ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мы рассмотрим здесь вопрос о *длинноволновой* устойчивости бесстолкновительного слоя, т. е. будем предполагать, что длина волны возмущения  $\lambda$  велика по сравнению с толщиной  $s$ . (Коротковолновые колебания ( $k_{\perp}c \gg 1$ ) кратко рассмотрены в задаче 1). Предположим еще, что при возмущениях слоя не возникают узлы плотности, растяжения или сжатия вещества в вертикальном направлении. Дисперсионное уравнение для такого рода возмущений (которые мы будем называть «джинсовскими») можно вывести простым способом, рассматривая колебания *бесконечно тонкого* слоя с поверхностной плотностью  $\sigma_0$ .

Простота модели бесконечно тонкого слоя заключается в том, что в этом пределе движение вещества в плоскости слоя (а именно оно нас интересует) может совершаться независимо от перпендикулярного к слою движения. Действительно, если скорости частиц в начальный момент (при создании возмущения) лежат в плоскости слоя, то движение будет оставаться плоским все время, поскольку не возникает каких-либо сил в перпендикулярном направлении.

Интересующие нас возмущения можно описать с помощью одномерного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0. \quad (1)$$

Линеаризуя (1) и представляя возмущения в виде  $\propto e^{ikx - i\omega t}$ , получим

$$f_1 = - \frac{k \partial f / \partial v_x}{\omega - kv_x} \Phi_1, \quad (2)$$

откуда находим возмущение поверхностной плотности

$$\sigma_1 = -k\Phi_1 \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x dv_x}{\omega - kv_x}. \quad (3)$$

Если  $\text{Im } \omega > 0$ , то интегрировать в (3) можно вдоль действительной оси  $v_x$ ; интеграл же при  $\text{Im } \omega \leq 0$  нужно понимать в смысле аналитического продолжения из области  $\text{Im } \omega > 0$ . Таким образом, интеграл по  $v_x$  в (3) должен вычисляться в соответствии с известным «правилом обхода Ландау» [65]: контур интегрирования в комплексной плоскости  $v_x$  обходит полюсную особенность  $\omega = kv_x$  снизу.

Для получения дисперсионного соотношения остается привлечь уравнение Пуассона, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_1(z)}{\partial z^2} - k^2 \Phi_1(z) = 4\pi G \sigma_1 \delta(z). \quad (4)$$

Решения однородного уравнения, соответствующего (4) (уравнения Лапласа),

$$\Phi_+ \equiv \Phi_1, z > 0 = c_1 e^{-kz}, \quad \Phi_- \equiv \Phi_1, z < 0 = c_2 e^{kz} \quad (k > 0), \quad (5)$$

нужно сшить на плоскости  $z=0$ . Условия сшивки есть

$$\Phi_+ = \Phi_- \Big|_{z=0}; \quad \left( \frac{\partial \Phi_+}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_-}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 4\pi G \sigma_1. \quad (6)$$

Используя их, получим следующее соотношение между потенциалом в плоскости  $z=0$  и поверхностной плотностью:

$$\Phi_1(z=0) = -\frac{2\pi G \sigma_1}{k}. \quad (7)$$

Сравнение (7) и (3) приводит к искомому дисперсионному уравнению

$$\epsilon_0 \equiv 1 - \frac{2\pi G \sigma_0}{k} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x dv_x}{(\omega/k - v_x)} = 0. \quad (8)$$

Для случая максвелловского распределения частиц по скоростям в плоскости  $x, y$  из (8) получаем (аналогично плазме; см., например, [86])

$$\epsilon_0 = 1 - \frac{2\pi G \sigma_0}{kT} \left[ 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{kv_T} W \left( \frac{\omega}{kv_T} \right) \right] = 0, \quad (9)$$

где  $T$  — температура,  $W$  — функция Крампса [134]

$$W(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{x^2} dx \right). \quad (10)$$

При  $T \rightarrow 0$  из (9) следует<sup>1</sup>

$$\omega^2 = -2\pi G \sigma_0 k, \quad (11)$$

что означает неустойчивость с инкрементом

$$\gamma = \sqrt{2\pi G \sigma_0 k}. \quad (12)$$

Это джинсовская неустойчивость плоского слоя.

Дисперсионное уравнение (11) было недавно вновь получено Тоомре [333]. Он, правда, изучал возмущения неоднородного вращающегося

<sup>1</sup> Дисперсионное соотношение (11) для этого предельного случая (холодного в плоскости  $x, y$  вещества) можно получить еще проще, решая вместо кинетического уравнения гидродинамические уравнения с равным нулю давлением (аналогично тому, как это делалось во введении).

диска, но использовал локальное приближение, для которого неоднородность и вращение не играют роли. Поэтому не удивительно совпадение выведенного им дисперсионного уравнения (в случае холодного диска) с уравнением (11). Мы вернемся к этому вопросу в главе V.

Используя асимптотическое представление функции Крампа при больших значениях аргумента [134]

$$W(z) \approx \frac{i}{\sqrt{\pi} z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \dots \right), \quad |z| \gg 1, \quad (13)$$

можно получить дисперсионное уравнение с учетом «тепловой» поправки, стабилизирующей рассматриваемую неустойчивость (12),

$$\omega^2 \approx -2\pi G\sigma_0 k + 3k^2 T. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что второй член мал по сравнению с первым  $3k^2 T \ll 2\pi G\sigma_0 k$ . Для определения границы устойчивости рассмотрим дисперсионное уравнение (9) при  $\left| \frac{\omega}{kv_T} \right| \ll 1$ . Используя оценку  $W(z)$  при малых значениях аргумента [134]

$$W(z) \approx 1 + \frac{2iz}{\sqrt{\pi}} + \dots, \quad |z| \ll 1, \quad (15)$$

будем иметь из (9)

$$\frac{\omega}{kv_T} \approx i \left( \alpha + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\pi}} + \dots \right), \quad \alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2\pi G\sigma_0 - kT}{2\pi G\sigma_0}, \quad |\alpha| \ll 1. \quad (16)$$

При  $\alpha > 0$ , т. е.  $\frac{2\pi G\sigma_0}{T} > k$ , возмущения нарастают, а при  $\alpha < 0$  ( $\frac{2\pi G\sigma_0}{T} < k$ ) имеет место устойчивость. Таким образом, критическое волновое число есть

$$k_{кр} = \frac{2\pi G\sigma_0}{T}, \quad (17)$$

а соответствующая критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = T/G\sigma_0. \quad (18)$$

Увеличение дисперсии скоростей частиц (температуры) в плоскости  $(x, y)$  отодвигает неустойчивые возмущения в область более длинных волн. При этом уменьшается максимально достижимый инкремент неустойчивости (последний, очевидно, порядка  $\pi G\sigma_0/v_T$  — см. (14) и (17)).

Интересно сравнить колебания *бесстолкновительного* слоя, рассмотренные выше, с колебаниями *несжимаемого* слоя. Эти два предельные состояния (бесстолкновительное и несжимаемое) в определенном смысле противоположны. Тем неожиданнее оказывается сходство между дисперсионными уравнениями, описывающими колебания в том и другом случае.

Возмущения *несжимаемого* слоя жидкости изучались рядом авторов (см. обзоры [13, 107]). Такие возмущения требуют, очевидно, отличного от нуля волнового вектора  $\mathbf{k}$  в плоскости  $x, y$ . Они описываются уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\operatorname{grad} \frac{P_1}{\rho_0} - \operatorname{grad} \Phi_1, \quad (20)$$

$$\Delta \Phi_1 = 0. \quad (21)$$

Кроме того, должно быть выполнено условие равенства нулю поля давления  $P$  на возмущенной границе; его можно представить в виде

$$(P_1 + \xi \nabla P_0)|_{z=c} = 0 \quad (22)$$

( $\xi$  — вектор смещения частиц), или, так как

$$P_0 = \rho_0 (1 - z^2)/2, \quad (23)$$

то

$$(P_1 - \rho_0 \xi_z)|_{z=1} = 0, \quad (24)$$

причем в (23), (24) мы положили  $c=1$ ,  $4\pi G\rho_0=1$ . Уравнения (19)—(21) означают, что как  $P_1$ , так и  $\Phi_1$  должны быть гармоническими функциями:

$$\Delta P_1 = \Delta \Phi_1 = 0. \quad (25)$$

Выбирая симметричные<sup>1</sup> по отношению к плоскости  $z=0$  решения, легко найдем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -k \operatorname{th} k - \operatorname{sh} k e^{-k}, \quad (26)$$

а также следующие соотношения между амплитудами различных величин, характеризующих возмущенное движение:

$$\frac{v_x}{v_z} = i \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kz}; \quad \frac{P_1}{\rho_0 \Phi_1} = -\frac{k}{e^k \operatorname{ch} k}. \quad (27)$$

Для возмущений с длиной волны, большой по сравнению с толщиной слоя (т. е. при  $k \ll 1$ ), имеем из (26)

$$\omega^2 \approx -k. \quad (28)$$

Эти возмущения неустойчивы<sup>2</sup>.

В противоположном пределе,  $k \gg 1$ , из (26) получается дисперсионное уравнение  $\omega^2 \approx +k$ , которое совпадает с дисперсионным уравнением, описывающим волны на глубокой воде во внешнем гравитационном поле  $g$  [67]:  $\omega^2 = gk$ ,  $g = \omega_0^2 c$ . Такое совпадение естественно, поскольку самогравитация волны при  $k \rightarrow \infty$  не играет роли.

Критическая длина волны  $\lambda_{кр}$ , разделяющая неустойчивые (достаточно длинноволновые) и устойчивые (более коротковолновые) возмущения, получается из (26) при  $\omega^2 = 0$ , она оказывается равной  $\lambda_{кр} \approx 3,13 \lambda c$ .

Таковы основные факты, относящиеся к устойчивости несжимаемого слоя.

Мы хотели бы обратить внимание на точное совпадение дисперсионного уравнения (28) (если записать его в размерных единицах) с дисперсионным уравнением (11), описывающим длинноволновые возмущения «холодного» бесстолкновительного слоя. Сразу следует сказать, что дисперсионные уравнения (28) и (11) описывают физически совершенно различные возмущения: в случае (11) возмущение поверхностной плотности  $\sigma_1$  создается вследствие изменений локальной плотности  $\rho_0 \rightarrow \rho_0 + \rho_1$ , а в случае (28) — из-за искривления границы с  $\rho_1 = 0$ .

Уже соображения размерности позволяют утверждать, что в обоих случаях должно быть  $\omega^2 \propto G\sigma_0 k$ . Выясним причины *точного* совпадения дисперсионных уравнений в длинноволновом пределе. При симметричных возмущениях с  $kc \ll 1$  движения сосредоточиваются в плоскости слоя<sup>3</sup>, и их можно в обоих случаях описать с помощью одних и тех ве-

<sup>1</sup> Антисимметричные возмущения устойчивы (см., например, [209]).

<sup>2</sup> Неустойчивыми являются и достаточно длинноволновые возмущения любого сжимаемого слоя, бесконечного в плоскости  $x, y$ .

<sup>3</sup> Для холодного бесстолкновительного слоя это достаточно очевидно, а для несжимаемого слоя можно усмотреть из приведенного выше точного решения. Действительно, из (27) следует, что при  $kc \ll 1$   $|v_x/v_z| \approx 1/kz \gg 1$ .



личин:  $v_x(x||k)$ ,  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$ . Но указанные величины удовлетворяют одним и тем же уравнениям. Во-первых, из (27) следует, что силой давления в  $x$ -уравнении Эйлера (20) можно при  $kc \ll 1$  пренебречь:

$$\left| \frac{\nabla_x P_1 / \rho_0}{\nabla_x \Phi_1} \right| = \left| \frac{P_1}{\rho_0 \Phi_1} \right| \sim kc \ll 1.$$

Поэтому оно совпадает с соответствующим уравнением для холодного бесстолкновительного слоя

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}.$$

Во-вторых, возмущенная поверхностная плотность  $\sigma_1$  создает один и тот же потенциал  $\Phi_1$  независимо от способа создания  $\sigma_1$  (за счет искривления границы или за счет возмущения локальной плотности)

$$\Phi_1 = - \frac{2\pi G \sigma_1}{k}.$$

Наконец, движение, происходящее в обоих случаях преимущественно в плоскости слоя, должно удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \sigma_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

В силу сказанного не удивительно совпадение дисперсионных уравнений в двух рассмотренных предельных случаях. С аналогичной ситуацией мы встретимся в главе V при исследовании устойчивости холодного вращающегося диска.

### § 3. ВЫВОД ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МОД ПЛОСКОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО СЛОЯ

Нам нужно прежде всего решить кинетическое уравнение

$$\frac{df_1}{dt} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \quad (1)$$

(где в данном случае  $\partial \Phi_0 / \partial x = \partial \Phi_0 / \partial y = 0$ ,  $\partial \Phi_0 / \partial z \neq 0$ ), считая правую часть этого уравнения  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \equiv Q$  известной функцией.

Будем решать уравнение (1) методом «интегрирования по траекториям» [138]. Напомним (см. введение), что  $d/dt$  есть производная по невозмущенной траектории частицы. Поэтому, интегрируя (1) по  $t$ , можно получить решение этого уравнения в виде

$$\tilde{f}_1(x, y, z; v_x, v_y, v_z, t) = \int_{-\infty}^t Q(x(t'), y(t'), z(t'); v_x(t'), v_y(t'), v_z(t'); t') dt', \quad (2)$$

где  $x(t') \equiv x', \dots; v_x(t') \equiv v_x', \dots$  есть декартовы координаты и компоненты скорости частицы (движущейся по невозмущенной траектории) в момент времени  $t'$ , если в момент  $t$  она находится в точке фазового пространства с координатами  $(x, y, z; v_x, v_y, v_z)$ . Предполагается также, что  $Q \rightarrow 0$  при  $t' \rightarrow -\infty$  так, что интеграл в правой части (2) сходится. Переходя к собственным колебаниям  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_1(x, y, z; v_x, v_y, v_z) e^{-i\omega t}$ ,  $Q = \tilde{Q}(x, y, z; v_x, v_y, v_z) e^{-i\omega t}$ , можно привести (2) к следующему виду:

$$\tilde{f}_1(x, y, z; v_x, v_y, v_z) = \int_{-\infty}^0 \tilde{Q}(x', y', z'; v_x', v_y', v_z') e^{-i\omega t'} dt', \quad (3)$$

причем теперь  $x', \dots; v_x', \dots$  обозначают текущие (в момент  $t'$ ) фазовые координаты частицы, которая проходит через точку фазового пространства  $(x, y, z; v_x, v_y, v_z)$  в момент  $t=0$ . Решение в форме (3), очевидно, имеет смысл только в случае, когда собственная частота  $\omega$  имеет положительную мнимую часть:  $\text{Im } \omega > 0$  (чтобы обеспечить сходимость интеграла при  $t' \rightarrow -\infty$ ). При остальных  $\omega$  решение уравнения (1) нужно понимать как аналитическое продолжение (3) из области  $\text{Im } \omega > 0$ .

Учитывая, что в рассматриваемом нами случае  $f_0 = f_0(E_z, v_x, v_y)$ , правую часть (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial E_z} \left( \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial f_0}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f_0}{\partial E_z} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}. \quad (4)$$

Ввиду однородности равновесного состояния по направлениям  $x$  и  $y$  возмущения можно выбрать в форме, пропорциональной  $\exp[-i\omega t + i(k_x x + k_y y)]$ , где  $k_x$  и  $k_y$  — соответствующие компоненты волнового вектора. Далее мы будем полагать  $k_y = 0$ ,  $k_x = k$  (что, очевидно, возможно без ограничения общности).

После этого нетрудно привести решение исходного уравнения (1) к виду (ниже мы опускаем знак «тильда» над обозначениями амплитуд возмущенных величин)

$$\bar{f}_1(z, v_z, v_x) = \Phi_1(z) \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + i \left( \bar{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right) \int_{-\infty}^0 \Phi_1(z') \exp[-i\omega t' + ik(x' - x)] dt', \quad (5)$$

где  $\bar{\omega} \equiv \omega - kv_x$ , а интеграл берется по невозмущенной траектории частицы, которая при  $t'=0$  проходит через точку  $(z, x, v_z, v_x)$ .

Легко перейти от переменных  $z, v_z, v_x$  к переменным  $z, E_z, v_x$ . Это достигается [289а] усреднением (5) по направлениям скорости  $v_z$  (для данной совокупности величин  $z, E_z, v_x$  имеются две орбиты, которые отличаются знаком  $v_z$  в момент времени  $t=0$ ):

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(z, E_z, v_x) = & \Phi_1(z) \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + \frac{1}{2} \sum_{\text{sgn } v_z} i \left( \bar{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^0 \Phi_1(z') \exp[-i\omega t' + ik(x' - x)] dt'. \end{aligned} \quad (6)$$

Движение по  $x$ , очевидно, равномерное:

$$x' = x + v_x t', \quad v_x = v_x, \quad (7)$$

а перпендикулярное ( $z$ ) движение определяется из закона сохранения энергии

$$(v_z')^2/2 + \Phi_0(z') = E_z = v_z^2/2 + \Phi_0(z). \quad (8)$$

Возмущенная плотность  $\rho_1$  находится по  $\bar{f}_1(z, E_z, v_z)$  интегрированием по скоростям

$$\rho_1 = \int \bar{f}_1 d\mathbf{v}. \quad (9)$$

Если подставить (6) — (9) в правую часть уравнения Пуассона

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} - k^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (10)$$

мы приходим к интегродифференциальному уравнению для функции  $\Phi_1(z)$ .

Это уравнение можно упростить [289а]. Представим решение  $\Phi_1(z)$  в виде суммы четной ( $\varphi$ ) и нечетной ( $\psi$ ) по отношению к координате  $z$

частей,

$$\Phi_1(z) = \varphi(z) + \psi(z), \quad (11)$$

где

$$\varphi(z) = \varphi(-z), \quad (12)$$

$$\psi(z) = -\psi(-z). \quad (13)$$

Легко показать, что уравнения для функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  разделяются. Ниже эти отдельные уравнения будут выписаны в явном виде.

Интеграл по бесконечному интервалу изменения  $t'$ , входящий в (6), можно привести к более удобному виду. Например, в случае четных мод для орбиты, которая в момент  $t'=0$  приходит в точку  $z>0$  с положительной компонентой скорости  $v_z>0$ , упомянутый интеграл преобразуется следующим образом. Вводим новую временную переменную:

$$s = t' + \tau(z), \quad (14)$$

где  $\tau(z)$  есть время движения частицы от  $z=0$  до  $z$  (по кратчайшему пути). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \varphi[z'(t')] \exp[-i\omega t' + ik(x' - x)] dt' = \\ = \int_{-\infty}^{\tau(z)} \varphi[z'(s)] \exp[-i\bar{\omega}(s - \tau(z))] ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее разбиваем получившийся интеграл на два:  $\int_{-\infty}^{\tau(z)} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\tau(z)}$ . Записывая первый из них как

$$\int_{-\infty}^0 = \int_{-2\tau_0}^0 + \int_{-4\tau_0}^{-2\tau_0} + \int_{-6\tau_0}^{-4\tau_0} + \dots \quad (16)$$

(где  $4\tau_0(E_z)$  есть период колебаний частицы по  $z$ ), легко показать с учетом симметрии моды  $\varphi(z) = \varphi(-z)$ , что в правой части (16) стоит сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \exp(2i\bar{\omega}\tau_0)$ . Поэтому интеграл (15) преобразуется в

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau(z)} \varphi[z'(s)] \exp\{-i\bar{\omega}[s - \tau(z)]\} ds + \\ + [1 - \exp(2i\bar{\omega}\tau_0)]^{-1} \int_{-2\tau_0}^0 \varphi[z'(s)] \exp\{-i\bar{\omega}[s - \tau(z)]\} ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее слагаемое в (17) можно далее привести к виду

$$-\frac{\exp[i\bar{\omega}\tau(z)]}{i \sin[\bar{\omega}\tau_0(E_z)]} \int_0^{\tau_0(E_z)} \varphi[z'(s)] \cos[\bar{\omega}(\tau_0 - s)] ds, \quad (18)$$

причем при выводе (18) снова использована симметрия функции  $\varphi(z)$ .

Аналогичные выражения можно написать и для второй орбиты, с отрицательной компонентой скорости  $v_z$  в точке  $z$  при  $t=0$ . Суммируя вклады обеих орбит, окончательно получаем следующее интегродифференциальное уравнение для четных (симметричных) по  $z$  мод:

$$(d^2/dz^2 + \omega(z) - k^2)\varphi - \hat{L}_s \left( \left[ \bar{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right] \varphi \right) = 0. \quad (19)$$

В этом уравнении

$$\omega(z) \equiv -4\pi G \int \frac{\partial f_0}{\partial E_z} dv, \quad (20)$$

а  $\hat{L}_a$  обозначает оператор

$$\hat{L}_a f \equiv -4\pi G \int \left\{ \hat{H}f + \frac{\cos[\bar{\omega}\tau(z)]}{\sin(\bar{\omega}\tau_0)} \hat{D}f \right\} dv, \quad (21)$$

где в свою очередь операторы  $\hat{H}$  и  $\hat{D}$  действуют согласно формулам

$$\hat{H}f \equiv \int_0^{\tau(z)} f(\xi) \sin[\bar{\omega}\tau(\xi, z)] d\tau(\xi), \quad (22)$$

$$\hat{D}f \equiv \int_0^{\tau_0} f(\xi) \cos[\bar{\omega}\tau(\xi, z_0)] d\tau(\xi), \quad \tau(\xi, z) = \tau(z) - \tau(\xi),$$

причем  $z_0 = z_0(E_z)$  есть амплитуда  $z$ -колебаний частицы с энергией  $E_z$ .

Подобным образом получается и уравнение, описывающее нечетные (антисимметричные) по  $z$  возмущения [289a]:

$$(d^2/dz^2 + \omega(z) - k^2)\psi - \hat{L}_a \left[ \left( \bar{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right) \psi \right] = 0, \quad (23)$$

где оператор  $\hat{L}_a$  есть

$$\hat{L}_a f \equiv -4\pi G \int \left\{ \hat{H}f - \frac{\sin[\bar{\omega}\tau(z)]}{\cos(\bar{\omega}\tau_0)} \hat{D}f \right\} dv. \quad (24)$$

Уравнения (19) и (23) достаточны для описания колебаний плоских слоев с плотностью  $\rho_0(z)$ , обращающейся на границах  $z = \pm c$  в нуль плавно, без скачка. В противном случае нужно еще учитывать возмущение потенциала, происходящее от искривления границ.

К уравнениям (19) или (23) следует добавить граничные условия сшивки с внешним решением. Поскольку решение уравнения Лапласа

$$\frac{d^2\Phi_1}{dz^2} - k^2\Phi_1 = 0, \quad (25)$$

удовлетворяющее условию убывания на бесконечности (при  $z \rightarrow \pm\infty$ ), есть (считая  $k > 0$ )

$$\Phi_1 = \begin{cases} e^{-kz}, & z > c, \\ e^{+kz}, & z < -c, \end{cases} \quad (26)$$

то граничные условия принимают форму

$$\frac{d\psi}{dz} = \mp k\psi, \quad \frac{d\psi}{dz} = \mp k\psi \quad \text{при } z = \pm c. \quad (27)$$

Уравнения (19), (23) описывают, в частности, эффекты резонансного взаимодействия частиц с волной гравитационного потенциала. Так, для симметричной волны резонансы соответствуют нулям  $\sin \bar{\omega}\tau_0$ , стоящего в знаменателе (21):

$$\bar{\omega} \equiv \omega - kv_x = \frac{m\pi}{\tau_0(E_z)} \quad (m - \text{целое}). \quad (28)$$

Резонансными, следовательно, являются частицы, для которых целое кратное частоты колебаний  $\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{4\tau_0(E_z)}$  равно частоте волны (с учетом доплеровского сдвига).

В следующем параграфе мы воспользуемся уравнением для симметричных мод (19) для исследования поведения возмущений вблизи от границы устойчивости  $k \approx k_{кр}$  в случае систем с изотропными функциями распределения по скоростям.

К уравнению (23), описывающему изгибания слоя, мы вернемся в § 3 главы VI, где будут рассмотрены [263, 290] условия возникновения в бесстолкновительных системах так называемой «шланговой» неустойчивости, хорошо известной в гидродинамике и физике плазмы.

#### § 4. СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ С ИЗОТРОПНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ОТ ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Задача, сформулированная в названии параграфа, была рассмотрена Калсрудом и Марком в работах [263, 289а], причем в [263] использовался энергетический принцип, а в [289а] — уравнения для симметричных нормальных мод, выведенные в предыдущем параграфе (см. § 3, (19)). Ниже мы будем придерживаться в основном последней работы.

Допустим, что  $(k - k_{кр})$  мало и справедливы следующие оценки:

$$c_z = c_x \sim L/\tau \sim L(G\rho)^{1/2},$$

$$|\omega| \tau \sim |\omega| / (G\rho)^{1/2} \sim |k - k_{кр}| L \ll 1,$$
(1)

где  $c_z$ ,  $c_x$  — дисперсии  $z$ - и  $x$ -компонент скоростей,  $L$  — характерная толщина слоя.

Тогда можно разложить все величины по  $(k - k_{кр})$ :

$$\omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \dots,$$
(2)

где  $\varphi^{(m)}$  и  $\omega^{(m)}$  имеют порядок  $O[(k - k_{кр})^m]$ .

В низшем порядке такой теории возмущений мы получим из уравнения (19) предыдущего параграфа

$$[d^2/dz^2 + \omega(z) - k_{кр}^2] \varphi^{(0)} = 0.$$
(3)

Это уравнение должно решаться вместе с граничными условиями

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dz} \pm k_{кр} \varphi^{(0)} = 0 \quad \text{при } z = \pm c$$
(4)

(для определенности мы считаем, что  $k_{кр} > 0$ ). Уравнение (3) представляет собой уравнение на собственные значения, которое, как можно показать [263, 289а], определяет при граничных условиях (4) единственное критическое волновое число  $k_{кр}$  и единственную функцию  $\varphi^{(0)}(z)$ .

Для равновесных функций распределения (12) § 1 при  $n = 2 \div 6$  в работе [289а] решения уравнения (4) даны в виде графиков. Функции  $\varphi^{(0)}(z)$  монотонно убывают при увеличении  $z$  от 0 до  $c$ . В [289а] приведена также таблица соответствующих критических длин волн  $\lambda_{кр} = 2\pi/k_{кр}$  в единицах величины

$$\lambda_J \equiv c^2/4\pi G\sigma_0,$$
(5)

где  $\sigma_0$  — поверхностная плотность слоя. При изменении параметра модели  $n$  от 2 до 6  $\lambda_{кр}/\lambda_J$  монотонно уменьшается от значения 34,4 до 28,9. В то же время отношение  $c/\lambda_J$  увеличивается на том же интервале изменения  $n$  от 10 до 18. Соответственно если  $\lambda_{кр}$  измерять в единицах полной толщины слоя  $2c$ , то оказывается, что при  $n = 2$   $\lambda_{кр} = 1,72$ , а при  $n = 6$   $\lambda_{кр} = 0,80$ . Эти отношения лежат, естественно, в районе единицы.

В следующем порядке теории возмущений мы имеем

$$[d^2/dz^2 + \omega(z) - k_{кр}^2] \varphi^{(1)} = 2k_{кр} (k - k_{кр}) \varphi^{(0)} + \omega^{(1)} \hat{L}_s^{(1)} \varphi^{(0)}, \quad (6)$$

где ( $P$  — главное значение интеграла)

$$\hat{L}_s^{(1)} \varphi^{(0)} = 4\pi G \int (Q_1 + Q_2) dv_z, \quad (7)$$

$$Q_1 = P \int \frac{\partial f_0}{\partial E_z} \left\{ \int_0^{\tau(z)} \varphi(\xi) \sin [k_{кр} v_x \tau(\xi, z)] d\tau(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{\cos [k_{кр} v_x \tau(z)]}{\sin (k_{кр} v_x \tau_0)} \int_0^{\tau_0} \varphi(\xi) \cos [k_{кр} v_x \tau(\xi, z_0)] d\tau(\xi) \right\} dv_x, \quad (8)$$

$$Q_2 = \frac{\pi i}{k_{кр}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial E_z} \Big|_{v_x = \frac{m\pi}{k_{кр} \tau_0}} R_m(z, E_z) \right\}, \quad (9)$$

$$R_m(z, E_z) \equiv \frac{1}{\tau_0(E_z)} \cos \left[ m\pi \frac{\tau(z)}{\tau_0} \right] \int_0^{\tau_0} \varphi(\xi) \cos \left[ \frac{m\pi}{\tau_0} \tau(\xi) \right] d\tau(\xi). \quad (10)$$

Граничные условия на  $\varphi^{(1)}$  следующие:

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{dz} \pm k_{кр} \varphi^{(1)} \pm (k - k_{кр}) \varphi^{(0)} = 0 \text{ при } z = \pm c. \quad (11)$$

Ввиду четности функции  $f_0(E)$  по  $v_x$   $Q_1 = 0$ , и остаются, таким образом, лишь вклады от резонансных частиц, которые определяются величиной  $Q_2$  (сумма по  $m$  в выражении для  $Q_2$  должна, разумеется, включать только те резонансные частицы, которые действительно присутствуют в системе).

Частота  $\omega^{(1)}$  определяется из условия совместности решений уравнений (3) и (6). Это условие получается стандартным способом. Умножая уравнение, сопряженное к (3), на  $\varphi^{(1)}$ , а уравнение (6) — на  $\varphi^{(0)*}$ , вычитая, интегрируя по  $z$  от  $-c$  до  $c$  и используя граничные условия (4) и (11) для исключения производных при  $z = \pm c$ , найдем

$$(k - k_{кр}) \left[ |\varphi^{(0)}(c)|^2 + k_{кр} \int_{-c}^c |\varphi^{(0)}|^2 dz \right] = \\ = i\omega^{(1)} \frac{8\pi^2 G}{k_{кр}} \sum_m \int \left| \frac{\partial f_0}{\partial E_z} \Big|_{v_x = \frac{m\pi}{k_{кр} \tau_0}} \right| \int_0^{\tau_0} \varphi^{(0)}(\xi) \cos \left[ \frac{m\pi \tau(\xi)}{\tau_0} \right] d\tau(\xi) \Big|^2 \frac{dE_z}{\tau_0} \quad (12)$$

(где мы перешли от интегрирования по  $z, v_x$  к интегрированию по  $E_z, \tau(z)$ ).

Отсюда видно, что при  $k < k_{кр}$  волна является аperiodически нарастающей, а при  $k > k_{кр}$  — аperiodически затухающей. При этом, как мы отметили выше, рост (или затухание) волны происходит исключительно благодаря резонансным частицам.

Физическая причина такого положения дел заключается в следующем. Поскольку при  $k \approx k_{кр}$  волна почти стационарна во времени, большинство частиц успевает пересечь (за характерное время изменения потенциала) много длин волн ( $\lambda \approx \lambda_{кр} \sim c$ ) в  $x$ -направлении. Поэтому они почти не обмениваются энергией с волной. Исключение составляют резонансные частицы, которые получают когерентные импульсы от волны.

Такая физическая картина неустойчивости при  $k \approx k_{кр}$  существенно отличается от картины длинноволновой джинсовской неустойчивости

(рассмотренной в § 2), которая имеет чисто гидродинамический характер и в развитии которой принимает участие практически вся масса слоя. Мы видели, что в последнем случае  $\omega^2 \sim k$ , т. е. характерное время нарастания возмущения  $\tau \sim \sqrt{\lambda}$ . С увеличением длины волны  $\tau$  тоже увеличивается, однако существенно медленнее, чем  $\lambda$ . Поэтому для достаточно больших  $\lambda$  основная масса частиц не успевает пересечь (за время  $\tau$ ) область с размером порядка  $\lambda$ , так что частицы остаются, по существу, в области первоначального возмущения, где и собираются в сгустки под действием гравитационного притяжения.

Отметим также характерное отличие в форме дисперсионных уравнений вблизи от  $k_{кр}$  для газового ( $\omega^2 \sim k - k_{кр}$ ) и бесстолкновительного ( $\omega \sim i(k_{кр} - k)$ ) слоев, непосредственно связанное с разной физикой развития неустойчивости в том и другом случае.

В работе [289a] рассмотрены также некоторые обобщения приведенных выше результатов. При помощи уравнения (19) предыдущего параграфа можно, например, сравнительно просто исследовать влияние на поведение возмущений слабой анизотропии функции распределения  $f_0$ .

Оказывается, если разность  $\left[ \frac{\partial f_0}{\partial v} \left( \frac{1}{2} v_x^2 \right) - \frac{\partial f_0}{\partial E_z} \right]$  всюду отрицательна

(и быстро уменьшается по абсолютной величине при увеличении  $v_x^2$ ), то  $i\omega$  проходит через нуль при положительном  $(k - k_{кр})$ , где  $k_{кр}$  по-прежнему определяется из уравнения (3). Это соответствует нашей интуиции: если дисперсия скоростей (в  $x$ -направлении) уменьшается, то мы действительно ожидаем, что неустойчивыми станут меньшие длины волн.

## § 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО СЛОЯ

### 1. Вывод характеристического уравнения для собственных частот.

Мы примем следующий порядок изложения. Сначала выведем характеристическое уравнение, определяющее частоты собственных колебаний плоского слоя. На рассматриваемом простейшем примере излагаются основные идеи нескольких методов, которыми можно пользоваться для решения этой и аналогичных задач (см. главы II—V). После этого, следуя в основном работе [8], мы проведем более полное рассмотрение колебаний этой модели и, в частности, дадим доказательство ее устойчивости.

Трудность задачи заключается в том, что соответствующая функция распределения (9) § 1 обращается в бесконечность на границе фазового объема, занимаемого системой (см. рис. 3). Поэтому обычный метод линеаризации кинетического уравнения подстановкой  $f = f_0 + \epsilon f_1$  ( $\epsilon f_1 \ll f_0$ ) в данном случае, строго говоря, не пригоден хотя бы потому, что приводит к расходящимся интегралам при вычислении возмущенной плотности  $\rho_1 \sim \int \frac{\partial f_0}{\partial v} dv$ . Это является формальным отражением того факта, что здесь необходим явный учет изменения (вследствие возмущения) границы фазового объема системы.

Нужно заметить, что необходимость исследования сингулярных функций распределения, подобных (9) § 1, или, например,  $\delta$ -образных, часто возникает при рассмотрении устойчивости моделей гравитирующих систем. Мы будем сталкиваться с подобными примерами на протяжении всей книги, причем не только при решении некоторых принципиальных вопросов или таких задач, когда заранее очевидно, что некоторая «экзотичность» исследуемой функции распределения не играет роли, но и при рассмотрении устойчивости вполне реалистических распределений, когда

спектры сингулярных функций типа (9) § 1 служат некоторой «матрицей», по которой могут быть восстановлены спектры других функций распределения (см. § 3 главы II, § 4.3 главы V).

*Метод лагранжевых смещений в фазовом пространстве* [8, 14]. Допустим, что исходные положения всех частиц в фазовом пространстве  $(z_0, v_0)$  статистически удовлетворяют распределению

$$f_0(z_0, v_0) = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-z_0^2-v_0^2}}. \quad (1)$$

Частицы в момент  $t=0$  занимают согласно (1) фазовый объем, ограниченный окружностью

$$z_0^2 + v_0^2 = 1. \quad (2)$$

Если в системе отсутствуют какие бы то ни было возмущения, то частица, находившаяся в момент  $t=0$  в точке фазового пространства с координатами  $(z_0, v_0)$ , в момент  $t$  перейдет в точку  $(z, v_z)$ , причем новые фазовые координаты выражаются через старые следующим образом:

$$z = z_0 \cos t + v_0 \sin t, \quad v_z = -z_0 \sin t + v_0 \cos t. \quad (3)$$

Эти формулы описывают естественную, *кинематическую* эволюцию системы, при которой сохраняется вид исходной функции распределения (1). При наложении малого возмущения фазовые траектории слегка деформируются:

$$z = z_0 \cos t + v_0 \sin t + \varepsilon \psi, \quad v_z = -z_0 \sin t + v_0 \cos t + \varepsilon \varphi, \quad (4)$$

где введены две поправочные функции  $\psi$  и  $\varphi$ , зависящие от  $t, z_0$  и  $v_0$  ( $\varepsilon$  — малый параметр разложения,  $\varepsilon \ll 1$ ). В действительности, однако, достаточно знания какой-либо одной функции, например  $\psi$ . Функцию  $\varphi$  легко выразить через  $\psi$ . Для этого продифференцируем по времени первое из уравнений (4):

$$\dot{z} = \dot{v}_z = -z_0 \sin t + v_0 \cos t + \varepsilon \frac{d\psi}{dt}. \quad (5)$$

Сравнивая (5) со вторым уравнением (4), найдем искомую связь:

$$\varphi = \frac{d\psi}{dt}. \quad (6)$$

Напряженность гравитационного поля, действующего на частицу с координатой  $z$ , связана с  $\psi$  соотношением

$$\ddot{z} = F = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -z_0 \cos t - v_0 \sin t + \varepsilon \frac{d^2 \psi}{dt^2}. \quad (7)$$

Но, с другой стороны, мы имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = z + \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (8)$$

так что (7) переписывается в виде

$$-z - \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -(z_0 \cos t + v_0 \sin t) + \varepsilon \frac{d^2 \psi}{dt^2}. \quad (9)$$

Учитывая (4), получаем отсюда уравнение, описывающее эволюцию функции  $\psi$ :

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \psi \equiv (\hat{D}^2 + 1) \psi = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}. \quad (10)$$

В этом уравнении оператор  $\hat{D} \equiv d/dt$  есть стоксова производная в фазовом пространстве (временная производная вдоль невозмущенной траек-



тории движения частицы):

$$\hat{D} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{z_0, v_0} = \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (11)$$

Правую часть (10) можно при желании выразить через  $\psi$  [8]. В результате получается интегродифференциальное уравнение

$$(\hat{D}^2 + 1)\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{\psi(z, v_z) dv_z}{\sqrt{1-z^2-v_z^2}}, \quad (12)$$

которое и исследовалось в работе [8].

Проще, однако, поступить следующим образом [14]. Определив из (10) функцию  $\psi(z, v_z)$ , возмущенную плотность  $\rho_1$  можно вычислить по формуле

$$\rho_1 = -\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}, \quad (13)$$

где  $\bar{\psi}$  означает смещение, усредненное по скоростям частиц, т. е.

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \psi(z, v_z) \frac{dv_z}{\sqrt{1-z^2-v_z^2}}. \quad (14)$$

Действительно, рассмотрим какой-либо «элементарный поток» частиц, невозмущенные скорости которых заключены в интервале  $v_z, v_z + dv_z$ . Невозмущенная плотность, соответствующая этому потоку, есть тогда

$$\delta\rho_0 = f_0(v_z) dv_z = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{dv_z}{\sqrt{1-z^2-v_z^2}}. \quad (15)$$

Для фиксированного потока должно быть, очевидно, справедливо уравнение непрерывности<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \text{div}(\delta\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (16)$$

Линеаризуя уравнение (16) и вводя полную производную  $d/dt$  (вдоль невозмущенного движения потока), найдем

$$\frac{\partial \delta\rho_1}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \delta\rho_1 \equiv \frac{d}{dt} \delta\rho_1 = -\delta\rho_0 \text{div} \mathbf{v}_1. \quad (17)$$

Если в этом равенстве перейти от возмущенной скорости  $\mathbf{v}_1$  к смещению  $\xi$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\xi}{dt}, \quad (18)$$

то получим

$$\delta\rho_1 = -\delta\rho_0 \text{div} \xi_1. \quad (19)$$

Полная возмущенная плотность определяется из (19) интегрированием по невозмущенным скоростям, что эквивалентно усреднению

<sup>1</sup> И уравнение Эйлера (с равным нулю давлением). Каждый «элементарный поток» можно описывать гидродинамически, поскольку скорости всех частиц в нем фиксированы. Тогда всю систему следует рассматривать как (самосогласованную) совокупность бесконечного числа «элементарных потоков». Такой подход, который, очевидно, эквивалентен кинетике, носит название «многопоточковой гидродинамики». Он обладает некоторой наглядностью.

смещения  $\xi$ :

$$\rho_1 = -\rho_0 \operatorname{div} \bar{\xi}. \quad (20)$$

В рассматриваемом случае одномерного движения (по  $z$ ) и  $\delta\rho_0$ , соответствующего (15), формула (20), очевидно, эквивалентна (13).

Удобно вместо  $v_z$  ввести в (14) новую переменную  $s$ ,  $v_z^2 = (1-z^2)s^2$ :

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(z, s \sqrt{1-z^2}) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (21)$$

Уравнения (10), (13), (21) вместе с одномерным уравнением Пуассона

$$d^2\Phi_1/dz^2 = 4\pi G\rho_1 \quad (22)$$

образуют замкнутую систему. Задача состоит в отыскании всех решений этой системы уравнений, соответствующих собственным колебаниям слоя, т. е. имеющих зависимость от времени  $\sim e^{-i\omega t}$ .

Будем рассматривать сначала только «истинные» собственные колебания, отвечающие коллективным колебаниям системы, а не движениям отдельных частиц (последние рассматриваются ниже отдельно).

Замечательной особенностью исследуемой системы является возможность выбора возмущенного потенциала  $\Phi_1(z)$  в виде конечных полиномов по степеням  $z$ :

$$\Phi_1^{(n)} = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \dots \equiv \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k(t) z^{n-2k}. \quad (23)$$

В последующих главах мы увидим, что аналогичное свойство справедливо и для других однородных по плотности гравитирующих систем эллипсоидальной формы<sup>1</sup>: возмущение потенциала  $\Phi_1(x, y, z)$  в них может быть представлено в виде конечных полиномов по степеням декартовых координат.

Легко проверить, что для получения частот колебаний, соответствующих (23), достаточно при вычислениях удерживать только член со старшей степенью  $z$ . Остальные члены, хотя и присутствуют в  $\Phi_1^{(n)}$ , оказываются для этой цели несущественными. Это следует уже из самой возможности выбора решения в виде (23).

Опуская в (23) все члены, кроме первого, напомним

$$\Phi_1^{(n)} \propto z^n, \quad (24)$$

где мы теперь используем знак  $\propto$  вместо знака равенства в (23). Соответственно и формула усреднения (21) запишется в виде

$$\bar{\psi} \propto \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(z, izs) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (25)$$

Для определения функции  $\psi$ , отвечающей (24), нужно решить уравнение

$$(\hat{D}^2 + 1)\psi = -nz^{n-1}. \quad (26)$$

Это можно сделать разными способами. Воспользуемся, например, таким способом [14]. Введем вместо  $z$ ,  $v_z$  новые переменные  $q$ ,  $q_1$ :  $q =$

<sup>1</sup> Плоский однородный слой, однородные сферы и цилиндры, диск с поверхностной плотностью  $\sigma_0(r) \sim \sqrt{1-r^2/R^2}$  можно рассматривать как некоторые вырожденные (или предельные) формы однородных эллипсоидов.

$= z + iv_z$ ,  $q_1 = z - iv_z$ . В этих переменных оператор  $\hat{D}$  примет вид ( $\partial/\partial t = -i\omega$ ):

$$\hat{D} = -i \left( \omega + q \frac{\partial}{\partial q} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \right).$$

Решением уравнения

$$\hat{D}g = Q(q, q_1) \quad (27)$$

с произвольной правой частью  $Q(q, q_1)$  является

$$g = \hat{D}^{-1}Q = i \int_0^{\infty} Q(qe^{\tau}, q_1e^{-\tau}) e^{\omega\tau} d\tau. \quad (28)$$

Нам требуется обратить оператор  $(\hat{D}^2 + 1)$ , но

$$(\hat{D}^2 + 1)^{-1} = -\frac{i^2}{2} [(\hat{D} - i)^{-1} - (\hat{D} + i)^{-1}]. \quad (29)$$

Операторы  $\hat{D} \pm i$  отличаются от  $\hat{D}$  только заменой  $\omega \rightarrow (\omega \mp 1)$ . Отсюда получаем искомую формулу обращения

$$(\hat{D}^2 + 1)^{-1}Q = \int_0^{\infty} Q(qe^{\tau}, q_1e^{-\tau}) \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau. \quad (30)$$

Таким образом, для  $\psi$  будем иметь

$$\psi = -n \int_0^{\infty} [z(qe^{\tau}, q_1e^{-\tau})]^{n-1} \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau. \quad (31)$$

Поскольку  $z = (q + q_1)/2$ , то под интегралом в (31)  $z$  переходит в  $\frac{1}{2}(qe^{\tau} + q_1e^{-\tau}) = z \operatorname{ch} \tau + iv_z \operatorname{sh} \tau$ ,

и мы находим

$$\psi = -n \int_0^{\infty} (z \operatorname{ch} \tau + iv_z \operatorname{sh} \tau)^{n-1} \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau. \quad (32)$$

Усреднение, согласно (25), производим по формуле

$$\bar{\psi} = -\frac{nz^{n-1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{\infty} (\operatorname{ch} \tau - s \operatorname{sh} \tau)^{n-1} \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau. \quad (33)$$

Вычисляя затем плотность  $\rho_1$  по формуле (13) и используя уравнение Пуассона (22), приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{\infty} (\operatorname{ch} \tau - s \operatorname{sh} \tau)^{n-1} \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau = -1,$$

или, вводя  $s = \cos \varphi$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} (\operatorname{ch} \tau - \cos \varphi \operatorname{sh} \tau)^{n-1} \operatorname{sh} \tau e^{\omega\tau} d\tau = -1. \quad (34)$$

Это уравнение после некоторых выкладок можно привести к виду [8]

$$\sum_{k=-N}^N \frac{(N+k-1)!!(N-k-1)!!}{(N+k)!!(N-k)!!} \frac{1}{(\omega-k)^2-1} = -1, \quad (35)$$

где  $N \equiv n-1$ . Подробное исследование уравнения (35) отложим до п. 2. Здесь отметим только самые простые случаи. При  $N=0$  ( $n=1$ ) получается тривиальное решение  $\omega=0$ ,  $\psi=\text{const}$ , соответствующее смещению системы как целого. При  $N=1$  ( $n=2$ ) имеется пара комплексно-сопряженных решений, описывающих однородные растяжения — сжатия системы:

$$\psi = (\pm i \sqrt{3z-2v_z}) e^{\pm iV\bar{3}t}. \quad (36)$$

Эти пульсации происходят с частотой  $\omega = \sqrt{3}$ .

Рассмотрим теперь на том же самом примере другие методы исследования устойчивости.

Начнем с простого метода, который можно назвать *методом вариации фазового объема системы* [111, 113].

Для явного учета смещения границы фазовой области системы воспользуемся несколько видоизмененной по сравнению с обычной теорией возмущений. Именно, положим, вводя малую добавку под знак радикала в равновесной функции распределения  $f_0$ :

$$f = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\theta(\kappa^2 - v_z^2 - \varepsilon\chi)}{\sqrt{\kappa^2 - v_z^2 - \varepsilon\chi}} \quad (\kappa^2 \equiv 1 - z^2), \quad (37)$$

где  $\varepsilon\chi(z, v_z, t)$  — искомое возмущение,  $\varepsilon \ll 1$ . Такая форма теории возмущений позволяет автоматически учитывать как изменение границы первоначального фазового объема системы, так и локальные изменения фазовой плотности.

Подстановка (37) в кинетическое уравнение приводит к следующему уравнению для  $\chi$ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \chi}{\partial z} - z \frac{\partial \chi}{\partial v_z} = 2v_z \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}. \quad (38)$$

Видно, что левая часть (38) совпадает с обычной теорией возмущений, но в правой части вместо  $\partial f_0 / \partial v_z$  стоит  $2v_z$  (производная подкоренного выражения в  $f_0$  по  $v_z$ ).  $\Phi_1$  в уравнении (38) есть возмущенный потенциал, который находится из уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (39)$$

Остается выразить возмущенную плотность  $\rho_1$  через функцию  $\chi$ . Это можно сделать следующим образом. Полная плотность (невозмущенная + возмущенная) равна

$$\rho = \frac{\rho_0}{\pi} \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{\theta(\kappa^2 - v_z^2 - \varepsilon\chi)}{\sqrt{\kappa^2 - v_z^2 - \varepsilon\chi}} dv_z. \quad (40)$$

Наша цель заключается в выделении из (40) возмущенной плотности  $\rho_1$ . Прямое разложение подынтегрального выражения в (40) по  $\varepsilon$  приводит к уже упомянутым трудностям с расходящимися выражениями. Предлагаемый способ регуляризации заключается в такой замене переменной интегрирования в (40), чтобы подкоренное выражение приняло (в новых переменных) первоначальный вид. Для этого вводим обозначения

$$\kappa_1^2 = \kappa^2 - \varepsilon\chi_0, \quad (41)$$

$$v_1^2 = v_z^2 + \varepsilon\chi_1, \quad (42)$$

где  $\chi_0 = \chi(v=0)$ ;  $\chi_1 = \chi - \chi_0$ , и преобразуем интеграл ( $v_z \rightarrow v_1$ ):

$$\rho = \frac{\rho_0}{\pi} \int_{-\chi_1}^{\chi_1} \frac{\theta(\chi_1^2 - v_1^2)}{\sqrt{\chi_1^2 - v_1^2}} \left( 1 + \frac{\varepsilon \chi_1}{2v_1^2} - \frac{\varepsilon}{2v_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1} \right) dv_1. \quad (43)$$

Отсюда и получается искомый рецепт вычисления возмущенной плотности по известной функции  $\chi$ :

$$\rho_1 = \varepsilon \frac{\rho_0}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} \frac{\theta(\chi^2 - v_z^2)}{\sqrt{\chi^2 - v_z^2}} \left( \frac{\chi_1}{v_z^2} - \frac{1}{v_z} \frac{\partial \chi_1}{\partial v_z} \right) dv_z. \quad (44)$$

Первый член ( $\sim 1$ ) в уравнении (43) приводит к плотности  $\rho_0$  в слое, новые границы которого находятся из условия

$$\chi_1^2 = \chi^2 - \varepsilon \chi_0(z) = 1 - z^2 - \varepsilon \chi_0(z) = 0 \quad (45)$$

(однако в рассматриваемом плоском случае смещение границы не играет роли).

Итак, для определения спектра частот колебаний и соответствующих собственных функций необходимо решить систему уравнений (38), (39), (44). Кинетическое уравнение (38) достаточно простое, его можно решать, например, методом интегрирования по траекториям (или интегрированием по углу) [138].

Вводим полярные координаты  $\rho, \varphi$  в фазовом пространстве ( $z, v_z$ )

$$v_z = \rho \cos \varphi, \quad (46)$$

$$z = \rho \sin \varphi. \quad (47)$$

Тогда кинетическое уравнение (38) для собственных колебаний принимает вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - i\omega \chi = 2n\rho^n \cos \varphi (\sin \varphi)^{n-1} + \dots, \quad (48)$$

где выделен вклад от старшей степени  $z$  в  $\Phi_1$ , а точками обозначен вклад от остальных членов. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (48) складывается из общего решения однородного уравнения

$$\chi^{(0)} = C(\rho) e^{i\omega\varphi} \quad (49)$$

и частного решения неоднородного уравнения. Последнее можно представить, например, в таком виде:

$$\chi^{(n)} = 2n\rho^n e^{i\omega\varphi} \int_0^\varphi e^{-i\omega x} \cos x (\sin x)^{n-1} dx. \quad (50)$$

Теперь нужно наложить условие периодичности

$$\chi(\varphi) = \chi(\varphi + 2\pi), \quad (51)$$

являющееся граничным условием для данной задачи. Это приводит, как легко видеть, к следующему выражению для функции  $C(\rho)$ :

$$C(\rho) = \frac{2n\rho^n e^{2\pi i\omega}}{1 - e^{2\pi i\omega}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} \cos x (\sin x)^{n-1} dx. \quad (52)$$

Решение кинетического уравнения поэтому выглядит так:

$$\chi = e^{i\omega\varphi} \left\{ \frac{e^{i\omega 2\pi}}{1 - e^{i\omega 2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega x} \cos x (\sin x)^{n-1} dx + \int_0^\varphi e^{-i\omega x} \cos x (\sin x)^{n-1} dx \right\} 2n\rho^n. \quad (53)$$

Можно было и сразу выписать периодическое решение уравнения (48). Для этого нужно представить произведение тригонометрических функций в правой части в виде суммы комплексных гармоник и воспользоваться тем, что решение уравнения (48) для одной гармоники

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - i\omega \chi = e^{il\varphi} \quad (l - \text{целое}), \quad (54)$$

удовлетворяющее необходимому условию периодичности (51), следующее:

$$\chi_l = \frac{i}{\omega - l} e^{il\varphi}. \quad (55)$$

После вычисления функции  $\chi$  можно по формуле (44) вычислить возмущение плотности  $\rho_1$ , а затем, решая уравнение Пуассона, — и соответствующий этой плотности возмущенный потенциал  $\Phi_1$ , который снова получается в виде полинома, начинающегося с  $z^n$ . Приравнявая коэффициенты при  $z^n$  в полученном таким образом выражении для  $\Phi_1$  и в исходном (24), находим искомое характеристическое уравнение.

Выкладки нетрудно довести до конца и вывести общее характеристическое уравнение (35). Конкретный способ решения кинетического уравнения не имеет, конечно, принципиального значения, хотя может иногда сказаться на громоздкости окончательного представления характеристического уравнения. Последнее, однако, уже получено (см. (35)); поэтому мы ограничимся в дальнейшем вычислением собственных частот только для простейшей моды, соответствующей однородным растяжением — сжатиям. Это вполне достаточно для иллюстрации основных идей различных методов. Итак, примем  $n=2$ , так что

$$\Phi_1 = z^2 + \text{const}. \quad (56)$$

Ясно, что именно этой моде соответствуют искомые колебания, сохраняющие постоянной плотность слоя:  $\rho_1 = \text{const} \neq \rho_1(z)$ . Вместо (48) в данном случае имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - i\omega \chi = 4\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi = 2\rho^2 \sin 2\varphi = \rho^2 \frac{(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi})}{i}. \quad (57)$$

Отсюда в соответствии с (54) получаем

$$\chi = \rho^2 \left\{ \frac{e^{2i\varphi}}{\omega - 2} - \frac{e^{-2i\varphi}}{\omega + 2} \right\}. \quad (58)$$

Перейдем в (58) снова к переменным  $(z, v_z)$ :

$$\chi = \frac{1}{\omega - 2} (v_z + iz)^2 - \frac{1}{\omega + 2} (v_z - iz)^2 = (v_z^2 - z^2) \frac{4}{\omega^2 - 4} + \frac{4i\omega z v_z}{\omega^2 - 4}. \quad (59)$$

Выделяем, согласно (41, 42), функцию  $\chi_1$  (отбрасывая не зависящий от  $v_z$  член  $\chi_0$ ):

$$\chi_1 = \frac{4}{\omega^2 - 4} v_z^2 + \frac{4i\omega z v_z}{\omega^2 - 4}. \quad (60)$$

Последний член в (60) не вносит вклада в  $\rho_1$ . Вычисляем  $\rho_1$ , подставляя (60) в (44) и выполняя интегрирование:

$$\rho_1 = -\frac{2\rho_0}{\omega^2 - 4}. \quad (61)$$

Поэтому возмущенный потенциал  $\Phi_1$  равен

$$\Phi_1 = -\frac{z^2}{\omega^2 - 4}. \quad (62)$$

Сравнивая (62) и (56), получаем

$$-1/(\omega^2-4) = 1, \text{ т. е. } \omega^2 = 3, \quad (63)$$

в согласии с предыдущим методом.

Разумеется, малые колебания рассматриваемой простой системы гравитирующего слоя, можно исследовать и другими методами, в том числе более близкими к традиционным. Чтобы придать расходящимся выражениям определенный смысл, нужно было бы, строго говоря, вводить обобщенные функции. Однако в данном случае можно поступить следующим образом (аналогично [252]).

Будем формально решать линейризованное обычным способом кинетическое уравнение

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}. \quad (64)$$

Возьмем снова для простоты  $\Phi_1 \sim z^2$  (мы уже знаем, что соответствующая частота колебаний  $\omega$  должна равняться  $\sqrt{3}$ ). Заменяя  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ , получаем вместо (64)

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} - i\omega f_1 = 2zv_z \frac{\partial f_0}{\rho \partial \rho} = 2\rho^2 \frac{\partial f_0}{\partial \rho^2} \sin 2\varphi. \quad (65)$$

Решаем это уравнение, интегрируя по углу:

$$f_1 = \frac{\rho^2 f_0'}{\omega - 2} e^{2i\varphi} - \frac{\rho^2 f_0'}{\omega + 2} e^{-2i\varphi} = f_0' \left\{ (z^2 - v_z^2) \frac{-4}{\omega^2 - 4} + \frac{i4\omega zv_z}{\omega^2 - 4} \right\}. \quad (66)$$

Теперь нужно было бы вычислить интеграл

$$\rho_1 = \int f_1 dv_z \sim \frac{4}{\omega^2 - 4} \int v_z^2 \frac{\partial f_0}{\partial \rho^2} dv_z = \frac{2}{\omega^2 - 4} \int v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} dv_z, \quad (67)$$

который, однако, расходится. Очевидно, расходимость связана с особенностью  $f_0$  на границе фазового объема. Размажем слегка эту особенность, рассматривая функцию распределения (1) как предел некоторой последовательности «хороших» функций распределения  $\{f_{0n}\}$ , не имеющих особенности, но в остальном похожих на  $f_0$ . Допустим, что эта последовательность функций с непрерывными производными сходится к  $f_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда можно выполнить интегрирование в (67), а после этого взять предел  $n \rightarrow \infty$ . Интегрируя (67) по частям, получим

$$\frac{2}{\omega^2 - 4} \left\{ v_z f_{0n} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int f_{0n} dv_z \right\}.$$

Под интегралом теперь стоит не производная, а сама функция  $f_{0n}$ . Так как  $f_0$  интегрируема, то можно теперь взять предел  $n \rightarrow \infty$ , а затем интегрировать. В данном случае интеграл равен просто  $\rho_0$ . Что же касается члена  $v_z f_{0n} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ , то он, очевидно, равен нулю для любой функции  $f_{0n}$ . Таким образом устанавливается правило вычисления расходящихся интегралов, имеющее общий характер, т. е. применимое не только для рассмотренной, но и для всех других колебательных мод. Нужно формально полученное выражение типа (67) проинтегрировать по частям и отбросить внеинтегральный член.

Доведем вычисление до конца. Возмущенная плотность по (67) есть

$$\rho_1 = -2\rho_0/(\omega^2 - 4),$$

что совпадает с (61). Следовательно, снова  $\omega^2 = 3$ .

**2. Устойчивость модели.** Перейдем к доказательству устойчивости рассмотренной модели плоского самогравитирующего слоя. Для этого мы докажем, во-первых, что все корни  $\omega$  характеристического уравнения (35) вещественны и, во-вторых, что никакие два корня не сов-

падают. Первое означает отсутствие экспоненциальных неустойчивостей, растущих  $\sim e^{t}$ . Второе (отсутствие кратных корней) показывает, что нет также и степенных неустойчивостей, растущих  $\sim t^n$ ,  $n > 0$ .

**2а. Вещественность собственных частот.** Предварительно докажем следующее утверждение [14]. Оказывается, что при записи дисперсионного уравнения в виде

$$F \equiv \sum_{m=0}^N \frac{\gamma_m}{(N-2m+\omega)^2-1} + 1 = 0 \quad (68)$$

все корни  $\omega$  заведомо будут вещественны, если выполняются неравенства

$$0 \leq \gamma_m \leq 1. \quad (69)$$

Действительно, в этом случае легко «локализовать» все корни уравнения (68). Рассмотрим совокупность значений  $\omega = -N-2, -N, \dots, N, N+2$ , которые будем называть «промежуточными». Для каждого промежуточного значения  $\omega$  ровно один член суммы в (68) отрицателен. Он имеет знаменатель  $(-1)$ , так что вследствие (69)  $F > 0$ . Но  $F$  меняет знак в точке полюса, расположенного посередине каждого из  $(N+2)$  интервалов между соседними «промежуточными» значениями  $\omega$ , и в том же интервале  $F$  должна еще хотя бы раз переменить знак. Таким образом, в каждом из этих интервалов должен быть корень. Поскольку, с другой стороны, степень уравнения (68) после приведения к общему знаменателю также оказывается равной  $(N+2)$ , то таким образом локализованы (и вещественны) все корни.

В рассматриваемом примере гравитирующего слоя согласно (35)

$$\gamma_m = \frac{(2m-1)!! (2N-2m-1)!!}{(2m)!! (2N-2m)!!}.$$

Здесь неравенства (69), очевидно, выполнены, так как

$$\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} < 1, \quad \frac{(2N-2m-1)!!}{(2N-2m)!!} < 1.$$

Этот же способ применяется при доказательстве вещественности корней характеристического уравнения, описывающего «желобковые» колебания бесстолкновительного цилиндра [14] (глава II, § 3).

В рассматриваемом здесь случае все корни характеристического уравнения (35) можно «перечислить» и другим способом [8]. Уравнение (35) приводится к следующей эквивалентной мультипликативной форме:

$$\frac{[\omega^2 - (N-2)^2][\omega^2 - (N-4)^2] \dots \omega^2}{[\omega^2 - (N+1)^2][\omega^2 - (N-1)^2] \dots [\omega^2 - 1]} = 1 \quad \text{при } N \text{ четном,} \quad (70)$$

$$\frac{[\omega^2 - (N-2)^2][\omega^2 - (N-4)^2] \dots [\omega^2 - 1]}{[\omega^2 - (N+1)^2][\omega^2 - (N-1)^2] \dots [\omega^2 - 4]} = 1 \quad \text{при } N \text{ нечетном.} \quad (71)$$

Докажем тождественность (70), (71) и (35). Общий знаменатель в (70) равен

$$[\omega - (N+1)][\omega - (N-1)] \dots [\omega + (N+1)],$$

что совпадает со знаменателем (35). Степень числителя в обоих случаях меньше, чем степень знаменателя, поэтому остается проверить совпадение разложений на элементарные дроби. Коэффициенты разложения (70) можно вычислить по формуле

$$a_{k+1} = \frac{P(\omega)}{2(k+1)Q_1(\omega)} \Big|_{\omega=k+1},$$



где  $P$  — числитель левой части (70), а  $Q$  — знаменатель, деленный на  $[\omega^2 - (k+1)^2]$ . Легко проверить, что эти коэффициенты совпадают с коэффициентами разложения в (35), которые находятся совсем элементарно. Для нечетных  $N$  проверка осуществляется тем же способом. Нужно только заметить, что в этом случае вначале кажется, что общий знаменатель равен

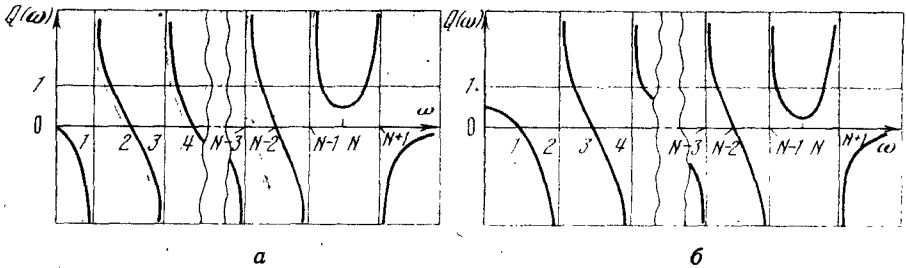
$$[\omega^2 - (N+1)^2][\omega^2 - (N-1)^2] \dots [\omega^2 - 4]\omega,$$

но в действительности элементарные дроби со знаменателем  $1/\omega$  выпадают, так как они присутствуют лишь в членах суммы с  $k = \pm 1$

$$\frac{1}{1 - (\omega \pm 1)^2} = \frac{1}{2} \left( \mp \frac{1}{\omega} + \frac{1}{2 \pm \omega} \right)$$

и взаимно уничтожаются.

Характеристическое уравнение в форме (70), (71) весьма просто исследовать. Обозначим левую часть (70) или (71) через  $Q(\omega^2)$ . Примерный график этой функции для случая четного  $N$  представлен на



Фиг. 4. Графическое представление дисперсионного уравнения для собственных частот перпендикулярных колебаний однородного плоского слоя

а — случай четного  $N$  (уравнение (70)); б — случай нечетного  $N$  (уравнение (71))

рис. 4, а. В области  $0 < \omega < N$  функция  $Q(\omega)$  меняет знак каждый раз, когда  $\omega$  равно натуральному числу, причем  $Q$  переходит при этом поочередно через нуль или бесконечность того или другого знака. Корни характеристического уравнения соответствуют точкам пересечения графика  $Q(\omega)$  и горизонтальной прямой  $Q=1$ . Их число легко подсчитать из рисунка: имеется по одному корню в интервалах  $(1,3)$ ,  $(3,5)$ ,  $(5,7)$  ...  $(N-3, N-1)$  и два корня в интервале  $(N-1, N+1)$ ; всего, таким образом,  $(N/2+1)$  корней.

Совершенно аналогичный подсчет для случая нечетного  $N$  (рис. 4, б) дает  $([N/2]+1)$  корней (здесь  $[ ]$  означает целую часть). Но этим исчерпываются корни характеристического уравнения (70) или (71), так как степень этого уравнения относительно  $\omega^2$  после приведения к общему знаменателю равна как раз  $[N/2]+1$ . Таким образом, первая часть доказательства устойчивости завершена: доказано, что все корни вещественны.

**26. Отсутствие степенных неустойчивостей.** Перейдем теперь к более трудной второй части задачи — доказательству отсутствия кратных корней.

Поясним сначала, каким образом в принципе наличие кратных корней может приводить к степенным неустойчивостям. Если фиксировать степень  $n$  полиномиального разложения (23)  $\Phi_1(z)$ , то можно получить уравнения для зависящих от времени коэффициентов этого разложения  $a_k(t)$ . При этом уравнение для коэффициента  $a_0$  (при старшей степени  $z^n$ ) является однородным

$$\hat{L}_n a_0(t) = 0. \quad (72)$$

При подстановке  $a_0(t) \sim e^{-i\omega t}$  оно дает характеристическое уравнение (35) для частот собственных колебаний, соответствующих данному  $n$ . Предположим, что среди этих частот есть кратные. Пусть, например, корень  $\omega = \omega_0$  имеет кратность  $N_1$ . Тогда, как известно, решения уравнения (72), соответствующие частоте  $\omega_0$ , суть линейные комбинации следующих независимых решений:

$$e^{-i\omega_0 t}, te^{-i\omega_0 t}, \dots, t^{N_1-1} e^{-i\omega_0 t}. \quad (73)$$

Таким образом, в этом случае в принципе возможна степенная неустойчивость.

Уравнения для остальных коэффициентов в разложении  $\Phi_1^{(n)}$  — неоднородные. Уравнение для коэффициента  $a_k$  символически можно записать в виде

$$\hat{L}_{n-2k} a_k(t) = \Lambda(a_0(t), a_1(t), \dots, a_{k-1}(t)), \quad (74)$$

где  $\Lambda$  — линейная функция коэффициентов при старших степенях  $z$  в  $\Phi_1^{(n)}(a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$ , а  $\hat{L}_{n-2k}$  — линейный дифференциальный оператор, который при  $\Lambda=0$  и  $a_k(t) \sim e^{-i\omega t}$  дает собственные частоты колебаний для моды с индексом  $(n-2k)$ . Допустим теперь, что среди частот колебаний моды  $(n)$  и моды  $(n-2k)$  есть какая-то общая частота  $\omega = \omega_0$ . Это приведет к резонансному члену  $a_0(t) \sim e^{-i\omega_0 t}$  в правой части (74), определяющей  $a_k(t)$ , и соответственно к решению для  $a_k(t)$ , растущему как  $te^{-i\omega_0 t}$ .

Кратных корней, как мы видели, нет среди решений, соответствующих одному  $N$ , но некоторые корни, соответствующие разным  $N$ , в принципе могли бы совпадать.

Для дальнейшего удобно пересчитать все собственные частоты, введя двухиндексное обозначение:  $\omega_{jN}$ . Второй индекс есть  $N$ , а первый означает то из натуральных чисел, противоположных по четности  $N$ , которое ближе всего к данному положительному  $\omega$ . При данном  $N > 2$  индекс  $j$  принимает, как легко видеть, например, из рис. 4, значения 1, 3, 5, ...,  $N+1$  (если  $N$  — четное) и аналогично значения 2, 4, 6, ...,  $N+1$  (если  $N$  — нечетное). Включим еще полученное для  $N=1$  значение  $\omega = \sqrt{3}$  с  $j=2$ .

Будем называть серией совокупность всех значений  $\omega_{jN}$  с одним и тем же  $j$ , но с разными  $N$ . Видно, что второй индекс членов серии принимает значения  $N=j-1, j+1, j+3, j+5, \dots$

Докажем сначала отсутствие совпадающих корней внутри одной и той же серии  $j$ . Для первого члена имеем

$$j-1 < \omega_{j, j-1} < j, \quad (75)$$

а для всех остальных

$$j < \omega_{j, N} < j+1 \quad (N \geq j+1). \quad (76)$$

Исключением является только первая серия: для нее член типа  $\omega_{j, j-1}$  выпадает, и она начинается со значения

$$\omega_{1, 2} = (\sqrt{15} - \sqrt{3})/2 = 1,071.$$

Неравенства (75) и (76) гарантируют несовпадение первого члена серии с последующими.

Докажем теперь еще одно неравенство, которое «упорядочивает» остальные корни:

$$\omega_{j, N} > \omega_{j, N+2} \quad (N = j+1, \dots). \quad (77)$$

При увеличении  $N$  на два в левую часть (70) или (71) добавляется множитель, меньший единицы по абсолютной величине. Но из

$|Q_{N+2}(\omega_{jN})| < |Q_N(\omega_{jN})| = 1$  и  $Q_N(j) = \infty$  следует (77)<sup>1</sup> (см. рис. 5). Неравенства (75), (76) и (77) показывают отсутствие совпадающих корней в пределах одной серии.

Остается доказать, что сами соседние серии также взаимно не перекрываются. Как видно из рис. 4, в разных (и только в соседних!) сериях

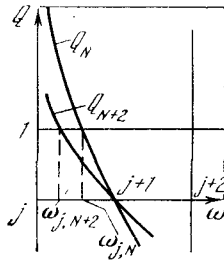


Рис. 5. График функций  $Q_N(\omega)$  и  $Q_{N+2}(\omega)$  на участке  $j < \omega < j+2$

могут в принципе совпадать только корни вида  $\omega_{j+1, j}$  и  $\omega_{j, j+1}$ . Докажем справедливость следующего неравенства:

$$\omega_{j+1, j} > \omega_{j, j+1} \quad (j=1, 2, \dots). \quad (78)$$

Путем некоторой перегруппировки сомножителей в (70) и (71) можно показать, что

$$\frac{Q_{N+1}(\omega+1)}{Q_N(\omega)} = \frac{(\omega+1)(\omega+N)}{\omega(\omega+N+3)},$$

поэтому при  $\omega > N/2$  имеет место неравенство

$$|Q_{N+1}(\omega+1)| < |Q_N(\omega)|. \quad (79)$$

Применим это неравенство для сравнения первых членов серий с  $j=2, 3, 4, \dots$ . В этом случае  $N=j-1$  и рассматривается интервал  $N < \omega < N+1$ , где  $\omega > N/2$ , так что неравенство (79) справедливо и дает

$$|Q_j(\omega_{j, j-1}+1)| < |Q_{j-1}(\omega_{j, j-1})| = 1,$$

а с учетом  $Q_j(j+1) = \infty$  получается

$$\omega_{j+1, j} > \omega_{j, j-1} + 1 \quad (j \geq 2). \quad (80)$$

Если же применить неравенство (79) для  $N=j+1$ , где  $j=1, 2, 3, \dots$  в интервале  $N-1 < \omega < N$ , получим

$$|Q_{j+2}(\omega_{j, j+1}+1)| > |Q_{j+1}(\omega_{j, j+1})| = 1,$$

и так как  $Q_{j+2}(j+1) = \infty$ , то для вторых членов серии будем иметь

$$\omega_{j+1, j+2} < \omega_{j, j+1} + 1 \quad (j \geq 1). \quad (81)$$

Вторая серия начинается со значениями  $\omega_{2,1} = \sqrt{3} = 1,732 \dots$ ; видно, что  $\omega_{2,1} > \omega_{1,2}$  (значение  $\omega_{1,2} = 1/2(\sqrt{15} - \sqrt{3}) = 1,071 \dots$  мы уже привели). Теперь, применяя (80) и (81), по индукции получим искомое неравенство (78). Докажем, что из  $\omega_{j+1, j} > \omega_{j, j+1}$  следует  $\omega_{j+2, j+1} >$

<sup>1</sup> Корни данной серии  $\omega_{jN}$  ( $N \geq j+1$ ) «стягиваются» при увеличении  $N$  к границе  $\omega=j$ , которая является для них точкой сгущения. Это следует из системы неравенств

$$\frac{Q_{N+2}(\omega)}{Q_N(\omega)} = \frac{N^2 - \omega^2}{(N+3)^2 - \omega^2} < \left(\frac{N}{N+2}\right)^2 \quad (N \geq j+1),$$

$$|Q_N(\omega)| < |Q_{j+1}(\omega)| \left(\frac{j+1}{j+3}\right)^2 \left(\frac{j+3}{j+5}\right)^2 \dots \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 = \frac{|Q_{j+1}(\omega)|(j+1)^2}{N^2},$$

так что  $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(\omega) = 0$ , откуда следует, что  $\lim_{N \rightarrow \infty} \omega_{jN} = j$ .

$> \omega_{j+1, j+2}$ . Действительно, используя последовательно неравенства (80), (78), (81), получим

$$\omega_{j+2, j+1} > \omega_{j+1, j} + 1 > \omega_{j, j+1} + 1 > \omega_{j+1, j+2},$$

что и требовалось доказать.

Тем самым доказательство устойчивости «истинных» колебаний самогравитирующего плоского слоя завершено. Можно заметить только, что вывод характеристического уравнения (70) или (71) перестает быть справедливым при целочисленных значениях частоты  $\omega$ . Ясно, однако, что наличие этих (вещественных!) частот ничего не изменяет в вопросе об устойчивости системы. Такие частоты соответствуют тривиальным «перестановочным» модам, они рассматриваются ниже, в п. 3.

Интересно, что рассматриваемая система оказалась устойчивой (по отношению к возмущениям с  $k_x = k_y = 0$ ), несмотря на «инверсную заселенность» энергетических уровней: равновесное распределение (1) есть возрастающая функция энергии частицы  $E \propto z^2 + v_z^2$ .

Калсруд и Марк [264] доказали устойчивость перпендикулярных колебаний произвольного гравитирующего слоя с убывающей функцией распределения по  $v_z$  ( $\frac{\partial f_0}{\partial E_z} < 0$ ). Полученный выше результат (наряду

с численными экспериментами [215]) показывает, что для неустойчивости минимум на функции распределения  $f_0(v_z)$  должен быть достаточно глубоким и широким (см. также [14a]).

**3. Перестановочные моды** описывают перестановки частиц без изменения фазовой плотности ( $f = \text{const}$ ). Возможны перестановки как в пределах одной орбиты, так и между разными орбитами. Поскольку возмущенного гравитационного поля не возникает, то

$$\hat{D}^2 \psi + \psi = 0. \quad (82)$$

Для  $\psi \sim e^{-i\omega t}$  получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - 2i\omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - (\omega^2 - 1)\psi = 0.$$

Последнее уравнение решается в общем виде

$$\psi = [A(\rho) e^{-i(\omega+1)\varphi} + B(\rho) e^{-i(\omega-1)\varphi}] e^{-i\omega t}. \quad (83)$$

Решение (83) должно быть однозначным, что обеспечивается только при целочисленных значениях  $\omega$ .

Выполнения условия (82), однако, недостаточно: необходимо еще проверить сохранение исходной функции распределения (1). Это приводит к некоторой связи между функциями  $A(\rho)$  и  $B(\rho)$  [8].

**4. Возмущения, не зависящие от времени** ( $\omega = 0$ ), нужно рассмотреть отдельно [8]. Можно получить два соответствующих решения. Одно из них есть просто смещение системы как целого ( $\psi = \text{const}$ ). Второе решение выглядит следующим образом:

$$\psi = b(\rho) \sin \varphi. \quad (84)$$

Оно имеет ясный геометрический смысл. Поворот каждой орбиты в фазовой плоскости на малый угол  $b(\rho)/\rho$  (разный у разных орбит) придает отдельной частице смещение по координате  $z$ , как раз равное  $b(\rho) \sin \theta$ . Функция распределения при этом, очевидно, не меняется, так как фазовые траектории всех частиц в рассматриваемом случае — окружности. Это один из типов перестановочных решений.

Так же рассматриваются [8] и возмущения, линейно зависящие от времени:

$$\psi = \varphi_0 t. \quad (85)$$

Одно из них ( $\psi = c_1 t$ ) означает равномерное движение системы как целого (снова тривиальный случай). Другое решение типа (85) следующее:

$$\psi = tb(\rho) \sin \varphi, \quad (86)$$

оно соответствует такому перераспределению масс, при котором изменяются периоды обращения, но в целом система остается стационарной.

## ЗАДАЧИ

1. Определить длинноволновые части ветвей колебаний однородного по плотности плоского гравитирующего слоя ( $kc \ll 1$ ,  $kv_{T1} \ll \omega$ ,  $\omega_0 c \ll v_T$ ), а также коротковолновый участок ( $kc \gg 1$ ) джинсовской ветви (см. начало § 2).

Решение. Задачу нахождения спектра частот произвольного «горячего» в плоскости  $(x, y)$  слоя можно считать в принципе решенной, когда найдено дисперсионное уравнение для колебаний «холодного» слоя. Если последнее записать символически в виде ( $F = \epsilon_0 - 1$ )

$$F(\omega, kc) = -1, \quad (1)$$

то общее дисперсионное уравнение, очевидно, будет выглядеть следующим образом (возмущение  $\sim e^{ikx}$ ):

$$\int f_0(v_x) F(\omega - kv_x, kc) dv_x = -1, \quad (2)$$

где  $f_0(v_x)$  — равновесная функция распределения частиц (особенности в этом интеграле нужно обходить, как обычно, по правилу Ландау (см. § 2)). Соответственно тепловые поправки к частоте для длинноволновых ( $kc \ll 1$ ) колебаний, удовлетворяющих условиям  $kv_T \ll \omega$ ,  $\omega_0 c \ll v_T$ , получаются из уравнения

$$\int f_0(v_x) F(\omega - kv_x, 0) dv_x = -1, \quad (3)$$

где

$$F(\omega, 0) = -1 \quad (4)$$

есть в нашей символической записи дисперсионное уравнение для частот перпендикулярных колебаний.

Все сказанное выше справедливо, разумеется, для любых неоднородных (по  $z$ ) моделей, но в случае *однородного* слоя мы имеем явные выражения для функции  $F(\omega, 0)$  (правые части уравнений (70) и (71)). Квадраты собственных частот перпендикулярных колебаний однородного слоя, определяемые уравнениями (70) и (71), можно рассматривать как предельные (при  $k \rightarrow 0$ ) для соответствующих колебательных ветвей  $\omega_i^2(k)$ . Их можно классифицировать (как мы знаем из § 3 и 5) по четности собственных функций (например, возмущенного потенциала  $\Phi_1(z) e^{ikx}$ ) относительно срединной плоскости слоя  $z=0$  и по числу узлов  $n$  функции  $\Phi_1(z)$ .

Найдем для примера длинноволновую часть ветви колебаний, которая при  $k \rightarrow 0$  переходит в однородные растяжения — сжатия слоя. В этом случае, согласно уравнению (71) § 5 при  $N=1$ , функция  $F(\omega, 0) = 1/(\omega^2 - 4)$ , поэтому уравнение (3) принимает вид

$$\int f_0(v_x) \frac{dv_x}{(\omega - kv_x)^2 - 4} = -1. \quad (5)$$

Для  $\omega \gg kv_T$  это уравнение дает

$$\omega^2 \approx 3 - \frac{13}{2} k^2 v_T^2. \quad (6)$$

К числу четных ветвей колебаний слоя нужно отнести (помимо тех, «окончания» которых содержатся среди решений уравнения (71)) еще «джинсовскую» ветвь, описанную в начале § 2. В пределе  $k=0$  она соответствует тривиальному решению  $\Phi_1=0$ . В § 2 мы определили джинсовскую ветвь при  $kc \ll 1$ :  $\omega^2 = -2\pi G\sigma_0 k = -4\pi Gk\rho_0 c$ . Найдём теперь коротковолновую часть этой ветви колебаний. Для возмущений с  $kc \gg 1$  можно пренебречь искривлениями границы (которые экспоненциально быстро убывают внутрь слоя), а для интересующей нас ветви можно также пренебречь  $z$ -зависимостью возмущенного потенциала. Тогда решение линеаризованного кинетического уравнения приводит к следующему выражению для возмущения плотности (аналогичному (3) § 2):

$$\rho_1 = -k\Phi_1 \int \frac{\partial f / \partial v_x dv_x}{\omega - kv_x}. \quad (7)$$

Уравнение Пуассона даёт в данном случае

$$\Phi_1 = -\frac{4\pi G\rho_1}{k^2}, \quad (8)$$

так что дисперсионное уравнение, вытекающее из (7) и (8), имеет вид

$$\varepsilon_0 \equiv 1 - \frac{1}{k^2} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x dv_x}{\omega/k - v_x} = 0. \quad (9)$$

Для максвелловского распределения  $f_0$  уравнение (9) эквивалентно следующему:

$$\varepsilon_0 = 1 - \frac{1}{k^2 T} \left[ 1 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{kv_T} W \left( \frac{\omega}{kv_T} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

При  $T \rightarrow 0$  отсюда получаем естественный результат — обычную джинсовскую неустойчивость холодной бесконечной среды

$$\omega^2 = -1. \quad (11)$$

Это, очевидно, наиболее сильная возможная неустойчивость в рассматриваемой задаче. Условие стабилизации снова получаем из (10) при  $\omega=0$ :

$$k^2 T = 1. \quad (12)$$

При  $kc \sim 1$  критерии (12) и (17) § 2 дают, разумеется, согласующиеся результаты для критической температуры

$$T_{кр} \sim 4\pi G\rho_0 c^2. \quad (13)$$

В заключение скажем несколько слов о том, каким образом (принципально) можно найти функцию  $F(\omega, kc)$  (т. е. дисперсионное уравнение) для однородного слоя при  $k \neq 0$ . Записывая полную функцию распределения возмущенного состояния в виде

$$f = \frac{\rho_0}{\pi} \left\{ \frac{\delta(v_x)}{\sqrt{1-z^2-v_z^2-\varepsilon\chi}} + \frac{b\delta'(v_x)}{\sqrt{1-z^2-v_z^2}} \right\} \quad (14)$$

(где  $\chi(z, v_z, t)$ ,  $b(z, v_z, t)$  — неизвестные малые возмущения,  $\delta$  и  $\delta'$  — дельта-функция и ее производная<sup>4</sup>) и подставляя (14) в кинетическое уравнение, можно получить следующие уравнения для функций  $\chi$  и  $b$

$$\left( \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial v_z} \right):$$

<sup>4</sup> Более подробно аналогичные « $\delta$ -разложения» рассматриваются в последующих главах (в особенности см. § 1 и 3 главы III).

$$\frac{d\chi}{dt} = 2ikb(1 - z^2 - v_z^2) + 2v_z \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{db}{dt} = ik\Phi_1. \quad (16)$$

Исключая  $b$  из (15), (16), приходим к уравнению для функции  $\chi$  ( $\sim e^{-i\omega t}$ )

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} = -2k^2(1 - z^2 - v_z^2)\Phi_1 + 2 \frac{d^2\Phi_1}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (17)$$

При  $k=0$  это уравнение сводится к (38) § 5. Возмущение плотности и смещение границы по-прежнему выражаются формулами (44) и (45) § 5 соответственно. Однако при  $k \neq 0$  конечные полиномы по  $z$  уже не представляют возмущенный потенциал  $\Phi_1(z)$ . С этим связана главная трудность решения задачи. Сравнительно просто можно определить длинноволновые решения в виде ряда по степени  $k$ . Например, первую поправку к некоторой частоте ( $\omega_n$ ) можно найти, представляя возмущенный потенциал в виде

$$\Phi_1(z) = \alpha k^2 \Phi_1^{(n+2)}(z) + \beta \Phi_1^{(n)}(z) \quad (\alpha, \beta = O(1)), \quad (18)$$

где  $\Phi_1^{(n)}(z) = z^n + \dots$  — собственная функция, соответствующая перпендикулярным колебаниям частоты  $\omega_n$ , а  $\Phi_1^{(n+2)}$  — «соседняя» собственная функция.

2. Непосредственным вычислением проверить (на примере нескольких простейших типов колебаний), что собственные функции задачи о малых перпендикулярных колебаниях слоя пропорциональны разностям «соседних» полиномов Лежандра одинаковой четности:

$$\Phi_1^{(n)}(z) \propto P_n(z) - P_{n-2}(z), \quad (1)$$

где четные  $n$  соответствуют симметричным колебаниям (относительно плоскости  $z=0$ ), а нечетные  $n$  — антисимметричным колебаниям.

Решение. Ограничимся четными полиномами степени  $n \leq 6$ , т. е. допустим, что

$$\Phi_1 = dz^6 + az^4 + bz^2 + c. \quad (2)$$

Вычисляя среднее смещение  $\psi$  по формуле (14) § 5, найдем

$$-\bar{\psi} = Az^5 + Bz^3 + Cz, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$A = -\frac{3d}{64} \left[ \frac{63}{4} Q(6) - 7Q(4) - \frac{5}{4} Q(2) \right], \quad (4)$$

$$B = \frac{15d}{32} \left[ \frac{7}{4} Q(6) - 3Q(4) + \frac{3}{4} Q(2) \right] - \frac{a}{4} \left[ \frac{5}{2} Q(4) - Q(2) \right], \quad (5)$$

$$C = -\frac{45d}{64} \left[ \frac{1}{4} Q(6) - Q(4) + \frac{5}{4} Q(2) \right] + \frac{3a}{4} \left[ \frac{1}{2} Q(4) - Q(2) \right] - \frac{b}{2} Q(2), \quad (6)$$

причем  $Q(n) \equiv 1/(\omega - n) - 1/(\omega + n) = 2n/(\omega^2 - n^2)$ . Возмущенную плотность  $\rho_1$  вычисляем согласно (13) § 5:

$$\rho_1 = -\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 5A\rho_0 z^4 + 3B\rho_0 z^2 + C\rho_0. \quad (7)$$

Тогда получим следующее уравнение на  $\Phi_1$ :

$$d^2\Phi_1/dz^2 = 5Az^4 + 3Bz^2 + C. \quad (8)$$

Отсюда найдем

$$\Phi_1 = \frac{A}{6} z^6 + \frac{B}{4} z^4 + \frac{C}{2} z^2 + D \quad (D = \text{const}). \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (2), получим следующую систему уравнений:

$$A/6 = d, \quad (10)$$

$$B/4 = a, \quad (11)$$

$$C/2 = b, \quad (12)$$

$$D = c. \quad (13)$$

Пусть сначала  $d \neq 0$ . Тогда из (10) следует дисперсионное уравнение

$$-128 = \frac{63}{4} Q(6) - 7Q(4) - \frac{5}{4} Q(2), \quad (14)$$

которое легко привести к виду уравнения (35) § 5 при  $n=6$ . Уравнение (11) перепишем следующим образом:

$$\left[ 4 + \frac{5}{8} Q(4) - \frac{1}{4} Q(2) \right] a = \frac{15}{32} \left[ \frac{7}{2} Q(6) - 3Q(4) + \frac{3}{4} Q(2) \right]. \quad (15)$$

Выразив  $Q(6)$  из дисперсионного уравнения (14) и подставив в (15), получим в правой части (15)

$$-\frac{5}{3} \left[ 4 + \frac{5}{8} Q(4) - \frac{1}{4} Q(2) \right],$$

т. е.  $a = -5/3$ . С этим значением  $a$  уравнение (12) примет вид

$$\left[ 2 + \frac{1}{2} Q(2) \right] b = -\frac{5}{64} \left[ \frac{9}{4} Q(6) - Q(4) - \frac{19}{4} Q(2) \right]. \quad (16)$$

Но комбинацию  $9/4 Q(6) - Q(4)$  можно выразить из дисперсионного уравнения (14), в результате чего правая часть (16) сведется к

$$\frac{10}{7} \left[ 1 + \frac{1}{4} Q(2) \right],$$

так что  $b = 5/7$ . Теперь, учитывая, что

$$P_6(z) = \frac{231}{16} z^6 - \frac{315}{16} z^4 + \frac{105}{16} z^2 - \frac{5}{16}, \quad P_4(z) = \frac{35}{8} z^4 - \frac{15}{4} z^2 + \frac{3}{8},$$

легко убедиться в том, что действительно

$$\Phi^{(6)} \propto z^6 - \frac{5}{3} z^4 + \frac{5}{7} z^2 + D \propto P_6(z) - P_4(z). \quad (17)$$

Если положить  $d=0$ ,  $a \neq 0$ , то из (11) получим дисперсионное уравнение, соответствующее в (35) § 5  $n=4$ , а из (12) найдем коэффициент  $b = -9/5$ . Это снова находится в согласии с (1):

$$\Phi^{(4)} \propto z^4 - \frac{6}{5} z^2 + D \propto P_4(z) - P_2(z), \quad (18)$$

поскольку

$$P_4(z) = \frac{35}{8} z^4 - \frac{15}{4} z^2 + \frac{3}{8}, \quad P_2(z) = \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2}.$$

Наконец, ввиду произвольности константы  $D$  всегда можно положить

$$\Phi^{(2)} \propto z^2 + D \propto P_2(z) - P_0(z) = \frac{3}{2} z^2 - \frac{3}{2}. \quad (19)$$

Случай антисимметричных возмущений ( $n$  — нечетно) проверяется точно таким же способом.



Общее доказательство формулы (1) дано Калнайсом [253].

3. Рассмотрим нелинейную эволюцию возмущения плоского слоя, сохраняющего пространственную однородность плотности (Калнайс [253]).

Решение. Для решения задачи мы воспользуемся методом, несколько отличным от использованного в оригинальной работе Калнайса (идея этого метода принадлежит Антонову).

Представим лагранжеву координату частицы в произвольный момент времени  $z=z(t)$  в виде линейной комбинации от начальных координаты  $z_0$  и скорости  $\dot{z}_0$ :

$$z(t) = \alpha(t)z_0 + \beta(t)\dot{z}_0, \quad (1)$$

где  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  — неизвестные функции времени. Дифференцируя (1) по  $t$ , найдем скорость  $\dot{z}(t)$  частицы в произвольный момент

$$\dot{z}(t) = \dot{\alpha}z_0 + \beta\dot{z}_0. \quad (2)$$

Обратим формулы (1), (2)

$$z_0 = \beta z - \beta \dot{z}, \quad (3)$$

$$\dot{z}_0 = -\dot{\alpha}z + \alpha\dot{z}, \quad (4)$$

где учтено, что якобиан преобразования (1), (2) ( $J = \alpha\dot{\beta} - \beta\dot{\alpha}$ ) равен единице. Подставляя (3), (4) в формулу (9) § 1 для  $f(z_0, \dot{z}_0)$ , получим

$$f(z, \dot{z}) = f_0[z_0(z, \dot{z}), \dot{z}_0(z, \dot{z})] = \frac{\rho_0}{\pi} x^{-1/2} \theta(x), \quad (5)$$

где

$$x \equiv 1 - (\alpha^2 + \beta^2)z^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\dot{z}^2 + 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})z\dot{z}. \quad (6)$$

Вычислим плотность

$$\rho = \int f(z, \dot{z}) dz = \frac{\rho_0}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что плотность  $\rho$  для возмущений рассматриваемого типа (1), (2) действительно остается постоянной в пределах слоя с полутолщиной

$$c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (8)$$

Последнюю формулу для  $c$  можно вывести также из условия максимума координаты  $z$ , определяемой выражением (1), при дополнительном условии

$$z_0^2 + \dot{z}_0^2 = 1, \quad (9)$$

представляющем закон сохранения энергии для частиц, которые достигают границы.

Для получения «уравнений движения» вычислим функцию Лагранжа  $L = T - U$ , где  $T$  и  $U$  — соответственно кинетическая и потенциальная энергия слоя, рассчитанные на единицу площади.

Кинетическая энергия  $T$  вычисляется непосредственно

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{z}^2 dm = \frac{1}{2} \iint (\dot{\alpha}^2 z_0^2 + \beta^2 \dot{z}_0^2 + 2\beta\dot{\alpha}z_0\dot{z}_0) f_0(z_0, \dot{z}_0) dz_0 d\dot{z}_0 = \frac{\rho_0}{3} (\dot{\alpha}^2 + \beta^2). \quad (10)$$

В формуле (10)  $f_0$  есть равновесная функция распределения

$$f_0(z_0, \dot{z}_0) = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - z_0^2 - \dot{z}_0^2}} \quad (\omega_0^2 \equiv 4\pi G\rho_0 = 1, c_0 = 1). \quad (11)$$

При выводе (10) использованы соотношения

$$\int \int z_0^2 f(z_0, \dot{z}_0) dz_0 d\dot{z}_0 = \int \int \dot{z}_0^2 f(z_0, \dot{z}_0) dz_0 d\dot{z}_0 = 2\rho_0/3, \quad (12)$$

$$\int \int z_0 \dot{z}_0 f(z_0, \dot{z}_0) dz_0 d\dot{z}_0 = 0.$$

При определении потенциальной энергии в данном случае нужно соблюдать известную осторожность. Это связано с бесконечной массой рассматриваемой системы. Так, обычное определение потенциальной энергии как работы, которую необходимо совершить для того, чтобы создать слой из вещества, первоначально находящегося на бесконечности, здесь непригодно ввиду того, что таким образом вычисленная работа расходится. Можно, однако, изменить начало отсчета энергии. Удобно в качестве начала отсчета принять потенциальную энергию бесконечно тонкого слоя (с той же поверхностной плотностью  $\sigma_0 = 2\rho c$ ). Тогда потенциальная энергия однородного слоя толщины  $c$  есть по определению энергия деформации бесконечно тонкого слоя в слой толщины  $c$ . Определенная таким способом потенциальная энергия конечна. Ее легко вычислить<sup>1</sup>:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \frac{8}{3} \pi G \rho^2 c^3 = \frac{2}{3} \rho_0 c. \quad (13)$$

В (13) использованы формулы

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 4\pi G \rho c = 2\pi G \sigma_0 \quad \text{для всех } z, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{cases} 4\pi G \rho c, & z > c, \\ 4\pi G \rho z, & z < c, \end{cases} \quad (15)$$

индекс «0» соответствует бесконечно тонкому слою.

Таким образом, функцию Лагранжа можно записать в виде

$$L = T - U = \frac{\rho_0}{3} \{ \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 - 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \}. \quad (16)$$

Удобно вместо  $\alpha$ ,  $\beta$  ввести соответствующие им полярные координаты  $c$ ,  $\varphi$ :

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad \alpha = c \cos \varphi, \quad \beta = c \sin \varphi. \quad (17)$$

Тогда  $L$  переписется следующим образом:

$$L = \frac{\rho_0}{3} \{ \dot{c}^2 + c^2 \dot{\varphi}^2 - 2c \}. \quad (18)$$

Составляя уравнения движения для «обобщенных координат»  $c$ ,  $\varphi \equiv q_1, q_2$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

<sup>1</sup> Отметим, что (13) можно вычислить как частный случай из общей формулы [180] для потенциальной энергии *неоднородного* плоского слоя с плотностью  $\rho(z)$  (определенной описанным выше способом)

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rho(z) dz.$$

найдем

$$\ddot{c} = c\dot{\varphi}^2 - 1, \quad (20)$$

$$c^2\dot{\varphi} = \text{const.} \quad (21)$$

Константа в (21) определяется как  $c_0^2\dot{\varphi}_0$  (где индекс «0» относится к равновесному состоянию) и оказывается равной единице. Тогда уравнение (20) переписывается в виде

$$\ddot{c} = \frac{1}{c^3} - 1. \quad (22)$$

Уравнение (22) совпадает с уравнением одномерного движения частицы в поле с потенциальной энергией

$$W(c) = \frac{1}{2c^2}, \quad (23)$$

причем роль координаты играет  $c$ . График функции  $W(c)$  приведен на рис. 6; из него очевидно, что движение носит колебательный характер.

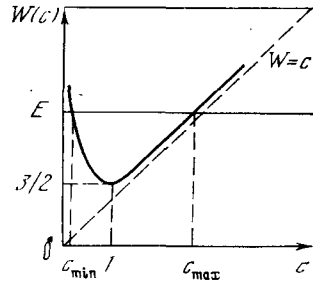


Рис. 6. График эффективной потенциальной энергии  $W(c)$  для перпендикулярных колебаний слоя с сохранением однородности плотности

Уравнение (22) легко проинтегрировать

$$t - t_0 = \int_1^c \frac{dc}{\sqrt{2E - \frac{1}{c^2} - 2c}}, \quad (24)$$

где через  $E$  обозначена «энергия»

$$E = \frac{1}{2}\dot{c}^2 + \frac{1}{2c^2} + c. \quad (25)$$

Очевидно, что  $c$  колеблется между «точками поворота»  $c_{\min}(E)$  и  $c_{\max}(E)$ , которые определяются уравнением

$$E = W = \frac{1}{2c^2} + c. \quad (26)$$

Если написать

$$c = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1), \quad (27)$$

то, линеаризуя уравнение (22), получим

$$\ddot{\varepsilon} + 3\varepsilon = 0, \quad (28)$$

т. е. известный нам из линейной теории результат: гармонические колебания с частотой  $\omega = \sqrt{3}$ .

Движение границы описывается простым законом еще в одном предельном случае: при  $E \rightarrow \infty$ . Тогда для большинства моментов времени  $c \gg 1$  и в подкоренном выражении в формуле (24) можно пренебречь

членом  $1/c^2$ . В результате получается закон изменения  $c(t)$ , аналогичный закону свободного падения тела в постоянном гравитационном поле (с напряженностью  $g=1$ ):

$$c(t) \approx c_0^{(1)} - \frac{(t-t_0)^2}{2} \quad (c_0^{(1)} \simeq E). \quad (29)$$

В работе [253] приведена таблица, описывающая границы  $c_{\min}$ ,  $c_{\max}$ , периоды и частоты колебаний рассмотренного типа для различных значений  $E$ .

В заключение заметим, что уравнение (22) представляет собой частный случай (при  $\gamma=3$ ) уравнения

$$\ddot{c} = c^{-1} - 1, \quad (30)$$

описывающего нелинейные автомодельные движения однородного газового слоя с показателем адиабаты  $\gamma$ .

## РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Цилиндрические системы, по-видимому, представляют интерес прежде всего как простейшие самосогласованные модели гравитирующих систем для исследования некоторых принципиальных вопросов теории (см., например, § 1 главы VI, где показана принципиальная возможность развития пучковой неустойчивости в гравитирующих системах).

Можно, правда, указать на так называемые иглообразные галактики, которые сильно вытянуты вдоль оси вращения (например, NGC 2685 [317], или на вытянутые образования типа мостов и перемычек у некоторых неправильных и кратных галактик [36]. Однако в настоящее время еще мало известно относительно физического состава и структуры всех этих систем.

Мы начинаем с краткого обзора равновесных моделей бесстолкновительных цилиндрических конфигураций (§ 1). Основной целью этой главы является подробное рассмотрение джинсовской неустойчивости цилиндра (§ 2). Этому вопросу было посвящено большое число работ, к сожалению, далеко не всегда правильных, что привело к значительной путанице. Ясность была внесена работой [88], содержание которой в основном и излагается в § 2. Неустойчивость имеет место при любой дисперсии скоростей частиц для возмущений с достаточно большими длинами волн вдоль оси цилиндра.

Нужно подчеркнуть, однако, что с ростом дисперсии скоростей вдоль оси цилиндра критическая длина волны растет экспоненциально быстро, т. е. практически система становится устойчивой.

Возмущения, не зависящие от продольной координаты  $z$ ,  $k_z=0$  («желобковые»), являются, как правило, устойчивыми. Их исследование составляет содержание § 3 и 4. В § 3 проводится точное исследование собственных колебаний «горячего» однородного цилиндра с функцией распределения частного вида. В § 4 рассмотрено применение метода локального дисперсионного уравнения для анализа мелкомасштабных возмущений систем с почти круговыми орбитами (при этом удается получить связную картину ветвей колебаний, которая качественно остается верной и для возмущений большего масштаба). В § 5 проводится сравнение колебаний бесстолкновительного и несжимаемого однородных по плотности цилиндров. Наконец, в последнем параграфе (§ 6) рассматриваются желобковые колебания неоднородного цилиндра.

Задачи № 1—4 несколько дополняют содержание основного текста. Две последние задачи (№ 5, 6) посвящены рассмотрению нелинейной эволюции простейших желобковых мод.

### § 1. РАВНОВЕСНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ

Так как вдоль образующей цилиндра нет никаких сил, распределение частиц по скоростям  $v_z$  может быть произвольным. Поэтому зависимость от  $v_z$  в дальнейших формулах этого параграфа опускается.

Простейшим распределением по скоростям обладают системы с круговыми орбитами

$$\dot{f}_0 = \rho_0(r) \delta(v_r) \delta(v_\varphi - v_0). \quad (1)$$

Зависимость плотности  $\rho_0(r)$  от радиуса может быть произвольной. Равновесие осуществляется благодаря точному балансу гравитационной и центробежной сил

$$\frac{v_0^2}{r} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}.$$

Здесь  $\Phi_0(r)$  — потенциал стационарного гравитационного поля, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = 4\pi G \rho_0(r).$$

Для дальнейшего нам прежде всего понадобится простейшая модель — однородного цилиндра плотности  $\rho_0$  и радиуса  $R$  с резкой границей:

$$\rho_0(r) = \rho_0 \theta(R - r).$$

Соответствующий равновесный потенциал внутри цилиндра равен

$$\Phi_0(r) = -\frac{\Omega_0^2 r^2}{2} + \text{const},$$

где  $\Omega_0^2 \equiv 2\pi G \rho_0$ .  $\Omega_0$  имеет физический смысл частоты обращения частицы по круговой орбите (произвольного радиуса). Если все частицы вращаются по круговым орбитам в одну сторону, то  $v_{0\varphi} = \Omega_0 r$ , т. е. цилиндр как целое вращается твердотельно с угловой скоростью  $\Omega_0$ .

Можно построить и модели однородных цилиндров с произвольными эллиптическими орбитами в плоскости  $x, y$  [19]

$$\dot{f}_{0v} = \frac{\rho_0}{\pi} \delta\{(1 - \gamma^2)(1 - r^2) - v_x^2 - v_y^2\} \quad (|\gamma| \leq 1) \quad (2)$$

Функция распределения (2) записана в системе отсчета, вращающейся со скоростью  $\gamma$  (в единицах  $\Omega_0$ ); в этой системе цилиндр как целое покоится. Легко проверить, что функция распределения (2) удовлетворяет необходимым условиям: она зависит от интегралов движения частиц ( $E$  и  $L_z$ ) и при интегрировании по  $v_x, v_y$  дает плотность  $\rho_0$  для  $r \leq 1$  и 0, если  $r > 1$ . При  $\gamma = 0$  (2) описывает покоящийся цилиндр, а при  $|\gamma| = 1$  — цилиндр с круговыми орбитами частиц. При  $|\gamma| \neq 1$  в цилиндре, который описывается функцией распределения (2), присутствуют частицы с произвольными эллиптическими орбитами.

В инерциальной системе отсчета функция распределения (2) запишется в виде

$$\dot{f}'_{0v} = \frac{\rho_0}{\pi} \delta(1 - \gamma^2 - 2E + 2\gamma L_z). \quad (3)$$

Для рассматриваемых здесь твердотельно-вращающихся цилиндров легко устанавливается следующий «принцип суперпозиции»: все функции вида

$$\dot{f}_0 = \int A(\gamma) \dot{f}'_{0v} d\gamma, \quad \int_{-1}^{+1} A(\gamma) d\gamma = 1, \quad (4, 5)$$

где  $A(\gamma)$  — произвольная функция параметра  $\gamma$ , также являются допустимыми функциями распределения однородных твердотельно-вращающихся цилиндров (с плотностью  $\rho_0$ ). Формулой (4) определяется достаточно широкий набор моделей, в том числе с вполне реалистическим характером зависимости равновесного распределения от скоростей.

Существенно, что спектры колебаний «составных» моделей типа (4) совершенно автоматически находятся по известному спектру для исходной модели (3).

Аналогичный принцип суперпозиции имеет место, как мы увидим ниже, и для дисков, для которых он и был первоначально сформулирован [21] (см. § 1 главы V).

Можно построить также серии функций распределения типа

$$f_0 \sim L_z^\beta [\Phi_0(a) - E]^\alpha; \quad (6)$$

$$f_0 \sim L_z^\beta [\Phi_0(a) - E + L_z^2/2a^2]^\alpha, \quad (7)$$

где  $\alpha, \beta$  — константы,  $a$  — радиус. Ограничимся рассмотрением первой из этих серий [22]. Соответствующая ей плотность

$$\rho_0 = a_1 r^\beta [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha + \frac{\beta+2}{2}}; \quad a_1 \equiv 2^{(\beta+4)/2} \int_0^1 x^\beta dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^\alpha dy.$$

Отсюда, в частности, видно, что должно быть  $\alpha > -1, \beta > -1$ , так как иначе последний интеграл расходится. Уравнение для безразмерного потенциала

$$\ddot{y} = \Phi_1/\Phi_{1c}, \quad r_0^{-2-\beta} = 4\pi G a_1 \Phi_{1c}^{\alpha+\beta/2}, \quad \Phi_1 = \Phi_0(a) - \Phi_0(r),$$

есть

$$x y'' + y' + x^{\beta+1} y^{\alpha+(\beta+2)/2} = 0 \quad (x \equiv r/r_0). \quad (8)$$

При  $\alpha + (\beta+2)/2 = 1$  получаем решение в виде функции Бесселя

$$y = J_0\left(\frac{2}{\beta+2} x^{(\beta+2)/2}\right).$$

В заключение этого параграфа дадим краткое описание так называемого *эпициклического приближения*, которое широко используется для исследования систем с орбитами, близкими к круговым. В случае цилиндров речь будет идти о движениях частиц в плоскости  $x, y$ .

В полярных координатах  $r, \varphi$  уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}. \quad (10)$$

Для аксиально-симметричного потенциала  $\Phi_0$  последнее уравнение дает закон сохранения углового момента частицы

$$r^2\dot{\varphi} = r v_\varphi = L_z = \text{const}. \quad (11)$$

Тогда уравнение (9) сводится к следующему:

$$\ddot{r} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} + \frac{L_z^2}{r^3} = -\frac{\partial W}{\partial r}, \quad (12)$$

где эффективная потенциальная энергия

$$W = \Phi_0 + \frac{L_z^2}{2r^2}. \quad (13)$$

Полная энергия  $E$  равна

$$E = 1/2 (\dot{r}^2 + L_z^2/r^2) + \Phi_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Допустим теперь, что движение частицы почти круговое:

$$r(t) = r_0 + r_1(t) \quad (r_1 \ll r_0), \quad (15)$$

где  $r_0 \neq r_0(t)$  есть радиус равновесной круговой орбиты, соответствующий тем же  $E$  и  $L_z$ . Подставляя (15) в уравнение (12), найдем

$$L_z^2/r_0^3 = (\partial\Phi_0/\partial r)|_{r=r_0}, \quad (16)$$

$$\ddot{r}_1 + \kappa^2 r_1 = 0, \quad (17)$$

$$\kappa = \left[ \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} \Big|_{r=r_0} + \frac{3L_z^2}{r_0^4} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

Уравнение (16) дает радиус круговой орбиты  $r_0$ , а уравнение (17) описывает отклонение действительного радиуса  $r = r_0 + r_1$  от  $r_0$ . Характер этих отклонений определяется величиной  $\kappa$ , которая называется *эпициклической частотой*. Если  $\kappa^2 > 0$ , то частица колеблется относительно  $r_0$  с частотой  $\kappa$

$$r_1 = a \sin(\kappa t + \alpha). \quad (19)$$

Амплитуда этих колебаний  $a$  (называемая *радиусом эпицикла*) очевидным образом связана с амплитудой колебаний  $v_{r_0}$  скорости  $\dot{r}_1$ :  $a = v_{r_0}/\kappa$ . Среднее значение  $v_{r_0}$  по порядку величины есть дисперсия скорости  $c_r$ , отсюда получаем оценку

$$a \sim c_r/\kappa. \quad (20)$$

Вводя обозначение  $\Omega_0(r_0)$  для локальной угловой скорости вращения частицы по круговой орбите с угловым моментом  $L_z$

$$L_z = r_0^2 \Omega_0(r_0), \quad (21)$$

условие (16) перепишем в виде

$$\Omega_0^2 r_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial r_0}. \quad (22)$$

Определяя отсюда  $\partial^2\Phi_0/\partial r_0^2$  и подставляя в определение (18), найдем следующее выражение для эпициклической частоты:

$$\kappa = 2\Omega_0 \left( 1 + \frac{r\Omega_0'}{2\Omega_0} \right)^{1/2}, \quad \Omega_0' \equiv \frac{d\Omega_0}{dr}. \quad (23)$$

Этой формулой обычно и пользуются для вычисления  $\kappa$ .

Случай  $\kappa^2 < 0$  отвечает, очевидно, *неустойчивости* круговой орбиты (в линейном приближении).

## § 2. ДЖИНСОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОГРАНИЧЕННОГО ПО РАДИУСУ ЦИЛИНДРА

1. **Дисперсионное уравнение для собственных частот аксиально-симметричных возмущений.** При отклонении потенциала  $\Phi$  от его равновесного значения каждая группа частиц, первоначально имевшая скорость  $\mathbf{v}_0 = e_\varphi v_{0\varphi} + e_z v_{0z}$ , будет двигаться со скоростью  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющей уравнению  $d\mathbf{v}/dt = -\nabla\Phi$ . Если массовая плотность этой группы частиц первоначально равнялась  $\rho_0(v_{0z})$ , то при  $\Phi \neq \Phi_0$  эти частицы будут характеризоваться плотностью  $\rho(v_{0z})$ , такой, что  $\partial\rho(v_{0z})/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ .

Линеаризуем уравнения движения и неразрывности, обозначая малые отклонения индексом «1». Координатно-временную зависимость возмущений выбираем в виде  $f_1(r) \exp(-i\omega t + ik_z z)$ , ограничиваясь пока анализом аксиально-симметричных возмущений  $\partial/\partial\varphi = 0$ . В результате



находим возмущение плотности  $\rho_1(v_{0z})$  группы частиц с невозмущенной скоростью  $v_{0z}$ :

$$\rho_1(v_{0z}) = -\rho_0(v_{0z}) \left( \frac{\Delta_r \Phi_1}{\omega'^2 - 4\Omega_0^2} - \frac{k_z^2}{\omega'^2} \Phi_1 \right) - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r},$$

где  $\omega' \equiv \omega - k_z v_{0z}$ ,  $\Delta_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$  — радиальная часть лапласиана. Интегрируя  $\rho_1(v_{0z})$  по всем  $v_{0z}$ , получаем полное значение возмущенной плотности  $\rho_1(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(r, t, v_{0z}) dv_{0z}$ . Подставляя  $\rho_1(r, t)$  в уравнение Пуассона, приходим к следующему уравнению для  $\Phi_1$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \Phi_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= 1 + \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_z) dv_z}{\omega'^2 - 4\Omega_0^2}, \\ \varepsilon_{\parallel} &= 1 + \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_z) dv_z}{\omega'^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (1) записано в форме, характерной для задачи о колебаниях плазмы в магнитном поле. Если же теперь в (2) заменить квадрат частоты Джинса на отрицательный квадрат плазменной частоты  $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_p^2 \equiv -4\pi n_0 e^2 / m$ , а удвоенную частоту вращения гравитирующих частиц на циклотронную частоту заряженных частиц (с зарядом  $e$  и массой  $m$ ) в магнитном поле  $B_0$ :  $2\Omega_0 \rightarrow \omega_B \equiv eB_0 / mc$ , то выражения  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  оказываются совпадающими соответственно с поперечной и продольной компонентами тензора диэлектрической проницаемости электронной плазмы. При таком переходе уравнение (1) совпадает с дифференциальным уравнением для электрического потенциала электростатических (потенциальных) колебаний плазменного цилиндра однородной плотности, находящегося в однородном магнитном поле  $B_0 = B_{0z}$ .

Процедура получения дисперсионного уравнения при помощи (1) аналогична случаю плазмы. Внутри цилиндра, где стационарная плотность однородна, величины  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  не зависят от радиуса, так что (1) сводится к уравнению Бесселя и имеет решение

$$\Phi_1^{(1)} = c_1 J_0(k_{\perp} r) \quad (r < R), \quad (3)$$

где  $k_{\perp}$  определено соотношением

$$k_{\perp}^2 = -k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}^{(0)}}{\varepsilon_{\perp}^{(0)}}, \quad (4)$$

а верхний индекс «0» означает, что  $\varepsilon_{\parallel}$ ,  $\varepsilon_{\perp}$  относятся к внутренней области цилиндра. Вне цилиндра (в вакууме) решением (1) является функция Макдональда

$$\Phi_1^{(2)} = c_2 K_0(k_z r) \quad (r > R). \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем считаем  $k_z > 0$ . На границе цилиндра решения (3) и (5) связаны двумя соотношениями. Одно из них — это условие непре-

рывности потенциала:

$$\Phi_1^{(1)}(R) = \Phi_1^{(2)}(R). \quad (6)$$

Другое получается интегрированием (1) вдоль переходного слоя  $(R-\delta, R+\delta)$  с последующим стремлением  $\delta \rightarrow 0$ . Оно имеет вид

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \left( \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial r} \right)_{r=R} = \left( \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (7)$$

и аналогично электродинамическому условию непрерывности нормальной компоненты вектора электрической индукции. При помощи (3)–(7) получаем дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \frac{k_{\perp} J'_0(k_{\perp} R)}{J_0(k_{\perp} R)} = \frac{k_z K'_0(k_z R)}{K_0(k_z R)}. \quad (8)$$

**2. Ветви аксиально-симметричных колебаний вращающегося цилиндра с максвелловским распределением частиц по продольным скоростям.** В случае максвелловской функции распределения

$$f_0(v_z) = (\pi v_T^2)^{-1/2} \exp(-v_z^2/v_T^2) \quad (9)$$

выражения для  $\varepsilon_{\perp}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}^{(0)}$  имеют вид (индекс «0» вверху в дальнейшем опускаем)

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{i V \pi}{4} \frac{\omega_0^2}{|\Omega_0| |k_z| v_T} \left[ W \left( \frac{\omega + 2\Omega_0}{|k_z| v_T} \right) - W \left( \frac{\omega - 2\Omega_0}{|k_z| v_T} \right) \right], \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - 2 \frac{\omega_0^2}{k_z^2 v_T^2} \left[ 1 + i V \pi \frac{\omega}{|k_z| v_T} W \left( \frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right], \quad (11)$$

где  $W$  — функция Крампа.

Уравнение (8) принимает более простой вид в предельных случаях возмущений, длинноволновых и коротковолновых по  $z$ , т. е. при  $k_z R \ll 1$  и  $k_z R \gg 1$ . Рассмотрим их отдельно.

**2а. Длинноволновые** ( $k_z R \ll 1$ ), **крупномасштабные** ( $k_{\perp} R \ll 1$ ) **возмущения**<sup>1</sup>. В случае  $k_z R \ll 1$   $K_0(k_z R) \sim \ln(1/k_z R)$ , так что из (8) следует

$$\varepsilon_{\perp} \frac{R k_{\perp} J'_0(k_{\perp} R)}{J_0(k_{\perp} R)} = - \frac{1}{\ln(1/k_z R)}. \quad (12)$$

Вследствие малости правой части этого равенства числитель левой части должен быть близок к нулю. Это возможно, в частности, при  $k_{\perp} R \ll 1$ , и тогда с учетом (4) дисперсионное уравнение сводится к виду

$$1 + \frac{k_z^2 R^2}{2} \ln \left( \frac{1}{k_z R} \right) \varepsilon_{\parallel} = 0. \quad (13)$$

Пренебрегая в нем членами порядка  $k_z^2 R^2$  по сравнению с единицей и используя (11), приводим его к виду

$$1 - \frac{R^2 \omega_0^2}{v_T^2} \beta \left[ 1 + i V \pi \frac{\omega}{|k_z| v_T} W \left( \frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right] = 0, \quad (14)$$

где  $\beta = \ln(1/k_z R)$ .

Рассматривая предельные случаи больших и малых  $\omega/|k_z| v_T$ , можно убедиться в том, что уравнение (14) не имеет корней  $\omega(k_z)$ , соответ-

<sup>1</sup> В п. 6 §1 главы VI мы называем эти возмущения «поверхностными».

ствующих слабозатухающим колебаниям. Действительно, при  $|\omega| \gg \gg |k_z|v_T$  из (14) следует

$$\omega^2 = -\beta^2 k_z^2 v_0^2, \quad (15)$$

где  $v_0 \equiv v_{0\text{ф}}(R)$  — линейная скорость граничных частиц. Это решение описывает аperiодически нарастающие или аperiодически затухающие возмущения

$$\text{Re } \omega = 0, \quad \text{Im } \omega = \pm \beta^{1/2} |k_z| v_0. \quad (16)$$

Решение с  $\text{Im } \omega > 0$  соответствует джинсовской неустойчивости. Оно справедливо (условие  $\omega \gg |k_z|v_T$ ), если тепловой разброс не очень велик:

$$v_T^2 \ll \beta^2 v_0^2. \quad (17)$$

С увеличением теплового разброса инкремент неустойчивости уменьшается. Действительно, в обратном предельном случае, при  $|\omega| \ll k_z v$  из (14) следует выражение для частоты

$$\omega = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} |k_z| v_T \left( \frac{1}{2\beta} \frac{v_T^2}{v_0^2} - 1 \right), \quad (18)$$

которое справедливо (условие  $|\omega| \ll |k_z|v_T$ ), если

$$\left| \frac{1}{2\beta} \frac{v_T^2}{v_0^2} - 1 \right| \ll 1.$$

При достаточно большом тепловом разбросе,  $v_T^2 = 2\beta v_0^2$ , инкремент исследованной выше джинсовской неустойчивости обращается в нуль. При еще больших  $v_T$ , как видно из (18), возмущения затухают аperiодически.

Итак, джинсовская неустойчивость крупномасштабных возмущений с  $|k_z|R \ll 1$  подавляется, если продольный тепловой разброс достаточно велик

$$v_T^2 > 2\beta v_0^2. \quad (19)$$

Из определения  $\beta$  следует, что последнее условие не может быть выполнено для всех  $k_z$  ни при каком сколь угодно большом, но конечном значении  $v_T$ . Неустойчивыми остаются возмущения, у которых

$$k_z R < \exp(-v_T^2/2v_0^2). \quad (20)$$

Это означает, что бесконечно длинный цилиндр неустойчив при любом сколь угодно большом, но конечном тепловом разбросе частиц по продольным скоростям.

Пользуясь условием (20) и выражениями (16) и (18), приходим к оценке инкремента

$$\gamma \simeq \varepsilon e^{-\varepsilon^2} \Omega_0, \quad (21)$$

где  $\varepsilon = v_T^2/v_0^2 \gg 1$ . Видно, что при большом  $\varepsilon$  инкремент джинсовской неустойчивости экспоненциально мал.

Раскачку крупномасштабных возмущений можно понимать как результат увеличения эффективной частоты Джинса при малых  $k_z$  и  $k_\perp$ . Действительно, как видно из (16) или (18), роль характерной частоты коллективных движений играет величина  $\sqrt{\beta}\omega_0$ , а не просто  $\omega_0$ , как это имеет место в мелкомасштабных возмущениях (см. ниже с. 64). Эффект увеличения частоты колебаний в возмущениях с малыми волновыми числами хорошо известен в теории колебаний плазмы [135].

2б. Длинноволновые мелкомасштабные ( $1 \gg \gamma^2 \eta$ ) ( $k_{\perp} R \gg 1$ ) возмущения (джинсовские ветви). Уравнение (12) для возмущений с  $k_{\perp} R \gg 1$  приближенно удовлетворяется, если

$$k_{\perp} R = k_{\perp n} R \equiv \lambda_n^{(1)}, \quad (22)$$

где  $\lambda_n^{(1)}$  — ненулевой корень уравнения

$$-J_0'(\lambda_n^{(1)}) = J_1(\lambda_n^{(1)}) = 0. \quad (23)$$

Вычисляя  $\lambda_n$  и  $k_{\perp n}$  и используя (4), дисперсионное уравнение в этом случае можно представить в виде

$$k_{\perp n}^2 \varepsilon_{\perp} + k_z^2 \varepsilon_{\parallel} = 0. \quad (24)$$

При  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  вида (10), (11) это уравнение означает

$$1 + \frac{i\sqrt{\pi}}{4} \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\omega_0^2}{\Omega_0 |k_z| v_T} \left[ W\left(\frac{\omega + 2\Omega_0}{|k_z| v_T}\right) - W\left(\frac{\omega - 2\Omega_0}{|k_z| v_T}\right) \right] - 2 \frac{\omega_0^2}{k_z^2 v_T^2} \times \\ \times \left[ 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_T} W\left(\frac{\omega}{|k_z| v_T}\right) \right] = 0. \quad (25)$$

Здесь  $k^2 = k_z^2 + k_{\perp}^2 \approx k_{\perp}^2$  — квадрат полного волнового числа, а  $k_{\perp}$ , как следует из (22), (23), пробегает ряд значений, минимальное из которых  $k_{\perp}^{(1)} \approx 3,8/R$ .

Учитывая малость  $k_z/k_{\perp}$ , замечаем, что  $\omega \ll \Omega_0$ . Решения этого типа соответствуют джинсовским возмущениям, частный случай которых ( $k_{\perp} R \ll 1$ ) был рассмотрен выше. При  $k_z v_T \ll \Omega_0$  для возмущений с  $\omega \ll \Omega_0$  из (25) получается дисперсионное уравнение, аналогичное (14):

$$\frac{1}{2} - \frac{2\omega_0^2}{k_{\perp}^2 v_T^2} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_z| v_T} W\left(\frac{\omega}{|k_z| v_T}\right) \right] = 0. \quad (26)$$

Возмущения, описываемые этим уравнением, аperiodически затухают, если

$$v_T^2 > 4\omega_0^2/k_{\perp}^2. \quad (27)$$

Поскольку  $k_{\perp} \geq k_{\perp}^{(1)} \approx 3,8/R$ , то условие (27) удовлетворяется для всех мелкомасштабных возмущений, если

$$v_T > \frac{2\sqrt{2}v_0}{\lambda_n^{(1)}} \approx 0,74v_0. \quad (28)$$

При выполнении этого критерия неустойчивыми остаются только крупномасштабные возмущения, рассмотренные в п. 2а.

2в. Длинноволновые ( $k_z R \ll 1$ ), мелкомасштабные ( $k_{\perp} R \gg 1$ ) возмущения (вращательные ветви). Для возмущений с  $k_z R \ll 1$ ,  $k_{\perp} R \gg 1$  имеется еще одна возможность выполнить равенство (12):

$$\varepsilon_{\perp} \ll 1. \quad (29)$$

При достаточно малых  $k_z$ , таких, что  $|k_z| v_T \ll |\omega|$ ,  $|\omega \pm 2\Omega_0|$ , «диэлектрическая проницаемость» принимает гидродинамический вид

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + 2\Omega_0^2}{\omega^2}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - 4\Omega_0^2} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 4\Omega_0^2}{\omega^2 - 4\Omega_0^2}. \quad (31)$$

Таким образом, неравенство (29) означает согласно (31)

$$\frac{\omega^2 + \omega_0^2 - 4\Omega_0^2}{\omega^2 - 4\Omega_0^2} \ll 1. \quad (32)$$

Оно выполняется для колебаний с вещественной частотой

$$\omega^2 \approx -\omega_0^2 + 4\Omega_0^2 = 2\Omega_0^2. \quad (33)$$

Подставляя в (4) выражения (30) и (31), найдем с учетом (33)

$$\frac{\omega^2 - 2\Omega_0^2}{4\Omega_0^2} \approx \frac{k_z^2}{k_\perp^2}. \quad (34)$$

Уравнение (12) примет вид

$$\frac{2\Omega_0^2 - \omega^2}{2\Omega_0^2} \frac{k_\perp R J_1(k_\perp R)}{J_0(k_\perp R)} \approx \frac{1}{\ln(1/k_z R)}, \quad (35)$$

или, если подставить (34),

$$\frac{2}{k_\perp R} \frac{J_1(k_\perp R)}{J_0(k_\perp R)} \approx \frac{1}{k_z^2 R^2 \ln(1/k_z R)}. \quad (36)$$

Это равенство при  $k_\perp R \gg 1$  и  $k_z R \ll 1$  приближенно выполняется, если

$$k_\perp R \simeq k_{\perp n} R \equiv \lambda_n^{(0)}, \quad (37)$$

где  $\lambda_n^{(0)}$  — корень уравнения

$$J_0(\lambda_n^{(0)}) = 0. \quad (38)$$

Описанные ветви колебаний можно назвать *вращательными*. Аналогом (33) в плазме является ветвь электронных колебаний в магнитном поле с квадратом частоты  $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2$ .

Учитывая мнимые члены уравнения (25), экспоненциально-малые при  $|\omega \pm 2\Omega_0|$ ,  $|\omega| \gg |k_z| v_T$ , находим декремент затухания

$$\text{Im } \omega = -\sqrt{\pi} \frac{\omega_0^2}{|k_z| v_T} \left( \frac{\chi_1}{4\sqrt{2}} + \frac{\omega_0^2}{k_z^2 v_T^2} \chi_2 \right). \quad (39)$$

Здесь  $\chi_1, \chi_2$  положительны и определяются соотношениями

$$\chi_1 = \exp \left[ - \left( 0,6 \frac{\Omega_0}{k_z v_T} \right)^2 \right] - \exp \left[ - \left( 3,4 \frac{\Omega_0}{k_z v_T} \right)^2 \right],$$

$$\chi_2 = \exp \left[ - \frac{2\Omega_0^2}{k_z^2 v_T^2} \right].$$

Слагаемое в правой части (39), пропорциональное  $\chi_1$ , есть декремент затухания вращательных колебаний, вызванного резонансным взаимодействием вращающихся частиц с волнами (резонанс типа  $\omega = k_z v_z \pm 2\Omega_0$ ). Это аналог циклотронного затухания плазменных колебаний в магнитном поле. Слагаемое в правой части (39), пропорциональное  $\chi_2$ , есть декремент затухания вращательных колебаний вследствие черенковского взаимодействия с резонансными частицами (резонанс типа  $\omega = k_z v_z$ ).

Из (39) видно, что отношение  $\text{Im } \omega / \text{Re } \omega$  экспоненциально убывает с уменьшением  $|k_z|$ . Поэтому при достаточно малых  $|k_z|$  эти колебания можно считать незатухающими.

2г. Коротковолновые ( $k_z R \gg 1$ ) возмущения. Так как при  $k_z R \gg 1$

$$K_0(k_z R) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} (k_z R)^{-1/2} e^{-k_z R},$$

то уравнение (8) сводится к виду

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \frac{k_{\perp} R J_1(k_{\perp} R)}{J_0(k_{\perp} R)} \approx k_z R. \quad (40)$$

При  $k_z R \gg 1$ , как и в противоположном случае  $k_z R \ll 1$ , рассмотренном выше, дисперсионное уравнение (40) описывает возмущения двух типов: джинсовские и вращательные. Нашей целью является определение коротковолновых «хвостов» этих ветвей.

В правой части равенства (40) стоит большая величина  $k_z R$ . Поэтому дисперсионное уравнение приближенно удовлетворяется, если  $k_{\perp}$  удовлетворяет условию (37), а  $\lambda_n$  определяется из уравнения (38). Дисперсионное уравнение в этом случае также приводится к виду (24), но с несколько другими значениями  $k_{\perp n}$ . При анализе возмущений максвелловской (по продольным скоростям частиц) среды можно исходить из приведенного выше уравнения (25), считая теперь, однако,  $k_z \gg k_{\perp}$ . Для холодного цилиндра уравнения (40), (4) есть

$$\frac{(\omega^2 - 2\Omega_0^2) k_{\perp} R J_1(k_{\perp} R)}{(\omega^2 - 4\Omega_0^2) J_0(k_{\perp} R)} \approx k_z R, \quad (41)$$

$$\frac{k_{\perp}^2 R^2}{k_z^2 R^2} = -\frac{\omega^2 + 2\Omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - 4\Omega_0^2}{\omega^2 - 2\Omega_0^2}. \quad (42)$$

Мы ищем решения с  $k_z R \gg 1$ ,  $k_{\perp} \ll k_z$ . Согласно (42), последнее неравенство удовлетворяется в одном из двух случаев: 1)  $\omega^2 \approx -2\Omega_0^2 = -\omega_0^2$ ; 2)  $\omega^2 \approx 4\Omega_0^2$ . Первый соответствует, очевидно, возмущениям джинсовского типа, а второй — возмущениям вращательного типа (при  $v_T \rightarrow 0$ ).

Легко убедиться в том, что для джинсовских возмущений уравнение (41) приближенно выполняется (при условии (42)), если  $k_{\perp}$  удовлетворяет условиям (37), (38).

Аналогично для коротковолновых  $k_z R \gg 1$  вращательных возмущений поперечное волновое число  $k_{\perp}$  должно быть одним из дискретного ряда  $k_{\perp n}$ , определяемого равенствами (22), (23).

Можно исследовать и горячую среду ( $v_T \neq 0$ ) и убедиться в том, что и в этом случае асимптотически выполняются условия (37), (38) и (22), (23) (соответственно для джинсовских и вращательных ветвей).

При достаточно больших  $k_z$  ( $k_z v_T > \omega_0$  и  $k_z \gg k_{\perp}$ ) все решения уравнения (8) соответствуют сильнозатухающим возмущениям. Рассмотрим, например, джинсовские ветви. В этом пределе  $\varepsilon_{\perp} \approx 1$ ,  $J_0(k_{\perp} R) \approx 0$  и  $\varepsilon_{\parallel} \approx 0$ .

Это дисперсионное уравнение в рассматриваемом случае. Оно, как это должно быть из физических соображений, совпадает с дисперсионным уравнением в джинсовской задаче об устойчивости однородного гравитирующего фона. С другой стороны, (43) отличается от соответствующего плазменного уравнения только заменой  $-\omega_0^2 \leftrightarrow \omega_{pe}^2$ . Поэтому дальнейший вывод можно заимствовать из работы Ландау [65] о колебаниях электронной плазмы. Для этого вернемся в дисперсионном уравнении  $\varepsilon_{\parallel} = 0$  к интегральному виду

$$\frac{\omega_0^2}{k_z} \int \frac{df_0/dv_z}{\omega - k_z v_z} dv_z = 1. \quad (44)$$

Для случая  $k_z v_T \gg \omega_0$  при вычислении интеграла в (44) достаточно [65] ограничиться вычетом в точке  $v_z = \omega/k_z$ , так что уравнение (44) сведется к следующему:

$$\sqrt{2\pi} \frac{i\omega}{\omega_0 (k_z a)^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\omega_0^2 (k_z a)^2}\right) = 1 \quad \left(a \equiv \frac{v_T}{\omega_0}\right). \quad (45)$$

Это уравнение отличается от соответствующего плазменного уравнения заменой  $+1$  на  $-1$  в правой части. Предполагая  $\text{Im } \omega \equiv \gamma \gg |\text{Re } \omega| \equiv \omega_1$ , берем модуль от обеих сторон (45)

$$\xi e^{\xi^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (k_z a)^2, \quad (46)$$

где

$$\xi \equiv (-\gamma)/\omega_0 k_z a. \quad (47)$$

С другой стороны, фазовый множитель левой части (45) равен (в том же приближении)

$$\exp\left(-\frac{i\gamma\omega_1}{\omega_0^2 a^2 k_z^2}\right). \quad (48)$$

Так как справа в (45) стоит положительная величина, этот множитель должен равняться  $+1$ . Отсюда следует, что  $\omega_1 \approx 0$ . Декремент затухания определяется из (47)

$$\gamma = -\omega_0 k_z a \xi = -k_z v_T \xi, \quad (49)$$

причем  $\xi$  определено равенством (46) (в основном  $\xi \sim \ln^{1/2} k_z a$ ). Мы получаем естественный результат: аperiodическое затухание таких возмущений. Физический смысл этого затухания заключается в «убегании»

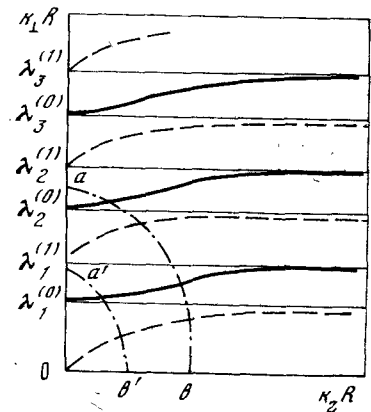


Рис. 7. Связь между волновыми числами  $k_z$  и  $k_\perp$  для аксиально-симметричных возмущений цилиндра с круговыми орбитами частиц [26].

Сплошные линии — вращательные ветви колебаний, штриховые — джонсовские ветви; штрихпунктирные кривые отделяют неустойчивые (под кривыми) и устойчивые (над кривыми) части джонсовских ветвей; кривая  $a'b'$  — то же, что и  $ab$ , но при других значениях равновесных параметров  $\Omega R$  и  $v_T z$  (или  $\Delta$  — для функции распределения Джексона)

частиц из области возмущения при их тепловом движении. Это не имеет отношения (как и затухание соответствующих волн в плазме) к обычному затуханию Ландау (вследствие резонансного взаимодействия волн с частицами).

Описанные в этом пункте результаты, касающиеся зависимости  $k_\perp(k_z)$ , суммированы на рис. 7 [26].

3. Ветви колебаний вращающегося цилиндра с функцией распределения (по продольным скоростям) Джексона [26, 88]

$$f_0(v_z) = \frac{\Delta}{\pi} \frac{1}{v_z^2 + \Delta^2}, \quad (50)$$

где  $\Delta$  — аналог теплового разброса скоростей.

Этот случай удобен тем, что (в отличие, например, от максвелловской среды) все возникающие при выводе дисперсионного уравнения интегралы по  $v_z$  берутся в конечном виде в элементарных функциях.

Если ввести обозначения для безразмерных величин

$$z \equiv \left( \frac{\omega}{\Omega_0} + i \frac{k_z \Delta}{\Omega_0} \right)^2, \quad x \equiv \frac{k_z}{k_\perp}, \quad \alpha = k_z R \quad (k_\perp R = \alpha/x), \quad (51)$$

то соотношение (4) запишется следующим образом:

$$1 + \frac{2}{z-4} = -x^2 \left( 1 + \frac{2}{z} \right), \quad (52)$$

а условие шивки производных потенциала (7) примет вид

$$\varepsilon_\perp = 1 + \frac{2}{z-4} = x \frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)} \frac{J_0(\alpha/x)}{J_1(\alpha/x)}. \quad (53)$$

Разрешая (52) относительно  $z$  и подставляя в (53), найдем

$$z = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{8x^2}{1+x^2}}, \quad (54)$$

$$\frac{z-2}{z-4} = \frac{1 \mp \sqrt{1 + \frac{8x^2}{1+x^2}}}{3 \mp \sqrt{1 + \frac{8x^2}{1+x^2}}} = x \frac{K_1(\alpha)}{K_0(\alpha)} \frac{J_0(\alpha/x)}{J_1(\alpha/x)}. \quad (55)$$

Последнее уравнение определяет для каждого  $\alpha \equiv k_z R$  бесконечный дискретный набор  $x \equiv k_z/k_\perp$  (см. рис. 7). Разумеется, то же мы имели и в случае максвелловской функции распределения, рассмотренном раньше. Мы увидим, что *основные* свойства решений в этих двух случаях совпадают. Однако присутствие в уравнениях для максвелловской функции распределения интегралов вероятности от комплексного аргумента (функций Крампа) несколько усложнило анализ.

Решение, выписанное выше ((54), (55)), содержит только элементарные и простейшие цилиндрические ( $K_{0,1}, J_{0,1}$ ) функции. Кроме того, здесь сразу отделены вращательные и джинсовские ветви колебаний (соответственно верхние и нижние знаки в (54), (55) — см. также ниже). Анализ этих уравнений проводится весьма просто.

Рассмотрим сначала длинноволновые по оси  $z$  возмущения ( $k_z R \equiv \alpha \ll 1$ ). В этом случае для двух типов колебаний в (55) получим

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 8x^2/(1+x^2)}}{3 - \sqrt{1 + 8x^2/(1+x^2)}} \approx x \frac{J_0(\alpha/x)}{J_1(\alpha/x)} \frac{1}{\alpha \ln(2/\alpha)}, \quad (56)$$

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8x^2/(1+x^2)}}{3 + \sqrt{1 + 8x^2/(1+x^2)}} \approx x \frac{J_0(\alpha/x)}{J_1(\alpha/x)} \frac{1}{\alpha \ln(2/\alpha)}. \quad (57)$$

Если  $\alpha/x \equiv k_\perp R \rightarrow 0$ , то решение имеется только для (джинсовской) ветви (57)

$$x^2 \approx \frac{\alpha^2}{4} \ln(2/\alpha), \quad z \approx -\alpha^2 \ln(2/\alpha), \quad (58)$$

или в размерных единицах

$$\omega \approx -ik_z [\Delta \pm \Omega R \ln^{1/2}(2/k_z R)]. \quad (59)$$

Это уравнение аналогично (15), (18) для максвелловского распределения. Выводы, которые можно сделать из (15), (18) и (59), также аналогичны. При любом тепловом разбросе достаточно длинные волны,

$$\ln(2/k_z R) > \frac{\Delta^2}{\Omega^2 R^2}, \quad k_z < \frac{2}{R} e^{-\frac{\Delta^2}{\Omega^2 R^2}}, \quad (60)$$



остаются неустойчивыми. При  $\Delta \gg v_0$  критическая длина волны экспоненциально велика, а инкремент неустойчивости соответственно мал.

Помимо решения (58) для  $\alpha/x \rightarrow 0$ , имеется два бесконечных набора решений с  $\alpha/x \rightarrow \text{const}$  (при  $\alpha \rightarrow 0$ ) — по одному для каждого типа волн (56) и (57). В случае возмущений вращательного типа (56)

$$x \approx \frac{\alpha}{\lambda_n^{(0)}}, \quad \frac{\alpha}{x} > \lambda_n^{(0)}, \quad z \approx 2; \quad \omega \approx \Omega \sqrt{2}, \quad (61)$$

где  $\lambda_n^{(0)}$  — решения уравнения  $J_0(\lambda_n^{(0)}) = 0$ . Эти колебания всегда устойчивы. В случае джинсовских ветвей (57)

$$x \approx \frac{\alpha}{\lambda_n^{(1)}}, \quad \frac{\alpha}{x} > \lambda_n^{(1)}, \quad z \approx -4 \frac{\alpha^2}{\lambda_n^{(1)2}}, \quad \omega \approx i \left( k_z \Delta \pm 2 \frac{k_z v_0}{\lambda_n^{(1)}} \right), \quad (62)$$

причем  $\lambda_n^{(1)}$  обозначают ненулевые решения уравнения  $J_1(\lambda_n^{(1)}) = 0$ . Эти колебания устойчивы при достаточно большом тепловом разбросе.

$$\Delta > \frac{2v_0}{\lambda_1^{(1)}} \quad (\lambda_1^{(1)} \approx 3,8). \quad (63)$$

Пусть теперь  $\alpha$  и  $x$  произвольны. Левая часть уравнений (55) не меняет знака при изменении  $x$  ( $0 < x < \infty$ ), поэтому и  $\alpha$  меняется в соответствии с  $x$  так, чтобы на каждой ветви колебаний  $J_0(\alpha/x)$  и  $J_1(\alpha/x)$  не меняли знака.

Таким образом,  $\alpha/x \equiv k_{\perp} R$  при изменении  $\alpha$  в  $0 \leq \alpha \leq \infty$  лежат в интервалах

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(0)} &\leq \frac{\alpha}{x} \leq \lambda_n^{(1)} \quad (n \geq 1) \quad \text{для вращательных ветвей,} \\ 2(\ln 2/\alpha)^{-1/2} &\leq \frac{\alpha}{x} \leq \lambda_1^{(0)} \quad \text{для джинсовской ветви (58),} \\ \lambda_n^{(1)} &\leq \frac{\alpha}{x} \leq \lambda_{n+1}^{(0)} \quad (n \geq 1) \quad \text{для остальных джинсовских ветвей.} \end{aligned} \quad (64)$$

Область устойчивости возмущений (джинсовского типа) определяется условием

$$\frac{k_z^2 \Delta^2}{\Omega_0^2} > \sqrt{1 + \frac{8x^2}{1+x^2}} - 1, \quad (65)$$

или

$$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 > \alpha^2 \left\{ \frac{8}{[1 + (\Delta/v_0)^2 \alpha^2] - 1} - 1 \right\},$$

Кривая  $ab$  (см. рис. 7), разделяющая области устойчивости и неустойчивости, пересекает ось ординат при  $\alpha/x = 2v_0/\Delta \equiv a$ , а ось абсцисс — в точке  $\alpha = \sqrt{2}v_0/\Delta \equiv b$ . Как видно из рис. 7, при  $2v_0/\Delta < \lambda_n^{(1)}$  имеется  $n$  неустойчивых ветвей, при  $2v_0/\Delta < \lambda_1^{(1)}$  остается только одна неустойчивая ветвь (58).

**4. Дисперсионное уравнение для собственных частот аксиально-несимметричных возмущений.** Рассмотрим кратко общий случай аксиально-несимметричных возмущений ( $m \neq 0$ ). Вывод дисперсионного уравнения для произвольных возмущений однородного цилиндра производится аналогично случаю  $m = 0$ . Сначала рассматривается неоднородный  $\rho_0 = \rho_0(r)$  и произвольным образом вращающийся ( $\Omega_0 = \Omega_0(r)$ ) цилиндр. Способом, описанным выше, можно получить следующее диффе-

ренциальное уравнение для возмущения потенциала ( $\sim e^{im\varphi}$ ) [90]:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \varepsilon_{\perp} r \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \varepsilon_{\perp} \Phi_1 - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \Phi_1 - \frac{2m}{r} \Phi_1 \int \frac{1}{\omega'} \frac{d}{dr} \left( \frac{\omega_0^2 \Omega_0 f_0}{\Delta} \right) dv_z = 0, \quad (66)$$

где  $\omega' \equiv \omega - m\Omega_0 - k_z v_z$ ,  $\Delta \equiv \omega'^2 - \kappa^2$ ,

$$\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 \left( 1 + \frac{rd\Omega/dr}{2\Omega} \right), \quad (67)$$

$$\Omega_0^2(r) \equiv \frac{1}{r^2} \int_0^r \omega_0^2 r dr = \frac{2Gm(r)}{r^2}, \quad \omega_0^2 = 4\pi G \rho_0(r),$$

$m(r)$  — масса внутри радиуса  $r$ ;  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon_{\parallel}$  определяются по-прежнему формулами (2),  $f_0$  предполагается нормированной на единицу:  $\int f_0 dv_z = 1$ . Заметим еще, что в (66) мы не исключаем пока и возможной зависимости продольной температуры  $v_{Tz}$  от радиуса  $r$  ( $v_{Tz}$  входит в  $f_0(v_z)$  в качестве параметра). Уравнение (66) для неоднородного цилиндра мы будем рассматривать ниже, в § 6 (а также в главе VI при изучении градиентных неустойчивостей). Здесь же мы вернемся к однородному цилиндру  $\rho_0 = \text{const}$  и  $v_{Tz} = \Omega_0 r$ ,  $\Omega_0 = \text{const}$ . Уравнение (66) используем для получения необходимого граничного условия (заменяющего (7)). Оно может быть найдено интегрированием уравнения (66) по переходной слою с исчезающей малой толщиной  $\delta$ :

$$\left. \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \varepsilon_{\perp} \left. \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=R} - \frac{2m}{R} \Phi_1(R) \omega_0^2 \Omega_0 I, \quad (68)$$

где через  $\Phi_1^{(1)}$  обозначено внутреннее ( $r < R$ ), а через  $\Phi_1^{(2)}$  — внешнее ( $r > R$ ) решение,

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(v_z) dv_z}{\omega' \Delta}. \quad (69)$$

Возмущенный потенциал внутри однородного цилиндра пропорционален функции Бесселя (порядка  $m$ )

$$\Phi_1^{(1)} = A J_m(k_{\perp} r) \quad (r < R, A = \text{const}), \quad (70)$$

где  $k_{\perp}$  по-прежнему определяется соотношением (4). При  $m \neq 0$  поперечное волновое число  $k_{\perp}$  является, вообще говоря, комплексным (см. ниже, с. 72). В вакууме  $\Phi_1$  есть функция Макдональда

$$\Phi_1^{(2)} = B K_m(k_z r) \quad (r > R, B = \text{const}). \quad (71)$$

Граничное условие непрерывности потенциала (6) остается неизменным.

Используя (70), (71) вместо (68), (6), получаем

$$\frac{\partial B K_m}{\partial r} = \varepsilon_{\perp}^{(0)} \frac{\partial A J_m}{\partial r} - \frac{2m\Omega_0}{R} A J_m \omega_0^2 I, \quad (72)$$

$$B K_m = A J_m. \quad (73)$$

Условие существования нетривиального решения для коэффициентов  $A, B$  есть

$$k_z R \frac{K'_m(k_z R)}{K_m(k_z R)} = k_{\perp} R \varepsilon_{\perp}^{(0)} \frac{J'_m(k_{\perp} R)}{J_m(k_{\perp} R)} - 2m\Omega_0 \omega_0^2 I. \quad (74)$$

Это уравнение вместе с соотношением (4) в принципе решает поставленную задачу. Рассмотрим предельные случаи.

**4а. Длинноволновые** ( $k_z R \ll 1$ ), **крупномасштабные** ( $k_\perp R \ll 1$ ) **возмущения.** Используя известные асимптотические формулы для цилиндрических функций

$$K_m(k_z R) \sim (k_z R)^{-m}, \quad J_m(k_\perp R) \sim (k_\perp R)^m, \quad (75)$$

будем иметь

$$1 + \varepsilon_\perp - 2\Omega_0 \omega_0^2 I \operatorname{sgn} m = 0, \quad (76)$$

где  $\operatorname{sgn} m = m/|m|$ . В приближении  $\omega^* \gg k_z \sqrt{v^2}$ ,  $\omega^* \equiv \omega - m\Omega_0$ ,  $\sqrt{v^2}$  — среднеквадратичная скорость, найдем, что

$$\varepsilon_\parallel = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \varepsilon_\perp = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^{*2} - 4\Omega_0^2}; \quad I = \frac{1}{\omega^* (\omega^{*2} - 4\Omega_0^2)}. \quad (77)$$

Подставляя (77) в уравнение (74), находим частоту колебаний  $\omega \simeq -1$ , или

$$\omega = m \Omega_0 \left( 1 - \frac{1}{|m|} \right). \quad (78)$$

Формула (78) описывает *медленную* волну возмущения: азимутальная скорость  $\varphi = \omega/m$  меньше скорости вращения цилиндра. Собственная частота (78) при  $k_z = 0$  является кратной. Соответственно для таких возмущений требуется специальное исследование, которое приводит к выводу о степенной неустойчивости (см. § 3 и задачу 6). Однако при  $k_z \neq 0$  (хотя бы и малом) указанное вырождение снимается. Поправки к частоте (78) легко вычислить, если учесть следующие члены в разложениях цилиндрических функций (75). С учетом этих поправок собственные частоты равны

$$\omega_{1,2}^* \simeq -1 \pm k_z R \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1}{k_z R} \right)^{1/2} \quad \text{для } m = 1, \quad (79)$$

$$\omega_{1,2}^* \simeq -1 \pm k_z R \left[ \frac{2m-1}{2m(m^2-1)} \right]^{1/2} \quad \text{для } m \geq 2. \quad (80)$$

Таким образом, возмущения с  $m \neq 0$  при  $k_z R \ll 1$  ( $k_z \neq 0$ ),  $k_\perp R \ll 1$  не приводят к неустойчивости. Напомним, что в аксиально-симметричном случае ( $m = 0$ ) аналогичные возмущения не стабилизируются никакой конечной дисперсией продольных скоростей (п. 2а).

**4б. Длинноволновые** ( $k_z R \ll 1$ ), **мелкомасштабные** ( $k_\perp R \gg 1$ ) **возмущения.** Допустим сначала, что дисперсия скоростей по оси  $z$  отсутствует. Тогда  $\varepsilon_\perp$ ,  $\varepsilon_\parallel$ ,  $I$  определяются формулами (77). Дисперсионное соотношение  $\omega(k_z)$  дается уравнениями (74) и (4), которые в случае холодного цилиндра сводятся к следующим:

$$\frac{k_z R K'_m(k_z R)}{K_m(k_z R)} = \frac{k_\perp R J'_m(k_\perp R)}{J_m(k_\perp R)} \frac{\omega^{*2} - 2\Omega_0^2}{\omega^{*2} - 4\Omega_0^2} - \frac{2m\Omega_0 \omega_0^2}{\omega^* (\omega^{*2} - 4\Omega_0^2)}, \quad (81)$$

$$\frac{k_\perp^2}{k_z^2} = \frac{\omega^{*2} + 2\Omega_0^2}{\omega^{*2}} \cdot \frac{\omega^{*2} - 4\Omega_0^2}{\omega^{*2} - 2\Omega_0^2}. \quad (82)$$

Так как по предположению  $k_z \ll k_\perp$ , то из последнего уравнения следует, что возможны решения двух типов: с  $\omega^* \ll \Omega_0$  и  $\omega^{*2} \approx 2\Omega_0^2$ .

Для решений первого типа из (81), (82) получаем

$$\frac{k_\perp R J'_m(k_\perp R)}{J_m(k_\perp R)} \simeq \pm \frac{m i k_\perp}{k_z}, \quad (83)$$

$$\omega^* \simeq \pm 2i\Omega_0 \frac{k_z}{k_\perp}. \quad (84)$$

В правой стороне (83) стоит большая по модулю величина, поэтому должно быть

$$k_{\perp} R \approx k_{\perp n}^{(m)} R \equiv \lambda_n^{(m)}, \quad (85)$$

причем  $\lambda_n^{(m)}$  — корни функции Бесселя

$$J_m(\lambda_n^{(m)}) = 0. \quad (86)$$

Приближенное решение уравнения (83) есть

$$k_{\perp} \approx \lambda_n^{(m)} / R \mp ik_z / m. \quad (87)$$

Одно из решений (84) соответствует, очевидно, джинсовской неустойчивости с инкрементом

$$\gamma_n^{(m)} \approx \frac{2k_z R}{\lambda_n^{(m)}} \Omega_0. \quad (88)$$

Для решений второго типа, с  $\omega^2 \approx 2\Omega_0^2$ , аналогичным образом находим

$$\omega^2 \approx \left( 2 + \frac{4k_z^2}{k_{\perp}^2} \right) \Omega_0^2, \quad (89)$$

$$k_{\perp} R \approx \lambda_n^{(m)} + \frac{2\lambda_n^{(m)}}{m(1 \pm \sqrt{2})} \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2}. \quad (90)$$

Эти решения устойчивы.

Вопрос о стабилизации полученной выше джинсовской неустойчивости (при учете дисперсии скоростей частиц вдоль оси цилиндра) рассматривается так же, как в п. 2б. Для возмущений с  $k_z v_T \ll \Omega_0$  дисперсионное уравнение приводится к виду (26), только с несколько другим набором дискретных  $k_{\perp}$ . Возмущения затухают при выполнении критерия

$$v_T > \frac{2\sqrt{2}v_0}{\lambda_n^{(m)}}, \quad (91)$$

аналогичного (28). При  $m=1$  критерии (91) и (28) совпадают, а при  $m>1$  для стабилизации неустойчивости требуются согласно (91) меньшие дисперсии скоростей  $v_T$  (минимальное  $\lambda_n^{(m)}$  получается при  $n=1$ ,  $m=1$ ).

**Ав. Коротковолновые ( $k_z R \gg 1$ ) возмущения.** При  $k_z R \gg 1$  уравнение (81) сводится к следующему:

$$\frac{\omega^{*2} - 2\Omega_0^2 k_{\perp} R J'_m(k_{\perp} R)}{\omega^{*2} - 4\Omega_0^2 J_m(k_{\perp} R)} \approx -k_z R + \frac{4m\Omega_0^3}{\omega^{*2}(\omega^{*2} - 4\Omega_0^2)}. \quad (92)$$

И в этом случае из-за  $k_z \gg k_{\perp}$  мы имеем две возможности удовлетворить уравнению (82): 1)  $\omega^2 \approx -2\Omega_0^2 = -\omega_0^2$ ; 2)  $\omega^2 \approx 4\Omega_0^2$ . Очевидно, что первое решение соответствует коротковолновой части *джинсовских*, а второе — *вращательных* возмущений. Их длинноволновые асимптотики рассматривались в предыдущем пункте.

Так же, как и выше, получаем:

1) для возмущений джинсовского типа

$$\omega \approx \pm i\Omega_0 \sqrt{2} = \pm i\omega_0, \quad (93)$$

$$k_{\perp} R \approx \lambda_n^{(m)} - \frac{2}{3} \frac{\lambda_n^{(m)}}{(k_z R)}; \quad (94)$$

2) для вращательных возмущений

$$\omega \approx \pm \left( 4 - \frac{4}{3} \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \right)^{1/2} \Omega_0, \quad (95)$$

$$k_{\perp} R \approx \mu_n^{\pm(m)}, \quad (96)$$

где  $\mu_n^{\pm(m)}$  есть корни уравнений

$$\frac{\mu^{\pm} J'_m(\mu^{\pm})}{J_m(\mu^{\pm})} = \pm m. \quad (97)$$

Условием стабилизации джинсовской неустойчивости (93), очевидно, является следующее:

$$k_z v_T \gg \omega_0 \quad (98)$$

(возмущения с  $k_z v_T \gg \omega_0$  быстро затухают — см. конец п. 2в). Это условие заведомо выполняется, если выполнен критерий устойчивости для длинноволновых возмущений (28). Таким образом, критерий (28) является универсальным: при его выполнении неустойчивыми остаются только аксиально-симметричные, длинноволновые, крупномасштабные возмущения ( $m=0$ ,  $k_z R \ll 1$ ,  $k_{\perp} R \ll 1$ ), рассмотренные в п. 2а. Их инкремент становится в свою очередь экспоненциально малым при увеличении дисперсии скоростей  $v_{Tz}$ .

Выше исследовалась простейшая модель однородного цилиндра с круговыми орбитами частиц. Естественно возникает вопрос: что изменится, если учесть неоднородность цилиндра в плоскости  $x, y$  или дисперсию скоростей частиц (в той же плоскости). Оказалось [10], что качественно основные результаты ничем не отличаются от случая однородного цилиндра. Для любой дисперсии скоростей  $\bar{v}_z^2$  всегда можно найти такой волновой вектор  $k_{0z}$ , начиная с которого все возмущения с  $k_z < k_{0z}$  неустойчивы. При увеличении  $\bar{v}_z^2$   $k_{0z}$  быстро убывает (задача 1).

### § 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРА ОТНОСИТЕЛЬНО ЖЕЛОБКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В этом параграфе исследуется [14, 112, 115] устойчивость горячей модели цилиндра (2) § 1 по отношению к желобковым возмущениям ( $k_z=0$ ). Дисперсионное уравнение можно вывести одним из методов, описанных в предыдущей главе.

Применение метода вариации фазового объема для данной системы мы проиллюстрируем в задаче 2, где выведен спектр возмущений частного вида (оставляющих неизменной плотность). Для вывода общего дисперсионного уравнения воспользуемся методом лагранжевых смещений в фазовом пространстве.

Декартовы компоненты смещения в обычном пространстве (аналогичные  $\psi$  в § 5 главы I) обозначим через  $X(x, y, v_x, v_y, t)$  и  $Y(x, y, v_x, v_y, t)$ . Уравнения, описывающие эволюцию  $X, Y$ , сохраняют тот же вид, что и в одномерном случае [8, 14]:

$$(\hat{D}^2 + 1)X = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad (\hat{D}^2 + 1)Y = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}. \quad (1)$$

Оператор  $\hat{D}$  есть снова стоксова производная вдоль невозмущенной траектории

$$\hat{D} \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial v_x} - y \frac{\partial}{\partial v_y}. \quad (2)$$

Общая схема вычислений также остается в основном прежней. Задаваясь полиномиальным потенциалом  $\Phi_1(x, y)$  (с неопределенными коэффициентами), находим  $X$  и  $Y$ , решая уравнения (1). Затем усредняем  $X$  и  $Y$  по скоростям в любой точке  $(x, y)$ . Для  $X$  это делается по формуле

$$\bar{X}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(x, y, -\gamma y + \rho \cos \varphi, \gamma x + \rho \sin \varphi) d\varphi, \quad (3)$$

где  $\rho$  обозначает модуль пекулярной скорости частицы:

$$\rho = \sqrt{(1-\gamma^2)(1-x^2-y^2)}, \quad (4)$$

а угол  $\varphi$  фиксирует ее направление. Формула усреднения  $Y$  аналогична (3).

После этого нужно вычислить возмущение плотности (см. § 5 главы I)

$$\rho_1 = -\rho_0 \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right) \quad (5)$$

и радиальное смещение границы

$$\delta R = \left( \frac{x}{R} \bar{X} + \frac{y}{R} \bar{Y} \right)_{r=R} \quad (6)$$

Наконец, вычисляя по  $\rho_1$  и  $\delta R$  возмущенный потенциал  $\Phi_1$  и сравнивая его с исходным выражением, мы найдем дисперсионное уравнение и не определенные вначале коэффициенты в полиномиальном представлении  $\Phi_1$ .

Итак, зададимся каким-либо полиномиальным потенциалом. В полярных координатах  $(r, \varphi)$  всегда можно написать

$$\Phi_1^{(n,m)} = \left( \sum_{l=0}^n a_l r^{2(n-l)} \right) r^m e^{im\varphi}. \quad (7)$$

Каждая собственная функция (7) определяется двумя индексами:  $m$  — азимутальным числом, которое характеризует угловую зависимость потенциала, и  $n$  — определяющим степень полинома по  $r$  ( $n > 0$ ).

При вычислении  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  удобно пользоваться следующим легко доказываемым соотношением:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + w \cos \varphi, y + w \sin \varphi) d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left( \frac{w}{2} \right)^{2n} \Delta^n f(x, y), \quad (8)$$

где  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — оператор Лапласа. Для потенциала вида (7) можно после довольно громоздких выкладок, использующих соотношение (8), вывести уравнения на коэффициенты  $a_l$ :

$$\begin{aligned} a_l (n-l)(n-l+m) + \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} \sin t \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\sin^{2k} t}{(k!)^2} (1-\gamma^2)^k \times \\ \times (\cos t + i\gamma \sin t)^n \sum_{s=0}^l (-1)^{l-s} a_s (\cos^2 t + \gamma^2 \sin^2 t)^{n-s-k-1} \times \\ \times \frac{(n-s+m)!(n-s)!}{(n-s+m-k)!(n-s-k)!(l-s)!(k-l+s)!} [2 \cos t (n+m-k-s) \times \\ \times (n-l) - (\cos t + i\gamma \sin t) m (k+s-l)] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, при  $l=0$  отсюда следует дисперсионное уравнение<sup>1</sup> ( $n \geq 1$ ):

$$1 + \frac{1}{n(n-m)} \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega t} \sin t \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\sin^{2k} t}{(k!)^2} (1-\gamma^2)^k (\cos t + i\gamma \sin t)^m \times \\ \times (\cos^2 t + \gamma^2 \sin^2 t)^{n-k-1} \frac{n!(n+m)!}{(n+m-k)!(n-k)!} \times \\ \times [2 \cos t (n+m-k)n - (\cos t + i\gamma \sin t) km] = 0. \quad (10)$$

Мы не будем здесь воспроизводить подробности всех выкладок, ведущих к (9). По существу, они элементарны. Сделаем только некоторые замечания.

1. Интегралы такого типа, как в уравнениях (9), возникают естественно, если «уравнения движения» (1) решать методом «интегрирования по траекториям» [138]. В § 3 главы I (см. формулы (1)–(3)) мы уже рассматривали применение этого метода для уравнений вида

$$\hat{D}g(x, y, v_x, v_y, t) \equiv \frac{d}{dt} g(x, y, v_x, v_y, t) = Q(x, y, v_x, v_y, t). \quad (11)$$

Решение несколько более сложных уравнений (1) получается по известному решению уравнения типа (11) способом, описанным в § 5 главы I.

2. Потенциал  $\Phi_1$  за счет поверхностного слоя, обязанного смещению границы (6), равен (при  $\delta R = \text{const} \cdot e^{im\varphi}$ ):

$$\Phi_1 = \text{const} \cdot \frac{2\pi GR}{m} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^m \cdot e^{im\varphi}, \quad r < R, \quad m \neq 0; \quad (12)$$

$$\Phi_1 = 0, \quad m = 0.$$

Сравнивая (12) с (7), легко понять, что практически  $\delta R$  нужно вычислять только при исследовании «поверхностных» мод, для которых  $\rho_1 \equiv 0$  (см. задачу 2). Из уравнений (9) при  $l=1, 2, \dots, n$  последовательно определяются коэффициенты  $a_i$  полинома  $\Phi_n^m$ . Его можно представить в виде знакпеременного ряда

$$\Phi^{(n,m)} = \left( \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p r^{2(n-p)} \right) r^m e^{im\varphi}, \quad (13)$$

где положительные коэффициенты  $b_p$  определяются из рекуррентного соотношения

$$b_p = b_{p-1} \frac{(n+m+1-p)(n+1-p)}{p(2n+m-p)}. \quad (14)$$

Используя (14), выразим общий член ряда  $b_k$  через первый коэффициент (который, очевидно, является произвольным)

$$b_k = b_0 \frac{n!m!(n+m+k-1)!}{(n-k)!k!(m+k)!(n+m-1)!}. \quad (15)$$

Например, при  $n=2, m=0$  из (13)–(15) получаем  $\Phi^{2,0} = r^4 - 4/3 r^2 + \text{const}$ , а  $n=1, m=2$  соответствует потенциал  $\Phi^{1,2} = (r^2-1)r^2 e^{2i\varphi}$ .

Нетрудно убедиться в том, что дисперсионное уравнение (10) имеет структуру уравнения (68) § 5 главы I:

$$\sum_{k=0}^N \frac{\gamma_k}{(N-2k+\omega)^2 - 1} = -1 \quad (N \equiv 2n+m+1). \quad (16)$$

<sup>1</sup> Если интересоваться выводом одного лишь дисперсионного уравнения, можно учитывать при вычислениях только «старший» член разложения (7) (и опустить остальные):  $\Phi_1 \approx r^{2n+m} e^{im\varphi}$ .

Выражения для коэффициентов  $\gamma_k$  оказываются, однако, весьма громоздкими (см. [14]). Соответственно громоздко и доказательство устойчивости рассматриваемой системы, которое сводится к установлению неравенств (см. § 5 главы I).

$$0 < \gamma_k \leq 1. \quad (17)$$

Общее доказательство, использующее ряд искусственных приемов, дано в работе [14]. Мы приведем (в задаче 3) только часть этого доказательства, устанавливающую устойчивость «достаточно мелкомасштабных» мод.

Устойчивы и все составные модели (4) § 1. Для них вместо (16) мы будем, очевидно, иметь

$$\sum_{k=0}^N \frac{\bar{\gamma}_k}{(N-2k+\omega)^2-1} = -1, \quad (18)$$

$$\bar{\gamma}_k \equiv \int_{-1}^1 \gamma_k(\gamma) A(\gamma) d\gamma.$$

Это уравнение сохраняет прежний вид (16). Остаются в силе и неравенства, аналогичные (17):

$$0 \leq \bar{\gamma}_k \leq 1. \quad (19)$$

Отсюда следует устойчивость любой составной модели.

Заметим, что само дисперсионное уравнение дано в [14] в форме, несколько отличной от (10):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} (\psi^{m+n} \psi_1^{n-1} + \psi^{m+n-1} \psi_1^n) \operatorname{sh} \tau e^{-\omega\tau} d\varphi = -1 \quad (n \geq 1), \quad (20)$$

где

$$\psi \equiv \operatorname{ch} \tau - \gamma \operatorname{sh} \tau - \sqrt{1-\gamma^2} e^{i\varphi} \operatorname{sh} \tau, \quad (21)$$

$$\psi_1 \equiv \operatorname{ch} \tau + \gamma \operatorname{sh} \tau - \sqrt{1-\gamma^2} e^{-i\varphi} \operatorname{sh} \tau. \quad (22)$$

Оно получается естественно, если уравнения (1) решать способом, которым мы пользовались в предыдущей главе (§ 5). Отметим еще следующую простую форму дисперсионного уравнения для радиальных колебаний цилиндра ( $m=0$ ):

$$1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{4k^2 a_k}{\omega^2 - 4k^2} = 0, \quad (23)$$

где

$$a_k \equiv \sum_{s=k}^n (-1)^s \left( \frac{1-\gamma^2}{4} \right)^{s-1} \frac{(n+s-1)! (2s-1)!}{(n-s)! [(s-1)!]^2 (s-k)! (s+k)!}. \quad (24)$$

Остановимся отдельно на желобковых ( $k_z=0$ ) колебаниях *холодного* цилиндра [20]. Соответствующие частоты можно получить либо из общего дисперсионного уравнения (10) предельным переходом при  $|\gamma| \rightarrow 1$ , либо непосредственно решая гидродинамические уравнения движения в плоскости  $x, y$ , которые в рассматриваемом случае очень просты. Любым способом легко показать, что собственные частоты равны (для  $\gamma=1$ )

$$\omega_{1,2} = m \pm \sqrt{2}, \quad \omega_3 = m, \quad n \geq 1, \quad (25)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = m-1, \quad n=0. \quad (26)$$



Обратим внимание на то, что частоты в (25) не зависят от радиального волнового числа  $n$ : при фиксированном типе угловой симметрии ( $m$  для цилиндра) радиальная зависимость собственной функции может быть произвольной. Такое же вырождение характерно для однородных сфер с *круговыми орбитами* частиц (см. § 3 следующей главы, где этот вопрос рассматривается подробнее).

Частота (26), отвечающая «поверхностным» колебаниям ( $\rho_1=0$ ) холодного цилиндра, кратная. Поэтому можно заподозрить наличие степенной неустойчивости. В задаче 5 приведено доказательство существования степенной неустойчивости (нарастание  $\sim t$ ) для частного вида колебаний поверхностного типа, при котором исходный круговой цилиндр деформируется в цилиндр эллиптического сечения [9].

Остановимся еще на возможности степенных неустойчивостей, связанных с наличием кратных корней [14]. В этом отношении цилиндрическая модель несколько отличается от рассмотренной в § 5 главы I модели однородного слоя, которая оказалась полностью устойчивой. Например, только что мы обнаружили кратные корни (26) при  $\gamma=1$ , соответствующие одной и той же моде. Имеется и возможность резонанса (влияния «старших» членов в полиномиальном разложении потенциала  $\Phi_1(x, y)$  на «младшие» — см. § 5 главы I). Резонанс наступит, если совпадут собственные частоты для мод  $(n, m)$  и  $(n-k, m)$  при некотором  $k>0$ . Простейший случай резонанса обнаруживается при  $n=1, m=2$  (задача 4). По предположению Антонова [14], множество значений  $\gamma$ , дающих резонансы, счетно и всюду плотно на интервале  $(-1, 1)$ . Таким образом, рассмотренная в этом параграфе модель однородного цилиндра устойчива, за исключением некоторого особенного множества значений параметра  $\gamma$ , когда имеется степенная ( $\sim t$ ) неустойчивость.

Помимо рассмотренных выше «истинных» колебаний цилиндра, существует большое число различных тривиальных решений (перестановочных и «пылевых» по терминологии, принятой в [14]). Мы не останавливаемся на этих решениях, поскольку они не влияют на устойчивость системы (им соответствуют целочисленные частоты).

#### § 4. ЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРОВ (ЖЕЛОБКОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Для достаточно коротковолновых возмущений ( $n \gg 1$ ) характеристическое уравнение (10), выведенное в предыдущем параграфе, становится очень громоздким. С другой стороны, при  $n \gg 1$  собственные функции (например, возмущенный потенциал  $\Phi_1(r)$  — см. формулу (13) § 3) являются быстро осциллирующими. Поэтому здесь в принципе можно использовать локальный метод, принимая

$$\Phi_1 \sim e^{ikr + im\varphi} \quad (1)$$

и считая  $kr \gg m$ . Однако для произвольного значения параметра  $\gamma$  выкладки все еще остаются слишком громоздкими. Они становятся простыми, если  $1-\gamma^2 \ll 1$ , т. е. движение частиц достаточно близко к круговому. В то же время получающаяся таким образом информация является достаточно полной; в частности, качественно она остается верной и для более длинноволновых колебаний (или более горячих цилиндров). Важно и то, что в приближении коротких длин волн можно с одинаковым успехом исследовать колебания не только однородных, но также неоднородных  $\rho_0 = \rho_0(r)$  и дифференциально-вращающихся ( $\Omega_0 = \Omega_0(r)$ ) систем. Аналитическое рассмотрение крупномасштабных возмущений в таких системах практически не представляется возможным.

Вывод дисперсионного уравнения можно, как обычно, разделить на два этапа. Первый заключается в решении линеаризованного кинетического уравнения, причем возмущение потенциала  $\Phi_1$  считается заданным. В результате находим возмущенную функцию распределения, а проинтегрировав ее по скоростям, — возмущение плотности  $\rho_1$ . Отметим попутно, что вычисленное таким образом  $\rho_1$  часто называют «откликом» системы (на заданное возмущение гравитационного поля).

На втором этапе накладываем условие самосогласования, требуя, чтобы «отклику» системы  $\rho_1$  на заданное поле  $\Phi_1$  (вычисленному на первом этапе вывода из кинетического уравнения) соответствовало согласно уравнению Пуассона то же самое  $\Phi_1$ , т. е. чтобы это поле само создавалось вследствие возмущения плотности  $\rho_1$ .

Для коротковолновых возмущений ( $kr \gg 1$ ) уравнение Пуассона сводится к простому соотношению

$$\rho_1 = -\frac{k^2}{4\pi G} \Phi_1. \quad (2)$$

1. Дисперсионное уравнение для модели (2) § 1. На первом этапе основные черты использования коротковолнового приближения являются общими для цилиндрических и дисковых систем. Поэтому вывод, следующий ниже, есть во многом простое повторение вычислений Линя и Шу [271] при выводе дисперсионного уравнения для коротковолновых возмущений диска (см. раздел 4.1 главы V).

Воспользуемся методом вариации фазового объема (глава I. § 5). Выкладки вполне аналогичны случаю плоского слоя. Полная плотность (невозмущенная + возмущенная) равна

$$\rho = \frac{\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \delta[\kappa^2 - v^2 - \varepsilon\chi(r, \varphi, v_r, v_\varphi)] v dv d\alpha, \quad (3)$$

где

$$\kappa^2 \equiv (1 - \gamma^2)(1 - r^2); \quad \operatorname{tg} \alpha = v_\varphi / v_r; \quad v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2. \quad (4)$$

Отсюда можно вывести формулу для вычисления возмущенной плотности

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\alpha} dv \frac{\partial \chi}{\partial v} \delta(\kappa^2 - v^2) \quad (5)$$

и уравнение возмущенной границы

$$\kappa^2 - \varepsilon\chi_0 = 0, \quad (6)$$

где обозначено

$$\chi_0 = \chi(v=0), \quad \chi_1 = \chi - \chi_0. \quad (7)$$

Уравнение для функции  $\chi$  имеет следующий вид:

$$\frac{d\chi}{dt} = 2v_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{2v_\varphi}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = 2 \left( \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right), \quad (8)$$

где  $d/dt$  — полная производная вдоль невозмущенной траектории частицы во вращающейся системе координат (где исходная функция распределения имеет вид (2) § 1).

Общее уравнение (8) для функции  $\chi$  в случае коротковолновых колебаний достаточно холодного цилиндра сводится к следующему:

$$-i(v - k'v_r)\chi + \left( v_r \frac{\partial \chi}{\partial v_\varphi} - v_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial v_r} \right) = 2ik'v_r \tilde{\Phi}_1, \quad (9)$$

где  $v \equiv \omega/2$ ,  $k' \equiv k/2$ ,  $\tilde{\Phi}_1$  — амплитуда возмущенного потенциала.

Уравнение (9) можно решить методом интегрирования по углу [138]. Для этого вводим полярные координаты  $v, s$  в пространстве скоростей

$$v_r = v \cos s, \quad v_\varphi = v \cdot \sin s. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) превращается в следующее:

$$-\frac{\partial \chi}{\partial s} + i(v - k'v \cos s) \chi = -2ik' \tilde{\Phi}_1 v \cos s. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение такого вида встречается в физической кинетике плазмы [138]. Его решение можно представить по-разному. По-видимому, наиболее удобной является форма решения, найденная Линем и Шу [271]:

$$\chi = 2\tilde{\Phi}_1 \cdot Q, \quad (12)$$

где

$$Q = 1 - \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{i[\nu s + k'v_r \sin s - k'v_\varphi (1 + \cos s)]\} ds. \quad (13)$$

Для получения (12) напомним общее решение уравнения (11)

$$-\chi/2\tilde{\Phi}_1 = e^{iF(s,v)} \left\{ C(v) - ik' \int_0^s e^{-iF(s',v)} v \cos s' ds' \right\}, \quad (14)$$

где  $F(s, v) \equiv \nu s - k'v \sin s$ .

«Константу» интегрирования  $C(v)$  можно определить из условия периодичности

$$\chi(s) = \chi(s + 2\pi). \quad (15)$$

Возникающий при использовании (15) интеграл в  $\chi(s + 2\pi)$  следует записать как

$$\int_0^{s+2\pi} = \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+s}$$

и заменить в последнем интеграле  $s'$  на  $2\pi + s''$ ; эта замена сводит его к интегралу

$$\int_0^s e^{-iF(s''+2\pi,v)} v \cos s'' ds'' = e^{2\pi i \nu} \int_0^s e^{-iF(s'',v)} v \cos s'' ds'',$$

т. е. мы получаем тот же интеграл, что и в  $\chi(s)$ . Таким способом можно вычислить  $C(v)$  и свести решение (14) к виду (12).

Теперь нужно найти возмущенную плотность  $\rho_1$ , пользуясь формулой (3), причем удастся выполнить интегрирование по скоростям и привести «отклик»  $\rho_1$  к виду

$$\rho_1 = \Phi_1 \rho_0 \frac{k'}{\pi} \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{i\nu s} \cos \frac{s}{2} J_1 \left[ -2\nu k' \cos \frac{s}{2} \right]. \quad (16)$$

С учетом уравнения Пуассона (2) приходим тогда к дисперсионному уравнению

$$\frac{k_1}{\rho_0} = \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{i\nu s} \cos \frac{s}{2} J_1 \left( 2k_1 \cos \frac{s}{2} \right), \quad (17)$$

причем  $k_1 \equiv k' \kappa = k/2\sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2)}$ . Интеграл в (17) снова выражается через функции Бесселя [42], и мы окончательно получаем

$$2k_1 = \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} [J_{\nu+1}(k_1)J_{-\nu}(k_1) + J_{\nu}(k_1)J_{1-\nu}(k_1)]. \quad (18)$$

Дисперсионное уравнение (18) определяет функцию

$$\nu = \nu(k_1), \quad \nu = \omega/2, \quad k_1 \equiv k/2\sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2)}. \quad (19)$$

Заметим, что величину  $2k_1$  можно написать как  $k(\bar{v}^2)^{1/2}/2\Omega_0$ , где  $(\bar{v}^2)^{1/2} = \sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2)}$  есть среднеквадратичная скорость для рассматриваемой функции распределения. Отсюда очевиден физический смысл этой величины: она равна по порядку величины отношению среднего размера эпицикла  $(\bar{v}^2)^{1/2}/2\Omega_0$  к длине волны возмущения  $1/k$ . Безразмерная частота  $\nu$  определена как отношение частоты  $\omega$  (измеренной во вращающейся системе координат) к эпициклической частоте  $\kappa = 2\Omega_0$ .

По предположению  $k \gg 1$ ,  $(1-\gamma^2) \ll 1$ , но величина  $k_1$  может быть как малой, так и большой. Для построения качественной картины ветвей колебаний, соответствующих дисперсионному уравнению (18), рассмотрим предельные случаи.

1.  $k_1 \ll 1$ . В пределе  $k_1 = 0$  мы должны получить собственные частоты колебаний холодного цилиндра  $\nu = \pm 1/\sqrt{2}$  (формула (25) § 3). Выполним предельный переход в (18). Так как при  $k_1 \ll 1$

$$J_{\nu}(k_1) \approx \left(\frac{k_1}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}, \quad (20)$$

то квадратная скобка в правой стороне уравнения (18)

$$[ ] \approx \frac{k_1}{2} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(2+\nu)} + \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(2-\nu)} \right\}. \quad (21)$$

Используя соотношения

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \pi/\sin \pi\alpha,$$

преобразуем (21) к виду

$$[ ] \approx \frac{k_1}{2} \left\{ \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu(\nu+1)} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu(\nu-1)} \right\}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (18), получим

$$2 = -1/(\nu^2-1), \quad \text{т. е. } \nu^2 = 1/2, \quad \omega^2 = 2.$$

Если разложить функции Бесселя, входящие в дисперсионное уравнение (18), до членов  $\sim k_1^4$ , то найдем

$$2 \approx -\frac{1}{\nu^2-1} - \frac{3k_1^2}{2(\nu^2-1)(\nu^2-4)} + \frac{3k_1^4}{8(\nu^2-1)(\nu^2-9)}. \quad (23)$$

Отсюда можно, во-первых, определить поведение ветви  $\nu^2 \approx 1/2$  при малых  $k_1$ :

$$\nu^2 \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{14}k_1^2. \quad (24)$$

Кроме того, имеются решения уравнения (23) вблизи от «резонансных» частот  $\pm 2$  и  $\pm 3$ :

$$\nu^2 \approx 4 - \frac{3}{14}k_1^2, \quad (25)$$

$$\nu^2 \approx 9 - \frac{3}{136}k_1^4. \quad (26)$$

Из аналогичных (23) разложений до членов порядка  $k_1^{2(n-1)}$  можно найти поведение ветви  $\nu^2 \approx n^2$  вблизи от резонансных частот  $\pm n$ :

$$\nu^2 \approx n^2 - \alpha k_1^{2(n-1)}. \quad (\alpha > 0). \quad (27)$$

2.  $k_1 \gg 1$ . В этом пределе, пользуясь асимптотическим представлением функций Бесселя

$$J_\nu(k_1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} \cos\left(k_1 - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (28)$$

легко найдем

$$\nu^2 \approx n^2 \left[ 1 + (-1)^{n+1} \frac{2 \cos 2k_1}{\pi k_1^2} \right] \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (29)$$

Теперь можно представить полную качественную картину, поведения желобковых ( $k_z = 0$ ) ветвей колебаний однородного бесстолкновительного цилиндра (рис. 8).

Остановимся на вопросе о том, как соотносится полученная приближенная картина с точным решением, исследованным в § 3. Там мы видели, что при любом конечном индексе моды  $n$  (которому соответствует

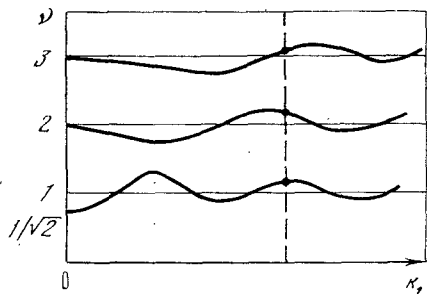


Рис. 8. Ветви желобковых колебаний  $\nu = \nu(k_1)$  цилиндра с функцией распределения (2) § 1 при  $(1-\gamma^2) \ll 1$

некоторое эффективное радиальное волновое число  $k$ ) и фиксированном  $m$  имеется конечное число собственных частот  $\omega_i$ . С увеличением  $n$  это число растет, стремясь к бесконечности при  $n \rightarrow \infty$ .

В пределе  $n \rightarrow \infty$  ( $k_1 \rightarrow \infty$ ) все частоты, как следует из (29), стремятся к резонансным  $\nu \rightarrow \pm n$  ( $\omega \rightarrow \pm 2n$ ). Такой результат вполне естествен. Из уравнения Пуассона (2) видно, что при  $k \rightarrow \infty$  для колебаний с  $\rho_1 \approx \text{const}$   $\Phi_1 \rightarrow 0$ , т. е. самогравитация волны не оказывает влияния на колебания частиц вблизи от произвольным образом выбранной точки  $r$ . Тогда остаются только колебания бесконечно тонких слоев (или отдельных частиц) в общем поле тяжести  $\Phi_0$ , которые могут происходить на эпициклической частоте  $\kappa$  (или ее гармониках). Для однородного цилиндра эпициклическая частота  $\kappa = 2\Omega_0$  не зависит от радиуса, и описанные колебания слоев, по существу не связанных между собой взаимодействием, могут происходить с формально согласованными фазами. Очевидно, однако, что в случае неоднородных систем, когда  $\kappa = 2\Omega_0(1 + r\Omega_0'/2\Omega_0)^{1/2} = \kappa(r)$ , собственными являются (при  $k \rightarrow \infty$ ) только *сингулярные* колебания, при которых колеблется лишь один какой-то слой со своей эпициклической частотой  $\kappa = \kappa(r_0)$ , а все остальные пребывают в невозмущенном состоянии.

Сходимость частот колебаний при  $n \rightarrow \infty$  к резонансным можно также проследить, исходя из точных выражений для коэффициентов  $\gamma_k$  в дисперсионном уравнении (18) § 3. Оказывается, что при этом все  $\gamma_k \rightarrow 0$ . Соответственно при больших  $n$  (а точнее, при больших  $k_1 \sim n\sqrt{1-\gamma^2}$ ) значения отдельных членов суммы в уравнении (18) § 3 существенно отличны от нуля только в малых окрестностях (целочисленных) особых

точек, к которым корни и стягиваются:

$$\omega \rightarrow 2(n-k) \quad (k=0, 1, \dots, 2n+m-1) \quad (30)$$

(здесь  $\omega$  — частота во вращающейся системе координат).

Легко понять колебательный характер зависимости  $\nu(k_1)$  (с пересечениями прямых  $\nu=n$  на рис. 8) на какой-либо фиксированной ветви колебаний. Возьмем для примера простейшую моду ( $m=0, n=2$ ). Она явно не относится к числу коротковолновых, но существо дела от этого не меняется. Дисперсионное уравнение в этом случае следующее:

$$1 + \frac{2-3\varepsilon}{\omega^2-4} + \frac{3\varepsilon}{\omega^2-16} \quad (\varepsilon \equiv 1-\gamma^2). \quad (31)$$

Здесь индекс моды  $n$  фиксирован, чему соответствует задание волнового числа  $k$ ; однако  $k_1 \sim k\sqrt{1-\gamma^2}$  меняется вместе с  $\gamma$ , и можно проследить характер зависимости  $\omega^2(\gamma) \sim \omega^2(k_1)$ .

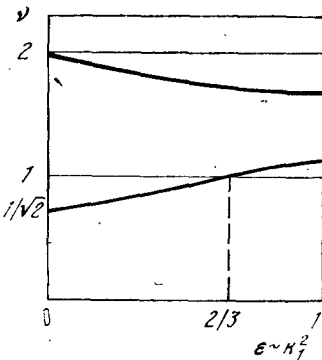


Рис. 9. Зависимость  $\nu=\nu(\varepsilon)$  для простейшей моды колебаний ( $n=2, m=0$ )

Из (31) видно, что в данном случае имеются две ветви функции  $\omega^2(\gamma) \sim \omega^2(k_1)$ . Они представлены на рис. 9. На одной из них  $\omega^2$  монотонно возрастает от  $\omega^2=2$  при  $\varepsilon=0$  до  $\omega^2=9-\sqrt{13} \approx 5,4$  при  $\varepsilon=1$ , пересекая прямую  $\omega=2$  ( $\nu=1$ ) при  $\varepsilon=2/3$ . Вторая ветвь монотонно убывает от значения  $\omega^2=16$  ( $\nu=2$ ) при  $\varepsilon=0$  до  $\omega^2=9+\sqrt{13} \approx 12,6$  при  $\varepsilon=1$ . Поведение обеих ветвей находится в качественном согласии с начальными участками двух нижних ветвей на рис. 8 (хотя мы рассматривали сейчас одну из наиболее крупномасштабных мод).

**2. Максвелловская функция распределения.** Дисперсионное уравнение, описывающее коротковолновые колебания достаточно холодного цилиндра, можно получить и для других распределений частиц по кукулярным скоростям. Особый интерес с точки зрения приложений представляет максвелловское распределение

$$f_0 = \frac{P_0}{\pi v_T^2} \exp(-v^2/v_T^2) \quad (v^2 = v_r^2 + v_\phi^2). \quad (32)$$

Разумеется, строго говоря, распределение частиц по скоростям в реальной системе (например, звезд в галактике) не может быть максвелловским. В частности, оно должно быть обрезано на скорости освобождения частиц из системы! Однако при малой «температуре» (для достаточно холодных систем) частиц с большими скоростями в (32) мало, так что они не играют роли.

Мы уже отмечали, что аналогичная задача — о коротковолновых колебаниях дисковых систем с орбитами, близкими к круговым, — решалась Лином и Шу [271] (раздел 4.1 главы V), причем они рассматривали неоднородные (и дифференциально вращающиеся) системы. Последнее, впрочем, несколько не увеличивает сложности выкладок (что

естественно для локального приближения). В качестве равновесной функции распределения в [271] рассматривалось так называемое распределение Шварцшильда

$$f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi c_r c_\phi} \exp\left(-\frac{v_r^2}{2c_r^2} - \frac{v_\phi^2}{2c_\phi^2}\right), \quad (33)$$

причем предполагалось, что радиальная и азимутальная дисперсии скоростей связаны соотношением (Линдблада)  $c_r = (2\Omega_0/\kappa)c_\phi$ , где  $\kappa = 2\Omega_0(1+r\Omega_0'/2\Omega_0)^{1/2}$  — эпициклическая частота. Распределение (33) переходит в максвелловское (32) в случае твердотельно-вращающейся системы ( $\Omega_0' = 0$ ).

В связи со сказанными можно позаимствовать у Линя и Шу выражение для возмущенной плотности системы с функцией распределения Шварцшильда

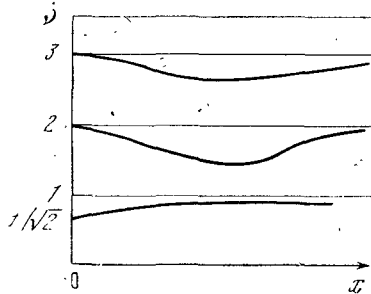
$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{k^2 \Phi_1}{\kappa^2 (1-v^2)} \mathcal{F}_v(x), \quad (34)$$

где  $v = (\omega - m\Omega_0)/\kappa$ ,  $x = k^2 c_r^2 / \kappa^2$ , а через  $\mathcal{F}_v(x)$  обозначен так называемый «редукционный фактор»,

$$\mathcal{F}_v(x) = \frac{1-v^2}{x} \left[ 1 - \frac{v}{2 \sin v\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x(1+\cos s)} \cos vs ds \right]. \quad (35)$$

Вывод формулы (34) ввиду ее важности для теории волн плотности в галактиках мы проводим в разделе 4.1 главы V (хотя он и не содержит ничего принципиально нового по сравнению с выводом формулы (16)). Там же приводится график функции  $\mathcal{F}_v(x)$  (рис. 41). Она равна единице при  $x=0$ , т. е. для холодной системы ( $c_r=0$ ), и монотонно убывает с ростом  $x$ , т. е. при увеличении средней дисперсии скоростей.  $\mathcal{F}_v(x)$  становится малой при  $x \gg 1$ . Таким образом, эта функция учитывает уменьшение («редукцию») влияния гравитационного поля на частицы с

Рис. 10. Ветви желобковых колебаний  $v=v(x)$  однородного цилиндра с максвелловской функцией распределения по тепловым скоростям частиц в плоскости вращения



радиусами эпициклов, сравнимыми или большими, чем длина волны возмущения.

Уравнение Пуассона (2) и соотношение (34) приводят к дисперсионному уравнению

$$\frac{\kappa^2}{4\pi G \rho_0} (1-v^2) = \mathcal{F}_v(x). \quad (36)$$

В частности, для твердотельно-вращающегося диска (36) можно представить в виде, аналогичном (18):

$$2x = 1 - \frac{v\pi}{\sin v\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x(1+\cos s)} \cos vs ds. \quad (37)$$

Ясно, что величина  $x$  в рассматриваемом случае играет ту же роль, что и величина  $k_z$  в предыдущем пункте. Рассматривая, как и там, пределы  $x \ll 1$  и  $x \gg 1$ , можно прийти к картине ветвей колебаний, изображенной на рис. 10. В частности, при  $x \rightarrow \infty$  частоты стремятся к резонансным  $\nu = n$  по закону

$$\nu \approx n \left( 1 - \frac{1}{2 \sqrt{2\pi} x^{3/2}} \right), \quad (38)$$

а поведение  $\nu(x)$  при малых  $x$  для трех первых ветвей на рис. 10 следующее:

$$\nu_1^2 \approx \frac{1}{2} + \frac{3}{7} x, \quad (39)$$

$$\nu_2^2 \approx 4 - \frac{3}{7} x, \quad (40)$$

$$\nu_3^2 \approx 9 - \frac{3}{34} x^2. \quad (41)$$

Картина, представленная на рис. 10, очень напоминает циклотронные ветви колебаний в плазме при  $k_z = 0$  [86].

## § 5. СРАВНЕНИЕ С КОЛЕБАНИЯМИ НЕСЖИМАЕМОГО ЦИЛИНДРА

Напомним вкратце некоторые результаты исследований гравитационной устойчивости цилиндра из несжимаемой жидкости.

Дисперсионное уравнение, описывающее малые возмущения *невозвращающегося* жидкого цилиндра, есть [13, 186] (возмущения  $\propto e^{ik_z z + im\varphi}$ )

$$\frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0} = - \frac{kR I'_m(kR)}{I_m(kR)} \left[ K_m(kR) I_m(kR) - \frac{1}{2} \right], \quad (1)$$

где  $I_m$  — функция Бесселя мнимого аргумента,  $K_m$  — функция Макдональда. В частности, для радиальных возмущений ( $m=0$ )

$$\frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0} = - \frac{kR I'_0(kR)}{I_0(kR)} \left[ K_0(kR) I_0(kR) - \frac{1}{2} \right]. \quad (2)$$

Из (2) можно вывести, что при  $k < k_{кр} = 1,0668/R$ , т. е. на достаточно длинных волнах (по сравнению с радиусом), цилиндр неустойчив. Максимум инкремента достигается при  $k_z R \approx 0,580$ . Для аксиально-несимметричных возмущений ( $m \neq 0$ ) уравнение (1) дает только устойчивые корни (из теории цилиндрических функций известно, что  $K_m(x) I_m(x) < 1/2$  для всех  $m \neq 0$ ).

Сравним нарисованную картину колебаний несжимаемого цилиндра с соответствующими результатами для бесстолкновительного цилиндра. Поскольку мы рассматривали *вращающиеся* цилиндры, сравнивать нужно с крупномасштабными ( $k_\perp R \ll 1$ ) возмущениями джинсовской ветви (нижней на рис. 7) — для них, очевидно, вращение не играет существенной роли.

Выше мы видели, что бесстолкновительный цилиндр с достаточно большой дисперсией скоростей частиц вдоль оси вращения практически устойчив<sup>4</sup>: инкремент неустойчивости экспоненциально мал. Холодные по оси  $z$  бесстолкновительные цилиндры, разумеется, неустойчивы, при-

<sup>4</sup> Конечно, если функция распределения частиц по  $v_z$  не имеет «пучкового» характера (см. главу VI).



чем инкремент неустойчивости того же порядка, что и для несжимаемых цилиндров ( $\sim \omega_0$ ).

Однако физические причины неустойчивости в том и другом случае совершенно разные. Неустойчивость несжимаемого цилиндра есть отражение естественной тенденции жидкой гравитирующей массы к разбиению на почти сферические сгустки. Для системы оказывается энергетически выгодным искривление границы. Как показал Чандрасекар [186], изменение гравитационной потенциальной энергии  $\Delta W$  при деформации цилиндра является отрицательным как раз для тех мод, для которых цилиндр неустойчив согласно уравнению (2). Оказывается, что

$$\Delta W = \text{const } \varepsilon^2 [K_m(k_z R) I_m(k_z R) - 1/2], \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — амплитуда деформации границы (при  $r=R$ ), откуда и следует эквивалентность условий  $\omega^2 < 0$  и  $\Delta W < 0$  (энергетический принцип).

В случае бесстолкновительного цилиндра гравитационная энергия освобождается в основном при сжатии, изменяющем локальную плотность вещества (при  $k_z R \ll 1$ ). Можно показать, что для рассматриваемых мод вклад в возмущение потенциала от деформации границы  $\xi$ , приблизительно в  $\beta = \ln(1/k_z R)$  раз меньше вклада от локальной плотности  $\rho_1$ .

В случае бесстолкновительных цилиндров при  $k_z \neq 0$  мод «несжимаемого» типа, вообще говоря, не существует. Например, для холодного в плоскости вращения цилиндра их наличие означало бы (при  $m=0$ ) согласно § 2

$$1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - 4\Omega_0^2} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0, \quad (4)$$

т. е. условие, заведомо невыполнимое.

**Возмущения желобкового типа** ( $k_z=0$ ). Относительно возмущений с  $k_z=0$  несжимаемые цилиндры устойчивы при  $\Omega_0^2 < 2\pi G \rho_0$ <sup>1</sup>. Более быстро вращающиеся цилиндры неустойчивы. Физическая причина неустойчивости несжимаемого цилиндра заключается в уменьшении эффективной «силы тяжести» на его поверхности при увеличении скорости вращения, причем этот эффект оказывается сильнее, чем стабилизация за счет сохранения углового момента частиц вокруг оси  $z$  [13].

Частота колебаний в системе координат, вращающейся вместе с цилиндром, дается выражением

$$(\omega + \Omega_0)^2 = (m-1) (2\pi G \rho_0 - \Omega_0^2). \quad (5)$$

В частности, в предельном случае  $\Omega_0^2 = 2\pi G \rho_0$  (т. е. для холодного цилиндра: равновесное давление равно нулю) из (5) получаем универсальную частоту

$$\omega = -\Omega_0 \text{ (для всех } m), \quad (6)$$

она совпадает с частотой для аналогичных колебаний бесстолкновительного цилиндра (§ 3). Это не является неожиданным, если учесть тождественность равновесных состояний в двух рассматриваемых случаях и тот факт, что возмущения такого типа имеют «несжимаемый» характер ( $\rho_1=0$ ) и для бесстолкновительного цилиндра.

Разумеется, спектр частот колебаний бесстолкновительного цилиндра значительно сложнее, чем у несжимаемого (вообще любого жидкого) цилиндра. Он состоит из бесконечного числа ветвей, что является отражением наличия дополнительных степеней свободы, связанных с распределением частиц в пространстве скоростей. Эти ветви можно в прин-

<sup>1</sup> Впрочем, при  $\Omega_0^2 > 2\pi G \rho_0$  само равновесие цилиндра может осуществляться лишь за счет отрицательного давления.

ципе восстановить, исходя из частот колебаний горячего цилиндра в плоскости вращения ( $k_z=0$ ) и продолжая их в область  $k_z \neq 0$ . Характеристическое уравнение (10) § 3 содержит «окончания» (предельные частоты при  $k_z \rightarrow 0$ ) всех ветвей, кроме одной (джинсовской) ветви, которой соответствует при  $k_z \rightarrow 0$   $\omega \rightarrow 0$ .

Обращает на себя внимание довольно близкая аналогия между картинками спектров колебаний бесстолкновительного цилиндра и рассмотренной ранее модели однородного плоского слоя. Аналогичным образом определяются, в частности, тепловые ( $\sim k_z^2 v_T^2$ ) поправки к частотам желобковых колебаний цилиндра (см. задачу 1 к главе I).

## § 6. ЖЕЛОБКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ ЧАСТИЦ

Колебания неоднородного цилиндра с круговыми орбитами частиц (в плоскости вращения  $x, y$ ) описываются уравнением (66) § 2. Мы будем интересоваться ниже возмущениями желобкового типа ( $k_z=0$ ), для которых получается уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \varepsilon_{\perp} \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \varepsilon_{\perp} \frac{m^2}{r^2} \Phi_1 - \frac{2ml}{r} \Phi_1 = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2 - \kappa^2}, \quad I = \frac{1}{\omega_*} \frac{d}{dr} \left( \frac{\omega_0^2 \Omega}{\omega_*^2 - \kappa^2} \right), \quad (2)$$

$$\omega_0^2 \equiv 4\pi G \rho_0(r); \quad \omega_* \equiv \omega - m\Omega(r); \quad \kappa^2 = 4\Omega^2 + r(\Omega^2)'. \quad (3)$$

Если рассматривается ограниченный в плоскости ( $x, y$ ) цилиндр радиуса  $R$ , то к уравнению (1) нужно еще добавить граничные условия

$$\varepsilon_{\perp} \frac{d\Phi_{1<}}{dr} \Big|_R - \frac{2m}{R\omega} \frac{\omega_0^2 \Omega \Phi_{1<}}{\omega_*^2 - \kappa^2} \Big|_R = \frac{d\Phi_{1>}}{dr} \Big|_R, \quad (4)$$

$$\Phi_{1<} \Big|_R = \Phi_{1>} \Big|_R, \quad (5)$$

которые связывают внутренний  $\Phi_{1<}$  и внешний (вакуумный)  $\Phi_{1>}$  потенциалы. Последний является, очевидно, решением уравнения Лапласа

$$\Phi_{1>}(r) = \text{const } r^{-m}, \quad (6)$$

где const определяется величиной «мультипольного момента», создаваемого перераспределением массы цилиндра вследствие возмущения (а также искривлением границы). Если плотность  $\rho_0(r)$  обращается в нуль при  $r \rightarrow R$  плавно (без скачка), то (4) сводится просто к требованию непрерывности производной потенциала на границе  $d\Phi_{1<}/dr = d\Phi_{1>}/dr$ .

В предельном случае однородного цилиндра получим вместо (1)–(5)

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \Delta \Phi_1 = 0, \quad \varepsilon_{\perp}^{(0)} = 1 + \frac{2\Omega}{(\omega - m\Omega_0)^2 - 4\Omega_0^2}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \frac{d\Phi_{1<}}{dr} \Big|_R - \frac{4m}{R(\omega - m\Omega_0)} \frac{\Omega_0^2 \Phi_{1<}}{(\omega - m\Omega_0)^2 - 4\Omega_0^2} \Big|_R = \frac{d\Phi_{1>}}{dr}, \quad (8)$$

$$\Phi_{1<} \Big|_R = \Phi_{1>} \Big|_R. \quad (9)$$

Имеются, как мы знаем, решения уравнения (7) двух типов, которые можно назвать «внутренними» и «поверхностными». Для первых

$$\Delta \Phi_1 \neq 0, \quad \varepsilon_{\perp}^{(0)} = 0,$$

так что

$$\omega_*^2 \equiv (\omega - m\Omega_0)^2 = 2\Omega_0^2. \quad (10)$$

Граничным условиям (8), (9) в этом случае можно удовлетворить, потребовав, чтобы создаваемый возмущением «мультипольный момент» был равен нулю. Для этого достаточно, например, выполнения условий

$$\int r^m \rho_1(r) dr = \int r^m \Delta \Phi_{1<} dr = 0; \quad \left. \frac{d\Phi_{1<}}{dr} \right|_R = \Phi_{1<}|_R = 0. \quad (11)$$

При этом

$$\Phi_{1>}(r) \equiv 0, \quad (12)$$

и граничные условия (8), (9) удовлетворяются тривиально. Для «поверхностных» возмущений

$$\Delta \Phi_{1<} \equiv \Delta \Phi_{1>} = 0, \quad (13)$$

$$\Phi_{1<} = ar^m, \quad \Phi_{1>} = br^{-m}, \quad (14)$$

и условия (8), (9) дают

$$\frac{2(\omega + \Omega_0)^2}{\omega(\omega + 2\Omega_0)} = 0, \quad (15)$$

т. е. известный уже нам результат — кратный корень  $\omega = -\Omega_0$ .

В связи с решениями для однородного цилиндра сделаем два замечания.

1. Выбор радиальной зависимости собственных функций для возмущений первого типа («внутренних»), как мы видели, почти произволен. В частности, они могут быть локализованы в сколь угодно узких по радиусу областях  $\Delta r$  вблизи произвольных  $r = r_0$ .

В то же время «поверхностные» решения локализованы (вблизи от поверхности  $r = R$ ) только для гармоник с достаточно большими азимутальными числами  $m$ . «Поверхностные» моды с  $m \sim 1$  всегда являются крупномасштабными: возмущение охватывает всю систему целиком.

2. Для радиальных возмущений ( $m = 0$ ) возможны только решения первого типа. Рассмотрим теперь последовательно радиальные и нерадиальные колебания неоднородного цилиндра.

Радиальные колебания описываются весьма простым уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \varepsilon_{\perp} \frac{d\Phi_1}{dr} \right) = 0, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{\omega^2 - \kappa_1^2}{\omega^2 - \kappa^2}, \quad \kappa_1^2 \equiv \kappa^2 - \omega_0^2 = 2\Omega^2(r). \quad (16)$$

Решения этого уравнения таковы:

$$\frac{d\Phi_1}{dr} = \text{const } \delta [\omega^2 - 2\Omega^2(r)]. \quad (17)$$

Они нетривиальны в случае, когда частоты  $\omega$  заключены в интервале

$$\sqrt{2}\Omega_{\min} < |\omega| < \sqrt{2}\Omega_{\max}, \quad (18)$$

где  $\Omega_{\min}$ ,  $\Omega_{\max}$  — соответственно минимальная и максимальная угловые скорости частиц в дифференциально-вращающемся цилиндре.

Пусть, например,  $\omega = \sqrt{2}\Omega(r_0)$ , тогда гравитационная сила

$$\frac{d\Phi_1}{dr} = \text{const } \delta(r - r_0), \quad (19)$$

а возмущенная плотность

$$\rho_1 \sim C_1 \delta'(r - r_0). \quad (20)$$

Это решение описывает, очевидно, колебания бесконечно тонкого слоя  $r=r_0$ , причем все остальные слои цилиндра покоятся (или, можно сказать иначе, амплитуда их колебаний равна нулю). Выбор  $r_0$  внутри цилиндра произволен, любому конкретному  $r_0$  соответствует решение описанного типа, т. е. колебания соответствующего слоя со «своей» частотой  $\sqrt{2\Omega_0}$ .

Такие решения образуют полный набор: непосредственно из уравнения (16) легко доказать, что никаких разумных *несингулярных* решений, которые отвечали бы колебаниям всей системы как целого (а не отдельных слоев), не существует.

**Нерадиальные колебания** должны удовлетворять существенно более сложному уравнению (1) и граничным условиям (4), (5).

В этом случае, как мы увидим, имеются решения двух типов: «глобальные», охватывающие всю систему, и «локальные», которые сосредоточены вблизи от произвольной точки  $r=r_0$ . «Глобальные» возмущения в пределе однородного цилиндра превращаются в «поверхностные» моды, которые не возмущают локальную плотность  $\rho_1$ . Эти колебания не имеют аналогии в рассмотренном выше случае радиальных колебаний.

«Локальные» возмущения при  $\rho_0 \rightarrow \text{const}$  переходят во «внутренние» моды. Существование «локальных» возмущений здесь не является заранее очевидным, поскольку при  $m \neq 0$  возмущение в каком-то выбранном слое оказывает влияние на все остальные слои (в противоположность случаю радиальных колебаний). Отсюда следует, что, во всяком случае, такие локализованные возмущения, если они вообще существуют, должны быть сингулярными, чтобы можно было пренебречь возмущением всей массы цилиндра, кроме сосредоточенной в выбранном тонком слое. Это условие действительно выполняется, хотя характер сингулярности при  $m \neq 0$  и отличается от  $\delta$ -образного (как при  $m=0$ ).

Перейдем к непосредственному анализу уравнения (1). Заметим прежде всего, что величину  $\varepsilon_{\perp}$  можно представить в виде  $\varepsilon_{\perp} = \frac{\omega_*^2 - 2\Omega^2}{\omega_*^2 - \kappa^2}$ , поскольку

из условия равновесия следует, что  $\kappa^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2$ . Выполнив дифференцирование в уравнении (1) и умножив его на  $\omega_*$  ( $\omega_*^2 - 2\Omega^2$ ) ( $\omega_*^2 - \kappa^2$ ), перепишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} & \omega_* (\omega_*^2 - 2\Omega^2) (\omega_*^2 - \kappa^2) \Phi_1'' + \\ & + \left\{ \omega_* (\omega_*^2 - 2\Omega^2) (\omega_*^2 - \kappa^2) \frac{1}{r} - \omega_* (\omega_*^2 - \kappa^2) (2m\Omega' \omega_* + 4\Omega\Omega') + \right. \\ & + \left. \omega_* (\omega_*^2 - 2\Omega^2) (2\kappa\kappa' + 2m\Omega' \omega_*) \right\} \Phi_1' - \\ & - \left\{ \omega_* (\omega_*^2 - 2\Omega^2) (\omega_*^2 - \kappa^2) \frac{m^2}{r^2} + \frac{2m}{r} (\omega_*^2 - \kappa^2) (\omega_0^2 \Omega)' + \right. \\ & + \left. \frac{2m}{r} \omega_0^2 \Omega (2\kappa\kappa' + 2m\Omega' \omega_*) \right\} \Phi_1 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Представленное в такой форме исходное уравнение не содержит зависящих от частоты знаменателей. Соответствующее (21) локальное дисперсионное соотношение получаем, приравнявая нулю коэффициент при старшей производной.

Имеем согласно (21) три возможности:

$$1) \omega_*^2 = 0, \quad \text{т. е. } \omega = m\Omega(r), \quad (22)$$

$$2) \omega_*^2 = 2\Omega^2, \quad \text{т. е. } \omega = m\Omega(r) \pm \sqrt{2}\Omega(r), \quad (23)$$

$$3) \omega_*^2 = \kappa^2, \quad \text{т. е. } \omega = m\Omega(r) \pm \kappa(r). \quad (24)$$

Последняя из этих возможностей, очевидно, отвечает таким колебаниям, при которых не происходит возмущения плотности и потенциала, так что отдельные частицы колеблются независимо от других (см. § 1). Изучать такие колебания на основе уравнения (1) (или эквивалентного ему уравнения (21)) было бы и формально некорректно, так как при выводе этого уравнения мы должны были, выражая скорости  $v_{r_1}$  и  $v_{\varphi_1}$  через потенциал  $\Phi_1$ , делить на  $(\omega_*^2 - \kappa^2)$ .

Две другие возможности соответствуют *коллективным* колебаниям системы. Уравнения (22) и (23) определяют три области непрерывного спектра колебаний рассматриваемой системы:

$$\omega = m\Omega(r), \quad m\Omega_{\min} < \omega < m\Omega_{\max}, \quad (25)$$

$$\omega = (m + \sqrt{2})\Omega(r), \quad (m + \sqrt{2})\Omega_{\min} < \omega < (m + \sqrt{2})\Omega_{\max}, \quad (26)$$

$$\omega = (m - \sqrt{2})\Omega(r), \quad (m - \sqrt{2})\Omega_{\min} < \omega < (m - \sqrt{2})\Omega_{\max}, \quad (27)$$

из которых первая существует только в случае неаксиально-симметричных колебаний ( $m \neq 0$ ).

Такое количество частот находится в согласии с элементарно определяемым числом степеней свободы при колебаниях отдельного слоя. Действительно, вообще говоря (для  $m \neq 0$ ), движение полностью определяется, если задать (в начальный момент) три независимые амплитуды: скоростей  $v_{r_1}$  и  $v_{\varphi_1}$  и плотности  $\rho_1$  (или потенциала  $\Phi_1$ ;  $\rho_1$  и  $\Phi_1$  связаны уравнением Пуассона). При аксиально-симметричных возмущениях число степеней свободы уменьшается на единицу вследствие сохранения углового момента частиц при таких возмущениях.

Исследуя обычным образом поведение решений вблизи особенности  $r \approx r_0$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &\approx c_1(r - r_0), \\ \Phi_1^{(2)} &\approx c_2 + c_3(r - r_0) \ln |r - r_0| \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{в случае (25),} \\ \omega = m\Omega(r_0), \end{array} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{(1)} &\approx c'_1, \\ \Phi_1^{(2)} &\approx c'_2 \ln |r - r_0|, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{в случае (26, 27),} \\ \omega = (m \pm \sqrt{2})\Omega(r_0), \end{array} \quad (29)$$

где  $c_1, c_2, c_3; c'_1, c'_2$  обозначают константы. Собственные функции, соответствующие частотам непрерывного спектра (25)–(27), оказались, как и следовало ожидать, сингулярными<sup>4</sup>.

Во всех случаях, когда имеется подозрение на существование непрерывного спектра частот (что обычно сопряжено с сингулярностью собственных функций, как в рассматриваемой задаче), более естественным представляется другой подход, заключающийся в решении задачи об эволюции во времени гладких начальных возмущений [184]. Будем интересоваться возмущениями, локализованными вблизи от какой-либо фиксированной точки  $r_0$ , причем сначала пусть будет

$$\omega - m\Omega(r_0) = \sqrt{2}\Omega(r_0). \quad (30)$$

Рассматриваемая нами система довольно проста, и поставленную задачу можно решать разными способами [128, 129, 184]. Однако особенной простотой отличается способ, предложенный в [79] для решения подобных задач в теории неустойчивостей плазмы. Разложим все величины, входящие в коэффициенты уравнения (21), по малому  $x \equiv (r - r_0)$  и

<sup>4</sup> Вопрос о существовании *несингулярных* решений уравнения (1) «внутреннего» типа (принадлежащих *дискретному* спектру) остается открытым.

ограничимся всюду только главными членами. Тогда получим

$$[\omega - (m + \sqrt{2})\Omega(r_0) + ax]\Phi'' + b\Phi' + c\Phi = 0, \quad (31)$$

где введены обозначения

$$a = -(m + \sqrt{2})\Omega'(r_0), \quad b = \left. \frac{2m\Omega'\omega_* + 4\Omega\Omega'}{\omega_* + \Omega\sqrt{2}} \right|_{r=r_0} = (m + \sqrt{2})\Omega'(r_0) = -a,$$

$$c = \left. \frac{m\omega_0^2 \left[ \frac{(\omega_0^2\Omega)'}{\omega_0^2\Omega} - \frac{(x^2)'}{2\Omega^2 + r(\Omega^2)'} \right]}{2r_0\Omega} \right|_{r=r_0},$$

$\Phi' = \partial\Phi/\partial x$ ,  $\Phi'' = \partial^2\Phi/\partial x^2$ . Заменяя  $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$ ,  $\Phi_1 \rightarrow \chi e^{-i(m+\sqrt{2})\Omega(r_0)t}$ , приходим к уравнению

$$i \frac{\partial \chi''}{\partial t} + ax\chi'' + b\chi' + c\chi = 0. \quad (32)$$

Решим это уравнение для начального возмущения, которое в интересующей нас узкой области  $\Delta x = \Delta r$  вблизи от точки  $r = r_0$  ( $x = 0$ ) (где достаточно ограничиться в разложениях невозмущенных величин первыми членами) можно представить в виде

$$\chi(t=0) = e^{ik_0 x}, \quad (33)$$

причем будем считать, что  $k_0 \Delta r \gg 1$ .

Решение можно искать в следующей форме:

$$\chi(x, t) = e^{ik(t)x} \psi(t), \quad (34)$$

где  $k(t)$  и  $\psi(t)$  — две неизвестные функции. Подставляя (34) в (32), легко найдем

$$\chi(x, t) = \left(1 + \frac{at}{k_0}\right)^{(b/a-2)} \cdot \exp \left\{ i(k_0 + at)x + \frac{ic}{a} \left[ \frac{1}{at + k_0} - \frac{1}{k_0} \right] \right\}. \quad (35)$$

В данном случае  $b/a = -1$ ; поэтому, например, асимптотическое (при больших  $t$ ) решение можно с учетом сделанной выше замены  $\Phi_1 \rightarrow \chi$  и определения  $a$  представить в виде

$$\Phi_1(r, t) = \text{const} \cdot \frac{1}{t^2} \exp \{ -i\omega(r)t \}, \quad (36)$$

$$\omega(r) = m\Omega(r) + \sqrt{2}\Omega(r).$$

Эта формула наглядно демонстрирует и само существование непрерывного спектра частот  $\omega_* = \sqrt{2}\Omega(r)$ .

Нетрудно получить решения уравнения (32) и для других типов начальных возмущений (таких, например, как гауссов пакет вида  $\exp[-x^2/(\Delta r)^2]$ ) [79]. Мы не станем, однако, выписывать соответствующие решения, так как качественная картина развития возмущений вполне понятна уже из простейшего решения, полученного выше.

Аналогичным образом можно найти и решения для  $\omega_* \approx 0$  ( $\omega = m\Omega(r_0)$ ), локализованные вблизи от точки  $r = r_0$ . Легко видеть, что в этом случае задача вновь сводится к уравнению типа (32), но с  $b = 0$  и несколькими другими коэффициентами  $a$ ,  $c$ . Соответственно на асимптотике ( $t \rightarrow \infty$ ) тогда получается

$$\Phi(r, t) \approx \text{const} \cdot \frac{1}{t^2} \exp \{ -i\omega(r)t \}, \quad (37)$$

$$\omega(r) = m\Omega(r),$$

т. е. эти возмущения затухают несколько медленнее, чем рассмотренные ранее.

«Глобальные» колебания неоднородного цилиндра в явном виде легко найти в двух случаях: для почти однородного цилиндра (когда  $|\rho(R) - \rho(0)|/\rho(r) \ll 1$ ) и для «поверхностных» возмущений с  $m \gg 1$  (которые сосредоточиваются вблизи от  $r=R$ ).

Рассмотрим, например, первый случай. Примем линейный закон спада плотности

$$\rho(r) = \rho_0(1 - \varepsilon' r) \quad (R=1, \varepsilon' \ll 1). \quad (38)$$

Тогда легко получить

$$\Omega^2 = 1 - \varepsilon r, \quad \varepsilon \equiv 2/3\varepsilon'; \quad 2\pi G\rho_0 = 1, \quad (39)$$

$$\omega_0^2 = 2 - 3\varepsilon r, \quad \kappa_1^2 \equiv 2\Omega^2 = 2 - 2\varepsilon r, \quad \kappa^2 = 4 - 5\varepsilon r. \quad (40)$$

Разложим также входящие в уравнение (1) величины  $\varepsilon_{\perp}$  и  $I$ :

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}^{(0)} + \varepsilon r \varepsilon_{\perp}^{(1)}, \quad (41)$$

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} = \frac{\omega_m^2 - 2}{\omega_m^2 - 4}, \quad \varepsilon_{\perp}^{(1)} = \frac{\omega_m^2 - 2}{\omega_m^2 - 4} \left[ \frac{m\omega_m + 2}{\omega_m^2 - 2} - \frac{m\omega_m + 5}{\omega_m^2 - 4} \right], \quad (42)$$

$$I = \varepsilon I^{(1)}, \quad (43)$$

$$I^{(1)} = -\frac{2}{\omega_m(\omega_m^2 - 4)} \left[ 2 + \frac{m\omega_m + 5}{\omega_m^2 - 4} \right], \quad (44)$$

где  $\omega_m \equiv \omega - m$ . Подставляя (41)–(44) в уравнение (1), приводим его к виду

$$\varepsilon_{\perp}^{(0)} \Delta \Phi_1 + \varepsilon \left[ \varepsilon_{\perp}^{(1)} \Phi_1' + 2m I^{(1)} \frac{\Phi_1}{r} \right] = 0. \quad (45)$$

«Глобальные» решения можно искать в виде

$$\Phi_{1<} = ar^m + \varepsilon \psi + \dots \quad (46)$$

Для функции  $\psi(r)$  получается уравнение

$$\Delta \psi + (2m + 1) amr^{m-1} = 0, \quad (47)$$

решение которого

$$\psi = -amr^{m+1} (+ cr^m). \quad (48)$$

Можно определить и поправку к частоте  $\omega = -1$ , но для этого нужно разложить величины, входящие в уравнение (1), с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$ :  $(\omega + 1)^2 = \alpha_1 \varepsilon^2 + \dots$ ,  $\alpha_1 = \text{const} > 0$ .

## ЗАДАЧИ

1. Найти приближенное дисперсионное уравнение и определить границу устойчивости для крупномасштабных ( $k_{\perp} R \ll 1$ ) аксиально-симметричных возмущений неоднородного в плоскости  $(x, y)$  бесстолкновительного цилиндра (Антонов, Нежинский [10]).

Решение. Согласно формуле (3) § 2 поверхности постоянного значения возмущенной плотности  $\rho_1 = \text{const}$  (как и эквипотенциальные поверхности  $\Phi_1 = \text{const}$ ) при  $k_{\perp} R \ll 1$  становятся плоскостями, параллельными плоскости  $(x, y)$ . Можно предположить, что и в общем случае неоднородного (и горячего) в плоскости  $x, y$  цилиндра будут существовать подобные возмущения. Для их рассмотрения естественно принять следующую модель. Частицы с одинаковыми значениями коор-

динаты  $z$  и скорости  $v_z$  условно сгруппируем в диски. Будем считать эти диски «жесткими», т. е. предположим, что и в возмущенном состоянии они движутся как целое. Тепловые скорости частиц в плоскости  $(x, y)$  в этой модели учитываются косвенно тем, что диску приписывается распределение поверхностной плотности, совпадающее с распределением объемной плотности  $\rho_0(r)$  в исходной стационарной модели. Предполагаем, что диски все время остаются ориентированными параллельно плоскости  $(x, y)$  и свободно проходят один сквозь другой.

Функция распределения «жестких» дисков  $f(z, v_z)$  удовлетворяет одномерному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (1)$$

Будем нормировать  $f$  на единицу:

$$\int f dv_z = 1. \quad (2)$$

Линеаризованное кинетическое уравнение можно записать в виде ( $v_z \equiv v$ )

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial z} + \varphi \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (3)$$

где введено обозначение  $\varphi$  для возмущенной силы:

$$\varphi = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{1}{M} \int \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1 - z) f_1(z_1, v_1, t) dv_1 dz_1. \quad (4)$$

$F(z_1 - z)$  есть сила, с которой диск с координатой  $z_1$  притягивает другой диск (имеющий координату  $z$ );  $M$  — масса диска.

Подставляя  $f_1(z, v, t) = \tilde{f}(v) e^{-i\omega t + ikz}$  и вводя вместо  $z_1$  новую переменную интегрирования  $\xi \equiv z_1 - z$ , получим

$$-i\tilde{f}(v)(\omega - kv) + \frac{1}{M} \frac{\partial f_0}{\partial v} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{ik\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(v_1) dv_1 = 0. \quad (5)$$

Отсюда находим амплитуду возмущенной функции распределения  $\tilde{f}(v)$ :

$$\tilde{f}(v) = \frac{2}{M} \frac{\partial f_0 / \partial v}{(\omega - kv)} \int_0^{\infty} F(\xi) \sin k\xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(v_1) dv_1, \quad (6)$$

где учтено, что функция  $F(\xi)$  по своему физическому смыслу нечетна.

Интегрируя (6) по  $v$  и сокращая в получившемся равенстве на  $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(v) dv$ ,

придем к дисперсионному уравнению

$$1 - \frac{2}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv} dv \int_0^{\infty} F(\xi) \sin k\xi d\xi. \quad (7)$$

Граница устойчивости определяется условием  $\omega = 0$ , что дает уравнение

$$1 + \frac{2}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v}{kv} dv \int_0^{\infty} F(\xi) \sin k\xi d\xi = 0. \quad (8)$$



Примем максвелловскую функцию распределения по продольным скоростям

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_T} e^{-v^2/v_T^2} \quad (9)$$

Тогда (8) приводится к следующему виду:

$$v_T^2/4 = \frac{1}{kM} \int_0^\infty F(\xi) \sin k\xi d\xi \quad (10)$$

Это уравнение определяет критическую дисперсию скоростей  $v_{Ткр}$  для каждого значения волнового числа  $k$ :  $v_{Ткр} = v_{Ткр}(k)$  или, наоборот, критическое волновое число  $k_{кр}$  для заданной дисперсии:  $k_{кр} = k_{кр}(v_T)$ .

Вычислим силу  $F(\xi)$  для заданной плотности  $\rho_0 = \rho_0(r)$ :

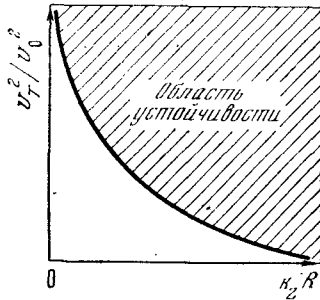
$$F(\xi) = G \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \frac{\xi \rho_0(\sqrt{x^2+y^2}) \rho_0(\sqrt{x_1^2+y_1^2}) dx dy dx_1 dy_1}{[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + \xi^2]^{3/2}} \quad (11)$$

Вставляя (11) в (10) (изменив порядок интегрирования и выполнив интегрирование по  $\xi$ ), получим

$$v_{Ткр}^2 = \frac{4G}{M} \iiint K_0(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} k) \rho_0(\sqrt{x^2+y^2}) \times \\ \times \rho_0(\sqrt{x_1^2+y_1^2}) dx dy dx_1 dy_1, \quad (12)$$

где  $K_0(z)$  — функция Макдональда. Учитывая, что  $K_0(z)$  есть положительная и монотонно убывающая функция, заключаем, что выражение в правой части (12) положительно и монотонно убывает с ростом  $k$ .

Рис. 11. Качественное представление границы между областями устойчивости (над кривой) и неустойчивости (под кривой) для произвольных бесстолкновительных цилиндров [10]



При  $k \rightarrow 0$   $v_{Ткр}^2 \rightarrow \infty$ , так как  $K_0(\alpha k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 0$ . С другой стороны,  $v_{Ткр}^2 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , поскольку  $K_0(\alpha k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Приведенных сведений достаточно, чтобы представить качественно зависимость  $v_{Ткр}^2(k)$  (рис. 11).

Рассмотрим подробнее вопрос о длинноволновой неустойчивости цилиндра. Считая, что в (12)  $k \rightarrow 0$ ,  $v_T^2 \rightarrow \infty$ , получим

$$v_T^2 \approx -\frac{2G}{M} \iiint \left\{ \frac{1}{2} \ln [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] + \ln \frac{k}{2} + C \right\} \rho_0(\sqrt{x^2+y^2}) \times \\ \times \rho_0(\sqrt{x_1^2+y_1^2}) dx dy dx_1 dy_1,$$

или

$$v_T^2 \approx -\frac{2}{M} \iint \rho_0(r) \Phi_0 dx dy - GM \left( \ln \frac{k}{2} + C \right), \quad (13)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $\Phi_0$  — логарифмический потенциал, соответствующий диску с плотностью  $\rho_0(r)$ . Вводя эффективный радиус  $R_e$  согласно

$$\iint \rho_0 \Phi_0 dx dy = 2GM^2 \ln R_e, \quad (14)$$

будем иметь из (13)

$$k \sim \frac{2}{R_e} e^{-v_T^2/4GM-C}, \quad (15)$$

или

$$\lambda \sim \pi R_e e^{v_T^2/4GM+C}. \quad (16)$$

Если, кроме того, ввести величину  $\sigma_1^2$  по формуле

$$\sigma_1^2 = \frac{\iiint (v_x^2 + v_y^2) f_0 dx dy dv_x dv_y}{M}, \quad (17)$$

то, как можно показать, формула (16) примет вид

$$\lambda \sim \pi R_e e^{v_T^2/4\sigma_1^2+C}. \quad (18)$$

Для невращающегося диска  $\sigma_1^2$  есть, очевидно, средняя дисперсия скоростей частиц в плоскости  $x, y$ . В случае холодного вращающегося диска  $\sigma_1^2$  легко связать со средней скоростью вращения  $v_{0\phi}$ .

В частном случае однородного цилиндра  $\rho(r) = \rho_0 = \text{const}$  (12) сводится, как показано в [10], к следующему уравнению:

$$v_T^2 = \frac{8\pi^2 G \rho_0^2 R^2}{kM} [1 - 2I_1(kR) K_1(kR)] \quad (R_e = R e^{-1/4}). \quad (19)$$

Сравнивая (19) с результатами точного рассмотрения устойчивости этой модели в § 2, можно убедиться в том, что изложенный выше приближенный метод действительно приводит к качественно верным выводам при  $k_1 R \ll 1$ ,  $k_2 R \ll 1$  (начало нижней джинсовской ветви на рис. 7).

В работе [10] границы устойчивости найдены также для некоторых других законов распределения плотности в цилиндре:  $\rho = \rho_0 e^{-r^2/a^2}$ ,  $\rho = \rho_0 (a^2 + r^2)^{-3/2}$ .

Заметим в заключение, что описанным методом можно исследовать и крупномасштабные (по направлению  $z$ , рис. 2,  $k_z c \ll 1$ ) возмущения плоского слоя.

2. Методом вариации фазового объема (глава I, § 5) вывести дисперсионное уравнение для поверхностных колебаний желобкового типа ( $\rho_1 \equiv 0$ ,  $k_z \equiv 0$ ) однородного цилиндра с функцией распределения (2) § 1.

Решение. Необходимая для вывода дисперсионного уравнения теория возмущений приведена в начале § 4. В общем случае возмущенный потенциал внутри цилиндра (§ 3)

$$\Phi_1^{(n,m)} \propto r^{2n+m} e^{im\phi}. \quad (1)$$

Решение кинетического уравнения  $d\chi/dt = 2d\Phi_1/dt + 2i\omega\Phi_1$  методом «интегрирования по траекториям» запишется в виде ( $\chi$ ,  $\Phi_1 \sim e^{-i\omega t}$ ):

$$\chi(r, v_r, v_\phi) e^{im\phi} \propto 2e^{im\phi} \left\{ r^{2n+m} + i\omega \int_{-\infty}^0 r'^{2n+m} e^{im\phi'} e^{-i\omega t'} dt' \right\}, \quad (2)$$

причем функции  $r'(t')$  и  $r'(t')e^{i\Phi'(t')}$  (траектория частицы во вращающейся со скоростью  $\gamma$  системе) даются формулами

$$r'^2 = v^2 \sin^2 t' + \gamma^2 r^2 + r^2 (1 - \gamma^2) \cos^2 t' + r v_r \sin 2t' + 2\gamma r v_\phi \sin^2 t', \quad (3)$$

$$r' e^{i\Phi'} = \frac{1}{2} \{ e^{-i(1+\gamma)t'} [r(1-\gamma) - (v_\phi - i v_r)] + e^{i(1-\gamma)t'} [r(1+\gamma) + (v_\phi - i v_r)] \}. \quad (4)$$

Интеграл в (2) удобно вычислять, представив подынтегральное выражение следующим образом:

$$(r'^2)^n [r' e^{i\Phi'}]^m. \quad (5)$$

Для «поверхностных» возмущений, которыми мы будем интересоваться дальше, потенциал

$$\Phi_1^{(0,m)} \propto r^m e^{im\phi}. \quad (6)$$

Вычисления в этом случае особенно просты, и в результате дают компактное дисперсионное уравнение

$$2m = -\frac{1}{1-\gamma^2} \left\{ \frac{\omega}{2^{m-1}} \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{(1-\gamma)^k (1+\gamma)^{m-k}}{\omega - m(1-\gamma) + 2k} - 2 \right\}, \quad (7)$$

где  $C_m^k$  — число сочетаний. Полученное уравнение содержит только устойчивые решения. При  $\gamma \rightarrow 1$  отсюда находим

$$(\omega + 1)^2 = 0. \quad (8)$$

Соответствующая кратному корню (8) степенная неустойчивость [9] обязана тому, что орбиты предполагаются круговыми (и  $k_z = 0$ ). Сколь угодно малый тепловой разброс стабилизирует эту неустойчивость. Рассмотрим случай  $m=2$ . Из (7) имеем [112]

$$\omega^3 + 6\gamma\omega^2 + (12\gamma^2 - 3)\omega + 2\gamma(4\gamma^2 - 2) = 0. \quad (9)$$

Все корни этого уравнения различны. Условие действительности всех корней кубического уравнения дает  $\gamma^2 \leq 1$ , что всегда выполняется. Уравнение (8) получается и в гидродинамической модели несжимаемого цилиндра, когда давление полагается равным нулю. Хотя в [9] исследован только случай  $m=2$ , положение аналогично и для больших  $m$ .

3. Исходя непосредственно из дисперсионного уравнения (20) § 3, доказать устойчивость относительно мелкомасштабных возмущений желобкового типа ( $k_z = 0$ ) [14].

Решение. Вещественность собственных частот для возмущений, удовлетворяющих критерию

$$L \equiv (n+m-1)(n-1)(1-\gamma^2) \geq 2, \quad (1)$$

можно доказать следующим способом [14]. Интегралы по  $\phi$  в левой стороне уравнения (20) § 3 разлагаются по степеням  $e^\tau$  в ряды вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{n+m} \psi_1^{n-1} d\phi = \sum_{k=0}^N \beta_k e^{(2m-N)\tau}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^{n+m-1} \psi_1^n d\phi = \sum_{k=0}^N \beta'_k e^{(2m-N)\tau}. \quad (3)$$

В этих разложениях  $\tau$  может считаться произвольным комплексным числом. Дисперсионное уравнение с помощью (2), (3) приводится к форме (18) § 3 с

$$\gamma_k = \beta_k + \beta'_k. \quad (4)$$

Как мы знаем, для доказательства вещественности корней достаточно установить справедливость неравенства

$$\gamma_k \leq 1. \quad (5)$$

Мы докажем более сильные неравенства

$$\beta_k \leq 1/2, \beta'_k \leq 1/2. \quad (6)$$

Для этого нам понадобятся только чисто мнимые значения  $\tau = it$ . Обозначим левые части (2), (3) соответственно через  $F(t)$  и  $F'(t)$ . Исключая  $\psi_1$  с помощью тождества

$$\psi_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2} e^{-i\varphi} \operatorname{sh} \tau \psi}{\operatorname{ch} \tau - \gamma \operatorname{sh} \tau}, \quad (7)$$

раскладываем затем подынтегральные выражения по степеням  $e^{i\varphi}$  и вычисляем получающиеся интегралы. В результате находим

$$\frac{F(t)}{(\cos t - i\gamma \sin t)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n+m+k)! (n-1)!}{(k!)^2 (n-1-k)! (n+m)!} [(1-\gamma^2) \sin^2 t]^k, \quad (8)$$

$$\frac{F'(t)}{(\cos t - i\gamma \sin t)^{m+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+m-1+k)! n!}{(k!)^2 (n-k)! (n+m-1)!} [(1-\gamma^2) \sin^2 t]^k. \quad (9)$$

Вычислим теперь  $F(t)$  при значении  $t = t_1 \equiv \arcsin \sqrt{2/L}$  ( $L \geq 2$  по предположению)

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{(\cos t - i\gamma \sin t)^{m+1}} &= -\frac{m+3}{(n+m+1)(n-1)} + \\ &+ \sum_{k=3}^{n-1} \frac{(-1)^k (n+m+k)! (n-1)!}{(k!)^2 (n-1-k)! (n+m)!} \left[ \frac{2}{(n+m+1)(n-1)} \right]^k. \end{aligned} \quad (10)$$

Члены суммы  $\sum_{k=3}^{n-1}$  в (10) группируются в пары: за отрицательным следует положительный (или нуль — на конце суммы). Модуль их отношения меньше единицы:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2(n+m+1)(n-k-1)}{(k+1)^2 (n+m+1)(n-1)} \leq \frac{(n+m+k+1)(n-k-1)}{(n+m+1)(n-1)} \leq 1 \quad (k=3, 4, \dots). \quad (11)$$

Поэтому  $\sum_{k=3}^{n-1}$  в (10) отрицательна (первый член в  $\sum_{k=3}^{n-1}$  отрицателен). Следовательно, отрицательна и вся правая часть (8) при  $t = t_1$ . С другой стороны, при  $t = 0$  она равна 1. По непрерывности для некоторого промежуточного  $t = t_0$  должно быть  $F(t_0) = 0$ .

Отсюда следует, что  $\beta_k \leq 1/2$ . Действительно, возьмем равенство (2) при  $t = t_0$ . Умножая его на  $\exp i(N-2\nu)t_0$  с каким-то целочисленным  $\nu$  и выделяя с обеих сторон вещественные части, найдем

$$\operatorname{Re} \{F(t_0) \exp i(N-2\nu)t_0\} = \sum_{k=0}^N \beta_k \cos 2(k-\nu)t_0 \geq \beta_\nu - \sum_{k \neq \nu} \beta_k = 2\beta_\nu - 1. \quad (12)$$

Поскольку  $F(t_0) = 0$ , отсюда следует, что  $\beta_\nu \leq 1/2$ .

Доказательство неравенства  $\beta_k' \leq 1/2$  проводится совершенно аналогично, если начать с подстановки

$$t = \arcsin \sqrt{\frac{2}{(n+m)n(1-\gamma^2)}}$$

(которая допустима ввиду неравенства  $(n+m)n > (n+m+1)(n-1)$ , равносильного  $n > 1$ ).

4. Исследовать возможность резонансного влияния старших членов в полиномиальном разложении потенциала на младшие для желобковой моды с индексами  $n=1, m=2$  (§ 3) (Антонов [14]).

Решение. Такое влияние действительно существует (и приводит к степенному нарастанию возмущения). Это следует из факта пересечения ветвей  $\omega(\gamma)$ , лежащих в промежутке  $1 < \omega < 3$  для мод  $(n=1, m=2)$  и  $(n=0, m=2)$ . Необходимость пересечения можно показать следующим образом. Выпишем точные дисперсионные уравнения для указанных мод:

$$\frac{(2+\gamma)(1-\gamma)^2}{4[(\omega-3)^2-1]} + \frac{(2+3\gamma+3\gamma^2)(1-\gamma)}{4[(\omega-1)^2-1]} + \\ + \frac{(2-3\gamma+3\gamma^2)(1+\gamma)}{4[(\omega+1)^2-1]} + \frac{(2-\gamma)(1+\gamma)^2}{4[(\omega+3)^2-1]} + 1 = 0$$

для  $(n=1, m=2)$  и

$$\frac{1-\gamma}{2[(\omega-1)^2-1]} + \frac{1+\gamma}{2[(\omega+1)^2-1]} + 1 = 0$$

для  $(n=0, m=2)$ . Рассмотрим теперь  $\gamma$ , близкие к 1:  $\gamma = 1 - \delta$ ,  $\delta \ll 1$ . Тогда из написанных уравнений легко найдем

$$\text{для } (n=1, m=2): \quad \omega \equiv \omega_1 \approx 2 - (6/7)\delta,$$

$$\text{для } (n=0, m=2): \quad \omega \equiv \omega_2 \approx 2 - (2/9)\delta,$$

т. е. вблизи  $\gamma=1$   $\omega_1 < \omega_2$ . Но при  $\gamma \rightarrow 0$  мы имеем обратное неравенство:  $\omega_1 > \omega_2$ , поскольку  $\omega_1 \rightarrow 2$ , а  $\omega_2 \rightarrow \sqrt{3}$ . Поэтому в некоторой точке на отрезке  $0 \leq \gamma \leq 1$  должно произойти пересечение рассматриваемых ветвей.

5. Исследовать нелинейную устойчивость радиальных пульсаций бесстолкновительного цилиндра (§ 1 с сохранением однородности плотности (Антонов, Нуритдинов [12])).

Решение. Аналогичную задачу мы рассматривали в предыдущей главе (задача 3). Как и там, будем описывать деформацию цилиндра при помощи линейного преобразования

$$\mathbf{r} = \alpha(t)\mathbf{r}_0 + \beta(t)\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v} = \dot{\alpha}(t)\mathbf{r}_0 + \dot{\beta}(t)\mathbf{v}_0, \quad (1)$$

связывающего начальные  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  и текущие  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  лагранжевы координаты и скорости частиц. Исходную функцию распределения можно представить в виде

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi} \delta \{1 - \gamma^2 - r_0^2 - v_0^2 + 2\gamma[\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0]\}. \quad (2)$$

Обратив формулы преобразования (1) и подставляя в (2), будем иметь

$$f = \frac{\rho_0}{\pi} \delta \{1 - \gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2)r^2 - (\alpha^2 + \beta^2)v^2 + 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\mathbf{r}\mathbf{v} + 2\gamma[\mathbf{r}\mathbf{v}]\}, \quad (3)$$

где учтено, что якобиан преобразования (1) равен 1:

$$\alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta = 1. \quad (4)$$

Если проинтегрировать (3) по скоростям  $v$ , то получается плотность, зависящая только от времени (но не от пространственных координат):

$$\rho = \frac{\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (5)$$

Таким образом, преобразование (1) действительно сохраняет свойство однородности плотности. Теперь можно написать уравнение движения отдельной частицы в переменном потенциале

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} r^2, \quad (6)$$

соответствующем плотности (5):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\mathbf{r}}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (7)$$

С учетом (1) получаем следующие уравнения для  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ :

$$\ddot{\alpha} = - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \ddot{\beta} = - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (8)$$

Они формально совпадают с уравнениями движения частицы в центрально-симметричном потенциале  $U = \ln(\alpha^2 + \beta^2)/2$ , причем  $\alpha$  и  $\beta$  играют роль декартовых координат ( $\alpha \sim x$ ,  $\beta \sim y$ ) частицы в плоскости движения. В таком случае естественно перейти от  $\alpha$ ,  $\beta$  к соответствующим полярным координатам  $R$ ,  $\varphi$ :

$$R(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \text{tg } \varphi(t) = \beta/\alpha. \quad (9)$$

Легко понять, что  $R(t)$  представляет собой переменный внешний радиус цилиндра ( $R^2 \sim \rho^{-1}$ ). Изменение  $R$  происходит в соответствии с уравнением

$$\ddot{R} = - \frac{\partial U_{\text{эфф}}}{\partial R}, \quad (10)$$

где эффективная «потенциальная энергия»

$$U_{\text{эфф}} = \frac{1}{2R^2} + \ln R. \quad (11)$$

График  $U_{\text{эфф}}$ , представленный на рис. 12, показывает, что  $R(t)$  является периодической функцией времени при любом значении полной «энергии»

$$E \equiv \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{1}{2R^2} + \ln R. \quad (12)$$

Это означает устойчивость рассматриваемой моды, поскольку она полностью характеризуется одним параметром (в качестве которого мы можем принять радиус  $R$ ). Радиус колеблется между значениями  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  (на рис. 12 пары  $R_{\min}^{(1)}$ ,  $R_{\max}^{(1)}$  и  $R_{\min}^{(2)}$ ,  $R_{\max}^{(2)}$  отвечают эффективной энергии, равной  $E_1$  и  $E_2$  соответственно).

Заметим в заключение, что уравнение (10) является частным случаем (соответствующим  $\gamma=2$ ) уравнения

$$\ddot{R} = - \frac{1}{R} + R^{1-2\gamma}, \quad (13)$$

описывающего растяжения — сжатия однородного газового цилиндра с показателем адиабаты  $\gamma$ .

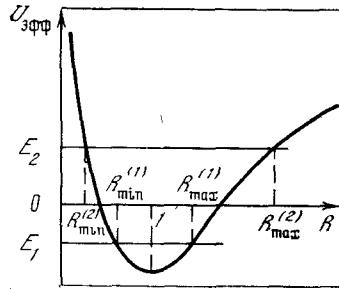
6. Рассмотреть нелинейную эволюцию возмущения: круговой цилиндр — эллиптический цилиндр. Система предполагается холодной в плоскости вращения  $x$ ,  $y$  (Антонов [9]).

Решение. Искомые «уравнения движения», выведем следующим способом. Допустим, что лагранжевы координаты частиц  $(x, y)$  линейно зависят от начальных координат  $x_0, y_0$  (т. е. ограничимся только возмущением такого типа):

$$x = \alpha(t)x_0 + \beta(t)y_0, \quad y = \gamma(t)x_0 + \delta(t)y_0. \quad (1)$$

Заметим, что линейная связь (1) сохраняется все время (если ей подчиняются начальные скорости), потому что преобразование (1) переводит однородный круговой цилиндр в однородный же эллиптический

Рис. 12. Эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{эфф}}(R)$  для радиальных колебаний цилиндра, при которых сохраняется пространственная однородность плотности



цилиндр, внутри которого напряженность поля выражается через координаты линейно. Найдем полуоси  $a(t)$  и  $b(t)$  эллипса в момент  $t$ . Поскольку  $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$ , то, выражая из (1)  $x_0$  и  $y_0$  через  $x$  и  $y$ , будем иметь

$$(\gamma^2 + \delta^2)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)xy = r_0^2(\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \quad (2)$$

Отсюда для  $a(t)$  и  $b(t)$  получим

$$a^2 + b^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)r_0^2, \quad ab = (\alpha\delta - \beta\gamma)r_0^2. \quad (3)$$

Вычисление гравитационной энергии на единицу длины эллиптического цилиндра не стандартно. Начнем с нахождения потенциала. Потенциал цилиндра легче всего получить, выполнив предельный переход  $c \rightarrow \infty$  в известном выражении для потенциала трехосного эллипсоида [148]:

$$\Phi_{<} = \pi G \rho_0 \left( \sum_{i=1}^3 A_i x_i^2 - I \right), \quad (4)$$

где  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ ,

$$A_i = abc \int_0^{\infty} \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)}, \quad (5)$$

$$I = abc \int_0^{\infty} \frac{du}{\Delta}, \quad (6)$$

$$\Delta \equiv \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}.$$

Промежуток интегрирования в формулах (5), (6) следует разбить на две области: 1)  $0 < u < c$ , 2)  $c < u < \infty$ . В первой можно разложить члены типа  $(c^2 + u)$ ,  $(c^2 + u)^{1/2}$  по малому отношению  $u/c^2$ , а во второй — выражения вида  $(a^2 + u)^{1/2}$ ,  $(b^2 + u)$  и т. п. раскладываются по малым отношениям  $a^2/u$ ,  $b^2/u$ . После этого интегралы сводятся к табличным, и мы получаем

$$\Phi_{<}^{(c)} \approx \frac{2GM}{a+b} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + 2GM \ln(a+b) - 2GM \ln 4c. \quad (7)$$

При  $c \rightarrow \infty$  потенциал расходуется и, следовательно, должен быть разумным образом «перенормирован». Это достигается изменением начала отсчета. Например, можно отсчитывать потенциал трехосного эллипсоида от уровня потенциала эллипсоида вращения с той же большой полуосью  $c_0 = c$ ;  $a_0 = b_0$ ;  $a_0 b_0 = ab$  (в пределе  $c \rightarrow \infty$  — от кругового цилиндра):

$$\Phi_{<} = \frac{2GM}{a+b} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + 2GM \ln \frac{a+b}{2a_0} - \frac{GM}{a_0^2} r^2. \quad (8)$$

Интегрируя (8) по эллиптическому сечению цилиндра, вычислим потенциальную энергию

$$U = GM^2 [\ln(a+b) + \text{const}] = \frac{\Omega^2 r_0^2 M}{4} \{ \ln(\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2 \} + \text{const}. \quad (9)$$

Не зависящие от  $a, b$  константы для дальнейшего несущественны. Поэтому интеграл действия выражается следующим образом:

$$S = \frac{Mr_0^2}{4} \int \left\{ \frac{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\delta}^2}{2} - \Omega^2 \ln [(\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2] \right\} dt.$$

Соответственно уравнения движения есть

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\delta} = -2\Omega^2(\alpha + \delta)q^{-1}, \quad \ddot{\beta} = -\ddot{\gamma} = -2\Omega^2(\beta - \gamma)q^{-1}, \quad (10)$$

где

$$q \equiv (\alpha + \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2 = \left( \frac{a+b}{r_0} \right)^2. \quad (11)$$

Из уравнений (10) прежде всего следует, что комбинации  $(\alpha - \delta)$  и  $(\beta + \gamma)$  суть произвольные линейные функции времени:

$$\alpha - \delta = C_1 t + C_2, \quad \beta + \gamma = C_3 t + C_4 \quad (12)$$

( $C_1, C_2, C_3, C_4$  — постоянные). Но, с другой стороны, согласно (3) через эти комбинации выражается разность полуосей  $(a-b)$ :

$$\frac{(a-b)^2}{r_0^2} = (\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2, \quad (13)$$

так что

$$\left( \frac{a-b}{r_0} \right)^2 = (C_1 t + C_2)^2 + (C_3 t + C_4)^2. \quad (14)$$

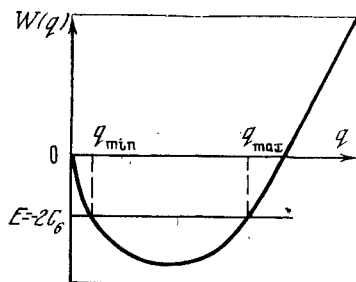
Таким образом, любой начальный толчок, не удовлетворяющий специальному условию  $C_1 = C_3 = 0$ , приводит в конце концов к сингулярному состоянию с  $b=0$ . Это основной результат работы [9]. Он показывает, что исходное состояние неустойчиво, причем неустойчивость оказывается степенной. В линейной теории этому соответствует, как мы отмечали в § 3, наличие кратного корня  $\omega = -1$  для возмущений рассматриваемого типа.

При помощи уравнений (10) можно рассмотреть и эволюцию величины  $q = (a+b)^2/r_0^2$ . Если ввести обозначения  $(\alpha + \delta) \equiv A$ ,  $(\beta - \gamma) \equiv B$ , так что  $q = A^2 + B^2$ , то из (10) легко вывести

$$t = \frac{1}{2} \int^q \frac{dq}{\sqrt{C_3 q - C_6 - 4\Omega^2 q \ln q}}, \quad (15)$$



Рис. 13. График эффективной потенциальной энергии  $W(q)$  для возмущений типа круговой цилиндр — эллиптический цилиндр



где константы  $C_5$  и  $C_6$  обозначают следующие сохраняющиеся величины:

$$C_5 = A^2 + B^2 + 4\Omega^2 \ln q, \quad (16)$$

$$C_6 = (BA - AB)^2. \quad (17)$$

Поскольку ширина  $\Delta q$  интервала, где подкоренное выражение в (15) положительно, стремится к нулю вместе с параметрами начального толчка, то при не слишком больших возмущениях величина  $q$  (а следовательно, и  $(a+b)$ ) меняется периодически. Это наглядно показывает и график эффективной потенциальной энергии

$$W(q) = 8\Omega^2 q \ln q - 2C_5 q \quad (16)$$

на рис. 13, соответствующий (15). При каком-то фиксированном значении «энергии»  $E \equiv -2C_6$  величина  $q$  колеблется между  $q_{\min}$  и  $q_{\max}$ .

## РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Говоря о *сферических бесстолкновительных* системах, мы прежде всего имеем в виду сферические галактики и шаровые скопления звезд. Приблизительно сферической формой обладают эллиптические галактики малой сплюснутости. «Частицами» в таких системах являются звезды. Компактные [146] скопления галактик с достаточно большим числом членов мы также относим к таким системам: для их изучения можно использовать тот же математический аппарат, только «частицами» в этом случае следует считать отдельные галактики. Еще одним примером является система шаровых скоплений звезд, например, в нашей Галактике. Она тоже, как известно, имеет распределение плотности, близкое к сферически-симметричному, причем центр симметрии этого распределения определяет центр Галактики. «Частицы» здесь — это, очевидно, индивидуальные звездные скопления. Оценка среднего времени парных столкновений, проведенная в § 2 главы VIII, показывает, что бесстолкновительное приближение является достаточно хорошим для исследования колебаний и устойчивости всех этих систем.

Исследование сферически-симметричных систем можно разделить на следующие части.

**1. Сферически-симметричные системы с изотропными функциями распределения частиц по скоростям.** В начале § 1, посвященного равновесным состояниям сферически-симметричных систем, найдены функции распределения простейшего вида — зависящие только от энергии частицы  $E = v^2/2 + \Phi_0$  и, следовательно, изотропные по отношению к направлениям скоростей  $\mathbf{v}$ . Их возмущения исследуются в § 2, где доказаны некоторые общие теоремы, устанавливающие устойчивость широкого класса таких систем.

**2. Системы с круговыми орбитами** (модель Эйнштейна<sup>1</sup>, рис. 1) рассматриваются в § 3. Плотность  $\rho_0(r)$  в этих моделях может быть произвольной, в частности можно выбрать ее, как в реальных системах, быстро падающей к краю. Однако в действительности звезды в сферических галактиках и шаровых скоплениях движутся преимущественно по очень вытянутым траекториям. Поэтому модель Эйнштейна, по-видимому, представляет в основном академический интерес. Она является одной из простейших моделей сферически-симметричных бесстолкновительных систем, на которой удобно выяснять некоторые общие закономерности, присущие данной геометрии.

В разделе 3.1 найден спектр колебаний *однородной* по плотности сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям масс. Колебания оказались нейтральными [87].

В той же модели с однородной плотностью рассмотрен и вопрос о возможности раскачки поверхностных волн, связанных с изменением сферической формы поверхности без изменения локальной плотности си-

<sup>1</sup> В 1939 г. А. Эйнштейн рассматривал [155] устойчивость релятивистских скоплений звезд, движущихся по круговым траекториям.

стемы (раздел 3.1, п. 3). Вычислен спектр собственных значений, среди которых не оказалось комплексных [153, 154].

В разделе 3.4 рассматривается устойчивость неоднородной по плотности системы. Исследуются преимущественно локальные возмущения, для которых выведен простой критерий устойчивости. Для устойчивых систем результаты во многом аналогичны полученным в § 6 предыдущей главы для колебаний неоднородного цилиндра<sup>1</sup>.

В § 1 приведен пример функции распределения, описывающей систему движущихся по круговым траекториям масс в случае, когда в каждой точке шара число частиц, вращающихся в одну сторону, не совпадает с числом частиц, вращающихся в противоположную сторону, так что в целом модель обладает отличным от нуля моментом вращения. В разделе 3.3 рассматривается поведение малых возмущений такой системы [125]. Вычислены частоты всех возможных колебаний и доказана устойчивость системы.

**3. Системы с орбитами, близкими к круговым.** В § 1 определен класс стационарных функций распределения для систем с траекториями частиц, близкими к круговым (дисперсия радиальных скоростей конечна, но мала) [143]. Построение таких стационарных решений проводится на основе метода разложения в ряд по  $\delta$ -функциям и их производным (метод моментов). В разделе 3.2 доказана устойчивость найденных функций распределения относительно произвольных малых возмущений (для случая однородной системы) [143]. В отличие от модели с чисто круговыми орбитами частиц колебания оказываются коллективными: из-за наличия радиальной дисперсии скоростей частиц возмущение одного слоя передается остальным слоям, приводя к волнообразному ходу плотности внутри шара.

**4. Системы с эллиптическими орбитами.** В сферически-симметричной однородной вращающейся системе, предложенной Фриманом [203], представлены только такие эллиптические орбиты, проекции которых на плоскость вращения являются окружностями (вдоль оси вращения частицы совершают гармонические колебания) (см. § 1). Тогда движение вещества в плоскости, параллельной плоскости вращения, является гидродинамическим в том смысле, что каждый элемент объема имеет определенную скорость. В § 4 вычислены инкременты раскочки поверхностных волн плотности [91, 96]. Показано также, что из-за наличия дисперсии вдоль оси вращения система оказывается устойчивой по отношению к сплющиванию в двухосный эллипсоид. Там же исследована устойчивость функции распределения покоящегося однородного шара со всеми возможными эллиптическими орбитами. Вычислен спектр колебаний модели и показана ее устойчивость [112, 115].

**5. Системы с радиальными траекториями.** В § 1 найдены некоторые функции распределения неоднородной по плотности системы с чисто радиальными движениями частиц. Очевидно, такие системы должны быть неустойчивы по Джинсу из-за отсутствия стабилизирующего влияния дисперсии скоростей в трансверсальном направлении (см. § 5). Так как системы с изотропным распределением скоростей устойчивы, граница  $\sigma_{кр}$ , разделяющая устойчивые и неустойчивые модели по степени анизотропии  $\left(\frac{2\bar{v}_r^2}{\bar{v}_\perp^2}\right) \equiv \sigma$ , лежит в области  $\sigma_{кр} > 1$ .

В последнем параграфе этой главы (§ 6) дается краткое резюме результатов исследования устойчивости сферически-симметричных бесстолкновительных систем.

<sup>1</sup> Любопытно отметить, что в *релятивистской* однородной по плотности модели Эйнштейна собственные частоты радиальных колебаний образуют непрерывный спектр аналогично *неоднородным ньютоновским* сферам с круговыми орбитами [153].

## § 1. РАВНОВЕСНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теоретические исследования равновесных состояний бесстолкновительных сферически-симметричных гравитирующих систем ведутся уже давно, и наиболее важные результаты отражены в обзоре Белтманна [32].

Нам представляется целесообразным рассмотреть в этом параграфе в основном те функции распределения, устойчивость которых нас в дальнейшем интересует.

1. Равновесные функции распределения  $f_0$  в бесстолкновительных сферически-симметричных системах должны удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (2)$$

в которых  $\Phi_0$  (самосогласованный потенциал) и  $\rho_0$  (плотность) зависят только от радиуса  $r$ . Интегралами движения являются (массы всех частиц принимаются одинаковыми и равными единице:  $M=1$ ) энергия  $E = v^2/2 + \Phi_0$  и вектор углового момента частицы  $\mathbf{L}$ . Поэтому равновесная функция распределения в общем случае есть  $f_0(E, \mathbf{L})$ . Если полный момент вращения системы равен нулю, то обычно полагают  $f_0 = f_0(E, L^2)$ , где  $L^2 = r^2(v_\theta^2 + v_\phi^2)$  — квадрат углового момента отдельной частицы.

Такие системы, вообще говоря, анизотропны: компоненты тензора «напряжений»  $T_{\alpha\beta} = \int f_0 v_\alpha v_\beta d\mathbf{v}$  в разных направлениях будут различны. Для функции распределения  $f_0 = f_0(E, L^2)$  «давление» вдоль  $r, \theta$  и  $\phi$  есть

$$P_r = T_{rr} = \int f_0 v_r^2 d\mathbf{v}; \quad P_t = T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = \frac{1}{2} \int f_0 v_\perp^2 d\mathbf{v}.$$

Точнее, разумеется, говорить здесь не о «давлении», а о дисперсии скоростей в радиальном  $c_r^2 \sim P_r/\rho_0$  и в трансверсальном  $c_t^2 \sim P_t/\rho_0$  направлениях. Имеются два очевидных вырожденных случая. Первый соответствует системам с круговыми орбитами всех частиц ( $v_r = 0, P_r = 0; P_t \neq 0$ ), а второй — системам с чисто радиальными движениями ( $v_\theta = v_\phi = v_\perp = 0, P_t = 0; P_r \neq 0$ ). Устойчивость этих систем рассматривается в § 3 и 5.

2. «Гидродинамическое давление» пока оказалось полезным лишь в случае систем с *изотропной* функцией распределения частиц по скоростям, когда  $f_0 = f_0(E)$ ,  $P_r = P_t \equiv P_0$  (подробнее об этом см. § 2). Поэтому соответствующая терминология используется ниже лишь при описании таких систем. По заданной изотропной функции распределения  $f_0(E)$  легко найти плотность  $\rho_0(r)$  и давление  $P_0(r)$ :

$$\rho_0 = 4\pi \sqrt{2} \int_{E=\Phi_0}^{\infty} f_0(E) (E - \Phi_0)^{1/2} dE, \quad (3)$$

$$P_0 = \frac{8\pi \sqrt{2}}{3} \int_{E=\Phi_0}^{\infty} f_0(E) (E - \Phi_0)^{3/2} dE.$$

Дифференцируя последнее равенство и сравнивая результат с первым, найдем<sup>1</sup>

$$-\frac{dP_0}{dr} = \rho_0 \frac{d\Phi_0}{dr}. \quad (4)$$

<sup>1</sup> Аналогичное уравнение для любой  $f_0 = f_0(E, L^2)$  есть [101]

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) + \frac{2P_t}{r} = \rho_0 \frac{d\Phi_0}{dr},$$

или

$$\frac{d\rho_0 c_r^2}{dr} \nrightarrow \frac{2\rho_0}{r} (c_r^2 - c_t^2) = -\rho_0 \frac{d\Phi_0}{dr}.$$

Это уравнение выражает хорошо известное условие гидродинамического равновесия, изучавшееся, например, в теории равновесия звезд. Для получения равновесных конфигураций его нужно дополнить уравнением состояния  $P_0 = P_0(\rho_0)$ . Но в данном случае уравнением состояния являются соотношения (3), которые параметрически задают зависимость  $P_0 = P_0(\rho_0)$ ; в явном виде уравнение состояния можно получить исключением параметра  $\Phi_0$ .

Сказанное позволяет сделать заключение о возможности использовать достаточно развитую теорию равновесия отдельных звезд для исследования соответствующих стационарных состояний звездных систем. Рассмотренная гидродинамическая аналогия используется также при исследовании устойчивости сферически-симметричных систем с изотропными функциями распределения (см. § 2). Она обладает очевидным преимуществом наглядности, хотя с ее помощью пока не было, по-видимому, получено каких-либо существенно новых результатов.

**3. Примеры изотропных распределений.** Рассмотрим некоторые наиболее характерные частные примеры изотропных распределений частиц по скоростям и их гидродинамические аналогии.

3а. Хорошо известны решения Эмдена (см., например, [101]) для политропного газового шара с давлением  $P_0 = k\rho^{1+1/n} \equiv k\rho^\gamma$  ( $\gamma$  называется показателем адиабаты, а  $n$  — индексом политропы). Соответствующие функции распределения бесстолкновительных систем имеют, оказывается, вид

$$f_0 = c[\Phi_0(a) - E]^\alpha \quad (c = \text{const}). \quad (5)$$

Действительно, подставляя (5) в (3), получаем

$$\rho_0(r) = c_1[\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+3/2}, \quad (6)$$

где новая константа  $c_1$  определяется выражением

$$c_1 = 4\pi c 2^{3/2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)^\alpha dy \quad (\alpha > -1). \quad (7)$$

Аналогично вычисление «давления»  $P_0(r)$  дает в этом случае  $P_0(r) \sim [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+5/2}$ , так что  $P_0 \sim \rho^{(2\alpha+5)/(2\alpha+3)}$ . Поэтому каждому  $\alpha$  соответствуют определенные показатель адиабаты  $\gamma = (2\alpha+5)/(2\alpha+3)$  и индекс политропы  $n = \alpha + 3/2$ . Подставляя (6) в уравнение Пуассона, получаем нелинейное уравнение для потенциала  $\Phi_0$ , которое можно привести к уравнению Эмдена

$$xy'' + 2y' + xy^n = 0, \quad (8)$$

если положить

$$y \equiv \frac{[\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]}{\Phi_*}, \quad x = r/r_0,$$

$$r_0^{-2} = 4\pi G c_1 \Phi_*^{n+1/2}. \quad (9)$$

Функции распределения (5) были получены независимо Джинсом [241] и Эддингтоном [196, 197]. Свойства решений уравнения Эмдена хорошо изучены в теории внутреннего строения звезд. Значение  $\alpha = 7/2$  является граничным, оно разделяет решения с конечными и бесконечными радиусом и массой системы. Соответствующая ему плотность  $\rho_0(r)$  представляет собой известный закон Шустера

$$\rho_0(r) = \rho_0 [1 + r^2/r_0^2]^{-3/2} \quad (\rho_0, r_0 \text{ — константы}). \quad (10)$$

Другие решения в элементарных функциях получаются при  $\alpha = -3/2, -1/2$ . Однако первое из этих решений не существует в бес-

столкновительном случае, так как при  $\alpha \leq -1$  из функции распределения (5) получается расходящийся интеграл (7), определяющий плотность  $\rho_0$ . Такая ситуация имеет, по-видимому, общий характер: не всякое движение и не всякое равновесие в гидродинамических системах могут осуществляться в бесстолкновительных системах (см. также ниже, п. 4 и § 2).

Предельному случаю  $\alpha = 1$  отвечает [214]:

$$f_0 = \text{const } \delta(\Phi_0(a) - E). \quad (11)$$

Уравнению состояния идеального газа  $P \sim \rho^{5/3}$  соответствует, как легко видеть, функция распределения  $f_0(E)$  типа Ферми — Дирака (с нулевой температурой)

$$f_0(E) = \text{const } \theta(E_0 - E).$$

36. Максвелловская функция распределения заслуживает, конечно, особого внимания. В бесстолкновительном случае она имеет вид

$$f_0(E) = ce^{-E/\theta} \quad (\Phi_0 \leq E < \infty), \quad (12)$$

где  $c$  и  $\theta$  — константы, причем  $\theta$  имеет смысл эффективной «температуры» звездного «газа». Трудность состоит в том, что (12) приводит к системам с бесконечными массой  $M$  (и радиусом  $R$ ). Такой результат является естественным. Частицы с достаточно большой скоростью, обладающие поэтому положительной полной энергией, должны были бы покинуть систему ограниченных размеров. Плотность  $\rho_0(r)$ , соответствующая (12), есть  $\rho_0(r) = \text{const } e^{-\Phi_0(r)/\theta}$ . Поэтому, если предположить, что масса системы конечна,  $M < \infty$ , то потенциал  $\Phi_0(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (как  $-GM/r$ ). Но при  $\Phi_0 \rightarrow 0$  мы в данном случае имеем  $\rho_0(r) \rightarrow \text{const}$ , а следовательно,  $M = \infty$ , что противоречит нашему предположению.

Уравнение Пуассона для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} = \text{const } e^{-\Phi_0/\theta}.$$

Оно имеет одно простое решение в элементарных функциях

$$\Phi_0 = -4\pi G\beta \ln r + \text{const}, \quad (13)$$

а  $\rho_0(r) = \beta/r^2$ . Это решение получается при условии, что  $4\pi G\beta = 2\theta$ .

Отметим, что функция распределения (12) может быть получена и предельным переходом из решения Эмдена, где она соответствует изотермическому показателю адиабаты  $\gamma = 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Гидродинамическое уравнение состояния, следующее из (3), в данном случае дает  $P_0 = \theta\rho_0$ , т. е. действительно  $\gamma = 1$ . В связи с отмеченной выше трудностью «чистое» максвелловское распределение (12) необходимо как-то модифицировать для получения конечной массы и размера системы. Например, вместо (12) можно рассмотреть «обрезанное» максвелловское распределение, положив  $f_0 = 0$  при  $E < E_0$ . Но в этом случае дифференциальное уравнение для потенциала  $\Phi_0$  оказывается таким:

$$\Phi_0'' + \frac{2}{r} \Phi_0' + a_1 e^{a_2 \Phi_0} \text{erf}_2 \sqrt{a_3 + a_4 \Phi_0} = 0 \quad (14)$$

( $a_1, a_2, a_3, a_4$  — постоянные), что может быть решено только численно [47, 352].

Как заметил еще Эддингтон [197], соотношение (3) для заданного распределения плотности  $\rho_0(r)$  (и, следовательно, потенциала  $\Phi_0(r)$ ) можно рассматривать как интегральное уравнение для функции распределения  $f_0(E)$ . Более того, оно является интегральным уравнением известного типа — обобщенным уравнением Абеля, которое решается анали-

тически в общем виде. Действительно, дифференцируя уравнение (3) по  $\Phi_0$ , приходим к обычному уравнению Абеля [132]<sup>1</sup>.

**4. Анизотропные функции распределения.** Перейдем к рассмотрению анизотропных функций распределения. Возможны два разных подхода к нахождению равновесных состояний.

*Первый.* По заданной функции распределения вида  $f_0 = f_0(E, L^2)$  плотность  $\rho_0(r)$  вычисляется двойным интегрированием:

$$\rho_0(r) = \frac{2\pi}{r^2} \iint f_0(E, L^2) [-2\Phi_0(r) + 2E - L^2/r^2]^{-1/2} dE dL^2. \quad (15)$$

Область интегрирования в плоскости  $E, L^2$  ограничена [32] осью  $E$  ( $L^2 > 0$ ), линией круговых скоростей, определяемой очевидными параметрическими уравнениями

$$2E = r\Phi_0' + 2\Phi_0, \quad (16)$$

$$L^2 = r^3\Phi_0',$$

а также условием гравитационной связанности  $E \leq 0$ .

*Второй.* Соотношение (15) можно рассматривать и как интегральное уравнение для  $f_0(E, L^2)$ , если считать  $\rho_0(r)$  и  $\Phi_0(r)$  данными. При этом по функции одного переменного  $\rho_0(r)$  нужно согласно (15) определить функцию двух переменных  $f_0 = f_0(E, L^2)$ . В этом случае можно ожидать, что решение написанного интегрального уравнения будет неоднозначным [32]. Ниже приведен пример двузначного решения. Вопрос об отыскании всех решений (15) остается пока не решенным<sup>2</sup>.

**Круговые орбиты.** Простейшей анизотропной функцией распределения является функция распределения частиц, вращающихся по круговым траекториям (см. рис. 1):

$$f_0 = \frac{\rho_0(r)}{2\pi v_0(r)} \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0(r)), \quad (17)$$

где  $v_\perp^2 \equiv v_\theta^2 + v_\phi^2$ ,  $v_0^2 = r\Phi_0'$ . Частицы удерживаются на круговых орбитах вследствие точного равенства гравитационного притяжения и центробежной силы. Плотность  $\rho_0(r)$  можно, очевидно, задать произвольно.

**Системы с почти круговыми орбитами.** Можно предложить [143] общий метод вычисления стационарных функций распределения для моделей, близких к модели Эйнштейна (дисперсия радиальных скоростей конечна, но мала). Суть метода состоит в следующем. Исходную систему уравнений Власова можно представить в виде

$$\hat{L}f_0 + v_r \left( \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right) + \left( \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{1}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha \partial \Phi}{\sin \theta \partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\perp} + \frac{1}{rv_\perp} \left( \sin \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha \partial \Phi}{\sin \theta \partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad (18)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \int f(\mathbf{r}, v_r, v_\perp, \alpha) dv_r v_\perp dv_\perp d\alpha. \quad (19)$$

Здесь выбрана обычная сферическая система координат, а вместо  $v_\theta$  и  $v_\phi$  введены переменные  $v_\perp$  и  $\alpha$ :  $v_\perp^2 = v_\theta^2 + v_\phi^2$ ;  $\alpha = \arctg(v_\phi/v_\theta)$ ; оператор  $\hat{L}$

<sup>1</sup> Следует, однако, заметить, что далеко не для всякой плотности  $\rho_0(r)$  получаются физически приемлемые решения. Например, при  $\rho_0(r) = \text{const} \cdot \theta(R-r)$  (однородный шар)  $f_0(E)$ , формально определенная из (3), отрицательна всюду, кроме границы фазовой области (см. задачу 4 к главе IV, где рассматривается аналогичный вопрос).

<sup>2</sup> Изложенные два альтернативных подхода в звездной динамике называют [101] задачей Джинса и обратной задачей Джинса или же соответственно «индуктивным» и «дедуктивным» методом [32].

означает

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_{\perp}}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right). \quad (20)$$

Вывод кинетического уравнения в сферической системе координат (как и в любой другой ортогональной системе) мы отнесли в § 1 Приложения.

Интересуясь сферически-симметричными  $\partial/\partial\theta = \partial/\partial\varphi = 0$ , стационарными ( $\partial/\partial t = 0$ ) решениями вида  $f_0 = f_0(r, v_r, v_{\perp})$  (так что и  $\partial/\partial\alpha = 0$ ), из (18) и (19) получим

$$v_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right) + \left( \frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi_0) = 4\pi G r^2 \rho_0 = 8\pi^2 G r^2 \int_0^{\infty} f_0(r, v_{\perp}, v_r) v_{\perp} dv_{\perp} dv_r.$$

Решение (17) тривиально удовлетворяет (21). Представим теперь  $f_0$  в виде разложения по  $\delta$ -функциям и их производным:

$$f_0 = [a\delta(v_{\perp} - v_0) + a_1\delta'(v_{\perp} - v_0) + a_2\delta''(v_{\perp} - v_0)]\delta(v_r) + b\delta(v_{\perp} - v_0)\delta''(v_r), \quad (22)$$

где  $a, a_1, a_2, b, v_0$  — функции координаты  $r$ ;  $\delta', \delta''$  — производные  $\delta$ -функции. Мы будем называть такие разложения « $\delta$ -разложениями». Подобные  $\delta$ -разложения оказываются удобными прежде всего при исследовании устойчивости соответствующих равновесных систем, где они и были впервые использованы [87] (см. § 3). После подстановки (22) в (21) с помощью уравнения Пуассона получается система трех уравнений для четырех неизвестных функций  $a, a_1, a_2, b$ . Это позволяет представить общую функцию распределения (22) в виде, зависящем кроме  $\rho_0(r)$  еще от одной произвольной функции  $\theta(r)$ , имеющей смысл малой «температуры»:

$$b = \frac{\theta(r)\rho_0}{4\pi v_0}, \quad a = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} + \frac{1}{4\pi v_0^2} \left[ \frac{\partial \rho_0 (r v_0)'}{2v_0^2} - \left( \frac{r\rho_0\theta}{v_0} \right)' \right], \quad (23)$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi v_0} \left[ \frac{\rho_0\theta (r v_0)'}{2v_0^2} - \left( \frac{r\rho_0\theta}{v_0} \right)' \right], \quad a_2 = \frac{\theta\rho_0 (r v_0)'}{8\pi v_0^2}.$$

В [143] показана устойчивость однородной системы, описываемой функцией распределения (22) при  $n_0(r) = \text{const}$  и  $\theta(r) = \text{const}$  и вычислены частоты коллективных колебаний (см. § 3 этой главы).

«Анизотропным обобщением» функций распределения (5) являются следующие функции распределения, полученные Каммом [180]:

$$f_0 \sim L^{\beta} [\Phi_0(a) - E]^{\alpha}; \quad \beta > -2; \quad \alpha > -1. \quad (24)$$

Плотность  $\rho_0$ , соответствующая (24), равна

$$\rho_0 = \text{const} [\Phi(a) - \Phi(r)]^{\alpha + \frac{\beta+3}{2}}.$$

С помощью уравнения Пуассона можно далее получить уравнение Эмдена — Фаулера

$$xy'' + 2y' + x^{\beta+1}y^{\alpha + \frac{\beta+3}{2}} = 0.$$

При  $\alpha + (\beta+3)/2 = 1$  решения этого уравнения могут быть выражены через функции Бесселя [22].



В предельном случае  $\alpha=1$  имеем [214]

$$f_0 = \text{const } \delta[\Phi_0(a) - E] L^\beta.$$

В другом предельном случае  $\beta=-2$  получается

$$f_0 = \text{const} [\Phi_0(a) - E]^\alpha \delta(L^2).$$

Вычисление средних квадратов радиальной и поперечной скоростей для функций распределения (24) приводит к соотношению

$$\frac{2\bar{v}_r^2}{v_\perp^2} = \frac{2}{\beta + 2}.$$

Отсюда следует, что при  $\beta \rightarrow -2$  функция (24) описывает конфигурации с чисто радиальным движением звезд, при  $\beta=0$  система становится изотропной,  $\beta \rightarrow \infty$  соответствует системам с круговыми орбитами.

Для всех функций распределения (24) характерно, что на границе системы обращается в нуль полная скорость движения частиц. Такое требование не является обязательным, достаточно потребовать равенства нулю при  $r=a$  радиальной скорости  $v_r$ . Для этого энергия частицы на границе должна равняться «эффективной» потенциальной энергии при  $r=a$  ( $U_{\text{эфф}} = L^2/2r^2 + \Phi_0$ ). Этому требованию удовлетворяет вторая серия анизотропных функций распределения [180]

$$f_0 \sim L^\beta \left( \frac{L^2}{2a^2} + \Phi_0(a) - E \right)^\alpha. \quad (25)$$

Для плотности  $\rho_0$  в этом случае имеем из (25)

$$\rho_0(r) \sim \int L^{\beta+1} [L^2/2a^2 + \Phi_0(a) - v_r^2/2 - L^2/2r^2 - \Phi_0(r)]^\alpha \frac{dL}{r^2} dv_r, \quad (26)$$

где интегрирование ведется по области

$$0 \leq v_r^2 \leq \frac{L^2}{a^2} - \frac{L^2}{r^2} + \Phi_0(a) - \Phi_0(r), \quad 0 \leq L^2 < \frac{2a^2r^2 [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]}{a^2 - r^2}, \quad (27)$$

причем  $L_{\text{max}} = a^3 \Phi_0'(a)$ . В результате интегрирования получим

$$\rho_0(r) = \text{const} \cdot r^\beta \frac{[\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+(\beta+3)/2}}{(a^2 - r^2)^{\beta/2+1}}.$$

Подстановка в уравнение Пуассона приводит к следующему нелинейному дифференциальному уравнению для потенциала:

$$\Phi_0'' + \frac{2}{r} \Phi_0' = 4\pi G \cdot \text{const} \cdot r^\beta \frac{[\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+(\beta+3)/2}}{(a^2 - r^2)^{\beta/2+1}}. \quad (28)$$

При  $\alpha=-1/2$ ,  $\beta=0$  получаем функцию распределения системы с однородной плотностью  $\rho_0$  [112, 115]

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi^2 a^2 \Omega_0^2} \theta \left[ \frac{L^2}{2a^2} + \frac{\Omega_0^2 a^2}{z} - E \right] \left( \Omega_0^2 (a^2 - r^2) - v_r^2 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{L^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad (29)$$

где  $\Omega_0^2 = 4\pi G \rho_0/3$ ,  $\theta(x)$  — единичная функция Хэвисайда. Еще одно решение уравнения (28) для  $\alpha=3/2$ ,  $\beta=0$  найдено Кузминым и Велтманном [62]. Оно дает для плотности  $\rho_0(r)$  закон Шустера (10). Этот пример иллюстрирует упомянутую выше неоднозначность решения уравнения (15) для  $f_0(E, L^2)$ . Другой функцией распределения, дающей ту же плотность (10), является изотропная модель (5) с  $\alpha=7/2$ .

Вычисление отношения дисперсий радиальной и поперечной скоростей приводит для (25) к результату

$$\frac{2\bar{v}_r^2}{\bar{v}_\perp^2} = \frac{2(1-r^2/a^2)}{\beta+2}. \quad (30)$$

Эта величина, естественно, стремится к нулю при  $r \rightarrow a$ ; при  $\beta \rightarrow -2$  частицы движутся по радиальным траекториям, при  $\beta \rightarrow \infty$  орбиты звезд становятся круговыми. При  $\beta=0$  из (30) получаем  $\frac{2\bar{v}_r^2}{\bar{v}_\perp^2} = 1-r^2/a^2$ , так

что вблизи центра  $r \rightarrow 0$  система является, по существу, изотропной, а в окрестности границы  $r \rightarrow a$  она подобна системе с круговыми орбитами.

Функция распределения однородного шара (29) содержит все возможные эллиптические орбиты звезд, допускаемые в потенциале  $\Phi_0 \sim r^2/2$ . Фриманом в [203] была, в частности, предложена модель шара, тоже с однородной плотностью, равновесие в котором обеспечивается вращением частиц в плоскости, параллельной  $(xy)$ , и локальной дисперсией скоростей по оси  $z$ . Эта функция распределения имеет вид

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\delta(v_x)\delta(v_y)}{\sqrt{1-r^2-v_z^2}}, \quad (31)$$

причем (31) записана в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega = (4\pi G\rho_0/3)^{1/2}$ , а радиус шара и величина  $\Omega$  приняты равными единице. Из (31) видно, что в рассматриваемой системе координат частицы не движутся в плоскости  $(xy)$ , а по оси  $z$  совершают гармонические колебания с частотой  $\Omega$ . В инерциальной системе траектории частиц являются эллипсами, но только с круговыми проекциями на плоскость  $(x, y)$ . Вращение всех частиц в (31) происходит в одну и ту же сторону, так что момент вращения всей системы отличен от нуля. Однако суперпозицией таких систем, вращающихся в противоположные стороны, можно, очевидно, получить системы с любым моментом от нуля до некоторого максимального.

Особый интерес представляют сферические системы с чисто радиальным движением (см. рис. 17). Как отмечает Агемян [2], такие системы должны формироваться при образовании звезд в диффузном облаке или в результате выбросов из сверхплотного ядра. Агемян изучал частную модель такой системы частиц с равными апоцентрическими расстояниями  $R$ , т. е.

$$f_0 \sim \delta(E-E_0)\delta(L^2). \quad (32)$$

Дифференциальное уравнение для потенциала имеет в этом случае такой вид:

$$x^2 y'' + 2xy' + \frac{\mu}{\sqrt{y}} = 0, \quad (33)$$

где

$$y = \frac{R}{GM} [\Phi_0(R) - \Phi_0(r)]; \quad x = r/R,$$

$$\mu = \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{y}} \right]^{-1}.$$

Можно найти асимптотическое поведение решений уравнения (33) вблизи от центра системы. При  $x \rightarrow 0$  уравнение сводится к следующему:

$$x^2 y' \approx -\frac{\mu}{\sqrt{y}} x;$$

решение которого

$$y = \left( -\frac{3}{2} \mu \ln cx \right)^{2/3}, \quad (34)$$

причем константа интегрирования  $c$  должна быть найдена из точного решения. В той же работе Агеяна уравнение (33) было проинтегрировано численно. В частности, показано, что  $c$  близко к единице (или точно равно 1). Полагая  $c=1$ , получим следующее поведение плотности и скорости частиц  $v_0 = 2\sqrt{\Phi_0(R) - \Phi_0(r)}$  вблизи от центра системы:

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{2GM}{R}} \left( -\frac{3}{2} \mu \ln x \right)^{1/3}, \quad (35)$$

$$\rho_0 \approx \frac{\mu M}{2\pi R^3 x^2 \left( -\frac{3}{2} \mu \ln x \right)^{1/3}}. \quad (36)$$

**Общий вид функций распределения систем с радиальными траекториями звезд следующий:**

$$f_0 = r^{-2} \delta(v_0) \delta(v_\varphi) F(E) \sim \delta(L^2) F(E). \quad (37)$$

Для произвольной плотности  $\rho(r)$  задача определения  $F(E)$  сводится к решению интегрального уравнения Абеля [132]. Если же вновь предположить по аналогии с (5) и (24), что

$$F(E) = \begin{cases} \text{const} [\Phi_0(a) - E]^\alpha, & \Phi_0(a) > E, \\ 0, & \Phi_0(a) < E, \end{cases} \quad (38)$$

то для потенциала  $\Phi_0(r)$  получится дифференциальное уравнение

$$\Phi_0'' + \frac{2}{r} \Phi_0' - \frac{c}{r^2} [\Phi_0(a) - \Phi_0(r)]^{\alpha+1/2} \quad (c > 0). \quad (39)$$

В частности, при  $\alpha = -1/2$  получаем  $\Phi_0 = 4\pi G\beta (\ln r/a - 1)$ ,  $\rho_0 = \beta r^{-2}$ . Выпишем в явном виде соответствующую функцию распределения [112]

$$f_0 = \frac{\beta}{\pi r^2} \delta(v_0) \delta(v_\varphi) (8\pi G\beta \ln a/r - v_r^2)^{-1/2}, \quad (40)$$

Сделаем здесь еще одно замечание: в рассматриваемом случае систем с чисто радиальным движением звезд отсутствуют решения, соответствующие системам с однородной плотностью. Это легко показать, решая уравнение Абеля для искомой фазовой плотности  $F(E)$ :

$$\rho_0 = \text{const} = \frac{1}{2r^2} \int F(E) \frac{dE}{\sqrt{E - \Phi_0}}. \quad (41)$$

Решение этого уравнения показывает, что имеется некоторая конечная область значений  $E$ , в которой  $F(E) < 0$ .

Из качественных соображений очевидно, что скопления с радиальным движением звезд (соответствующие  $\beta \rightarrow -2$ , см. (24)) неустойчивы ввиду отсутствия стабилизирующего влияния дисперсии скоростей звезд в тангенциальном направлении.

Эддингтоном [196, 197] был получен общий вид функций распределения типа «максвелловской»:

$$f_0 = \frac{\rho_0}{(1 + \alpha r^2)^2} q^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} (p^2 + q) \right\}, \quad (42)$$

где

$$p = a\omega_r^2, \quad q = b\omega_\perp^2, \quad a = \text{const}, \quad b = a/(1 + \alpha r^2).$$

Эта функция распределения может быть выведена из уравнения (21), если последнее решать методом разделения переменных [143].

Полагая

$$f_0(v_r, v_{\perp}, r) = g(v_r) h(v_{\perp}, r), \quad (43)$$

получаем

$$g(r) = A \exp(-v_r^2/2\theta), \quad (44)$$

где  $1/\theta$  — параметр разделения.

Для  $h(v_{\perp}, r)$  имеем уравнение

$$\left( \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{v_{\perp}}{r} \frac{\partial h}{\partial v_{\perp}} \right) - \frac{1}{\theta} \left( \frac{v_{\perp}^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) h = 0, \quad (45)$$

которое после разделения  $h(v_{\perp}, r) = a'(v_{\perp}) b'(r)$  дает:

$$b' = Br^c \exp(-\Phi_0/\theta), \quad a' = Dv_{\perp}^c \exp(-v_{\perp}^2/2\theta), \quad (46)$$

где  $c$  — новый параметр разделения.

Подставляя теперь  $f_0$  в уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} - 4\pi G F r^c \exp(-\Phi_0/\theta) = 0. \quad (47)$$

Единственным решением этого уравнения в элементарных функциях является  $\Phi_0 = \ln r$ , при этом  $\rho(r) \sim \beta/r^2$ . В этом случае частное решение записывается в виде [196, 197]

$$f_0(v_r, v_{\perp}, r) = \frac{\beta}{r} \frac{v_{\perp}^{2(4\pi G \beta / 2\theta - 1)}}{2\pi \sqrt{2\pi\theta} (2\theta)^{4\pi G \beta / 2\theta} \Gamma\left(\frac{4\pi G \beta}{2\theta}\right)} \exp\left(-\frac{v_r^2 + v_{\perp}^2}{2\theta}\right). \quad (48)$$

Формула (48) совпадает с (42). Для плотности  $\rho_c(r)$  функция распределения (42) приводит к связи

$$\rho_0 = \frac{b}{1 + \alpha r^2} \exp\{(\Phi_0 - \Phi)/h^2\}, \quad h = \text{const}. \quad (49)$$

Оказывается, что такие модели всегда обладают бесконечной массой и радиусом и не могут поэтому соответствовать реальной физической системе. При  $\alpha=0$  и  $\mu=0$  (42) переходит в максвелловскую функцию (12). Случай  $\alpha=0$ ,  $\mu \neq 0$  был подробно рассмотрен в [22]. Он замечателен тем, что допускает релятивистское обобщение. При этом

$$\rho_0 \sim \beta r^{-2}, \quad f_0 \sim r^{-2} v_{\perp}^{2(4\pi G / 2\theta - 1)} \exp(-v^2/2\theta); \quad (50)$$

$\delta$ -образный характер функции (48) в точке  $v_{\perp} = (4\pi G \beta)^{1/2} \equiv v_0$  показывает, что пределом  $f_0$  при малых  $\theta$  будет некоторый ряд из  $\delta$ -функции и ее производных.

Разложение производится по стандартной процедуре:

$$g(x) = \sum_n \gamma_n \delta^{(n)}(x - x_0),$$

где

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int g(x) (x - x_0)^n dx.$$

Степень отклонения от круговых орбит удобно характеризовать малым параметром — дисперсией кинетической энергии радиального дви-

жения единицы объема

$$\int v_r^2 f_0(r, v_r, v_\perp) dv_r v_\perp dv_\perp = \rho_0(r) \theta / 2,$$

здесь  $\theta$  — малый параметр, имеющий размерность  $v_\perp^2$ .

Разложение  $g(v_r)$  дает

$$(2\pi\theta)^{-1/2} \exp(-v_r^2/2\theta) = \delta(v_r) + \theta/2 \delta''(v_r) + o(\theta).$$

Более громоздкое вычисление «поперечной» функции приводит к разложению

$$\begin{aligned} \frac{v_\perp^2(v_0^2/2\theta-1)}{v_0^2} \exp(-v_\perp^2/2\theta) &= \frac{1}{v_0} \left(1 + \frac{3}{8x}\right) \delta(v_\perp - v_0) + \frac{3}{8x} \delta'(v_\perp - v_0) + \\ (2\theta)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{v_0^2}{2\theta}\right) &+ \frac{v_0}{8x} \delta''(v_\perp - v_0) + o\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned} \quad (51)$$

где  $x = v_0^2/2\theta$ . Для  $f_0$  с точностью до  $\theta$  имеем

$$\begin{aligned} f_0 &= \left\{ \frac{1}{v_0} \delta_r \delta_\perp \left(1 + \frac{3}{8x}\right) + \frac{\theta}{2v_0} \delta_r'' \delta_\perp + \frac{3}{8x} \delta_r \delta_\perp + \frac{v_0}{8x} \delta_r \delta_\perp'' \right\} \frac{\beta}{2\pi r^2}, \\ \delta_r &\equiv \delta(v_r); \quad \delta_\perp \equiv \delta(v_\perp - v_0). \end{aligned} \quad (52)$$

Выше мы уже видели, как проводится разложение по малой «температуре» в случае произвольной плотности.

Остановимся в заключение этого параграфа на вопросе о **вращении** бесстолкновительных сферически-симметричных систем. Этот вопрос, по-видимому, впервые был поставлен Линден-Беллом [279], который показал принципиальную возможность вращения. Действительно, ясно, что исходя из невращающейся сферы с  $f_0 = f_0(E, L)$ , всегда можно получить бесконечное множество функций распределения, соответствующих вращающимся системам (параметр  $0 \leq \alpha \leq 1$ ):

$$f_0(E, L) \rightarrow f_0(E, L, L_z) = \alpha f_0(E, L) \theta(L_z) + (1 - \alpha) f_0(E, L) \theta(-L_z) \quad (53)$$

(здесь  $\theta(L_z)$  — ступенчатая функция). Это преобразование означает, что мы разделили частицы на группы с  $L_z > 0$  и  $L_z < 0$  и обратили движение в одной из групп. При этом очевидно, что не изменяется ни плотность  $\rho_0(r)$ , ни потенциал  $\Phi_0(r)$  [49]. В качестве примера мы несколько подробнее рассмотрим систему вращающихся по круговым траекториям частиц. Возьмем к рис. 1. Функция распределения (17), рассматривавшаяся ранее, соответствует случаю, когда в плоскости, касательной к произвольной сфере в любой ее точке, все векторы скоростей частиц в сумме составляли нулевой вектор — отсутствовало вращение шара как целого. Выделим условно ось  $z$ , и пусть в экваториальной плоскости число частиц, вращающихся в одну сторону, превышает число частиц, вращающихся в противоположную сторону. Пусть, кроме того, на полюсе такое различие отсутствует (оно уменьшается при удалении от экватора). Построенная таким образом система обладает отличным от нуля моментом вращения.

В стационарном случае  $\dot{a}/\dot{a}t = \partial/\partial\varphi = 0$  и  $\Phi_0 = \Phi_0(r)$  из (18) имеем

$$\begin{aligned} \frac{v_\perp}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) f_0 + v_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right) + \\ + \left( \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Нетрудно видеть, что этому уравнению удовлетворяет, например, функция<sup>1</sup> [124]

$$f_{0\mu} = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \delta(v_r) \delta(v_{\perp} - v_0) (1 + \mu \sin \theta \sin \alpha) (|\mu| \leq 1), \quad (55)$$

Функция распределения (55) описывает систему с конечным полным моментом

$$L_z = \int f_0 r \sin \theta v_{\perp} \sin \alpha v_{\perp} dv_{\perp} dv_r da r^2 dr d\Omega \neq 0$$

и сферически-симметричным распределением плотности (и потенциала).

Рассмотрим для определенности шар с  $\rho_0 = \text{const}$ . Вычислим угловую скорость вращения такого шара. Имеем [124]

$$\langle v_{\phi} \rangle = \frac{1}{\rho_0} \int f_0 v_{\phi} d^3v = \frac{1}{2} \mu \Omega r \sin \theta; \quad \Omega_{\text{rot}} = \mu \Omega / 2. \quad (56)$$

Здесь  $\Omega$  — частота обращения звезды по круговой орбите вокруг центра тяжести,  $\Omega_{\text{rot}}$  — частота вращения шара вокруг оси  $z$ . Видно, что однородный шар (55) вращается как твердое тело.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ

*Устойчивость* сферически-симметричных скоплений звезд с изотропным (в инерциальной системе координат) распределением по скоростям исследована наиболее полно; именно здесь доказаны также некоторые весьма общие теоремы. Основные результаты были впервые получены Антоновым [4, 6], а впоследствии «переоткрывались» в работах многих других авторов (по крайней мере, в наиболее существенных чертах).

**1. Общий вариационный принцип для гравитирующих систем с изотропным распределением частиц по скоростям** ( $f_0 = f_0(E)$ ;  $f_0' \equiv df_0/dE \leq 0$ ). Ниже устанавливается критерий устойчивости, справедливый для систем *любой геометрии* с функциями распределения  $f_0 = f_0(E)$ , монотонно убывающими с энергией:  $f_0' \leq 0$ .

Начнем с вывода «уравнений движения», описывающих эволюцию возмущений в системах с изотропным распределением частиц по скоростям, причем сначала мы не будем предполагать, что  $f_0' \leq 0$ .

Обозначая линейный оператор  $\hat{D}$

$$\hat{D} = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1)$$

запишем возмущенное кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \hat{D} f_1 = \mathbf{v} \frac{df_0}{dE} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2)$$

Разделим теперь (2) на  $df_0/dE$  и учтем, что оператор  $\hat{D}$ , действуя на любую функцию интегралов движения, дает нуль. В частности,  $D(1/f_0') = 0$ , и поэтому

$$\frac{\hat{D} f_1}{f_0'} = \hat{D} \frac{f_1}{f_0'}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Общим решением (54), соответствующим круговым орбитам, является функция  $f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \delta(v_r) \delta(v_{\perp} - v_0) \{1 + F(\sin \theta \sin \alpha)\}$  с произвольной  $F$ , удовлетворяющей  $\int F d\alpha = 0$ . Можно показать, однако, что (55) — единственная функция распределения, описывающая *однородно-вращающийся* (с угловой скоростью  $\mu \Omega / 2$ ) шар.

Функция  $\Phi_1$  зависит только от  $\mathbf{r}$ , так что можно написать

$$\mathbf{v} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} = \hat{D} \Phi_1. \quad (4)$$

Таким образом, приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial f_1}{f_0' \partial t} + \hat{D} (f_1/f_0' - \Phi_1) = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, закон тяготения дает следующую связь между функцией распределения  $f_1$  и потенциалом  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1(t, \mathbf{r}) = -G \iint \frac{f_1(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6)$$

где интеграл распространяется на весь фазовый объем, занятый системой. Из (5), (6) следует, что исходная система уравнений равносильна следующему уравнению:

$$\frac{\partial f_1 / \partial t}{\partial f_0 / \partial E} + \hat{D} \left\{ \frac{f_1}{\partial f_0 / \partial E} + G \iint \frac{f_1(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \right\} = 0, \quad (7)$$

или, для собственной моды  $f_1 = \varphi e^{-i\omega t}$ ,

$$- \frac{i\omega \varphi}{\partial f_0 / \partial E} + \hat{D} \left\{ \frac{\varphi}{\partial f_0 / \partial E} + G \iint \frac{\varphi(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \right\} = 0. \quad (7')$$

Несколько удивительно, что полученное уравнение движения (7) есть уравнение первого порядка. В самом деле, из физических соображений ясно, что возмущенное скопление может либо осциллировать, либо сжиматься, а все движения такого рода описываются дифференциальными уравнениями второго порядка (гиперболического типа). В действительности уравнение именно такого типа неявно содержится в (7'); его можно получить следующим способом [4]. Расщепим функцию  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  на четную и нечетную части:  $f = f_+ + f_-$ , где

$$f_+ = [f(+\mathbf{v}) + f(-\mathbf{v})]/2, \quad f_- = [f(+\mathbf{v}) - f(-\mathbf{v})]/2.$$

Четная часть  $f_+$  не меняется при отражениях в пространстве скоростей, а нечетная при таком отражении меняет свой знак на противоположный. Четная часть  $f_+$  определяет возмущенную плотность частиц, «напряжения» в скоплении частиц и все остальные четные моменты  $f$  в фазовом пространстве. Нечетная часть  $f_-$  определяет поток частиц, поток энергии и тому подобные нечетные моменты  $f$ . Оператор  $\hat{D}$  является нечетным, он меняет четность функции, на которую действует, на противоположную. Учитывая сказанное, расщепляем уравнение (7') на четную и нечетную части следующим образом:

$$-i\omega \varphi_+ + \hat{D} \varphi_- = 0, \quad (8)$$

$$\frac{-i\omega \varphi_-}{\partial f_0 / \partial E} + \hat{D} \left\{ \frac{\varphi_+}{\partial f_0 / \partial E} + G \iint \frac{\varphi_+(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \right\} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (8) выражает  $\varphi_+$  через  $\varphi_-$ . Исключая  $\varphi_+$  из системы (8), (9), получим уравнение второго порядка для одной нечетной части возмущения функции распределения  $\varphi_-$

$$\frac{\omega^2 \varphi_-}{(-f_0')} = \hat{K} \varphi_-; \quad \frac{1}{(-f_0')} \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} = -\hat{K} \varphi_-, \quad (10)$$

где оператор  $\hat{K}$  действует как

$$\hat{K} \varphi_- = \frac{\hat{D}^2 \varphi_-}{f_0'} + G \hat{D} \iint \frac{\hat{D} \varphi_-}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{v}'. \quad (11)$$

Легко убедиться в том, что этот оператор является самосопряженным на классе непрерывных функций, которые обращаются в нуль за пределами некоторого ограниченного фазового объема:

$$\iint g \hat{K} h d r d v = \iint h \hat{K} g d r d v. \quad (12)$$

Уравнение (11) аналогично обычному уравнению колебаний, причем  $\hat{K}$  играет роль «коэффициента упругости», а  $1/(-f_0')$  — «массы».

Все полученные до сих пор результаты справедливы для любой изотропной функции распределения. Теперь мы сделаем важное для дальнейшего предположение о том, что функция  $f_0(E)$  монотонно убывает с энергией:  $f_0' \leq 0$  всюду. С таким ограничением уже можно, используя свойство самосопряженности (12), доказать, что квадраты всех собственных частот  $\omega^2$  вещественны. Делается это обычным способом. Переходим в (10) к комплексно-сопряженным величинам:

$$\frac{-\bar{\omega}^2 \bar{\varphi}_-}{\partial f_0 / \partial E} = \hat{K} \bar{\varphi}_-. \quad (13)$$

Умножаем (10) на  $\bar{\varphi}_-$ , а (13) на  $\varphi_+$ , вычитаем и интегрируем по всему фазовому пространству:

$$(\omega^2 - \bar{\omega}^2) \iint \frac{|\varphi_-|^2}{\partial f_0 / \partial E} d r d v = 0.$$

Так как по предположению  $\partial f_0 / \partial E$  всюду отрицательна, то  $\omega^2 = \bar{\omega}^2$ . Поэтому  $\omega$  может быть действительным или чисто мнимым, но не может быть комплексным. Умножая (10) на  $\bar{\varphi}_-$  и интегрируя по фазовому пространству системы, найдем следующее выражение для  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \frac{\iint \bar{\varphi}_- \hat{K} \varphi_- d r d v}{\iint |\varphi_-|^2 / (-f_0') d r d v}. \quad (14)$$

Из (14) следует общий критерий устойчивости, который можно сформулировать следующим образом.

Необходимым и достаточным условием устойчивости любой бесстолкновительной конфигурации, характеризуемой изотропной функцией распределения  $f_0 = f_0(E)$  с  $f_0'(E) \leq 0$  является положительная определенность оператора  $\hat{K}$ :

$$K(\psi, \psi) \equiv \iint \psi \hat{K} \psi d r d v > 0 \quad (15)$$

для всех  $\psi$ . Точнее, нужно сказать, что условие (15) гарантирует отсутствие решений, растущих быстрее  $t$ . Например, есть очевидное растущее решение, соответствующее равномерному движению скопления как целого. Действительно, перейдем от неподвижной системы координат к движущейся вдоль оси  $x$  со скоростью  $\varepsilon$  по отношению к первой. Тогда новая функция распределения равна

$$\begin{aligned} f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) &= f_0(x + \varepsilon t, y, z, v_x + \varepsilon, v_y, v_z) = \\ &= f_0 + \varepsilon \left( t \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

т. е. возмущение пропорционально

$$t \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial v_x}, \quad (17)$$

оно растет степенным образом ( $\sim t$ ). Поэтому, пользуясь сформулированным критерием устойчивости, не следует включать в число пробных



функций  $\partial f_0/\partial x$ ,  $\partial f_0/\partial y$ ,  $\partial f_0/\partial z$  и их линейные комбинации. Условие  $K(\psi, \psi) \geq 0$  не гарантирует отсутствия и других растущих подобным образом решений. Мы оставим поэтому вопрос о линейно растущих решениях (10) в стороне. Говоря ниже об устойчивости, будем, как правило, иметь в виду неотрицательность  $K(\psi, \psi)$ . Вопрос о решениях, отвечающих  $\omega=0$  (но только радиальных!), которые могут нарастать степенным образом, рассматривается в [239]. Формулу (15) можно привести к виду

$$K(\psi, \psi) \equiv \Gamma(\beta, \beta) = - \iint \frac{\beta^2}{f_0'} d\mathbf{r} d\mathbf{v} - G \iiint \frac{\beta(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \beta(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \quad (18)$$

где введено обозначение  $\beta \equiv \hat{D}\psi$ , причем  $\psi$  считается непрерывной функцией, равной нулю на границе фазового объема и за его пределами, но не равное нулю тождественно.

Критерий устойчивости (15) относится к произвольным возмущениям и справедлив для звездных систем с произвольной геометрией, не обязательно сферически-симметричных; требуется только, чтобы стационарная функция распределения была изотропной  $f_0 = f_0(E)$  и убывающей  $df_0/dE < 0$ .

**2. Достаточное условие устойчивости.** Пример: устойчивость политропных моделей с  $f_0'(E) \leq 0$ . Сформулированный выше общий критерий устойчивости Антонов применил [6] для исследования устойчивости сферически-симметричных систем. Вместо общего критерия (18), который является необходимым и достаточным условием устойчивости, оказалось удобным использовать более простой достаточный критерий устойчивости. Используя неравенство Коши — Буняковского

$$\left[ \int f_1 f_2 d\mathbf{v} \right]^2 \leq \left( \int f_1^2 d\mathbf{v} \right) \left( \int f_2^2 d\mathbf{v} \right) \quad (19)$$

с

$$f_1 = \sqrt{|f_0'|}, \quad f_2 = \beta / \sqrt{|f_0'|},$$

будем иметь

$$\int \frac{\beta^2}{|f_0'|} d\mathbf{v} \geq \frac{\left( \int \beta d\mathbf{v} \right)^2}{\int |f_0'| d\mathbf{v}}; \quad (20)$$

Далее из равенства

$$\rho_0 = \int f_0 \left( \frac{v^2}{2} + \Phi_0 \right) d\mathbf{v} \quad (21)$$

следует, что (при  $f_0(E_{\max}) \neq \infty$ )

$$\frac{d\rho_0}{d\Phi_0} = \int f_0' \left( \frac{v^2}{2} + \Phi_0 \right) d\mathbf{v} = - \int \left| \frac{df_0}{dE} \right| d\mathbf{v}. \quad (22)$$

Таким образом, учитывая (22) и (20), можно утверждать, что устойчивость будет доказана, если доказать положительность выражения

$$Q(\alpha, \alpha) \equiv - \int \frac{\alpha^2}{(d\rho_0/d\Phi_0)} d\mathbf{r} - G \iint \frac{\alpha(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \geq 0, \quad (23)$$

где  $\alpha(\mathbf{r}) = \int \beta d\mathbf{v}$ . Антонов [6] рассматривает функции  $\alpha(\mathbf{r})$ , подчиняющиеся требованию

$$\int \alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0, \quad \text{или} \quad \iint \beta d\mathbf{r} d\mathbf{v} = 0, \quad (24)$$

которому удовлетворяет более широкий класс функций, нежели прежнему условию

$$\beta = \hat{D}\psi, \quad \psi(\mathbf{r}, -\mathbf{v}) = -\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (25)$$

Для функций вида (25) равенства (24), разумеется, тоже выполняются.

Докажем с помощью (23) устойчивость политропных моделей (5) с  $\alpha < 3/2$  ( $n < 3$ ). Будем рассматривать радиальные возмущения. Заметим, что двойной интеграл в (23) можно интерпретировать как удвоенную энергию поля «заряда», распределенного с плотностью  $\alpha(r)$ . Ее можно представить в другом, более удобном для нас виде [6]

$$2 \cdot \frac{1}{8\pi} \int |\nabla \psi_\alpha|^2 d\mathbf{r} = \int_0^\infty \left| \frac{d\psi_\alpha}{dr} \right|^2 r^2 dr, \quad (26)$$

где  $\psi_\alpha$  — потенциал (соответственно  $-\nabla \psi_\alpha \equiv \mathbf{E}_\alpha$  — напряженность) поля, соответствующего заряду  $\alpha(r)$ :

$$\frac{d\psi_\alpha}{dr} = \frac{4\pi}{r^2} \tau, \quad \tau \equiv \int_0^r r^2 \alpha dr. \quad (27)$$

Первый интеграл в (23) тоже можно переписать через  $\tau$ , так как согласно (27)

$$\alpha = \frac{1}{r^2} \frac{d\tau}{dr}. \quad (28)$$

Поэтому окончательно получаем вместо (23) следующее выражение:

$$4\pi \int \frac{\left(\frac{d\tau}{dr}\right)^2 dr}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} - 16\pi^2 G \int \frac{\tau^2 dr}{r^2}. \quad (29)$$

Граничные условия следуют из (24), (27):  $\tau$  должно обращаться в нуль на границе (и за ее пределами), а в центре должно иметь нуль третьего порядка.

В итоге мы получаем вариационную задачу, заключающуюся в доказательстве того, что минимум отношения первого и второго членов (29) больше единицы:

$$\min \frac{\int \frac{(d\tau/dr)^2}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} dr}{4\pi G \int \frac{\tau^2 dr}{r^2}} \equiv \lambda > 1. \quad (30)$$

Решение дается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{d\tau/dr}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} \right) + 4\pi G \lambda \frac{\tau_0}{r^2} = 0, \quad (31)$$

где  $\lambda$  — первое собственное значение (31) при  $\tau(0) = \tau(a) = 0$  ( $a$  — радиус).

Возьмем функцию сравнения  $\tau_0(r)$ , удовлетворяющую граничному условию  $\tau_0(0) = 0$  и дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{d\tau_0/dr}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} \right) + 4\pi G \frac{\tau_0}{r^2} = 0. \quad (32)$$

Оказывается, что для  $\rho_0$ ,  $\Phi_0$ , соответствующих уравнению Эмдена, функция  $\tau_0(r)$  может быть найдена в явном виде:

$$\tau_0 = -(n-3) r^2 \frac{d\Phi_0}{dr} + 4\pi G (n-1) r^3 \rho_0, \quad (33)$$

Умножим теперь (32) на  $\tau$ , (31) на  $\tau_0$ , вычтем и проинтегрируем от 0 до  $a$ :

$$\int_0^a \left[ \tau_0 \frac{d}{dr} \left( \frac{d\tau}{dr} / r^2 \left( -\frac{d\rho_0}{d\Phi_0} \right) - \tau \frac{d}{dr} \left( \frac{d\tau_0/dr}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} \right) \right) \right] dr + 4\pi G (\lambda - 1) \int_0^a \frac{\tau\tau_0}{r^2} dr = 0. \quad (34)$$

Интегрируем (34) по частям, учитывая, что  $\tau_0$  при  $r=0$  имеет нуль третьего порядка:

$$\left[ \frac{\tau_0 \frac{d\tau}{dr}}{r^2 (-d\rho_0/d\Phi_0)} \right]_{r=a} + 4\pi G (\lambda - 1) \int_0^a \frac{\tau\tau_0}{r^2} dr = 0. \quad (35)$$

Функция  $\tau(r)$  в интервале  $(0, a)$  сохраняет один и тот же знак как первая (безузлая) собственная функция уравнения (31). Для  $\tau > 0$  должно быть тогда  $d\tau/dr|_{r=a} < 0$ . Функция  $\tau_0 > 0$  при  $n < 3$ , как следует из (33). Наконец, производная  $(-d\rho_0/d\Phi_0)$  положительна. С учетом всего сказанного из (35) получаем, что при  $n < 3$  ( $\alpha < 3/2$ ) величина  $\lambda > 1$ , т. е. система устойчива.

**3. Другие теоремы об устойчивости. Устойчивость относительно нерадиальных возмущений.** Используя достаточный критерий устойчивости (23) — (24)<sup>1</sup>, Антонову с помощью ряда искусственных математических приемов удалось доказать некоторые теоремы, касающиеся устойчивости скоплений частиц с  $f_0'(E) \leq 0$ . Во-первых, он получил следующее достаточное условие устойчивости (при  $df_0/dE < 0$ ):

$$\frac{d^3\rho_0}{d\Phi_0^3} < 0 \quad (36)$$

при всех  $r$ . Этому условию, в частности, удовлетворяют согласно (6) ограниченные ( $\alpha < 7/2$ ) политропные модели (5) с  $\alpha > 1/2$ , а также изохронная модель Энона [214], для которой (в соответствующих единицах)

$$\rho_0 = \frac{(1 - \Phi)^4 (3 + \Phi_0)}{(1 + \Phi)^3} \quad (0 < |\Phi_0| < 1).$$

Во-вторых, как мы видели, специально для политропных моделей (5) § 1 доказана их устойчивость при  $\alpha < 3/2$ . Таким образом, устойчивыми оказываются все политропные ограниченные модели с убывающей функцией распределения, т. е. при  $0 < \alpha < 7/2$ . Мы не будем здесь входить в детали этих доказательств.

Рассмотрим только еще одну важную теорему, доказанную Антоновым [6]. Оказывается, что для устойчивости изотропных сферических систем с  $f_0' < 0$  вообще могут быть опасны только радиальные возмущения, т. е. нерадиальные колебания всегда устойчивы. Докажем эту теорему. Выражение (23) можно переписать несколько иначе [6, 145]:

$$(\alpha, \hat{Q}\alpha) \equiv Q(\alpha, \alpha) = \int \left[ \frac{\alpha \cdot \bar{r}}{(d\rho_0/d\Phi_0)} + 4\pi G \Delta^{-1} \alpha(r) \right] \alpha(r) dr, \quad (37)$$

где  $\Delta^{-1}$  — оператор, обратный оператору Лапласа. Таким образом, для устойчивости достаточно, чтобы  $Q(\alpha, \alpha)$  было неотрицательным, т. е.,

<sup>1</sup> В работе [145] подобный критерий получен как условие положительности формы  $\Gamma(\beta, \beta)$  для произвольных  $\beta$ . При этом  $Q(\alpha, \alpha)$  оказывается решением вариационной задачи на минимум  $\Gamma(\beta, \beta)$  при фиксированном  $\alpha(r) = \int \beta(r, v) dv$ . Но ограничения (24), (25) существенны.

иначе говоря, чтобы неотрицательным был интегральный оператор

$$\hat{Q} \equiv \frac{1}{(d\rho_0/d\Phi_0)} + 4\pi G\Delta^{-1} \geq 0. \quad (38)$$

Дальше мы будем следовать работе Шноля и Хазина [145], в которой дано несколько более простое по сравнению с оригинальной работой Антонова [6] доказательство. Итак, допустим, что в разложении  $\alpha(r)$  по сферическим гармоникам нет нулевого члена:

$$\alpha(r) = \sum_{\substack{l=1 \\ |m|<l}}^{\infty} \alpha_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (39)$$

Нужно доказать, что тогда  $\Gamma(\beta, \beta) > 0$ . Для доказательства вставим (39) в выражение (37) для  $Q(\alpha, \alpha)$ :

$$Q(\alpha, \alpha) = \sum_{\substack{l=1 \\ |m|<l}}^{\infty} Q_l(\alpha_{lm}, \alpha_{lm}), \quad (40)$$

где

$$Q_l(\alpha, \alpha) = \int \left( \frac{\alpha(r)}{a_0(r)} + 4\pi G\Delta_l^{-1}\alpha \right) \alpha(r) dr, \quad a_0 \equiv d\rho_0/d\Phi_0, \quad (41)$$

$$\Delta_l \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (42)$$

Выражение для  $Q(\alpha, \alpha)$  расщепилось, как и следовало ожидать, на сумму по отдельным сферическим гармоникам (см. § 2 Приложения). При  $l > 1$  имеет место очевидное неравенство  $\Delta_l < \Delta_1$ . Но для любой пары<sup>1</sup> самосопряженных операторов  $\hat{P}$  и  $\hat{Q}$  из  $\hat{P} > \hat{Q} > 0$  следует, что  $\hat{P}^{-1} < \hat{Q}^{-1}$ . Поэтому  $\Delta_l^{-1} > \Delta_1^{-1}$ , так что  $Q_l(\alpha, \alpha) > Q_1(\alpha, \alpha)$ . Таким образом, нужно доказать неотрицательность оператора

$$1/a_0(r) + 4\pi G\Delta_1^{-1} \geq 0. \quad (43)$$

Неравенство (43) эквивалентно следующему:

$$\hat{P}_1 \equiv -\Delta_1 - 4\pi G a_0(r) \geq 0. \quad (44)$$

Действительно, перепишем (43) в виде

$$\hat{P} \equiv \frac{1}{a_0} \geq -4\pi G\Delta_1^{-1} \equiv \hat{Q},$$

где  $\hat{Q} > 0$ , так как  $(\alpha, \hat{Q}\alpha)$  пропорционально минус гравитационной энергии массы, распределенной с плотностью  $\alpha(r)$ . Поэтому  $\hat{P}^{-1} < \hat{Q}^{-1}$ , что равносильно (44). Легко проверить, что функция

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho_0(r) r^2 dr \quad (45)$$

удовлетворяет уравнению  $\hat{P}_1\alpha = 0$ . Поскольку  $\alpha_0(r)$  не имеет узлов при  $r > 0$ , то в силу известных осцилляционных теорем [41, 55] спектр  $\lambda$  оператора  $\hat{P}_1$  неотрицателен. При этом  $\lambda = 0$  является его собственным значением (соответственно  $\alpha_0(r)$  — собственной функцией), отвечающим «низшему уровню»,  $\hat{P}_1 \geq 0$ . Теорема доказана.

<sup>1</sup> Это видно, например, из следующих равенств [145]:

$$\begin{aligned} \hat{P} - \hat{Q} &= \hat{P}^{1/2} (1 - \hat{C}) \hat{P}^{1/2}; & \hat{P}^{-1} - \hat{Q}^{-1} &= \hat{P}^{-1/2} (1 - \hat{C}^{-1}) \hat{P}^{-1/2}, \\ \hat{C} &= \hat{P}^{-1/2} \hat{Q} \hat{P}^{-1/2}. \end{aligned}$$

4. Вариационный принцип для радиальных возмущений. В последующих за [4, 6] работах [239, 288], отмечалась большая сложность вариационного принципа (15) и были сделаны попытки как-то упростить анализ устойчивости. Прежде всего вполне естественное упрощение достигается, если ограничиться рассмотрением только радиальных колебаний. С учетом только что доказанной теоремы такое ограничение не должно сказаться на окончательных выводах об устойчивости. В этом случае можно получить более простые по сравнению с (7), (15) уравнения движения и вариационный принцип [239].

Линеаризованное кинетическое уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \hat{D}f_1 - \frac{\partial f_0}{\partial E} v_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0. \quad (46)$$

Возмущения предполагаем радиальными, но зато функцию распределения не обязательно считать изотропной,  $f_0 = f_0(E, L^2)$ . Уравнение (46) должно быть, как всегда, дополнено уравнением для  $\Phi_1$ , выраженным через  $f_1$ . Запишем его в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial r} = \frac{G}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} M(r) = \frac{G}{r^2} (-4\pi r^2) j(r) = -4\pi G \int v_r f_1 d\mathbf{v}, \quad (47)$$

где  $M(r)$  — масса внутри радиуса  $r$ , а  $j(r)$  — поток массы в радиальном направлении; (46) и (47) и представляют исходные уравнения движения.

Снова делим  $f_1$  на четную и нечетную части  $f_1 = f_+ + f_-$  и получаем вместо (46) — (47) следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} + \hat{D}f_- = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial f_-}{\partial t} + \hat{D}f_+ - \frac{\partial f_0}{\partial E} v_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial r} = -4\pi G \int v_r f_- d\mathbf{v}. \quad (50)$$

Исключая  $f_+$ , будем иметь уравнение для  $f_-$

$$\frac{1}{f_0'} \frac{\partial^2 f_-}{\partial t^2} = \hat{T}f_-, \quad (51)$$

где оператор  $\hat{T}$  равен

$$\hat{T}f_- = \frac{\hat{D}^2 f_-}{f_0'} - 4\pi G v_r \int v_r f_- d\mathbf{v}. \quad (52)$$

Самосопряженность этого оператора доказывается элементарно. Уравнение (51) может быть выведено также из вариационного принципа

$$\delta \int \left[ \frac{(\partial f_- / \partial t)^2}{-df_0'/dE} - f_- \hat{T}f_- \right] d\mathbf{v} d\mathbf{r} dt = 0. \quad (53)$$

Выражение для оператора  $\hat{T}$  действительно имеет в рассматриваемом случае более простую структуру, чем оператор, стоящий в правой части (18). Соответственно проще выглядит и критерий устойчивости: для  $df_0'/dE < 0$  система устойчива относительно радиальных возмущений тогда и только тогда, когда оператор  $\hat{T}$  положительно определен для всех функций  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varphi(r, \mathbf{v})$ , зависящих от  $|\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{v}$  и ограниченных в фазовом пространстве. Из (51) можно доказать сохранение величины,

аналогичной энергии пульсаций [288, 239]:

$$H = \int \left[ \left( \frac{\partial f_-}{\partial t} \right)^2 / |f'_0| + f_- \hat{T} f_- \right] dr d\mathbf{v} = \text{const}, \quad (54)$$

или через полную  $f$

$$H = \int \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 / |f'_0| dr d\mathbf{v} - 4\pi G \int \left[ \int v_r f d\mathbf{v} \right]^2 dr \right] \quad (54)$$

Отметим в заключение, что результаты, аналогичные полученным здесь и в предыдущем разделе, справедливы не только для  $f_0 = f_0(E)$  (как в разделе 2) и не только для радиальных возмущений сферических систем (как здесь), но также для возмущений любого скопления, которые не нарушают пространственную симметрию равновесной конфигурации<sup>1</sup>.

**5. Гидродинамическая аналогия.** Даже такие упрощенные вариационные принципы, как (53), все же гораздо труднее для применения, чем, например, соответствующие результаты в теории газовых сфер, где эти вариационные принципы включают функции только от одной координаты  $r$ . Этим определяется важность так называемой гидродинамической аналогии, фактически установленной еще в работе Антонова [6], но явно сформулированной Линден-Беллом [284, 288].

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что нахождение стационарных состояний звездных систем в некоторых случаях эквивалентно решению соответствующей задачи теории равновесия газовых сфер. Оказывается, что и задача об устойчивости моделей бесстолкновительных систем с изотропными функциями распределения может быть сведена к задаче об устойчивости некоторой гидродинамической системы. Возможность такого перехода от шестимерного фазового пространства к обычному трехмерному, т. е. к решению математически несравненно более простой задачи, и составляет содержание гидродинамической аналогии<sup>2</sup>. Точная формулировка теоремы [288, 239] для сферически-симметричных<sup>3</sup> скоплений следующая. Рассмотрим ограниченную сферически-симметричную звездную систему с изотропной функцией распределения  $f_0(E)$  и с  $df_0/dE < 0$ . Она устойчива относительно радиальных возмущений, если газовая сфера с тем же распределением плотности  $\rho_0(r)$  по радиусу

$$\rho_0(r) = 4\pi \sqrt{2} \int_{E=\Phi_0}^{\infty} f_0(E) (E - \Phi_0)^{1/2} dE \quad (55)$$

и с давлением  $P_0(r)$

$$P_0(r) = \frac{8\pi}{3} \sqrt{2} \int_{E=\Phi_0}^{\infty} f_0(E) (E - \Phi_0)^{3/2} dE \quad (56)$$

устойчива относительно радиальных возмущений, для которых «показатель адиабаты» есть

$$\gamma = \frac{\rho_0}{P_0} \frac{dP_0/dr}{d\rho_0/dr} \quad (57)$$

<sup>1</sup> Например, для всех аксиально-симметричных возмущений вращающихся аксиально-симметричных систем.

<sup>2</sup> Возможность такой замены предполагалась и раньше [101]. Но тогда это была лишь гипотеза, которая оправдывалась теми или иными статистическими соображениями. Оказывается, однако, что она может быть строго обоснована.

<sup>3</sup> В действительности эта теорема дана у Линден-Белла [284] в несколько более общем контексте. Существует также несколько эквивалентных формулировок [145, 239], мы даем формулировку, приведенную в [239].

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что согласно Линден-Беллу [284] необходимым и достаточным условием устойчивости газовой сферы (а следовательно, достаточным условием устойчивости скопления звезд) является положительная определенность оператора

$$\hat{P}_1 = -\Delta - 4\pi G\rho \frac{d\rho}{dP} \quad (58)$$

в пространстве всех функций  $r$ , исчезающих на бесконечности  $r = \infty$ :

$$\int \psi \hat{P}_1 \psi d\mathbf{r} > 0 \quad (59)$$

для всех  $\psi(r)$ .

Но это условие эквивалентно (38), что доказывается аналогично доказательству неравенства  $\Delta_1 < \Delta_2$  в разделе 3.

Работы [239, 284, 288] несколько обобщают полученные ранее в [6] результаты в той части, которая относится к устойчивости политропных моделей: в них допускаются произвольные баротропные уравнения состояния  $P = P(\rho)$ .

Все подобные теоремы устанавливают только достаточные условия устойчивости звездных скоплений. Обратные утверждения являются, вообще говоря, неверными, так что звездные скопления «более устойчивы» по сравнению с газовыми. Так, в работе [288] даны некоторые примеры устойчивых звездных скоплений, которым соответствуют неустойчивые газовые шары. Такое положение, в частности, связано с тем, что возмущение, созданное в бесстолкновительной системе, не обязано сохраняться (например, распространяясь как волна): оно может исчезнуть, если частицы «убегут» из области возмущения.

**6. Об устойчивости систем с функциями распределения, не удовлетворяющими условию  $f_0'(E) \leq 0$ .** До сих пор мы рассматривали только функции распределения  $f_0(E)$ , удовлетворяющие условию  $f_0' \leq 0$ . По-видимому, все они устойчивы. Исследование устойчивости систем, в которых  $f_0' > 0$  в некоторой области фазового пространства<sup>1</sup>, более сложно. Условие  $f_0' < 0$  не определяет границу между устойчивыми и неустойчивыми решениями. Например, известны устойчивые одномерные системы, в которых это условие нарушается. Примером могут служить перпендикулярные колебания однородного плоского слоя (см. главу 1, § 5).

Энон [217] исследовал устойчивость политропных моделей (5) § 1 с  $\alpha < 0$ , для которых  $f_0' > 0$ , правда, только относительно радиальных возмущений. В отличие от предыдущих работ исследование в [217] проведено не аналитическими, а численными методами. Система представлялась 1000 сферических слоев, каждый из которых мыслился как совокупность звезд, имеющих в данный момент одни и те же расстояния  $r$  до центра, радиальную  $v_r$  и трансверсальную  $v_\perp$  скорости. Распределение числа слоев с такими значениями  $(r, v_r, v_\perp)$  задавалось в соответствии с  $f_0(E)$ . Из-за дискретности и случайного выбора положений и скоростей «численное»  $f_0(E)$  флуктуировало около среднего теоретического значения, и эти флуктуации должны были бы «запустить» любую неустойчивость, если она есть.

В устойчивых случаях (например,  $n > 1$ ) флуктуации чисто статистические. В случае  $n = 1/2$  ( $\alpha = -1$ ) заметны коллективные колебания пространственной структуры, которые отсутствовали при  $n > 1$ , а также «выпячивание» из границы фазовой  $(r, v_r)$  области, которое имеет тен-

<sup>1</sup> Для реальных систем с ограниченным фазовым объектом  $f_0'$  не может быть, очевидно, всюду положительной.

денцию медленно расти со временем. Поэтому случай  $n=1/2$  кажется слегка неустойчивым.

Энон оценивает границу между устойчивыми и неустойчивыми конфигурациями  $n=0,5 \div 0,6$ . Но возможно, что критическое значение точно равно  $n=1/2$ , так что все политропные модели с  $f_0=f_0(E)$  устойчивы.

### § 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ, ВРАЩАЮЩИХСЯ ПО КРУГОВЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

#### 3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО ШАРА

Рассмотрим простейший случай системы частиц с однородной плотностью и покажем ее устойчивость относительно произвольных малых возмущений.

В п. 1 излагается метод решения кинетического уравнения, аналогичный известному методу интегрирования по траекториям в физике плазмы [138]. В п. 2 приведен спектр собственных частот системы, представляющий собой дискретный набор действительных чисел. В п. 3 найден спектр поверхностных колебаний, которые также оказались устойчивыми.

**1. Вывод уравнения собственных колебаний.** Будем использовать сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  и характеризовать скорость величинами  $v_r, v_\perp = (v_\theta^2 + v_\varphi^2)^{1/2}, \alpha = \text{arctg}(v_\varphi/v_\theta)$ . В этих переменных кинетическое уравнение записывается в виде

$$\hat{L}f + v_r \left( \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right) + \left( \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \nabla_\perp \Phi \frac{\partial f}{\partial v_\perp} = 0, \quad (1)$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r} \left[ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \alpha \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right], \quad (2)$$

$$\nabla_\perp \Phi \frac{\partial}{\partial v_\perp} = \frac{1}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{1}{rv_\perp} \left( \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (3)$$

Равновесная функция распределения определяется выражением  $f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0)$ . Невозмущенный потенциал равен

$$\Phi_0 = \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \text{const}, \quad (5)$$

где

$$\Omega^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{3}, \quad (6)$$

$\rho_0$  — постоянная плотность, при этом  $v_0 = \Omega r$ .

Линеаризуем уравнения (1) — (3), обозначая равновесные величины индексом «0», а возмущенные индексом «1».

В линейном приближении из (1) следует

$$\begin{aligned} \hat{L}f_1 + v_r \left( \frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial f_1}{\partial v_\perp} \right) + \left( \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right) \frac{\partial f_1}{\partial v_r} = \\ = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial f_0}{\partial v_r} + \frac{1}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}. \end{aligned} \quad (7)$$



Учитывая, что  $f_0 \sim \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0)$ , находим, что (7) удовлетворяется при  $f_1$  вида <sup>1</sup>

$$\dot{f}_1 = \delta(v_r) [A \delta(v_\perp - v_0) + B \delta'(v_\perp - v_0)] - C \delta'(v_r) \delta(v_\perp - v_0), \quad (8)$$

где штрих соответствует производной по аргументу. Из (7) находим, что функции  $A, B, C$  удовлетворяют уравнениям

$$\hat{L}^0 A - \frac{1}{r\Omega} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rC) = 0, \quad (9)$$

$$\hat{L}^0 B - 2\Omega C = \frac{\rho_0}{2\pi\Omega^2 r^2} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_1, \quad (10)$$

$$\hat{L}^0 C + 2\Omega B = -\frac{\rho_0}{2\pi\Omega r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}. \quad (11)$$

Оператор  $L^0$  отличается от оператора  $\hat{L}$  заменой  $v_\perp/r$  на  $\Omega$ . При  $f_1$  вида (8) возмущение плотности равно

$$\rho_1 = \int_0^{2\pi} (\Omega r A - B) d\alpha. \quad (12)$$

Путь решения уравнений (9) — (11) и отыскания  $\rho_1$  состоит в следующем. Умножая обе части равенства (10) на оператор  $L_0$  и выражая с помощью (11) величину  $\hat{L}_0 C$  через  $B$  и  $\Phi_1$ , получим

$$(\hat{L}^0 + 2i\Omega)(\hat{L}^0 - 2i\Omega)B = \frac{\rho_0}{2\pi\Omega^2 r^2} \left[ \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}^0 \Phi_1 + 2\Omega^2 r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right]. \quad (13)$$

Отсюда

$$B = \frac{\rho_0}{2\pi\Omega^2 r^2} (\hat{L}^0 - 2i\Omega)^{-1} (\hat{L}^0 + 2i\Omega)^{-1} \left[ \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}^0 \Phi_1 + 2\Omega^2 r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right], \quad (14)$$

где степень  $(-1)$  означает обратный оператор, действие которого разъясним несколько позже.

Функцию  $A$  с помощью уравнений (9) и (11) выражаем через  $B$  и  $\Phi_1$ :

$$A = \frac{1}{r\Omega} (\hat{L}^0)^{-1} \left[ \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{L}^0 B) + \frac{\rho_0}{4\pi\Omega^2} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Phi_1}{r} \right) \right]. \quad (15)$$

Этот результат подставим в (12):

$$\rho_1 = - \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \hat{L}_0^{-1} \left[ B + \frac{\rho_0}{2\pi\Omega^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Phi_1}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rB - \frac{\rho_0}{2\pi r} \frac{\Phi_1}{\Omega^2} \right) \right\} d\alpha. \quad (16)$$

Уравнение (16) совместно с (14) дает искомую связь  $\rho_1$  с  $\Phi_1$ , необходимую для самосогласованного описания возмущений посредством уравнения

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1(\Phi_1). \quad (17)$$

Теперь приведем вид оператора  $(\hat{L}^0)^{-1}$ . Пусть функция  $X = X(t, \theta, \varphi, \alpha)$  удовлетворяет уравнению

$$\hat{L}^0 X = a(t, \theta, \varphi, \alpha), \quad (18)$$

где  $a$  — некоторая известная функция. Поскольку  $\hat{L}_0$  есть оператор дифференцирования  $d/dt$  вдоль невозмущенной (в данном случае круговой) траектории частицы, мы можем написать

$$X = (\hat{L}^0)^{-1} a = \int_{-\infty}^t a \{ t', \theta_0(t', \theta, \varphi, \alpha) \dots \} dt', \quad (19)$$

<sup>1</sup> Используемый ниже метод разложения по  $\delta$ -функциям и их производным представляет собой удобный для вычислений вариант известного метода моментов.

где многоточием обозначены начальные  $\varphi_0$ ,  $\alpha_0$ , выраженные через  $t$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\alpha$ . Аналогично находим

$$(\hat{L}^0 \pm 2i\Omega)^{-1} a = \int_{-\infty}^t e^{\mp 2i\Omega(t-t')} \cdot a(t') dt'. \quad (20)$$

Теперь опишем конкретный путь вычисления интегралов типа (19), (20). Пусть возмущение потенциала имеет вид

$$\Phi_1 = \chi_l(r) \Phi_1^l(t, \theta, \varphi), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^l &= e^{-i\omega t} Y_m^l(\theta, \varphi), \\ Y_m^l(\theta, \varphi) &\equiv e^{-im(\pi/2 - \varphi)} P_{m0}^l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (22)$$

$P_{m0}^l(\cos \theta)$  — функции, с точностью до коэффициентов совпадающие с полиномами Лежандра (см. книгу Виленкина [33]). Все нормировочные коэффициенты включены в  $\chi_l(r)$ .

При  $a$ , равном правой части (22), уравнения (19), (20) записываются так:

$$(\hat{L}^0 + iq\Omega)^{-1} a = e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - q\Omega)\tau} Y_m^l[\theta(t - \tau), \varphi(t - \tau)] d\tau \quad (q = 0, \pm 2); \quad (23)$$

переменная интегрирования  $t'$  заменена на  $\tau = t - t'$ . Из уравнения движения находим

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \cos \gamma \sin \psi(t), \\ \operatorname{tg}(\tilde{\varphi}_0 - \varphi(t)) &= \operatorname{ctg} \psi(t) / \sin \gamma, \\ \operatorname{ctg} \alpha(t) &= -\operatorname{ctg} \gamma \cos \psi(t), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\psi(t) = \psi_0 + \Omega(t - t_0). \quad (25)$$

Здесь введены константы  $\tilde{\varphi}_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\gamma$ , которые можно выразить через  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $\alpha_0$ , рассмотрев (24) при  $t = t_0$ .

Учитывая (24) и используя теорему сложения, представим  $Y_m^l$  в виде суммы трехиндексных функций [33]

$$\begin{aligned} Y_m^l[\theta(t - \tau), \tilde{\varphi}_0, \gamma, \psi_0; \varphi(t - \tau), \tilde{\varphi}_0, \gamma, \psi_0] &= \\ &= \sum_{s=-l}^l T_{ms}^l \left[ \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi}_0, \gamma - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \psi(t) \right] P_{s0}^l(0) \int_0^{\infty} e^{i(\omega - (q+s)\Omega)\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь функция

$$T_{ms}^l \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, \frac{\pi}{2} - \varphi_2 \right] = e^{im\varphi_1 + is\varphi_2 - i\frac{\pi}{2}(m-s)} P_{ms}^l(\cos \theta). \quad (27)$$

С помощью (27) преобразуем правую часть (23)

$$\begin{aligned} (\hat{L}^0 + iq\Omega)^{-1} a &= e^{-i\omega t} \sum_{s=-l}^l T_{ms}^l \left[ \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi}_0; \gamma - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} - \psi(t) \right] P_{s0}^l(0) \times \\ &\times \int_0^{\infty} e^{i[\omega - (q+s)\Omega]\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (28)$$



Уравнение (42) удовлетворяется при произвольной радиальной зависимости  $\Phi_1$ , если

$$1 + a_l = 0. \quad (43)$$

Это и есть искомое дисперсионное уравнение собственных колебаний однородного шара. Случай поверхностных колебаний  $\Delta\chi_1=0$  рассмотрен ниже (см. п. 3).

Уравнение (43) можно преобразовать к виду

$$a_l = \sum a_{ls} \frac{3}{(\omega - s)^2 - 4} = -1, \quad (44)$$

где

$$a_{ls} \equiv |P_s^l(0)|^2 \text{ и положено } \Omega = 1. \quad (45)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Возмущения с  $l=0$ , соответствующие радиальным колебаниям шара, имеют частоту  $\omega^2=1$ . Возмущения с  $l=1$  имеют частоты  $\omega_1^2=0$ ,  $\omega_2^2=7$ . Случай  $l=1$  соответствует дипольному возмущению. Для возмущений квадрупольного типа ( $l=2$ ) квадраты собственных частот равны  $\omega_{1,2}^2 = (17 \pm \sqrt{117})/2$ , причем оба положительны. Оказывается (см. следующий пункт), что это справедливо и в общем случае, при любом  $l$ .

**2. Доказательство вещественности собственных частот.** Характеристическое уравнение (44) удобно представить в следующей «мультипликативной» форме:

$$\frac{3\omega^2(\omega^2-4) \dots [\omega^2-(l-3)^2][\omega^2-(l^2+l+1)]}{3(\omega^2-1)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-(l+2)^2]} = -1 \quad (l \text{ нечетно}), \quad (46)$$

$$\frac{3(\omega^2-1)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-(l-3)^2][\omega^2-(l^2+l+1)]}{(\omega^2-4)(\omega^2-16) \dots [\omega^2-(l+2)^2]} = -1 \quad (l \text{ четно}). \quad (47)$$

Эквивалентность (46), (47) и первоначальной формы уравнения (44) можно доказать, разложив правильную дробь в левой части (46) или (47) на простые слагаемые и убедившись, что это разложение совпадает с левой частью (44). Эта процедура выполняется элементарно, и мы на ней не останавливаемся.

Теперь, используя мультипликативную запись характеристического уравнения (46), (47), легко доказать вещественность всех собственных частот  $\omega$ , т. е. отсутствие экспоненциальных неустойчивостей.

Пусть сначала  $l$  нечетно. Построим, считая  $\omega$  вещественной, примерный график функции  $a_l(\omega)$  (рис. 14). На рис. 14 представлена часть

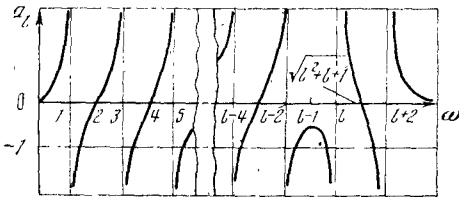


Рис. 14. Графическое определение собственных частот «внутренних» колебаний однородной сферы с круговыми орбитами частиц (уравнение 46) (1 нечетно)

этого графика, соответствующая  $\omega > 0$  (функция  $a_l(\omega)$  четна). Собственные частоты лежат на пересечениях кривых  $a_l = a_l(\omega)$  и прямой  $a_l = -1$ . Найдём число пересечений. Если оно совпадает со степенью характеристического уравнения (46) (равной  $(l+3)$ ), то это и будет означать вещественность всех собственных частот. Убедимся в том, что это действительно так.

Прежде всего из рис. 14 видно, что по одной частоте содержат интервалы

$$(1-3), (3-5), \dots, (l-4, l-2), (l, l+2). \quad (48)$$

Это дает  $l-1$  частот (с учетом отрицательных). Остается показать, что в интервале  $(l-2, l)$  лежат две частоты. Но это сразу следует из оценки  $a_l$  в середине указанного интервала:

$$-a_l(l-1) = \frac{3l(l-1)}{(4l^2-1)} \frac{(2l-4)!!}{(2l-3)!!} < \frac{3l(l-1)}{(4l^2-1)} < 1. \quad (49)$$

Доказательство вещественности всех собственных частот при любом нечетном  $l$  тем самым завершено. Случай четного  $l$  рассматривается совершенно аналогично и приводит к такому же результату<sup>1</sup>.

**3. Устойчивость относительно поверхностных возмущений.** Уравнение (34) имеет структуру, сходную с уравнением для потенциальных возмущений электрического потенциала однородной плазмы, откуда находится дисперсионное уравнение ленгмюровских колебаний [86]. Однако в отличие от однородной безграничной плазмы учет ограниченности рассматриваемой здесь гравитирующей системы приводит к возможности существования колебаний поверхности с  $\Delta\chi_i=0$ .

Естественно возникает вопрос об устойчивости сферически-симметричных систем относительно возмущений поверхности. Специфика характера поверхностных возмущений с  $\Delta\chi_i=0$  состоит в том, что, согласно уравнению Пуассона, возмущенная плотность системы, совершающей подобные колебания, равна нулю. Таким образом, можно говорить об аналогии с колебаниями шара из несжимаемой жидкости: совместно с «локальными» возмущениями, изученными ранее, эти возмущения составляют полный спектр возможных колебаний рассматриваемой модели.

Ниже дается вывод соответствующего характеристического уравнения, несколько отличный от использованного в оригинальной работе [154]. Способом, полностью совпадающим с изложенным в п. 1, можно получить дифференциальное уравнение для потенциала  $\Phi_l^{(l)} = \chi_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$  в случае произвольной (не обязательно однородной!) плотности  $\rho_0(r)$ . Оно имеет вид [105, 125]

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 A_l(r) \frac{d\chi_l}{dr} \right] - B_l(r) \chi_l = 0, \quad (50)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_l(r) = 1 + \omega_0^2 \sum_{s=-l}^l \frac{\alpha_{ls}}{(\omega - s\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 - \omega_0^2}; \quad (51)$$

$$B_l(r) = l(l+1) + \sum_{s=-l}^l \alpha_{ls} \left\{ r^2 \frac{d}{dr} \left[ \frac{\omega_0^2}{r} \frac{2s\Omega_0}{(\omega - s\Omega_0)[(\omega - s\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 - \omega_0^2]} \right] + \right. \\ \left. + \omega_0^2 \left[ \frac{4s\Omega_0(\omega - s\Omega_0) + s^2[(\omega - s\Omega_0)^2 - \omega_0^2 + 3\Omega_0^2]}{(\omega - s\Omega_0)^2[(\omega - s\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 - \omega_0^2]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(l+s+1)(l-s)}{(\omega - s\Omega_0)(\omega - s\Omega_0 - 2\Omega_0)} \right] \right\}, \quad (52)$$

<sup>1</sup> Заметим, что мы игнорировали выше возможность целочисленных частот (в единицах  $\Omega$ ), в том числе нулевой, — см., например, формулу (34) п. 1 этого раздела. Последняя частота ( $\omega^2=0$ ) действительно имеется, это выявляется при анализе колебаний системы со слабой неоднородностью (см. задачу 1).

$$\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0(r) = 3\Omega_0^2(r) + r \frac{d\Omega_0^2}{dr}; \quad (53)$$

$$\Omega_0^2 = \frac{4\pi G}{r^3} \int_0^r \rho_0(r) r^2 dr; \quad \Omega_0 - \text{частота обращения.} \quad (54)$$

Из уравнения (50) интегрированием по «переходному слою» вблизи границы  $r=R$  получается следующее граничное условие для колебаний однородного шара радиуса  $R=1$ :

$$\left[ 1 + \omega_0^2 \sum_{s=-l}^l \frac{\alpha_{ls}}{(\omega - s\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 - \omega_0^2} \right] \frac{d\chi_l}{dr} \Big|_{1-0}^{1+0} = \\ = \omega_0^2 \sum_{s=-l}^l \alpha_{ls} \frac{2s\Omega_0}{(\omega - s\Omega_0)[(\omega - s\Omega_0)^2 - \Omega_0^2 - \omega_0^2]} \chi_l \Big|_{1-0}^{1+0}. \quad (55)$$

Граничное условие (55), означающее разрыв первой производной потенциала, соответствует, очевидно, появлению при искривлении границы эффективного простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma = \rho_0 \Delta R$ . Второе граничное условие есть требование непрерывности самого потенциала

$$\chi_l \Big|_{1-0}^{1+0} = 0. \quad (56)$$

Граничные условия (55), (56) должны, конечно, выполняться и для рассмотренных выше возмущений с  $\Delta\chi_l \neq 0$ , так что функция  $\chi_l$  является не совсем произвольной. Нужно потребовать, чтобы не смещалась граница шара, а соответствующее потенциалу  $\chi_l$  перераспределение плотности  $\rho_1$  давало нулевой 2<sup>l</sup>-польный момент<sup>1</sup>

$$\int_0^R \rho_1 r^{l+2} dr = \int_0^R \Delta\chi_l r^{l+2} dr = 0. \quad (57)$$

Такое возмущение не создает потенциала вне шара:

$$\chi_{l>} \equiv 0, \quad \frac{d\chi_{l>}}{dr} \equiv 0. \quad (58)$$

Если также наложить требование (не противоречащее (57))

$$\chi_{l<}(R) = 0, \quad (59)$$

то с учетом дисперсионного уравнения (43) граничные условия (55), (56) будут удовлетворены.

Поскольку для интересующих нас теперь поверхностных колебаний

$$\chi_l(r > 1) = r^{-(l+1)}, \quad \chi_l(r < 1) = r^l, \quad (60)$$

то с помощью (55) получаем искомого характеристическое уравнение

$$a_l \equiv \frac{3}{2l+1} \sum_{s=-l}^l \frac{\alpha_{ls}}{(\omega - s)^2 - 4} \left( l - \frac{2s}{\omega - s} \right) = -1. \quad (61)$$

Дисперсионное соотношение (61) заменяет (43) для случая  $\Delta\chi_l = 0$ .

<sup>1</sup> Мы уже встречались с аналогичным условием в случае цилиндра — см. (11) в § 6 предыдущей главы. Заметим, что условие (57) представляет собой естественное обобщение на случай возмущений с  $l > 1$  условия  $\int_0^R \rho_1(r) r^3 dr = 0$ , вытекающего из закона сохранения импульса.

При  $l=1$  имеем  $\omega^2=0$ . Это очевидный результат, означающий сдвиг шара как целого. При  $l=2$   $\omega^2=14/5$ , последующим  $l$  отвечает большее число собственных частот, однако все они являются вещественными.

Для доказательства снова представим характеристическое уравнение в мультипликативной форме:

$$a_l \equiv \frac{3l}{2l+1} \frac{1 \cdot (\omega^2-4)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{(\omega^2-4)(\omega^2-16) \dots [\omega^2-l^2]} = -1 \quad (l \text{ четно}), \quad (62)$$

$$a_l = \frac{3l}{2l+1} \frac{1 \cdot \omega^2(\omega^2-4) \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{(\omega^2-1)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-l^2]} = -1 \quad (l \text{ нечетно}). \quad (63)$$

Примерный график функции  $a_l(\omega)$  для случая четного  $l$  (для нечетного  $l$  рассмотрение аналогично) дан на рис. 15. Доказательство прово-

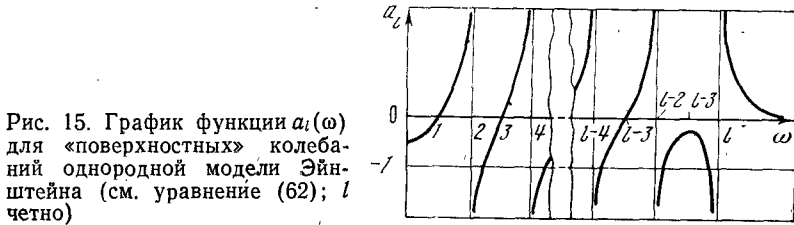


Рис. 15. График функции  $a_l(\omega)$  для «поверхностных» колебаний однородной модели Эйнштейна (см. уравнение (62);  $l$  четно)

дится точно так же, как в предыдущем пункте. По одному корню содержат интервалы

$$(2, 4), (4, 6), \dots, (l-4, l-2) \quad (64)$$

и симметричные интервалы при отрицательных  $\omega$ , всего здесь  $(l-4)$  корня. К ним добавляются по два корня в интервалах  $(l-2, l)$  и  $(-l+2, -l)$ , поскольку для  $a_l(l-1)$  в рассматриваемом случае имеет место та же оценка, что и раньше:

$$-a_l(l-1) = \frac{3l(l-1)(2l-4)!!}{(4l^2-1)(2l-3)!!} < \frac{3l(l-1)}{(4l^2-1)} < 1. \quad (65)$$

Полное число корней  $l$  совпадает со степенью характеристического уравнения, что и означает устойчивость.

Рассмотренные в этом пункте поверхностные колебания бесстолкновительной сферы аналогичны колебаниям сферы из несжимаемой жидкости в том смысле, что здесь тоже возмущение локальной плотности  $\rho_1=0$ . Напомним выражение для частот колебаний несжимаемой сферы (принадлежащие Кельвину)

$$\omega^2 = \frac{2l(l-1)}{(2l+1)}. \quad (66)$$

Очевидно, между (66) и (61) мало общего. Например, для  $l=2$  из (66) получаем  $\omega^2=4/5$ , а из (61)  $\omega^2=14/5$ ; для  $l=3$  из (66)  $\omega^2=12/7$ , а из (61) получаем две разные частоты  $\omega_1^2, \omega_2^2$  (которые определяются из уравнения  $7\omega^4-61\omega^2+63=0$ ) и т. д.

### 3.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ С ОРБИТАМИ, БЛИЗКИМИ К КРУГОВЫМ

В предыдущем разделе траектории частиц предполагались круговыми. Случай круговых орбит является вырожденным в том смысле, что частота коллективных колебаний не зависит от радиального волнового числа. Исходя из аналогии с плазменными средами, можно предположить, что вырождение снимается, если частицы имеют радиальную скорость (случай некруговых траекторий). Вопрос о равновесной функ-

ции распределения такой системы рассмотрен нами в § 1 (п. 4). Ниже показывается, что вырождение действительно снимается в случае, когда траектории частиц отличаются от круговых. Мы будем для простоты рассматривать колебания однородного шара. Невозмущенная функция распределения согласно § 1 имеет вид

$$f_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_s} \left\{ \delta_r \delta_{\perp} \left( 1 + \frac{\theta}{2v_0^2} \right) + \delta_r \delta'_{\perp} \frac{\theta}{2v_0} + \frac{\theta}{2} \delta_r \delta''_{\perp} + \frac{\theta}{2} \delta''_r \delta_{\perp} \right\}, \quad (1)$$

где  $\delta_r = \delta(v_r)$ ,  $\delta_{\perp} = \delta(v_{\perp} - v_0)$  и  $\theta$  — средний квадрат радиальной скорости.

Возмущенную функцию  $f_1$  ищем в виде

$$f_1 = A \delta_r \delta_{\perp} + B \delta_r \delta'_{\perp} - C \delta'_r \delta_{\perp} + \theta [C_1 \delta'_r \delta'_{\perp} + C_2 \delta_r \delta''_{\perp} + C_3 \delta'_r \delta''_{\perp} + C_4 \delta_r \delta'''_{\perp} + C_5 \delta''_r \delta_{\perp} + C_6 \delta''_r \delta'_{\perp} + C_7 \delta'_r \delta'_{\perp}]. \quad (2)$$

На коэффициенты  $A, B, C, C_1, \dots, C_7$  получаем систему десяти уравнений, решая которые можно после довольно громоздких вычислений прийти к выражению для  $\rho_1$  вида

$$\rho_1 = \rho_0 \left\{ \sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)| \frac{1}{4\Omega^2 - \omega_s^2} \Delta\Phi_1 + \sum_{s=-l}^l \frac{3\theta |P_{s0}^l(0)|^2}{(4\Omega^2 - \omega_s^2)(16\Omega^2 - \omega_s^2)} \Delta(\Delta\Phi_1) \right\}. \quad (3)$$

Это дает возможность получить уравнение для возмущенной плотности

$$\frac{\theta}{\alpha} \Delta\rho_1 + \rho_1 = 0, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{\omega_s^2 - \Omega^2}{\omega_s^2 - 4\Omega^2}}{\sum_{s=-l}^l |P_{s0}^l(0)|^2 \frac{3\Omega^2}{(\omega_s^2 - 4\Omega^2)(16\Omega^2 - \omega_s^2)}}. \quad (5)$$

Для случая  $l=0$  получаем ( $k^2 \equiv \alpha/\theta$ )

$$\omega^2 = \Omega^2 + 3/5 k^2 v_T^2, \quad (6)$$

где  $v_T^2 = \theta$ ,  $k^2 = k_{\perp}^2 + k_r^2$ ,  $k_{\perp}^2 = l(l+1)/r^2$ .

Для  $l=2$

$$\omega_1^2 = 3,1 \Omega^2 + 7,4 k^2 v_T^2, \quad \omega_2^2 = 13,9 \Omega^2 + 0,5 k^2 v_T^2 \quad (7)$$

и т. д.

Таким образом, мы видим, что учет радиальной дисперсии скоростей не приводит к нарушению устойчивости однородного шара.

### 3.3 УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО ШАРА С ОТЛИЧНЫМ ОТ НУЛЯ МОМЕНТОМ ВРАЩЕНИЯ

В предыдущих разделах этого параграфа исследовалась устойчивость модели скопления в виде сферически-симметричной системы вращающихся по круговым (и близким к круговым) траекториям масс (рис. 1). Общий момент вращения такой системы был равен нулю. Однако в § 1 (см. п. 4) мы видели, что это, вообще говоря, не обязательно: можно построить модели вращающихся сферических скоплений. Поэтому естествен вопрос, устойчивы ли вращающиеся сферически-симметричные конфигурации. Обращаясь к теории устойчивости плазмы [86], заметим, что практически все неустойчивости плазмы обязаны



присутствию стационарного магнитного поля. Как уже неоднократно подчеркивалось, кинетическое уравнение для функции распределения частиц плазмы в магнитном поле совпадает с кинетическим уравнением для «холодных» вращающихся гравитирующих конфигураций в собственной системе отсчета. Известен ряд неустойчивостей в плазме [86], расходящихся на свое развитие энергию стационарного магнитного поля. По этой причине целью настоящего параграфа является выяснение возможности гравитационной неустойчивости, результатом развития которой явилось бы, например, замедление вращения шара как целого.

Рассмотрим колебания однородной модели, описываемой функцией распределения (55) § 1:

$$\hat{f}_0 = \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0) (1 + \mu \sin \theta \sin \alpha) \quad (|\mu| \leq 1). \quad (1)$$

Устойчивость описанной выше системы исследуем аналогично разделу 3.1. Решение линеаризованного кинетического уравнения согласно 3.1 ищем в виде

$$\hat{f}_1 = A \delta(v_r) \delta(v_\perp - v_0) + B \delta(v_r) \delta'(v_\perp - v_0) - C \delta'(v_r) \delta(v_\perp - v_0). \quad (2)$$

Для определения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  получим уравнения

$$\hat{L}^0 A - \frac{1}{r\Omega} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rC) = -\mu \sin \theta \cos \alpha \frac{\rho_0}{2\pi v_0} \hat{K}^0 \Phi_1, \quad (3)$$

$$\hat{L}^0 B - 2\Omega C = \frac{\rho_0}{2\pi \Omega^2 r^2} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_1 (1 - \mu \sin \theta \sin \alpha), \quad (4)$$

$$\hat{L}^0 C + 2\Omega B = -\frac{\rho_0}{2\pi \Omega r} \Phi_1' (1 + \mu \sin \theta \sin \alpha). \quad (5)$$

Здесь

$$\Phi_1' \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad \hat{K}^0 = \frac{v_0}{r} \left( \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

$$\hat{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Преобразуя выражение  $\cos \alpha \sin \theta \hat{K}^0 \Phi_1$ , получим

$$\cos \alpha \sin \theta \hat{K}^0 \Phi_1 = \sin \alpha \sin \theta \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_1 - \Omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}. \quad (6)$$

Представим  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в виде

$$A = A_0 + A_1 \mu \sin \alpha \sin \theta, \quad B = B_0 + B_1 \mu \sin \alpha \sin \theta, \quad C = C_0 + C_1 \mu \sin \alpha \sin \theta.$$

Для  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  получим систему уравнений, аналогичную системе для  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в разделе 3.1.

Замечая, что  $\hat{L}^0 \begin{Bmatrix} B_1 \\ C_1 \end{Bmatrix} \sin \alpha \sin \theta = \sin \alpha \sin \theta \hat{L}^0 \begin{Bmatrix} B_1 \\ C_1 \end{Bmatrix}$ , получим:  $B_1 = B_0$ ;  $C_1 = C_0$ . Согласно (6) преобразуем уравнение (3)

$$\begin{aligned} \hat{L}^0 A_1 - \frac{1}{r\Omega} \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) B_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r C_1 &= \\ &= \frac{1}{\Omega r^2} \left[ - \left( \hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_1 \frac{\rho_0}{2\pi v_0} + \frac{\rho_0 / 2\pi v_0}{\sin \alpha \sin \theta} \Omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислив из (7)  $A_1$ , для возмущенной плотности  $\rho_1$  получим

$$\rho_1 = \int_0^{2\pi} (A_0 v_0 - B_0) d\alpha + \mu \int_0^{2\pi} (A_1 v_0 - B_1) \sin \alpha \sin \theta d\alpha. \quad (8)$$

Вычисление второго интеграла в (8) сводится к вычислению интеграла (см. раздел 3.1)

$$\int_0^{2\pi} \sum_{s=-l}^l T_{ms}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, \frac{\pi}{2} + \alpha \right) e^{-is\pi} P_{s's}^l(0) \sin \alpha \sin \theta d\alpha \equiv I. \quad (9)$$

Используя рекуррентные формулы для  $P_{mn}^l(\cos \theta)$  [33]

$$\sin \theta \frac{dP_{mn}^l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} + \frac{m-n \cos \theta}{\sin \theta} P_{mn}^l(\cos \theta) = i\alpha_n P_{m,n-1}^l(\cos \theta),$$

$$\sin \theta \frac{dP_{mn}^l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} - \frac{m-n \cos \theta}{\sin \theta} P_{mn}^l(\cos \theta) = i\alpha_{n+1} P_{m,n+1}^l(\cos \theta),$$

$$\alpha_n = \sqrt{(l+n)(l-n+1)},$$

получим, что интеграл в (9) равен

$$I = Y_m^l(\theta, \varphi) P_{s_0}^l e^{is_0\pi} \frac{ms}{l(l+1)} \cdot 2\pi. \quad (10)$$

Для  $\rho_1$  окончательно получим

$$\begin{aligned} \rho_1 = & -\rho_0 \sum_{s=-l}^l |P_{s_0}^l(0)|^2 \frac{1}{(\omega-s\Omega)^2-4\Omega^2} \Delta\Phi_1 - \\ & -\rho_0 \sum_{s=-l}^l |P_{s_0}^l(0)|^2 \frac{s}{(\omega-s\Omega)^2-4\Omega^2} \mu \frac{m}{l(l+1)} \Delta\Phi_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (11) в линеаризованное уравнение Пуассона, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\psi(x) \equiv 1 + \sum_{s=-l}^l \frac{3}{(x-s)^2-4} \left( 1 + \frac{\mu m}{l(l+1)} s \right) |P_{s_0}^l(0)|^2 = 0 \quad \left( x = \frac{\omega}{\Omega} \right). \quad (12)$$

Это уравнение тоже приводится к мультипликативной форме

$$\begin{aligned} a_{lm} = & \frac{3(\omega^2-4)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{\omega(\omega^2-4)(\omega^2-16) \dots [\omega^2-(l+2)^2]} \{ \omega[\omega^2-(l^2+l+1)] + \\ & + \mu m [\omega^2-(l^2+l-2)] \} = -1 \quad (l \text{ четно}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a_{lm} = & \frac{3\omega^2(\omega^2-4) \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{\omega(\omega^2-4)(\omega^2-9) \dots [\omega^2-(l+2)^2]} \{ \omega[\omega^2-(l^2+l+1)] + \\ & + \mu m [\omega^2-(l^2+l-2)] \} = -1 \quad (l \text{ нечетно}). \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство устойчивости и в этом случае легче всего провести, строя графики функций  $a_{lm}$  (рис. 16). Небольшое усложнение по сравнению с ранее рассмотренными уравнениями связано с наличием «нестандартного» кубического полинома в выражении для  $a_{lm}$ :

$$F_\alpha(\omega) \equiv \omega^3 - \alpha\omega^2 - (l^2+l+1)\omega - \alpha(l^2+l-2), \quad (15)$$

где через  $\alpha$  обозначен параметр  $\alpha \equiv \mu m$ ; очевидно, что  $-l < \alpha < l$ , но достаточно рассмотреть случай положительных  $\alpha$ :  $0 < \alpha < l$ . Легко проверить, что  $F_\alpha(\omega)$  всегда содержит по одному корню в интервалах  $(l, l+2)$  и  $(-l-2, -l)$  (соответственно  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ). Это фиксированные корни на рис. 16. Третий ( $\omega_3$ ) корень  $F_\alpha(\omega)$  более «подвижный». При увеличении  $\alpha$  от 0 до  $l$  он перемещается от малых отрицательных значений ( $\omega_3 \approx -\alpha \frac{l^2+l-2}{l^2+l+1}$  при  $\alpha \rightarrow 0$ ) до значения  $\omega_3 = -(l-1)$  при  $\alpha = l$ .

Оказывается, однако, что качественная картина  $a_{lm}(\omega)$  не зависит от по-

ложения  $\omega$ , в области  $(-l+1, 0)$ . График  $a_{lm}(\omega)$  на рис. 16 соответствует значению  $\omega$ , в интервале  $-l+k, -l+k+1$ .

Вещественность всех корней можно легко доказать из рассмотрения этого графика и следующих оценок:

$$-a_{lm}(l-1) = \frac{(2l-4)!!}{(2l-3)!!} \cdot \frac{3(l-1)(l+\alpha)}{(4l^2-1)} < \frac{(2l-4)!!}{(2l-3)!!} \cdot \frac{3}{2} < 1, \quad (16)$$

если  $l \geq 4$ ;

$$-a_{lm}(l-1)|_{l=2} = \frac{2+\alpha}{5} < 1 \quad (\alpha < l < 3), \quad (17)$$

$$-a_{lm}(-l+1) = \frac{(2l-4)!!}{(2l-3)!!} \cdot \frac{3(l-1)(l-\alpha)}{(4l^2-1)} < \frac{3(l-1)(l-\alpha)}{(4l^2-1)} < 1. \quad (18)$$

Из графика на рис. 16 очевидно, что по одному корню содержат интервалы:

$$(-l+2, -l+4), \dots, (-l+k-2, -l+k); \quad (19)$$

$$(-l+k+2, -l+k+4), \dots, (-2, 0); \quad (20)$$

$$(0, 2), \dots, (l-4, l-2); \quad (21)$$

$$(-l-2, -l), (l, l+2), \quad (22)$$

а из оценок (16) — (18) следует, что еще по два корня лежат в интервалах  $(-l, -l+2)$  и  $(l-2, l)$ . В ряду (19) имеется  $(k/2-1)$  корней, в (20)  $(l-k-2)/2$  корней, в (21) —  $(l/2-1)$  корней. К ним надо прибавить

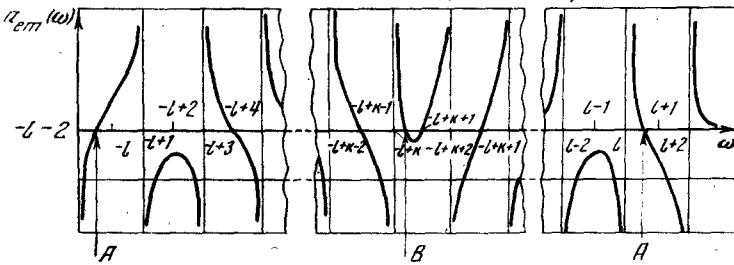


Рис. 16. График функции  $a_{lm}(\omega)$  для «внутренних» колебаний однородных, твердотельно-вращающихся сфер с круговыми орбитами

А — «фиксированные» корни; В — «подвижный» корень

два корня (22) и четыре корня в интервалах  $(-l, -l+2)$ ,  $(l-2, l)$ . Общее число корней совпадает со степенью характеристического уравнения, равной  $(l+3)$ . Это и доказывает вещественность всех частот колебаний рассматриваемой системы.

Легко получить [154] характеристическое уравнение и для возмущений «поверхностного» типа ( $\Delta\chi_i=0$ )

$$\frac{3}{2l+1} \sum_{s=-l}^l \frac{\alpha_{ls}}{(\omega-s)^2-4} \left( -l + \frac{2s}{\omega-s} \right) \left[ 1 + \frac{\mu ms}{l(l+1)} \right] = 1. \quad (23)$$

Мультипликативная форма записи в этом случае следующая:  $a_{lm} = -1$ ,

$$a_{lm} = \frac{3l}{2l+1} \frac{1 \cdot (\omega^2-1) \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{\omega(\omega^2-4) \dots [\omega^2-l^2]} \left( \omega + \mu m \frac{l-1}{l} \right) \quad (l \text{ четно}), \quad (24)$$

$$a_{lm} = \frac{3l}{2l+1} \frac{1 \cdot \omega^2 \dots [\omega^2-(l-3)^2]}{\omega(\omega^2-1) \dots [\omega^2-l^2]} \left( \omega + \mu m \frac{l-1}{l} \right) \quad (l \text{ нечетно}). \quad (25)$$

Вещественность всех корней доказывается так же, как и в предыдущем случае (даже несколько проще; «подвижный» корень здесь равен  $\omega_0 = -\frac{\mu m(l-1)}{l}$ ).

Рассмотрим несколько подробнее случай слабого вращения (малые  $\mu$ ). Переписав уравнение (12) в виде

$$1 + \sum_{s=-l}^l \frac{3\alpha_{ls}}{(\omega-s)^2 - 4} = -\frac{3\mu m}{l(l+1)} \sum_{s=-l}^l \frac{s\alpha_{ls}}{(\omega-s)^2 - 4}, \quad (26)$$

будем решать его последовательными приближениями:

$$\omega = \omega_0 + \mu\omega_1 + \dots \quad (27)$$

Здесь  $\omega_0$  — какая-либо частота покоящегося шара, она определяется только главным индексом  $l$  сферической гармоники  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ ;  $\mu\omega_1$  — добавка, обязанная вращению. Подставляя (27) в (26), получим

$$\mu\omega_1 = \mu m a(\omega_0)/2, \quad (28)$$

где

$$a(\omega_0) \equiv \frac{\sum_{s=-l}^l \frac{s\alpha_{ls}}{(\omega_0-s)^2 - 4}}{l(l+1) \sum_{s=-l}^l \frac{(\omega_0-s)\alpha_{ls}}{[(\omega_0-s)^2 - 4]^2}}.$$

Для возмущений поверхностного типа получается аналогичное (28) выражение.

Мы пришли к естественному результату. Медленное вращение снимает отмеченное выше  $(2l+1)$ -кратное вырождение частот, которые расщепляются согласно (28) аналогично расщеплению уровней квантовомеханической системы в магнитном поле (эффект Зеемана), причем роль силы Лоренца в данном случае играет кориолисова сила. Подобное расщепление частот можно проследить и на других примерах (для колебаний почти сферических эллипсоидов, газовых шаров и т. п.). В действительности оно представляет общий закон, являющийся следствием теории групп.

В заключение необходимо подчеркнуть, что выше доказана (экспоненциальная) устойчивость лишь для *твердотельно*-вращающихся сфер. Возможно, среди более общих систем с круговыми орбитами имеются неустойчивые (см. раздел 3.2 главы IV, где этот вопрос обсуждается подробнее).

#### 3.4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

Уравнение, описывающее малые колебания сферически-симметричной системы вращающихся по круговым траекториям масс с произвольной зависимостью плотности от радиуса, мы уже приводили в разделе 3.1 (см. (50)). Исследовать это уравнение можно аналогично тому, как это было сделано в § 6 главы II при изучении желобковых колебаний родственной системы — неоднородного цилиндра с круговыми орбитами частиц.

Во многом аналогичны и получающиеся результаты.

Для радиальных возмущений мы имеем непрерывный спектр частот  $\omega^2 = \Omega^2(r_0)$ ,  $0 < r_0 < R$ , которым соответствуют колебания отдельных бесконечно тонких слоев,  $\Phi_1' \sim \delta(r-r_0)$ .

Локальные дисперсионные соотношения в данном случае можно получить точно так же, как в § 6 главы II. Ими определяется совокупность непрерывных спектров вида ( $\omega_s \equiv \omega - s\Omega(r)$ ):

$$\omega_s(r) = 0, \quad (1)$$

$$\omega_s^2(r) - \kappa^2(r) = 0, \quad (2)$$

происходящих от полюсов функции  $B_l(r, \omega)$ , и непрерывного спектра, определяемого уравнением

$$A_l(r, \omega) = 0. \quad (3)$$

При этом спектры (1) и (2) отвечают устойчивым колебаниям (причем (2) аналогичен (24) в § 6 главы II). Более интересно уравнение (3), которое может описывать как устойчивые, так и неустойчивые локализованные возмущения (см. ниже, с. 151).

Убедиться в существовании непрерывных спектров частот собственных (сингулярных) колебаний можно, решая (способом, аналогичным использованному в § 6 главы II) задачу об эволюции начальных возмущений, локализованных в некоторой узкой области. Для локально-устойчивых систем (корни уравнения (3) вещественны) одновременно определяется и закон *затухания* во времени таких возмущений ( $\sim t^{-2}$  или  $t^{-3}$ ). Ничего принципиально нового по сравнению со случаем неоднородного цилиндра при этом не обнаруживается. Для локально-неустойчивых систем (когда имеются мнимые корни уравнения (3)) возмущения указанного типа *нарастают* по экспоненциальному (в основном) закону.

Для каждого фиксированного  $r$  (и данного  $l$ ) уравнение (3) имеет конечное число корней  $\omega$ . Напомним, что в случае цилиндра (§ 6) мы имели один корень ( $\omega^2 = 2\Omega^2$ ). Различие, очевидно, связано с наличием в сферически-симметричных системах с круговыми орбитами дисперсий скоростей  $v_\theta^2$  и  $v_\phi^2$ , им соответствуют дополнительные степени свободы (по сравнению с желобковыми колебаниями холодного цилиндра, которые носят чисто гидродинамический характер).

Анализ расположения корней уравнения (3) [106] (см. задачу 1) приводит к выводу о (локальной) неустойчивости систем с  $d\Omega^2/dr > 0$ . Если же выполнено противоположное условие ( $d\Omega^2/dr < 0$ ), то система оказывается устойчивой относительно такого рода возмущений.

Последнее, однако, еще не означает *полной* устойчивости, поскольку в принципе, даже при выполнении упомянутого условия, неустойчивыми могут оказаться нелокализованные возмущения. Наличие таких возмущений легко установить, например, из анализа малых колебаний почти однородной сферы, который можно выполнить аналогично случаю почти однородного цилиндра (§ 6 главы II). В пределе однородной сферы эти колебания соответствуют «поверхностным» модам, рассмотренным в § 3.1, п. 3<sup>1</sup>. Для сферы с произвольной степенью неоднородности можно сравнительно просто получить дисперсионное уравнение, описывающее подобные «глобальные» возмущения (по классификации § 6 главы II), только при  $l \gg 1$ , когда эти возмущения также становятся локализованными (вблизи от поверхности шара  $r=R$ ). В этом случае возмущения, быстро убывающие при удалении от границы  $r=R$ , можно искать в виде

$$\chi_l \sim e^{-k(R-r)} \quad (kR \gg 1). \quad (4)$$

<sup>1</sup> Не исключено также существование дискретного спектра «внутренних» колебаний. Этот вопрос, однако, пока остается не исследованным (как и в случае колебаний цилиндра).

Дисперсионное уравнение получается следующим:

$$l[1 + \sqrt{|A_l|} \operatorname{sgn} A_l]_R = 2\Omega\omega_0^2 \sum_{s=-l}^l \frac{s\alpha_{ls}}{\omega_s(\omega_s^2 - \kappa^2)}. \quad (5)$$

Нетривиальные решения (5) при  $l \gg 1$  соответствуют  $A_l \approx -1$ , или

$$2 + \omega_0^2 \sum_{s=-l}^l \frac{\alpha_{ls}}{\omega_s^2 - \kappa^2} = 0. \quad (6)$$

Для однородного шара это уравнение, как и должно быть, переходит в уравнение (61) раздела 3.1 (при  $l \gg 1$ ).

Характер расположения корней уравнения (6) можно выяснить так же, как и для уравнения (3). Анализ (см. задачу 1) показывает, что возмущения вида (4) не приводят к каким-либо новым неустойчивостям (по сравнению с локальными колебаниями «внутреннего» типа, которые описываются уравнением (3)).

## § 4. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ГРАВИТИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ, ВРАЩАЮЩИХСЯ ПО ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОРБИТАМ

### 4.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ШАРА

#### С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ ЧАСТИЦ

Полагая в формуле (29) § 1  $\Omega_0=1$ ,  $a=1$ , перепишем исследуемую функцию распределения в виде

$$\bar{f}_0 = \frac{r_0}{\pi^2} \frac{\theta[(1-r^2)(1-v_\perp^2) - v_r^2]}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_\perp^2) - v_r^2}}. \quad (1)$$

Невозмущенный потенциал однородной сферы равен

$$\Phi_0 = \frac{r^2}{2} + \text{const}. \quad (2)$$

Для исследования малых возмущений воспользуемся методом вариации фазового объема системы (глава I, § 5). Теория возмущений строится стандартным способом. Пишем [111]

$$\rho_0 \frac{\theta[(1-r^2)(1-v_\perp^2) - v_r^2 - \varepsilon\chi]}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_\perp^2) - v_r^2 - \varepsilon\chi}}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon\chi(t, r, \mathbf{v})$  — искомое возмущение, которое представляет собой отклонение аргумента функции распределения от стационарного значения. Линеаризованное кинетическое уравнение выглядит тогда следующим образом:

$$\frac{d\chi}{dt} = 2v_r \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} + \frac{2}{r} \left( \cos\alpha \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \right) (1-r^2)v_\perp, \quad (4)$$

где  $\operatorname{tg}\alpha = v_\varphi/v_\theta$ . Выполнив под интегралом в выражении для полной плотности

$$\rho = \frac{\rho_0}{2\pi^2} \int \frac{\theta[\kappa^2(1-v_\perp^2) - v_r^2 - \varepsilon\chi]}{\sqrt{\kappa^2(1-v_\perp^2) - v_r^2 - \varepsilon\chi}} dv_r dv_\perp^2 d\alpha \quad (\kappa^2 \equiv 1-r^2) \quad (5)$$

замену переменных

$$-\kappa_1^2 v_{\perp 1}^2 = -\kappa^2 v_\perp^2 - \varepsilon\chi(0, v_\perp), \quad (6)$$

$$-v_{r1}^2 = -v_r^2 - \varepsilon \chi_1, \quad (7)$$

где  $\chi_1^2 = 1 - r^2 - \varepsilon \chi_0$ ,

$$\begin{aligned} \chi_0 &\equiv \chi(v_r=0, v_\perp=0); \quad \chi(0, v_\perp) \equiv \chi_2 = \chi(v_r=0, v_\perp) - \chi_0, \\ \chi_1 &= \chi - \chi_0 - \chi_2, \end{aligned} \quad (8)$$

получим формулу для смещения границы

$$\Delta R = -\frac{1}{2} \varepsilon \chi_0 \Big|_{r=1} \quad (9)$$

и рецепт вычисления возмущенной плотности

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{2\pi^2} \int \frac{dv_r dv_\perp^2 d\alpha}{\sqrt{(1-r^2)(1-v_\perp^2)-v_r^2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_r} \left( \frac{\chi_1}{v_r} \right) + \frac{\frac{\partial}{\partial v_\perp^2} [\chi_0 \cdot v_\perp^2 + \chi_2]}{1-r^2} \right\}. \quad (10)$$

Угловая зависимость возмущения потенциала  $\Phi_1$  в рассматриваемом случае, как и для любых сферически-симметричных систем с равновесными функциями распределения, зависящими только от  $E$  и  $L^2$ ,  $f_0 = f_0(E, L^2)$ , может быть выбрана пропорциональной отдельной сферической гармонике (см. § 2 Приложения)

$$\Phi_1 = \chi_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Для однородных сфер радиальная часть потенциала  $\chi_l$  представляется в виде полинома степени  $n$  ( $n \geq l$ ):

$$\chi_l^{(n)}(r) = (r^n + C_2 r^{n-2} + \dots + C_n) r^l \quad (n \text{ четно}),$$

что является частным проявлением общего результата, согласно которому возмущение потенциала подобных (1) систем с квадратичным потенциалом можно искать в виде полиномов по степеням декартовых координат  $x, y, z$ .

Рассмотрим сначала радиальные возмущения; тогда

$$\Phi_L^{(n)} = r^n + C_2 r^{n-2} + \dots + C_n \quad (n \text{ четно}). \quad (12)$$

Кинетическое уравнение

$$\frac{d\chi}{dt} = -2v_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - 2 \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (13)$$

решается методом интегрирования по траекториям:

$$\chi(r, v_r, v_\perp) = -2i\omega \int_{-\infty}^0 \Phi_1(r') e^{-i\omega t'} dt' - 2\Phi_1(r), \quad (14)$$

где

$$r'^2 = r^2 \cos^2 t + v^2 \sin^2 t + r v_r \sin 2t. \quad (15)$$

Подставляя (12) и (15) в (14), можно получить выражение для возмущения  $\chi(r, v_r, v_\perp)$  в случае произвольной радиальной моды  $n$ . Полученную таким образом функцию  $\chi(r, v_r, v_\perp)$  следует представить в виде (8) и затем по формуле (10) вычислить возмущенную плотность  $\rho_1$ , а также соответствующий этой плотности потенциал  $\Phi_1(r)$  (очевидно, что для радиальных возмущений смещение границы (9) несущественно). Сравнение вычисленного потенциала с исходным выражением (12) дает спектр колебаний системы (причем, как всегда, для получения спектра достаточно удерживать при вычислениях только член со старшей степенью  $r$ ).

Описанные выкладки в общем случае приводят к громоздкому выражению для спектра колебаний. Поэтому ниже мы ограничимся вычислением частот лишь для некоторых «низших» (самых крупномасштабных) мод ( $n=2; 4$ ).

Для  $n=2$  имеем

$$\Phi_1 \sim r^2, \quad (16)$$

так что по (12) — (15) получим

$$\chi \sim -\frac{4r^2}{\omega^2 - 4} + \frac{4v^2}{\omega^2 - 4}. \quad (17)$$

Разбиваем  $\chi$  согласно формулам (8):

$$\chi_0 = -\frac{4r^2}{\omega^2 - 4}, \quad \chi_2 = \frac{2v^2}{\omega^2 - 4}, \quad \chi_1 = \frac{4v^2}{\omega^2 - 4}. \quad (18)$$

Теперь найдем возмущенную плотность (по формуле (10))

$$\rho_1 \sim \rho_0 \frac{6}{\omega^2 - 4}, \quad (19)$$

так что возмущенный потенциал должен равняться

$$\Phi_1 \sim \frac{3}{\omega^2 - 4} r^2. \quad (20)$$

Отсюда, сравнивая с (16), получаем  $\omega^2 = 1$ .

Для  $n=4$  выкладки аналогичны. Полагаем  $\Phi_1 \sim r^4$ ; тогда

$$\chi \sim 4r^4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) + 4v^4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} - \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) - 16 \frac{r^2 v^2 - r^2 v^2 / 2}{\omega^2 - 16}; \quad (21)$$

$$\rho_1 \sim \rho_0 \left( \frac{35/2}{\omega^2 - 16} + \frac{5/2}{\omega^2 - 4} \right) r^2; \quad \Phi_1 \sim \frac{3r^4}{20} \left( \frac{35/2}{\omega^2 - 16} + \frac{5/2}{\omega^2 - 4} \right).$$

Спектр колебаний для моды  $n=4$  получается в виде

$$\frac{7}{\omega^2 - 16} + \frac{1}{\omega^2 - 4} = \frac{8}{3}, \quad (22)$$

откуда находим квадраты частот

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (23 \pm \sqrt{207}). \quad (23)$$

Все частоты (23) вещественны, что соответствует устойчивости колебаний.

Рассмотрим теперь возмущения, искривляющие границу системы. Среди них, по-видимому, наиболее «опасными» для устойчивости являются возмущения, имитирующие колебания несжимаемой жидкости, т. е. соответствующие случаю, когда возмущенная плотность  $\rho_1 = 0$ . Выведем общую формулу, описывающую спектр этих возмущений (она, как мы увидим, имеет довольно простой вид). Возмущенный потенциал в рассматриваемом случае записывается следующим образом:

$$\Phi_1^{(l,m)} = r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (24)$$

Очевидно, однако, что частоты колебаний исследуемой системы не зависят от азимутального числа  $m$ , поэтому будем рассматривать возмущения вида

$$\Phi_1^{(l,0)} = r^l P_l(\cos \theta) \equiv F_l(x, y, z) = z^l + \dots, \quad (25)$$

где  $F_l(x, y, z)$  — гармонический полином степени  $l$ . Можно показать, что для нахождения спектра достаточно ограничиваться при вычисле-



ниях старшей степенью  $z$  в выражении для  $\Phi_1$ . Функция  $\chi$  находится из кинетического уравнения интегрированием по траекториям (удобнее в декартовых координатах). Для смещения границы шара получим

$$\Delta R = \frac{l}{2^l} \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \left( \frac{1}{\omega - 2k + l - 2} - \frac{1}{\omega - 2k + l} \right) P_l(\cos \theta). \quad (26)$$

Спектр находится из условия

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=1+0} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=1-0} = 4\pi G\sigma = 4\pi G\rho_0 \Delta R \quad (27)$$

и может быть представлен в виде

$$1 = -\frac{3l}{2^{l-1}(2l+1)} \sum_{k=0}^{l-1} C_{l-1}^k \frac{l-2k}{\omega^2 - (l-2k)^2}. \quad (28)$$

При  $l=1$  получаем естественный результат:  $\omega^2=0$ . Квадрупольному возмущению  $l=2$  соответствует  $\omega^2=14/5$  (более подробный расчет этой моды приведен в [112]).

Для следующих  $l$  получается большее число собственных мод, все они являются устойчивыми. Действительно, пусть, например,  $l$  нечетно:  $l=2N+1$  (случай четного  $l$  рассматривается подобным образом). Тогда уравнение (28) можно привести к форме

$$-1 = \sum_{p=-N}^N \frac{\gamma_p}{(\omega - 2p)^2 - 1}; \quad \gamma_p \equiv \frac{3(2N+1)}{2^{2N+2}(4N+3)} \frac{(2N)!}{(N+p)!(N-p)!}, \quad (29)$$

которая эквивалентна стандартной записи (68) § 5 главы I. Устойчивость вытекает из легко доказываемого неравенства

$$\gamma_p = \frac{3}{4} \cdot \frac{2N+1}{4N+3} \cdot \frac{(2N)!}{2^{2N}(N+p)!(N-p)!} < 1 \quad (30)$$

(в записи (30) каждый из трех сомножителей меньше 1).

#### 4.2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ШАРА ФРИМАНА

Фриманом [203] были предложены бесстолкновительные модели вращающихся однородных эллипсоидов (с произвольными полуосями  $a, b, c$ ). Они рассматриваются в следующей главе. В пределе  $a=b=c \equiv R$  получается шар, равновесие в котором обеспечивается вращением частиц в плоскости  $(x, y)$  и локальной дисперсией скоростей по оси  $z$ , так что в каждой точке шара мы имеем лишь одномерную дисперсию. Рассматриваемая модель вращается вокруг оси  $z$  с максимальной возможной угловой скоростью  $\Omega = (4\pi G\rho_0/3)^{1/2}$ .

Функция распределения (во вращающейся системе координат) имеет вид

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\delta(v_x) \delta(v_y)}{\sqrt{1-r^2-v_z^2}}, \quad (1)$$

где радиус шара  $R$  и величина  $\Omega$  приняты равными единице.

Применим теорию возмущений [91, 96], скомбинированную из метода  $\delta$ -разложений и метода вариации фазового объема. Возмущенную функцию распределения записываем в виде

$$f = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\delta(v_x) \delta(v_y)}{\sqrt{1-r^2-v_z^2 - \varepsilon\chi}} + \frac{\varepsilon\rho_0}{\pi} B \frac{\delta'(v_x) \delta(v_y)}{\sqrt{1-r^2-v_z^2}} + \frac{\varepsilon\rho_0}{\pi} C \frac{\delta(v_x) \delta(v_y)}{\sqrt{1-r^2-v_z^2}}, \quad (2)$$

где введены новые неизвестные функции

$$\chi = \chi(t, r, v_z); \quad B = B(t, r, v_z); \quad C = C(t, r, v_z).$$

Подставляя  $f$  в кинетическое уравнение (которое здесь удобно написать в декартовых координатах)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + 2v_x \frac{\partial f}{\partial v_y} - 2v_y \frac{\partial f}{\partial v_x} + \left(x - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial v_x} + \\ + \left(y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и линеаризируя его, получим следующую систему уравнений для функций  $\chi$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \chi}{\partial z} - z \frac{\partial \chi}{\partial v_z} - 2(1 - r^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right) - 2(Bx + Cy) = v_z \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} - z \frac{\partial B}{\partial v_z} - 2C = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} - z \frac{\partial C}{\partial v_z} + 2B = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}. \quad (6)$$

Покажем, что рассматриваемая система является неустойчивой относительно поверхностных возмущений. Выберем простейший тип искривления поверхности, при котором возмущение потенциала имеет вид

$$\Phi_1 = \varepsilon (x + iy)^l \equiv \varepsilon A r^l Y_l^l(\theta, \varphi) \quad (7)$$

( $\varepsilon$  — параметр малости), тогда из (5) и (6) получим

$$B = \frac{l(x + iy)^{l-1}}{\omega - 2}; \quad C = -\frac{l(x + iy)^{l-1}}{\omega - 2}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (4) дает

$$\chi = -2l \frac{(x + iy)^l}{\omega(\omega - 2)}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что возмущение плотности действительно равно нулю. Смещение границы  $\Delta R$  можно определить из уравнения возмущенной поверхности шара

$$1 - r^2 + 2l\varepsilon \frac{(x + iy)^l}{\omega(\omega - 2)} = 0,$$

так что

$$\Delta R = \varepsilon \frac{l}{\omega(\omega - 2)} (x + iy)^l \Big|_{r=1} = \varepsilon \frac{l}{\omega(\omega - 2)} A Y_l^l(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Смещению  $\Delta R$  соответствует поверхностная плотность  $\sigma = \rho_0 \cdot \Delta R$ . Потенциал, создаваемый простым слоем с поверхностной плотностью  $\sigma$ , внутри и вне шара равен соответственно

$$\Phi_{<} = D_1 r^l Y_l^l(\theta, \varphi), \quad (11)$$

$$\Phi_{>} = D_2 r^{-l-1} Y_l^l(\theta, \varphi), \quad (12)$$

$D_1$  и  $D_2$  находятся из уравнений

$$\Phi_{<} = \Phi_{>} \Big|_{r=1}, \quad \frac{\partial \Phi_{>}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{<}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 4\pi G \sigma.$$

Отсюда можно определить коэффициент

$$D_1 = -\varepsilon \frac{3l}{2l+1} \frac{A}{\omega(\omega-2)}. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с (7), получим следующее уравнение для определения собственных частот  $\omega$ :

$$\omega^2 - 2\omega + \frac{3l}{2l+1} = 0, \quad (14)$$

откуда

$$\omega = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3l}{2l+1}}. \quad (15)$$

Это уравнение показывает, что при всех  $l$ , кроме  $l=1$  (случай, отвечающий сдвигу шара как целого), имеет место неустойчивость. Инкремент ее с увеличением  $l$  растет и асимптотически приближается к значению  $\gamma_\infty = 1/\sqrt{2}$ .

Заметим, что относительно простых осесимметричных возмущений система оказывается устойчивой. Так, для моды, соответствующей изотропному растяжению или сжатию шара, получаем  $\omega^2=1$ , а для случая возмущения  $\Phi_1 \sim r^2 P_2(\cos \theta)$ , переводящего шар в эллипсоид вращения,  $\omega^2=14/5$ .

Шар Фримана (1) является простейшей моделью системы с эллиптическими траекториями частиц. Здесь представлены не все возможные эллиптические траектории, а лишь те, проекции которых на плоскость  $(x, y)$  дают окружности. Движение всех частиц по этим окружностям происходит в одном направлении, так что шар в целом оказывается вращающимся максимально быстро. Неустойчивость объясняется именно этим быстрым вращением шара (как целого), из-за чего эффективная сила тяжести на его поверхности обращается в нуль. Система, представляющая собой *суперпозицию* двух одинаковых шаров Фримана, вращающихся в противоположные стороны (и, следовательно, как целое, покоящаяся), устойчива по отношению к рассматриваемым возмущениям. Действительно, совершенно аналогично предыдущему в этом случае можно вывести следующее уравнение<sup>4</sup> для частот собственных колебаний вида (7):

$$\frac{3l}{2l+1} \left\{ \frac{1}{(\omega+l)(\omega+l-2)} + \frac{1}{(\omega-l)(\omega-l+2)} \right\} + 2 = 0. \quad (16)$$

Это биквадратное уравнение на  $\omega$ , все решения которого, как легко убедиться, вещественны.

Относительно сплющивания по оси  $z$  в эллипсоид вращения все такие системы устойчивы: дисперсия  $z$ -компоненты скорости оказывается достаточной для их стабилизации.

Рассмотренная в разделе 4.1 модель Камма, в которой представлены все возможные эллиптические орбиты, оказалась, как мы видели, устойчивой.

Интересно сравнить вид собственных функций в двух рассмотренных случаях. Приведем для шара Фримана (1) пример моды, изменяющей не только положение границы, но и локальную плотность:

$$\Phi_1 = [br^4 P_4^2(\cos \theta) + r^4 P_2^2(\cos \theta) + ar^2 P_2^2(\cos \theta)] e^{2i\varphi}. \quad (18)$$

<sup>4</sup> Если относительные веса вращающихся навстречу друг другу компонент равны  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha + \beta = 1$ ), то уравнение (16) заменяется таким:

$$\frac{3l}{2l+1} \left\{ \frac{\alpha}{(\omega+l)(\omega+l-2)} + \frac{\beta}{(\omega-l)(\omega-l+2)} \right\} + 1 = 0. \quad (17)$$

Видно, что она представляет собой определенную комбинацию сферических гармоник; отдельные гармоники не будут в данном случае собственными функциями. Причиной является, очевидно, отсутствие сферической симметрии исходного состояния *движения* системы. Для (единственного) неустойчивого корня  $\omega_7 = 0,64 + 0,22i$  коэффициенты  $b$ ,  $a$  равны:  $b = 0,0089 - 0,00511i$ ,  $a = -1,1052 + 0,02543i$ . Характеристическое уравнение для частот колебаний имеет вид

$$\omega^8 + 8\omega^7 + \frac{37}{3}\omega^6 - \frac{608}{21}\omega^5 - \frac{986}{21}\omega^4 + \frac{1012}{21}\omega^3 + \frac{88}{21}\omega^2 - \frac{1599}{147}\omega - \frac{1312}{49} = 0.$$

Остальные корни этого уравнения:  $\omega_1 = 1,74$ ;  $\omega_2 = -0,25$ ;  $\omega_3 = -1,13$ ;  $\omega_4 = -1,70$ ;  $\omega_5 = -3,93$ ;  $\omega_6 = 0,64 - 0,22i$ ;  $\omega_8 = -4,0$ .

Аналогично выглядит в этом случае и «соседняя» мода:

$$\Phi_1 = [cr^3P_3^1(\cos\theta) + br^3P_1^1(\cos\theta) + arP_1^1(\cos\theta)]e^{im\varphi},$$

где константы  $c$ ,  $b$ ,  $a$ , а также собственные частоты колебаний вычислены в [91].

В отличие от шара Фримана собственные функции анизотропного шара Камма пропорциональны отдельным сферическим гармоникам:

$$\Phi_1 \sim (r^l + ar^{l-2} + \dots) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

причем частоты колебаний не зависят от  $m$ . Это является естественным следствием *полной* сферической симметрии равновесного состояния.

## § 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

### С РАДИАЛЬНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ ЧАСТИЦ

Как известно, орбиты звезд в сферических галактиках и шаровых скоплениях являются очень сильно вытянутыми по радиусу. В связи с этим возник вопрос об устойчивости систем с движениями частиц, близкими к радиальным.

Для чисто радиальных движений ответ на этот вопрос представляет собой довольно очевидным [50, 111]: такие системы должны быть неустойчивыми. Действительно, если, например, при движении по круговым ор-

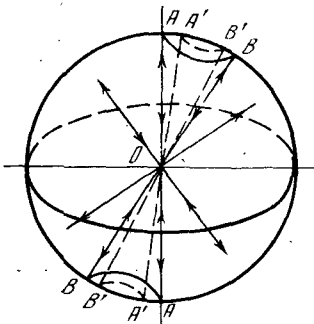


Рис. 17. Сферически-симметричная система с чисто радиальными движениями частиц

битам существует некоторый аналог упругих сил, то при чисто радиальных движениях ничто не препятствует «слипанию» соседних орбит: дисперсия скоростей частиц в тангенциальном направлении, которая стабилизовала бы систему, в этом случае отсутствует.

Рассмотрим какой-нибудь узкий конус в такой сфере ( $AOB$  на рис. 17) и представим себе, что в начальный момент мы его сжали в конус  $A'O'B'$ , сблизив образующие  $AO \rightarrow A'O$ ,  $BO \rightarrow B'O$ . Неизбежность дальнейшего джинсовского «схлопывания» рассматриваемого конуса

тогда очевидна, если еще учесть, что частицы никуда не смогут выйти из области возмущения<sup>1</sup> (в линейном режиме).

Ввиду принципиальной важности вопроса дадим все-таки математически строгое доказательство неустойчивости [11].

Поскольку  $f_0 \sim \delta(v_\theta) \delta(v_\varphi)$ , разложим возмущение функции распределения  $f_1$  в ряд по  $\delta$ -функциям от  $v_\theta$  и  $v_\varphi$  и их производным:

$$f_1 = A\delta(v_\theta)\delta(v_\varphi) + B\delta'(v_\theta)\delta(v_\varphi) + C\delta(v_\theta)\delta'(v_\varphi), \quad (1)$$

где  $A, B, C$  — функции  $v_r, r, \theta, \varphi, t$ . Возмущенная плотность  $\rho_1$ ,  $\theta$ - и  $\varphi$ -компоненты потока вещества  $j_\theta$  и  $j_\varphi$  даются соответственно интегралами по  $v_r$  от  $A, B$  и  $C$ :

$$\rho_1 = \int A dv_r, \quad (2)$$

$$j_\theta = - \int B dv_r, \quad (3)$$

$$j_\varphi = - \int C dv_r. \quad (4)$$

Подставляя (1) в кинетическое уравнение (1) раздела 3.1, получим систему уравнений ( $f_0 = \delta(L^2)\varphi_0(E)$ )

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \hat{D}A + \frac{2v_r}{r}A - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial B}{\partial \theta} + B \operatorname{ctg} \theta \right) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial C}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{v_r}{r^2} \frac{d\varphi_0}{dE}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \hat{D}B + \frac{3v_r}{r}B = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \varphi_0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \hat{D}C + \frac{3v_r}{r}C = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{1}{r^2} \varphi_0, \quad (7)$$

где  $\hat{D}$  — следующий оператор:

$$\hat{D} = v_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v_r}. \quad (8)$$

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} = 4\pi G \int A dv_r. \quad (9)$$

Для  $\Phi_1 = \chi(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$  из уравнений (5) — (9) видно, что должно быть

$$B = F_1(r, v_r, t) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, \quad \sin \theta C = F_1(r, v_r, t) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m, \quad (10)$$

$$A = a_1(r, v_r, t) Y_l^m,$$

так что вместо (5) — (9) получим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi = 4\pi G \int a_1 dv_r, \quad (11)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \hat{D}a_1 + \frac{2v_r}{r}a_1 + \frac{l(l+1)}{r} F_1 = \frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{v_r}{r^2} \frac{d\varphi_0}{dE}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \hat{D}F_1 + \frac{3v_r}{r} F_1 = \frac{\chi}{r^2} \varphi_0. \quad (13)$$

<sup>1</sup> Это не так в случае, когда начальное возмущение локализовано в области, ограниченной по радиусу. Тогда частицы «убегают» из возмущенной области, и возмущение отчасти «рассасывается», по крайней мере вначале. Неустойчивость в этом случае может иметь колебательный характер.

Естественная замена  $a_1 r^2 = a$ ,  $F_1 r^3 = F$  несколько упрощает систему (11) — (13), сводя ее к следующей:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi}{dr} \right) - l(l+1)\chi = 4\pi G \int a dv_r, \quad (14)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \hat{D}a + \frac{l(l+1)}{r^2} F = v_r \frac{d\chi}{dr} \frac{d\Phi_0}{dE} = \frac{d\chi}{dr} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_r}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \hat{D}F = \chi \Phi_0. \quad (16)$$

Представим функцию распределения  $\Phi_0(E)$  в виде

$$\Phi_0(E) = \int \Phi_0(E_0) \delta(E - E_0) dE_0 \quad (17)$$

и разрешим сначала уравнения (15), (16) для одной «мономатричной» компоненты (17):

$$\delta(E - E_0) = \frac{1}{2|v_{E_0}|} \{ \delta(v_r - v_{E_0}) + \delta(v_r + v_{E_0}) \}, \quad v_{E_0} \equiv \sqrt{2(E_0 - \Phi_0(r))}. \quad (18)$$

В этом случае можно еще выполнить  $\delta$ -разложение по  $(v_r \pm v_{E_0})$ :

$$a = a_+ \delta(v_r - v_0) + a_- \delta(v_r + v_0) + b_+ \delta'(v_r - v_0) + b_- \delta'(v_r + v_0), \quad (19)$$

$$F = F_+ \delta(v_r - v_0) + F_- \delta(v_r + v_0), \quad (20)$$

где коэффициенты  $a_{\pm}$ ,  $b_{\pm}$ ,  $F_{\pm}$  — функции  $r$ ,  $t$  (и  $E_0$ );  $v_0 \equiv v_{E_0}$ . Знаки плюс и минус различают две половины потока с противоположными скоростями. После подстановки (19), (20) в (15), (16) получим

$$\frac{\partial a_{\pm}}{\partial t} \pm v_0 \frac{\partial a_{\pm}}{\partial r} \pm v_0' a_{\pm} - \frac{\partial b_{\pm}}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2} F_{\pm} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial b_{\pm}}{\partial t} \pm v_0 \frac{\partial b_{\pm}}{\partial r} \pm 2v_0' b_{\pm} = \frac{1}{2v_0} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_{\pm}}{\partial t} \pm v_0 \frac{\partial F_{\pm}}{\partial r} \pm v_0' F_{\pm} = \frac{1}{2v_0} \chi. \quad (23)$$

Эта система упростится, если сделать замену

$$X_{\pm} = v_0 a_{\pm}, \quad Y_{\pm} = v_0^2 b_{\pm}, \quad Z_{\pm} = v_0 F_{\pm}. \quad (24)$$

Тогда будем иметь вместо (21) — (23)

$$\hat{D}_{\pm} X_{\pm} - \frac{1}{v_0} \frac{\partial Y_{\pm}}{\partial r} + \frac{2v_0'}{v_0^2} Y_{\pm} + \frac{l(l+1)}{r^2} Z_{\pm} = 0, \quad (25)$$

$$\hat{D}_{\pm} Y_{\pm} = \frac{v_0}{2} \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (26)$$

$$\hat{D}_{\pm} Z_{\pm} = \frac{1}{2} \chi, \quad (27)$$

где

$$\hat{D}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial t} \pm v_0 \frac{\partial}{\partial r} = \left( \frac{d}{dt} \right)_{\pm} \quad (28)$$

— операторы дифференцирования по времени вдоль невозмущенных радиальных траекторий частиц потока. Замкнутая система уравнений получится, если добавить к (25) — (27) уравнение Пуассона. Так как вклад отдельной компоненты с энергией  $E_0$  в возмущенную плотность

есть

$$\rho_{1E_0} = (a_+ + a_-) \frac{\varphi_0(E_0)}{r^2} = \frac{\varphi_0(E_0)(X_+ + X_-)}{v_0 r^2} = \rho_{E_0}(X_+ + X_-), \quad (29)$$

то полная возмущенная плотность

$$\rho_1 = \int dE_0 \rho_{1E_0}, \quad (30)$$

а уравнение Пуассона будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\chi}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi = 4\pi G \int dE_0 (X_+ + X_-) \rho_{E_0} \quad (31)$$

(для однокомпонентной системы справа в (31) стоит просто  $\frac{4\pi G (X_+ + X_-)}{r^2 v_0} = \omega_0^2 (X_+ + X_-)$ , где  $\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0(r)$  — локальная джнсовская частота).

Проблема отыскания собственных мод ( $\sim e^{-i\omega t}$ ) полученной системы уравнений (25) — (27), (31) слишком сложна, во всяком случае для аналитического решения. Но для доказательства неустойчивости достаточно ограничиться возмущениями любого частного вида. Поскольку система в трансверсальном направлении является холодной, то заранее ясно, что неустойчивыми должны быть (в числе прочих) и возмущения со сколь угодно малой «поперечной» (по отношению к радиусу) длиной волны. В приближенных уравнениях, описывающих эволюцию возмущений, нужно тогда учитывать только поперечные силы, которые способствуют слипанию орбит. Это обстоятельство сильно упрощает формальный анализ.

Итак, воспользуемся приближением квазиклассического типа, но направление быстрого чередования «горбов» и «впадин» возмущенных величин на этот раз выберем перпендикулярно радиусам (в отличие, например, от работ по коротковолновой устойчивости холодных дисковых систем — см. раздел 2.2. главы V).

Уравнение Пуассона в рассматриваемом приближении получим из (31), пренебрегая членами, содержащими производные по  $r$ :

$$-\frac{l^2 \chi}{r^2} = 4\pi G \int dE_0 (X_+ + X_-) \rho_{E_0}. \quad (32)$$

Из (26), (27) следует, что  $Y_{\pm}$  и  $Z_{\pm}$  — величины одного порядка, поэтому уравнения для  $X_{\pm}$  запишутся так:

$$\hat{D}_{\pm} X_{\pm} \approx -\frac{l^2}{r^2} Z_{\pm}. \quad (33)$$

Выразим из (27)  $\chi$  через  $Z_{\pm}$ ,  $\chi = 2\hat{D}_{\pm} Z_{\pm}$ , и подставим в (32):

$$-\frac{l^2}{r^2} \hat{D}_{\pm} Z_{\pm} = 2\pi G \int dE_0 (X_+ + X_-) \rho_{E_0}.$$

Вводя новые переменные

$$\mathcal{Y}_{\pm} = -v_0 F_{\pm} = -Z_{\pm}, \quad (34)$$

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{l^2} r v_0 a_{\pm} = \frac{1}{l^2} r X_{\pm}, \quad (35)$$

окончательно получим следующую симметричную систему уравнений [11]:

$$\hat{D}_{\pm} \xi_{\pm} = \frac{\mathcal{Y}_{\pm} \pm v_0 \xi_{\pm}}{r}, \quad (36)$$

$$\hat{D}_+ \mathcal{Y}_+ = \hat{D}_- \mathcal{Y}_- = 2\pi G r \int dE_0 \rho_{E_0} (\xi_+ + \xi_-). \quad (37)$$

Неустойчивость доказывается [11] построением функционала Ляпунова

$$V(t) = \int dE_0 \int \frac{\xi_+ \mathcal{J}_+ + \xi_- \mathcal{J}_-}{r} dm_{E_0}, \quad dm_{E_0} = r^2 \rho_{E_0} dr, \quad (38)$$

где интегралы по  $m_{E_0}$  берутся между точками поворота соответствующих потоков.

Дифференцируя (38) и учитывая инвариантность  $dm_{E_0}$ , получим после некоторых вычислений явно положительно определенную форму:

$$\frac{dV}{dt} = \int dE_0 \int \frac{(\mathcal{J}_+)^2 + (\mathcal{J}_-)^2}{r^2} dm_{E_0} + 2\pi G r^2 \int dr \left[ \int dE_0 \rho_{E_0} (\xi_+ + \xi_-) \right]^2 \geq 0. \quad (39)$$

Это и означает неустойчивость (см., например, [156]).

Смысл величин  $\xi^\pm$  и  $\mathcal{J}^\pm$ , как легко выяснить, следующий:

$$\xi^\pm = \frac{r}{l^2} \frac{\rho_1^\pm}{\rho_0}, \quad (40)$$

$$\mathcal{J}^\pm = r \tilde{v}_\theta = r \tilde{v}_\varphi, \quad (41)$$

где  $\tilde{v}_\theta = \tilde{v}_\varphi$  — амплитуды средней  $\theta$ - и  $\varphi$ -компонент скорости рассматриваемого потока. Величинам  $\xi_\pm$  можно дать и другую интерпретацию. Для этого запишем уравнение непрерывности для отдельного потока с учетом малости членов, содержащих производные по  $r$ , в сравнении с производными по  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \rho_1^\pm}{\partial t} + \rho_0^\pm \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta^\pm}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi^\pm}{\partial \varphi} \right\} = 0. \quad (42)$$

Переходя здесь к линейным смещениям  $\zeta_\theta$ ,  $\zeta_\varphi$  ( $v_\theta = \partial \zeta_\theta / \partial t$ ,  $v_\varphi = \partial \zeta_\varphi / \partial t$ ), получим из (42)

$$\rho_1^\pm = -\rho_0^\pm \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_\theta^\pm}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \zeta_\varphi^\pm}{\partial \varphi} \right\}. \quad (43)$$

Так как трансверсальные смещения ( $\zeta_\theta$ ,  $\zeta_\varphi$ )  $\sim \xi \cdot r \cdot \text{grad } Y_l^m(\theta, \varphi)$ , то из (43) следует

$$\rho_1^\pm = \rho_0^\pm \zeta_l (l+1) \simeq \rho_0^\pm \zeta^\pm l^2. \quad (44)$$

Из сравнения (44) и (40) видно, что  $\xi^\pm = \zeta^\pm$ , т. е.  $\xi^\pm$  в рассматриваемом приближении совпадает с амплитудой линейного смещения в трансверсальном направлении (без учета угловой зависимости).

Именно такой интерпретации следовал Антонов, рассмотревший возмущения в виде пропорциональных секториальным гармоникам  $\Phi_1 = Y_l^l(\theta, \varphi) \chi(r) \sim \sin^l \theta \cos l \varphi \cdot \chi(r)$ , т. е.  $l = m$ ,  $l \gg 1$ . Тогда  $\Phi_1$  существенно отлично от нуля только в узкой зоне вблизи от плоскости экватора

$$|\theta - \pi/2| \sim l^{-1/2}, \quad (45)$$

в которой смещение по  $\varphi$  много больше смещения по  $\theta$  в силу угловой зависимости  $\Phi_1$ . Величины  $\xi^\pm$  и  $\mathcal{J}^\pm$  в этом случае можно понимать соответственно как линейное смещение в плоскости экватора по азимуту  $\varphi$  и угловой момент ( $r v_\varphi$ ) частицы.

## § 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Подведем некоторые итоги исследований устойчивости бесстолкновительных сферически-симметричных систем. В § 2 показана устойчивость убывающих с энергией изотропных функций распределения весьма широкого класса. Вероятнее всего, устойчивыми являются все изо-



тропные функции распределения с  $f_0'(E) < 0$ . Доказана также (§ 3) устойчивость всех моделей с круговыми орбитами частиц относительно локализованных возмущений при  $d\Omega^2/dr < 0$ . Можно предположить, что такие системы устойчивы и для произвольных возмущений.

Очень вероятным выглядит предположение, что устойчивы также любые функции распределения, промежуточные между круговыми и изотропными. Точное исследование в § 4 (раздел 4.1) одной из подобных «промежуточных» систем (модели Камма), показавшее ее устойчивость, подтверждает это предположение.

С другой стороны, в § 5 доказана неустойчивость моделей с чисто радиальными траекториями частиц.

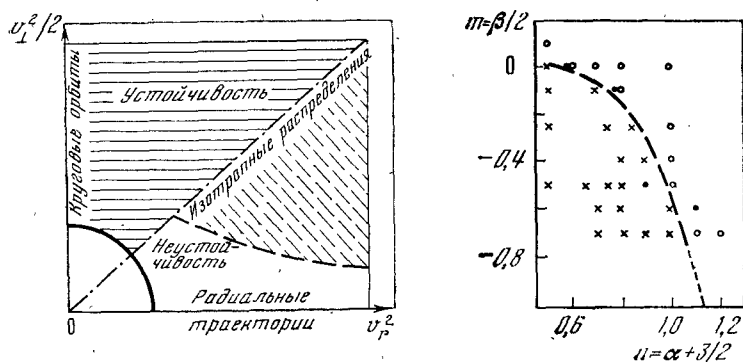


Рис. 18. Вероятное расположение на плоскости  $(v_r^2, v_{\perp}^2/2)$  устойчивых и неустойчивых бесстолкновительных сферически-симметричных систем

Рис. 19. Приближенная граница устойчивости для моделей (24) § 1 по отношению к радиальным колебаниям [217]

Сказанное выше наглядно представлено на рис. 18. По осям диаграммы на этом рисунке отложены дисперсии радиальной и поперечной скоростей (некоторые средние по системе величины). Проведенная штрихами линия — гипотетическая граница, разделяющая устойчивые и неустойчивые решения. Эта граница пока не определена теоретически. Более того, не исключено, что ситуация в действительности сложнее, так что устойчивость или неустойчивость сферических систем еще не определяется полностью дисперсиями скоростей  $\bar{v}_r^2$  и  $\bar{v}_{\perp}^2$ . В частности, некоторую роль могут играть высшие моменты функции распределения (сравни, например, с обсуждением устойчивости дисковых систем в § 4 (раздел 4.2) главы V).

Более четко поставленной является задача определения границы потери устойчивости в каких-либо сериях функций распределения частиц, которые охватывают как изотропные, так и чисто радиальные распределения. В § 1 мы привели два примера таких серий функции распределения (формулы (24) и (25)). Было бы интересно проследить за потерей устойчивости в этих сериях при постепенном уменьшении параметра  $\beta$  от 0 до  $-2$  (чему соответствует переход ко все более вытянутым траекториям частиц), определяя в каждом случае критическое значение  $\beta_{кр}$ , отделяющее устойчивые системы от неустойчивых.

В действительности это  $\beta_{кр}$  (или критическое отношение дисперсий скоростей  $\bar{v}_r^2$  и  $\bar{v}_{\perp}^2$ ) будет, конечно, функцией второго параметра модели  $\alpha$ . Это видно, например, из работы Энона [217], который численными методами исследовал устойчивость моделей (24) § 1, правда, к сожалению, только с  $\alpha < 0$  и только относительно радиальных возмущений. Результаты суммированы на рис. 19, где на плоскости  $(\alpha, \beta)$  ( $m \equiv \beta/2$ ,  $n \equiv \alpha + 3/2$ ) параметров кружками отмечены устойчивые мо-

дели, крестиками — неустойчивые, а точки соответствуют неопределенным случаям, близким к границе между устойчивыми и неустойчивыми решениями; последняя приближенно представлена штриховой линией. Область неустойчивости, как видно, располагается ниже линии  $\beta=0$ , соответствующей (изотропным) политропам. В частности, можно отметить, что модель с  $f_0 \sim \delta(E_0 - E) \delta(L^2)$ , отвечающая в (24) § 1  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -2$ , должна быть неустойчивой уже относительно радиальных возмущений. Если аппроксимировать штриховую кривую на рис. 19 до  $\beta = -2$

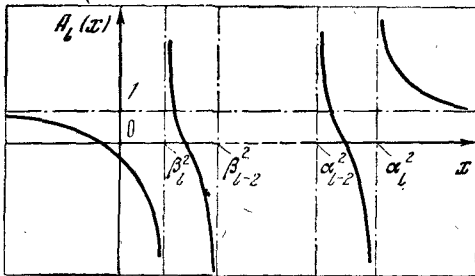


Рис. 20. Графическое представление локального дисперсионного уравнения  $A_l(x) = 0$  при  $\kappa^2/\Omega^2 > l^2$  (неустойчивые распределения массы) [106]

(что возможно с большой неуверенностью), получим граничное  $\alpha \approx (-0,3) \div (-0,4)$ . Модели скоплений с радиальными траекториями ( $\beta = -2$ ) с большими  $\alpha$  устойчивы, а с меньшими неустойчивы. В частности, все «непатологические» модели с  $f_{0\text{ев}}' < 0$  (т. е.  $\alpha > 0$ ), по всей вероятности, устойчивы по отношению к радиальным возмущениям. Неустойчивость связана, очевидно, со слишком быстрым ростом  $f_0$  с энергией. Относительно нерадиальных возмущений такие системы, как мы видели (§ 5), неустойчивы, и это по непрерывности должно быть справедливо и для достаточно близких функций распределения.

Если мы здесь обратимся к наблюдениям шаровых скоплений звезд и сферических галактик (см. главу VIII), то можно будет заключить, что реально устойчивой должна обеспечиваться уже относительно малой дисперсией поперечных скоростей частиц (в среднем существенно меньшей, чем радиальная скорость). Теоретически, однако, этот вопрос пока не исследован.

Вообще, нужно сказать, что точных результатов по устойчивости сферических бесстолкновительных систем еще сравнительно немного, так что нельзя делать сколько-нибудь далеко идущие выводы. Здесь предстоит еще многое сделать. Конечно, наибольший интерес представляли бы общие критерии и исследование устойчивости целых классов систем, как, например, в случае систем с изотропными функциями распределения. Однако для анизотропных сферически-симметричных систем построить аналогичный (15) § 2 общий вариационный принцип не удастся, и исследование устойчивости приходится поэтому, как правило, проводить отдельно для каждого конкретного случая. Единственное исключение пока представляют системы с круговыми орбитами частиц.

Сделаем, наконец, некоторые замечания относительно устойчивости вращающихся бесстолкновительных сфер. Мы рассмотрели два таких примера, причем в одном случае система оказалась устойчивой (модели с круговыми орбитами, § 3), а во втором — неустойчивой (модель шара Фримана, § 4). Конечно, существование вращающихся бесстолкновительных сферически-симметричных систем вряд ли можно оправдать эволюционно. Тем не менее полученные результаты позволяют взять под сомнение наличие обязательной корреляции между степенью сплюснутости и скоростью вращения системы, предполагавшейся на основании классической теории фигур равновесия. Пути эволюции бесстолкновительных систем (в частности, звездных) могут быть более разнообразными.

## ЗАДАЧИ

1. Исследовать устойчивость произвольных сферически-симметричных систем с круговыми орбитами относительно локализованных возмущений (Пальчик, Паташинский, Пинус [106]).

Решение. Как указывалось в § 3, эта задача сводится к исследованию положения корней  $\omega$  уравнения

$$A_l(r, \omega) = 0. \quad (1)$$

Введем обозначения

$$x = \omega^2 / \Omega^2(r), \quad \kappa^2 = \omega_0^2 / \Omega^2 + 1, \quad \alpha_s = \kappa + s, \quad \beta_s = \kappa - s. \quad (2)$$

В этих обозначениях функция  $A_l(r, \omega)$  примет вид

$$A_l(r, x) = 1 + 2(\kappa^2 - 1) \sum_{s=1}^l \alpha_{ls} \frac{x - \alpha_s \beta_s}{(x - \alpha_s^2)(x - \beta_s^2)} + (\kappa^2 - 1) \frac{\alpha_{l0}}{x - \kappa^2}. \quad (3)$$

Ограничимся рассмотрением лишь неустойчивых (см. ниже) решений. Именно, для каждого заданного  $l$  будем исследовать такие распределения начальной плотности  $\rho_0(r)$ , для которых выполнено условие

$$\kappa^2 > l^2 \quad (l > 2). \quad (4)$$

Пусть сначала  $l$  нечетно. Тогда

$$A_l(r, x) = 1 + 2(\kappa^2 - 1) \sum_{s=1}^l \alpha_{ls} \frac{x - \alpha_s \beta_s}{(x - \alpha_s^2)(x - \beta_s^2)}, \quad (5)$$

где  $\sum'$  означает, что суммирование ведется по нечетным  $s$ . Эта сумма содержит  $(l+1)/2$  слагаемых, следовательно, уравнение (1) имеет  $(l+1)$  корней. Все эти корни  $x$  вещественны. Качественно вид функции  $A_l(x)$  приведен на рис. 20<sup>1</sup>. Между каждой парой соседних полюсов  $A_l(x)$  лежит по одному корню. Всего таких корней  $l$ , они действительные и положительные. Последний,  $(l+1)$ -й, корень лежит, очевидно, где-то в интервале  $-\infty < x < \beta_l^2 = (\kappa - l)^2$ , где функция  $A_l(x)$  изменяется от 1 до  $(-\infty)$ . Выясним знак этого корня. Для этого вычислим значение  $A_l(r, x)$  при  $x=0$

$$\begin{aligned} A_l(r, 0) &= 1 - 2(\kappa^2 - 1) \sum_{s=1}^l \frac{\alpha_{ls}}{\alpha_s \beta_s} = 1 - 2 \sum_{s=1}^l |P'_{s0}(0)|^2 \frac{\kappa^2 - s^2 + s^2 - 1}{\kappa^2 - s^2} = \\ &= - \sum_{s=-l}^l \frac{s^2 - 1}{\kappa^2 - s^2} |P'_{s0}(0)|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

При выводе (6) использована формула  $\sum_{s=-l}^l |P'_{s0}(0)|^2 = 1$ . Поскольку  $s^2 \geq 1$ ,  $\kappa^2 > l^2$ , имеем  $A_l(r, 0) < 0$ . Следовательно, рассматриваемый корень отрицателен (см. рис. 20).

<sup>1</sup> Для построения графика рис. 20 достаточно [рассмотреть поведение  $A_l(x)$  вблизи от полюсов  $x = \mu_s$  ( $\mu_s = \alpha_s^2$  или  $\beta_s^2$ ); при условии (4) оказывается, что  $A_l(x \approx \mu_s) \sim \frac{a}{x - \mu_s}$  ( $a > 0$ ). Нетрудно доказать и монотонность функции  $A_l(x)$  в рассматриваемом случае [106].

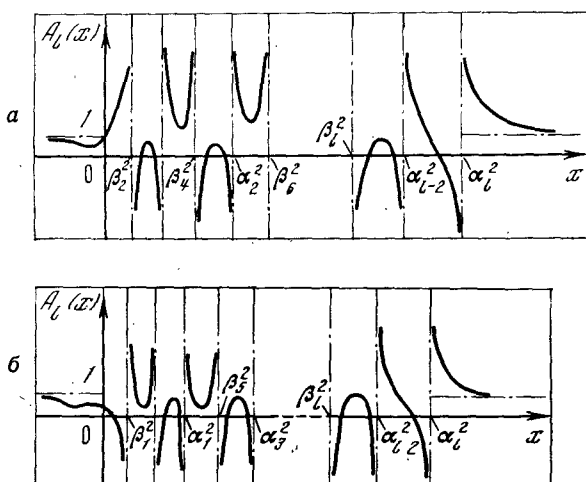


Рис. 21. Функция  $A_l(x)$  для устойчивых распределений плотности  $\rho_0(r)$  ( $\kappa^2/\Omega^2 < l^2$ ) [106]  
 а) четные  $l$ , б) нечетные  $l$

Аналогично исследуется случай четных  $l$ . Функция  $A_l(r, x)$  при этом имеет вид

$$A_l(r, x) = 1 + \frac{\alpha_{l_0}}{x - \kappa^2} (\kappa^2 - 1) + 2(\kappa^2 - 1) \sum_{s=2}^l \alpha_{l_s} \frac{x - \alpha_s \beta_s}{(x - \alpha_s^2)(x - \beta_s^2)}, \quad (7)$$

где  $\Sigma''$  означает, что суммирование ведется по четным  $s$ . Так же как и в случае нечетных  $l$ , функция  $A_l(r, x)$  имеет  $(l+1)$  корней, из которых  $l$  корней положительны (если выполнено условие (4)). Для выяснения знака  $(l+1)$ -го корня оценим  $A_l(r, 0)$ :

$$\begin{aligned} A_l(r, 0) &= 1 - \alpha_{l_s} \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} - 2(\kappa^2 - 1) \sum_{s=2}^l \frac{\alpha_{l_s}}{\kappa^2 - s^2} = \\ &= - \sum_{s=l}^l \frac{s^2 - 1}{\kappa^2 - s^2} \alpha_{l_s} < - \sum_{s=2}^l \frac{s^2 - 1}{\kappa^2} \alpha_{l_s} = \frac{1}{\kappa^2} \left( 1 - \sum_{s=l}^l \alpha_{l_s} s^2 \right) < 0, \end{aligned}$$

так что этот корень отрицателен.

Таким образом, показано, что при условии (4) имеет место (локальная) неустойчивость.

Легко вычислить [106], например, инкремент неустойчивости для систем с медленно нарастающей к краю плотностью, так что  $\kappa^2/\Omega^2 = 4 + \varepsilon(r)$ ,  $0 < \varepsilon(r) \ll 1$ . Для (неустойчивых) четных гармоник получается

$$-\omega^2 = \varepsilon(r) \Omega^2(r) \frac{3\alpha_{l_2}}{13\alpha_{l_2} + 2\alpha_{l_0} + 16 \sum_{s=4}^l \frac{s^2 - 1}{s^2 - 4} \alpha_{l_s}}.$$

Отсюда, в частности, следует наличие решений с нулевой частотой (при любом четном  $l$ ) в пределе однородной сферы (см. замечание в сноске в конце п. 2 раздела 3.1).

Несколько более длинное рассмотрение [106] показывает, что при выполнении условия, обратного (4), система устойчива. Приблизительный вид функции  $A_l(x)$  в этом случае приведен на рис. 21.

Заметим, что относительно возмущений с  $l=0,1$  система устойчива при любом начальном распределении. Действительно, в случае радиаль-

ных возмущений ( $l=0$ ) уравнение (1) имеет единственный положительный корень  $x_0=1$ , а для дипольных возмущений ( $l=1$ ) — два корня:  $x_1=0$ ,  $x_2=3+\kappa^2$  ( $x_2>0$ ).

Следующая (квадрупольная) гармоника  $l=2$  приводит к раскату системы при условии  $\kappa^2>4$ , или, что эквивалентно,

$$d\Omega^2/dr > 0. \quad (8)$$

Характер расположения корней уравнения (6) § 3.4, описывающего «глобальные» возмущения при  $l \gg 1$  (когда они локализируются вблизи от границы шара  $r=R$ ), можно выяснить так же, как и выше. Неустойчивыми оказываются (при данном  $l$ ) распределения плотности  $\rho_0(r)$ , удовлетворяющие неравенствам

$$l^2 < \kappa^2 < \kappa_c^2, \quad (9)$$

где  $\kappa_c^2$  находится из уравнения

$$\sum_{s=-l}^l \frac{s^2 - 1}{\kappa_c^2 - s^2} \alpha_{ls} = 1 \quad (10)$$

в случае нечетных  $l$  и аналогичного уравнения для четных  $l$ .

2. Исследовать нелинейную устойчивость бесстолкновительной сферы Камма ((29) § 1) относительно радиальных возмущений, сохраняющих пространственную однородность плотности (Антонов, Нуригдинов [12]).

Решение. Запишем равновесную функцию распределения в виде

$$f_0 = \text{const} \{1 + [\mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0]^2 - r_0^2 - v_0^2\}^{-1/2} \quad \left(\text{const} = \frac{\rho_0}{\pi^2}\right). \quad (1)$$

Рассмотрим линейное преобразование, связывающее текущие  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и начальные  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  лагранжевы координаты и скорости частицы:

$$\mathbf{r} = \alpha(t) \mathbf{r}_0 + \beta(t) \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v} = \dot{\alpha}(t) \mathbf{r}_0 + \dot{\beta}(t) \mathbf{v}_0. \quad (2)$$

Обратим это преобразование

$$\mathbf{r}_0 = \dot{\beta}(t) \mathbf{r} - \beta(t) \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_0 = -\alpha(t) \mathbf{r} + \alpha(t) \mathbf{v} \quad (3)$$

и подставим (3) в (1); в результате получим функцию распределения  $f$  возмущенного состояния

$$f = \text{const} \{1 + [\mathbf{r} \mathbf{v}]^2 - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) r^2 + 2(\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}) \mathbf{r} \mathbf{v} - (\alpha^2 + \beta^2) v^2\}^{-1/2}. \quad (4)$$

Интегрирование (4) по скоростям  $\mathbf{v}$  снова приводит к плотности  $\rho$ , не зависящей от пространственных координат. Следовательно, формулы (2) описывают искомое возмущение.

Будем интересоваться изменениями радиуса сферы  $R(t)$ . Для определения радиуса запишем уравнение границы в фазовом пространстве:

$$(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) r^2 - 2(\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}) \mathbf{r} \mathbf{v} + (\alpha^2 + \beta^2) v^2 - [\mathbf{r} \mathbf{v}]^2 = 1. \quad (5)$$

Радиус  $R(t)$  есть, очевидно, максимум  $|\mathbf{r}|$ , при котором  $\mathbf{v}$  еще может быть вещественным вектором.

Преобразуем (5):

$$(\alpha^2 + \beta^2) \left( v_r - \frac{\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2} r \right)^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) v_\perp^2 = 1 - \frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (6)$$

где использовано равенство единице якобиана преобразования (2)

$$\alpha \dot{\beta} - \beta \dot{\alpha} = 1. \quad (7)$$

Отсюда находим, что максимальное  $r$  достигается при

$$v_r - \frac{\alpha \dot{\alpha} + \beta \dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2} r = v_{\perp} = 0; \quad (8)$$

оно равно

$$R(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (9)$$

Очевидно, что плотность  $\rho$  пропорциональна  $R^{-3}$ ,

$$\rho(t) = \rho_0 (\alpha^2 + \beta^2)^{-3/2}. \quad (10)$$

Поэтому уравнение движения отдельной звезды

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{\mathbf{r}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Сравнивая с первым уравнением (2), получим

$$\ddot{\alpha} = - \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}, \quad (12)$$

$$\ddot{\beta} = - \frac{\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Полученные уравнения (12), (13) имеют вид уравнений задачи двух тел, которые притягиваются по закону Кулона. Соответственно уравнение движения для  $R = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$  есть

$$\ddot{R} = - \frac{\partial U_{\text{эфф}}}{\partial R}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{R}. \quad (14)$$

В состоянии равновесия  $R=1$ . Малые колебания относительно этого состояния происходят с частотой  $\omega=1$ . Изменение радиуса  $R(t)$  имеет характер колебаний, если «энергия»

$$E \equiv \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{1}{2R^2} - \frac{1}{R} \quad (15)$$

отрицательна:  $E < 0$ . Если же начальное возмущение настолько сильное, что  $E > 0$ , то система в конце концов должна рассеяться (см. рис. 22, где  $E_1 < 0, E_2 > 0$ ).

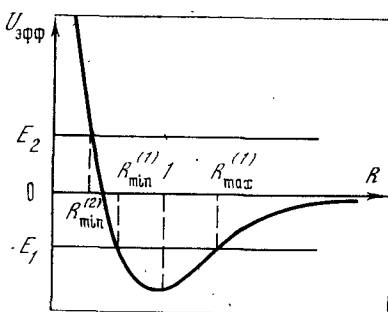


Рис. 22. Эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{эфф}}$  для радиальных колебаний однородной сферы Камма

3. Решить задачу о развитии возмущений в однородном, изотропном, бесстолкновительном мире (Бисноватый-Коган, Зельдович [24]).

Решение. Задача должна решаться на фоне точного нестационарного решения, соответствующего расширению или сжатию однородной и изотропной Вселенной. Последнюю будем рассматривать в рамках ньютоновской космологии. Корректность такого рассмотрения доказана (см., например, [48]). Задача может представлять интерес для

описания скупивания шаровых скоплений звезд (в схеме Пиблса — Дике [302]), галактик или скоплений галактик в более крупные образования.

Найдем сначала самосогласованное решение невозмущенного кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1)$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0. \quad (2)$$

Будем искать решение, соответствующее ньютоновской Вселенной с критической плотностью  $\rho_0(t)$ . В этом случае, как известно [48],

$$\rho_0(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad \Phi_0(t, r) = \frac{2}{3} \pi G \rho(t) r^2, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} = \frac{2}{9} \frac{\mathbf{r}}{t^2}. \quad (3)$$

Характеристики кинетического уравнения (1), следующие (в декартовых координатах  $x_i = x, y, z$  при  $i = 1, 2, 3$ ):

$$dt = \frac{dx_i}{v_i} = - \frac{dv_i}{\frac{2}{9} \frac{x_i}{t^2}}. \quad (4)$$

Интегралы системы уравнений характеристик (5) таковы:

$$c_{1i} = 3v_i t^{1/3} - x_i t^{-2/3}, \quad (6)$$

$$u_i \equiv c_{2i} = v_i t^{2/3} - \frac{2}{3} x_i t^{-1/3}. \quad (7)$$

Следовательно, кинетическому уравнению (1) удовлетворяет любая функция  $c_{1i}, c_{2i}$ , но необходимо еще обеспечить условие самосогласования

$$\int f_0 d\mathbf{v} = \rho_0(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (8)$$

Непосредственно видно, что этому условию удовлетворяет произвольная функция  $c_{2i} \equiv u_i$ :

$$f_0 = f_0(u_i). \quad (9)$$

Этому решению можно дать более наглядное истолкование, если представить  $u_i$  в виде

$$u_i = a(t) (v_i - H r_i), \quad (10)$$

где функция  $a(t)$  пропорциональна радиусу расширяющегося мира А. А. Фридмана, а  $H(t)$  — «постоянная» Хаббла. Для случая критической плотности  $H(t) \sim 1/t$ ,  $a(t) \sim t^{1/3}$ , и (10) совпадает с (7). В действительности же решение вида  $f_0(u_i)$  с произвольной функцией  $f_0$  остается справедливым для любой, а не только критической плотности  $\rho_0(t)$ . Таким образом, решением кинетического уравнения в однородной, изотропно расширяющейся Вселенной является произвольная функция<sup>1</sup> скоростей, убывающих по адиабатическому закону (т. е. в соответствии с общим расширением мира, следуя за этим расширением). Член  $H r$  в (10) учитывает хаббловское расширение Вселенной со скоростью  $v_0 = H r$ . Поэтому вполне естественно, что в аргумент функции распределения входит разность  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - H \mathbf{r}$ , соответствующая именно хаотическим скоростям частиц.

<sup>1</sup> Строго говоря, это так только в ньютоновской космологии; в релятивистской теории этот произвол несколько уменьшается. Кинетическая релятивистская теория расширяющейся Вселенной рассматривается в работе Бела [163].

Примем для дальнейшего максвелловскую функцию распределения

$$f_0 = \frac{1}{6\pi Gm} \frac{1}{(\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\sum_i \frac{u_i^2}{\theta}\right). \quad (11)$$

Соответствующая (11) эффективная температура  $T(t) \sim \theta/a^2$  уменьшается со временем, т. е. вещество охлаждается при расширении мира. Рассмотрим теперь малые возмущения такого однородного нестационарного фона. Линеаризованное кинетическое уравнение будем решать методом интегрирования по траекториям.

Уравнения траекторий совпадают с уравнениями характеристик (4). Координаты и скорости частицы в текущий момент времени  $t'(x', v_x', \dots)$  легко выразить через координаты и скорости в момент  $t(x, v_x, \dots)$  при помощи интегралов (6), (7):

$$x' = (3v_x t^{1/3} - x/t^{2/3}) t'^{2/3} + \left(2 \frac{x}{t^{1/3}} - 3v_x t^{2/3}\right) t'^{1/3}, \quad (12)$$

$$v_x' = \frac{2}{3} (3v_x t^{1/3} - x/t^{2/3}) (t')^{-1/3} + \frac{1}{3} \left(2 \frac{x}{t^{1/3}} - 3v_x t^{2/3}\right) (t')^{-2/3}.$$

В невозмущенном решении (12) все пространственные масштабы растут пропорционально  $t^{2/3}$ ; поэтому и длина волны возмущения тоже растет  $\sim t^{2/3}$ . Соответственно собственные функции имеют вид

$$\Phi = e^{ik\xi} \varphi(t), \quad f = e^{ik\xi} f(t), \quad (13)$$

где  $\xi = x/t^{2/3}$  (так что размерность  $k$  здесь не совпадает с размерностью «обычного» волнового числа!). Подставляем (13) в линеаризованное кинетическое уравнение и с учетом (2), (12) получаем с помощью интегрирования по частям

$$f = ik \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \int_0^t \varphi(t') e^{3ik u_1 [t^{-1/3} - (t')^{-1/3}]} dt'. \quad (14)$$

Уравнение Пуассона записывается в виде

$$\Delta \Phi = -\frac{k^2 \Phi(t)}{t^{1/3}} = e^{ik\xi} \int f dv. \quad (15)$$

Наконец, интегрируя (14) по  $v$  и подставляя результат в (15), приходим к следующему интегральному уравнению для  $\varphi$ :

$$\varphi(t) + \frac{2}{t^{2/3}} \int_0^t \varphi(t') \tau e^{-\frac{9k^2 \theta}{4} \tau^2} dt' = 0, \quad (16)$$

где  $\tau \equiv t^{-1/3} - (t')^{-1/3}$ . Для длинноволновых возмущений или больших времен, когда  $9k^2 \theta \tau^2 / 4 \ll 1$  и экспоненту в (16) можно заменить единицей, исходное интегральное уравнение сильно упрощается:

$$\varphi(t) + \frac{2}{t^{2/3}} \int_0^t \varphi(t') \tau dt' = 0. \quad (17)$$

Путем повторного дифференцирования (17) можно свести к простому дифференциальному уравнению

$$t^2 \varphi'' + \frac{8}{3} t \varphi' = 0. \quad (18)$$

Это уравнение описывает известное гидродинамическое решение для пыли [48]:  $\varphi_1 = c_1$ ,  $\varphi_2 = c_2 t^{-5/3}$ , что соответствует  $\delta\rho/\rho \sim t^{2/3}$  для  $\varphi_1$  и  $\delta\rho/\rho \sim$



$\sim t^{-1}$  для  $\varphi_2$ . Неустойчивым является первое решение:  $\delta\rho/\rho \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Совсем другая картина, ничем не напоминающая гидродинамическую, получается на коротких волнах. В работе [24] решение найдено при условии  $\frac{9k^2\theta}{4} t^{-2/3} \gg 1$ , когда интеграл в (16) можно вычислить методом перевала. Пусть  $\lambda \equiv \frac{9k^2\theta}{4}$ ; тогда, считая  $\varphi(t')$  медленной функцией, а  $\tau e^{-9k^2\theta\tau^2/4}$  — быстро убывающей при больших  $\lambda$ , получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\varphi + 9 \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{t^2}{\lambda^{3/2}} \varphi' = 0. \quad (19)$$

Решение (19) таково:

$$\dot{\varphi} = \text{const} \exp \left\{ \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2e\lambda^3}{\pi}} \frac{1}{t} \right\}. \quad (20)$$

Следовательно, решение убывает с характерным временем затухания  $T$  от момента  $t_0$ , равным

$$T = 9 \sqrt{\frac{\pi}{2e\lambda^3}} t_0^2. \quad (21)$$

Его можно выразить следующим образом:

$$T \sim t_\lambda (t_\lambda/t_0)^2, \quad (22)$$

где  $t_\lambda$  — время пролета частицей длины волны  $\lambda$  в момент  $t_0$ .

В случае идеального газа мы, очевидно, имели бы в рассматриваемом пределе незатухающие звуковые колебания. Такое разительное на первый взгляд расхождение с гидродинамической теорией легко понять уже в гидродинамических терминах. Гидродинамическое приближение отвечает исчезающе малой длине свободного пробега  $l \rightarrow 0$ , соответственно нулевой вязкости (коэффициент вязкости  $\nu = l v_T$ , где  $v_T$  — тепловая скорость частиц). В то же время «длина свободного пробега» бесстолкновительных частиц, а следовательно, «вязкость» и затухание, должны быть по определению большими.

Мы рассмотрели два предельных случая и показали, что при  $k^2\theta\tau^2 \ll 1$  возмущения неустойчивы, а при  $k^2\theta\tau^2 \gg 1$  они затухают, что соответствует устойчивости. Отсюда ясно, что граница, разделяющая устойчивые и неустойчивые решения, лежит «где-то посередине», т. е. при  $k^2\theta\tau^2 \sim 1$ . Легко убедиться в том, что это условие иначе можно записать в виде  $(2\pi/\lambda_{\text{кр}}(t))^2 = k_{\text{кр}}^2(t) \approx \frac{G\rho_0(t)}{v_T^2(t)}$ , что совпадает с условием, полученным Джинсом из рассмотрения устойчивости однородного и стационарного фона (в рамках гидродинамического приближения<sup>1</sup>).

<sup>2</sup> Для бесстолкновительного случая то же было сделано в работах Линден-Белла [281], Максумова и Марочника [80, 81].

## РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Известно, что многие галактики, а также отдельные элементы галактик, например перемишки пересеченных SB-спиралей, имеют форму, близкую к эллипсоидальной. Поэтому интересно построить точные самосогласованные модели бесстолкновительных эллипсоидов.

В классических исследованиях по фигурам равновесия и устойчивости однородной несжимаемой жидкости, о которых мы упоминали во введении, наибольшее внимание было уделено именно однородным *эллипсоидальным* системам. По-видимому, во многом это объясняется наличием точных моделей, удобных для теоретического анализа: эллипсоидов вращения (сфероидов) Маклорена и трехосных эллипсоидов Якоби.

В бесстолкновительном случае сейчас тоже известны некоторые точные стационарные модели эллипсоидов, они здесь могут сыграть роль, в каком-то смысле аналогичную эллипсоидам Маклорена и Якоби. Мы имеем в виду прежде всего известные модели Фримана [203], подробно рассматриваемые ниже (§ 1). Физически они имеют, как мы увидим, мало общего с несжимаемыми эллипсоидами. Это, конечно, не случайно, а является отражением глубокого различия состояний вещества в форме несжимаемой жидкости и в виде бесстолкновительного газа. С этим же, вероятно, связано отсутствие бесстолкновительных аналогов эллипсоидов Маклорена и Якоби. Попытка нахождения соответствующих функций распределения приводит к решениям, не имеющим физического смысла<sup>1</sup> (см. задачу 5 к этой главе).

Таким образом, мы лишены возможности автоматически перенести на бесстолкновительный случай результаты, полученные в классических работах.

Но, с другой стороны, здесь часто сохраняется одно важное математическое свойство: собственные функции, описывающие возмущение потенциала внутри однородного бесстолкновительного эллипсоида, можно представить в виде конечных полиномов по степеням декартовых координат (см. § 2). Этот факт не совсем тривиален, в частности, потому, что в бесстолкновительном случае, вообще говоря, возмущается не только граничная поверхность эллипсоида (как в модели несжимаемой жидкости), но и локальная плотность вещества.

Отмеченное обстоятельство означает возможность аналитического решения проблемы устойчивости и даже, более того, явного вычисления всех собственных частот колебаний и соответствующих им собственных функций таких систем.

Таким образом, здесь сложилось довольно интригующее положение, когда целый большой класс систем, обладающих совершенно новой физикой и имеющих очевидные прототипы в природе (галактики и т. п.), может быть исследован единым образом, причем можно получить точ-

<sup>1</sup> Правда, среди функций распределения простейшего типа; общего доказательства, этого утверждения пока нет.

ные спектры малых (а в некоторых случаях и нелинейных) колебаний. Идеализации, принятые при таком подходе, конечно, очень существенны: изолированность системы, однородность плотности, резкая граница и т. п. Некоторые из них явно нереалистичны, и в будущей более полной теории их придется отбросить.

Однако в области, которой мы интересуемся, точные математические исследования реальных систем затруднительны или даже невозможны (мы не говорим здесь о численных расчетах на ЭВМ). Существуют поэтому два пути. Один из них заключается в том, чтобы ограничиться только качественным рассмотрением явлений и оценками характеризующих их параметров по порядку величины.

Другой состоит в исследовании таких простых (например, однородных по плотности) моделей, которые допускают точное математическое решение. Они являются пробным камнем для проверки будущих заведомо приближенных теорий, относящихся к реальным объектам.

Пока в этом направлении сделаны только самые первые шаги [96], получены отдельные частные результаты. Здесь, однако, вполне осуществима общая программа полной классификации всех возможных равновесных состояний однородных эллипсоидальных систем и исследования их колебаний (по крайней мере, в духе и в объеме исследований последних лет Чандрасекара с сотрудниками, систематизирующих старые исследования по несжимаемым эллипсоидам).

В начале этой главы (§ 1) мы рассматриваем равновесные функции распределения эллипсоидальных систем. Точные модели трехосных однородных эллипсоидов были найдены Фриманом [203], который использовал их для изучения эволюции перемычек SB-галактик. С той же целью Фриман [202, 204] исследовал другие неаксиально-симметричные модели: эллиптические цилиндры и эллиптические диски. Они имеют много общих свойств с эллипсоидами, и поэтому мы также рассматриваем их в § 1 этой главы.

Здесь же приводятся функции распределения «горячих» в плоскости вращения бесстолкновительных сфероидов [117].

В конце параграфа мы излагаем принадлежащий Линден-Беллу [280] общий метод отыскания функций распределения вида  $f_0(E, L_z)$  по известному распределению плотности  $\rho_0(r, z)$  (а также метод Хантера [235], являющийся некоторой модификацией метода Линден-Белла). Эти методы иллюстрируются примерами точных самосогласованных моделей эллиптических галактик, предложенных Линден-Беллом и Хантером.

В § 2 исследуется устойчивость трехосных эллипсоидов Фримана относительно возмущений типа эллипсоид — эллипсоид. Найдена граница, разделяющая области устойчивых и неустойчивых решений. Вычислены инкременты нарастания неустойчивых решений.

В этом же параграфе обсуждаются причины полиномиального вида собственных функций эллипсоидальных систем (несжимаемых и бесстолкновительных). В заключение параграфа мы приводим результаты исследования устойчивости эллиптических дисков [335].

§ 3 посвящен исследованию устойчивости эллипсоидов вращения. Вначале построена теория возмущений, позволяющая в принципе найти все собственные функции и собственные частоты двухосного эллипсоида Фримана, в котором частицы в плоскости вращения движутся по окружностям. Явно найдены частоты колебаний границы эллипсоида, не затрагивающие локальной плотности. Рассмотрен также пример простейшей неаксиально-симметричной моды, изменяющей помимо границы и локальную плотность эллипсоида, для нее получены собственные функции и характеристические частоты. Линии равного возмущенного потенциала и поверхностной плотности дают картину слегка лидирующих спиралей.

В конце § 3 приводится дисперсионное уравнение для произвольных колебаний эллипсоида вращения Фримана малой толщины. Мы используем это уравнение в § 2 главы VIII при обсуждении проблемы критической сплюснутости эллиптических галактик, а в разделе 4.3 главы V — при исследовании вопроса о стабилизирующем влиянии конечной толщины на джинсовскую неустойчивость холодного диска.

## § 1. РАВНОВЕСНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

**1. Эллипсоидальные модели Фримана.** Фриман [203] построил модели однородных по плотности бесстолкновительных трехосных эллипсоидов, названных им «сбалансированными»: для них гравитационная и центробежная силы вдоль большой оси точно компенсируют друг друга. Задача состояла в том, чтобы сконструировать однородный эллипсоид с границей, которая неизменна в системе координат  $x, y, z$ , вращающейся вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $-\Omega$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Предположим для конкретности, что  $a > b > c$ . Для решения сформулированной задачи нужно найти стационарное решение системы уравнений Власова, состоящей в данном случае из кинетического уравнения во вращающейся системе

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} + \left( \Omega^2 \mathbf{R} + 2 [\Omega \mathbf{v}] - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2)$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \int f_0 d\mathbf{v} = \rho_0 \theta \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right] \quad (\mathbf{R} = (x, y, 0)). \quad (3)$$

Потенциал однородного эллипсоида хорошо известен [64, 148]:

$$\Phi_0 = \text{const} + \frac{1}{2} (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2), \quad (4)$$

причем коэффициенты  $A^2, B^2, C^2$  равны

$$A^2 = \frac{3MG}{k^2 (a^2 - c^2)^{3/2}} \{ F(\omega_0, k) - E(\omega_0, k) \}, \quad (5)$$

$$B^2 = \frac{3MG}{k^2 (a^2 - c^2)^{3/2}} \left\{ -F(\omega_0, k) + \frac{F(\omega_0, k)}{1 - k^2} \right\} - \frac{3MGc}{ab(b^2 - c^2)}, \quad (6)$$

$$C^2 = -\frac{3MGE(\omega_0, k)}{(a^2 - c^2)^{3/2} (1 - k^2)} + \frac{3MGb}{ac(b^2 - c^2)}, \quad (7)$$

$$\text{const} = -\frac{3MGF(\omega_0, k)}{2(a^2 - c^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

где  $M$  — масса эллипсоида:  $M = 4/3 \pi abc \rho_0$ ,

$$\sin^2 \omega_0 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}, \quad k^2 \equiv \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad (9)$$

а  $F, E$  — неполные эллиптические интегралы.

Произвольный вращающийся эллипсоид характеризуется тремя независимыми безразмерными параметрами:

$$b/a, c/a, G\rho_0/\Omega^2. \quad (10)$$

Фриман вводит одно существенное ограничение, рассматривая только

системы, сбалансированные по оси  $x$ :

$$A_1^2 \equiv A^2 - \Omega^2 = 0, \quad (11)$$

так что получающееся семейство эллипсоидов является двухпараметрическим. Введем величину  $\Phi_1 = \Phi_0 + \frac{1}{2} \Omega^2 R^2$ , тогда

$$\nabla \Phi_1 = (0, -B_1^2 y, -C^2 z) \quad (12)$$

( $B_1^2 \equiv B^2 - \Omega^2$ ), а уравнений движения отдельных частиц в системе координат, вращающейся вместе с эллипсоидом, будут следующими:

$$\ddot{x} + 2\Omega \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} - 2\Omega \dot{x} = -B_1^2 y, \quad \ddot{z} = -C^2 z. \quad (13)$$

Общее решение системы (13) таково:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= vt + \frac{2\Omega}{\beta} A_\beta \cos(\beta t + \varepsilon_\beta), \\ y &= \frac{2\Omega}{B_1^2} v + A_\beta \sin(\beta t + \varepsilon_\beta), \\ z &= A_\gamma \sin(\gamma t + \varepsilon_\gamma), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\beta^2 = B_1^2 + 4\Omega^2; \quad \gamma^2 = C^2. \quad (15)$$

В (14)  $x_0$ ,  $v$ ,  $A_\beta$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $\varepsilon_\gamma$  — произвольные константы интегрирования. Общее движение, описываемое этими формулами, можно представить как суперпозицию следующих более простых составляющих (рис. 23):

1) дрейфа ведущего центра с постоянной скоростью  $v$  вдоль  $y = 2\Omega v / B_1^2$ ;

2) вращения с угловой частотой  $\beta$  около ведущего центра, причем в сторону, противоположную вращению границы эллипсоида;

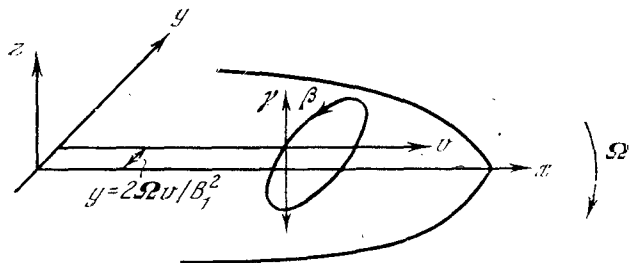


Рис. 23. Представление движения частицы внутри эллипсоида Фримана в виде суперпозиции трех элементарных движений [203]

3) гармонических колебаний с частотой  $\gamma$  около экваториальной плоскости  $z=0$ .

Частицы, имеющие отличную от нуля скорость дрейфа  $v$ , будут обязательно потеряны эллипсоидом, поэтому для построения самосогласованных моделей используем только частицы с  $v=0$ .

Выпишем интегралы движения отдельной звезды. В общем случае, когда отношение частот колебаний в плоскости  $(x, y)$  и по оси  $z$  ( $\beta/\gamma$ ) иррационально, таких интегралов четыре:

$$x_0 = x - \frac{2\Omega}{\beta^2} \dot{y}, \quad (16)$$

$$I_2 = \dot{x} + 2\Omega y \equiv 0, \quad (17)$$

$$E_\beta = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 y^2 = \frac{1}{2} \beta^2 A_\beta^2, \quad (18)$$

$$E_\gamma = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 z^2 = \frac{1}{2} \gamma^2 A_\gamma^2. \quad (19)$$

Ввиду (17) функция распределения системы должна иметь форму

$$f = f(I_i) = F(x_0, E_\beta, E_\gamma) \delta(I_2). \quad (20)$$

Будем искать функцию  $F$  в виде  $F = F(\mathcal{Y})$ , где  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(x_0, E_\beta, E_\gamma) = 1$  есть условие того, что орбита касается поверхности эллипсоида.

Из (16) — (19) следует, что в общем случае (когда  $\beta/\gamma$  иррационально) орбита звезды при  $\beta t, \gamma t \rightarrow \infty$  покрывает поверхность эллиптического цилиндра:

$$\frac{\beta^2}{4\Omega^2} (x - x_0)^2 + y^2 = A_\beta^2, \quad (21)$$

$$-A_\gamma \leq z \leq A_\gamma.$$

Орбита, характеризуемая интегралами  $(x_0, E_\beta, E_\gamma)$ , касается эллипсоида (1), если

$$\mathcal{Y} = \frac{x_0^2}{a^2 - 4\Omega^2 b^2 / \beta^2} + \frac{2E_\beta}{\beta^2 b^2} + \frac{2E_\gamma}{\gamma^2 c^2} = 1. \quad (22)$$

В такой записи  $\mathcal{Y}$  представлена явно как функция интегралов движения. Выражение для  $\mathcal{Y}$  можно переписать также в следующей форме:

$$\mathcal{Y}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{c_y^2}{\beta^2 b^2 \mu^2} + \frac{c_z^2}{\gamma^2 c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (23)$$

где введены обозначения

$$c_y = \dot{y} - 2\Omega b^2 x / a^2, \quad \mu^2 = 1 - \frac{4\Omega^2 b^2}{\beta^2 a^2}. \quad (24)$$

Отсюда видно, что возможные значения  $\mathcal{Y}$  для орбит, проходящих через точку  $\mathbf{r}$  внутри эллипсоида, удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq \mathcal{Y}(\mathbf{r}) \leq 1. \quad (25)$$

Найдем теперь функцию  $F(\mathcal{Y})$ , которая должна удовлетворять уравнению

$$\rho_0 \theta \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right] = \int F(\mathcal{Y}) \delta(I_2) d\mathbf{v}. \quad (26)$$

Используя (25) и переходя в (26) к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей  $(q, \theta)$

$$c_y = \beta b \mu q \sin \theta, \quad c_z = \gamma c q \cos \theta,$$

легко получить

$$F(\mathcal{Y}) = \frac{\rho_0}{\pi \beta \gamma b c \mu} \delta(\mathcal{Y} - 1), \quad (27)$$

так что окончательно функция распределения имеет вид

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi \beta \gamma \mu b c} \delta(v_x + 2\Omega y) \delta \left( \frac{c_y^2}{\beta^2 b^2 \mu^2} + \frac{c_z^2}{\gamma^2 c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right). \quad (28)$$

Рассмотрим движение вещества в таком эллипсоиде. По оси  $z$  частицы совершают гармонические колебания с частотой  $\gamma$ . Интереснее обстоит дело с движением в плоскости вращения  $x, y$ .

Вычислим среднюю макроскопическую скорость вещества

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\rho_0} \int \mathbf{v} f_0 d\mathbf{v}. \quad (29)$$

Она оказывается равной

$$\langle \mathbf{v} \rangle = (-2\Omega y, 2\Omega b^2 x/a^2, 0), \quad (30)$$

т. е. линии тока во вращающейся системе есть эллипсы, подобные и concentрические с поперечным сечением  $z = \text{const}$  эллипсоида, причем циркуляция вещества происходит навстречу направлению вращения границы. В частности, и поверхность эллипсоида покрыта линиями тока средней циркуляции.

Линии тока для средней скорости  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , очевидно, не совпадают с траекториями самих частиц, несмотря на то что система является стационарной во вращающейся системе.

Вычислим теперь тензор дисперсии скоростей

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\rho_0} \int (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle) f_0 d\mathbf{v} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Отличными от нуля оказываются лишь диагональные компоненты  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{zz}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0, \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{2} b\beta^2 \left(1 - \frac{4\Omega^2 b^2}{\beta^2 a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{2} \gamma c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя (30) — (32), можно проверить, что, как и следовало ожидать, удовлетворяется гидродинамическое уравнение Джинса ( $\mathbf{c} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle$ )

$$\text{div } \sigma + \mathbf{c} \nabla \mathbf{c} + 2[\Omega \mathbf{c}] - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (33)$$

Средняя скорость в инерциальной системе отсчета определяется равенством

$$R \langle v_\varphi \rangle = \Omega^2 (x^2 + y^2) - \langle v_y \rangle x + \langle v_x \rangle y = \Omega \left[ x^2 \left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right) - y^2 \right]. \quad (34)$$

Отсюда следует, что в области  $y^2 > (1 - 2b^2/a^2) \cdot x^2$  средняя скорость вращения противоположна направлению вращения системы отсчета (т. е. направлению вращения главных осей эллипсоида), а в области  $y^2 < (1 - 2b^2/a^2) \cdot x^2$  совпадает с ним. Видно, что «противотоки» существуют только для достаточно сплюснутых в плоскости вращения эллипсоидов:  $2b^2 < a^2$  (рис. 24). Любопытно отметить, что такие макроскопические движения описаны Фриманом и Вокулером [206] в галактике NGC 4027 (подробнее см. § 2 VIII главы). Угловой момент эллипсоида Фримана равен

$$L_{\text{tot}} = \int \rho [\Omega R^2 - \langle v_y \rangle x + \langle v_x \rangle y] d\mathbf{v} = \frac{1}{5} M \Omega (a^2 - 3b^2). \quad (35)$$

Видно, что для  $a^2 < 3b^2$  направления угловой скорости границы и полного момента противоположны, а для  $a^2 > 3b^2$  эти направления совпадают.

Полная кинетическая энергия, равная сумме внутренней кинетической энергии (хаотического движения звезд) и энергии «организован-

ного» среднего вращения, равна

$$E_T = \frac{1}{2} \iint [(v_x + \Omega y)^2 + (v_y - \Omega x)^2 + v_z^2] f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \frac{3}{10} \frac{M^2 G F(\omega_0, k)}{(a^2 - c^2)^{1/2}}. \quad (36)$$

Потенциальная энергия вычисляется как

$$V = \frac{1}{2} \int \rho_0 \Phi_0 d\mathbf{r} = -\frac{3}{5} \frac{M^2 G F(\omega_0, k)}{(a^2 - c^2)^{1/2}}. \quad (37)$$

Из (36), (37) следует, в частности, что

$$2E_T + V = 0, \quad (38)$$

т. е. выполнение вириальной теоремы.

Устойчивость трехосных эллипсоидов Фримана относительно самых крупномасштабных возмущений исследуется в § 2 [91, 96]. Оказалось,

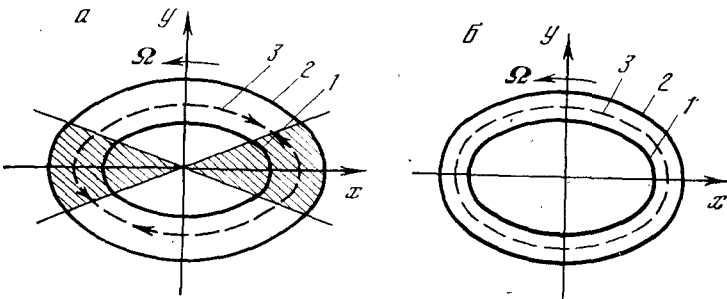


Рис. 24. Макроскопическое движение вещества в плоскости вращения трехосного эллипсоида Фримана

*a* — случай наличия противотоков: эллипсоид достаточно сильно сплюснут в плоскости вращения,  $b/a < 1/\sqrt{2}$  (направления вращения в инерциальной системе отсчета в заштрихованной и незаштрихованной областях противоположны); *b* — случай отсутствия противотоков ( $b/a > 1/\sqrt{2}$ ); 1 — линия тока во вращающейся системе отсчета, 2 — граница эллипсоида, 3 — направление среднего вращательного движения в инерциальной системе отсчета

что в области наблюдаемых в реальных перемычках галактик сплюснутостей имеет место устойчивость (см. также § 2 главы VIII).

Частным случаем трехосного эллипсоида (28) является двухосный эллипсоид Фримана, который можно получить из (28) предельным переходом  $b \rightarrow a$ . Функция распределения в системе координат, вращающейся вместе с эллипсоидом, есть

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi \gamma c} \delta(v_x) \delta(v_y) \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\gamma^2 c^2} \right)^{-1/2}. \quad (39)$$

Траектории частиц в неподвижной системе имеют следующий вид: проекции их на плоскость ( $x, y$ ) представляют собой окружности, а вдоль оси  $z$  частицы совершают гармонические колебания с частотой  $\gamma^4$ .

Подробное исследование устойчивости этих эллипсоидов содержится в § 3 этой главы [91, 93]. Они неустойчивы при любом значении сплюснутости.

Наряду с функцией распределения (39), где все частицы движутся в одну и ту же сторону, можно [21] рассматривать *суперпозиции* двух таких моделей с противоположными направлениями вращения (и любым относительным весом).

<sup>1</sup> Неаксиально-симметричных однородных эллипсоидов ( $a \neq b$ ) с аналогичной картиной движения частиц в плоскости вращения (эллиптические орбиты, подобные и concentric с граничным эллипсом) не существует (см. задачу 6).



Модели вращающихся трехосных звездных эллипсоидов (28) Фриман применяет для описания некоторых свойств перемишек («баров») спиральных галактик типа SB (см. § 2 VIII главы). Способом, аналогичным описанному выше, Фриман получил также точные функции распределения для других «бароподобных» моделей: эллиптического цилиндра [202] и эллиптического диска [204].

Допустим, что система (диск или цилиндр) вращается с угловой скоростью  $(-\Omega)$  вокруг оси  $z$ . Гравитационный потенциал во внутренней области выражается формулой

$$\Phi_0 = \text{const} + \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{2} B^2 y^2, \quad (40)$$

где в случае цилиндра

$$A^2 = 4\pi G \rho_0 b / (a+b), \quad B^2 = 4\pi G \rho_0 a / (a+b), \quad (41)$$

а в случае диска

$$A^2 = 3GM [K(m) - E(m)] / ma^3, \quad B^2 = 3GM [E(m) - b^2 K(m) / a^2] / mab^2, \quad (42)$$

$m \equiv 1 - b^2/a^2$ ;  $E$  и  $K$  — полные эллиптические интегралы. Большая полуось направлена по оси  $x$ , а малая — по оси  $y$ :  $a > b$ . Тогда, как следует из (41), (42) (и очевидно из физических соображений),  $B^2 > A^2$ . Уравнения движения звезды в потенциале (40) во вращающейся с угловой скоростью  $-\Omega$  системе координат таковы:

$$\ddot{x} + 2\Omega \dot{y} = (\Omega^2 - A^2) x, \quad (43)$$

$$\ddot{y} - 2\Omega \dot{x} = (\Omega^2 - B^2) y.$$

Общее решение этой системы уравнений следующее:

$$\begin{aligned} x &= A_\alpha \sin(\alpha t + \varepsilon_\alpha) + A_\beta \sin(\beta t + \varepsilon_\beta), \\ y &= k_\alpha A_\alpha \cos(\alpha t + \varepsilon_\alpha) - k_\beta A_\beta \cos(\beta t + \varepsilon_\beta), \end{aligned} \quad (44)$$

где  $(A_\alpha, A_\beta)$ ,  $(k_\alpha A_\alpha, k_\beta A_\beta)$  и  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$  — постоянные вещественные амплитуды и фазы, а безразмерные величины  $k_\alpha, k_\beta$  есть

$$k_\alpha = \frac{A^2 - \Omega^2 - \alpha^2}{2\alpha\Omega}, \quad k_\beta = \frac{\Omega^2 + \beta^2 - A^2}{2\beta\Omega}. \quad (45)$$

Будем считать  $A_\alpha, A_\beta$  положительными. Частоты колебаний  $\alpha$  и  $\beta$  находятся как корни уравнения четвертого порядка

$$F(\omega) = \omega^4 - (A^2 + B^2 + 2\Omega^2)\omega^2 + (A^2 - \Omega^2)(B^2 - \Omega^2) = 0. \quad (46)$$

Пусть  $\alpha, \beta$  — положительные корни (46) и  $\beta > \alpha$  для определенности. Функции распределения представляются следующими формулами (см. задачи 1 и 2 к этой главе):

$$f_0 = \rho_0 ab \Lambda^2 \delta (1 - I) / \pi k_\alpha k_\beta \quad \text{для цилиндра}, \quad (47)$$

$$f_0 = 3M \Lambda^2 (1 - I)^{-1/2} / 4\pi^2 k_\alpha k_\beta \quad \text{для диска}, \quad (48)$$

где использованы обозначения

$$\Lambda^2 = 4\Omega^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2)^2 / [(a^2 k_\beta^2 - b^2)(b^2 - a^2 k_\alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2)^2], \quad (49)$$

$$I = (k_\beta^2 - k_\alpha^2) \left[ \frac{A_\alpha^2}{a^2 k_\beta^2 - b^2} + \frac{A_\beta^2}{b^2 - a^2 k_\alpha^2} \right].$$

Структура «бароподобных» моделей, впервые описанных Фриманом, позднее была весьма подробно проанализирована Хантером, который

сделал попытку обрисовать полную систему таких моделей [234]. Впрочем, нужно сразу оговориться, что каких-либо новых решений по сравнению с найденными Фриманом он не обнаружил. Наиболее интересным в упомянутой работе Хантера является, пожалуй, исследование вопроса о единственности полученных решений. Строго единственность доказывается, правда, только в некоторых частных случаях, именно: для функций распределения покоящегося эллиптического диска или цилиндра (см. задачу 3 к этой главе). Физически приемлемые решения для вращающихся эллипсоидов получаются только в двух специальных случаях, рассмотренных Фриманом: в дисковом пределе  $c \rightarrow 0$  и в случае эллипсоида, вращающегося с максимально возможной угловой скоростью  $\Omega = A$  (см. задачу 5).

**2. «Горячие» модели бесстолкновительных эллипсоидов вращения.** Приведенные выше модели сфероидов Фримана (28) не имеют никакой дисперсии скоростей частиц в плоскости вращения  $(x, y)$  и в этом смысле являются «холодными».

Если, однако, иметь в виду приложения к эллиптическим галактикам, то более удовлетворительными представляются «горячие» модели, обладающие конечной дисперсией скоростей в плоскости вращения. Поиск физически приемлемых «горячих» моделей эллипсоидальных систем долгое время не давал каких-либо результатов. Мы уже отмечали исследование Хантера [234], в котором, помимо старых моделей Фримана [203], были найдены лишь совершенно «патологические» решения, имеющие отрицательную функцию распределения в некоторой конечной области фазового пространства. К аналогичным трудностям приводят и попытки отыскания простейших бесстолкновительных аналогов жидких эллипсоидов Маклорена или Якоби (см. задачу 5). Известна также теорема [179], которая утверждает, что не существует какой-либо конечной самогравитирующей стационарной и аксиально-симметричной звездной системы с эллипсоидальной<sup>1</sup> по скоростям функцией распределения и ненулевыми дисперсией скоростей и средним движением в плоскости вращения.

Ниже мы описываем [117] модели «горячих» однородных бесстолкновительных сфероидов с функциями распределения по скоростям более сложного вида (не эллипсоидального).

Уравнение границы рассматриваемого эллипсоида вращения пусть будет

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (50)$$

плотность равна  $\rho_0$ , а гравитационный потенциал во внутренней точке  $(r, z)$  запишем в виде

$$\Phi_0(r, z) = \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{\omega_0^2 z^2}{2}. \quad (51)$$

Будем сначала искать функции распределения *покоящихся* сфероидов, зависящие от следующих трех интегралов движения: энергии частицы в плоскости вращения  $(x, y)$   $E_{\perp} = \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_{\phi}^2}{2} + \frac{\Omega^2 r^2}{2}$  ( $v_r$  и  $v_{\phi}$  — соответственно радиальная и азимутальная скорости), энергии колебаний в перпендикулярном направлении  $(z)$   $E_z = \frac{v_z^2}{2} + \frac{\omega_0^2 z^2}{2}$ , углового момента  $L \equiv L_z = r v_{\phi}$ . Итак, мы полагаем  $f_0 = f_0(E_{\perp}, E_z, L)$ , и задача состоит в том, чтобы решить

<sup>1</sup> Т. е. зависящей от квадратичной формы компонент скорости частицы  $\sum \alpha_{ik} v_i v_k (+ \sum \beta_i v_i)$ .

интегральное уравнение

$$\rho_0 \theta (1 - r^2/a^2 - z^2/c^2) = \iiint f_0 d^3v. \quad (52)$$

Уравнение (52) записывается в виде:

$$\rho_0 \theta (1 - r^2/a^2 - z^2/c^2) = \iiint \frac{f_0(E_\perp, E_z, L) dE_\perp dL dE_z}{\sqrt{2E_\perp r^2 - L^2 - r^4} \sqrt{2E_z - \omega_0^2 z^2}}. \quad (53)$$

Для определения области интегрирования в (53) рассмотрим подробнее орбиту какой-либо частицы, характеризующейся интегралами  $E_\perp, E_z, L$ . В плоскости вращения  $(x, y)$  орбита представляет собой эллипс с центром в начале координат. Максимальный  $r_{\max}$  и минимальный  $r_{\min}$  радиусы орбиты связаны с  $E_\perp$  и  $L$  формулами (в дальнейшем будем считать, что  $a=1, \Omega=1$ )

$$r_{\max}^2 = E_\perp + \sqrt{E_\perp^2 - L^2}, \quad (54)$$

$$r_{\min}^2 = E_\perp - \sqrt{E_\perp^2 - L^2}. \quad (55)$$

Удобно принять  $r_{\max}^2$  и  $r_{\min}^2$  за новые аргументы функции распределения  $f_0$  вместо  $E_\perp, L$ :  $r_{\max}^2 = u, r_{\min}^2 = v$ . С учетом движения по оси  $z$  ясно, что орбита частицы с данными  $u, v, E_z$  заполняет с течением времени поверхность эллиптического цилиндра, высота которого  $z_{\max} = (2E_z/\omega_0^2)^{1/2}$  не может быть больше, чем  $c\sqrt{1 - r_{\max}^2} = c\sqrt{1 - u}$ . Это условие позволяет написать уравнение одной из границ фазовой области рассматриваемой системы

$$u + 2E_z/\omega_0^2 c^2 = 1. \quad (56)$$

Остальные границы, очевидно, следующие:

$$u > r^2, \quad 0 \leq v \leq r^2, \quad (57)$$

$$2E_z > \omega_0^2 z^2. \quad (58)$$

Таким образом, вместо (53) мы можем написать

$$\rho_0 \theta (1 - r^2 - z^2/c^2) = \iiint \frac{dE_z}{\sqrt{2E_z - \omega_0^2 z^2}} \frac{dudv f(u, v, E_z)}{\sqrt{(u - r^2)(r^2 - v)}}. \quad (59)$$

Здесь введена новая функция

$$f \equiv J(u, v) f_0(u, v, E_z), \quad (60)$$

а  $J(u, v) \equiv (\sqrt{u/v} - \sqrt{v/u})/4$  есть якобиан преобразования от переменных  $E_\perp, L$  к переменным  $u, v$ . Интегрирование в (59) распространяется на область, определенную (56) — (58) (рис. 25, а).

Решение уравнения (59) проведем в два этапа. Сначала сведем (59) к эквивалентному уравнению, но уже с двойным интегралом в правой части (освободимся от интеграла по  $E_z$ ). После этого будем искать решения получившегося более простого интегрального уравнения.

Обозначая двойной интеграл в (59) при фиксированном  $E_z$  через  $\psi(r^2, E_z)$ , легко убедиться в том, что уравнение для функции  $\psi$  есть стандартное интегральное уравнение Абеля (по отношению к аргументу  $E_z$ ; при этом существенно, что  $\psi$  не зависит от  $z^2$ ). Решая это уравнение, получим вместо (59)

$$\frac{\rho_0}{\pi \omega_0 c} \left(1 - r^2 - \frac{2E_z}{\omega_0^2 c^2}\right)^{-1/2} = \iint \frac{f(u, v, E_z) dudv}{\sqrt{(u - r^2)(r^2 - v)}}, \quad (61)$$

причем интегрирование в плоскости  $u, v$  должно производиться по пря-

моугольной области (рис. 25, б)

$$r^2 \leq u \leq 1 - 2E_z/\omega_0^2 c^2; \quad 0 \leq v \leq r^2. \quad (62)$$

Заметим, что, если проинтегрировать (61) по  $dzdv_z = \frac{2\pi}{\omega_0} dE_z$ , мы придем к уравнению для функции распределения соответствующей дисковой системы (которое можно получить и непосредственно)

$$\sigma_0(0) \sqrt{1-r^2} = \iint \frac{dudv}{\sqrt{(u-r^2)(r^2-v)}} f'_0(u, v); \quad \sigma_0(0) \equiv 2\rho_0 c. \quad (63)$$

Здесь  $f'_0$  обозначает  $\frac{1}{2} \iint f dz dv_z$ , а  $\sigma_0(0) \sqrt{1-r^2}$  — поверхностная плотность однородного эллипсоида.

Легко указать рецепт отыскания некоторых классов формальных решений уравнений (61) и (63), например всех мультипликативных решений (63) и аналогичных им для уравнения (61). Однако в каждом

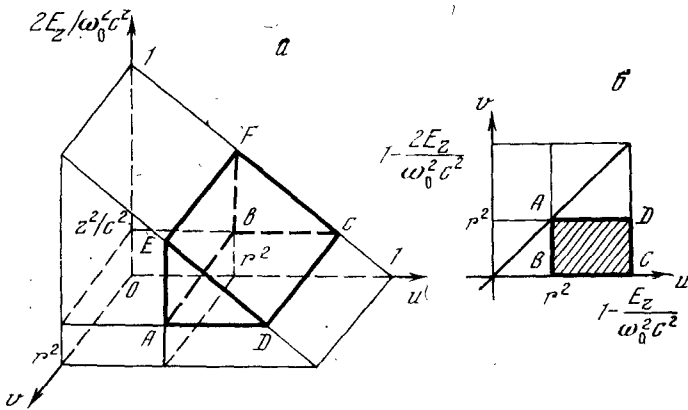


Рис. 25. Области интегрирования

а — в формуле (59) — призма  $ABCDEF$ , б — в формуле (61) — прямоугольник  $ABCD$

конкретном случае нужно дополнительно проверять положительность получающихся функций распределения (автоматически это условие не выполняется, как можно убедиться на простейших примерах). Поэтому мы ограничимся здесь указанием на одно частное решение (61), которое в этом смысле заведомо является «хорошим»:

$$f = \frac{2\rho_0}{\pi^2 \omega_0 c} v^{-1/2} \delta(1-u-2E_z/\omega_0^2 c^2), \quad (64)$$

или согласно (60)

$$f_0 = \frac{8\rho_0 \sqrt{u}}{\pi^2 \omega_0 c (u-v)} \delta(1-u-2E_z/\omega_0^2 c^2). \quad (65)$$

В дисковом пределе  $c \rightarrow 0$  эта функция переходит в следующую:

$$f_0 = \text{const} \frac{\sqrt{u}}{u-v} = \text{const} \frac{\sqrt{E + \sqrt{E^2 - L^2}}}{\sqrt{E^2 - L^2}}. \quad (66)$$

Исходя из любой функции распределения невращающегося сфероида, например (64), можно построить бесконечное число моделей вращающихся однородных сфероидов, обращая знак  $L_z$  у части частиц. Однако при этом характер вращения в общем случае будет отличаться

от твердотельного. Например, если все частицы вращаются в одну и ту же сторону, то средняя скорость равна

$$\bar{v} = \bar{v}_\varphi = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \right\}. \quad (67)$$

Найдем функции распределения *твердотельно-вращающихся эллипсоидов*, подобные (64) — (65). Пусть  $f_0^{(+)}$  и  $f_0^{(-)}$  есть функции распределения частиц с  $L_z > 0$  и  $L_z < 0$  соответственно. Если теперь обозначить через  $\gamma$  угловую скорость эллипсоида, то получим следующее уравнение на разность ( $f_0^{(+)} - f_0^{(-)}$ ):

$$\int (f_0^{(+)} - f_0^{(-)}) v_\varphi d^3v = \rho_0 \cdot \gamma r. \quad (68)$$

Для решения этого уравнения удобно снова перейти к переменным  $u, v$ , а вместо  $f_0^{(+)}$  и  $f_0^{(-)}$  рассматривать функции  $f^{(+)}$  и  $f^{(-)}$ :

$$f^{(\pm)} = \frac{u-v}{4\sqrt{uv}} f_0^{(\pm)}. \quad (69)$$

Решение, аналогичное (64), запишем в виде

$$f^{(+)} - f^{(-)} = \frac{4\gamma\rho_0}{\pi^2\omega_0 c} u^{-1/2} \delta(1-u-2E_z/\omega_0^2 c^2). \quad (70)$$

Так как, с другой стороны, согласно (64)

$$f = f^{(+)} + f^{(-)} = \frac{2\rho_0}{\pi^2\omega_0 c} v^{-1/2} \delta(1-u-2E_z/\omega_0^2 c^2), \quad (71)$$

то окончательно функцию распределения твердотельно-вращающегося эллипсоида можно представить в виде

$$f(u, v, E_z; \gamma) = \frac{2\rho_0}{\pi^2\omega_0 c} \delta(1-u-2E_z/\omega_0^2 c^2) [\varphi^{(+)}(u, v) \theta(L_z) + \varphi^{(-)}(u, v) \theta(-L_z)], \quad (72)$$

где

$$\varphi^{(\pm)}(u, v) = v^{-1/2} \pm 2\gamma u^{-1/2}. \quad (73)$$

Из условия положительности функций  $\varphi^{(\pm)}$  найдем с учетом (57) следующее ограничение на угловую скорость вращения эллипсоида:

$$|\gamma| \leq 1/2 \text{ (в единицах } \Omega). \quad (74)$$

Интересен вопрос об устойчивости предложенных моделей. Твердотельно-вращающиеся эллипсоиды, по-видимому, устойчивы. Среди дифференциально-вращающихся моделей должны быть неустойчивые (например, модель (67)). Мы обсуждаем этот вопрос в разделе 3.2.

Аналогичные (72) функции распределения можно написать и для однородных круговых цилиндров:

$$f(u, v) = \frac{\rho_0}{\pi^2 \sqrt{1-u}} \{ (v^{-1/2} + 2\gamma u^{-1/2}) \theta(L_z) + (v^{-1/2} - 2\gamma u^{-1/2}) \theta(-L_z) \}. \quad (75)$$

*Неоднородные «эллипсоидальные» системы.* Если обратиться к неоднородным системам, то сразу возникает вопрос: какие системы считать «эллипсоидальными»? Очевидно, что ответ на этот вопрос неоднозначен.

Можно, например, называть «эллипсоидальными» системы, у которых поверхности равной плотности есть концентрические эллипсоиды. Простой пример такого рода неоднородных *сфероидов*<sup>1</sup> был найден

<sup>1</sup> Они замечательны также тем, что допускают третий *квадратичный* по скорости интеграл движения (см. введение).

Кузминым [60]. Плотность в этих сфероидах

$$\rho_0(r, z) = \frac{\rho_0(0, 0)}{\left[1 + \frac{(1 - \varepsilon^2)}{z_0^2} (r^2 + z^2/\varepsilon^2)\right]^2}, \quad (76)$$

она постоянна на поверхностях эллипсоидов вращения с отношением полуосей, равным  $\varepsilon$ . Вторым параметром моделей (76) является  $z_0$ . Соответствующий такому распределению массы потенциал равен

$$\Phi_0 = -\frac{2}{\pi} \frac{GM}{\zeta_1^2 - \zeta_2^2} \left[ \zeta_1 \operatorname{arctg} \frac{\zeta_1 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{z_0 \varepsilon} - \zeta_2 \operatorname{arctg} \frac{\zeta_2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{z_0 \varepsilon} \right]. \quad (77)$$

Здесь  $M = \pi^2 \varepsilon z_0^3 (1 - \varepsilon^2)^{-3/2} \rho_0(0, 0)$  — полная масса;  $(\zeta_1, \zeta_2)$  — эллиптические координаты точки  $(r, z)$ . Они выражаются через  $(r, z)$  как решения квадратного уравнения относительно  $\zeta^2$

$$\frac{r^2}{\zeta^2 - z_0^2} + \frac{z^2}{\zeta^2} = 1, \quad (78)$$

$|\zeta_1| > z_0$ ,  $|\zeta_2| < z_0$  (кривые  $\zeta_1 = \text{const}$  в плоскости  $r, z$  есть эллипсы, а кривые  $\zeta_2 = \text{const}$  — гиперболы).

Задача построения самосогласованных моделей таких систем сопряжена с довольно значительными трудностями. Пока неизвестно ни одной такой модели.

Другой подход заключается в том, чтобы искать стационарные системы с распределением плотности, *подобным наблюдаемому*, например в эллиптических галактиках. Как известно [34], поверхности одинаковой плотности (точнее, изофоты) в эллиптических галактиках лишь приближенно имеют форму сфероидов.

Поэтому можно попытаться построить подходящие модели, решая интегральное уравнение для функции распределения вида  $f_0 = f_0(E, L_z)$ :

$$\rho_0(r, z) = \int f_0(E, L_z) d^3v, \quad (79)$$

считая плотность  $\rho_0(r, z)$  известной. Одновременно можно считать известным и потенциал  $\Phi_0(r, z)$ .

Исключив  $z$  из уравнений

$$\rho_0 = \rho_0(r, z), \quad \Phi_0 = \Phi_0(r, z), \quad (80)$$

мы получим функцию  $\rho_0 = \rho_0(r, \Phi_0)$ . Очевидно, что уравнение (79) определяет только четную по  $L_z$  часть функции распределения, которую мы обозначим  $f_0(E, L_z^2)$ .

Уравнение (79) удобно переписать в виде [280]:

$$\rho_0(r^2, \Phi_0) = 4\pi \int_{X=\Phi_0}^0 dX \int_{Y=0}^{-X} (2Y)^{-1/2} f_0(Y+X, 2Yr^2) dY, \quad (81)$$

где

$$Y \equiv \frac{1}{2} v_\Phi^2, \quad X = E - Y; \quad E = v^2/2 + \Phi_0.$$

Дифференцируя по  $\Phi_0$ , получим очень простое с виду уравнение ( $\psi \equiv -\Phi_0$ ):

$$\frac{\partial \rho_0(r^2, \psi)}{\partial \psi} = 4\pi \int_{Y=0}^{\psi} (2Y)^{-1/2} f_0(Y - \psi, 2Yr^2) dY. \quad (82)$$

Общий метод решения этого уравнения был предложен Линден-Беллом [280]. Поскольку правая часть (82) имеет форму свертки, в которой участвует первый аргумент  $f_0$ , естественно выполнить преобразование

Лапласа по  $\psi$ . Пусть  $s$  — переменная этого преобразования, тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{s}{4\pi} \int_0^{\infty} e^{-s\psi} \rho_0(r^2, \psi) d\psi &= \int_0^{\infty} e^{-s\psi} d\psi \int_0^{\psi} (2Y)^{-1/2} f_0(Y - \psi, 2Yr^2) dY = \\ &= \int_0^{\infty} (2Y)^{-1/2} dY \int_{\psi=Y}^{\infty} e^{-s\psi} f_0(Y - \psi, 2Yr^2) d\psi = \\ &= \int_{Y=0}^{\infty} e^{-sY} dY \int_{B=0}^{\infty} e^{-sB} (2Y)^{-1/2} f_0(-B, 2Yr^2) dB, \end{aligned} \quad (83)$$

где  $B \equiv \psi - Y$  и использовано равенство

$$\rho_0(r^2, 0) = 0 \quad (\psi = 0 \text{ на бесконечности}). \quad (84)$$

Введем новые переменные  $t = 2Yr^2$ ,  $u = \frac{s}{2r^2}$ ; при этом равенство (83) преобразуется следующим образом:

$$\frac{s}{2\pi} \left(\frac{s}{2u}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-s\psi} \rho_0\left(\frac{s}{2u}, \psi\right) d\psi = \int_0^{\infty} e^{-ut} dt \int_0^{\infty} e^{-sB} \frac{f_0(-B, t)}{t^{1/2}} dB. \quad (85)$$

Поскольку функция  $\rho_0(r^2, \psi)$  считается данной, левая сторона (85) известна, а справа стоит двойное лаплас-преобразование. Поэтому двукратное обратное преобразование Лапласа левой части уравнения (85) даст искомую функцию распределения  $f_0(E, L^2)$ .

Итак, задача в принципе решена для любого исходного распределения массы  $\rho_0(r, z)$ . Однако практическая реализация изложенной процедуры для определения функции распределения в явном виде сталкивается с рядом трудностей. Первая трудность заключается в необходимости явного вычисления функции  $\rho_0(r^2, \Phi_0)$ . Другая, еще более серьезная трудность связана с требованием двойной лаплас-инверсии (каждая инверсия включает интегрирование в комплексной плоскости).

Тем не менее в простейших случаях удастся найти явные решения. Линден-Белл иллюстрирует свой метод примером систем с гравитационным потенциалом<sup>1</sup>

$$\Phi_0 = -A\lambda^{-1/4}, \quad \lambda \equiv (r^2 + a^2)^{-1/2} - 2b^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (86)$$

где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты,  $A$  и  $a, b$  — параметры,  $\lambda$  положительна, если  $b^2 < 2a^2$ . Плотность

$$\rho = \frac{A}{\pi G} \lambda^{-3/4} [(3a^2 - 2b^2)(r^2 + a^2)^2 + (4a^2 - b^2)b^2 r^2 \sin^2 \theta], \quad (87)$$

она положительна при условии  $b^2 < 3a^2/2$ . Из (86) и (87) находим функцию  $\rho(\psi)$ ,  $\psi \equiv -\Phi_0$ :

$$\begin{aligned} \rho &= D\psi^5 + CR^2\psi^9, \quad R = r \sin \theta, \\ D &= (3a^2 - 2b^2/A^4\pi G), \quad C = [5b^2(2a^2 - b^2)/A^8\pi G]. \end{aligned} \quad (88)$$

Далее имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-s\psi} \left(\frac{s}{u}\right)^{1/2} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} \left(\frac{s}{u}, \psi\right) d\psi = \left(5! s^{-5} D + 9! \frac{s^{-9}}{u} C\right) \left(\frac{s}{u}\right)^{1/2}. \quad (89)$$

<sup>1</sup> Можно отметить, что модели (86) представляют обобщение сферической модели Шустера — Пламмера, для которой  $\Phi_0 = A(r^2 + a^2)^{-1/2}$ ,  $\rho_0 \propto (r^2 + a^2)^{-3/2}$ .

Обратное лаплас-преобразование функции  $u^{-n-1/2}$  равно  $t^{(n-1/2)}/\Gamma(n+1/2)$ . Поэтому обратное лаплас-преобразование (89) по  $u$  есть

$$\pi^{-1/2} (5! s^{-4.5} t^{-1/2} D + 9! 2s^{-7.5} t^{1/2} C). \quad (90)$$

Выполнив еще обратное преобразование по  $s$ , приходим к следующему выражению для функции распределения (точнее, ее симметричной по  $L_z$  части):

$$f_0 = F_1 (-E)^{3.5} + F_2 L_z^2 (-E)^{6.5}; \quad E = \frac{v^2}{2} - \psi; \quad (91)$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^{3/2}} \frac{5!}{\Gamma(5, 5)} \cdot D \approx 0,65 D, \quad F_2 = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^{3/2}} \cdot \frac{9!}{\Gamma(7, 5)} \cdot C \approx 12,3 C. \quad (92)$$

Свойства этой модели подробно описаны в упоминавшейся работе Линден-Белла.

Хантер [235] несколько модифицировал метод Линден-Белла. Используя свой метод, Хантер нашел [235] точную функцию распределения системы с потенциалом

$$\Phi_0 = - \frac{A}{[(r^2 + z^2 + a^2) - 2\lambda a^2 r^2]^{(1-\mu)/4}}, \quad (93)$$

где  $A$ ,  $a$  — размерные параметры (определяющие масштаб системы),  $\lambda$  и  $\mu$  — безразмерные параметры. Параметр  $\lambda$  характеризует степень отклонения от сферической симметрии, а параметр  $\mu$  определяет поведение  $\Phi_0$  на больших расстояниях. При малых  $\lambda$  поверхности равной плотности, соответствующие потенциалу (93), представляют собой приближенно эллипсоиды вращения с эксцентриситетами, уменьшающимися по мере удаления от центра. Условие положительности плотности ограничивает величины параметров  $\mu$  и  $\lambda$  значениями

$$0 < \mu < 1, \quad -6 < \lambda < 1,5. \quad (94)$$

Поскольку при  $(r^2 + z^2) \rightarrow \infty$

$$\rho_0 \sim (r^2 + z^2)^{(\mu-3)/2}, \quad (95)$$

рассматриваемые системы имеют бесконечную массу, что является одним из недостатков этих моделей. Найденная Хантером функция распределения имеет весьма громоздкий вид, и мы ее здесь не станем выписывать.

Очевидным достоинством описанных выше методов Линден-Белла и Хантера является (принципиальная) возможность определения самосогласованных моделей эллиптических галактик непосредственно из данных наблюдений, которые дают плотность  $\rho_0(r, z)$ . К недостаткам этих методов можно отнести, помимо вычислительных трудностей, еще и необходимость проверки положительности получающейся (обычно весьма громоздкой) функции распределения. Дело в том, что положительность решения исходного уравнения (79) для произвольного закона распределения плотности  $\rho_0(r, z)$  не гарантируется какими-либо общими теоремами. Напротив, можно легко найти примеры таких функций  $\rho_0$ , которым соответствует  $f_0 < 0$  в некоторой области фазового пространства.

Можно было бы предположить, что при выборе плотности  $\rho_0$ , максимально близкой к *наблюдаемой* в эллиптических галактиках, решение уравнения (79) автоматически окажется положительно определенным. В действительности, однако, мы не можем гарантировать и этого, поскольку, например, при сделанном выше выборе функции распределения в виде  $f_0 = f_0(E, L_z)$  игнорируется возможность существования третьего интеграла движения.



Указанной трудности можно избежать, если исходить из заведомо положительных функциональных форм для  $f_0(E, L_z)$  с некоторым числом параметров, которые обеспечивали бы возможность варьировать модели. Распределение плотности можно затем найти, решая (численными методами) соответствующее  $f_0(E, L_z)$  уравнение Пуассона.

Такой подход принят в работах Прендергаста, Томера [307] и Вильсона [351]. Например, в первой работе  $f_0$  задается в виде

$$f_0 = \alpha \exp\left(-\frac{E}{\sigma^2} + \beta L_z\right) \quad (96)$$

с обрезанием при больших скоростях (чтобы избежать расходимости массы). При таком способе построения самосогласованных моделей трудно заранее предвидеть форму получающихся поверхностей постоянной плотности. Так, поверхности уровня в моделях (96) сильно отличаются от эллипсоидов.

Хантер [232] рассматривал также сфероиды с плотностью

$$\rho_0 = \rho_0(0, 0) (1 - r^2/a_1^2 - z^2/a_3^2) \theta(1 - r^2/a_1^2 - z^2/a_3^2). \quad (97)$$

Это, по-видимому, простейшие (после однородных) сфероиды. Достаточно простой формулой выражается в этом случае и гравитационный потенциал внутри системы:

$$\Phi_0 = \alpha r^2 + \beta z^2 + \gamma r^4 + \delta r^2 z^2 + \varepsilon z^4 \quad (98)$$

(выражения для постоянных коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  можно найти, например, в книге Чандрасекара [148]). При малых<sup>1</sup> значениях эксцентриситетов  $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2} \ll 1$  без большого труда можно методом Линден-Белла получить функцию распределения вида

$$f_0 = \frac{\rho_0(0, 0) [1 - 5\mu L_z/4\lambda] \theta\left[-E - 6\lambda/5 + \frac{3}{2}\mu L_z\right]}{6\pi^2 \sqrt{2} (\mu L_z - \lambda - E) \left[-E - 6\lambda/5 + \frac{3}{2}\mu L_z\right]^{1/2}} + o(e^2), \quad (99)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — константы, определенные посредством

$$\lambda = \frac{4\pi G \rho_0 a_1^2}{9} (1 - e^2/7), \quad \mu = 4e \left(\frac{\pi G \rho_0(0, 0)}{105}\right)^{1/2}. \quad (100)$$

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИСКА

### 2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

**1. Предварительные замечания.** В этом параграфе исследуется на устойчивость относительно малых возмущений модель трехосного бесстолкновительно эллипсоида Фримана (28) § 1. При этом мы ограничиваемся наиболее крупномасштабными типами колебаний, переводящими исходный эллипсоид снова в эллипсоид с измененными полуосями. Пусть уравнение границы эллипсоида есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

<sup>1</sup> При произвольных  $e$  попытка найти соответствующую (97), (98) функцию распределения  $f_0(E, L_z)$  приводит в методе Линден-Белла к необходимости лаплас-инверсии функции, не содержащейся ни в одной из стандартных таблиц преобразований Лапласа.

Гравитационный потенциал представим в виде

$$\Phi = \frac{1}{2}(A^2x^2 + B^2y^2 + \gamma^2z^2) + D, \quad (2)$$

где

$$A^2 = 2\pi G\rho_0\alpha_0, \quad B^2 = 2\pi G\rho_0\beta_0, \quad \gamma^2 = 2\pi G\rho_0\gamma_0,$$

$$\alpha_0 = F(a^2/b^2, a^2/c^2); \quad \beta_0 = F(b^2/a^2, b^2/c^2), \quad \gamma_0 = F(c^2/a^2, c^2/b^2),$$

$$F(u, v) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(1+\lambda)^{3/2} V(1+\lambda u)(1+\lambda v)}.$$

Функцию распределения запишем следующим образом [203]:

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi\beta\gamma\mu bc} \delta(v_x + 2\Omega y) \delta\left(\frac{c_y^2}{\beta^2 b^2 \mu^2} + \frac{v_z^2}{\gamma^2 c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right). \quad (3)$$

**2. Исследование устойчивости.** Кинетическое уравнение во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\Omega^2 x - 2\Omega v_y - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial v_x} +$$

$$+ \left(\Omega^2 y + 2\Omega v_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (4)$$

Удобно сделать в (4) замену  $v_x \rightarrow v_x - 2\Omega y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v_x - 2\Omega y) \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\Omega^2 x - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial v_x} +$$

$$+ \left(2\Omega v_x - 3\Omega^2 y - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (5)$$

Будем искать возмущенную функцию распределения  $f$  в виде ( $\varepsilon \ll 1$ )

$$f = c_0 [\delta(1 - J - \varepsilon A) + \varepsilon C \delta(1 - J)] \delta(v_x) + \varepsilon c_0 \delta(1 - J - \varepsilon A) B \delta'(v_x). \quad (6)$$

Здесь мы ввели новые неизвестные функции

$$A = A(x, y, z, v_y, v_z, t), \quad B = B(x, y, z, v_y, v_z, t), \quad C = C(x, y, z, v_y, v_z, t)$$

и обозначили

$$c_0 = \rho_0 / \pi\beta\gamma\mu bc, \quad J = \frac{c_y^2}{\beta^2 b^2 \mu^2} + \frac{v_z^2}{\gamma^2 c^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Зависимость возмущенных величин от времени выбираем в виде  $\sim e^{-i\omega t}$ .

Линеаризуя уравнение (5) и подставляя в него (6), получим систему дифференциальных уравнений для функций  $A, B, C$ :

$$\hat{L}A - 2B \left\{ \frac{x}{a^2} \left[ 1 - \frac{4\Omega^2}{\beta^2 \mu^2} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right] + \frac{2\Omega v_y}{b^2 \beta^2 \mu^2} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \right\} =$$

$$= 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{v_y - 2\Omega b^2 x/a}{b^2 \mu^2 \beta^2} + 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{v_z}{\gamma^2 c^2}, \quad (7)$$

$$\hat{L}C = \frac{\partial B}{\partial x} + 2\Omega \frac{\partial B}{\partial v_y}, \quad (8)$$

$$\hat{L}B = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad (9)$$

где мы ввели обозначение  $\hat{L}$  для следующего оператора:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - 2\Omega y \frac{\partial}{\partial x} + \left( v_y \frac{\partial}{\partial y} - B^2 y \frac{\partial}{\partial v_y} \right) + \left( v_z \frac{\partial}{\partial z} - \gamma^2 z \frac{\partial}{\partial v_z} \right). \quad (10)$$

Уравнения (7)–(9) дополняются до замкнутой системы уравнением Пуассона. Возмущенный потенциал  $\Phi_1$  можно в данном случае представить (как и для всех других систем с квадратичным потенциалом) в виде конечных полиномов по степеням декартовых координат  $x, y, z$ . При этом общая схема построения решения состоит в следующем. Задаваясь полиномом  $\Phi_1$  в  $x, y, z$  с неопределенными вначале коэффициентами, из уравнений (7)–(9) находим, решая их последовательно (9)–(8)–(7), функции  $A, B, C$ . Уравнения (7)–(9) удобнее всего решать методом интегрирования по невозмущенным траекториям, которые, как можно показать, имеют вид

$$x' = \frac{2\Omega y}{\beta} \sin \beta t + \frac{2\Omega v_y}{\beta^2} \cos \beta t + x - \frac{2\Omega v_y}{\beta^2}, \quad y' = y \cos \beta t + \frac{v_y}{\beta} \sin \beta t, \quad (11)$$

$$z' = z \cos \gamma t + \frac{v_z}{\gamma} \sin \gamma t, \quad v_y' = -\beta y \sin \beta t + v_y \cos \beta t,$$

$$v_z' = -\gamma z \sin \gamma t + v_z \cos \gamma t.$$

После этого возмущенная плотность находится по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho_1 = & -\varepsilon \frac{c_0}{2} \iint dc_y dv_z \delta(1-J) \left\{ b^2 \beta^2 \mu^2 \frac{\partial}{\partial c_y} (\chi_3/c_y) + \right. \\ & \left. + c^2 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial v_z} (\chi_2/v_z) \right\} + \varepsilon c_0 \int C \delta(1-J) dc_y dv_z, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A = \chi_0 + \chi_1$ ,  $\chi_0 = A(c_y = 0, v_z = 0)$ ,  $\chi_2 = \chi_1(c_y = 0)$ ,  $\chi_3 = \chi_1 - \chi_2$ . Соответствующий (12) вклад в возмущение потенциала  $\Phi_1$  определяется из решения уравнения Пуассона; к нему нужно еще добавить потенциал простого слоя, создаваемого вследствие возмущения границы эллипсоида. Уравнение новой границы выглядит следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \varepsilon \chi_0. \quad (13)$$

Наконец, сравнивая полученные таким образом выражения для  $\Phi_1$  с исходным, находим дисперсионное уравнение и не определенные вначале коэффициенты в полиноме  $\Phi_1(x, y, z)$ .

Мы ограничимся в дальнейшем самыми крупномасштабными колебаниями типа эллипсоид–эллипсоид, сохраняющими направление главной оси  $z$ . В этом случае выкладки наиболее просты, но получающиеся выражения, и в том числе дисперсионное уравнение, все же довольно громоздки; поэтому мы отнесли их в § 3 Приложения.

Результаты приведены на рис. 26, где представлены области устойчивых и неустойчивых решений. Граница, разделяющая эти области, определена приближенно; она имеет, как видно из рисунка, довольно сложный характер. Полоса неустойчивых решений вблизи  $b=1$  соответствует неустойчивости эллипсоида вращения Фримана. Этот эллипсоид подробно исследуется ниже (§ 3).

В § 3 Приложения приведена таблица значений инкрементов неустойчивости (в единицах  $\beta$ ). Наибольшие значения инкрементов достигаются для круговых дисков.

**3. Предел сильно вытянутых эллипсоидов.** Форме перемычек спиральных галактик соответствуют, очевидно, сильно вытянутые в плоскости вращения эллипсоиды (типа «спицы» или «палки»). На рис. 26 им соответствует левый нижний угол; они, следовательно, устой-

чивы по отношению к рассмотренным выше наиболее крупномасштабным возмущениям.

Однако по отношению к мелкомасштабным (по оси  $x$ ) возмущениям данная модель, не имеющая дисперсии скоростей вдоль направления «перемычки» (оси «спицы»), будет, разумеется, неустойчива «по Джинсу».

Эту неустойчивость «холодной» по оси  $x$  среды, очевидную из физических соображений, можно приближенно описать, если заметить, что сильно вытянутый эллипсоид для возмущений с длиной волны по  $x$ , малой по сравнению с  $a$ , должен вести себя как цилиндр. Сечение этого

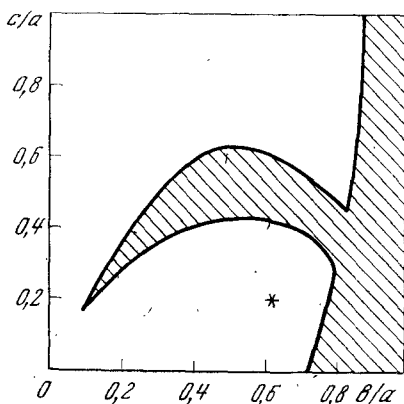


Рис. 26. Области устойчивых и неустойчивых решений (область неустойчивости заштрихована) трехосного эллипсоида Фримана

Звездочкой отмечено примерное положение NGC 4027 по данным [344]

цилиндра имеет, вообще говоря, эллиптическую форму, но если считать, что  $b \approx c$ , то можно применить формулы предыдущего параграфа для кругового цилиндра<sup>1</sup>.

Дисперсионное уравнение для  $k_x c \ll 1$ ,  $k_z c \ll 1$  должно выглядеть поэтому следующим образом:

$$\omega^2 \approx -\text{const} \beta^2 k_x^2 v_0^2, \quad (14)$$

где  $v_0 \sim \omega_0 c$  — характерная скорость движения частиц в плоскости  $(y, z)$ ,  $\beta = \ln(1/k_x c)$ , а  $\text{const} \sim 1$ .

Максимальный инкремент этой, джинсовской по существу, неустойчивости порядка  $\omega_0$ . Таким образом, строго говоря, мы не имеем в настоящее время *вполне приемлемой* модели перемычки спиральной галактики.

Но здесь необходимо заметить следующее. Согласно результатам предыдущего параграфа, цилиндр (а следовательно, достаточно сильно вытянутый эллипсоид) становится практически устойчивым, если дисперсия скоростей частиц вдоль его оси вращения (большой оси эллипсоида  $x$ ) превышает  $v_0$ ; в нашем случае при

$$v_{xt} > \omega_0 c. \quad (15)$$

Для сильно вытянутой системы это условие очень «мягкое» (при  $c \rightarrow 0$ ,  $v_0 \equiv \omega_0 c \rightarrow 0$ ): достаточно относительно малой дисперсии скоростей по оси  $x$ , чтобы сделать перемычку устойчивой.

Введение малой  $v_{xt} \neq 0$  немного модифицирует модель Фримана, в частности приведет к малым отклонениям от точно эллипсоидальной формы. Однако эти отклонения, очевидно, несущественны для рассмотрения самых крупномасштабных возмущений, которые в этом случае становятся наиболее «опасными». Исследование, проведенное выше в

<sup>1</sup> Впрочем, для достаточно длинноволновых возмущений, при  $\lambda \gg \max(b, c)$ , форма сечения не должна, очевидно, играть роли.

точной модели Фримана, показывает, что и эти возмущения не приводят к неустойчивости. Таким образом, указанная слабая модификация эллипсоидальной модели Фримана должна, по-видимому, привести к устойчивой (и в этом смысле удовлетворительной) модели перемычек спиральных галактик.

В заключение отметим одно любопытное обстоятельство. Дисперсионное уравнение для возмущений сильно вытянутого по оси  $x$  эллипсоида можно с логарифмической точностью получить из соображений размерности. Действительно, из величин  $G$ ,  $k_x$  и линейной плотности «спицы»  $\rho \equiv \pi \rho_0 b c$  можно составить единственную комбинацию размерности квадрата частоты  $G k_x^2 \rho$ . Поэтому для «холодной» по оси  $x$  системы должно быть

$$\omega^2 \approx -G k_x^2 \rho, \quad (16)$$

что и дает нам с точностью до множителя  $\beta^2 = \ln^2(1/k_x c)$  уравнение (14), описывающее возмущения «холодной» системы. Те же соображения размерности показывают, что при учете конечной дисперсии скоростей  $v_{xt}$  мы должны иметь вместо (16) следующее приближенное дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 \approx k_x^2 (\alpha_1 v_{xt}^2 - \alpha_2 G \rho_0) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \sim 1), \quad (17)$$

откуда следует универсальное (поскольку зависимость обоих членов в (17) от  $k_x^2$  одинакова) условие стабилизации неустойчивости (15)<sup>1</sup>.

Учет вращения приведет, очевидно, к положительному вкладу в правую часть (17)  $\sim \Omega^2$ , который, однако, несуществен при  $k_x \rightarrow \infty$ .

Заметим, что в случае дисковой системы аналогичные соображения размерности приводят вместо (16) к известному дисперсионному уравнению Тоомре

$$\omega^2 \approx -\text{const } G \sigma_0 k_x, \quad (18)$$

где  $\sigma_0$  — поверхностная плотность диска, точное значение  $\text{const} = 2\pi$ . Рассмотрение возмущений с длиной волны, намного превышающей толщину диска, привело Тоомре к модели *бесконечно тонкого* диска, несравненно более простой, чем трехмерные модели. Аналогично следует ожидать, что рассмотрение квазиодномерных «спиц» в качестве моделей реальных сильно вытянутых перемычек спиральных галактик также приведет к упрощениям и возможности некоторых обобщений.

Заметим, наконец, что, помимо возмущений джинсовского типа (14), должны существовать возмущения, изгибающие «спицу» перпендикулярно плоскости вращения. Они, по-видимому, устойчивы, а соответствующее им дисперсионное уравнение отличается от (14) знаком правой части. Это аналогично случаю бесконечно тонкого слоя (или диска), где, помимо колебаний в плоскости, описываемых уравнением

$$\omega^2 = -2\pi G \sigma_0 k, \quad (19)$$

имеются еще «мембранные» колебания с дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = +2\pi G \sigma_0 k \quad (20)$$

(см. § 2 главы I).

4. О «полиномиальном» виде собственных функций. Напомним сначала, почему собственными функциями задачи о малых колебаниях однородных несжимаемых эллипсоидов могут служить конечные полиномы по степеням декартовых координат.

<sup>1</sup> Мы игнорируем возможность неустойчивости с экспоненциально малым икрементом.

Система уравнений и граничных условий в этом случае выглядит следующим образом (во вращающейся системе координат):

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + 2[\Omega \mathbf{v}_1] = -\nabla \frac{P_1}{\rho_0} - \nabla \Phi_1, \quad (22)$$

$$\Delta \Phi_1 = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (\xi \text{ — лагранжево смещение}), \quad (24)$$

$$(P_1 + \xi \nabla P_0)|_{S_0} = 0. \quad (25)$$

Первое уравнение есть условие несжимаемости, второе — уравнение Эйлера, третье уравнение означает, что возмущение потенциала  $\Phi_1$  создается только за счет искривления границы эллипсоида. Условие (25) представляет факт постоянства давления на возмущенной границе; оно выражено через величины, которые нужно вычислять на первоначальной границе  $S_0$ . Пять (скалярных) уравнений (21)–(23) должны определить пять неизвестных функций:

$$\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3), P_1, \Phi_1.$$

Допустим, что потенциал  $\Phi_1$  задан в виде полинома степени  $n$  с неизвестными коэффициентами, являющимися функциями времени. Тогда, представив  $P_1$  и компоненты  $\xi$  аналогичными полиномами (соответственно, степени  $n$  и  $(n-1)$ ), из уравнений (21)–(25) выразим коэффициенты этих полиномов в виде линейных комбинаций коэффициентов полиномиального разложения потенциала  $\Phi_1$ . При этом существенно, что  $P_0$  выражается, как известно, полиномом второго порядка.

Теперь остается только использовать уравнение Лапласа (23). Для этого вычислим нормальное смещение на невозмущенной границе:  $\xi_n = (\xi \mathbf{n})|_{S_0}$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $S_0$ .

Поскольку, очевидно,

$$\mathbf{n} = l_0 \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right), \quad l_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad (26)$$

а  $\xi$  представляет собой полином степени  $(n-1)$ , то  $\xi_n$  получится в виде

$$\xi_n = l_0 P_n(x, y, z), \quad (27)$$

где  $P_n$  — полином степени  $n$ . Но такому  $\xi_n$  соответствует потенциал  $\Phi_1$ , который внутри эллипсоида снова выражается полиномом степени  $n$ . Это утверждение доказывается в теории потенциала [127, 15], где, в частности, устанавливаются следующие соотношения (см., например, «фундаментальные формулы» в книге Аппеля [15], § 65):

$$\begin{aligned} \xi_n &= l_0 \sum_k \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k M_k N_k, & \Phi_1 \Big|_{S_0} &= \sum_k \alpha_k R_k^{(0)} S_k^{(0)} M_k N_k, \\ \Phi_{1<} &= \sum_k \alpha_k S_k^{(0)} R_k M_k N_k, & \Phi_{1>} &= \sum_k \alpha_k R_k^{(0)} S_k M_k N_k, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\Phi_{1<}$  и  $\Phi_{1>}$  — соответственно потенциалы внутри и вне эллипсоида  $S_0$ ,  $\Phi_1|_{S_0}$  — потенциал на поверхности  $S_0$ ;  $R(\rho)$ ,  $M(\mu)$ ,  $N(\nu)$  — функции Ламэ первого рода;  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — эллиптические координаты;  $RMN$  — произведения Ламэ,  $S_k(\rho)$  — функция Ламэ второго рода; индекс (0) означает, что функция вычисляется на поверхности  $S_0$  (которой отвечает  $\rho = \rho_0$ ).

Для нас существенно, что произведения Ламэ  $RMN$ , через которые, согласно (28), выражается внутренний потенциал  $\Phi_{1,2}$ , приводятся в декартовых координатах к гармоническим полиномам [15].

Таким образом вычисления непротиворечиво замыкаются, и в результате мы получаем однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (с постоянными коэффициентами) относительно коэффициентов исходного полиномиального разложения  $\Phi_1$ .

Свойство «полиномиальности» решений сохраняется и для тех моделей однородных *бесстолкновительных* эллипсоидальных систем<sup>1</sup>, устойчивость которых мы исследуем.

Если попробовать не конкретизировать вид функции распределения, мы столкнемся с рядом трудностей. Прежде всего системы с разной симметрией имеют в общем случае различное число однозначных интегралов движения, являющихся аргументами  $f_0$ . Поэтому приходится все-таки отдельно рассматривать трехосные эллипсоиды, двухосные эллипсоиды (сфероиды), цилиндры и сферы. Другая неопределенность связана с тем, что функция распределения может зависеть, помимо энергии и углового момента, еще от некоторого числа в определенном смысле «случайных» интегралов движения, существование которых обязано особой симметрии движения в той или иной конкретной модели (см. введение). Примером такого положения<sup>2</sup> может служить рассмотренная выше модель трехосного эллипсоида Фримана, как раз имеющая очень специальную симметрию движения частиц, связанную с предположением о точном балансе гравитационного притяжения и центробежной силы вдоль большой полуоси  $x$ . Соответственно найденная Фриманом функция распределения зависит от четырех интегралов, два из которых ( $E_6$  и  $E_7$ ) стандартны, но два других ( $x_0$ ,  $I_2$ ) специфичны именно для этой модели. Причем нужно отметить, что эта функция распределения дает, возможно, единственное физически приемлемое решение для однородного *трехосного* бесстолкновительного эллипсоида. Во всяком случае, попытки найти функции распределения, зависящие только от «стандартных» интегралов движения, не привели к разумным решениям (см., например, задачу 5).

В связи с этим вообще представляется сомнительной возможность «общего» доказательства утверждения о полиномиальности решений. Возможно также, что в общем случае это утверждение несправедливо, хотя его можно доказать для некоторых *классов* функций распределения однородных эллипсоидов. Для всех исследуемых на устойчивость в этой книге однородных систем «полиномиальность» легко устанавливается в каждом конкретном случае отдельно. При этом существенно используется лишь одно дополнительное по отношению к случаю несжимаемых эллипсоидальных систем обстоятельство, именно: полиномиальные возмущения локальной плотности тоже приводят к полиномиальным возмущениям потенциала.

## 2.2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИСКОВ ФРИМАНА

Устойчивость дисковых моделей (48) §1 по отношению к самым крупномасштабным возмущениям (типа «диск» — «диск») изучалась Тримейном [335]. Исследование проведено стандартным способом, кото-

<sup>1</sup> Причем имеются в виду прежде всего ограниченные системы. Для случая неограниченных систем (однородный плоский слой, цилиндр) указанное свойство сохраняется лишь при возмущениях специального вида, не зависящих от тех координат, которые могут принимать бесконечные значения. В качестве примера можно привести желобковые колебания цилиндра ( $k_z=0$ ).

<sup>2</sup> Сюда можно отнести также системы с круговыми траекториями, где роль такого рода «случайных» интегралов движения играют радиусы орбит частиц. Однако функции распределения *однородных систем* с круговыми орбитами можно выразить через «обычные» интегралы (в виде  $\infty \delta(E-L)$ ).

рый подробно описан выше. Правда, Тримейн использует аппарат функций Ламе [15], но, как мы видели в предыдущем параграфе (раздел 2.1), для рассматриваемых им простейших мод вполне можно обойтись и без этих функций.

Поэтому мы сразу приступаем к обсуждению полученных в [335] результатов, опуская несложные (хотя и громоздкие) математические выкладки.

Классификацию возмущений можно, как обычно, провести по старшим степеням  $n$  полиномиальных разложений возмущенного потенциала

$$\Phi_1 = a_{01}x^n + a_{02}x^{n-1}y + \dots + a_{0, n+1}y^n + \dots \quad (1)$$

Для  $n=1$  получаются частоты

$$\omega = \pm \Omega, \quad (2)$$

что означает устойчивость всех дисков Фримана по отношению к возмущениям «дипольного» типа.

Для «квадрупольных» возмущений ( $n=2$ ) нетривиальные решения находятся из уравнения

$$C(\omega^2) = 0, \quad (3)$$

где  $C(\omega^2)$  — полином третьей степени относительно  $\omega^2$ . Коэффициенты этого полинома для общего эллиптического диска Фримана вычисляются численно. Аналитические выражения для  $C(\omega^2)$  Тримейн дает в двух предельных случаях.

1. Если диск покоится, то

$$C(x) = \left\{ \frac{1}{a^2 - b^2} [a^2(3a^2 - b^2) + \beta^2(a^2 - 3b^2)] - x \right\} \times \\ \times \left\{ x^2 + 2 \frac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{a^2 - b^2} x + 2a^2\beta^2 + \frac{b^2\beta^4 - a^2\alpha^4}{a^2 - b^2} \right\}. \quad (4)$$

Корни уравнения (4) вещественны и положительны, так что невращающиеся эллиптические диски Фримана устойчивы относительно возмущений с  $n=2$ . Для кругового диска этот результат является частным случаем общей теоремы об устойчивости произвольных покоящихся однородных эллипсоидов вращения (см. § 3).

2. В случае кругового диска ( $b/a=1$ )

$$C(x) = (1-x)[x^2 - (12\Omega^2/A^2 + 5)x + (12\Omega^2/A^2 - 5/2)^2]. \quad (5)$$

Отсюда получаем критерий устойчивости  $\Omega^2 < 5/6 A^2$ , который совпадает с выведенными раньше [252, 77] непосредственно для круговых дисков (см. главу V, раздел 4.3)<sup>1</sup>.

Численные вычисления при произвольных  $b/a$  и  $\Omega^2/A^2$  ( $0 < b/a \leq 1$ ,  $0 \leq \Omega^2/A^2 \leq 1$ ) показывают, что эллиптические диски неустойчивы в области, имеющей приблизительно треугольную форму, ограниченную точками  $b/a=1$ ,  $\Omega^2/A^2=5/6$ ;  $b/a=1$ ,  $\Omega^2/A^2=1$ ;  $b/a=0,7296$ ;  $\Omega^2/A^2=1$  (рис. 27). Заметим, что последняя точка также была приближенно определена ранее [76, 96]. Из табл. 1 § 3 Приложения [76] следует, что диски с  $\Omega/A=1$  должны стать неустойчивыми при  $b/a$ , лежащем в промежутке между 0,69 и 0,75. Тримейн [335] несколько уточнил эту границу<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> При сравнении нужно учитывать, что используемый в разделе 4.3 параметр  $\gamma$  связан с  $\Omega$  равенством

$$\gamma = \frac{1}{3} [\Omega/A] [8\Omega^2/A^2 - 5].$$

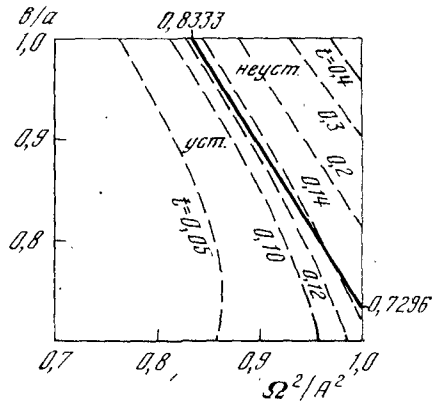
<sup>2</sup> Еще раньше определил  $(b/a)_{кр} = 0,7296$  Чандрасекар (см. [148]), исследовавший задачу об устойчивости несжимаемых эллипсоидов Римана, которые в дисковом пределе  $c/a \rightarrow 0$  оказываются тождественными с бесстолкновительными эллиптическими дисками Фримана при  $\Omega^2/A^2=1$ .



Следует подчеркнуть, что данная на рис. 27 граница устойчивости относится только к модам, которые выражаются полиномами (по  $x$  и  $y$ ) второго порядка. По-видимому, многие модели должны быть неустойчивы относительно возмущений с  $n \geq 3$ . Мы увидим, (например, в следующей главе, раздел 4.3), что все круговые диски неустойчивы по отношению к раскачке, по крайней мере, одной моды с  $3 \leq n \leq 5$  [76, 96]. Кроме того, нужно ожидать джинсовскую неустойчивость «слишком холодных» дисков относительно коротковолновых возмущений ( $n \gg 1$ ) в соответствии с известными энергетическими соображениями Тоомре [333] (см. начало следующей главы).

Рис. 27. Результаты исследования устойчивости эллиптических дисков Фримана (48) § 1 относительно «бароподобных» возмущений

Сплошная линия — граница между устойчивыми и неустойчивыми моделями, штрихами обозначены линии постоянного значения параметра Пиблса — Острайкера:  $t = \text{const}$  (см. [234])



Остановимся немного подробнее на сильно сплюснутых дисковых моделях ( $b/a \ll 1$ ), вращающихся относительно медленно ( $A^2 \ll \Omega^2$ ,  $B^2 \ll \Omega^2$ ). Для этого выполним разложение всех величин в (48) § 1 по  $b/a$ . Частоты  $\alpha$  и  $\beta$  движений оказываются такими:

$$\alpha \approx A_1 \left( 1 - \frac{2\Omega^2}{B_1^2} \right), \quad \beta \approx B_1 \left( 1 + \frac{2\Omega^2}{B_1^2} + \frac{2\Omega^2 A_1^2}{B_1^4} - \frac{2\Omega^4}{B_1^4} \right), \quad (6)$$

где  $A_1^2 = A^2 - \Omega^2$ ,  $B_1^2 = B^2 - \Omega^2$ . Величины  $k_\alpha$ ,  $k_\beta$ , входящие в  $f_0$ , приближенно равны

$$k_\alpha \approx \frac{2\Omega A_1}{B_1^2}, \quad k_\beta \approx \frac{B_1}{2\Omega} \left( 1 + \frac{2\Omega^2 - A_1^2}{B_1^2} \right). \quad (7)$$

Для  $A_1 \approx A$  и  $B_1 \approx B$  (т. е.  $A \ll \Omega$ ,  $B \ll \Omega$ ) получаем

$$A_1^2 \approx \frac{3MG}{a^3} \ln \frac{4a}{b}, \quad B_1^2 \approx \frac{3MG}{ab^2}, \quad (8)$$

так что

$$\Lambda^2 \approx \frac{1}{a^2 b^2 B_1^2} \approx \frac{1}{3aMG},$$

$$\frac{b^2}{k_\alpha^2 k_\beta^2} \approx a^2 \ln \frac{4a}{b}, \quad I \approx \frac{1}{3aMG} \left\{ a^2 \left( v_y^2 + 2\Omega x \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{4a}{b} \right)^2 + \frac{a^2}{\ln \frac{4a}{b}} \left( v_x - 2\Omega y \ln \frac{4a}{b} \right)^2 \right\}; \quad (9)$$

Таким образом, функция распределения (48) § 1 принимает вид

$$f = f(I) \approx \frac{1}{4\pi^2 G \sqrt{\ln \frac{a}{b}}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{a}{3GM} \left[ v_y^2 + \frac{v_x^2}{\ln a/b} \right] \right)^{-1/2}, \quad (10)$$

а одномерная функция распределения

$$f(v_x) = \int f(J) dc_y \approx \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{3M}{Ga \ln \frac{a}{b}}} \theta \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{av_x^2}{\ln a/b} \right]. \quad (11)$$

Соответствующие (10) дисперсии скоростей

$$\sigma_{xx} \approx \frac{GM}{a} \ln \frac{4a}{b} (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2), \quad \sigma_{yy} \approx \frac{GM}{a} (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2),$$

а средние скорости по осям  $x$  и  $y$  равны

$$\bar{v}_x \approx 2\Omega y \ln \frac{4a}{b}, \quad \bar{v}_y \approx -2\Omega x \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{4a}{b}.$$

Обе последние величины малы при  $b/a \rightarrow 0$ , так что система «держится» в основном за счет большой дисперсии скоростей по оси  $x$ .

Описанная картина равновесных состояний сильно сжатых эллиптических дисков Фримана с  $A \ll \Omega$ ,  $B \ll \Omega$ , по-видимому, предполагает устойчивость таких систем (см. обсуждение устойчивости вытянутых эллипсоидов в конце пункта 3 предыдущего раздела, а также задачу 1 к главе II).

Напротив, в случае *быстро вращающихся* ( $A \approx \Omega$ ) сильно сплюснутых дисков нужно ожидать неустойчивости по отношению к возмущениям с  $n \geq 3$ .

### § 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХОСНЫХ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этом параграфе рассматривается устойчивость однородных звездных сфероидов с плотностью  $\rho_0$  и уравнением границы

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Гравитационный потенциал будем записывать в виде

$$\Phi_0 = \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{2} + \frac{\omega_0^2 z^2}{2} + \text{const},$$

где постоянные  $\Omega$  и  $\omega_0$ , имеющие смысл частот колебаний звезд соответственно в плоскости  $(x, y)$  и по оси  $z$ , связаны с плотностью  $\rho_0$  и полуосями  $a, c$  соотношениями

$$\Omega^2 = 2\pi G \rho_0 \{ (\xi^2 + 1) \xi \operatorname{arccctg} \xi - \xi^2 \},$$

$$\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0 \{ 1 - \xi \operatorname{arccctg} \xi \} (1 + \xi^2), \quad a = \frac{(\xi^2 + 1)^{1/2}}{\xi} c.$$

#### 3.1. УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРОИДОВ ФРИМАНА

1. Допустим, что все частицы вращаются в одну сторону с угловой скоростью  $\Omega$ . Исследуемая функция распределения во вращающейся системе координат имеет вид (см. § 1)

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi \omega_0 c} \frac{\delta(v_x) \delta(v_y)}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\omega_0^2 c^2}}}. \quad (1)$$

В пределе  $c \rightarrow 0$  функция распределения (1) переходит в  $\delta$ -образную:

$$f_0 \sim \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z), \quad (2)$$

соответствующую «маклореновскому» диску с круговыми орбитами частиц. Они были исчерпывающим образом исследованы на устойчивость Хантером [226] (см. раздел 2.2 главы V).

Эллиптические конфигурации (1) являются неустойчивыми, так как отсутствует локальная дисперсия скоростей звезд в плоскости  $(x, y)$ . Инкременты некоторых неустойчивых мод могут расти с уменьшением масштаба возмущений в этой плоскости. Если, однако, иметь в виду, что реальные системы (например, плоские галактики) обладают некоторой (малой) дисперсией скоростей звезд в плоскости вращения, то ясно, что как раз самые коротковолновые возмущения будут стабилизированы. В то же время более крупномасштабные колебания, представляющие тогда в смысле потери устойчивости наибольшую «опасность», правильно описываются функцией распределения (1), не содержащей дисперсии скоростей.

2. Теория возмущений строится следующим образом. Сначала функция распределения  $f$  представляется в виде (аналогично разделу 3.1 главы III).

$$f = A\delta(v_x)\delta(v_y) + \varepsilon B\delta'(v_x)\delta(v_y) + \varepsilon C\delta(v_x)\delta'(v_y), \quad (3)$$

где  $A, B, C$  — функции  $x, y, z, v_z, t$ ;  $\varepsilon$  — параметр разложения теории возмущений. Подстановка (3) в кинетическое уравнение в декартовых координатах дает с точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial B}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial C}{\partial y} - \omega_0^2 z \frac{\partial A}{\partial v_z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial A_0}{\partial v_z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} - 2C - \omega_0^2 z \frac{\partial B}{\partial v_z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} A_0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} + 2B - \omega_0^2 z \frac{\partial C}{\partial v_z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} A_0, \quad (6)$$

причем  $A_0 = A$  ( $\varepsilon = 0$ ) и положено, как обычно, что потенциал

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1.$$

Далее представляем функцию  $A$  в виде

$$A = \frac{\rho_0}{\pi \omega_0 c} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\omega_0^2 c^2} - \varepsilon \chi}}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon \chi$  — возмущение. Подставляя (7) в (4) и отделяя члены первого порядка, найдем

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \chi}{\partial z} - \omega_0^2 z \frac{\partial \chi}{\partial v_z} - 2 \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) \left( 1 - x^2 - y^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\omega_0^2 c^2} \right)^{3/2} = \frac{2v_z}{\omega_0^2 c^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v_z \frac{\partial B}{\partial z} - \omega_0^2 z \frac{\partial B}{\partial v_z} - 2C = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \left( 1 - x^2 - y^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\omega_0^2 c^2} \right)^{-1/2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} - \omega_0^2 z \frac{\partial C}{\partial v_z} + 2B = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \left( 1 - x^2 - y^2 - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{\omega_0^2 c^2} \right)^{-1/2}. \quad (10)$$

Наконец, вводя вместо  $B, C$  функции

$$B' = B [1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/(\omega_0^2 c^2)]^{1/2}, \quad (11)$$

$$C' = C [1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/(\omega_0^2 c^2)]^{1/2} \quad (12)$$

и учитывая, что оператор <sup>1</sup>

$$\hat{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} - \omega_0^2 z \frac{\partial}{\partial v_z}$$

(стоящий слева в уравнениях (9) и (10)), действуя на функцию от  $(1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/\omega_0^2 c^2)$ , дает нуль, получаем окончательно следующую систему уравнений:

$$\hat{L}\chi - 2(1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/\omega_0^2 c^2) \left( \frac{\partial B'}{\partial x} + \frac{\partial C'}{\partial y} \right) - 2(xB' + yC') = \frac{2v_z}{\omega_0^2 c^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\hat{L}B' - 2C' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\hat{L}C' + 2B' = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}. \quad (15)$$

Эта система уравнений относительно  $\chi, B', C', \Phi_1$  должна решаться совместно с уравнением Пуассона, причем в последнем, помимо изменения локальной плотности  $\rho_1$ , необходимо также учитывать изменение границы эллипсоида.

Разобьем функцию  $\chi$  на две части:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1, \quad \chi_0 = \chi(v_z = 0), \quad \chi_1 = \chi - \chi_0, \quad (16)$$

выделив не зависящую от скоростей часть  $\chi_0$ . Тогда, как легко показать, возмущение плотности  $\rho_1$  находится по известной функции  $\chi_1$  согласно формуле

$$\varepsilon \rho_1 = - \frac{\rho_0}{2\pi\omega_0 c} \varepsilon \int dv_z \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{\chi_1}{v_z} (1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/\omega_0^2 c^2)^{-1/2} \right), \quad (17)$$

а уравнение границы эллипсоида определяется из соотношения

$$1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - \varepsilon \chi_0 = 0. \quad (18)$$

Как и для других систем с квадратичным потенциалом, возмущения последнего  $\Phi_1$  могут быть представлены в виде полиномов по степеням декартовых координат. Задаваясь каким-либо полиномом с неопределенными коэффициентами и зависимостью от времени  $\sim \exp(-i\omega t)$ , общую схему вычисления собственных частот и собственных функций можно описать следующим образом. Сначала из (14) и (15) определяем функции  $B'$  и  $C'$ . Затем  $B'$  и  $C'$  подставляем в уравнение (13), из которого определяется функция  $\chi$ .

Уравнения (13) — (15) легко решаются как методом интегрирования по траекториям, так и методом интегрирования по углу. После этого из (17) находим возмущение плотности  $\rho_1$ , а из (18) — возмущение границы. Затем мы восстанавливаем  $\Phi_1$ , решая соответствующую задачу теории потенциала<sup>2</sup>. И, наконец, сравнивая полученное таким образом выражение для потенциала  $\Phi_1$  с исходным, можно вычислить частоты колебаний и соответствующие им собственные функции.

<sup>1</sup> Легко видеть, что оператор  $\hat{L}$  равен полной производной по невозмущенной траектории:  $\hat{L} = d/dt$ .

<sup>2</sup> Вклады в  $\Phi_1$  от возмущения границы эллипсоида и от возмущения плотности удобно вычислять отдельно, временно переходя к сфероидальным координатам.

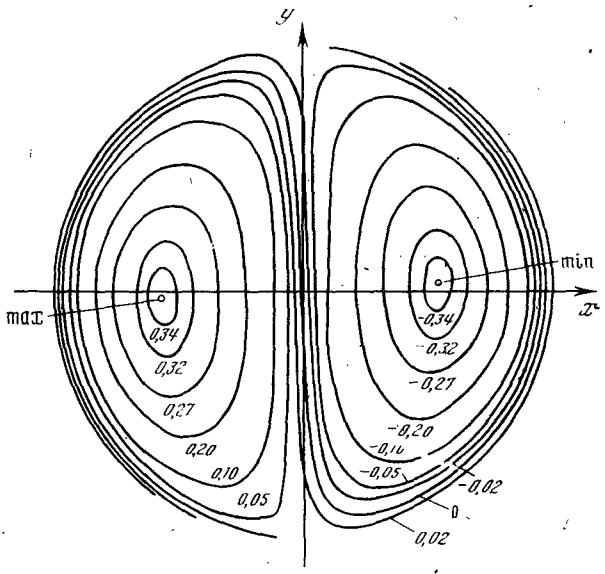
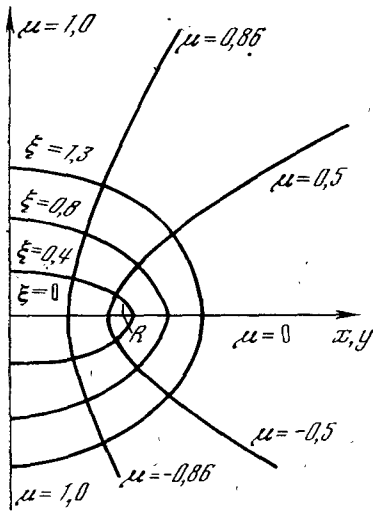


Рис. 28. Сфероидальные координаты

Рис. 29. Изолинии возмущенного потенциала (или поверхностной плотности) при  $c/a=0,5$  ( $m=1$ ).

3. Рассмотрим в качестве примера возмущение простейшего вида [91, 96]

$$\Phi_1 = (x + iy)[\alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma], \quad (19)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — не определенные вначале коэффициенты.

Вычисления по описанной выше общей схеме (см. § 4 Приложения) приводят к довольно громоздкому дисперсионному уравнению, которое должно далее решаться численно.

Результаты вычислений представлены в виде таблиц в § 4 Приложения. Неустойчивы (по отношению к данной моде) все эллипсоиды, кроме тех, которые лежат в узком интервале  $0,405 < c/a < 0,455$ . Для каждого  $c/a$  (в области неустойчивых  $c/a$ ) имеется ровно один неустойчивый корень.

Максимум инкремента неустойчивости для рассматриваемой моды достигается при  $c=0$ , т. е. для диска. Это вполне понятно: с ростом толщины эллипсоида уменьшается (дестабилизирующая) гравитационная сила в плоскости вращения.

Интересно, что при переходе через область устойчивости меняет знак реальная часть частоты  $\text{Re } \omega$ : при  $c < 0,405$  нарастающие волны звездной плотности отстают от вращающихся звезд, а при  $c > 0,455$  опережают их.

Численно были рассчитаны также возмущенный потенциал  $\Phi_1$  в плоскости  $z=0$  и поверхностная плотность  $\sigma$ . Эквипотенциальные линии<sup>1</sup> для типичного случая представлены на рис. 29. Видно, что они обладают незначительной асимметрией относительно осей  $x$  и  $y$  (эта асимметрия порядка отношения  $\text{Im } \gamma/\beta$ ).

<sup>1</sup> Линии равной поверхностной плотности выглядят аналогично.

Заметим, что в предельном случае диска ( $c \rightarrow 0$ ) собственная функция (19) переходит в следующую (глава V, раздел 2.2):

$$\Phi_1 \rightarrow e^{i\varphi} P_3^1(\sqrt{1-x^2-y^2}) = (x+iy)[5(x^2+y^2)-4], \quad (20)$$

где  $P_n^m(\eta)$  — присоединенные функции Лежандра. В этом пределе  $\gamma/\beta = -4/3$ , а частоты колебаний определяются уравнением

$$1 + \frac{3/8}{\omega^2 - 4}(11 - 2/\omega) = 0. \quad (21)$$

4. Расчет собственных частот и собственных функций даже простейших колебательных мод, изменяющих локальную плотность эллипсоида, является довольно громоздким. Вычисления очень сильно упрощаются (и легко могут быть проведены в общем виде) для колебаний границы эллипсоида, при которых не затрагивается локальная плотность. Возмущение потенциала в интересующем нас случае не зависит от  $z$  и выглядит следующим образом:

$$\Phi(\zeta < \zeta_0) = \rho_m^m(\zeta) P_m^m(\mu) e^{im\varphi} \equiv A(x+iy)^m, \quad \rho_m^m(x) = P_m^m(ix). \quad (22)$$

Здесь  $\zeta, \mu, \varphi$  — сфероидальные координаты (рис. 28)

$$x = R_0[(\zeta^2 + 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \cos\varphi, \quad y = R_0[(\zeta^2 + 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \sin\varphi, \quad z = R_0\zeta\mu, \quad (23)$$

такие, что уравнение границы невозмущенного эллипсоида имеет вид

$$\zeta = \zeta_0 \quad (R_0^2 = c^2/\zeta_0^2, \quad a^2 \equiv 1 = R_0^2(1 + \zeta_0^2)).$$

Система (13) — (15) решается очень просто и дает

$$\chi = -\frac{2mA}{\omega(\omega+2)}(x+iy)^m. \quad (24)$$

Перейдем снова к сфероидальным координатам (23):

$$\chi = -\frac{2m}{\omega(\omega+2)} R_0^m \rho_m^m(\zeta) P_m^m(\mu) e^{im\varphi} \equiv B \rho_m^m P_m^m e^{im\varphi}. \quad (25)$$

Найдем нормальное смещение границы, исходя из уравнения для возмущенной границы

$$x^2 + y^2 + z^2/c^2 + \varepsilon\chi = 1.$$

Оно оказывается равным

$$h = (\zeta - \zeta_0) h_\zeta = -\frac{\varepsilon\zeta_0}{R_0(\zeta_0^2 + \mu^2)^{1/2}} \frac{\chi}{(1 + \zeta_0^2)^{1/2}}. \quad (26)$$

Ищем возмущенный потенциал как потенциал простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma = \rho_0 h$ :

$$\Phi(\zeta > \zeta_0) = c q_m^m(\zeta) P_m^m(\mu) e^{im\varphi}, \quad \Phi(\zeta < \zeta_0) = b \rho_m^m(\zeta) P_m^m(\mu) e^{im\varphi}, \quad (27)$$

$$q_m^m(x) = (-1)^m (2m)! \rho_m^m(x) \int_x^\infty (1+y^2)^{-1} [\rho_m^m(y)]^{-2} dy.$$

Из условия сшивки на границе определяются коэффициенты  $c, b$ ; необходимый в дальнейшем коэффициент  $b$  равен

$$b = -\frac{4\pi G \rho_0 \zeta_0 B \rho_m^m}{W_m (1 + \zeta_0^2)}, \quad (28)$$

где  $W_m$  означает вронскиан

$$W_m = \rho_m^m q_m^m - \rho_m^m q_m^{m*} = (-1)^m \frac{(2m)!}{1 + \zeta_0^2}, \quad (29)$$

а все функции (28) вычисляются при  $\xi = \xi_0$ . Сравнивая вычисленный потенциал с исходным, получаем следующее уравнение на частоты собственных колебаний:

$$\omega^2 + 2\omega + a = 0, \quad (30)$$

где

$$a = m\rho\xi_0 (1 + \xi_0^2)^m \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{m+1}}, \quad \rho = \frac{2}{(1 + \xi^2) \xi \operatorname{arctg}(1/\xi) - \xi^2}. \quad (31)$$

Определяем из (30) собственные частоты колебаний

$$\omega = -1 \pm \sqrt{1 - a}. \quad (32)$$

Условие неустойчивости, очевидно, гласит:  $a > 1$ .

Уравнение (30) было подробно исследовано численно при различных значениях сплюснутости, вычисленные инкременты неустойчивости в зависимости от отношений полуосей  $c/a$  представлены в табл. 5 (§ 4 Приложения).

В холодном диске ( $c=0$ ) инкремент неустойчивости рассматриваемых мод неограниченно растет с ростом номера  $m$  пропорционально  $m^{3/2}$  (см. главу V, раздел 2.2).

Из таблиц видно, что с увеличением  $c$  рост инкремента при больших  $m$  замедляется. В случае шара ( $c=1$ ) выражение для инкремента может быть получено аналитически в виде

$$\gamma = \left( \frac{3m}{2m+1} - 1 \right)^{1/2}; \quad (33)$$

$\gamma$  асимптотически стремится к значению  $\gamma_{\infty} = 1/\sqrt{2}$ .

Поскольку  $\omega = \omega' - m$ , где  $\omega'$  — частота в неподвижной системе координат, то азимутальная угловая скорость неустойчивой волны в этой системе равна

$$\Omega_b = \frac{\omega'}{m} = 1 - \frac{1}{m}. \quad (34)$$

Видно, что волна плотности всегда отстает от звездного диска, вращающегося со скоростью  $\Omega$ , причем скорость относительно дрейфа  $|\Omega_b - \Omega| = 1/m$  (измеренная в единицах  $\Omega$ ) не зависит от степени сплюснутости эллипсоида и убывает обратно пропорционально номеру моды  $m$ .

5. Вычисление частот колебаний эллипсоида Фримана для произвольных мод представляет определенные технические трудности. В любом случае оно должно привести к некоторому плохо обозримому характеристическому уравнению. Сравнительно просто вычисления проводятся для эллипсоидов *малой толщины*. В этом случае речь идет, по существу, об учете стабилизирующего влияния конечной толщины на джинсовскую неустойчивость холодного диска (см. начало главы V). Для случая *аксиально-симметричных* возмущений соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид<sup>1</sup>

$$\omega^2 = 4 [1 - 2n(2n+1)\gamma_{2n}] + \left[ \frac{8}{9}n(n-4) + 8n(n+1) - 16\gamma_{2n} \times \right. \\ \left. \times 2n(2n+1) \right] \frac{c}{\pi}, \quad \gamma_{2n} = [(2n)!]^2 / 2^{4n+1} [n!]^4, \quad (35)$$

где  $n$  — любое положительное целое.

<sup>1</sup> Получено при участии И. Г. Шухмана. Легко получить аналогичное (35) уравнение и для произвольных возмущений.

При  $c=0$  отсюда получается уравнение, описывающее радиальные колебания холодного диска (см. формулу (63) в разделе 2.2 главы V):

$$\omega^2 = 4[1 - 2n(2n+1)\gamma_{2n}]. \quad (36)$$

Член в (35), пропорциональный  $c$ , описывает упомянутый эффект стабилизации джинсовской неустойчивости диска конечной толщиной.

Возьмем для примера наиболее крупномасштабную неустойчивую моду: она соответствует в (35)  $n=2$ . При малых  $c$  имеем

$$\frac{\gamma^2}{\Omega^2} = -\frac{\omega^2}{\Omega^2} \approx \text{const} \left(1 - 8,6 \frac{c}{\pi}\right), \quad (37)$$

так что, по-видимому, устойчивость наступает (грубая оценка) при

$$c = c_{\text{кр}} \approx \pi/8,6 \approx 0,36.$$

Остальные моды с  $m=0$  стабилизируются при меньших  $c$ , хотя при  $c=0$  они имеют большие инкременты неустойчивости. Так, при  $n=3$   $c_{\text{кр}}$  (вычисленная таким же способом) порядка 0,22, а при больших  $n$ , учитывая, что

$$\gamma_{2n} \approx 1/2\pi n \quad (n \gg 1),$$

будем иметь из (35)

$$c_{\text{кр}}(n) \approx 1/n. \quad (38)$$

Разумеется, точность подобных оценок невелика.

Заметим, что «несжимаемые» моды, и в частности «бароподобная» мода ( $m=2$ ), стабилизируются толщиной гораздо медленнее: мы это уже видели из точного выражения для собственных частот соответствующих возмущений, но могли бы вывести и из подобных (37) асимптотических формул. Для  $m=2$  при  $c \rightarrow 0$  можно получить

$$\gamma \approx \text{const} \sqrt{1 - 4c/\pi}. \quad (39)$$

Если в (39) формально положить  $\gamma=0$ , то для критического  $c$  найдем  $c_{\text{кр}} \approx \pi/4 \approx 1$  (в действительности в данной модели  $c_{\text{кр}} = \infty$ ).

6. Модель двухосного эллипсоида Фримана (1), в которой все частицы вращаются в одну и ту же сторону, допускает очевидное обобщение [21]

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi} \frac{\alpha \delta(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + \beta \delta(v_r) \delta(v_\varphi + \Omega r)}{\sqrt{1 - r^2 - \frac{z^2}{c^2} - v_z^2/\omega_0^2 c^2}} \quad (\alpha + \beta = 1). \quad (40)$$

Эта функция распределения соответствует *суперпозиции* двух эллипсоидов Фримана (с весами  $\alpha$  и  $\beta$ ), вращающихся в противоположные стороны.

Исследование устойчивости таких систем не представляет в принципе никакой трудности. Однако дисперсионные уравнения становятся несколько более громоздкими (в частности, увеличивается порядок этих уравнений), и мы их здесь не приводим.

Модель (40) удобна для исследования эффекта стабилизации при уменьшении угловой скорости вращения системы  $|\alpha - \beta|\Omega$ . Наибольший интерес представляют «бароподобные» возмущения (эллипсоид вращения — трехосный эллипсоид), поскольку они обычно самые неустойчивые (подробнее см. в следующем параграфе).

Можно показать (задача 7), что *покоящиеся* (как целое!) эллипсоиды устойчивы по отношению к таким возмущениям. В частности, это справедливо и для рассматриваемой здесь модели (40) при  $\alpha = \beta$ . Следовательно, должна существовать граничная скорость обращения (или



угловой момент), такая, что более медленно вращающиеся системы устойчивы по отношению к превращению в трехосный эллипсоид.

С другой стороны, толщина оказывает стабилизирующее действие на джинсовскую неустойчивость (разбиение на кольца при аксиально-симметричных возмущениях сильно сплюснутой «холодной» системы). Такие возмущения (при  $m=0$ ), очевидно, не зависят от скорости обращения системы  $|\alpha-\beta|\Omega$ . Таким образом, на этом пути можно получить оценки (сверху) критической сплюснутости  $c/a$ , разделяющей устойчивые и неустойчивые эллипсоидальные системы. В частности, из асимптотической формулы (35) такая оценка дает, как мы видели,  $c \approx 0,36$ . Нетрудно вывести и точные  $c_{кр}$ , если получить точную (а не асимптотическую, как в (35)) формулу для характеристических частот самых крупномасштабных мод. При этом не возникает ни принципиальных, ни даже сколько-нибудь серьезных счетных трудностей.

### 3.2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПИБЛСА — ОСТРАЙКЕРА. УСТОЙЧИВОСТЬ «ГОРЯЧИХ» В ПЛОСКОСТИ ВРАЩЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИпсоИДОВ

Представляется весьма вероятной гипотеза Пиблса и Острайкера [301], согласно которой устойчивость или неустойчивость изолированной аксиально-симметричной системы определяется отношением  $t = T_{вр}/|W|$ , где  $T_{вр}$  — кинетическая энергия вращения (в инерциальной системе отсчета),  $W$  — потенциальная энергия. Из теоремы вириала следует, что  $0 \leq t \leq 1/2$ .

Критическое значение параметра  $t$  для сильно сплюснутых систем авторы гипотезы определяют как

$$t_{кр} \approx 0,14 \pm 0,03. \quad (1)$$

Если система настолько «горячая», что  $t < t_{кр}$ , то согласно этой гипотезе *сильные* неустойчивости в ней должны быть подавлены. «Сильными» мы называем неустойчивости, которые приводят к существенной перестройке исходного состояния за время, сравнимое с периодом обращения системы. Более слабые неустойчивости, не приводящие к столь катастрофическим последствиям, возможны и при  $t < t_{кр}$ <sup>1</sup>.

Изолированные системы с  $t > t_{кр}$  должны быть *сильно* неустойчивыми. Пиблс и Острайкер проверяли свою гипотезу в машинном эксперименте, моделируя макроскопическую гравитирующую систему совокупностью нескольких сот точек, притягивающихся по закону Ньютона. Даже в том случае, если *локально* системы с  $t > t_{кр}$  являются устойчивыми, тем не менее они быстро перестраивают свою форму при явном участии крупномасштабной «бароподобной» моды и «нагреваются» (за счет энергии вращения) настолько, что параметр  $t$  уменьшается до значения  $\sim t_{кр}$ .

Привлекательность столь простой и общей гипотезы очевидна. Гипотеза сформулирована для любых в достаточной степени сплюснутых аксиально-симметричных систем, как жидких (отдельные звезды), так и бесстолкновительных (звездные системы). Такая общность связана в конечном счете с важностью бароподобных возмущений как в первом, так и во втором случае (и с приблизительно одинаковыми условиями их раскачки).

Для последовательности эллипсоидов Маклорена

$$t = \frac{1}{2} \{ (3e^{-2} - 2) - 3(e^{-2} - 1)^{1/2} [\arcsin e]^{-1} \}, \quad (2)$$

где  $e$  — эксцентриситет меридионального сечения. Вдоль этой последовательности  $t$  меняется от 0 (при  $e=1$ , диск) до 1/2 (при  $e=0$ , сфера),

<sup>1</sup> См. в связи с этим обсуждение в разделе 3.6 главы VIII.

т. е.  $t$  принимает все возможные значения. Сфероиды с  $t > 0,1376$  являются секулярно<sup>1</sup> неустойчивыми (а при  $t > 0,2738$  и динамически неустойчивыми) по отношению к превращению в трехосный эллипсоид. Точка  $t_{кр} = 0,1376$  ( $e_{кр} = 0,81267$ ) есть известная точка бифуркации последовательности сфероидов Маклорена с трехосными («бароподобными») эллипсоидами Якоби [15, 64], имеющими более низкую полную энергию (при тех же угловом моменте и массе).

Замечательно, что этот результат, оказывается, не связан с выбором специальной, искусственной модели (маклореновских сфероидов). Обширное исследование [167, 300] жидких «звезд» в большом интервале угловых скоростей вращения и степени концентрации вещества к центру показало, что все они становятся секулярно-неустойчивыми почти при одном и том же значении параметра  $t_{кр} = 0,137 \pm 0,002$ . Во всех случаях неустойчивость связана (как и для сфероидов Маклорена) с существованием за критической точкой  $t_{кр}$  бароподобных равновесий с меньшей полной энергией, но одинаковыми угловым моментом, массой и центральной плотностью.

Насколько обоснованна гипотеза Пиблса — Острайкера (далее — ГПО) в случае *бесстолкновительных систем*? Численные эксперименты, проведенные в оригинальной работе [301] (см. также [220]), хотя и производят сильное впечатление, нуждаются все-таки в подтверждении результатами строгого теоретического рассмотрения устойчивости вращающихся звездных систем (что представляет собой совсем не тривиальную задачу). В этой связи важно отметить, что проведенные до сих пор исследования (в основном выполненные нашей группой, а также Калнайсом) *не противоречат* ГПО. Для случая дисковых систем мы вернемся к этому вопросу в следующей главе (раздел 4.3), а сейчас вспомним некоторые результаты, уже описанные ранее.

Выше была доказана неустойчивость эллипсоидов вращения Фримана при любом значении отношения полуосей  $c/a$ . Неустойчивость сплюснутых эллипсоидов Фримана с точки зрения ГПО естественна. Действительно, в данном случае

$$T_{вр} = \frac{M\Omega^2 a^2}{5}, \quad (3)$$

а потенциальная энергия для сплюснутых ( $c/a \leq 1$ ) сфероидов

$$|W| = \frac{3GM^2}{5\sqrt{a^2 - c^2}} \arccos \frac{c}{a}.$$

Поэтому

$$t = \frac{\Omega^2 a^2 \sqrt{a^2 - c^2}}{3GM \arccos c/a}. \quad (4)$$

При  $0 < c/a < 1$  эта величина меняется от  $1/2$  до  $1/3$ , что значительно больше  $t_{кр}$ .

Неудивительна с этой точки зрения и доказанная в главе III (раздел 3.3.) устойчивость вращающихся однородных сфер с круговыми орбитами, так как в этом случае  $t = \mu^2/12$  и максимальное значение параметра  $t$  равно  $1/12$ ; оно явно лежит в устойчивой области.

Критерий Пиблса — Острайкера конкретизирует естественное ожидание, что поведение простейших, самых крупномасштабных возмущений, захватывающих целиком всю систему, определяется небольшим числом «глобальных» характеристик системы, например первых моментов ее стационарной функции распределения, осредненных по фазовому объему, занимаемому системой. Для *однородных* эллипсоидов справедливо, вероятно, даже более общее утверждение: характер эволюции

<sup>1</sup> О понятиях секулярной и динамической неустойчивостей см. ниже, в разделе 3.3.

любого возмущения данного пространственного типа полностью описывается совокупностью моментов функции распределения ниже определенного порядка, т. е. величинами вида

$$\alpha_{ij} = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{v} (r_i)^{p_i} (v_j)^{p_j} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

при  $p_i + p_j \leq N$ . В рассмотренных нами конкретных примерах эллипсоидальных систем (двух- и трехосные эллипсоиды Фримана) это следует уже из самой возможности представления возмущений потенциала в виде конечных полиномов по степеням декартовых координат:

$$\Phi_1(x, y, z) = ax^n + by^n + cz^n + \dots, \quad (5)$$

что определяет для каждого номера  $n$  конечное число «степеней свободы».

Еще более непосредственно мы убеждаемся в этом на примере твердотельно-вращающихся дисков (являющихся предельной формой однородных эллипсоидов), для которых в главе V будут получены уравнения для частот *всех* возможных собственных колебаний.

Можно отметить и некоторые «элементарные» проявления указанного свойства решений, с которыми мы сталкивались выше. Например, однородные сферические системы с произвольными функциями распределения (см. главу III) — при растяжениях — сжатиях всегда колеблются с одной и той же частотой  $\omega^2 = \Omega^2$ , а простейшая неаксиальная мода колебаний однородный шар — однородный эллипсоид имеет частоту  $\omega^2 = \frac{14}{5} \Omega^2$ . Далее, можно показать (задача 7), что для произвольных покоящихся в равновесном состоянии однородных сфероидов частоты колебаний, при которых исходный эллипсоид переходит в однородный же эллипсоид с другими полуосями, полностью определяются только его плотностью и геометрическими размерами.

В связи со сказанным более глубокий смысл приобретает, например, проведенное в § 2 исследование крупномасштабной устойчивости модели перемычек спиральных галактик Фримана в виде трехосных бесстолкновительных эллипсоидов (§ 1). В самом деле, результаты не должны сильно измениться при некоторой модификации рассмотренной функции распределения, так как при этом мы обязаны сохранить основное свойство таких систем, по-видимому, подтвержденное наблюдениями (см. § 2 главы VIII): наличие в них «противотоков» (см. § 1), которое определяется первыми моментами функции распределения и от которого зависит характер устойчивости крупномасштабных мод в этом случае.

Возможно, что поведение самых крупномасштабных мод систем, не обладающих аксиальной симметрией (и не обязательно сильно сплюснутых), также определяется некоторым простым критерием, обобщающим критерий Пиблса — Острайкера (КПО).

Применимость этого критерия (в его буквальной формулировке) к случаю эллиптических дисков Фримана рассматривалась Тримейном [335]. Оказалось (см. рис. 27), что граница области неустойчивости предсказывается этим критерием удивительно точно. Значение параметра  $t$  монотонно увеличивается вдоль границы от  $(125/972) = 0,1286$  при  $b/a = 1$ ,  $\Omega^2/A^2 = 5/6$  до 0,1446 при  $b/a = 0,7296$ ,  $\Omega^2/A^2 = 1$ , оставаясь все время в пределах, установленных Пиблсом и Острайкером для аксиально-симметричных систем. Однако, с другой стороны, как следует, например, из контурной карты на рис. 30 (заимствованной нами у Хантера [234]) при  $b/a \rightarrow 0$  и  $\Omega^2/A^2 \rightarrow 1$  параметр  $t \rightarrow 0,5$ , хотя эти системы устойчивы. Аналогичный результат известен и в теории устойчивости жидких фигур равновесия, где доказывается [148], что эллипсоиды Якоби устойчивы для возмущений с  $n = 2$ , хотя параметр  $t$  выхо-

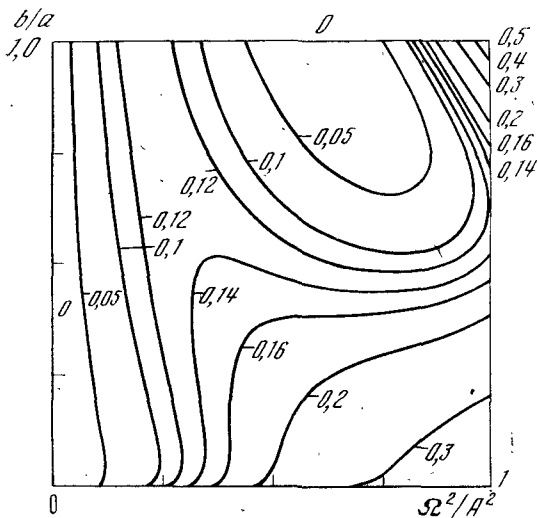


Рис. 30. Линии постоянного значения параметра Пиблса — Острайкера  $t$  для эллиптических дисков Фримана [234]

дит далеко за пределы области, указываемой КПО ( $0,1376 \leq t \leq 0,5$ ). Поэтому можно сказать [335], что этот критерий, по-видимому, применим к системам, близким к аксиально-симметричным, но явно нарушается для сильно вытянутых систем.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос об устойчивости «горячих» в плоскости вращения однородных эллипсоидов вращения (§ 1).

Для твердотельно-вращающихся моделей (72) § 1 этот вопрос должен решаться, вообще говоря, точными методами: критерий неустойчивости Пиблса — Острайкера  $t = T_{вп}/|W| > 0,14 \pm 0,03$  является здесь слишком грубым. Так, для дисковых систем  $t = \gamma^2/2$ , и при  $\gamma = \gamma_{\max} = 1/2$  имеем  $t_{\max} = 0,125$ . Твердотельно-вращающиеся эллипсоиды, по всей вероятности, устойчивы. Это, во всяком случае, верно для «бароподобных» мод (которые обычно являются наиболее неустойчивыми). Действительно, устойчивость твердотельно-вращающихся дисков может быть исследована в общем виде, без конкретизации вида функции распределения (см. раздел 4.3 главы V). Устойчивость или неустойчивость любой такой модели определяется значением единственного параметра — угловой скорости вращения  $\gamma$ . Если  $\gamma < 0,507 \dots$ , то модель устойчива. Поскольку для рассматриваемых дисковых моделей  $\gamma \leq 0,500$ , они должны быть устойчивы. Тем более должны быть устойчивы все системы (72) § 1 с конечной толщиной,  $c \neq 0$ . Если, например, вычислить параметр  $t$  для максимально возможной скорости вращения  $\gamma = 1/2 \Omega$ , то получим

$$t_{\max}(e) = 1/8 \{ 1/e^2 - \sqrt{1-e^2}/e \arcsin e \}, \quad (6)$$

где  $e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$  — эксцентриситет меридионального сечения эллипсоида.

Функция  $t_{\max}(e)$  монотонно убывает от значения  $t = 1/8$  при  $e = 1$  (дисковый предел) до  $t = 1/12$  при  $e = 0$  (сфера).

Таким образом, твердотельно-вращающиеся модели, по-видимому, устойчивы, однако «запас устойчивости», уменьшаясь при увеличении степени сплюснутости системы, становится совсем незначительным в дисковом пределе.

Дифференциально-вращающаяся модель (67) § 1, согласно критерию Пиблса — Острайкера, должна быть неустойчивой.

### 3.3. ВЕКОВАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПСОИДОВ МАКЛОРЕНА

Имея дело с бесстолкновительными системами, мы рассматриваем только тот специальный вид неустойчивости, который по классификации классической теории устойчивости жидких фигур равновесия называется *динамической*, или *обыкновенной*, неустойчивостью [15]. Эти термины отличают указанный вид неустойчивости (в случае «чисто» бесстолкновительных систем единственный) от так называемой *вековой* (или *секулярной*) неустойчивости, обязанной диссипативным механизмам, прежде всего вязкости.

Понятия динамической (основанной на анализе уравнений движения без трения) и вековой неустойчивости в общем случае, разумеется, не совпадают<sup>1</sup>. Для вековой устойчивости нужно, чтобы рассматриваемая равновесная конфигурация обладала минимальной полной (механической) энергией по сравнению с близкими состояниями системы. Классическим примером является поведение эллипсоидов Маклорена при их постепенном сжатии: вековая неустойчивость наступает значительно раньше, чем динамическая<sup>2</sup>.

Этот вопрос прояснил Пуанкаре (см. [15]), который показал, что в точке бифуркации с последовательностью эллипсоидов Якоби сфероид Маклорена можно деформировать в тело с более низкой полной механической энергией (сохраняя при этом полный угловой момент).

Диссипативные механизмы сказываются, очевидно, лишь за времена порядка (или больше) времени между столкновениями. Для большинства звездных систем, которые практически являются бесстолкновительными, этими механизмами и связанной с ними возможностью вековой неустойчивости можно пренебречь<sup>3</sup>.

Динамическая устойчивость может сохраняться, несмотря на утрату вековой устойчивости.

Дисперсионное уравнение для собственных частот колебаний невязких эллипсоидов Маклорена было получено Брайаном [172]. Оно дает частоты колебаний  $\omega$  при возмущениях потенциала вида

$$\Phi_1 \propto \begin{cases} p_n^m(\xi) P_n^m(\mu) e^{im\varphi}, & \xi \leq \xi_0, \\ q_n^m(\xi) P_n^m(\mu) e^{im\varphi}, & \xi \geq \xi_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$  — сплюснутые сфероидальные координаты, причем неравенство  $\xi < \xi_0$  соответствует внутренней области системы. Возмущения типа (1) возникают, очевидно, при искривлениях граничной поверхности эллипсоида.

Во вращающейся вместе с эллипсоидом системе (угловая скорость  $\Omega$ ) дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$p_1^0(\xi) q_1^0(\xi) - p_n^m(\xi) q_n^m(\xi) = \frac{\omega^2 (\omega + 2\Omega)}{\Omega^2} \frac{q_2^0(\xi) \hat{D}^m P_n(v_0)}{m\omega \hat{D}^m P_n(v_0) + (\omega + 2\Omega)v_0 \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \hat{D}^{m+1} P_n(v_0)}.$$

Здесь введены следующие обозначения:  $P_n(z)$  — полиномы Лежандра

<sup>1</sup> Хотя случаи совпадения не являются редкостью (скорее, наоборот).

<sup>2</sup> Соответственно при эксцентриситетах меридионального сечения, равных 0,813 и 0,953. При этом вековая устойчивость переходит к трехосным эллипсоидам Якоби.

<sup>3</sup> Они, возможно, играют некоторую роль в случае галактических скоплений звезд. Заметим, однако, что для невращающихся систем, какими являются, по-видимому, большая часть этих скоплений, критерии обыкновенной и вековой устойчивости совпадают. То же можно сказать об аксиальных возмущениях вращающихся систем.

$p_n^m(z) = i^{m-n} P_n^m(iz)$ ;  $P_n^m(z)$  — присоединенные функции Лежандра,

$$q_n^m(z) = p_n^m(z) \int_z^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)[p_n^m(t)]^2}, \quad v_0 = -\frac{\omega \xi}{\sqrt{4\Omega^2(1+\xi^2) - \omega^2}},$$

$\hat{D}$  — оператор дифференцирования.

Из этого уравнения можно определить минимальное значение отношения  $c/a$  (или же соответствующий эксцентриситет меридионального сечения  $e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ ), когда теряется устойчивость.

Наиболее неустойчивая мода ( $n=m=2$ ) отвечает сжатию сфероида в плоскости вращения с превращением в трехосный эллипсоид; для этой моды  $e_{кр} = 0,95289$ .

В случае бесстолкновительных эллипсоидов вращения (например, модели Фримана) тоже существуют моды колебаний «несжимаемого» типа, при которых не меняется локальная плотность вещества. Они описываются дисперсионным уравнением (30) раздела 3.1. Последнее, однако, существенно отличается от соответствующего уравнения для сфероидов Маклорена (т. е. уравнения (4) при  $n=m$ ). Например, как мы видели, модель Фримана оказывается неустойчивой по отношению к бароподобной моде ( $n=m=2$ ) при всех значениях  $c/a$ . Это не удивительно: ведь уже равновесные состояния в двух рассматриваемых случаях совершенно разные. Действительно, для сфероидов Маклорена конечной толщины ( $c \neq 0$ ) существенную роль играет давление, равное нулю в «холодных» бесстолкновительных эллипсоидах. Равновесия тождественны лишь в дисковом пределе ( $c=0$ ). В этом пределе совпадают и дисперсионные уравнения (см. раздел 2.2 следующей главы).

## ЗАДАЧИ

1. Вывести функцию распределения (47) § 1 однородного эллиптического цилиндра (Фриман [202], Хантер [234]).

Решение. Движение частиц во вращающейся системе координат (в которой уравнение границы системы остается неизменным) проис-

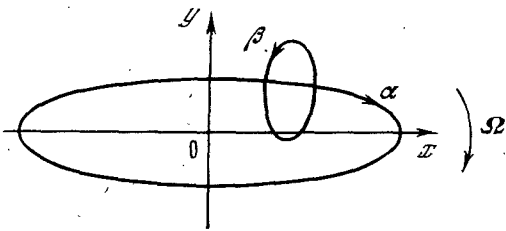


Рис. 31. Орбита частицы внутри эллиптического цилиндра Фримана

ходит согласно формуле (44) § 1. Орбиты представляют собой (см. рис. 31) эллиптические эпициклы, причем  $\beta$ -движение происходит всегда против часовой стрелки, а  $\alpha$ -движение — по часовой стрелке (считаем  $\Omega^2 < A^2$ ). Орбиты должны, очевидно, лежать в пределах граничного эллипса. Соответственно вычислим [234] максимум величины

$$e(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (1)$$

при дополнительных условиях

$$g_1(x, y, \xi, \eta) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2/k_\alpha^2 - A_\alpha^2 = 0, \quad (2)$$

$$g_2(x, y, \xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2/k_\beta^2 - A_\beta^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения  $\xi, \eta$  для  $\beta$ -движения:

$$\xi = A_\beta \sin(\beta t + \varepsilon_\beta), \quad \eta = -k_\beta A_\beta \cos(\beta t + \varepsilon_\beta).$$

Вводя, как обычно, неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$ , ищем экстремальные значения функции  $f \equiv (e + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)$ . Приравняем нулю производные по  $x, y, \xi, \eta$ :

$$\frac{x}{a^2} = \lambda_1 (\xi - x) = -\lambda_2 \xi, \quad (4)$$

$$\frac{y}{b^2} = \lambda_1 (\eta - y) = -\lambda_2 \eta / k_\beta^2. \quad (5)$$

Возможные решения системы (4), (5) следующие:

$$1) \quad x = y = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad (6)$$

$$\xi^2 = (k_\beta^2 A_\beta^2 - k_\alpha^2 A_\alpha^2) / (k_\beta^2 - k_\alpha^2), \quad \eta^2 = k_\alpha^2 k_\beta^2 (A_\alpha^2 - A_\beta^2) / (k_\beta^2 - k_\alpha^2),$$

$$2) \quad x = \xi = 0, \quad \eta = \pm k_\beta A_\beta, \quad y = \eta \pm k_\alpha A_\alpha, \quad (7)$$

$$3) \quad y = \eta = 0, \quad \xi = \pm A_\beta, \quad x = \xi \pm A_\alpha, \quad (8)$$

$$4) \quad x = a^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2) \xi / (b^2 - a^2 k_\alpha^2), \quad y = b^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2) \eta / k_\beta^2 (b^2 - a^2 k_\alpha^2), \quad (9)$$

$$\xi^2 = \frac{1}{k_\beta^2 - k_\alpha^2} \left[ \frac{k_\beta^2 (b^2 - a^2 k_\alpha^2)^2 A_\alpha^2}{(a^2 k_\beta^2 - b^2)^2} - k_\alpha^2 A_\beta^2 \right],$$

$$\eta^2 = \frac{k_\beta^4}{k_\beta^2 - k_\alpha^2} \left[ A_\beta^2 - \frac{(b^2 - a^2 k_\alpha^2)^2 A_\alpha^2}{(a^2 k_\beta^2 - b^2)^2} \right].$$

В случае (6) мы имеем минимум,  $e=0$ , в остальных случаях — максимум. Решение (7) дает минимум  $e$ , который достигается на оси  $y$ :

$$e_{\max} = (k_\beta A_\beta + |k_\alpha| A_\alpha)^2 / b^2, \quad (10)$$

а решение (8) — на оси  $x$ :

$$e_{\max} = (A_\alpha + A_\beta)^2 / a^2. \quad (11)$$

Наконец, решение (9), рассмотренное Фриманом [202], дает максимум, который может иметь место в более общей точке и равен

$$e_{\max} = J(A_\alpha, A_\beta) = (k_\beta^2 - k_\alpha^2) \left[ \frac{A_\alpha^2}{a^2 k_\beta^2 - b^2} + \frac{A_\beta^2}{b^2 - a^2 k_\alpha^2} \right]. \quad (12)$$

Поскольку  $k_\beta > 1$ , всегда  $a^2 k_\beta^2 > b^2$ , кроме того, необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $b^2 > a^2 k_\alpha^2$ . Действительно, в противном случае (10) является наибольшим из (10) — (12), но невозможно заполнить эллипс орбитами частиц, если орбиты, которые могут достигать границы, делают это обязательно на концах малой оси.

При указанных условиях максимальное значение  $e_{\max}$  может быть найдено сравнением (10) — (12); оно равно выражениям

$$(10) \quad \text{для } k_\alpha A_\beta (a^2 k_\beta^2 - b^2) / k_\beta > (b^2 - a^2 k_\alpha^2) A_\alpha, \quad (13)$$

$$(11) \quad \text{для } (b^2 - a^2 k_\alpha^2) A_\alpha > (a^2 k_\beta^2 - b^2) A_\beta, \quad (14)$$

$$(12) \quad \text{для } (a^2 k_\beta^2 - b^2) A_\beta > (b^2 - a^2 k_\alpha^2) A_\alpha > k_\alpha A_\beta (a^2 k_\beta^2 - b^2) / k_\beta. \quad (15)$$

Область значений двух амплитуд  $A_\alpha, A_\beta$ , допустимых при  $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ , представлена на рис. 32, она ограничена сегментами линий

$$k_\alpha A_\alpha + k_\beta A_\beta = b, \quad A_\alpha + A_\beta = a$$

и частью эллипса  $J=1$ , эта граница представляет орбиты, которые достигают внешней границы эллиптического цилиндра.

Построим теперь самосогласованное решение бесстолкновительного кинетического уравнения. Будем искать функцию распределения вида

$$f_0 + f_0(A_\alpha, A_\beta). \quad (16)$$

Плотность должна равняться интегралу

$$\iint f_0(A_\alpha, A_\beta) dv_x dv_y = \rho_0 \theta (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2). \quad (17)$$

Последнее равенство есть двумерное интегральное уравнение первого рода для  $f$ . Мы будем искать вслед за Фриманом [202] решение<sup>1</sup> в форме  $f=f(J)$ , где  $J$ , определенное уравнением (12), можно привести к виду

$$J = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \Lambda^2 (a^2 \tilde{c}_y^2 + b^2 \tilde{c}_x^2 / k_\alpha^2 k_\beta^2), \quad (18)$$

$$\tilde{c}_x = \dot{x} + \theta y / b^2, \quad \tilde{c}_y = \dot{y} - \theta x / a^2, \quad (19)$$

$$\theta = [\beta k_\beta (b^2 - a^2 k_\alpha^2) - \alpha k_\alpha (a^2 k_\beta^2 - b^2)] / (k_\beta^2 - k_\alpha^2), \quad (20)$$

$$\Lambda^2 = 4\Omega^2 (k_\beta^2 - k_\alpha^2)^2 / [(a^2 k_\beta^2 - b^2) (b^2 - a^2 k_\alpha^2) (\beta^2 - \alpha^2)^2]. \quad (21)$$

Тогда, хотя, как следует из рис. 32,  $J > 1$  для некоторых орбит, которые еще не выходят за пределы граничного эллипса, все орбиты долж-

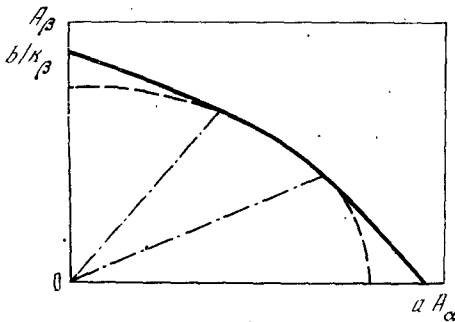


Рис. 32. Область допустимых значений амплитуд колебаний  $A_\alpha, A_\beta$  (для орбит внутри эллипса с  $b/a=0,7, \Omega^2/A^2=0,8$ ) [234]

Сплошная линия — граница области, штриховая — продолжение эллипса  $J=1$ , штрихпунктир — границы, разделяющие разные области в неравенствах (13—15) [234]

ным образом ограничены, если наложить требование

$$f(J) = 0 \text{ для } J > 1. \quad (22)$$

Это требование ограничивает точки  $(x, y)$  значениями

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq J \leq 1. \quad (23)$$

Интеграл (17) удобнее всего теперь вычислять, интегрируя по  $\tilde{c}_x, \tilde{c}_y$ , тогда область интегрирования ограничена эллипсом:

$$0 \leq a^2 \tilde{c}_y^2 + b^2 \tilde{c}_x^2 / k_\alpha^2 k_\beta^2 \leq (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2) / \Lambda^2. \quad (24)$$

Интеграл (17) по скоростям можно для  $f=f(J)$  представить в виде

$$(\pi k_\alpha k_\beta) / ab \Lambda^2 \int_{x^2/a^2 + y^2/b^2}^1 f(J) dJ. \quad (25)$$

Отсюда для цилиндра с  $\rho = \text{const}$  получим искомое решение

$$f = \rho ab \Lambda^2 \delta(1 - J) / \pi k_\alpha k_\beta. \quad (26)$$

<sup>1</sup> В более общем случае (16) область интегрирования в плоскости  $(A_\alpha, A_\beta)$  (после соответствующей замены переменных интегрирования) имеет слишком сложную форму.



2. Получить функцию распределения (48) § 1 эллиптического диска с поверхностной плотностью  $\sigma_0 = \frac{3M}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2}$  (Фриман [204]).

Решение. Свойства орбит частиц в этом случае формально ничем не отличаются от предыдущей задачи, поэтому интеграл (25) задачи 1 нужно приравнять поверхностной плотности  $\sigma_0(x, y)$

$$\frac{\pi}{k_\alpha k_\beta ab \Lambda^2} \int_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}^1 f(J) dJ = \frac{3M}{2\pi ab} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right]^{1/2}. \quad (1)$$

Дифференцируя это равенство, приходим к (48).

3. Доказать единственность решения Фримана (48) для случая покоящегося эллиптического диска среди функций распределения вида  $f_0 = f_0(A_\alpha^2, B_\beta^2)$  (Хантер [234]).

Решение. Движения отдельной частицы по осям  $x, y$  в случае покоящегося диска расщепляются:

$$x = A_\alpha \sin(At + \varepsilon_\alpha), \quad y = -B_\beta \cos(Bt + \varepsilon_\beta). \quad (1)$$

Если частоты  $\alpha$  и  $\beta$  несоизмеримы, орбита (1) заполняет «ящик» с ребрами в  $(x = \pm A_\alpha, y = \pm B_\beta)$ . Этот «ящик» лежит в пределах границ эллипса, если

$$J = \frac{A_\alpha^2}{a^2} + \frac{B_\beta^2}{b^2} \leq 1. \quad (2)$$

Далее, легко видеть, что

$$\dot{x}^2 = A^2 (A_\alpha^2 - x^2), \quad \dot{y}^2 = B^2 (B_\beta^2 - y^2), \quad (3)$$

и, наконец, для функции распределения вида  $f = f(A_\alpha^2, B_\beta^2)$  будем иметь

$$\sigma = AB \int_{x^2}^{a^2(1-y^2/b^2)} dA_\alpha^2 \int_{y^2}^{b^2(1-A_\alpha^2/a^2)} \frac{f(A_\alpha^2, B_\beta^2)}{[(A_\alpha^2 - x^2)(B_\beta^2 - y^2)]^{1/2}} dB_\beta^2. \quad (4)$$

Полученное интегральное уравнение для  $f(A_\alpha^2, B_\beta^2)$  представляет собой двумерное обобщение уравнения Абеля. Решение этого уравнения можно получить способом, аналогичным применяемому при выводе решения обычного одномерного уравнения Абеля. Умножая (4) на  $[(x^2 - \lambda)(y^2 - \mu)]^{-1/2}$  ( $\lambda, \mu$  — параметры), интегрируем по  $x^2, y^2$  в области  $x^2 \geq \lambda, y^2 \geq \mu, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , после чего, переставляя порядок интегрирования, получим следующее выражение в правой части (4):

$$AB \int_{\lambda}^{a^2(1-\mu/b^2)} dA_\alpha^2 \int_{\mu}^{b^2(1-A_\alpha^2/a^2)} f dB_\beta^2 \int_{\lambda}^{A_\alpha^2} \frac{dx^2}{[(A_\alpha^2 - x^2)(x^2 - \lambda)]^{1/2}} \int_{\mu}^{B_\beta^2} \frac{dy^2}{[(B_\beta^2 - y^2)(y^2 - \mu)]^{1/2}}. \quad (5)$$

Это выражение сильно упрощается с учетом того, что оба внутренних интеграла равны  $\pi$ , и мы находим вместо (5)

$$\begin{aligned} \pi^2 AB \int_{\lambda}^{a^2(1-\mu/b^2)} dA_\alpha^2 \int_{\mu}^{b^2(1-A_\alpha^2/a^2)} f dB_\beta^2 &= \frac{3M}{2\pi ab} \int_{\lambda}^{a^2(1-\mu/b^2)} \frac{dx^2}{(x^2 - \lambda)^{1/2}} \times \\ \times \int_{\mu}^{b^2(1-x^2/a^2)} \frac{(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2}}{(y^2 - \mu)^{1/2}} dy^2 &= \\ = M(1 - \lambda/a^2 - \mu/b^2)^{3/2} \theta(1 - \lambda/a^2 - \mu/b^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, дифференцируя (6) последовательно по  $\lambda$  и  $\mu$ , получим исконое решение в виде

$$f(\lambda, \mu) = 3M \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\mu}{b^2}\right)^{-1/2} \theta \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\mu}{b^2}\right) \frac{1}{4\pi^2 a^2 b^2 AB} \quad (7)$$

или, иначе,

$$f(A_\alpha^2, B_\beta^2) = 3M(1 - J)^{-1/2} \theta(1 - J) / 4\pi^2 a^2 b^2 AB. \quad (8)$$

Это решение совпадает с данным Фриманом (48).

Отметим здесь, кстати, что аналогичным образом можно доказать единственность решения (47) для эллиптического цилиндра.

4. Доказать отсутствие физических приемлемых решений вида  $f_0 = f_0(E_x, E_y, E_z)$  для покоящихся эллипсоидов;  $E_x, E_y, E_z$  — энергии движения отдельной частицы соответственно по осям  $x, y, z$  (Хантер [234]).

Решение. Уравнения движения звезды по осям  $x, y, z$  расщепляются:

$$x = A_\alpha \sin(At + \varepsilon_\alpha), \quad y = -B_\beta \cos(Bt + \varepsilon_\beta), \quad z = C_\gamma \sin(Ct + \varepsilon_\gamma). \quad (1)$$

Для функции распределения вида  $f = f(A_\alpha^2, B_\beta^2, C_\gamma^2)$ ,

$$A_\alpha^2 \sim E_x, \quad B_\beta^2 \sim E_y, \quad C_\gamma^2 \sim E_z, \quad (2)$$

вместо уравнения (4) задачи 3 будем, очевидно, иметь следующее уравнение:

$$\rho_0 = ABC \int_{x^2}^{u^2} dA_\alpha^2 \int_{y^2}^{v^2} dB_\beta^2 \int_{z^2}^{w^2} \frac{f(A_\alpha^2, B_\beta^2, C_\gamma^2) dC_\gamma^2}{[(A_\alpha^2 - x^2)(B_\beta^2 - y^2)(C_\gamma^2 - z^2)]^{1/2}}, \quad (3)$$

$$\text{где } u^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad v^2 = b^2 \left(1 - \frac{A_\alpha^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad w^2 = c^2 \left(1 - \frac{A_\alpha^2}{a^2} - \frac{B_\beta^2}{b^2}\right).$$

Множим (3) на  $[(x^2 - \lambda)(y^2 - \mu)(z^2 - \nu)]^{-1/2}$  и интегрируем по  $x^2, y^2, z^2$  по области  $x^2 \geq \lambda, y^2 \geq \mu, z^2 \geq \nu; x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ .

Как и в предыдущей задаче, переставляя порядок интегрирования и т. п., получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4\pi}{3}\right) \rho abc \left[1 - \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\mu}{b^2} - \frac{\nu}{c^2}\right]^{3/2} \theta \left(1 - \frac{\lambda}{a^2} - \frac{\mu}{b^2} - \frac{\nu}{c^2}\right) = \\ & = \pi^3 ABC \int_{\lambda}^{a^2(1-\mu/b^2-\nu/c^2)} dA_\alpha^2 \int_{\mu}^{b^2(1-A_\alpha^2/a^2-\nu/c^2)} dB_\beta^2 \int_{\nu}^{c^2(1-A_\alpha^2/a^2-B_\beta^2/b^2)} f(A_\alpha^2, B_\beta^2, C_\gamma^2) dC_\gamma^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференцируя последовательно по  $\lambda$  и  $\mu$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\rho c}{\pi^2 ab ABC} (1 - \lambda/a^2 - \mu/b^2 - \nu/c^2) \theta(1 - \lambda/a^2 - \mu/b^2 - \nu/c^2) = \\ & = \int_{\nu}^{c^2(1-\lambda/a^2-\mu/b^2)} f(\lambda, \mu, C_\gamma^2) dC_\gamma^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Наконец, дифференцируя по  $\nu$  и переобозначая переменные, получаем решение в виде

$$\begin{aligned} f(A_\alpha^2, B_\beta^2, C_\gamma^2) &= -\frac{\rho}{\pi^2 abc ABC} \frac{d}{dI} \{(1 - I)^{-1/2} \theta(1 - I)\} = \\ &= \frac{\rho}{2\pi^2 abc ABC} [-(1 - I)^{-3/2} \theta(1 - I) + 2(1 - I)^{-1/2} \delta(1 - I)], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$I \equiv \frac{A_\alpha^2}{a^2} + \frac{B_\beta^2}{b^2} + \frac{C_\gamma^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2 A^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2 B^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2 C^2}. \quad (7)$$

Это решение неприемлемо физически, так как  $f < 0$  всюду при  $I < 1$ .

Причина заключается в избыточном числе высокоэнергетических орбит, нужных для установления однородной плотности вплоть до границы системы.

Сингулярность (6) при  $I=1$  является достаточно сильной положительной, чтобы скомпенсировать отрицательные значения  $f$  и дать положительную полную плотность в каждой точке пространства.

Сказанное можно сформулировать несколько иначе. Как известно, ограниченные гравитирующие системы удовлетворяют теореме вириала

$$2T + U = 0, \quad (8)$$

где  $T$  и  $U$  — полная кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно.

Для плотности кинетической энергии  $\varepsilon$  имеем

$$\varepsilon = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{3}{4} \rho \mu^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (9)$$

где  $\mu^2 = \frac{4\pi G \rho a^2}{3}$ ;  $r^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2$ . Поэтому полная кинетическая энергия

$$T = \frac{3}{10} \cdot \frac{M^2 G}{a}, \quad (10)$$

а потенциальная энергия

$$U = -\frac{3}{5} \cdot \frac{M^2 G}{a}, \quad (11)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса системы. Таким образом, (8) выполняется. Однако возникает следующий парадокс. Как видно из (9), средний квадрат скорости  $\frac{3}{2} \mu^2 (1 - r^2/a^2)$ , так что в системе должны присутствовать частицы со скоростями, превышающими скорость «отрыва»  $v_0 = \mu$ . Отсюда можно сделать вывод о том, что не существует реальных покоящихся эллипсоидальных систем рассмотренного вида.

Одним из существенных предположений (см. (2)) является зависимость функции распределения всего от трех интегралов движения  $A_\alpha^2$ ,  $B_\beta^2$ ,  $C_\gamma^2$ . Это предположение однозначно определяет решение, причем оно оказывается нефизическим. Если (как, например, в [21]) рассмотреть модели, зависящие от четырех интегралов, это сразу даст гораздо большее разнообразие решений, среди которых имеются и покоящиеся эллипсоиды<sup>1</sup>. Остается также открытым и вопрос о моделях эллипсоидальных систем с функциями распределения, зависящими от каких-либо других интегралов движения, отражающих специфику гравитационного потенциала таких систем (например, модели типа моделей Эйнштейна сферически-симметричных систем).

5. Найти функции распределения вида (6) задачи 4 для вращающихся эллипсоидов. В каких предельных случаях им соответствуют физически приемлемые решения?

Решение. Уравнения движения частиц в системе координат, вращающейся вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $(-\Omega)$ , есть

$$\begin{aligned} x &= A_\alpha \sin(\alpha t + \varepsilon_\alpha) + A_\beta \sin(\beta t + \varepsilon_\beta), \\ y &= k_\alpha A_\alpha \cos(\alpha t + \varepsilon_\alpha) - k_\beta A_\beta \cos(\beta t + \varepsilon_\beta). \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> В работе [21] это просто суперпозиция двух эллипсоидов Фримана (39) § 1, вращающихся в противоположные стороны.

Все орбиты будут ограничены заданным эллипсоидом, если  $I \leq 1$ , где теперь через  $I$  мы обозначим выражение

$$I \equiv J + \frac{C_y^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2 C^2} + \Lambda^2 \left( a^2 \tilde{c}_y^2 + \frac{b^2 \tilde{c}_x^2}{k_\alpha^2 k_\beta^2} \right). \quad (2)$$

Решение специального вида  $f = f(I)$ , исчезающее для  $I > 1$ , возможно, если снова

$$\rho = \frac{2\pi k_\alpha k_\beta c C}{ab\Lambda^2} \int_{\xi}^1 (I - \xi)^{1/2} f(I) dI \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (3)$$

$\xi \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ . Для решения обобщенного уравнения Абеля определим вспомогательную функцию

$$h(I) = \int_Y^1 f(I') dI', \quad (4)$$

тогда (3) сведется к обычному уравнению Абеля

$$\int_{\xi}^1 \frac{h(I) dI}{(I - \xi)^{1/2}} = \frac{ab\Lambda^2 \rho}{\pi k_\alpha k_\beta c C}. \quad (5)$$

Решение этого уравнения:

$$f(I) = - \frac{ab\Lambda^2 \rho}{\pi^2 k_\alpha k_\beta c C} \frac{d}{dI} [(1 - I)^{-1/2} \theta(1 - I)]. \quad (6)$$

Поскольку согласно (6) орбиты с  $I < 1$  имеют отрицательные «числа заполнения», можно сделать вывод о том, что бесстолкновительных однородных эллипсоидов указанного вида, вообще говоря, не существует.

Физически разумные решения получаются из (6) только в двух специальных случаях, рассмотренных Фриманом: в дисковом пределе  $c \rightarrow 0$  и в случае эллипсоида, вращающегося с максимально возможной угловой скоростью  $\Omega = A$ . В дисковом пределе  $c \rightarrow 0$  из (6) можно снова получить решение Фримана (48) § 1. Действительно, интегрируя (6) по всем  $z > 0$  и  $z$ , получим

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{c(1-J)^{1/2}} dz \int_0^{cC(1-J-z^2/c^2)^{1/2}} dz f(I) &= 2cC \int_0^{c(1-J)^{1/2}} dz \int_{J+z^2/c^2}^1 \frac{f(I) dI}{(I - J - z^2/c^2)^{1/2}} = \\ &= 2cC \int_J^1 f(I) dI \int_0^{c(1-J)^{1/2}} \frac{dz}{(I - J - z^2/c^2)^{1/2}} = \\ &= \pi c^2 C \int_J^1 f(I) dI = 3M\Lambda^2 (1 - J)^{-1/2} \theta(1 - J) / 4\pi^2 k_\alpha k_\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

что совпадает с (48) § 1.

Эллипсоидальное решение Фримана (28) § 1 также можно получить из (6) при  $k_\alpha \rightarrow 0$ ,  $k_\beta \rightarrow \beta/2\Omega$ ,

$$\beta \rightarrow (B^2 + 3A^2)^{1/2}, \quad \theta \rightarrow 2\Omega b^2, \quad \Lambda \rightarrow \frac{1}{ab\beta\mu}, \quad \mu^2 = 1 - 4\Omega^2 b^2 / \beta^2 a^2.$$

Определим

$$I = J' + \frac{\tilde{c}_x^2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{k_\alpha k_\beta}{b\Lambda}, \quad \Lambda' = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{\tilde{c}_y^2}{b^2 \beta^2 \mu^2} + \frac{z^2}{c^2 C^2}. \quad (8)$$

Тогда искомая функция распределения равна пределу

$$f = - \frac{\rho}{\pi^2 b^2 \beta C \mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dI} \{ (1-I)^{-1/2} \theta(1-I) \}. \quad (9)$$

Ясно, что  $f$  будет иметь сингулярность  $\delta$ -образного типа в зависимости от  $\tilde{c}_x$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как конечная область изменения  $I$  ограничивает  $\tilde{c}_x$  областью  $-\varepsilon \leq \tilde{c}_x \leq \varepsilon$ . Простой путь вычисления предела состоит в умножении (9) на «хорошую» функцию  $F(J', \tilde{c}_x)$  и интегрировании по  $\tilde{c}_x, J'$ , что дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\tilde{c}_x}{\varepsilon} \int_0^{1-\tilde{c}_x^2/\varepsilon} dJ' F(J', \tilde{c}_x) \frac{\partial}{\partial J'} \left[ (1 - J' - \tilde{c}_x^2/\varepsilon^2) \theta \left( 1 - J' - \frac{\tilde{c}_x^2}{\varepsilon^2} \right) \right]. \quad (10)$$

Берем внутренний интеграл в (10) и полагаем  $\tilde{c}_x = \varepsilon s$ ; тогда вместо (10) будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{-1}^1 \frac{ds F(0, \varepsilon s)}{(1-s^2)^{1/2}} - \int_{-1}^1 ds \int_0^{1-s^2} \frac{\partial F(J', \varepsilon s)}{\partial J'} \frac{dJ'}{(1-J'-s^2)^{1/2}} \right\}.$$

Во втором интеграле меняем порядок интегрирования:

$$-\pi F(0, 0) - \pi \int_0^1 \frac{\partial F(J', 0)}{\partial J'} dJ' = -\pi F(1, 0). \quad (11)$$

Отсюда следует, что (9) в пределе должно быть произведением двух  $\delta$ -функций:

$$-\pi \delta(1-J') \delta(\tilde{c}_x). \quad (12)$$

Это известная уже нам функция распределения Фримана (28). § 1.

Совершенно аналогичные затруднения возникают и при попытке построить бесстолкновительные аналоги эллипсоидов Маклорена и Якоби, если искать соответствующие им фазовые распределения, зависящие только от энергии частицы  $E$  во вращающейся системе:

$$E = \frac{v^2}{2} + (A^2 - \Omega^2) \frac{x^2}{2} + (B^2 - \Omega^2) \frac{y^2}{2} + \frac{C^2 z^2}{2}. \quad (13)$$

Для названных эллипсоидов выполнено условие

$$(A^2 - \Omega^2) a^2 = (B^2 - \Omega^2) b^2 = C^2 c^2 \equiv \mu^2, \quad (14)$$

так что

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right). \quad (15)$$

Тогда для функции распределения вида  $f_0 = f_0(J)$ , где

$$J = \mu^2 - 2E, \quad (16)$$

получаем интегральное уравнение Абеля

$$\frac{\rho_0 \theta(\kappa)}{2\pi} = \int_0^{\kappa} f_0(J) \sqrt{\kappa - J} dJ, \quad \kappa \equiv \mu^2 \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right]. \quad (17)$$

Решению этого уравнения

$$f_0(J) = \frac{\rho_0}{\pi^2} \frac{d}{dJ} [J^{-1/2} \theta(J)] \quad (18)$$

свойственны все отмеченные выше трудности, характерные для функции распределения (6).

6. Исследовать условия существования эллипсоидальных решений с простейшей картиной движения частиц в плоскости вращения  $(x, y)$  — по эллиптическим орбитам, подобным и концентрическим с граничным эллипсом; по оси  $z$  частицы совершают гармонические колебания. Решение е. Обозначим частоту внутренней циркуляции через  $\nu$ , а угловую скорость обращения самого эллипсоида — через  $\Omega$ . Во вращающейся системе уравнения движения формально допускают решение вида

$$x = ae^{i\nu t}, \quad y = -ibe^{i\nu t}. \quad (1)$$

Соответственно функция распределения

$$f_0 \sim \delta\left(v_x + \frac{a\nu}{b} y\right) \delta\left(v_y - \frac{b\nu}{a} x\right) F(x, y, z, v_z). \quad (2)$$

Подставляя (2) в кинетическое уравнение, записанное во вращающейся системе (в декартовых координатах),

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + (\Omega^2 x + 2\Omega v_y - A^2 x) \frac{\partial f}{\partial v_x} + (\Omega^2 y - 2\Omega v_x - B^2 y) \frac{\partial f}{\partial v_y} - C^2 z \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \quad (3)$$

получим условия на  $\Omega$  и  $\nu$

$$a(\Omega^2 - A^2 + \nu^2) + 2\Omega\nu b = 0, \quad b(\Omega^2 - B^2 + \nu^2) + 2\Omega\nu a = 0, \quad (4)$$

а также уравнение для функции  $F$

$$v_z \frac{\partial F}{\partial z} - C^2 z \frac{\partial F}{\partial v_z} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что условия (4) можно было, конечно, получить и из уравнений движения

$$\ddot{x} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Omega^2 x + 2\Omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Omega^2 y - 2\Omega\dot{x}, \quad (6)$$

если подставить в них (1). Решение уравнения (5) есть

$$F \sim \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2 C^2}\right)^{-1/2},$$

так что полная функция распределения описанной системы формально получается в следующем виде:

$$f_0 = \frac{\rho_0}{\pi c C} \delta\left(v_x + \frac{a\nu}{b} y\right) \delta\left(v_y - \frac{b\nu}{a} x\right) \frac{\theta\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2 C^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2 C^2}}}. \quad (7)$$

Можно, однако, показать, что уравнения (4) имеют разумные решения только в двух случаях: либо при  $a=b$ , либо при  $c \rightarrow \infty$ .

Для случая эллипсоида вращения  $a=b$  из (6) получается уже известная нам функция распределения Фримана (39) § 1.

Исключая из (4)  $\nu$  и разрешая полученное уравнение относительно  $\Omega^2$ , найдем

$$\Omega^2 = \frac{(a^2 A^2 - b^2 B^2) \pm \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 A^4 - b^2 B^4)}}{2(a^2 - b^2)}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что должно быть

$$aA^2 \geq bB^2. \quad (9)$$

Докажем, что при  $c \neq \infty$  это условие нарушается для всех  $b/a$ , кроме тривиального случая  $b/a = 1$  (эллипсоид вращения).

Условие (9) можно переписать следующим образом ( $\beta \equiv b/a$ ,  $\gamma \equiv c/a$ ):

$$f(\beta, \gamma) \equiv \int_0^{\infty} \frac{(1-\beta)(\beta-\lambda) d\lambda}{(1+\lambda)^{3/2} (\beta^2+\lambda)^{3/2} (\gamma^2+\lambda)^{1/2}} \leq 0.$$

В действительности оказывается, что  $f \geq 0$ . Это легко показать, записав

$$f = \int_0^{\beta} + \int_{\beta}^{\infty}$$

и преобразовав второй интеграл к промежутку  $(0, \beta)$  с помощью замены  $\lambda \rightarrow \lambda' = \beta^2/\lambda$ . Мы получим

$$f = \int_0^{\beta} \frac{d\lambda (\beta - \lambda)}{(1 + \lambda)^{3/2} (\beta^2 + \lambda)^{3/2}} \left\{ \frac{1}{(\gamma^2 + \lambda)^{1/2}} - \frac{\lambda^{1/2}}{(\beta^2 + \gamma^2 \lambda)^{1/2}} \right\}.$$

Но в промежутке  $(0, \beta)$

$$\frac{1}{\gamma^2 + \lambda} \geq \frac{\lambda}{\beta^2 + \gamma^2 \lambda},$$

так что действительно  $f \geq 0$ . Доказано, что простейшая мыслимая модель *трехосного* бесстолкновительного эллипсоида, которая характеризуется гидродинамическими движениями всех частиц в плоскости вращения (с траекториями во вращающейся системе, концентрическими и подобными граничному эллипсу), не существует.

Отметим в заключение, что для эллиптического цилиндра функция распределения  $F$  по «продольным» скоростям  $v_z$  может быть произвольной, а

$$\Omega^2 = \frac{2 \pi G \rho_0 a b}{(a + b)^2}. \quad (10)$$

7. Доказать устойчивость покоящегося однородного сфероида по отношению к превращению в однородный эллипсоид с другими значениями полуосей.

Решение<sup>1</sup>. Задачу можно решать в общем виде, не конкретизируя стационарную функцию распределения  $f_0$ <sup>2</sup>.

Обозначая через  $(x, y, z)$  и  $(x_0, y_0, z_0)$  соответственно текущие и начальные лагранжевы координаты частиц, будем рассматривать возмущения вида (сравни, например, с задачей 5 к главе II)

$$x = x_0 a_1 + \dot{x}_0 b_1, \quad (1)$$

$$y = y_0 a_2 + \dot{y}_0 b_2, \quad (2)$$

$$z = z_0 a_3 + \dot{z}_0 b_3, \quad (3)$$

где  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  — неизвестные функции времени.

Величина возмущенной полуоси  $c$  определяется как максимум (3) на оси  $z$  при условии

$$z_0^2 + \left( \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \right)^2 = c_0^2, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Выполнено при участии И. Г. Шухмана.

<sup>2</sup> При этом, однако, предполагается, что нижеследующая подстановка ((1)–(3)) снова приводит к однородному эллипсоиду.

которое связывает  $z_0$  и  $\dot{z}_0$  (интеграл энергии для частиц, достигающих границы эллипсоида). Здесь  $c_0$  — невозмущенная полуось,  $\omega_0$  — частота колебаний частиц в направлении  $z$  в невозмущенном потенциале.

В результате получается

$$c^2 = (a_3^2 + b_3^2 \omega_0^2) c_0^2. \quad (5)$$

Аналогичным образом определяются и другие полуоси:

$$a^2 = a_1^2 + b_1^2, \quad b^2 = a_2^2 + b_2^2 (\Omega = 1). \quad (6)$$

Полная кинетическая энергия системы есть

$$T = \frac{1}{2} \int dr dv f_0 (x_0^2 \dot{a}_1^2 + \dot{x}_0^2 b_1^2 + y_0^2 \dot{a}_2^2 + \dot{y}_0^2 b_2^2 + z_0^2 \dot{a}_3^2 + \dot{z}_0^2 b_3^2).$$

Вычисляем сначала интеграл

$$A_1 = \frac{1}{2} \int dr dv f_0 x_0^2 = \frac{1}{2} \int dr dv f_0 y_0^2 = \frac{2 \pi \rho_0}{15} c_0.$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$\frac{1}{2} \int dr dv f_0 z_0^2 = \frac{4 \pi \rho_0}{15} c_0^3 \equiv 2A_2,$$

где

$$A_2 \equiv \frac{2 \pi \rho_0}{15} c_0^3 = A_1 c_0^2.$$

Если ввести обозначения для интегралов

$$\frac{1}{2} \int dr dv f_0 \dot{x}_0^2 = \frac{1}{2} \int dr dv f_0 \dot{y}_0^2 \equiv p_1, \quad \frac{1}{2} \int dr dv f_0 \dot{z}_0^2 \equiv p_2,$$

то выражение для кинетической энергии запишется в виде

$$T = A_1 (\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2) + A_2 \dot{a}_3^2 + p_1 (b_1^2 + b_2^2) + \frac{p_2}{\omega_0^2} (\omega_0^2 b_3^2). \quad (7)$$

Выполним преобразование

$$\begin{aligned} a_1 &= a \cos \varphi_1, & b_1 &= a \sin \varphi_1; \\ a_2 &= b \cos \varphi_2, & b_2 &= b \sin \varphi_2; \\ a_3 &= \frac{c}{c_0} \cos \varphi_3, & \omega_0 b_3 &= \frac{c}{c_0} \sin \varphi_3; \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} T &= A_1 \{ a^2 \cos^2 \varphi_1 + a^2 \sin^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - a \dot{a} \sin 2\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + b^2 \cos^2 \varphi_2 + \\ &+ b^2 \sin^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - b \dot{b} \sin 2\varphi_2 \dot{\varphi}_2 \} + \frac{A_2}{c_0^2} \{ c^2 \cos^2 \varphi_3 + c^2 \sin^2 \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 - \\ &- c \dot{c} \sin 2\varphi_3 \dot{\varphi}_3 \} + p_1 \{ a^2 \sin^2 \varphi_1 + a^2 \cos^2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + a \dot{a} \sin 2\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + b^2 \sin^2 \varphi_2 + \\ &+ b^2 \cos^2 \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + b \dot{b} \sin 2\varphi_2 \dot{\varphi}_2 \} + \frac{p_2}{\omega_0^2 c_0^2} \{ c^2 \sin^2 \varphi_3 + c^2 \cos^2 \varphi_3 \dot{\varphi}_3^2 + c \dot{c} \sin 2\varphi_3 \dot{\varphi}_3 \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как  $A_1 = p_1$ ,  $A_2 = p_2 / \omega_0^2$  (т. е.  $\langle x_0^2 \rangle = \langle y_0^2 \rangle = \langle \dot{x}_0^2 \rangle = \langle \dot{y}_0^2 \rangle$ ;  $\omega_0^2 \langle z_0^2 \rangle = \langle \dot{z}_0^2 \rangle$ ),

то

$$T = A_1 (\dot{a}^2 + a^2 \dot{\varphi}_1^2 + b^2 + b^2 \dot{\varphi}_2^2 + c^2 + c^2 \dot{\varphi}_3^2). \quad (9)$$



Потенциальная энергия однородного трехосного эллипсоида дается выражением

$$U = -\frac{3GM^2}{10}\Phi, \quad \Phi = \int_0^\infty \frac{ds}{V(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)} \equiv \Phi(a, b, c).$$

Лагранжиан есть  $L=T-U$ , а лагранжевы уравнения движения соответственно следующие:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (q = (a, b, c, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)). \quad (10)$$

Они дают

$$A_1 2\ddot{a} = 2A_1 a \dot{\varphi}_1^2 - \frac{\partial U}{\partial a}, \quad A_1 2\ddot{b} = 2A_1 b \dot{\varphi}_2^2 - \frac{\partial U}{\partial b}, \quad A_1 2\ddot{c} = 2A_1 c \dot{\varphi}_3^2 - \frac{\partial U}{\partial c}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} (a^2 \dot{\varphi}_1) = 0, \quad \frac{d}{dt} (b^2 \dot{\varphi}_2) = 0, \quad \frac{d}{dt} (c^2 \dot{\varphi}_3) = 0. \quad (12)$$

Из уравнений (12) следуют законы сохранения

$$a^2 \dot{\varphi}_1 = \text{const}, \quad b^2 \dot{\varphi}_2 = \text{const}, \quad c^2 \dot{\varphi}_3 = \text{const}. \quad (13)$$

Константы определяем, приравнявая правые части (13) их равновесным значениям:

$$a^2 \dot{\varphi}_1 = 1, \quad b^2 \dot{\varphi}_2 = 1, \quad c^2 \dot{\varphi}_3 = c_0^2 \omega_0. \quad (14)$$

С помощью этих выражений можно исключить  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  из уравнений (11):

$$A_1 2\ddot{a} = -\frac{\partial U}{\partial a} + A_1 \frac{2}{a^3}, \quad A_1 2\ddot{b} = -\frac{\partial U}{\partial b} + A_1 \frac{2}{b^3}, \quad A_1 2\ddot{c} = -\frac{\partial U}{\partial c} + A_1 \frac{2\omega_0^2 c_0^4}{c^3}. \quad (15)$$

Перепишем (15) в такой форме:

$$\ddot{a} = A \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{1}{a^3}, \quad \ddot{b} = A \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{1}{b^3}, \quad \ddot{c} = A \frac{\partial \Phi}{\partial c} + \frac{\omega_0^2 c_0^4}{c^3} \quad (16)$$

или, более компактно,

$$\ddot{R}_i = -\frac{\partial \psi}{\partial R_i}, \quad \mathbf{R} = (a, b, c), \quad (17)$$

где эффективный потенциал  $\psi$  равен

$$\psi = -A\Phi + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} + \frac{\omega_0^2 c_0^4}{2c^2}. \quad (18)$$

В формулах (16)–(18) величина  $A$  определяется формулой

$$A = 2\pi G \rho_0 c_0 = \frac{1}{V\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{1}{(\xi^2+1) \arctg \frac{1}{\xi} - \xi}, \quad (19)$$

где

$$\xi = \frac{c_0}{\sqrt{1-c_0^2}}.$$

Выведенные уравнения описывают *нелинейную* эволюцию системы. Как частные случаи из них можно получить аналогичные уравнения для нелинейных возмущений покоящихся сфер, дисков, цилиндров.

Устойчивость для не слишком сильных начальных возмущений достаточно очевидна из (18). Найдем частоты малых колебаний около равновесного состояния (которому соответствуют  $\frac{\partial\psi}{\partial a} = \frac{\partial\psi}{\partial b} = \frac{\partial\psi}{\partial c} = 0$ ). Линеаризуя уравнения (16) подстановкой

$$a = 1 + \varepsilon_1, \quad b = 1 + \varepsilon_2, \quad c = c_0(1 + \varepsilon_3); \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ll 1, \quad (20)$$

получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1 &= A(\Phi_{aa}\varepsilon_1 + \Phi_{ab}\varepsilon_2 + \Phi_{ac}c_0\varepsilon_3) - 3\varepsilon_1, & \ddot{\varepsilon}_2 &= A(\Phi_{bb}\varepsilon_2 + \Phi_{bc}c_0\varepsilon_3 + \Phi_{ab}\varepsilon_1) - 3\varepsilon_2, \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= A\left(\Phi_{cc}\varepsilon_3 + \Phi_{ac}\frac{1}{c_0}\varepsilon_1 + \Phi_{bc}\frac{1}{c_0}\varepsilon_2\right) - 3\omega_0^2\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{bb} = \Phi_{aa} &\equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2} = \int_0^\infty \frac{(2-s)ds}{(1+s)^3\sqrt{c_0^2+s}}, \\ \Phi_{cc} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial c^2} = \int_0^\infty \frac{(2c_0^2-s)ds}{(1+s)(c_0^2+s)^{3/2}}, & \Phi_{ab} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial a\partial b} = \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^3\sqrt{c_0^2+s}}, \\ \Phi_{ac} = \Phi_{bc} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial a\partial c} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial b\partial c} = \int_0^\infty \frac{c_0 ds}{(1+s)^2(c_0^2+s)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Если в (20) заменить  $\partial/\partial t$  на  $(-i\omega)$  и приравнять определитель системы нулю, мы получим характеристическое уравнение третьего порядка относительно  $\omega^2$ . Можно сразу использовать ограничения, налагаемые симметрией отдельных мод ( $\sim e^{im\varphi}$ ). Пусть сначала  $m=0$ ,  $a=b$ ,  $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ , тогда вместо (20) будем иметь

$$\begin{aligned} [A(\Phi_{aa} + \Phi_{ab}) - 3 + \omega^2]\varepsilon_1 + A\Phi_{ac}c_0\varepsilon_3 &= 0, \\ 2\frac{A}{c_0}\Phi_{ac}\varepsilon_1 + [A\Phi_{cc} - 3\omega_0^2 + \omega^2]\varepsilon_3 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \omega^4 - [3(1 + \omega_0^2) - A(\Phi_{aa} + \Phi_{cc} + \Phi_{ab})]\omega^2 + [A(\Phi_{aa} + \Phi_{ab}) - 3] \times \\ \times [A\Phi_{cc} - 3\omega_0^2] - 2A^2\Phi_{ac}^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Проверкой (23) может служить вычисление корней в известных предельных случаях (диск, сфера). Оно дает правильные результаты:

$$\omega^2 = 1 \text{ при } c \rightarrow 0; \quad \omega^2 = 1, \frac{14}{5} \text{ при } c \rightarrow 1.$$

Докажем вещественность корней уравнения (23). Представим это уравнение в виде

$$(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2) = C,$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -A(\Phi_{aa} + \Phi_{ab}) + 3 = 2\pi G\rho c \left\{ 3 \int \frac{ds}{(1+s)^2\sqrt{c^2+s}} - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{(2-s)ds}{(1+s)^3\sqrt{c^2+s}} - \int \frac{ds}{(1+s)^3\sqrt{c^2+s}} \right\} = 8\pi G\rho c \int \frac{sds}{(1+s)^3\sqrt{c^2+s}} > 0, \\ \omega_2^2 &= 3\omega_0^2 - A\Phi_{cc} = 2\pi G\rho c \left\{ \int \frac{ds}{(1+s)(c^2+s)^{3/2}} + 3 \int \frac{sds}{(1+s)(c^2+s)^{3/2}} \right\} > 0, \\ C &= 4\pi G\rho \int \frac{c^2 ds}{(1+s)^2(c^2+s)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что достаточно доказать неравенство

$$\omega_1^2 \omega_2^2 > C,$$

т. е.

$$2 \int \frac{s ds}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2}} \int \frac{1(c^2+4s) ds}{(1+s)(c^2+s)^{3/2}} > \left\{ \int \frac{c ds}{(1+s)^2 (c^2+s)^{3/2}} \right\}^2. \quad (24)$$

Применим неравенство Коши

$$\int \varphi_1 \varphi_2 < \sqrt{\int \varphi_1^2} \sqrt{\int \varphi_2^2}, \quad (25)$$

считая, что

$$\varphi_1 = \frac{c}{(1+s)^{3/2} (c^2+s)^{1/4} \sqrt{c^2+4s}}, \quad \varphi_2 = \frac{\sqrt{c^2+4s}}{(1+s)^{1/2} (c^2+s)^{3/4}}.$$

Тогда неравенство (24) только усилится:

$$\int \frac{2s ds}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2}} > \int \frac{c^2 ds}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2} (c^2+4s)}.$$

Доказать это неравенство можно, еще раз используя неравенство Коши (25), на этот раз с

$$\varphi_1 = \frac{1}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2}}, \quad \varphi_2 = \frac{c^2}{c^2+4s},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int \frac{ds c^2}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2} (c^2+4s)} &< \sqrt{\int \frac{ds}{(1+s)^6 (c^2+s)}} \sqrt{\int \frac{ds c^4}{(c^2+4s)^2}} = \\ &= \frac{c}{2} \sqrt{\int \frac{ds}{(1+s)^6 (c^2+s)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, остается доказать, что

$$J_1 \equiv \int \frac{2s ds}{(1+s)^3 (c^2+s)^{1/2}} > J_2 \equiv \frac{c}{2} \sqrt{\int \frac{ds}{(1+s)^6 (c^2+s)}}.$$

Непосредственным вычислением устанавливаем

$$J_{1\min} = J_1(c=1) = 8/15, \text{ а так как } \frac{c^2}{c^2+s} = 1 - \frac{s}{c^2+s} < 1, \text{ то}$$

$$J_{2\max} < \frac{1}{2} \sqrt{\int \frac{ds}{(1+s)^6}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{5}} < \frac{1}{4},$$

так что  $J_1 > J_2$ , и утверждение доказано.

Рассмотрим теперь случай  $m=2$ ,  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ :

$$[A(\Phi_{aa} - \Phi_{ab}) - 3 + \omega^2] \varepsilon_1 + A\Phi_{ac} \varepsilon_3 = 0, \quad [A\Phi_{cc} - 3\omega_0^2 + \omega^2] \varepsilon_3 = 0. \quad (26)$$

Поэтому возможные частоты в этом случае определяются элементарно:

$$\omega_1^2 = 3 + A(\Phi_{ab} - \Phi_{aa}), \quad (27)$$

$$\omega_2^2 = 3\omega_0^2 - A\Phi_{cc}. \quad (28)$$

Подставляя в (27), (28) явные выражения для  $\omega_0^2$ ,  $A$ ,  $\Phi_{aa}$ ,  $\Phi_{ab}$ ,  $\Phi_{cc}$ , получим

$$\omega_1^2 = 4\pi G\rho c_0 \int_0^\infty \frac{(1+2s) ds}{(1+s)^3 \sqrt{c_0^2+s}}, \quad (29)$$

$$\omega_2^2 = 2\pi G\rho c_0 \left( \int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)(c_0^2+s)^{3/2}} + 3 \int_0^\infty \frac{s ds}{(1+s)(c_0^2+s)^{5/2}} \right). \quad (30)$$

Видно, что  $\omega_1^2 > 0$ ,  $\omega_2^2 > 0$ , что означает устойчивость рассматриваемых мод колебаний.

8. Вывести уравнения, описывающие нелинейные возмущения (типа эллипсоид-эллипсоид) вращающегося сфероида Фримана.

Решение. Текущие координаты частицы выражаем через начальные в виде

$$x = \alpha x_0 + \beta y_0, \quad y = \gamma x_0 + \delta y_0, \quad z = m z_0 + n z_0, \quad (1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $m$ ,  $n$  — функции времени, и система (1) записана в инерциальной системе. При таких возмущениях система, как легко убедиться, остается однородным эллипсоидом, а ось  $z$  — главной осью.

Уравнение проекции измененной поверхности имеет вид

$$\frac{(\delta x - \beta y)^2 + (\alpha y - \gamma x)^2}{a_0^2} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2, \quad \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 4a_0}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \left( \frac{\beta^2 + \delta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}{a_0^2} \right),$$

где  $a_0$ ,  $c_0$  — невозмущенные полуоси. Величину третьей полуоси определим из условия максимума при  $x=y=0$ :

$$c = \max(mz_0 + nz_0), \quad (3)$$

при дополнительном условии

$$z_0^2 + (\dot{z}_0/\omega_0)^2 = c_0^2. \quad (4)$$

Это дает

$$c = c_0 \sqrt{m^2 + n^2 \omega_0^2}. \quad (5)$$

Вычисляем кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2 + z^2) dM = \frac{M}{10} [(\alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2) a_0^2 + (m^2 + n^2 \omega_0^2) c_0^2]. \quad (6)$$

Потенциальная энергия однородного эллипсоида есть

$$W = -\frac{3}{10} GM^2 \int_0^\infty \frac{ds}{V(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}. \quad (7)$$

После этого, варьируя интеграл действия, получим «уравнения движения», вначале в переменных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $m$ ,  $n$ . Но число неизвестных функций можно уменьшить, если учесть законы сохранения:

$$j_1 = m\dot{n} - \dot{m}n = \text{const}, \quad j_2 = a_0^2 (\dot{\alpha}\gamma - \alpha\dot{\gamma} + \beta\dot{\delta} - \beta\dot{\delta}) = \text{const},$$

$$j_3 = \alpha\dot{\beta} - \dot{\alpha}\beta - \delta\dot{\gamma} + \dot{\delta}\gamma = \text{const}.$$

Смысл этих величин следующий (с точностью до постоянных множителей):  $j_1$  — фазовая плотность в проекции на плоскость  $(z, \dot{z})$ ,  $j_2$  —

$z$ -компонента полного углового момента системы,  $j_s$  — плотность вихря в проекции на  $(xy)$ . Сохранение последнего (теорема Томсона) связано с гидродинамическим характером движения в плоскости вращения.

Уравнения движения очень просто формулируются в терминах следующих геометрических параметров:

$$\tau_1 = a - b, \quad \tau_2 = a + b, \quad \tau_3 = c\sqrt{2}.$$

Оказывается, что

$$\ddot{\tau}_i = -\frac{\partial\psi}{\partial\tau_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (8)$$

где эффективный потенциал

$$\psi = -3GM \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left[s + \left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right)^2\right] \left[s + \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}\right)^2\right] \left[s + \frac{\tau_3^2}{2}\right]}} + \frac{8a_0^4\Omega^2}{2\tau_2^2} + \frac{2c_0^4\omega_0^2}{\tau_3^2}, \quad (9)$$

Уравнения (8) были выведены В. А. Антоновым.

Мы уже знаем, что рассматриваемая система неустойчива. Убедимся в этом еще раз, воспользовавшись новой формулировкой задачи, содержащейся в уравнениях (8), (9).

Стационарное состояние определяется уравнениями

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau_1} = \frac{\partial\psi}{\partial\tau_2} = \frac{\partial\psi}{\partial\tau_3} = 0, \quad (10)$$

откуда следует

$$\tau_1^{(0)} = 0, \quad \tau_2^{(0)} = 2, \quad \tau_3^{(0)} = c_0\sqrt{2}. \quad (11)$$

Положим

$$\tau_1 = 2\varepsilon_1, \quad \tau_2 = 2(1 + \varepsilon_2), \quad \tau_3 = c_0\sqrt{2}(1 + \varepsilon_3) \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ll 1) \quad (12)$$

и рассмотрим сначала возмущения с  $\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  (именно они неустойчивы). Для эффективного потенциала получим

$$\psi \approx \text{const} + 3GM \cdot \varepsilon_1^2 \int_0^\infty \frac{(s-1) ds}{\sqrt{s + c_0^2(s+1)^3}}, \quad (13)$$

так что устойчивость или неустойчивость сфероиды с данным  $c_0$  зависит от знака интеграла

$$I(c_0) \equiv \int_0^\infty \frac{(s-1) ds}{\sqrt{s + c_0^2(s+1)^3}}, \quad (14)$$

Поскольку как легко показать,  $I(c_0) < 0$  при всех конечных  $c_0$ , то имеет место (экспоненциальная) неустойчивость. Обращение этого интеграла в нуль для  $c_0 = \infty$  (в цилиндрическом пределе) соответствует известному нам факту *степенной* неустойчивости цилиндра (глава II).

Для возмущений с  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0, \varepsilon_3 \neq 0$  можно найти

$$\psi \approx \text{const} + \alpha\varepsilon_2^2 - \beta\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma\varepsilon_3^2, \quad (15)$$

где

$$\alpha = 6 + 3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+1)(s+c_0^2)^{1/2}} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} \right];$$

$$\gamma = 3c_0^2\omega_0^2 + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+1)(s+c_0^2)^{1/2}} \left[ c_0^2 - \frac{3}{(s+c_0^2)} \right];$$

$$\beta = 6c_0^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+1)^2 (s+c_0^2)^{1/2}}.$$

Например, для сферы Фримана отсюда получим

$$\psi \simeq \text{const} + \frac{16}{5} \varepsilon_2^2 + \frac{11}{5} \varepsilon_3^2 - \frac{12}{5} \varepsilon_2 \varepsilon_3, \quad (16)$$

и уравнения движения (8) приводят к колебаниям с частотами  $\omega_1^2 = 1$ ,  $\omega_2^2 = 14/5$ . Это означает, что эффективный потенциал вблизи от состояния равновесия  $c_0 = 1$  имеет «седлообразный» вид.

## РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В связи с очень сильной сплюснутостью спиральных галактик их, как правило, для простоты теоретического анализа представляют в виде бесконечно тонких дисков [34, 355]. Подобное представление оказывается полезным и для описания объектов совсем другой природы, обладающих аналогичной геометрией: колец Сатурна, протопланетного облака Солнечной системы и др. (см. § 4 VIII главы)<sup>1</sup>.

В § 1 этой главы излагаются основы теории стационарных состояний плоских гравитирующих систем, а § 2—4 посвящены исследованию их малых колебаний и устойчивости.

Простейшим примером дисковой системы является диск с частицами, обращающимися по круговым траекториям («холодный» диск). Равновесные состояния (раздел 1.1), а также устойчивость (§ 2) таких систем исследованы с наибольшей полнотой.

Впервые неустойчивость холодного диска относительно возмущений, лежащих в его плоскости, была продемонстрирована Местелем [292] и Хантером [226]. Качественная картина развития этой неустойчивости, роль различных стабилизирующих факторов (дисперсии скоростей звезд, вращения, конечной толщины системы), прекрасно изложены Тоомре [333]. Он впервые дал и количественный анализ коротковолновой неустойчивости холодных вращающихся дисков, получив, в частности, соответствующее локальное дисперсионное уравнение ((14), раздел 2.2).

В работе Хантера [229] развит метод, аналогичный методу ВКБ, позволяющий в любом порядке теории возмущений вычислить собственные частоты и собственные функции *коротковолновых* колебаний. В частности, оказалось, что последние имеют (для неустойчивых решений) вид «лидирующих» спиралей (см. раздел 2.2, рис. 37).

Аналитическое решение для *крупномасштабных* мод получено только для твердотельно-вращающегося диска [226].

В случае *нетвердотельно-вращающихся* дисков анализ крупномасштабных колебаний проводился преимущественно численными методами.

Весьма детальное исследование спектров малых колебаний холодных вращающихся дисков дано Хантером [228], который рассмотрел как колебания, лежащие в плоскости диска (раздел 2.2), так и перпендикулярные ей колебания мембранного типа, изгибающие плоскость диска (раздел 2.1). Спектры колебаний могут иметь дискретные и непрерывные части.

Мембранные колебания холодных дисков изучали Хантер, Тоомре [230] и Хантер [233] (см. также [237]) с целью объяснения наблюдаемого изгиба плоскости Галактики. Мы излагаем содержание этих работ в

<sup>1</sup> При этом конечность толщины реальных систем можно при желании учесть как малую поправку в решениях, полученных в приближении бесконечно тонкого диска (см., например, ниже, в разделах 1.1 и 4.1).

разделе 2.1 этой главы и в § 4 главы VIII. Мембранные колебания холодных дисков обычно устойчивы (см. впрочем, § 3 главы VI).

Поскольку газ в галактиках, вообще говоря, является ионизованным, представляет интерес изучение влияния магнитного поля на динамику этих систем (см. § 3). Вопрос о влиянии магнитного поля на формирование структуры спиральных рукавов в Галактике подробно обсуждался ранее в работах Пикельнера на основе условий равновесия плазмы в магнитном поле [108]. Позднее Хоскинг [221] предложил модель вращающегося бесконечно тонкого замагниченного диска для исследования влияния магнитного поля на образование спиральной структуры в галактиках. Им же (а позднее в [27]) получен критерий стабилизации коротковолновой гравитационной неустойчивости магнитным полем, который легко получается уже из качественных соображений (см. § 3). В § 3 показано [95, 97], что в модели Хоскинга [221] частоты малых колебаний, помимо дискретного спектра, образуют также непрерывный спектр. В этом параграфе рассматриваются [95, 97] не только коротковолновые, но также и длинноволновые возмущения диска, причем как в самосогласованном варианте (когда магнитное поле создается токами, текущими в самом диске), так и в варианте с внешним магнитным полем. Показано, что в случае достаточно сильного внешнего поля спектр колебаний состоит из дискретного набора действительных частот. Если критерий локальной устойчивости выполняется лишь в части диска, то модель обладает непрерывным спектром частот (и, в частности, имеется область неустойчивых частот). В самосогласованном варианте всегда реализуется как раз второй случай, так что все модели с собственным магнитным полем оказываются неустойчивыми [27, 95, 97]. Следует, правда, отметить частный характер исследованных пока моделей гравитирующих дисков с магнитным полем.

Влияние хаотических движений звезд на устойчивость диска рассматривается в § 4. Впервые эта проблема исследовалась Тоомре [333]. Для вывода критерия устойчивости Тоомре решал систему из не зависящего от времени линеаризованного бесстолкновительного кинетического уравнения и уравнения Пуассона (в локальном приближении). Оказалось, что радиальные локализованные неустойчивости полностью подавляются, если дисперсия радиальных скоростей частиц в любой точке превышает некоторое критическое значение, определяемое равновесными параметрами диска (в той же точке).

Пользуясь своим критерием устойчивости, Тоомре рассчитал [333] минимально необходимые для устойчивости локальные значения дисперсии скоростей в различных моделях галактик. Оказалось, в частности, что имеющейся в солнечной окрестности Галактики дисперсии скоростей достаточно для локальной устойчивости этой области (подробнее см. § 3 главы VIII).

Линь и Шу обобщили [270, 271] дисперсионное уравнение для холодного диска (Тоомре) на случай коротковолновых колебаний диска звезд, которые обладают помимо регулярной и хаотическими скоростями (малыми по сравнению с регулярной; раздел 4.1). Одновременно они учли возможность присутствия в системе газовой компоненты. Свое дисперсионное уравнение Линь и Шу положили в основу развитой ими теории спиральной структуры галактик (мы подробно рассматриваем относящиеся сюда вопросы в § 3 VIII главы).

Позднее Марк [290] заметил, что некоторые приближения, принятые Линем и Шу при выводе дисперсионного уравнения, в действительности могут быть оправданы только для областей диска, достаточно удаленных от *резонансных* окружностей, на которых частота пересечений частицами горбов (или впадин) спиральной волны возмущения равна целому кратному эпициклической частоты. Выведенное Марком [290] (также для коротковолновых возмущений) «усовершенствованное» диспер-



сионное уравнение справедливо всюду, за исключением сравнительно узкой области вблизи от так называемого круга коротации, где частицы движутся с той же угловой скоростью, что и волна. Основным эффектом, следующий из теории Марка, заключается в затухании коротковолнового спирального возмущения, распространяющегося внутрь дисковой системы (типа нашей Галактики) от круга коротации при приближении к резонансной окружности. Физической причиной затухания является взаимодействие волны с резонансными частицами, т. е. не что иное, как известное из физики плазмы «затухание Ландау» [65].

В другом разделе § 4 (4.3) мы рассматриваем малые возмущения «горячих» твердотельно-вращающихся дисков, для которых оказалось возможным получить (в работах авторов [93, 111, 113] и Калнайса [252]) точные характеристические уравнения для собственных частот и явные выражения для собственных функций. Найденные решения в отличие от рассматривавшихся в предыдущем разделе описывают не только коротковолновые (мелкомасштабные), но также и крупномасштабные возмущения, и не только для «почти холодных» (с орбитами, близкими к круговым), но и для «горячих» систем, в которых радиальные и круговые скорости частиц одного порядка.

Исследование полученных характеристических уравнений позволяет, в частности, прийти к выводу, что наиболее «опасными» в смысле потери устойчивости для рассматриваемых дисковых систем являются крупномасштабные неаксиально-симметричные моды, и в первую очередь «бароподобная» мода, при которой круговой диск становится эллиптическим. Неустойчивость на этой моде развивается бурно, даже если джинсовская неустойчивость при радиальных возмущениях подавлена. (Последнее достигается, как отмечалось выше, уже при величине дисперсии радиальных скоростей частиц, которая дается критерием Тоомре<sup>1</sup>.) Устойчивыми относительно образования «бара» оказываются только «совсем горячие» диски (точные условия см. в разделе 4.3).

Изложенные теоретические выводы находят подтверждение в численных экспериментах, выполненных Холлом в работе [219]. С другой стороны, численные эксперименты Хола в работе [220], Миллера, Прендергаста и Квёрка [294, 308] и, наконец, Острайкера и Пиблса [301] показывают, что бароподобная мода играет доминирующую роль и в случае дифференциально-вращающихся дисков. Ввиду очевидной важности бароподобных возмущений они рассмотрены в разделе 4.3 более подробно (следуя в основном работе [254]).

Резюмировать все сказанное выше об устойчивости дисковых систем можно следующим образом. Холодный вращающийся диск является сильно неустойчивым относительно самых разнообразных типов возмущений. Неустойчивости радиальных возмущений, имеющие *джинсовскую* природу (см. начало раздела 2.2), подавляются сравнительно небольшой дисперсией скоростей частиц в соответствии с критерием Тоомре. Однако при этом еще остаются неустойчивости крупномасштабных неаксиально-симметричных мод, связанные с энергетической выгодностью *перестройки круговой формы* быстро вращающейся системы в эллиптическую. Для стабилизации этой неустойчивости радиальные скорости частиц должны быть порядка азимутальных.

Неустойчивости могут быть подавлены полностью, если в системе содержится большая центральная масса, как это имеет место в случае колец Сатурна (см. § 4 главы VIII) или достаточно массивные нелоские подсистемы («гало»). Для плоских галактик концентрация плотности к центру (эквивалентная некоторой центральной массе), как правило, недостаточна для полной стабилизации. Для таких систем в слу-

<sup>1</sup> Точнее, близкой к значению, даваемому этим критерием, который, строго говоря, справедлив только для коротковолновых возмущений.

чае, если радиальные скорости частиц много меньше круговых (как, например, для звезд в Галактике), вывод о существовании «гало» с массой порядка массы плоской подсистемы является, по-видимому, обязательным следствием предположения об относительной стабильности системы [301]. В противном случае за время существования Галактики развилась бы заметная эллиптичность ее формы и произошел бы существенный «разогрев».

Такой вывод, непосредственно вытекающий из анализа устойчивости дисковых систем, является одним из наиболее серьезных аргументов в пользу гипотезы о существовании значительной «скрытой массы» (которая частично может быть сосредоточена в галактических «гало», см., например, [301] и имеющуюся там библиографию по этому вопросу).

В разделе 4.2 приведен вывод интегрального уравнения [249, 324], описывающего малые возмущения произвольных бесстолкновительных дисков, кратко обсуждаются его свойства и рассматриваются некоторые следующие из него общие теоремы.

## § 1. РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПЛОСКИХ ГАЗОВЫХ И БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

### 1.1. СИСТЕМЫ С КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ ЧАСТИЦ

Простейшей моделью плоской гравитирующей системы является бесконечно тонкий диск с частицами, обращающимися по круговым траекториям. Равновесие осуществляется в рассматриваемом случае в результате баланса гравитационного притяжения частиц и центробежной силы. Условие равновесия, следовательно, выражается формулой

$$\Omega_0^2(r) r = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $\Phi_0$  — невозмущенный гравитационный потенциал,  $\Omega_0(r)$  — локальная угловая скорость вращения, связанная с линейной скоростью посредством  $v_0(r) = \Omega_0(r) r$ . Поверхностная плотность  $\sigma_0 = \sigma_0(r)$  определяет потенциал  $\Phi_0(r)$  согласно известному выражению для потенциала простого слоя

$$\Phi_0(r) = -G \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0(r') r' dr' d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi'}}, \quad (2)$$

$R$  — радиус диска.

Если считать функцию  $\sigma_0(r)$  известной, то соответствующая угловая скорость находится из (1), (2) элементарным вычислением. Легко получить, в частности, следующие примеры функций  $\sigma_0(r)$  и  $\Omega_0(r)$ . Если  $\sigma_0 = \text{const}$ , то  $\Omega_0^2 = -\frac{4G}{r} \sigma_0 E'(r/R)$ , где  $E(x)$  — полный эллиптический интеграл. Из факта наличия (логарифмической) особенности у функции  $E'(r/R)$  при  $r \rightarrow R$  необходимо, чтобы невозмущенное распределение плотности  $\sigma_0(r)$  достаточно плавно обращалось в нуль при  $r \rightarrow R$ . Для  $\sigma_0(r) = \sigma_0(0) \sqrt{1 - r^2/R^2}$  получается твердотельный закон вращения с угловой скоростью  $\Omega_0^2 = \frac{\pi^2 G \sigma_0(0)}{2R} = \frac{3\pi G M}{4R^3}$ , где  $M$  — масса диска; для плотности  $\sigma_0(r) = \sigma_0(0) (1 - r^2/R^2)^{3/2}$  квадрат частоты обращения:  $\Omega_0^2(r) = \frac{3\pi^2}{4R} G \sigma_0(0) \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2}\right)$ . Профиль скорости  $v_0(r) = r \Omega_0(r)$ , описываемый этой формулой, соответствует твердотельному характеру вращения при малых  $r$  и достигает максимума при  $r = R\sqrt{2/3} \approx 0,81R$ .

Перепишем (1), (2) в виде

$$G \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0(r') r' dr' d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi'}} = -\Phi_0(0) - f_1(r), \quad (3)$$

где

$$f_1(r) = \Phi_0(r) - \Phi_0(0) = \int_0^r \Omega_0^2(t) t dt. \quad (4)$$

Если рассматривать  $\Omega_0(r)$  как известную функцию, то (3) представляет собой интегральное уравнение относительно невозмущенной плотности  $\sigma_0(r)$ . В [355] уравнение (3) было решено для случая, когда  $\sigma_0(r)$  представимо в виде степенного ряда; коэффициенты этого ряда подбирались так, чтобы получить наилучшее согласие функции  $\Omega_0(r)$  с наблюдаемыми кривыми вращения галактик.

Однако интегральное уравнение (3) может быть решено в общем виде [59, 61] для произвольной угловой скорости  $\Omega_0(r)$ . Аналогичная задача возникает в электростатике, когда требуется по заданному потенциалу определить распределение поверхностного заряда (т. е., по существу, решить интегральное уравнение (3) с противоположным знаком левой части). Следуя [71], воспроизведем кратко решение этого уравнения.

Проинтегрировав в (3) по  $\varphi'$ , получим

$$4G \int_0^R \frac{dr'}{r+r'} K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right) r' \sigma_0(r') = -\Phi_0(r). \quad (5)$$

Запишем это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} 4G \int_0^r dr' \frac{r' \sigma_0(r')}{r} \frac{1}{1+\frac{r'}{r}} K\left(\frac{2\sqrt{\frac{r'}{r}}}{1+\frac{r'}{r}}\right) + \\ + 4G \int_r^R dr' \frac{r' \sigma_0(r')}{r'} \frac{1}{1+\frac{r}{r'}} K\left(\frac{2\sqrt{\frac{r}{r'}}}{1+r/r'}\right) = -\Phi_0(r). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь можно воспользоваться преобразованием Ландена [133]

$$\frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = K(k), \quad (7)$$

которое справедливо при  $k < 1$ . В результате получим

$$4G \int_0^r dr' \frac{r' \sigma_0(r')}{r} K\left(\frac{r'}{r}\right) + 4G \int_r^R dr' \frac{r' \sigma_0(r')}{r'} K\left(\frac{r}{r'}\right) = -\Phi_0(r). \quad (8)$$

Принимая во внимание формулы

$$\frac{1}{r} K\left(\frac{r'}{r}\right) = \int_0^{r'} \frac{ds}{\sqrt{(r'^2 - s^2)(r^2 - s^2)}}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{r'} K\left(\frac{r}{r'}\right) = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{(r'^2 - s^2)(r^2 - s^2)}}, \quad (10)$$

следующие прямо из определения функции  $K(x)$ , представим (8) в виде

$$4 G \int_0^r r' \sigma_0(r') dr' \int_0^{r'} \frac{ds}{\sqrt{(r'^2 - s^2)(r^2 - s^2)}} + \\ + 4 G \int_r^R r' \sigma_0(r') dr' \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{(r'^2 - s^2)(r^2 - s^2)}} = -\Phi_0(r). \quad (11)$$

Выражение в левой части (11) можно записать в виде двойного интеграла, взятого по площади трапеции, ограниченной прямыми:  $s=0$ ,  $s=r$ ,  $s=r'$ ,  $r'=R$ . Меняя в этом двойном интеграле порядок интегрирования (в сравнении с (11)), приходим к следующей удобной форме уравнения:

$$4 G \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \int_s^R \frac{r' \sigma_0(r')}{\sqrt{r'^2 - s^2}} dr' = -\Phi_0(r). \quad (12)$$

Если положить

$$\int_s^R \frac{r' \sigma_0(r')}{\sqrt{r'^2 - s^2}} dr' \equiv \psi(s) \quad (0 \leq s \leq R), \quad (13)$$

то уравнение (12) перейдет в интегральное уравнение Шлёмилха для функции  $\psi(s)$ :

$$4 G \int_0^r \frac{\psi(s) ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} = -\Phi_0(r). \quad (14)$$

Решение этого уравнения известно [132]:

$$\psi(s) = -\frac{d}{ds} \int_0^s \frac{\Phi_0(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}}. \quad (15)$$

Для заданной  $\psi(s)$  (13) также представляет собой интегральное уравнение с известным решением

$$r' \sigma_0(r') = -4 G \frac{d}{dr'} \int_{r'}^R \frac{\psi(s) s}{\sqrt{s^2 - r'^2}} ds. \quad (16)$$

Таким образом, окончательно решение исходного уравнения (3) можно записать в виде

$$\sigma_0(r) = -\frac{1}{\pi^2 G r} \frac{d}{dr} \int_r^R \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - r^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} - \frac{\Phi_0(0)}{\pi^2 G \sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (17)$$

Для каждой конкретной функции  $f_1(r)$  константа  $\Phi_0(0)$  определяется после вычисления интеграла в (17) из условия отсутствия в  $\sigma_0(r)$  особенности при  $R=r$ . Проиллюстрируем это на примере твердотельного вращения, когда

$$f_1(r) = \frac{\Omega_0^2 r^2}{2}. \quad (18)$$

Вычисление повторного интеграла в (17) приводит здесь к следующему

выражению для поверхностной плотности:

$$\sigma_0(r) = \frac{1}{\pi^2 G} \left[ \Omega_0^2 \sqrt{R^2 - r^2} - \frac{\Phi_0(0) + \Omega_0^2 r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right]. \quad (19)$$

Отсюда ясно, что  $\Phi_0(0) = -\Omega_0^2 R^2$ , и мы снова получаем

$$\sigma_0(r) = \frac{2\Omega_0^2}{\pi^2 G} \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (20)$$

В оригинальных работах Кузмина решение исходного интегрального уравнения дано в следующей эквивалентной форме:

$$\sigma_0(r') = -\frac{4}{\pi^2 G r'^2} \int_0^\infty \frac{dr^3 \Omega_0^2(r)}{dr} \varphi\left(\frac{r}{r'}\right) dr, \quad (21)$$

где

$$\varphi(x) \equiv \begin{cases} xK(x), & x \leq 1, \\ x^{-2}K(x^{-1}), & x > 1. \end{cases} \quad (22)$$

В теоретических исследованиях, прежде всего устойчивости холодного диска [226, 228, 333], точные решения в виде (17), (21) оказываются малоудобными и часто используются представления решений в виде рядов по разным полным системам собственных функций уравнения Пуассона для плоского слоя. Известно несколько таких полных систем [251], применение которых зависит от области (ограниченной или бесконечной) изменения радиуса диска. Эти системы функций соответствуют, как мы увидим, мультипликативным решениям уравнения Лапласа, получающимся при разделении переменных в той или иной системе координат. Для ограниченных дисков наиболее удобным представляется использование системы полиномов Лежандра [226]. В работах [356, 358] для этого же случая применялся метод разложения по функциям Бесселя. Последний удобнее, по-видимому, для неограниченных по радиусу дисков ( $0 < r < \infty$ ). Для этого случая он и был впервые предложен Тоомре [332]. Отметим также еще одну полную систему собственных функций, которая рассматривалась в [251], — логарифмические спирали.

В методе разложения по полиномам Лежандра, примененном Хантером [226], вводятся<sup>1</sup> сплюснутые сфероидальные координаты  $(\zeta, \mu, \varphi)$  (рис. 28). Уравнение Лапласа для аксиально-симметричного потенциала  $\Phi_0 = \Phi_0(\zeta, \mu)$  в сфероидальных координатах записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 + 1) \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta} \right\} = 0. \quad (23)$$

Элементарные мультипликативные решения этого уравнения, как легко показать, следующие:

$$\Phi_0^{(1)} = p_n(\zeta) P_n(\mu), \quad \Phi_0^{(2)} = q_n(\zeta) P_n(\mu), \quad (24)$$

где  $P_n(\mu)$  — обычные полиномы Лежандра, а  $q_n(\zeta)$  — функции Лежандра второго рода от мнимого аргумента, определяющиеся равенством

$$q_n(\zeta) = p_n(\zeta) \int_{\zeta}^{\infty} \frac{d\zeta}{[p_n(\zeta)]^2 (\zeta^2 + 1)}. \quad (26)$$

Общее аксиально-симметричное решение уравнения Лапласа вне дис-

<sup>1</sup> Конечно, в электростатике эти разложения использовались задолго до Хантера.

ка, регулярное на бесконечности, записывается, таким образом, в виде

$$\Phi_0(\zeta, \mu) = \sum_n A_n q_n(\zeta) P_n(\mu), \quad (27)$$

где  $A_n$  — константы разложения. На поверхности диска  $\zeta=0$  Хантер определяет координату  $\eta = \sqrt{1-r^2/R^2} = |\mu|$ ;  $0 \leq \eta \leq 1$ . Если представить поверхностную плотность  $\sigma_0$  и потенциал  $\Phi_0$  на поверхности диска в виде разложений по полиномам Лежандра

$$2\pi G\sigma_0 = \frac{1}{R\eta} \sum_n \alpha_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (28)$$

$$\Phi_0|_{\zeta=0} = \sum_n A_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(\eta), \quad (29)$$

то из граничных условий

$$\Phi_0|_{z=+0}^{z=-0} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{z=+0} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{z=-0} = 4\pi G\sigma_0 \quad (31)$$

можно получить связь между коэффициентами этих разложений:  $A_{2n} = \alpha_{2n}/q_{2n}(0)$ . Если считать плотность заданной в виде (28), то для потенциала в плоскости диска получим разложение

$$\Phi_0(\zeta=0) = \sum_n \alpha_{2n} \frac{q_{2n}(0)}{q'_{2n}(0)} P_{2n}(\eta) = -\frac{\pi}{2} \sum_n \alpha_{2n} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 P_{2n}(\eta). \quad (32)$$

Теперь линейная скорость  $v_0(r)$  определяется из условия равновесия.

Полученные ряды (28) и (32) представляют собой, очевидно, разложения по «гравитационным мультиполям», например члену  $n=2$  в (32) соответствует поле квадруполья.

В [226] приводятся рассчитанные таким способом конкретные модели равновесных дисков. Из связанных систем функций  $\sigma_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $\Omega_0^2(r)$  отметим следующую [226]:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{3M}{2\pi R^2} [\eta + \alpha(5\eta^3 - 3\eta)] = \frac{3M}{2\pi R^2} (1 - r^2/R^2)^{1/2} \left( 1 + 2\alpha - 5\alpha \frac{r^2}{R^2} \right); \\ \Phi_0 &= -\frac{3\pi}{8} \frac{GM}{R} \left[ 2 - \frac{3}{2}\alpha - \left( 1 + \frac{27}{4}\alpha \right) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{45}{16}\alpha \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]; \\ \Omega_0^2 &= \frac{3\pi GM}{4R^3} \left[ 1 + \frac{9}{2}\alpha - \frac{45}{8}\alpha \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (0 < \alpha < 1). \end{aligned} \quad (33)$$

В более поздней работе Хантер [227] тем же методом получил интересную последовательность моделей дисков конечного радиуса ( $n$  — любое положительное целое число):

$$v_0^2(r) = r^2 \Omega_0^2(r) = \frac{2n+1}{4n} \left( \frac{\pi GM}{R} \right) (1 - \xi^{2n}), \quad (34)$$

$$\sigma_{0,n}(r) = \frac{M}{2\pi R^2} \sum_{k=1}^n b_{k,n} \xi^{2k-1}, \quad \xi^2 \equiv 1 - \frac{r^2}{R^2},$$

$$b_{1,n} = \frac{2n+1}{2n-1}, \quad b_{k,n} = \frac{4(k-1)(n-k+1)}{(2k-1)(2n-2k+1)} b_{k-1,n}.$$

Случаю  $n=1$  в (34) соответствует модель твердотельно-вращающегося диска. При возрастании номера модели  $n$  вращение становится все

более неоднородным, а в пределе  $n \rightarrow \infty$  получается сингулярная модель [292] диска с постоянной линейной скоростью

$$v_0^2 = \frac{\pi GM}{2R} = \text{const}, \quad \sigma_0(r) = \frac{M \arcsin \xi}{2\pi r R}. \quad (35)$$

В работе Хантера и Тоомре [230] на основе серии (34) построено большое количество других моделей, представляющих собой определенные суперпозиции решений (34), и сделана попытка подобрать не слишком сложную модель, удовлетворительно описывающую распределение масс и кривую вращения Галактики.

Так как мы будем ниже часто пользоваться для иллюстраций моделями Хантера и Тоомре, опишем кратко способ получения этих моделей (безотносительно к вопросу о степени сходства или различия с Галактикой [230]).

Исходные модели (34) обозначаются просто номером  $n$ . Вторая серия моделей, обозначаемая символом  $n/q$ , строится следующим образом (берем для примера  $n=16$ , как в [230]):

$$\sigma_{0(16/q)} = [\sigma_{0(16)} - a\sigma_{0(1)}]/(1-a), \quad a = \left\{ 1 + \frac{100}{q} \left[ \frac{b_{1,1}}{b_{1,16}} - 1 \right] \right\}^{-1},$$

где параметр  $q$  может принимать любые значения между 0 и 100. Модели  $16/q$  напоминают модель 16, но при увеличении  $q$  от 0 до 100 из  $\sigma_0(\xi)$  вычитается все большая доля члена, пропорционального  $\xi$  ( $(b_{1,16} - ab_{1,1})\xi$ ), и, наконец, при  $q=100$  ( $a=b_{1,16}/b_{1,1}$ ) этот член вычитается полностью. Предельная модель  $16/100$  обозначается в [230] символом  $16X$ .

Можно аналогично определить модели  $16/q$ , отличающиеся от модели  $16X$  главным образом постепенным вычитанием члена, пропорционального  $\xi^3$ , с предельной моделью (когда этот член полностью устранен), обозначаемой  $16XX$ . Эта процедура может быть продолжена неограниченно, ее смысл состоит в получении моделей (в ряду  $n$ ,  $nX$ ,  $nXX$ ,  $nXXX$  и т. д.) со все более плавным стремлением поверхностной плотности к нулю на краю диска, или, как мы будем иногда говорить, моделей со все более «тонким краем». (При увеличении номера  $n$  мы переходим к системам с растущей степенью концентрации массы к центру.)

К функциям Бесселя естественно приводит разделение переменных в цилиндрических координатах. Если поверхностная плотность  $\sigma_0(r)$  представлена в виде

$$\sigma_0(r) = \int_0^{\infty} J_0(kr) k S(k) dk, \quad (36)$$

где  $S(k)$  — некоторая весовая функция, то потенциал выражается с помощью аналогичной формулы через ту же функцию  $S(k)$ :

$$\Phi_0(r) = -2\pi G \int_0^{\infty} J_0(kr) S(k) dk. \quad (37)$$

Обратное (36) преобразование дает  $S(k)$  через  $\sigma_0(k)$ :

$$S(k) = \int_0^{\infty} J_0(ur) u \sigma_0(u) du. \quad (38)$$

Метод разложения по функциям Бесселя хорошо иллюстрируется на практически важном примере «экспоненциальных дисков», т. е. дисков с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 e^{-ar}$  [205]. В этом случае метод Тоомре [332] позволяет получить простое аналитическое выражение для равновесной скорости вращения. Подставляя (38) в (37) и вычисляя

(для случая  $\sigma_0(r) = \sigma_0 e^{-\alpha r}$ ) получающиеся интегралы, можно найти  $\Phi_0(r)$  и далее скорость вращения  $v_0(r)$  в виде

$$v_0^2(r) = \pi G \sigma_0 \alpha r^2 \left( I_0 \left( \frac{\alpha r}{2} \right) K_0 \left( \frac{\alpha r}{2} \right) - I_1 \left( \frac{\alpha r}{2} \right) K_1 \left( \frac{\alpha r}{2} \right) \right), \quad (39)$$

где  $I, K$  — известные цилиндрические функции. Закон вращения (39), как оказывается [205], удовлетворительно совпадает с кривыми вращения некоторых галактик.

Проблема восстановления распределения массы по наблюдаемой кривой вращения постоянно возникает в галактической астрономии, и в связи с этим были созданы некоторые довольно тонкие методы расчета. В частности, в них учитывается конечная толщина дисков спиральных галактик и их структура в вертикальном направлении. Простейшей и наиболее широко используемой моделью такого рода является модель неоднородного сфероида (поверхности равной плотности — подобные сфероиды), впервые предложенная Кузминым [59, 61].

В [59, 61] показано, что в этом случае скорость вращения в экваториальной плоскости выражается формулой

$$v_0^2(r) = G \int_0^r \mu(a) \frac{da}{\sqrt{r^2 - e^2 a^2}}, \quad (40)$$

где так называемая «функция массы»  $\mu(a) = 4\pi a^2 \varepsilon \rho(a)$ ,  $\rho(a)$  — объемная плотность, зависящая от величины экваториальной полуоси сфероида равной плотности  $a = (r^2 + \varepsilon^{-2} z^2)^{1/2}$ ,  $\varepsilon$  — отношение полярной и экваториальной полуосей эллиптического меридионального сечения,  $e$  — его эксцентриситет. Уравнение (40) позднее [59, 61] было получено в работе [173]. В [173] оно решается с помощью представления функции  $\rho(a)$  в виде степенного полинома, тогда и  $v_0^2(r)$  получается также в виде полинома.

В случаях малой толщины диска может быть получено [59] аналитическое выражение для поправок к формулам модели бесконечно тонкого диска. Уравнение (40) в этом случае ( $e^2 \ll 1$ ) сводится к следующему:

$$v_0^2(r) = G \left[ \int_0^r \mu(a) \frac{da}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \varepsilon \mu(r) \right]. \quad (41)$$

Решая его по теории возмущений, можно получить [59]

$$\mu(a) = \mu_0(a) + \frac{2}{\pi} \varepsilon \int_0^a \frac{d\mu_0(r) r}{dr} \frac{r dr}{a \sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (42)$$

где  $\mu_0(a)$  — «функция массы» для бесконечно тонкого диска. В работе [59] разработаны также и другие эффективные методы исследования подобных равновесных моделей.

Более сложные, гетерогенные модели спиральных галактик, состоящие из сферической и плоской подсистем, рассмотрены в работе [94]. В этой работе задавались (в довольно широких пределах) объемная плотность сферической подсистемы и угловая частота обращения плоской подсистемы. При этом существенно использовались наблюдательные данные по нашей и близким к ней спиральным галактикам. Во всех рассмотренных случаях поверхностная плотность экспоненциально убывала за пределами ядра сферической подсистемы, причем зависимость величины экспоненциального показателя от относительного размера ядра сферической подсистемы качественно согласуется с данными наблюдений. Установлена также зависимость (степенного характера)



между полными массой и моментом плоской подсистемы. Оказывается, что степенной показатель  $\nu$  этой зависимости лежит [78] в узких пределах  $1,6 \lesssim \nu \lesssim 1,8$ .

## 1.2. ПЛАЗМЕННЫЕ СИСТЕМЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Методика получения точных моделей бесконечно тонких дисков с полоидальным магнитным полем, аналогичная [226], развита в работе Бисноватого-Когана и Блинникова [27].

Равновесие такого диска описывается уравнением

$$\Omega_0^2 r = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{c \sigma_0} J_{0\varphi} H_{0z}, \quad (1)$$

где  $H_{0z}$ ,  $J_{0\varphi}$  — соответственно вертикальная компонента магнитного поля и плотность азимутального тока на поверхности диска. Векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  связаны уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \delta(z). \quad (2)$$

Вне диска  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ , так что можно ввести скалярный потенциал  $\Phi_H$  магнитного поля

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi_H. \quad (3)$$

Этот потенциал  $\Phi_H$  удовлетворяет при  $z \neq 0$  уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_H = 0. \quad (4)$$

Нормальная компонента поля  $H_z$  непрерывна на диске, а тангенциальная испытывает разрыв величиной  $(4\pi/c) J_\varphi$ ; следовательно, соответствующие граничные условия для потенциала  $\Phi_H$  записываются в виде

$$\partial \Phi_H / \partial z \Big|_{z=+0}^{z=-0} = 0, \quad (5)$$

$$\partial \Phi_H / \partial r \Big|_{z=-0}^{z=+0} = - \frac{4\pi}{c} J_\varphi. \quad (6)$$

Общее разложение  $\Phi_H$  при  $z \neq 0$  аналогично (27) раздела 1.1:

$$\Phi_H = \sum_n B_n q_n(\xi) P_n(\mu), \quad (7)$$

где  $B_n$  — новые константы. Но теперь ввиду условия (5) в разложении (7) остаются только нечетные члены. Второе граничное условие (6) в сфероидальных координатах с учетом симметрии задачи запишется в виде

$$\frac{1}{h_\mu} \frac{\partial \Phi_H}{\partial \mu} \Big|_{\xi=0} = \frac{2\pi}{c} J_{0\varphi}, \quad (8)$$

где параметр Ламэ

$$h_\mu = R \left( \frac{\xi^2 + \mu^2}{1 - \mu^2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Удобно взять для тока  $J_{0\varphi}$  некоторое разложение по производным от полиномов Лежандра

$$\frac{2\pi}{c} J_{0\varphi} = \frac{(1 - \eta^2)^{1/2}}{R\eta} \sum_n \beta_{2n+1} P'_{2n+1}(\eta), \quad (10)$$

где  $\beta_{2n+1}$  — константы разложения. Тогда из (8) получим следующую

связь между  $\beta_{2n+1}$  и  $B_{2n+1}$ :

$$B_{2n+1} = \beta_{2n+1}/q_{2n+1}(0). \quad (11)$$

Магнитное поле  $H_z$  в плоскости диска есть

$$\begin{aligned} H_z|_{z=0} &= -\frac{1}{R\eta} \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{R\eta} \sum_n \beta_{2n+1} \frac{q'_{2n+1}(0)}{q_{2n+1}(0)} P_{2n+1}(\eta) = \\ &= \frac{\pi}{2R\eta} \sum_n \beta_{2n+1} \left[ \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \right]^2 P_{2n+1}(\eta). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (10) и (12) и представляют собой искомую пару связанных разложений  $J_{0\varphi}$  и  $H_{0z}|_{z=0}$ . После этого из уравнения равновесия (1) можно найти и угловую скорость  $\Omega_0$ .

Для иллюстрации приведем пример, являющийся простейшим обобщением модели холодного твердотельно-вращающегося диска на случай отличного от нуля магнитного поля [27]. Для диска с поверхностной плотностью  $\sigma_0 = \frac{3M}{2\pi R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}$  и тока  $J_{0\varphi} = J_0 \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2}$  можно вычислить магнитное поле  $H_z = \frac{\pi^2}{2c} J_0 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$  ( $c$  — скорость света) и угловую скорость

$$\frac{v_0^2}{r^2} = \Omega_0^2 = \frac{3}{4} \frac{\pi GM}{R^3} - \frac{4}{3\pi} H_0^2 \frac{R}{M} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]; \quad H_0 = \frac{\pi}{2c} J_0. \quad (13)$$

Максимально возможное поле равно  $H_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{\sqrt{GM}}{R^2}$ , при этом

$$\Omega^2(r) = \frac{9\pi}{2} \frac{GM}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^2. \quad (14)$$

При  $H > H_0$  было бы  $\Omega^2 < 0$  в центре  $r=0$ . Отметим, что поле  $H_z$  меняет знак внутри диска в точке  $r = \sqrt{2/3}R$ . Это обстоятельство не является случайным: можно показать [27, 95, 97], что при любом регулярном распределении токов поле  $H_z$  обязательно меняет знак при  $r \leq R$ . Этот факт оказывается важным при анализе устойчивости таких систем [22, 95, 97] (см. § 3 этой главы). Проще всего это доказать [95, 97], воспользовавшись вместо (10), (12) несколько иным представлением  $H_{0z}$  и  $J_{0\varphi}$ , которое может быть получено аналогичным способом:

$$J_{0\varphi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n}}{\gamma_{2n}} P'_{2n}(\eta), \quad (15)$$

$$H_{z0} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (16)$$

где

$$\gamma_{2n} \equiv n(2n-1) \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2. \quad (17)$$

В суммах (15), (16) нет членов с  $n=0$ , так как в выражении для тока это соответствовало бы сингулярному члену. Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что  $H_{z0}$  не меняет знака на диске, например всюду  $H_{z0} > 0$ .

Тогда, интегрируя (16), придем к противоречию:

$$0 < \int_0^1 H_{z0} d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} \int_0^1 P_{2n} d\eta = - \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} \int_0^1 \frac{d\eta}{2n(2n+1)} [(1-\eta^2) P'_{2n}]' =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n}}{2n(2n+1)} (1-\eta^2) P'_{2n}(\eta) \Big|_0^1 = 0. \quad (18)$$

Таким образом, компонента  $H_{z0}$  самосогласованного магнитного поля обязана менять знак на диске.

В работе [27] приведены и другие примеры точных моделей замагниченных гравитирующих дисков.

### 1.3. ГАЗОВЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим кратко плоские газовые системы с давлением. Поскольку газовое давление  $P_0$  изотропно, а равновесие в вертикальном направлении (по оси  $z$ ) требует равенства силы давления  $\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz}$  и гравитационной силы  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}$ , то ясно, что в случае бесконечно тонкого диска должно быть  $P_0 = 0$ . Толщина диска  $h$ , очевидно, должна быть порядка джинсовской длины волны, т. е.  $h^2 \sim D^2/G\rho_0$  ( $D$  — скорость звука) или  $h \sim D^2/G\sigma_0$ . В то же время характерный масштаб длины в плоскости диска  $R \sim v_0^2/G\sigma_0$ , откуда следует естественное условие сильной сплюсченности диска ( $h \ll R$ ):  $D \ll v_0$ . Уравнение равновесия диска с учетом силы газового давления  $P_0'$ , рассчитанного на единицы длины в плоскости диска, можно записать в виде

$$r\Omega_0^2 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial P_0'}{\partial r}. \quad (1)$$

Если принять политропное уравнение состояния  $P_0 = k\rho_0^\gamma$ , то соответствующая связь между  $P_0'$  и  $\sigma_0$  такова [233]:

$$P_0' = \text{const } \sigma_0^{3-2/\gamma} \equiv \text{const } \sigma_0^{\gamma^*}. \quad (2)$$

Эту формулу можно получить уже из обычного анализа размерностей, если написать

$$P_0' = ck^\alpha G^\beta \sigma_0^{\gamma^*} \quad (3)$$

( $c$  — безразмерная постоянная) и определить степени  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma^*$ , приравняв размерности величин, стоящих в обеих частях равенства (заметьте, что  $[P_0'] = MT^{-2}$ ,  $[k] = M^{1-\gamma} L^{3\gamma-1} T^{-2}$ ,  $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$ ,  $[\sigma_0] = ML^{-2}$ ). Таким образом легко получить  $\alpha = 1/\gamma$ ,  $\beta = 1 - 1/\gamma$ ,  $\gamma^* = 3 - 2/\gamma$ . Эффективный показатель адиабаты  $\gamma^*$  равен, следовательно,  $\gamma^* = 3 - 2/\gamma$ . Он совпадает с  $\gamma$ , если  $\gamma = 1$  или  $2$ , а при  $1 < \gamma < 2$   $\gamma^* \geq \gamma$ . Обычному случаю  $\gamma = 5/3$  соответствует  $\gamma^* = 9/15$ . Константу  $c$  можно также вычислить [233], она оказывается равной

$$c = \frac{\pi^{3/2-1/\gamma} \Gamma(2-1/\gamma)}{2^{2-1/\gamma} \Gamma(5/2-1/\gamma)}. \quad (4)$$

В исследованиях устойчивости плоских газовых систем обычно принималась [209, 210] модель тонкого слоя, однородного в плоскости ( $x, y$ ), так что наличие давления никак не влияло на равновесную структуру слоя. Учет давления в неоднородных газовых дисках не связан с какими-либо принципиальными трудностями.

#### 1.4. «ГОРЯЧИЕ» БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Перейдем, наконец, к рассмотрению стационарных состояний плоских бесстолкновительных систем. Здесь обычно имеются в виду спиральные галактики. Известно, что галактики имеют кольцевую и спиральную структуру только в случае достаточно сильной их сплюснутости. Но при этом гравитационный потенциал реального эллипсоида галактики можно аппроксимировать аналитически более простым потенциалом бесконечно тонкого диска. В теоретических исследованиях спиральных галактик чаще всего используются рассмотренные выше равновесные модели, поскольку вклад дисперсии случайных скоростей в уравнение равновесия обычно мал. Однако при «включении» остаточных скоростей частиц сразу проявляются отличия бесстолкновительных систем от газовых (столкновительных). Одно из них заключается в том, что первые могут в принципе иметь анизотропное распределение по скоростям. Поэтому, в частности, в этом случае можно вполне строго рассматривать модели бесконечно тонких, но тем не менее «горячих» дисков, т. е. имеющих конечную дисперсию случайных скоростей в своей плоскости.

Функция распределения холодного диска  $f_0 \sim \delta(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega_0 r)$ , где  $r \Omega_0^2 = d\Phi_0/dr$ ;  $v_r$  и  $v_\varphi$  — соответственно радиальная и азимутальная скорости частиц. Функцию распределения любой квазистационарной дисковой системы с орбитами звезд, близкими к круговым, можно представить аналогично п. 3 § 1 главы I в виде формального ряда по  $\delta$ -функциям от аргументов  $v_r$  и  $(v_\varphi - \Omega_0 r)$  и их производным:

$$f_0 = a_1 \delta(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + b_1 \delta'(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + b_2 \delta(v_r) \delta'(v_\varphi - \Omega r) + c_1 \delta''(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega r) + c_2 \delta'(v_r) \delta'(v_\varphi - \Omega r) + c_3 \delta(v_r) \delta''(v_\varphi - \Omega r). \quad (1)$$

Подставляя разложение (1) в бесстолкновительное кинетическое уравнение

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{v_\varphi^2}{r} \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0 \quad (2)$$

и приравнявая нулю коэффициенты при различных комбинациях производных  $\delta$ -функций, получим<sup>4</sup> систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r b_1) &= 0; & -2\Omega b_2 - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r c_1) + \frac{2}{r} c_3 &= 0; \\ \frac{\kappa^2}{2\Omega} b_1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 c_2) &= 0; & -2\Omega c_2 &= 0; \\ -4\Omega c_3 + \frac{\kappa^2}{2\Omega} \cdot 2c_1 &= 0; & \frac{\kappa^2}{2\Omega} c_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\kappa^2 \equiv 4\Omega^2 (1 + r\Omega'/2\Omega)$  — квадрат эпитциклической частоты. Отсюда при  $\Omega \neq 0$  вытекают равенства (являющиеся, как мы видим, просто следствием предположений о бесконечно тонком диске и о близости траекторий к круговым:  $c_2 = 0$  (т. е.  $v_r v_\varphi = 0$ );  $b_1 = 0$  (т. е. отсутствие радиального потока:  $v_r = 0$ );  $c_3 = \frac{\kappa^2}{4\Omega^2} c_1$  (т. е. известная линдبلادовская связь между радиальной  $c_r$  и трансверсальной  $c_\varphi$  дисперсиями скоростей звезд:  $c_\varphi = \frac{\kappa}{2\Omega} c_r$ ;  $b_2 = \frac{1}{\Omega r} \left[ c_3 - \frac{\partial}{\partial r} (r c_1) \right]$  (соотношение между трансверсальным потоком  $v_\varphi \neq 0$ , дисперсиями скоростей  $c_{r, \varphi}$  и плотностью [10]).

<sup>4</sup> Ясно, что равенства нулю здесь в действительности означают, конечно, что соответствующие комбинации величин должны быть малы, как  $O(c_{r, \varphi}^2 / \Omega^2 r^3)$ .

Таким образом, получается следующее общее выражение для функций распределения подобных систем [93]:

$$f_0 = \sigma_0(r) \left\{ \delta(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega_0 r) + \frac{1}{2\Omega_0 r} \left[ \frac{x^2}{4\Omega_0^2} c_r^2 - \frac{\partial}{\partial r}(r c_r^2) \right] \times \right. \\ \left. \times \delta(v_r) \delta'(v_\varphi - \Omega_0 r) + \frac{1}{2} c_r^2(r) \delta^2(v_r) \delta(v_\varphi - \Omega_0 r) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{x^2}{4\Omega_0^2} c_r^2 \delta(v_r) \delta''(v_\varphi - \Omega_0 r) + \dots \right\}. \quad (4)$$

Коэффициенты при различных комбинациях производных от  $\delta$ -функций в (4) пропорциональны, очевидно, соответствующим моментам низших порядков функции распределения. В общем случае можно произвольно задать поверхностную плотность  $\sigma_0(r)$  (или закон вращения  $\Omega_0(r)$ ; связь между  $\sigma_0(r)$  и  $\Omega_0(r)$  определяется из уравнения Пуассона) и дисперсию скоростей  $c_\varphi(r)$  (или  $c_r(r)$ ), которая должна быть малой. Разложения вида (4) удобны также для учета влияния малой дисперсии скоростей на гидродинамическую джинсовскую неустойчивость.

Точные функции распределения для дисковых систем с конечной (и не обязательно малой) дисперсией скоростей известны для небольшого числа случаев, в основном для поверхностной плотности вида  $\sigma_0(r) = \sigma_0(0) \sqrt{1 - r^2/R^2}$  ( $R$  — радиус границы).

Функция распределения для покоящегося эллиптического диска с поверхностной плотностью  $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2}$  и потенциалом  $\Phi_0(x, y) = \frac{1}{2} A^2 x^2 + \frac{1}{2} B^2 y^2 + \text{const}$  была получена Фриманом [204]. Она имеет вид (см. § 1 и задачу 2 в главе II)

$$f_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi AB} \left( 1 - \frac{v_x^2}{a^2 A^2} - \frac{v_y^2}{b^2 B^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2}.$$

При  $a=b$  эта функция распределения переходит в следующую:

$$f_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{v^2}{2a^2 A^2} \right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Она описывает невращающийся круговой диск с изотропным распределением скоростей. Траектории звезд в нем представляют собой эллипсы с произвольными эксцентриситетами. В работе Бисноватого-Когана и Зельдовича [23] содержится обобщение (5) на случай твердо-телно-вращающихся круговых дисков с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0(1 - r^2)^{1/2}$  и потенциалом  $\Phi_0 = \frac{1}{2} \Omega_0^2 r^2 + \text{const}$ . В системе координат, связанной с диском, эта функция имеет вид

$$f_0 = \frac{\sigma_0}{2\pi \sqrt{1 - \gamma^2}} [(1 - \gamma^2)(1 - r^2) - v_r^2 - v_\varphi^2]^{-1/2}, \quad |\gamma| \leq 1, \quad (6)$$

где  $\gamma$  — угловая скорость вращения диска относительно оси  $z$  в единицах  $\Omega_0$  (положено  $\Omega_0 = 1$ ), радиус диска принят равным единице. При  $|\gamma| \rightarrow 0$  (6) описывает невращающийся диск (5), а при  $|\gamma| \rightarrow 1$  — диск с круговыми орбитами (все звезды вращаются в одном направлении с угловой скоростью  $\gamma = \Omega_0 = 1$ ). Функцию распределения (6), разумеется, можно представить в виде, показывающем явно ее зависимость от интегралов движения  $E, L_z$ :

$$f_0 \sim (E_0 - E - \gamma L_z)^{-1/2}.$$

Устойчивость дисков (6) исследована в работах [93, 111, 113, 252] (см. ниже, раздел 4.3). В работе [23] было отмечено, что функция рас-

предела твердотельно-вращающихся дисков типа (6) допускает существенное обобщение

$$f_{0\gamma} \rightarrow f_0 = \sigma_0(0) \int_{-1}^1 A(\gamma) f'_{0\gamma} d\gamma, \quad (7)$$

Где  $A(\gamma)$  — функция параметра  $\gamma$ , удовлетворяющая условию нормировки  $\int_{-1}^1 A(\gamma) d\gamma = 1$ , а в остальном произвольная;  $f'_{0\gamma}$  — исходная функция распределения (6), но записанная в одной и той же для всех  $\gamma$  системе координат (инерциальной). Интеграл в (7) эквивалентен следующему [93] ( $A(\gamma) \equiv a(\gamma) \sqrt{1-\gamma^2}$ ):

$$f_0 = \frac{\sigma_0(0)}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx a(x + rv_{\Phi})}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}, \quad \alpha^2 \equiv (1-r^2)(1-v_{\Phi}^2) - v_r^2. \quad (8)$$

Среди этого континуума функций распределения можно, разумеется, найти распределения с вполне реалистической зависимостью от скоростей, например близкие к максвелловскому (конечно, в области достаточно малых по сравнению со скоростью отрыва пекулярных скоростей). Уже среди простейших примеров, приведенных ниже, имеются функции, соответствующие всюду монотонно убывающим одномерным функциям распределения. Замечательно, что дисперсионные уравнения для частот малых колебаний всех этих дисков совершенно автоматически получаются из дисперсионного уравнения, отвечающего системе с исходной функцией распределения  $f_{0r}$  (см. раздел 4.3). Приведем конкретные примеры функций распределения типа (8) для некоторых  $a(\gamma)$ . Для  $a(\gamma) = \text{const}$  получается [23]

$$f_0 = \frac{\sigma_0}{\pi} \theta [(1-r^2)(1-v_{\Phi}^2) - v_r^2] \equiv \frac{\sigma_0}{\pi} \theta(\alpha^2). \quad (9)$$

Соответствующие одномерные распределения

$$f_0(v_{\Phi}) \sim (1-r^2)(1-v_{\Phi}^2), \quad f_0(v_r) \sim 1-r^2-v_r^2$$

представляют собой всюду убывающие функции скоростей с «максвелловским» поведением вблизи  $v=0$ , дисперсия скоростей в данном случае порядка круговой скорости ( $\sim 1$ ).

Пусть теперь  $a(\gamma) = \text{const } \gamma^2$ , тогда

$$f_0 = \text{const } \theta(\alpha^2) (\alpha^2 + 2r^2 v_{\Phi}^2) \equiv \text{const } \theta [(1-r^2)(1-v_{\Phi}^2) - v_r^2] \times \\ \times \{1-r^2-v_r^2 - (1-3r^2)v_{\Phi}^2\}.$$

Одномерная функция распределения по  $v_{\Phi}$  получается отсюда следующей:

$$f_0(v_{\Phi}) \sim \sqrt{(1-r^2)(1-v_{\Phi}^2)} [1-r^2 - (1-4r^2)v_{\Phi}^2].$$

Это распределение является монотонно убывающим при  $r < 1/\sqrt{3}$ , а при  $r > 1/\sqrt{3}$   $f_0$  возрастает при увеличении  $v_{\Phi}$  от 0 до  $v_{\Phi_0} = \sqrt{(1-3r^2)/(1-4r^2)}$ , после чего убывает до нуля при  $r=1$ . Аналогично функция распределения радиальных скоростей есть

$$f_0(v_r) \sim (1-r^2-v_r^2)^{3/2},$$

она всюду монотонно убывает.

Для  $a(\gamma) = \text{const } (1-\gamma^2)$  получим

$$f_0 = \text{const } \theta(\alpha^2) (2-2r^2 v_{\Phi}^2 - \alpha^2) \equiv \\ \equiv \text{const } \theta [(1-r^2)(1-v_{\Phi}^2) - v_r^2] \{(1+r^2) + v_r^2 + (1-3r^2)v_{\Phi}^2\}.$$

Соответствующие одномерные функции распределения записываются в виде

$$f_0(v_\varphi) \sim \sqrt{1-v_\varphi^2} \{2+r^2+(1-4r^2)v_\varphi^2\},$$

$$f_0(v_r) \sim \sqrt{1-r^2-v_r^2} (2-2r^2+v_r^2).$$

Можно показать, что обе эти функции — монотонно убывающие (в доступной для частиц области скоростей).

В работе [29] определены функции распределения привычного нам вида

$$f_0 = AL_z^m (-E)^n \quad (A = \text{const}) \quad (10)$$

для неограниченных дисков со степенной зависимостью поверхностной плотности и потенциала (в плоскости диска) от радиуса

$$\sigma_0 = \kappa r^p, \quad (11)$$

$$\Phi_0 = -kr^{p+1}.$$

Постоянные  $\kappa$  и  $k$  связаны легко доказываемым соотношением

$$k = -\pi G \kappa \frac{\Gamma[-(p+1)/2] \Gamma[(p+2)/2]}{\Gamma(-p/2) \Gamma[(p+3)/2]}. \quad (13)$$

С другой стороны, интегрируя (10) по скоростям, получим поверхностную плотность

$$\sigma_0 = A a_{mn} k^{1+n+\frac{m}{2}} r^{m+(p+1)(1+n+m/2)} \equiv \kappa r^p, \quad (14)$$

где

$$a_{mn} = 2^{1+\frac{m}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(n+1) \Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma(n+m/2+2)}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (11), найдем следующие соотношения между введенными выше постоянными параметрами:

$$p = -\frac{3m+2n+2}{n+2m}, \quad n = -\frac{2+m(p+3)}{2(p+1)}, \quad A = \frac{\kappa}{a_{mn} k^{1+n+\frac{m}{2}}} \quad (m, n > -1). \quad (16)$$

Очевидно, что, как и всегда при степенном законе изменения плотности, невозможно добиться конечности полной массы в рассматриваемых моделях. Она должна расходиться либо в нуле, либо на бесконечности. Требуя [29], чтобы масса

$$M(r) = 2\pi \int_0^r \sigma_0 r' dr \approx \frac{2\pi\kappa}{p+2} r^{p+2} \quad (17)$$

сходилась в нуле, а также, чтобы потенциал  $\Phi_0(r)$  обращался в нуль на бесконечности, получим ограничения на допустимые значения  $p$

$$-2 < p < -1. \quad (18)$$

При  $m=0$ ,  $n=-1/(p+1)$  функция распределения является изотропной, а с ростом  $m$ ,  $n$  она становится все более анизотропной, и при  $n$ ,  $m \rightarrow \infty$  получается диск с круговыми орбитами, причем  $p \rightarrow \frac{2n+3m}{2n+m}$ ,

$$\frac{1}{2} < \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{m}\right) < \infty.$$

В заключение остановимся на приближенных моделях бесстолкновительных дисков с конечной (но малой) толщиной, изученных Вандер-

воортом [336—338]. Автор замечает, что в сильно сплюснутой галактике звезды колеблются в направлении, перпендикулярном плоскости галактики, с частотой, которая велика по сравнению с другими частотами, характеризующими движения звезд. Развивается соответствующая регулярная процедура решения кинетического уравнения и уравнения Пуассона, учитывающая также близость траекторий звезд к круговым.

В работе [336] тот же автор построил семейство равновесных конфигураций для сильно сплюснутой, быстро вращающейся галактики, представляющей собой суперпозицию подсистем. Метод заимствован из первой работы [337]. Полученные решения используются для конструирования модели солнечной окрестности Галактики.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ «ХОЛОДНОГО» ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

### 2.1. МЕМБРАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИСКА

Мы начнем изложение вопросов, относящихся к малым возмущениям и устойчивости плоских гравитирующих систем, с более простого случая — мембранных колебаний, изгибающих плоскость диска.

Математическая теория, описывающая малые изгибные колебания, а также отклик бесконечно тонкого вращающегося диска на внешнюю силу (прежде всего приливного характера) развита Хантером и Тоомре [330]. Целью авторов было объяснение наблюдаемого искривления «плоскости» Галактики (более подробно об этом см. в § 4 главы VIII).

Заметим сразу же, что для бесконечно тонкого диска мембранные колебания в линейном приближении «отщепляются» от колебаний в плоскости диска (рассматриваемых в разделе 2.2).

**1. Уравнение движения.** Пусть плоскость диска подвергнута деформации, характеризуемой вертикальными смещениями  $h(r, \varphi)$ . Эффектами возмущенных движений в плоскости диска можно пренебречь, как величинами второго порядка малости. Вертикальное ускорение частицы в точке  $(r, \varphi)$  будет равно, очевидно,

$$[\partial/\partial t + \Omega(r) \partial/\partial \varphi]^2 h(r, \varphi, t), \quad (1)$$

где оператор в квадратных скобках есть лагранжева производная  $d/dt$ . Тогда уравнение движения запишется в виде

$$[\partial/\partial t + \Omega(r) \partial/\partial \varphi]^2 h = F + F^*, \quad (2)$$

где  $F^*$  — перпендикулярная плоскости внешняя сила, рассчитанная на единицу массы, а  $F$  — возмущенная сила, обязанная самому деформированному диску. Рассчитаем силу, действующую на элемент диска, находящийся в точке  $g$ . Некоторый другой элемент с площадью  $ds'$ , расположенный в точке  $g'$ , действует на первый с силой  $\frac{G\sigma_0(r') ds'}{(r-r')^2}$ . Вертикальная составляющая этой силы равна  $\frac{G\sigma_0(r') ds'}{(r-r')^2} \cdot \frac{[h(r', t) - h(r, t)]}{|r-r'|}$ . Для того чтобы получить полную силу, нужно, очевидно, просуммировать все такие вклады. При этом, чтобы избежать возможной сингулярности, нужно предварительно исключить малый круг радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $g$ . Поэтому искомую силу  $F$  нужно понимать как главное значение соответствующего интеграла

$$F(r, t) = G \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \frac{\sigma_0(r') [h(r', t) - h(r, t)]}{|r-r'|^3} ds'. \quad (3)$$

Правую часть (3) полезно интерпретировать как силу, действующую со стороны вертикально расположенных гравитационных диполей с по-



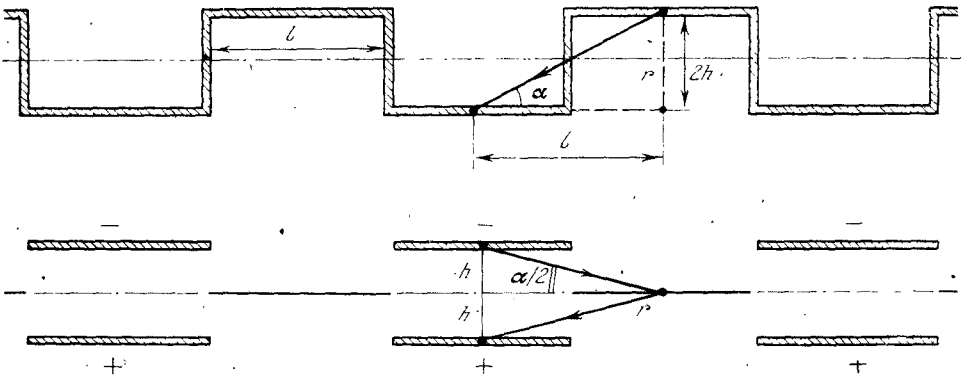


Рис. 33. Представление возмущения мембранного типа в виде двойного слоя

верхностной плотностью  $\sigma(r')[h(r', t) - h(r, t)]$ , которые локализованы в невозмущенной плоскости Галактики. Эта эквивалентная дипольная плотность зависит от точки  $r$ , в которой должна быть вычислена сила.

Естественно представить полную силу  $F$ , которая дается интегралом (3), в виде суммы сил  $F_1$  и  $F_2$ , обязанных дипольным распределением  $\sigma(r')h(r', t)$  и  $-\sigma(r')h(r, t)$  соответственно:

$$F = F_1 + F_2. \quad (4)$$

Таким образом, мы приходим к задаче об отыскании гравитационного потенциала (и силы), создаваемого диполями двойного слоя, распределенными на диске<sup>4</sup> (рис. 33).

**2. Элементарные решения уравнения Пуассона.** Поскольку диск ограничен, удобно воспользоваться для вычислений сплюснутыми сферическими координатами (см. предыдущий параграф). Элементарными решениями уравнения Лапласа вне диска радиуса  $R$  являются, как легко показать методом разделения переменных [64, 226], следующие произведения (обобщающие аксиально-симметричные решения § 1):

$$\Phi_{\text{ext}} = A q_n^m(\xi) P_n^m(\mu) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

где  $n$  и  $m$  — целые,  $n \geq m$ ,  $A$  — постоянная,

$$p_n^m(\xi) = i^{m-n} P_n^m(i\xi),$$

$$q_n^m(\xi) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} p_n^m(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)[p_n^m(y)]^2}, \quad (6)$$

$P_n^m(x)$  — присоединенные функции Лежандра. Гравитационный потенциал (5) должен создаваться двойным слоем соответствующей плотности  $\mu$ . Как известно [130], потенциал двойного слоя испытывает скачок величины  $4\pi G\mu$  при прохождении через слой:

$$\Phi_+ - \Phi_- = A q_n^m(0) P_n^m(+\mu) e^{im\varphi} - A q_n^m(0) P_n^m(-\mu) e^{im\varphi} = -4\pi G\mu; \quad (7)$$

отсюда следует прежде всего, что разность  $(n-m)$  в данном случае должна быть нечетной<sup>2</sup>, так как иначе слева в уравнении (7) стоит нуль.

<sup>4</sup> Каждая из сил,  $F_1$  и  $F_2$ , в отдельности будет разрывна в плоскости диска, но суммарная сила  $F$  (и суммарный потенциал  $\Phi$ ), как видно из (3), непрерывна при пересечении плоскости двойного слоя.

<sup>2</sup> Решения с четными  $(n-m)$  описывают, очевидно, потенциалы, создаваемые перераспределением массы в плоскости диска  $z=0$ . Такие возмущения, не приводящие к изгибанию плоскости диска, рассматриваются в следующем разделе 2.2.

Пусть  $n=2k+m-1$ ,  $k$  — целое, тогда из (7) получаем, что дипольному распределению

$$\tilde{\mu} = P_{2k+m-1}^n(\xi) e^{im\varphi} \quad (\xi \equiv \sqrt{1-r^2/R^2}) \quad (8)$$

отвечает потенциал

$$-\Phi_{ext} = \frac{2\pi G}{q_{2k+m-1}^m(0)} q_{2k+m-1}^m(\xi) P_{2k+m-1}^n(\mu) e^{im\varphi}. \quad (9)$$

Вертикальная сила получается отсюда дифференцированием:

$$-F = \left. \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left( \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \Phi_{ext}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (10)$$

Поскольку  $h_{\xi=0} = R\xi$ , то

$$F = -\frac{2\pi^2 G}{R\xi} P_{2k+m-1}^n(\xi) e^{im\varphi} \Gamma_k^n, \quad (11)$$

где введено обозначение

$$\Gamma_k^n = (-q_{2k+m-1}^m(0)) / \pi q_{2k+m-1}^m(0), \quad (12)$$

$\Gamma_k^n$  — положительные рациональные числа, определенные рекуррентными соотношениями [230]

$$\Gamma_1^0 = \frac{1}{2}; \quad \Gamma_1^n = \frac{2m+1}{2m} \Gamma_1^{n-1}; \quad \Gamma_k^n = \frac{2k-1}{2k-2} \frac{2k+2m-1}{2k+2m-2} \Gamma_{k-1}^n. \quad (13)$$

Из (13) можно получить

$$\Gamma_j^n = \frac{(2j-1)!(2j+2m-1)!}{2^{2m+4j-3} [(j-1)!(j+m-1)!]^2}, \quad (13')$$

В общем случае диска с некоторыми произвольными  $\sigma_0(r)$  и  $\Omega_0(r)$  решение уравнения (1) ищется [230] при помощи разложения всех величин по подходящей системе функций типа (11), что приводит к матричной формулировке проблемы (см. ниже, с. 232), причем дальнейшее решение проводится, как правило, численными методами. Но в одном случае, а именно — для твердотельно-вращающегося диска,  $\Omega = \text{const}$ , можно получить простое аналитическое решение<sup>1</sup>.

**3. Твердотельно-вращающиеся «холодные» диски (диски Маклорена).** Сила  $F_1$  создается двойным гравитационным слоем с плотностью  $\tilde{\mu}_1 = \sigma_0(0) \xi' h(\xi', t)$ , так как  $\sigma_0(\xi') = \sigma_0(0) \xi'$ . Пусть вертикальное смещение  $h(\xi)$  равно

$$h(\xi) = \frac{1}{\xi} P_{2n+m-1}^n(\xi). \quad (14)$$

Тогда плотность  $\tilde{\mu}_1$  есть

$$\tilde{\mu}_1(\xi') = \frac{3M}{2\pi R^2} P_{2n+m-1}^n(\xi'), \quad (15)$$

а сила  $F_1$  будет согласно (11) равна

$$F_1(\xi) = \frac{3\pi GM}{R^3} \Gamma_n^n \frac{1}{\xi} P_{2n+m-1}^n(\xi). \quad (16)$$

<sup>1</sup> Как мы увидим ниже, аналитические решения в случае твердотельно-вращающихся дисков удается получить и для колебаний, лежащих в их плоскости, причем как для «холодных» (раздел 2.2), так и для «горячих» (раздел 4.3) систем.

Плотность второго дипольного распределения

$$\tilde{\mu}_2 = -\sigma_0(0) \xi' h(\xi, t) = -\frac{3M}{2\pi R^2} \frac{P_{2n+m-1}^m(\xi)}{\xi} P_1(\xi'), \quad (17)$$

так что соответствующая ему вертикальная компонента силы

$$F_2 = \frac{3\pi GM}{2R^3} \frac{1}{\xi} P_{2n+m-1}^m(\xi). \quad (18)$$

Полная сила  $F_1 + F_2$  равна поэтому

$$F(\xi) = F_1 + F_2 = -\frac{3\pi GM}{R^3} \left( \Gamma_n^m - \frac{1}{2} \right) h(\xi). \quad (19)$$

Левая часть (1) в рассматриваемом случае  $\Omega = \text{const}$  также пропорциональна смещению  $h$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 h = -(\omega - m\Omega)^2 h. \quad (20)$$

В результате, сравнивая (20) и (19), получаем дисперсионное уравнение<sup>1</sup>

$$(\omega - m\Omega)^2 = \frac{3\pi GM}{R^3} \left( \Gamma_n^m - \frac{1}{2} \right). \quad (21)$$

Все частоты, определяемые из (21), вещественны, так как согласно (13') все  $\Gamma_n^m \geq 1/2$ . Частота  $\omega = 0$  получается в двух случаях: при  $m=0$ ,  $n=1$  и при  $m=1$ ,  $n=1$  (причем в первом случае корень кратный). Все остальные моды являются чисто колебательными. Первая из отмеченных мод с  $\omega = 0$  соответствует смещению диска как целого, а вторая представляет стационарное вращение вокруг новой оси, немного наклоненной по отношению к исходной. Таким образом, эти корни также совершенно «безвредны» с точки зрения потери устойчивости, и мы можем заключить, что твердоотельно-вращающийся диск устойчив относительно мембранных колебаний, искривляющих его плоскость.

Все собственные моды встречаются парами. Каждая неаксиально-симметричная пара состоит из моды, которая вращается быстрее, чем диск, и моды, вращающейся медленнее, причем на ту же самую величину.

Асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  равенства (21) и (13) дают

$$\omega \sim \left[ \frac{m}{2} \pm (2n/\pi)^{1/2} \right] \cdot 2\Omega \quad (22)$$

для любого фиксированного  $m$ .

Особый интерес для приложений представляют моды с  $m=1$ , так как и приливные силы, и наблюдаемая деформированная плоскость Галактики имеют приближенно именно такую зависимость от азимутального угла (см. § 4 главы VIII). Пара мод  $n=1$  включает кроме уже упомянутой тривиальной еще моду с  $\omega = 2\Omega$ , которая также соответствует смещениям  $h(r, \varphi, t)$ , пропорциональным радиусу  $r$ . Диск колеблется около невозмущенной плоскости, как твердое тело. С точки зрения покоящегося наблюдателя деформация распространяется в направлении вращения с удвоенной скоростью вращения диска.

Остальные моды  $m=1$  распространяются вокруг диска либо в направлении вращения (мы будем говорить — в «прямом» направлении) со скоростью, большей  $2\Omega$ , либо в противоположном направлении.

<sup>1</sup> Заметим [180], что частоты (21), так же как и частоты возмущений, лежащих в плоскости диска (раздел 2.2), можно было получить как предельные (при исчезающей толщине) для общего сфероида несжимаемой жидкости Маклорена [172]. Частоты большинства мод сфероида стремятся к нулю при сплющивании в диск, остаются только рассмотренные здесь, а также в разделе 2.2 моды.

Будем обозначать [230] все «прямые» моды  $D1, D2, \dots$ , а все «обратные» —  $R1, R2, \dots$  (последние начинаются с тривиальной  $\omega=0$ ). Первая нетривиальная мода  $R2$  соответствует  $n=2$ :

$$\dot{h}^{(R_2)} = \text{Re} \{ Cr [4/7 - (r/R)^2] \exp [i (\varphi - \omega^{(R_2)} t)], \quad (23)$$

причем частота  $\omega^{(R_2)} = -0,783 \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega$ . Мода  $D2$  имеет уже значительно

большую частоту:  $\omega^{(D_2)} = 2,515 \frac{2}{\sqrt{3}} \Omega$ .

**4. Произвольные диски. Матричная формулировка.** Остальные модели, как мы уже говорили, могут быть рассчитаны только численно. При этом мы имеем в виду возможность вычисления собственных частот и собственных функций различных типов колебаний диска (или эволюции начальных возмущений). Если же говорить об устойчивости, то она в некоторых случаях может быть установлена для произвольных дисков. Хантер и Тоомре [230] аналитически доказали устойчивость по отношению к возмущениям с  $m=0$  и  $m=1$ .

Любая деформация диска перпендикулярно его плоскости увеличивает, разумеется, его потенциальную энергию. Но это еще не означает устойчивости [230], так как в принципе часть вращательной кинетической энергии диска может компенсировать этот избыток потенциальной энергии. И действительно, например, для суперпозиции двух одинаковых дисков Маклорена, вращающихся в противоположные стороны и деформируемых в вертикальном направлении, можно доказать неустойчивость всех мод с  $m \geq 2$ <sup>1</sup>.

Хантер и Тоомре [230] дали еще матричную формулировку задачи о мембранных колебаниях. Она получается следующим образом. Допустим, что произведение  $\sigma_0 h$  допускает разложение

$$\sigma_0(r) h(r, \varphi, t) = \frac{M}{2\pi R} \text{Re} \left\{ \exp(im\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} X_k^m(t) \rho_{2k+m-1}^m(\xi) \right\}, \quad (24)$$

где  $X_k^m(t)$  — безразмерные функции времени (вообще говоря, комплексные), а

$$\rho_{2k+m-1}^m(\xi) \equiv [(4k+2m-1)(2k-1)!/(2k+2m-1)!]^{1/2} P_{2k+m-1}^m(\xi) \quad (25)$$

— присоединенные функции Лежандра, перенормированные так, чтобы сделать равными единице интегралы от их квадратов по интервалу  $(0,1)$ . Это разложение является общим, так как система функций  $\rho_{2k+m-1}^m$  является ортонормированной и полной на интервале  $(0,1)$ .

Разложим так же поверхностную плотность:

$$\sigma_0(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^1 \sigma_0(r') \rho_{2k-1}(\xi') d\xi' \right] \rho_{2k-1}(\xi). \quad (26)$$

Вертикальная сила  $F_1$ , обязанная не зависящей от наблюдателя части дипольной плотности  $\sigma(r') h(r', t)$ , дается выражением

$$F_1(r, \varphi, t) = - \left( \frac{\pi GM}{R^2 \xi} \right) \text{Re} \left[ \exp(im\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^m X_k^m(t) \rho_{2k+m-1}^m(\xi) \right]. \quad (27)$$

Сила  $F_2$ , соответствующая дипольной плотности  $(-\sigma(r') h(r, t))$ , равна величине  $(-h(r, t))$ , умноженной на силу в положении  $r$ , возникаю-

<sup>1</sup> Это непосредственно следует из соответствующего дисперсионного уравнения, которое легко получить аналогично (21):

$$\omega^4 - 2(m^2 + 2\Gamma_n^m - 2)\omega^2 + (m^2 + 2)(m^2 - 4\Gamma_n^m + 2) = 0,$$

где мы положили  $\Omega=1$ ; подробнее см. § 3 главы VI.

щую благодаря аксиально-симметричному распределению диполей с плотностью  $\sigma_0(r')$ :

$$F_2(r, \varphi, t) = (2\pi^2 G/R\xi) h(r, \varphi, t) \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^0 \left( \int_0^1 \sigma_0 \rho_{2k-1}(\xi') d\xi' \right) \rho_{2k-1}(\xi). \quad (28)$$

Последнее выражение может быть преобразовано к более простому виду

$$F_2(r, \varphi, t) = \left[ 2\Omega^2(r) + r \frac{d\Omega^2}{dr} \right] h(r, \varphi, t). \quad (29)$$

Этот результат можно вывести и по-другому, причем сразу в форме (29). Двойной слой с плотностью  $\delta \cdot \sigma_0(r')$  эквивалентен двум обычным дискам (с плотностями  $\pm \sigma_0$ ), отстоящим друг от друга на малое расстояние  $\delta$ . Тогда очевидно, что вертикальная сила, действующая на частицу, расположенную прямо над диском, возникает вследствие того, что частица на расстояние  $\delta$  ближе к верхнему (для определенности положительному) диску, чем к нижнему (отрицательному). Пусть  $(-\partial\Phi_0/\partial z)$  означает вертикальную компоненту силы около диска с плотностью  $\sigma_0(r)$ . Тогда упомянутый избыток силы, очевидно, будет равен  $\partial^2\Phi_0/\partial z^2|_{z=0+}$ . Но, с другой стороны, уравнение Лагранжа позволяет перейти от дифференцирования по  $z$  к дифференцированию по  $r$ :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \Big|_{0+} = - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \Big|_{0+} - r^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{0+}. \quad (30)$$

Используя теперь условие баланса центробежной и гравитационной сил, получим

$$\partial^2\Phi/\partial z^2|_{0+} = - \frac{d}{dr} [r\Omega^2(r)] - \Omega^2(r). \quad (31)$$

Если умножить (31) на  $h$ , придем к выражению (29) для  $F_2$ .

Удобно определить безразмерные время  $\tau$ , скорость вращения  $\omega(\xi)$  и поверхностную плотность  $s(\xi)$ :

$$t = (R^3/\pi GM)^{1/2} \tau, \quad \Omega(r) = \left( \frac{\pi GM}{R^3} \right)^{1/2} \omega(\xi), \quad \sigma(r) = \left( \frac{M}{2\pi R^2} \right) s(\xi). \quad (32)$$

Тогда из (27), (29), (2) легко получить следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\frac{d^2 X_n^m}{d\tau^2} + i \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj}^m dX_j^m/d\tau + \sum_{j=1}^{\infty} B_{nj}^m X_j^m = g_n^m(\tau). \quad (33)$$

Матричные элементы  $A^m$  и  $B^m$  есть константы, определяемые интегралами

$$A_{nj}^m = 2m \int_0^1 \Omega(\xi) \rho_{2n+m-1}^m(\xi) \rho_{2j+m-1}^m(\xi) d\xi, \quad (34)$$

$$B_{jn}^m = \int_0^1 d\xi \left\{ \Gamma_j^m [s(\xi)/\xi] - (2 + m^2) \Omega^2(\xi) + \left[ \frac{(1-\xi^2)}{\xi} \right] \frac{d\Omega^2}{d\xi} \right\} \rho_{2j+m-1}^m(\xi) \rho_{2n+m-1}^m(\xi),$$

а вектор  $g^m(\tau)$  связан с внешней силой уравнением

$$g_j^m(\tau) = \left( \frac{R^2}{\pi GM} \right) \int_{\xi=0}^1 \xi F^m(\tau) \rho_{2j+m-1}^m(\xi) d\xi. \quad (35)$$

Система уравнений (33) является основой численного счета в работе [230]. С ее помощью Хантер и Тоомре [230] рассчитали колебания большого числа моделей. Мы используем уравнения (33) при изложении в п. 6 данного Хантером [228] метода строгого исследования условий появления *непрерывного* спектра частот мембранных колебаний диска. Но прежде остановимся на качественном рассмотрении этого вопроса.

**5. Непрерывный спектр. Качественное рассмотрение [230].** Рассмотрим мембранные колебания однородного, неврещающегося тонкого слоя бесконечной протяженности. Введем горизонтальное волновое число  $k=2\pi/\lambda$ , которое характеризует изгибное возмущение в виде плоской волны в направлении оси  $x$ .

Потенциал двойного слоя с плотностью

$$\mu = e^{ikx} \quad (k > 0) \quad (36)$$

равен, как легко видеть, выражению

$$\Phi = -2\pi G \operatorname{sgn} z e^{-k|z|} e^{ikx}, \quad (37)$$

а сила соответственно есть

$$F|_{z=+0} = -2\pi G k e^{ikx}. \quad (38)$$

Учитывая, что в данном случае отсутствует вращение  $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} = -i\omega h$ , получим окончательно следующую формулу для частоты колебаний

$$\omega^2 = 2\pi G \sigma_0 k. \quad (39)$$

Для неоднородных систем,  $\sigma_0 = \sigma_0(r)$ , (39) представляет собой локальное дисперсионное уравнение, оно дает правильное представление о колебаниях ВКБ-типа с достаточно большим числом узлов по радиусу. Последнее приближительно равно интегралу

$$(\omega^2/2\pi^2 G) \int_0^R \frac{dr}{\sigma_0(r)}. \quad (40)$$

Если приравнять (40) большому положительному целому  $N$ , получим асимптотическую формулу для дискретных собственных частот

$$\omega^{(N)} \simeq \pi (2GN)^{1/2} \left\{ \int_0^R \frac{dr}{\sigma_0(r)} \right\}^{-1/2}. \quad (41)$$

Эта формула правильно описывает, в частности, асимптотические частоты мембранных колебаний твердо-вращающегося диска:

$$\omega^{(N)} \simeq \left( \frac{\pi GM}{R^3} \right) \left( \frac{6N}{\pi} \right)^{1/2} \quad (N \rightarrow \infty). \quad (42)$$

Более важно, однако, что (41) показывает, что частотный интервал  $\omega^{(N+1)} - \omega^{(N)}$ , разделяющий соседние моды  $N$  и  $(N+1)$ , стремится к нулю, если уменьшать плотность  $\sigma_0(r)$  на краю диска. Таким образом, уравнение (41) предсказывает, что спектр частот колебаний диска перестает быть дискретным, а становится *непрерывным*, если величина, обратная плотности,  $[\sigma_0(r)]^{-1}$ , станет неинтегрируемой<sup>1</sup> на краю, при  $r \rightarrow R$ .

<sup>1</sup> Строгое доказательство существования областей непрерывного спектра собственных частот требует более тщательного анализа, который также был проведен Хантером [228]. Мы вернемся к этому вопросу в следующем пункте (п. 6). Этот анализ указывает, кроме того, границы областей непрерывного спектра.

Модели с непрерывным спектром обладают совершенно новыми свойствами<sup>1</sup>.

В конечном счете нас всегда интересует лишь вопрос о том, как в данной системе будут развиваться начальные возмущения. С этой точки зрения различие между системами с дискретным и непрерывным спектрами является кардинальным. В последнем случае (в отличие от первого) *индивидуальные* моды вообще теряют свое значение, поскольку одновременно должен возбуждаться континуум таких мод с приблизительно одинаковыми амплитудами.

Система с сильно разделенными дискретными модами, будучи однажды возбуждена, имеет тенденцию осциллировать без радикального изменения своего вида. Система же, обладающая непрерывным спектром, будет эволюционировать непрерывно в результате того, что с течением времени все больше будет нарушаться начальный синхронизм колебаний «соседних» мод. В сущности, само появление непрерывного спектра является следствием слабости взаимного влияния колебаний частиц, движущихся по разным орбитам (каждая орбита практически прецессирует со своей угловой скоростью).

Это фундаментальное различие иллюстрируется в [230] на многих примерах. Так, для «гладких» начальных возбуждений в моделях с дискретным спектром наблюдается сильное преобладание основной моды (наибольшего масштаба), в которую вкладывается значительная часть энергии возбуждения. Модели с непрерывным спектром реагируют на такие же начальные возбуждения совсем по-другому. Их поведение характеризуется постоянно увеличивающимся числом узлов, каждый из которых движется к краю диска. Одновременно амплитуда каждого гребня увеличивается, а центральная, плоская область диска расширяется. Это соответствует «проявлению» с течением времени все большего числа индивидуальных мод. Возмущения «сносятся» к краю, где они «накапливаются».

Физически такой характер эволюции начального возмущения можно понять по аналогии с более привычными примерами (колебания водоема с медленно меняющейся глубиной, экспоненциальная атмосфера). Во всех этих случаях энергия возмущения имеет такую же тенденцию распространяться от более глубоких или более плотных частей системы к противоположным, даже для почти однородного начального возмущения. Практически такое распространение приводит всегда к более быстрому затуханию возмущений. Можно ожидать, что изгибные колебания дисков с непрерывным спектром тоже будут затухать, если учесть даже малую вязкость в области края:

Мы можем аналитически описать эволюцию начальных возмущений в системе с помощью следующего приближенного метода (в работе Хантера и Тоомре эта задача решалась численно).

Напишем соответствующее дисперсионному соотношению (39) дифференциальное уравнение, которому должна подчиняться достаточно быстро изменяющаяся в пространстве и во времени функция  $h(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 2\pi i G \sigma_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (x \equiv 1 - r). \quad (43)$$

Будем решать это уравнение для возмущений диска, чью поверхностную плотность представим для простоты в виде  $\sigma_0 = \alpha_0 x^n$  (параметр

<sup>1</sup> В то же время модели, обладающие только дискретным спектром (многие из них рассчитаны Хаитером и Тоомре [230]), имеют свойства, подобные свойствам диска Маклорена (п. 3). Снова все частоты делятся на «прямое» и «обратное» семейства, которые можно классифицировать тоже аналогичным образом (...R2, R1, D1, D2...), первые «обратные» моды имеют частоты  $\omega$ , значительно меньшие по величине, чем для любой из «прямых» мод, и т. д.

$n > 0$ ). Получающееся уравнение

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 2\pi i G \alpha_0 x^n \frac{\partial h}{\partial x} \quad (44)$$

можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами, если сделать замену

$$y = x^{1-n}/(n-1); \quad (45)$$

тогда получается<sup>1</sup>

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + ia \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (a \equiv 2\pi G \alpha_0). \quad (46)$$

Полученное уравнение имеет собственные решения в виде плоских волн по  $y$ :  $h \sim e^{-i\mu y}$  с  $\mu = \text{const}$ , им соответствуют собственные частоты, подчиняющиеся дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = |\mu| a. \quad (47)$$

Конечно, эти собственные функции можно было бы найти и из (39), если написать

$$h \sim e^{-i \int^x k(x) dx}, \quad k(x) = \frac{\omega^2}{2\pi G \sigma_0(x)}. \quad (48)$$

Видно, в частности, что поведение собственных функций вблизи от края диска  $x=0$  радикально меняется при переходе от случая  $n < 1$  к  $n > 1$  (см. (45)): при этом «хорошее» поведение сменяется бесконечными осцилляциями при приближении к  $x=0$ . Спектр колебаний в этом случае становится непрерывным, и отдельные собственные моды не дают непосредственной информации о характере эволюции заданного в начальный момент возмущения. Уравнение (46), однако, в принципе легко решается для начального возмущения любой формы:

$$h(t=0) = f(x) = \varphi(y), \quad (49)$$

$$\partial h / \partial t(t=0) = f_1(x) = \varphi_1(y). \quad (50)$$

Тогда, очевидно,

$$h(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\mu e^{i\mu y} \{A(\mu) e^{i\omega(\mu)t} + B(\mu) e^{-i\omega(\mu)t}\}, \quad (51)$$

где  $\omega(\mu) = \sqrt{a|\mu|}$ , а функции  $A(\mu)$  и  $B(\mu)$  выражаются через фурье-образы  $\varphi(y)$  и  $\varphi_1(y)$ :

$$A(\mu) + B(\mu) = \varphi_\mu \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-i\mu y} dy, \quad (52)$$

$$i\omega(\mu)[A(\mu) - B(\mu)] = \varphi_{1\mu} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(y) e^{-i\mu y} dy. \quad (53)$$

Используя метод стационарной фазы, легко найти асимптотические (при больших  $t$ ) выражения для  $h(y, t)$ . Так, для возмущений с  $A(\mu) = 0$

<sup>1</sup> Можно, разумеется, вывести аналогичное (46) уравнение и в общем случае (для любой  $\sigma_0 = \sigma_0(x)$ ), если сделать замену

$$x \rightarrow y = \text{const} \int \frac{dx}{\sigma_0(x)}.$$



получим

$$h \approx \sqrt{\frac{2}{\pi |\omega''(\mu_0)| t}} B(\mu_0) \cdot \exp \left\{ i \left[ \mu_0 y - \omega(\mu_0) t - \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \omega''(\mu_0) \right] \right\}, \quad (54)$$

где  $\mu_0$  — положительный корень уравнения

$$\frac{d\omega}{d\mu} \equiv \omega' = \frac{y}{t}. \quad (55)$$

Формулы типа (54) справедливы в том случае, если при больших  $t$  мы имеем достаточно быстро осциллирующее решение (удовлетворяются требования приближения геометрической оптики). Полученное решение представляет собой пакет волн с переменным волновым числом  $\mu_0(x, t)$ , частотой  $\omega(x, t) = \sqrt{a\mu_0(x, t)}$  и амплитудой, пропорциональной  $|\omega''(\mu_0)t|^{-1/2} |B(\mu_0)|$ . Амплитуда должна определяться для каждого конкретного начального возмущения отдельно. Что же касается фазы  $\Psi$  возмущения (которая, в частности, определяет движение нулей функции  $h(x, t)$ ), то она согласно (54) зависит только от вида дисперсионного уравнения. В данном случае

$$\Psi \sim \mu_0 y - \omega(\mu_0) t \sim \operatorname{const} \cdot \frac{t^2}{y} \sim \operatorname{const} \cdot t^2 x^{n-1}, \quad (56)$$

поэтому

$$h \sim \exp(i\Psi) \sim \exp(i \cdot \operatorname{const} \cdot t^2 x^{n-1}). \quad (57)$$

Видно, что количество нулей с течением времени увеличивается и они кажутся движущимися по направлению к краю диска по закону

$$x \sim \operatorname{const} \cdot t^{-2/(n-1)}. \quad (58)$$

Это качественно согласуется с рассчитанной Хантером и Тоомре [230] численно картиной эволюции возмущений в дисках с «тонким краем», которая была описана выше.

В рамках приближения геометрической оптики особенно просто рассчитать эволюцию индивидуального волнового пакета, характеризующегося средним волновым числом  $k = k(t)$  и локализованного вблизи от точки  $r = r(t)$ . Как известно [70], функции  $k(t)$  и  $r(t)$  подчиняются уравнениям типа гамильтоновых уравнений механики (причем роль гамильтониана играет частота  $\omega$ ):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad (59)$$

$$\frac{dk}{dt} = - \frac{\partial \omega}{\partial r}. \quad (60)$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $\omega^2 = 2\pi G \sigma_0(r) k$ , то для радиально распространяющегося волнового пакета будем иметь

$$\dot{x} = - \sqrt{\frac{\pi G}{2}} k^{-1/2} x^{n/2}, \quad (61)$$

$$\dot{k} = n \sqrt{\frac{\pi G}{2}} k^{1/2} x^{n/2-1}, \quad (62)$$

где снова мы положили  $x = 1 - r$ ,  $\sigma_0 = x^n$ . Уравнения (61), (62) легко решаются. В частности, можно найти интеграл движения  $A \equiv x^{-n/2+1} \times k^{-n/4+1/2} = \operatorname{const}$ , откуда следует, что  $k \sim x^{-2n}$ . Это соотношение показывает, что волновое число  $k$  неограниченно увеличивается при приближении пакета к краю диска.

**6. Непрерывный спектр. Строгое рассмотрение [228].** Рассмотрим сначала простой частный (но типичный) случай аксиально-симметричных колебаний следующего *специального однопараметрического семейства дисков*:

$$s = \frac{2\pi R^2 \sigma_0}{M} = 3(1-\beta)\xi + 5\beta\xi^3, \quad (63)$$

$$\Omega^2 = \frac{R^2 \Omega_0^2}{\pi GM} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3\beta}{8}\right) + \frac{45\beta\xi^2}{32}, \quad (64)$$

где  $\beta$  — параметр,  $0 \leq \beta \leq 1$ . В пределе  $\beta=0$  из (63) получается твердо-вращающийся диск. Наибольший интерес представляет противоположный предел  $\beta=1$ , когда в (63) нет члена  $\sim \xi$ , плотность обращается на краю в нуль более плавно, чем во всех остальных случаях, и можно подозревать наличие непрерывного спектра, так как интеграл (41) п. 5 расходится.

Для аксиально-симметричных мод система уравнений (33) п. 4 сводится к следующей ( $A=0$ , так как  $m=0$ ;  $X \sim e^{-i\lambda t}$ ):

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_{jn}^0 X_j^0 = \lambda^2 X_n^0, \quad (65)$$

где матрица  $B$  для (63), (64) есть

$$B_{jk}^0 = \int_0^1 \left\{ [3(1-\beta) + 5\beta\xi^2] \Gamma_j^0 - \frac{3}{8} [4 - 9\beta + 15\beta\xi^2] \right\} \rho_{2j-1}(\xi) \rho_{2n-1}(\xi) d\xi,$$

причем

$$\Gamma_j^0 = \frac{[(2j-1)!]^2}{2^{4j-3} [(j-1)!]^4}.$$

Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра показывают, что  $\xi^2 \cdot \rho_{2j-1}(\xi)$  можно выразить через  $\rho_{2j-3}$ ,  $\rho_{2j-1}$ ,  $\rho_{2j+1}$ . Отсюда следует (с учетом свойств ортогональности используемых полиномов), что матрица  $B^0$  является тридиагональной и уравнение (65) сводится к следующему трехчленному линейному разностному уравнению:

$$\begin{aligned} & - \frac{10\beta n(2n+1) \left( \Gamma_{n+1}^0 - \frac{9}{8} \right) X_{n+1}^0}{(4n+1) [(4n-1)(4n+3)]^{1/2}} + \left[ 3(1-\beta) \Gamma_n^0 - \frac{3}{2} + \frac{27\beta}{8} - \lambda^2 + \right. \\ & \left. + \frac{5\beta(8n^2+4n-1) \left( \Gamma_n^0 - \frac{9}{8} \right)}{(4n-3)(4n+1)} \right] X_n^0 + \\ & + \frac{10\beta(n-1)(2n-1) \left( \Gamma_{n-1}^0 - \frac{9}{8} \right) X_{n-1}^0}{(4n-3) [(4n-1)(4n-5)]^{1/2}} = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

где  $n$  пробегает значения от 1 до  $\infty$ . При  $\beta=0$  отсюда получается, естественно, уже знакомый нам спектр колебаний твердо-вращающегося диска:

$$\lambda^2 = \frac{3}{2} - 3\Gamma_n^0. \quad (67)$$

Смещению диска как целого соответствует

$$\lambda^2 = 0, \quad X_1^0 = 1, \quad X_2^0 = \frac{2\beta}{\sqrt{21}}, \quad X_n^0 = 0 \quad \text{для } n > 2, \quad \frac{h}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (68)$$

Универсальную для всех дисков (63) частоту имеет еще одно колебание

$$\lambda^2 = \frac{15}{8}, \quad X_2^0 = 1, \quad X_n^0 = 0 \text{ для } n \neq 2, \quad \frac{h}{R} = \frac{\sqrt{7(5\xi^2 - 3)}}{2[3(1 - \beta) + 5\beta\xi^2]} \cos \lambda\pi. \quad (69)$$

Это нетривиальная мода низшего порядка для дисков с любыми  $\beta$ .

Других точных решений получить не удастся, но характер спектра  $\lambda^2$  может быть определен уже из общего рассмотрения уравнения (66).

Это уравнение есть линейное разностное уравнение второго порядка со свободным параметром  $\lambda^2$  и с двумя граничными условиями: при  $n=0$  и  $n=\infty$ . Условие при  $n=0$  возникает из уравнения (66) для  $n=1$ , откуда следует, что только коэффициент  $X_1^0$  может быть выбран произвольно, все последующие коэффициенты  $X_n^0$  тогда определяются для любого заданного  $\lambda^2$ . Таким образом исключается одно из двух независимых решений (66). С другой стороны, анализ поведения решений (66) при  $n \rightarrow \infty$  (см. ниже) показывает, что в общем случае одно независимое решение становится бесконечно большим, а второе стремится к нулю. Только при условии, когда  $X_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , мы имеем удовлетворительное решение. Это условие выполняется, вообще говоря, только для некоторых (спектра)<sup>1</sup> значений  $\lambda^2$ . Используя асимптотическое представление ( $m$  фиксировано, а  $n \rightarrow \infty$ )

$$I_n^m \approx \frac{2}{\pi} \left[ n + \frac{1}{4} (2m - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad (70)$$

сведем (66) к форме

$$5\beta \left[ 1 + \frac{3(4-3n)}{16n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] X_{n+1}^0 + \left[ 2(6-\beta) + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2}\beta - 3 - 3n + \frac{9}{8}\pi\beta - 2\pi\lambda^2 \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] X_n^0 + 5\beta \left[ 1 - \frac{(20+9\pi)}{16n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] X_{n-1}^0 = 0. \quad (71)$$

Если же в (71) пренебречь всеми коэффициентами, обращающимися в нуль при  $n \rightarrow \infty$ , то получим

$$5\beta X_{n+1}^0 + 2(6-\beta) X_n^0 + 5\beta X_{n-1}^0 = 0. \quad (72)$$

Общее решение этого разностного уравнения с постоянными коэффициентами следующее:

$$X_n^0 = c_1 t_1^n + c_2 t_2^n, \quad (73)$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные, а  $t_1$  и  $t_2$  — корни характеристического уравнения

$$5\beta t^2 + 2(6-\beta)t + 5\beta = 0. \quad (74)$$

Оба корня вещественны и отрицательны. Так как произведение  $t_1 t_2 = 1$ , один из них при  $0 \leq \beta < 1$  по модулю больше 1, а другой меньше. Последний корень дает сходящееся, а первый расходящееся решение. Такое положение соответствует дискретному спектру, который, таким образом, должен иметь место при всех  $0 \leq \beta < 1$ .

Случай  $\beta = 1$  выделен тем, что согласно (74) ему отвечает кратный корень  $t = -1$ , поэтому требуется более тщательное исследование поведения решения при больших  $n$ , учитывающее члены порядка  $O(1/n)$ .

<sup>1</sup> Нельзя не заметить близкой аналогии описанной процедуры «квантования» спектра с более обычной процедурой, возникающей, например, при решении дифференциальных уравнений с граничными условиями в нуле и на бесконечности.

Решение ищется в виде

$$X_n^0 = (-1)^n \exp(\gamma n^{1/2}) n^{-3/4} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k n^{-k/2} \right], \quad (75)$$

где  $d_k$  — постоянные, которые можно определить последовательно. Величину  $\gamma$  легко вычислить:

$$\gamma = \gamma_{\pm} = \pm \sqrt{\pi \left( 3 - \frac{8\lambda^2}{5} \right)}, \quad (76)$$

$\gamma_+$  и  $\gamma_-$  соответствуют два независимых решения исходного уравнения. При  $\lambda^2 < 15/8$  мы снова имеем знакомую уже ситуацию с дискретным спектром, но при  $\lambda^2 > 15/8$  оба значения  $\gamma$  дают возможные решения типа (75): множитель  $\exp(\gamma n^{1/2})$  становится тогда осциллирующим, а  $n^{-3/4}$  обеспечивает<sup>1</sup> необходимое убывание  $X_n^0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому для  $\lambda^2 > 15/8$  мы не имеем условия «квантования» при  $n \rightarrow \infty$ , и спектр частот является непрерывным.

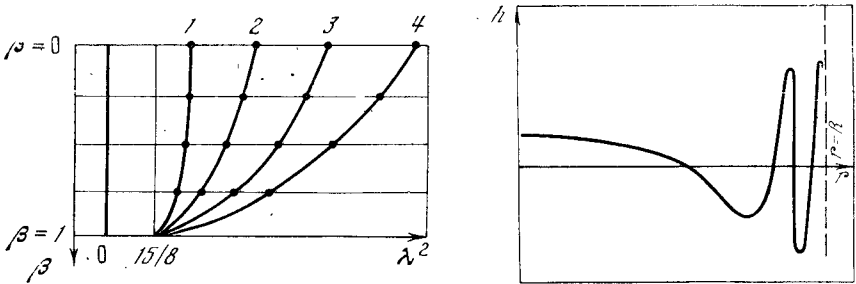


Рис. 34. «Траектории» собственных частот мембранных колебаний для моделей (43) [228]

Кривые 1, 2, 3, ... соответствуют различным типам колебаний

Рис. 35. Поведение возмущений вблизи от «тонкого» края диска

Собственные частоты для диска (63) могут быть определены численно. На рис. 34 представлена качественная картина, дающая «траектории» частот при изменении параметра моделей  $\beta$ . Все частоты, кроме одной  $\lambda^2 = 0$ , стремятся в пределе  $\beta \rightarrow 1$  к краю континуума  $\lambda^2 = 15/8$ . При  $\beta = 1$  в рассматриваемом примере имеется только одна дискретная собственная частота  $\lambda^2 = 0$ , непрерывный спектр занимает всю полуось  $\lambda^2 > 15/8$ .

Установим теперь соответствие между проведенным выше анализом асимптотического поведения коэффициентов  $X_n^0$  при  $n \rightarrow \infty$  и анализом ВКБ-типа в п. 5. Последний предсказывает следующий характер поведения собственных функций вблизи от края ( $\xi \rightarrow 0$ ) (рис. 35):

$$sh \sim \sin \left[ -\pi \lambda^2 \int_{\xi}^{\xi_0} \frac{|\xi| d\xi}{s(1-\xi^2)^{1/2}} + \text{ограниченная функция} \right]. \quad (77)$$

Асимптотическое поведение коэффициентов типа Фурье определяется, как известно, наиболее сингулярной частью функции, в данном случае это бесконечно увыстряющиеся колебания при  $\xi \rightarrow 0$ . Коэффициенты ис-

<sup>1</sup> Проведенный анализ не применим в граничной точке  $\lambda^2 = 15/8$ , но в этом случае мы имеем точное решение (69).

пользуемого нами разложения вычисляются по формуле

$$R \operatorname{Re} \{X_n^0 e^{-i\lambda t}\} = \int_0^1 \operatorname{sh} \rho_{2n-1}(\xi) d\xi. \quad (78)$$

Правильное асимптотическое поведение  $X_n^0$  при  $n \rightarrow \infty$  получим, используя (70) и асимптотическое представление полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} X_n^0 &\sim \frac{2(-1)^n}{\pi^{1/2}} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi\lambda^2}{5\xi} + c_0\right) \cos(2\pi\xi + c_1) d\xi = \\ &= \frac{(-1)^n}{(\pi n)^{1/2}} \operatorname{Im} \left\{ e^{i(c_0+c_1)} \int_0^{n^{1/2}} \exp\left[in^{1/2}\left(2y + \frac{\pi\lambda^2}{5y}\right)\right] dy + \right. \\ &\quad \left. + e^{i(c_0-c_1)} \int_0^{n^{1/2}} \exp\left[in^{1/2}\left(\frac{\pi\lambda^2}{5y} - 2y\right)\right] dy \right\}, \quad (79) \end{aligned}$$

где  $c_0, c_1$  — постоянные. Интегралы в (79) оцениваются методом стационарной фазы [130], причем доминирующим является первый интеграл, вычисление которого дает первое приближение для  $X_n^0$ :

$$X_n^0 \sim (-1)^n n^{-3/4} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{const} \cdot \exp\left[i\lambda\left(\frac{8\pi n}{5}\right)^{1/2}\right] \right\}, \quad (80)$$

что совпадает с (75). Это совпадение и служит проверкой правильности результатов, ранее полученных методом ВКБ.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая мембранных колебаний дисков, структура которых в равновесном состоянии может быть описана следующими полиномиальными разложениями по степеням  $\xi^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{s}{\xi} &= \sum_{j=0}^N s_j \xi^{2j}, & \Omega &= \sum_{j=0}^N \omega_j \xi^{2j}, \\ \Omega^2 &= \sum_{j=0}^N W_j \xi^{2j}. \end{aligned} \quad (81)$$

Ясно, что при достаточно больших  $N$  (а ниже  $N$  может быть любым) с помощью таких разложений можно достаточно точно представить почти любую разумную модель. Частоты колебаний определяются уравнениями (33), п. 4, в которых матрицы  $A$  и  $B$  теперь  $(2N+1)$ -диагональны (выше мы рассмотрели случай  $N=1$ ). Соответственно получающееся для коэффициентов  $X_n^m$  разностное уравнение также имеет более высокий порядок по сравнению с предыдущим случаем. Однако исследование этого уравнения проводится по тому же рецепту. Коэффициенты  $X_1^m, X_2^m, \dots, X_N^m$  могут быть выбраны произвольно, а все остальные:  $X_{N+1}^m, X_{N+2}^m, \dots$  определяются затем последовательно из уравнения для  $n = \overline{1, 2, \dots}$ . Всего имеется  $2N$  независимых решений разностного уравнения. Условие возникновения непрерывного спектра снова получается из рассмотрения асимптотического поведения решений при  $n \rightarrow \infty$ . Если сходящимися оказываются  $N$  решений, то спектр должен быть дискретным, он определяется из условия обращения в нуль остальных  $N$  решений, выраженных через  $X_1^m, X_2^m, \dots, X_N^m$  (в случае произвольного  $\lambda$  они являются расходящимися). Если же сходятся более чем  $N$  независимых решений, то возможно появление областей непрерывного спектра: выбор  $\lambda$  становится гораздо менее ограничительным.

Для исследования асимптотики при  $n \rightarrow \infty$  достаточно вычислить матричные элементы с точностью до членов порядка  $O(1/n^2)$ .

Используя (70), (81), а также соотношение

$$\xi^2 \rho_{2n+m-1}^m(\xi) = \left[ \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] [\rho_{2n+m+1}^m(\xi) + 2\rho_{2n+m-1}^m(\xi) + \rho_{2n+m-3}^m(\xi)], \quad (82)$$

можно вывести следующее разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^N 4^{-j} s_j (E+2+E^{-1})^j X_n^m + \frac{1}{n} \left\{ -\lambda^2 X_n^m + \sum_{j=0}^N 4^{-j} \left[ \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{s_j}{\pi} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2m\lambda\omega_j - (2+2j+m^2) W_j \right] (E+2+E^{-1})^j X_n^m + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^N j s_j 4^{-j} (E-E^{-1})(E+2+E^{-1})^{j-1} X_n^m + \right. \\ \left. + 8 \sum_{j=1}^N j W_j 4^{-j} (E+2+E^{-1})^{j-1} X_n^m \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \quad (83) \end{aligned}$$

где  $E$  есть оператор сдвига

$$E X_n^m = X_{n+1}^m, \quad E^{-1} X_n^m = X_{n-1}^m. \quad (84)$$

Пренебрежем сначала в (83) всеми членами порядка  $O(1/n)$ ,  $O(1/n^2)$  и т. д. Тогда, полагая  $X_n^m \sim t^n$ , получим характеристическое уравнение для  $t$  порядка  $2N$ :

$$\sum_{j=0}^N s_j \left[ \frac{(t+1)^2}{4t} \right]^j = 0. \quad (85)$$

Пусть  $\zeta$  — корень этого полинома для  $(t+1)^2/4t$ , т. е.

$$t^2 + (2-4\zeta)t + 1 = 0. \quad (86)$$

Произведение двух корней уравнения (86) равно единице. Если один из них по модулю больше единицы, то другой меньше. Соответственно второй корень дает сходящееся решение, а первый — расходящееся. Но имеется еще одна возможность: корни (86) могут быть комплексно-сопряженной парой (с модулем, равным единице). В этом случае сумма корней  $(4\zeta-2)$  должна быть вещественной и лежать в области  $(-2 \div 2)$ , поэтому  $\zeta$  должно быть заключено в интервале  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Теперь заметим, что (85) можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^N s_j \zeta^j = 0, \quad (87)$$

т. е., иначе говоря, в виде условия обращения в нуль полинома (81) для  $s/\xi$  (с заменой  $\xi \rightarrow \zeta^{1/2}$ ). Поэтому наличие корня,  $\zeta$ , уравнения (85) в указанном интервале означает, что поверхностная плотность  $s(\xi)$  должна равняться нулю в точке  $\xi = \zeta^{1/2}$ . Если рассматривать только такие распределения плотности  $s(\xi)$ , которые не обращаются в нуль внутри диска (что мы и будем предполагать), то остается единственная возможность:  $\zeta = 0$ , что соответствует обращению в нуль на краю диска величины  $s/\xi$ . Таким образом, только в случае  $(s/\xi)|_{\xi=0} = 0$ , т. е.  $s_0 = 0$ , может появиться непрерывный спектр, иначе разностное уравнение (83) будет иметь  $N$  сходящихся решений, так что спектр является дискретным.

Допустим, что в нуль обращаются  $k$  первых коэффициентов  $s_j$ :  $s_0 = \dots = s_{k-1} = 0$ ,  $s_k \neq 0$ . В этом случае корень  $t = -1$  уравнения (85) имеет кратность  $2k$ . Таково число независимых решений (83), имеющих форму, отличную от простой степенной  $X_n^m \sim t^n$ , а точнее, следующую (анало-

гично (75):

$$X_n^m = (-1)^n \left[ \exp \left( \sum_{s=1}^{2k-1} \gamma_s r^{s/2k} \right) \right] n^{-1/s - \frac{1}{4k}} \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_l n^{-\frac{k}{2l}} \right). \quad (88)$$

Асимптотическое поведение решений (88) определяет коэффициент  $\gamma_{2k-1}$ , для которого можно легко получить уравнение

$$(\gamma_{2k-1})^{2k} = \frac{\pi}{2s_k} \left\{ \frac{4ik}{(2k-1)} \right\}^{2k} [2W_0 - 2W_1 + (\lambda - m\omega_0)^2]. \quad (89)$$

Это уравнение имеет  $2k$  корней, соответствующих  $2k$  независимым решениям. Если выражение в квадратных скобках в (89) отрицательно, то  $k$  корней  $\gamma_{2k-1}$  имеют положительные действительные части, а  $k$  — отрицательные. В этом случае спектр частот дискретный. Но если это выражение вещественно и положительно, то  $(k-1)$  решений экспоненциально сходятся,  $(k-1)$  расходятся (также экспоненциально), а для двух оставшихся решений  $\gamma_{2k-1}$  оказывается чисто мнимой. Эти два решения должны быть исследованы дополнительно, причем такое исследование [228] показывает, что они оба являются сходящимися. Таким образом, мы имеем  $(N+1)$  сходящихся и  $(N-1)$  расходящихся решений в случае, когда

$$\left[ (\lambda - m\Omega)^2 + 2\Omega^2 + r \frac{d\Omega^2}{dr} \right]_{r=R} > 0. \quad (90)$$

Условие (90) и определяет область непрерывного спектра. Заметим, что существование непрерывного спектра определяется только отсутствием в разложении поверхностной плотности  $s(\xi)$  члена, пропорционального  $\xi$ .

Здесь снова можно, как и в предыдущем примере, установить соответствие с методом ВКБ. Дополнительно, проведенный выше анализ установил точное положение границы непрерывного спектра  $\lambda^2 = 15/8$ . Впрочем, в действительности ВКБ-метод тоже позволяет определить эти границы, но для этого необходимо, естественно, при вычислении частот колебаний учитывать не только главный порядок теории возмущений, но и следующий [228]. Поскольку для случая мембранных колебаний эти вычисления сами по себе не представляют особого интереса, мы их опускаем, тем более что в следующем параграфе (раздел 2.2) будет рассмотрена аналогичная задача для колебаний в плоскости диска<sup>1</sup>. Приведем только окончательный результат — уравнение для собственных частот мембранных колебаний:

$$\lambda^2 I_1 - 2m\lambda I_2 + (m^2 + 2) I_3 - I_4 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = N + \frac{m}{2} - \frac{1}{4}, \quad (91)$$

где введены следующие обозначения для интегралов:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{s(1-\xi^2)^{1/2}}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\xi \Omega d\xi}{s(1-\xi^2)^{1/2}}, \quad (92)$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\xi \Omega^2 d\xi}{s(1-\xi^2)^{1/2}}, \quad I_4 = \int_0^1 \frac{(1-\xi^2)^{1/2}}{s} \frac{d\Omega^2}{d\xi} d\xi. \quad (93)$$

Непрерывный спектр получается в случае, когда интеграл  $I_1$  расходится при  $\xi \rightarrow 0$ . Правило для определения границ непрерывного спектра из (91) следующее. Введем вместо  $I_1, I_2, I_3, I_4$  интегралы с перемен-

<sup>1</sup> Она интересна тем, что такие вычисления определяют форму нарастающего спирального возмущения в холодном диске («лидирующая» спираль).

ным нижним пределом ( $\xi$  вместо 0), например

$$I_1(\xi) = \int_{\xi}^1 \frac{\xi d\xi}{s(1-\xi^2)^{1/2}} \quad (94)$$

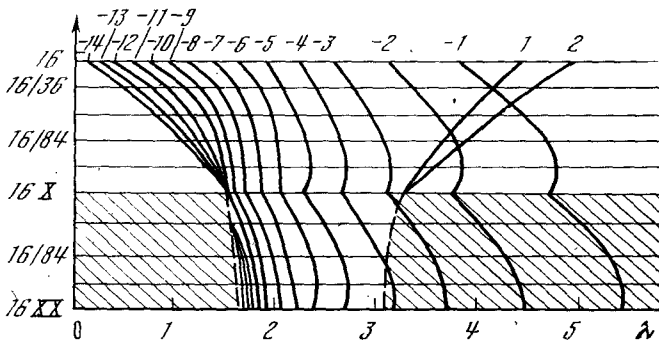
и аналогично для остальных интегралов. Разделим (91) на  $I_1(\xi)$  и перейдем к пределу при  $\xi \rightarrow 0$ , причем будем считать, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{N}{I_1} \right) = 0. \quad (95)$$

В результате получим искомое уравнение для границ непрерывного спектра

$$\lambda^2 - 2m\lambda\Omega(\xi=0) + (m^2 + 2)\Omega^2(\xi=0) - \left[ \frac{1}{\xi} \frac{d\Omega^2}{d\xi} \right]_{\xi=0} = 0. \quad (96)$$

Легко проверить, что корни этого уравнения совпадают с корнями (90). Заметим, что такая же процедура остается справедливой и в других случаях (например, для колебания в плоскости диска, раздел 2.2, или для колебаний гравитирующего плазменного диска в магнитном поле, § 3). Граничная частота (90) представляет собой «вертикальный» аналог эпициклической частоты на краю диска.



Фиг. 36. Спектр собственных частот мембранных колебаний ( $m=4$ ) для последовательностей моделей со все более «тонким» краем [228] (степень «тонкости» края диска увеличивается от верхних моделей к нижним, см. § 1)

Различные кривые соответствуют разным модам.  
Заштрихована область непрерывного спектра

В заключение этого параграфа отметим, что Хантер [228] рассчитал для ряда моделей также и большое число дискретных мод, которые, в частности, могут сосуществовать с областями непрерывного спектра. На рис. 36, заимствованном из [228], показаны «треки» собственных частот при постепенном изменении (соответствующем на рис. 36 движению сверху вниз по оси ординат) равновесного состояния, которое делает край диска все более тонким.

О приложении данной теории к объяснению наблюдаемого искривления плоскости Галактики говорится в § 4 главы VIII.

## 2.2. КОЛЕБАНИЯ В ПЛОСКОСТИ ДИСКА

**1. Качественное рассмотрение.** Пусть  $\sigma_0(r)$  — равновесная поверхностная плотность диска,  $\Omega_0(r)$  — угловая скорость частиц. Вращение диска, противодействуя гравитации, стабилизирует его только относительно общего сжатия. Если рассмотреть малую область диска с линейными размерами  $l$  и допустить, что она сжимается на величину  $\epsilon l$  ( $\epsilon \ll 1$ ),



то изменение силы гравитационного притяжения при таком сжатии, равное (по порядку величины)

$$\Delta F_{\text{грав}} \sim G\sigma_0 l^2 [(l-\varepsilon l)^{-2} - l^{-2}] \sim \varepsilon G\sigma_0,$$

способствует дальнейшему увеличению плотности. Соответствующее увеличение центробежной силы

$$\Delta F_{\text{цб}} \sim \Delta(\Omega_0^2 r) = \Delta(\Omega_0^2 r^4 / r^3) = \Omega_0^2 r^4 \Delta(1/r^3) \approx \varepsilon l \Omega_0^2$$

является следствием сохранения углового момента  $L = r^2 \Omega_0$ , оно препятствует сжатию.

Приведенные выше оценки (Тоомре [333]) показывают, что достаточно малая область возмущения  $l$  диска должна быть гравитационно неустойчивой:  $|\Delta F_{\text{грав}}| > |\Delta F_{\text{цб}}|$ , если  $l \lesssim G\sigma_0 / \Omega_0^2$ . Из условия равновесия следует, что критический масштаб  $l_{\text{кр}} \sim G\sigma_0 / \Omega_0^2$  порядка характерного размера диска  $R$ :  $l_{\text{кр}} \sim R$ , т. е. согласно сделанной оценке диск должен быть неустойчив практически относительно всех длин волн.

**2. Коротковолновые колебания. Локальное дисперсионное уравнение.** Будем рассматривать возмущения  $\sim e^{i(m\varphi - \omega t)}$  ( $\omega$  — частота,  $m$  — номер азимутальной моды) с длиной волны в радиальном направлении  $\lambda = 2\pi/k$ , малой по сравнению с радиусом  $R$ . Точнее, мы будем считать, что  $kr \gg m$ .

Линеаризованное уравнение Пуассона для плоского бесконечно тонкого гравитирующего слоя в цилиндрических координатах

$$\Delta \Phi_1 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \delta(z) \quad (1)$$

в рассматриваемом приближении сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \delta(z). \quad (2)$$

Как и следовало ожидать, это уравнение совпадает (если сделать замену  $r \rightarrow x$ ) с уравнением Пуассона для случая бесконечно тонкого слоя, неограниченного в плоскости  $x, y$  (см. § 2 главы I). Поэтому можем сразу написать по аналогии с соответствующими формулами в § 2 главы I

$$\Phi_1(r, z) = e^{ikr} e^{-k|z|}, \quad (3)$$

$$\sigma_1(r) = -\frac{k}{2\pi G} e^{ikr}, \quad (4)$$

или, обозначая через  $\Phi_1(r)$  потенциал в плоскости диска  $z=0$  (Тоомре [333]),

$$\Phi_1(r) = -\frac{2\pi G \sigma_1(r)}{k}. \quad (5)$$

Наличие простой локальной связи (5) между  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$  является главным упрощением коротковолнового приближения.

Для получения дисперсионного уравнения мы должны вывести еще одно независимое соотношение между  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$ . В рассматриваемом здесь случае «холодного» диска для этой цели можно воспользоваться линеаризованными гидродинамическими уравнениями с равным нулю давлением:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_0 v_{r1}) + \frac{\sigma_0}{r} \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial \varphi} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_{r1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{r1}}{\partial \varphi} - 2\Omega v_{\varphi 1} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial \varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega} v_{r1} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}, \quad (8)$$

где  $v_{r1}$ ,  $v_{\varphi 1}$  — возмущенные скорости,  $\kappa$  — эпициклическая частота. Из последних двух уравнений находим

$$v_{r1} = \frac{1}{\omega_*^2 - \kappa^2} \left[ -i\omega_* \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{2im\Omega}{r} \Phi_1 \right], \quad (9)$$

$$v_{\varphi 1} = \frac{1}{\omega_*^2 - \kappa^2} \left[ \frac{m\omega_*}{r} \Phi_1 - \frac{\kappa^2}{2\Omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right], \quad (10)$$

причем введено обозначение  $\omega_* = \omega - m\Omega$ . Подставляя (9) и (10) в (6), найдем простое соотношение между  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$ :

$$-\sigma_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) - \varepsilon \frac{m^2}{r^2} \Phi_1 - \frac{2m}{r\omega_*} \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon\Omega) \Phi_1, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0(r)}{\omega_*^2 - \kappa^2}. \quad (12)$$

При выводе этого соотношения мы пока не сделали каких-либо предположений относительно масштаба возмущений; в дальнейшем (11) неоднократно будет использоваться (см., например, § 4.3).

В коротковолновом приближении формула (11) сильно упрощается:

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{\omega_*^2 - \kappa^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = \frac{k^2 \sigma_0}{\omega_*^2 - \kappa^2} \Phi_1. \quad (13)$$

Это соотношение вместе с (5) и дает искомое дисперсионное уравнение Тоомре для коротковолновых возмущений холодного вращающегося диска [333]

$$\omega_*^2 = \kappa^2 - 2\pi G\sigma_0 k. \quad (14)$$

Из дисперсионного уравнения (14) следует, что диск неустойчив для возмущений с длиной волны, меньшей критической длины волны Тоомре  $\lambda_T = \frac{4\pi^2 G\sigma_0}{\kappa^2}$ . Этим критерием неустойчивости уточняется приведенный выше аналогичный критерий, полученный из качественных соображений.

Первый член уравнения (14) описывает стабилизирующий (если  $\kappa^2 > 0$ ) эффект вращения, а второй член — джинсовское сжатие малых объемов холодного бесконечно тонкого слоя (он, естественно, совпадает с правой частью дисперсионного уравнения (11) § 2 главы I).

Строго говоря, (14) справедливо только для  $\lambda \ll \lambda_T^1$ , что соответствует  $\lambda \ll R$ , поэтому

$$-(\omega - m\Omega)^2 = \gamma^2 \simeq 2\pi G\sigma_0 k,$$

т. е. при  $k \rightarrow \infty$  инкремент неустойчивости  $\gamma \rightarrow \infty$  по закону  $\gamma \sim \sqrt{k}$ .

**3. Коротковолновые колебания. Метод ВКБ. «Лидирующие» спирали в холодном диске.** Хантер [229] развил метод, аналогичный методу ВКБ, который в принципе позволяет вычислять собственные частоты и собственные функции коротковолновых колебаний в любом порядке теории возмущений.

Исходным пунктом анализа Хантера является установление асимптотической формы связи между поверхностной плотностью и соответствующим ей потенциалом. Расчет ведется в сферических координатах

<sup>1</sup> При условии, что диск не содержит большой центральной массы (см. § 4 главы VIII).

$(\zeta, \mu, \varphi)$ , которые удобны в случае ограниченных дисков. Рассматриваются быстро осциллирующие в плоскости диска решения

$$\Phi_1 = \frac{\pi GM}{R} \exp \{i[m\varphi + \psi(\mu, \zeta)]\}, \quad (15)$$

где большая фаза  $\psi$  представляется в виде ряда по обратным степеням безразмерной частоты  $\lambda = \omega(R^3/\pi GM)^{1/2}$ :

$$\psi(\mu, \zeta) = \lambda^2 \psi_0 + \lambda \psi_1 + \psi_2 + \psi_3/\lambda + \dots \quad (16)$$

Рассмотрим сначала поведение решения вне диска  $\zeta \neq 0$ . Подставим (15), (16) в уравнение Лапласа, имеющее в координатах  $\zeta, \mu, \varphi$  вид

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (1 + \zeta^2) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right] + \left[ \frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 + \zeta^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (17)$$

В главном порядке ( $\lambda^4$ ) получаем «эйконалное уравнение» для  $\psi_0$ :

$$(1 - \mu^2) \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \right)^2 + (1 + \zeta^2) \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \right)^2 = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) может быть факторизовано:

$$(1 - \mu^2)^{1/2} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \right) = \pm i (1 + \zeta^2)^{1/2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta}. \quad (19)$$

Общее решение полученной пары уравнений первого порядка следующее:

$$\psi_0 = h_0(\arcsin \mu \pm i \operatorname{arcsch} \zeta), \quad (20)$$

где  $h_0$  (так же как ниже  $h_1, h_2, \dots$ ) обозначает произвольную функцию от аргумента, стоящего в скобках.

В следующем порядке ( $\lambda^3$ ) получается уравнение для функции  $\psi_1$ :

$$(1 + \zeta^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} + (1 - \mu^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \frac{\partial \psi_1}{\partial \mu} = 0, \quad (21)$$

которое с учетом (20) имеет общее решение вида

$$\psi_1 = h_1(\arcsin \mu \pm i \operatorname{arcsch} \zeta). \quad (22)$$

Аналогичным образом находим уравнения, которым должны удовлетворять функции  $\psi_2$  и  $\psi_3$ :

$$2(1 - \mu^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \frac{\partial \psi_2}{\partial \mu} + 2(1 + \zeta^2) \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} + 2i \left( \mu \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \right) = 0; \quad (23)$$

$$2(1 - \mu^2) \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial \mu} \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \mu} \frac{\partial \psi_2}{\partial \mu} \right] + 2(1 + \zeta^2) \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi_3}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \zeta} \right] + 2i \left( \mu \frac{\partial \psi_1}{\partial \mu} - \zeta \frac{\partial \psi_1}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (24)$$

Решения этих уравнений записываются следующим образом:

$$\psi_2 = h_2(\arcsin \mu \pm i \operatorname{arcsch} \zeta) + \frac{i}{4} \ln [(1 - \mu^2)(1 + \zeta^2)], \quad (25)$$

$$\psi_3 = h_3(\arcsin \mu \pm i \operatorname{arcsch} \zeta). \quad (26)$$

Возмущенная поверхностная плотность пропорциональна разрыву производной  $\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{-0}^{+0}$ , поэтому для потенциала в плоскости диска и соответствующей поверхностной плотности  $\Sigma$  получаются такие

разложения:

$$\Phi_1 = \exp [i\psi (\zeta = 0, |\mu| = \xi)],$$

$$\psi = \lambda^2 h_0 + \lambda h_1 + h_2 + \frac{i}{4} \ln (1 - \xi^2) + \lambda^{-1} h_3 + O(\lambda^{-2}),$$

$$\Sigma = \pm \frac{\pi (1 - \xi^2)^{1/2}}{\xi} \left[ \lambda^2 \frac{dh_0}{d\xi} + \lambda \frac{dh_1}{d\xi} + \frac{dh_2}{d\xi} + \lambda^{-1} \frac{dh_3}{d\xi} + O(\lambda^{-2}) \right] e^{i\psi}, \quad (27)$$

$$h_j = h_j (\arcsin \xi),$$

где  $\xi = |\mu| = \sqrt{1 - r^2/R^2}$ , а функции  $h_j$  нужно определить.

Запишем теперь линеаризованную систему уравнений гидродинамики в сфероидальных координатах, предварительно перейдя к новым, безразмерным переменным:  $\xi = \sqrt{1 - r^2/R^2}$ ;  $\tau = (\pi GM/R^3)^{1/2} t$  — безразмерное время;  $s = \frac{2\pi R^2}{M} \sigma_0$ ,  $\Sigma = \frac{2\pi R^2}{M} \sigma_1$  — соответственно невозмущенная и возмущенная поверхностные плотности;  $\Omega = \Omega_0 (R^3/\pi GM)^{1/2}$  — частота обращения;  $u, v = v_r, v_\varphi \frac{1}{R} \left( \frac{R^3}{\pi GM} \right)^{1/2}$  — радиальная и азимутальная возмущенные скорости;  $\Phi = (R/\pi GM) \Phi_1$  — гравитационный потенциал. Зависимость возмущения от безразмерного времени  $\tau$  выбираем в виде  $e^{-i\lambda\tau}$ . В этих обозначениях будем иметь

$$-i\lambda_s u - 2v\Omega = \frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{\xi} \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad (28)$$

$$-i\lambda_s v + \left[ 2\Omega + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\Omega}{d\xi} \right] = - \frac{im\Phi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}, \quad (29)$$

$$-i\lambda_s (1 - \xi^2)^{1/2} \xi \Sigma + \xi s (u + imv) = (1 - \xi^2) \frac{d(su)}{d\xi}, \quad (30)$$

где  $\lambda_s = \lambda - m\Omega$ . Из этой системы уравнений легко установить, что  $u = O(\lambda)$ , а  $v = O(1)$ , так что компоненты возмущенной скорости должны представляться разложениями такого вида:

$$u = [\lambda u_0 + u_1 + \lambda^{-1} u_2 + \lambda^{-2} u_3 + O(\lambda^{-3})] e^{i\psi}, \quad (31)$$

$$v = [v_0 + \lambda^{-1} v_1 + \lambda^{-2} v_2 + O(\lambda^{-3})] e^{i\psi}. \quad (32)$$

Подставив разложения (31), (32), (27) в уравнения (28) — (30), найдем

$$\frac{dh_0}{d\xi} = \mp \frac{\pi \xi}{s (1 - \xi^2)^{1/2}}, \quad (33)$$

$$\frac{dh_1}{d\xi} = \mp \frac{2\pi m \Omega \xi}{s (1 - \xi^2)^{1/2}}, \quad (34)$$

$$\frac{dh_2}{d\xi} = \pm \frac{\pi \xi}{s (1 - \xi^2)^{1/2}} \left[ (4 - m^2) \Omega^2 + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\Omega^2}{d\xi} \right], \quad (35)$$

$$\frac{dh_3}{d\xi} = 0, \dots \quad (36)$$

Естественное требование быстрого убывания потенциала, вызванного быстро осциллирующим распределением поверхностной плотности, при удалении от диска выполнено для решений обоих знаков

$$\frac{1}{\Phi_1} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sim \mp \lambda^2 (1 - \xi^2)^{1/2} \frac{dh_0}{d\xi} = \frac{\lambda^2 \pi \xi}{s} < 0, \quad (37)$$

поскольку  $\lambda^2 < 0$  (и большое по абсолютной величине).

Общее решение записывается в виде линейной комбинации двух независимых решений

$$\Phi = \frac{1}{(1 - \xi^2)^{1/4}} \{C_1 \exp(-i\pi\psi(\xi, \lambda)) + C_2 \exp(i\pi\psi(\xi, \lambda))\}, \quad (38)$$

где

$$\psi(\xi, \lambda) = - \int_{\xi}^1 \frac{\xi}{s(1 - \xi^2)^{1/2}} \left[ (\lambda - m\Omega)^2 - 4\Omega^2 - \frac{(\xi^2 - 1)}{\xi} \frac{d\Omega^2}{d\xi} \right] d\xi, \quad (39)$$

$C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Для их определения, а также для нахождения частотного спектра нужно наложить подходящие граничные условия в центре диска  $\xi=1$  и на краю  $\xi=0$ . Хантер [229] рассматривает решения, регулярные в центре и на краю диска. Вблизи от центра,  $\xi \approx 1$ , ( $\mu \approx \pm 1$ ,  $\xi=0$ ), асимптотическое решение вида (38) неточно. При  $\mu > 0$ ,  $\mu=1-\eta$  ( $\eta$  мало), уравнение Лапласа принимает форму

$$2\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (40)$$

где мы пренебрегли членами  $O(\eta)$  и  $O(\xi^2)$ . Решение этого уравнения, регулярное в центре ( $\eta=0$ ):

$$\Phi = C \exp(im\varphi - k\xi) J_m(k(2\eta)^{1/2}), \quad (41)$$

причем константа разделения  $k$  должна быть такой, чтобы решение убывало при удалении от диска, т. е. должно быть  $\text{Re}(k) > 0$ . При достаточно больших  $\eta$  решение (41) обязано переходить в (38). Используя асимптотическое представление функции Бесселя, легко убедиться в том, что такая «сшивка» решений осуществляется (для  $k \sim -\pi\lambda^2/s(\xi=1)$ ) при условии, что

$$C_1 \exp\left[-i\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = C_2 \exp\left[i\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (42)$$

Второе граничное условие ставится на краю диска (при  $\xi=0$ ). Здесь функции  $\Phi$  и  $\xi\Sigma$  ведут себя „хорошо“<sup>1</sup>, но скорости  $u, v$ , вообще говоря, сингулярны, так как включают члены  $\sim 1/s$ :

$$u = \frac{C_1 e^{-i\pi\psi}}{(1 - \xi^2)^{1/4}} \left\{ \frac{\pi(\lambda - m\Omega)}{s} + \frac{i(\lambda - 5m\Omega)}{2\lambda^2(1 - \xi^2)^{1/2}} \right\} - \frac{C_2 e^{i\pi\psi}}{(1 - \xi^2)^{1/4}} \left\{ \frac{\pi(\lambda - m\Omega)}{s} - \frac{i(\lambda - 5m\Omega)}{2\lambda^2(1 - \xi^2)^{1/2}} \right\} + O(\lambda^{-3}), \quad (43)$$

$$v = \frac{C_1 e^{-i\pi\psi}}{(1 - \xi^2)^{1/4}} \left\{ \frac{i\pi}{s} \left[ 2\Omega + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\Omega}{d\xi} \right] - \frac{m}{\lambda(1 - \xi^2)^{1/2}} \right\} + O(\lambda^{-2}). \quad (44)$$

Чтобы избежать этих сингулярностей, необходимо положить

$$C_1 \exp[-i\pi\psi(0, \lambda)] = C_2 \exp[i\pi\psi(0, \lambda)]. \quad (45)$$

Дисперсионное уравнение получаем из (42), (45)

$$\sin\left\{\pi\left[\psi(0, \lambda) - \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right]\right\} = 0,$$

так что

$$\psi(0, \lambda) = -\lambda^2 I_1 - 2m\lambda I_2 + (4 - m^2) I_3 - I_4 + O(\lambda^{-2}) = N + \frac{m}{2} + \frac{1}{4}, \quad (46)$$

<sup>1</sup> Сингулярность  $\Sigma$  при  $\xi=0$  фиктивна: она является следствием радиального движения края диска.

где  $N$  — целое число (которое должно быть большим и положительным), а  $I_1, I_2, I_3, I_4$  — суть обозначения уже знакомых нам интегралов (92), (93) раздела 2.1. Для безразмерной частоты  $\lambda$  из (46) получаем такое асимптотическое представление

$$\lambda = -m \frac{I_2}{I_1} \pm i \left( \frac{N}{I_1} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2N} \left[ \frac{m}{2} + \frac{1}{4} + I_4 + (m^2 - 4) I_3 - m^2 \frac{I_2^2}{I_1} \right] \right\} + O(N^{-3/2}). \quad (47)$$

В главном порядке теории возмущений (47) соответствует, конечно, ранее полученному результату (14).

Поправки к (14), содержащиеся в (47), сами по себе, разумеется, малоинтересны. Гораздо интереснее, что этот же анализ дает форму собственных функций неаксиально-симметричных неустойчивых мод, которые, как мы увидим, оказываются лидирующими спиралями.

Плотность  $\xi \Sigma$  определяется выражением

$$\xi \Sigma = \frac{k \pi^2}{(1 - \xi^2)^{1/4}} \left( \frac{\xi}{s} \right) \left[ -(\lambda - m\Omega)^2 + 4\Omega^2 + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\Omega^2}{d\xi} \right] \times \{ \exp [i\pi (\psi(\xi, \lambda) - \psi(0, \lambda))] + \exp [i\pi (\psi(0, \lambda) - \psi(\xi, \lambda))] \}, \quad (48)$$

где

$$k = \text{const} = C_1 \exp [-i\pi\psi(0, \lambda)] = C_2 \exp [i\pi\psi(0, \lambda)].$$

Для больших комплексных  $\lambda$  одна из экспонент в (48) доминирует, причем для неустойчивого корня — это вторая экспонента

$$\exp \left\{ \pi \left[ \frac{iN}{I_1} \int_0^{\xi} \frac{\xi d\xi}{s(1 - \xi^2)^{1/2}} + 2m \left( \frac{N}{I_1} \right)^{1/2} \int_0^{\xi} \frac{\xi \left( \frac{I_2}{I_1} - \Omega \right) d\xi}{s(1 - \xi^2)^{1/2}} \right] + O(1) \right\}. \quad (49)$$

Амплитуда колебаний дается членом  $O(N^{1/2})$ . Она обращается в нуль в центре  $\xi = 1$  и на краю диска  $\xi = 0$ , но положительна во всех остальных точках, если предположить, что угловая скорость  $\Omega$  монотонно убывает от центра. Тогда  $\Omega$  монотонно увеличивается вместе с  $\xi$ , а так как  $I_2/I_1$  есть не что иное, как взвешенное среднее от  $\Omega$  по всему диску с всюду положительным весом  $\xi/[s(1 - \xi^2)^{1/2}]$ ,  $(I_2/I_1 - \Omega)$  должно монотонно убывать от положительных значений при  $\xi = 0$  до отрицательных при  $\xi = 1$ . Поэтому интеграл  $O(N^{1/2})$ , определяющий амплитуду в (49), растет от нуля в  $\xi = 0$  до некоторого положительного максимума, а затем убывает до нуля в  $\xi = 1$ .

Форма возмущения определяется в главном порядке выражением

$$R(\xi) \exp \left[ \tau \left( \frac{N}{I_1} \right)^{1/2} \right] \cos \left[ m\varphi - m \frac{I_2}{I_1} \tau + \frac{N\pi}{I_1} \int_0^{\xi} \frac{\xi d\xi}{s(1 - \xi^2)^{1/2}} + O(N^{1/2}) \right], \quad (50)$$

где  $R(\xi)$  — некоторая плавная действительная функция. Интеграл  $O(N)$  от положительной функции  $\frac{\xi}{s(1 - \xi^2)^{1/2}}$  монотонно растет от края диска внутрь, так что линии постоянного значения возмущенной плотности  $\Sigma$ , в рассматриваемом приближении совпадающие с линиями постоянной фазы  $\cos$  в (50), определяют лидирующие спирали (рис. 37).

Рэм [309] (см. в [229]) также показал теоретически, что лидирующие спирали возникают в частном случае почти твердотельно-вращающихся дисков<sup>1</sup>. Хантер [229] отмечает, что лидирующие спирали были получены

<sup>1</sup> Это справедливо для регулярных в центре решений. Если же допустить сингулярность в центре, то, как показано в работе [309] (см. [229]), образуется стационарная картина отстающих спиралей. Эта сингулярность соответствует наличию в центре источника квадрупольного типа (бар в центре Галактики?).

и в сравнительно давних численных экспериментах Линдблада [275] на ранних стадиях счета.

В настоящее время, однако, большинство астрономов считают спиральные ветви отстающими. Поэтому рассмотренный Хантером холодный диск трудно использовать в качестве модели спиральной галактики. В § 3 VIII главы мы продолжим обсуждение этого вопроса.

**4. Твердотельно-вращающийся диск.** Устойчивость «холодного» твердотельно-вращающегося диска подробно исследовалась сравнительно недавно Хантером [226], который получил дисперсионное уравнение, точно совпадающее с дисперсионным уравнением для эллипсоида Маклорена в дисковом пределе. Напомним, что последнее было выведено в работе Брайана [172] почти столетие назад.

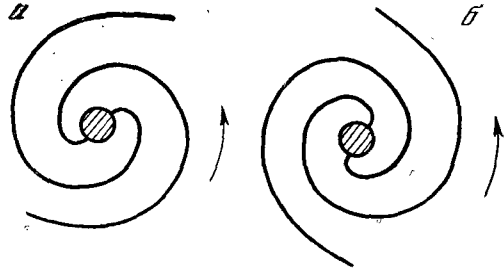


Рис. 37. Отстающая (а) и лидирующая (б) спирали

Такое совпадение, конечно, не случайно. Мы уже сталкивались с подобным положением вещей при рассмотрении возмущений плоского слоя в § 2 главы I. В пределе нулевой толщины колебания в плоскости слоя и в перпендикулярном направлении становятся независимыми, а дисперсионные уравнения для несжимаемого и для «холодного» бесстолкновительного слоя совпадают:

$$\omega^2 = -2\pi G\sigma_0 k \quad (k \perp z); \quad (51)$$

$$\omega^2 = +2\pi G\sigma_0 k \quad (k \parallel z). \quad (52)$$

Во втором случае (52) тождественность очевидна заранее и не нуждается в каких-либо пояснениях. Более неожиданно совпадение спектров в первом случае<sup>4</sup>. Причина, напомним, заключается в том, что эти возмущения становятся, по существу, двумерными, когда длина волны  $\lambda$  велика по сравнению с толщиной слоя  $s$ . Их можно тогда исследовать в терминах  $\sigma_1$ ,  $v_x$ ,  $\Phi_1$ , которые не чувствительны к способу создания возмущения (искривление границы или изменение локальной плотности вещества).

Те же самые причины объясняют, очевидно, и тождественность спектров «холодного» бесстолкновительного и несжимаемого дисков Маклорена, если дополнительно учесть тождественность равновесных состояний движения в том и другом случае.

Итак, для получения искомого дисперсионного уравнения достаточно перейти к пределу  $s \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$  в формуле Брайана ((4) § 5 главы IV) для спектра частот эллипсоидов Маклорена.

При этом нужно отдельно рассматривать случаи четных и нечетных значений разности ( $n - m$ ).

<sup>4</sup> Поскольку физические картины возмущений в плоскости несжимаемого и бесстолкновительного слоя совершенно разные. Последнее проясняется (см. главу I, § 2), если рассматривать тонкий (по сравнению с длиной волны возмущения), но не бесконечно тонкий слой. Это позволяет увидеть, что в бесстолкновительном случае колебания происходят из-за изменений локальной плотности, а эффектом искривлений границы (являющимся единственной причиной возмущений несжимаемого слоя) можно пренебречь.

1.  $(n-m)$  нечетно. Эти возмущения антисимметричны относительно плоскости симметрии  $z=0$  эллипсоида. В дисковом пределе им соответствуют, очевидно, «мембранные» колебания, изгибающие плоскость диска. Из упомянутой формулы при  $\zeta \rightarrow 0$  можно получить<sup>1</sup> [233]

$$\omega_*^2 = \frac{(2n-1)!(2n+2m-1)!}{2^{(4n+2m-5)} [(n-1)!]^2 [(n+m-1)!]^2} - 2. \quad (53)$$

Это уравнение записано во вращающейся системе, и предположено, что  $\Omega=1$ . Так как  $\omega_*^2 \geq 0$ , то эти колебания устойчивы. Вертикальные смещения в рассматриваемом пределе выражаются формулой

$$h(\xi) = \frac{1}{\xi} P_{2n+m-1}^m(\xi) e^{im\varphi} \quad (\xi \equiv \sqrt{1-r^2/R^2}). \quad (54)$$

Потенциал  $\Phi_1$  превращается в потенциал двойного слоя, в плоскости диска  $z=0$  он терпит разрыв:

$$\Phi_+ - \Phi_- = 4\pi\mu, \quad (55)$$

соответствующий дипольному распределению масс с плотностью диполей  $\mu$ ,

$$\mu(\xi) = \frac{3M}{2\pi R^2} \cdot P_{2n+m-1}^m(\xi) e^{im\varphi}. \quad (56)$$

Подробнее этот вопрос рассматривался в предыдущем параграфе.

2.  $(n-m)$  четно. Именно эти возмущения изучались вначале Хантером [226] (а затем в связи с проблемой спиральной структуры галактик и многими другими авторами). Они симметричны относительно плоскости  $z=0$  эллипсоида, и в пределе бесконечно тонкого диска им соответствуют возмущенные движения, лежащие в его плоскости.

Получающуюся из уравнения Брайана при  $\zeta \rightarrow 0$  формулу можно привести во вращающейся системе к следующему виду (Хантер [226])<sup>2</sup>:

$$1 + \frac{4\gamma_n^m}{\omega_*^2 - 4} \left( n^2 + n - m^2 - \frac{2m}{\omega_*} \right) = 0, \quad (57)$$

где

$$\gamma_n^m = \frac{(n+m)!(n-m)!}{2^{2n+1} \left[ \left( \frac{n+m}{2} \right)! \left( \frac{n-m}{2} \right)! \right]^2}. \quad (58)$$

Возмущенные потенциал и поверхностная плотность внутри диска имеют вид

$$\Phi_1 = -4\gamma_n^m P_n^m(\xi) e^{im\varphi}, \quad (61)$$

$$\sigma_1 = \sigma_0(0) \frac{1}{\xi} P_n^m(\xi) e^{im\varphi}. \quad (62)$$

<sup>1</sup> Заметим, что из формулы Брайана при  $\zeta \rightarrow 0$  непосредственно получается

$$\omega_*^2 = \frac{P_n^{m+1}(0)}{q_2^0(0)} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{p_1^0(\zeta) q_1^0(\zeta) - p_n^m(\zeta) q_n^m(\zeta)}{\zeta^2} \cdot \lim_{v_0 \rightarrow 0} \frac{v_0}{P_n^m(v_0)}.$$

Это выражение можно преобразовать к виду (53).

<sup>2</sup> При выводе (57) используются соотношения

$$\gamma_n^m = \frac{q_n^m(0) p_n^m(0)}{4q_2^0(0)} = \frac{-q_n^m(0)}{\pi q_n^{m'}(0)} = \frac{(n+m)!(n-m)!}{2^{2n+1} \left[ \left( \frac{n+m}{2} \right)! \left( \frac{n-m}{2} \right)! \right]^2}, \quad (59)$$

$$\frac{1}{P_n^m(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P_n^{m+1}(x) = (m-n)(m+n+1). \quad (60)$$



Особенность в  $\sigma_1$  при  $\xi=0$  соответствует, очевидно, смещениям границы диска и не приводит к каким-либо трудностям.

Дисперсионное уравнение в форме (57) можно получить также, если подставить (59), (60) в выведенную нами ранее (из уравнений «холодной» гидродинамики) формулу (11), связывающую  $\sigma_1$  и  $\Phi_1$ .

Остановимся теперь на свойствах решений дисперсионного уравнения (57) несколько подробнее [226]. Уравнение (57), в общем случае кубическое относительно  $\omega$ , для аксиально-симметричных возмущений сразу дает квадраты собственных частот

$$\omega^2 = 4 \left[ 1 - \frac{n(n+1)(n!)^2}{2^{2n+1} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^4} \right] \quad (n \neq 0, \text{ чётно}). \quad (63)$$

Радиальная зависимость возмущения, например скорости  $\sim \frac{(1-\eta^2)^{1/2}}{\eta} \times \frac{dP_n(\eta)}{d\eta}$ , откуда видно, что возмущение имеет на диске (при  $0 \leq \eta < 1$ )  $(n-2)/2$  нулей. Единственная безузлая мода соответствует  $n=2$ , это одновременно и единственный устойчивый тип колебаний холодного диска (однородные сжатия и расширения), для него  $\omega^2 = \Omega^2$ . Все остальные моды оказываются неустойчивыми. Инкремент неустойчивости для радиальных колебаний согласно (63) монотонно растет с номером моды  $n$ , т. е., иначе говоря, с уменьшением длины волны  $\lambda$  возмущения. При больших  $n$   $\lambda \sim 2R_0/n$ , а частоты  $\omega$  можно вычислить из (63), воспользовавшись формулой Стирлинга.

В результате получается

$$\omega^2 \approx -4n\Omega^2/\pi, \quad (64)$$

что, естественно, находится в согласии с формулой Тоомре (14).

Дисперсионное уравнение (57) упрощается также еще в одном специальном случае — для возмущений с  $n=m$  (секториальные гармоники):

$$\left( \frac{\omega_*}{2\Omega} \right)^2 + \left( \frac{\omega_*}{2\Omega} \right) + m\gamma_m^m = 0, \quad (65)$$

$$\omega_* = -\Omega \pm \Omega (1 - 4m\gamma_m^m)^{1/2}, \quad (66)$$

$$\gamma_m^m = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2}. \quad (67)$$

Можно показать, что для рассматриваемых мод отдельные жидкие элементы диска не меняют при возмущениях своей плотности. При  $m=1$ ,  $m\gamma_m^m = 1/4$ ,  $\omega_* = -\Omega$ ,  $\omega = 0$ , что соответствует просто смещению диска как целого (тривиальное решение). Для  $m > 1$  все возмущения неустойчивы, причем инкремент растет монотонно с  $m$ . При больших  $m$  инкремент неустойчивости  $\gamma \approx \Omega (4m/\pi)^{1/4}$ . Такие коротковолновые возмущения, следовательно, нарастают медленнее, чем радиальные возмущения, в которых происходит сжатие индивидуальных жидких элементов.

В общем случае  $n > m$  уравнение (57) можно переписать в виде

$$y^3 - ay + b = 0, \quad y = \omega_*/2\Omega, \\ a = 1 - \gamma_n^m (n^2 + n - m^2), \quad b = m\gamma_n^m. \quad (68)$$

Оно имеет три действительных корня, в том и только в том случае, если

$$a > 0, \quad 4a^3/27 \geq b^2. \quad (69)$$

Но величина  $\gamma_n^m (n^2 + n - m^2)$  всегда положительна и монотонно возрастает вместе с  $(n+m)$  при фиксированном значении  $(n-m) \equiv M$ . Мини-

мальное значение поэтому достигается при  $m=1$ ,  $n=M+1$ :

$$(n^2 + n - m^2) \gamma_n^m = \frac{(M^2 + 3M + 1)(M + 2)! M!}{2^{2M+3} \left[\left(\frac{M}{2}\right)!\right]^2 \left[\left(\frac{M+2}{2}\right)!\right]^2}. \quad (70)$$

Эта величина монотонно увеличивается с  $M$ . Следовательно, минимум достигается при  $M=2$ :

$$[(n^2 + n - m^2) \gamma_n^m]_{\min} = 33/32, \quad (71)$$

поэтому  $a_{\max} = -1/32 < 0$ , все остальные  $a$  тем более отрицательны. Отсюда следует, что один из корней (57) действителен, в то время как два других образуют комплексно-сопряженную пару. Такое положение соответствует неустойчивости всех мод.

Хантер [226] приводит еще асимптотические выражения для частот колебаний при  $n \gg 1$ ,  $n-m \gg 1$ ; при этом  $a \approx -\frac{(n^2 - m^2)^{1/2}}{\pi}$ ,  $b \approx \frac{m}{\pi (n^2 - m^2)^{1/2}}$ . Действительная частота равна

$$-\frac{\omega_*}{2\Omega} \approx \frac{b}{a}, \quad \omega \approx m\Omega \left\{ 1 + \frac{2}{(n^2 + n - m^2)} \right\}; \quad (72)$$

она соответствует колебаниям, распространяющимся по азимуту с угловой скоростью

$$\Omega_p = \frac{\omega}{m} = \Omega \left\{ 1 + \frac{2}{n^2 + n - m^2} \right\}, \quad (73)$$

которая всегда больше, чем угловая скорость самого диска  $\Omega$ . Точка  $\omega = m\Omega$  при  $n \rightarrow \infty$  является точкой сгущения для частот колебаний.

Пара комплексно-сопряженных корней в этом случае равна

$$\frac{\omega_*}{2\Omega} \approx +\frac{b}{2a} \pm i(-a)^{1/2}; \quad (74)$$

им соответствует волна, вращающаяся медленнее, чем диск:

$$\Omega_p = \frac{\omega}{m} = \Omega \left\{ 1 - \frac{1}{n^2 + n - m^2} \right\}, \quad (75)$$

стремясь при  $n \rightarrow \infty$  к  $\Omega$ . Инкремент неустойчивости согласно выражению для  $a$  убывает с ростом номера азимутальной моды ( $n = \text{const}$ ).

**5. Произвольные диски. Матричные формулировки. Непрерывный спектр.** В случае *нетвердотельно-вращающихся* дисков анализ *крупномасштабных* колебаний проводился преимущественно численными методами. Такие исследования были начаты Тоомре [333], который рассматривал длинноволновые радиальные колебания, заменяя реальное непрерывное распределение вещества в диске дискретной системой аксиально-симметричных колец.

В серии работ Ябашиты [356—358] разработан метод разложения возмущенных величин по функциям Бесселя, который приводит к некоторой матричной формулировке проблемы собственных значений. Работы [357, 358] посвящены применению этого метода к вопросу устойчивости колец Сатурна, а в [356] рассматривается спиральная структура галактик. Одним из главных результатов последней работы является доказательство лидирующей формы спиральных двухрукавных возмущений в холодном неоднородно-вращающемся диске, повторяющее упомянутый выше результат Хантера [229] (но для крупномасштабных мод).

Применение техники разложения по полиномам Лежандра приводит к другой матричной формулировке проблемы собственных значений [227]. В [227] таким способом изучается поведение нескольких наиболее длин-

новолновых мод в моделях дисковых галактик с разной концентрацией массы к центру. Низшая мода соответствует, как и в случае твердотельно-вращающегося диска, распределением возмущенных величин, не имеющим узлов; она всегда устойчива. Увеличение центральной конденсации приводит к стабилизации неустойчивости первых мод. Оказывается, что следующая мода (с одним узлом) стабилизируется уже при незначительном отклонении вращения от однородного (например, по сравнению с неоднородностью вращения Галактики).

Детальное исследование спектров малых возмущений холодных дисков Хантер дал в работе [228], причем изучались как возмущения, лежащие в плоскости диска, так и мембранные колебания, которые происходят в перпендикулярном направлении. Колебания последнего типа мы уже рассматривали в предыдущем параграфе, остановимся теперь на той части исследования Хантера, которая относится к возмущениям в плоскости диска.

Наиболее интересным нам представляется развитый Хантером метод строгого исследования условий возникновения и расположения областей непрерывного спектра.

Хантер [228] условно делит непрерывный спектр, соответствующий нерадиальным возмущениям диска, на два класса.

Непрерывный спектр класса I возникает при достаточно плавном обращении в нуль поверхностной плотности на краю диска. Условие возникновения этого класса непрерывного спектра можно увидеть из «правила квантования» (46), которое в низшем порядке ВКБ выглядит как  $-\lambda^2 I_1 = N$ . Расстояние между «соседними» частотами  $\lambda_N^2$  и  $\lambda_{N+1}^2$ , соответствующими  $N$  и  $N+1$ , равно  $1/I_1$ ; оно стремится к нулю при  $I_1 \rightarrow \infty$ . Условие  $I_1 \rightarrow \infty$  и соответствует появлению непрерывного спектра. (В предыдущем разделе мы видели, что условие появления непрерывного спектра мембранных колебаний является точно таким же.)

Интеграл  $I_1$  расходится на нижнем пределе в том случае, если поверхностная плотность  $s$  стремится к нулю достаточно медленно при  $\xi \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow R$ ). Тогда «тонкий край» диска подобен неограниченной среде: вблизи  $r = R$  укладывается бесконечное число осцилляций: из приведенного выше «правила квантования» видно, что при  $I_1 \rightarrow \infty$  число узлов  $N \rightarrow \infty$ . Мы увидим ниже, что область непрерывного спектра класса I включает все аксиально-симметричные неустойчивые моды и большинство неаксиально-симметричных неустойчивых мод, хотя последние имеют также и вне непрерывного спектра.

Непрерывный спектр класса II существует только для неаксиально-симметричных колебаний в плоскости неоднородно вращающегося диска. В случае, когда угловая скорость  $\Omega(r)$  монотонно падает к краю диска, этот спектр занимает полосу частот  $m\Omega(0) > \omega > m\Omega(R)$ . Причиной появления этого непрерывного спектра является резонанс орбитального движения частиц со скоростью волны  $\omega/m$ .

Задача определения условий возникновения и местонахождения непрерывного спектра для рассматриваемого здесь случая колебаний в плоскости диска может быть исследована аналогично случаю мембранных колебаний в разделе 2.1. Из анализа главного приближения разностных уравнений следует, что непрерывный спектр может возникнуть только в случае, когда функция  $f = \omega_* (\omega_*^2 - \kappa^2) \frac{\sigma_n}{\xi}$  обращается в нуль в какой-либо точке интервала  $0 \leq \xi \leq 1$  (т. е. внутри диска или на его краю).

В принципе есть три возможности: 1)  $\sigma_0/\xi = 0$ , 2)  $\omega_* = 0$ , 3)  $\omega_*^2 - \kappa^2 = 0$ .

Непрерывному спектру класса I соответствует первая из этих возможностей, частоты лежат в области [228]:

$$\omega_*^2|_{r=R} < \kappa^2|_{r=R} \quad (76)$$

Справа в (76) стоит квадрат эпициклической частоты на краю диска. Такой результат аналогичен полученному в предыдущем разделе (формула (70)). Однако теперь граничные частоты вполне могут быть чисто мнимыми (в отличие от случая мембранных колебаний, где они всегда действительны): это определяется степенью центральной конденсации в распределении массы в диске. Очевидно, что граничная частота должна стать действительной при достаточно развитой центральной конденсации, поскольку в предельном случае кеплеровской задачи квадрат эпициклической частоты заведомо положителен  $\kappa^2 = \Omega^2$ .

Непрерывному спектру класса II соответствует, очевидно, вторая из перечисленных выше возможностей зануления функции  $f$ . С подобными непрерывными спектрами мы уже встречались (см. § 6 главы II и раздел 3.4 главы III).

Рассмотренными классами I и II исчерпываются все возможные типы непрерывных спектров коллективных колебаний холодных дисков. Последний из упомянутых выше вариантов зануления функции  $f$ , связанный с равенством  $\omega_*^2 - \kappa^2 = 0$ , соответствует, очевидно, колебаниям индивидуальных частиц. Аналогичные случаи мы отмечали в § 6 главы II и разделе 3.4 главы III, где рассматривались колебания неоднородных цилиндров и сфер с круговыми орбитами. В дисковых системах, однако, эти колебания (т. е. сами круговые орбиты частиц) могут быть неустойчивыми ( $\kappa^2 < 0$ , см. также § 3 главы VIII).

Исследование Хантером спектра колебаний холодного вращающегося диска, подробно изложенное выше, можно, по-видимому, считать исчерпывающим. Подход, принятый Хантером, однако, чисто формальный, рассмотрение ведется на языке собственных мод колебаний, которые, как мы уже неоднократно отмечали, в случае непрерывного спектра являются сингулярными и не дают прямого ответа на вопрос об эволюции начального гладкого возмущения. С другой стороны, именно ответ на последний вопрос представляет наибольший интерес.

Покажем, как можно решать задачу о развитии начальных возмущений, локализованных вблизи от какой-либо заранее выбранной точки диска.

Для таких возмущений можно написать [333]

$$\sigma_1 = \frac{i\Phi_1'}{2\pi G} \left( \Phi_1' \equiv \frac{d\Phi_1}{dr} \right), \quad (77)$$

что эквивалентно (5). Тогда система двух связанных уравнений ((11) и уравнения Пуассона) сводится к одному уравнению для возмущенного потенциала

$$\Phi_1'' + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} + \frac{2\kappa\kappa' + 2m\omega_*\Omega'}{\omega_*^2 - \kappa^2} + \frac{i(\omega_*^2 - \kappa^2)}{2\pi G\sigma_0} \right] \Phi_1' - \left[ \frac{m^2}{r^2} + \frac{2m\Omega'}{r\omega_*} + \frac{2m\Omega}{r\omega_*} \frac{(\omega_*^2 - \kappa^2) \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} + 2\kappa\kappa' + 2m\Omega'\omega_*}{(\omega_*^2 - \kappa^2)} \right] \Phi_1 = 0. \quad (78)$$

Колебания, соответствующие непрерывному спектру  $\omega_* = 0$ , можно рассмотреть, исходя из полученного уравнения (78), совершенно так же, как для аналогичных колебаний в цилиндре с круговыми орбитами (см. § 6 главы II). Результаты вычислений в обоих случаях, по существу, совпадают.

Основные черты эволюции волнового пакета еще легче увидеть из гамильтоновых уравнений (см. (59), (60) в разделе 2.1), которые для

$\omega = m\Omega(r)$  дают

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{dk}{dt} = -m\Omega'(r). \quad (80)$$

Первое из этих уравнений означает, что в рассматриваемом случае возмущение, естественно, никуда не сносится. Второе уравнение показывает, что с течением времени происходит измельчение пространственного масштаба колебаний, обусловленное разным скоростям обращения частиц, находящихся на разных радиусах (ср. с § 6 главы II):

$$k(t) = k_0 - m\Omega'(r)t. \quad (81)$$

Другая возможность непрерывного спектра связана, как мы знаем, с плавным обращением в нуль поверхностной плотности  $\sigma_0(r)$  на краю диска. В этом случае тоже можно найти приближенное решение уравнения (78). В отсутствие значительного гало или большой центральной массы все коротковолновые возмущения диска (которые содержатся среди колебаний, принадлежащих рассматриваемому спектру) неустойчивы. Характер эволюции таких возмущений достаточно очевиден: аperiodическое нарастание с постепенным выделением наиболее мелкомасштабных составляющих начального возмущения.

**6. Вариационный метод.** В заключение параграфа остановимся на альтернативном подходе к исследованию устойчивости плоских гравитирующих систем, использующем вариационный принцип [140]. Если ввести вместо скоростей  $v_r$  и  $v_\varphi$  смещения  $\xi_r$  и  $\xi_\varphi$  ( $v_r = \partial \xi_r / \partial t$ ,  $v_\varphi = \partial \xi_\varphi / \partial t$ ) и ограничиться только аксиально-симметричными возмущениями, то использование линеаризованных уравнений гидродинамики холодного диска и уравнения Пуассона приводит к следующему интегральному уравнению для радиального смещения:

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\kappa^2 \xi_r - \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} (r' \sigma_0(r') \xi_r(r')) r' dr' d\varphi' \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \varphi'}}. \quad (82)$$

Это уравнение может быть представлено символически в виде

$$\sigma^{(0)} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = \hat{K} \xi_r, \quad (83)$$

где  $\hat{K}$  — оператор, явное выражение которого дается правой частью (82).

Докажем, что оператор  $\hat{K}$  является самосопряженным<sup>1</sup>, т. е. что

$$\iint \xi_1 \hat{K} \xi_2 ds = \iint \xi_2 \hat{K} \xi_1 ds \equiv -2W_{12}. \quad (84)$$

Для этого, очевидно, достаточно показать, что форма (84) может быть представлена в виде, явно симметричном относительно смещений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Ее часть, связанная с  $\kappa^2$ , уже симметрична, а «гравитационная» часть ( $\sim G$ )

$$W_{12}^{(G)} = \pi G \int_0^R dr r \sigma_0(r) \xi_1 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \sigma_0(r') \xi_2(r')) r' dr' d\varphi' \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \varphi'}} \quad (85)$$

<sup>1</sup> В случае неаксиально-симметричных возмущений исходная система гидродинамических уравнений не является самосопряженной.

интегрированием по частям приводится к искомой симметричной форме

$$W_{12}^a = -\pi G \int_0^R \int_0^R dr dr' \Phi(r, r') \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_0(r) \xi_1(r)) \frac{\partial}{\partial r'} (r' \sigma_0(r') \xi_2(r')), \quad (86)$$

где введено обозначение

$$\Phi(r, r') = \Phi(r', r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \varphi'}} = \frac{4}{(r+r')} K\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}\right), \quad (87)$$

$K(x)$  — полный эллиптический интеграл.

Доказанная самосопряженность означает, что уравнение (82) может быть получено из вариационного принципа наименьшего действия [53]

$$\delta \int L dt = 0. \quad (88)$$

Функция Лагранжа  $L$  равна разности кинетической  $T$  и потенциальной  $W$  энергии малых радиальных возмущений

$$L = T - W, \quad T = \frac{1}{2} \int ds \sigma_0 \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial t} \right)^2, \quad W = -\frac{1}{2} \int \xi_r \hat{K} \xi_r ds = W_v + W_G, \quad (89)$$

где

$$W_v = \pi \int_0^R dr \sigma_0 \kappa^2 \xi_r^2,$$

$$W_G = \pi G \int_0^R dr \xi_r r \sigma_0 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' \sigma_0(r') \xi_r(r')) r' dr' d\varphi'.$$

Для анализа устойчивости системы используется энергетический принцип. Он гласит, что для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы для любого смещения  $\xi_r$  было  $W > 0$ . В противном случае система неустойчива.

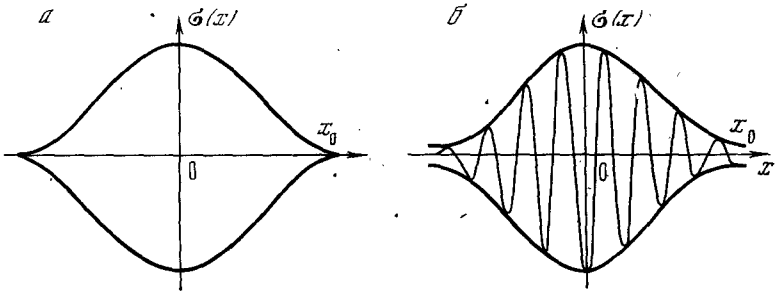


Рис. 38. Локализованные возмущения различного типа

$a - \kappa \approx 0$ ;  $b - \kappa x_0 \gg 1$

Знак каждого слагаемого выражения (89) характеризует его вклад в устойчивость системы. Знак приращения гравитационной энергии может быть отрицательным, т. е. гравитационное притяжение оказывает на систему дестабилизирующее действие. Знак первого слагаемого в (89) определяется характером зависимости скорости вращения  $v_{\varphi}^{(0)}(r)$  от радиуса. Если  $\kappa^2 > 0$ , т. е.<sup>1</sup> производная  $d(rv_{\varphi}^{(0)})/dr$  всюду положи-

<sup>1</sup> Условие  $\kappa^2 > 0$  не является, вообще говоря, следствием уравнения равновесия.

тельна,  $d(rv_\phi^{(0)})/dr > 0$ , то  $W_v > 0$ , и в этом случае вращение является стабилизирующим фактором.

Сформулированный энергетический принцип позволяет исследовать устойчивость рассматриваемой системы для любых радиальных возмущений. К сожалению, аналитический расчет гравитационного вклада в возмущенную потенциальную энергию в общем случае оказывается затруднительным. Сравнительно просто вычисления проводятся только для узко локализованных возмущений типа  $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 e^{ikr}$ , где  $\tilde{\sigma}_1(r) \neq 0$  лишь в узкой области размером  $\Delta r$  (рис. 38). Вычисление возмущенного потенциала в этом случае дает

$$\Phi_1 = \frac{4G\sigma_1}{k} \left\{ \sin(k\Delta r) \ln \frac{\Delta r}{8r} - \int_0^{k\Delta r} \frac{\sin y}{y} dy \right\}.$$

Но первый член в этом выражении обращается в нуль в силу сохранения массы

$$\int \sigma_1(r) r dr = 0,$$

поэтому получаем

$$\Phi_1 = -\frac{4G\sigma_1}{k} \int_0^{k\Delta r} \frac{\sin y}{y} dy = -\frac{4G\sigma_1}{k} \text{Si}(k\Delta r). \quad (90)$$

В случае, когда  $k\Delta r \rightarrow \infty$ , что соответствует коротковолновому (ВКБ) приближению, формула (90) переходит в выражение Тоомре (5), связывающее  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$  в этом пределе:  $\Phi_1 = -\frac{2\pi G}{k} \sigma_1$ . Нужно отметить, что отличие (90) и (5) максимально равно  $\frac{\text{Si}(\pi)}{\text{Si}(\infty)} \approx \frac{1,85}{1,57} \approx 1,2$  и, следовательно, не очень существенно для оценок. С другой стороны, метод ВКБ, приводящий к (5), позволяет исследовать устойчивость не только радиальных, но также и азимутальных возмущений (но обязательно коротковолновых). Полное исследование устойчивости относительно радиальных возмущений на основе вариационного принципа должно проводиться численными методами.

Обобщение вариационного принципа (88) на случай холодных дисков с магнитным полем рассматривается ниже (§ 3).

### § 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЕННОГО ДИСКА С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В настоящем параграфе исследуются малые колебания дисковых гравитирующих систем в полоидальном магнитном поле. Соответствующие равновесные состояния были рассмотрены в разделе 1.2 § 1.

В п. 1 дается качественный вывод условия устойчивости. В п. 2 доказывается и обсуждается вариационный принцип для случая радиальных колебаний диска в магнитном поле. Пункт 3 посвящен анализу коротковолновых колебаний, а в п. 4 приведены результаты численного расчета частот колебаний конкретной модели с однородным внешним полем  $B_z = B_0 = \text{const}$  и твердотельным вращением (на этом примере можно наглядно продемонстрировать появление непрерывного спектра частот при уменьшении поля ниже некоторого критического предела).

1. **Качественный вывод условия устойчивости.** Выведем критерий стабилизации гравитационной неустойчивости диска магнитным полем, пользуясь энергетическими оценками. Гравитационная энергия  $\epsilon_g$  обла-

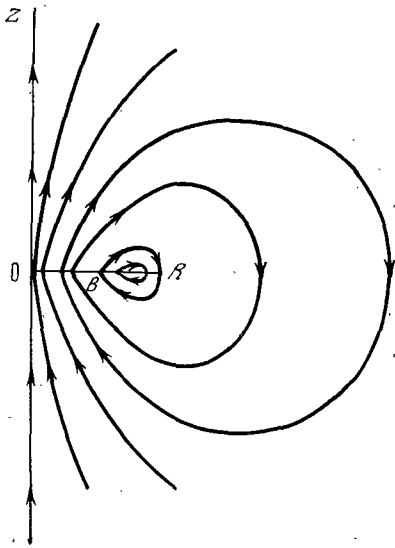


Рис. 39. Картина собственного магнитного поля, создаваемого токами, текущими в диске [27]

сти с линейным размером  $l$  есть  $\varepsilon_g \propto Gm^2/l$ , а магнитная энергия  $\varepsilon_H \sim \frac{1}{c} \int IA dS \sim \frac{IA}{c} l^2$ ,

где  $I$  — плотность поверхностного тока,  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ,  $I \propto cB$ ,  $\varepsilon_H \propto B^2 l^3 \propto \Phi^2 l^{-1}$ , где  $\Phi \propto Bl^2$  — магнитный поток через  $S$  — величина, сохраняющаяся при возмущениях. Таким образом, гравитационная и магнитная энергии оказываются одинаково зависящими от размера возмущенной области, и мы получаем универсальный по отношению к длине волны (по крайней мере, в области коротких и «промежуточных» длин волн) критерий стабилизации:  $\varepsilon_H > \varepsilon_g$ , т. е.  $B_{oz}^2 > > (2\pi\sigma_0)^2 G$ .

Универсальность (по отношению к любым длинам волн) критерия устойчивости можно было предвидеть после работы Хантера [229], показавшего хорошее совпадение полученных численным методом собственных частот с их значениями в ВКБ-приближении, вплоть до самых длинноволновых мод.

**2. Вариационный принцип.** Рассматриваются малые колебания бесконечно тонкого холодного диска в полярном магнитном поле (рис. 39). Мы начнем с формулировки и доказательства вариационного принципа для малых колебаний гравитирующего диска в собственном магнитном поле.

Запишем линеаризованную систему исходных уравнений в безразмерных переменных [95]

$$i(\lambda - m\Omega)u - 2\Omega v = -\frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{s} (J_{\varphi_0} H_z + J_{\varphi} H_{z_0}) - \frac{\Sigma}{s^2} J_{\varphi_0} H_{z_0}, \quad (1)$$

$$i(\lambda - m\Omega)v + \left(2\Omega + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\Omega}{d\xi}\right) u = \frac{im\psi}{(1 - \xi^2)^{1/2}} - \frac{1}{s} J_r H_{z_0}, \quad (2)$$

$$i(\lambda - m\Omega)(1 - \xi^2)^{1/2} \xi \Sigma + \xi s (u + imv) = (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} (su), \quad (3)$$

$$i(\lambda - m\Omega) \left( \frac{H_z}{s} - \frac{H_{z_0} \Sigma}{s^2} \right) - \frac{u}{\xi} (1 - \xi^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H_{z_0}}{s} \right) = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$H = \left( \frac{R^4}{\pi GM^2} \right)^{1/2} B, \quad J = \frac{2\pi}{c} \left( \frac{R^4}{\pi GM^2} \right)^{1/2} j,$$

а остальные обозначения совпадают с использованными в разделе 2.2. Зависимость от безразмерного времени  $\tau$  выбрана в виде  $e^{i\lambda\tau}$ . Первые три уравнения представляют собой уравнения Эйлера и уравнение непрерывности, а четвертое выражает условие вмороженности. К уравнениям (1) — (4) нужно добавить уравнение Пуассона и уравнения Максвелла:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \delta(z) \sigma, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi j}{c} \delta(z). \quad (7)$$



Покажем, что в случае радиальных возмущений исходные уравнения могут быть получены из некоторого вариационного принципа наименьшего действия.

Введем радиальное смещение  $\eta$ :  $u = \partial\eta/\partial\tau$ . Тогда получим

$$s \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = s \chi_H^2 \eta - s \frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{\xi} \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \xi} + H_{z0} J_\Phi(\eta) = \hat{K}_1 \eta + \hat{K}_2 \eta + \hat{K}_3 \eta \equiv -\hat{K} \eta. \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\chi_H^2 = 2\omega \left( 2\omega + \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} \right) + \frac{J_{\Phi_0} (1 - \xi^2)^{1/2}}{s^2 \xi} \left( H_0 \frac{ds}{d\xi} - s \frac{dH_0}{d\xi} \right)$$

и введены операторы

$$\hat{K}_1 \eta = s \chi_H^2 \eta; \quad \hat{K}_2 \eta = -s \frac{(1 - \xi^2)^{1/2}}{\xi} \frac{\partial \Psi(\eta(\xi))}{\partial \xi}; \quad (9)$$

$$\hat{K}_3 \eta = H_{z0} J_\Phi(\eta(\xi)).$$

Оказывается, что уравнение малых колебаний (8) может быть получено из следующего вариационного принципа:

$$\delta \left\{ \int L d\tau \right\} = 0, \quad L = T - W; \quad T = \frac{1}{2} \int s \left( \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 dS, \\ W = \frac{1}{2} \int \eta \hat{K} \eta dS; \quad dS = 2\pi r dr = -2\pi \xi d\xi. \quad (10)$$

Для доказательства вариационного принципа (10) необходимо показать самосопряженность операторов  $\hat{K}_1$ ,  $\hat{K}_2$ ,  $\hat{K}_3$ . Самосопряженность операторов  $\hat{K}_1$  и  $\hat{K}_2$  была доказана в конце раздела 2.2. Покажем, что и оператор  $\hat{K}_3$  является самосопряженным, т. е.

$$\int \eta_1 \hat{K}_3 \eta_2 dS = \int \eta_2 \hat{K}_3 \eta_1 dS. \quad (11)$$

Воспользуемся разложениями по полиномам Лежандра. Пусть смещение  $\eta_2$  представляется в виде ряда

$$\eta_2 = (1 - \xi^2)^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{2m-1} p'_{2m-1}(\xi). \quad (12)$$

Система функций  $(1 - \xi^2)^{1/2} p'_{2m-1}$  является полной и ортогональной на отрезке (0,1). Возмущение магнитного поля  $H_z$  будем искать в виде

$$H_z = \frac{1}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \beta_{2n-1} p_{2n-1}(\xi); \quad \beta_{2n-1} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \right]^2. \quad (13)$$

Так как из (3), (4) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ \sqrt{1 - \xi^2} H_{z0} \eta \},$$

то

$$\sqrt{1 - \xi^2} H_{z0} \eta_2 = \int_1^{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \beta_{2n-1} p_{2n-1} d\xi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n-1}}{2n(2n-1)} \beta_{2n-1} (1 - \xi^2) \cdot p'_{2n-1}(\xi), \quad (14)$$

где коэффициенты  $g_{2n-1}$  легко находятся из (14)

$$g_{2n-1} = -1/\beta_{2n-1} \sum_m \chi_{2m-1} \int_0^1 (1-\xi^2) \rho'_{2m-1}(\xi) \rho'_{2n-1}(\xi) H_0(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Соответствующее (13) возмущение тока  $J_\varphi$ , как показано в § 1, имеет вид при условии  $J_\varphi(0) = 0$

$$J_\varphi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \rho'_{2n-1}(\xi). \quad (16)$$

Пусть теперь

$$\eta_1 = \sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k-1} \rho'_{2k-1}(\xi),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int \eta_1 \hat{K}_3 \eta_2 \xi d\xi &= \int_0^1 \left\{ \sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k-1} \rho'_{2k-1} \right\} \left\{ \sqrt{1-\xi^2} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \times \right. \\ &\times \beta_{2n-1} \rho'_{2n-1} \left. \right\} H_0 d\xi = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n-1}^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{2m-1} \int_0^1 (1-\xi^2) \rho'_{2m-1} \rho'_{2n-1} H_0 d\xi \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k-1} \int_0^1 (1-\xi^2) \rho'_{2k-1} \rho'_{2n-1} H_0(\xi) d\xi = \int \eta_2 \hat{K}_3 \eta_1 \xi d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Самосопряженность оператора  $\hat{K}_3$  (и, следовательно, справедливость вариационного принципа (10)) доказана.

Из (8) имеем

$$\alpha_n^2 = \frac{\int \eta_n \hat{K} \eta_n dS}{\int s \eta_n^2 dS}, \quad (18)$$

где  $\eta_n$  — какое-нибудь решение уравнения (8) с фиксированной частотой  $\alpha_n$ .

Сделаем некоторые общие замечания, касающиеся вариационного принципа.

1. Вариационный принцип в случае вращающихся систем существует только для радиальных возмущений (которые сохраняют симметрию исходного состояния). Формальная возможность вывода вариационного принципа для таких возмущений связана с сохранением углового момента частицы, позволяющим исключить из уравнений движения азимутальную компоненту скорости.

Выводить вариационный принцип из уравнений движения, как это сделано выше, вообще говоря, не обязательно, можно непосредственно варьировать полную энергию системы с учетом имеющихся дополнительных законов сохранения: магнитного потока в случае идеальной замороженности, углового момента единицы массы и др. Такой подход в применении к рассматриваемой в данном параграфе холодной дисковой системе с замороженным магнитным полем был принят в работе [27].

2. Из положительности второй вариации полной энергии для некоторого частного возмущения

$$\delta^2 \varepsilon = \frac{1}{2} \int \eta \hat{K} \eta dS > 0$$

делать вывод об его устойчивости следует с осторожностью, чтобы не допустить характерной ошибки. Например, вариационный принцип можно использовать для исследования устойчивости возмущений типа одно-

родных растяжений — сжатий;  $\eta = \alpha r$ . Положительность второй вариации энергии для этих возмущений может быть легко доказана. Но положительность  $\delta^2 \varepsilon$  еще не означает устойчивости, так как эти возмущения не имеют (вообще говоря) определенной частоты. Действительно, пусть

$$\eta = \alpha r = \sum_n \alpha_n \eta_n,$$

где  $\eta_n$  — решение с определенной частотой  $\lambda_n$ . Вычислим вторую вариацию энергии  $\delta^2 \varepsilon$ , пользуясь тем, что решения самосопряженного уравнения (8) с разными частотами взаимно ортогональны с весом  $\sigma_0$ :

$$\delta^2 \varepsilon = \frac{1}{2} \sum_n \beta_n \lambda_n^2; \quad \beta_n = |\alpha_n|^2 \int |\eta_n|^2 \sigma_0 dS.$$

Положительность  $\delta^2 \varepsilon$ , очевидно, еще не означает, что все входящие в выражение для  $\delta^2 \varepsilon$  квадраты частот  $\lambda_n^2$  положительны. В то же время для неустойчивости, как известно, достаточно, чтобы хотя бы одна из  $\lambda_n^2$  была отрицательной.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть гравитирующий диск без магнитного поля с поверхностной плотностью  $\sigma_0 = \alpha \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{1/2} + \beta \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^{3/2}$ . В этом случае легко непосредственно убедиться в том, что возмущение с  $\eta = \alpha r$  не является решением с определенной частотой, а следовательно, оно неустойчиво, так как в спектре рассматриваемой модели содержится лишь одна устойчивая гармоника [228]. Устойчивыми, действительно, оказываются самые крупномасштабные моды, не имеющие узлов потенциала и плотности на диске, но для них  $\eta \neq \alpha r$ .

**3. Коротковолновое приближение.** Локальное дисперсионное уравнение в рассматриваемом случае получается тем же способом, что и дисперсионное уравнение Тоомре (см. раздел 2.2). Допустим для простоты, что возмущения аксиально-симметричны. Тогда из (6), (7) можно получить

$$\Delta B_z = \frac{4\pi}{cr} \frac{d}{dr} (r J_\Phi) \delta(z). \quad (19)$$

Это уравнение пока точное. Оно имеет такой же вид, как и уравнение Пуассона

$$\Delta \psi = 4\pi G \sigma \delta(z); \quad (20)$$

и используется аналогичным образом. В коротковолновом приближении из (19), как в разделе 2.2 для (20), получим

$$B_{1z} = i \frac{2\pi}{c} J_{\Phi 1} e^{-k|z|}, \quad (21)$$

где  $k$  — радиальное волновое число,  $kr \gg 1$ ; возмущенные величины  $\sim e^{-i\omega t + ikr}$ . Используя (21), а также аналогичную связь между  $\Phi_1$  и  $\sigma_1$  (см. раздел 2.2), можно вывести искомое локальное дисперсионное уравнение<sup>1</sup>

$$\lambda^2 = \chi_H^2 - \left( s - \frac{\pi H_0^2}{s} \right) \pi^{-1} |k|, \quad \omega^2 = \chi_H^2 - k(2\pi G \sigma_0 - B_{0z}^2 / 2\pi \sigma_0). \quad (22)$$

<sup>1</sup> При учете теплового разброса правая часть (22) имеет дополнительное слагаемое  $k^2 v^2$ , где  $v^2$  определяет дисперсию скоростей. Член  $\chi_H^2$  в (22) учитывает вращение и неоднородность  $H_0$  и  $\sigma_0$  (см. (8), (9)).

Из (22) видно, что при  $\pi H_0^2 > s^2$  короткие волны стабилизируются магнитным полем. Как мы покажем в п. 3, этот результат остается справедливым и для длинных волн при условии  $\chi_H^2 > 0$ .

Интересная ситуация возникает, когда условие  $\pi H_0^2 > s^2$  выполняется только в части диска. Назовем область диска, в которой  $s^2 < \pi H_0^2$ , «локально устойчивой» областью (ЛУО), а область, в которой  $s^2 > \pi H_0^2$ , — «локально неустойчивой» (ЛНО). Отметим, что если даже ЛУО является часть диска, сравнимая с полной массой, это не означает устойчивости основной массы диска, так как неустойчивыми могут быть длины волн порядка размеров ЛНО, которые не локализируются в ЛНО, а захватывают весь диск. К сожалению, в самосогласованных моделях диска с магнитным полем, предложенных в [27], размеры ЛНО порядка радиуса диска, и их неустойчивость очевидна.

Вблизи от точки  $\xi = \xi_0$ , разделяющей ЛНО и ЛУО, локальный анализ несправедлив и требуется более детальное исследование исходных уравнений. (Как отмечено в § 1, указанная ситуация всегда возникает при рассмотрении диска с самосогласованным магнитным полем.) Такое исследование было проведено в работе [95] (см. задачу 1). Оно использует технику разложения всех возмущенных величин в ряды по полиномам Лежандра, аналогичную примененной ранее Хантером в задаче о колебаниях диска без магнитного поля (см. разделы 2.1 и 2.2 и ниже, п. 4).

Компонента  $H_{z0}$  самосогласованного магнитного поля обязательно меняет знак на диске. А так как поверхностная плотность  $s$  убывает до нуля на краю диска, то всегда имеется по крайней мере одна ЛНО.

Нетрудно убедиться в том, что для создания значительного по величине магнитного поля (т. е. такого, что величина магнитного давления оказывается порядка плотности центробежной энергии) достаточны столь малые токи, что токовая скорость на много порядков меньше азимутальной скорости вращения. Вопрос о существовании таких токов в конце концов относится к проблеме магнитного динамо в плоских галактиках; этой проблеме посвящено немало работ, изложение результатов которых лежит вне рамок нашей книги.

Модель гравитирующего вращающегося диска с самосогласованным магнитным полем можно использовать как модель плоской протогалактики. В последнее время аналогичная модель обсуждается как одна из возможных моделей квазара. В этом случае вопрос устойчивости играет особенно важную роль. Действительно, неустойчивая модель плоской галактики с самосогласованным магнитным полем хороша тем, что в ее рамках можно описать возникновение спиралей — вследствие неустойчивости. Очевидно, с другой стороны, что тот же факт неустойчивости губителен для модели квазара с немалым временем жизни.

Для вычисления частот колебаний мы должны приравнять фазу коротковолнового решения  $\exp \left\{ i \int_0^R |k| dr \right\}$  целому числу ( $N$ )  $\pi$ . Тогда получим следующее выражение для коротковолновой части спектра частот  $\lambda_N$  системы:

$$\int_0^R \frac{\lambda_N^2 - \chi_H^2}{-s + \frac{\pi H_0^2}{s}} dr \sim N \quad (N \gg 1) \quad (24)$$

или

$$\lambda_N^2 = I_2/I_1 + N/I_1,$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2} (-s + \pi H_0^2/s)}; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\chi_H^2 \xi d\xi}{(1 - \xi^2)^{1/2} (-s + \pi H_0^2/s)}.$$

Интегралы теряют смысл, если где-либо на диске  $s^2 = \pi H_0^2$ . Вблизи от этой точки фаза принимает сколь угодно большие значения. Как показано в работах [228, 230], такая ситуация обычно соответствует появлению непрерывного спектра. Строгий анализ (см. задачу 1) подтверждает это ожидание.

**З а м е ч а н и я.** 1. Дисперсионное уравнение (22), а следовательно, и соответствующий критерий устойчивости можно получить из дисперсионного уравнения для гравитирующего плоского однородного слоя конечной толщины в однородном вертикальном магнитном поле, которое было выведено в работе Аггарсвела и Телвора [158]:

$$-\frac{\omega^2}{4\pi G\rho} \left[ \operatorname{ch} ql - \frac{q^2}{k^2} \operatorname{ch} X \frac{\operatorname{ch} ql + \frac{q}{k} \operatorname{sh} ql}{\operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X} \right] = \\ = \left( \frac{\operatorname{ch} X}{\operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X} - X \right) \left( \frac{q}{k} \operatorname{sh} ql - \frac{q^2}{k^2} \operatorname{sh} X \frac{\operatorname{ch} ql + \frac{q}{k} \operatorname{sh} ql}{\operatorname{ch} X + \operatorname{sh} X} \right),$$

где  $l$  — полутолщина слоя,  $k$  — волновой вектор,  $q = \frac{\gamma \sqrt{4\pi\rho}}{H}$ ,  $\gamma$  — инкремент,  $X = kl$ . В случае коротковолновых возмущений члены, связанные с вращением, несущественны, и поэтому критерии устойчивости для вращающегося диска и бесконечно тонкого слоя совпадают.

2. Вместо рассмотрения нормальных мод можно (и в данном случае даже более естественно — см. § 2) решать задачу об эволюции начального возмущения. Мы не останавливаемся здесь на этом подробнее, поскольку решение проводится вполне аналогично тому, как это делалось в § 2 (для колебаний, принадлежащих непрерывному спектру класса I). В частности, можно показать, что возмущения, заданные в ЛУО вблизи от окружности  $\xi = \xi_0$ , должны сноситься к этой окружности.

**4. Численный анализ конкретной модели.** В этом пункте мы рассмотрим появление непрерывного спектра на примере конкретной модели с внешним магнитным полем:

$$s = 3\xi; \quad B_0 = h = \text{const}; \quad J_{\varphi_0} = 0; \quad \chi_H^2 = 3. \quad (25)$$

«Несамосогласованность» модели несущественна для выяснения вопроса о появлении непрерывного спектра, зато позволяет выяснить характер сближения корней дискретного спектра при уменьшении  $h$  от  $h > h_{\text{кр}}$  к  $h < h_{\text{кр}}$ .

Для модели (25) условие

$$s^2 - \pi H_0^2 = 9\xi^2 - \pi h^2 = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

показывает, что непрерывный спектр должен появляться при  $h = h_{\text{кр}} = 3/\sqrt{\pi}$ .

Дополнительное удобство заключается в том, что здесь мы имеем возможность перейти от системы двух разностных уравнений к одному уравнению. В этом пункте мы воспользуемся несколько иным разложе-

нием для  $H$  и  $J$ , чем в п. 2:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} p_{2n}(\xi); \quad J_{\varphi} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n}(\xi). \quad (26)$$

Подставим (26) в (1) — (4):

$$-(\lambda^2 - 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n} p'_{2n}}{\gamma_{2n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n} p'_{2n} - \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n}, \quad (27)$$

$$9\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} p_{2n} - 3\xi h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p_{2n} = 3h(1-\xi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n}. \quad (28)$$

Исключим из (27)  $g_{2n}$ :

$$g_{2n} = \frac{\pi}{n} [\lambda^2 - 3(1 - \gamma_{2n})] \Phi_{2n}$$

и подставим в (28). Приравнявая в (28) коэффициенты при  $p'_{2n}$ , мы получим пятичленное разностное уравнение [95].

Частоты  $\lambda^2$  определяем, приравнявая нулю бесконечный определитель, соответствующий этому уравнению. В случае  $h > h_{кр}$ , как показано

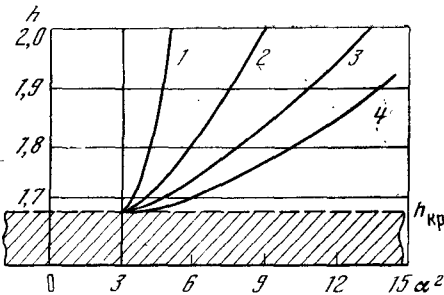


Рис. 40. Траектории частот колебаний в моделях твердотельно-вращающихся дисков с внешним магнитным полем

Частоты неограниченно сближаются при  $h \rightarrow h_{кр} = 3/\sqrt{\pi}$ . При  $h = h_{кр}$  спектр колебаний становится непрерывным (заштриховано); 1, 2, 3, ... — номера мод

в задаче 1,  $\Phi_{2n}$  убывают экспоненциально с ростом  $n$ . Это дает возможность ограничиться каким-либо (достаточно большим) конечным числом уравнений.

В вычислениях [95] принималось  $N=40$ . На рис. 40 показан процесс сближения дискретных мод колебаний при  $h \rightarrow h_{кр}$ . Видно, что при  $h \rightarrow h_{кр}$  расстояние между корнями стремится к нулю.

Подчеркнем, что  $\lambda^2 = \chi_H^2 = 3$  является не точкой сгущения дискретного спектра при  $h = h_{кр}$ , а границей непрерывного спектра. Модель с  $h = h_{кр}$  ( $\xi_0 = 1$ ) должна исследоваться отдельно (случай кратных корней). Можно показать, что в этой модели имеется непрерывный спектр в области  $\lambda^2 > \chi_H^2 = 3$ , причем вблизи  $\xi = \xi_0$ :

$$\sum \sim |\xi - \xi_0|^{-3/2} \exp \left\{ i \frac{\sqrt{\lambda^2 - 3}}{\sqrt{|\xi - \xi_0|}} \right\}, \quad \text{и}$$

интеграл, определяющий возмущенную массу, имеет вид  $\sim \int e^{ikx} dx$ , как и в моделях, рассмотренных в [228]. При  $h < h_{кр}$  появляется также непрерывный спектр и в области  $\lambda^2 < \chi_H^2 = 3$ . Неустойчивость связана, естественно, с наличием узлов у возмущенных величин в ЛНО.

Численно исследовалась также и модифицированная модель (25), учитывающая малое давление, которое принималось в виде  $P_0 = \varepsilon_0^3$  при нескольких значениях параметра  $\varepsilon$ . Спектр частот, как и следовало ожидать, оказался дискретным, причем расстояние между частотами уменьшалось вместе с  $\varepsilon$ . Траектории частот на рис. 40 при этом не сливались в точке  $\lambda^2 = 3$ , а продолжались, не пересекаясь, в область  $\lambda^2 < 0$ . При

уменьшении  $h$  первыми неустойчивыми модами становятся наиболее длинноволновые. Это, естественно, объясняется тем, что моды с большей длиной волны имеют большую амплитуду в ЛНО.

Из полученных результатов следует, что холодный гравитирующий диск с собственным магнитным полем всегда неустойчив. Для получения устойчивых моделей можно, например, ввести давление газа. Отметим также, что если говорить о магнитном поле Галактики, то, по крайней мере в настоящую эпоху, оно, как известно, имеет скорее тороидальную конфигурацию. Модель вращающегося диска с замороженным в него горизонтальным полем более трудна для исследования, чем с вертикальным полем.

По этому вопросу имеется работа Линден-Белла [285] об устойчивости бесконечно тонкого газового диска (поле считается однородным). Магнитное поле может оказывать дестабилизирующее воздействие на длинных волнах. Найденный инкремент неустойчивости в слабых полях пропорционален  $B_0$ .

## § 4. УСТОЙЧИВОСТЬ «ГОРЯЧЕГО» ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

### 4.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ КОРОТКИХ ДЛИН ВОЛН

#### 1. Бесстолкновительный диск. Главный порядок ВКБ-приближения.

В разделе 2.2 мы показали, что *холодный* вращающийся диск неустойчив относительно многих типов возмущений<sup>1</sup>. Влияние хаотических движений частиц (конечной «температуры») в бесстолкновительном диске на его устойчивость впервые учел в коротковолновом приближении Тоомре [333]. Он ограничился рассмотрением радиальных возмущений. В дальнейшем Линь и Шу [270, 271] обобщили дисперсионное уравнение Тоомре на случай произвольных возмущений. Ниже мы будем следовать в основном работе [271], содержащей подробный вывод и анализ этого более общего дисперсионного уравнения.

В главном порядке ВКБ-приближения уравнение Пуассона, как мы знаем, дает следующую связь между возмущенными поверхностной плотностью  $\sigma_1$  и гравитационным потенциалом  $\Phi_1$ :

$$\Phi_1 = - \frac{2\pi G}{k} \sigma_1. \quad (1)$$

Поэтому нашей задачей является вычисление *отклика* бесстолкновительного диска на спиральное гравитационное поле, которое можно считать заданным. Совместно с (1) это приведет к искомому дисперсионному уравнению.

В § 4 главы II нам встречалась очень похожая задача, и ниже мы используем некоторые из выведенных там формул.

Обозначим через  $v_r$ ,  $v_\phi$  компоненты хаотических скоростей частиц (в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$ ;  $v_z=0$ ) и ограничимся рассмотрением систем с орбитами, которые в среднем не сильно отличаются от круговых. Тогда  $v_r$  совпадает с полной радиальной скоростью, поскольку радиального потока в стационарном состоянии нет, а  $v_\phi$  отличается от полной азимутальной скорости на величину  $r\Omega_0(r)$ , где  $r\Omega_0^2(r) = -\partial\Phi_0/\partial r$  ( $\Phi_0$  — аксиально-симметричный потенциал диска в стационарном состоянии).

<sup>1</sup> В этом разделе (как и в 4.3) мы ограничимся рассмотрением возмущений в плоскости диска (аналогично разделу 2.2 для холодного диска).

Функция распределения  $f(r, \varphi, v_r, v_\varphi, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \Omega_0 + \frac{v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Omega_0 r^2 + 2\Omega_0 v_\varphi + \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} + \frac{\kappa^2}{2\Omega_0} v_r + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0. \quad (2)$$

Удобно ввести безразмерные скорости  $\xi, \eta$  по формулам

$$v_r = \xi V_1 \equiv \xi \left( \frac{2\Omega_0}{\kappa} \right) (r\Omega_0), \quad v_\varphi = \eta V_2 \equiv \eta (r\Omega_0)$$

с масштабными множителями  $V_1$  и  $V_2$  в соответствии с теорией эпициклов (см., например, § 1). Линеаризуем уравнение (2), подставляя

$$\Phi = \Phi_0(r) + \Phi_1, \quad f = f_0(1 + \psi) \equiv e^{-Q_0}(1 + \psi), \quad \Phi_1 \ll \Phi_0, \quad \psi \ll 1 \quad (3)$$

и затем

$$\Phi_1, \quad \psi \sim e^{-i\omega t + im\varphi + ikr} \quad (kr \gg m). \quad (4)$$

Такой вид функций (4) соответствует возмущениям спиральной формы, причем уравнение спирали есть

$$kr + m\varphi = \text{const}. \quad (5)$$

При этом случай  $k/m < 0$  отвечает «отстающим» спиральям, а случай  $k/m > 0$  — «лидирующим» (см. рис. 37).

В главном порядке по малому параметру  $\varepsilon = 1/kr$  получим

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + i(v + \alpha\xi)\psi = -\frac{i\alpha\Phi_1}{V_1^2} \frac{\partial Q_0}{\partial \xi}, \quad (6)$$

где

$$\alpha = (kr)(2\Omega_0^2/\kappa^2), \quad (7)$$

$$v = (\omega - m\Omega_0)/\kappa. \quad (8)$$

В дальнейшем предполагается, что стационарная функция распределения  $f_0$  зависит от  $\xi, \eta$  в комбинации  $(\xi^2 + \eta^2)$ :

$$Q_0 = Q_0(\xi^2 + \eta^2, r). \quad (9)$$

Это заведомо так для случая, когда рассматриваются только звезды с малыми пекулярными скоростями (§ 1). Именно такой случай представляет, по-видимому, наибольший интерес с точки зрения приложений теории (§ 3 главы VIII). Вклад малой доли частиц, обладающих большими пекулярными скоростями, пренебрежимо мал, особенно если учесть, что спиральное гравитационное поле на них почти не действует (см. ниже «редукционный фактор», с помощью которого учитывается этот эффект).

Функция распределения Шварцшильда, которая чаще всего используется для конкретных расчетов, тоже имеет вид (9), причем

$$Q_0 = \frac{1}{2}(v_r^2/c_r^2 + v_\varphi^2/c_\varphi^2) + Q_{00}(r), \quad (10)$$

где  $c_r$  и  $c_\varphi$  — дисперсии скоростей.

Вводя полярные координаты  $(\tau, s)$  в пространстве безразмерных скоростей  $(\xi, \eta)$

$$\xi = \tau \cos s, \quad \eta = \tau \sin s,$$

сведем уравнение (6) к следующему:

$$-\frac{d\psi}{ds} + i(v + \alpha\tau \cos s)\psi = -\frac{2i\alpha\Phi_1}{V_1^2} \frac{dQ_0}{d\tau^2} \tau \cos s. \quad (11)$$



Полученное уравнение с точностью до обозначений совпадает с уже встречавшимся нам уравнением (11) из § 4 главы II. Решение запишется в виде

$$\psi = -\frac{2\Phi_1}{V_1^2} \frac{dQ_0}{dt^2} [1 - q(\alpha\xi, \alpha\eta, \nu)], \quad (12)$$

где

$$q = \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i[\nu s - \alpha\xi \sin s + \alpha\eta(1 + \cos s)]\} ds. \quad (13)$$

Для получения отклика поверхностной плотности нужно проинтегрировать по скоростям величину

$$f_1 = f_0\psi = \frac{2\Phi_1}{V_1^2} \frac{df_0}{dt^2} (1 - q). \quad (14)$$

Линь и Шу [270, 271] делают это для случая функции распределения Шварцшильда

$$f_0 = \sigma_0(r) \frac{\Omega_0}{\pi\kappa c_r^2} \exp\left[-\frac{V_1^2}{2c_r^2}(\xi^2 + \eta^2)\right], \quad (15)$$

где  $\sigma_0(r)$  — равновесная поверхностная плотность:

$$\sigma_0(r) = \iint f_0 dv_r dv_\phi.$$

Для функции распределения (15)  $f_1$  выражается формулой

$$f_1 = -\frac{\Phi_1}{c_r^2} f_0 (1 - q). \quad (16)$$

Соответствующее (16) возмущение поверхностной плотности равно

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \frac{\Phi_1}{c_r^2} \langle (1 - q) \rangle, \quad (17)$$

где  $\langle \rangle$  означает среднее с весом  $\exp[-\mu_0(\xi^2 + \eta^2)/2]$ ,  $\mu_0 \equiv V_1^2/c_r^2$ . Для вычисления (17) можно воспользоваться известной формулой

$$\langle e^{i\lambda\xi} \rangle = e^{-\lambda^2/2\mu_0}.$$

Таким образом легко получить

$$\langle (1 - q) \rangle = 1 - \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} G_\nu(x), \quad (18)$$

где

$$x = \frac{k^2 c_r^2}{\kappa^2}, \quad (19)$$

$$G_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x(1+\cos s)} \cos \nu s ds. \quad (20)$$

Величина  $x$  имеет порядок

$$x \sim (\rho/\lambda)^2,$$

где  $\lambda$  — длина волны возмущения,  $\rho$  — средний размер эпицикла:  $\rho \sim c_r/\kappa$ .

Используя соотношения (17)–(20), представим отклик поверхностной плотности на возмущающий гравитационный потенциал  $\Phi_1$  в виде

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = -\frac{k^2 \Phi_1}{\kappa^2 (1-v^2)} \mathcal{F}_v(x), \quad (21)$$

где введен «редукционный фактор»

$$\mathcal{F}_v(x) = \frac{1-v^2}{x} \left[ 1 - \frac{v\pi}{\sin v\pi} G_v(x) \right]. \quad (22)$$

Дисперсионное уравнение получается из сравнения (21) с (1):

$$\frac{k_T}{|k|} (1-v^2) = \mathcal{F}_v(x), \quad (23)$$

где  $k_T = \kappa^2 / 2\pi G \sigma_0$  — критическое волновое число Тоомре.

Альтернативная форма дисперсионного уравнения, также полученная Линем и Шу [271], следующая:

$$\frac{k_T}{k} = \frac{1}{x} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n(x)}{(v/n)^2 - 1} \right], \quad (24)$$

где  $I_n(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента. Подобная форма записи обычно используется в аналогичных задачах физики плазмы [86]. В обычных обозначениях (23) означает

$$(\omega - m\Omega_0)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \cdot k \cdot \sigma_0 \mathcal{F}_v(x). \quad (25)$$

Напомним, что для холодного диска дисперсионное уравнение совпадает с (25) при  $\mathcal{F}_v(x) = \mathcal{F}_v(0) = 1$ . Таким образом, «редукционный» фактор  $\mathcal{F}_v(x)$ , который равен единице при  $x=0$  и убывает с ростом  $x$ , т. е. с увеличением средней дисперсии скоростей частиц, количественно учитывает тот факт, что на звезды с большими длины волн:  $\rho > \lambda$ ) гравитационное поле с длиной волны  $\lambda$  влияет слабо. Графики  $\mathcal{F}_v(x)$  для некоторых значений  $v$  приведены на рис. 41, который мы заимствовали из работы Линя и Шу [271]<sup>1</sup>. Вычисление редукционного фактора  $\mathcal{F}_v(x)$  и соответствующего дисперсионного уравнения (25) — главный результат этой работы.

Для всех интересных значений  $v$  функция  $\mathcal{F}_v(x)$  является положительно определенной (при действительных  $v^2$ ). Поэтому согласно (21) максимумы отклика поверхностной плотности  $\sigma_1$  отвечают минимумам потенциала  $\Phi_1$ , как это следует из уравнения Пуассона (см. формулу (1)), только в области, где

$$v^2 < 1. \quad (26)$$

Иначе говоря, только в области (26) отклик плотности локально согласуется с тем, который требуется для поддержания спирального гравитационного поля. Точки  $r_1$  и  $r_2$ , в которых  $v^2 = 1$ , называются точками линдбладовского резонанса; в них  $\omega/m = \Omega \pm \kappa/m$ . Они играют важную роль в теории спиральной структуры Линя и Шу (см. § 3 главы VIII), которые считают в соответствии со сказанным выше, что быстро осциллирующее в радиальном направлении решение спирального типа заключено между  $r_1$  и  $r_2$ . Вне резонансов решение должно иметь существенно другой вид. В подтверждение можно заметить, что, например, из численного расчета радиальных колебаний всего диска, выполненного Тоомре [333], следует, что на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) решения убывают приблизительно экспоненциально.

<sup>1</sup> В [271] имеется также таблица значений  $\mathcal{F}_v(x)$ .

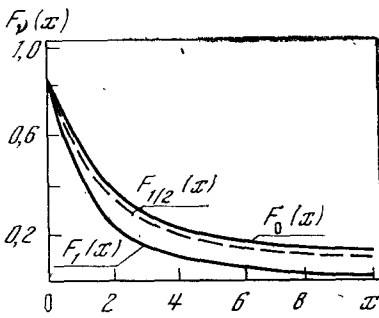


Рис. 41. Зависимость редуционного фактора  $F_v(x)$  от радиальной дисперсии скоростей звезд [271]

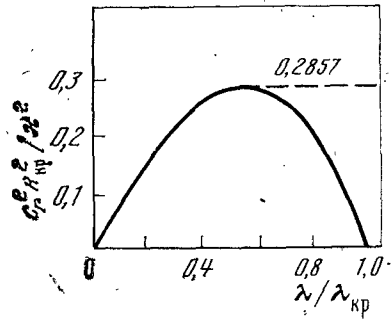


Рис. 42. Кривая маргинальной устойчивости осесимметричных возмущений вращающегося звездного диска [333]

Неустойчивости соответствует область под кривой

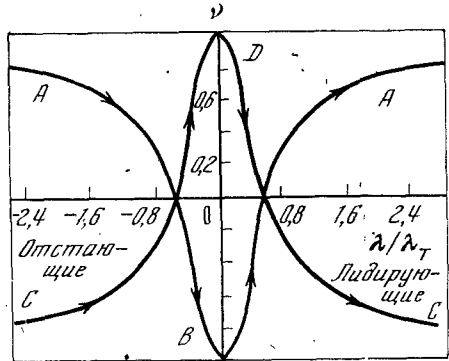


Рис. 43. Графическое представление дисперсионного соотношения (23) для маргинально стабильного звездного диска

Разумеется, в действительности требуется специальный, более аккуратный анализ решения вблизи от линдбладовских резонансов, даже внутри области (26) (см. ниже, с. 275).

В частном случае радиальных колебаний ( $m=0$ ) задача решалась Тоомре [333]. Ограничившись радиальными возмущениями, не зависящими от времени, Тоомре получил для них следующее уравнение:

$$\frac{kc_r^2}{2\pi G\sigma_0} = 1 - \exp\left(-\frac{c_r^2 k^2}{\kappa^2}\right) I_0\left(\frac{c_r^2 k^2}{\kappa^2}\right). \quad (27)$$

Из (27) при  $c_r \rightarrow 0$  ( $k$  и  $\kappa \neq 0$ ) получаем критическое волновое число  $k_{c_1} = \kappa^2 / 2\pi G\sigma_0 \equiv 2\pi / \lambda_T$ . Этот результат может быть получен из дисперсионного уравнения для холодного вращающегося диска. В другом предельном случае, когда  $kc_r / \kappa \rightarrow \infty$  (покоящийся диск), из (27) следует, что  $k_{c_2} \rightarrow 2\pi\sigma_0 / c_r^2$ . Для произвольных  $k$  уравнение (27) определяет отвечающие им критические значения дисперсии скоростей звезд, стабилизирующие коротковолновые радиальные колебания диска. Тоомре представил (27) в виде кривой (рис. 42) зависимости величины  $x \equiv k^2 c_r^2 / \kappa^2$  от отношения  $\lambda / \lambda_T$ , где  $\lambda_T \equiv \kappa^2 / 2\pi G\sigma_0$ :

$$\frac{1}{2\pi(\lambda/\lambda_T)} = \frac{1}{x} (1 - e^{-x} I_0(x)). \quad (28)$$

Область над кривой соответствует устойчивости, а область под кривой — неустойчивости. Тогда видно (см. рис. 42), что радиальные неустойчивости полностью подавляются, если дисперсия скоростей  $c_r$  в любой точке диска больше, чем критическое значение  $c_0$ :

$$c_r > c_0; \quad c_0 = (0,2857)^{1/2} \frac{\kappa}{k_T} = 3,36 \frac{G\sigma_0}{\kappa}. \quad (28')$$

Строго говоря, из вывода Тоомре следует только, что кривая (см. рис. 42) представляет все допустимые безразлично устойчивые ( $\omega^2=0$ ) возмущения. Сделанное Тоомре заключение о том, что эта кривая разделяет устойчивые и неустойчивые решения (соответственно над кривой и под нею); требует, вообще говоря, более детального анализа самого дисперсионного уравнения (23) при  $m=0$ . Однако это заключение выглядит естественно, если, например, иметь в виду отмеченные выше предельные случаи, которые могут быть рассмотрены элементарно и приводят к согласию с предсказанием Тоомре (см. рис. 42). Оно может быть также обосновано, исходя из теоремы, доказанной Джулианом [188], согласно которой убывающие с энергией функции распределения не должны приводить к колебательной неустойчивости аксиально-симметричных мод. Из этой теоремы, очевидно, следует, что граница между

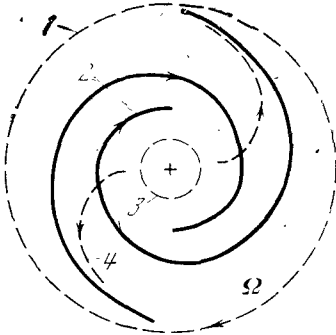


Рис. 44. Длинноволновая и коротковолновая моды для модели Галактики по Шмидту [271]

- 1 — круг коротации,
- 2 — коротковолновая мода,
- 3 — положение внутреннего линдбладовского резонанса,
- 4 — длинноволновая мода.
- Ω — направление вращения Галактики

устойчивыми и неустойчивыми решениями проходит по линии  $\omega^2=0$ , как и предположил Тоомре.

Диски, удовлетворяющие критерию Тоомре (51) со знаком равенства, называют маргинально-стабильными. Именно такие системы обычно рассматриваются в теории спиральной структуры галактик Линя и Шу (раздел 5.1). Для маргинально-стабильных дисков  $v^2$  неотрицательно, и дисперсионное уравнение (23) дает связь между  $v$  и  $\lambda/\lambda_T$  ( $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ,  $\lambda_T = \frac{2\pi}{k_T} = \frac{4\pi^2 G \sigma_0}{\kappa^2}$ ), которая показана на рис. 43 [325]. Обычно выбирают

$\omega > 0$ ,  $m > 0$ ; тогда алгебраически возрастающим значениям  $v$  соответствуют растущие значения  $r$ . При этом отрицательные значения  $\lambda/\lambda_T$  отвечают отстающим спиральям, а положительные — лидирующим.

Для каждого фиксированного  $\omega$  уравнение (23) определяет, как видно из рис. 43, две функции  $k(r)$  [325]. Одна из них при  $v=-1$ , в точке внутреннего линдбладовского резонанса, обращается в бесконечность, а вторая — в нуль. В точке внешнего линдбладовского резонанса  $v=1$  положение обратное. Имея в виду поведение вблизи от внутреннего резонанса, который играет основную роль в теории Линя и Шу, первую функцию называют коротковолновой модой, а вторую — длинноволновой (рис. 44).

Как мы уже отмечали, спиральные волны не могут распространяться вне области  $-1 \leq v \leq 1$ . Для случая маргинально-устойчивых дисков это единственное ограничение. Но в случае, когда диски устойчивы с некоторым «запасом», т. е. величина

$$Q \equiv c_r / c_{r, \min} \quad (29)$$

(где  $c_{r, \min} \cong (0,2857)^{1/2} \kappa / k_T$ , а  $c_r$  — истинная дисперсия скоростей) больше единицы, имеется еще одна запрещенная для волн область. Это видно из рис. 45, взятого из работы Тоомре [334], который первым обратил внимание на этот факт.

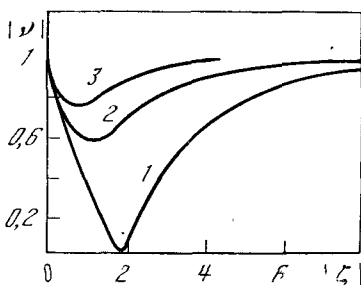
Если не накладывать каких-либо граничных условий, то дисперсионное уравнение (23) даст континуум частот  $\omega$ . Но граничные условия для спиральной волны

$$\varphi - \left(\frac{\omega}{m}\right)t = \frac{-1}{m} \int^r k(r) dr + \varphi_0 \quad (30)$$

определить без какого-то произвола очень трудно. Можно даже предположить [188], что в принципе допустимы все решения (30). Линь и Шу в этом пункте апеллируют к наблюдениям: сравнивая спирали (30), соответствующие разным  $\omega$ , с наблюдаемым спиральным узором галактики, они определяют ту частоту  $\omega$ , при которой имеется наилучшее согласие (подробнее см. в главе VIII).

С непрерывным характером спектра частот колебаний связана, как мы увидим в § 3 главы VIII, главная трудность первоначальной теории

Рис. 45. Графическое представление дисперсионного уравнения Линя — Шу при  $Q=1$  (1);  $Q=1,4$  (2);  $Q=2$  [334] (3);  $\zeta = k/k_T$



спиральной структуры Линя и Шу, заключающаяся в сносе пакета спиральных волн в центральную часть диска галактики.

**2. Дисперсионное уравнение с учетом конечной толщины и газовой подсистемы диска.** Как мы уже отмечали во введении к этой главе, для сравнения с наблюдениями дисперсионное уравнение (23) было несколько усовершенствовано: во-первых, потребовалось ввести еще один редуцирующий фактор  $I$  для учета малой конечной толщины звездного диска, и, во-вторых, в (23) был введен дополнительный член — вклад газовой составляющей галактики. Таким образом, полное дисперсионное уравнение, основа теории спиральной структуры Линя и Шу, записывается<sup>1</sup> в следующем [206] виде:

$$\frac{k_T}{|k|} (1 - v^2) = \mathcal{F}_v(x) \cdot I + \frac{\sigma_0}{\sigma_0^{(g)}} \mathcal{F}_v^{(g)}(x_g), \quad (31)$$

где  $k_T = \kappa^2 / 2\pi G \sigma_0^{(g)}$ ,  $x_g = \frac{k^2 D^2}{\kappa^2}$ ,  $\sigma_0^{(g)}$  — поверхностная плотность звезд,  $\sigma_0$  — полная поверхностная плотность,  $D$  — скорость звука, или средняя скорость турбулентных движений газа,  $\mathcal{F}_v^{(g)}(x_g)$  — газовый редуцирующий фактор. Последний определяется формулой, аналогичной (21):

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = - \frac{k^2 \Phi_1}{\kappa^2} \frac{1}{1 - v^2} \mathcal{F}_v^{(g)}(x_g). \quad (32)$$

Функцию  $\mathcal{F}_v^{(g)}$  легко вычислить (см., например, § 4 главы VIII), исходя из уравнений гидродинамики

$$\mathcal{F}_v^{(g)}(x_g) = \frac{1}{1 + x_g / (1 - v^2)}. \quad (33)$$

<sup>1</sup> Толщиной газового диска обычно можно пренебречь, поэтому редуцирующий фактор  $I$  входит только в звездную часть (31).

Для редуционного фактора  $I$ , дающего поправку на толщину, предложено несколько простых формул. В работе Шу [323] используется следующее представление:

$$I = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} |k| h} \quad (34)$$

Аналогичная формула была предложена уже в работе Тоомре [333], где она обосновывается следующими простыми рассуждениями. Вычислим уменьшение возмущенной гравитационной силы, приняв для простоты, что звезды заключены между плоскостями  $z = \pm h$  и что возмущенная объемная плотность не зависит ни от азимутального угла  $\varphi$ , ни от  $z$ :

$$\rho_1 \simeq \frac{a}{h} e^{ikr - i\omega t}, \quad |z| < h.$$

Тогда из уравнения

$$\Phi_1(r, z) = a \left( \frac{2\pi G}{k} \right) e^{ikr - k|z|}$$

можно заключить, что радиальная компонента силы при  $z=0$  от слоя  $(z, z+dz)$  с такой плотностью  $\rho_1$  будет пропорциональна  $\exp[-k|z|]dz$ . Поэтому полная возмущенная сила в центральной плоскости  $z=0$  будет равна

$$\left| \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right|_{z=0} = ia2\pi G e_i^{kr - i\omega t} I(k, h),$$

где редуционный фактор

$$I(k, h) = 2(1 - e^{-kh/2})/kh. \quad (35)$$

Формулы (34) и (35) эквивалентны при условии  $kh \ll 1$ , которое принималось при их выводе. Наиболее обстоятельное исследование влияния конечной толщины или дисперсии скоростей звезд в  $z$ -направлении на устойчивость диска проведено Вандервоортом [336—338] (тоже в коротковолновом приближении). Мы, однако, не станем останавливаться на этих работах подробнее, их основное значение состоит в более строгом обосновании приближений, принятых при выводе (34) или (35), которые и без того достаточно очевидны. Приведем только построенные Вандервоортом графики для редуционного фактора  $I$  (рис. 46). В заключение можно отметить дисперсионное уравнение (35) раздела 3.1 главы IV, учитывающее влияние малой конечной толщины диска не только на коротковолновые, но и на крупномасштабные возмущения.

Приложения дисперсионного уравнения (31) в теории спиральной структуры галактик рассматриваются в § 3 главы VIII.

3. Как мы уже отмечали, из дисперсионного уравнения Линя и Шу (23) следует, что волновое число  $k$  расходится в случае коротковолновой моды при приближении к внутреннему линдбладовскому резонансу ( $\nu(r) = -1$ ), а для длинноволновой моды имеет место расходимость  $k$  на внешнем линдбладовском резонансе ( $\nu(r) = +1$ ).

С подобными расходимостями мы встречались ранее при исследовании колебаний «холодных» систем (см. § 2, 3 этой главы). Однако в задаче о колебаниях «горячих» дисков, которая рассматривается здесь, эти расходимости представляются неестественными: тепловое движение частиц в резонансных областях должно, казалось бы, сгладить любые сингулярности.

И действительно, как показал Марк [290], дисперсионное уравнение Линя и Шу (23) справедливо лишь достаточно далеко от резонансных

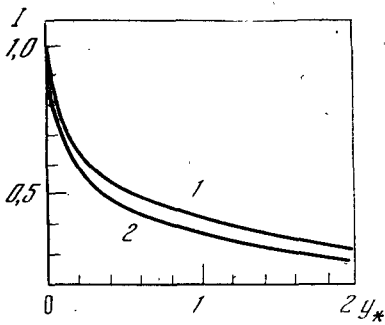


Рис. 46. Редукционные факторы, учитывающие конечную толщину звездного диска согласно Вандервоорту [338] (1), согласно Шу [323] (2)

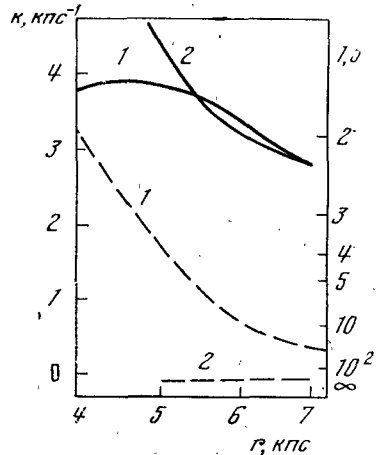


Рис. 47. Дисперсионные кривые  $k=k(r)$

Сплошные кривые —  $\text{Re}(-k)$ ; штриховые кривые —  $\text{Im}(-k)$ ; 1 — данные Марка [290] для диска; 2 — данные Шу [323]

окружностей и должно быть заменено другим уравнением (см. ниже) вблизи от них.

Марк указал и на конкретную ошибку, которая делает дисперсионное уравнение (23) непригодным в окрестности резонансов. В приведенном выше выводе эта ошибка содержится в завуалированном виде, проще ее усмотреть из более систематического вывода [290, 325] дисперсионного уравнения (а также параллельно и некоторых других важных для теории спиральной структуры соотношений) в [290, 325], который основан на регулярной процедуре разложения всех величин по степеням малых параметров  $1/kr$  и  $a/r$  ( $a$  — эпициклический радиус). Оказывается, что некорректность состояла в неправильных разложениях сингулярных знаменателей, соответствующих резонансным частицам.

Марк [290] более точно учел роль резонансных частиц и вывел дисперсионное уравнение, заменяющее (23) для области вблизи от внутреннего линдбладовского резонанса (наиболее важной для теории спиральных волн плотности в галактиках). В простейшем варианте оно выглядит следующим образом:

$$\text{sgn}(\text{Re } k) \frac{k_T}{k} = \mathcal{F}_{nr} + \frac{i\sqrt{2}}{\varepsilon x} \left(\frac{L}{r}\right) \int_{-\infty}^0 \exp[-\tau^2 + iz_L\tau - z] I_1(z) d\tau. \quad (36)$$

Здесь  $L$  есть постоянная размерности длины, входящая в соотношение

$$v(r) + 1 = (r - r_L) L^{-1}, \quad (37)$$

которое Марк принимает для резонансной области ( $L$  зависит от  $\Omega_p$ ), практически (37) оказывается справедливым для достаточно широкой области диска. Кроме того, в (36) использованы обозначения

$$k_T(r) = \kappa^2/2 \pi G \sigma_0; \quad y = kr\varepsilon(r); \quad x = y^2, \quad \varepsilon = \frac{c_r(r)}{\kappa r}; \quad (38)$$

$$z = x + y\tau\sqrt{2}; \quad z_L = \sqrt{2}(1 - r_L r^{-1})/\varepsilon(r); \quad (39)$$

$$\mathcal{F}_{nr}(x, v) = \frac{1}{x} \left\{ 1 - I_0(x) e^{-x} + \frac{2v-1}{1-v} I_1(x) e^{-x} + 2v^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{I_n(x) e^{-x}}{n^2 - v^2} \right\}. \quad (40)$$

Общее поведение  $k$  легче увидеть из упрощенного варианта уравнения (36), в котором опущен член  $\mathcal{F}_{nr}$  (как представляющий вклад нерезонансных частиц). Заменяем также  $I_1(z)$  асимптотическим приближением для больших  $z$ . Тогда получим

$$[k(r)/k_L]^2 = iW(-z_L/2), \quad (41)$$

где  $z_L$  определяется уравнением (39),  $\bar{W}(z)$  — функция Крампа, а

$$k_L^2 = \pi G \sigma_0(r_L) \kappa^2(r_L) L c^{-4}(r_L). \quad (42)$$

Из (41) можно вывести, что  $k$  почти действительно, когда  $(r-r_L) \gg \varepsilon r$ . Положительный и отрицательный корни отвечают соответственно лидирующей и отстающей спиралью. При  $r \rightarrow r_L$  обе моды имеют комплексные значения  $k$ , но действительная часть  $k$  остается по абсолютной величине больше, чем мнимая. Более тщательное исследование уравнения (41) показывает [290], что и лидирующая, и отстающая волны затухают. Это следует из того, что  $\text{Im } k$  не меняет знака при  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$  ( $\text{Re } \omega = m\Omega_p$ ) [290]. Для  $r < r_L$  асимптотическое представление, использованное при выводе (41) из (36), несправедливо, и нужно пользоваться уравнением (36).

Приведенное выше дисперсионное уравнение выведено в главном порядке теории возмущений по  $1/kr \sim a/r$ . На рис. 47 представлены реальная и мнимая части ( $-k$ ) для отстающей спиральной волны (в стационарной, дисковой модели Галактики Шмидта [319]), вычисленные с учетом поправок следующего порядка малости. Видно прежде всего, что  $k$  теперь не расходится при  $r \rightarrow r_L$ . Мнимая часть  $k$  представляет резонансный эффект затухания, опущенный в вычислениях Линя и Шу. Для сравнения представлены также действительная и мнимая части  $-k$ , взятые из работы Шу [325], где вычисления были проведены также с точностью до двух первых порядков по указанным выше малым параметрам (см. § 5 Приложения). У него мнимая часть ( $-k$ ) отрицательна и очень мала (в главном порядке она равна нулю).

Ясно, что вычисления Марка должны соответствовать результатам Шу [325] там, где резонансные эффекты малы. Действительные части практически совпадают. Мнимые части, однако, отличаются, так как решение Шу не имеет эффекта резонансного затухания, которое оказывается (для использованной стационарной модели) существенным во всей области, охватываемой рис. 47.

#### 4.2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МОД БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ДИСКОВЫХ СИСТЕМ

**1. Вывод интегрального уравнения.** Выведем, следуя работе Шу [324], общее интегральное уравнение для собственных мод и собственных частот колебаний самогравитирующего бесстолкновительного диска. Для этого необходимо прежде всего вычислить *отклик* такого диска на возмущение гравитационного поля, оставляя пока в стороне вопрос о том, является ли это поле самосогласованным или нет.

Кинетическое уравнение, описывающее временное изменение функции распределения частиц, можно записать в виде

$$\frac{df}{dt} + [f, H] = 0, \quad (1)$$

где [...] представляет собой скобку Пуассона,  $H$  — гамильтониан. В цилиндрических координатах  $(r, \varphi)$  (соответствующие обобщенные импульсы обозначим  $(p_r, p_\varphi)$ ) гамильтониан  $H$ , рассчитанный на единицу массы, равен

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_\varphi^2) + \Phi(r, \varphi, t) \quad (2)$$



$(\Phi(r\varphi t))$  — гравитационный потенциал в плоскости диска), а скобки Пуассона раскрываются следующим образом:

$$[f, H] = p_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left( \frac{p_\varphi^2}{r^3} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial p_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial f}{\partial p_\varphi}. \quad (3)$$

Невозмущенная функция распределения  $f_0$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + [f_0, H_0] = 0, \quad (4)$$

где  $H_0$  имеет форму (2), но невозмущенный потенциал зависит только от радиуса  $r$ :  $\Phi_0 = \Phi_0(r)$ .

Характеристики уравнения (4) имеют вид

$$dt = \frac{dr}{p_r} = \frac{d\varphi}{p_\varphi/r} = \frac{dp_r}{p_\varphi^2/r^2 - \partial \Phi_0/\partial r} = \frac{-dp_\varphi}{\partial \Phi_0/\partial \varphi = 0},$$

откуда следует, что в наиболее общем случае  $f_0$  может быть произвольной функцией следующих четырех интегралов движения [324]:

$$E_0 = \frac{1}{2} (p_r^2 + p_\varphi^2/r^2) + \Phi_0(r), \quad (5)$$

$$L = p_\varphi, \quad (6)$$

$$T = t - \int^r \{2[E_0 - \Phi_0(r')] - L^2/(r')^2\}^{-1/2} dr', \quad (7)$$

$$P = \varphi - \int^r \frac{L}{(r')^2} \{2[E_0 - \Phi_0(r')] - L^2/(r')^2\}^{-1/2} dr'. \quad (8)$$

Но фазовые интегралы  $T, P$  являются, как правило, неоднозначными функциями, так что можно принять

$$f_0 = \begin{cases} F_0(E_0 L) & \text{для } E_0 < 0, \quad L > 0, \\ 0 & \text{для } E_0 \geq 0 \text{ или } L < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Условие  $E_0 < 0$  естественно и означает присутствие только связанных в гравитационном поле диска звезд. Второе условие уже не так обязательно, оно означает, что мы ограничиваемся звездами, вращающимися в одном и том же направлении. Ясно, однако, что наличие небольшого числа звезд, вращающихся в другом направлении, не может существенно изменить результаты.

Линеаризуя уравнение (1), получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + [f_1, H_0] = -[f_0, \Phi_1]. \quad (10)$$

В соответствии со сказанным выше будем считать правую часть (10) заданной и найдем для этого уравнения  $f_1$  (выразив ее через  $\Phi_1$ ). Формальное решение (10) получается интегрированием по невозмущенным траекториям звезд (слева в (10) стоит как раз соответствующая стоксова производная  $d/dt$ )

$$f_1(t) - f_1(t_0) = - \int_{t_0}^t [f_0, \Phi_1]_0 dt' = \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial f_0}{\partial p_r} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial f_0}{\partial p_\varphi} \right)_0 dt', \quad (11)$$

где скобка Пуассона  $[...]_0$  вычисляется на невозмущенной траектории. Удобно перейти к переменным  $E_0, L$ :  $r, p_r, p_\varphi \rightarrow r, E_0, L$ , т. е., по сути дела,  $p_r \rightarrow E_0$ , так как  $p_\varphi = L$ . При этом частные производные, очевидно, преоб-

разуются так:

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} + (-p_\varphi^2/r^2 + \partial\Phi_0/\partial r) \frac{\partial}{\partial E_0}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \rightarrow \Pi_0 \frac{\partial}{\partial E_0}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\varphi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial L} + \frac{L}{r^2} \frac{\partial}{\partial E_0}, \quad (14)$$

где  $\Pi_0$  означает следующую функцию ( $r, E_0, L$ ):

$$p_r = \Pi_0(r, E_0, L) = \{2[E_0 - \Phi_0(r)] - L^2/r^2\}^{1/2}. \quad (15)$$

В новых переменных уравнение (11) принимает форму

$$f_1(t) - f_1(t_0) = \int_{t_0}^t \left\{ \left( \Pi_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{L}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial F_0}{\partial E_0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial F_0}{\partial L} \right\} dt'. \quad (16)$$

Первый член справа в (16) можно записать в другой форме, заметив, что вдоль невозмущенных орбит

$$\frac{dr}{dt} = \Pi_0; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r^2}, \quad (17)$$

так что

$$\Pi_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{L}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}. \quad (18)$$

Теперь (16) можно привести к виду

$$f_1(t) = \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \Phi_1(t) + f_1(t_0) - \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \Phi_1(t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \frac{\partial F_0}{\partial E_0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \frac{\partial F_0}{\partial L} \right\} dt'. \quad (19)$$

Будем искать периодические решения типа

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \varphi, t) &= \tilde{\Phi}_1(r) e^{i(\omega t - m\varphi)}, \\ f_1(r, \varphi, E_0, L, t) &= \tilde{f}_1(r, E_0, L) e^{i(\omega t - m\varphi)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(r(t), E_0, L) &= \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r(t)) + e^{-i[\omega t - m\varphi(t)]} \left\{ \tilde{f}_1(t_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \Phi_1(t_0) - i \left( \omega \frac{\partial F_0}{\partial E_0} + m \frac{\partial F_0}{\partial L} \right) \int \Phi_1(r(t')) e^{i[\omega t' - m\varphi(t')] } dt' \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Физически приемлемы, разумеется, только однозначные решения. Мы сейчас используем это обстоятельство для упрощения формулы (21). Левая часть (21) является функцией только ( $r(t), E_0, L$ ) и не зависит явно от ( $\varphi(t), t$ ). Для связанных звезд функция  $r(t)$  ограничена сверху и снизу значениями в точках поворота ( $r_1, r_2$ ) и является периодической функцией  $t$  с периодом  $T \equiv 2\tau_{1,2}(E_0, L)$ . Так как  $\tilde{f}_1$  зависит только от  $r(t)$  и не зависит от  $\varphi(t)$  и  $t$ ,  $\tilde{f}_1$  также должна быть функцией  $t$  с тем же периодом  $2\tau_{1,2}$ .

Допустим, что за один период радиальных колебаний звезда поворачивается по азимуту на угол  $2\varphi_{1,2}(E_0, L)$  (см. рис. 48). Заменим теперь в уравнении (21)  $t$  на  $t + 2\tau_{1,2}$  и воспользуемся тем, что  $\varphi(t + 2\tau_{1,2}) =$

$=\varphi(t) + 2\varphi_{1,2}$ . Тогда после некоторых выкладок можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(t) = \tilde{f}_1(t + 2\tau_{1,2}) = & \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r(t)) + e^{-2i(\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2})} \left\{ \tilde{f}_1(t) - \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r(t)) - \right. \\ & \left. - i \left( \omega \frac{\partial F_0}{\partial E_0} + m \frac{\partial F_0}{\partial L} \right) \int_t^{t+2\tau_{1,2}} \tilde{\Phi}_1(r(t')) \exp[i\omega(t'-t) - im(\varphi(t') - \varphi(t))] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Разрешая (22) относительно  $\tilde{f}_1(t)$ , найдем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(t) = & \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r(t)) - \left( \omega \frac{\partial F_0}{\partial E_0} + m \frac{\partial F_0}{\partial L} \right) \frac{e^{-i(\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2})}}{2 \sin(\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2})} \times \\ & \times \int_t^{t+2\tau_{1,2}} \tilde{\Phi}_1(r(t')) \exp\{i\omega(t'-t) - im[\varphi(t') - \varphi(t)]\} dt'. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим (для симметризации интеграла в (23))

$$r(t) \equiv r, \quad \tau \equiv t' - t - \tau_{1,2}, \quad \varphi_*(\tau) \equiv \varphi(t') - \varphi(t) - \varphi_{1,2}, \quad r_*(\tau) = r(t'). \quad (24)$$

Тогда из (23) получим искомое решение для  $\tilde{f}_1$  в виде

$$\tilde{f}_1(rE_0L) = \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r) + \chi(r, E_0, L), \quad (25)$$

$$\chi(r, E_0, L) = - \frac{\omega \partial F_0 / \partial E_0 + m \partial F_0 / \partial L}{2 \sin(\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2})} \int_{-\tau_{1,2}}^{\tau_{1,2}} \tilde{\Phi}_1(r_*(\tau)) e^{i[\omega\tau - m\varphi_*(\tau)]} d\tau. \quad (26)$$

В (26)  $r_*(\tau)$ ,  $\varphi_*(\tau)$  есть функции ( $r, E_0, L, \tau$ ), однозначно определяемые из следующих уравнений движения (с периодическими граничными условиями):

$$\frac{dr_*}{d\tau} = \Pi_0(r_*, E_0, L), \quad r_* = r \quad \text{при } \tau = \pm \tau_{1,2}(E_0, L), \quad (27)$$

$$\frac{d\varphi_*}{d\tau} = L/r_*^2(\tau), \quad \varphi_* = \pm \varphi_{1,2}(E_0, L) \quad \text{при } \tau = \pm \tau_{1,2}(E_0, L). \quad (28)$$

Для действительных  $\omega$  имеется, как видно из (26), возможность резонанса для звезд, энергии и угловые моменты которых таковы, что  $\sin(\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2}) = 0$ . Ясно, что причиной резонанса является тот факт,

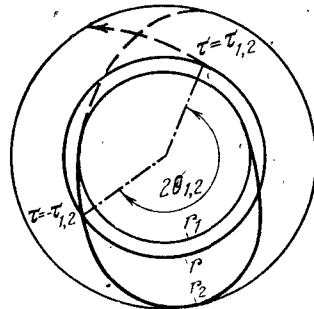


Рис. 48. Невозмущенная орбита частицы в гравитирующем диске [324] ( $\theta_{1,2} = \varphi_{1,2}$ )

что при каждом цикле невозмущенного движения эти звезды чувствуют одну и ту же фазу возмущенного гравитационного поля. Простейшая форма резонанса возникает вследствие «коротации»,  $\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2} = 0$ . Но для теории спиральной структуры, возможно, важнее линдбладовские резонансы  $\omega\tau_{1,2} - m\varphi_{1,2} = \pm\pi$ .

Вычислим теперь отклик звездной поверхностной плотности  $\sigma_{*1}$ , соответствующий возмущенной функции распределения (25). Если

$$\sigma_{*1}(r\varphi t) = \tilde{\sigma}_{*1}(r) e^{i(\omega t - m\varphi)}, \quad (29)$$

то, очевидно,

$$r\tilde{\sigma}_{*1} = \iint \left\{ 2 \frac{\partial F_0}{\partial E_0} \tilde{\Phi}_1(r) + [\chi]_{\Pi_0 > 0} + [\chi]_{\Pi_0 < 0} \right\} \frac{dE_0 dL}{|\Pi_0|}, \quad (30)$$

где  $\frac{1}{|\Pi_0|}$  есть якобиан преобразования  $(p_r, p_\varphi) \rightarrow (E_0, L)$ . Необходимость различать явно случаи  $\Pi_0 > 0$  и  $\Pi_0 < 0$  связана с тем, что преобразование  $p_r \rightarrow E_0$  не является взаимно однозначным: для данного  $E_0$  значение  $\Pi_0$  может быть либо положительным, либо отрицательным (член  $\sim \partial F_0 / \partial E_0$  четен по  $p_r = \Pi_0$ ). Законы Ньютона обладают такими свойствами при обращении времени, что для данных  $E_0, L$  решения уравнений (27), (28) имеют следующую симметрию:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_*(\tau) \\ \varphi_*(\tau) \end{array} \right\}_{\Pi_0 > 0} = \left\{ \begin{array}{l} r_*(-\tau) \\ -\varphi_*(-\tau) \end{array} \right\}_{\Pi_0 < 0}, \quad (31)$$

так что окончательно возмущение поверхностной плотности можно представить в виде

$$r\tilde{\sigma}_{*1}(r) = 2 \iint_{\Pi_0 > 0} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial E_0}(E_0 L) \tilde{\Phi}_1(r) + \chi_*(r E_0 L) \right\} \frac{dE_0 dL}{\Pi_0(r E_0 L)}, \quad (32)$$

где введено обозначение

$$\chi_* \equiv - \frac{\omega \partial F_0 / \partial E_0 + m \partial F_0 / \partial L}{2 \sin(\omega \tau_{1,2} - m \varphi_{1,2})} \int_{-\tau_{1,2}}^{\tau_{1,2}} \tilde{\Phi}_1(r_*(\tau)) \cos[\omega \tau - m \varphi_*(\tau)] d\tau. \quad (33)$$

Для действительных  $\omega$  возникает трудность при интегрировании по  $(E_0 L)$  в уравнении (32), если в системе имеются резонансные звезды, для которых  $(\omega \tau_{1,2} - m \varphi_{1,2})$  равно целому числу  $\pi$ . Тогда полюсы  $[\sin(\omega \tau_{1,2} - m \varphi_{1,2})]^{-1}$  лежат на пути интегрирования, и возникает обычная в таких случаях неопределенность: нужно ли брать только главное значение интеграла или должны быть также учтены «мнимые вклады» от полюсов? Аналогичная проблема возникает, например, для электростатических колебаний плазмы. Как известно, она разрешается (Ландау [65]), если обратиться к задаче с начальными условиями. В случае, если резонансные звезды отсутствуют (например, при рассмотрении неустойчивых мод), никаких неопределенностей при вычислении интеграла (32) не возникает.

Привлечем теперь уравнение Пуассона. Гравитационный потенциал  $\Phi_1 = \tilde{\Phi}_1(r) e^{i(\omega t - m\varphi)}$ , связанный с поверхностной плотностью  $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1(r) e^{i(\omega t - m\varphi)}$ , можно записать в следующем виде [324]:

$$\tilde{\Phi}_1(r) = -G \int_0^\infty \tilde{\sigma}_1(a) a da \oint \frac{e^{im\varphi} d\varphi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \varphi}} = -2\pi G \int_0^\infty H_m(r, a) a \tilde{\sigma}_1(a) da, \quad (34)$$

где

$$H_m(r, a) \equiv H_m(a, r) = \frac{1}{r+a} h_m(\xi), \quad (35)$$

$$h_m(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2mx}{\sqrt{1 - \xi \cos^2 x}} dx, \quad \xi \equiv \frac{4ra}{(r+a)^2} \leq 1. \quad (36)$$

Асимптотики  $h_m(\zeta)$  следующие:

$$h_m = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \zeta^m & \text{для } \zeta \ll 1 \text{ (} a \ll r \text{ или } a \gg r \text{),} \\ -\frac{1}{2} \ln(1 - \zeta^2) & \text{для } \zeta \simeq 1 \text{ (т. е. } a \simeq r \text{).} \end{cases} \quad (37)$$

Отсюда видно, что существование интеграла в (34) предполагает регулярные граничные условия, наложенные на  $\tilde{\sigma}_1(r)$  в  $r=0$  и  $r=\infty$ . Для самосогласованных колебаний плотность  $\tilde{\sigma}_1(r)$  должна равняться отклику поверхностной плотности  $\tilde{\sigma}_{1*}(r)$ . Это условие вместе с уравнениями (32) и (33) приводит к искомому интегральному уравнению для  $\tilde{\sigma}_1(r)$ :

$$r\tilde{\sigma}_1(r) = \int_0^\infty K_{m\omega}(r, a) a\tilde{\sigma}_1(a) da. \quad (38)$$

Ядро (38) выражается формулой

$$K_{m\omega}(r, a) = -4\pi G \iint \frac{dE_0 dL}{\Pi_0(r, E_0, L)} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial E_0} H_m(r, a) - \frac{\omega \partial F_0 / \partial E_0 + m \partial F_0 / \partial L}{2 \sin(\omega \tau_{12} - m \varphi_{12})} \int_{-\tau_{12}}^{\tau_{12}} H_m(r_*(\tau), a) \cos[\omega \tau - m \varphi_*(\tau)] d\tau \right\}. \quad (39)$$

**2. Некоторые общие свойства интегрального уравнения (38).** Уравнение (38) представляет собой однородное сингулярное<sup>1</sup> интегральное уравнение, которое должно быть решено для определения характеристических значений  $\omega$  и собственных функций  $r\tilde{\sigma}_1(r)$ . Оно дает полную формулировку проблемы нормальных мод в любом диске звезд с дисперсией скоростей. Подобное уравнение, но в эпициклическом приближении для звездных орбит было впервые найдено Калнайсом в [249].

Из уравнения (37) следует, что  $K_{m\omega}(ra)$  имеет логарифмическую сингулярность в  $r=a$ . Несмотря на интегрируемость, она подчеркивает гравитационное влияние звезд в локальной окрестности и допускает возможность коротковолновых возмущений, которые уже рассматривались.

Это интегральное уравнение напоминает однородное уравнение Фредгольма второго рода, за исключением того, что собственные числа (частоты  $\omega$ ) входят в (38) нелинейным образом. Ядро интегрального уравнения (38)  $K_{m\omega}$  представляет собой весьма сложную функцию  $\omega, r, r'$ .

Решения уравнения (38) содержат все собственные значения  $\omega$  и собственные функции  $r\tilde{\sigma}_1(r)$  системы. Очевидно, однако, что аналитически это уравнение в общем виде решено быть не может ввиду его большой сложности. Численно оно было решено для модели галактики M31 с ядром  $K_{m\omega}$  в эпициклическом приближении Калнайсом [250] (см. § 3 главы VIII).

Калнайс (см. [188]) доказывает, что неустойчивые моды изолированы. Правда, для малых длин волн интегральное уравнение (38) может дать и более тесно расположенные моды  $\omega$ . Если же  $\omega$  действительно (нейтральные колебания), спектр собственных значений может образовывать континуум.

<sup>1</sup> Из-за логарифмической особенности в ядре  $K_{m\omega}$  при  $a \sim r$  (см. (37)).

Точная формулировка проблемы собственных значений, приведенная выше, дала пока сравнительно небольшое число конкретных результатов по устойчивости дисковых систем. Отметим здесь теорему Калнайса [251], относящуюся к устойчивости аксиально-симметричных мод и представляющую собой обобщение соответствующего результата Тоомре на случай произвольных (а не только коротковолновых) возмущений. Применение обобщенного критерия устойчивости приводит, однако, к выводам, которые мало отличаются от полученных из первоначального критерия Тоомре.

В § 5 Приложения интегральное уравнение (38) будет использовано для получения частот и амплитуд колебаний с точностью до второго порядка по параметрам  $1/kr$  и  $a/r$  (которые будут считаться малыми, см. конец раздела 4.1).

#### 4.3. ТОЧНЫЕ СПЕКТРЫ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Точные спектры малых возмущений «горячих» систем были найдены [93, 111, 113, 252] только для твердотельно-вращающихся дисков. Одним из важных стимулов для исследования таких моделей был факт (отмеченный Лином и Шу [271]), что предположение о малых эксцентриситетах перестает согласовываться с требованием устойчивости относительно радиальных возмущений (критерием Тоомре [333]) при приближении к центру галактики. Для того чтобы сделать центральный район устойчивым (в локальном смысле Тоомре), необходима достаточно большая дисперсия скоростей, так что эпициклическое приближение уже не подходит для анализа. Для возмущений «бароподобного» типа ( $m=2$ ) это происходит еще раньше. Исследование точных моделей позволяет лучше понять эти дефекты эпициклических моделей. Другая причина интереса к точным моделям связана с численными экспериментами Миллера с соавторами [294], Хола [215, 220], которые показали, что диски, первоначально поддерживаемые в основном вращением, эволюционируют к состояниям, где главную роль играет уже давление (дисперсия скоростей частиц).

Рассмотрим сначала устойчивость дисковой системы, описываемой функцией распределения (6) раздела 1.4:

$$f_0(r, v_r, v_\varphi) = \frac{c_0 \theta (\kappa^2 - v_r^2 - v_\varphi^2)}{\sqrt{\kappa^2 - v_r^2 - v_\varphi^2}}, \quad (1)$$

где положено

$$\Omega_0 = R = 1, \quad c_0 = \frac{\sigma_0(0)}{2\pi \sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \kappa^2 = (1-\gamma^2)(1-r^2).$$

Она имеет корневую особенность на границе фазовой области, занимаемой системой:  $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 \leq (1-\gamma^2)(1-r^2)$ , и в этом смысле аналогична, например, функции распределения однородного плоского слоя (см. § 1 главы I). Устойчивость системы (1) можно исследовать одним из способов, описанных в § 5 главы I.

В частности, можно положить

$$f = \frac{\sigma_0(0)}{2\pi \sqrt{1-\gamma^2}} \frac{\theta [(1-\gamma^2)(1-r^2) - v_r^2 - v_\varphi^2 + \varepsilon \chi]}{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2) - v_r^2 - v_\varphi^2 + \varepsilon \chi}},$$

где  $\chi(r, \varphi, v_r, v_\varphi)$  — возмущение,  $\varepsilon \ll 1$  — параметр разложения теории возмущений. Тогда кинетическое уравнение приведет к следующему

уравнению для  $\chi$ :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - (1 - \gamma^2) r \frac{\partial \chi}{\partial v_r} + 2\gamma \left( v_r \frac{\partial \chi}{\partial v_\varphi} - v_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial v_r} \right) + \frac{v_\varphi}{r} \left( v_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial v_r} - v_r \frac{\partial \chi}{\partial v_\varphi} \right) = -2v_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 2v_\varphi \frac{\partial \Phi_1}{r \partial \varphi}, \quad (2)$$

а возмущение поверхностной плотности вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}, \\ \sigma_1^{(1)} &= \frac{\sigma_0(0)}{2\pi \sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2)}} dv \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial v} / \sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2) - v^2}, \\ \sigma_1^{(2)} &= \sigma_0(0) \left\{ \sqrt{1-r^2 - \frac{\chi^{(2)}}{(1-\gamma^2)}} - \sqrt{1-r^2} \right\}, \\ \chi^{(2)} &\equiv \chi(v=0); \quad \chi^{(1)} = \chi - \chi^{(2)}; \quad v_r = v \cos \alpha; \quad v_\varphi = v \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическое уравнение для функции  $\chi$  проще всего решается методом «интегрирования по траекториям». Для этого заметим, что (2) можно представить в виде

$$d\chi/dt = -2(d\Phi_1/dt - \partial\Phi_1/\partial t), \quad (4)$$

где  $d/dt$  обозначает «полную» (лагранжеву) производную по времени вдоль невозмущенной траектории частицы. Последнюю можно записать следующим образом (см. § 3 главы II)

$$\begin{aligned} r'^2 &= v^2 \sin^2 t + \gamma^2 r^2 + r^2 (1 - \gamma^2) \cos^2 t + rv_r \sin 2t + 2\gamma r v_\varphi \sin^2 t; \\ r' e^{i(\varphi' - \varphi)} &= \frac{1}{2} \{ e^{-i(1+\gamma)t} [r(1-\gamma) + (v_\varphi - iv_r)] + e^{i(1-\gamma)t} [r(1+\gamma) + (v_\varphi - iv_r)] \}, \end{aligned}$$

причем,  $r$ ,  $\varphi$ ,  $v_r$ ,  $v_\varphi$ ,  $v$  есть координаты и скорости частицы в момент  $t=0$ .

Можно показать (см. ниже, с. 290), что собственные функции и в данном случае будут (61), (62) раздела 2.2 (т. е. такими же, как в холодном диске). Впрочем, для получения частот колебаний, соответствующих моде с индексами  $(n, m)$  ( $\Phi_1^{n,m} \sim e^{im\varphi} (r^{n+m} + \dots)$ ,  $n > 0$ , четно), достаточно удерживать при вычислениях только член со старшей степенью  $r$ . Если представить возмущенную плотность  $\sigma_1$  в виде

$$\sigma_1 = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)}; \quad \sigma_1^{(1)} = A^{(1)} e^{im\varphi} (r^{n+m-2} + \dots); \quad (5)$$

$$\sigma_1^{(2)} = \sigma_0(0) [\sqrt{1-r^2 - 2A^{(2)} e^{im\varphi} (r^{n+m} + \dots)} - \sqrt{1-r^2}], \quad (6)$$

то дисперсионное уравнение можно записать следующим образом [111, 113]:

$$4\gamma_{n+m}^m (A^{(1)} + A^{(2)}) = 1, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{n+m}^m = \frac{(n+2m)! n!}{2^{2(m+n)+1} \left[ \left( \frac{n+2m}{2} \right)! \right]^2 \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2}.$$

Вычисление  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  не представляет труда, это сделано в работах [111, 113, 252]<sup>1</sup>. В наиболее компактном виде дисперсионное уравнение (7) дано в [252]:

$$1 = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m + 1\right) 2^m} \sum_{c=0}^{n/2} \sum_{d=-c}^c \sum_{l=-d}^{m-d} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + m + c + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c-d+1)} \times$$

$$\times \frac{(-1)^{c+d} (1-\gamma)^{c+d+l-1} (1+\gamma)^{m+c+d-l-1} [2l-m(1-\gamma)]}{\Gamma(c+d+1) \Gamma\left(\frac{n}{2} - c + 1\right) \Gamma(l+d+1) \Gamma(m-l-d+1) (\omega - m + 2l)}$$
(8)

**Исследование дисперсионного уравнения (8).** Отметим сначала некоторые предельные случаи. Если в (8) перейти к гидродинамическому пределу  $\gamma \rightarrow 1$ , получим изученное ранее Хантером [226] уравнение (57) раздела 2.2.

В случае  $A^{(1)} = 0$  из (7) (во вращающейся с угловой скоростью  $\gamma$  системе отсчета) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 = \lambda_m A_{m\gamma}, \quad (9)$$

где

$$A_{m\gamma} = \frac{1}{1-\gamma^2} - \frac{1}{2^m} \sum_{\sigma=0}^m C_m^\sigma (1-\gamma)^{m-\sigma-1} (1+\gamma)^{\sigma-1} \frac{\omega}{\omega + m(1+\gamma) - 2\sigma}.$$

Для колебаний с  $m=2$  (наиболее крупномасштабной моды) отсюда получается следующее уравнение для  $\omega' = \omega + 2\gamma$  [93, 252]:

$$2(\omega')^3 - 5\omega' + 6\gamma = 0. \quad (10)$$

При рассматриваемом возмущении исходный круговой диск превращается в эллиптический. Критическое значение  $\gamma_c$  из (10), разделяющее устойчивые и неустойчивые решения, равно  $\gamma_c \approx 0,507$ . Как увидим ниже, условия стабилизации этой моды являются более трудными по сравнению с аксиально-симметричными (коротковолновыми) возмущениями. Для следующего типа колебаний с  $m=3$  (менее крупномасштабной) аналогичное (10) уравнение следующее ( $\omega' = \omega + 3\gamma$ ):

$$((\omega')^2 - 9)((\omega')^2 - 1) + \frac{5}{8} [3(\omega')^2 + 12\gamma\omega' - 9(1 - 2\gamma^2)] = 0. \quad (11)$$

Критическое значение  $\gamma$  в этом случае оказывается большим, чем для предыдущей моды:  $\gamma_c > 0,507$ . Можно показать, что условия стабилизации (рассматриваемых мод) непрерывно улучшаются с уменьшением масштаба возмущения, т. е. с ростом номера моды  $m$ .

На рис. 49 представлены графики зависимости величины инкремента неустойчивости  $\text{Im } \omega$  от номера моды  $m$  для разных значений  $\gamma$ :  $\gamma = 0,7$ ;  $0,8$ ;  $0,9$ ;  $0,95$ ;  $1$ . Видно, как область неустойчивых решений сдвигается

<sup>1</sup> Дисперсионное уравнение может быть выведено и способом, аналогичным использованному при исследовании устойчивости цилиндра в § 3 главы II (Антонов [14]). Техника вычисления в главных чертах остается прежней,  $X$  и  $Y$  сохраняют тот же смысл, как и раньше, но вместо прежнего закона усреднения мы имеем новый:

$$\bar{X} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{s ds}{\sqrt{1-s^2}} \int_0^{2\pi} X(x, y, -\gamma y + s x \cos \varphi, \gamma x + s x \sin \varphi) d\varphi.$$

Здесь  $s x$  — текущее значение модуля пекулярной скорости.



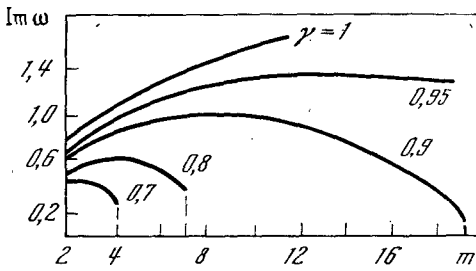


Рис. 49. Зависимость инкремента неустойчивости  $\text{Im } \omega$  от номера моды  $m$  для различных дисков (6) раздела 1.4

Рис. 50. Зависимость инкремента неустойчивости  $\text{Im } \omega$  от  $\gamma$  для мод  $P_3^1, P_4^2$

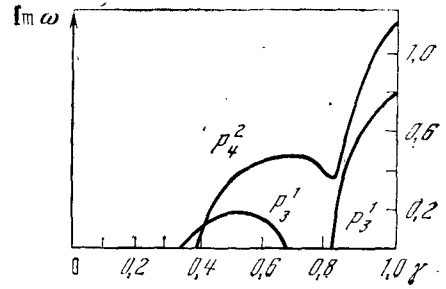
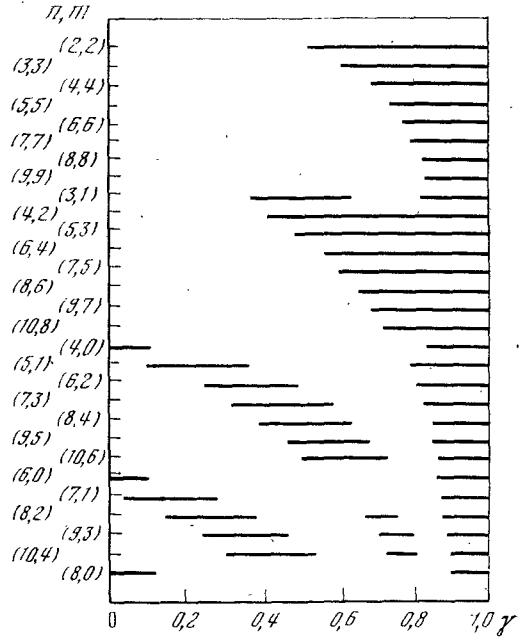


Рис. 51. Диаграмма, доказывающая неустойчивость всех моделей твердо-телно-вращающихся дисков (6) раздела 1.4 [252]

Сплошные линии соответствуют областям неустойчивости отдельных мод. На оси ординат отмечены номера мод



с уменьшением  $\gamma$ , т. е. с ростом величины дисперсии скорости, в сторону наиболее крупномасштабных возмущений. Однако для дисков с  $\gamma \approx 1$  максимальные инкременты неустойчивости лежат, как и следовало ожидать, в области больших значений  $m$ . Заметим, что собственные функции в этом случае  $\Phi_1 \sim r^m \cos m\varphi$  существенно отличны от нуля только в непосредственной близости от границы диска  $r=1$ .

Аналогичная ситуация, разумеется, имеет место и в общем случае  $A^{(1)} \neq 0$  до тех пор, пока речь идет о стабилизации гидродинамической ветви колебаний неустойчивого холодного диска. Наиболее трудно стабилизируются моды  $(m=1, n=2)$  и  $(m=2, n=2)$ . Уравнение для частот колебаний первой из них получается следующим ( $\omega' = \omega + \gamma$ ):

$$((\omega')^2 - 1)((\omega')^2 - 9) + \frac{3}{8}(11(\omega')^2 + 20\gamma\omega' - 30\gamma^2 - 9) = 0. \quad (12)$$

Для случая  $(m=2, n=2)$  получаем аналогично ( $\omega' = \omega + 2\gamma$ )

$$\omega'((\omega')^2 - 4)((\omega')^2 - 16) + \frac{5}{4}(4(\omega')^3 + 15\gamma(\omega')^2 - 22\omega' + 12\gamma - 84\gamma^3) = 0. \quad (13)$$

На рис. 50 даются графики зависимости величины инкремента неустойчивости  $\text{Im } \omega$  этих мод от параметра  $\gamma$ . Участки графиков вблизи  $\gamma=1$  имеют нормальный, растущий вид, означающий стабилизацию гид-

родинамической неустойчивости холодного диска дисперсией скоростей звезд. Дальнейший ход кривых, однако, аномален, что, по-видимому, связано с тем, что рассмотренные стационарные функции распределения являются растущими функциями энергии частицы (во вращающейся системе координат).

В работах [93, 252] доказано, что зоны различных неустойчивостей полностью покрывают отрезок  $0 \leq \gamma \leq 1$ , т. е. все модели (1) неустойчивы (по отношению к раскачке той или иной моды). Это видно, например, из рис. 51, взятого из работы Калнайса [252]. На этом рисунке сплошные линии обозначают области неустойчивости. Любая вертикальная линия, проведенная на этом рисунке (и соответствующая какой-то определенной модели из числа (1)), обязательно пересечет, по крайней мере, одну из сплошных линий.

Важно отметить, что неаксиально-симметричные моды являются неустойчивыми в области, где радиальные колебания заведомо устойчивы. Граница устойчивости последних лежит в районе  $\gamma = 0,85$  (мода  $m=0$ ,  $n=4$ ), что довольно хорошо совпадает с критерием маржинальной стабильности, получаемым из результатов локального анализа при экстраполяции их на область наиболее крупномасштабных мод (они, конечно, самые неустойчивые). Необходимо, однако, отметить, что локальный анализ и подобная экстраполяция дают неправильную информацию относительно устойчивости крупномасштабных неаксиально-симметричных мод, которые еще остаются неустойчивыми (см. задачу 4).

Значение исследования спектров колебаний дисковых моделей (1) заключается главным образом в том, что по ним автоматически устанавливаются собственные частоты любой «составной» модели. Однако и сами по себе функции распределения (1) представляют некоторый практический интерес, хотя на первый взгляд кажется, что они не могут дать никакой информации относительно поведения реальных звездных систем: последние характеризуются, например, убывающим распределением звезд по скоростям.

Возьмем сначала функцию распределения холодного диска с круговыми орбитами частиц  $f_0 \sim \delta(v_r) \delta(v_\phi)$  во вращающейся системе. Она подробно исследовалась на устойчивость Хантером [226]. Следующая задача состояла в том, чтобы учесть конечную дисперсию скоростей звезд, которая во всех интересных случаях много меньше регулярной скорости (вращения). Нужно, следовательно, каким-то образом слегка «размазать»  $\delta$ -функции. Но оказывается, что способ «размазки» безразличен, если ограничиться рассмотрением систем с малой дисперсией скоростей.

Дело в том, что в них отсутствуют кинетические неустойчивости. Всегда имеется только один неустойчивый корень, соответствующий в пределе круговых орбит «хантеровскому». Это гидродинамическая ветвь колебаний. Поведение же этой единственно, таким образом, интересной ветви колебаний не зависит, естественно, от деталей функции распределения, а определяется только ее первыми моментами. В этом смысле безразлично, какую именно рассматривать функцию распределения: (1) или, скажем, максвелловскую (разумеется, соответствующим образом «обрезанную» на больших скоростях). Результаты должны получаться близкими. При больших дисперсиях скоростей такое совпадение уже не является обязательным. В частности, как показал Джулиан [244], убывающие с энергией функции распределения не должны приводить к колебательной неустойчивости (overstability) аксиально-симметричных мод. В то же время функция распределения (1) приводит при  $\gamma \approx 0$  именно к такой неустойчивости. При малой дисперсии остаточных скоростей частиц учет ее конечной величины приводит к разложению соответствующих дисперсионных уравнений по параметру  $\delta = c/\lambda\Omega = \rho/\lambda$ , где  $c$  — дисперсия,  $\lambda$  — длина волны возмущения,

$\Omega$  — угловая скорость вращения,  $\rho$  — средний размер эпицикла. Когда этот параметр мал, поправочные члены к дисперсионному уравнению Тоомре (холодного диска) совпадают для любых функций распределения с одинаковыми дисперсиями (вторыми моментами функции распределения).

Таким образом, уже простейшие модели дисков (1) вполне пригодны для количественного исследования характера стабилизации неустойчивых колебаний холодного диска с малой (в сравнении с регулярной скоростью) дисперсией скоростей звезд. По-видимому, во всех реальных спиральных галактиках дисперсия скоростей действительно мала в указанном смысле.

Из выражения для параметра  $\delta$  видно, что точность указанного соответствия результатов исследования устойчивости моделей (1), (6) раздела 1.4 и реальных распределений звезд (например, максвелловского) должна улучшаться с увеличением масштаба возмущения. Поведение крупномасштабных мод полностью определяется немногими первыми моментами. Мы можем убедиться в этом и непосредственно, получив уравнения для характеристических частот крупномасштабных мод произвольных твердотельно-вращающихся дисков (6) раздела 1.4 (см. [93, 252] и ниже, (16) ÷ (21)). Действительно, оказывается, что эти частоты зависят только от средних значений низших степеней  $\gamma$ :  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}^2$ ,  $\bar{\gamma}^3$  (с весом  $A(\gamma)$ ). Для исследования устойчивости этих мод, следовательно, вообще не нужно как-то конкретизировать функцию распределения системы: вполне достаточно задать эти средние (которые могут быть одинаковыми для многих конкретных систем).

Преимуществом применяемого точного метода исследования как раз и является прежде всего возможность исследования не только мелко-масштабных, но также и крупномасштабных возмущений. Таким образом, в частности, удается доказать, что как раз крупномасштабные неаксиально-симметричные моды становятся наиболее «опасными», а следовательно, и наиболее интересными в реальных системах с конечной дисперсией скоростей звезд.

В работе Хола [219] эволюция бесстолкновительного диска с функциями распределения (1) исследовалась численно при значениях параметра  $\gamma = 0,8; 0,6; 0,4; 0$ . Первое из этих значений примерно соответствует, как мы видели выше, границе устойчивости относительно радиальных возмущений. Численный эксперимент показывает, однако, в полном соответствии с изложенной теорией явную неустойчивость такого диска ( $\gamma = 0,8$ ) относительно нерадиальных возмущений. Примерно за два оборота диска вокруг оси в нем развивается заметная эллиптичность, а затем получается картина, напоминающая пересеченную спираль.

В трех остальных случаях в [219] отмечена лишь слабая неустойчивость (которая может быть обязана колебательной неустойчивости — overstability, либо действию столкновений).

**Спектры колебаний составных моделей.** Займемся теперь «составными» моделями (8) § 1. Как мы уже отмечали, спектры колебаний всех этих дисков совершенно автоматически получаются из спектра исходной функции распределения  $f_{0r}$ , полученного выше. Дело сводится просто к замене в уравнениях для характеристических частот моделей (1) степеней параметра  $\gamma$  соответствующими средними значениями с весом  $A(\gamma)$ .

Если дисперсионное уравнение (7) записать символически в виде

$$D_{\gamma}^{(m,n)}(\omega) = 0, \quad (14)$$

то искомое дисперсионное уравнение, определяющее частоты колебаний системы, описываемой функцией (8) § 1, для той же самой простран-

ственной моды, будет следующим [93, 252]:

$$\int_{-1}^1 d\gamma A(\gamma) D_{\gamma}^{(n,m)}(\omega + m\gamma) = 0. \quad (15)$$

При этом важно, конечно, что собственные функции являются одними и теми же для всех  $\gamma$  [93, 111, 252]. Сдвиг частот в (15)  $\omega \rightarrow \omega + m\gamma$  соответствует доплеровскому смещению: правило получения уравнения (15) по известному уравнению (7) означает просто, что мы должны просуммировать вклады возмущений всех  $\gamma$ -составляющих конкретной составной модели с частотами, вычисленными в инерциальной системе координат.

Важность исследования «составных» функций распределения определяется прежде всего тем, что, несмотря на доказанную неустойчивость каждой из составляющих, вся составная система может тем не менее быть устойчивой (см. ниже, с. 289).

Дисперсионные уравнения для функции распределения (8) раздела 1.4 в случае крупномасштабных мод легко получить из аналогичных дисперсионных уравнений для функции (1) заменой параметра  $\gamma$  соответствующими средними значениями:

$$\gamma^p \rightarrow \bar{\gamma}^p \equiv \int_{-1}^1 A(\gamma) \gamma^p d\gamma; \quad \int_{-1}^1 A(\gamma) d\gamma = 1. \quad (16)$$

Приведем несколько простейших примеров. Дисперсионные уравнения для наиболее крупномасштабных мод:

1) мода ( $m=2, n=0$ )

$$2\omega^2 - 5\omega + 6\bar{\gamma} = 0; \quad (17)$$

2) мода ( $m=0, n=4$ )

$$(\omega^2 - 4)(\omega^2 - 16) - \frac{45}{8}(-\omega^2 + 2 + 14\bar{\gamma}^2) = 0; \quad (18)$$

3) мода ( $m=1, n=2$ )

$$(\omega^2 - 9)(\omega^2 - 1) + \frac{3}{8}(11\omega^2 + 20\bar{\gamma}\omega - 30\bar{\gamma}^2 - 9) = 0; \quad (19)$$

4) мода ( $m=3, n=0$ )

$$(\omega^2 - 9)(\omega^2 - 1) + \frac{5}{8}[3\omega^2 + 12\bar{\gamma}\omega - 9(1 - 2\bar{\gamma}^2)] = 0; \quad (20)$$

5) мода ( $m=2, n=2$ )

$$\omega(\omega^2 - 4)(\omega^2 - 16) + \frac{5}{4}(4\omega^3 + 15\bar{\gamma}\omega^2 - 22\omega + 12\bar{\gamma} - 84\bar{\gamma}^3) = 0. \quad (21)$$

Замечательный факт, ясно видный из (17)–(21), состоит в том, что устойчивость крупномасштабных мод зависит лишь от средних значений немногих низших степеней параметра  $\gamma$ . Последние имеют ясный физический смысл:  $\bar{\gamma}$  равно средней угловой скорости системы,  $\bar{\gamma}^2$  связано с усредненными по объему системы дисперсиями скоростей частиц, и т. п.

Устойчивость «бароподобной» моды ( $m=2, n=0$ ), переводящей исходный круговой диск в эллиптический, определяется согласно (17) только средней угловой скоростью диска как целого, так что условие устойчивости гласит:  $\bar{\gamma} \lesssim 0,507$ . Это условие означает, что для устойчивости доля вклада хаотических движений в равновесие системы должна быть достаточно велика.

Согласно (18) устойчивость простейшей аксиально-симметрической моды ( $m=0, n=4$ ) определяется только величиной  $\gamma^2$ . Следовательно [93, 252], неустойчивость будет иметь место в том случае, если либо  $\bar{\gamma}^2 \geq 0,65$ , либо  $\bar{\gamma}^2 \leq 0,01$ .

Возьмем теперь наиболее крупномасштабные неаксиально-симметричные моды ( $m=1, n=2$ ) и ( $m=2, n=2$ ), на аномальное поведение которых при достаточно малых значениях параметра  $\gamma$  в моделях (1) мы выше обращали внимание (см. рис. 50). Из уравнений (19) и (21) следует, что поведение малых возмущений произвольных составных моделей (8) § 1 определяется в данном случае парами величин:  $(\gamma, \bar{\gamma}^2)$  в случае моды ( $m=1, n=2$ ) и  $(\gamma, \bar{\gamma}^3)$  для моды ( $m=2, n=2$ ). Величины внутри каждой из этих пар, вообще говоря, независимы (в отличие от моделей (1)) и определяются при задании конкретной функции распределения, т. е. функции  $A(\gamma)$ .

Составные модели детально исследованы в работах [93, 252]. Приведем таблицу, заимствованную из работы Калнайса [252], в которую сведены некоторые характерные данные о равновесных состояниях и устойчивости четырех составных моделей<sup>1</sup>.

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ НЕКОТОРЫХ СОСТАВНЫХ МОДЕЛЕЙ [252]

Параметр	Модель А	Модель В <sub>0</sub>	Модель В <sub>1</sub>	Модель В <sub>3</sub>
$A(\gamma)$	1	$4(1-\gamma^2)^{1/2} \pi$	$3\gamma(1-\gamma^2)^{1/2}$	$15\gamma^3(1-\gamma^2)^{1/2}$
$\bar{\gamma}$	1/2	4/3	3π/16	15π/64
Отношение энергии хаотического движения к энергии вращения	2	3	3/2	3/4
Число неустойчивых мод с $n, m \leq 20$	0	0	3	13

Считается, что все « $\gamma$ -диски» вида (1), входящие в эти составные системы, вращаются в одну сторону ( $\gamma > 0$ ).

Калнайс исследовал устойчивость этих моделей, рассчитав частоты колебаний всех мод с  $n, m \leq 20$ . Этого оказывается достаточно, для того чтобы проявилось асимптотическое поведение частот различных семейств мод, которые группируются согласно числу радиальных узлов собственных функций  $(n-m)/2$  (см. ниже, с. 290). Все неустойчивости имеют место среди мод с наименьшими  $(n, m)$ , причем асимптотическое поведение оставляет мало сомнений в том, что остающиеся моды устойчивы.

Модели А и В<sub>0</sub> устойчивы. Модель В<sub>0</sub> немного более «горячая», но в остальном очень похожа на А. Модель В<sub>0</sub> включена потому, что ее функция распределения (как и для моделей В<sub>1</sub>, В<sub>3</sub>) есть элементарная функция  $E$  и  $L$ , в то время как функция распределения А содержит эллиптические интегралы.

Модель В<sub>3</sub> имеет 13 неустойчивых мод. Наиболее быстро вращающиеся в прямом направлении моды (2,2), (3,3), ..., (7,7) образуют одну группу неустойчивых мод, а моды (4,2), (5,3), ..., (10,8) (также самые быстрые) — другую. Мода (3,3) первой группы имеет наибольший инкремент ( $\text{Im } \omega = 0,5547$ ), а мода (7,7) — наименьший ( $\text{Im } \omega = 0,204$ ), в то время как во второй группе максимальный инкремент

<sup>1</sup> В работе [93] рассмотрены условия устойчивости большого числа моделей с весовой функцией вида  $A(\gamma) \sim \gamma^{n_1} (1-\gamma^2)^{n_2/2}$  (где  $n_1, n_2$  — целые числа).

имеет мода (6,4) ( $\text{Im } \omega = 0,469$ ), а минимальный ( $\text{Im } \omega = 0,223$ ). — мода (4,2).

Модель  $B_1$  имеет три неустойчивые моды. Из них бароподобная прямо вращающаяся мода (2,2) имеет наибольший инкремент.

Модели  $B_1$  и  $B_2$  показывают еще раз, что диски, которые являются достаточно горячими, чтобы подавить радиальные неустойчивости, могут еще быть сильно неустойчивыми по отношению к неаксиально-симметричным модам.

Разберемся теперь в вопросе о виде собственных функций, т. е. пространственной зависимости возмущенных плотности и потенциала в рассмотренных точных моделях дисковых систем.

В гидродинамическом пределе  $\gamma = 1$  в (1) собственные функции для произвольной моды, характеризующейся парой индексов  $(m, n)$ , были найдены Хантером. Они имеют (внутри диска) вид (61) раздела 2.2.

В работах [93, 111, 252] было показано, что и в общем случае  $\gamma \neq 1$ , т. е. для произвольных дисков, собственные функции имеют такой же вид. Это можно непосредственно проверить для первых мод, если вычислить следующие за  $r^{n+m}$  члены разложения радиальной части возмущенного потенциала  $\Phi_1 = r^{n+m} + Cr^{n+m-2} + \dots$ . Несколько примеров такого рода вычислений мы приводим в задаче 2. Калнайс [252] дал общее доказательство этого утверждения, справедливое сразу для всех мод.

Поскольку собственные функции выглядят одинаково для любых значений параметра  $\gamma$ , они останутся такими же и для произвольных функций распределения твердотельно-вращающихся дисков вида (8) § 1, представляющих собой линейные комбинации дисков (1) с разными  $\gamma$ .

Воспроизведем кратко (в основном схему) общего доказательства Калнайса.

Ограничиваясь возмущениями с конечной потенциальной энергией, сделаем функциональное пространство гильбертовым, используя (минус) потенциальную энергию взаимодействия двух возмущений как скалярное произведение.

Потенциальная энергия взаимодействия двух возмущений с индексами  $(n, m)$  и  $(n', m')$  равна

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV = \frac{1}{2} \int \sigma \Phi dS; \quad (22)$$

для  $\Phi = \psi_n^m \equiv 4\gamma_n^m P_n^m(\xi) e^{im\varphi}$ ,  $\sigma = \sigma_{n'}^{m'} \equiv P_{n'}^{m'}(\xi) e^{im'\varphi} / \xi$

$$(\sigma_{n'}^{m'}, \psi_n^m) = -4\gamma_n^m \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{V \sqrt{1-r^2}} e^{i(m-m')\theta} P_n^m [(1-r^2)^{1/2}] P_{n'}^{m'} [(1-r^2)^{1/2}]. \quad (23)$$

Она исчезает при  $m \neq m'$ . Если же  $m = m'$ , то вместо (23) имеем

$$-2\pi 4\gamma_n^m \int_0^1 P_n^m(\xi) P_{n'}^{m'}(\xi) d\xi \quad (\xi \equiv \sqrt{1-r^2}). \quad (24)$$

Этот интеграл обращается в нуль, когда  $(n-n')/2$  есть ненулевое целое.

Определим теперь оператор отклика  $\tilde{R}$ :  $\tilde{R}\psi_n^m$  есть потенциал, возникающий от отклика плотности на  $\psi_n^m$ , вычисленного решением линеаризованного кинетического уравнения.  $\psi_n^m$  будет собственной функцией оператора  $\tilde{R}$ , если

$$\tilde{R}\psi_n^m = \lambda \psi_n^m. \quad (25)$$

Если к тому же  $\lambda = 1$ , то  $\psi_n^m$  есть нормальная мода.

Другой путь доказательства, что  $\psi_n^m$  есть собственная функция, состоит в том, чтобы показать ортогональность  $\tilde{R}\psi_n^m$  ко всем другим потенциалам с отличными от  $(n, m)$  индексами:

$$(\sigma_n^{m'}, \tilde{R}\psi_n^m) = 0, \text{ если } (n, m) \neq (n', m'). \quad (26)$$

Выражение для скалярного произведения в терминах потенциала было выведено Калнайсом [251, 252]. Мы не приводим здесь его ввиду некоторой громоздкости. Для нас существенно только то, что если  $\omega$  действительно и не равно линейной комбинации радиальной и азимутальной частот  $(l\Omega_1 + m\Omega_2)$  каких-либо частиц, то оператор отклика является самосопряженным<sup>1</sup>, так что (26) одновременно означает, что и

$$(\sigma_n^m, \tilde{R}\psi_n^{m'})^* = 0, \text{ } (n, m) \neq (n', m'). \quad (27)$$

Поскольку в твердотельно-вращающемся диске  $\Omega_1=2, \Omega_2=1$ , то  $\tilde{R}$  будет самосопряженным, когда  $\omega$  вещественное и не целое. Но так как слева в (26), (27) стоят аналитические функции  $\omega$  (с полюсами при целых  $\omega$ ), то если показать, что  $\psi_n^m$  являются собственными функциями для вещественных  $\omega$ , то их аналитические продолжения будут собственными функциями и для комплексных  $\omega$ .

Условие ортогональности (23) можно упростить: достаточно показать, что отклик диска на потенциал вида

$$\Phi_s = \exp(im\varphi - i\omega t) r^m r^{2s} \left( s \leq \frac{n-m}{2} \right) \quad (28)$$

также является полиномом по  $r$  той же самой степени. Более точно, что

$$\tilde{R}\Phi_s = a_0\Phi_s + a_1\Phi_{s-1} + \dots + a_s. \quad (29)$$

Так как  $\psi_n^m$  есть линейная комбинация  $\Phi_s$ , то отклик  $\tilde{R}\psi_n^m$  будет линейной комбинацией  $\psi_{m+2l}^m$  с  $0 \leq l \leq \left(\frac{n-m}{2}\right)$ , и поэтому ортогонален ко всем  $\psi_{n+2j}^m$  с  $j=1, 2, \dots$ . Но из самосопряженности  $\tilde{R}$  следует, что  $\tilde{R}\psi_n^m$  должно быть ортогонально ко всем  $\psi_{n-2j}^m, j=1, 2, \dots, \left(\frac{n-m}{2}\right)$ .

Таким образом, для доказательства того, что  $\psi_n^m$  есть собственные функции, остается показать, что отклик на (28) есть (29). Это доказывается непосредственным вычислением (его самосогласованностью).

Дисперсионное уравнение (7) можно представить в виде

$$\sum_{k=-n}^n \frac{a_k}{\omega - k} = 1, \quad (30)$$

причем при  $m=0$   $a_0=0$ . Отсюда следует, что для каждой  $\psi_n^m$  в горячем диске имеется  $(n+1)$  для  $m \neq 0$  и  $n$  для  $m=0$  (из-за сохранения углового момента) степеней свободы (соответственно числу различных корней уравнения (30)). Таким образом, чтобы исследовать «эволюцию»  $\psi_n^m$  при  $m \neq 0$ , нужно определить  $(n+1)$  независимых уравнений для моментов функции распределения. Напомним, что в «холодном» диске мы имели соответственно три (для  $m \neq 0$ ) и две ( $m=0$ ) степени свободы.

**Устойчивость модели (9) § 1.** Строгое доказательство устойчивости той или иной составной модели типа (8) § 1 относительно произвольных

<sup>1</sup> Найти явное выражение для  $R$  и убедиться в самосопряженности этого оператора можно, если воспользоваться формулами, полученными в предыдущем разделе при выводе интегрального уравнения (38).

возмущений представляет довольно кропотливую задачу. Относительно просто это делается для модели (9) § 1 [14].

Техника расчета мало меняется по сравнению со случаем цилиндра (см. § 3 главы II). Снова вводим горизонтальные отклонения  $X$  и  $Y$ , удовлетворяющие аналогичным уравнениям. Они представляются полиномами степени  $N$ . Но формула усреднения заменяется несколько иной. Установим способ усреднения по скоростям. К нему можно подойти, воспользовавшись формулами

$$v_x = \frac{xv_r - yv_\varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v_y = \frac{yv_r + xv_\varphi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (31)$$

и взяв все средние от выражений типа  $v_\varphi^\alpha v_r^\beta$ . Если  $\alpha$  или  $\beta$  нечетно, то по симметрии получается нуль. Если же оба показателя четны, введем временно полярные координаты на диаграмме скоростей по формулам

$$v_r = r\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sin \varphi; \quad v_\varphi = ra \cos \varphi,$$

( $a$  — радиус диска), и тогда получается ( $\Omega_0 = 1$ )

$$\overline{v_\varphi^\alpha v_r^\beta} = \frac{a^\alpha}{\pi} (a^2 - x^2 - y^2)^{\beta/2} \int_0^1 r^{\alpha+\beta+1} dr \int_0^{2\pi} \cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi d\varphi. \quad (32)$$

Если  $\alpha \geq 2$ , то результат усреднения имеет относительно  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  степень меньше  $\alpha + \beta$  и при выделении старших членов, которое формально производится делением на  $R^N$  с последующим переходом  $R \rightarrow \infty$ , не играет роли. Учитывать следует только произведения  $v_r^\beta$  и их средние

$$\overline{v_r^\beta} = \frac{2(\beta-1)!!}{(\beta+2)!!} (a^2 - x^2 - y^2)^{\beta/2} = \frac{2(\beta-1)!!}{(\beta+2)!!} (iR)^\beta + \dots \quad (33)$$

Сопоставляя это с (31), получаем искомое правило осреднения

$$\bar{X} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X(x, y, ix \sin \varphi, iy \sin \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi. \quad (34)$$

Запишем уравнение непрерывности

$$\sigma_1 = -\frac{\partial}{\partial x}(X\sigma) - \frac{\partial}{\partial y}(Y\sigma). \quad (35)$$

Возмущение плотности равно некоторому полиному степени  $(N+1)$ , деленному на  $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Возможны значения азимутального волнового числа  $m = -N-1, -N+1, \dots, N+1$ .

Поскольку  $\sigma$  обращается в нуль на границе, смещение границы дает в потенциал вклад высшего порядка малости. Поэтому нет и особых краевых мод.

Беря  $\Phi_1$  в виде

$$\Phi_1 \propto (x + iy)^n (x - iy)^{n_1} \equiv R^{N+1} e^{im\varphi} \quad (36)$$

и следя везде только за старшими членами полиномов, прежним путем получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{n_1 \left(n + \frac{1}{2}\right) + n \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)}{\pi} \int_0^\infty e^{-\omega\tau} \text{sh } \tau d\tau \int_0^{2\pi} (\text{ch } \tau - \sin \varphi \text{ sh } \tau)^N \cos^2 \varphi d\varphi = \\ & = -\frac{(2n)!! (2n_1)!!}{4(2n-1)!! (2n_1-1)!!} (N = n + n_1 - 1). \end{aligned} \quad (37)$$



Разделяя в подинтегральном выражении члены с  $e^\tau$  и  $e^{-\tau}$ , находим

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{ch} \tau - \sin \varphi \operatorname{sh} \tau)^N \cos^2 \varphi d\varphi = 2^{-N} \sum_{m=0}^N \frac{N! e^{(2m-N)\tau}}{m! (N-m)!} \int_0^{2\pi} (1 - \sin \varphi)^{m+1} \times \\ \times (1 + \sin \varphi)^{N-m+1} d\varphi = 2\pi \sum_{m=0}^N \frac{(2m+1)!! (2N-2m+1)!!}{(2m)!! (2N-2m)!! (N+1) (N+2)} e^{(2m-N)\tau}. \quad (38)$$

Выполнив интегрирование по  $\tau$ , приводим дисперсионное уравнение к виду

$$\sum_{m=0}^N \frac{(2m+1)!! (2N-2m+1)!!}{(2m)!! (2N-2m)!! [(\omega + N - 2m)^2 - 1]} = -\delta(n, n_1), \quad (39)$$

где

$$\delta(n, n_1) = \frac{(2n)!! (2n_1)!! (n + n_1) (n + n_1 + 1)}{4 (2n-1)!! (2n_1-1)!! (4nn_1 + n + n_1)}. \quad (40)$$

Как и раньше, уравнение удается представить также в мультипликативной записи, а именно:

$$\frac{\omega^2 (\omega^2 - 4) \dots (\omega^2 - N^2)}{(\omega^2 - 1) (\omega^2 - 9) \dots [\omega^2 - (N+1)^2]} - 1 + \delta(n, n_1) = 0 \quad (N \text{ — четное}) \quad (41)$$

или

$$\frac{(\omega^2 - 1) (\omega^2 - 9) \dots (\omega^2 - N^2)}{(\omega^2 - 4) (\omega^2 - 16) \dots [(\omega^2 - (N+1)^2)]} - 1 + \delta(n, n_1) = 0 \quad (N \text{ — нечетное}). \quad (42)$$

Модель оказывается устойчивой. Для доказательства предварительно установим неравенство

$$\delta(n, n_1) \geq 1. \quad (43)$$

Поскольку множитель  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$  возрастает при  $n=1, 2, 3, \dots$ , а множитель

$$\frac{(n + n_1) (n + n_1 + 1)}{4nn_1 + n + n_1},$$

как показывает анализ обычными методами, также возрастает по  $n$  при  $n > n_1 > 0$ , то задача сводится к рассмотрению пар  $(n, n_1)$  вида  $(1, 0)$  и  $(n, n)$ , для всех же остальных неравенство (43) еще усиливается. Но  $\delta(1, 0) = 1$  (связано с тривиальным случаем смещения системы как целого), а

$$\delta(n, n) = \frac{1}{4} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \geq 1 \quad (n \geq 1).$$

С учетом (43) все корни отделяются. Они лежат по одному в интервалах  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$  ...,  $(N, N+1)$  при четном  $N$  или  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$ , ...,  $(N, N+1)$  — при нечетном  $N$ .

*Бароподобные возмущения* однородно-вращающихся дисков подробно рассматривались в специальной работе Калнайса и Атанасоула [254]. Эти возмущения, по-видимому, действительно заслуживают отдельного исследования. О главной причине такой предпочтительности мы уже упоминали в главе IV (см. § 3). Она заключается в том, что именно бароподобная мода доминирует при эволюции сплюснутых систем, стабильных относительно аксиально-симметричных возмущений. Это было убедительно продемонстрировано в численных экспериментах Пиблса — Острайкера [301], а еще раньше — Хола [220], Миллера с соавторами [294] (для систем, не имеющих значительного «галло»).

Практически важно, конечно, получить ответ на вопрос, как модифицируются колебательные моды рассмотренных выше моделей при переходе к дифференциально-вращающимся системам. Ответить определенно на этот вопрос трудно, но можно высказать следующее естественное предположение [254].

«Слабо коллективные» моды, т. е. моды, связанные с малыми «вычетами»  $a_i$  в (30) и обязанные своим существованием большому времени когерентности при отсутствии дифференциальности вращения<sup>1</sup>, вряд ли «выживут» при наличии последней. Меньше всего подвержена дифференциальному вращению эллиптическая (бароподобная) деформация (2,2); кроме того, для ее возбуждения требуется наименьшая передача энергии и углового момента. Поэтому можно ожидать существования аналогов (2,2)-моды и в дифференциально-вращающихся дисках, что и подтверждается упомянутыми выше численными экспериментами.

В предыдущей главе (§ 3) мы изложили гипотезу Пиблса и Острайкера, которые утверждают, что устойчивость (или неустойчивость) по отношению к бароподобной моде нечувствительна к детальной структуре диска и во всех случаях определяется величиной отношения  $t$  вращательной энергии к (минус) потенциальной энергии, причем критическое значение  $t_{кр} = 0,14 \pm 0,03$ . Исследование однородно-вращающихся дисков служит, в частности, проверкой гипотезы Пиблса — Острайкера. Выше мы видели, что устойчивость бароподобных мод для частного семейства однородно вращающихся дисков (8) § 1 определяется лишь средней скоростью вращения диска. Полученный критерий устойчивости легко выразить через параметр  $t$ . Оказывается, что  $t_{кр} = 0,1286$ , что не противоречит границе устойчивости, указанной Пиблсом и Острайкером.

В работе [254] показано, что (2,2)-моды вращающихся дисков (8) § 1 имеют место в более широком классе равновесий и что их устойчивость определяется тем же критерием.

Возмущенные распределения плотности и потенциала, соответствующие бароподобной моде ( $R = \Omega_0 = \sigma_0(0) = 1$ )

$$\sigma_1(r, \varphi, t) = \varepsilon \operatorname{Re} \{ r^2 (1 - r^2)^{-1/2} \exp [i(2\varphi - \omega t)] \}, \quad (44)$$

$$\Phi_1(r, \varphi, t) = -\frac{3}{4} \operatorname{Re} \{ r^2 \exp [i(2\varphi - \omega t)] \}.$$

Интерпретация  $\sigma_1(r, \varphi, 0)$  естественна: это есть изменение плотности, если равновесие деформировать, давая звездам, первоначально находившимся в точке  $r$ , малое среднее смещение  $\delta r$ :

$$\delta x = \varepsilon x, \quad \delta y = -\varepsilon y.$$

Такую деформацию можно рассматривать как результат растяжения диска вдоль оси  $x$  в  $(1 + \varepsilon)$  раз и сжатия вдоль оси  $y$  в  $(1 - \varepsilon)$  раз. Невозмущенные движения звезд есть гармонические колебания по  $x$  и  $y$  с частотой  $\gamma = 1$ . Если медленно включается возмущенное поле (44), орбиты звезд будут отклоняться от невозмущенных:  $r \rightarrow r + \Delta r$ . Выразим отклонения  $\Delta r$  в функции от невозмущенных положения, скорости звезд и времени  $t$ . При малом  $\varepsilon$  также мало и  $\Delta r$ , так что (с точностью до первого порядка по  $\varepsilon$ )  $\Delta r$  можно вычислять, подставляя возмущенное поле вдоль невозмущенной орбиты. Соответствующие линейные уравнения для вынужденных гармонических колебаний можно легко проинтегрировать, причем получается

$$\Delta x - i\Delta y = \frac{3}{4} \varepsilon \{ (x_0 + iy_0) A - i(u_0 + iv_0) B \}, \quad (45)$$

<sup>1</sup> Частоты этих мод близки к резонансным.

где  $A \equiv 2/(4 - \omega^2)$ ,  $B \equiv 4/(4\omega - \omega^3)$ , а  $(x_0, y_0)$  и  $(u_0, v_0)$  — невозмущенные значения координат и скоростей звезды (в «момент»  $t = -\infty$ ). Отсюда среднее значение  $\langle \Delta r \rangle$  по всем скоростям равно

$$\langle \Delta x \rangle - i \langle \Delta y \rangle = \frac{3}{4} \varepsilon \{ (x_0 + iy_0) A - i (\langle u_0 \rangle + i \langle v_0 \rangle) B \}. \quad (46)$$

Наконец, для того чтобы эти отклонения привели к таким изменениям плотности, которые будут воспроизводить форму принятого поля  $\Phi_1$ , необходимо, чтобы среднее смещение было пропорционально  $\delta r$ , т. е. чтобы было

$$\langle u_0 \rangle = -\gamma y_0, \quad \langle v_0 \rangle = \gamma x_0. \quad (47)$$

Видно, таким образом, что среднее поле скоростей равновесного диска должно быть полем твердотельного вращения с угловой скоростью  $\gamma$ , которая может быть взята из интервала  $0 < \gamma \leq 1$ . Это ограничение и тре-

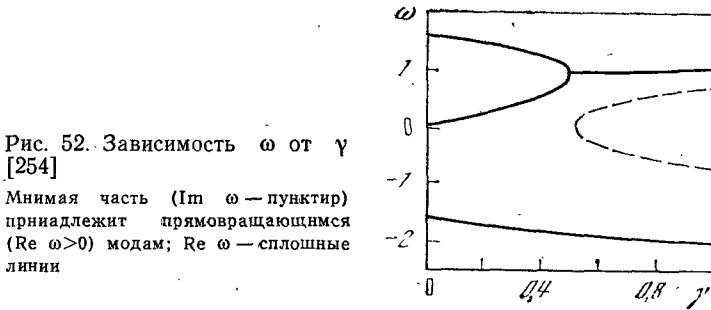


Рис. 52. Зависимость  $\omega$  от  $\gamma$  [254]  
Мнимая часть ( $\text{Im } \omega$  — пунктир) принадлежит прямовращающимся ( $\text{Re } \omega > 0$ ) модам;  $\text{Re } \omega$  — сплошные линии

бование, чтобы поверхностная плотность равнялась  $\sigma_0(0) \sqrt{1 - r^2/R^2}$ , удовлетворяется гораздо более широким классом равновесий, чем рассмотренные ранее (8) § 1.

Условие самосогласованности колебаний дает

$$\frac{3}{4} (A + \gamma B) = -\frac{3(1 + \gamma)/8}{\omega - 2} + \frac{3\gamma/4}{\omega} + \frac{3(1 - \gamma)/8}{\omega + 2} = 1. \quad (48)$$

Это уравнение идентично уравнению (17) для (2,2)-моды дисков (8) раздела 1.4. Имеются три возможные частоты колебаний, их зависимость от  $\gamma$  представлена на рис. 5.2. Неустойчивость начинается при  $\gamma > 5/9\sqrt{5/6} = 0,5072$ , что соответствует отношению вращательной кинетической энергии к (минус) потенциальной энергии  $t = 125/972 = 0,1286 \dots$  Скорости нестабильных мод по азимуту заключены в довольно узком интервале, между  $(5/24)^{1/2}$  и  $1/2$  от угловой скорости звезды на круговой орбите.

В качестве простейшего примера «горячей» гидродинамической системы рассмотрим [95] твердотельно-вращающийся с угловой скоростью  $\gamma\Omega_0$  диск, равновесие которого обеспечивается соответствующим градиентом давления, которое учитывается модельно в уравнениях гидродинамики

$$P_z = 0, \quad P_{\perp} = \frac{\Omega_0^2 \sigma_0(0) R^2}{3} (1 - \gamma^2) (1 - r^2/R^2)^{3/2} \sim \sigma^3. \quad (49)$$

Гравитационный потенциал  $\Phi_0 = (\Omega_0^2 r^2)/2$ , а поверхностная плотность  $\sigma_0(r) = \sigma_0(0) \sqrt{1 - r^2/R^2}$ .

Условие равновесия записывается следующим образом;

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \Omega_0^2 \gamma^2 r = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \quad (50)$$

или для рассматриваемой модели

$$(1-\gamma^2)\Omega^2 r + \Omega^2 \gamma^2 r = \Omega^2 r. \quad (51)$$

Спектр колебаний такой модели можно получить способом, совершенно аналогичным использованному Хантером для случая холодного диска (раздел 2.2). Оказывается, что собственные частоты должны удовлетворять следующему характеристическому уравнению:

$$1 - \frac{4\Omega^2}{\lambda^2 - 4\gamma^2\Omega^2} \left[ \frac{1}{4}(1-\gamma^2) - \gamma_l^m \right] \left[ l(l+1) - m^2 - \frac{2m\gamma\Omega}{\lambda} \right] = 0. \quad (52)$$

Здесь  $\lambda \equiv \omega - m\gamma\Omega$ ,  $\omega$  — частота,

$$\gamma_l^m = \frac{(l+m)!(l-m)!}{2^{2l+1} \left[ \left( \frac{l+m}{2} \right)_l \right]^2 \left[ \left( \frac{l-m}{2} \right)_l \right]^2}. \quad (53)$$

Собственные функции (потенциал), как обычно для подобных систем, выражаются через присоединенные функции Лежандра

$$\Phi_{l,m} \sim P_l^m \left( \sqrt{1-r^2/R^2} \right) e^{im\varphi}. \quad (54)$$

В частности, для радиальных колебаний из (52) сразу получаем выражение для квадрата частоты

$$\omega^2 = 4\gamma^2\Omega^2 + 4\Omega^2 l(l+1) \left[ \frac{1}{4}(1-\gamma^2) - \frac{(l!)^2}{2^{2l+1}} \left[ \left( \frac{l}{2} \right)_l \right]^{-4} \right]. \quad (55)$$

Отсюда следует, что радиальные колебания устойчивы при  $\gamma^2 < 0,9$ . Труднее стабилизируются неаксиально-симметричные моды, причем самой неустойчивой оказывается мода с  $l=2$ ,  $m=2$ , соответствующая деформации кругового диска в эллиптический. Для ее стабилизации необходимо, чтобы было  $\gamma^2 < 0,5$ , т. е. вклад в равновесие от давления должен превысить вклад от центробежной силы.

## ЗАДАЧИ

1. Исследовать условия существования непрерывного спектра частот колебаний «холодных» дисков с полоидальным магнитным полем (см. § 3).

Решение. Перепишем систему (1) — (4) (§ 3) в виде двух уравнений:

$$s^2 (\lambda^2 - \chi_H^2) \int_1^{\xi} \xi \sum d\xi = \frac{s^3 (1 - \xi^2)}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - s^2 \sqrt{1 - \xi^2} H_0 J, \\ \xi s^2 H - s H_0 \Sigma \xi = (H_0 s - H_0 s') \int_1^{\xi} \xi \sum d\xi. \quad (1)$$

Для анализа характера собственных частот  $\lambda$  мы воспользуемся «матричным» методом [95, 228]. Будем искать решения для потенциала, плотности, тока и магнитного поля в виде следующих разложений:

$$\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n} \rho_{2n}(\xi); \quad \xi \Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} \rho_{2n}(\xi), \\ J = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \rho'_{2n-1}(\xi); \quad H = \frac{1}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} \beta_{2n-1} \rho_{2n-1}(\xi), \quad (2)$$

$\Phi_{2n}$ ,  $g_{2n-1}$  — неизвестные коэффициенты. Связи  $\psi \leftrightarrow \Sigma$ ,  $J \leftrightarrow H$  легко устанавливаются [95, 228] из условий сшивки на поверхности диска вакуумных решений для  $\psi$  и  $H$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2.$$

Используя соотношение

$$\int_1^{\xi} \xi \Sigma d\xi = \int_1^{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p_{2n} d\xi = - (1 - \xi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n},$$

получим

$$\begin{aligned} -s^2 (\lambda^2 - \chi_H^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n} &= \frac{s^3}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n} p'_{2n} - \frac{s^2 H_0}{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n-1} p'_{2n-1}, \\ \xi s^2 H - s H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p_{2n} &= - (H_0 s - H_0 s') (1 - \xi^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_{2n}}{\gamma_{2n}} p'_{2n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $s$ ,  $H_0$  представляются в виде рядов по степеням  $\xi$

$$\begin{aligned} s^2 (\lambda^2 - \chi_H^2) &= \sum_{j=0}^N A_j \xi^{2j}, & \frac{s^3}{3} &= \sum_{j=0}^N B_j \xi^{2j+2}, \\ s^2 H_0 &= \sum_{j=0}^N c_j \xi^{2j+2}, & \xi s^2 &= \xi \sum_{j=0}^N D_j \xi^{2j+2}, \\ s H_0 &= \xi \sum_{j=0}^N F_j \xi^{2j}, & (1 - \xi^2) (H_0 s - H_0 s') &= \sum_{j=0}^N G_j \xi^{2j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Любую модель, с произвольным  $s$  и  $H_0$ , можно сколь угодно точно аппроксимировать выбором достаточно большого  $N$ .

Дальнейшая процедура состоит в следующем: подставим (2), (4) в (1) и перейдем в обоих уравнениях к  $p_{2n}$ ; при этом необходимо воспользоваться рекуррентными соотношениями (для нормированных полиномов Лежандра).

$$\xi^2 p'_{2n} = a_n p'_{2n+2} + b_n p'_{2n} + c_n p'_{2n-2},$$

$$a_n = \frac{2n(2n+1)}{x_{n+1}}; \quad b_n = \frac{8n^2 + 4n - 3}{(4n+3)(4n-1)}; \quad c_n = \frac{2n(n+1)}{x_n},$$

$$x_n = (4n-1)[(4n+1)(4n-3)]^{1/2},$$

$$p_{2n-1} = e_n p_{2n} - d_n p_{2n-2},$$

$$e_n = [(4n-1)(4n+1)]^{-1/2}; \quad d_n = [(4n-1)(4n-3)]^{-1/2},$$

$$\xi p_{2n} = u_n p_{2n+2} + v_n p_{2n} + z_n p_{2n-2},$$

$$u_n = \frac{2n+1}{x_{n+1}}; \quad v_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}; \quad z_n = -\frac{2n}{x_n},$$

$$\xi p'_{2n-1} = f_n p'_{2n} + l_n p'_{2n-2},$$

$$f_n = \frac{2n-1}{[(4n-1)(4n+1)]^{1/2}}; \quad l_n = \frac{2n}{[(4n-1)(4n-3)]^{1/2}}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых  $p_{2n}$ , получим систему двух разностных уравнений относительно  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$ . В дальнейшем мы

будем интересоваться асимптотическим видом  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$  при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому выпишем уравнения, составив в коэффициентах при  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$  только члены старших порядков по  $1/n$ :

$$\begin{aligned} & \sum_j B_j A^{-(1+j)} (E+2+E^{-1})^{j+1} \Phi_{2n} - \frac{1}{2} \sum_j C_j A^{-j} (E+2+E^{-1})^j (g_{2n-1} + g_{2n+1}) + \\ & + \frac{1}{n} \left[ \frac{\pi}{2} \sum_j A_j A^{-j} (E+2+E^{-1})^j \Phi_{2n} + \frac{1}{4} \sum_j C_j A^{-j} (E+2+E^{-1})^j (g_{2n-1} - \right. \\ & - g_{2n+1}) - \frac{1}{2} \sum_j C_j (4E)^{-j} j (E+1)^{2j-1} (E-1) g_{2n-1} + g_{2n+1} + \\ & \left. + \sum_j B_j (4E)^{-(j+1)} (E+1)^{2j+1} (E-1) (j+1) \Phi_{2n} \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_j D_j (E+2+E^{-1})^{j+1} 4^{-(1+j)} (g_{2n-1} - g_{2n+1}) - \frac{\pi}{2} \sum_j F_j (E+2+E^{-1})^j 4^j \times \\ & \times (\Phi_{2n-2} - \Phi_{2n+2}) + \frac{1}{n} \left[ \sum_j D_j A^{-(1+j)} (E+2+E^{-1})^{j+1} \left( -\frac{g_{2n+1}}{4} - \frac{g_{2n-1}}{4} \right) + \right. \\ & + \sum_j D_j (4E)^{-j-1} (j+1) (E-1) (E+1)^{2j+1} (g_{2n-1} - g_{2n+1}) + \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_j F_j (4E)^{-j} (E+1)^{2j-1} j (E-1) (\Phi_{2n+2} - \Phi_{2n-2}) + \\ & + \frac{\pi}{2} \sum_j F_j A^{-j} (E+2+E^{-1})^j \left( \frac{3}{4} \Phi_{2n-2} - \frac{1}{2} \Phi_{2n} + \frac{3}{4} \Phi_{2n+2} \right) + \\ & \left. + \pi \sum_j G_j A^{-j} (E+2+E^{-1})^j \Phi_{2n} \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь введен, как в [228], оператор  $E$ :

$$E\Phi_{2n} = \Phi_{2n+2}; \quad E g_{2n-1} = g_{2n+1}.$$

Систему (5), (6) нужно решать с граничным условием  $\Phi_{2n}, g_{2n-1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В старшем порядке по  $1/n$  мы имеем систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Следуя общей теории, будем искать решение этих уравнений в виде

$$\Phi_{2n} = \Phi t^{2n}; \quad g_{2n-1} = g t^{2n-1}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и (6), получим

$$\Phi \sum_j B_j \zeta^{2j+2} - g \sum_j C_j \zeta^{2j+1} = 0, \quad (8)$$

$$g \sum_j D_j \zeta^{2j+2} - \Phi \pi \sum_j F_j \zeta^{2j+1} = 0, \quad (9)$$

где

$$\zeta = \frac{t^2 + 1}{2t}. \quad (10)$$

Сравнивая с (4), можно записать

$$s(\xi)g - H_0(\xi)\Phi = 0, \quad \pi H_0(\xi)g - s(\xi)\Phi = 0. \quad (11)$$

Условие нетривиальности решения дает

$$s^2(\xi) - \pi H_0^2(\xi) = 0. \quad (12)$$

Значение  $t$  легко находится из (10). Пусть  $\xi = \xi_0$  есть корень уравнения (12). Тогда из (10) получим следующее характеристическое уравнение:

$$t^2 - 2t\xi_0 + 1 = 0, \quad t_{1,2} = \xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 - 1}. \quad (13)$$

Каждому корню  $\xi_0$  соответствует пара значений  $t$ :  $t_1$  и  $t_2$ . Возможны два случая.

1) Если все  $\xi_0 > 1$ , то мы имеем две серии действительных решений для  $t$ , причем для одной серии  $t_1 < 1$ , а для другой  $t_2 > 1$ . Значения  $t = t_1$  дают убывающие решения для  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$  и, следовательно, удовлетворяют граничным условиям. Экспоненциальное убывание решений отвечает дискретному набору собственных значений [228].

2) Имеется корень  $\xi_0 < 1$ , что как раз соответствует обращению величины  $s^2 - \pi H_0^2$  в нуль на диске. Как мы уже отмечали, наличие корня  $\xi_0 < 1$  всегда имеет место для моделей с самосогласованным магнитным полем. В этом случае  $|t_1| = |t_2| = 1$ , и для выяснения асимптотического поведения  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$  требуется учет членов порядка  $n^{-1}$  в уравнениях (5), (6) (сравни [228]). Будем искать решение в виде

$$\Phi_{2n} = \Phi(2n)^\alpha e^{\pm 2in\beta}, \quad g_{2n-1} = g(2n-1)^\alpha e^{\pm (2n-1)i\beta} \quad (14)$$

с неизвестными  $\alpha$  и  $\beta$ . Подстановка (14) в (5), (6) и приравнение нулю определителя системы, аналогичной (11), дает

$$\cos \beta = \xi_0; \quad \alpha = -\frac{1}{2} \mp i\pi \frac{s(\lambda^2 - \chi_H^2)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\xi_0}{2ss' - 2\pi H_0 H_0'} \quad (15)$$

В (15) значения  $s$  и  $H_0$  берутся в точке  $\xi = \xi_0 = \xi_0$ , в которой  $s^2(\xi) = \pi H_0^2(\xi)$ .

Мы получили отрицательную вещественную часть  $\lambda$  при любых значениях  $\lambda^2$ . Это означает, что решение (14) удовлетворяет необходимым граничным условиям  $\Phi_{2n} \rightarrow 0$ ,  $g_{2n-1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для любых  $\lambda^2$  ( $-\infty < \lambda^2 < \infty$ ). Следовательно, убывающее решение существует во всей области действительных значений  $\lambda^2$ , и мы имеем непрерывный спектр. Неустойчивость диска с самосогласованным магнитным полем доказана для любых длин волн.

Зная решения (14) для  $\Phi_{2n}$  и  $g_{2n-1}$ , мы легко можем просуммировать ряды (2) для больших  $n$ . В результате получим

$$\Psi_{\text{асимп}} \sim \frac{1}{\sqrt{|\xi - \xi_0|}} \exp \left\{ \pm i \frac{(\lambda^2 - \chi_H^2) \pi \xi_0 s(\xi_0)}{\sqrt{1 - \xi_0^2}} \frac{\ln |\xi - \xi_0|}{2(ss' - \pi H_0 H_0')|_{\xi = \xi_0}} \right\}, \quad (16)$$

причем при  $\lambda^2 < \chi_H^2(\xi_0)$   $\Psi_{\text{асимп}}$  определяется выражением (16) в ЛНО и равна нулю в ЛУО. При  $\lambda^2 > \chi_H^2(\xi_0)$  мы имеем противоположный случай<sup>1</sup>.

Формула (16) для  $\psi$  не учитывает гармоник с низшими  $n$ , что и приводит к локализации возмущений. Из физических соображений ясно, что возмущения со средней длиной волны (усредненной по мелким осцилляциям вблизи  $\xi = \xi_0$ ) порядка размеров неустойчивой области будут раскачивать весь диск, даже если размер этой неустойчивой области

<sup>1</sup> Отметим, что выражение (16) для  $\Psi_{\text{асимп}}$  получается и из ВКБ-анализа с учетом предэкспоненциальных членов.

много меньше размеров диска (отметим также, что в случае  $\chi_H^2(\xi_0) < 0$  ЛУО оказывается на самом деле неустойчивой).

В заключение необходимо сделать одно замечание. Как видно из формулы (16), в случае непрерывного спектра имеется неопределенность массы в окрестности точки  $\xi = \xi_0$ , в которой  $s^2 = \pi H_0^2$ . Это обстоятельство связано с выбором идеализированной в виде бесконечно тонкого, холодного диска модели. Если, например, ввести в уравнения член с давлением в виде  $P \sim \Sigma^{\gamma}$  (считая  $\Sigma$  как угодно малым), то отмеченная неопределенность устраняется. При этом оказываются стабилизированными самые короткие волны, не представляющие опасности для устойчивости диска в силу их локализации. Непрерывный спектр становится дискретным с очень близкими значениями частот. Действительно, наличие непрерывного спектра связано с расходимостью интеграла типа (24) § 3 (определяющего фазу возмущений), которая исчезает при введении сколь угодно малого давления.

Соображения, аналогичные приведенным в разделе 2.1, позволяют предположить, что развитие возмущений во времени в реальной задаче с начальными условиями должно в рассматриваемом случае привести к образованию кольца повышенной плотности вблизи  $\xi = \xi_0$ .

2. Вычислить собственную функцию задачи о малых возмущениях дисков (6) § 1 для какой-либо простейшей крупномасштабной моды.

Решение. Рассмотрим простейшую неаксиально-симметричную моду ( $m=1, n=2$ ), параметр  $\gamma$  может быть любым. Докажем, что собственная функция в этом случае пропорциональна

$$\Phi \sim P_3^1(\eta) \sim r e^{i\varphi} (r^2 - 4/5). \quad (1)$$

Решение ищем в виде

$$\Phi = r e^{i\varphi} (r^2 + \alpha) \quad (\alpha = \text{const}). \quad (2)$$

Для функции  $\chi$  получим, решая кинетическое уравнение, следующее выражение:

$$\chi = -2(1 - \gamma^2) A^{(2)} + A^{(1)} r v^2 - 2dr, \quad (3)$$

где

$$A^{(1)} = \frac{4}{5} \frac{-10(\omega')^2 - 20\gamma\omega' + 30\gamma^2}{((\omega')^2 - 1)((\omega')^2 - 9)}; \quad (4)$$

$$A^{(2)} = -\frac{3(\omega')^2 + 4\gamma\omega' - 6\gamma^2 - 9}{((\omega')^2 - 1)((\omega')^2 - 9)}; \quad (5)$$

$$d = -\frac{1 - \gamma^2}{(\omega')^2 - 1} (\omega' \equiv \omega + \gamma). \quad (6)$$

Теперь вычисляем  $\sigma^{(1)}$  и  $\sigma^{(2)}$  по формулам (3) раздела 4.3:

$$\sigma^{(1)} = \sigma_0 A^{(1)} r (1 - r^2) / \sqrt{1 - r^2}, \quad (7)$$

$$\sigma^{(2)} = \sigma_0 \sqrt{1 - r^2} - \left[ 2A^{(2)} r^3 + \frac{2d\alpha r}{1 - \gamma^2} \right] e^{i\varphi} - \sigma_0 \sqrt{1 - r^2}, \quad (8)$$

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} = \sigma_0 \left\{ \eta + \frac{e^{i\varphi}}{\eta} \left[ r^2 \left( A^{(2)} + \frac{d\alpha}{1 - \gamma^2} \right) - (A^{(1)} + A^{(2)}) r^3 + \left( A^{(1)} - \frac{d\alpha}{1 - \gamma^2} \right) r \right] \right\},$$

где

$$\eta^2 = \sqrt{1 - r^2} / R^2, \quad R^2 = 1 - \left[ 2A^{(2)} + \frac{2d\alpha}{1 - \gamma^2} \right] e^{i\varphi}. \quad (9)$$



Отсюда прежде всего получается дисперсионное уравнение

$$4\lambda_3^1 (A^{(1)} + A^{(2)}) = 1; \quad 4\lambda_3^1 = 3/8. \quad (10)$$

Оно, как можно проверить, сводится к уравнению (12) раздела 4.3. Нам нужно проверить (см. формулу (1)), что

$$4 (A^{(1)} + A^{(2)}) = 5 \left( A^{(1)} - \frac{d\alpha}{1 - \gamma^2} \right), \quad (11)$$

$$(A^{(1)} + A^{(2)}) = 5 \left( A^{(2)} + \frac{d\alpha}{1 - \gamma^2} \right). \quad (12)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что соотношения (11) и (12) действительно удовлетворяются.

3. То же для анизотропного диска (9) § 1.

Решение. Теорию возмущений строим по стандартному образцу. Полагаем возмущенную функцию распределения в виде

$$f = \frac{\sigma_0}{\pi} \theta [(1 - r^2) (1 - v_\phi^2) - v_r^2 + \varepsilon \chi]. \quad (1)$$

Линеаризованное уравнение для функции  $\chi$  получается следующим:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -2v_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - 2(1 - r^2) v_\phi \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi}. \quad (2)$$

Рассмотрим для примера одну из простейших мод колебаний: радиальное возмущение вида

$$\Phi = r^4 + ar^2 + b. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) находится интегрированием по невозмущенным траекториям:

$$\begin{aligned} \chi = & 4r^4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) + 4ar^2 \frac{1}{\omega^2 - 4} + 4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} - \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) \times \\ & \times (v_r^4 + v_\phi^4 + 2v_r^2 v_\phi^2) - 16 \frac{1}{\omega^2 - 16} \left( \frac{3}{2} r^2 v_r^2 + \frac{1}{2} r^2 v_\phi^2 \right) - \frac{4a}{\omega^2 - 4} (v_r^2 + v_\phi^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Соответствующая (4) возмущенная поверхностная плотность, как обычно, составляется из двух частей:

$$\sigma_1^{(2)} = \sigma_0 \sqrt{1 - r^2 + \varepsilon \chi(0, 0)} - \sigma_0 \sqrt{1 - r^2}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} = & \frac{\sigma_0}{2\pi} \iint \theta [(1 - r^2) (1 - v_\phi^2) - v_r^2] \left\{ \frac{\chi(0, 0) + \frac{\partial}{\partial v_\phi} \left( \frac{\chi(0, v_\phi)}{v_\phi} \right)}{1 - r^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial v_r} \left( \frac{\chi_1}{v_r} \right) \right\} dv_r dv_\phi, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(0, 0) = & \chi(v_r = 0, v_\phi = 0), \quad \chi_1^*(0, 0) = 4r^4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) + 4ar^2 \frac{1}{\omega^2 - 4} \equiv pr^4 + qr^2; \end{aligned}$$

$$\chi(0, v_\phi) = 4 \left( \frac{1}{\omega^2 - 16} - \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) v_\phi^4 - \frac{16r^2}{\omega^2 - 16} \frac{r^2 v_\phi^2}{2} - \frac{4a}{\omega^2 - 4} v_\phi^2;$$

$$\chi_1 = \chi - \chi(0, 0) - \chi(0, v_\phi).$$

Вычисляя  $\sigma_1^{(1)}$  согласно (6), получим

$$\sigma_1^{(1)} = \frac{\sigma_0}{2} \left( \frac{1}{\omega^2 - 4} - \frac{1}{\omega^2 - 16} \right) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{1-r^2} \left\{ \left[ \frac{9}{\omega^2 - 16} - \frac{9+8a}{\omega^2 - 4} \right] - r^2 \left[ \frac{31}{\omega^2 - 16} + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right] \right\} \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{1-r^2}} + \beta \sqrt{1-r^2} + \gamma r^2 \sqrt{1-r^2}. \quad (7)$$

Соответствующее  $\sigma_1$  возмущение потенциала вычисляем по формуле

$$\Phi = -4G \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \int_s^a \frac{r' \sigma_1(r') dr'}{\sqrt{r'^2 - s^2}}, \quad (8)$$

где радиус диска  $a$  определяется из условия

$$1 - a^2 + \varepsilon \chi(0, 0) |_{r=1} = 0, \quad (9)$$

так что

$$a \approx 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \chi(0, 0) |_{r=1}. \quad (10)$$

Вычисляем сначала вклад в  $\Phi$  от  $\sigma_1^{(1)}$ :

$$\Phi^{(1)} = -4G\pi^2 \left\{ \frac{1}{4} \alpha + \frac{1}{8} \beta - \frac{1}{16} \beta r^2 + \frac{1}{32} \gamma + \frac{1}{32} \gamma r^2 - \frac{9}{8 \cdot 32} \gamma r^4 \right\}. \quad (11)$$

Вклад в  $\Phi$  от  $\sigma_1^{(2)}$  вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= -4G\sigma_0 \frac{\varepsilon}{2} \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} \int_s^1 \frac{r' \chi_0(r') dr'}{\sqrt{(1-r'^2)(r'^2 - s^2)}} = \\ &= -4G\sigma_0 \frac{\varepsilon}{4} \pi^2 \left\{ \left( \frac{3}{16} p + \frac{1}{4} q \right) + \left( \frac{1}{16} p + \frac{1}{8} q \right) r^2 + \frac{9}{8 \cdot 16} p r^4 \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Полное возмущение потенциала  $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ . Сравнивая полученное выражение для  $\Phi$  с исходным (3), получим дисперсионное уравнение для данной моды

$$\frac{45}{64} \left( \frac{7}{\omega^2 - 16} + \frac{1}{\omega^2 - 4} \right) = -1, \quad (13)$$

а также следующие уравнения для коэффициентов  $a, b$ :

$$a = -2 \left( \frac{1}{8} \gamma - \frac{1}{4} \beta + \frac{1}{16} p + \frac{1}{8} q \right), \quad (14)$$

$$b = -2 \left( \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{8} \gamma + \frac{3}{16} p + \frac{1}{4} q \right), \quad (15)$$

Уравнение (13) сводится к биквадратному

$$16\omega^4 - 230\omega^2 + 529 = 0, \quad (16)$$

откуда  $\omega_{1,2}^2 = \frac{115 \pm 69}{16}$ ;  $\omega_1^2 = \frac{23}{2}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{23}{8}$ , так что рассматриваемая мода устойчива. Из уравнения (14) получаем выражение для  $a$ :

$$a = \frac{3}{2} \frac{2\omega^2 + 13}{(\omega^2 - 16)(\omega^2 - 4)}, \quad (17)$$

что с учетом дисперсионного уравнения (13) дает  $a = -8/7$ . Аналогично из (15) получается  $b = 8/35$ . Таким образом, как и следовало ожидать, и в рассматриваемом случае получаются уже знакомые нам собствен-

ные функции для данной моды:

$$\Phi \sim r^4 - \frac{8}{7} r^2 + \frac{8}{35} \sim P_4^0(\sqrt{1-r^2}).$$

Для моды  $\Phi \sim P_2(\sqrt{1-r^2})$  легко получить (из выражений, выписанных выше, если удерживать в них только члены, содержащие  $r^2$ ) соответствующую ей частоту колебаний  $\omega=1$ .

4. Вывести дисперсионное уравнение для коротковолновых колебаний достаточно холодного ( $1-\gamma^2 \ll 1$ ) диска (6) § 1.

Решение. Вывод проводится вполне аналогично Тоомре [333] или Линю, Шу [271] (см. 4.1), но только ввиду сингулярного характера функции (6) раздела 1.4 линейаризация проводится, например, по схеме, принятой в разделе 4.3.

В таком анализе предполагается (помимо естественного  $\lambda \ll R$ ), что движение частиц достаточно близко к круговому  $c_{r,\varphi} \ll \Omega r$ , однако не требуется, чтобы параметр  $\frac{kc_{r,\varphi}}{\Omega}$  был мал (для исследуемых нами функций распределения  $1-\gamma^2 \ll 1$ ).

Получающееся для функции  $\chi$  общее уравнение существенно упрощается, если интересоваться коротковолновыми колебаниями ( $\Phi_1 \sim \sim e^{ikr}\Phi$ ;  $kr \gg m$ ) достаточно холодного диска ( $1-\gamma^2 \ll 1$ ). Оно сводится тогда к хорошо известному

$$-i(v - kv_r)\chi + \left( v_r \frac{\partial \chi}{\partial v_\varphi} - v_\varphi \frac{\partial \chi}{\partial v_r} \right) = 2ik'v_r\Phi, \quad (1)$$

где  $v \equiv (\omega - m)/2$ ;  $k' \equiv k/2$ . Это уравнение просто решается методом «интегрирования по углу». Решение удобно записать в виде, использованном Линем, Шу [271] (раздел 4.1):

$$\chi = 2\Phi Q, \quad (2)$$

где

$$Q = 1 - \frac{v\pi}{\sin v\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{i[vs + k'v_r \cdot \sin s - k'v_\varphi(1 + \cos s)]\} ds. \quad (3)$$

Теперь нужно вычислить возмущение поверхностной плотности  $\sigma_1$ , пользуясь, например, формулами (5), (6) раздела 4.3. Так как в данном случае  $\chi_1 = \chi$ , то получаем

$$\sigma_1 = \frac{c_0\Phi}{2\pi} \frac{v\pi}{\sin v\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\alpha dv \int_{-\pi}^{\pi} ds \exp\left\{i\left[vs - 2vk' \cos \frac{s}{2} \cos\left(\frac{s}{2} + \alpha\right)\right]\right\} \times \\ \times i\left(-2k' \cos \frac{s}{2}\right) \cos\left(\frac{s}{2} + \alpha\right). \quad (4)$$

В (4) можно выполнить интегрирование по скоростям. Для этого перепишем интегралы (4) в виде (меняя порядок интегрирования)

$$- \int_{-\pi}^{\pi} e^{ivs} ds \int_0^\pi dv \frac{iB}{V\chi^2 - v^2} \int_0^{2\pi} da e^{iBv \cos\left(\frac{s}{2} + \alpha\right)} \cos\left(\frac{s}{2} + \alpha\right), \quad (5)$$

где  $B \equiv -2k' \cos s/2$ . Внутренний интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} da e^{iBv \cos \alpha} \cos \alpha = \int_0^{2\pi} d\alpha \cos \alpha \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(Bv) \cos k\alpha \right\} = 2\pi i J_1(Bv). \quad (6)$$

Интеграл по  $v$  также известен:

$$\int_0^{\kappa} dv \frac{J_1(Bv)}{\sqrt{\kappa^2 - v^2}} = \frac{\pi}{2} J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{B\kappa}{2}\right) = \frac{2}{B\kappa} \sin^2\left(\frac{B\kappa}{2}\right), \quad (7)$$

так что возмущенная плотность выражается через  $\Phi$  следующим образом:

$$\sigma_1 = \Phi c_0 \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \frac{2}{\kappa} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{i\nu s} \sin^2\left(\kappa k' \cos \frac{s}{2}\right). \quad (8)$$

В коротковолновом пределе вместо интегральной в общем случае связи между  $\Phi$  и  $\sigma_1$  имеет место локальное соотношение

$$\sigma_1 = -\frac{k}{2\pi G} \Phi. \quad (9)$$

Теперь из (8) и (9) мы получаем окончательно следующее простое дисперсионное уравнение:

$$\frac{k_1 \sqrt{1-\gamma^2}}{G\sigma_0(0)} = \frac{\nu\pi}{\sin \nu\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds e^{i\nu s} \sin^2\left(k_1 \cos \frac{s}{2}\right), \quad (10)$$

где

$$k_1 \equiv k'\kappa = \frac{k}{2} \sqrt{(1-\gamma^2)(1-r^2)}.$$

В частном случае холодного диска  $|\gamma| \rightarrow 1$  отсюда следует дисперсионное уравнение Тоомре (в обычных обозначениях)

$$(\omega - m\Omega_0)^2 = 4\Omega_0^2 - 2\pi G\sigma_0(r) k_0. \quad (11)$$

Найдем теперь аналогично [333] (4.1) маргинальную кривую дисперсионного уравнения (10). Она получается, если положить в (10)  $\nu^2 = 0$ :

$$\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{2\pi\sigma_0 G} = \frac{\pi}{4} \sqrt{1-\gamma^2} = \frac{|1 - J_0(2k_1)|}{2k_1} \equiv F(2k_1), \quad (12)$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. График  $F(2k_1)$  приведен на рис. 53. Точки кривой  $F(2k_1) = \frac{\pi}{4} \sqrt{1-\gamma^2}$  дают пары значений  $(2k_1, \gamma)$ , соответствующие безразлично равновесным воз-

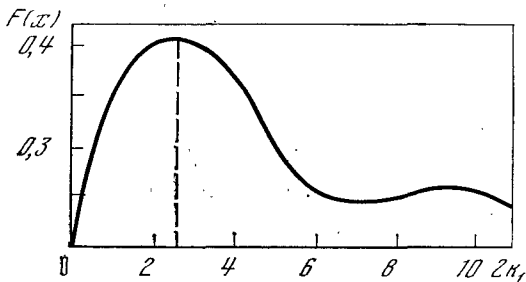


Рис. 53. Кривая маргинальной стабильности дисков (6) раздела 1.4, вычисленная в приближении коротких длин волн.

мущениям. Можно, как и в [333] (раздел 4.1), предположить, что кривая рис. 53 разделяет области устойчивости (вверх от кривой) и неустойчивости (под кривой). Из рисунка видно, что для  $\gamma$ , удовлетворяющих неравенству  $F_{\max} < \frac{\pi}{4} \sqrt{1-\gamma^2}$ , диск неустойчив. Так как  $F_{\max} \approx$

$\approx 0,41$  ( $2k_k \approx 2,75$ ), то критическое значение  $\gamma_c \approx 0,85$ . Таким образом, видно, что неустойчивыми относительно коротковолновых возмущений являются только диски с траекториями частиц, весьма близкими к круговым. Мы видели, однако, что наиболее опасными для дисков с  $\gamma \neq 1$  являются как раз крупномасштабные (неаксиально-симметричные) возмущения, приводящие к неустойчивости рассматриваемых дисковых моделей при любом значении параметра  $\gamma$ . Соотношение (12) (как и само дисперсионное уравнение (10)) очень похоже на полученные Тоомре для маргинальной стабильности «шварцшильдовского» диска формулы (см. раздел 4.1).

5. Вывести уравнение для частот колебаний твердотельно-вращающегося диска, находящегося внутри «гало» однородной плотности, которое вносит вклад в равновесие диска, но само не подвержено каким-либо возмущениям [252].

Решение. Для простоты примем, что гало имеет сферическую форму и тот же радиус, что и диск. Элементарное вычисление показывает, что доля равновесной силы, которая производится самим диском, есть

$$\eta = \frac{M_D}{M_D + \frac{4}{3\pi} M_H}, \quad (1)$$

где  $M_D$  и  $M_H$  — масса диска и гало соответственно. Если, как в [252], дисперсионное уравнение для одного диска (6) § 1 представить в виде

$$\lambda(n, m, \gamma, \omega) = 1, \quad (2)$$

то в рассматриваемом случае будем иметь

$$\eta \lambda(n, m, \gamma, \omega) = 1. \quad (3)$$

Для стабилизации модели  $B_1$  оказывается достаточно  $\eta = 0,9221$ , а для стабилизации модели  $B_3$  нужно  $\eta = 0,7793$ . Эти  $\eta$  соответствуют 17 и 40% полной массы системы в гало. Наличие гало позволяет построить стабильные диски, более холодные, чем модель  $A$  без гало. Так как параметр Тоомре  $Q$  меняется  $\sim 1/\eta$ , то новое  $\bar{Q}$  для  $B_1$  равно 1,446, а для  $B_3$  равно 1,460, в то время как для модели  $A$   $Q$  равно 1,333.

## НЕДЖИНСОВСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАВИТИРУЮЩИХ СРЕД

В предыдущих главах мы встречались преимущественно с неустойчивостями «джинсовской» природы (см. введение) либо с неустойчивостями, аналогичными тем, которые имеют место в быстро вращающихся системах из несжимаемой жидкости.

В этой главе рассматриваются некоторые из исследованных до настоящего времени *неджинсовских* неустойчивостей гравитирующих систем. Разнообразные механизмы раскачки подобных неустойчивостей хорошо изучены в физике плазмы и в механике сплошных сред. В § 1—3 исследуются некоторые неджинсовские неустойчивости в *бесстолкновительных* гравитирующих системах (пучковая — § 1 и задачи 1,2; градиентные — § 2; анизотропная («шланговая») — § 3). В § 4 излагается элементарная теория «гидродинамических» неустойчивостей (неустойчивости Кельвина — Гельмгольца и желобковой неустойчивости), для развития которых необходимо присутствие в системе газовой составляющей. Чаще всего рассмотрение проводится в рамках простейших равновесных моделей, таких, как однородный цилиндр с бесконечной образующей или однородный плоский слой.

### § 1. ПУЧКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Исследование пучковой неустойчивости проведем, пользуясь в качестве основной самосогласованной модели бесстолкновительной гравитирующей системы моделью вращающегося цилиндра, холодного в плоскости вращения  $(x, y)$ . Эта модель уже рассматривалась в главе II для «непучковых» функций распределения частиц по продольным скоростям  $v_z$  (Максвелла и Джексона). Кроме того, в задаче 1 пучковая неустойчивость получена в модели плоского гравитирующего слоя.

**1. Выражение для инкремента кинетической пучковой неустойчивости в случае пучка малой плотности (для функции распределения произвольного вида).** Как вытекает из результатов главы II, джинсовская неустойчивость твердотельно-вращающегося цилиндра (с круговыми орбитами частиц) с максвелловской функцией распределения по продольным скоростям развивается с экспоненциально малым инкрементом, если тепловой разброс достаточно велик:  $v_T > v_0$ . Поэтому перестройка исходного пространственного распределения частиц (образование «перетяжек») будет происходить весьма медленно. В этих условиях можно говорить о квазистационарном состоянии максвелловской подсистемы и рассматривать раскачку незатухающих колебаний этой подсистемы группой быстрых частиц.

В дальнейшем будем считать, что распределение частиц по продольным скоростям  $f_0(v_z)$  можно разбивать на две части:

$$f_0(v_z) = f^{(0)}(v_z) + f^{(1)}(v_z), \quad (1)$$

где  $f^{(0)}(v_z)$  представляет собой максвелловскую функцию с дисперсией  $v_T$ , а  $f^{(1)}(v_z)$  — некоторую функцию, отличную от нуля при  $v_z \gg v_T$ . Пример такой функции приведен на рис. 54.

Иначе говоря, полагаем, что рассматриваемая система гравитирующих частиц состоит из двух подсистем: медленной и быстрой. Допустим, что медленная подсистема имеет большую плотность, чем быстрая, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)} dv_z / \int_{-\infty}^{\infty} f^{(0)} dv_z \equiv \alpha \ll 1. \quad (2)$$

Используя малость параметра  $\alpha$ , решение дисперсионного уравнения можно найти методом последовательных приближений, определив в следующем порядке инкременты нарастания этих колебаний вследствие взаимодействия последних с частицами быстрой компоненты. Такая постановка задачи характерна для теории взаимодействия пучка заряженных частиц с плотной плазмой.

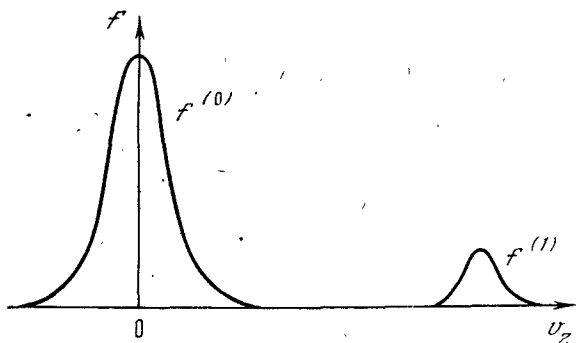


Рис. 54. Пример пучковой функции распределения

Согласно результатам главы II (§ 2), ветвь незатухающих колебаний максвелловской подсистемы существует при  $k_z \ll k_{\perp}$  и  $k_{\perp} R \gg 1$ . Частота этих колебаний определяется уравнением  $\omega^2 \simeq \omega_0^2$ . Взаимодействие таких колебаний с группой быстрых частиц описывается уравнением (24) § 2 главы II с  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$ , содержащими слагаемые от обеих подсистем. Подставляя в выражение (10) § 2 главы II для  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  функцию распределения в виде суммы (1) и полагая  $\Omega \gg k_z v_T$ , получаем следующее обобщение уравнения  $\omega^2 = \omega_0^2$ :

$$1 + \frac{\omega_0^2(1-\alpha)}{\omega^2 - 4\Omega^2} + \alpha\omega_0^2 \left[ \frac{k_z^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_z) dv_z}{(\omega - k_z v_z)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v_z) dv_z}{(\omega - k_z v_z)^2 - 4\Omega_0^2} \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь и ниже индекс «1» у функции  $f^{(1)}$  опущен.

Для получения мнимой добавки к частоте колебаний  $\omega = \omega_0$  достаточно учесть только мнимые члены этого уравнения. При этом получается

$$\text{Im } \omega = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \left\{ f' \left( \frac{\omega}{k_z} \right) \text{sgn } k_z - \frac{1}{4} \frac{k^2}{|k_z| \Omega_0} \left[ f \left( \frac{\omega - 2\Omega_0}{k_z} \right) - f \left( \frac{\omega + 2\Omega_0}{k_z} \right) \right] \right\}. \quad (4)$$

В правую часть равенства вместо  $\omega$  следует подставить  $\omega_0$ .

Проанализируем этот общий результат в следующих случаях.

2. Пучок с максвелловским распределением по скоростям. Пусть

$$f^{(1)} = \frac{\alpha}{V \pi v_{T1}} \exp \left[ - \left( \frac{v_z - v}{v_{T1}} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

При таком  $f^{(1)}$

$$\operatorname{Im} \omega = -\sqrt{\pi} \alpha \frac{\omega_0^4}{|k_z| k^2 v_{T1}^3} \left\{ \left( 1 - \frac{k_z v}{\omega_0} \right) \exp \left[ - \left( \frac{\omega_0 - k_z v}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{k_z^2 v_{T1}^2}{\sqrt{\pi} \omega_0^2} \left[ \exp \left[ - \left( \frac{0,4\omega_0 + k_z v}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] - \exp \left[ - \left( \frac{1,6\omega_0 - k_z v}{k_z v_{T1}} \right)^2 \right] \right] \right\}. \quad (6)$$

Первый член в фигурных скобках соответствует резонансу типа  $\omega = k_z v_z$ , а два других — резонансам  $\omega \mp 2\Omega_0 = k_z v_z$ . Видно, что резонанс типа  $\omega = k_z v_z$  (черенковский) может приводить к неустойчивости, если  $k_z v > \omega_0$ . К неустойчивости приводит также вращательный резонанс типа  $\omega + 2\Omega_0 = k_z v_z$ , причем с максимальным инкрементом

$$\operatorname{Im} \omega \simeq \alpha \omega_0 \frac{v}{v_{T1}}. \quad (7)$$

Выражение (7) справедливо как при  $v_{T1} \gg v$ , так и при  $v_{T1} \ll v$ . Отношение  $v_{T1}/v$ , однако, следует считать большим, чем  $\alpha^{1/2}$ , так как в противном случае развивается более сильная гидродинамическая пучковая неустойчивость, обсуждаемая ниже.

**3. Пучок с распределением в форме ступеньки.** Пучковая неустойчивость связана прежде всего со скоростной асимметрией распределения быстрых частиц  $f(v_z) \neq f(-v_z)$ , а не с наличием второго максимума на общей функции распределения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим асимметричное распределение частиц пучка в форме ступеньки

$$f = \frac{\alpha}{4v_1} \cdot \begin{cases} 1, & 0 < v_z < v_1 \\ 0, & v_z < 0, v_z > v_1. \end{cases}$$

В этом случае единственный вклад в (4) дает резонанс типа  $\omega + 2\Omega_0 = k_z v_z$ , так что

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \alpha \frac{\omega_0^2}{|k_z| v_1}. \quad (8)$$

Это выражение справедливо при  $|k_z| v_1 > 4\Omega_0$ , откуда вытекает оценка

$$\operatorname{Im} \omega \lesssim \alpha \omega_0, \quad (9)$$

совпадающая с (7) при  $v \simeq v_{T1}$ .

**4. Гидродинамическая пучковая неустойчивость. Раскачка вращательной ветви.** Если направленная скорость пучка велика по сравнению с разбросом частиц пучка по продольным скоростям,  $v \gg v_{T1}$ , то, помимо рассмотренной кинетической неустойчивости, в двухпучковой гравитирующей среде может развиваться гидродинамическая пучковая неустойчивость. Покажем это, предполагая, что тепловой разброс пучка тем не менее конечен;  $v_{T1}^2 \gg \alpha v_0^2$ , так что развитие джинсовской неустойчивости в пучке невозможно (с экспоненциальной точностью).

Исходим из уравнения (3) с функцией  $f$  вида (5), и полагаем  $|\omega + 2\Omega_0 - k_z v| \gg |k_z| v_{T1}$ . Тогда из (3) следует

$$1 + \frac{(1-\alpha)\omega_0^2}{\omega^2 - 4\Omega_0^2} - \frac{\alpha\omega_0^2}{4\Omega_0(\omega - k_z v + 2\Omega_0)} = 0. \quad (10)$$

Предполагая  $k_z v = \omega_0 + 2\Omega_0$ , находим, что колебания с  $\operatorname{Re} \omega = \omega_0$  раскачиваются с инкрементом

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{\alpha^{1/2}}{2^{3/4}} \omega_0.$$



Эта неустойчивость аналогична циклотронной раскачке моноэнергетическим пучком заряженных частиц циклотронных колебаний плазмы в магнитном поле.

**5. Гидродинамическая неустойчивость двух встречных пучков равной плотности** (для функции распределения Дженсона, см. § 2 главы II). Рассмотрим следующий пример скоростного распределения:

$$f_0(v_z) = \frac{\Delta}{2\pi} \left[ \frac{1}{(v_z + V)^2 + \Delta^2} + \frac{1}{(v_z - V)^2 + \Delta^2} \right]. \quad (11)$$

Характерным для такого распределения является довольно медленное (по сравнению с максвелловским) убывание функции распределения каждого пучка с отклонением от средней скорости этого пучка. Поэтому необходимо учитывать резонансные частицы обоих пучков. В результате оказывается, что затухание вращательной ветви колебаний того или иного пучка из-за взаимодействия с резонансными частицами этого же пучка сильнее, чем раскачка колебаний частицами другого пучка. В случае же двух равноплотностных максвелловских пучков затухание колебаний экспоненциально мало (см. § 2, главы II). Поэтому такие пучки могут быть кинетически неустойчивы. Однако в двухпучковой системе помимо кинетической неустойчивости возможно развитие гидродинамической пучковой неустойчивости. Такая неустойчивость может проявляться и в случае распределения типа (11). Остановимся на этом подробнее. При  $f$  вида (11) с  $V \gg \Delta$  и  $\omega \approx \omega_0 \gg k_z \Delta$  исходное дисперсионное уравнение в случае пучков равной плотности приводится к виду

$$1 + \frac{\omega_0^2}{2} \left[ \frac{1}{(\omega - k_z V)^2 - 4\Omega_0^2} + \frac{1}{(\omega + k_z V)^2 - 4\Omega_0^2} \right]. \quad (12)$$

Решения уравнения (12) таковы:

$$\omega_{1,2}^2 = (k_z V)^2 + 3\Omega_0^2 \pm \sqrt{\Omega_0^4 + 12\Omega_0^2 (k_z V)^2}.$$

Отсюда следует, что  $\omega^2 < 0$ , если  $|(k_z V)^2 - 3\Omega_0^2| \leq 0$ . При  $(k_z V)^2 = 3\Omega_0^2$  инкремент возмущений равен

$$\text{Im } \omega \approx 0,3\Omega_0. \quad (13)$$

Таким образом, при  $V \gg \Delta$  пучковое распределение вида (11) неустойчиво. При этом джинсовская неустойчивость несущественна, если  $\Delta \gg v_0$ .

Изложенные в этом пункте результаты были получены в работе [88]. В работе [26] они были обобщены на случай пучков разной плотности (см. следующий пункт).

**6. Неустойчивости в случае пучков разной плотности** (для функций распределения Джексона). Рассмотрим пучок в покоящейся среде, считая для простоты тепловые разбросы среды и пучка одинаковыми:

$$f(v_z) = \frac{n_e \Delta}{\pi^2} \left[ (1 - \varepsilon) \frac{1}{v_z^2 + \Delta^2} + \frac{\varepsilon}{(v_z - u)^2 + \Delta^2} \right], \quad (\varepsilon = \alpha). \quad (14)$$

В плоскости вращения система предполагается холодной. Дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$x^2 \left\{ 1 + 2 \left[ \frac{1 - \varepsilon}{\varphi^2} + \frac{\varepsilon}{(\varphi - \lambda)^2} \right] \right\} = 1 + 2 \left[ \frac{1 - \varepsilon}{\varphi^2 - 4} + \frac{\varepsilon}{(\varphi - \lambda)^2 - 4} \right], \quad (15)$$

где введены обозначения ( $k \equiv k_z$ )

$$\varphi = \frac{\omega}{\Omega_0} + i \frac{k\Delta}{\Omega_0}; \quad \lambda = \frac{uk_z}{\Omega_0}; \quad x = k/k_{\perp}. \quad (16)$$

Неустойчивости, получающиеся в случае неравноплотностных пучков, качественно не отличаются от неустойчивостей для пучков одинаковой плотности. Так же как и там, имеется джинсовская неустойчивость «поверхностных» волн, не устранимая никаким тепловым разбросом, но экспоненциально малая при  $\Delta^2 \gg \Omega^2 R^2$ . Имеется неустойчивость на джинсовских (пучковых) и на вращательных ветвях колебаний.

Рассмотрим, как изменяется область параметров, при которых есть неустойчивость, в зависимости от отношения плотностей среды и пучка для наиболее неустойчивых длинных волн по  $z: x \ll 1$  (при больших  $x$ , как и раньше, все колебания быстро затухают).

а) **Джинсовские (пучковые) моды.** Здесь, так же как для пучков равной плотности, возможны два случая:

1.  $x \ll 1, \varphi \ll 1, \lambda \ll 1, \lambda/x$  произвольно. В этом случае дисперсионное уравнение (15) примет вид (после пренебрежения малыми членами)

$$(\varphi - \lambda)^2 (\varphi^2 + 4x^2) + 4x^2 \varepsilon \lambda (2\varphi - \lambda) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет четыре корня, вообще говоря, комплексных, но конечный тепловой разброс  $\Delta = 2R\Omega/\lambda_1^{(1)}$  стабилизирует эту ветвь колебаний.

2.  $x \ll 1, \lambda$  — любое,  $\varphi$  — любое,  $\lambda \gg x$ . В этом случае имеется решение уравнения (15), близкое к нулю,  $|\varphi| \ll 1$ , и решение, близкое к  $\lambda$ ,  $\varphi = \lambda + \delta$ . Первое решение имеет вид

$$\varphi = \pm i2 \left[ \frac{(\lambda^2 - 4)(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)(\lambda^2 - 4) + 4\varepsilon} \right]^{1/2} x, \quad \lambda^2 \geq \left( 4, \frac{4}{1 + \varepsilon} \right). \quad (18)$$

Это решение, кроме поверхностных колебаний, устойчиво при конечном тепловом разбросе

$$\Delta > \frac{R\Omega}{\lambda_1^{(1)}} 2 \left[ \frac{(\lambda^2 - 4)(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)(\lambda^2 - 4) + 4\varepsilon} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

В резонансной точке  $\lambda^2 = 4/(1 + \varepsilon)$  при любом тепловом разбросе имеет место неустойчивость, решение имеет вид

$$\varphi = \pm \left( \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[ 4 \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)^{3/2}} \right]^{1/3} x^{2/3}. \quad (20)$$

Здесь каждому  $\lambda = \pm \frac{2}{(1 + \varepsilon)^{1/2}}$  соответствуют два решения. Если  $\frac{4}{1 + \varepsilon} < \lambda^2 < 4$ , то решение устойчиво:

$$\varphi = \pm 2 \left[ \frac{(4 - \lambda^2)(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)(\lambda^2 - 4) + 4\varepsilon} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

При  $\lambda = \pm 2, \varepsilon \gg x^2$  решение всегда устойчиво и имеет вид

$$\varphi = \mp \frac{2(1 - \varepsilon)x^2}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Для решения  $\varphi = \lambda + \delta$  имеет место аналогичная система решений:

$$\varphi = \lambda \pm i2 \left[ \frac{\varepsilon(\lambda^2 - 4)}{(2 - \varepsilon)(\lambda^2 - 4) + 4(1 + \varepsilon)} \right]^{1/2} x, \quad \lambda^2 \geq \left( 4, \frac{4}{2 - \varepsilon} \right), \quad (23)$$

$$\varphi = \lambda \pm \left( \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[ 4 \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)}{(2 - \varepsilon)^{3/2}} \right]^{1/3} x^{2/3}, \quad \lambda = \pm \frac{2}{(2 - \varepsilon)^{1/2}}, \quad (24)$$

$$\varphi = \lambda \pm 2 \left[ \frac{\varepsilon(4 - \lambda^2)}{(2 - \varepsilon)(\lambda^2 - 4) + 4(1 + \varepsilon)} \right]^{1/2} x, \quad \frac{4}{2 - \varepsilon} < \lambda^2 < 4, \quad (25)$$

$$\varphi = \lambda \mp \frac{4\varepsilon}{1 - \varepsilon} x^2 \quad \text{при } \lambda = \pm 2. \quad (26)$$

Неустраиваемая неустойчивость имеет место в случае (24). Для равноплотностных пучков ( $\epsilon=1/2$ ) решения (18)–(22) и (23), (24) совпадают. Таким образом, в случае неравноплотностных пучков число неустойчивых (резонансных) точек в 2 раза больше, чем при пучках равной плотности.

**б) Вращательные ветви.** При  $x \rightarrow 0$  решение для колебаний подобного типа получается, если приравнять нулю правую часть уравнения (15). Имеем уравнение

$$(\varphi^2 - 2)[(\varphi - \lambda)^2 - 4] + 2\epsilon\lambda(2\varphi - \lambda) = 0. \quad (27)$$

Для  $\epsilon=1/2$  решение имеет вид

$$\left(\varphi - \frac{\lambda}{2}\right)^2 = 3 + \frac{\lambda^2}{4} \pm \sqrt{1 + 3\lambda^2}. \quad (28)$$

Неустойчивость имеет место при  $2\sqrt{2} < \lambda < 4$ . Для  $\epsilon \ll 1$  неустойчивость имеет место только в двух резонансных точках:

$$\varphi = \sqrt{2} \pm i \frac{\epsilon^{1/2}}{2^{3/4}} \quad \text{при } \lambda = 2 + \sqrt{2},$$

$$\varphi = -\sqrt{2} \pm i \frac{\epsilon^{1/2}}{2^{3/4}} \quad \text{при } \lambda = -2 - \sqrt{2}. \quad (29)$$

При произвольных  $0 < \epsilon < 1/2$  области неустойчивости, полученные при численном решении уравнения (27), представлены на рис. 55.

**Заключительное замечание [26].** Если сравнить гравитационные кинетические неустойчивости с плазменными [86], то можно заметить, что в случае гравитации область неустойчивости гораздо уже, чем в плазме. Например, пучковая неустойчивость в плазме с функцией распределения (14), как следует из [240], имеет место для всех скоростей  $u > \Delta$  в широком интервале волновых чисел, в то время как здесь неустойчивость имеет место лишь при определенном соотношении между скоростью и волновым числом — в окрестности значения  $y = u^2 k^2 / \Omega^2 = 2/3$ . Вероятно, условия равновесия в гравитирующей среде накладывают более жесткие связи на параметры системы, что суживает и область существования неустойчивых равновесных решений.

Для пучков в плоскости вращения системы аналогичный вывод делается ниже, в п. 7.

**7. Стабилизирующий эффект взаимодействия гравитирующих цилиндров и дисков.** Можно также рассмотреть гетерогенную систему, состоящую из двух вращающихся друг относительно друга цилиндров вида (2) § 1 главы II с плотностями  $\alpha_1 \rho_0$  и  $\alpha_2 \rho_0$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) [111, 113]. Такая система оказывается устойчивой относительно возмущений  $k_z = 0$ . Так, например, для моды с  $n=4$ ,  $m=2$ ,  $\gamma_1=0$ ,  $\gamma_2=1$  (вращение холодного цилиндра в покое горячем) спектр имеет вид  $\omega^2 - 14\omega + 8\alpha_2 = 0$ . Условие устойчивости

$$16\alpha_2^2 - (14/3)^3 < 0$$

всегда выполняется, так как  $\alpha_2 < 1$ .

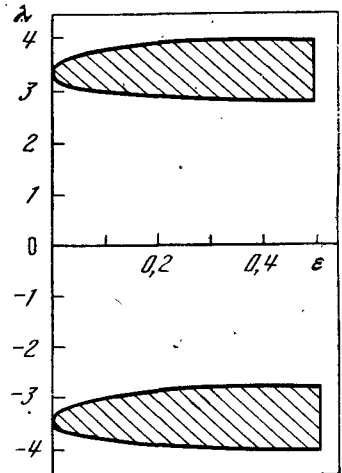


Рис. 55. Области неустойчивости (заштрихованы) длинноволновых колебаний типа вращательных при различных значениях плотности пучка и среды [26]

Из точных спектров малых возмущений гравитирующих дисков (см. раздел 4.3 главы V) следует, что максимальные инкременты неустойчивости имеют место при  $\gamma=1$ . Этот случай ( $\gamma=1$ ) соответствует модели холодного диска, все частицы которого вращаются по круговым орбитам в одну сторону. Если холодный диск состоит из двух подсистем, вращающихся в противоположные стороны, то инкременты неустойчивости уменьшаются, что следует из уравнений (17)–(21). Таким образом, эффект «пучковости» может оказывать стабилизирующее влияние. Однако в случае растущей к краю плотности эффект «пучковости» дестабилизирующий [20] (см. следующий пункт).

**8. Неустойчивость вращающегося неоднородного цилиндра со встречными пучками равной плотности.** Рассмотрим сначала однородный пылевой цилиндр, состоящий из двух взаимно проникающих холодных в плоскости вращения пучков со скоростями  $\pm v_0$  и одинаковой плотностью  $\rho_0/2$ . В стационарном состоянии

$$v_{r_0} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_0}{dr} \right) = 4\pi G \rho_0, \quad \frac{v_{\Phi_0}^2}{r} = \frac{d\Phi_0}{dr}. \quad (30)$$

Дисперсионное соотношение для случая колебаний желобкового типа  $k_z=0$  можно получить следующим образом. Запишем сначала для каждого из пучков систему линеаризованных уравнений гидродинамики

$$-i \left( \omega \mp m \frac{v_{\Phi_0}}{r} \right) v_{r_1}^{\pm} \mp 2 \frac{v_{\Phi_0}}{r} v_{\Phi_1}^{\pm} = -\frac{d\Phi_1}{dr}, \quad (31)$$

$$\pm \left( \frac{v_{\Phi_0}}{r} + \frac{dv_{\Phi_0}}{dr} \right) v_{\Phi_1}^{\pm} - i \left( \omega \mp m \frac{v_{\Phi_0}}{r} \right) v_{\Phi_1}^{\pm} = -i \frac{m}{r} \Phi_1, \quad (32)$$

$$\left( \frac{\rho_0/2}{r} + \frac{d\rho_0/2}{dr} \right) v_{r_1}^{\pm} + i (\rho_0/2) \frac{m}{r} v_{\Phi_1}^{\pm} - i \left( \omega \mp m \frac{v_{\Phi_0}}{r} \right) \rho_1^{\pm} + \frac{\rho_1}{2} \frac{dv_{r_1}^{\pm}}{dr} = 0. \quad (33)$$

Отсюда при  $v_{\Phi_0}/r = \Omega_0 = \text{const}$  находим ( $\rho_1^{\pm} \equiv \rho_1^{(1,2)}$ )

$$\frac{\rho_1^{(1)}}{\rho_0/2} [4\Omega_0^2 - (\omega - m\Omega_0)^2] = \Delta\Phi_1, \quad (34)$$

$$\frac{\rho_1^{(2)}}{\rho_0/2} [4\Omega_0^2 - (\omega + m\Omega_0)^2] = \Delta\Phi_1. \quad (35)$$

Сопоставляя (34), (35) с уравнением Пуассона

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi_1}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \Phi_1 = 4\pi G (\rho_1^{(1)} + \rho_1^{(2)}), \quad (36)$$

найдем

$$\frac{1}{4\Omega_0^2 - (\omega - m\Omega_0)^2} + \frac{1}{4\Omega_0^2 - (\omega + m\Omega_0)^2} = \frac{1}{\Omega_0^2}, \quad (37)$$

где использовано условие равновесия (30); для  $\omega^2$  получаем выражение

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 (m^2 + 3 \pm 2\sqrt{3m^2 + 1/4}). \quad (38)$$

Величина  $\omega^2$  минимальна при  $m=2$ , когда  $\omega^2=0$ , т. е. имеет место безразличное<sup>1</sup> равновесие;  $\omega^2 > 0$  при  $m \neq 2$ .

<sup>1</sup> Если плотности двух пучков разные, дисперсионное уравнение усложняется, однако можно показать, что оно имеет только действительные корни.

В случае, когда цилиндр неоднородный (и по-прежнему состоит из двух одинаковых вращающихся потоков), из системы уравнений (31)–(33) можно получить уравнение ((1) § 6 главы II в иной записи):

$$2 \frac{\Delta \Phi_1}{\omega_0^2} = K_+ + K_-, \quad (39)$$

где

$$K_+ = -\frac{1}{y^2} \left[ \Delta \Phi_1 + A_1 \Phi_1' + \frac{2m\Omega_0}{rx} \left( A_1 + \frac{\Omega_0'}{\Omega_0} \right) \Phi_1 \right], \quad (40)$$

$$y^2 = x^2 - 2\alpha\Omega_0; \quad \alpha = 2\Omega_0 + r\Omega_0'; \quad x = m\Omega_0 - \omega,$$

$$K_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr}; \quad A_1 = K_0 + 2 \frac{\Omega_0 (\alpha + \alpha' \Omega_0 / \Omega_0' - mx)}{x^2 - 2\alpha\Omega_0} \frac{\Omega_0'}{\Omega_0},$$

а величина  $K_-$  получается из  $K_+$  заменой  $\Omega_0$  на  $-\Omega_0$  во всех выражениях (40).

При  $m/kr \ll 1$  находим

$$\frac{1}{2\alpha\Omega_0 - (\omega - m\Omega_0)^2} + \frac{1}{2\alpha\Omega_0 - (\omega + m\Omega_0)^2} = \frac{2}{\omega_0^2}. \quad (41)$$

Легко убедиться в том, что уравнение (41) переходит в (37) при  $\rho_0' = \Omega_0' = 0$ . Воспользовавшись (40), получаем из (41) дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^4 - 2\omega^2 \left[ (4 + m^2) \Omega_0^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 + 2r\Omega_0\Omega_0' \right] + [(4 - m^2) \Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_0'r]^2 - \omega_0^2 [(4 - m^2) \Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_0'r] = 0. \quad (42)$$

Детерминант биквадратного относительно  $\omega^2$  уравнения (42) положителен, поэтому неустойчивость, описываемая этим уравнением, может быть только аperiodической, т. е. инкремент  $\gamma = i\omega$ . Проведенное выше исследование устойчивости однородного цилиндра со встречными пучками показывает, что максимум инкремента в случае неоднородного цилиндра следует искать при  $m=2$ . Действительно, при условии малости градиента плотности неустойчивость имеет место только в случае  $m=2$ :

$$\omega^2 = -r\Omega_0\Omega_0' \frac{\omega_0^2}{8\Omega_0^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2}, \quad (43)$$

$8\Omega_0^2 > \omega_0^2/2$  при малых  $\rho_0'$  и  $\Omega_0'$ . Как видно из (43), необходимым условием пучковой неустойчивости в данном случае является условие роста угловой скорости вращения от центра цилиндра.

## § 2. ГРАДИЕНТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В физике плазмы известен широкий класс так называемых градиентных (дрейфовых) неустойчивостей, обусловленных пространственной неоднородностью плазмы, которые часто играют определяющую роль. К градиентным неустойчивостям относится, в частности, неустойчивость из-за наличия неоднородности температуры [89]. Причиной ее является перенос продольной энергии частиц поперек магнитного поля из-за их дрейфа в скрещенных полях.

Возникает вопрос о возможности развития подобных неустойчивостей в гравитирующей среде, которая, так же как и плазма, относится к числу систем с кулоновским взаимодействием.

**1. Цилиндр постоянной плотности с зависящей от радиуса температурой. Гидродинамическая неустойчивость.** Принципиальная возможность градиентных неустойчивостей в гравитирующих средах доказана в работах [28, 114], выполненных независимо.

Рассмотрим сначала простейшую модель: *однородный* по плотности цилиндр с радиальным градиентом температуры. Общее уравнение (66) § 2 главы II, описывающее малые возмущения неоднородного цилиндра с круговыми орбитами частиц, в рассматриваемом случае несколько упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \epsilon_{\perp} \frac{d\Phi}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \epsilon_{\perp} \Phi - k_z^2 \epsilon_{\parallel} \Phi - \frac{4m}{r} \frac{dI}{dr} \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\epsilon_{\parallel} = 1 + 2 \int \frac{f_0 dv_z}{\omega'^2}; \quad \epsilon_{\perp} = 1 + 2 \int \frac{f_0 dv_z}{\omega'^2 - 4};$$

$$I = \int \frac{f_0 dv_z}{\omega' [\omega'^2 - 4]}; \quad \Omega_0^2 = 2\pi G \rho_0. \quad (2)$$

Локальное дисперсионное уравнение, соответствующее (1), имеет вид

$$\epsilon_{\perp} k_{\perp}^2 + \epsilon_{\parallel} k_z^2 + \frac{4m}{r} \frac{dI}{dr} = 0, \quad (3)$$

где  $k_{\perp}^2 = k_r^2 + m^2/r^2$ . Вычисляя интегралы в (2) для максвелловской функции распределения  $f_0 = \exp(-v_z^2/v_T^2)/\sqrt{\pi} v_T$ , получим вместо (3) при

$$\omega_* \equiv \omega - m \gg k_z v_T \quad (4)$$

(т. е. в гидродинамическом пределе)

$$\begin{aligned} k_z^2 + k_{\perp}^2 \frac{\omega_*^2 - 2}{\omega_*^2 - 4} + \frac{2k_z^2}{\omega_*^2} - \frac{k_{\perp}^2}{4} \frac{k_z^2 v_T^2}{(\omega_* + 2)^3} + \frac{k_{\perp}^2}{4} \frac{k_z^2 v_T^2}{(\omega_* - 2)^3} = \\ = \frac{m}{2r} \frac{k_z^2 v_T^2}{v_T} \frac{\partial v_T}{\partial r} \left\{ \frac{1}{(\omega_* + 2)^3} + \frac{1}{(\omega_* - 2)^3} - \frac{2}{\omega_*^3} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для низкочастотных колебаний, удовлетворяющих условию  $\omega_* \ll 1$ , т. е. вблизи от частоты вращательного («циклотронного») резонанса, будем иметь из (5)

$$\omega_*^3 + 4 \frac{k_z^2}{k_{\perp}^2} \omega_* + \frac{2m}{r} \frac{k_z^2 v_T^2}{k_{\perp}^2} \frac{1}{v_T} \frac{\partial v_T}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

При условии  $4\omega_* \ll \frac{m}{2r} v_T \frac{\partial v_T}{\partial r}$  дисперсионное уравнение (6) описывает неустойчивые колебания с инкрементом

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{2m}{r} \frac{k_z^2 v_T^2}{k_{\perp}^2} \frac{1}{v_T} \frac{\partial v_T}{\partial r} \right|^{1/3}. \quad (7)$$

На пределе применимости использованного приближения получаем инкремент

$$\gamma \sim \left( \frac{m}{r} v_T \frac{\partial v_T}{\partial r} \right)^{1/3}. \quad (8)$$

Следует отметить, что эти результаты совпадают с результатами, известными из физики плазмы: дисперсионное уравнение (6) может быть получено непосредственно из соответствующего плазменного уравнения (см. [89]) заменой  $k_y \rightarrow m/r$ ,  $\omega_B \rightarrow 2$ . Физический смысл полученной неустойчивости также аналогичен случаю плазмы. Дрейф частиц, приводящий к конвекции тепла в радиальном направлении, вызывается кориолисовым ускорением вследствие появления возмущенной азимутальной скорости.

Важно подчеркнуть, что градиентно-температурная неустойчивость, очевидно, может существовать и в условиях, когда джинсовская неустойчивость практически подавлена (для чего требуется, чтобы было  $v_T > v_0$ ).

Рассмотренная выше неустойчивость имеет *гидродинамический* характер (см. условие (4))<sup>1</sup>. Существует и *кинетическая* неустойчивость; однако для ее получения ВКБ-приближения оказывается недостаточно. Простейшая модель, на которой легче всего убедиться в наличии кинетической неустойчивости, рассматривается в следующем пункте.

**2. Цилиндр постоянной плотности со скачком температуры.** Кинетическая неустойчивость. Получить ответ в конечном виде удастся только в случае, когда скачок температуры (от  $T_2$  при  $0 < r < r_0$  до  $T_1$  при  $r_0 < r < R$ ) испытывает лишь малая доля частиц с плотностью  $\alpha \rho_0$ ,  $\alpha \ll 1$ . Относительно остальной массы вещества будем предполагать, что она имеет фиксированную температуру  $T$ . Пусть скачок температуры достаточно велик:  $T_2 \gg T_1$ , так что существуют такие  $k_z$ , для которых условие (4) справедливо лишь для холодной среды, а в горячей имеет место обратное неравенство, т. е.

$$k_z v_{T1} \ll \omega_* \ll k_z v_{T2}. \quad (9)$$

При таких условиях горячую среду необходимо рассматривать кинетически (а холодную — по-прежнему, гидродинамически).

Используя неравенство  $\Omega \gg k_z v_{T2}$ , для низкочастотных возмущений ( $\omega_* \ll \Omega$ ) получим  $\varepsilon_{\perp} = 1/2$ . Будем искать решения, локализованные вблизи скачка температуры и спадающие по закону

$$\Phi \sim e^{-\kappa(r-r_0)} \quad (\kappa > 0). \quad (10)$$

Подставляя (10) в уравнение (1), найдем при условии  $m^2 \gg 2k_z^2 r_0^2 \omega_*^2 / \omega_*^2$

$$\kappa^2 \simeq m^2 / r_0^2, \quad \kappa = |m/r_0|. \quad (11)$$

Используем теперь граничные условия на скачке:

$$\Phi|_{r_0-0}^{r_0+0} = 0, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\perp} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{2m\Phi}{r_0} \omega_0^2 \Omega \int \frac{f_0}{\omega' [\omega'^2 - 4\Omega_0^2]} dv_z |_{r_0-0}^{r_0+0} = 0. \quad (13)$$

При вычислении интеграла в (13) для холодной среды достаточно ограничиться главным членом, а для горячей запишем интеграл полностью. В результате получим дисперсионное уравнение

$$1 + \alpha \Omega \operatorname{sgn} k_{\varphi} \left( \int \frac{f_0^{(2)} dv_z}{\omega_* - k_z v_z} - \frac{1}{\omega_*} \right) = 0 \quad \left( k_{\varphi} = \frac{m}{r_0} \right). \quad (14)$$

Если  $\omega_* \ll k_z v_{T2}$ , то (14) примет вид

$$1 - \frac{\alpha \Omega \operatorname{sgn} k_{\varphi}}{\omega_*} \left[ 1 + \frac{i\pi \omega_*}{|k_z|} f_0^{(2)} \left( \frac{\omega_*}{|k_z|} \right) \right] = 0. \quad (15)$$

<sup>1</sup> Соответственно эту неустойчивость можно было получить [28], используя уравнения анизотропной гидродинамики для вращающейся гравитирующей среды.

Напишем  $\omega_* = \omega^{(0)} + i\gamma$ . При  $\omega_* \ll k_z v_{T2}$  справедливо неравенство  $\omega^{(0)} \gg \gamma$ . Поэтому решение найдем в виде

$$\omega^{(0)} = \alpha \Omega \operatorname{sgn} k_\varphi, \quad \gamma = \omega^{(0)*} \frac{\pi}{|k_z|} f_0^{(2)} \left( \frac{\omega^{(0)}}{|k_z|} \right), \quad (16)$$

т. е. имеет место кинетическая неустойчивость. Колебания являются низкочастотными ( $\omega_* \ll \Omega_0$ ), если  $\alpha \ll 1$ . Для выполнения условия (9) необходимо

$$k_z v_{T1} \ll \alpha \Omega \ll k_z v_{T2},$$

а для справедливости (11) требуется, чтобы было

$$m^2 \gg 4\alpha^2 k_z^2 r_0^2.$$

**3. Цилиндр с неоднородной плотностью (и температурой) [28].** Градиент плотности  $d\rho_0/dr$  оказывает, как мы увидим, стабилизирующее влияние на неустойчивость, если он достаточно велик и по направлению совпадает с градиентом температуры, но сам по себе при  $T = \text{const}$  и отсутствии джинсовской неустойчивости не приводит к градиентной неустойчивости.

Неустойчивость возникает при  $k_z \rightarrow 0$ ,  $m \neq 0$  и  $k_z r \gg 1$  (возмущение  $\sim e^{i(k_z z + m\varphi + k_r r - \omega t)}$ ), т. е. неустойчивы возмущения с большой длиной волны по оси  $z$ , зависящие от угла и коротковолновые по  $r$ , поэтому возможно квазиклассическое рассмотрение при  $k_r r \gg 1$ . Мы будем интересоваться низкочастотными ( $\omega_* \ll \Omega$ ) колебаниями, не ограничиваясь заранее возмущениями гидродинамического типа с  $\omega_* \gg k_z v_T$ . Тогда получим следующее дисперсионное уравнение:

$$k_z^2 + \left(1 + \frac{\omega_0^2}{2\Omega^2}\right) \frac{2\omega_0^2}{v_T^2} \left[ \omega_* \int \frac{f_0 dv_z}{\omega_* - k_z v_z} - 1 \right] + \frac{\omega_0^2 \omega_T}{v_T^2} \times \\ \times \left[ \frac{\omega_*}{k_z^2 v_T^2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{\omega_*^2}{k_z^2 v_T^2} \right) \int \frac{f_0 dv_z}{\omega_* - k_z v_z} \right] - 2 \frac{\Omega^2 \omega_0^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \frac{\omega_n}{v_T^2} \int \frac{f_0 dv_z}{\omega_* - k_z v_z} = 0, \quad (17)$$

$$\omega_T = \frac{m}{r\Omega} \frac{dv_T^2}{dr}, \quad (18)$$

$$\omega_n = k_\varphi \left[ \frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{(\omega_0^2 - 2\Omega^2)}{4\Omega^2} \right] \frac{v_T^2}{r\Omega}. \quad (19)$$

В отсутствие джинсовской неустойчивости  $v_T \gg R\Omega$  вторым членом в (17) можно пренебречь (как и в однородном цилиндре). Для определения границы неустойчивости поступим следующим образом (аналогично соответствующему случаю в плазме [89]). Положим в (17)  $\omega^*$  вещественным и приравняем нулю действительную и мнимую части; тогда на границе устойчивости будем иметь

$$|k_z|_{\text{гп}} = \frac{\omega_0^2}{v_T^2} \frac{\omega_T}{k_z^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2\Omega^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \frac{1}{\eta} \right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{\omega_T}{\omega_n}, \\ \omega^* = - \frac{\omega_0^2 \omega_T}{v_T^2 k_z^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2\Omega^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \frac{1}{\eta} \right) = - |k_z|_{\text{гп}} v_T \left( \frac{1}{2} - \frac{2\Omega^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \frac{1}{\eta} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Эти условия могут удовлетворяться, если

$$\eta > \frac{4\Omega^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \quad \text{или} \quad \eta < 0. \quad (21)$$



Рассмотрим случай «слабой неоднородности», когда изменения плотности малы, но допустимы большие градиенты  $\rho$ .

В этом случае

$$\omega_0^2 = 2\Omega^2, \quad \omega_n = k_\varphi \frac{d \ln \rho}{d \ln r} \frac{v_T^2}{r\Omega}, \quad \eta = \frac{d \ln v_T^2}{d \ln \rho}, \quad (22)$$

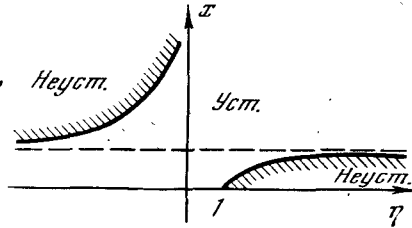
$$|k_z|_{\text{гп}} v_T \frac{k_T^2 v_T^2}{\omega_0^2 \omega_T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)^{1/2}.$$

Тогда условия (21) примут вид

$$\eta < 0 \text{ либо } \eta > 1. \quad (23)$$

В аналогичном плазменном случае [89] вторая граница неустойчивости лежит при  $\eta = 2$ . Причина отличия состоит в том, что в гравитирующей среде в силу условий равновесия угловая скорость вращения

Рис. 56. Области устойчивости и неустойчивости неоднородно по температуре и плотности бесстолкновительного цилиндра согласно [28]



однозначно связана с плотностью и потому переменна. Это дает вклад в критерий (21), (23) даже при слабой неоднородности, так как необходим учет вторых производных  $d^2\Omega/dr^2$ , которые по порядку величины совпадают с  $d\rho/dr^2$ .

Границы устойчивости на плоскости  $x, \eta$ , где

$$x = 2 \frac{k_z^2 v_T^2 k_\perp^4 v_T^4}{\omega_0^4 \omega_T^2}, \quad (24)$$

для случая (22) представлены на рис. 56 ( $x = 1 - 1/\eta$ ). Из (20) следует, что на границе устойчивости  $(\omega^*/k_z v_T) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2\Omega}{2\Omega^2 + \omega_0^2} \frac{1}{\eta}\right) \sim 1$  при  $\eta \neq \frac{4\Omega^2}{2\Omega^2 + \omega_0^2}$ . Поэтому нельзя было для ее нахождения ограничиваться

гидродинамическим рассмотрением и разлагать по параметру  $\omega^*/k_z v_T$ ; необходимо общее рассмотрение с произвольным  $\omega^*/k_z v_T$ .

### § 3. АНИЗОТРОПНАЯ («ШЛАНГОВАЯ») НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

**1. Качественное рассмотрение.** Представим себе, что в каком-то участке плоского слоя с линейным размером по  $x$ , равным  $\lambda$ , произошел изгиб (например, вверх на величину  $h$ ). Частица, движущаяся по изогнутому слою, испытывает действие двух сил: гравитационного при-

<sup>1</sup> В работе [28] обращается внимание на тот факт, что один градиент плотности не приводит к неустойчивости. Противоположное утверждение содержится в работах М. Н. Максумова [80—83]. Несмотря на то что корректность использованных приближений в [80—83] вызывает сомнение, сам вопрос о возможности развития дрейфовых неустойчивостей в гравитирующих системах, поставленный Максумовым, безусловно, интересен.

тяжения  $F_{\text{грав}}$  и центробежной силы  $F_{\text{цб}}$ . Эти две силы действуют в противоположных направлениях, причем гравитационное притяжение играет в данном случае стабилизирующую роль, стремясь вернуть изогнувшийся участок на прежнее место, а центробежная сила способствует дальнейшему увеличению изгиба. Отсюда ясно, что при условии  $F_{\text{цб}} > F_{\text{грав}}$  слой должен быть неустойчивым.

Для возмущений с длиной волны  $\lambda$ , много большей толщины слоя  $c$ ,  $F_{\text{грав}} \sim 2\pi G k \sigma_0 h$  (см. раздел 2.1 § 2 главы V). Так как, с другой стороны,  $F_{\text{цб}} \approx v_{Tx}^2 / r$ , где  $r$  — радиус кривизны,  $r \sim \lambda^2 / h$ , то неустойчивость будет иметь место при выполнении условия

$$k^2 v_{Tx}^2 > 2\pi G \sigma_0 k, \quad (1)$$

которое можно представить также в следующем виде [263]:

$$kc > v_{Tz}^2 / \alpha v_{Tx}^2, \quad (2)$$

где  $\alpha$  есть константа порядка единицы, определяемая соотношением

$$\alpha v_{Tz}^2 = 2\pi G \sigma_0. \quad (3)$$

Критерий неустойчивости выведен для достаточно длинноволновых возмущений:  $kc \ll 1$ . Возмущения с длиной волны, меньшей толщины слоя, устойчивы. Неустойчивость имеет место для «промежуточных» длин волн; она в некотором смысле «дополнительна» к длинноволновой джинсовской неустойчивости.

**2. Вывод дисперсионного уравнения [289<sup>a</sup>].** Обратимся к уравнению (23) § 3 I главы, описывающему антисимметричные по отношению к вертикальной координате  $z$  моды. Будем рассматривать длинноволновые возмущения, соответственно чему произведем разложения по степеням  $k$  ( $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$ , и т. п.), принимая, однако, что дисперсия скоростей частиц в плоскости  $(x, y)$  велика по сравнению с дисперсией скоростей по оси  $z$ :  $v_{Tx}^2 / v_{Tz}^2 \sim O(k)$ .

В низшем порядке теории возмущений имеем решение

$$\omega = 0, \quad \psi = \frac{d\Phi_0}{dz} \cdot \delta, \quad (4)$$

которое соответствует смещению всего слоя как целого по вертикали на расстояние  $\delta$ .

После этого условие совместности решений уравнений для  $\psi_0$

$$\frac{d^2 \psi_0}{dz^2} + \omega(z) \psi_0 = 0 \quad (5)$$

и для  $\psi_1$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + \omega(z) \psi_1 = \hat{L}_a \left[ \left( \bar{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial E_z} + k \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \right) \psi_0 \right], \quad (6)$$

которое получается так же, как в § 4 главы I, приводит к искомому дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = 2\pi G \sigma_0 k - k^2 v_{Tx}^2. \quad (7)$$

Это дисперсионное уравнение получено, исходя из формулировки задачи о колебаниях слоя, данной в § 3 главы I, которая, строго говоря, пригодна только для систем с плотностью, плавно обращаемой в нуль на границах  $z = \pm c$ . Можно, однако, показать, что то же уравнение (7) описывает и, например, возмущения однородного слоя (см. § 1 главы I).

Заметим, между прочим, что все дисковые системы, изучавшиеся в главе V, должны быть неустойчивыми<sup>1</sup> по отношению к возмущениям рассматриваемого типа (для длин волн  $\lambda < \beta R$ , где  $R$  — радиус, а  $\beta$  — параметр, характеризующий роль «давления» в равновесии диска,  $v_{Tx}^2 = \beta G \sigma_0 R$ ). Развитие неустойчивости приведет, вероятно, к диску конечной толщины, для которого условие устойчивости (обратное (2)) будет выполняться. Толщина такого диска может все еще оставаться гораздо меньшей радиуса, так что для описания возмущений в его «плоскости» можно по-прежнему пользоваться приближением бесконечного тонкого диска.

Как следует из (2), для неустойчивости необходимо иметь достаточно сильную анизотропию функции распределения по компонентам скорости  $v_x$  и  $v_z$ . Тоомре [331] нашел в численном исследовании, что неустойчивость заметна только в случае, когда отношение соответствующих дисперсий скоростей меньше 0,1.

Если  $v_{Tx}$  порядка  $v_{Tz}$ , аналогичный вывод показывает [289a], что длинноволновые возмущения представляют собой волны с

$$(\operatorname{Re} \omega)^2 = 2\pi G \sigma_0 k, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im} \omega = -\frac{2\pi}{k\sigma_0} \sum_m \int \left\{ \left[ -\frac{\partial f_0}{\partial E_z} \right]_{v_x=u_m} \frac{1}{\tau_0} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{d\Phi_0}{dz} \sin \left[ \frac{(2m+1)\pi}{2\tau_0} \tau(z) \right] d\tau(z) \right|^2 \right\} dE_z, \quad (9)$$

где  $u_m = \frac{\operatorname{Re} \omega}{k} + \frac{(2m+1)\pi}{2k\tau_0}$ ,  $m$  — целое число. Мнимая часть  $\omega$  в этом случае появляется благодаря взаимодействию волны с резонансными частицами. При  $\partial f_0 / \partial E_z < 0$  это взаимодействие приводит, согласно (9), к затуханию, которое является, конечно, обычным затуханием Ландау.

Особенно просто шланговая неустойчивость может быть исследована на двумерной «гидродинамической» модели бесконечно тонкого диска. Описание этой модели, а также дисперсионное уравнение для колебаний в плоскости диска были приведены в конце раздела 4.3 главы V. Легко показать, что мембранные колебания такого диска подчиняются уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 h = F_1 + F_2 - \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{\partial P_0}{\partial r} \frac{\partial h}{\partial r} + P_0 \Delta_{\perp} h \right),$$

где  $h$  — вертикальное смещение,  $\sigma_0 = \sqrt{1 - \gamma^2} \xi$  — поверхностная плотность,  $P_0 = \frac{1}{3} (1 - \gamma^2) \xi^3$  — равновесное давление,  $\Phi_0 = r^2/2$  — равновесный потенциал,  $\gamma$  — угловая скорость вращения в единицах круговой скорости,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}$  — двумерный лапласиан, а силы  $F_1$  и  $F_2 = 2h$  имеют тот же смысл, что и в разделе 2.1 главы V. Подставляя в это уравнение смещение  $h$  в виде  $\sim \frac{1}{\xi} P_{2n-1+m}^m(\xi) e^{im\varphi - i\omega t}$ , легко получить следующее дисперсионное уравнение:

$$(\omega - m\gamma)^2 = 4\Gamma_n^m - 2 - \frac{1}{3} (1 - \gamma^2) [2n + m] (2n + m - 1) - m^2 - 2.$$

Выкладки, приводящие к этому уравнению, вполне аналогичны проведенным в разделе 2.1 главы V, выражения для чисел  $\Gamma_n^m$  даны там же.

<sup>1</sup> Исключение могут представлять некоторые «холодные» системы ( $\beta=0$ ), см раздел 2.1 главы V; «горячие» диски «универсально неустойчивы».

Простейший нетривиальный тип возмущения, соответствующий  $m=0$ ,  $n=2$  (колоколообразный изгиб диска, смещение  $h \sim \frac{P_3(\xi)}{\xi} \sim 2-5r^2$ ), неустойчив, как следует из полученного дисперсионного уравнения, при  $|\gamma| < 1/2$ . Асимптотически при  $n \rightarrow \infty$   $\Gamma_n^m \rightarrow 2n/\pi$ , в то же время последний член в правой части дисперсионного уравнения (вклад давления) растет по абсолютной величине  $\sim n^2$ , так что любой «горячий» диск ( $|\gamma| \neq 1$ ) неустойчив для возмущений достаточно мелкого масштаба.

Существенно, что те же, по существу, соотношения остаются справедливыми и для *бесстолкновительных* дисков с изотропным распределением частиц по пекулярным скоростям. Мембранные колебания диска нужно рассматривать как предельные (при стремлении к нулю толщины  $c$ ) для антисимметричных колебаний вращающегося слоя или эллипсоида с длиной волны  $\lambda_\perp$ , много большей  $c$ . При  $\lambda_\perp = \infty$  эти возмущения вырождаются просто в параллельное оси  $z$  перемещение слоя как целого. Для интересующих нас возмущений можно считать, что функция распределения  $f$  частиц по  $v_x, v_y$  не изменилась ( $f=f_0$ ), но только теперь она задана на искривленной поверхности. Умножая кинетическое уравнение почленно на  $v_z$  и интегрируя по скоростям, получим

$$\sigma_0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_0 \overline{v_x v_z} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_0 \overline{v_y v_z} = -\sigma_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

где опущен малый член, содержащий  $\bar{v}_z^2$ . Разбивая  $v_x$  и  $v_y$  на регулярную и перпендикулярную части ( $v_x = v_{x0} + v_x', v_y = v_{y0} + v_y'$ ), преобразуем левую сторону этого уравнения к виду

$$\sigma_0 \left( \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + v_{x0} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} \right) + \bar{v}_z \left[ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_0 v_{x0} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_0 v_{y0} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_0 \overline{v_x' v_z} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_0 \overline{v_y' v_z}.$$

Но  $\text{div} \sigma_0 \mathbf{v}_0$ , стоящая в квадратных скобках, равна нулю, поскольку  $v_0 = v_{0\varphi}(r)$ ,  $v_{0r} = 0$ , а круглые скобки содержат полную производную  $\bar{v}_z$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \right) \bar{v}_z = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla \right)^2 \bar{h},$$

где  $\bar{h}$  — среднее смещение. В оставшихся членах можно в данном случае заменить  $v_x \rightarrow v_x \bar{h}' + v_y \bar{h}_y'$  и привести их к форме

$$\nabla \bar{h} \nabla \left( \frac{1}{2} \sigma_0 \bar{v}^2 \right) + \Delta_\perp \bar{h} \left( \frac{1}{2} \sigma_0 \bar{v}^2 \right).$$

В итоге, как легко убедиться, для  $\bar{h}$  получается то же самое уравнение, что и для двумерной «гидродинамической» модели, с  $P_0 = \frac{1}{2} \sigma_0 \bar{v}^2$ ; гравитационная сила вычисляется по  $\bar{h}$  прежним способом.

Примером изотропной функции распределения является  $f_{0\gamma} = \frac{\sigma_0(0)}{2\pi\sqrt{1-\gamma^2}} \times [(1-\gamma^2)(1-r^2)-v^2]^{-1/2}$  (раздел 1.4 гл. V). Можно вывести и дисперсионное уравнение для любой функции распределения из континуума этих функций (см. там же)  $f_0 = \int_{-1}^1 f'_{0\gamma} A(\gamma) d\gamma$ ; это дисперсионное уравнение имеет вид

$$1 = 4\Gamma_n^m \int_{-1}^1 \left\{ (\omega - m\gamma)^2 + 2 + \frac{1}{3} (1 - \gamma^2) [(2n+m)(2n+m-1) - m^2 - 2] \right\}^{-1} A(\gamma) d\gamma.$$

В частности, для анизотропной функции распределения покоящегося диска

$$f_0 = \frac{\sigma_0(0)}{\pi} \theta[(1-r^2)(1-v_\phi^2) - v_r^2]$$

отсюда можно получить (учитывая, что в этом случае  $A(\gamma) = 2/\pi\sqrt{1-\gamma^2}$ ):

$$\omega^2 = -2 - \frac{2}{3} [n(2n-1) - 1] \left[ \frac{n(2n-1)-1}{12\Gamma_n^0} - 1 \right]^2 \left\{ \left[ \frac{n(2n-1)-1}{12\Gamma_n^0} - 1 \right]^2 - 1 \right\}^{-1},$$

$$m=0, n \neq 0.$$

Неустойчивы здесь, как видно, все моды.

Заметим, что, хотя в работах Марка и Калсруда шланговая неустойчивость изучалась на примере слоя конечной толщины, однако дисперсионное уравнение получено лишь для возмущений с длинами волн  $\lambda_\perp \gg c$ , т. е., по существу, для бесконечно тонкого слоя. Гораздо проще исходить сразу из уравнений колебаний бесконечно тонкого слоя

$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} = F_{\text{грав}} - \frac{1}{\sigma_0} P_0 \Delta_\perp \bar{h}, \quad P_0 = \sigma_0 v_{Tx}^2,$$

и учесть, что смещению  $\bar{h} = e^{ikx}$  соответствует сила  $F_{\text{грав}} = -2\pi G k \sigma_0 e^{ikx}$  (см. раздел 2.1 главы V). Это приводит к дисперсионному уравнению (7) немедленно.

#### § 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

Все рассмотренные нами до сих пор неустойчивости имеют инкременты меньше или порядка джинсовского. Отличительной особенностью неустойчивостей неджинсовского типа (пучковой, градиентных) является трудность их приложения к реальным объектам. Действительно, эти неустойчивости, исследованные в бесконечно длинном цилиндре, существуют при условии, что предельная длина волны возмущения намного превосходит радиус цилиндра,  $\lambda_z \gg R$ .

Такая ситуация стимулирует поиск качественно отличных от перечисленных выше неустойчивостей гравитирующей среды. Большой интерес представляют неустойчивости, развитие которых может идти с инкрементом, много большим джинсовского, а также неустойчивости, не подверженные (подобно джинсовской) стабилизирующему влиянию теплового разброса или лишённые столь экзотических условий существования, как пучковая и градиентная.

К таким неустойчивостям относятся неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (К.—Г.) и желобковая неустойчивость [98—100].

##### 4.1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В МОДЕЛИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПОТОКА

Простейшей моделью для исследования неустойчивостей К.—Г. и желобковой является плоскопараллельный поток гравитирующей жидкости с изменяющейся (в перпендикулярном к скорости потока направлении) величиной скорости и плотности. Здесь уместно напомнить, что наиболее общие критерии устойчивости описанной модели были получены [129, 186] в приближении идеальной несжимаемой жидкости. Необходимость учета сжимаемости существенно усложняет анализ и не позволяет получить общие критерии устойчивости.

Устойчивость плоского тангенциального разрыва исследовалась ранее в приближении несжимаемой жидкости во внешнем гравитационном

поле [67, 186], в сжимаемой жидкости и в МГД-приближении [126] в отсутствие гравитационного поля.

В работе [99] изучено влияние гравитирующих свойств среды на устойчивость плоского тангенциального разрыва (рис. 57).

1. Исходную систему линеаризованных уравнений запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 + v_{z1} \frac{d\mathbf{v}_0}{dz} = -\frac{\nabla P_1}{\rho_0} - \nabla \Phi_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) v_{z1} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \rho_1 + \rho_0 (\nabla \mathbf{v}_1) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 v_{z1}) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) s_1 + v_{z1} \frac{ds_0}{dz} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta_2 \Phi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \rho_1. \quad (5)$$

Здесь векторные обозначения — двумерные (для  $x$ -,  $y$ -компонент), поверхность разрыва совпадает с плоскостью  $z=0$ ,  $G$  — гравитационная постоянная,  $s_0 = P_0/\rho_0^{\gamma}$  и  $s = (P_1 - c^2 \rho_1)/\rho_0^{\gamma}$  — невозмущенная и возмущенная энтропии,  $c^2 = \gamma P_0/\rho_0$  — скорость звука. Рассматривая возмущения типа  $\exp[i(kr - \omega t)]$ , сведем систему (1) — (5) к следующей:

$$\xi' = \frac{k^2}{\omega^2} \left( \frac{P_1}{\rho_0} + \Phi_1 \right) - \frac{P_1 + \xi P_0'}{c^2 \rho_0}, \quad (6)$$

$$P_1'/\rho_0 + \Phi_1' = \xi \left[ \omega^2 - \frac{P_0' \rho_0'}{\rho_0^2} + \frac{P_0'}{\rho_0^2 c^2} \right] + \frac{P_0' P_1}{\rho_0^2 c^2},$$

$$\Phi_1'' = k^2 \Phi_1 + 4\pi G \left[ \frac{P_1 + \xi P_0'}{c^2} - \xi \rho_0' \right], \quad (8)$$

где  $\omega_* = \omega - kv_0(z)$ ,  $\xi = iv_{z1}/\omega_*$ , штрих означает дифференцирование по  $z$ .

Пусть в плоскости  $z=0$  разрывны  $\rho_0$  и  $v_0$ . Граничные условия на разрыве легко получаются из (6) — (8) известной процедурой интегрирования по слою:

$$[\xi] = \xi(z=+0) - \xi(z=-0) = 0, \quad (9)$$

$$[\Phi_1'] = -4\pi G \xi [\rho_0], \quad (10)$$

$$[\Phi_1] = 0, \quad (11)$$

$$[P_1] = \xi g [\rho_0]. \quad (12)$$

Здесь  $[g \equiv d\Phi_0/dz|_{z=0}]$ , а уравнение (10) означает, что в плоскости  $z=0$  образуется простой слой поверхностной плотности  $\sigma = -\xi[\rho_0]$ .

Будем считать, что в областях  $z > 0$  и  $z < 0$  невозмущенные плотности и скорости постоянны (хотя и различны). Решая тогда систему (6) — (8) отдельно при  $z > 0$  и  $z < 0$  и сшивая полученные решения согласно (9) — (12), получим дисперсионное уравнение для частот малых колебаний. Коэффициенты системы (6) — (8) можно считать не зависящими от  $z$  лишь для достаточно коротковолновых возмущений

$$\lambda \ll \min(\lambda_1, \lambda_2), \quad (13)$$

где  $\lambda_1 = g/4\pi G \rho_0$ ,  $\lambda_2 = c^2/g$  или (при  $g=0$ ) для длин волн

$$\lambda^2 \ll \lambda_j^2 = c^2/4\pi G \rho_0. \quad (13')$$

При этих ограничениях дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} k, & k, & \omega_1^2 [k^2 \omega_{01}^2 + (\chi_1^2 - k^2)(k^2 c_1^2 - \omega_1^2)], \\ \omega_1^2 + kg, & kg - \omega_2^2, & \omega_1^2 \omega_{01}^2 (\chi_1 \omega_1^2 + k^2 g), \\ \omega_1^2 + \omega_{01}^2 + kg, & \omega_2^2 + \omega_{02}^2 - kg, & kg \omega_{01}^2 (\chi_1 \omega_1^2 + k^2 g), \\ 0 & 0 & -\rho_{01} c_1^2 \omega_1^2 (\chi_1^2 - k^2) (\chi_1 \omega_1^2 + k^2 g), \\ \omega_2^2 [k^2 \omega_{02}^2 + (\chi_2^2 - k^2)(k^2 c_2^2 - \omega_2^2)] & & \\ \omega_2^2 \omega_{02}^2 (k^2 g - \chi_2 \omega_2^2) & & \\ kg \omega_{02}^2 (k^2 g - \chi_2 \omega_2^2) & & \\ \rho_{02} c_2^2 \omega_2^2 (\chi_2^2 - k^2) (\chi_2 \omega_2^2 - k^2 g) & & \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Здесь индексом «1» отмечены величины, относящиеся к области  $z > 0$ , индексом «2» — к области  $z < 0$ ,  $\omega_{1,2} = \omega - kv_{0,2}$ ,  $\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0$ ,

$$\chi_{1,2}^2 = k^2 - \frac{\omega_{1,2}^2 + \omega_{01,2}^2}{c_{1,2}^2} + \frac{k^2 g^2}{\omega_{1,2}^2 c_{1,2}^2}, \quad \text{Re } \chi_{1,2} > 0. \quad (15)$$

2. Рассмотрим сначала эффекты, связанные только с разрывом скорости (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, рис. 58), положив в (14)  $\rho_{01} = \rho_{02}$ ,  $c_1^2 = c_2^2$ ,  $v_{01} = -v_{02} \equiv v_0$ ,  $g = 0$ , а решение будем описывать при помощи следующих безразмерных параметров:

$$M = |v_0|/c, \quad \beta = M \cos \alpha, \quad \cos \alpha = (kv_0)/|k||v_0|, \quad v = \omega/kc.$$

В пределе коротковолновых возмущений  $\omega_0 \ll kc$  в нулевом приближении из (15) имеем:

$$\omega = ikc\beta\gamma; \quad \gamma = [(1 + 4\beta^2)^{1/2} - (1 + \beta^2)]^{1/2}/\beta. \quad (16)$$

Из (16) видно, что тангенциальный разрыв в этом приближении неустойчив при любых  $M \neq 0$ , однако при  $M < \sqrt{2}$  неустойчивы возмущения с любым направлением волнового вектора (кроме чисто поперечных),

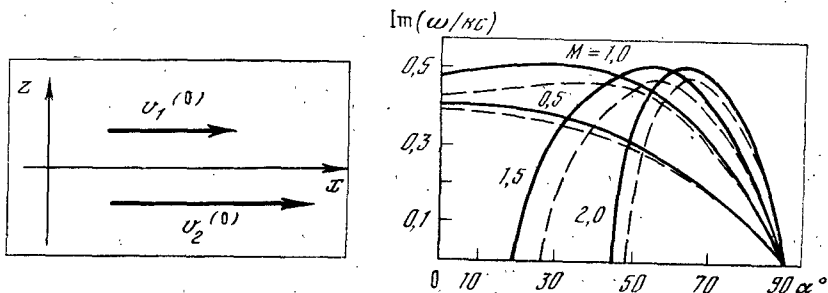


Рис. 57. Плоский тангенциальный разрыв

Рис. 58. Зависимость инкремента неустойчивости плоского тангенциального разрыва от «числа Маха»  $M = v_0/c$  и направления волнового вектора  $\alpha$

Сплошными линиями изображены инкременты при  $v^2 = \omega_0^2/k^2 c^2 = 0$  (несжимаемая жидкость), пунктирными — при  $v^2 = 0,2$

а при  $M > \sqrt{2}$  неустойчивыми оказываются возмущения только в случае  $\cos^2 \alpha < 2/M^2$ . Инкремент максимален ( $\omega = ikc[(1 + 4M^2)^{1/2} - (1 + M^2)]^{1/2}$ ) при  $M < \sqrt{3}/2$  для чисто продольных ( $k \parallel v_0$ ) возмущений, а для  $M > \sqrt{3}/2$  максимум инкремента ( $\omega = ikc/2$ ) достигается при  $\cos^2 \alpha = 3/4M^2$ .

В следующем по  $\nu = \omega_0/kc$  приближении имеем

$$\omega = ikc\beta\gamma(1 - \nu^2 A(\gamma)), \quad A(\gamma) = \frac{(1-\gamma)(1+\gamma^2)[2\gamma + (1+\gamma)^2]}{4\gamma(1+\gamma)(3-\gamma^2)}. \quad (17)$$

Легко видеть, что  $A(\gamma) > 0$  и является монотонно растущей функцией  $\beta$ . Таким образом, возмущения поверхности разрыва с ростом длины волны испытывают дополнительную, связанную с учетом гравитирующих свойств среды, стабилизацию. Однако необходимо помнить, что согласно (13') результаты (17) применимы лишь для длин волн  $\lambda \ll \ll \lambda_J = c/\omega_0$ . При этом, как видно из (17), инкремент неустойчивости оказывается много больше джинсовского:  $\text{Im } \omega \gg \omega_0$ .

3. Теперь рассмотрим эффекты, связанные с разрывом плотности. Положив в (14)  $\bar{v}_{01} = \bar{v}_{02} = 0$  и предполагая величину разрыва плотности не слишком малой по сравнению с  $\rho_0$ , получим:

$$\omega = \left( kg \frac{\rho_{02} - \rho_{01}}{\rho_{02} + \rho_{01}} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\pi G}{kg} (\rho_{01} - \rho_{02}) + \frac{\rho_{01}\rho_{02}g(\rho_{01}c_1^2 + \rho_{02}c_2^2)}{kc_1^2c_2^2(\rho_{01} - \rho_{02})(\rho_{01} + \rho_{02})^2} \right\}. \quad (18)$$

В приближении  $c \rightarrow \infty$  из (18) получаем известный в теории несжимаемой жидкости (10) результат.

4. Таким образом, инкременты гидродинамических неустойчивостей гравитирующей среды могут существенно превышать инкремент джинсовской неустойчивости.

Специфическая для такой среды джинсовская неустойчивость стабилизируется тепловым разбросом в области коротких ( $k^2c^2 \gg \omega_0^2$ ) длин волн (существует критическая длина волны). Гидродинамические неустойчивости в отличие от гравитационной не стабилизируются тепловым разбросом в коротковолновой области<sup>1</sup>. Более того, согласно (16), (18) инкременты гидродинамических неустойчивостей растут с уменьшением длины волны возмущения<sup>2</sup>. Это уникальное свойство неустойчивостей К.—Г. и желобковой отличает их от ранее исследованных гидродинамических неустойчивостей гравитирующей среды.

Легко видеть, что гравитация вообще не оказывает влияния на коротковолновую часть спектра колебаний. Если считать гравитирующую среду находящейся в равновесии,  $\nabla P_0 + \rho_0 \nabla \Phi_0 = 0$ , то из исходной системы уравнений с учетом градиентов невозмущенных величин легко видеть, что  $|\nabla P_1|$  больше  $|\rho_1 \nabla \Phi_0|$  в  $kL$  раз ( $L$  — характерный размер неоднородности,  $kL \gg 1$ ), а  $|\rho_0 \nabla \Phi_1|$  меньше  $|\rho_1 \nabla \Phi_0|$  также в  $kL$  раз. Таким образом, влияние «внешнего» гравитационного поля можно рассматривать как малую поправку к гидродинамическим эффектам. Влияние «самогравитации» еще более ничтожно.

Как видно из выражений (16), (18), учет сжимаемости по-разному влияет на каждую из рассмотренных неустойчивостей. В случае тангенциального разрыва скорости с увеличением параметра  $M$  колебания, раскачивающиеся под малыми углами к направлению скорости среды, стабилизируются, и максимум инкремента неустойчивости смещается в область больших углов между направлением скорости среды и волновым вектором.

Инкремент желобковой неустойчивости возрастает с учетом сжимаемости (как и с учетом «самогравитации»), причем особенно существенно для длинноволновых колебаний.

<sup>1</sup> Этот факт становится очевидным, если вспомнить, что рассмотренная в п. 2 модель разрыва неустойчива и в приближении несжимаемой жидкости [67], где величина теплового разброса по определению бесконечна.

<sup>2</sup> Это утверждение справедливо, по крайней мере, для длин волн, больших или порядка размера переходного слоя  $ka \ll 1$ .



#### 4.2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ЦИЛИНДРА

В предыдущем параграфе гидродинамические неустойчивости были рассмотрены в случае плоской геометрии, когда гравитирующая система нестационарна. Поскольку инкременты неустойчивостей К.—Г. и желобковой, как уже говорилось, много больше джинсовского, такое рассмотрение корректно, ибо отклонение от стационарного состояния происходит за время  $1/\omega_0$  ( $\omega_0$  — джинсовская частота,  $\omega_0 = \sqrt{4\pi G\rho_0}$ ,  $\rho_0$  — плотность среды,  $G$  — гравитационная постоянная), что много больше времени развития неустойчивости  $1/\gamma$ .

Тем не менее теория гравитационных неустойчивостей знает немало примеров, когда исследованная в плоской геометрии гравитационная

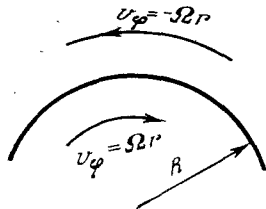


Рис. 59. Цилиндрический тангенциальный разрыв

неустойчивость в стационарной гравитирующей системе не развивается. Это связано со стабилизирующей ролью центробежных сил (или сил давления). Ниже рассматривается возможность развития гидродинамических неустойчивостей с инкрементом, много большим джинсовского, в простейшей стационарной гравитирующей системе цилиндрической геометрии.

1. Рассмотрим цилиндрический тангенциальный разрыв (рис. 59), полагая, что равновесие обеспечивается равенством центробежной и гравитационной сил ( $P_0 = \text{const}$ ;  $\Omega^2 = \omega_0^2/2$  — квадрат угловой скорости вращения цилиндров,  $R$  — радиус разрыва):

$$\Omega(r > R) = -\Omega(r < R).$$

Для исследования устойчивости возмущений поверхности разрыва типа  $\exp[i(m\phi + kz - \omega t)]$  нетрудно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\det(a_{ik}) = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{1,k} &= 1, & a_{2k} &= J_k, & a_{3,k} &= \mu_k^2 - 1 + a_{4,k}, \\ a_{4,l} &= v_l \{J_l - 2m/(x-m)\} / \{(x-m)^2 - 4\} & (l=1,3), \\ a_{4,l} &= v_0 \{J_l + 2m/(x+m)\} / \{(x+m)^2 - 4\} & (l=2,4), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_k^2 &= 2\beta^2 + \mu_k^2 - 1, \\ J_{1,3} &= \kappa\mu_{1,3} I'_m(\kappa\mu_{1,3}) / I_m(\kappa\mu_{1,3}), \\ J_{2,4} &= \kappa\mu_{2,4} K'_m(\kappa\mu_{2,4}) / K_m(\kappa\mu_{2,4}), \\ \mu_{1,3}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \varepsilon_1^2) \pm \sqrt{(1 - \varepsilon_1^2)^2 - \frac{32\beta^2}{(x-m)^2}} \right\}, \\ \mu_{2,4}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ (1 + \varepsilon_2^2) \pm \sqrt{(1 - \varepsilon_2^2)^2 - \frac{32\beta^2}{(x+m)^2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{1,2}^2 = 1 - \frac{4}{(x \mp m)^2} - \beta^2 \{(x \mp m)^2 - 2\},$$

$$x = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \kappa = kR, \quad \beta = M/\kappa, \quad M = \Omega R/c.$$

Здесь  $I_m$  — функция Бесселя от мнимого аргумента,  $K_m$  — функция Макдональда, штрих означает дифференцирование по аргументу.

Рассмотрим ряд предельных случаев для наиболее интересных мод  $m \geq 2$ . В пределе несжимаемой жидкости из (1) имеем

$$\omega = \omega^{(0)} = \Omega \{-1 + i\sqrt{m^2 - 1}\}. \quad (2)$$

В слабосжимаемом случае ( $M \ll 1$ ), и длинноволновом ( $kR \ll m$ ) приближении

$$\omega = \omega^{(0)} + \frac{\kappa^2 \Omega}{m^2 - 1} - \frac{i\Omega}{\sqrt{m^2 - 1}} \left\{ \frac{\kappa^2}{m^2 - 1} + m^2 M^2 \right\}. \quad (3)$$

Мы видим, что учет сжимаемости, так же как и в плоском случае, частично стабилизирует неустойчивость. В обратном предельном случае ( $kR \gg m$ , ограничений на  $M$  не накладывается), используя асимптотику функций Бесселя  $I_m$ ,  $K_m$ , легко получить условие устойчивости для таких возмущений

$$\frac{m^2 M^2}{k^2 R^2} \geq 2 - 4/m^2, \quad (4)$$

совпадающее при  $m \gg 1$  с условием устойчивости возмущений плоского тангенциального разрыва (в том же приближении,  $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$ )

$$\beta^2 = \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} M^2 \geq 2. \quad (5)$$

В пределе очень коротких длин волн ( $kR \gg m$ ) инкремент неустойчивости стремится асимптотически к величине  $\Omega\sqrt{m^2 - 2}$ .

Исследование дисперсионного уравнения (1) для наиболее крупномасштабных мод  $m=2$  и  $m=3$  было проведено численно. Результаты:

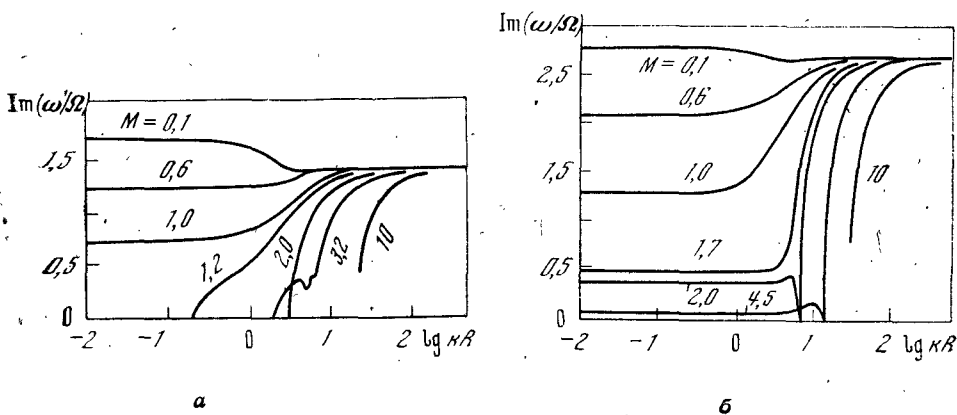


Рис. 60. Зависимость инкремента неустойчивости цилиндрического тангенциального разрыва от «числа Маха»  $M$  (написано около каждой кривой) и длины волны ( $kR$ ) для мод  $m=2$  (а) и  $m=3$  (б)

зависимость инкремента неустойчивости (в единицах  $\Omega$ ) от числа Маха  $M$  и безразмерной длины волны  $kR$ , — изображены на рис. 60, а и б. Следует отметить довольно сложную зависимость инкремента неустойчивости в области  $1 \leq kR \leq 10$  для сверхзвуковых разрывов.

2. Исследуем теперь возможность раскочки желобковой неустойчивости в гравитирующем цилиндре. Для этого рассмотрим модель бесконечно длинного цилиндра с разрывом плоскости  $\rho_0(r)$  на расстоянии  $R$  от оси цилиндра, предполагая, что равновесие обеспечивается результирующим действием центробежной и гравитационной сил и силы давления, так что  $g = \frac{d\Phi_0}{dr} - \Omega^2 r \neq 0$ . Рассматривая коротковолновые (по сравнению с джинсовским масштабом) колебания, для которых влияние возмущенного гравитационного потенциала пренебрежимо мало, получим следующие уравнения для возмущений давления  $P$  и смещения  $\xi = iv_r / (\omega - m\Omega)$  поверхности разрыва (штрих означает дифференцирование по  $r$ ):

$$P_1' = \frac{2m\Omega}{r\omega_*} P_1 - g \left[ \frac{P_1 + \xi P_0'}{c^2} - \xi \rho_0' \right] - (\kappa^2 - \omega_*^2) \rho_0 \xi, \quad (6)$$

$$\xi' = \frac{\tilde{k}^2 P_1}{\omega_*^2 \rho_0} - \frac{(\omega_* + 2m\Omega)}{\omega_* r} \xi - \frac{P_1 + \xi P_0'}{\rho_0 c^2}, \quad (7)$$

где  $\omega_* = \omega - m\Omega$ ,  $\kappa^2 = 4\Omega^2 \left(1 + \frac{r\Omega'}{2\Omega}\right)$ ,  $\tilde{k}^2 = k^2 + m^2/r^2$ ,  $c^2 = \gamma P_0/\rho_0$  — скорость звука. Из (6), (7) следуют граничные условия для сшивки решений при  $r = R$ :

$$[\xi] = \xi(R+0) - \xi(R-0) = 0, \quad (8)$$

$$[P_1] = \xi g [\rho_0]. \quad (9)$$

Решая систему (6) — (9) в пределе  $m^2 \gg k^2 R^2$ , получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{0n} (-1)^n \left\{ \frac{\left[ (-1)^n \alpha_n + \frac{\omega_* + 2m\Omega}{\omega_* R} - g/c_n^2 \right]}{(k^2/\omega_*^2 - 1/c_n^2)} - g \right\} = 0, \quad (10)$$

где

$$\alpha_n^2 = k^2 \left( 1 + \frac{g^2}{c_n^2 \omega_*^2} \right) - \frac{\omega_*^2}{c_n^2} - \frac{g}{c_n^2} \frac{\omega_* + 4m\Omega}{R\omega_*} + \frac{2m\Omega(\omega_* + 2m\Omega)}{R^2 \omega_*^2}. \quad (11)$$

Поскольку нас интересует лишь принципиальная возможность раскочки желобковой неустойчивости, рассмотрим случай достаточно горячей среды. Тогда из (10) при  $\rho_{01} = \rho_0$  ( $r > R$ )  $\neq \rho_{02} = \rho_0$  ( $r < R$ ) получаем инкремент неустойчивости

$$\gamma \approx \left\{ kgA + \frac{(2 - A^2)m^2\Omega^2}{k^2 R^2} \right\}^{1/2}, \quad (12)$$

где

$$A = \frac{\rho_{01} - \rho_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}}.$$

Как следует из выражения (12), необходимое условие неустойчивости есть

$$gA > 0. \quad (13)$$

Это значит, что при  $g = \frac{\partial\Phi_0}{dr} - \Omega^2 r > 0$  желобковая неустойчивость развивается при  $\rho_{01} > \rho_{02}$ , а в случае  $g < 0$  — при  $\rho_{02} < \rho_{01}$ . Второе слагаемое в (12) много меньше первого и играет роль малой поправки за счет цилиндрической симметрии. Поскольку  $|A| < 1$ , эффект кривизны оказы-

вает дестабилизирующее влияние на желобковые возмущения. Заметим, что этот же эффект кривизны, как это следует из формулы (2), в случае тангенциального разрыва скорости оказывает стабилизирующее влияние.

В противоположном рассмотренному выше (см. (12)) случаю длин волн, много больших размера переходного слоя  $a$ , рассмотрим другой предельный случай:  $\lambda \ll a$ . Для возмущений типа  $\exp[i(kr + m\varphi - \omega t)]$  вместо (12) получаем следующий инкремент желобковой неустойчивости:

$$\gamma = \sqrt{g \frac{d \ln \rho_0}{dr} \frac{m^2}{k^2 r^2}}. \quad (14)$$

Естественно, что условие неустойчивости аналогично (13). Инкремент неустойчивости (14) много больше джинсовского инкремента при  $m/kr \gg 1$ .

Для простейшей модели газового твердотельно-вращающегося цилиндра радиуса  $R$ , имеющего при  $r=1$  ( $R \gg 1$ ) разрыв плотности ( $\rho = \rho_1$ , если  $r < 1$ ;  $\rho = \rho_2$ , если  $r > 1$ ), можно получить следующее выражение для частот колебаний ( $m > 0$ ):

$$\omega - m\Omega = \frac{\Omega (\rho_2 - \rho_1) \pm \sqrt{\Omega^2 (\rho_2 - \rho_1)^2 + m \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dr} \right)_{r=1} (\rho_2 - \rho_1) (\rho_2 + \rho_1)}}{(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Отсюда, в частности, тоже следует, что необходимым условием неустойчивости является неравенство  $(\nabla \rho_0) (\nabla P_0) < 0$ .

## ЗАДАЧИ

1. Возникает ли пучковая неустойчивость в простейшей модели гравитирующей среды — однородного плоского слоя (и при условии подавления джинсовской неустойчивости на соответствующих длинах волн)?

Решение. Покажем, что ответ на поставленный вопрос должен быть положительным. При этом мы ограничимся рассмотрением «гидродинамической» раскачки ветви  $\omega^2(k) = 3 + \varepsilon k^2$  пучком большой скорости ( $V \gg v_T$ ) и малой плотности  $\alpha \rho_0$  ( $\alpha \ll 1$ ).

Учитывая доплеровский сдвиг частоты из-за движения пучка, запишем дисперсионное уравнение для интересующей нас ветви (при  $k\epsilon \ll 1$ ) в виде

$$-1 = \frac{1}{\omega^2 - 4} + \frac{\alpha}{(\omega - kV)^2 - 4}, \quad (1)$$

Аналогично циклотронной неустойчивости в плазме, возникающей при «пересечении» циклотронных сносовых ветвей пучка с ветвями собственных колебаний основной плазмы [86], будем считать, что

$$kV - 2 = \omega_1 = \sqrt{3}. \quad (2)$$

Тогда из (1), учитывая малость  $\alpha$ , находим искомый инкремент неустойчивости

$$\gamma = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}. \quad (3)$$

Предоставляем возможность читателю самому убедиться в том, что условиям применимости использованного приближения (см. задачу 1 гл. I) и малости инкремента джинсовской неустойчивости (по сравнению с (3)) можно удовлетворить одновременно.

2. Рассмотрим «пучковую ситуацию» в однородной бесстолкновительной расширяющейся Вселенной [24].

Решение. Возьмем функцию распределения частиц с встречными пучками (по оси  $x$ ) одинаковой плотности (сравни с задачей 3 главы III)

$$f_0 = \frac{1}{6\pi G (\pi\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{u_2^2 + u_3^2}{\theta}\right] \frac{1}{2} \left[ \exp\left\{-\frac{(u_1 - v)^2}{\theta}\right\} + \exp\left\{-\frac{(u_1 + v)^2}{\theta}\right\} \right]. \quad (1)$$

Как и в задаче 3 главы III, решив кинетическое уравнение методом интегрирования по траекториям, можно получить следующее интегральное уравнение для функции  $\varphi(t)$  ( $\Phi_1 = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\varphi(t)$ ,  $f_1 = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}f(t)$ ,  $\xi = x/t^{1/3}$ ):

$$\varphi(t) + \frac{2}{t^{1/3}} \int_0^t \varphi(t') \tau \exp\left[-\frac{9k^2\theta}{4}\tau^2\right] \cos 3kvt' dt' = 0, \quad (2)$$

где  $\tau = t^{-1/3} - t'^{-1/3}$ .

Для длинных волн  $\lambda$  или достаточно больших  $t$  интегральное уравнение (2) сводится к дифференциальному:

$$t^4 \varphi^{IV} + \frac{32}{3} t^3 \varphi''' + \left[ \frac{254}{9} t^2 + 2t^{1/3} (kv)^2 \right] \varphi'' + \left[ \frac{448}{27} t + \frac{16}{3} t^{1/3} (kv)^2 \right] \varphi' + 2 [(kv)^2 t^{-2/3} + (kv)^4 t^{-4/3}] \varphi = 0. \quad (3)$$

Отсюда видно, что со временем роль пучков падает (при  $kv/t^{1/3} \rightarrow 0$ ), и решение выходит на обычное гидродинамическое решение, уже рассматривавшееся нами (в задаче 3 к главе III).

Можно исследовать и коротковолновые возмущения, если выполняются условия  $\frac{9k^2\theta}{4} t^{-1/3} \gg 1$ ,  $\frac{9k^2\theta}{4} \equiv \lambda \gg k^2 v^2$ . Тогда интеграл в (2) берется методом перевала, и мы находим

$$\varphi + 9 \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{t^2}{\lambda^{1/2}} \varphi' \cos \frac{3kv}{\sqrt{2\lambda}} = 0. \quad (4)$$

Отсюда

$$\varphi = \text{const} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{9t} \sqrt{\frac{2e\lambda^3}{\pi}} \frac{1}{\cos\left(\frac{3kv}{\sqrt{2\lambda}}\right)} \right\}, \quad (5)$$

и характерное время затухания возмущения, начиная от момента  $t = t_0$ , есть

$$T = 9 \sqrt{\frac{\pi}{2e\lambda^3}} t_0^2 \cos \frac{3kv}{\sqrt{2\lambda}} \quad (6)$$

( $3kv/\sqrt{2\lambda} < \pi/2$  из наложенных выше условий). Видно, что наличие пучков на функции распределения в данном случае оказывает стабилизирующее действие.

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

В этой главе мы коснемся некоторых важных вопросов нелинейной теории эволюции волн плотности в гравитирующей среде. Нелинейная теория только зарождается. Впереди — построение теории турбулентности гравитирующей среды, а сегодня изложенные в этой главе задачи — ее неоконченный фундамент.

### § 1. СОЛИТОНЫ В ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

#### 1.1. СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ

##### В ПЛОСКИХ ГАЛАКТИКАХ — ДВИЖУЩИЕСЯ СОЛИТОНЫ

Вопрос о возможности существования стационарных решений в виде движущихся солитонов в плоскости гравитирующего диска чрезвычайно интересен сам по себе и как имеющий прямое отношение к проблеме спиральной структуры галактик (см. главу VIII).

Продолжим исследование рассмотренного в главе V случая слабой гравитационной неустойчивости бесконечно тонкого вращающегося диска, характеризующегося следующими тремя признаками: а) инкремент неустойчивости  $\gamma$  мал по сравнению с частотой вращения  $\Omega(r)$ ,  $\gamma \ll \Omega(r)$ ; б) размер области неустойчивости в  $k$ -пространстве волновых чисел  $\Delta k$  мал по сравнению с волновым числом  $k_0$ , таким, что  $\gamma(k_0) = \gamma_{\max}$ , т. е.  $\Delta k/k_0 \ll 1$ ; в) размер области неустойчивости в координатном пространстве  $\Delta r$  велик по сравнению с длиной волны  $\lambda_0 \equiv 2/k_0$ ,  $k_0 \Delta r \gg 1$ .

Указанные выше три условия позволяют существенно упростить формальную сторону решения задачи, воспользовавшись стандартными методами теории возмущений, в частности методом ВКБ.

Дисперсионное уравнение для малых колебаний гравитирующего диска получено Тоомре [333] (см. главу V):

$$\omega_k^2 = 4\Omega^2 - g|k| + k^2 c_s^2, \quad g = 2\pi G \sigma_0. \quad (1)$$

Условие а) выполняется, если максимальный инкремент неустойчивости  $\gamma_{\max}$  удовлетворяет неравенству

$$\gamma_{\max} = \sqrt{g^2/4c_s^2 - 4\Omega^2} \ll \Omega. \quad (2)$$

Дисперсионное уравнение (1) получено в предположении  $k_q \ll k$ , [333] (см. также главу V), что соответствует туго закрученным спиральям.

Учтем теперь нелинейные члены в исходных уравнениях. Нелинейные эффекты приводят к образованию обертонов с волновыми векторами  $2k_0$ ,  $3k_0$  и т. д. По этой причине все характеризующие диск функции в силу условия б) можно разложить в ряд Фурье. Например, плотность диска  $\sigma$  представим в виде

$$\sigma(r, t) = \sigma_0 + \sum_n \sigma_n(t) e^{in k_0 r}. \quad (3)$$

Заметим, что в силу (1) и условия б) моды  $nk_0$  при  $|n| > 1$  устойчивы.

Вследствие малости  $k_\varphi$  исходные уравнения запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r \sigma) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\varphi) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial P'}{\partial r}. \quad (6)$$

Здесь  $\Phi$  — гравитационный потенциал,  $P'$  — давление в плоскости диска (обычное давление будем обозначать буквой  $P$  без штриха). Будем считать колебания (и сам процесс неустойчивости) адиабатическими. Тогда, как было показано Хантером [228], для тонкого диска<sup>1</sup>:

$$P' = \frac{c_s^2}{\kappa} \sigma_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\kappa, \quad (7)$$

$c_s^2 \equiv \kappa \frac{P'_0}{\rho_0}$  — квадрат скорости звука,  $\kappa = 3 - 2/\gamma$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты:  $P'/\rho^\gamma = k \equiv \text{const}$ .

Представляем каждую функцию в виде суммы из невозмущенного и возмущенного слагаемых:

$$\sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma}, \quad (8)$$

$$v_\varphi = v_{\varphi 0} + \tilde{v}_\varphi, \quad v_{r_0} = 0. \quad (9)$$

В силу  $k_0 r \gg 1$  из (4), (5) имеем

$$v_r = -\frac{1}{2\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{2\Omega} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial r}. \quad (11)$$

Для определенности числовых коэффициентов формулы (10), (11) получены в предположении твердотельного вращения диска,  $\Omega_0 \equiv v_{\varphi 0}/r \equiv \text{const}$ , хотя можно рассматривать и случай произвольного вращения — изменяются только числовые коэффициенты.

Подставляя (7), (10), (11) в (6), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{v}_\varphi}{\partial t^2} = & \left( c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 4\Omega^2 \right) \tilde{v}_\varphi + 2\Omega \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} + 2\Omega \frac{\tilde{v}_\varphi^2}{r} + \\ & + \frac{\kappa - 2}{4\Omega} c_s^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\kappa - 3}{6\Omega} \left( \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial r} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Нелинейные слагаемые в квадратных скобках обязаны члену, описывающему силу давления. Нелинейный член  $v_r \partial v_r / \partial r$  опущен как малый по сравнению с аналогичными членами в  $(\gamma/\Omega)^2$  раз.

Представив  $\tilde{v}_\varphi$  в виде ряда, аналогичного (3),

$$\tilde{v}_\varphi = \sum_n \tilde{v}_n(t) e^{in k_0 r} \quad (13)$$

<sup>1</sup> Формулу (7) просто получить, воспользовавшись уравнением адиабаты  $P = k\rho^\gamma$ , связь между  $P'$  и  $P$ :  $P' = Pl$  и представив  $P'$  в виде  $P' = k^\alpha G^\beta \sigma^\alpha$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы,  $l$  — линейный размер («толщина» диска) (см. раздел 1.3 главы V).

и воспользовавшись связью между возмущенным потенциалом и поверхностной плотностью [333], из (12) получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial t^2} = \gamma_k^2 \tilde{v}_1 + i \frac{\kappa - 2}{4\Omega} k_0^2 c_s^2 \left[ 4\tilde{v}_2 \tilde{v}_{-1} + \frac{ik_0(\kappa - 3)}{2\Omega} |\tilde{v}_1|^2 \tilde{v}_1 \right] + \frac{4\Omega}{r} \tilde{v}_2 \tilde{v}_{-1}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4\Omega^2 \right) \tilde{v}_2 = \left( -\frac{\kappa - 2}{4\Omega} c_s^2 \cdot 2ik_0^2 + \frac{2\Omega}{r} \right) \tilde{v}_1^2, \quad (15)$$

где  $\gamma_k^2 = -\omega_k^2$  (см. (1)).

Учитывая неравенство (2), из (15) найдем

$$\tilde{v}_2 = \frac{1}{2\Omega} \left[ (2 - \kappa) ik_0 + \frac{1}{r} \right] \tilde{v}_1^2; \quad (16)$$

после подстановки (16) в (14) получаем

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_1}{\partial t^2} = \gamma_k^2 \tilde{v}_1 + ak_0^2 (2 - \kappa) (5/3 - \kappa) |\tilde{v}_1|^2 \tilde{v}_1; \quad a = 3/2, a > 0. \quad (17)$$

Рассмотрим область ( $k_0^2 r^2 \gg 1$ ):

$$2 > \kappa > 5/3; \quad \text{т. е. } 2 > \gamma > 3/2. \quad (18)$$

Из (17) видно, что рост амплитуды возмущенной скорости, вызванный неустойчивостью, задерживается на уровне

$$|\tilde{v}_1|^2 = \frac{\gamma_k^2}{k_0^2 (2 - \kappa) (\kappa - 5/3)},$$

а амплитуда возмущенной плотности нарастает до величины

$$\frac{|\tilde{\sigma}_1|^2}{\sigma_0^2} = \frac{a}{(2 - \kappa) (5/3 - \kappa)} \frac{\gamma^2}{\Omega^2}.$$

Покажем, что в этой области уравнение (17) имеет стационарное решение солитонного типа.

До сих пор мы пренебрегали разбросом волновых чисел  $\Delta k$ . Его несложно учесть, если представить функцию  $\gamma_k^2$  в виде ряда в окрестности точки  $k_0$ , где эта функция имеет максимум (здесь и ниже будем считать, что  $k_{1\varphi} \neq 0$ , но по-прежнему  $k_0 \equiv k_{0r}$ ):

$$\gamma_k^2 = \gamma_{k_0}^2 - k_{1r}^2 c_s^2,$$

где  $k_{1r} = k - k_0$ ,  $k_{1r}$  — радиальная компонента вектора  $k_1$ . Перейдем в уравнении (17) к координатному представлению, для чего умножим почленно (17) на  $e^{ik_{1r}r}$  и проинтегрируем по  $dk_{1r}$ , полагая, что

$$\int \tilde{v}_1(k, t) e^{ik_{1r}r} dk_{1r} = \tilde{v}_1(r, t).$$

В результате получим уравнение (учтем здесь зависимость возмущенных величин от угла  $\varphi$ )

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \tilde{v}_1 = (\gamma_0^2 + c_s^2 \Delta_r) \tilde{v}_1 - \frac{ak_0^2}{2} (2 - \kappa) (\kappa - 5/3) \tilde{v}_1^2, \quad (19)$$

где

$$\Delta_r \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Выбрав координатно-временную зависимость  $\tilde{v}_1(r, t)$  в виде  $\tilde{v}_1(r, t) = V(\xi) \equiv V(k_{1r} + m\varphi - \omega t)$ , перейдем в уравнении (19) к переменной  $\xi$ .



Получим уравнение

$$\alpha^2 \frac{d^2 V}{d\xi^2} = \gamma_0^2 V - \beta^2 V^3,$$

где

$$\alpha^2 = (\omega - m\Omega)^2 - k_r^2 c_s^2, \quad \beta^2 = \frac{ak_0^2}{2} (2 - \kappa) \left(\kappa - \frac{5}{3}\right),$$

решение которого есть

$$V = \frac{a'}{b'} \frac{1}{\operatorname{ch} a' \xi}, \quad (20)$$

$$a'^2 = \gamma_0^2 / \alpha^2, \quad 2b'^2 = \beta^2 / \alpha^2.$$

Как мы видим, решения солитонного типа возможны в двух случаях: 1) сверхзвукового движения волны плотности, в этом случае имеет место слабая джинсовская неустойчивость диска, причем показатель адиабаты  $\gamma$  удовлетворяет условиям (18); 2) дозвукового движения волны плотности, в этом случае джинсовская неустойчивость диска отсутствует, а возмущения — почти изотермические,  $\gamma < 3/2$ .

## 1.2. СОЛИТОНЫ В САМОГРАВИТИРУЮЩЕМ ГАЗОВОМ СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Рассмотрим однородный газовый слой плотности  $\rho_0$  и толщины  $2C$ , удерживаемый в равновесии вдоль оси  $z$  в результате баланса сил гравитации и давления  $P_0 = \frac{\Omega_0^2 \rho_0}{2} (C^2 - z^2)$ . Чтобы избежать джинсовской неустойчивости в плоскости  $(x, y)$ , будем считать слой вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$  во внешнем поле с потенциалом  $\Phi_0 = \Omega^2 (x^2 + y^2) / 2$ <sup>1</sup>. Максимальный инкремент джинсовской неустойчивости при  $\Omega = 0$  порядка  $\Omega_0$ . При  $\Omega^2 \gg \Omega_0^2$  эта неустойчивость стабилизируется. В дальнейшем мы интересуемся колебаниями слоя с частотой  $\omega$  порядка  $\omega_0 = \sqrt{4\pi G \rho_0} \sim \Omega_0$ . Для простоты будем считать  $\Omega^2 \gg \Omega_0^2 \sim \omega^2$  и воспользуемся безразмерными переменными, в которых  $\rho_0 = 1$ ,  $C = 1$ ,  $4\pi G \rho_0 = 1$ .

Найдем теперь спектр малых, длинноволновых в плоскости  $(x, y)$  колебаний слоя.

В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , линеаризованные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial v_{z1}}{\partial z} + i k_{\perp} v_{\perp 1} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_{\perp 1}}{\partial t} = 2 [\Omega v_{\perp 1}] - i k_{\perp} (P_1 + \Phi_1), \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_{z1}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial z} (P_1 + \Phi_1) + \rho_1 P'_0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_1 - \gamma P_0 \rho_1) + v_{z1} P'_0 = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \Phi_1 = \rho_1, \quad (25)$$

где  $k_{\perp} \equiv (k_x, k_y)$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты, штрих — производная по  $z$ .

<sup>1</sup> Аналогичная модель использовалась Гольдрейхом и Линден-Беллом [210] при построении регенеративной теории спиральных рукавов в галактиках (см. § 3 главы VIII).

Из уравнения (22) можно найти  $v_{\perp 1}$ . Отбрасывая  $\partial/\partial t$  по сравнению с  $\Omega$  ( $\Omega \gg \omega$ ) и умножая это уравнение векторно на  $\Omega$ , получим

$$v_{\perp 1} = -\frac{i}{2} \frac{[\Omega k_{\perp 1}]}{\Omega^2} (P_1 + \Phi_1). \quad (26)$$

Подставляя (26) в (21), видим, что член с  $k_{\perp 1} v_{\perp 1}$  выпадает из последнего уравнения. Вводя величину  $\xi$  (вертикальное смещение по оси  $z$ ) соотношением  $v_z = -i\omega\xi$ , получим следующую упрощенную систему уравнений:

$$\rho_1 + \xi' = 0, \quad (27)$$

$$-\omega^2 \xi = -\Phi_1' - P_1' - \rho_1 z, \quad (28)$$

$$P_1 = \frac{\gamma}{2} (1 - z^2) \rho_1 + z\xi, \quad (29)$$

$$\Phi_1'' - k^2 \Phi_1 = \rho_1. \quad (30)$$

Дифференцируя (28) по  $z$  и подставляя в получившееся уравнение (27), (29), (30), приходим к следующему уравнению для возмущенного потенциала  $\Phi_1$ :

$$\left\{ \omega^2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{\gamma}{2} (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} \right] \right\} \Phi_1 = (\omega^2 - 1) k^2 \Phi_1 + k^2 \frac{d^2}{dz^2} \frac{\gamma}{2} (1 - z^2) \Phi_1. \quad (31)$$

В случае  $k_{\perp} = 0$  порядок уравнения (31) понижается:

$$\omega^2 \Phi_1 + \frac{\gamma}{2} (1 - z^2) \frac{d^2 \Phi_1}{dz^2} = 0. \quad (32)$$

Легко проверить, что это уравнение имеет собственные функции

$$\Phi_1^{(n)} = (1 - z^2) P_{n+1}'(z) \sim P_{n+2}(z) - P_n(z) \quad (33)$$

и собственные частоты

$$\omega_n^2 = \frac{\gamma}{2} (n+1)(n+2), \quad (34)$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $P_n(z)$  — полиномы Лежандра. В частности, для моды  $n=0$ , соответствующей однородным растяжениям — сжатиям слоя по оси  $z$ ,  $\omega^2 = \gamma$ . Мы будем интересоваться именно этой модой, так как для нее легче всего получить нелинейное дисперсионное уравнение.

Вычислим теперь поправки порядка  $k^2$  к собственным частотам (34), считая  $k^2 \ll 1$ .

Представим уравнение (31) в виде

$$\hat{R}(\omega^2) \Phi_1 = k^2 \hat{r} \Phi_1, \quad (35)$$

где

$$\hat{R}(\omega^2) = \omega^2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{\gamma}{2} (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} \right\}, \quad (36)$$

$$\hat{r} = -(\gamma + 1) - 2\gamma z \frac{d}{dz}. \quad (37)$$

В нулевом порядке теории возмущений

$$\hat{R}(\omega_n^{(0)}) \Phi_{1_0}^{(n)} = 0, \quad (38)$$

причем  $\Phi_{1_0}^{(n)}$  и  $\omega_n^{(0)}$  определяются выражениями (33) и (34). Положим  $\Phi_1^{(n)} = \Phi_{1_0}^{(n)} + \varphi_n$ , тогда

$$\hat{R}(\omega_n^{(0)}) \varphi_n + \frac{\partial \hat{R}(\omega_n^{(0)})}{\partial \omega^2} \delta \omega^2 = k^2 \hat{r} \Phi_{1_0}^{(n)}. \quad (39)$$

Определим скалярное произведение

$$\langle \Phi, \psi \rangle \equiv \int_{-1}^1 \Phi \psi dz. \quad (40)$$

Умножим (39) слева скалярно на  $\Phi_{1_0}^{(n)}$ :

$$\langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \hat{R}(\omega_n^{(0)}) \varphi_n \rangle + \delta \omega^2 \left\langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega^2} \Phi_{1_0}^{(n)} \right\rangle = k^2 \langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \hat{r} \Phi_{1_0}^{(n)} \rangle. \quad (41)$$

Отсюда находим (учитывая (38) и самосопряженность оператора  $\hat{R}$ ):

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \hat{R} \psi \rangle &= \langle \psi, \hat{R} \Phi \rangle \\ \delta \omega^2 &= k^2 \frac{\langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \hat{r} \Phi_{1_0}^{(n)} \rangle}{\left\langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega^2} \Phi_{1_0}^{(n)} \right\rangle}. \end{aligned} \quad (42)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega^2} &= \frac{d^2}{dz^2}, \quad \left\langle \Phi, \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right\rangle = -\langle \Phi', \Phi' \rangle, \quad \langle \Phi, \hat{r} \Phi \rangle = -(\gamma + 1) \langle \Phi, \Phi \rangle = \\ &= -2\gamma \left\langle \Phi, z \frac{d}{dz} \Phi \right\rangle = -(\gamma + 1) \langle \Phi, \Phi \rangle + \gamma \langle \Phi, \Phi \rangle = -\langle \Phi, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

то получим

$$\delta \omega_n^2 = k^2 \frac{\langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \Phi_{1_0}^{(n)} \rangle}{\langle \Phi_{1_0}^{(n)'}, \Phi_{1_0}^{(n)'} \rangle} > 0. \quad (43)$$

Наконец, поскольку

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{1_0}^{(n)}, \Phi_{1_0}^{(n)} \rangle &= 4 \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}, \\ \langle \Phi_{1_0}^{(n)'}, \Phi_{1_0}^{(n)'} \rangle &= 2 \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{2n+3}, \end{aligned}$$

окончательно находим следующее выражение для поправки к частоте:

$$\delta \omega_n^2 = \frac{2k^2}{(2n+1)(2n+5)}. \quad (44)$$

В частности, при  $n=0$  поправка  $\delta \omega^2 = 2k^2/5$ .

Вычислим теперь нелинейную поправку к частоте  $\omega^2 = \gamma$ . Считая нелинейность достаточно малой, нелинейную поправку можно вычислять при  $k_{\perp} = 0$ . Но такие колебания, как легко убедиться, описываются уравнением

$$\ddot{C} = -1 + C^{-\gamma}, \quad (45)$$

которое остается справедливым при произвольных амплитудах (ср. задачу 3 к главе I). Полагая  $C = 1 + h$ ,  $h \ll 1$ , найдем из (45)

$$\dot{h} + \omega_0^2 h = -\alpha h^2 - \beta h^3 \quad (46)$$

где

$$\alpha = -\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}, \quad \beta = \frac{1}{6} \gamma(\gamma+1)(\gamma+2). \quad (47)$$

Уравнение (46) имеет стандартный вид [69] уравнения для колебаний ангармонического осциллятора. Поэтому можно сразу написать выражение для нелинейной поправки к частоте

$$\delta \omega = \left( \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) |h|^2, \quad (48)$$

или

$$\delta\omega = -\lambda^2\omega_0|h|^2, \quad \lambda^2 \equiv \frac{1}{48}(2\gamma-1)(\gamma+1). \quad (49)$$

Объединяя (44) и (49), получаем искомое нелинейное дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 + \frac{3k_{\perp}^2}{5\gamma} - 2\lambda^2|h|^2 \right). \quad (50)$$

Полагая теперь в (50)  $k_{\perp}^2 = k_y^2 - \partial^2/\partial x^2$ , приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{2}{5\gamma} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\omega_0^2 \left( 1 + \frac{2}{5\gamma} k_y^2 \right) - \omega^2}{\omega_0^2} h - 2\lambda^2|h|^2 h. \quad (51)$$

Умножая (51) на  $\partial h^*/\partial x$  и складывая с комплексно-сопряженным уравнением, получим

$$\frac{2}{5\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^2 = \frac{\omega_0^2 \left( 1 + \frac{2}{5\gamma} k_y^2 \right) - \omega^2}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} |h|^2 - \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} |h|^4.$$

Интегрируя по  $x$ , найдем

$$\frac{2}{5\gamma} \left( \frac{\partial |h|}{\partial x} \right)^2 = \left\{ 1 + \frac{2}{5\gamma} k_y^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\} |h|^2 - \lambda^2 |h|^4 + \text{const}. \quad (52)$$

Солитонное решение соответствует случаю  $\text{const} = 0$ . Обозначим

$$q^2 = \frac{5\gamma\lambda^2}{2}, \quad A^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{2}{5\gamma} k_y^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\}, \quad (53)$$

тогда

$$\frac{1}{q} \frac{\partial |h|}{\partial x} = \pm \sqrt{A^2 - |h|^2}. \quad (54)$$

Решение этого уравнения

$$|h| = \frac{A}{\text{ch}(Agx)}; \quad (55)$$

ширина солитона

$$\Delta \approx \frac{1}{Aq} = \left\{ \frac{2}{5\gamma} \frac{1}{1 + \frac{2}{5\gamma} k_y^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right\}^{1/2}, \quad (56)$$

а амплитуда  $|h|_{\text{max}} = A$ . Минимальный размер солитона (на пределе применимости теории) имеет порядок толщины слоя.

Отметим, что солитонные решения, аналогичные полученному выше, легко найти также в модели однородного газового цилиндра.

Интересно, однако, что для *бесстолкновительных* слоя и цилиндра подобных солитонов не существует (нелинейная поправка к частоте  $\omega_0$  и поправка на  $k_{\perp}^2$  имеют *одинаковый* знак).

Решение (55) описывает покоящийся солитон. Однако легко построить решение и для бегущего солитона.

Пусть  $h = \frac{1}{2}(ae^{-i\omega_0 t} + a^*e^{+i\omega_0 t})$ ,  $b \equiv ae^{-i\omega_0 t}$ , тогда для  $b$  будем иметь

уравнение

$$i \frac{\partial b}{\partial t} - \omega_0 b + \alpha \Delta b + \beta b |b|^2 = 0. \quad (57)$$

Решение ищем в виде  $b = C(x, t) e^{-i\omega t + ikr}$ , и для  $C$  получаем уравнение

$$i \left( \frac{\partial C}{\partial t} + 2\alpha k_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + (\omega - \omega_0 + \alpha k^2) C + \alpha \Delta C + \beta C |C|^2 = 0. \quad (58)$$

Можно считать  $C$  вещественной функцией, при этом  $C = C(\xi) \equiv C(x - v_g t)$ , где  $v_g = 2\alpha k_x$  — групповая скорость. Тогда из (58) для  $C(\xi)$  получаем

$$\alpha \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + (\omega - \omega_0 - \alpha k^2) C + \beta C^3 = 0, \quad (59)$$

откуда

$$C = C_{\max} / \operatorname{ch} k_0 \xi, \quad (60)$$

где

$$k_0 = \sqrt{\beta/2\alpha} C_{\max}, \quad \omega = \omega_0 + \alpha k^2 - \frac{\beta}{2} C_{\max}^2 = \omega_0 + \alpha (k^2 - k_0^2).$$

Это решение совпадает с (55), если в (60) положить  $k_x = 0$ . Возмущение  $h$  имеет вид

$$h = \cos(\omega t - kr) \frac{C_{\max}}{\operatorname{ch} k_0 (x - v_{gr} t)}. \quad (61)$$

## § 2. ЭФФЕКТ МАЗИТОВА — О'НЕЙЛА В ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

### 2.1. ВВЕДЕНИЕ

В реальных астрофизических объектах функции распределения частиц (звезд, газа) по скорости нередко имеют пучковый характер. Сюда относятся все галактики с гетерогенной структурой, где плоские подсистемы вращаются относительно эллиптических и сферических подсистем; области активных центров, характеризующиеся выбросами больших масс газа, и т. п.

В § 1 гл. VI была показана возможность раскочки пучковой неустойчивости в гравитирующих системах, которая приводит к росту амплитуды волн плотности взаимодействующих подсистем. Этот эффект был изучен на примере гравитирующего цилиндра. В работах [93, 108a] роль пучковых эффектов исследовалась в более сложных системах двух взаимодействующих дисков, шара и эллипсоида Фримана [201—204]. Весьма важным здесь является вопрос, происходит ли нелинейная стабилизация такого роста амплитуды, или процесс неустойчивости прогрессирует, приводя к коллапсу различных сгущений плотности. Заметим, что для проблемы спиральной структуры галактик особый интерес представляет взаимодействие с частицами (звездами) *монокроматической* волны плотности.

В настоящем параграфе мы обращаем внимание на то, что в гравитирующих системах может играть важную роль нелинейный механизм стабилизации монокроматической волны плотности, аналогичный исследованному в бесстолкновительной плазме Мазитовым [78a], О'Нейлом [295a]. Причины аналогии между механизмами коллективных процессов в гравитирующей и плазменной средах исследовались в работах [87, 88, 100]. В частности, отмечалось, что кинетическое уравнение малых колебаний простой модели гравитирующей системы — вращающегося ци-

цилиндра — переопределением характерных параметров оказывается: совпадающим с кинетическим уравнением для бесстолкновительной замагниченной плазмы. С этим связано и обстоятельство, что в гравитирующем цилиндре может развиваться пучковая неустойчивость, описываемая теми же соотношениями, что и пучковая неустойчивость в плазме с магнитным полем (§ 1 главы VI).

Заменив удвоенную частоту вращения цилиндра циклотронной частотой,  $2\Omega \rightarrow \omega_B$ , а квадрат частоты Джинса — отрицательным квадратом ленгмюровской частоты,  $\omega_0^2 \rightarrow -\omega_p^2$ , рассмотрим верхнюю гибридную ветвь колебаний,  $\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_B^2$ . В случае гравитирующего цилиндра эта ветвь была названа [88] вращательной. При этом она характеризуется частотой  $\omega^2 = \omega_0^2$ , что в силу условия равновесия  $\omega_0^2 = 2\Omega^2$  можно представить также в виде  $\omega^2 = 2\Omega^2$ .

При наличии пучка, движущегося вдоль образующей цилиндра, вращательная ветвь раскачивается с линейным инкрементом

$$\gamma_L \sim \alpha \left( \frac{v}{v_T} \right)^2 \left( \frac{k_z}{k} \right)^2 \omega_0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — отношение плотности пучка к плотности среды,  $v$ ,  $v_T$  — направленная и тепловая скорости пучка;  $k_z$ ,  $k$  — продольное и полное волновые числа (см. [88]). Выражение (1) справедливо, если черенковский резонанс,  $\omega \approx k_z v$ , доминирует над циклотронным,  $\omega \pm 2\Omega \approx k_z v$ , т. е., согласно [88], при условии  $2\Omega/k_z \gg v_T$ . Аналогичная (1) оценка для инкремента имеет место и в случае пучковой неустойчивости в плазме. Она остается в силе и при отсутствии магнитного поля, т. е. в пределе  $\omega_B \rightarrow 0$ , когда верхнегибридная ветвь переходит в ветвь электронных плазменных колебаний. В случае гравитирующего цилиндра такой предельный переход запрещен отмеченными выше условиями равновесия.

Из теории плазмы известно (см. [39]), что использовать выражение вида (1) для линейного инкремента в задаче о возбуждении пучком плазменных колебаний можно лишь при малых амплитудах волны, а именно при

$$\tau \gamma_L \gg 1, \quad (2)$$

где  $\tau^2 \equiv m/ek_z^2 \psi$  ( $m$ ,  $e$  — масса и заряд электрона). Это условие означает, что обратное действие поля волны на резонансные частицы пренебрежимо мало. В противном случае, т. е. при  $\tau \gamma_L \ll 1$ , поле волны приводит к запираанию резонансных частиц, вследствие чего выражение для инкремента вида (1) заменяется на

$$\gamma(t) \sim \gamma_L F(t/\tau), \quad (3)$$

где  $F(t/\tau)$  — функция, явный вид которой приведен в [295a]. При этом

$$\int_0^{\infty} \gamma(t) dt \sim \gamma_L \tau. \quad (4)$$

Ранее было показано, что раскачка плазменных волн пучком прекращается при достижении амплитудой поля значений, соответствующих  $\tau$ , такому, что

$$\tau \gamma_L \sim 1. \quad (5)$$

Эти результаты относятся к плазме без магнитного поля,  $\omega_B \rightarrow 0$ , и к возмущениям, распространяющимся вдоль пучка  $k \approx k_z$ .

Однако можно показать, что как для плазмы с магнитным полем, так и для гравитирующей среды при  $\omega_B \sim \omega_p$  и  $k_z \ll k$  (именно этот случай интересен для рассматриваемой нами задачи о гравитирующем цилиндре) порядковые соотношения (1) — (5) остаются в силе. Это позволяет

продолжить аналогию между плазменной и гравитирующей средами в область нелинейных явлений.

В настоящем параграфе исследуется нелинейная стадия пучковой неустойчивости в гравитирующем цилиндре. В п. 2 приведены необходимые результаты линейной теории. В п. 3 изучается движение частиц в гравитационном поле, соответствующем собственной (монокроматической) моде колебаний цилиндра. В системе отсчета вращающегося цилиндра действие сил инерции на гравитирующую частицу аналогично действию продольного магнитного поля на пробный заряд. При этом частицы цилиндра оказываются «замагниченными», вследствие чего (приближенно) сохраняют свое расстояние от оси цилиндра. По этой причине, как показано в п. 3, уравнение продольного движения частиц сводится к уравнению типа математического маятника, которое решается аналогично [78а, 295а] в эллиптических функциях.

В п. 4 рассмотрена нелинейная эволюция функции распределения частиц, а в п. 5 найдены усредненные по цилиндрическому слою плотности кинетической энергии частиц и энергии монокроматической волны. Методом баланса энергии (после усреднения по радиусу) определяется временная зависимость нелинейного инкремента. В п. 6 указана область применимости построенной теории. В п. 7 оценены установившиеся амплитуды колебаний для разных значений параметров конфигурации.

## 2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарную бесстолкновительную систему гравитирующих частиц в виде вращающегося однородного по плотности цилиндра бесконечной длины, радиуса  $R$ . Во вращающейся вместе с цилиндром системе отсчета (с угловой частотой  $\Omega = \sqrt{2\pi G\rho}$ , где  $G$  — гравитационная константа,  $\rho$  — плотность) частицы движутся только вдоль оси, которую выберем за ось цилиндрической системы координат ( $r$  и  $\varphi$  будут обозначать соответственно радиальную и угловую координаты).

Таким образом, стационарные радиальная и азимутальная скорости для всех частиц равны нулю,

$$v_r = v_\varphi = 0.$$

Распределение по продольным скоростям  $f^F(v_z)$ , которое никак не ограничено условиями равновесия, возьмем, следуя [88], в пучковом виде

$$f^F(v_z) = f^M(v_z) + f(v_z)$$

с максвелловским распределением основной компоненты  $f^M(v_z)$

$$f^M(v_z) = \frac{1}{V\pi^{1/2}V_T} e^{-v_z^2/V_T^2} \quad (6)$$

и функцией распределения пучка  $f(v_z)$

$$f(v_z) = \frac{\alpha}{V\pi^{1/2}v_T} \exp\left[-\left(\frac{v_z - v}{v_T}\right)^2\right], \quad (7)$$

причем принимаем условия

$$\alpha \ll 1, \quad (8)$$

$$v \gg v_T, \quad (9)$$

$$||v| - v_T| \gg V_T. \quad (10)$$

Будем предполагать, кроме того, достаточно большим тепловой разброс  $V_T$  основной компоненты:

$$V_T \gg V \equiv \Omega R. \quad (11)$$

В этих условиях, согласно [88], в системе могут распространяться осесимметричные колебания структуры

$$\Phi(t, z, r) = \Phi_0 J_0(k_{\perp} r) e^{-i\omega_0 t + ik_z z} e^{\gamma_F(t)}, \quad r \leq R, \quad (12)$$

внутри цилиндра и

$$\Phi(t, z, r) = \tilde{\Phi}_0 K_0(k_z r) e^{-i\omega_0 t + ik_z z} e^{\gamma_F(t)}, \quad r \geq R, \quad (13)$$

снаружи. Здесь  $\Phi(t, z, r)$  обозначает возмущение гравитационного потенциала,  $t$  — временная переменная,  $\Phi_0, \tilde{\Phi}_0$  — константы, удовлетворяющие условиям сшивки [88] на границе цилиндра, в частности условию непрерывности потенциала

$$\Phi_0 J_0(k_{\perp} R) = \tilde{\Phi}_0 K_0(k_z R), \quad (14)$$

где  $J_0, K_0$  — общепринятые обозначения (см. [42, 157]) цилиндрических функций,  $\omega_0$  — джинсовская частота, связанная с угловой частотой  $\Omega$  условием равновесия

$$\omega_0^2 = 2\Omega^2; \quad (15)$$

продольный волновой параметр  $k_z$  должен удовлетворять условиям

$$k_z R \ll 1 \quad (16)$$

и

$$k_z V_T \ll \omega_0, \quad (17)$$

а поперечный  $k_{\perp}$  — условиям

$$J_0(k_{\perp} R) \cong 0, \quad k_{\perp} R \gg 1. \quad (18)$$

Величина  $\gamma_F$  в (12) — (13) равна сумме

$$\gamma_F = \gamma_M + \gamma$$

декремента  $\gamma_M$  затухания волны, взаимодействующей с основной компонентой среды (см. [88]), и инкремента  $\gamma$  неустойчивости, вызванной раскачкой волн пучком. В свою очередь  $\gamma$  состоит из суммы двух слагаемых:

$$\gamma = \gamma_b + \gamma_c. \quad (19)$$

Здесь  $\gamma_b$  является следствием черенковского резонанса

$$\gamma_b = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} \left[ f' \left( \frac{\omega_0}{k_z v_T} \right) \text{sign } k_z \right], \quad (20)$$

где  $k^2 = k_z^2 + k_{\perp}^2$ , а штрих означает производную по аргументу;  $\gamma_c$  является следствием циклотронного резонанса,

$$\gamma_c = -\frac{\pi}{4} \frac{\omega_0^3}{|k_z| \Omega} \left[ f \left( \frac{\omega_0 - 2\Omega}{k_z v_T} \right) - f \left( \frac{\omega_0 + 2\Omega}{k_z v_T} \right) \right]. \quad (21)$$

Кроме пучковой неустойчивости (19) в описанных условиях имеется лишь джинсовская неустойчивость с экспоненциально малым (если  $V_T^2 \gg V^2$ ) инкрементом  $\gamma_J$ ,

$$\gamma_J \simeq \frac{V_T}{V} e^{-v_T^2/V^2}. \quad (22)$$

Как будет показано ниже, параметры конфигурации можно выбрать такими, что пучковый инкремент  $\gamma$  будет наибольшим и, кроме того, обязанным в основном черенковскому резонансу:

$$\gamma_F \simeq \gamma \simeq \gamma_b, \quad \gamma_c \ll \gamma_b; \quad (23)$$



$$\gamma_M \ll \gamma; \quad (24)$$

$$\gamma_J \ll \gamma. \quad (25)$$

Этим случаем мы и ограничимся.

### 2.3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ВОЛНЫ

Пусть в некоторый начальный момент времени  $t_0=0$  в описанной выше системе «включается» гравитационный потенциал вида (см. (12)–(13))

$$\Phi(t, z, r) = -\Phi_0(t) J_0(k_{\perp} r) \cos(-\omega_0 t + k_z z), \quad r < R; \quad (26)$$

$$\Phi(t, z, r) = -\tilde{\Phi}_0(t) K_0(k_z r) \cos(-\omega_0 t + k_z z), \quad r > R. \quad (27)$$

Аналогично [86], для определения движения частиц ограничимся нулевым порядком теории возмущений по малому параметру  $\delta\Phi_0/\Phi_0$ , т. е. положим

$$\Phi_0(t) = \text{const} \equiv \Phi_0, \quad (28)$$

$$\tilde{\Phi}_0(t) = \text{const} \equiv \tilde{\Phi}_0. \quad (29)$$

Будем считать, что потенциал (26)–(27) удовлетворяет условиям (14), (16)–(18).

В области волновых векторов, где  $\gamma \sim \gamma_{\text{max}}$ , условие черенковского резонанса можно представить в виде

$$\omega - k_z v \sim k_z v_T. \quad (30)$$

Изучим движение частиц, возникающее из-за «включения» потенциала, в системе отсчета, движущейся вместе с волной по  $z$  (и по-прежнему вращающейся с частотой  $\Omega$ ). В такой системе потенциал (26)–(27) имеет вид

$$\Phi(z, r) = -\Phi_0 J_0(k_{\perp} r) \cos(k_z z), \quad r < R, \quad (31)$$

и соответствующий вид при  $r > R$ .

Движение частиц подчиняется уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v} \ 2 \ \Omega] - \nabla \Phi, \quad (32)$$

где  $\Omega = \Omega \hat{z}$ ,  $\hat{z}$  — орт вдоль оси цилиндра. Такое движение совершала бы электрическая частица с единичными зарядом и массой в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{H} = 2\Omega$  и электрическом потенциале  $\Phi$  (скорость света выбором системы единиц обращена в единицу).

Все частицы цилиндра можно разделить на три группы по значению их стационарной скорости  $v_z$ :

1) «медленно» движущиеся (в системе волны) частицы, которые за «циклотронный» период  $T \equiv \frac{2\pi}{2\Omega} = \frac{\pi}{\Omega}$  смещаются по  $z$  на расстояние, много меньшее продольной длины волны  $\lambda = 2\pi/k_z$ ,

$$|v_z| \ll \frac{2\Omega}{|k_z|}; \quad (33)$$

2) частицы со смещением порядка длины волны,

$$|v_z| \sim \frac{2\Omega}{|k_z|}; \quad (34)$$

3) «быстрые» частицы,

$$|v_z| \gg \frac{2\Omega}{|k_z|}. \quad (35)$$

Поперечное движение «медленных» частиц аналогично движению заряженной частицы под действием продольного постоянного «магнитного» поля и медленно меняющегося радиального «электрического» поля, т. е. представляет собой дрейф по азимуту; радиальный размер орбиты при этом порядка «циклотронного» радиуса

$$r_{\text{rot}} \sim \frac{k_{\perp} \Phi_0}{4\Omega^2}. \quad (36)$$

При сравнительно слабом потенциале  $\Phi_0$  частица мало смещается по радиусу; соответствующее условие  $r_{\text{rot}} \ll R$  может быть с учетом (18) записано в виде

$$\frac{\Phi_0}{V^2} \ll 1 \quad (37)$$

и означает малость возмущения частиц, что, конечно, с необходимостью предполагается и линейной теорией [88]. Для развиваемой нелинейной теории также предположим выполненным неравенство (37); ниже будет видно, что условие применимости нелинейной теории дает ограничение на величину потенциала снизу, но это ограничение может не противоречить (37).

Учитывая, что начальная поперечная скорость равна нулю, находим, что траектория медленной частицы имеет вид эпициклоиды, а продольное движение происходит так, как если бы частица оставалась все время на одном и том же расстоянии  $r$  от оси ( $r$  — координата частицы до включения дополнительного гравитационного поля).

Поперечное движение быстрых частиц представляет собой движение в быстро осциллирующем (с частотой, много большей частоты вращения,  $|k_z v_z| \gg \Omega$ ) гравитационном поле. Осцилляции по  $r$  с амплитудой

$$\Delta r \sim \frac{k_{\perp} \Phi_0}{(k_z v_z)^2} \ll \frac{k_{\perp} \Phi_0}{\Omega^2} \sim r_{\text{rot}} \quad (38)$$

тем более не приводят к значительному изменению радиального положения частицы. Таким образом, изменение радиального положения быстрых частиц еще меньше, чем медленных, и при изучении их продольного движения радиальную координату их тем более можно считать постоянной.

Нельзя пренебрегать изменением радиальной координаты лишь для вращательно-резонансных частиц (34). Но доля  $\Delta f$  таких частиц может быть оценена как

$$\Delta f \sim f_0 \left( \frac{2\Omega}{k_z} \right) \Delta v_z \sim f_0 \left( \frac{2\Omega}{k_z} \right) \frac{\Omega}{k_z}$$

и является экспоненциально малой, если

$$2/k_z r \gg v_T/V. \quad (39)$$

Последнее условие нетрудно выполнить, поэтому исключим эти частицы из рассмотрения. Таким образом, при изучении продольного движения будем считать радиальную координату каждой частицы фиксированной в начальном значении.

#### 2.4. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим теперь эволюцию функции распределения по продольной скорости.

Продольное поле потенциала (31) есть

$$E_z(z, r) = -\frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, r) = -\varepsilon_z(r) \cos(k_z z), \quad (40)$$

где амплитуда  $\varepsilon_z(r)$  дается выражением

$$\varepsilon_z(r) = k_z \Phi_0 J_0(k_{\perp} r). \quad (41)$$

Видно, что амплитуда  $\varepsilon_z(r)$  зависит только от радиальной переменной (сохраняющейся, как установлено выше, при продольном движении частицы). Амплитуда меняется от максимального значения на оси цилиндра до нуля на краю (см. (18)).

Поле (40) приводит к уравнению продольного движения (ср. с [295a])

$$\dot{v}_z = \dot{z} = -\varepsilon_z(r) \sin k_z z. \quad (42)$$

Сохранение энергии продольного движения записывается в виде

$$\frac{v_z^2}{2} - \frac{\varepsilon_z(r)}{k_z} \cos(k_z z) = \text{const} \equiv \dot{W}. \quad (43)$$

Аналогично [39], методом интегрирования по траекториям приходим к следующим функциям распределения.

Функция распределения частиц, захваченных волной при продольном движении, имеет вид (в системе волны).

$$f_r(z, v_z, t) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial v_z}(0) \sigma \sqrt{2 \left[ W(r, z, v_z) + \frac{\varepsilon_z(r)}{k_z} \right]} \times \\ \times \text{cn} \left\{ F \left[ \zeta(z), \frac{1}{\kappa(z, v_z)} \right] - \frac{t}{\tau_r}, \frac{1}{\kappa} \right\}, \quad \kappa > 1. \quad (44)$$

Для пролетных частиц функция распределения имеет вид

$$f_r(z, v_z, t) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0) \sigma \sqrt{2 \left[ W(r, z, v_z) + \frac{\varepsilon_z(r)}{k_z} \right]} \times \\ \times \text{dn} \left\{ F \left[ \frac{kz}{2}, \kappa(z, v_z) \right] - \frac{t}{\kappa \tau_r}, \kappa \right\}, \quad \kappa < 1. \quad (45)$$

Обозначения здесь следующие:

$$\sigma = \text{sign } v_z, \quad W(r, z, v_z) = \frac{v_z^2}{2} - \frac{\varepsilon_z(r)}{k_z} \cos(k_z z); \quad (46)$$

$F(\varphi, k) \equiv \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$  — эллиптический интеграл первого рода,  $\text{cn}(u, k)$  — эллиптический косинус,  $\text{dn}(u, k)$  — дельта амплитуды — функция, определенная соотношением  $\text{dn}[F(\varphi, k), k] = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ ;

$$\kappa^2(z, v_z) = \frac{2\varepsilon_z(r)}{k_z W(z, v_z) + \varepsilon_z(r)}; \quad (47)$$

$$\zeta(z, v_z) = \sin \left[ \arcsin \left( \frac{kz}{2} \right) \right]; \quad (48)$$

$$\tau_r^2 = \frac{1}{k_z \varepsilon_z(r)} = \frac{1}{k_z^2 \Phi_0 J_0(k_{\perp} r)}, \quad (49)$$

т. е.

$$\tau_r^2 = \tau_0^2 / J_0(k_{\perp} r), \quad (50)$$

где

$$\tau_0^2 = 1/k_z^2 \Phi_0. \quad (51)$$

Аналогично [39] приходим к выводу, что в области фазового пространства  $(z, v_z)$ , соответствующей захваченным частицам, формируется плато, и можно написать усредненную по времени функцию распределения пролетных частиц. Отличие от эволюции в задачах [39, 78a] заключается в том, что эволюция нашей конфигурации идет не одинаковым темпом на разных расстояниях от оси. Период колебаний частиц, захваченных волной, согласно (50), возрастает от  $\tau_0$  на оси до (формально) бесконечной величины на краю цилиндра.

## 2.5. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Для нахождения инкремента изменения поля в применяемом здесь методе используем уравнение баланса энергии

$$\frac{dQ}{dt} = -2\gamma W, \quad (52)$$

где  $Q$  — средняя (по объему цилиндра) плотность кинетической энергии частиц,  $W$  — средняя плотность энергии волны (т. е. суммы энергии поля и энергии нерезонансных частиц (см., например, [10]).

Уравнение движения (42) совпадает с соответствующим уравнением работы О'Нейла [295a], поэтому для скорости изменения плотности  $Q_r$  кинетической энергии частиц в кольцевом цилиндре  $(r, r+dr)$ , средней по объему кольцевого цилиндра, получим (ср. с (30) работы [295a])

$$\frac{dQ_r}{dt} = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k_z^2} \int_0^1 e_z^2(r) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi} \int_0^1 dx \times \left\{ \frac{2n\pi^2 \sin\left(\frac{\pi n t}{\kappa K \tau_r}\right)}{\kappa^5 K^2 (1+q^{2n})(1+q^{-2n})} + \frac{(2n+1)\pi^2 \kappa \sin\left[\frac{(2n+1)\pi t}{2K\tau_r}\right]}{K^2 (1+q^{2n+1})(1+q^{-2n-1})} \right\}, \quad (53)$$

где

$$q \equiv \exp(\pi K'/K), \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right), \quad K' = F\left(\frac{\pi}{2}, (1-\kappa^2)^{1/2}\right).$$

Это выражение еще надо усреднить по радиусам кольцевых цилиндров.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_0^R \frac{dQ_r}{dt} \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}. \quad (54)$$

Заметим, что зависимость от радиуса в (53) входит только через  $e_z(r)$  и  $\tau_r$ .

Для вычисления входящей в (52) величины  $W$  надо взять интеграл (наружное поле весьма мало, согласно (14), (18), уже на краю цилиндра и быстро спадает с увеличением  $r$ , так что его вкладом в энергию пренебрегаем)

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{e_z^2 + e_r^2}{8\pi G} 2\pi r dr. \quad (55)$$

Здесь аналогично (41)

$$e_r(r) = k_{\perp} \Phi_0 J_1(k_{\perp} r), \quad (56)$$

так что радиальная напряженность поля  $E_r(z, r)$  есть

$$-\frac{\partial \Phi(z, r)}{\partial r} \equiv E_r(z, r) = -e_r(r) \cos(k_z z). \quad (57)$$

С учетом (56), (41) вычисление интеграла (55) сводится к взятию интегралов

$$I_1 = \frac{2}{R^2} \int_0^R J_0^2(k_{\perp} r) r dr, \quad I_2 = \frac{2}{R^2} \int_0^R J_1^2(k_{\perp} r) r dr. \quad (58)$$

Пользуясь известной формулой [157]

$$\int x J_{\mu}^2(ax) dx = \frac{x^2}{2} [J_{\mu}^2(ax) - J_{\mu-1}(ax) J_{\mu+1}(ax)]$$

и учитывая (18), находим, что

$$I_1 = I_2 = J_1^2(k_{\perp} R). \quad (59)$$

Окончательно средняя плотность энергии волны равна

$$W = \frac{1}{8\pi G} k^2 \Phi_0^2 J_1^2(k_{\perp} R), \quad (60)$$

где

$$k^2 = k_z^2 + k_{\perp}^2.$$

Мы не будем явно выписывать громоздкого общего выражения для инкремента  $\gamma(t)$ . Покажем только, что в предельном случае  $t \ll \tau_0$  получается в точности линейный инкремент. Действительно, в этом случае, следуя [295a], имеем из (53)

$$\begin{aligned} -\frac{dQ_r}{dt} &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k_z^2} f' \frac{e_z^2(r)}{4\pi G} \left\{ \frac{64}{\pi} \int_0^1 d\kappa \frac{2\pi^2 \sin \left[ \frac{\pi t}{\kappa K \tau_r} \right]}{\kappa^5 K^2 (1+q^2)(1-q^2)} + O\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k_z^2} f' \frac{k_z^2 \Phi_0 J_0^2(k_{\perp} r)}{4\pi G} \left\{ 1 + O\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Отсюда, усредняя согласно (54), находим

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k_z^2} f' \frac{\Phi_0^2 k_z^2}{4\pi G} \left[ \frac{2}{R^2} \int_0^R J_0^2(k_{\perp} r) r dr \right] = \frac{\pi}{2} \omega_0^3 f' \frac{\Phi_0^2}{4\pi G} J_1^2(k_{\perp} R). \quad (62)$$

При получении последнего равенства использованы соотношения (58) — (59).

Наконец, по формуле (52), используя (62) и (60), находим

$$\gamma_L = -\frac{dQ}{dt} / 2W = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^3}{k^2} f', \quad (63)$$

что действительно совпадает с линейным инкрементом (см. (23), (20)).

Оценим теперь коэффициент усиления волны  $\mathcal{K}$ .

Согласно (52),

$$\mathcal{K} \equiv \int_0^{\infty} \gamma(t) dt = \frac{1}{2W} \int_0^{\infty} -\frac{dQ}{dt} dt \equiv -\frac{1}{2W} \Delta Q. \quad (64)$$

Следуя работе [295a], находим

$$\begin{aligned} -\Delta Q &= -\int_0^R \Delta Q_r \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = O \left[ \int_0^R \gamma_L \tau_r k^2 \frac{\Phi_0^2}{4\pi G} J_0^2(k_{\perp} r) \frac{2r dr}{R^2} \right] = \\ &= O \left[ \gamma_L k^2 \frac{\Phi_0^2}{4\pi G} \tau_0 \frac{2}{R^2} \int_0^R J_0^2(k_{\perp} r) r dr \right] = O \left( \gamma_L k^2 \frac{\Phi_0^2}{4\pi G} \tau_0 \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Поскольку в соответствии с (60)

$$2W \sim \frac{k^2 \Phi_0^2}{4\pi G}, \quad (66)$$

то из (64) — (65) получаем

$$\int_0^{\infty} \gamma(t) dt = O(\gamma_L \tau_0). \quad (67)$$

Из последнего равенства следует условие законности принятого при изучении движения частиц приближения постоянства со временем амплитуды волны:

$$\gamma_L \tau_0 \ll 1. \quad (68)$$

## 2.6. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ.

Построенная выше теория имеет область применимости при одновременном выполнении всех принятых допущений, т. е. (68), условия малости «циклотронного» радиуса (37) и условия доминирования черенковского резонанса (23) — (25). Сюда еще нужно отнести условие [88] малости инкремента гидродинамической пучковой неустойчивости

$$v_T/v > \alpha^{1/2}. \quad (69)$$

Обозначим  $v_T/V \equiv \tilde{v}_T$ ,  $v/V \equiv \tilde{v}$ ,  $V_T/V \equiv \tilde{V}_T$  и т. д. Возьмем  $k_{\perp} R \sim 1$ ,

$$\tilde{v}_T \sim 1, \quad (70)$$

$$1/\tilde{v} \sim \tilde{v}_T/\tilde{v} \sim \alpha^{1/2}; \quad (71)$$

тогда с учетом (8) — (10), (30) приходим к неравенствам

$$\Phi_0/V^2 \ll 1 \quad (r_{\text{rot}}/R \ll 1); \quad (72)$$

$$\tilde{v}\Phi_0^{1/2}/V \gg 1 \quad (\gamma_L \tau_0 \gg 1); \quad (73)$$

$$1 \gg \tilde{v}e^{-\tilde{v}^2} \quad (\gamma_b \gg \gamma_c); \quad (74)$$

$$1/\tilde{v}^2 \gg \tilde{V}_T e^{-\tilde{V}_T^2} \quad (\gamma \gg \gamma_J); \quad (75)$$

$$1/\tilde{v}^2 \gg \frac{\tilde{v}}{V_T} e^{-(\tilde{v}/\tilde{V}_T)^2} \quad (\gamma \gg \gamma_M). \quad (76)$$

Если теперь, оставляя фиксированной величину  $V \sim v_T$ , увеличивать  $\tilde{V}_T$  и увеличивать  $\tilde{v}$  по закону  $\tilde{v} \sim V_T^2$ , одновременно уменьшая  $\alpha$  по закону (71) и  $k_{\perp}$  по закону (см. (30))

$$k_{\perp} R \sim \sqrt{2}/\tilde{v},$$

то правые части (74) — (76) убывают экспоненциально, в то время как левые не сильнее, чем степенным образом. Следовательно, начиная с некоторых достаточно больших  $V_T$  и  $v$ , все неравенства (74) — (76) будут выполнены. Неравенство (73) также выполнится при достаточно большой скорости пучка  $v$ , какова бы ни была амплитуда  $\Phi_0$ , удовлетворяющая (72).

## 2.7. ОЦЕНКИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ АМПЛИТУДЫ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Из приведенных выше соотношений следует, что пучковая неустойчивость гравитирующего цилиндра насыщается при

$$\frac{\psi}{\psi_0} \sim \frac{\alpha^2}{(kR)^4} \left( \frac{V_0 v}{v_T^2} \right)^2, \quad (77)$$

где  $\psi_0$  — равновесный гравитационный потенциал. Видно, что отношение  $\psi/\psi_0$  как функция  $kR$  максимально при  $kR \sim 1$ ; при этом

$$\psi_{\max}/\psi_0 \sim \alpha^2 (V_0 v/v_T^2)^2. \quad (78)$$

Это отношение растёт с уменьшением теплового разброса пучка; на пределе применимости представлений о кинетической неустойчивости, т. е. при  $(v_T/v) \sim \alpha^{1/2}$  (см. [86]),

$$\psi_{\max}/\psi_0 \sim \alpha^{2/3} (V_0/v)^2. \quad (79)$$

Интересно отметить, что при взаимодействии вращающейся гравитирующей среды с пучком сравнимой плотности,  $\alpha \sim 1$ , и сравнимой скорости,  $v \sim V_0$ , возмущенный гравитационный потенциал  $\psi$  оказывается по порядку величины таким же, как и равновесный потенциал  $\psi_0$ .

## § 3. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГАЗОВОГО СЛОЯ

Исследуем вопрос об устойчивости нелинейных монохроматических волн в принятой выше (см. п. 1.2 § 1) модели однородного газового слоя. Запишем дисперсионное уравнение (50) § 2 в виде

$$\omega = \omega_0 + \alpha k_{\perp}^2 - \beta |h|^2, \quad (1)$$

где  $\alpha = \omega_0/5\gamma$ ,  $\beta = \omega_0 \lambda^2$ . Пусть  $h = 1/2 (ae^{-i\omega_0 t} + a^* e^{i\omega_0 t})$ , где  $a = a(\mathbf{r}_{\perp}, t)$  — огибающая. Для нее имеем уравнение

$$i \frac{\partial a}{\partial t} + \alpha \Delta a + \beta |a|^2 a = 0. \quad (2)$$

Это уравнение допускает решение в виде плоской монохроматической волны

$$a = b_0 e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}}, \quad (3)$$

где

$$\omega_k = \alpha k_{\perp}^2 - \beta |b_0|^2. \quad (4)$$

Исследуем устойчивость этого решения. Для этого напомним  $a = b e^{i\varphi}$ ,  $b = b_0 + b_1$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ ,  $\varphi_0 \equiv -\omega_k t + \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}$ . Тогда

$$a_1 = (b_1 + b_0 i \varphi_1) e^{i\varphi_0}, \quad a_1^* = (b_1 - b_0 i \varphi_1) e^{-i\varphi_0}. \quad (5)$$

Линеаризуем уравнение (2):

$$i \frac{\partial a_1}{\partial t} + \alpha \Delta a_1 + 2\beta |a_0|^2 a_1 + \beta a_0^2 a_1^* = 0. \quad (6)$$

Подставив в (6) выражения (5), получим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} b_1 - b_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \omega_k (b_1 + i \varphi_1 b_0) + \alpha (\Delta b_1 + i b_0 \Delta \varphi_1) + 2\alpha (\nabla b_1 - \\ - i b_0 \nabla \varphi_1) i \nabla \varphi_0 + \alpha (b_1 + i b_0 \varphi_1) i \Delta \varphi_0 - \alpha (b_1 + i b_0 \varphi_1) (\nabla \varphi_0)^2 + \\ + 2\beta b_0^2 (b_1 + i b_0 \varphi_1) + \beta (b_1 - i b_0 \varphi_1) b_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отделим действительную и мнимую части:

$$\frac{\partial b_1}{\partial t} + \omega_k b_0 \varphi_1 + \alpha b_0 \Delta \varphi_1 + 2\alpha k \nabla b_1 - \alpha k^2 b_0 \varphi_1 + \beta b_0^3 \varphi_1 = 0, \quad (8)$$

$$-b_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \omega_k b_1 + \alpha \Delta b_1 - 2\alpha b_0 k \nabla \varphi_1 - \alpha k^2 b_1 + 3\beta b_0 b_1^2 = 0. \quad (9)$$

С учетом (4) уравнения (8) и (9) перепишутся в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha k \nabla \right) b_1 + \alpha b_0 \Delta \varphi_1 = 0, \quad (10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha k \nabla \right) \varphi_1 - \frac{\alpha}{b_0} \Delta b_1 - 2\beta b_0 b_1 = 0 \quad (11)$$

или

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha k \nabla \right)^2 b_1 + \alpha^2 \Delta^2 b_1 + 2\alpha \beta b_0^2 \Delta b_1 = 0. \quad (12)$$

Подставляя в (12)  $b_1$  в виде  $b_1 \sim e^{-i\Omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , получим<sup>1</sup>

$$(\Omega - 2\alpha k\kappa)^2 = \alpha k^2 (\alpha k^2 - 2\beta b_0^2). \quad (13)$$

Отсюда следует условие неустойчивости

$$2\beta b_0^2 > \alpha k^2.$$

Таким образом, при достаточно больших  $b_0^2$  будет иметь место неустойчивость относительно длинноволновых модуляций.

Отметим в заключение, что самомодуляция, приводящая к разбиению волны на отдельные пакеты, как известно, всегда происходит, если выполнен общий критерий Лайтхилла [265а]

$$(\partial^2 \omega / \partial k^2) |_{h=0} \partial \omega / \partial h^2 < 0.$$

В данном случае этот критерий как раз равносильен требованию, чтобы поправки к частоте линейных колебаний  $\sim k_{\perp}^2 \neq 0$  и пропорциональные квадрату конечной амплитуды  $h^2$  имели разные знаки.

#### § 4. НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ<sup>2</sup>

До сих пор мы рассматривали устойчивость *стационарных* систем. В этом параграфе речь пойдет о *расширяющейся* однородной среде.

Важнейшее значение в астрофизических приложениях имеет найденное Я. Б. Зельдовичем приближенное решение нелинейной задачи о развитии возмущений произвольной амплитуды в гравитирующей однородной (в среднем) среде без давления [48]. Это решение обобщает результаты теории возмущений и описывает эволюцию растущей моды потенциальных возмущений на нелинейном этапе.

Решение строится на фоне однородной изотропно расширяющейся среды без давления, эволюция которой описывается уравнениями гидро-

<sup>1</sup> Отметим, что (13) совпадает с уравнением (27.13) в книге Карпмана [55а].

<sup>2</sup> Этот параграф по просьбе авторов написан А. Г. Дорошкевичем.



динамики с тяготением (по повторяющимся индексам — суммирование):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k^2} &= 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $\Phi$  и  $u_i$  — плотность, гравитационный потенциал и скорость среды,  $G$  — постоянная тяготения. Решение, соответствующее изотропному расширению с сохранением однородности (модель А. А. Фридмана), имеет вид

$$\begin{aligned} u_i &= H(t) r_i, \quad \rho = \rho(t) = \text{const}/a^3, \quad a = \exp\left(-\int H dt\right), \\ \frac{dH}{dt} + H^2 &= -\frac{4\pi}{3} G \rho. \end{aligned}$$

В простейшем случае [48]

$$\rho = 1/6\pi G t^2, \quad H = 2/3t, \quad a = (t/t_0)^{2/3}. \quad (2)$$

Это решение, как известно, неустойчиво. Согласно предложенной Зельдовичем приближенной нелинейной теории, движение отдельного элемента вещества описывается соотношением

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = a(t) (\mathbf{q} - B(t) \mathbf{S}(\mathbf{q})), \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{q}$  — эйлерова и лагранжева координаты частицы,  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$  — начальное смещение частицы из положения равновесия,  $a(t)$  описывает общее расширение среды,  $B(t)$  описывает рост возмущений. В простейшем случае (2)  $a \sim t^{2/3}$ ;  $B \sim t^{1/3}$ . Используя эти соотношения, легко найти скорость и плотность в частице

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = H \mathbf{r} - a \dot{B} \mathbf{S}(\mathbf{q}), \quad \rho = \frac{\rho_0}{D(\mathbf{r})/D(\mathbf{q})} = \frac{\rho_0}{a^3 \left| \delta_{ik} - B \frac{\partial S_i}{\partial q_k} \right|}, \quad (4)$$

где  $\dot{B} = dB/dt$ ,  $D(\mathbf{r})/D(\mathbf{q})$  — якобиан преобразования  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ . Как известно, в растущей моде возмущения скорости потенциальны. Поэтому и приближенная теория имеет дело с потенциальным вектором  $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ . Таким образом, тензор  $\partial S_i / \partial q_k$  — симметричен и в каждой точке может быть приведен к главным осям. В соответствующей системе координат

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3 (1 - B\lambda_1)(1 - B\lambda_2)(1 - B\lambda_3)}, \quad (5)$$

где  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  — главные значения тензора деформации  $\partial S_i / \partial q_k$ .

Если в точке  $\lambda_1 > 0$ , то за конечное время плотность, согласно этому решению, обратится в бесконечность в момент  $B = 1/\lambda_1$ . Характерно, что бесконечность появляется из-за обращения в нуль одного множителя  $(1 - B\lambda_1)$ , т. е. из-за сжатия лишь по одному направлению, определяемому наибольшим главным значением тензора деформации  $\partial S_i / \partial q_k$ . Движение в ортогональной этому направлению плоскости приводит лишь к конечному изменению плотности. Это является общим свойством гладкого начального распределения скоростей частиц. В общем, невырожденном случае их пересечение происходит на так называемой каустической поверхности. Лишь в вырожденных случаях ( $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$  или  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ) происходит фокусировка, цилиндрическая или сферическая.

Величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  являются функциями координат. Бесконечная плотность достигается прежде всего в частице, в которой  $\lambda_1 > 0$  и мак-

симальна в рассматриваемой области. Далее бесконечная плотность достигается в соседних частицах, расположенных в плоскости, ортогональной направлению главной оси, соответствующей  $\lambda_1$ . Возникает сильно уплотненное облако сжатого газа.

В сжатом газе нельзя пренебрегать давлением, которое остановит сжатие при конечной плотности. Поэтому в направлении главной оси, соответствующей  $\lambda_1$ , набегающий на сжатое вещество поток останавливается и сжимается в ударной волне. Подробно форма и структура облаков сжатого газа изучается в работах Я. Б. Зельдовича с сотрудниками и монографии [48a].

Рассмотрим несколько подробнее вопрос об области применимости предлагаемой теории. Движение вещества согласно (3) приводит к распределению плотности, описываемому (4)–(5). С другой стороны, для того чтобы движение происходило согласно (3), необходимо, чтобы ускорение  $-\partial\Phi/\partial x_i$  в (1) генерировалось распределением плотности  $\rho^* = -(4\pi G)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]$ . Если  $\rho^* = \rho$ , то задача самосогласованна и (3) является точным решением. В противном случае отклонение  $\rho^* - \rho$  может служить мерой приближенности (3). Нетрудно рассчитать величину

$$\Delta = \rho^*/\rho - 1 = [-(3\ddot{a}B + 2\dot{a}\dot{B} + a\ddot{B}) \mathcal{I}_1 + (6) \\ + B(3\ddot{a}B + 4\dot{a}\dot{B} + 2a\ddot{B}) \mathcal{I}_2 - 3B^2(\ddot{a}B + 2\dot{a}\dot{B} + a\ddot{B}) \mathcal{I}_3]/3\ddot{a},$$

где точка обозначает дифференцирование по времени,  $\mathcal{I}_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $\mathcal{I}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ ,  $\mathcal{I}_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$  — инварианты тензора деформации. В выражении (3) зависимость  $B(t)$  выбрана так, что

$$3\ddot{a}B + 2\dot{a}\dot{B} + a\ddot{B} = 0, (7)$$

и совпадает с выражением для скорости роста возмущений в линейной теории. Поэтому, используя (7), приведем (6) к виду

$$\Delta = B^2 \mathcal{I}_2 + 2B^3 \mathcal{I}_3. (8)$$

Отсюда следуют два важных результата.

1) Приближенная теория точна в случае малых возмущений, так как (8) в этом случае квадратично по амплитуде возмущений.

2) Теория точна в случае одномерных возмущений, так как при  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ,  $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 = 0$  и  $\Delta \equiv 0$ . Подставляя  $B = 1/\lambda_1$  (условие достижения бесконечной плотности), получим

$$\Delta = \mathcal{I}_2/\lambda_1^3 + 2\mathcal{I}_3/\lambda_1^3, (9)$$

и в области  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \geq \lambda_3$  опять  $\Delta \ll 1$ . Поправки к решениям порядка отношения  $\lambda_2/\lambda_1$  (или  $\lambda_2\lambda_3/\lambda_1^2$ ), которое и может рассматриваться как малый параметр задачи. Таким образом, приближенная теория обеспечивает хорошую точность в областях  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \geq \lambda_3$ , т. е. в окрестности области максимального сжатия.

Проверка приближенной теории при помощи построения численных моделей подтвердила как хорошую точность приближенной теории (не ниже 20%) в окрестности уплотнений, так и одномерный характер сжатия и образование плоских структур [45a].

## § 5. ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ДИСКА

В § 1 было показано, что уравнение (17) в определенной области параметра  $\kappa$  (18) имеет стационарные решения солитонного типа. Этой области соответствует, например, значение показателя адиабаты  $\gamma = 5/3$ , и вообще она простирается по  $\gamma$  в, казалось бы, обычной области.

Однако в настоящее время известно (см., например, [48a]), что газ в спиральных рукавах находится в трех фазах. Более 70% вещества сосредоточено в холодных облаках, температура внутри которых порядка 100 К. Около 20% вещества находится вне облаков и имеет температуру  $5 \div 10 \cdot 10^3$  К. Наконец, около 10% вещества находится при температуре  $10 \div 20$  К в молекулярной фазе.

Многими авторами показано (см. [48a] и цитированную там литературу), что возмущения в этих фазах распространяются изотермически, что соответствует значению  $\gamma \geq 1$ <sup>1</sup>. Уравнение (17) § 1 в этом случае имеет вид:

$$\partial^2 v / \partial t^2 = \gamma_k^2 v + b v^3, \quad b > 0. \quad (1)$$

(Здесь индекс 1 и тильда у  $v$  для простоты опущены.)

Почленно умножая (1) на  $dv/dt$  и интегрируя по  $t$ , получаем

$$t - t_0 = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{W_0 + \frac{\gamma_k^2}{2} v^2 + \frac{b^2 v^4}{4}}}, \quad (2)$$

где  $v_0$  — начальное возмущение скорости в момент времени  $t_0$ ,  $W_0$  — константа интегрирования.

В общем случае интеграл в (2) выражается через эллиптический интеграл. Анализ решения (2) показывает, что возмущение скорости растет быстрее, чем экспонента, т. е. имеет место так называемая взрывная неустойчивость.

Отмеченный выше характер решения (2) легко увидеть, если положить функцию интегрирования  $W_0 \leq \gamma_k^2 v_0^2 / 2 \ll b^2 v_0^4 / 4$ . В этом частном случае интеграл (2) легко берем, и мы имеем

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{1 - \sqrt{b/2} (t - t_0)}. \quad (3)$$

т. е.  $v \rightarrow \infty$  при  $(t - t_0) \rightarrow 1/\sqrt{b/2} \cdot v_0$ .

Такая неустойчивость может инициировать звездообразование в газовом диске. Заметим, что это неустойчивость неджинсовского типа и потому может развиваться в областях, существенно меньших джинсовского размера. При этом джинсовская неустойчивость диска может вообще отсутствовать, т. е.

$$\gamma_k^2 = 2\pi G \sigma_0 |k| - 4\Omega^2 - k^2 c_s^2 < 0; \quad (4)$$

важно только, однако, чтобы выполнялось условие

$$|\gamma_k|^2 \ll \Omega^2. \quad (5)$$

## ЗАДАЧА

Показать, что критерии неустойчивости однородного по плотности кругового цилиндра и диска Маклорена универсальны по отношению к амплитуде нерадиальных колебаний (В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов)<sup>2</sup>.

Решение. Покажем, что критерии неустойчивости, полученные ранее для возмущений малой амплитуды кругового цилиндра (2) § 1

<sup>1</sup> При температуре  $T > 10^4$  К происходит интенсивное излучение водорода в линии  $L\alpha$ ; возбуждение нижнего уровня углерода — главный процесс охлаждения при  $T \approx 100$  К [48a].

<sup>2</sup> Доложено на Всесоюзной конференции по плазменной астрофизике (Иркутск, 1976 г.).

главы II и «диска Маклорена» (6) § 1 главы V, остаются неизменными в случае конечной амплитуды. Доказательство проведем с помощью энергетического принципа, следуя [12а].

Рассмотрим лишь колебания специального вида, которые оставляют систему пространственно однородной ( $\rho = \text{const}$ ) и в возмущенном состоянии.

Связь возмущенной системы с невозмущенной выражается некоторым аффинным преобразованием фазовых координат. Для скоростей можно написать (ср. с аналогичными формулами в задаче 3 главы I и т. п.)

$$v_x - v_x' = \alpha(t)x + \beta(t)y, \quad (1)$$

$$v_y - v_y' = \delta(t)x + d(t)y, \quad (2)$$

где  $v_x'$ ,  $v_y'$  — компоненты пекулярной скорости,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $d$  — некоторые неизвестные функции времени.

Можно убедиться в том, что величины

$$C_1 = \overline{x^2 v_x'^2} + \overline{y^2 v_y'^2} + (\beta - \delta)^2 \overline{x^2 y^2}, \quad (3)$$

$$C_2 = \overline{x^2 y^2} [\overline{v_x'^2 v_y'^2} - (\overline{v_x' v_y'})^2], \quad (4)$$

$$C_3 = \delta \overline{x^2} - \beta \overline{y^2} \quad (5)$$

являются инвариантами. Черта означает усреднение по фазовой плотности возмущенной системы. Величина  $C_2$  пропорциональна квадрату фазового объема системы,  $C_3 = L/M$ , где  $L = M(xv_y - yv_x)$  — полный угловой момент,  $M$  — масса системы. Величине  $C_1$  труднее приписать определенный физический смысл.

Вычислим значения  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  для цилиндра и диска. Для цилиндра имеем прежде всего

$$\overline{x^2} = a^2/4, \quad \overline{y^2} = b^2/4, \quad (6)$$

где  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси эллиптического сечения возмущенного цилиндра. Из вида аргумента  $\delta$  — функционального распределения в этом случае легко заметить, что

$$\overline{v_x'^2} = \frac{a^2}{4}(1 - \gamma^2), \quad \overline{v_y'^2} = \frac{b^2}{4}(1 - \gamma^2). \quad (7)$$

В стационарном состоянии  $a = b = 1$ ,  $\delta = \gamma = -\beta$ ,  $\overline{v_x' v_y'} = 0$ . Поэтому для случая цилиндра получаем

$$C_1 = \frac{1}{8}(1 + \gamma^2), \quad C_2 = \frac{1}{256}(1 - \gamma^2)^2, \quad C_3 = \frac{1}{2}\gamma. \quad (8)$$

Для диска

$$\overline{x^2} = a^2/5, \quad \overline{y^2} = b^2/5, \quad \overline{v_x'^2} = \frac{1}{5}a^2(1 - \gamma^2), \quad \overline{v_y'^2} = \frac{1}{5}b^2(1 - \gamma^2). \quad (9)$$

Учитывая стационарные значения  $a$ ,  $b$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и  $\overline{v_x' v_y'}$ , находим следующие значения инвариантов для диска Маклорена:

$$C_1 = \frac{2}{25}(1 + \gamma^2), \quad C_2 = \frac{1}{625}(1 - \gamma^2)^2, \quad C_3 = \frac{2}{5}\gamma. \quad (10)$$

Заметим, что в обоих случаях  $C_3^2 = C_1 - 2\sqrt{C_2}$ .

Перейдем к изучению устойчивости рассматриваемых моделей по отношению к нерадиальным колебаниям «аффинного» типа. Задача состоит

в минимизации полной энергии при условии сохранения инвариантов  $C_1, C_2, C_3$ .

Кинетическая энергия двумерной системы

$$T = \frac{M}{2} (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2}) = \frac{M}{2} [(\alpha^2 + \delta^2) \overline{x^2} + (\beta^2 + d^2) \overline{y^2} + \overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2}]. \quad (11)$$

Из (3) и (5) следует

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\overline{x^2}}{\overline{x^2} - \overline{y^2}} \left( \frac{C_3}{\overline{x^2}} - \sqrt{\frac{C_1 - \xi}{\overline{x^2} \overline{y^2}}} \right), \\ \delta &= \frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2} - \overline{y^2}} \left( \frac{C_3}{\overline{y^2}} - \sqrt{\frac{C_1 - \xi}{\overline{x^2} \overline{y^2}}} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где введена величина  $[\xi = \overline{x^2} \overline{v_x'^2} + \overline{y^2} \overline{v_y'^2}$ , значения которой в стационарном состоянии для цилиндра и диска совпадают:  $\xi \rightarrow \xi_0 = 2 \sqrt{C_2}$ . Пусть  $\eta = \overline{x^2} \overline{v_x'^2} - \overline{y^2} \overline{v_y'^2}$ . Из (4) следует, что

$$\xi^2 - \eta^2 = 4 \overline{x^2} \overline{y^2} \overline{v_x'^2} \overline{v_y'^2} \geq 4C_2, \quad \eta \leq \sqrt{\xi^2 - 4C_2}. \quad (13)$$

Тогда полная энергия удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} E \geq \frac{M}{2} \frac{1}{(\overline{x^2} - \overline{y^2})} & \left\{ (C_3^2 + C_1) (\overline{x^2} + \overline{y^2}) + \frac{\xi}{2} \left[ \frac{(\overline{x^2})^2}{\overline{y^2}} + \frac{(\overline{y^2})^2}{\overline{x^2}} - 3(\overline{x^2} + \overline{y^2}) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{(\overline{x^2} + \overline{y^2})^3}{2 \overline{x^2} \overline{y^2}} \sqrt{\xi^2 - 4C_2} - 4C_3 \sqrt{\overline{x^2} \overline{y^2} (C_1 - \xi)} \right\} + W, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $W$  — потенциальная энергия. При получении (14) положено  $\alpha = d = 0$ , поскольку  $\alpha^2 \overline{x^2} + d^2 \overline{y^2} \geq 0$  и сами  $\alpha$  и  $d$  никак не связаны с инвариантами.

Таким образом, учтены все инварианты, и минимизируемая функция зависит от трех оставшихся независимых переменных:  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{y^2}$  и  $\xi$ . В дальнейшем для определенности считаем  $\overline{x^2} \geq \overline{y^2}$ , т. е.  $a \geq b$ . Заметим также, что  $2\sqrt{C_2} \leq \xi \leq C_1$ .

1. Цилиндр. Потенциальная энергия в этом случае

$$W = \frac{M}{2} \ln(a + b) + \text{const} = \frac{M}{2} \ln(\sqrt{\overline{x^2}} + \sqrt{\overline{y^2}}) + \text{const}. \quad (15)$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\sqrt{C_1 - \xi} \leq C_3 - \frac{\xi - 2\sqrt{C_2}}{2C_3}, \quad (C_3 = \sqrt{C_1 - 2\sqrt{C_2}}), \quad (16)$$

$$\min_{\xi} (\mu_1 \xi - \mu_2 \sqrt{\xi^2 - 4C_2}) = 2\sqrt{C_2} \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2} \quad (\mu_1 > \mu_2 > 0). \quad (17)$$

Тогда, вводя обозначения

$$m = \sqrt{\overline{x^2}} + \sqrt{\overline{y^2}}, \quad n = \sqrt{\overline{x^2}} - \sqrt{\overline{y^2}} \quad (m \geq n), \quad (18)$$

получим

$$\frac{E}{M} \geq \frac{1 + 3\gamma^2}{16m^2} + \frac{1 - \gamma^2}{16m^2} \sqrt{9 + \frac{8n^2}{m^2 - n^2}} + \frac{1}{2} \ln m \geq \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2} \ln m \equiv E_1(m), \quad (19)$$

если  $\gamma < 1$ . Стационарные значения  $m_0 = 1$ ,  $n_0 = 0$ . Как видно,  $E_2(m) \geq E_1(m_0)$ . Поэтому при  $\gamma < 1$  имеет место нелинейная устойчивость цилиндра.

2. Диск. Перепишем неравенство (14) в виде

$$\frac{E}{M} \geq \frac{(C_3 + \sqrt{C_1 - \xi})^2}{4m^2} + \frac{(C_3 - \sqrt{C_1 - \xi})^2}{4n^2} + \frac{2(m^2 + n^2)}{(m^2 - n^2)^2} \xi - \frac{4mn}{(m^2 - n^2)^2} \sqrt{\xi^2 - 4C_2} + \frac{W}{M} \equiv F. \quad (20)$$

Введем новое обозначение  $l$  следующим образом:

$$C_3 - \sqrt{C_1 - \xi} = l^2 n^2. \quad (21)$$

С целью нахождения локального минимума разложим функцию  $F$  по  $n^2$  с точностью до  $n^2$ :

$$F(m, n, l) = F_1(m) + n^2 F_2(m, l) + O(n^4), \quad (22)$$

где

$$F_1(m) = \frac{4}{25m^2} - \frac{4}{5\sqrt{5}m} \geq F_1 \left( m_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \right),$$

$$F_2(m, l) = \frac{l^4}{4} + \frac{6\gamma}{5m^2} l^2 - \frac{16\sqrt{\gamma(1-\gamma^2)}}{5\sqrt{5}m^3} l - \frac{12(1-\gamma^2)}{25m^4} - \frac{1}{5\sqrt{5}m^3}.$$

Видно, что по  $m$  имеется минимум для произвольного  $\gamma$ , и в  $F_2$  вместо  $m$  можно подставить его стационарное значение  $m_0 = 2/\sqrt{5}$ .

Устойчивость или неустойчивость модели зависит от знака  $F_2$ . Критическая точка соответствует  $F_2(m_0, l) = 0$  для некоторого  $l$ . В этой точке появляются кратные корни, и  $(\partial F_2 / \partial l)_{n=l=m_0} = 0$ . Совместное исследование двух последних уравнений дает критическое значение  $\gamma_c = \sqrt{125/486}$ , как и в линейной теории.

В работе [12а] приводится также доказательство абсолютного характера найденного минимума, на чем мы здесь не останавливаемся.

## АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Упрямо морща лоб, задумчивый прохожий  
 Природу созерцал и видел, что она  
 Противоречьями и тайнами полна,  
 Полна миазмами, но и цветами тоже.

Куда ни бросишь взгляд, кругом луга, леса,  
 Вулканы и сады, земля и небеса,  
 Коровы, яблоки, пустыни и заливы,  
 Навозные жуки, и облака, и сны.

И вот еще сильнее свой лоб он морщить стал,  
 И созерцал, и созерцал, и созерцал  
 Природу. Потом закапал дождик мелкий,  
 Прохожий посмотрел на часовые стрелки,  
 И зонт раскрыл, и в путь отправился опять,  
 Угрюмо прошептав: «Нет, не могу понять!»

*Ремон Кено*

## § 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Изучение равновесия и устойчивости различных гравитирующих систем должно, по-видимому, сыграть важную роль в построении картины их эволюции. Моменты, когда система теряет устойчивость, определяют критические точки линии эволюционного развития, когда плавная эволюция системы должна смениться быстрой перестройкой. Некоторые авторы [195] действительно отмечают следы скачкообразных изменений, имевших место в нашей Галактике. С другой стороны, плавная эволюция должна, очевидно, идти вдоль последовательности квазистационарных состояний. На линии эволюционного развития квазистационарные состояния представляют такие точки, которым должны соответствовать все наблюдаемые в достаточном изобилии звездные системы. Это аналогично ситуации в мире звезд [150], где диаграмма спектр — светимость показывает наличие в заметном количестве только звезд в известных своей квазистационарностью участках диаграммы (прежде всего на главной последовательности): участки, соответствующие сильно нестационарным состояниям, быстро «проскакиваются» эволюционирующей системой.

Теория эволюции звезд, как известно, была построена на основе многочисленных расчетов их равновесных конфигураций с различными значениями параметров (массы, химического состава и т. п. — см., например, [150]). Главную роль в эволюции звезд играет, как это теперь очевидно, выгорание ядерного топлива, приводящее к медленному увеличению молекулярного веса звездного вещества. Оно задает направление эволюции. Скорость этого процесса определяется светимостью звезды, которая может быть рассчитана в каждый данный момент по ее квазиравновесной конфигурации. Таким образом можно проследить за эволюцией звезды вдоль последовательности квазиравновесных состояний с согласованно меняющимся химическим составом, вплоть до момента исчерпания запасов ядерного горючего, за которым должен последовать «срыв» с быстрым переходом к следующей квазиравновесной фазе, и т. д. В настоящее время эволюционные «треки» звезд разных масс восстановлены вплоть до очень далеких этапов эволюции.

В принципе возможен подобный путь построения теории эволюции звездных систем. Однако в данном случае пока не известна действитель-

ная причина эволюции, которая была бы по степени достоверности в какой-то мере аналогична выгоранию водорода в звездах главной последовательности. Например, весьма подробно изучалась эволюция, связанная с диссипацией звезд из галактик. Совсем не очевидно, однако, что эта диссипация действительно происходит с достаточной скоростью. Подобный механизм предполагает постоянное восстановление высокоэнергетического «хвоста» распределения частиц по скоростям — процесс, который является вполне естественным только в столкновительной системе.

Чаще всего, говоря об эволюции галактик, подразумевали возможность эволюции вдоль «камертонной» последовательности Хаббла (рис. 61) с превращением эллиптических галактик в спиральные или

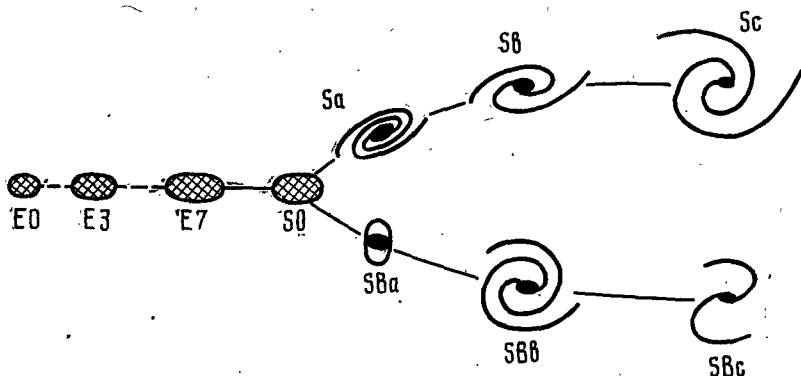


Рис. 61. «Камертонная» диаграмма Хаббла

наоборот. В последнее время вопрос о подобной эволюции современных форм галактик, о ее действительной эффективности рассматривается снова. Причем следует отметить, что в результате продолжительных дискуссий об эволюции современных галактических форм большинство авторов склонилось к совсем неожиданной, «антиэволюционной» точке зрения, впервые, по-видимому, высказанной Оортом [297]. Согласно Оорту, средние характеристики, скажем, сферических и эллиптических галактик (также, как масса, удельный угловой момент и т. д.) отличаются столь сильно, что превращение их друг в друга делается практически невозможным. Это снова вполне аналогично причинам отказа от старых представлений об эволюции звезд *вдоль* главной последовательности, для чего потребовалась бы слишком большая потеря массы. Сказанное, конечно, не запрещает эволюцию внутри каждой из форм. Не исключено также, что бесстолкновительная эволюция (релаксация) системы может в отдельные моменты приводить к неустойчивости — «срыву».

В некоторых случаях представляют интерес равновесные состояния, близкие к каким-то другим, более простым состояниям (обладающим большей степенью симметрии). В качестве примера можно привести дисковые системы в теории спиральной структуры Линя и Шу, где рассматриваются неаксиально-симметричные равновесия (спиральной формы), мало отличающиеся от аксиально-симметричного «фона». Задачу об отыскании таких равновесий можно рассматривать как частный случай задачи о малых колебаниях.

Модели бесстолкновительных систем со временем все более усложняются, поскольку в расчет принимаются более тонкие детали и делаются попытки дать объяснение новым наблюдательным данным. В частности, очень большое число работ посвящено построению моделей сферически-симметричных звездных систем. Поэтому сейчас известно довольно много моделей таких систем (см. обзор [32]).



Ясно, что в будущем большинство моделей будет представлять лишь академический интерес. Непосредственные наблюдения не дают пока однозначной информации о распределении частиц по скоростям. С другой стороны, как мы уже отмечали, и чисто теоретически проблема построения функций распределения по заданному распределению плотности неоднозначна. В действительности рассматриваемая проблема должна решаться параллельно с проблемой эволюции и происхождения этих систем. Только это может привести к существенному ограничению бесчисленных стационарных возможностей или даже к однозначному решению. В случае шаровых скоплений звезд такая работа, выполненная Миши [293], Кингом [260], Эноном [214] и другими, уже привела к существенному прогрессу. Трудность, однако, состоит в том, что пока мы не имеем сколько-нибудь детального решения фундаментальной проблемы эволюции.

Поэтому реальная постановка проблемы теоретического описания квазистационарных систем в настоящее время допускает весьма значительный произвол. При построении моделей привлекаются лишь некоторые «эволюционные соображения» качественного характера. Можно сказать, что сейчас пригодной для описания тех или других систем может считаться почти любая функция распределения, удовлетворяющая только некоторым естественным «критериям разумности». Среди них необходимым является, конечно, и условие устойчивости.

Очень часто данные наблюдений о распределении яркости и числа «частиц» в разных сферически-симметричных системах сравниваются с простыми теоретическими моделями типа рассмотренных нами в § 1 главы III. Например, Камм [180] получил неплохое совпадение некоторых из своих обобщенных политроп (25) § 1 с наблюдательными данными для шаровых скоплений M5, M15, M92. Изотермической моделью, несколько исправленной для получения достаточно быстрого убывания плотности на периферии системы, хорошо описываются, согласно Цвикки, некоторые скопления галактик. Более подробно эти вопросы освещены в обзоре Велтманна [32].

Строятся также «наиболее вероятные» распределения [101], часто без указания конкретного статистического механизма, который должен привести к их установлению в реальной бесстолкновительной системе.

В этом отношении от остальных работ выгодно отличается работа Линден-Белла [286], который рассмотрел проблему бесстолкновительной релаксации в бурно нестационарном процессе установления равновесного состояния. Качественно ход рассуждений Линден-Белла таков. Допустим, что вначале у нас имеется сильно неравновесная конфигурация, т. е. система «стартует» достаточно далеко от равновесия (например, сильно нарушается теорема вириала). При этом в фазовом пространстве какие-то области заняты частицами, а какие-то пусты. В результате взаимодействия через самосогласованное поле произойдет хаотическое перемешивание элементов в фазовом пространстве. Предположение о бурном характере релаксации необходимо Линден-Беллу для того, чтобы можно было считать, что система к моменту достижения окончательного равновесия действительно хорошо «перемешивается» так, что любой типичный элемент одинаково вероятно найти в любом месте фазового пространства (при некоторых общих ограничениях). В этом случае можно провести соответствующий статистический расчет (такие расчеты всегда основаны на предположении о равновероятности каких-то состояний): равновесное состояние должно быть наиболее вероятным при упомянутых ограничениях.

Любое конечное равновесное состояние, в принципе достижимое системой, должно иметь те же полную энергию  $E$ , массу  $M$  (или число частиц  $N$ ), полный угловой момент  $L$  и импульс  $P$ . Если наложить только эти ограничения, статистическая механика даст максвелловское распре-

деление (в соответствующем образом движущейся и вращающейся координатной системе).

Но бесстолкновительный характер рассматриваемых систем накладывает дополнительное ограничение, так как означает сохранение еще одной величины — фазовой плотности. Течение фазовой «жидкости» является несжимаемым, и поэтому должен действовать «принцип исключения»: функция распределения в данном элементе фазового пространства или равна нулю, если туда пришла ячейка без частиц, или равна начальному значению в той ячейке, которая после перемешивания пришла в данную точку. Если в начальный момент функция распределения была равна единице во всей области, где были частицы, то мы получим принцип исключения Паули. В этом случае конечная равновесная функция должна точно совпадать с распределением Ферми — Дирака:

$$\bar{f} \rightarrow \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}.$$

В этой формуле  $\beta$  и  $\mu$  — константы, определяемые по полному числу частиц  $N$  и энергии  $\mathcal{E}$  системы (они здесь играют ту же роль, что обратная температура  $1/T$  и химический потенциал  $\mu$  в «обычном» распределении Ферми), а черта над  $f$  означает, что к такой форме должна в действительности стремиться не точная функция распределения (которая становится с течением времени все более «изрезанной»), а усредненная по малым энергетическим интервалам. Линден-Белл считает, что его новая статистика должна объяснить ту замечательную регулярность, которую мы наблюдаем в распределении яркости сферических и эллиптических галактик.

## § 2. СФЕРИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

### 2.1. СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Как уже отмечалось (см. начало главы III), под сферическими бесстолкновительными гравитирующими системами мы имеем в виду следующие объекты: 1) шаровые скопления звезд; 2) сферические галактики (или, приближенно, эллиптические галактики с не слишком большой сплюснутостью); 3) системы шаровых скоплений (например, в нашей Галактике); 4) компактные скопления галактик.

1. Мы дадим сначала краткое описание **наблюдательных данных**, следуя в основном обзорам в сборнике [73]. *Шаровые скопления звезд и система шаровых скоплений в Галактике*. Список шаровых скоплений, принадлежащих нашей Галактике, превышает 100, хотя реально их может быть гораздо больше (по некоторым оценкам, до 2000 [122]). Они образуют систему с сильной концентрацией к центру Галактики и приблизительно сферическим распределением плотности.

Подсчеты числа звезд в шаровых скоплениях показывают, что плотность  $n$  является довольно быстро убывающей функцией радиуса приблизительно  $n \sim 1/r^3$ . Средняя плотность звезд порядка  $\bar{n} \sim 0,5 \text{ пс}^{-3}$ , но вблизи от центра она примерно в 100 раз больше  $\bar{n}$ , т. е.  $n \sim 50 \text{ пс}^{-3}$ . Соответственно среднее расстояние между звездами порядка 0,05—0,1 пс (несколько десятков тысяч астрономических единиц). Типичные размеры шаровых скоплений  $R \sim 10 \text{ пс}$ , массы лежат в районе нескольких сот тысяч солнечных масс. Например, масса M3, по оценке Сэндейджа, равна  $2,45 \cdot 10^5 M_{\odot}$ , а масса M92, оцененная по теореме вириала, порядка  $1,4 \cdot 10^5 M_{\odot}$  [122]. Джонсон [243] из грубой модели приливного равновесия вывел нижний предел для массы шаровых скоплений; он также оказался порядка  $10^5 M_{\odot}$ .

Опишем теперь (также весьма кратко) некоторые данные наблюдений, касающиеся *сферических и эллиптических галактик*. Число звезд в гигантских галактиках этого типа, как и в гигантских галактиках других типов,  $N \sim 10^{11}$ , радиус  $R \sim 10$  кпс. Характерно, что в них совершенно отсутствуют какие-либо структурные детали, кроме маленьких, сильно конденсированных ядер. Считается, что для всех эллиптических галактик имеется общий закон распределения поверхностной яркости и соответственно распределения плотности звезд. В связи с этим кажется очень естественным предположение, что все эллиптические галактики построены по одной и той же общей модели, а отдельные объекты различаются только размерами, плотностью, степенью сплюснутости. Упомянутый закон распределения поверхностной яркости был установлен Хабблом, выглядит он очень просто:

$$B = B_0 / (r + a)^2 \quad (1)$$

или

$$\lg B/B_0 = -2 \lg (r/a + 1). \quad (2)$$

Эта формула хорошо описывает наблюдения в интервале  $0,3 < r/a \leq 15$  и удовлетворительно вплоть до  $r/a = 30$  (яркость на этом интервале меняется в 1000 раз).

*Компактные скопления галактик.* Согласно Цвикки [146], все скопления галактик можно разбить на три класса, из которых компактные скопления обнаруживают почти точную сферическую симметрию. Примерами могут служить гигантские скопления галактик в Волосах Вероники и в Северной Короне. Их видимые размеры  $R \sim 1$  мпс, а вириальные<sup>1</sup> массы  $M \geq 10^{14} M_\odot$ . Наблюдаемые дисперсии лучевых скоростей галактик достигают в гигантских скоплениях  $2 \cdot 10^3$  км/с. Наиболее богатые скопления насчитывают до  $N = 10^4$  членов. Распределение плотности, по Цвикки, хорошо представляется изотермической моделью (12) § 1 главы III; другие авторы предлагают отличные от нее модели (см. [32]).

**2. Бесстолкновительность.** Пользуясь приведенными данными наблюдений, проверим прежде всего, в какой степени все описанные системы действительно являются бесстолкновительными.

Вопрос о столкновениях в звездных системах подробно изучался многими авторами, начиная с Чандрасекара [147]. Время установления квазимаксвелловского распределения из-за столкновений частиц одного сорта (время столкновительной релаксации) можно записать в виде (см., например, [101])

$$\tau \sim \tau_0 / \lambda. \quad (3)$$

Величина  $\tau_0$  в этой формуле имеет смысл среднего времени между близкими столкновениями частиц, приводящими к существенному изменению направления движения (рассеяние на угол  $\theta \sim 1$ ):

$$\tau_0 \sim \frac{v^3}{G n_0 m^2}, \quad (4)$$

$v$  — средняя скорость «теплого» движения частиц,  $n_0$  — их средняя плотность,  $m$  — масса одной частицы<sup>2</sup>. Вторая величина, входящая в (3),  $\lambda$  — так называемый «кулоновский логарифм», учитывающий тот факт, что в системах с далекодействующими силами (гравитация, электрические силы) основную роль играют *далекие* прохождения частиц. Для оценки в применении к таким объектам, как галактики, обычно полагают  $\lambda \sim 200$ . Поскольку кулоновский логарифм  $\lambda$  представляет собой медлен-

<sup>1</sup> Т. е. оцененные по формуле  $M \sim v^2 R / G$ .

<sup>2</sup> Аналогичные выражения в физике плазмы получаются отсюда заменой эффективного гравитационного «заряда»  $m\sqrt{G}$  на электрический заряд  $e$ .

ную функцию от  $v$ ,  $n_0$ , величина  $\lambda \sim 200$  мало меняется и при переходе к другим объектам, которые здесь рассматриваются.

Типичные для *галактик* параметры мы уже приводили: число звезд  $N \sim 10^{11}$ , радиус  $R \sim 10$  кпс, откуда плотность числа звезд  $n_0 \sim 10^{-37}$  см $^{-3}$ . Так как согласно теореме вириала должно быть  $\bar{v}^2 \sim GM/R$ , то получаем  $v \sim 200$  км/с. Поскольку, наконец,  $m \sim M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  г, то, подставляя все эти значения в (4), найдем  $\tau \sim 10^{15}$  лет. Соответственно  $\tau_0 \sim 10^{17}$  лет.

Полученные оценки для времени между парными столкновениями звезд можно сравнить с временем жизни Вселенной  $T \sim 10^{10}$  лет и прийти к выводу, что для каждой звезды за все время жизни Вселенной не произошло, вероятнее всего, ни одного столкновения, так что релаксация распределения звезд по скоростям не могла быть столкновительной. Этим они отличаются от *шаровых скоплений звезд*, которые являются существенно более плотными образованиями. Для типичного шарового скопления число звезд  $N \sim 10^5$ , а радиус  $R \sim 10$  пс, так что по формуле (3) для  $\tau$  получается значение всего порядка миллиарда лет. Поэтому за время существования шаровых скоплений  $(4 \div 8) \cdot 10^9$  лет в них могло произойти достаточное количество столкновений, вследствие чего фазовое распределение этих систем могло релаксировать к наименее вероятному (квазимаксвелловскому) распределению «обычным образом». В действительности, однако, дело здесь обстоит не так просто из-за сильной неоднородности шаровых скоплений (другим усложняющим фактором является возможность диссипации звезд из системы). Поэтому правильнее определять *локальные* времена между столкновениями, зависящие от радиуса. Тогда система оказывается столкновительной (и, следовательно, максвелловской) в центральной части, но бесстолкновительной (и потому с неопределенной а priori функцией распределения) на периферии. Функция распределения на периферии должна плавно переходить в максвелловскую в центре, что является в данном случае граничным условием, отсутствующим в случае галактик, которые являются «чисто» бесстолкновительными системами.

Здесь необходимо подчеркнуть, что «столкновительность» (хотя бы частичная) шаровых скоплений проявляется только на огромных промежутках времени порядка времени жизни Вселенной. Что касается, например, малых *колебаний* этих систем, то они характеризуются совсем другими временами — периодами орбитальных обращений (или радиальных колебаний) звезд, которые имеют порядок  $t \sim \frac{R}{v} \sim 10^6$  лет. Эта

величина, наоборот, много меньше времени между столкновениями, так что при изучении коллективных колебаний или устойчивости (а это как раз та задача, которая нас больше всего интересует) шаровые скопления можно рассматривать как *бесстолкновительные*: столкновений не происходит на протяжении многих периодов колебаний.

Требование зависимости стационарной бесстолкновительной функции распределения от однозначных интегралов движения в совокупности с упомянутым выше граничным условием сшивки с максвелловским распределением в центре сильно ограничивает в случае шаровых скоплений класс допустимых функций распределения. Во всяком случае, мы не имеем здесь такого априорного произвола, как в случае галактик.

Впрочем, для рассматриваемых нами задач различие, возможно, и не является столь глубоким. Действительно, наблюдаемые функции распределения даже бесстолкновительных систем, вроде галактик, отнюдь не являются любыми функциями интегралов движения. Не установленные пока однозначно механизмы приводят их к форме, очень сильно напоминающей все ту же максвелловскую функцию распределения (или шварцшильдскую, т. е. анизотропную максвелловскую, как в нашей Галактике). Все же в принципе количество возможностей здесь остается большим. Кроме того, в разных случаях могут действовать различные меха-

низмы установления равновесного распределения (бесстолкновительной релаксации).

В случае системы шаровых скоплений подобные оценки среднего времени парных столкновений дают  $\tau \sim 10^{11} \div 10^{13}$  лет. Это время, во всяком случае, значительно превышает среднее время колебаний  $T_0$ , которое составляет величину порядка  $10^8$  лет.

Для компактных скоплений галактик те же времена равны соответственно:  $\tau \sim 10^{10} \div 10^{12}$  лет,  $T_0 \sim 10^9$  лет. Поэтому такие системы тоже можно описывать с помощью бесстолкновительного кинетического уравнения, и только вблизи от центра это приближение станет неприменимым. Последнее, впрочем, очевидно уже из описания таких скоплений [146], как образований, в центре которых галактики находятся в контакте друг с другом.

Итак, все описанные системы можно с достаточной точностью считать бесстолкновительными и описывать в рамках соответствующего математического аппарата физической кинетики.

3. Краткий итог исследования устойчивости сферически-симметричных бесстолкновительных систем мы подвели в § 6 главы III. Одним из самых общих результатов теории (относящимся не к какой-либо отдельной системе, а к целому классу таких систем) является доказательство устойчивости произвольных «непатологических» изотропных распределений. Можно также утверждать (см. § 5 главы III), что любые сферически-симметричные системы с чисто радиальными траекториями неустойчивы.

Доказательство таких общих утверждений представляет наибольший интерес, но, к сожалению, удается лишь в редких случаях.

Также довольно общие результаты (хотя и не столь общие, как в случае двух уже упомянутых типов систем) получены для систем с круговыми орбитами (§ 3 главы III). Вероятнее всего, любые «разумные» модели такого рода устойчивы, и тогда, по-видимому, устойчивы все системы, занимающие область между круговыми и изотропными системами. Определение границы неустойчивости (см. рис. 18) представляет, на наш взгляд, наиболее важную из нерешенных пока проблем теории устойчивости бесстолкновительных сферически-симметричных систем.

Если иметь в виду наблюдения, то следует ожидать, что граница проходит близко к оси абсцисс на схеме рис. 18 ( $\bar{v}_1^2/\bar{v}^2 \ll 1$ ). Поэтому, возможно, представляет интерес найти предварительно общий вид равновесных функций распределения для систем частиц с траекториями, близкими к радиальным (написав, например, соответствующие  $\delta$ -разложения), и затем исследовать их устойчивость. Эта задача не встречается с какими-либо принципиальными трудностями.

Еще больший интерес представляет задача определения критических параметров моделей в имеющихся сериях функций распределения (5) и (25) § 1 главы III, охватывающих системы как с изотропными распределениями, так и с круговыми и радиальными орбитами. Результаты решения этой задачи можно было бы уже сравнить с данными наблюдений, что позволило бы дать объяснение преобладания сильно вытянутых траекторий звезд в реальных сферически-симметричных системах.

## 22. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Говоря о возможности астрофизических приложений исследований стационарных состояний и устойчивости бесстолкновительных моделей эллипсоидов, мы имели в виду различные галактические системы. Приблизительно эллипсоидальную форму имеют, например, эллиптические галактики и перемычки SB-галактик, причем эллиптические галактики обладают аксиальной симметрией, в то время как перемычки SB-галактик явно не аксиально-симметричны по отношению к оси вращения.

Все эти галактические системы с хорошей точностью можно рассматривать как бесстолкновительные: к ним с небольшими модификациями применимы оценки, данные выше для сферических галактик. При этом имеется в виду только звездная компонента этих систем (межзвездный газ, напротив, является столкновительным).

1. **Эллиптические галактики.** Среди нерешенных пока проблем, относящихся к эллиптическим галактикам<sup>1</sup>, мы бы выделили одну уже старую, но очень красивую, на наш взгляд, проблему: объяснить, почему отсутствуют эллиптические галактики со сплюснутостью, превышающей определенное критическое значение.

Этот факт был замечен и много раз подчеркивался Хабблом, который считал, что предельным типом эллиптической галактики является E6, когда малая ось составляет 40% большой оси (см. в [17]). Напомним, что хаббловское обозначение для эллиптических галактик E<sub>n</sub> означает,

что отношение полуосей ее меридионального сечения  $\frac{c}{a} = 1 - \frac{n}{10} \left( n = 10 \frac{a-c}{a} \right)$ .

Сейчас, по-видимому, считается, что наибольшим сжатием обладают галактики типа E7, для которых  $c/a = 0,3$  [34]. Безотносительно к конкретной цифре важен прежде всего именно сам факт наличия некоторого критического отношения  $c/a$  для эллиптических галактик. Ниже этого предела мы имеем уже только спиральные (S, SB) и линзообразные галактики (SO), т. е. объекты совсем другого рода, которые легко отличаются от эллиптических галактик (см. [34]).

Итак, сплюснутости  $q = c/a$  эллиптических галактик, с одной стороны, и обычных спиралей или SO-галактик — с другой, лежат в разных областях. Сравнительно недавно это было подтверждено в обстоятельной работе Сэндейджа, Фримана и Стоунса [318], причем на очень богатом материале (168 E, 267 SO+SBO, 254 S — всего 689 галактик).

Вследствие указанного различия S- и SO-галактики, вероятно, не могут быть эволюционно связаны с эллиптическими галактиками. Обычно предполагается [318], что фундаментальное отличие между E- и S(SO)-системами лежит в различиях первоначального распределения массы в протогалактиках по угловым моментам, и прежде всего в относительном количестве материи с низкими значениями углового момента, которая может превратиться в звезды еще в начале сжатия протогалактики (быстро вращающаяся материя осаждается позже в газовой форме в экваториальную плоскость).

Что может дать использование теории равновесия и устойчивости бесстолкновительных систем для решения рассматриваемой проблемы? Отметим всего два возможных подхода. Во-первых, может оказаться, что универсальные равновесные состояния эллиптических галактик, которые будут найдены, вообще существуют только для не слишком сильно сплюснутых систем.

Более вероятно, однако, вторая возможность, связанная с потерей устойчивости системы при превышении критического предела сплюснутости. Мы знаем, во всяком случае, что такое положение имеет место в случае эллипсоидов (сфероидов) Маклорена: они становятся (динамически) неустойчивыми, когда эксцентриситет меридионального сечения превысит значение  $e_{кр} = 0,95289$ , т. е.  $(c/a)_{кр} \approx 0,31$ . Непосредственно этот результат, конечно, не может быть перенесен на реальные эллиптические галактики, мы хотели только подчеркнуть принципиальную возможность аналогичной ситуации.

В настоящее время можно всерьез говорить лишь об исследовании устойчивости простых, в частности *однородных*, эллипсоидальных моде-

<sup>1</sup> Таких, как, например, проблема построения адекватной модели, которая бы удовлетворительно описывала наблюдения (в частности, закон Хаббла изменения поверхностной яркости).

лей (по крайней мере, аналитическими методами). Однако критерий Пиблса — Острикера и аналогичные соображения, описанные в разделе 3.2, указывают на то, что получаемые при этом результаты (если их сформулировать в подходящих терминах) могут иметь значительно более широкую область применимости.

Вращение оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость относительно возмущений «глобального» характера, при которых нарушается первоначальная аксиально-симметричная форма системы, принимающей «бароподобный» вид. Критерий Пиблса — Острикера дает количественную формулировку этого эффекта. Физическая причина заключается, как уже отмечалось (в главе II), в уменьшении эффективной силы тяжести на границе системы, что облегчает перестройку ее формы.

Наблюдения показывают (см. [34]), что вращение эллиптических галактик заметно только в случаях, если они имеют большое сжатие. Удобной моделью для количественной оценки критического значения сплюснутости и влияния скорости вращения на устойчивость аксиально-симметричных бесстолкновительных систем является суперпозиция сфероидов Фримана, вращающихся в противоположные стороны (см. конец раздела 3.1 главы IV).

Что касается первоначальной модели, в которой все частицы вращаются в одном направлении, то, как мы видели, увеличение толщины сфероида, хотя оно и уменьшает инкременты неустойчивости «поверхностных» мод (в том числе «бароподобной»), однако не способно сделать их устойчивыми. Сфероид Фримана, очевидно, слишком быстро вращается, чтобы реально претендовать на роль модели эллиптической галактики. Эта модель имеет большое значение для вычисления эффекта стабилизации джинсовской неустойчивости холодного диска конечной, но малой по сравнению с радиусом толщиной системы. Соответствующее дисперсионное уравнение, учитывающее влияние малой толщины на собственные частоты аксиально-симметричных возмущений, приведено в конце раздела 3.1 главы IV (формула (35)).

2. SB-галактики (пересеченные спирали, или галактики с перемычкой (баром)) имеют спиральные рукава, выходящие из концов перемычки, в центре которой находится ядро.

Успехи в построении теории SB-галактик выглядят пока очень скромно, особенно на фоне значительного прогресса в понимании устройства нормальных спиральных галактик (S-типа), связанного с теорией волн плотности (см. следующий параграф).

Одна из главных трудностей состоит в построении достаточно хорошей бесстолкновительной модели центральной, явно не аксиально-симметричной области SB-галактик, прежде всего самой перемычки (бара). По сравнению с ней вторая часть проблемы (происхождения спиральных рукавов) представляется сейчас более простой.

Если говорить о квазистационарной теории спиральных галактик SB-типа, необходимо отметить важные работы Фримана и Вокулера [203, 206]. В работе [203] была предложена в качестве модели перемычки спиральных галактик самосогласованная модель однородного трехосного эллипсоида звезд (см. § 1 главы IV). Мы отмечали уже одну весьма любопытную характеристику поля макроскопических скоростей таких систем, а именно наличие «противотоков» для достаточно сильно сплюснутых в плоскости вращения эллипсоидов  $2b^2 < a^2$  (см. рис. 24).

Если «обратное» движение не является только свойством описанных однородных моделей, а действительно происходит в перемычках реальных SB-галактик, его можно определить по влиянию на линии поглощения в спектре звездной компоненты бара. Фриманом и Вокулером [206] были предприняты специальные наблюдения спиральной галактики с перемычкой NGC4027. Идея постановки наблюдений была следующей.

Ясно, что обратное среднее движение возможно только благодаря высокой дисперсии скоростей звезд (см. (32) § 1). В то же время дисперсия скоростей газовых облаков, в которых возникают эмиссионные линии, не может быть столь же большой, так как время столкновений между облаками много меньше периода обращения бара. Поэтому газовые облака должны двигаться только в прямом направлении. Таким образом, наклоны линий эмиссии и линий поглощения в спектрах, снятых при положении щели спектрографа вблизи малой оси подходящим образом ориентированного бара, должны быть противоположны: направлены по вращению для линий эмиссии и против вращения — для линий поглощения.

Именно этот эффект и был обнаружен при наблюдениях галактики NGC4027. Возникло, правда, одно кажущееся недоразумение: по величине наклон линий поглощения оказался примерно в 4 раза больше наклона эмиссионных линий, хотя, казалось бы, следовало ожидать приблизительно равных (но противоположных) наклонов. Однако имеется простое объяснение этому факту, заключающееся в следующем [344]. Средняя скорость  $v$  удовлетворяет уравнению (§ 1)

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}] - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Omega^2 \mathbf{R}. \quad (6)$$

Для обратного среднего движения центробежная сила и давление (последний и первый члены правой части (6)) направлены наружу, а гравитационное притяжение и сила Кориолиса — внутрь. Результирующая сила должна давать ускорение, направленное внутрь системы (левая часть (6)). Для быстрого среднего движения наиболее существенный член справа в (6) — это сила Кориолиса.

Пусть радиус кривизны линии тока во вращающейся системе около малой оси бара равен  $R_1$ , а средняя скорость  $v_1$ ; тогда имеем из (6)

$$v_1^2/R_1 \approx 2\Omega v_1, \quad v_1 \approx 2\Omega R_1. \quad (7)$$

Но  $v_1 \approx 2\Omega R_1$  много больше скорости вращения  $\Omega b$ , поскольку  $R_1 \gg b/2$  (аналогично можно показать, что скорость у концов бара  $v_2 \ll \Omega a$ ).

Обнаружение противотоков является сильным аргументом в пользу предложенной Фриманом простейшей модели перемычки. Как отмечено в обзоре Фримана и Вокулера [344], если этот факт подтвердится наблюдениями в других спиральных с перемычками, то это будет означать, что «теперешние рудиментарные идеи о звездной динамике SB-систем, по крайней мере, движутся в верном направлении». Во всяком случае, наличие противотоков накладывает сильные ограничения на возможные теоретические модели SB-галактик.

Другой важный аргумент получен в работе [96] (см. § 2 главы IV), где модель Фримана исследовалась на устойчивость относительно наиболее крупномасштабных типов колебаний. Рис. 24 показывает, что сплюснутости реальных перемычек (и, в частности, WGC4027) лежат в «устойчивой» области.

Согласно Вокулеру (см., например, в [344]), структурные свойства спиральных галактик очень плавно меняются вдоль последовательности типов, в том числе можно проследить плавный переход от обычных S-галактик к SB-галактикам. По мнению Фримана и Вокулера этот факт предполагает, что разные структурные черты спиральных галактик различных типов образуются под действием какого-то одного механизма.

Таким механизмом, в частности, может быть неустойчивость, имеющая «бароподобную» форму в центральной части системы и спиральную на периферии (такая возможность обсуждается в следующем параграфе, разделы 3.5, 3.8). Но бар может, конечно, формироваться и во время пер-



воначального коллапса протогалактики, как это получалось в работах Линя, Местеля, Шу [268] и Линден-Белла [282].

В некоторых S- и SB-галактиках обнаружены крупномасштабные радиальные движения газа. Что касается SB-галактик, то, оказывается, можно достаточно хорошо воспроизвести спиральную структуру, если предположить [201, 344], что текущая наружу вдоль бара материя приобретает необходимый угловой момент вследствие закручивания гравитационным полем бара и затем, покидая бар на его концах, образует отстающие спирали (такая схема, однако, не „работает“ в случае обычных спиралей).

Главной компонентой скорости газовых облаков, покидающих бар, является дрейф вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью (см. формулы (14) § 1):

$$v_{др} = yB_1^2/2\Omega. \quad (8)$$

Напомним, что для звезд, составляющих квазистационарный бар, эту компоненту скорости мы должны были отбросить. Для газовых облаков, напротив, нужно, по-видимому, отбросить колебательную составляющую движения, поскольку она должна быть демпфирована столкновениями. При условии  $A^2 \approx \Omega^2$  из (8) получаем  $v \approx 3,7\Omega y_0$ , что для  $y_0 = a/10$ ,  $\Omega a \approx 150$  км/с дает  $v \approx 60$  км/с, величину того же порядка, что и наблюдаемая скорость газового потока, текущего наружу вдоль бара. Таким образом, выбрасывание газа может в принципе происходить под действием описанного чисто гравитационного механизма.

Движение газовых облаков за пределами перемычки происходит в довольно сложном поле и должно поэтому рассчитываться численно. Облака образуют отстающие спиральные ветви, причем, по мнению Фримана и Вёкулера, получаемая картина оказывается в разумном согласии с наблюдениями для SB(s)-спиралей.

Вытекающая из перемычки материя, которая уносит с собой массу и угловой момент, вызывает медленную эволюцию бара. Фриман [202—204] (а также Хантер [234]) рассчитали соответствующие эволюционные пути. Оказалось, что эволюция приводит в типичном случае к тому, что эллипсоид перемычки становится более коротким и плотным и вращается быстрее, т. е. эволюция SB-систем в описанной схеме идет по пути SBc → SBa. Характерное время эволюции того же порядка, что и галактическое время жизни ( $\sim 10^{10}$  лет).

Гипотеза происхождения спиралей в SB-системах, предложенная Фриманом, не является, конечно, единственной возможностью, хотя он и приводит некоторые аргументы, выделяющие ее среди других (см. также [344]). Можно, например, отметить схему Антонова [5] (повторенную позже Гольдрейхом и Линден-Беллом [210]), согласно которой материя теряется из нейтральных точек потенциала сильно вытянутых перемычек.

### § 3. СПИРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ГАЛАКТИК

Развитие теории равновесия и устойчивости плоских гравитирующих систем в последнее десятилетие происходило в основном с целью понять спиральную структуру галактик. Из накопленного здесь весьма обширного материала мы выбрали только некоторые вопросы<sup>1</sup>, наиболее тесно связанные, на наш взгляд, с предметом книги.

Несмотря на то что в последнее время наметился существенный прогресс в понимании различных механизмов генерации волн плотности и особенностей их распространения, проблема происхождения спиральной

<sup>1</sup> По этой теме в настоящее время уже имеется немало обзоров ([84, 188] и др.).

структуры далека еще даже от качественного разрешения. Существующие в настоящее время точки зрения на эту проблему нередко спорны, однако некоторые из них содержат конструктивные элементы. По этой причине в настоящем параграфе не отдано предпочтения ни одному из известных подходов к проблеме спиральной структуры, а по возможности беспристрастно изложены наиболее развитые из них.

### 3.1. О «МАТЕРИАЛЬНОЙ» И «ВОЛНОВОЙ» ТОЧКАХ ЗРЕНИЯ НА ПРИРОДУ СПИРАЛЬНЫХ РУКАВОВ

В настоящее время имеются конкурирующие возможности для объяснения природы спиральных рукавов в галактиках: либо они представляют собой *материальные образования* (звезды или газ вместе с магнитным полем), движущиеся в каждой точке с локальной скоростью вращения галактики, либо спиральные рукава суть *волны плотности*, вращающиеся твердотельно независимо от дифференциального вращения галактики.

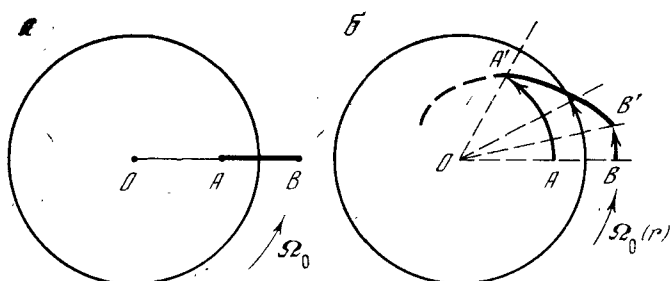


Рис. 62. Растягивание начального уплотнения (а) в отрезок отстающей спирали  $A'B'$  (б) в дифференциально-вращающемся диске с  $\Omega_0 < 0$

Первая точка зрения была подробно исследована в работах Гольдрейха и Линден-Белла [209, 210] (для газовых дисков) и Тоомре [333] (для звездных дисков). Вторая точка зрения, впервые высказанная Линдбладом, получила развитие прежде всего в работах Линя и сотрудников [267—272], Калнайса [250], Контопулоса [187—189] и других.

Во всех перечисленных работах развивалась, по существу, чисто гравитационная теория спиральной структуры, в которой пренебрегается всеми силами другой природы, в том числе галактическим магнитным полем<sup>1</sup>. По-видимому, это оправдано как первое приближение.

**1. «Материальная» (регенеративная) теория спиралей.** Более подробное изложение начнем с первой из упомянутых выше точек зрения на природу спиральных ветвей в галактиках. Хотя она, скорее всего, не верна (что уже признается некоторыми бывшими приверженцами этой точки зрения), однако отдельные элементы ее используются, например, в современном варианте теории волн плотности Линя [271], который в некотором смысле можно рассматривать как своеобразный синтез обоих подходов (см. ниже, с. 380). Ясно, что любое образование, движущееся вместе с «холодной» (см. ниже, раздел 3.2) дифференциально-вращающейся галактикой, неизбежно будет растягиваться в отрезки отстающих (см. рис. 62) спиралей и в конце концов исчезнет, полностью растворившись в галактике. Такие спиральные рукава будут, следовательно, короткоживущими: типичное время их жизни порядка периода обращения галактики ( $\sim 10^8$  лет). В то же время считается, что возраст галактик  $\sim 10^{10}$  лет. Маловероятно, чтобы галактики все вместе «сговорились»

<sup>1</sup> Примером альтернативной теории спиральных ветвей в галактиках является магнитная теория Пиддингтона [303, 304].

быть спиральными одновременно в течение очень короткого промежутка времени. Но тогда остается заключить, что спиральная структура должна постоянно или периодически возобновляться (регенерироваться) в галактике.

Подчеркнем, что сказанное справедливо для чисто гравитационных теорий; наличие достаточно сильного магнитного поля, например, может предохранить газовые спирали от разрушения дифференциальным вращением.

Наиболее разработанная попытка построения регенеративной теории газовых спиралей принадлежит Гольдрейху и Линден-Беллу [210]. Они предполагают, что газовый слой вращается в сильном внешнем гравитационном поле (которое считается заданным и не подверженным возмущениям). Теория основана на локальном анализе гидродинамических уравнений и уравнения Пуассона. Вводятся подвижные оси координат  $x, y$ , которые искривляются вместе с дифференциально-вращающимся потоком. Исследуется временная эволюция возмущения, пространственная форма которого  $\sim e^{i(k_x \tilde{x} + k_y \tilde{y})}$  считается неизменной в подвижной системе. Эта эволюция напоминает зарождение, нарастание и, наконец, распад спиральных рукавов<sup>1</sup>.

Мы пока не затрагивали вопроса о механизме образования (или регенерации) спиральных рукавов. Целью работы Тоомре [333] была проверка гипотезы образования спиральной структуры вследствие гравитационной неустойчивости. Тоомре вычислил (см. раздел 4.1 главы V) минимальную дисперсию радиальной скорости, необходимую для полного подавления всех аксиально-симметричных неустойчивостей, равную  $3,36 G\sigma_0/k$ . Из этого выражения, используя наблюдательные  $\sigma_0 \sim 50 \div 65 M_\odot/\text{пс}^2$  и  $k \sim 27 \div 32 \text{ км/с} \cdot \text{кпс}$ , можно вычислить минимум для солнечной окрестности нашей Галактики; он оказался равным примерно  $35 \text{ км/с}$  (более точная оценка получена позднее Шу). Но в этой же области лежит и средняя дисперсия скоростей звезд, наблюдаемая в солнечной окрестности. Кроме того, как видно из формулы (50) раздела 4.1 (рис. 32), наиболее трудно стабилизируются радиальные возмущения с длинами волн порядка  $\lambda \sim 0,55 \lambda_T$ , что вблизи Солнца составляет  $5-8 \text{ кпс}$ . В то же время радиальные возмущения звездного диска с  $\lambda \sim 2 \text{ кпс}$  (т. е. с длиной волны порядка наблюдаемого расстояния между рукавами) заведомо должны быть локально устойчивыми. Эти результаты Тоомре использует в качестве аргумента против предположения о связи спиральной структуры с гравитационной неустойчивостью.

Однако такое заключение Тоомре (сделанное им, правда, с оговорками) уязвимо для критики. Мы уже отмечали это в разделе 4.3 главы V, но главное возражение было выдвинуто Лиңем и Шу [267], и оно привело их к альтернативной, волновой теории спиральной структуры в нашей Галактике (см. ниже).

**2. Теория волн плотности.** Лиңь и Шу [267] обратили внимание на следующее обстоятельство. Если применить критерий Тоомре для области, сравнительно близкой к центру Галактики,  $r \sim 3 \div 5 \text{ кпс}$ , то для минимальной дисперсии скоростей звезд, которая делает эту область локально устойчивой, получится нереально большая величина  $c_r \sim 90 \text{ км/с}$ . В самом деле, столь «горячие» звезды должны были бы за время  $t \sim 10^9$  лет достичь солнечной окрестности Галактики, но в действительности, как мы знаем, таких звезд здесь нет (в сколько-нибудь заметном количестве). Отсюда следует сделать вывод, что дисперсия скоростей вблизи от центра меньше  $c_{r \text{ min}}$ , и, следовательно, эта область локально неустойчива. В то же время, как показал Тоомре, солнечная окрестность галактического диска является локально устойчивой. Одновременное существование неустойчивых и устойчивых областей диска может приве-

<sup>1</sup> Теория Гольдрейха и Линден-Белла, однако, была подвергнута критике (см. [233]).

сти к *стационарной* (или *квазистационарной*) волне плотности. В этом и состояла первоначальная идея Линя и Шу [267], разработка которой в конце концов привела к некоторой теории *установившихся* волн плотности в галактиках (основанной на анализе коротковолновых возмущений диска).

Спиральные волны плотности представляют собой коллективные колебания диска вида

$$\sigma_1 \sim \sigma_1 \exp \{ -i(\omega t - m\phi + \psi(r)) \}, \quad (1)$$

наложенные на стационарный фон  $\sigma_0(r)$ . Здесь  $\tilde{\sigma}_1$  — амплитуда,  $\psi$  — фаза,  $\omega$  — частота,  $m$  — азимутальное число, равное числу рукавов. Из (1) видно, что спиральная волна вращается с угловой скоростью  $\omega/m$ , не изменяя со временем своей формы. Поскольку в этой теории частота волны  $\omega$  рассматривается как постоянная, локальное дисперсионное уравнение определяет волновое число как функцию радиуса. Например, для холодного диска, согласно разделу 2.2 главы V,

$$k(r) = \frac{\kappa^2(r) - [\omega - m\Omega(r)]^2}{2\pi G\sigma_0(r)}. \quad (2)$$

Как мы уже знаем из раздела 4.1, дисперсионное уравнение (2), на котором основывался первоначальный анализ Линя и Шу [267], в последующих работах было значительно усовершенствовано путем введения различного типа «редукционных» факторов для звезд и учета газовой составляющей системы. Сравнение теории с данными наблюдений по нашей Галактике выполнено Линем, Шу и Юанем [271], а с данными некоторых других галактик — Шу с соавторами [326]. Краткое изложение результатов этого сравнения мы дадим немного позже.

### 3.2. О «ДВУХРУКАВНОСТИ» СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Как уже отмечалось, идея о спиральных *волнах* плотности была высказана Линдбладом. В последнее время, однако, по ряду причин его роль в создании теории спиральной структуры галактик часто недооценивается. Линден-Белл и Калнайс в работе [289] напоминают о решающем вкладе Линдבלада в теорию и очень ясно излагают его идеи, пользуясь более современной терминологией. В частности, они отмечают, что теория (в том числе Линя и других) фактически обязана Линдбладу объяснением преимущества двухрукавной структуры.

Можно выделить два различных аспекта при рассмотрении эволюции начальных возмущений плотности [251]:

1) кинематическая эволюция, при рассмотрении которой мы пренебрегаем всякими силами, связанными с самим возмущением (в чисто гравитационной теории это пренебрежение самогравитацией);

2) динамическая эволюция, которая учитывает влияние возмущенного гравитационного поля.

Начнем с первого — кинематического — аспекта эволюции. Как мы сейчас увидим, эта эволюция в звездных системах может в принципе происходить совсем не так, как в газовых (см. рис. 62). Наша интуиция, основанная на привычных для нас гидродинамических примерах, говорит, что любое начальное возмущение должно закрутиться и исчезнуть из-за дифференциальности вращения галактики за время порядка одного оборота. Мы увидим, однако, что действительная судьба произвольных возмущений в галактике не представляется столь очевидной, и привычная интуиция здесь иногда отказывает.

Она игнорирует следующую существенную разницу между газовой и бесстолкновительной системами [251]: вязкие силы, например, в чашке чая заставляют жидкие элементы двигаться по круговым орбитам, в то

время как звезды в галактике, помимо вращения вокруг центра, могут еще колебаться в радиальном направлении. Причиной закручивания и «растворения» первоначальной картины движения в чашке чая является, конечно, различие в угловых скоростях вращения жидких элементов на разных радиусах. Тот же механизм должен был бы действовать и в галактике, если бы отсутствовали радиальные колебания. Но наличие радиальных колебаний делает ситуацию в галактике более сложной и не такой очевидной, несмотря на то, что радиальные скорости в галактиках обычно на порядок меньше круговых скоростей. Дело в том, что для явления «закручивания» существенны не скорости, а, скорее, частоты колебаний и, главное, полная ширина «спектра» частот (разных для звезд на разных расстояниях от центра галактики и т. п.), а эти-то величины для радиальных и круговых невозмущенных движений в галактиках сравнимы. В любой фиксированной точке галактики наблюдаются все возможные линейные комбинации этих частот, что и усложняет результирующие движения в галактике. Оказывается, могут осуществляться самые различные, в том числе неожиданные, возможности. Можно, например, создать в галактике возмущения определенного типа, которые имеют движение, противоположное вращению галактики, так что дифференциальное вращение превращает их в лидирующие структуры. Этот пример совсем противоречит нашей первоначальной интуиции, которая «предсказывает» отстающие спирали.

Перейдем к количественному описанию кинематики, используя переменные действие — угол (см. [289]). Переменные действия вводятся следующим образом:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2E - 2U - \frac{L^2}{r^2}} dr, \quad (1)$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = L_2 \equiv L. \quad (2)$$

Они являются функциями интегралов движения  $E$ ,  $L$  и потому сами есть интегралы движения. Гамильтониан зависит только от  $J_i$ , так что уравнения для угловых переменных  $\omega_i$  таковы:

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial H_0(J_1, J_2)}{\partial J_i} \equiv \Omega_i(J_1, J_2) = \text{const.} \quad (3)$$

Углы  $\omega_i$  меняются на  $2\pi$  за один период колебаний. Если орбиты почти круговые ( $J_1/J_2 \ll 1$ ), они могут быть представлены эпициклами [289], и тогда  $\Omega_1 \approx \kappa$  — эпициклической частоте.  $\Omega_2 = \Omega$  — угловой скорости вращения.

Любая однозначная функция  $g$  точки в фазовом пространстве должна быть периодична по угловым переменным  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  (с периодами  $2\pi$ ). Следовательно, справедливо разложение Фурье

$$g(J_i, \omega_i) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l, m=-\infty}^{\infty} g_{lm}(J_i) \exp[i(l\omega_1 + m\omega_2)], \quad (4)$$

где

$$g_{lm}(J_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(J_i, \omega_i) \exp[-i(l\omega_1 + m\omega_2)] d\omega_1 d\omega_2.$$

Если  $g(J_i, \omega_i)$  представляет собой возмущение галактики в момент  $t=0$ , то последующая (кинематическая!) эволюция представляет простой перенос этого возмущения звездами вдоль их невозмущенных орбит. Этот вывод можно получить и как формальное следствие кинетического уравнения, которое в рассматриваемом случае имеет вид  $df/dt=0$ , где

$d/dt$  — лагранжева производная вдоль невозмущенных траекторий звезд. Примем эйлеровское описание, т. е. будем следить за изменением функции  $g(J, \omega_i t)$ , находясь в фиксированной точке фазового пространства, а не следуя за фазовыми траекториями звезд (как в лагранжевом подходе). Тогда значение  $g$  в выбранной точке в некоторый более поздний момент времени  $t > 0$  будет равно значению  $g$  в том элементе фазового пространства в момент  $t=0$ , который в момент  $t$  пришел в рассматриваемую точку. Из (4) следует, что в момент  $t=0$  этот элемент был в точке  $(J_i, \omega_i - \Omega_i t)$ . Поэтому

$$g(J, \omega_i, t) = g(J, \omega_i - \Omega_i t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{lm} g_{lm}(J) \exp [il(\omega_1 - \Omega_1 t) + im(\omega_2 - \Omega_2 t)]. \quad (5)$$

Отсюда видно, что галактику можно рассматривать как бесконечную систему гармонических осцилляторов, причем при кинематическом описании эволюции возмущений, т. е. в пренебрежении самогравитацией, эти осцилляторы являются свободными (связь осуществляется как раз через самосогласованный возмущенный гравитационный потенциал). Осцилляторы можно «перенумеровать» четверками чисел  $(J_1, J_2, l, m)$ , из которых первые два  $(J_1, J_2)$  могут изменяться непрерывно, а последние представляют пары целых чисел (положительных или отрицательных). Амплитуда и фаза одного такого  $(J_1, J_2, l, m)$ -осциллятора определяется функцией  $g_{lm}(J_1, J_2)$ , а частота равна  $(l\Omega_1 + m\Omega_2)$ . Соответствующая осциллятору волна плотности вращается с угловой скоростью  $(l/m)\Omega_1 + \Omega_2$ ;  $m$  есть угловая периодичность волны, а  $l$  определяет радиальную структуру.

Допустим, что в галактике задано какое-либо *гладкое* возмущение. Очевидно, что в большинстве случаев (исключая только очень специальные) наличие такого возмущения эквивалентно возбуждению континуума осцилляторов описанного выше типа. Это в свою очередь означает, что плотность, связанная с возмущением, состоит из континуума вращающихся волн. Эволюция плотности будет характеризоваться разбиением первоначальной гладкой картины на все более мелкие масштабы. «Растворение» первоначального распределения можно описать как интерференцию или фазовое перемешивание различных гармонических компонент (аналогичное явление изучалось, например, в физике плазмы). Характерное время этого процесса есть, грубо говоря, средняя обратная угловая скорость возмущения в рассматриваемой области фазового пространства. Единственный остающийся после полного перемешивания эффект от возмущения связан с  $g_{00}$ -членом в (5).

Рассмотрение области частот, связанных с типичной плоской галактикой, показывает, что процесс перемешивания *для большинства* возмущений имеет, как правило, временную шкалу порядка одного периода обращения, что, казалось бы, полностью соответствует нашей интуиции.

Важно, однако, что из этого правила есть *исключение*, которое соответствует  $(l=-1, m=2)$ -членам в (5). Линдبلاد показал [273], что линейная комбинация  $\Delta\Omega \equiv \kappa - 2\Omega$  остается приблизительно постоянной на значительной части Галактики (кроме того,  $\Delta\Omega \ll \Omega$ ). Поэтому двухрукавные возмущения могут существовать в Галактике в течение многих оборотов (в отличие от всех прочих возмущений). Видно, таким образом, что наша интуиция в данном случае не учла возможности близкого совпадения различных гармоник радиальных колебаний и кругового вращения звезд галактики. Конечно, этот замечательный факт показался бы нам априори чем-то случайным, и мы его отбросили бы. Тем не менее именно такая «случайная» ситуация осуществляется в действительности, и объяснение этого факта представляет собой одну из наиболее важных (и нерешенных пока) проблем будущей теории происхождения и эволюции спиральных галактик. Относительное постоянство  $\Delta\Omega \equiv (\kappa - 2\Omega)$  свя-

зано с соответствующим распределением плотности в плоских галактиках.

В существующей в настоящее время теории установившихся спиральных волн этот факт никак не объясняется и берется как данный. Он, по-видимому, дает объяснение, почему в этих системах превалируют двухрукавные формы. Требование стабильности галактики относительно аксиально-симметричных возмущений [333] ограничивает эффект, который данное силовое поле может произвести, особенно на самых коротких пространственных масштабах. Уменьшение величины эффекта может быть компенсировано более длительным временем, в течение которого оно может дать в результате данный отклик. Поэтому устойчивый, долго

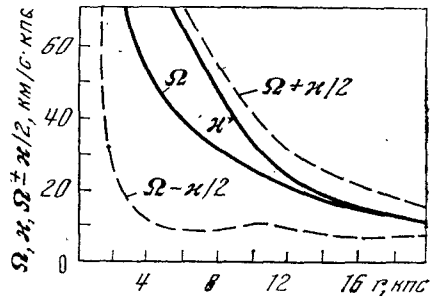


Рис. 63. Кривая вращения нашей Галактики согласно модели Шмидта [271]

Представлены также эпидрические частота  $\kappa$  и линдбладовские комбинации  $\Omega \pm \kappa/2$ .

неразрушаемый дифференциальным вращением характер двухрукавных возмущений делает их наиболее вероятными самосогласованными возмущениями. Самогравитация волны в этом случае может быть сравнительно скромной, чтобы преодолеть влияние остающегося слабого «шира» и дать однородное вращение спирального узора.

Пример, который кажется противоречащим интуиции, есть любая однорукавная структура, образованная осцилляторами ( $l=1, m=1$ ). Такая структура вращается со скоростью  $\Omega_p = \Omega - \kappa \approx -\Omega$ , т. е. в «обратную» сторону, и закручивается в «лидирующую» сторону.

В теории Линя и Шу выделенность двухрукавных возмущений формально следует из условия  $v^2 < 1$ , т. е.

$$\Omega - \frac{\kappa}{m} < \Omega_p < \Omega + \frac{\kappa}{m}, \quad (6)$$

( $\Omega_p = \omega/m$  — угловая скорость волны), которое выделяет «главную» часть спиральной картины. Если использовать  $\Omega(r)$ ,  $\kappa(r)$  и  $\Omega \pm \kappa/2$  из модели Шмидта [319] (рис. 63), то для  $m=2$  спиральный узор (6) будет занимать область от  $r=4$  кпс до  $r \geq 20$  кпс при  $\Omega_p = 11$  км/с·кпс. В то же время<sup>1</sup> для всех  $m > 2$  главная часть спиральной картины будет иметь совсем малую пространственную протяженность, причем независимо от выбора  $\Omega_p$ . Очевидно, что указанная причина выделенности моды  $m=2$ , по существу, та же самая, что и в предыдущем обсуждении.

### 3.3 ОСНОВНЫЕ ТРУДНОСТИ ВОЛНОВОЙ ТЕОРИИ СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ЛИНЯ И ШУ

**1. Антиспиральная теорема.** Справедливость гравитационных теорий спиралей была поставлена под сомнение Линден-Беллом и Острайкером [287], доказавшими так называемую антиспиральную теорему, которая гласит, что спиральная форма не может существовать как нейтральная мода колебаний дифференциально-вращающихся и недиссипативных газовых систем.

<sup>1</sup> Однорукавные возмущения требуют специального рассмотрения.

Интерпретация этой трудности волновой теории Линя и Шу содержится в работе Тоомре [334] (а также Шу [325], см. ниже, п. 2), который продемонстрировал, что волны спиральной формы (и в газовом, и в звездном диске) распространяются в радиальном направлении с достаточно большой групповой скоростью, так что даже существующие спиральные волны должны в конце концов исчезнуть.

Обратимся сначала к «прямому» выводу антиспиральной теоремы [324] в случае звездного диска, аналогичному выводу для газового случая [287]. Основное интегральное уравнение для нормальных мод звездного диска (выведенное Шу [324] и Калнайсом [249]) есть уравнение (38) разд. 4.2 главы V. Нас дальше интересует случай нейтральных колебаний в отсутствие резонансов. В этом случае ядро  $K_{m, \omega}(r, a)$ , по (38) — (39) раздела 4.2, будет действительным. Тогда имеет место антиспиральная теорема типа доказанной Линден-Беллом и Острайкером [287]. Беря уравнение, комплексно-сопряженное уравнению (38) раздела 4.2 главы V, легко показать, что если  $\tilde{\sigma}_1(r)$  является решением, то и комплексно-сопряженное  $\tilde{\sigma}_1^*(r)$  тоже будет решением. Если  $\omega$  невырождена, то  $\tilde{\sigma}_1^*(r)$  может отличаться от  $\tilde{\sigma}_1(r)$  только комплексной константой (с модулем единица):  $\tilde{\sigma}_1^*(r) = e^{-2i\chi} \tilde{\sigma}_1(r)$ , где  $\chi$  — некоторая действительная константа. Приравнявая аргументы в этом равенстве, получим  $\arg\{\tilde{\sigma}_1(r)\} = \chi$ . Так как фаза  $\tilde{\sigma}_1(r)$  строго постоянна, эта нормальная мода не имеет спиральной формы, она имеет вид «тележного колеса». Если же  $\omega$  вырождено и  $\sigma_1, \sigma_1^*$  линейно независимы, они должны соответствовать спиралам противоположной закрученности. Поэтому можно принять в качестве линейно независимых чисто действительные решения (и следовательно, неспиральные)

$$\frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_1^*), \quad \frac{1}{2i} (\tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_1^*). \quad (7)$$

Если же есть резонансные звезды, такой анализ не годится, и аргументы, приводящие к антиспиральной теореме, неприменимы. Это и не удивительно. Ведь антиспиральная теорема является в основном отражением временной обратимости уравнений движения. Если мы обратим направление времени и одновременно «перевернем» галактику (отразим все движения в меридиональной плоскости)  $\Phi \rightarrow -\Phi$ , то придем к состоянию, где на такой же стационарный фон (включая направление вращения) наложено возмущение с противоположным направлением закручивания спиралей. Частоты колебаний в исходном и преобразованном состояниях должны совпадать, и нет оснований отдавать предпочтение одному из них. Соответствующие решения уравнений для нормальных мод должны быть, вообще говоря, антиспиральными. Можно сказать, что для нейтральных колебаний нет «стрелы времени» и нет преимущественного направления закручивания спиралей по отношению к движению материи.

Когда резонансы существуют, необходимо учитывать, что эффекты взаимодействия волны с резонансными звездами начались в прошлом: это и определяет «стрелу времени». Подобным же образом неустойчивость может также ввести различие между лидирующими и отстающими спиралами.

Итак, «антиспиральная теорема», аналогичная «газовой» теореме Линден-Белла — Острайкера [287], применима в линейной теории ко всем нейтральным модам, для которых нет резонансов.

**2. Снос волновых пакетов.** Здесь мы рассмотрим, пожалуй, самую существенную трудность первоначальной теории спиральных волн плотности Линя и Шу, на которую указал Тоомре [334]. Он обратил внимание на то, что волновые пакеты Линя и Шу (с частотами, лежащими в ин-



тервале  $\omega, \omega + \Delta\omega$ ) должны сноситься в радиальном направлении с групповой скоростью  $c_g = d\omega/dk$ . Конкретнее, аргументация Тоомре состоит в следующем. Допустим, что дисперсионное уравнение  $\omega = f(k, r; m)$  известно.

Тогда, заменяя (как в геометрической оптике) в этом уравнении  $\omega \rightarrow \partial\Phi/\partial t, k \rightarrow -\partial\Phi/\partial r$ , где  $\Phi(r, t)$  — ВКБ-фаза волнового пакета, получим  $\partial\Phi/\partial t = f(-\partial\Phi/\partial r, r; m)$ . Отсюда дифференцированием по  $t$  и  $r$  находим уравнения

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)_r \frac{\partial\omega}{\partial r} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial k}\right)_r \frac{\partial k}{\partial r} = -\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_k. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) показывают, что информация о частоте и волновом числе в медленно эволюционирующем волновом пакете распространяется по радиусу со скоростью  $dr/dt = (\partial f/\partial k)_r \equiv c_g(k, r; m)$ . Характеристики этих уравнений имеют в данной точке  $(r, t)$  наклон, равный  $dr/dt = c_g$ . Вдоль каждой характеристической кривой, согласно (8), частота  $\omega$  остается постоянной.

Введем, как в [334], обозначение  $|v| = N|\xi|; Q$  для функций, графики которых представлены на рис. 43. Тогда дисперсионное уравнение Лия и Шу запишется как

$$\omega = m\Omega(r) + \text{sgn}(v) \kappa(r) N(|\xi|; Q). \quad (10)$$

Отсюда

$$c_g = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \text{sgn}(\zeta v) \left[ \frac{\kappa(r)}{k_T(r)} \right] \frac{\partial N}{\partial |\xi|}, \quad (11)$$

а безразмерное волновое число  $\zeta \equiv k/k_T(r)$  изменяется вдоль характеристической кривой согласно

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{\kappa(r)}{k_T(r)} \left( \frac{dv}{dr} - \text{sgn}(v) \frac{\partial N}{\partial Q} \frac{dQ}{dr} \right). \quad (12)$$

Чтобы получить представление о типичных характеристических кривых, рассмотрим [334] простую модель галактики, в которой  $\Omega(r) = V/r$ ,  $\sigma_0(r) = V^2/2\pi G r$ ,  $V = \text{const}$ . Допустим также, что параметр стабильности Тоомре  $Q$  не зависит от радиуса:  $Q \neq Q(r)$ . Для такой модели  $\kappa(r)/k_T(r) = V/\sqrt{2}$ , так что зависимость  $v(r)$  линейна:  $v = \frac{m}{V\sqrt{2}}[(r/r_c) - 1]$ , где  $r_c$  — радиус коротации, на котором  $\omega/m = \Omega(r)$ . Кроме того, из уравнения (12) следует, что в данном случае зависимость безразмерного волнового числа  $\zeta$  от времени  $t$  также линейна:  $\zeta = \omega/2t + \text{const}$ . Поэтому задача получения характеристических кривых здесь сводится просто к замене обозначений осей  $v, \zeta$  на рис. 43, изображающем дисперсионные кривые для разных  $Q$ , на  $r, t$ .

Рис. 64 представляет систему характеристических кривых, соответствующих  $Q = 1, 2$ . Внутренний линдбладовский резонанс  $v = -1$  приходится на  $r/r_c = 1 - \frac{1}{V\sqrt{2}} \approx 0,293$ , а внешний  $v = +1$  — на  $r/r_c \approx 1,707$ . Между этими точками находится главная часть спиральной структуры (по терминологии Лия и Шу). Вне этой области ( $|v| > 1$ ) не существует колеблющихся по радиусу решений ВКБ-типа. Из рис. 64 видно, что при  $Q > 1$  имеется еще одна запрещенная область, которая в приведенном примере лежит в интервале  $0,69 < r/r_c < 1,31$ . Она, как мы видели, явля-

ется следствием того, что при  $Q > 1$  локальная самогравитация не способна уменьшить  $|v|$  ниже определенного минимума (см. рис. 43).

Сделаем теперь количественную оценку  $c_g$  применительно к солнечной окрестности нашей Галактики. Примем, следуя Линю и Шу [271],  $\Omega_p = \omega/2 \approx 12,5$  км/с·кпс, так что коротационный радиус ( $v=0$ ) равен  $r_c \approx 17$  кпс, т. е. область, соответствующая  $v > 0$ , лежит фактически вне Галактики, и ею можно не интересоваться. Так как по [271] дисперсия  $c_r \approx 35$  км/с приблизительно соответствует границе устойчивости ( $Q \approx 1,0$ ), поэтому  $\kappa/k_T \approx (0,2857)^{-1/2} (c_r/Q) \approx 65$  км/с, а  $\lambda_T \approx 13$  кпс. Поскольку  $\Omega_p = 12,5$  км/с·кпс отвечает для солнечной окрестности Галактики  $\lambda = 3-4$  кпс, то  $\zeta = \kappa/k_T \approx 4$ . Наклон кривой  $N(|\zeta|)$  (рис. 43) в точке

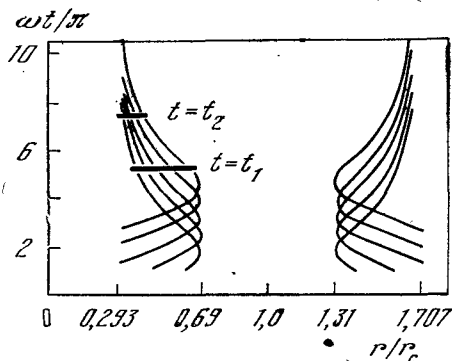


Рис. 64. Некоторые характерные кривые ( $m=2$ ) для диска с  $Q=1,2$  согласно Тоомре [334]

$\zeta=4: \partial N/\partial |\zeta| \sim 0,15$ . Полученные данные позволяют получить искомую оценку  $c_g \approx -10$  км/с, где знак минус означает, что волновой пакет должен распространяться к центру Галактики.

Таким образом, за время  $\sim 10^9$  лет (т. е. всего за 4 оборота Галактики вокруг центра — галактических года) первоначальное спиральное возмущение должно перенестись с периферии к центру, пройдя расстояние  $\sim 10$  кпс.

Для более подробного рассмотрения затронутых выше вопросов требуется решение кинетического уравнения и уравнения Пуассона с точностью до двух порядков по малым параметрам  $1/kr$  и  $c_r/r\Omega$ , т. е. корректный учет амплитуды возмущения (предэкспонент в ВКБ-методе). Необходимая работа была выполнена Шу [334] и Марком [290].

Займемся сначала уравнением Пуассона. Пусть возмущенный потенциал в плоскости диска  $\Phi_1(r, \varphi, z=0, t) = \Phi(r) \exp[-i(\omega t - m\varphi)]$ . Этот потенциал имеет форму коротковолновой (туго закрученной) спирали, если в представлении  $\Phi(r) = A(r) \exp[i\psi(r)]$  ( $A(r)$  и  $\psi(r)$  — действительные функции) скорость изменения фазы  $\psi(r)$  велика по сравнению со скоростью изменения амплитуды  $A(r)$ . Таким образом, требуем, чтобы было  $|r\psi'(r)| \gg 1$ . Тогда можно показать (подробные выкладки см. в разделе 5.1 Приложения), что с точностью до двух порядков по  $1/kr$  имеет место следующее соотношение между возмущенными потенциалом и поверхностной плотностью  $\sigma_1(r, \varphi, t) = \sigma(r) \cdot \exp[-i(\omega t - m\varphi)]$ :

$$\sigma(r) = -\frac{|k|\Phi(r)}{2\pi G} \left\{ 1 - \frac{i}{kr} \frac{d}{d \ln r} \ln [r^{1/2} A(r)] \right\}. \quad (13)$$

В низшем приближении ВКБ отсюда следует старый результат: максимумы поверхностной плотности соответствуют минимумам потенциала.

Теперь рассмотрим отклик звездного диска на заданное возмущение потенциала. Вычисления [325, 290] являются довольно громоздкими, и мы их отнесли поэтому в Приложения (см. там раздел 5.2). Здесь мы ограничимся только описанием сделанных приближений и полученных результатов.

В качестве функции распределения невозмущенного состояния в работе Шу [325] принято модифицированное распределение Шварцшильда

$$f_0(E, L) = \begin{cases} P_0(r_0) \exp[-\varepsilon/c_0^2(r_0)], & \varepsilon < -E(r_0), \\ 0, & \varepsilon > -E(r_0). \end{cases} \quad (14)$$

«Эпициклические» интегралы  $r_0$  и  $\varepsilon$  определяются как функции  $E$  и  $L$  из уравнений

$$r_0^2 \Omega^2(r_0) = L, \quad \varepsilon = E - E_c(r_0), \quad E_c(r_0) = \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2(r_0) + \Phi_0(r_0),$$

где  $r_0 \Omega^2(r_0) = \partial \Phi_0 / \partial r_0$ . Смысл  $E_c(r_0)$  очевиден: это энергия частицы на точно круговой орбите радиуса  $r_0$ ; соответственно  $\varepsilon$  есть отклонение точной энергии частицы  $E$  от  $E_c$ . Форма функций  $P_0(r_0)$  и  $c_0(r_0)$  всегда может быть выбрана так, чтобы удовлетворить любым разумным поперечной плотности и дисперсии радиальных скоростей.

В непосредственной близости от резонансов, где  $\nu(r_0)$  есть целое число или нуль, может иметь место существенное поглощение (или, наоборот, усиление) волн плотности. Эти эффекты подробно рассматриваются в разделе 3.6. Ниже мы ограничимся «главной областью» спиральной структуры  $r_{-1} < r < r_{+1}$  ( $\nu(r_{-1}) = -1$ ,  $\nu(r_{+1}) = 1$ ), считая влияние резонансов внутри этой области пренебрежимо малым [325]. Далее предполагается, что второй (после  $1/kr$ ) безразмерный параметр задачи  $\varepsilon = \frac{c_0(r_0)}{r_0 \Omega(r_0)}$

тоже мал по сравнению с единицей (что эквивалентно предположению о малости пекулярных скоростей по сравнению с круговой скоростью). Принимая затем гипотезу, что  $\varepsilon \sim |kr|^{-1}$  (так, для солнечной окрестности Галактики  $\varepsilon \sim 0,1$ , а  $|kr|^{-1} \sim 0,06$ ), можно получить (см. раздел 5.2 Приложения) с точностью до первых двух порядков по параметрам  $\varepsilon$ ,  $|rk|^{-1}$ :

$$\sigma(r) = -\frac{k^2 \Phi}{x^2 (1-\nu^2)} \sigma_0 \mathcal{F}_\nu(x) \left\{ 1 - \frac{i}{kr} D_\nu(x) \frac{d}{d \ln r} \ln \left( \frac{\sigma_0 k}{x^2} \frac{\mathcal{F}_\nu}{1-\nu^2} D_\nu r A^2 \right) \right\}, \quad (15)$$

где  $\mathcal{F}_\nu$  — редуцированный фактор (22) раздела 4.1 главы V,  $x = \varepsilon^2 k^2 r^2 = \frac{k^2 c_r^2}{x^2}$ , а

$$D_\nu(x) = -(1-\nu^2) \frac{\nu \pi}{\sin \nu \pi} G'_\nu(x) / \mathcal{F}_\nu(x) = \frac{\partial}{\partial \ln x} \ln [x \mathcal{F}_\nu(x)], \quad (16)$$

$$G_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu s \exp[-x(1 + \cos s)] ds.$$

Учтем, наконец, требование самосогласованности волн плотности. Считая  $\nu^2$  вещественным числом, приравниваем действительную и мнимую части в уравнениях (13) и (15):

$$\frac{k_T}{k} (1-\nu^2) = \mathcal{F}_\nu(x), \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d \ln(r A^2)}{d \ln r} = D_\nu \frac{d}{d \ln r} \ln \left[ \frac{|k|}{k_T} \frac{\mathcal{F}_\nu}{1-\nu^2} D_\nu r A^2 \right]. \quad (18)$$

Первое уравнение — дисперсионное уравнение Линя и Шу — нам уже знакомо. Для маржинально-устойчивого диска это уравнение приводит к соотношению между  $\nu$  и  $\lambda/\lambda_T$ , показанному на рис. 43.

Уравнение (18) определяет радиальное изменение амплитуды волны. С помощью (18) легко показать, что амплитуда плотности  $S(r)$  стационарной волны частоты  $\nu$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r S^2(r)}{k^2(r)} R_\nu(x) \right] = 0, \quad \text{т. е. } r A^2 R_\nu(x) = \text{const}, \quad (19)$$

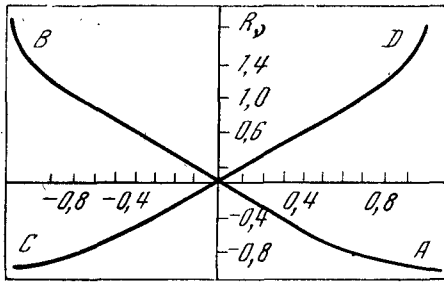


Рис. 65. Функция  $R_v$  [325]

A, B, C, D соответствуют данным на рис. 43

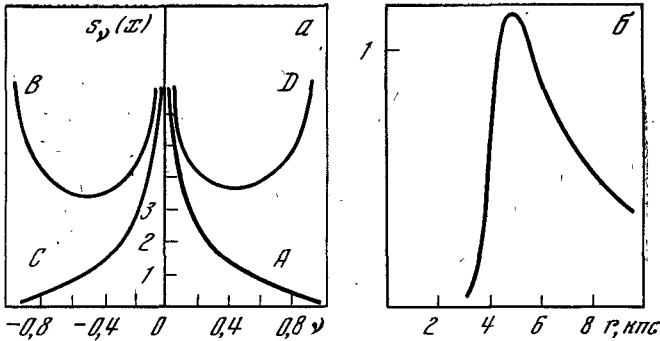


Рис. 66. Амплитуда возмущения поверхностной плотности

a — функция  $S_v$  [325]; A, B, C, D соответствуют рис. 43; б — зависимость величины  $\sigma_1 \cdot \text{Re}k$  от радиуса с учетом резонансного поглощения (для модели Шмидта с  $\Omega_p = 13.5$  км/с·кпс) [290а]

где  $A$  — амплитуда возмущения потенциала ( $A \propto S/k$ ),  $R_v(x) = -\left\{1 + 2 \frac{\partial \ln \mathcal{F}_v(x)}{\partial \ln x}\right\}$  (рис. 65). Изменение амплитуды возмущенной поверхностной плотности, следующее из (19), для маргинально-стабильного диска есть

$$\frac{|S(r)|}{\sigma_0} = \text{const} \cdot r^{-1/2} (\lambda_T \kappa)^{-2} S_v(x),$$

$$S_v(x) = \frac{\lambda_T}{\lambda} [ |R_v(x)| ]^{-1/2} = \frac{(1-v^2)}{\mathcal{F}_v(x) \sqrt{|R_v(x)|}}. \quad (20)$$

Величина  $|S|$  становится большой (формально по (20) бесконечной) около коротационного ( $v=0$ ) и линдбладовских ( $v=\pm 1, \dots$ ) резонансов (рис. 66). Конечно, в непосредственной близости от резонансов выведенные соотношения не пригодны (подробнее см. раздел 3.6). В частности, фиктивной является и упомянутая выше особенность.

По замечанию Шу [325], уравнение (19) настолько выразительно, что было бы удивительно, если бы оно не допускало простой интерпретации. Такая интерпретация была получена Тоомре [334]. В комбинации с дисперсионным уравнением и выражением для групповой скорости  $c_g = \partial\omega/\partial k$  (19) означает, что

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{rc_g \tilde{E}}{\omega - m\Omega} \right) = 0, \quad (21)$$

где положительная величина  $\tilde{E}$  представляет собой плотность волновой

энергии для наблюдателя в локально вращающейся системе:

$$\tilde{E} = \frac{\pi G}{2k_T(r)} S^2 v \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\mathcal{F}_v(x)}{1-v^2} \right). \quad (22)$$

Эта энергия  $\tilde{E}$  может быть вычислена [334] как работа на единицу площади, выполненная между  $t = -\infty$  и  $t = 0$  некоторым сторонним, аксиально-симметричным и очень медленно нарастающим ( $s \rightarrow 0$ ) распределением массы

$$\sigma(x, t) \sim S e^{st} \cos(kx \pm vkt)$$

в плоскости невозмущенного вначале бесконечного звездного диска.

Мы не станем здесь приводить этот элементарный вывод, а сошлемся на имеющуюся прямую аналогию между рассматриваемым случаем и аналогичными формулами в физике плазмы (см., например, [86]). Выражение (22) может быть получено прямо по аналогии с хорошо известным выражением для энергии потенциальных возмущений в плазме

$$W_k = \omega_k \frac{\partial}{\partial \omega_k} \epsilon_0(\omega_k) \frac{|E|^2}{8\pi}, \quad (23)$$

которая равна сумме энергии нерезонансных частиц (для которых по определению  $\omega' \equiv \omega - kv \gg \gamma$ ,  $\gamma$  — инкремент) и электростатической энергии. Здесь величина  $\epsilon_0$  (скалярная диэлектрическая проницаемость) следующим образом определяет отклик системы на потенциал, если рассматривать электростатические (электронные ленгмюровские) волны:

$$\rho = en = -\Phi \frac{k^2}{4\pi} (\epsilon_0 - 1). \quad (24)$$

С (23) можно сопоставить выражение (22) для энергии спиральной волны, использованное Тоомре и построенное, как видно, совершенно аналогичным образом. «Редукционный» фактор  $\mathcal{F}_v(x)$  (точнее,  $\mathcal{F}_v(x)/(1-v^2)$ ) входит в выражение для гравитационного отклика диска на потенциал  $\Phi$ , подобно  $(\epsilon_0 - 1)$  в (24):

$$S(r) = -\Phi \frac{k^2}{\kappa^2} \sigma_0 \frac{\mathcal{F}_v(x)}{(1-v^2)}. \quad (25)$$

Ясно, что, зная «плазменное» выражение (23), мы могли бы сразу написать по аналогии соответствующее «гравитационное» выражение (22). Использование «внутренней» частоты волны  $\nu = (\omega - m\Omega)/\kappa$  вместо  $\omega$  в плоском «плазменном» случае тоже, конечно, вполне естественно.

Формула (21) относится к случаю одиночной временной гармоник (монохроматическая волна,  $\omega = \text{const}$ ). Для суперпозиции таких гармоник из (21) можно вывести<sup>1</sup> и соответствующее утверждение для медленно эволюционирующего возмущения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (c_g A) \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \text{div } c_g A = 0, \quad (26)$$

где  $A \equiv \tilde{E}/(\omega - m\Omega)$ . Отсюда видно, что с групповой скоростью  $c_g$  распространяется плотность «волнового действия»  $A$  (а не сама плотность волновой энергии  $\tilde{E}$ ). Калнайс [251] окончательно прояснил интерпретацию, продемонстрировав, что плотность энергии  $E$  и плотность углового момента  $L$ , отнесенные к инерциальной системе, могут быть выражены через «плотность действия» следующим образом (см. ниже, раздел 3.6):

$$E = \omega A, \quad L = mA. \quad (27)$$

<sup>1</sup> Возникающие при этом интегралы типа  $\int S(r, \omega) \cos[\Psi(r, \omega) - \omega t] d\omega$  вычисляются методом стационарной фазы.

Связь между  $\tilde{E}$  (энергией в системе, которая вращается с локальной угловой скоростью  $\Omega$ ) и  $E, L$  есть

$$\tilde{E} = E - \Omega L. \quad (28)$$

Это соотношение представляет собой обычный закон преобразования энергии при переходе из инерциальной во вращающуюся систему. Закон сохранения волнового действия (26) вместе с уравнением (28) описывают поэтому очевидный факт сохранения волновой энергии и углового момента, отнесенных к инерциальной системе:

$$rc_g \tilde{E} = \text{const}, \quad rc_g L = \text{const}. \quad (29)$$

#### 3.4. СПИРАЛЬНАЯ СТРУКТУРА КАК НЕУСТОЙЧИВАЯ МОДА ДИСКОВЫХ ГАЛАКТИК

В этом разделе излагается подход к проблеме спиральной структуры галактик, который можно рассматривать как альтернативу точке зрения Линя и его сотрудников (хотя и в рамках волновой теории). В нем предполагается, что более естественное и удовлетворительное объяснение происхождения и существования спиральных волн плотности можно получить, если считать их неустойчивыми модами плоских галактик (а не стационарными волновыми пакетами). Такой подход исследовался многими авторами, в частности Калнайсом [250] (см. ещё, например, [96]).

В общем вырисовывается следующая картина возбуждения и поддержания спирального узора в галактиках (альтернативная первоначальной картине Линя). В центральной области, которая при разумных предположениях о величинах дисперсий скоростей звезд остается (в линейном приближении) неустойчивой по отношению к «глобальным» (прежде всего бароподобным) модам (см. раздел 4.3 главы V), образуется овальное искажение формы — бароподобная стоячая волна, частота которой  $\Omega_b$  определяется равновесными параметрами этой области. В свою очередь бар возбуждает главным образом в наиболее плоских и холодных подсистемах галактики отстающую спиральную волну плотности, имеющую сильную закрутку. Установившаяся стационарная амплитуда спиралей определяется, по-видимому, нелинейными или диссипативными (например, образование ударных волн в газовой подсистеме и т. п.) эффектами.

Следует также отметить, что в последнее время появились некоторые подходы, представляющие определенный синтез (или вариации) первоначальной картины Линя и описанной здесь картины — см., например, разделы 3.5, 3.6.

Калнайс [250] изучал численно устойчивость некоторой простой модели галактики M31. Для расстояний  $r > 4$  кпс принятая им дисперсия скоростей звезд была достаточна, чтобы сделать модель устойчивой относительно аксиально-симметричных возмущений. Однако для стабилизации внутренней части требуются большие эксцентриситеты орбит. Вместо того, чтобы экстраполировать эпициклические орбиты к эксцентриситетам, большим 0,2, Калнайс соответственно уменьшает отклик, предполагая, что только часть звезд принимает участие в коллективных модах. Принимая далее, что возмущения малы по амплитуде, он находит собственные моды, решая интегральное уравнение (38) раздела 4.2 главы V.

Двухрукавные возмущения ( $m=2$ ) выделены по причинам, которые мы выше разъяснили (см. раздел 3.2). Калнайс исследует численно [250] так называемую «наибольшую» моду, причем под «наибольшей» модой подразумевается, что гравитационные взаимодействия, связанные с ней, являются самыми «сильными». В свою очередь «сила» взаимодействия измеряется сдвигом угловой скорости спирального узора от его кинема-

тического значения  $\Omega - \kappa/2 \approx 10$  км/с·кпс (последнее получается, если пренебречь гравитационным эффектом возмущения).

Амплитуда такой спирали увеличивается в  $e^2$  раз за  $10^9$  лет. Энергия и угловой момент всего диска, разумеется, сохраняются, но они перераспределяются, выносясь наружу: звезды внутри коротационного радиуса, которые движутся быстрее волны, передают их звездам, находящимся снаружи.

Так как спиральная структура видна наиболее отчетливо в объектах с самыми низкими дисперсиями скоростей, Калнайс вычислил отклик плотности объектов с нулевой дисперсией (ср. с разделом 3.8). При вычислениях принималось, что поверхностная плотность газа постоянна на диске, однако гладкое изменение  $\sigma_0$  с радиусом, по-видимому, не изменит картину сколько-нибудь существенно. Интересным результатом этих вычислений является сильная зависимость возмущенной плотности подсистемы от ее дисперсии скоростей.

Волна плотности в звездном диске представляет собой, по существу, бароподобное искажение центральной области галактики, которая действует на газ. Тугозакрученная картина спиралей и большой контраст плотности в газовой составляющей обязаны, по мнению Калнайса, наличию резонансов. Положение резонансов определяется внутренней частью модели, в то время как инкремент нарастания зависит главным образом от плотности на внешнем резонансе. Уменьшение последней вызывает более медленный инкремент нарастания возмущений.

Поскольку модель определяется кривой вращения, результаты, полученные Калнайсом [250] для М31, могут быть в принципе приложимы и к нашей Галактике (кривые вращения этих двух галактик похожи, по крайней мере от  $r \approx 4$  кпс наружу).

В заключение раздела мы резюмируем основные достоинства и недостатки двух рассмотренных пока подходов к теории спиральной структуры. Главным достоинством теории Линя и соавторов является хорошее согласие сделанных с ее помощью предсказаний с наблюдениями галактик (прежде всего, конечно, нашей Галактики). Что же касается нестабильных мод (типа рассчитанных Калнайсом), то они кажутся сейчас не совместимыми с наблюдениями по Галактике<sup>4</sup>. Нужно, однако, отметить, что это относится лишь к традиционной интерпретации наблюдений. Калнайс [250] и авторы [93, 96] предложили иную интерпретацию, которая, возможно, приведет к картине, согласующейся с теоретической. Во всяком случае, очевидно правильным представляется замечание, что обычное молчаливое предположение о том, что спиральный гравитационный потенциал совпадает с видимыми спиральями (которые образуются молодыми звездами, нейтральным газом, областями ионизованного водорода III и т. п.) necessarily является необходимым следствием гравитационной теории спиралей. Наблюдаемые тугозакрученные спирали могут быть откликом и на более открытое спиральное гравитационное поле. Теория нестабильных мод пока еще недостаточно развита, прежде всего в части, касающейся сравнения с данными наблюдений. В то же время интенсивной «привязке» к наблюдениям теории Линя было специально посвящено большое число работ.

С другой стороны, по крайней мере первоначальный вариант теории Линя сталкивается с принципиальным затруднением — сносом волновых пакетов, связанным с предполагаемым непрерывным спектром вещественных частот  $\omega$ .

<sup>4</sup> Получаются слишком «открытые» спиральные рукава. Необходимо, впрочем, отметить незавершенный характер всех имеющихся в настоящее время вариантов теории спиральных рукавов галактик. Так, еще совершенно недостаточно выяснена роль массивных гало (скрытой массы) для теории спиралей и т. п. (см. следующие разделы, а также эпиграф к этой главе).

Неустойчивые моды не испытывают, очевидно, такой трудности: собственные значения таких мод фиксированы по определению и достаточно далеко отстоят одна от другой (см. раздел 4.2 главы V).

Для «спасения» программы Линя нужен механизм, генерирующий волны. Предложено довольно много разных вариантов [272, 289]. Мы рассмотрим некоторые из них в разделах 3.5—3.7.

### 3.5. ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НА ПЕРИФЕРИИ ГАЛАКТИК

Прежде всего обратимся к новой интерпретации крупномасштабной спиральной структуры, предложенной самим Линем [272]. Картина, нарисованная Линем и излагаемая ниже, вероятно, может осуществляться в галактиках, не имеющих сильного внутреннего линдбладовского резонанса. Мы уже упоминали (в конце раздела 4.1 главы V), что в области внутреннего линдбладовского резонанса имеет место поглощение спиральной волны, которое при определенных условиях (как, например, в нашей Галактике [290]) может быть сильным, уменьшая амплитуду волны до пренебрежимо малого уровня. Для галактик, не имеющих такого резонанса, т. е. обладающих сравнительно гладкой зависимостью поверхностной плотности  $\sigma_s(r)$  от радиуса, без сильной концентрации к центру, распространяющаяся от круга коротации внутрь галактики коротковолновая спиральная волна плотности будет иметь вблизи от центра достаточно возросшую амплитуду (благодаря сохранению действия, см. п. 2 раздела 3.3), чтобы вызвать овальное (бароподобное) искажение распределения массы в центральной области. В свою очередь эта овальная конфигурация (вращающаяся с угловой скоростью спирального узора  $\Omega_p$ ), воздействуя собственным гравитационным полем на галактический диск, вызывает ответную реакцию, причем ее влияние будет особенно сильно чувствоваться во внешних областях галактики, где круговая скорость близка к  $\Omega_p$ . Линь [272] полагает, что именно здесь, на периферии галактик, находится источник спиральных волн. Тем самым цепь обратной связи замыкается, что может привести к установлению стационарной спиральной картины.

Такова вкратце общая идеология нового подхода к интерпретации спиральной структуры, предложенного Линем [272]. Нетрудно видеть, чем этот подход отличается (при всем очевидном сходстве) от рассмотренного в предыдущем разделе. Может быть, в первую очередь это иное расположение источника волн — на периферии галактики. Другим существенным отличием является предположение (в картине Линя) о распространении внутрь галактики квазистационарной группы волн в отличие от самовозбуждения одиночной «глобально»-неустойчивой стоячей волны в альтернативной картине.

Ниже мы рассмотрим один из возможных конкретных механизмов генерации спиралей (также предложенный Линем в [272]) — гравитационную неустойчивость внешних областей галактик. Существенным дополнением к общему наброску теории, содержащемуся в [272], является работа Фелдмана и Линя [199], в которой показано, что бароподобная структура, вращающаяся в центре галактики, вызывает в окрестности круга коротации отстающую спиральную волну (подробнее см. раздел 3.8).

*Гравитационная неустойчивость газа на периферии галактики.* В качестве механизма начального инициирования спиральной структуры Линь рассмотрел сначала [272]<sup>1</sup> джинсовскую неустойчивость во внешних частях галактического диска.

<sup>1</sup> Позднее [199] он отметил, что это лишь один из многих возможных механизмов. Кроме того, началом спиральной структуры могла бы быть, например, просто начальная иррегулярность галактики.



Внешние, периферические части диска, вероятно, действительно являются неустойчивыми, поскольку процент звезд там уменьшен и имеющейся дисперсии скоростей звезд (а также степени турбулентности газа), по-видимому, не хватает для стабилизации джинсовской неустойчивости. Последняя вызывает структурные иррегулярности, которые, благодаря сильному дифференциальному вращению галактики, растягиваются в куски отстающих спиральных рукавов, вращающиеся в основном с локальной угловой скоростью галактики (см. раздел 3.1). Возможно, что такие иррегулярности действительно существуют. В качестве наблюдательного свидетельства для этого утверждения Линь отмечает связующие звенья между главными спиральными рукавами, часто наблюдаемые во внешних частях многих галактик. В частности, Орионов рукав в нашей Галактике есть, по мнению Линя, как раз одна из таких межрукавных ветвей.

Возмущение в форме куска «ковращающегося» спирального рукава должно, естественно, оказывать влияние на другие части галактики и может инициировать волны плотности. Однако в общем случае его влияние должно быть, как можно ожидать, ограниченным, если нет некоторой формы резонанса.

Разложим возмущение в ряд по угловым гармоникам  $\sim e^{im\phi}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) и сосредоточим внимание на какой-либо одной из них ( $m$ ). Звезды, находящиеся на расстоянии  $r$  от центра галактики, будут чувствовать возмущенное гравитационное поле (от этой гармоники) на угловой частоте  $f = m[\Omega(r) - \Omega_0]$ , где  $\Omega_0$  — угловая скорость в месте нахождения возмущающего куска спирали. Резонанс имеется в том случае, если эта частота равна эпициклической частоте  $\kappa(r)$ ; в этом случае можно ожидать сильного влияния возмущения на данном радиусе  $r$ .

Запишем условие резонанса следующим образом:

$$\Omega_0 = \Omega(r) - \frac{\kappa(r)}{m}. \quad (1)$$

Строго говоря, условию (1) можно удовлетворить только для одного частного значения  $r$ . Однако квазирезонанс может иметь место для более широкой области значений  $r$ , если правая сторона (1) почти постоянна. Мы уже знаем, что величина  $\Omega(r) - \kappa(r)/2$ , т. е. (1) при  $m=2$ , действительно приближенно постоянна на всем диске галактики (Линдблад). Нужно, таким образом, заключить, что возмущение с  $m=2$  может оказать существенное влияние на всю галактику при условии, что оно имеется на таком расстоянии от центра, что  $\Omega_0$  равна почти постоянному значению величины  $\Omega(r) - \kappa(r)/2$ . Для нашей Галактики это значит, что  $\Omega_0 = 11 \div 13$  км/с · кпс и что возмущения должны производиться около  $r_0 = 15$  кпс. В этой области действительно процент звезд меньше, и система поэтому может быть гравитационно неустойчивой (см. выше).

Пусть мы имеем на периферии группу отстающих спиральных волн с угловой скоростью  $\Omega_p \approx 11 \div 13$  км/с · кпс. Что происходит при распространении группы в радиальном направлении? Конечно, было бы слишком много — ожидать, что эти короткие отстающие волны естественно приведут к квазистационарной спиральной картине. Например, энергия, поставляемая возмущениями, случайно созданными во внешних областях, должна быть ограничена. Кроме того, она рассеивается во время распространения.

Эти трудности, однако, по мнению Линя, разрешаются, если в системе действует механизм обратной связи, упомянутый в начале этого раздела. В стационарном случае согласно принципу сохранения волнового действия  $rc_s A = \text{const}$ , где плотность действия  $A = E/f$  (см. раздел 3.3, п. 2). Около точки происхождения спиральных волн угловая частота  $f$  очень мала ( $f \approx 0$  — приблизительно «ковращающиеся» волны). Следовательно, требуется малое количество энергии  $\epsilon$ , чтобы произвести существен-

ное количество действия  $A$ . По мере распространения группы волн внутрь диска галактики плотность энергии должна увеличиваться как вследствие увеличения  $f$  (так как  $d\Omega/dr < 0$ ), так и благодаря уменьшению  $|c_g|$  и  $r$  (увеличение плотности энергии с уменьшением  $r$  есть, конечно, очевидное следствие цилиндрической геометрии системы). Когда группа волн достигнет центра, ее сильно увеличенная амплитуда должна быть достаточна, чтобы подвергнуть галактическое ядро легкой дисторсии в короткий бар (вращающийся с угловой скоростью  $\Omega_p$ ).

Имеется, следовательно, связанное гравитационное поле, вращающееся с той же угловой скоростью  $\Omega_p$  и распространяющееся наружу (длинноволновая мода). Его влияние будет особенно сильно чувствоваться во внешних областях галактики, где круговая скорость равна  $\Omega_p$ , т. е. как раз там, где волны иницируются. Таким образом, цикл замыкается, и стационарное состояние может установиться даже при наличии потерь, поскольку имеется существенное усиление энергии, когда короткие волны движутся внутрь, но нет соответствующей потери энергии, когда длинные волны, с масштабом порядка галактического радиуса, распространяются наружу.

В случае, когда существует резкий линдбладовский резонанс (например, в NGC5364 или в нашей Галактике), волны не могут проникнуть в центр. В [272] Линь предполагает для этого случая возможность отражения спиральных волн уже от резонансного круга, где звезды могут располагаться на орбитах, коллективно образующих овальную структуру [189], которая заменяет бар в предыдущем обсуждении механизма отражения. Мы видели, однако, что в действительности короткие волны поглощаются на внутреннем резонансе. Для этого случая в следующем разделе мы рассмотрим один из возможных механизмов поддержания спиральной картины (предложенный Линден-Беллом и Калнайсом [289]), заключающийся в том, что волны плотности благодаря их взаимодействию со звездами постоянно рождаются на коротационном радиусе, служащем источником, и поглощаются на внутреннем резонансном круге (играющем роль стока для волн).

### 3.6. ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЗВЕЗД

Роль резонансного взаимодействия спиральной волны со звездами галактики была подробно исследована в работе Линден-Белла и Калнайса [289]. Ниже излагаются результаты этой работы.

Предварительно (в п. 1) дается вывод точных формул для энергии и углового момента квазистационарной волны, а также выражения для скорости изменения этих величин. Эти формулы показывают определяющую роль резонансных звезд.

В п. 2 подробно разбираются физические механизмы усиления (или затухания) волн на всех основных типах резонансов в галактике.

1. Выведем сначала точное выражение для углового момента (и энергии) спиральной волны [251, 289]. Выкладки, приводящие к этому выражению, аналогичны тем, которые в физике плазмы проводятся при выяснении физического смысла затухания Ландау (см., например, [86]). Подробности вывода этой формулы, которые мы приводим ввиду ее важности, следующие.

Рассмотрим обмен угловым моментом и энергией между звездами и спиральной волной. Уравнения движения звезды в плоскости диска в цилиндрических координатах  $r, \varphi$  имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = - \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_0 + \Phi_1), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}) = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Системе (1) — (2) соответствуют при  $\Phi_1=0$  очевидные законы сохранения:

$$\text{энергии } E=1/2(\dot{r}^2+L^2/r^2)+\Phi_0, \quad (3)$$

$$\text{углового момента } L=r^2\dot{\varphi}. \quad (4)$$

При рассмотрении кинематики и динамики плоских гравитирующих систем удобно использовать вместо обычных цилиндрических координат  $(r, \varphi, v_r, v_\varphi)$  переменные угол — действие  $(J_1, J_2, \omega_1, \omega_2)$ , которые учитывают важное свойство орбит звезд в плоскости аксиально-симметричной системы — их двойную периодичность, — и соответственно сильно упрощают описание. Имея в виду применить в дальнейшем теорию возмущений, мы будем обозначать полные величины (невозмущенные + возмущенные) штрихами, оставив прежние обозначения  $(J_1, J_2, \omega_1, \omega_2)$  для невозмущенных величин.

Если перейти к переменным  $(J'_1, J'_2, \omega'_1, \omega'_2)$ , то система (1), (2) сведется к следующей:

$$J'_j = -\frac{\partial}{\partial \omega'_j} (H_0 + \Phi_1) = -\frac{\partial}{\partial \omega'_j} \Phi_1(J'_i, \omega'_i, t), \quad (5)$$

$$\dot{\omega}'_j = \frac{\partial}{\partial J'_j} (H_0 + \Phi_1) = \Omega_j(J'_i) + \frac{\partial}{\partial J'_j} \Phi_1(J'_i, \omega'_i, t), \quad (6)$$

а невозмущенное движение в этих переменных характеризуется уравнениями

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial \omega_i} = 0, \quad (7)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} \equiv \Omega_i(J_1, J_2). \quad (8)$$

Смысл  $\omega_i, J_i$  проще всего проиллюстрировать на простейшем примере почти кругового движения (эпициклическое приближение). В этом случае легко получить следующее выражение для возмущенного радиуса звезды (см. § 1 главы V):

$$r_1 \simeq a \sin(\kappa t + \alpha) + \dots$$

Пользуясь далее определениями переменных угол — действие, можно найти в этом приближении:  $\Omega_2 = \kappa$  — эпициклическая частота;  $\Omega_2 = \Omega$  — угловая скорость кругового движения;  $J_1 = \kappa a^2/2$ ;  $J_2 = L$ . В общем случае интерпретация этих переменных аналогична:  $\omega_1$  представляет собой фазу радиального колебания звезды,  $J_1$  — функция амплитуды этого колебания,  $\omega_2$  — галактоцентрический угол равномерно движущегося (с угловой скоростью  $\Omega_2$ ) эпицентра.

Возмущенные орбиты звезд находятся по теории возмущений. Орбиты первого порядка ищутся путем решения уравнений (5) и (6), в правую часть которых (т. е. при вычислении сил) подставляются невозмущенные орбиты. Для поправки первого порядка  $\Delta_1 J_j$  к  $J_j$  тогда получается:  $\Delta_1 J_j = \partial \chi / \partial \omega_j$ , где

$$\chi = \text{Re} \left\{ (4\pi^2)^{-1} \sum_{l,m} \psi_{lm}(J_i) \frac{\exp i(l\omega_1 + m\omega_2 - \omega t)}{i(l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega)} \right\}, \quad (9)$$

а  $\psi_{lm}(J_i)$  есть коэффициенты фурье-разложения

$$\Phi_1(J_i, \omega_i, t) = \text{Re} \left\{ (4\pi^2)^{-1} \sum_{l,m} \psi_{lm}(J_i) \exp [i(l\omega_1 + m\omega_2 - \omega t)] \right\}. \quad (10)$$

Разложение (10) всегда возможно вследствие периодичности  $\Phi_1(J_i, \omega_i, t)$  по угловым переменным  $\omega_i$  (с периодом  $2\pi$ ).

Поскольку  $\Delta_1 J_j$  периодически по начальным фазам  $\omega_1, \omega_2$ , среднее изменение углового момента системы звезд, которые первоначально были равномерно распределены по фазам, равно нулю:  $\langle \Delta_1 J_j \rangle = 0$ . Таким образом, обмен угловым моментом и энергией между такой группой звезд и волной — второго порядка по возмущенному потенциалу. Орбиты второго порядка вычисляются, используя в (5) — (6) силы, вычисленные на орбитах первого порядка.

Результат вычислений таков:

$$\langle \dot{L} \rangle = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta_2 J_2 d\omega_1 d\omega_2 = \frac{1}{2} \text{Im}(\omega) \exp[2 \text{Im}(\omega) t] (2\pi)^{-4} \times \\ \times \sum_{l,m} m \left( l \frac{\partial}{\partial J_1} + m \frac{\partial}{\partial J_2} \right) \frac{|\Psi_{lm}|^2}{|l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega|^2}. \quad (11)$$

Полная скорость изменения углового момента звезд, которые первоначально имели угловой момент  $L_1 < J_2 \equiv L < L_2$ , равна

$$\dot{L} = 4\pi^2 \int_{L_1}^{L_2} \int_0^\infty \langle \dot{L} \rangle f_0(J_1, J_2) dJ_1 dJ_2. \quad (12)$$

Интегрируем по частям. Полную  $\dot{L}$  можно расщепить на «объемный» и «поверхностный» члены:

$$\dot{L} = -\frac{1}{8\pi^2} \cdot \text{Im} \omega \cdot \exp[2 \text{Im} \omega \cdot t] \times \\ \times \left\{ \int_{L_1}^{L_2} \int_0^\infty \sum_{l,m} m \left( l \frac{\partial f_0}{\partial J_1} + m \frac{\partial f_0}{\partial J_2} \right) \frac{|\Psi_{lm}|^2 dJ_1}{|l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega|^2} dJ_2 - \right. \\ \left. - \sum_{l,m} m^2 \int_0^\infty \frac{f_0 |\Psi_{lm}|^2 dJ_1}{|l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega|^2} \Big|_{L_1}^{L_2} \right\} \equiv \dot{L}_1 + \dot{L}_2. \quad (13)$$

В этом выражении первый интеграл ( $\dot{L}_1$  — «объемный член») соответствует изменению углового момента тех звезд, которые остаются в области  $(L_1, L_2)$ , а второй интеграл ( $\dot{L}_2$  — «поверхностный», или «конвективный» член) соответствует угловому моменту, который переносится через границы рассматриваемой области. Если взять интеграл  $\int_{-\infty}^t \dot{L} dt$  и учесть только «объемный» член, мы получим избыток углового момента для звезд в выбранной области значений  $L$  над тем, который они имели в отсутствие волны:

$$\delta L = -\frac{1}{16\pi^2} \exp[2 \text{Im} \omega \cdot t] \times \\ \times \int_{L_1}^{L_2} \int_0^\infty \sum_{l,m} m \left( l \frac{\partial f_0}{\partial J_1} + m \frac{\partial f_0}{\partial J_2} \right) \frac{|\Psi_{lm}|^2 dJ_1 dJ_2}{|l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega|^2}. \quad (14)$$

Найденное выражение (14) представляет собой угловой момент, переданный звездами волне, т. е. угловой момент волны, если распространить интегрирование по  $J_2$  в (14) на все угловые моменты звезд.

В пределе очень медленно нарастающей волны,  $\text{Im}(\omega) \rightarrow 0$ , изменение углового момента (и энергии) звезд происходит согласно (13) только на резонансах, где

$$l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega \rightarrow 0. \quad (15)$$

Для  $\text{Im}(\omega) \rightarrow 0$  имеем, используя тождество  $-\lim \text{Im}(\omega) |l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega|^{-2} \rightarrow \pi \delta(l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega)$  и расщепляя скорость  $\dot{L}$  на сумму членов от разных резонансов.

$$\dot{L} = \sum_{lm} \dot{L}_{lm}, \quad (16)$$

$$\dot{L}_{lm} = -1/8\pi \iint m \left( l \frac{\partial f_0}{\partial J_1} + m \frac{\partial f_0}{\partial J_2} \right) |\psi_{lm}|^2 \delta(l\Omega_1 + m\Omega_2 - \omega) dJ_1 dJ_2.$$

Видно, что вклады происходят только от резонансов, положение которых в эписциклическом приближении определяется формулой  $\Omega - \Omega_p = -\frac{l\kappa}{m}$ , где  $\Omega_p = \omega/m$  — скорость спиральной волны. Если рассмотреть какую-либо одну ( $m$ -) компоненту потенциала, то резонансы будут нумероваться одним целым индексом  $l$  (положительным, отрицательным или нулем). Главными являются следующие три резонанса, которые имеют специальные названия (напомним их):  $l=0$  соответствует резонанс «коротации», или «частичный» резонанс, на котором  $\Omega = \Omega_p$ ; резонансы, соответствующие  $|l|=1$ , называются *линдбладовскими*. Если двигаться от частичного резонанса внутрь, к центру галактики, локальная угловая скорость будет увеличиваться и в конце концов можно встретить (но не всегда) круг, на котором  $\Omega$  превышает  $\Omega_p$  на  $\kappa/|m|$ . Этот резонанс называется *внутренним линдбладовским резонансом* (для него  $l=-1$  при  $m>0$  и  $l=+1$  при  $m<0$ ). Другой резонанс  $|l|=1$  находится в галактике снаружи от круга коротации (*внешний линдбладовский резонанс*). Перечисленные резонансы имеют место там, где частота, с которой звезда пересекает горбы и впадины потенциала спиральной волны,  $|\omega - m\Omega|$ , либо равна нулю (т. е. звезда все время находится в фазе с потенциалом), либо равна частоте колебаний звезды и около круговой орбиты.

Резонансы более высокого порядка динамически менее важны, и, кроме того, похоже на то, что все внешние резонансы реально лежат за пределами галактик, а внутренние — слишком близко к ядру галактик.

Для  $|m|=1$  внутренний линдбладовский резонанс имеется только для волн, бегущих в сторону, противоположную вращению системы. Для  $|m|=2$  резонансы разделены как раз примерно размером Галактики, для  $|m|>3$  они все приближаются к радиусу коротации. Все эти факты объясняют выделенность двухрукавного узора в нашей Галактике (мы уже говорили о них в разделе 3.2).

Выясним теперь, как друг с другом связаны изменения углового момента и энергии звезды в стационарной спиральной волне с фиксированным числом рукавов  $m$ . В системе отсчета, вращающейся вместе с волной (со скоростью  $\Omega_p = \omega/m$ ), полный потенциал  $\Phi_0 + \Phi_1$  не зависит от времени, так что каждая звезда сохраняет энергию в этих осях (так называемый интеграл Якоби)

$$\varepsilon_T' = \frac{1}{2} [v_r^2 + (v_\phi - \Omega_p r)^2] + \left[ \Phi_0 + \Phi_1 - \frac{1}{2} \Omega_p^2 r^2 \right],$$

где скорость звезды  $v_r$ ,  $v_\phi$  относится к инерциальной системе. Иначе,  $\varepsilon_T' = \varepsilon_T - \Omega_p L$ , где  $\varepsilon_T$  — энергия в инерциальной системе, а сама послед-

няя формула представляет собой обычную связь между энергиями частицы в инерциальной ( $\epsilon_T$ ) и вращающейся ( $\epsilon_T'$ ) системах координат (см., например, [69]). Так как  $d\epsilon_T'/dt=0$ , то  $d\epsilon_T/dt=\Omega_p \frac{dL}{dt}$ ,  $\delta\epsilon_T=\Omega_p \delta L$ , а если просуммировать это равенство по системе звезд с полной энергией  $E$  и угловым моментом  $L$ , то получим аналогично

$$\frac{dE}{dt} = \Omega_p \frac{dL}{dt},$$

$$\delta E = \Omega_p \delta L.$$

Процесс передачи углового момента и энергии спиральной волной иллюстрируется рис. 67, заимствованным из работы [289]. Из этого рисунка видно, что звезда, увеличившая свой угловой момент на  $\delta L$  на

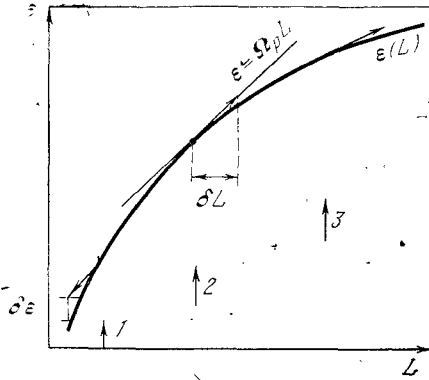


Рис. 67. Иллюстрация передачи углового момента  $\delta L$  и энергии  $\delta E = \Omega_p \delta L$  звездами [289]

$\epsilon = \epsilon(L)$  — энергия кругового невозмущенного движения с угловым моментом  $L$ ;

- 1 — внутренний линдбладовский резонанс,
- 2 — резонанс коротации,
- 3 — внешний линдбладовский резонанс

радиусе коротации, и, следовательно, увеличившая на  $\Omega_p \delta L$  свою энергию, не меняет энергию колебаний около кругового движения, так как на этом резонансе  $d\epsilon/dL = \Omega_p$ . Звезда, теряющая  $\delta L$  на внутреннем линдбладовском резонансе, теряет также и энергию  $\Omega_p \delta L$ , но она переходит в состояние, которому соответствовало бы еще меньшее значение энергии кругового движения. Следовательно, в этом случае энергия  $\delta\epsilon$  (см. рис. 67) освобождается в некруговое движение.

Посмотрим теперь, на каком резонансе звезды увеличивают угловой момент и энергию и на каком теряют их. Оказывается, что результаты можно сформулировать в совершенно общем виде для тех случаев, когда применимо эпициклическое рассмотрение. Понять эти результаты, т. е. выявить физический смысл соответствующих механизмов передачи энергии и момента, нам еще предстоит (см. п. 2).

Как видно из (16), для  $l=0$  (частичный резонанс) резонансные звезды увеличивают угловой момент, поскольку  $\partial f_0 / \partial J_2 < 0$  для любой разумной функции распределения из-за общего падения наружу поверхностной плотности в галактиках (орбиты предполагаются почти круговыми, и большим угловым моментам  $L$  соответствуют большие  $r$ ). Для всех других резонансов знак обмена угловым моментом и энергией между звездами и волной определяется знаком  $lm$ , если предположить, что  $\left| \frac{\partial f_0}{\partial J_1} \right| \gg \left| \frac{\partial f_0}{\partial J_2} \right|$  (т. е., иначе говоря, справедливость эпициклического приближения; действительно, в этом приближении  $J_1 \sim \kappa a^2$ ,  $J_2 \sim \Omega R^2$ , так что  $J_2/J_1 \sim (R/a)^2 \gg 1$ ). Поскольку на внутреннем линдбладовском резонансе  $lm < 0$ , то звезды на этом резонансе должны отдавать энергию и угловой момент.

Аналогично при тех же предположениях звезды на внешнем линдбладовском резонансе поглощают угловой момент и энергию.

Определим теперь знак энергии квазистационарной спиральной волны. Преобразуем выражение (14) (с  $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ ) к виду

$$\delta E = -\frac{\Omega_p}{16\pi^2} \iint \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2 m^2 \Omega_1 (\Omega_2 - \Omega_p) (-\partial f_0 / \partial J_1)}{|l^2 \Omega_1^2 - m^2 (\Omega_2 - \Omega_p)^2|^2} |\psi_{lm}|^2 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} m^2 \left( -\frac{\partial f_0}{\partial J_2} \right) \frac{|\psi_{lm}|^2}{|l\Omega_1 + m(\Omega_2 - \Omega_p)|^2} \right\} dJ_1 dJ_2. \quad (17)$$

В эпициклическом приближении  $|\partial f_0 / \partial J_1| \gg |\partial f_0 / \partial J_2|$ , поэтому первый член в (17) является доминирующим, и при  $\Omega_2 > \Omega_p$  (т. е. внутри круга коротации)  $\delta E < 0$ , при  $\Omega_2 < \Omega_p$  (вне круга коротации)  $\delta E > 0$ . Положительный вклад в энергию  $\delta E$  дает также и второй, несущественный в эпициклическом приближении член в (17), причем как при  $\Omega > \Omega_p$ , так и при  $\Omega < \Omega_p$ . Это может оказаться важным для тех случаев, когда эпициклическое приближение перестает быть справедливым, т. е. когда велики отклонения от круговых орбит. Из результатов теоретических работ [93, 111, 252], а также численных экспериментов [294] и особенно Хола [215, 220] следует, что эти отклонения действительно должны быть большими для устойчивых или почти устойчивых галактик без значительной концентрации массы к центру (и в отсутствие гало).

Возвратимся к случаю волн отрицательной энергии, как к более определенному. Очевидно, что в случае  $\delta E < 0$  абсолютное значение  $|\delta E|$  растет с ростом амплитуды возмущения (спиральной волны), т. е. при неустойчивости. Отбирая энергию от возмущения, мы тем самым будем возбуждать его. И наоборот, вкладывая энергию, будем демпфировать такие возмущения. Волны отрицательной энергии, имеющие такое «обращенное» поведение, хорошо известны, например, в теории плазменных неустойчивостей (см. [86]). Простейшим примером<sup>1</sup> среды, в которой могут существовать колебания отрицательной энергии, является холодная движущаяся плазма (скорость  $V$ ). Скалярная диэлектрическая проницаемость такой системы равна

$$\text{Re } \epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kV)^2},$$

так что частоты колебаний, которые определяются из уравнения  $\text{Re } \epsilon_0 = 0$ , есть  $\omega_k = kV \pm \omega_p$ . Отсюда следует, что  $\omega_k \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial \omega_k} = 2 \left( 1 \pm \frac{kV}{\omega_p} \right)$ , и потому для  $kV/\omega_p > 1$  и решений со знаком минус (см. рис. 68) энергия колебаний отрицательна:

$$W_k = \omega_k \frac{\partial \text{Re } \epsilon_0}{\partial \omega_k} \frac{|E|^2}{8\pi} < 0.$$

Знак энергии колебаний, разумеется, не инвариантен по отношению к изменению системы отсчета (не зависящим от системы является, например, инкремент нарастания колебаний). Однако в некоторых случаях какая-либо одна определенная система отсчета является выделенной среди других. В интересующем нас случае дифференциально вращающихся гравитирующих систем такой выделенной системой отсчета является, очевидно, инерциальная. Рассмотрим произвольный участок диска (рис. 69) на расстоянии  $r_1$  от центра внутри радиуса коротации ( $r_1 < r_c$ ). Нетрудно заметить сходство между ситуациями, представленными на этом рисунке и на рис. 68.

Для нашей Галактики, согласно Линю и соавторам [271],  $\Omega = \Omega_p$  при  $r = r_p \approx 14_{\text{кпс}}$ . В то же время наблюдаемый спиральный узор в Галак-

<sup>1</sup> Этот, а также другие простые примеры можно найти в монографии [86], где приведена энергетическая классификация слабораствующих возмущений в плазме.

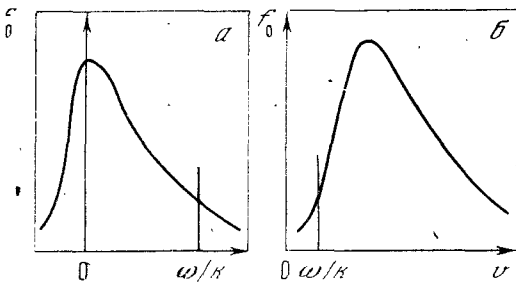


Рис. 68. Волны положительной (а) и отрицательной (б) энергии для простейшего распределения частиц по скоростям [86]

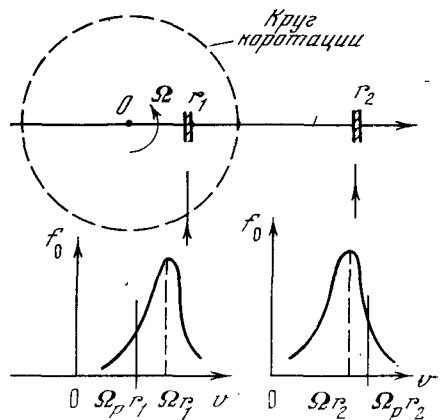


Рис. 69. Иллюстрация к определению знака плотности энергии спиральной волны

тике простирается до  $r=14\div 15$  кпс (по наблюдениям на  $\lambda=21$  см, т. е. для нейтрального водорода HI). Поэтому в данном случае существенной является только внутренняя область, внутри которой спиральная волна имеет отрицательную энергию. Такая ситуация обычна для большинства *исследованных* теоретически [204, 240] галактик: Галактики, M31, M51, M81, но для галактики M33, по данным [240], круг коротации лежит довольно близко к центру галактики (т. е.  $\Omega_p$  довольно велико), так что в этом случае<sup>1</sup> внутренняя и внешняя области могут содержать сравнимое количество материи и быть динамически одинаково важными.

В качестве более общего примера проще всего взять бароподобные моды твердотельно-вращающихся дисков, подробно рассмотренные в [254]. Непосредственное вычисление по формуле (14) приводит к следующим выводам. Мода, вращающаяся в отрицательном направлении, имеет положительную энергию и отрицательный угловой момент. Для «прямых» мод эти величины одинакового знака, причем для более быстрой моды они положительны, а для более медленной — отрицательны, пока  $\gamma < 0,5072 \dots$ . При  $\gamma = 0,5072 \dots$  эти две моды сливаются, а затем превращаются в нарастающую и убывающую пару мод, причем каждая из них имеет нулевой угловой момент и нулевую энергию.

Рассмотрим еще задачу о перераспределении углового момента, которое должно произойти в период нарастания бароподобной моды, пользуясь вычислениями (до величин второго порядка малости), приведенными нами выше. Типичным является маргинально-стабильный случай  $\gamma = 0,5072$ . Равновесное распределение есть функция углового момента  $L_z = J_1$  и радиального действия  $J_r$ , которое в данном случае равно  $(E - |J_2|)/2$ , если за начало отсчета энергии принять энергию звезды, покоящейся в центре. Границей между «поставщиками» и «потребителями» энергии оказывается прямая  $J_1/J_2 = 0,4859 \dots$ . Для определения этой границы представим потенциал  $\Phi_1 = (x + iy)^2 = r^2 e^{2i\varphi}$  в переменных действие — угол, т. е.

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi^2} \sum_l \Psi_l(J_1, J_2) \exp [i(l\omega_1 + m\omega_2) - i\omega t]. \quad (18)$$

Переменные действия  $J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \oint \sqrt{2E - 2U - L_z^2/r^2} \frac{dr}{2\pi} = \frac{1}{2}(E - |L_z|)$

и  $J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = L_z$  мы уже приводили. Легко вычислить и угловые

<sup>1</sup> И, по-видимому, также во всех случаях, когда плотность не слишком сильно концентрируется к центру галактики, так что вращение скорее напоминает твердотельное, чем сильно дифференциальное, характерное для нашей Галактики.



переменные  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т. е. фазовые углы в  $r$ -м и  $\varphi$ -м движениях частиц по формулам

$$\omega_1 = \int \frac{r^2 dx}{\sqrt{4J_1 x - (x - J_2)^2}}, \quad \omega_2 = \varphi + \frac{1}{2} \int \frac{r^2 (x - J_2) dx}{x \sqrt{4J_1 x - (x - J_2)^2}}. \quad (19)$$

В конечном итоге можно получить

$$\begin{aligned} \psi_{+2} = \psi_{+1} = 0, \quad \psi_{-2} = 2(J_1^2 + J_1 J_2), \quad \psi_{-1} = -4iJ_1 \sqrt{J_1^2 + J_1 J_2}, \\ \psi_0 = J_2^2 - 2J_1^2. \end{aligned} \quad (20)$$

После этого нужно воспользоваться формулой (11) для изменения углового момента частицы; в данном случае эта формула приводится к виду

$$\langle \dot{L} \rangle = -\text{Im} \omega \exp[-2 \text{Im}(\omega) \cdot t] \cdot (2\pi)^{-4} \cdot \sum_i, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_i &\equiv 2 \frac{\partial}{\partial J_2} \frac{|\psi_0|^2}{\omega + 2} + \left(-\frac{\partial}{\partial J_1} + 2 \frac{\partial}{\partial J_2}\right) \frac{|\psi_{-1}|^2}{\omega} + \left(-2 \frac{\partial}{\partial J_1} + 2 \frac{\partial}{\partial J_2}\right) \frac{|\psi_{-2}|^2}{\omega - 2} = \\ &= \frac{8J_2(2J_1^2 - J_2^2)}{(\omega + 2)} - \frac{16(2J_1^3 + 3J_1^2 J_2)}{\omega} - \frac{16J_1(J_1 + J_2)^2}{\omega - 2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Граница между «поставщиками» и «потребителями» углового момента определяется, очевидно, из равенства  $\sum_i = 0$ . Если взять  $\gamma = 0,5072$  ( $\omega = \sqrt{5/6} \approx 0,91$ ), то можно получить  $J_1/J_2 \approx 0,4859$ . Этому отношению  $J_1/J_2$  отвечает отношение  $E/J_2 \approx 1,972$ , чему соответствует эксцентриситет орбиты  $\epsilon \approx 0,95$  или отношение размера эллипса  $\rho = (a-b)/2$  к среднему радиусу  $(a+b)/2$  ( $a$  и  $b$  — размеры большой и малой полуосей эллиптической орбиты частицы), равное 0,5718. Прямо вращающиеся звезды с эксцентриситетом, меньшим найденного, отдают свой угловой момент другим звездам безотносительно к их положению на диске.

Есть и другой способ отличать «поставщиков» и «потребителей». Так как вращающий момент, действующий на звезду со стороны возмущенного поля, пропорционален  $r^2$ , то имеет смысл вычислить среднее по времени от ее угловой скорости  $\dot{\varphi}$  с весом  $r^2$ , т. е.  $\Omega_\tau \equiv \overline{r^2 \dot{\varphi}} / \overline{r^2}$ . Для диска  $\Omega_\tau = L_z/E$  (так как  $r^2 \dot{\varphi} = L_z$ ,  $\overline{r^2} = E$ ) и «потребителями» являются звезды с  $\Omega_\tau > \gamma$ , а «поставщиками» — звезды с  $\Omega_\tau < \gamma$ . Этот критерий в точности эквивалентен предыдущему ( $L_z/E = \gamma = 0,5072$  соответствует значению  $E/J_2 = 1,972$ , которое нам встречалось выше).

## 2. Физические механизмы усиления и затухания волн на резонансах.

Перейдем к рассмотрению физических механизмов обмена энергией и моментом между волной и частицами [289].

**Линдбладовские резонансы.** Заметим прежде всего, что на точно круговую орбиту не действует, конечно, никакой гравитационный момент вращения. Эффект возникает под действием возмущенного гравитационного поля на возмущенную орбиту (поле должно «зацепляться» за неровности орбиты). Поскольку крутящий момент есть малая второго порядка, определяемая произведением возмущенных сил в радиальном  $g_{1r}$  и азимутальном  $g_{1\varphi}$  направлениях  $g_{1\varphi} \cdot g_{1r}$ , достаточно вычислить смещение от невозмущенной (круговой) орбиты в первом порядке.

Если возмущенный потенциал представить в виде

$$\Phi_1 = -S \sin(kr_1 + m\varphi + \omega t), \quad (23)$$

то звезда, движущаяся точно по резонансной орбите, будет испытывать силу на эллиптической частоте  $\kappa$ . Действительно, частота равна, очевидно,  $|\omega - m\Omega|$ , а на линдбладовском резонансе  $|\omega - m\Omega| = \kappa$ . Если

принять, что  $S \approx \text{const}$ , то радиальная  $f_r$  и трансверсальная  $f_\varphi$  силы будут действовать на звезду приблизительно в фазе, и можно написать

$$f_r = F_r \cos(\kappa t + \gamma), \quad f_\varphi = F_\varphi \cos(\kappa t + \gamma), \quad (24)$$

где  $F_r, F_\varphi$  — амплитуды этих сил, причем  $F_r \gg F_\varphi$ . Линеаризуя уравнения движения и учитывая определение эпициклической частоты, получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\ddot{r}_1 + \kappa^2 r_1 = \frac{2\Omega_0}{r_0} L_1 + F_r \cos(\kappa t + \gamma), \quad \dot{L}_1 = r_0 F_\varphi \cos(\kappa t + \gamma), \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{L_1}{r_0^2} - 2\Omega_0 \frac{r_1}{r_0}. \quad (25)$$

Интегрируя (25) с нулевыми начальными условиями, получим

$$L_1 = r_0 F_\varphi \kappa^{-1} [\sin(\kappa t + \gamma) + \sin \gamma], \\ r_1 = -\Omega_0 F_\varphi \kappa^{-2} t \cos(\kappa t + \gamma) + \frac{1}{2} F_r \kappa^{-1} t \sin(\kappa t + \gamma) + \dots, \quad (26)$$

причем в выражении для радиального смещения  $r_1$  выписаны только растущие во времени (секулярные) члены, возникающие вследствие резонанса между свободными радиальными осцилляциями звезды и возмущающей силой, создаваемой спиральными рукавами. Решение для  $r_1$  состоит из двух частей, которые происходят от радиальной и тангенциальной сил  $F_r$  и  $F_\varphi$ . Рассмотрим сначала влияние радиальных сил, которые дают в (26) доминирующий член ( $F_r \gg F_\varphi$ ). Соответствующие им растущие во времени смещения отстают от сил на четверть периода  $2\pi/\kappa$ , т. е. большая ось возмущенной орбиты совпадает с азимутом, на котором спиральная структура (максимум плотности  $\sigma_1$ , или  $(-\Phi_1)$ ) достигает резонансной окружности. Будем далее рассматривать случай двухрукавной спирали  $m=2$ . Для *внутреннего линдбладовского резонанса* (рис. 70) большая ось смещена (от положения на круге) к положению вне этого круга, где она немного опережает рукав (если учесть отстающий характер ветвей, а также дополнительный эффект от тангенциальных сил — см. ниже). В результате возникает сила и момент вращения, которые тянут рукав вперед, а орбиту назад. Малая ось (см. рис. 70) помещается чуть позади области, где рукав имеет «отрицательную плотность». Соответственно, эта область отталкивает рукав. В обоих случаях угловой момент и энергия отбираются от орбиты и передаются спиральной волне.

На *внешнем линдбладовском резонансе*, наоборот, малая ось отстает от положительных рукавов, а большая — опережает отрицательные рукава. Поэтому здесь угловой момент и энергия передаются от спиральной волны к звездным орбитам.

Рассмотрим теперь добавочный малый эффект тангенциальных сил. Чтобы выделить действие только этих сил, допустим, что радиальные силы выключены. Поскольку тангенциальные силы, согласно (25), вызывают радиальное смещение, находящееся в противофазе с силой, большая ось из-за одних этих сил будет стремиться опережать спиральную структуру на  $\pi/4$  (рис. 71).

Таким образом, под совместным влиянием радиальных и тангенциальных сил большая ось будет слегка опережать спиральную структуру. Но главный эффект тангенциальных сил заключается не в эксцентricности орбиты, которую они вызывают, а прежде всего в замедлении или ускорении частиц на разных азимутах. В системе волны азимутальная скорость звезды равна

$$|\dot{\varphi}_A| = |\dot{\varphi} - \Omega_p| = |Lr^{-2} - \Omega_p|. \quad (27)$$

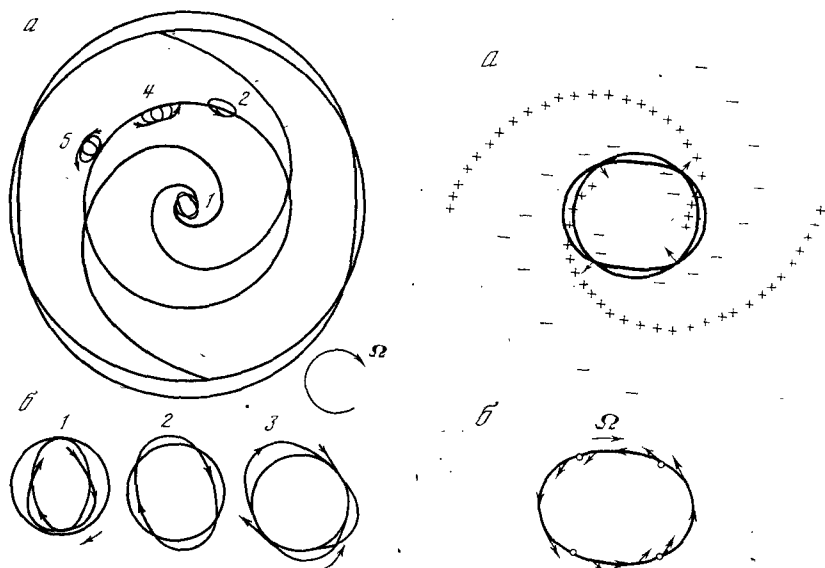


Рис. 70. Невозмущенные резонансные орбиты на трех главных резонансах

а: 1 — внутренний линдбладовский резонанс, 2 — резонанс коротации, 3 — внешний линдбладовский резонанс, 4, 5 — почти резонансные орбиты, близкие к коротации; б — область внутреннего линдбладовского резонанса  $r=r_L$ , стрелками показано вращение большой оси (линии апсид) для почти резонансных орбит: 1 —  $r < r_L$ , 2 —  $r = r_L$ , 3 —  $r > r_L$ ; Рисунки (а) и (б) относятся к осям, которые вращаются вместе со спиральной волной

Рис. 71. Возмущение круговой орбиты под действием радиальных сил (показаны стрелками) со стороны спиралей на внутреннем линдбладовском резонансе (а) и избыточные трансверсальные силы, испытываемые частицей на возмущенной орбите (б)

Плюсы и минусы на рис. а показывают положение спиральной волны (соответственно максимумов и минимумов плотности)

Секулярные эффекты в  $|\phi_A|$  происходят только от секулярного роста  $r$ . Поэтому на внутреннем линдбладовском резонансе, где  $Lr^{-2} > \Omega_p$ , эти эффекты дают замедление, когда  $r$  велико (апоцентр), и ускорение, когда  $r$  мало (перигей). На внешнем линдбладовском резонансе  $Lr^{-2} < \Omega_p$ , и соответственно ситуация обращается. На внутреннем резонансе большая ось (соответствующая, напомним, одним тангенциальным силам!) лежит на  $\pi/4$  впереди спиральной структуры. Избыток плотности на этих азимутах тянет назад, к рукаву. Подобным же образом недостаток плотности вблизи малой оси тянет назад, к недостатку плотности в спиральной структуре. Поэтому результирующий момент, связанный с тангенциальными силами, увеличивает момент, вызванный растущей (в основном из-за радиальных сил) эксцентricностью орбиты. Легко показать, что аналогичное усиление имеет место и для внешнего резонанса.

В заключение обратим внимание на одно кажущееся противоречие. Эффект, следующий из проведенных расчетов, растет во времени, в то время как эффект, описываемый формулами (16), (17), не зависит от времени. Парадокс объясняется, разумеется, тем, что мы рассмотрели (для простоты) только точно резонансные звезды. В действительности, конечно, точного резонанса нет. Звезды на орбитах, близких к резонансным (но не точно резонансным), дают вклад определенного знака в течение длительного времени, но все-таки в конце концов знак эффекта обращается. В результате, если мы проинтегрируем по всем почти резонансным орбитам, то получим как раз суммарный эффект (16), (17), не зависящий от времени. Физический механизм, приводящий к малым

(дополнительным) членам в формуле (16), зависящим от  $\partial f_0/\partial L$  обсуждается ниже, после объяснения механизма обмена моментом на частичном резонансе. Мы увидим, что эти механизмы во многом аналогичны (в частности, это связано с тем, что в обоих случаях они определяются производной  $\partial f_0/\partial L$ ).

**Частичный резонанс (круг коротации).** Ситуация здесь очень напоминает положение, хорошо изученное в физике плазмы (затухание Ландау). Поэтому напомним сначала обычное качественное объяснение затухания плазменных волн. Рассмотрим монохроматическую волну малой амплитуды в однородной плазме. Допустим, что волна распространяется в направлении положительной оси  $x$  с фазовой скоростью  $v_\phi = \omega/k$ . Ясно, что сильно взаимодействуют с волной частицы, имеющие скорости, близкие к скорости волны  $v_\phi$ . Это взаимодействие приводит к противоположным эффектам для частиц, несколько опережающих волну, и частиц, несколько отстающих от волны. Возьмем сначала однородное (в начальный момент  $t=0$ ) распределение частиц, которые имеют скорость, немного превышающую скорость волны. Частицы, находящиеся в потенциальной яме на подъеме, теряют энергию и замедляются, а частицы на склоне ускоряются волной. Поэтому в рассматриваемом случае справедливо следующее утверждение:

1) Имеется избыток частиц на подъеме (они здесь накапливаются в соответствии с уравнением неразрывности) и недостаток на склоне потенциальной ямы.

Частицы, находящиеся на подъеме потенциальной ямы, подталкивают волну в направлении ее распространения и, следовательно, отдают энергию волне, а частицы на склоне, наоборот, подталкиваются волной и поэтому получают энергию от волны. Небольшой избыток частиц на подъеме (по 1) дает результирующее подталкивание волны вперед. Поэтому справедливо также следующее утверждение:

2) Частицы, несколько опережающие волну, отдают энергию волне. Аналогично:

3) Частицы, несколько отстающие от волны, отбирают от нее энергию. И наконец:

4) Если (как, например, в состоянии термодинамического равновесия) частиц, движущихся медленнее, больше, чем движущихся быстрее, эффект затухания волны 3) превышает эффект нарастания 2), так что энергия волны уменьшается с декрементом, зависящим от величины производной функции распределения резонансных частиц (на скорости волны).

Вернемся теперь к частичному резонансу в галактике. Будем рассматривать взаимодействие волны с частицами, орбиты которых близки к кругу коротации. Невозмущенные траектории этих звезд схематически изображены на рис. 70 (в системе отсчета, связанной с вращающейся спиральной волной; эта система совпадает с системой частицы на круге коротации). В системе волны звезды с эпицентрами, лежащими внутри этого круга, движутся в среднем с угловой скоростью, чуть большей, чем угловая скорость волны, а звезды, эпицентры которых лежат снаружи круга коротации, имеют несколько меньшие по сравнению с волной угловые скорости.

На первый взгляд кажется вполне естественным допустить, что и здесь справедливы утверждения, аналогичные 2) и 3). Тогда сразу получим, что на частичном резонансе энергия должна передаваться от частиц волне (в самом деле, в галактиках плотность увеличивается к центру и, следовательно, имеется несколько большее число частиц с угловой скоростью, чуть большей скорости волны, чем частиц с меньшей скоростью). Но этот вывод был бы неправильным: он, например, противоречит формальному выводу, следующему из (16) и уже сделанному нами. Причина ошибки заключается в том, что в данном случае неспра-

ведливо утверждение 1), а следовательно, также и связанные с ним утверждения 2) и 3). Для того чтобы понять это, нужно более внимательно рассмотреть ситуацию. В действительности происходит следующее. Невозмущенные орбиты, близкие к кругу коротации (см. рис. 70), имеют очень малые средние движения в системе волны: на внутренней стороне этот медленный дрейф направлен вперед, а на наружной стороне — назад. Под влиянием силы, действующей со стороны спирального рукава, движущаяся вперед звезда перейдет на эпицикл со слегка большим угловым моментом, так что ее среднее дрейфовое движение, наоборот, замедлится, а не ускорится. По выражению Линден-Белла и Калнайса [289], звезды при своем движении по азимуту действуют, подобно ослам: они замедляются, когда их толкают вперед, и ускоряются, когда их тянут назад. Поэтому вместо утверждения 1) в рассматриваемом случае имеет место другое утверждение (прямо противоположное 1) по смыслу!):

1) существует избыток звезд на склоне и недостаток — на подъеме, соответственно обращаются и утверждения 2) и 3);

2) звезд с угловой скоростью, несколько большей, чем скорость волны, будет немного больше на склоне, так что они будут отбирать энергию и угловой момент от волны;

3) звезды с угловой скоростью, немного меньшей, чем у волны, отдают энергию и момент волне. И, наконец, заключительный вывод;

4) поскольку обычно (см. выше) частиц с большей угловой скоростью несколько больше, то на частичном резонансе энергия и момент волны поглощаются и передаются звездам.

Рассмотрим, наконец, механизм, приводящий в формуле (16) к членам  $\sim \partial f_0 / \partial L$  на линдбладовских резонансах. Так как этот эффект исчезает для круговых невозмущенных орбит, необходимо рассмотреть некруговые невозмущенные орбиты, близкие к линдбладовским резонансам (см. рис. 71). Оставим в стороне эффекты, связанные с их эксцентricностью, индуцируемой спиральной волной (эти эффекты рассмотрены выше). Строго замкнутыми в системе волны являются только орбиты, которые лежат точно на этих резонансах (пересекают резонансный круг). С каждой орбитой около внутреннего линдбладовского резонанса связан небольшой избыток плотности вблизи от концов большой оси (вследствие уменьшения азимутальной скорости звезд в этой области).

Орбиты, расположенные полностью внутри (или снаружи) резонансной окружности, уже не являются замкнутыми. Если они все-таки близки к резонансной окружности, то их можно рассматривать как замкнутые орбиты, медленно вращающиеся вперед (соответственно назад). Такое рассмотрение естественно как раз из-за большой разницы в угловых скоростях: быстрого вращения частиц по орбите и медленного дрейфа самой орбиты (см. рис. 71). Если вращающаяся вперед большая ось подвергается действию вращающего момента, подталкивающего тоже вперед, то частицы на орбите несколько увеличат угловые моменты, и в результате прецессия самой орбиты замедлится. Таким образом, большие оси орбит снова ведут себя подобно ослам (сравни с обсуждением выше). Поэтому можно буквально повторить рассуждения предыдущего пункта, которые относились к «ослам-звездам» на частичном резонансе, для данного случая избытков плотности, связанных с большими осями.

В области, где вращающий момент пытается ускорить движение большой оси, оно в действительности замедляется, и наоборот. В результате получаем, что снаружи резонансного круга имеется легкий избыток плотности больших осей на азимутах, немного отстающих от спиральной структуры, а внутри резонансной окружности большие оси имеют легкий избыток несколько впереди спиральной структуры (см.

рис. 71). Поэтому для падающей наружу плотности можно ожидать, что рассматриваемый механизм  $\sim \partial f_0 / \partial L$  в формулах (16), (17) должен приводить к поглощению энергии и углового момента на внутреннем линдбладовском резонансе. Таким образом, этот эффект немного уменьшает угловой момент, переданный волне на внутреннем резонансе главными членами  $\sim \partial f_0 / \partial J_1$ . Однако рассмотренный механизм должен, по-видимому, сыграть важную роль в общей концепции, предлагаемой авторами [289], несмотря на малость связанного с ним эффекта передачи момента или энергии. Это объясняется тем, что он приводит к качественно новым (и очень красивым!) эффектам, а именно: захвату и «выстраиванию» больших осей вблизи от внутреннего линдбладовского резонанса.

В работах, посвященных нелинейному затуханию Ландау плазменных волн, подробно исследован эффект захвата *частиц* в потенциальные ямы волны. Аналогично можно ожидать и захвата («выстраивания») ориентаций *больших осей* около резонансных орбит (линдбладовских). При *нелинейном* рассмотрении должны захватиться не только резонансные, но и близкие оси, если они не могут перевалить через горб возмущенного потенциала. Это может оказаться верным для широкой области диска, когда величина  $\Omega - \kappa/2$  не слишком быстро меняется с радиусом.

Эффект выстраивания некоторые авторы считают важным в проблеме происхождения баров в галактиках. Так, по мнению авторов работы [289], бары представляют собой квазистационарную стоячую волну. По этой причине проблема происхождения баров связывается с проблемами волновой теории. Во внутренних частях галактики (где можно подозревать наличие бара) эксцентриситеты звездных орбит должны быть большими, для того чтобы обеспечить устойчивость аксиально-симметричных мод. Но влияние резонансов становится малым, когда звездные орбиты эксцентричны, а моды системы без резонансов должны удовлетворять антиспиральной теореме, так что основное «двухрукавное» возмущение, по мнению авторов [289], представляет собой бар.

Тенденция к образованию бара, которую ряд авторов обнаруживают в линейной теории, может быть прослежена далее и развита (уже в нелинейной теории) как раз путем рассмотрения захвата больших осей орбит. Следуя Линдбладу, рассмотрим галактику, в которой  $\Omega - \kappa/2$  меняется с радиусом незначительно. Тогда нелинейное потенциальное возмущение может захватить большие оси, заставив их колебаться около азимута потенциальной ямы (подобное явление было найдено ранее около линдбладовского резонанса Контупулосом [189]). Плотность, связанная с этими захваченными орбитами, будет увеличивать потенциал и еще более усилит захват. Эксцентриситеты таких захваченных орбит велики на внутреннем линдбладовском резонансе, так что почти круговые орбиты редки. Таким образом, подобно Линдбладу, авторы [289] считают, что бары «сделаны» из звезд на эксцентричных орбитах с выстроенными большими полуосями. Угловая скорость такого бара увеличится из-за действия его гравитации на орбиты звезд, но останется значительно меньшей, чем угловая скорость составляющих его звезд.

Отметим еще один вывод [254], следующий из рассмотренной картины взаимодействия резонансных частиц с волнами плотности и касающийся границ применимости таких общих условий устойчивости, как критерий Пиблса — Острайкера (см. раздел 3.2 главы IV). Ясно, например, что устойчивые диски A и B<sub>0</sub> из числа рассмотренных ранее составных моделей (раздела 4.3 гл. V, табл. 1), имеющие  $t = 0,125$  и  $t = 0,086$ , можно чуть-чуть модифицировать таким образом, что они станут уже слегка неустойчивыми. Например, вращающаяся в прямом направлении стабильная бароподобная мода отрицательной энергии за-

ведомо станет слегка неустойчивой, если мы поместим небольшое количество звезд на почти круговые орбиты вокруг области внешнего линдбладовского резонанса, где эти звезды действуют как поглотители (положительных) энергии и углового момента [254]. Отсюда можно прийти к заключению, что, хотя некоторый простой критерий (типа  $t \leq 0,14$ ) может быть достаточным условием отсутствия неустойчивостей с инкрементами, сравнимыми с орбитальными частотами обращения звезд, сомнительно, чтобы существовал *строгий* критерий устойчивости для неаксиально-симметричных возмущений.

**3. Модель Линден-Белла — Калнайса.** В работе [289] предложена еще одна возможная картина поддержания спирального узора Галактики: волны отрицательной энергии эмитируются около круга коротации и поглощаются на внутреннем линдбладовском резонансе.

Такое расположение излучателей и поглотителей энергии на резонансах в галактиках коррелирует с картиной Линя и соавторов, если учесть отрицательность энергии волны и принять направление групповой скорости к центру в согласии с выводами Тоомре [334] и Шу [325].

Линден-Белл и Калнайс показывают, что энергия системы может быть уменьшена путем передачи углового момента из центральной области к периферии. Это можно понять на следующем элементарном примере. Рассмотрим движение двух частиц в фиксированном потенциале. Обозначим массы, угловые моменты и энергии (на 1 г) частиц как  $m_1, m_2; L_1, L_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Вопрос заключается в том, каково минимальное значение энергии

$$E = \sum m_i \varepsilon(L_i) \quad (28)$$

при фиксированном значении углового момента  $\sum m_i L_i$ . Для ответа на этот вопрос нужно минимизировать

$$E = m_1 \varepsilon(L_1) + m_2 \varepsilon(L_2) \quad (29)$$

при ограничении

$$m_1 L_1 + m_2 L_2 = L. \quad (30)$$

Очевидно, что

$$dE = m_1 dL_1 \varepsilon'(L_1) + m_2 dL_2 \varepsilon'(L_2), \quad (31)$$

где  $m_1 dL_1 + m_2 dL_2 = 0$ , т. е.

$$dE = m_1 dL_1 (\varepsilon'(L_1) - \varepsilon'(L_2)) = m_1 dL_1 (\Omega_1 - \Omega_2). \quad (32)$$

При преобразовании выражений в (32) использовано условие равновесия. Из (32) видно, это энергия может быть уменьшена при обмене угловым моментом между частицами, таком, чтобы орбита с меньшей угловой скоростью приобрела дополнительный момент. Это значит, что  $dE < 0$ , если  $dL_1 < 0$  (при  $\Omega_1 > \Omega_2$ ). Так как для галактик угловая скорость  $\Omega$  уменьшается к периферии, энергия понижается, если угловой момент передается от центра наружу.

Хотя этот результат получен пока только для системы, состоящей из двух частиц, в действительности он имеет общее значение, поскольку, например, введение трения в любую систему приводит, очевидно, к передаче углового момента *наружу* и к *исчезновению* энергии вследствие диссипации. Таким образом, галактика, для того чтобы перейти в более низкие энергетические состояния, должна найти механизм передачи углового момента наружу. Это не может быть сделано при аксиально-симметричных движениях звездной системы, так как они не дают гравитационной связи между внутренними и внешними частями. Для того чтобы увидеть, какая форма гравитационного возмущения не-

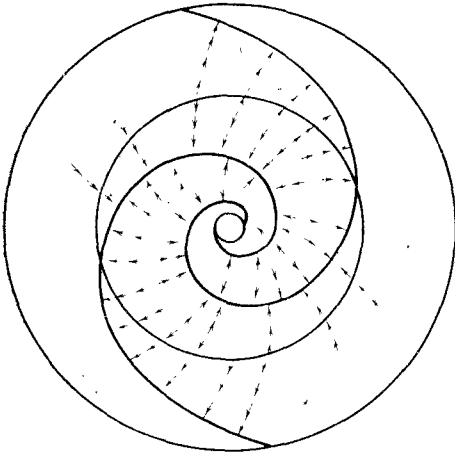


Рис. 72. Спиральная волна плотности (показана сплошными линиями) и соответствующие ей гравитационные силы (стрелки)

образом. Разделим все пространство прямым круговым цилиндром некоторого радиуса (с центром на оси системы). Тогда момент вращения вычисляется по формуле

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{R} \times \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}, \quad (34)$$

где интегрирование ведется по поверхности цилиндра,  $d\mathbf{S}$  — направлена вдоль внешней нормали цилиндра,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, 0)$ . Интересующая нас компонента  $M_z$  момента вращения равна

$$M_z = (4\pi G)^{-1} \int R g_\phi g_r dS. \quad (35)$$

Из (35) видно, что  $M_z > 0$ , т. е. момент передается наружу, при условии что  $g_{1\phi} \cdot g_{1r} > 0$ . Следовательно, должно быть  $g_{1\phi} > 0$  (рис. 72), а соответствующие такой картине сил эквипотенциальные поверхности обязаны быть «отстающими». Это, по выражению авторов, определяет «причину» и «цель» существования отстающих спиральных волн в галактике — они способствуют ее эволюции.

Естественно предположить, что волна перестанет нарастать, когда скорости возмущенных движений, вызываемые волной, превзойдут ее фазовую скорость. Радиальное смещение звезды благодаря силе  $kS$  (на единицу массы) есть  $kS [\chi^2 - (\omega + m\Omega)^2]^{-1}$ , и поэтому условие насыщения можно записать как

$$kS [\chi^2 - (\omega + m\Omega)^2]^{-1} < (\omega + m\Omega) / k. \quad (36)$$

Записывая  $v = (\omega + m\Omega) / k$ , получим из (36) следующую оценку для времени, необходимого волне для передачи значительной части полного углового момента из центральных областей на периферию ( $MR^2\Omega \simeq L$ ):

$$L / M_z = MR^2\Omega / \left( \frac{1}{4} mRS^2 / G \right) = 2\Omega^3 R^4 / S^2 = \frac{2\Omega^3 (kR)^4}{\chi^4 v^2 (1 - v^2)} \sim (kR)^4 / \Omega. \quad (37)$$

Отсюда следует, что распределение углового момента существенно изменится после  $(kR)^4 / 2\pi$  оборотов. Для 100 оборотов должно быть  $kR < 5$ , т. е. наклон волны  $i = \arctg(m/kR) > 23^\circ$ . «Столь открытые» вол-

обходима, можно ввести тензор гравитационных натяжений, выразив плотность силы как минус  $\text{div}$  тензора натяжений. Плотность силы в случае гравитации есть ( $\psi \equiv -\Phi$ )

$$\begin{aligned} \rho \nabla \psi &= -(4\pi G)^{-1} \Delta \psi \nabla \psi = \\ &= -(4\pi G)^{-1} [\text{div} (\nabla \psi \nabla \psi) - \\ &- (\nabla \psi \nabla) (\nabla \psi)] = -(4\pi G)^{-1} \times \\ &\times \text{div} \left[ \nabla \psi \nabla \psi - \frac{1}{2} \hat{I} (\nabla \psi \nabla \psi) \right] = \\ &= -\text{div} [\bar{g}g / (4\pi G) - (g^2 / 8\pi G) \hat{I}]; \quad (33) \end{aligned}$$

т. е.  $\rho \nabla \psi = -\text{div} T$ ;

$$T = \frac{\bar{g}g}{4\pi G} - (g^2 / 8\pi G) \hat{I}; \quad \bar{g} = \nabla \psi.$$

Гравитационный момент вращения, действующий на внешнюю часть системы со стороны внутренней части, вычисляется следующим



ны могут, следовательно, сильно изменять распределение углового момента галактик. Одновременно будет меняться и форма галактики: внешние ее части будут расширяться, а внутренние — сжиматься. Стоячие волны большой амплитуды могут возникнуть в центре галактики (они, по мнению авторов [289], соответствуют бару). Эволюция галактики должна следовать схеме  $SA \rightarrow SAB \rightarrow SB$  ( $Sc \rightarrow Sb$ ).

### 3.7. ДРУГИЕ МЕХАНИЗМЫ ГЕНЕРАЦИИ

Поддерживать спиральные волны в галактиках могла бы в принципе какая-либо локальная неустойчивость негравитационной природы, например пучковая или градиентно-температурная (глава VI). Однако для этих неустойчивостей «продольная» длина волны, как правило, является неправдоподобно большой. Поэтому в реальных галактических системах такие неустойчивости вряд ли могут развиваться (за исключением, разве, иглообразных галактик).

Поскольку в спиралах большой процент массы приходится на долю газа, можно предположить, что спиральная структура появляется вследствие раскачки какой-либо гидродинамической неустойчивости (см. § 4 главы VI) в газовой подсистеме галактического диска. Эта точка зрения исследуется в работах [98—100]. Аналогично другим негравитационным неустойчивостям увеличение теплового разброса не стабилизирует гидродинамические неустойчивости, а, наоборот, приводит к увеличению инкремента нарастания. Однако эти неустойчивости в отличие от упомянутых выше негравитационных неустойчивостей не требуют для своего развития каких-либо особых условий.

В работе [93] мы обратили внимание на области резкого перепада скорости вращения галактик  $v_0(r)$  в околоядерной области, обнаруженные астрономическими наблюдениями последних лет [315]. Их можно связать с наличием в спиральных галактиках сильно сплюснутых ядерных образований (ядро, «балдж», бар). Если для простоты представить тонкую ядерную линзу массы  $M$  в виде однородного сфероида с большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ , то равновесный гравитационный потенциал  $\Phi_0$  во внешней по отношению к этой линзе области в ее экваториальной плоскости ( $z=0$ ) можно записать в виде [64, 147]

$$\Phi_0 = \frac{3GM}{4ae} \left[ \left( \frac{r^2}{a^2 e^2} - 2 \right) \arcsin \frac{ae}{r} - \frac{r}{ae} \sqrt{1 - \frac{a^2 e^2}{r^2}} \right], \quad (1)$$

где  $r$  — расстояние от центра,  $r > a$ . Соответствующая (1) эпициклическая частота  $\kappa^2 = \partial^2 \Phi_0 / \partial r^2 + \frac{3}{r} \partial \Phi_0 / \partial r$ . Например, в дисковом пределе  $e=1$

$$\kappa^2 = \frac{3GM}{2a^2} \left\{ \frac{4}{a} \arcsin \frac{a}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{a^2}{r^2 \sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{3}{r^2} \sqrt{r^2 - a^2} \right\}. \quad (2)$$

Отсюда видно, что вблизи от края диска ( $r \approx a$ )  $\kappa^2$  есть большая по модулю отрицательная величина (при  $r \rightarrow a$   $\kappa^2 \rightarrow -\infty$ ). В такой ситуации очевидно, что для достаточно сильно сплюснутого (имеющего «резкий край») ядра  $\kappa^2$  в непосредственной близости от него определяется лишь параметрами этого ядра и не зависит от распределения массы в других частях системы (хотя бы в них была заключена подавляющая часть полной массы).

Таким образом, круговые орбиты вблизи от такого ядра должны быть неустойчивыми ( $\kappa^2 < 0$ )<sup>1</sup>. Согласно [147], для изолированного сплюснутого сфероида неустойчивость имеет место при  $e > e_{кр}$ , где  $e_{кр} \approx$

<sup>1</sup> Интересен вопрос о возможной связи этой неустойчивости с радиальными потоками газа в центральных областях галактики.

$\approx 0,834$ , в области  $a \leq r \leq a \frac{e}{e_{кр}}$ , так что максимально широкая область неустойчивости (для диска,  $e=1$ )

$$a \leq r \leq 1,2 a. \quad (3)$$

В действительности, конечно, эта приядерная область неустойчивости круговых орбит может быть еще уже при учете реальной неизолированности системы. Мы не будем больше задерживаться на оценке размеров области неустойчивости, которые будут неизбежно мало надежными. Ограничимся только указанием на принципиальную возможность такого «общего» объяснения резких перепадов в кривых скорости вращения спиральных галактик, которое подразумевает, что указанное свойство может быть присуще в принципе многим системам, а не только туманности Андромеды (M31), для которой оно, по-видимому, установлено надежно.

Быстрое изменение скорости вращения благоприятно для раскачки неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Подробный анализ такой возможности проведен в работах [99, 100] (см. § 4 главы VI).

Плотность газа в плоскости Галактики имеет вид, напоминающий форму несимметричного колокола. Если считать, что температура вблизи максимума плотности газа — монотонная функция координаты, можно показать [98—100], что выполняется необходимое условие раскачки желобковой неустойчивости, также приводящей к образованию спиралей.

Исследованный в упомянутых выше работах гипотетический механизм образования спиральных рукавов позволяет объяснить природу многоярусных спиралей, как галактик с несколькими областями (по числу ярусов спиралей) быстрого убывания скорости вращения или нескольких экстремумов плотности газа (или того и другого одновременно).

В работе [100] рассматривается вопрос об аналогии между процессами образования спиральных рукавов галактик и волн плотности во вращающейся лабораторной плазме. Этот вопрос не нов: впервые на внешнее сходство фотографий спиральных рукавов галактик и плазменных сгустков в лабораторном эксперименте обратил внимание Бостик [169] около 20 лет тому назад. При инъекции плазменных сгустков из двух и более инжекторов в одну точку пространства снимок, сделанный в момент встречи этих сгустков, действительно очень напоминает снимки галактических спиралей. В экспериментах Бостика аналогия не простирается дальше чисто внешнего сходства в момент столкновения сгустков, каждый из которых Бостик отождествляет со «спиральным» рукавом. Таким образом, количество «рукавов» (по Бостику) в точности равно количеству плазменных инжекторов, — естественно, что такая аналогия не могла претендовать на серьезное обсуждение. Тем не менее, если обратиться к вопросу об аналогии между многообразием спиральных структур галактик и более скромных по размерам объектов, то среди последних прежде всего обращают на себя внимание вращающиеся массы газа и плазмы: хорошо известные фотографии со спутников циклонов и антициклонов, «спиральная структура» воронки вращающейся жидкости, фотографии волн плотности во вращающейся плазме [34].

Сходство внешних форм спиральной структуры галактик и вращающейся лабораторной плазмы при определенных условиях может быть следствием имеющейся аналогии между обсуждавшимися выше механизмами образования спиральной структуры в двух, казалось бы, совершенно различных средах. Схема доказательства [100] существования такой аналогии предлагается следующей.

Прежде всего выясняется существование среди различных возможных механизмов образования спиральных рукавов в галактиках такого,

который оказывается свободным от влияния гравитационных эффектов, связанных с наличием громадных гравитирующих масс в галактике. Эта же неустойчивость должна приводить к крупномасштабным волнам плотности во вращающейся лабораторной плазме. Очевидно, что такой «универсальной» неустойчивостью, ответственной за динамику вращающейся сплошной среды, может быть какая-либо из гидродинамических неустойчивостей, вызванных наличием градиентов скорости и плотности в газовом диске плоской подсистемы спиральной галактики и во вращающейся лабораторной плазме. Использование в качестве экспериментальной среды жидкости или нейтрального газа не позволяет задавать нужные градиенты плотности скорости вращения, особенно при большом отношении величины «разрыва» скорости  $\Delta v$  к характерной скорости распространения возмущений в среде  $c_s$ . Выполнить эти условия гораздо проще во вращающейся (благодаря дрейфу в скрещенных  $E_r^{(0)}(r)$ - и  $B_z^{(0)}$ -полях) плазменной среде. При этом роль полей  $E^{(0)}$  и  $B^{(0)}$ , так же как и невозмущенного гравитационного поля, заключается лишь в обеспечении стационарности системы. Возможность обсуждаемого плазменного эксперимента открывается благодаря тому, что, как доказано в работе [100], дисперсионные уравнения, описывающие колебания плазменной и гравитирующей сред, во многих интересных случаях аналогичны.

### 3.8. «ОТСТАЮЩИЙ» ХАРАКТЕР СПИРАЛЬНЫХ РУКАВОВ

Мы уже отмечали (см. п. 1 раздела 3.3) довольно общий характер антиспиральной теоремы. Она справедлива, в частности, как для бесстолкновительных звездных систем, так и для газовой среды. Не «спасают» дела и, например, радиальные электрические токи при отсутствии азимутальных — последние привели бы к начальной асимметрии системы. (В этом случае при доказательстве антиспиральной теоремы способом, использованным в конце п. 1 раздела 3.3, нужно к обычному отражению добавить еще зарядовую инверсию.) В общем, присутствие магнитного поля (тороидального или полоидального — без предварительной асимметрии) не нарушает теорему.

Радиальные потоки газа могли бы в принципе участвовать в образовании отстающих спиральных рукавов, и такая возможность исследовалась в литературе. Неясным, однако, здесь остается вопрос о том, каким образом осуществляется *стационарная* циркуляция газа в плоской галактической системе.

Прежде всего следует сказать, что «проблема» антиспиральной теоремы имеет разную остроту в двух основных вариантах волновой теории. В картине Линя, как мы знаем, требуется генерирующий волны механизм, который сам по себе может обладать необходимой асимметрией. Так обстояло бы дело, например, в том случае, если бы спирали вызывались приливным действием спутников галактик или при близком прохождении галактик друг мимо друга [334]. Последний механизм, действуя однократно, генерирует спирали лишь на некоторое, сравнительно короткое время. Что же касается спутников, то их имеют далеко не все галактики. По-видимому, инициировать спиральные возмущения должны все-таки какие-либо *внутренние* механизмы, присущие самой галактике. В новой интерпретации Линя, рассмотренной в разделе 3.5, таким механизмом является локальная гравитационная неустойчивость на периферии галактик, которая приводит к возбуждению «кусков» отстающих спиралей. С другой стороны, как показано в работе Фелдмана и Линя [199] (см. ниже, п. 1), отклик системы на бароподобное искажение формы распределения плотности в центральной области имеет в районе коротационного радиуса вид отстающих рукавов. Тем самым показана выделенность отстающих волн в «крайних» точках

спирального узора. В то же время для «области распространения», основной части дисковой галактики, простое объяснение преобладания отстающих спиралей предложил Марк [290]. И лидирующая, и отстающая волны затухают в направлении их распространения. Так как отстающая волна распространяется внутрь галактики, она должна инициироваться во внешних районах, так что у нее есть достаточно протяженная область распространения до внутреннего линдбладовского резонанса. Напротив, выходящая из центральной области лидирующая волна будет практически полностью поглощена на внутреннем резонансе, не достигнув области свободного распространения.

Антиспиральная теорема представляет наиболее серьезную трудность в альтернативном подходе к проблеме спиральной структуры, когда спирали рассматриваются как неустойчивые моды дисковой системы. Нейтральные колебания, согласно этой теореме, «антиспиральны»; поэтому в не слишком сильно неустойчивых системах получаются весьма «открытые» спирали. Проблема, таким образом, состоит в том, чтобы найти механизм создания туго закрученных спиралей в системах со сравнительно слабой неустойчивостью.

Мы уже касались этого вопроса в разделе 3.5, где отмечалось, что выходом из положения может быть в принципе рассмотрение отклика на сравнительно открытый спиральный потенциал самых плоских и холодных подсистем; этот отклик имеет вид гораздо более сильно закрученной спирали. Ниже, в п. 2, этот вопрос рассматривается на примере некоторых простых моделей, допускающих точное решение.

**1. Возбуждение отстающих спиральных волн плотности вращающейся бароподобной структурой в центре галактики.** Фелдман и Линь [199] изучают влияние бароподобного центра в рамках модели, состоящей из трех компонент: сферически-симметричного «звездного» ядра, твердо-вращающегося «звездного» бара и «газового» диска (или цилиндра). Ось вращения бара проходит через центр ядра. Предполагается для простоты, что ядро и бар не возмущаются, а звезды и газ взаимодействуют только посредством их гравитационных полей.

Рассмотрение чисто газового диска в качестве модели реальной системы, состоящей из звезд и газа, можно оправдать тем, что в окрестности радиуса короткая (которая нас интересует в первую очередь) газ и звезды ведут себя подобным образом.

Считая, что газовый поток является стационарным в системе отсчета, вращающейся с баром, найдем, что все физические величины (скорости, плотность, давление, гравитационный потенциал) не зависят от времени, если их выразить через координаты  $r, \Phi, z$ , где  $\Phi = \varphi - \Omega_p t$ , а  $r, \varphi, z$  — обычные цилиндрические координаты с осью  $z$ , направленной вдоль оси вращения галактики,  $\Omega_p$  — угловая скорость вращения бара.

Без учета влияния бара течение газа предполагается аксиально-симметричным и круговым, т. е.

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z) = (0, r(\Omega - \Omega_p), 0), \quad (1)$$

$v_r, v_\varphi, v_z$  — цилиндрические компоненты скорости во вращающейся системе отсчета, а  $r\Omega(r)$  — невозмущенная скорость в инерциальной системе.

В дальнейшем рассматривается двумерная гравитирующая газовая система, поведение которой определяется уравнениями гидродинамики и уравнением Пуассона. Газ считается идеальным и удовлетворяющим политропному закону («баротропным»)  $P = K\rho^\gamma, \gamma > 1$ .

Вводим энтальпию  $\eta = \frac{\gamma}{\gamma - 1} K\rho^{\gamma-1}$  ( $d\eta = dP/\rho$ ), а также безразмерные переменные  $R, \omega, \omega_p, u, v, h, \psi$  ( $\Phi$  — потенциал):

$$\begin{aligned} r &= r_0 R, & \Omega &= \Omega_0 \omega, & \Omega_p &= \Omega_0 \omega_p, & v_r &= (r_0 \Omega_0) u, \\ v_\varphi &= (r_0 \Omega_0) v, & \eta &= (r_0 \Omega_0)^2 h, & \Phi &= (r_0 \Omega_0)^2 \psi, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r_0$  есть радиус коротации, а  $\Omega_0$  равно частоте волны  $\Omega_p$ . Предполагая, что бар только слегка изменяет первоначальный аксиально-симметричный круговой поток газа, можно линеаризовать уравнения Эйлера, что приводит их к виду

$$(\gamma - 1) h_0 (u_1 + R u_1' - i m v_1) + [r h_0' u_1 - i m (\omega - \omega_p) R h_1] = 0, \quad (3)$$

$$i m (\omega - \omega_p) u_1 + 2 \omega v_1 = h_1' + \psi_1', \quad (4)$$

$$(2\omega + R\omega') u_1 - i m (\omega - \omega_p) v_1 = i m / R (h_1 + \psi_1), \quad (5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $R$ ,  $\omega^2 = (h_0' + \psi_0') / R$ . Введем безразмерные параметры

$$E^2 = \frac{1}{(\gamma - 1) h_0}; \quad H = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{d \ln h_0}{d \ln R} = \frac{d \ln \rho_0}{d \ln R}, \quad (6)$$

$$v = -\frac{m \Omega_0}{\kappa} (\omega - \omega_p),$$

где  $\kappa^2 / \Omega_0^2 = 4\omega^2 (1 + r\omega' / 2\omega)$  (заметим, что  $E$  представляет собой обратную безразмерную скорость звука). Исключая компоненты скорости из гидродинамических уравнений, найдем

$$h_1'' + A h_1' + (B + C) h_1 + \psi_1'' + A \psi_1' + B \psi_1 = 0, \quad (7)$$

где

$$A(r) = \frac{1 + H}{R} - \frac{d}{dR} \ln [(1 - v^2) \kappa^2], \quad (8)$$

$$B(r) = -\frac{m^2}{R^2} + \frac{2\omega}{R^2 (\omega - \omega_p)} \left\{ H - R \frac{d}{dR} \ln [\kappa^2 (1 - v^2) / \omega] \right\}, \quad (9)$$

$$C(r) = -E^2 m^2 \kappa^2 (1 - v^2) / \Omega_0^2. \quad (10)$$

Будем далее рассматривать потенциал как сумму двух членов, один из которых обязан звездам, а другой — газу:  $\psi = \psi_s + \psi_g$ , причем

$$\psi_0 = \psi_{0, \text{ядро}} + \psi_{0, g}, \quad \psi_1 = \psi_b + \psi_g, \quad (11)$$

$\psi_b$  обязана бару, а  $\psi_g$  — возмущению плотности газа. Определим еще функцию  $D(r)$ :

$$D(r) = -(\psi_b'' + A \psi_b' + B \psi_b), \quad (12)$$

тогда уравнение (7) запишется следующим образом:

$$h_1'' + A h_1' + (B + C) h_1 + \psi_g'' + A \psi_g' + B \psi_g = D. \quad (13)$$

Функции  $A$ ,  $B$ ,  $C$  зависят только от стационарных параметров системы и частоты  $\omega_p$ , но не зависят от возмущений. Величина  $D$  определяется баром.

Оценим порядок величины различных коэффициентов, входящих в уравнение (13):  $r_0 \approx 10$  кпс,  $\Omega_0 \approx 10$  км/с · кпс,  $c_s \approx 10$  км/с, так что  $E \approx 10$ . Вместо величины  $E \gg 1$  удобнее иметь дело с обратной величиной:

$$\delta \equiv \frac{1}{E(1)} = \frac{c_s(1)}{r_0 \Omega_0} \ll 1; \quad \text{тогда можно написать}$$

$$A = a_1(R), \quad B = \frac{a_2(R)}{R-1}, \quad C = -\delta^{-2} a_3(R), \quad D = \frac{a_4(R)}{R-1}, \quad (14)$$

где все  $a_i(R)$  порядка 1, регулярны и отличны от нуля в окрестности  $R=1$ .

Определим теперь новую координату  $\xi = (R-1)/\delta$ . Коэффициенты уравнения (13), записанного через  $\xi$ , есть регулярные степенные ряды

по  $\delta$ . Раскладывая возмущения по степеням  $\delta$

$$h_1 = h_1^{(0)} + \delta h_1^{(1)} + \dots, \quad \psi_g = \psi_g^{(0)} + \delta \psi_g^{(1)} + \dots \quad (15)$$

и учитывая, что  $a_3(1) = 1$ , найдем

$$\frac{d^2 \psi_g^{(0)}}{d\xi^2} + \frac{d^2 h_1^{(0)}}{d\xi^2} - h_1^{(0)} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_g^{(1)}}{d\xi^2} + \frac{d^2 h_1^{(1)}}{d\xi^2} - h_1^{(1)} = & \frac{a_4(1)}{\xi} - a_1(1) \frac{d}{d\xi} (h_1^{(0)} + \psi_g^{(0)}) - \\ & - \frac{a_2(1)}{\xi} (h_1^{(0)} + \psi_g^{(0)}) + \xi a_3(1) h_1^{(0)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выше мы приняли, что поток газа является двумерным. Соответственно можно рассматривать две модели: цилиндра и диска. Мы ограничимся ниже только более простой аналитической моделью цилиндра (в [199] показано, что качественно результаты для обеих моделей совпадают). В этом случае  $\partial^2 \psi_g / \partial z^2 = 0$ , и уравнение Пуассона дает

$$\psi_{0,\text{газ}}'' + \frac{1}{R} \psi_{0,\text{газ}}' = \frac{4\pi G \rho_0}{\Omega_0^2}, \quad (18)$$

$$\psi_g'' + \frac{1}{R} \psi_g' - \frac{m^2}{R^2} \psi_g = \Lambda h_1, \quad (19)$$

где

$$\rho_0 = \left[ r_0^2 \Omega_0^2 \frac{\gamma - 1}{\gamma K} h_0 \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad (20)$$

$$\Lambda = \frac{4\pi G \rho_0}{(\gamma - 1) h_0 \Omega_0^2} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{(c_s)_0^2} = (k_{\text{кр}} r_0)^2 = \left( \frac{2\pi r_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2, \quad (21)$$

$\lambda_{\text{кр}}$  — джнсовская длина волны,  $(c_s)_0$  — скорость звука в невозмущенном веществе. Оценка величины  $\Lambda$  (для солнечной окрестности Галактики) приводит [199] к соотношению  $\Lambda \sim \delta^{-2}$ , поэтому удобно определить функцию  $L(R)$ :  $\Lambda = \delta^{-2} L(R)$ ;  $L$  порядка единицы,  $L(1) > 1$ . С этими предположениями находим

$$\frac{d^2 \psi_g^{(0)}}{d\xi^2} = L(1) h_1^{(0)}, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 \psi_g^{(1)}}{d\xi^2} = L(1) h_1^{(1)} + \xi L'(1) h_1^{(0)} - \frac{d\psi_g^{(0)}}{d\xi}. \quad (23)$$

Комбинируя эти уравнения с (16), (17), получим

$$\frac{d^2 h_1^{(0)}}{d\xi^2} + \alpha^2 h_1^{(0)} = 0. \quad (24)$$

$$\frac{d^2 h_1^{(1)}}{d\xi^2} + \alpha^2 h_1^{(1)} = \frac{a_4(1)}{\xi} + F_{\text{cyl}}^{(0)}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\text{cyl}}^{(0)} = & \xi [\dot{a}_3(1) - L'(1)] h_1^{(0)} + [1 - a_1(1)] \frac{d\psi_g^{(0)}}{d\xi} - \\ & - a_1(1) \frac{dh_1^{(0)}}{d\xi} - \frac{a_2(1)}{\xi} [h_1^{(0)} + \psi_g^{(0)}], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\alpha = [L(1) - 1]^{1/2}. \quad (27)$$

Уравнение (25) содержит сингулярный член  $a_4(1)/\xi$ . Как всегда в таких случаях, искомая нейтральная мода должна рассматриваться как предел нарастающих мод. Будем считать, что  $\xi$ ,  $\Omega_p$ ,  $\omega_p$  «слегка комплексны»,  $\Omega_p = \Omega_0 (1 + is)$ ,  $\omega_p = 1 + is$  ( $s = 0^+$  или  $0^-$ ), и возьмем возмущение вида  $h_1(\xi) e^{-im\Phi} = h_1(\xi) e^{-im(\varphi - \Omega_p t)} e^{-ms\Omega_p t}$ . Тогда нарастающим модам соответствует  $ms < 0$ . Для комплексных  $\omega_p$  полюс  $[\omega(\xi) - \omega_p]^{-1}$  лежит в точке  $\xi = i\varepsilon$ , такой, что  $\varepsilon = s/\omega'(0)$ . Так как в любой разумной модели  $\omega'(0) < 0$ , то  $\varepsilon$  имеет знак, противоположный  $s$ , поэтому  $m$  и  $\varepsilon$  должны иметь одинаковый знак. Ниже мы считаем  $m > 0$ , так что и  $\varepsilon > 0$ , т. е. полюс лежит выше действительной  $\xi$ -оси. Соответственно в пределе  $s \rightarrow 0^-$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  при интегрировании по  $\xi$  нужно обходить особую точку  $\xi = 0$  снизу. Рассмотрим теперь, как в [199], уравнение

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + g_1 \frac{dy}{d\xi} + g_2 y = \frac{1}{\xi}. \quad (28)$$

Уравнение (25) является частным случаем (28) при  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = \alpha^2$ . Допустим, что корни соответствующего характеристического уравнения чисто мнимые (как в случае (25)), так что оба решения однородного уравнения колебательные:

$$y_1 = e^{i\alpha_1 \xi}, \quad y_2 = e^{i\alpha_2 \xi} \quad (29)$$

( $\alpha_1, \alpha_2$  действительны). Если мы проинтегрируем в комплексной плоскости по контуру ( $C$ ), проходящему вдоль действительной оси и обходящему особенность  $\xi = 0$  снизу, мы найдем следующее частное решение неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2\pi}{\alpha_1 - \alpha_2} [e^{i\alpha_2 \xi} I(\xi, \alpha_2) - e^{i\alpha_1 \xi} I(\xi, \alpha_1)], \quad (30)$$

$$I(\xi, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha \xi}}{\xi} d\xi, \quad (30')$$

а интеграл берется вдоль  $C$ . Из (30') ясно, что  $I(\xi, \alpha) = O(1/\xi)$  при  $\xi \rightarrow +\infty$ . Легко доказывается также, что при  $\xi \rightarrow -\infty$

$$I(\xi, \alpha) = \begin{cases} O(1/\xi), & \alpha > 0, \\ 1/2 + O(1/\xi), & \alpha = 0, \\ 1 + O(1/\xi), & \alpha < 0. \end{cases} \quad (31)$$

Для  $m > 0$  и решения вида  $h_1(r) \sim e^{ikr}$  спираль является отстающей, если  $k < 0$ , и лидирующей, если  $k > 0$ . Решение уравнений (24), (25) можно представить в виде:

$$h_1 = k_L e^{i\alpha \xi} + k_T e^{-i\alpha \xi} + \delta k_D f_D(\xi) + O(\delta^2), \quad (32)$$

где первые два члена есть «свободные» решения (индексы « $L$ » и « $T$ » обозначают «лидирующая» и «отстающая»), а последний член обязан действию бара,

$$k_D = \frac{\pi}{\alpha} a_4(1), \quad (33)$$

$$f_D(\xi) = e^{-i\alpha \xi} I(\xi, -\alpha) - e^{i\alpha \xi} I(\xi, \alpha). \quad (34)$$

Поскольку  $I \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  и  $I \rightarrow e^{-i\alpha \xi}$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ , то можно заключить, что  $k_D f_D$  исчезает на  $+\infty$  и ведет себя как отстающая спираль на  $-\infty$  («лидирующая» часть  $f_D$  стремится к нулю при  $\xi \rightarrow -\infty$ ).

2. Возьмем точно рассчитываемую в линейной теории модель бесстолкновительного эллипсоида (11) из § 1 главы IV. Как известно, спирали состоят из молодых звезд и газа плоской подсистемы. В соответ-

ствии с этим выделим из всей совокупности звезд те, которые находятся вблизи от экваториальной плоскости. Парциальная плотность этих звезд  $\tilde{\rho}_0 \sim (1-r^2)^{-1/2}$ . Из уравнений многопоточковой гидродинамики (см., например, [86]) для этих звезд (т. е. «потока» с  $v_z \approx 0$ ) можно получить следующее выражение, характеризующее их парциальный вклад в полную возмущенную плотность (ср. с (11) раздела 2.2 гл. V):

$$\rho_1 \sim \frac{1}{r} (r\varepsilon\Phi_1)' - \frac{m^2}{r^2} \varepsilon\Phi_1 - \frac{2m}{r\omega_*} (\varepsilon\Omega_0)' \Phi_1, \quad (35)$$

где  $\varepsilon = \tilde{\rho}_0/(\omega_*^2 - 4\Omega_0^2)$ ;  $\Phi_1$  — полный возмущенный потенциал,  $\omega_* \equiv \omega - m\Omega_0$ . Подставив в (35)  $\tilde{\rho}_0 \sim (1-r^2)^{-1/2}$ , получим (полагаем  $m=1$ )

$$\rho_1 \sim \Phi_1'' + \Phi_1' \frac{1}{r(1-r^2)} - \left[ \frac{1}{r^2} - \frac{2}{\omega_*(1-r^2)} \right] \Phi_1. \quad (36)$$

Представим парциальную возмущенную плотность в виде

$$\rho_1 \sim \exp[i(\psi(r) + \varphi)],$$

так что уравнение спирали

$$\psi(r) + \varphi = \text{const.}$$

Обозначая  $\omega_1 \equiv \text{Re } \omega$ ,  $\omega_2 \equiv \text{Im } \omega$ ,  $\delta_1 \equiv \text{Re } \delta$ ,  $\delta_2 \equiv \text{Im } \delta$ , из (36) для моды (19) раздела 3.1 гл. IV получим выражение для функции  $\text{tg } \psi(r)$ :

$$\text{tg } \psi(r) = \frac{\omega_2(8 + \delta_1 - 5r^2) + \delta_2(\omega_2 - 2)}{\omega_1[6(1-r^2) + 3] - [(2 - \omega_1)(r + \delta_2) + \omega_1] - \delta_2\omega_2}. \quad (37)$$

Используя данные вычислений, можно проверить, что решение с нарастающей во времени амплитудой всегда дает монотонно убывающую функцию  $\varphi(r) = -\psi(r) + \text{const}$ , что соответствует *отстающей* спирали. Так, для приведенного выше примера закручивание спирали на расстоянии радиуса диска составляет  $\sim 25^\circ$ . В то же время полная плотность (и потенциал) в этом случае имеют вид «слабо лидирующих» спиралей. Подсистема звезд с  $v_z \approx 0$ , рассмотренная выше, составляет, очевидно, лишь малую долю всех звезд, даже в плоскости  $z=0$ . Ясно, что данное рассмотрение полностью сохраняется и для всех подсистем, имеющих в плоскости  $z=0$  скорости  $v_z$ , меньшие некоторой граничной скорости  $v_0$ , при условии, что  $v_0 \ll \omega_0 c$ . Этой граничной скорости соответствует определенная толщина плоской подсистемы  $h$  (которая должна быть много меньше  $c$ ). Отношение масс выделенной таким образом плоской подсистемы к полной массе будет  $\sim h/c$ . Несмотря на малость этого отношения, «отстающие» спирали плоской подсистемы могут наблюдаться: они могут быть выделены физически, например, по светимости наиболее молодых звезд, находящихся в самых плоских подсистемах галактики или по 21-см излучению водорода, образующего газовые отстающие спирали. Отметим, что описание последних автоматически включено в эту схему, поскольку холодная газовая компонента при  $z \approx 0$  может описываться на равных правах как в рамках гидродинамики, так и в кинетической теории.

В каждый данный момент в плоскости  $z \approx 0$  имеются также и звезды с большими скоростями  $v_z$ . Они принадлежат другим подсистемам, состоят из «старых» звезд умеренной светимости и образуют фон, не имеющих спирального вида. В отстающие спирали закручиваются, как показано, только звезды и газовые облака наиболее плоских подсистем, которые постоянно находятся вблизи от плоскости  $z=0$ .

Для дисков, рассмотренных в разделе 4.3 главы V, ситуация аналогична: парциальная плотность звезд самых «холодных» подсистем дает четкую картину отстающих спиралей, в то время как полная плотность и потенциал имеют «антиспиральный» вид.



### 3.9. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЯ И ШУ С НАБЛЮДЕНИЯМИ

Независимо от будущей теории происхождения и развития спиральной структуры галактик (ее еще только предстоит создать), имеющаяся сейчас «полуэмпирическая» теория волн плотности Линя и Шу может оказаться полезной при интерпретации наблюдений.

Как мы видели, теория содержит один свободный параметр — скорость спиральной волны  $\Omega_p$ . Наблюдательная проверка теории поэтому состоит в сравнении с большим количеством данных. Одни из них могут использоваться для определения угловой скорости волны, другие дают проверку предсказаний теории. Линь и соавторы [271] оценивают согласие теории и наблюдений в пределах  $\approx 20\%$ .

1. Первое достаточно подробное сравнение выводов теории Линя и Шу с данными наблюдений по нашей Галактике было проведено в работе [271]. Сравнение проводилось по следующим пунктам: а) распределение атомарного водорода; б) систематическое движение газа; в) распределение молодых звезд; г) миграция умеренно молодых звезд. Отмечается, что хорошее согласие имеется во всех случаях, если принять угловую скорость спиральной картины порядка  $11\text{—}13$  км/с·кпс, а спиральное гравитационное поле равным приблизительно  $5\%$  от аксиально-симметричного поля.

а) Спиральный узор можно вычислить, пользуясь дисперсионным уравнением (21) раздела 4.1 главы V, если известна равновесная модель Галактики. Если принять, как в [271], модель Шмидта [319], то для  $\Omega_p = 11\text{—}13$  км/с·кпс получаются расстояния между рукавами, согласующиеся с наблюдениями. При этом нужно иметь в виду, что, вообще говоря, возбуждается не одна волна, а целая группа волн с частотами, близкими к  $\Omega_p$ , а сравнение наблюдений и теории в [271] для простоты производится для одиночной волны. Поэтому нельзя ожидать слишком точного согласия, однако получающееся согласие можно считать удовлетворительным<sup>1</sup>.

Важной проверкой общих положений теории является исследование дисперсии скоростей звезд, предсказываемой критерием (21) раздела 4.1, главы V. В рассматриваемой работе диск предполагался чисто звездным и не имеющим толщины. В таких предположениях дисперсия скоростей для солнечной окрестности Галактики  $c_s \approx 52$  км/с оказывается слишком большой (по крайней мере на  $25\%$ ). Расхождение еще более увеличивается, если учесть наличие газовой составляющей. Однако Шу [323, 325] показал, что это расхождение исчезает, если учесть конечную толщину дисков звезд и газа. Дисперсия скоростей в солнечной окрестности должна быть тогда  $\approx 37$  км/с (или несколько меньше) для стабильности от локального коллапса. Полученная Шу оценка дисперсии скорости находится в разумном согласии с наблюдениями. Шу обнаружил также, что относительные вклады газа и звезд примерно одинаковы, несмотря на то, что масса звезд намного превышает массу газа. Это объясняется тем, что газовый диск Галактики много тоньше звездного диска.

б) Наблюдатели уже давно заметили волнообразные вариации на кривых вращения галактик, но сначала об этих вариациях думали как о возможном следствии потери газа межрукавными районами. Этот эффект, однако, оказывается мал [271], и правильную интерпретацию хода кривой вращения дает теория волн плотности. Очевидно, что компонента возмущенной скорости частиц в азимутальном направлении (обусловленная наличием спиральных рукавов) должна вызвать изменения в наблюдаемой кривой вращения галактики. Количественное изучение систематического движения газа, проведенное Юанем [359, 360], привело

<sup>1</sup> Детали выбора скорости волны  $\Omega_p$  подробно обсуждаются в работах Юаня [359, 360]. Этот выбор оказывается ограниченным довольно узкими пределами.

к требуемым оценкам для амплитуды изменения скорости — порядка 3—10 км/с. Это может быть вызвано спиральным гравитационным полем  $\sim 5\%$  от аксиально-симметричного, действующим на газ с турбулентной скоростью  $\approx 7$  км/с (среднеквадратичное значение одной компоненты скорости) и с магнитным полем  $H \sim 5 \cdot 10^{-6}$  гс. Отметим здесь же следующее из теории устойчивости плоских вращающихся систем естественное объяснение [271] различия между северной и южной кривыми вращения Галактики. По-видимому, источником этого различия является овальное (бароподобное) искажение формы Галактики, которое, как мы видели (в § 4 главы V), особенно трудно стабилизируется дисперсией скоростей звезд.

в) Звезды рождаются в местах наиболее высокой концентрации газа, т. е. внутри газовых рукавов. В конце концов эти звезды должны мигрировать из рукавов, так как звезды вращаются с угловой скоростью материи, которая отличается от  $\Omega_p$  — угловой скорости рукавов. За десять миллионов лет (возраст молодых *O*- и *B*-звезд) для солнечной окрестности Галактики такие звезды должны были отойти от газовых рукавов примерно на 1,2 кпс. Однако, так как наклон спиральных ветвей мал (они туго закручены в Галактике), *радиальное* расстояние составит всего около 1/10 от указанного, так что молодые звезды фактически должны лежать в пределах газовых рукавов, что и подтверждается наблюдениями: голубые яркие звезды *O*- и *B*-типа являются, как известно, оптическими *индикаторами* спиральной структуры, хорошо очерчивающими газовые ветви. Необходимо отметить, что теория волн плотности вообще привела к значительному прогрессу в проблеме звездообразования в галактиках. Вычисления отклика газового диска на спиральное гравитационное поле (создаваемое в основном звездной составляющей) указывают на необходимость формирования ударной волны [208, 311]. Внезапное сжатие газовых облаков в ударном фронте может привести к их коллапсу и, следовательно, к звездообразованию. Подробно теория крупномасштабных ударных волн в Галактике была разработана Робертсом [311].

г) В настоящее время методы определения возраста «умеренно молодых» звезд [329] достаточно совершенны, чтобы можно было поставить задачу найти места рождения этих звезд и восстановить историю их миграции. С достаточно хорошей точностью известны также и необходимые для вычислений современные положения и скорости звезд.

Уже предварительное рассмотрение, проведенное Линем и соавторами [271], показало, что даже малое спиральное поле ( $\sim 5\%$  аксиально-симметричного) может давать существенный эффект. Юань [359, 360], экспериментируя с различными выборами частоты спирального узора и напряженности поля, нашел, что хороший выбор соответствует  $\Omega_p \approx 13,5$  км/с · кпс и полю  $\sim 5\%$  от аксиально-симметричного. Он исследовал треки двадцати пяти звезд, используя данные Стрёмгрена [329]. Если спиральное гравитационное поле не учитывается, то положения этих звезд в момент рождения не укладываются ни в одну известную из радионаблюдений структуру. В то же время при включении спирального поля все эти звезды ложатся на положения спиральных рукавов. Именно такое предсказание должна, конечно, давать правильная теория; так как звезды формируются внутри газовых спиралей. Авторы [271] отмечают, что хорошее согласие (пожалуй, наиболее впечатляющее из рассмотренных) в проблеме миграции умеренно молодых звезд получается, несмотря на наличие большого числа факторов, которые могли бы запутать результаты.

2. В работе Шу с соавторами [326] исследуются на основе теории волн плотности спиральные узоры трех галактик: М33, М51 и М81. В каждой из этих галактик ясно различается двухрукавная спираль. Вращение М33 почти твердотельное для значительной части диска, в то

время как галактики М51 и М81 вращаются с приблизительно постоянной линейной скоростью. Соответственно различаются и распределения масс. Они сильно сконцентрированы к центру в случае М51 и М81, а для М33 распределение является «гладким». Основное отличие между М51 и М81, помимо размеров, состоит в различном относительном содержании газа. Галактика М51 («Водоворот») представляет еще и дополнительный интерес, так как она связана одним из своих главных рукавов с близким спутником, который может в принципе играть важную роль в возбуждении (или, наоборот, в разрушении) спиральной структуры.

Для простоты в [326] рассматриваются только звезды. Включение малого количества газа (~10%) не должно сильно изменить определяемые характеристики спиральных картин.

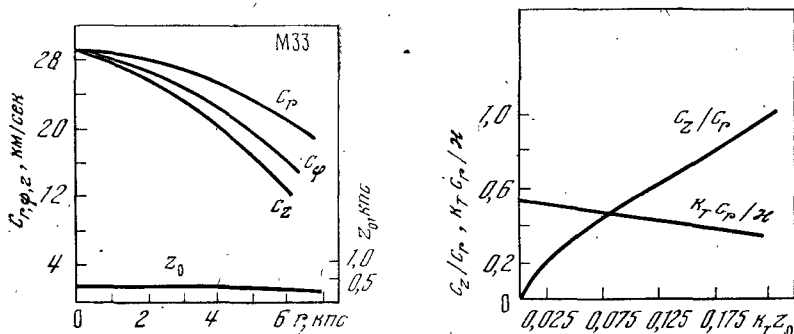


Рис. 73. Дисперсии скоростей и вертикальный масштаб для М33 [326]

Дисперсии скоростей вычислены в предположении, что уровень дисперсии равен минимально необходимому для подавления джинсовской неустойчивости. Вертикальный масштаб  $z_0$  связан с балансом между гравитационным потенциалом и случайными движениями по оси  $z$

Рис. 74. Критерий маргинальной устойчивости как функция безразмерной толщины диска  $k_T z_0$  [326]

Сначала строятся, исходя из заданных кривых вращения, массовые модели галактик с конечной, хотя и малой, толщиной. В каждой точке системы предполагается модифицированное шварцшильдовское распределение пекулярных скоростей. В вертикальном направлении плотность меняется как  $\text{sech}^2(z/z_0)$ . Здесь параметр  $z_0(r)$  представляет собой локальный масштаб галактик по оси  $z$  и выражается через среднеквадратичную скорость  $v_z^2$  обычным соотношением:  $z_0 = v_z^2 / \pi G \sigma_0$ , где  $\sigma_0(r)$  — локальная поверхностная плотность. Дисперсии скоростей в модифицированном шварцшильдовском распределении должны удовлетворять определенным ограничениям, следующим из условий равновесия и устойчивости. Из условия равновесия, как мы знаем, в эпициклическом приближении получается линдбладовская связь между дисперсиями скоростей звезд в радиальном и тангенциальном направлениях:  $c_\phi/c_r = \kappa/2\Omega$ . Отношение  $z_\parallel \equiv c_z/c_r$ , вероятно, равно 1 в центральных районах спиральных галактик, где должно преобладать «хорошо перемешанное» состояние равновесия [281]. Во внешних областях галактики  $z_\parallel$  может быть существенно меньше единицы (например,  $z_\parallel = 0,5 \div 0,6$  в солнечной окрестности галактики). В моделях, принятых в [326],  $z_\parallel$  уменьшается монотонно от единицы в галактическом центре до 0,5 для самых внешних областей (рис. 73). Выбор скорости убывания, разумеется, довольно произволен, но вычисленная спиральная картина оказывается нечувствительной к этому выбору.

После этого остается определить  $c_r$  как функцию радиуса. Минимальное значение  $c_r$  получается из требования, чтобы звездный диск

был стабилен относительно джинсовской неустойчивости (радиальных возмущений). Тоомре [333] рассмотрел случай бесконечно тонких дисков. На рис. 74 представлены результаты [326], обобщающие критерий Тоомре (28') § 4.1 главы V на звездные диски с конечной толщиной  $z_0 = z_0(r)$ ;  $k_T c_{r\min}/\kappa$  и  $c_z/c_r$  даны как функции  $k_T z_0$  ( $k_T = \kappa^2/2\pi G\sigma_0$ ). Для иллюстрации использования данных рис. 74 возьмем солнечную окрестность Галактики. Допустим, что уровень  $c_r$  является минимально необходимым для устойчивости. Следуя Шмидту [319], примем, что  $\kappa = 32$  км/с · кпс. Примем также следующие разумные оценки:  $\sigma_0 = 90 M_\odot/\text{пс}^2$  и  $z_0 = 300$  пс. Эти оценки соответствуют объемной плотности в центральной плоскости, равной  $\sigma_0/2z_0 = 0,15 M_\odot/\text{пс}^3$ . Отсюда получим:  $k_T = 0,42$  кпс<sup>-1</sup> и  $k_T z_0 = 0,126$ . Из рис. 74 после этого получим:  $c_z/c_r = 0,60$ ;  $c_r = 0,42\kappa/k_T = 32$  км/с. Оба эти значения находятся в хорошем согласии с наблюдениями [326]. Несколько более реалистичская оценка, учитывающая, что примерно 10% массы приходится на долю межзвездного газа с эффективной скоростью звука  $D \approx 8$  км/с, поднимает полученную только что оценку для  $c_r$  примерно на 3 км/с.

Совпадение между дисперсией скоростей, действительно имеющейся в солнечной окрестности, и минимально необходимой для устойчивости выдвигается авторами [271] и [326] как решающий аргумент в пользу того, что индекс стабильности Тоомре  $Q = c_r/c_{r\min}$  равняется единице по всему диску Галактики, кроме, может быть, самых центральных областей. По этой же причине (и для простоты) они полагают  $Q = 1$  также и для моделей дисков всех изучаемых в [326] галактик.

Дисперсии скоростей, вычисленные в согласии с рассмотренными выше предположениями, представляют собой убывающие функции  $r$ , такие, что в центре  $c_r = c_\phi = c_z$ , но всюду при  $r \neq 0$   $c_r > c_\phi > c_z$ .

После того как модель равновесного состояния галактики построена, можно переходить к изучению локальных свойств волн плотности в этих галактиках. Для звездного диска, который обладает модифицированным распределением Шварцшильда, локальное дисперсионное уравнение мы уже приводили в разделе 4.1 главы V. Изменение амплитуды волны с радиусом для бесконечно тонкого диска было выведено в работах [325, 334] во втором порядке ВКБ-приближения (см. выше, п. 2 раздела 3.3), но эти вычисления не были еще обобщены на случай диска конечной толщины. Качественно верные результаты получаются следующим образом [326]. Обозначим через  $g = (g_r^2 + g_\phi^2)^{1/2}$  усредненную с массовым весом амплитуду спирального гравитационного поля и выразим ее как долю  $F$  среднего гравитационного поля  $r\Omega^2$ , тогда получим (см. раздел 4.1 главы V).

$$F = g/r\Omega^2 = \text{const} (k^2 r^2 + m^2)^{1/2} (rR_v)^{-1/2} / r^2 \Omega^2,$$

$$R_v = \left[ -1 + \frac{\partial}{\partial \ln k} \ln (\mathcal{F}_v D) \right].$$

Одной из задач рассматриваемой работы [326] была проверка гипотезы Линя об образовании спиралей под действием гравитационного коллапса во внешних районах спиральных галактик (см. раздел 3.5). Двухрукавные спиральные волны могут распространяться только в области, где горизонтальная линия  $\Omega = \Omega_p$  лежит выше  $\Omega - \kappa/2$  и ниже  $\Omega + \kappa/2$  (рис. 75). Однако, если Линь [272] прав, то только в области, где  $(\Omega - \kappa/2) < \Omega_p < \Omega$ , может существовать *организованная* спиральная картина. Тогда можно предположить, что скорость спирального узора приближенно должна быть равна скорости вращения самых внешних III областей (т. е. областей ионизованного водорода, образующегося вокруг молодых звезд под действием их мощного коротковолнового излучения). Это дает для M33  $\Omega_p \approx 16$  км/с · кпс, а для M81  $\Omega_p \approx 21$  км/с · кпс, так что соответствующие радиусы коротации равны 6,8

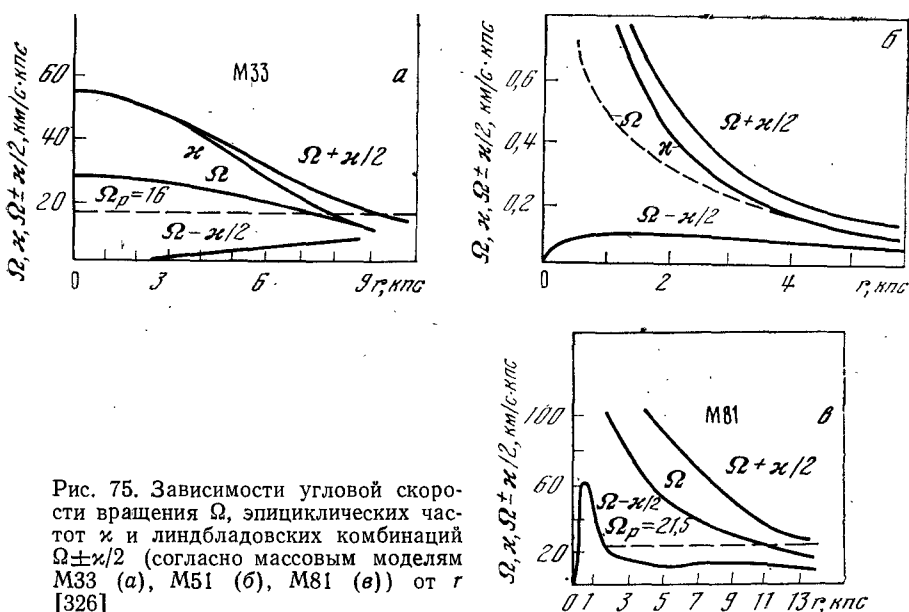


Рис. 75. Зависимости угловой скорости вращения  $\Omega$ , эпициклических частот  $\kappa$  и линдбладовских комбинаций  $\Omega \pm \kappa/2$  (согласно массовым моделям М33 (а), М51 (б), М81 (в)) от  $r$  [326]

и 11,2 кпс. В случае вероятного разрушения внешних областей М51, близким спутником этот метод может не дать правильной оценки радиуса коротации для М51. При таких обстоятельствах принимается произвольно:  $\Omega_p = 33$  км/с · кпс (соответствующий радиус коротации 4,5 кпс) как значение, не находящееся в противоречии с предложением Лия.

Радиус коротации лежит немного вне самых внешних III-областей, если образование звезд инициируется только механизмом спиральных галактических ударных волн [311], и совпадает с этими III-областями, если коллапс межзвездного газа сам приводит к звездообразованию. Спиральный узор, связанный с нашей Галактикой, кажется удовлетворяющим критерию Лия [326]. Интересно проверить, удовлетворяется ли он также и для других галактик. Проверка состоит в том, обеспечивает ли теоретический узор со скоростью волны, оцененной описанным способом, хорошее наложение на наблюдаемую спиральную структуру внутри радиуса коротации.

Спиральные картины, вычисленные для таких  $\Omega_p$ , хорошо накладываются на наблюдаемые. Так как  $\Omega$  почти постоянно по всему диску М33, кривая  $\Omega - \kappa/2$  очень плоская. Поэтому спиральные волны могут проходить в самый центр этой галактики (и возмущать его, образуя там бароподобную структуру). Можно ожидать, что это является общей чертой галактик, которые не обладают сильной концентрацией массы к центру. В то же время, для выбранных скоростей, волны в М51 и М81 должны встретить «барьеры» на внутренних линдбладовских резонансах.

Связанной с этими замечаниями является тенденция для галактик типа М33 иметь более открытые спиральные рукава. Волны в таких галактиках, похоже, должны быть всюду далеки от линдбладовского резонанса, следствием чего является то, что дисперсионное уравнение никогда не даст очень коротких длин волн для самосогласованных спиралей.

Авторы [326] показывают также границы (рис. 76), в которых вычисления адекватны, т. е. выполнены условия применимости ВКБ-приближения. В каждом случае они охватывают почти всю галактику, но, конечно, не включают районы, близкие к резонансам.

Наблюдения не позволяют построить единственную, однозначную модель галактики. В связи с этим в [326] рассмотрены две несколько различные модели М51 (и для двух разных  $\Omega_p: \Omega_p=33$  и  $\Omega_p=43$  км/с·кпс). Из этого рассмотрения сделаны следующие выводы:

1. Исключая локализацию (но не существование!) внутреннего линдбладовского резонанса, основные черты спиральной картины для данного  $\Omega_p$  не чувствительны к деталям принятой равновесной модели. В частности, угол закрутки  $i = \arcs \operatorname{tg}(m/|k|r)$  в конечном счете определен основными чертами модели.

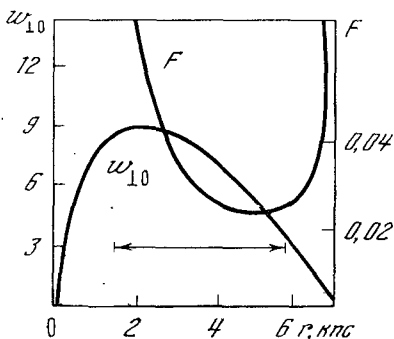


Рис. 76. Зависимости невозмущенной компоненты скорости  $\omega_{10}$  и относительной амплитуды  $F$  спирального гравитационного поля от радиуса для коротких волн, распространяющихся с  $\Omega_p = 16$  км/с·кпс в М33 [326]

2. Вычисленная картина чувствительна к изменениям в  $\Omega_p$  (т. е. к локализации радиуса коротации); 30% — увеличение в  $\Omega_p$  (от 33 до 43 км/с·кпс) для М51 приводит к картине с углом закрутки, увеличенным, грубо говоря, тоже на 30%, а радиусы коротации и внешнего линдбладовского резонанса уменьшаются примерно на 20% (кривая вращения на этих расстояниях почти кеплеровская,  $\Omega \sim r^{-3/2}$ ).

Вычисленные картины имеют тенденцию к несколько более сильной закрутке по сравнению с наблюдаемой, так что скорости волн в будущем могут быть немного увеличены (но, вероятно, не более чем на 30%).

Общий вывод, сделанный в работе [326], гласит, что концепция Линя инициирования волн плотности джинсовской неустойчивости во внешних областях нормальных спиральных галактик согласуется с изучением спиральных структур М33, М51, М81. Очевидно, однако, что описанные результаты имеют более общий характер, им не противоречат также и некоторые другие механизмы генерации спиральных волн (в том числе из описанных нами в этом параграфе). Таким образом, в [326] не показано, что предложение Линя является единственным согласующимся с наблюдениями. В частности, как отмечают сами авторы [326], механизм неустойчивости вполне мог бы вызвать спиральный узор галактики М33.

3. Сравнение теории галактических волн плотности с данными наблюдений на более богатом материале (24 галактики) было продолжено в работе Робертсов и Шу [312]. Более того, в этой работе сделана попытка дать новую классификацию спиральных галактик, основанную на небольшом числе наблюдаемых характеристик.

Выбор этих характеристик подсказывается теорией волн плотности. В линейную теорию Линя и Шу входит один свободный параметр,  $\Omega_p$  или  $r_c$  — радиус коротации. Сила образующейся в газовой составляющей галактики крупномасштабной ударной волны пропорциональна  $(\omega_{\perp}/D)^2$ , где  $D$  — эффективная скорость звука,  $\omega_{\perp}$  — полная (невозмущенная + возмущенная) компонента скорости газа, перпендикулярная спиральному рукаву, эта величина осциллирует вдоль линии тока из-за действия спирального гравитационного поля около невозмущенного значения  $\omega_{10}$ . Ударная волна формируется в том случае, если ускоряю-

щая сила, действующая со стороны спирального рукава, достаточно велика, чтобы  $\omega_{\perp}$  достигло сверхзвуковых значений. Для  $\omega_{\perp} > D$  большая часть газа на линии тока движется со сверхзвуковой скоростью. Сильные ударные волны, возникающие в такой ситуации, приводят к образованию *узких* областей *высокого* сжатия газа. Слабые ударные волны, образующиеся при  $\omega_{\perp} < D$ , дают *широкие* области относительно *низкого* сжатия газа. Эти два случая соответствуют наблюдаемым *узким* и *широким* рукавам, так что образование тех или других должно критично зависеть от величины  $\omega_{\perp}/D$ , или (поскольку, вероятно,  $D$  не сильно меняется от галактики к галактике) просто от величины  $\omega_{\perp} = r(\Omega - \Omega_p) \sin i$ , где  $i$  — угол наклона волны к азимутальному направлению, который находится при данной  $\Omega_p$  из дисперсионного уравнения.

Из сказанного следует возможность классификации спиральных галактик, основанной на двух параметрах —  $\omega_{\perp}$  и  $i$ . Размерный анализ показывает, что типичные значения  $\omega_{\perp}$  и  $i$  могут быть выражены как

$$\omega_{\perp} = \left(\frac{GM}{r_c}\right)^{1/2} f(r_{0,5M}/r_c); \quad \sin i = g(r_{0,5M}/r_c) \quad (M(r_{0,5M}) = M/2),$$

где  $f$  и  $g$  — функции, форма которых должна определяться из условий равновесия,  $M$  — полная масса галактики. Отсюда следует вывод [312], что основные характеристики и геометрическая форма нормальных спиралей должны определяться двумя параметрами:  $M/r_c$  (или, эквивалентно,  $M/r_{0,5M}$ ) и  $r_{0,5M}/r_c$ .

Изложенные выше принципы классификации галактик, основанные на теории волн плотности, должны придать ей, по мнению авторов рассматриваемой работы [312], более объективный характер. Они отмечают удовлетворительную корреляцию между моделями галактик в предложенной классификации и типами Хаббла.

## § 4. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### 4.1. О КРИТИЧЕСКОЙ МАССЕ КОЛЕЦ САТУРНА

Исторически задача о критической массе (или плотности) колец Сатурна была сформулирована Лапласом [264] два столетия назад в связи с попыткой выяснить их природу. Эта традиция сохранилась по настоящее время. Вслед за С. В. Ковалевской [57], уточнившей постановку задачи Лапласа, наиболее полным является известный трактат Максвелла [291]. Максвелл показал, что твердотельные кольца и кольца из несжимаемой жидкости абсолютно нестабильны, и пришел к выводу о неизбежности метеорного строения колец Сатурна. Этот вывод был затем полностью подтвержден многочисленными данными оптических наблюдений (см., например, [316]). Таким образом возник вопрос об устойчивости плоской вращающейся системы, состоящей из пылевидной материи (с давлением  $P$ , близким к нулю) в поле большой центральной массы<sup>1</sup>.

При исследовании устойчивости пылевидного кольца Максвелл представлял кольцо как систему концентрических орбит и переходил затем к рассмотрению устойчивости отдельных орбит частиц. Их устойчивость относительно радиальных возмущений не вызывает сомнений. Поэтому Максвеллу представляются опасными только тангенциальные возмущения. В действительности (см. ранее, в разделе 2.2) более де-

<sup>1</sup> Наиболее полный обзор работ по вопросу устойчивости колец Сатурна содержится в монографии М. С. Боброва [30].

тальное рассмотрение колец как совокупности взаимодействующих частиц показывает, что радиальные возмущения, приводящие к слипанию орбит, и различные тангенциальные возмущения опасны в одинаковой степени (в рамках естественного в этой задаче коротковолнового приближения). Присутствие большой центральной массы стабилизирует эту неустойчивость. Действительно, в предельном случае бесконечно малой объемной плотности вещества диска, когда взаимодействием между отдельными частицами диска по сравнению с действием на них центральной массы можно пренебречь, мы приходим к задаче Кеплера с очевидно устойчивым решением. Однако если диск бесконечно тонкий, то при сколь угодно малой поверхностной плотности вещества для длин волн возмущения  $\lambda \rightarrow 0$  инкремент неустойчивости  $\gamma \rightarrow \infty$ . Очевидно, что в этом случае конечная центральная масса не может привести к стабилизации.

В работе [40] показано, что конечная толщина  $h$  и малая плотность колец Сатурна обеспечивают их устойчивость. Критерий устойчивости (3) (см. ниже) позволяет сделать выбор между различными экспериментальными оценками параметров колец.

Длинноволновые возмущения ( $\lambda \sim R$ ) диска «почти устойчивы» [227] даже при отсутствии большого центрального тела. Поэтому не удивителен результат Ябашиты [357, 358], что такие возмущения не приводят к неустойчивости колец Сатурна, стабилизируемой центральным телом (результат получен при помощи машинного эксперимента). Достаточно короткие волны,  $kh \gg 1$ , стабилизируются (по Джинсу) тепловым давлением.

Таким образом, заранее неочевидной является динамика возмущений с длиной волны  $\lambda$ , такой, что  $2\pi h \lesssim \lambda \ll R$ . Радиальные размеры колец Сатурна более чем в тысячу раз превосходят их толщину. Поэтому достаточно ограничиться случаем  $h \ll \lambda \ll R$ , когда диск можно считать бесконечно тонким. Значительно более громоздкое исследование случая  $\lambda \sim h$  может привести только к изменению численного коэффициента в условии (3), которое выполняется с большим запасом.

Итак, речь идет об устойчивости вращающегося кольца массы  $m$  с внутренним и внешним радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно в поле центральной массы  $M$  относительно произвольных возмущений, лежащих в его плоскости. Равновесие такой системы определяется условием

$$\frac{(v_\phi^{(0)})^2}{r} = \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r}, \quad \Phi^{(0)} = -G \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma^{(0)}(r') r' dr' d\phi'}{\sqrt{(r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \phi')}} + \frac{M}{r} \right\}.$$

Аналогично изложенному в разделе 2.2 главы V в старшем порядке теории возмущений

$$(\omega - m\Omega_0)^2 \simeq \kappa^2 - 2\pi G \sigma_0 k + k^2 D^2. \quad (1)$$

Разумеется, легко написать «усовершенствованные» (по типу раздела 4.1 главы V) дисперсионные уравнения. Ниже дается только грубая оценка критического отношения  $M/m$ . Корректное уточнение этой оценки представляет, однако, непростую задачу.

Поскольку невозмущенная скорость  $v_0^2 \simeq GM/r$  то

$$\kappa^2 = 2 \left( \frac{v_0}{r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_0^2)}{\partial r} = \frac{GM}{r^3}. \quad (2)$$

Из (1), (2) и неравенства  $hk \lesssim 1$  находим критерий устойчивости кольца

$$\frac{M}{m} \gtrsim 2 \frac{R}{h}, \quad (3)$$

где  $R$  — внешний радиус колец,  $m$  — масса колец ( $D=0$ ):



Критерий устойчивости (3) позволяет сделать выбор между различными экспериментальными оценками [3, 357, 358] отношения  $M/m$  при известных значениях  $R \sim 10^5$  км,  $h \sim 10$  км,  $(M/m)_{\min} \approx 2R/h \sim 2 \cdot 10^4$ . Современные данные, приведенные у Ябашиты [357, 358],  $M/m \sim 10^7$ , представляются поэтому более правдоподобными, чем данные 1952 г., приведенные в известном справочнике Аллена [3],  $M/m \sim 2 \cdot 10^4$ .

#### 4.2. О ЗАКОНЕ ПЛАНЕТНЫХ РАССТОЯНИЙ

Другим интересным приложением задачи об устойчивости плоских гравитирующих систем в поле большой центральной массы является проблема эволюции протопланетного облака. Этой теме<sup>1</sup> посвящен ряд оригинальных работ, и прежде всего О. Ю. Шмидта [151], В. Г. Фесенкова [137], Вейцеккера [347, 348], Койпера [262], Берлаги [164, 165].

В работе [110] исследуется возможность объяснения закона планетных расстояний, основанная на идее гравитационной неустойчивости в достаточно плоских системах (см. предыдущий пункт).

Как известно, расстояния планет от Солнца достаточно хорошо описываются при помощи следующего эмпирического правила, установленного еще в XVIII в. Боде и Тициусом (см., например, [3]):

$$r_n = r_0 + c \cdot 2^n, \quad (1)$$

где  $r_0 = 0,4$ ;  $c = 0,3$ ;  $n = -\infty, 0, 1, \dots, 6$ ;  $r_n$  — расстояния (в а. е.) соответственно до Меркурия, Венеры, ..., Плутона.

В согласии с излагаемой точкой зрения предположим, что планетная система образовалась из газопылевого диска, вращающегося в поле центральной массы [110]. Пусть условие неустойчивости такого диска выполнено. Тогда если диск неоднороден по плотности  $\sigma_0$ , то длина волны возмущения есть функция радиус-вектора  $r$ . Таким образом, задача сводится к тому, чтобы по заданной из (1) функции  $\lambda = \lambda(r)$  определить функцию  $\sigma_0 = \sigma_0(r)$ .

Прежде всего заметим, что закон Тициуса — Боде (1) может быть записан в следующей форме:

$$a \ln \frac{r_n - r_0}{c} = 2\pi n, \quad (2)$$

где

$$a = \frac{2\pi}{\ln 2} \approx 9,1. \quad (3)$$

Величину плотности  $\sigma$  представим в виде суммы  $\sigma_0(r) + \sigma_1(r)$ . Пусть

$$\sigma_1(r) = \tilde{\sigma}_1(r) \exp \left[ ia \ln \frac{r - r_0}{c} \right], \quad (4)$$

где  $\tilde{\sigma}_1(r)$  — медленно меняющаяся с радиусом амплитуда возмущенной плотности,  $a \ln \left( \frac{r - r_0}{c} \right)$  — фаза.

Из равенства (2) следует, что максимумы величины возмущенной плотности  $\sigma_1$  (4) совпадают с истинным положением всех планет, за исключением последних двух — Нептуна и Плутона. Это исключение легко устраняется, если допустить, что до  $r \sim 14$  а. е.  $\sigma_0(r) \sim 1/r^2$ , а далее  $\sigma_0(r) \sim 1/r^3$  (см. рис. 77).

С учетом давления среды дисперсионное уравнение для частот малых радиальных колебаний плоского диска, вращающегося вокруг центральной массы  $M$ , есть (1) раздела 4.1 с  $m = 0$ . (Величина  $D$  может обозначать и среднюю скорость турбулентных движений газа).

<sup>1</sup> Подробный обзор соответствующих работ содержится в книге В. С. Сафронова [119].

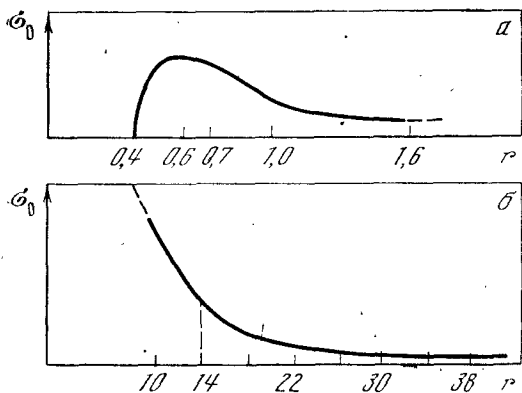


Рис. 77. Зависимость величины невозмущенной плотности  $\sigma_0(r)$  газопылевого протопланетного облака от радиуса  $r$  (в астрономических единицах) при изменении  $r$  от 0,4 до 1,6 (а) и от 10 до 40 (б).

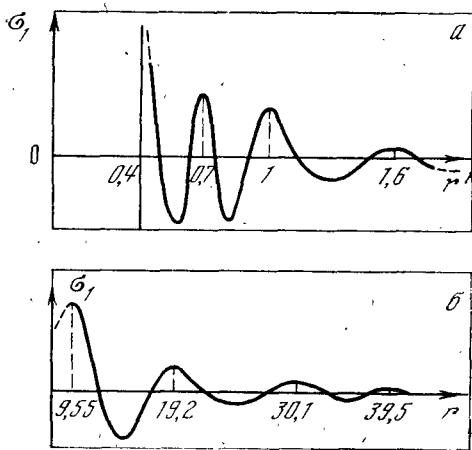


Рис. 78. Зависимость величины возмущенной плотности  $\sigma_1(r)$  газопылевого протопланетного облака от радиуса (в астрономических единицах) в диапазоне 0—1,8 а. е. (а) и 9—40 а. е. (б).

а)  $D=0$ , модель пылевого диска. Для возмущений типа (4) трудно найти

$$\sigma_0(r) = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\pi G a} (r - r_0), \quad (5)$$

где  $\Omega^2(r) = GM/r^3$ . Определяя массу  $n$ -й протопланеты из формулы

$$m_n \approx \int_{r_n}^{r_{n+1}} \sigma_0(r) r dr, \text{ получаем, что массы протопланет в области, где } \sigma_0(r)$$

определяется формулой (5), одного порядка. На границе устойчивости  $\omega^2=0$ , и из (5) имеем (с учетом того, что  $a=9,1$ ,  $c=0,3$ )  $M/m_n \approx 28$ .

Если отношение масс  $M/m_n$  больше 28, то гравитационная неустойчивость пылевого диска с указанными выше параметрами отсутствует — волны плотности не нарастают.

б)  $D \neq 0$ , газопылевой диск. Как следует из дисперсионного уравнения, при  $k = \pi G \sigma_0 / D^2$  неустойчивость максимальна. Подставляя это значение  $k$  вновь в дисперсионное уравнение (1) раздела 4.1, находим связь между стационарными параметрами системы на границе устойчивости ( $\omega^2=0$ ):  $\Omega = \pi G \sigma_0 / D$ , откуда

$$\sigma_0(r) = \frac{M(r - r_0)}{\pi a r^3}. \quad (6)$$

Сравнивая полученную плотность стационарного состояния газопылевого диска с аналогичным выражением (5) для пылевого диска, видим, что различие всего в 2 раза.

Таким образом, в случае, когда плотность диска зависит от радиуса по закону (5) или (6), нарастающие со временем кольцеобразные возмущения плотности диска располагаются в нем согласно закону Тициуса — Бодэ (1). Если не предполагать какой-либо определенной зависимости  $\sigma_0(r)$ , условие «квантования» планетных орбит будет выглядеть следующим образом (на границе устойчивости  $\omega^2=0$ ):

$$\Phi_1(r_n) \equiv \frac{M}{2\pi} \int_0^{r_n} \frac{dr}{r^3 \sigma_0(r)} = 2\pi n. \quad (7)$$

Правило Тициуса — Бодэ получается отсюда при

$$\sigma_0(r) = \frac{M \ln 2r - r_0}{4\pi^2 r^3}.$$

Очевидно, что при  $\sigma_0 = c/r^3$  ( $c = \text{const}$ ) получим из (7) одинаковые расстояния между планетными орбитами. Константу можно выразить через расстояние  $\Delta r$  между этими планетами ( $\Delta r \approx 10$  а. е.):  $c = M\Delta r/4\pi^2$ . Из условия непрерывности поверхностной плотности имеем

$$\sigma_0(r) = \begin{cases} \frac{M \ln 2r - r_0}{4\pi^2 r^3}, & r \leq 14 \text{ а. е.}, \\ \frac{M\Delta r}{4\pi^2} \frac{1}{r^3}, & r > 14 \text{ а. е.} \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) следует, что закон Тициуса — Бодэ справедлив до  $r \approx 14$  а. е. Далее (согласно наблюдениям) расстояния между орбитами остаются неизменными.

Итак, если зависимость поверхностной плотности от радиуса газопылевого диска, вращающегося в поле центральной массы  $M$ , имеет вид (8), нарастающие кольцеобразные возмущения находятся в местах расположения планет Солнечной системы (рис. 78). Из рис. 77 видно, что приблизительно от 0,6 до 14 а. е. поверхностная плотность  $\sigma_0$  падает  $\sim 1/r^2$ . В этом интервале массы протопланет оказываются одного порядка. Начиная с 14 а. е.,  $\sigma_0 \sim 1/r^3$ , поэтому массы последних двух протопланет должны уменьшаться с расстоянием.

Для развития неустойчивости в модели пылевого диска необходимо, чтобы  $M/m_n \leq 28$ , а в модели газопылевого диска  $M/m_n \leq 14$ . Это означает, что в настоящих планетах содержится не более чем  $\approx 3\%$  ( $\approx 1,5\%$ ) массы протопланетного облака.

Согласно гипотезе Койпера [262], масса современных планет составляет 1—10% протопланетного облака, а Хойл постулирует, что остаточная масса составляет 9% [223].

Предполагается, что большая часть первоначальной массы протопланет была сдута интенсивным корпускулярным излучением Солнца. Различие же между массами больших планет и планет земной группы приписывается действию теплового излучения Солнца, которое выжгло из последних почти все легкие элементы.

Такая точка зрения, согласно [137], не является неестественной, так как планеты земного типа состоят, как известно, преимущественно из элементов с высокой температурой плавления и почти лишены легких элементов, таких, как, например, водород, являющийся основным материалом, из которого построены звезды и большие планеты.

Прибавляя к современным массам планет земной группы то количество легких газов, которое необходимо для восстановления химического состава больших планет, получаем массы, в сотни раз большие, т. е. совпадающие по порядку величины с массами больших планет [137]. Поэтому весьма естественно предположить, что первоначальная диффузная среда, послужившая для образования планет, имела тот же состав, что и Солнце.

### 4.3. ИЗГИБ ПЛОСКОСТИ ГАЛАКТИКИ

Хантер и Тоомре [230] применили развитую ими теорию мембранных колебаний бесконечно тонкого холодного гравитирующего диска (см. раздел 2.1 главы V) для проверки различных гипотез, предложенных для объяснения наблюдаемого изгиба плоскости Галактики (Берке [177]).

Фактические данные, полученные из радионаблюдений на  $\lambda=21$  см (см. [230]), сводятся к следующему. Внешний край слоя межзвездного атомарного водорода приподнят вверх (примерно на  $h=1$  кпс, или  $(6\div 7)\%$  радиуса) около одного (солнечного!) края Галактики, а на противоположной стороне он опущен вниз, причем приблизительно на такую же величину. В то же время часть диска Галактики, внутренняя по отношению к Солнцу, кажется плоской. Таким образом, в поперечном сечении слой водорода напоминает по форме знак интеграла.

Предложено, по крайней мере, четыре разных объяснения описанного явления.

1. Рассматривалась [230] возможность, что это просто приливное искажение, обязанное Магеллановым облакам на их теперешнем расстоянии от Галактики (по порядку величины).

2. Кан и Вольтер (см. [230]) предположили, что явление обязано межгалактическому потоку газа, обтекающему Галактику и ее гало.

3. Те же авторы, а также Линден-Белл [283] рассматривали и возможность свободных колебаний плоскости Галактики (мембранного типа), которые могли быть возбуждены в эпоху образования Галактики.

4. Орбита Магеллановых облаков могла в прошлом проходить гораздо ближе к Галактике, чем теперь [230]. Тогда величина эффекта может быть существенно большей, чем согласно первому из рассмотренных вариантов. Впервые такая возможность, но только в несколько другой связи, рассматривалась Иддисом [51].

К перечисленным выше четырем возможностям можно добавить еще одну, заключающуюся в априорно не запрещенной неустойчивости. Однако эту возможность можно исключить ввиду доказанной Хантером и Тоомре [280] общей теоремы об устойчивости возмущений с  $m=1$ , которые как раз соответствуют наблюдаемой угловой зависимости  $\sim e^{i\varphi}$ . Имеющейся толщины Галактики, вероятно, достаточно для стабилизации «шланговой» неустойчивости.

Рассмотрим остальные возможности.

а) **Квазистационарная приливная деформация.** Для оценки теперешнего приливного эффекта Магеллановых облаков последние можно представить в виде точки (с массой  $M_c \approx 10^{10} M_\odot$ , где  $M_\odot$  — масса Солнца), расположенной на расстоянии  $r_c \approx 55$  кпс на широте  $b=35^\circ$ . Удобно считать долготу этой точки (от центра диска Галактики)  $\varphi=0$ . Тогда в первом порядке по  $r/r_c$  вертикальная приливная сила  $F_*$  со стороны облаков приблизительно равна

$$F_*(r, \varphi) \approx \left( \frac{3GM}{2r_c^2} \right) (r/r_c) \sin 2b \cos \varphi. \quad (1)$$

Хантер и Тоомре [230] вычислили отклик на стационарное внешнее возмущение вида

$$F_* = (\pi GM/R^2) (r/R) \cos \varphi. \quad (2)$$

Оно представляется в следующей форме:

$$h(r, \varphi, t) = S\tau r \sin \varphi + RH_{st}(r/R) \cos \varphi, \quad (3)$$

где  $s = \text{const}$  — постоянная скорость прецессии ( $s \sim 1/2\Omega$ ), а  $H$  — функции радиуса, которые авторы [230] привели в виде графиков (рис. 79).

Для их использования в данном случае нужно учесть, что  $F_*$  в уравнениях (1) и (2) отличаются на фактор  $g_* = (3/2\pi) (M_* R^3 / M r^3) \sin 2b$ . Примем для Галактики  $M = 1,2 \cdot 10^{11} M_\odot$ ,  $R = 16$  кпс; последнее значение дает для модели 16X разумную поверхностную плотность:  $\sigma = 87 M_\odot / \text{пс}^2$  и скорость вращения  $V = 255 \text{ км/с}$  на  $r = 10$  кпс. Тогда фактор  $g_* = 9,2 \cdot 10^{-4}$  и из рис. 79 следует, что для модели 16X, например, получается максимальное отклонение плоскости всего на  $2,72 g_* R \approx 40$  пс

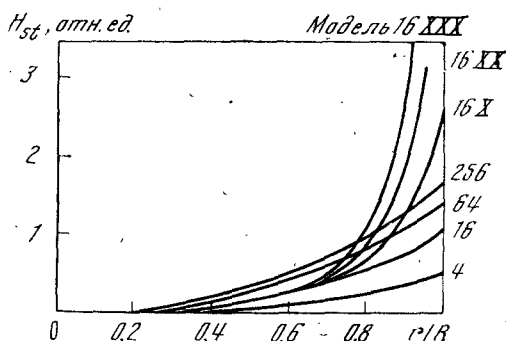


Рис. 79. Возмущения различных дисков с  $m=1$  под действием внешней силы [230]

Амплитуды возмущения на краю диска для моделей 16X, 16XX, 16XXX есть 2,72; 5,31; 7,94 соответственно.

(если приливная сила такой величины действует постоянно). Для модели 16XX подобное смещение будет 78 пс, и даже для модели 16XXX с очень низкой плотностью на периферии оно равно всего лишь 117 пс на самом краю. Конечно, эти квазистационарные оценки вполне могут содержать ошибку в 2—3 раза из-за неопределенностей в моделях Галактики и облаков. Тем не менее, ввиду того что наблюдаемая деформация  $\sim 1$  кпс, Хантер и Тоомре [230] приходят к выводу, что рассмотренная здесь возможность должна быть отброшена, во всяком случае она не может быть главной причиной наблюдаемого изгиба плоскости Галактики.

**б) Свободные моды колебаний.** Диски с дискретными спектрами не типичны, поскольку реальные диски не имеют резкой границы. В таких дисках (с непрерывным спектром частот) простые начальные деформации не могут сохраняться достаточно долго. Одну из причин, общую для возмущений любой формы, мы отмечали ранее, в разделе 2.1, — это снос начального возмущения к краю диска (где оно должно быстро затухать). Другая причина, которая существенна, по крайней мере в случае возмущений с  $m=1$ , заключается в том, что различные кольца просто стремятся нутировать с разными скоростями под действием гравитационного момента вращения со стороны массивного внутреннего диска.

**в) Тесное прохождение.** По мнению авторов [230], это единственное обещающее предположение. Наблюдаемая радиальная скорость Большого Магелланова облака (БМО), исправленная на движение Солнца и галактическое вращение (250 км/с), показывает, что БМО в настоящее время удаляется не только от нас, но и от галактического центра. Эта скорость порядка 50 км/с [230]. Определяемый отсюда временной масштаб  $T \sim (4 \div 6) \cdot 10^8$  лет; в ту эпоху Галактика и БМО отстояли друг от друга на расстояние, существенно меньшее теперешнего. Численные оценки эффекта искривления плоскости Галактики в этом случае, которые проводятся аналогично тому, как это сделано выше (п. а)); дают разумную величину отклонения при условии, что БМО (примерно  $5 \cdot 10^8$  лет назад) прошло на расстоянии в пределах 20 кпс от центра Галактики (для массы БМО  $\geq 2 \cdot 10^{10} M_\odot$ ). Мы предоставляем читателю возможность самому убедиться в сказанном.

С этой точки зрения наблюдаемая в настоящее время картина искривления плоскости Галактики представляет собой проэволюционировавшее приливное возмущение от БМО, которое было возбуждено несколько сот миллионов лет назад.

#### 4.4 НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В заключение остановимся<sup>1</sup> кратко на одной несколько неожиданной возможности применения идеи гравитационной неустойчивости — в задаче о множественном рождении частиц (см. [136]).

Будем для определенности говорить о столкновении адронов (приводящем к образованию сильно сплюснутого диска и последующему его разлету). Наиболее последовательно разлет описывается, как известно, в гидродинамической теории Ландау [66]. Эта теория, однако, не описывает «файербольной» (или «партонной») структуры разлета. В действительности такая структура может быть, по-видимому, получена при сохранении основной идеи теории Ландау, т. е. собственно гидродинамики. Непоследовательным в ней является, возможно, предположение о том, что движение вещества в течение существенной части разлета является одномерным. Одномерное движение, как следует из элементарных оценок, неустойчиво по отношению к возмущениям, лежащим в плоскости диска<sup>2</sup>. Неустойчивость должна приводить к образованию «квазинезависимых» сгустков. Как мы знаем, дисперсионное уравнение для плоских возмущений гравитирующего диска имеет, грубо говоря, вид:  $\omega^2 \approx k^2 D^2 - 2\pi G \sigma_0 k (+\kappa^2)$ . В рассматриваемом случае роль гравитации играет ядерное притяжение между «элементами» ядерной жидкости диска. Поскольку здесь существенны достаточно большие расстояния, мы имеем для юкавского (к примеру) притяжения между ядерными зарядами  $q$  и  $Q$ :  $U = -g(qQ/r)e^{-\mu r}$  ( $g$  — константа взаимодействия,  $\hbar = c = 1$ ). Так как размеры диска меньше  $1/\mu$ , можно для оценки положить  $e^{-\mu r} \approx 1$ : юкавское притяжение становится «дальнодействующим» (и  $\infty \rightarrow 1/r$ ) аналогично гравитации. Соответственно будем иметь следующее приближенное дисперсионное уравнение:  $\omega^2 \approx k^2 D^2 - 2\pi(g/m)\sigma k$ , где  $m$  — средняя масса ядерных частиц,  $\sigma$  — их поверхностная ( $\text{см}^{-2}$ ) плотность. Отсюда, как легко убедиться, следует что  $\omega^2 < 0$  (т. е. имеет место неустойчивость) уже при множественности порядка 1 (и  $D \approx c$ ).

Разумеется, выше изложено всего лишь «грубое обоснование» идеи, более подробное обсуждение было бы неуместно в этой книге.

<sup>1</sup> Доложено В. Л. Поляченко на Всесоюзной конференции по плазменной астрофизике (Иркутск, 1976 г.).

<sup>2</sup> Неустойчивыми могут быть и другие типы возмущений (например, «мембранные»). Интересно вообще исследовать вопрос о роли «коллективных явлений» в обсуждаемых задачах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### § 1. БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА В РАЗНЫХ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМАХ

**а) Кинетическое уравнение.** В декартовых координатах  $x, y, z$  бесстолкновительное кинетическое уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что переход к криволинейным координатам или во вращающуюся систему может быть осуществлен прямым преобразованием уравнения (1). Эта процедура, однако, обычно довольно громоздка. Более простой метод получения кинетического уравнения сразу в нужной системе координат состоит в следующем. Заметим, что бесстолкновительное кинетическое уравнение можно представить в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (2)$$

Здесь  $H$  — гамильтониан частицы в самосогласованном поле

$$H = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 + \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

а  $[f, H]$  — скобка Пуассона:

$$[f, H] \equiv \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \quad (4)$$

$q_i$  и  $p_i$  — обобщенные координаты и сопряженные импульсы частицы. Напомним, что по определению  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , где  $L$  — функция Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

Обычно не составляет труда написать выражение для гамильтониана в любой системе координат.

В наиболее употребительных (в том числе и в этой книге) координатах функция Гамильтона выглядит следующим образом. В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + \Phi(r, \varphi, z), \quad (6)$$

причем  $p_r = v_r$ ,  $p_\varphi = r v_\varphi$ ,  $p_z = v_z$ .

В сферических координатах,  $r, \theta, \varphi$

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \Phi(r, \theta, \varphi). \quad (7)$$

В этом случае  $p_r = v_r$ ,  $p_\theta = r v_\theta$ ,  $p_\varphi = r \sin \theta v_\varphi$ .

В соответствии с этими выражениями для функции Гамильтона легко получить, пользуясь (2) — (4), кинетическое уравнение в рассматриваемых системах координат.

В цилиндрических координатах оно оказывается следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left( \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \\ - \left( \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В сферических координатах соответственно кинетическое уравнение выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left( \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \\ - \left( \frac{v_r v_\theta}{r} - \text{ctg} \theta \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} - \\ - \left( \frac{v_r v_\varphi}{r} + \text{ctg} \theta \frac{v_\theta v_\varphi}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В сферически-симметричном случае часто удобнее (см., например, § 3 главы III) использовать несколько другие координаты в пространстве скоростей: вместо  $v_r, v_\theta, v_\varphi$  —  $v_r, v_\perp = (v_\theta^2 + v_\varphi^2)^{1/2}$  и  $\alpha = \text{arctg} \frac{v_\varphi}{v_\theta}$ . В этих координатах кинетическое уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \text{ctg} \theta \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \\ + v_r \left( \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\perp} \right) + \left( \frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{1}{r} \left( \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\perp} - \frac{1}{r v_\perp} \left( \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Можно записать кинетическое уравнение и в произвольной ортогональной системе координат  $q_1, q_2, q_3$  с квадратом элемента длины вида

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad (11)$$

где  $h_i$  — некоторые функции координат. Компоненты скорости равны

$$v_1 = h_1 \dot{q}_1, \quad v_2 = h_2 \dot{q}_2, \quad v_3 = h_3 \dot{q}_3, \quad (12)$$

так что лагранжиан есть

$$L = \frac{1}{2} (h_1^2 \dot{q}_1^2 + h_2^2 \dot{q}_2^2 + h_3^2 \dot{q}_3^2) - \Phi(q_1, q_2, q_3). \quad (13)$$

Отсюда находим соответствующие координатам  $q_1, q_2, q_3$  обобщенные импульсы  $p_1, p_2, p_3$ :

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = h_1^2 \dot{q}_1, \quad \dots \quad (14)$$

Выражаем из (14)  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$  через  $p_1, p_2, p_3$  и коэффициенты Ламэ  $h_1, h_2, h_3$ :

$$\dot{q}_1 = p_1 / h_1^2, \quad \dots \quad (15)$$

Поэтому компоненты скорости равны

$$v_1 = p_1 / h_1, \quad \dots \quad (16)$$



Гамильтониан частицы

$$H = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \Phi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_1^2}{h_1^2} + \frac{p_2^2}{h_2^2} + \frac{p_3^2}{h_3^2} \right\} + \Phi(q_1, q_2, q_3). \quad (17)$$

Отсюда согласно (2) — (4) выводим общий вид кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{p_i}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \frac{p_1^2}{h_1^2} + \frac{p_2^2}{h_2^2} + \frac{p_3^2}{h_3^2} \right] \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0. \quad (18)$$

После этого остается перейти снова от импульсов  $p_i$  к скоростям  $v_i$  (по формулам (16)).

Запишем теперь кинетическое уравнение в прямоугольной системе координат  $x, y, z$ , вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ . Если написать его в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (19)$$

то вместо ускорения  $\mathbf{v}$  в данном случае следует, очевидно, подставить силу

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} + 2 [\mathbf{v}\Omega] + [\Omega [\mathbf{r}\Omega]], \quad (20)$$

где первый член справа дает обычную гравитационную силу, а остальные два члена — силы инерции (соответственно кориолисову и центробежную). Если выбрать ось вращения в качестве оси  $z$  системы координат, то искомое кинетическое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left[ \Omega^2 x + 2\Omega v_y - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \frac{\partial f}{\partial v_x} \\ + \left[ \Omega^2 y - 2\Omega v_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\partial v_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведем еще это уравнение в цилиндрической (также вращающейся) системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \Omega + \frac{v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left( - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Omega r^2 + \right. \\ \left. + 2\Omega v_\varphi + \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left( \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} + 2\Omega v_r + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

**б) Уравнение Пуассона.** Второе основное уравнение теории, уравнение Пуассона, имеет в произвольной ортогональной системе координат (11) следующий симметричный вид:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = 4\pi G \rho, \quad (23)$$

где суммирование ведется по круговым перестановкам индексов 1, 2, 3. В цилиндрических координатах

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho. \quad (24)$$

В сферических координатах

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 4\pi G \rho. \quad (25)$$

## § 2. ОТДЕЛЕНИЕ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАДАЧЕ О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для произвольной функции распределения вида  $f_0 = f_0(E, L^2)$  в сферически-симметричном случае угловая часть пространственной зависимости возмущения всегда может быть отделена в виде, пропорциональном сферическим гармоникам:  $\Phi_1 \sim Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

Это естественное утверждение формально можно обосновать при помощи следующих выкладок. Одновременно мы получим наиболее естественное, по-видимому, представление уравнений, описывающих возмущения сферически-симметричных звездных систем, которое полностью учитывает симметрию задачи.

Представим возмущение функции распределения в виде разложения

$$f_1 = \sum_s \lambda_{ms}^l(v_\perp, v_r, r) T_{ms}^l(\varphi, \theta, \alpha), \quad (1)$$

где введены функции

$$T_{ms}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1 - is\varphi_2} P_{ms}^l(\cos\theta), \quad (2)$$

причем  $P_{ms}^l(\cos\theta)$  — трехиндексные функции [33], в частности  $P_{m0}^l(\cos\theta)$  — функции, с точностью до коэффициентов совпадающие с присоединенными функциями Лежандра. Удобно поэтому написать, что

$$\Phi_1 = \chi(r, t) T_{m0}^l(\varphi, \theta, \alpha). \quad (3)$$

Разделим  $f$  на четную и нечетную части по  $v_r$ :

$$f = f_+ + f_- = \sum_s \lambda_{+ms}^l(v_r, v_\perp, r) T_{ms}^l(\varphi, \theta, \alpha) + \sum_s \lambda_{-ms}^l(v_r, v_\perp, r) T_{ms}^l(\varphi, \theta, \alpha). \quad (4)$$

Кинетическое уравнение расщепляется на две части:

$$\frac{\partial f_-}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r} \hat{L} f_- + \hat{D} f_+ = \frac{\partial \chi}{\partial r} T_{m0}^l(\theta, \varphi) \frac{\partial f_0}{\partial E} v_r, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r} \hat{L} f_+ + \hat{D} f_- = \frac{1}{r} \hat{L} \chi(r) T_{m0}^l(\theta, \varphi) \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} v_\perp + \frac{\partial f_0}{\partial L^2} 2v_\perp r^2 \right), \quad (6)$$

где использовано

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_r} = v_r \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} = \frac{\partial f_0}{\partial E} v_\perp + \frac{\partial f_0}{\partial L^2} 2v_\perp r^2.$$

Подставляем теперь в (5) и (6) разложение (1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_s \lambda_{-ms}^l T_{ms}^l + \frac{v_\perp}{r} \sum_s \lambda_{-ms}^l \hat{L} T_{ms}^l + \sum_s \hat{D} \lambda_{+ms}^l T_{ms}^l = \frac{\partial \chi}{\partial r} T_{m0}^l(\theta, \varphi) v_r \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_s \lambda_{+ms}^l T_{ms}^l + \frac{v_\perp}{r} \sum_s \lambda_{+ms}^l \hat{L} T_{ms}^l + \sum_s \hat{D} \lambda_{-ms}^l T_{ms}^l = \\ = \frac{\chi(r)}{r} \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} v_\perp + \frac{\partial f_0}{\partial L^2} 2v_\perp r^2 \right) \hat{L} T_{m0}^l. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, оператор  $\hat{L}$  представляем в виде [33]

$$\hat{L} = \frac{1}{2i} (\hat{H}_+ + \hat{H}_-), \quad (9)$$

где операторы  $\hat{H}_+$  и  $\hat{H}_-$  действуют на функции  $T_{ms}^l$  согласно формулам

[33]

$$\hat{H}_+ T_{ms}^l = \alpha_{s+1} T_{m,s+1}^l, \quad (10)$$

$$\hat{H}_- T_{ms}^l = \alpha_s T_{m,s-1}^l \quad (11)$$

причем  $\alpha_s = \sqrt{(l+s)(l-s+1)}$ . Поэтому

$$\hat{L} T_{ms}^l = \frac{1}{2i} (\alpha_{s+1} T_{m,s+1}^l + \alpha_s T_{m,s-1}^l). \quad (12)$$

Далее, сферическая гармоника  $Y_m^l(\theta, \varphi)$  переписывается через  $T_{m0}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$  следующим образом:

$$e^{im\varphi} P_{m0}^l(\cos\theta) = e^{2im\varphi_1} T_{m0}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = Y_m^l \quad (13)$$

(если все нормировочные коэффициенты включить в  $\chi(r)$ ). Через  $T_{ms}^l$  можно расписать и выражение  $\hat{L} T_{m0}^l(\theta, \varphi)$ , входящее в правую часть (8). Для этого воспользуемся равенством

$$L T_{m0}^l(\varphi, \theta, \alpha) = \frac{1}{2i} (\alpha_1 T_{m,1}^l + \alpha_0 T_{m,-1}^l), \quad (14)$$

причем  $\alpha_0 = \alpha_1 = \sqrt{2}$ .

Таким образом, угловые переменные отделились, и получены уравнения для функций  $\lambda_{\pm s}$

$$\hat{\lambda}_{-s} + \frac{v_{\perp}}{2ir} (\alpha_s \lambda_{-(s-1)} + \alpha_{s+1} \lambda_{-(s+1)}) + \hat{D} \lambda_{-s} = \chi \delta_{s0} v_r \frac{\partial f_0}{\partial E}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{+s} + \frac{v_{\perp}}{2ir} (\alpha_s \lambda_{+(s-1)} + \alpha_{s+1} \lambda_{+(s+1)}) + \hat{D} \lambda_{+s} = \\ = \frac{\chi}{2ir} \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} v_{\perp} + \frac{\partial f_0}{\partial L^2} 2v_{\perp} r^2 \right) (\alpha_s \delta_{s,1} + \alpha_{s+1} \delta_{s,-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Дальнейшее исследование зависит уже от конкретного вида рассматриваемой функции распределения и, по-видимому, не может быть проведено в общем виде. В частности, в общем случае  $f_0 = f_0(E, L^2)$  не удастся построить вариационный принцип, за исключением изотропного случая  $f_0 = f_0(E)$  (или для радиальных возмущений).

Однако для достаточно простых систем, обладающих какими-то дополнительными свойствами симметрии, задачу можно решить. Например, в случае однородного шара с круговыми орбитами частиц из выведенных уравнений (15), (16) легко получить все собственные частоты колебаний (см. раздел 3.1 главы III) и т. д.

### § 3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА ФРИМАНА

Ограничиваясь самыми крупномасштабными колебаниями типа эллипсоид — эллипсоид, сохраняющими направление главной оси  $z$ , можно положить

$$\Phi_1 = \alpha_1 x^2 - 2i\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 z^2. \quad (1)$$

Тогда из уравнения (9) (§ 2 главы IV) получим для функции  $B$  следующее выражение:

$$B = \frac{2i\alpha_1}{\omega} \left( x - \frac{2\Omega v_y}{\beta^2} \right) + \frac{1}{\omega^2 - \beta^2} (-4\alpha_1 \Omega y - 2i\alpha_2 v_y) + \frac{2\omega}{\omega^2 - \beta^2} \left( \frac{4\alpha_1 \Omega v_y}{\beta^2} - 2i\alpha_2 y \right), \quad (2)$$

а из уравнения (8) находим функцию  $C$  (которая в данном случае оказывается константой):

$$C = -\frac{2\alpha_1}{\omega^2} + \left\{ \frac{2\alpha_1}{\omega^2} \frac{4\Omega^2}{\beta^2} + \frac{4\Omega\alpha_2}{\omega(\omega^2 - \beta^2)} - \frac{8\alpha_1\Omega^2}{\beta^2(\omega^2 - \beta^2)} \right\}. \quad (3)$$

Получающееся из (7) провоздкое уравнение для функции  $A$  имеет решение, которое мы представим в таком виде:

$$A = D_1 x^2 + 2iD_2 xy + D_3 y^2 + D_4 z^2 + D_5 c_y^2 + D_6 v_z^2 + R, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= d_{11}\alpha_1 + d_{12}\alpha_2 + d_{13}\alpha_3, \\ 2D_2 &= \frac{1}{b^2} d_{21}\alpha_1 - \frac{1}{b^2} d_{22}\alpha_2 + \frac{1}{b^2} d_{23}\alpha_3, \\ D_3 &= \frac{1}{b^2} d_{31}\alpha_1 + \frac{1}{b^2} d_{32}\alpha_2 + \frac{1}{b^2} d_{33}\alpha_3, \\ D_4 &= \frac{1}{c^2} d_{44}\alpha_4, \\ D_5 &= \frac{1}{b^2\mu^2} d_{51}\alpha_1 + \frac{1}{b^2\mu^2} d_{52}\alpha_2 + \frac{1}{b^2\mu^2} d_{53}\alpha_3, \\ D_6 &= d_{64}\alpha_4/\gamma^2 c^2, \end{aligned} \quad (5)$$

в  $R$  включены несущественные в дальнейшем члены, содержащие нечетные степени  $v_z$ ,  $c_y$ . Коэффициенты  $d_{ik}$  даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{4\mu^2(4\Omega^2 - 1)}{\omega^2} + \frac{16\Omega^2(1 - 2\mu^2) - 4(1 - \mu^2)}{\omega^2 - 1} - \frac{16\Omega^2(1 - \mu^2)}{\omega^2 - 4} + \frac{8(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{(\omega^2 - 1)^2}, \\ d_{12} &= \frac{1}{\omega\Omega} \left\{ \frac{4(1 - \mu^2) + 8\Omega^2(4\mu^2 - 3)}{\omega^2 - 1} + \frac{32\Omega^2(1 - \mu^2)}{\omega^2 - 4} - \frac{4(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{(\omega^2 - 1)^2} \right\}, \\ d_{13} &= 4(1 - \mu^2) \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \right\}; \quad d_{21} = -d_{12}, \\ d_{22} &= \frac{1}{\Omega^2} \left\{ \frac{4\Omega_0^2(3 - 4\mu^2) - (1 - \mu^2)}{\omega^2 - 1} - \frac{16\Omega^2(1 - \mu^2)}{\omega^2 - 4} + \frac{2(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{(\omega^2 - 1)^2} \right\}, \\ d_{23} &= \frac{2(1 - \mu^2)}{\Omega} \omega \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \right\}; \quad d_{31} = 16\Omega^2 \left\{ \frac{1}{\omega^2 - 4} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \right\}, \\ d_{32} &= -\frac{8\Omega}{\omega} \left\{ \frac{4}{\omega^2 - 4} - \frac{1}{\omega^2 - 1} \right\}; \quad d_{33} = -\frac{4}{\omega^2 - 4}, \\ d_{51} &= \frac{4(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{\omega^2} - \frac{16\Omega^2(1 - 2\mu^2) - 4(1 - \mu^2)}{\omega^2 - 1} - \frac{16\Omega^2\mu^2}{\omega^2 - 4} - \frac{8(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{(\omega^2 - 1)^2}, \\ d_{52} &= \frac{1}{\omega\Omega} \left\{ -\frac{4(1 - \mu^2) + 8\Omega^2(4\mu^2 - 3)}{\omega^2 - 1} + \frac{32\Omega^2\mu^2}{\omega^2 - 4} + \frac{4(1 - \mu^2)(4\Omega^2 - 1)}{(\omega^2 - 1)^2} \right\}, \\ d_{53} &= 4 \left\{ \frac{\mu^2}{\omega^2 - 4} + \frac{1 - \mu^2}{\omega^2 - 1} \right\}; \quad d_{64} = -d_{44}; \quad d_{44} = -\frac{4}{\omega^2 - 4\gamma^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем соответствующие обозначения и в выражение для  $C$ :

$$C = -\frac{1}{2}(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2), \quad C_1 = -\frac{4(4\Omega^2 - 1)}{\omega^2} + \frac{16\Omega^2}{\omega^2 - 1}, \quad C_2 = -\frac{8}{\Omega\omega(\omega^2 - 1)}. \quad (7)$$

В (6), (7) положено  $\beta=1$ ,  $a=1$ . Возмущенная плотность получается по формуле (12) § 2 главы IV:

$$\varepsilon\rho_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon\rho_0(b^2\mu^2D_5 + \gamma^2c^2D_6) + \varepsilon\rho_0C. \quad (8)$$

Уравнение для возмущенной границы эллипсоида есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \varepsilon (D_1 x^2 + 2iD_2 xy + D_3 y^2 + D_4 z^2). \quad (9)$$

В рассматриваемом случае возмущение потенциала  $\Phi_1$  можно вычислить, написав точный потенциал однородного эллипсоида с плотностью  $\rho_0 + \rho_1$  в новых границах (9) и вычитая из него невозмущенный потенциал  $\Phi_0$ .

Повернем плоскость  $(x, y)$  на угол  $\delta$ , так чтобы новые оси координат  $(x', y')$  стали главными осями эллипсоида (9):

$$x = x' + \delta y', \quad y = y' - \delta x', \quad \delta = i\varepsilon D_2 \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}. \quad (10)$$

Уравнение возмущенного эллипсоида в координатах  $x', y', z' = z$  принимает вид

$$\begin{aligned} (x')^2/(a')^2 + (y')^2/(b')^2 + (z')^2/(c')^2 &= 1, \\ (a')^2 &= a^2 (1 - \varepsilon a^2 D_1), \quad (b')^2 = b^2 (1 - \varepsilon b^2 D_3), \quad (c')^2 = c^2 (1 - \varepsilon c^2 D_4). \end{aligned} \quad (11)$$

Потенциал повернутого эллипсоида

$$\Phi(x', y', z') = \pi G (\rho_0 + \rho_1) [\alpha'_0 (x')^2 + \beta'_0 (y')^2 + \gamma'_0 z'^2] + \text{const}, \quad (12)$$

$$\alpha'_0 = F\left(\frac{(a')^2}{(b')^2}, \frac{(a')^2}{(c')^2}\right), \quad \beta'_0 = F\left(\frac{(b')^2}{(a')^2}, \frac{(b')^2}{(c')^2}\right), \quad \gamma'_0 = F\left(\frac{(c')^2}{(a')^2}, \frac{(c')^2}{(b')^2}\right). \quad (13)$$

Разложения  $\alpha'_0, \beta'_0, \gamma'_0$  по  $\varepsilon$  имеют вид

$$\alpha'_0 = \alpha_0 + F_{a_1}(a_1, a_3) \varepsilon a_2 + F_{a_3}(a_1, a_3) \varepsilon a_4 \equiv \alpha_0 + \varepsilon \alpha_{(1)}, \quad (14)$$

$$\beta'_0 = \beta_0 + F_{b_1}(b_1, b_3) \varepsilon b_2 + F_{b_3}(b_1, b_3) \varepsilon b_4 \equiv \beta_0 + \varepsilon \beta_{(1)},$$

$$\gamma'_0 = \gamma_0 + F_{c_1}(c_1, c_3) \varepsilon c_2 + F_{c_3}(c_1, c_3) \varepsilon c_4 \equiv \gamma_0 + \varepsilon \gamma_{(1)}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{a^2}{b^2}, \quad a_2 = -\frac{a^2}{b^2} (a^2 D_1 - b^2 D_3), \quad a_3 = \frac{a^2}{c^2}; \quad a_4 = -\frac{a^2}{c^2} (a^2 D_1 - c^2 D_4), \quad (15)$$

$$b_1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad b_2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 D_1 - c^2 D_4), \quad b_3 = \frac{b^2}{c^2}, \quad b_4 = -\frac{b^2}{c^2} (b^2 D_3 - c^2 D_4),$$

$$c_1 = \frac{c^2}{a^2}, \quad c_2 = \frac{c^2}{a^2} (a^2 D_1 - c^2 D_4), \quad c_3 = \frac{c^2}{b^2}, \quad c_4 = \frac{c^2}{b^2} (b^2 D_3 - c^2 D_4),$$

$$F_u(u, v) \equiv \frac{\partial F}{\partial u}, \quad F_v(u, v) \equiv \frac{\partial F}{\partial v}.$$

Переходя в (12) снова к координатам  $(x, y)$ :  $x' = x - \delta y$ ,  $y' = y + \delta x$ , получим  $\Phi_1$ :

$$\varepsilon \Phi_1 = \varepsilon \pi G (\alpha_0 x^2 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 z^2) \rho_1 + \varepsilon \pi G \rho_0 [\alpha_{(1)} x^2 + \beta_{(1)} y^2 + \gamma_{(1)} z^2 + 2\delta xy(\beta_0 - \alpha_0)]. \quad (16)$$

Сравнение с исходным выражением (1) для  $\Phi_1$  дает следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ :

$$\alpha_1 = \pi G \rho_1 + \pi G \rho_0 \alpha_{(1)}, \quad -i\alpha_2 = \pi G \rho_0 \delta (\beta_0 - \alpha_0), \quad (17)$$

$$\alpha_3 = \pi G \beta_0 \rho_1 + \pi G \rho_0 \beta_{(1)}, \quad \alpha_4 = \pi G \gamma_0 \rho_1 + \pi G \rho_0 \gamma_{(1)}.$$

Искомое дисперсионное уравнение получается из (17) приравниванием нулю определителя системы:

$$f(\omega, b, c) \equiv \text{Det} \| r_{ik} \| = 0, \quad (18)$$

где элементы определителя  $r_{ik}$  есть

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= \frac{2}{\rho} + \alpha_0 (d_{51} + c_1) - 2A_1, & r_{12} &= \alpha_0 (d_{52} + c_2) - 2A_2, \\
 r_{13} &= \alpha_0 d_{53} - 2A_3, & r_{14} &= \alpha_0 d_{64} - 2A_4, \\
 r_{21} &= d_{21}, & r_{22} &= \frac{2(1-b^2)}{\rho(\beta_0 - \alpha_0)} d_{22}, & r_{23} &= d_{23}, & r_{24} &= 0, \\
 r_{31} &= \beta_0 (d_{51} + c_1) - 2B_1, & r_{32} &= \beta_0 (d_{52} + c_2) - 2B_2, & r_{33} &= \frac{2}{\rho} + \beta_0 d_{53} - 2B_3, \\
 r_{34} &= \beta_0 d_{64} - 2B_4, & r_{41} &= \gamma_0 (d_{51} + c_1) - 2C_1, \\
 r_{42} &= \gamma_0 (d_{52} + c_2) - 2C_2, & r_{43} &= \gamma_0 d_{53} - 2C_3, & r_{44} &= \frac{2}{\rho} + \gamma_0 d_{64} - 2C_4.
 \end{aligned} \tag{19}$$

В (19) использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 A_1 &= F_{a_1}(a_1, a_3) \frac{1}{b^2} (d_{31} - d_{11}) - F_{a_3}(a_1, a_3) \frac{1}{c^2} d_{11}, \\
 A_2 &= F_{a_1}(a_1, a_2) \frac{1}{b^2} (d_{32} - d_{12}) - F_{a_3}(a_1, a_3) \frac{1}{c^2} d_{12}, \\
 A_3 &= F_{a_1}(a_1, a_3) \frac{1}{b^2} (d_{33} - d_{13}) - F_{a_3}(a_1, a_3) \frac{1}{c^2} d_{13}, \\
 A_4 &= F_{a_3}(a_1, a_3) \frac{1}{c^2} d_{44}, \\
 B_1 &= F_{b_1}(b_1, b_3) b^2 (d_{11} - d_{31}) - F_{b_3}(b_1, b_3) \frac{b^2}{c^2} d_{31}, \\
 B_2 &= F_{b_1}(b_1, b_3) b^2 (d_{12} - d_{32}) - F_{b_3}(b_1, b_3) \frac{b^2}{c^2} d_{32}, \\
 B_3 &= F_{b_1}(b_1, b_3) b^2 (d_{13} - d_{33}) - F_{b_3}(b_1, b_3) \frac{b^2}{c^2} d_{33}, \\
 B_4 &= F_{b_3}(b_1, b_3) \frac{b^2}{c^2} d_{44}, \\
 C_1 &= F_{c_1}(c_1, c_3) c^2 d_{11} + F_{c_3}(c_1, c_3) \frac{c^2}{b^2} d_{31}, \\
 C_2 &= F_{c_1}(c_1, c_3) c^2 d_{12} + F_{c_3}(c_1, c_3) \frac{c^2}{b^2} d_{32}, \\
 C_3 &= F_{c_1}(c_1, c_3) c^2 d_{13} + F_{c_3}(c_1, c_3) \frac{c^2}{b^2} d_{33}, \\
 C_4 &= -F_{c_1}(c_1, c_3) c^2 d_{44} - F_{c_3}(c_1, c_3) \frac{c^2}{b^2} d_{44}, \\
 \rho &\equiv (6\alpha_0 + 2\beta_0)^{-1}, & \Omega^2 &= 2\rho\alpha_0, & \gamma^2 &= 2\rho\gamma_0, \\
 \mu^2 &= 1 - 8\rho b^2 \alpha_0.
 \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение (18) исследовалось численно на ЭВМ. Сначала вычислялись значения определителя (18) на действительной оси комплексной плоскости  $\omega$  при различных значениях полюсов  $b, c$ . В частности, таким образом определялись вещественные нули этого определителя. Когда их число при каких-то значениях  $b$  и  $c$  уменьшалось на величину, кратную 2, это означало появление комплексных пар корней. В этом случае вычислялись интегралы по контуру  $\gamma$ , целиком лежащему в верхней полуплоскости (поскольку мы интересовались лишь неустойчивыми решениями):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{r(\omega)}{f(\omega)} d\omega = N, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} \omega d\omega = \sum_l n_l \omega_l, \tag{20}$$

где  $N$  — число нулей внутри  $\gamma$  с учетом их кратности  $n_i$ <sup>1</sup>. Если внутри контура  $\gamma$  попадал только один корень ( $N=1$ ), то вторая формула (20) давала его значение.

Результаты приведены на рис. 26 и в табл. 2.

#### § 4. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ФРИМАНА

Мы рассматриваем одну из наиболее крупномасштабных мод вида

$$\Phi_1 = (x + iy)[\alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma]e^{-i\omega\tau} \quad (1)$$

Константы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  должны быть определены вместе с собственными частотами  $\omega$ . Будем решать уравнения (13)–(15) (нумерация относится к разделу 3.1 главы IV) методом интегрирования по углу. Для этого введем полярные координаты  $\rho$ ,  $\varphi$  в фазовом пространстве ( $z/c$ ,  $v_z/\omega_0 c$ ):  $v_z/\omega_0 c = \rho \cos \varphi$ ,  $z/c = \rho \sin \varphi$ . Исключая  $c'$  из уравнений (14), (15), получим следующее уравнение на  $B'$ :

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 B'}{\partial \varphi^2} - 2i\omega_0 \omega \frac{\partial B'}{\partial \varphi} + (4 - \omega^2) B' = -i\omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_z \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}. \quad (2)$$

Аналогично получается уравнение для  $C'$ :

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 C'}{\partial \varphi^2} - 2i\omega_0 \omega \frac{\partial C'}{\partial \varphi} + (4 - \omega^2) C' = -i\omega \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + v_z \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}. \quad (3)$$

Решения уравнений (2), (3) с учетом условия периодичности

$$B', C'(\varphi + 2\pi) = B', C'(\varphi) \quad (4)$$

представляются в виде

$$B' = B_{(1)} + B_{(2)}, \quad C' = iB_{(1)} + C_{(2)}, \quad (5)$$

где

$$B_{(1)} = \frac{i\alpha c^2 \rho^2}{2(\omega + 2)} + \frac{i[\beta(x^2 + y^2) + \gamma]}{\omega + 2} - \frac{i\alpha c^2 (\rho e^{i\varphi})^2}{4(\omega - 2\omega_0 + 2)} - \frac{i\alpha c^2 (\rho e^{-i\varphi})^2}{4(\omega + 2\omega_0 + 2)}, \quad (6)$$

$$B_{(2)} = \frac{2\beta(x + iy)(i\omega x - 2y)}{\omega^2 - 4}, \quad C_{(2)} = \frac{2\beta(x + iy)(i\omega y + 2x)}{\omega^2 - 4}. \quad (7)$$

Подстановка (5)–(7) в уравнение (13) раздела 3.1 главы IV дает следующее уравнение для функции  $\chi$ :

$$\begin{aligned} +i\omega\chi + \omega_0 \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = & 16(1 - x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/\omega_0^2 c^2)(x + iy) \frac{i\omega\beta}{\omega - 2} + \\ & + 2(x + iy) \left\{ \frac{2i\omega\beta(x^2 + y^2)}{\omega^2 - 4} + \frac{i\alpha c^2 \rho^2}{2(\omega + 2)} + \frac{i[\beta(x^2 + y^2) + \gamma]}{\omega + 2} \right. \\ & \left. - \frac{i\alpha c^2 \rho^2}{4(\omega - 2\omega_0 + 2)} e^{2i\varphi} - \frac{i\alpha c^2 \rho^2}{4(\omega + 2\omega_0 + 2)} e^{-2i\varphi} \right\} - \\ & - \frac{i\alpha}{\omega_0} (x + iy) \rho^2 (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}). \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1</sup> Из (6) видно, что все полюсы  $f(\omega, b, c)$  лежат на действительной оси  $\omega$ .

Решение этого уравнения, с учетом (4), таково:

$$\begin{aligned} \chi/(x+iy) = & -8 \left( -x^2 - y^2 - z^2/c^2 - v_z^2/\omega_0^2 c^2 + 1 \right) \frac{\beta}{\omega(\omega-2)} - 2 \left\{ \frac{2\beta(x^2+y^2)}{\omega^2-4} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha c^2 \rho^2}{2\omega(\omega+2)} - \frac{\beta(x^2+y^2)+\gamma}{\omega(\omega+2)} \right\} + 2 \frac{\alpha c^2 (\rho e^{i\varphi})^2}{4(\omega-2\omega_0)(\omega-2\omega_0+2)} + \\ & + \frac{\alpha c^2 (\rho e^{-i\varphi})^2}{2(\omega+2\omega_0+2)(\omega+2\omega_0)} + \frac{\alpha c^2 (\rho e^{i\varphi})^2}{c^2 \omega_0 (\omega-2\omega_0)} - \frac{\alpha c^2 (\rho e^{-i\varphi})^2}{c^2 \omega_0 (\omega+2\omega_0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисляем по формуле (17) раздела 3.1 возмущение плотности  $\rho_1$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 = & -\varepsilon \rho_0 (x+iy) \left\{ \frac{8\beta}{\omega^2-4} + \frac{2\alpha}{\omega^2-4\omega_0^2} + \frac{\alpha c^2}{2} \left[ \frac{1/2}{(\omega-2\omega_0)(\omega-2\omega_0+2)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1/2}{(\omega+2\omega_0)(\omega+2\omega_0+2)} - \frac{1}{\omega(\omega+2)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Уравнение границы есть ( $r^2 = x^2 + y^2$ ):

$$1 - r^2 - z^2/c^2 - \varepsilon \chi_0 |_{\text{гран}} = 0. \quad (10)$$

Ищем вклад в  $\Phi_1$  от возмущения плотности  $\rho_1 = A r e^{i\varphi}$ . Частное решение неоднородного уравнения Пуассона есть

$$\Phi^* = \frac{4\pi G A}{8} r^3 e^{i\varphi}. \quad (11)$$

Перепишем (11) в сферических координатах:

$$\Phi^* = \frac{4\pi G A}{8} (\zeta^2 + 1)^{3/2} R_0^3 \left\{ -\frac{2}{15} P_3^1(\mu) e^{i\varphi} + \frac{4}{5} P_1^1(\mu) e^{i\varphi} \right\}. \quad (12)$$

Скомбинируем (12) с решением однородного уравнения

$$\Phi_{\text{одн}} |_{\zeta < \zeta_0} = a_1 p_3^1(\zeta) P_3^1(\mu) e^{i\varphi} + a_2 p_1^1(\zeta) P_1^1(\mu) e^{i\varphi}, \quad (13)$$

$$\Phi_{\text{одн}} |_{\zeta > \zeta_0} = b_1 q_3^1(\zeta) P_3^1(\mu) e^{i\varphi} + b_2 q_1^1(\zeta) P_1^1(\mu) e^{i\varphi},$$

где  $P_n^m(x)$  — соответствующий присоединенный полином Лежандра, а  $p_n^m(x) \equiv (i)^{m-n} P_n^m(ix)$ ,

$$q_n^m(x) \equiv (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} p_n^m(x) \int_x^\infty \frac{dy}{(1+y^2) [p_n^m(y)]^2}. \quad (14)$$

Коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  выражаются через  $A$  из условия непрерывности потенциала и его нормальной производной на границе эллипсоида:

$$\Phi_{\zeta > \zeta_0} |_{\zeta = \zeta_0} = \Phi_{\zeta < \zeta_0} |_{\zeta = \zeta_0}; \quad \frac{\partial \Phi_{\zeta > \zeta_0}}{\partial n} \Big|_{\zeta = \zeta_0} = \frac{\partial \Phi_{\zeta < \zeta_0}}{\partial n} \Big|_{\zeta = \zeta_0}. \quad (15)$$

В дальнейшем нам понадобятся только коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{4\pi G A}{60} \frac{R_0^3 (\zeta_0^2 + 1)^{1/2}}{p_3^1 q_3^1 - p_3^1 q_3^1} [3\zeta_0 q_3^1 - q_3^1 (1 + \zeta_0^2)], \quad (16)$$

$$a_2 = -\frac{4\pi G A}{10} \frac{R_0^3 (\zeta_0^2 + 1)^{1/2}}{p_1^1 q_1^1 - p_1^1 q_1^1} [3\zeta_0 q_1^1 - q_1^1 (1 + \zeta_0^2)], \quad (17)$$

где штрих означает производную по аргументу. Все функции в (16) и (17) вычисляются при  $\zeta = \zeta_0 = c/R_0$ .



Найдем теперь вклад в  $\Phi_1$  от возмущения границы эллипсоида. Для этого представим  $\chi_0$  (на невозмущенной границе) в виде

$$\chi_0 = A_1 P_3^1(\mu) e^{i\varphi} + B_1 P_1^1(\mu) e^{i\varphi}. \quad (18)$$

где введены обозначения

$$A_1 = \frac{2}{15} R_0^3 (1 + \zeta_0^2)^{1/2} \{ (C_3 - C_2) \zeta_0^2 - C_2 \},$$

$$B_1 = R_0^3 (1 + \zeta_0^2)^{1/2} \left\{ C_1/R_0^2 + \frac{4}{5} C_2 + (4C_2 + C_3) \zeta_0^2/5 \right\},$$

$$C_1 = -\frac{2\gamma}{\omega(\omega+2)}, \quad C_2 = -\frac{2\beta}{\omega(\omega+2)},$$

$$C_3 = -\alpha \left\{ \frac{1}{\omega(\omega+2)} + \frac{1/2}{(\omega-2\omega_0)(\omega-2\omega_0+2)} + \frac{1/2}{(\omega+2\omega_0)(\omega+2\omega_0+2)} + \frac{4}{c^2(\omega^2-4\omega_0^2)} \right\}.$$

Определим далее из (10) нормальное смещение границы:

$$\xi - \zeta_0 = -\varepsilon \chi_0 / 2 \zeta_0 R_0^2 [1 - \mu^2 + \mu^2/c^2]. \quad (19)$$

Искомый вклад в  $\Phi_1$  будем искать как потенциал простого слоя, расположенного на невозмущенной границе эллипсоида  $\xi = \zeta_0$  с поверхностной плотностью

$$\sigma = \rho_0 h_\zeta (\xi - \zeta_0), \quad (20)$$

где коэффициент Ламе  $h_\zeta$  равен

$$h_\zeta = R_0 \left( \frac{\zeta^2 + \mu^2}{1 + \zeta^2} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Итак, положим

$$\Phi_{\zeta < \zeta_0}^{(\sigma)} = [e_1 p_3^1(\zeta) P_3^1(\mu) + e_2 p_1^1(\zeta) P_1^1(\mu)] e^{i\varphi}, \quad (22)$$

$$\Phi_{\zeta > \zeta_0}^{(\sigma)} = [d_1 q_3^1(\zeta) P_3^1(\mu) + d_2 q_1^1(\zeta) P_1^1(\mu)] e^{i\varphi} \quad (23)$$

и определим коэффициенты  $d_1, d_2, e_1, e_2$ , исходя из условий сшивки на границе:

$$\Phi_{\zeta > \zeta_0}^{(\sigma)} \Big|_{\zeta = \zeta_0} = \Phi_{\zeta < \zeta_0}^{(\sigma)} \Big|_{\zeta = \zeta_0}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\zeta > \zeta_0}^{(\sigma)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_0} - \frac{\partial \Phi_{\zeta < \zeta_0}^{(\sigma)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_0} = 4\pi G h_{\zeta_0} \sigma. \quad (25)$$

Нужные нам в дальнейшем коэффициенты  $e_1, e_2$  равны

$$e_1 = \frac{4\pi G \rho_0 q_3^1}{p_3^1 q_3^1 - p_3^1 q_2^1} \frac{R_0^2 \zeta_0}{2} A_1, \quad (26)$$

$$e_2 = \frac{4\pi G \rho_0 q_1^1}{p_1^1 q_1^1 - p_1^1 q_2^1} \frac{R_0^2 \zeta_0}{2} B_1. \quad (27)$$

Объединяя вклады в  $\Phi_1$  при  $\zeta < \zeta_0$  из (12), (13) и (22) и сравнивая с исходным потенциалом (1), получаем следующую однородную систему уравнений для коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\alpha = -\frac{45(e_1 + e_2)}{R_0^3}, \quad \beta = \frac{4\pi G A}{8} + \frac{45}{4} \frac{e_1 + a_1}{R_0^3}, \quad \gamma = -\frac{9(e_1 + a_1)}{R_0} - \frac{e_2 + a_2}{R_0}. \quad (28)$$

Таблица 2  
ИНКРЕМЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛУОСЕЙ ЭЛЛИПСОИДА (В ЕДИНИЦАХ  $\beta$ , БОЛЬШАЯ ПОЛУОСЬ  $\alpha=1$ )\*

$c/b$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,05	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,09	0,17	0,23	0,28	0,32	0,33
0,10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,06	0,14	0,21	0,26	0,30	0,33
0,15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	и	и	0,11	0,19	0,24	0,28	0,32
0,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,10	0,17	0,22	0,27	0,32
0,25	—	—	0,01	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,08	0,16	0,21	0,26	0,31
0,30	—	—	—	0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	и	0,14	0,20	0,25	0,30
0,35	—	—	—	и	0,03	и	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,05	0,12	0,19	0,25	0,29
0,40	—	—	—	и	0,01	0,04	0,04	и	—	—	—	—	—	0,03	0,05	0,05	0,10	0,18	0,24	0,29
0,45	—	—	—	—	—	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,02	0,08	0,17	0,23	0,28
0,50	—	—	—	—	—	0,04	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,04	0,01	—	0,06	0,15	0,22	0,28
0,55	—	—	—	—	—	—	0,04	0,04	0,05	0,05	0,06	0,05	0,04	и	—	—	0,04	0,14	0,22	0,27
0,60	—	—	—	—	—	—	—	—	0,02	0,03	0,03	и	—	—	—	—	и	0,13	0,21	0,27
0,65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,13	0,20	0,26
0,70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,12	0,20	0,26
0,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,12	0,19	0,25
0,80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,12	0,19	0,25
0,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,11	0,19	0,25
0,90	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,10	0,18	0,24
0,95	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,10	0,18	0,24
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,09	0,17	0,23

\* Прочерк—инкремент равен нулю, и—инкремент меньше 0,01.

Таблица 3

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРОИДА ФРИМАНА

$c/a$	$\text{Im}\gamma/\beta$	$\text{Re}\gamma/\beta$	$\text{Im}\omega$	$\text{Re}\omega$	$c/a$	$\text{Im}\gamma/\beta$	$\text{Re}\gamma/\beta$	$\text{Im}\omega$	$\text{Re}\omega$
0,02	0,0010	-0,806	0,79	-0,43	0,60	0,0351	-0,976	0,26	0,83
0,03	0,0015	-0,808	0,77	-0,43	0,70	0,0290	-1,005	0,27	0,75
0,04	0,0020	-0,811	0,76	-0,43	0,80	0,0228	-1,026	0,26	0,70
0,05	0,0026	-0,814	0,74	-0,43	0,90	0,0176	-1,042	0,24	0,66
0,20	0,0118	-0,841	0,48	-0,46	0,92	0,0167	-1,045	0,23	0,66
0,30	0,0151	-0,848	0,31	-0,50	0,94	0,0159	-1,048	0,23	0,65
0,40	0,0062	-0,847	0,08	-0,54	0,96	0,0151	-1,051	0,23	0,65
0,50	0,0339	-0,933	0,19	0,95	0,97	0,0147	-1,052	0,23	0,65
0,55	0,0368	-0,958	0,24	0,88	0,98	0,0143	-1,054	0,22	0,64
					0,99	0,0140	-1,055	0,22	0,64

Таблица 4

ИНКРЕМЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛУОСЕИ ЭЛЛИПСОИДА В ОБЛАСТИ  $0,3 \leq c/a < 0,5$  (В ЕДИНИЦАХ  $\beta$ , БОЛЬШАЯ ПОЛУОСЬ  $a=1$ )

$c/a$	$\text{Im}\gamma/\beta$	$\text{Re}\gamma/\beta$	$\text{Im}\omega$	$\text{Re}\omega$	$c/a$	$\text{Im}\gamma/\beta$	$\text{Re}\gamma/\beta$	$\text{Im}\omega$	$\text{Re}\omega$
0,30	0,0151	-0,848	0,308	-0,498	0,39	0,00874	-0,848	0,117	-0,536
0,31	0,0150	-0,848	0,290	-0,502	0,40	0,00619	-0,847	0,0797	-0,540
0,32	0,0149	-0,848	0,272	-0,506	0,405	0,00420	-0,847	0,0530	-0,542
0,33	0,0146	-0,849	0,254	-0,510					
0,34	0,0142	-0,849	0,234	-0,515					
0,35	0,0136	-0,848	0,214	-0,519	0,455	0,00743	-0,901	0,0340	1,025
0,36	0,0128	-0,848	0,193	-0,523	0,46	0,0162	-0,905	0,0759	1,016
0,37	0,0118	-0,848	0,171	-0,528	0,47	0,0244	-0,913	0,120	1,00
0,38	0,0105	-0,848	0,146	-0,532	0,48	0,0290	-0,920	0,148	0,984
					0,49	0,0333	-0,924	0,168	0,967

Устойчивость

Таблица 5

ИНКРЕМЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ (В ЕДИНИЦАХ  $\Omega$ ) ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРОИДОВ ФРИМАНА

Номер моды $m$	Степень сплюснутости											
	0,07	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	0,99
2	0,703	0,658	0,646	0,612	0,582	0,555	0,531	0,510	0,490	0,471	0,455	0,449
3	0,928	0,899	0,835	0,780	0,733	0,692	0,656	0,624	0,595	0,569	0,545	0,537
4	1,079	1,040	0,953	0,831	0,881	0,769	0,724	0,684	0,649	0,618	0,590	0,560
5	1,195	1,146	1,039	0,952	0,880	0,820	0,768	0,723	0,683	0,648	0,617	0,606
6	1,291	1,231	1,106	1,006	0,925	0,857	0,799	0,750	0,707	0,669	0,635	0,623
8	1,443	1,366	1,207	1,084	0,987	0,907	0,841	0,785	0,737	0,695	0,658	0,645

Условие обращения в нуль детерминанта системы (28) дает спектр частот для рассматриваемой пространственной моды колебаний. Он должен быть найден из уравнения

$$\sum_{k=0}^9 b_k \omega^k = 0, \quad b_0 = 4\omega_0^2 (1 - \omega_0^2) \rho e_1 \xi^2; \quad (29)$$

$$b_1 = -e_1 \{32\omega_0^2 (1 - \omega_0^2) (1 + 3\xi^2) + \rho \xi^2 \omega_0^2 (10\omega_0^2 - 16) - 8\rho (1 - \omega_0^2) (1 + \xi^2)\} + 32\omega_0^2 (1 - \omega_0^2) \rho \xi a_1 / (1 + \xi^2);$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= -e_1 \{32 [(\omega_0^4 - 4) (1 + \xi^2) + \omega_0^2 (4 + 5\xi^2)] + \rho \{32 (1 + \xi^2) - \\
&\quad - 40\omega_0^2 - 42\omega_0^2 \xi^2\} + 16a_1 \rho \{4 (\omega_0^2 - 1)^2 + 3\omega_0^2 \xi^2 / (1 + \xi^2)\} - \\
&\quad - 32\omega_0^2 \rho (1 - \omega_0^2) + 128\omega_0^2 (1 - \omega_0^2)\}; \\
b_3 &= -e_1 \{8\omega_0^2 (3\omega_0^2 + 5\omega_0^2 \xi^2 + 3 + 3\xi^2) - 8 (25 + 29\xi^2) + \rho (68\xi^2 - 21,5\omega_0^2 \xi^2 + \\
&\quad + 60 - 22\omega_0^2)\} - 8a_1 \rho \left\{ 4 (4\omega_0^2 - 3 - \omega_0^4) - \frac{\xi^2 \omega_0^2}{1 + \xi^2} (\omega_0^2 + 2) \right\} - \\
&\quad - 16\omega_0^2 \{4 (\omega_0^2 - 3) - \rho (\omega_0^2 - 3)\}; \\
b_4 &= 8e_1 (8 + 9\omega_0^2 + 12\xi^2 + 10\omega_0^2 \xi^2 - 5\rho \xi^2 - 4\rho) - 12\rho a_1 \left\{ 4 (\omega_0^2 - 1) + \frac{\omega_0^2 \xi^2}{1 + \xi^2} \right\} + \\
&\quad + 8\rho (1 - 4\omega_0^2) - 32 (1 - 3\omega_0^2 - \omega_0^4); \\
b_5 &= e_1 \{-44 (1 + \xi^2) + 28\omega_0^2 + 32\omega_0^2 \xi^2 - 5,5\rho - 7,5\rho \xi^2\} - \\
&\quad - a_1 \rho \left\{ 8 (\omega_0^2 - 1) + 6 \frac{\omega_0^2 \xi^2}{1 + \xi^2} \right\} + 4\rho (3 - 2\omega_0^2) + 16 (\omega_0^4 - \omega_0^2 - 3); \\
b_6 &= 6\rho - 16 (1 + 2\omega_0^2) - 8e_1 (4 + 5\xi^2); \\
b_7 &= \rho + 8 (1 - \omega_0^2) - e_1 (5,5 + 7,5\xi^2); \\
b_8 &= 6; \quad b_9 = 1; \quad \rho = 2 / [(\xi^2 + 1) \xi \operatorname{arctg} (1/\xi) - \xi^2].
\end{aligned}$$

В выражениях для коэффициентов  $b_k$  обозначено  $\xi \equiv \xi_0$ .

Определив отсюда частоты  $\omega$ , можно затем из (28) найти коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Результаты вычислений (выполненные на ЭВМ) для неустойчивых корней<sup>1</sup> дисперсионного уравнения приведены в табл. 3, 4.

## § 5. ВКБ-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С УЧЕТОМ ПРЕДЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ И РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОСТЭПИЦИКЛИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В этом параграфе рассматриваются, следуя работе Шу [325], решения системы уравнений Власова для гравитирующих дисков с точностью до двух порядков по параметрам  $1/kr$  и  $\varepsilon \equiv c_r/r\Omega$ , которые предполагаются малыми.

### 5.1. СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛА И ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ

Получим асимптотическое решение уравнения Пуассона для диска с точностью до первых двух порядков по  $(kr)^{-1}$ . Пусть поверхностная плотность  $\sigma_1(r, \varphi, t) = \sigma(r) \cdot \exp[-i(\omega t - m\varphi)]$ , аналогично потенциал  $\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \Phi(r, z) \cdot \exp[-i(\omega t - m\varphi)]$ , а в плоскости диска  $\Phi(r, z=0) = A(r) \cdot \exp[i\varphi(r)]$ . Интегрируя уравнение Пуассона

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \right] \Phi(r, z) = 4\pi G\sigma(r) \delta(z) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Оказывается, что для каждого  $c$  имеется только один неустойчивый корень. Табл. 4 представляет собой более тщательный просмотр области значений  $0,3 < c < 0,5$  с целью более точного определения имеющейся здесь области устойчивости. Эта область устойчивости носит, по-видимому, «случайный» характер и «съедается» другими модами.

по  $z$  между  $(0-\varepsilon)$  и  $(0+\varepsilon)$  и устремляя затем  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим известное граничное условие

$$\sigma(r) = \frac{1}{4\pi G} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, z) \right]_{z=0}^{z=+0} \quad (2)$$

Функция  $\Phi(r, z)$  может зависеть только от  $|z|$  вследствие симметрии задачи относительно отражения  $z \rightarrow -z$ . Естественно, кроме того, ввести обычное для цилиндрической геометрии преобразование  $\Phi \rightarrow W$ :

$$W(r, z) = r^{1/2} \Phi(r, z). \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) и (2) переписываются в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial |z|^2} - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} W = 0 \quad \text{для } |z| > 0, \quad (4)$$

$$\sigma(r) = \frac{r^{-1/2}}{2\pi G} \left[ \frac{\partial W}{\partial |z|}(r, |z|) \right]_{|z|=0} \quad (5)$$

Эти уравнения нужно решить при граничных условиях

$$W(r, 0) = r^{1/2} A(r) e^{i\psi(r)}, \quad (6)$$

$$W(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Изучаться здесь будет только та часть дисковой системы, в которой  $|kr| \gg 1$ . В ней «член кривизны»  $\sim \frac{m^2 - 1/4}{r^2} W$  имеет малость порядка  $(kr)^{-2}$  по сравнению с первыми двумя, и поэтому его можно опустить. Таким образом, с точностью до второго порядка ВКБ точное уравнение Пуассона совпадает с таким:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial |z|^2} = 0, \quad |z| > 0 \quad (8)$$

(граничные условия по-прежнему есть (6) — (7)). Продолжение решения (6) из плоскости  $z=0$  в  $|z| > 0$  тривиально, если воспользоваться теорией функций комплексного переменного. Для продолжения решения нужно просто сделать замену:  $r \rightarrow r \pm i|z|$  в  $W(r, 0)$ . Правильный выбор знака диктуется граничными условиями на бесконечности ( $z \rightarrow \pm \infty$ ). В соответствии с принятым приближением можно заменить условие (7) ограничением, чтобы для малых  $|z|$  величина  $W(r, |z|)$  убывала от ее значения  $W(r, 0)$  при  $|z|=0$ . Если  $r + ip|z|$  с  $p = \pm 1$  дает правильный выбор знака и если  $\psi(r)$  — быстроменяющаяся функция, это условие с учетом (6) можно представить в виде

$$\text{Im} \{ \psi(r + ip|z|) \} > 0, \quad |z| > 0. \quad (9)$$

Разложение для малых  $|z|$  дает

$$p = \pm 1 = \text{sgn } \psi'(r) \equiv \text{sgn } k. \quad (10)$$

Таким образом, можно получить

$$W(r, |z|) = (r + ip|z|)^{1/2} A(r + ip|z|) e^{i\psi(r + ip|z|)}, \quad (11)$$

$$\sigma(r) = -\frac{|k| \Phi(r)}{2\pi G} \left\{ 1 - \frac{i}{kr} \frac{d}{d \ln r} \ln [r^{1/2} A(r)] \right\}. \quad (12)$$

5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТКЛИКА ЗВЕЗДНОГО ДИСКА  
НА ЗАДАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

Будем исходить из выведенного в разделе 4.2 главы V общего выражения для возмущения функции распределения звезд

$$f_1 = \left( \frac{\partial f_0}{\partial E} \Phi_1 + \chi \right) e^{-i(\omega t - m\varphi)}, \quad (1)$$

где

$$\chi(r, E, L) = - \frac{\omega \partial f_0 / \partial E + m \partial f_0 / \partial L}{2 \sin(\omega \tau_{12} - m \Phi_{12})} \int_{-\tau_{12}}^{\tau_{12}} \Phi_1[r'(\tau)] e^{-i[\omega \tau - m \varphi'(\tau)]} d\tau. \quad (2)$$

В этих формулах  $f_0(E, L)$  — невозмущенная функция распределения,  $2\tau_{12}(E, L)$  — период радиальных колебаний звезды с энергией  $E$  и угловым моментом  $L$ ,  $2\Phi_{12}(E, L)$  — азимутальное угловое смещение звезды за время  $2\tau_{12}$ . Функции  $r'(\tau)$  и  $\varphi'(\tau)$  описывают невозмущенную орбиту звезды, такую, что ее положение в моменты  $\tau = \pm \tau_{12}$  есть  $(r, \pm \Phi_{12})$ :

$$\frac{dr'}{d\tau} = P_0(r', E, L); \quad r' = r \text{ при } \tau = \pm \tau_{12}, \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi'}{d\tau} = L/r'^2; \quad \varphi' = \pm \Phi_{12} \text{ при } \tau = \pm \tau_{12}, \quad (4)$$

где функция  $P_0(r, E, L)$  в уравнении (3) — это радиальная скорость звезды:  $P_0 = \{2[E - \Phi_0(r)] - L^2/r^2\}^{1/2}$ .

Допустим, что в невозмущенном состоянии звезды удовлетворяют «модифицированному шварцшильдовскому распределению» [325]:

$$f_0(E, L) = \begin{cases} P_0(r_0) \cdot \exp[-\mathcal{E}/c_0^2(r_0)], & \mathcal{E} < -E(r_0), \\ 0, & \mathcal{E} > -E(r_0), \end{cases} \quad (5)$$

где функции  $P_0(r_0)$  и  $c_0(r_0)$  можно выразить через поверхностную плотность и дисперсию радиальных скоростей, а «эпициклические» интегралы  $r_0$  и  $\mathcal{E}$  определяются как функции  $E$  и  $L$  из уравнений

$$r_0^2 \Omega(r_0) = L, \quad \mathcal{E} = E - E_c(r_0),$$

$$E_c(r_0) = \frac{1}{2} r_0^2 \Omega^2(r_0) + \Phi_0(r_0), \quad r_0 \Omega^2(r_0) = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r_0}. \quad (6)$$

Уравнение (5) можно рассматривать как параметрическое представление невозмущенной функции распределения через  $(r, c_r, c_\varphi)$ , если peculiarные скорости определяются естественными соотношениями

$$c_r = \{2[\mathcal{E} - \varepsilon_c(r_0, r)]\}^{1/2}, \\ c_\varphi = \frac{r_0^2}{r} \Omega(r_0) - r \Omega(r), \quad (7)$$

а функция  $\varepsilon_c(r_0, r)$  дается уравнением

$$\varepsilon_c(r_0, r) = \Phi_0(r) - \Phi_0(r_0) + \frac{r_0^2 \Omega^2(r_0)}{2} \left( \frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right), \quad (8)$$

так что, например,  $\varepsilon_c(r_0, r_0) = 0$ . При преобразовании  $(E, L) \rightarrow (\mathcal{E}, r_0)$  частные производные преобразуются так:

$$\frac{\partial}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}, \quad \frac{\partial}{\partial L} = \frac{2 \Omega(r_0)}{r_0 \kappa^2(r_0)} \cdot \frac{\partial}{\partial r_0} - \Omega(r_0) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}}. \quad (9)$$

Предположим теперь, что второй безразмерный параметр  $\varepsilon \equiv c_0(r_0)/r_0 \kappa(r_0)$  также мал:  $\varepsilon \ll 1$ . Это предположение, по-видимому, хо-

рошо выполняется в дисковых частях большинства спиральных галактик. С точностью до двух порядков по  $\varepsilon$  один из членов (2) имеет с учетом (5) и (9) форму

$$-\left(\omega \frac{\partial f_0}{\partial E} + m \frac{\partial f_0}{\partial L}\right) = v(r_0) \frac{\kappa(r_0)}{c_0^2(r_0)} f_0(\varepsilon, r_0). \quad (10)$$

В том же приближении дисперсия скоростей  $c_r(r_0)$  равна  $c_0(r_0)$ , а невозмущенное распределение (5) сводится к следующему:

$$f_0 = \frac{2 \Omega(r_0)}{\kappa(r_0)} \cdot \frac{\sigma_0(r_0)}{2 \pi c_r^2(r_0)} \cdot \exp[-\tilde{\varepsilon}^2/2\varepsilon^2(r_0)], \quad (11)$$

где введена «эксцентricность»  $\tilde{\varepsilon} \equiv \sqrt{2} \mathcal{E}/r_0 \kappa(r_0)$ . Допустим еще, что параметры  $\varepsilon$  и  $(kr)^{-1}$  имеют одинаковый порядок малости:  $\varepsilon \sim (kr)^{-1}$ .

Для вычисления отклика поверхностной плотности до второго порядка в этом асимптотическом приближении требуем, чтобы все формулы были верными с точностью до второго порядка по  $\varepsilon$  или  $|kr|^{-1}$ . Исключением является соотношение, дающее радиальную орбиту  $r' = r'(\tau)$ ; для него нужна точность до третьего порядка по  $\varepsilon$  (так как два порядка по  $\varepsilon$  представляют обычное эпитциклическое приближение). Это позволяет вычислить  $\Phi_1(r'(\tau))$  (потенциал на невозмущенной орбите) с точностью до второго порядка. При малых  $\varepsilon$  подавляющую долю звезд содержит та часть фазового пространства, в которой  $\varepsilon \ll \varepsilon(r_0)$ . Поэтому при определении звездной орбиты из уравнений (3), (4) нужно найти выражения, верные только до соответствующего порядка по  $\varepsilon$ .

Систематическое разложение, дающее звездные орбиты такого рода, можно получить, используя параметрическое представление [325]. В этом представлении один радиальный период  $2\tau_{12}$  соответствует изменению на  $2\pi$  радиальной фазовой координаты  $\theta$ , определенной соотношением

$$P_0(r', E, L) = r_0 \kappa(r_0) \tilde{\varepsilon} \sin \theta. \quad (12)$$

Если ввести еще безразмерное время  $s = \kappa(r_0) \tau$ , то параметрическое представление требуемых орбит можно получить разложением уравнений (3), (4), что приводит к соотношениям

$$s - s_0 = \theta - 2B_2(r_0) \tilde{\varepsilon} \sin \theta, \quad (13)$$

$$r_0/r' = 1 + \tilde{\varepsilon} \cos \theta + A_2(r_0) \tilde{\varepsilon}^2 \cos^2 \theta, \quad (14)$$

$$\varphi' - \varphi_0 = \frac{\Omega(r_0)}{\kappa(r_0)} [\theta + 2A_2(r_0) \tilde{\varepsilon} \sin \theta] \quad (15)$$

где  $A_2(r_0) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{d \ln \kappa}{d \ln r_0} \right]$ ,  $B_2(r_0) = 1 - A_2(r_0)$ , а фазовые константы  $s_0$ ,  $\varphi_0$  выберем так, что  $s = -\pi$ ,  $\varphi' = -\pi \frac{\Omega(r_0)}{\kappa(r_0)}$ , когда  $r' = r$  (см. (3), (4)). С точностью до второго порядка по  $\tilde{\varepsilon}$  из уравнений (13)–(15) следует, что  $s$  и  $\varphi' \frac{\kappa(r_0)}{\Omega(r_0)}$  меняются на  $2\pi$ , когда  $\theta$  меняется на  $2\pi$ ; поэтому радиальный период колебаний и изменение азимута  $2\varphi_{12}$  за этот период равны

$$2\tau_{12} = \frac{2\pi}{\kappa(r_0)}, \quad 2\varphi_{12} = \frac{\Omega(r_0)}{\kappa(r_0)} \cdot 2\pi. \quad (16)$$

Удобно выразить все величины через  $(r, \xi, \eta, s)$ , где

$$\xi = \tilde{\varepsilon} \sin s_0, \quad \eta = \tilde{\varepsilon} \cos s_0.$$

В частности, исключая  $\theta$  из уравнений (13)–(15), можно представить

требуемые орбиты в виде

$$r' = r(1 - R_1 - R_2), \varphi' = \frac{\Omega(r_0)}{\kappa(r_0)} \left[ s - 2 \left( \frac{\partial R_1}{\partial s} + \xi \right) \right], \quad (17)$$

где

$$R_1 = \eta(1 + \cos s) + \xi \sin s, \quad R_2 = B_2(r) R_1^2 - [1 + 2B_2(r)] \eta R_1. \quad (18)$$

Будем использовать переменные  $(\xi, \eta)$  вместо  $(v_r, v_\varphi)$ . Соответственно нам понадобится якобиан преобразования, равный в используемом приближении

$$\left| \frac{\partial(v_r, v_\varphi)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = \frac{r_0^4 \kappa^3(r_0)}{2r\Omega(r_0)}, \quad (19)$$

причем в правой стороне этого равенства (как и всюду ниже)  $r_0$  рассматривается как выраженное через  $r$  и  $\eta$  посредством соотношения

$$r_0 = r(1 - \eta). \quad (20)$$

Элемент массы в том же приближении дается формулой

$$f_0 dv_r dv_\varphi = \frac{r_0^2}{r} \sigma_0(r_0) \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\varepsilon^2(r_0)} \right] \frac{d\xi d\eta}{2\pi\varepsilon^2(r_0)}. \quad (21)$$

Область интегрирования по  $\xi$  и  $\eta$  может быть распространена от  $(-\infty)$  до  $(+\infty)$ , причем возникающие при этом ошибки будут экспоненциально малы. Интегрируя (21) по скоростям  $v_r, v_\varphi$ , получим амплитуду плотности

$$\begin{aligned} \sigma(r) = & \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi d\eta}{2\pi\varepsilon^2(r_0)} \cdot \frac{\sigma_0(r_0)}{r^2\varepsilon^2(r_0)\kappa^2(r_0)} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\varepsilon^2(r_0)} \right] \times \\ & \times \left\{ -\Phi(r) + \frac{v(r)\pi}{\sin v(r_0)\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(r') e^{iv(r_0)s} \left[ 1 + im \frac{2\Omega}{\kappa} \left( \frac{\partial R_1}{\partial s} + \xi \right) \right] ds \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением областей диска, достаточно далеких от резонансов. Разложим потенциал  $\Phi(r')$ , предполагая, что  $|kr| \sim \varepsilon^{-1}$ :

$$\Phi(r') = \Phi(r) e^{-ikrR_1} \left[ 1 - R_1 \frac{d \ln A}{d \ln r} + ikr \left( \frac{R_1^2}{2} \frac{d \ln k}{d \ln r} - R_2 \right) \right]. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и раскладывая около  $r_0 = r$ , получим (используя также (20))

$$\sigma(r) = -\frac{\sigma_0(r)\Phi(r)}{\varepsilon^2(r)r^2\kappa^2(r)} \left\{ 1 - \frac{\pi v(r)}{\sin \pi v(r)} [\langle 1 | g_v \rangle + \langle \tilde{G} | g_v \rangle] \right\}, \quad (24)$$

где использованы обозначения Дирака

$$\langle h | g_v \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds \iint_{-\infty}^{\infty} h g_v d\xi d\eta, \quad (25)$$

а функции  $g_v$  и  $\tilde{G}$  есть

$$g_v = \frac{\exp [iv(r)s - ikrR_1]}{2\pi\varepsilon^2(r)} \cdot \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2\varepsilon^2(r)} \right], \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} = & -\eta \frac{d}{d \ln r} \ln \left( \frac{\sigma_0}{\varepsilon^2 \kappa^2} \frac{v\pi}{\sin v\pi} g_v \right) - R_1 \frac{d \ln A}{d \ln r} + \\ & + im \frac{2\Omega}{\kappa} \left( \frac{\partial R_1}{\partial s} + \xi \right) + ikr \left[ -\eta R_1 \frac{d \ln kr}{d \ln r} + \frac{R_1^2}{2} \frac{d \ln k}{d \ln r} - R_2 \right]. \quad (27) \end{aligned}$$



Такие дифференцирования по  $\ln r$  коммутируют с операциями «бра»—«кет», поэтому

$$\begin{aligned} \langle \tilde{G} | g_v \rangle = & -\langle \eta | g_v \rangle \frac{d}{d \ln r} \ln \left( \frac{\sigma_0}{\varepsilon^2 \chi^2} \frac{\nu \pi}{\sin \nu \pi} \langle \eta | g_v \rangle \right) - \langle R_1 | g_v \rangle \frac{d \ln A}{d \ln r} + \\ & + im \frac{2\Omega}{\chi} \left[ \left\langle \frac{\partial R_1}{\partial s} \middle| g_v \right\rangle + \langle \xi | g_v \rangle \right] + ikr \left[ -\langle \eta R_1 | g_v \rangle \frac{d \ln kr}{d \ln r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \langle R_1^2 | g_v \rangle \frac{d \ln k}{d \ln r} - \langle R_2 | g_v \rangle \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Прямым вычислением показывается, что (штрих означает дифференцирование по  $x$  при  $\nu = \text{const}$ )

$$\langle 1 | g_v \rangle = G_v(x), \quad (29)$$

$$\langle \eta | g_v \rangle = \frac{1}{2} \langle R_1 | g_v \rangle = \frac{i}{kr} x G'_v(x), \quad (30)$$

$$\langle \eta R_1 | g_v \rangle = -\langle R_2 | g_v \rangle = \frac{1}{2} \langle R_1^2 | g_v \rangle = -\frac{1}{(kr)^2} [x G'_v(x) + 2x^2 G''_v(x)], \quad (31)$$

$$\langle \xi | g_v \rangle = -\left\langle \frac{\partial R_1}{\partial s} \middle| g_v \right\rangle = \frac{1}{kr} \left[ \frac{\sin \nu \pi}{\nu \pi} - \nu G_v(x) \right], \quad (32)$$

где

$$G_v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu s e^{-x(1+\cos s)} ds, \quad (33)$$

$$\text{а } x \equiv \varepsilon^2 k^2 r^2 = k^2 c_r^2 / \chi^2.$$

С помощью (29)–(32) можно убедиться в том, что суммы в квадратных скобках в (28) равны нулю, а первые два члена можно скомбинировать в следующий:

$$\langle \tilde{G} | g_v \rangle = -\frac{i}{kr} x G'_v(x) \frac{d}{d \ln r} \ln \left[ \frac{\sigma_0}{\chi^2} kr A^2 \frac{\nu \pi}{\sin \nu \pi} G'_v(x) \right]. \quad (34)$$

Тогда уравнение (24) можно записать так:

$$\sigma(r) = -\frac{k^2 \Phi}{\chi^2 (1-\nu^2)} \sigma_0 \mathcal{F}_\nu(x) \left\{ 1 - \frac{i}{kr} D_\nu(x) \frac{d \ln}{d \ln r} \left( \frac{\sigma_0}{\chi^2} k \frac{\mathcal{F}_\nu}{1-\nu^2} D_\nu r A^2 \right) \right\}, \quad (35)$$

где  $\mathcal{F}_\nu(x)$  — редукционный фактор (22) раздела 4.1 главы V, а

$$D_\nu(x) = -(1-\nu^2) \frac{\nu \pi}{\sin \nu \pi} G'_v(x) / \mathcal{F}_\nu(x) = \frac{\partial}{\partial \ln x} \ln [x \mathcal{F}_\nu(x)]. \quad (36)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агекян Т. А. Звезды, галактики, метagalактика. М., «Наука», 1966.
2. Агекян Т. А. Вестн. ЛГУ, 1962, № 1, 152.
3. Аллен К. У. Астрофизические величины (справочник). М., ИЛ; 1960.
4. Антонов В. А. Астр. ж., 1960, 37, № 5, 918.
5. Антонов В. А. Вестн. ЛГУ, 1961, № 13, 157.
6. Антонов В. А. Вестн. ЛГУ, 1962, № 19, 96.
7. Антонов В. А. В кн.: Итоги науки, серия астр. «Кинематика и динамика звездных систем». М., ВИНИТИ, 1968.
8. Антонов В. А. Учен. зап. ЛГУ, 1971, № 359, 64.
9. Антонов В. А. Докл. АН СССР, 1973, 209, № 3, 584.
10. Антонов В. А., Нежинский Е. М. Учен. зап. ЛГУ, 1973, № 363, 122.
11. Антонов В. А. В кн.: Динамика галактик и звездных скоплений. Алма-Ата, «Наука», 1973.
12. Антонов В. А., Нуригдинов С. Н. Вестн. ЛГУ, 1975, № 7, 133.
13. Антонов В. А. В кн.: Итоги науки, серия астр., т. 10. «Равновесие и устойчивость гравитирующих систем». М., «Наука», 1975.
- 13а. Антонов В. А. В кн.: Динамика и эволюция звездных систем. М.—Л., ВАГО, 1975, с. 269.
14. Антонов В. А. Учен. зап. ЛГУ, Труды Астр. обсерв., 1976, 32, 79.
- 14а. Антонов В. А. Учен. зап. ЛГУ, Труды Астр. обсерв., 1968, 24, 98.
15. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Пер. с франц. с доп. Н. И. Идельсона. Л.—М., ОНТИ, 1936.
16. Арп Х. С. В кн.: Астрофизика. М., «Наука», 1961.
17. Бааде В. Эволюция звезд и галактик. М., «Мир», 1966.
18. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954.
19. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Фридман А. М. Докл. АН СССР, 1968, 182, № 4, 794.
20. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Сагдеев Р. З., Фридман А. М. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1969, № 3, 3.
21. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б. Астрофизика, 1969, 5, № 3, 425.
22. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б. Астрофизика, 1969, 5, № 2, 223.
23. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б. Астрофизика, 1970, 6, № 3, 387.
24. Бисноватый-Коган Г. С., Зельдович Я. Б., Астр. ж., 1970, 47, № 5, 942.
25. Бисноватый-Коган Г. С. Астрофизика. 1971, 7, 121.
26. Бисноватый-Коган Г. С. Астр. ж., 1972, 49, № 6, 1238.
27. Бисноватый-Коган Г. С., Блинные С. И. Препринт ИПМ АН СССР, № 34. М., 1972.
28. Бисноватый-Коган Г. С., Михайловский А. Б. Астр. ж., 1973, 50, № 2, 312.
29. Бисноватый-Коган Г. С. Письма в Астр. ж., 1975, 1, № 9, 3.
30. Бобров М. С. Кольца Сатурна. М., «Наука», 1970.
31. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Усп. физ. наук, 1961, 73, 701.
32. Велтманн Ю.-И. К. В кн.: Итоги науки, серия астр. «Кинематика и динамика звездных систем». М., ВИНИТИ, 1968.
33. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория групп. М., «Наука», 1965.
34. Власов М. А. Письма в ЖЭТФ, 1965, 2, 274.
35. Вокулёр Ж. В кн.: Строение звездных систем. М., ИЛ, 1962.
36. Воронцов-Вельяминов Б. А. Атлас и каталог взаимодействующих галактик. М., 1959.
37. Воронцов-Вельяминов Б. А. Внегалактическая астрономия. М., «Наука», 1972.
38. Всехсвятский С. К. В кн.: Проблемы современной космогонии. Под ред. В. А. Амбарцумяна. М., «Наука», 1969.
39. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Вопросы теории плазмы, 1973, вып. 7, 3.
40. Гинзбург И. Ф., Поляченко В. Л., Фридман А. М. Астр. ж., 1971, 48, 815.
41. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа. М., «Наука», 1963.
42. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.
43. Гуревич Л. Э. Вопросы космогонии, 1954, 2, 150.
44. Гуревич Л. Э. Астр. ж., 1969, 46, 304.
45. Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б. Астр. ж., 1963, 40, 807.

46. Дзюба Б. М., Якубов В. Б. Астр. ж., 1970, 47, № 1, 3.
47. Зельдович Я. Б., Подурец М. А. Астр. ж., 1965, 42, 963.
48. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967.
- 48а. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Стрoение и эволюция Вселенной. М., «Наука», 1975.
49. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Препринт ИПМ АН СССР, № 23. М., 1970.
50. Зельдович Я. Б., Поляченко В. Л., Фридман А. М., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 7—72. Иркутск, 1972.
51. Идлис Г. М. Астр. ж., 1952, 29, 694.
52. Идлис Г. М. В кн.: Итоги науки, серия астр. «Кинематика и динамика звездных систем». М., ВИНТИ, 1968.
53. Кадомицев Б. Б. Вопросы теории плазмы, 1963, вып. 2, 132.
54. Кадомицев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. ЖЭТФ, 1964, 47, 2266.
55. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
- 55а. Карлман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
56. Ковалевская С. В. В кн.: С. В. Ковалевская. Научные работы. М., Изд-во АН СССР, 1948.
57. Корчагин В. И., Марочник Л. С. Астр. ж., 1975, 52, 15.
58. Кузмин Г. Г. Публ. Тартуск. астр. обсерв., 1952, 32, 211.
59. Кузмин Г. Г. Публ. Тартуск. астр. обсерв., 1956, 35, 285.
60. Кузмин Г. Г. Астр. ж., 1956, 33, № 1, 27.
61. Кузмин Г. Г. Изв. АН ЭССР, 1956, 5, 91.
62. Кузмин Г. Г., Велтманн Ю.-И. К. Публ. Тартуск. астр. обсерв., 1967, 36, № 1, 5.
63. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
64. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
65. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 1946, 16, 574.
66. Ландау Л. Д. Изв. АН СССР, серия физ., 1953, 17, 51.
67. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИФМЛ, 1954.
68. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., ГИФМЛ, 1963.
69. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., ГИФМЛ, 1965.
70. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., «Наука», 1967.
71. Лебедев Н. Н. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., 1965.
72. Лебедев В. И., Максумов М. Н., Марочник Л. С. Астр. ж., 1965, 42, 709.
73. Линдблад Б. В кн.: Стрoение звездных систем. М., ИЛ, 1962.
74. Лить Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
75. Лифшиц Е. М. ЖЭТФ, 1946, 16, 587.
76. Лифшиц Е. М., Халатников И. М. Усп. физ. наук, 1963, 30, 391.
77. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М., «Наука», 1965.
78. Лялунов А. М. Собр. соч. М., Изд-во АН СССР, 1954—1965.
- 78а. Максумов М. Н. Докл. АН ТаджССР, 1965, 1, 27.
79. Мазур В. А., Михайловский А. Б., Френкель А. Л., Шухман И. Г. Препринт ИАЭ—2693, 1976.
80. Максумов М. Н. Докл. АН ТаджССР, 1970, 13, 15.
81. Максумов М. Н. Бюл. Ин-та астрофиз. АН ТаджССР, 1974, № 64, 3.
82. Максумов М. Н. Бюл. Ин-та астрофиз. АН ТаджССР, 1974, № 64, 22.
83. Максумов М. Н., Мишуров Ю. И. Бюл. Ин-та астрофиз. ТаджССР, № 64, 16.
84. Марочник Л. С., Сучков А. А. Усп. физ. наук, 1974, 112, № 2, 275.
85. Михайловский А. Б., Френкель А. Л., Фридман А. М. ЖЭТФ, 1977, 73.
86. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. М., Атомиздат, 1970.
87. Михайловский А. Б., Фридман А. М., Эпельбаум Я. Г. ЖЭТФ, 1970, 59, 1608.
88. Михайловский А. Б., Фридман А. М. ЖЭТФ, 1971, 61, 457.
89. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 2. М., Атомиздат, 1971.
- 89а. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. ЖЭТФ, 1977, 73.
90. Михайловский А. Б., Фридман А. М. Астр. ж., 1973, 50, № 1, 88.
- 90а. Михайловский А. Б., Петвиашвили В. И., Фридман А. М. Письма ЖЭТФ, 1976.
91. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 3—72. Иркутск, 1972.
92. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 6—72. Иркутск, 1972.
93. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 1—73. Иркутск, 1973.
94. Морозов А. Г., Фридман А. М. Астр. ж., 1973, 50, № 5, 1028.
95. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Фридман А. М., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 5—74. Иркутск, 1974.
96. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Астр. ж., 1974, 51, № 1, 75.
97. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Фридман А. М., Шухман И. Г. В кн.: Динамика и эволюция звездных систем. М., ВАГО, АН СССР, 1975.
98. Морозов А. Г., Фридман А. М. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 5—74. Иркутск, 1974.
- 98а. Морозов А. Г., Фридман А. М. В кн.:

- Динамика и эволюция звездных систем. М.—Л., ВАГО, 1975, с. 238.
99. Морозов А. Г., Поляченко В. Л., Файнштейн В. Г., Фридман А. М. Астр. ж., 1976, 53, 735.
  - 99а. Морозов А. Г., Файнштейн В. Г., Фридман А. М. Докл. АН СССР, 1976, 228, 1072.
  100. Морозов А. Г., Файнштейн В. Г., Фридман А. М. ЖЭТФ, 1976, 71, 1249.
  101. Огородников К. Ф. Динамика звездных систем. М., Физматгиз, 1958.
  102. Озерной Л. М., Чернин А. Д. Астр. ж., 1967, 44, 321.
  103. Озерной Л. М., Чернин А. Д. Астр. ж., 1968, 45, 1137.
  104. Оорг Я. В кн.: Строение звездных систем. М., ИЛ, 1962.
  105. Пальчик М. Я., Паташинский А. З., Пинус В. К., Эпельбаум Я. Г. Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 99—100. Новосибирск, 1970.
  106. Пальчик М. Я., Паташинский А. З., Пинус В. К. Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 100. Новосибирск, 1970.
  107. Пахольчик А. Ж. Астр. ж., 1962, 39, № 6, 953.
  108. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., Физматгиз, 1961.
  - 108а. Поляченко В. Л., Сынах В. С., Фридман А. М. Астр. ж., 1971, 48, 1174.
  109. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Астр. ж., 1971, 48, № 6, 1174.
  110. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Астр. ж., 1972, 49, № 1, 157.
  111. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 1—72. Иркутск, 1972.
  112. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 2—72. Иркутск, 1972.
  113. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Астр. ж., 1973, 50, № 1, 97.
  114. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Астр. ж., 1973, 50, № 3, 649.
  115. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Астр. ж., 1973, 50, № 4, 721.
  116. Поляченко В. Л. Канд. диссертация. Л., 1973.
  117. Поляченко В. Л. Докл. АН СССР, 1976, 229, 1335.
  118. Поляченко В. Л., Шухман И. Г. Письма в Астр. ж., 1976, 3, 321.
  119. Сафронов В. С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М., «Наука», 1969.
  120. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
  121. Слейтер Люси Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., Изд. ВЦ АН СССР, 1966.
  122. Сойер-Хогг Э. В кн.: Строение звездных систем. М., ИЛ, 1962.
  123. Стикс Т. Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1966.
  124. Сынах В. С., Фридман А. М., Шухман И. Г. Докл. АН СССР, 1971, 201, № 4, 827.
  125. Сынах В. С., Фридман А. М., Шухман И. Г. Астрофизика, 1972, 8, № 4, 577.
  126. Сыроватский С. И. Труды ФИАН, 1956, 8, 13.
  127. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. III. М.—Л., ГТТИ, 1949.
  128. Тимофеев А. В. Препринт ИАЭ им. Курчатова. М., 1968.
  129. Тимофеев А. В. Усп. физ. наук, 1970, 102, 185.
  130. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИФМЛ, 1966.
  131. Трубников Б. А. Вопросы теории плазмы, 1963, вып. 1, 98.
  132. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 1. М., ГИФМЛ, 1959.
  133. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2. М., ГИФМЛ, 1963.
  134. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятности от комплексного аргумента. М., ГИТТЛ, 1954.
  135. Файнберг Я. Б. Атомная энергия, 1961, 11, 391.
  136. Фейнберг Е. Л. Усп. физ. наук, 1971, 104, 539.
  137. Фесенков В. Г. Астр. ж., 1951, 28, 492.
  138. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М., Атомиздат, 1968.
  139. Фридман А. М. В кн.: Итоги науки, серия астр., т. 10. «Равновесие и устойчивость гравитирующих систем». М., «Наука», 1975.
  140. Фридман А. М. Астр. ж., 1966, 43, № 2, 327.
  141. Фридман А. М. Астр. ж., 1971, 48, № 2, 910.
  142. Фридман А. М. Астр. ж., 1971, 48, № 2, 320.
  143. Фридман А. М., Шухман И. Г. Докл. АН СССР, 1972, 202, № 1, 67.
  144. Фридман А. М. Докт. диссертация. М., 1972.
  145. Хазин Л., Шноль Э. Э. Докл. АН СССР, 1969, 185, 1018.
  146. Цевкии Ф. В кн.: Строение звездных систем. М., ИЛ, 1962.
  147. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М., ИЛ, 1948.
  148. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. Пер. с англ. М., «Мир», 1973.
  149. Шафранов В. Д. Вопросы теории плазмы, 1963, вып. 3, 3.
  150. Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. М., ИЛ, 1961.
  151. Шмидт О. Ю. Четыре лекции о теории происхождения Земли. М., Изд-во АН СССР, 1950.
  152. Шноль Э. Э. Астр. ж., 1969, 46, № 5, 970.
  153. Шухман И. Г. Канд. диссертация. Л., 1973.
  154. Шухман И. Г. Астр. ж., 1973, 50, № 3, 651.
  155. Эйштейн А. Собр. соч., т. 2. М., «Наука», 1967.
  156. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., «Наука», 1969.
  157. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М., «Наука», 1964.

158. Aggarwal M., Talwar S. P. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1969, **146**, 187.
159. Avner E. S., King I. R. Astron. J., 1967, **72**, 650.
160. Barbanis B., Prendergast K. H. Astron. J., 1967, **72**, N 2, 215.
161. Bardeen J. M., Wagoner R. V. Astrophys. J., 1969, **158**, N 2, L65.
162. Bardeen J. M., Wagoner R. V. Astrophys. J., 1967, **167**, N 3, 359.
163. Bel L. Astrophys. J., 1969, **155**, 83.
164. Berlage H. P. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. Amsterdam, 1948, **51**, 965.
165. Berlage H. P. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. Amsterdam, 1948, **53**, 796.
166. Bernstein A. B., Frieman F. A., Krukskal H. D., Kulsrud R. M. Proc. Roy. Soc. London, 1953, **17**, 244.
167. Bodenheimer P., Ostriker J. P. Astrophys. J., 1973, **180**, 159.
168. Bonnor W. B. Appl. Math., 1967, **8**, 263.
169. Bostick W. H. Rev. Mod. Phys., 1958, **30**, 1090.
170. Brandt J. C. Astrophys. J., 1960, **131**, 293.
171. Brandt J. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **129**, 309.
172. Bryan G. H. Philos. Trans., 1888, **180**, 187.
173. Burbidge E. M., Burbidge G. R., Prendergast K. H. Astrophys. J., 1959, **130**, 739.
174. Burbidge E. M., Burbidge G. R., Prendergast K. H. Astrophys. J., 1963, **137**, 376.
175. Burbidge E. M., Burbidge G. R., Prendergast K. H. Astrophys. J., 1964, **140**, 80, 1620.
176. Burbidge E. M., Burbidge G. R. Astrophys. J., 1964, **140**, 1445.
177. Burke B. F. Astron. J., 1957, **62**, 90.
178. Burton W. B. Bull. Astron. Netherl., 1966, **18**, 247.
179. Camm G. L. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1941, **101**, 195.
180. Camm G. L. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1952, **112**, N 2, 155.
181. Carranza G., Courtes G., Georgellin Y., Monnet G. C. r. Acad. sci. Paris, 1967, **264**, 191.
182. Carranza G., Courtes G., Georgellin Y., Monnet G., Pourcelot A. Ann. astrophys., 1968, **31**, 63.
183. Carranza G., Crillon R., Monnet G. Astron. and Astrophys., 1969, **1**, 479.
184. Case K. M. Phys. Fluids, 1960, **3**, 149.
185. Chandrasekhar S., Fermi E. Astrophys. J., 1953, **118**, 113.
186. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability, Oxford, Clarendon Press, 1961.
187. Contopoulos G. Astrophys. J., 1971, **163**, 181.
188. Contopoulos G. Astrophys. and Space Sci., 1971, **13**, N 2, 377.
189. Contopoulos G. Astrophys. J., 1970, **160**, 113.
190. Courtes G., Dubout-Crillon R. Astron. and Astrophys., 1971, **11**, N 3, 468.
191. Crezè M., Mennessier M. O. Astron. and Astrophys., 1973, **27**, N 2, 281.
192. Danby J. M. A. Astron. J., 1965, **70**, 501.
193. Danver G. Ann. Obs. Lund., 1942, **10**, 1134.
194. Dixon M. E. Astrophys. J., 1971, **164**, 411.
- 194a. Doremus J. P., Feix M. R. Astron. and Astrophys., 1973, **29**, N 3, 401.
195. Eggen O. J., Lynden-Bell D., Sandage A. R. Astrophys. J., 1962, **136**, 748.
196. Eddington A. S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1915, **75**, N 5, 366.
197. Eddington A. S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1916, **76**, N 7, 572.
198. Ewert G., Hablick D. Z. Astrophys., 1965, **61**, 273.
199. Feldman S. I., Lin C. C. Stud. Appl. Math., 1973, **52**, 1.
200. Fermi E. Progr. Theor. Phys., 1950, **5**, 570.
201. Freeman K. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **130**, 183.
202. Freeman K. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1966, **133**, N 1, 47.
203. Freeman K. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1966, **134**, N 1, 1.
204. Freeman K. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1966, **134**, N 1, 15.
205. Freeman K. C. Astrophys. J., 1970, **160**, N 3, 811.
206. Freeman K. C., Vaucouleurs de G. Astron. J., 1966, **71**, N 9, 855.
207. Fujimoto M. Publ. Astron. Soc. Japan, 1963, **15**, 107.
208. Fujimoto M. «IAU Symposium N 29», Dordrecht, D. Reidel, 1966.
209. Goldreich P., Lynden-Bell D. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **130**, N 2—3, 97.
210. Goldreich P., Lynden-Bell D. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **130**, N 2—3, 125.
211. Guibert J. Astron. and Astrophys., 1974, **30**, N 3, 353.
212. Haar D. ter. Rev. Mod. Phys., 1950, **22**, 119.
213. Henderson A. P. Ph. D. Thesis. Univ. Maryland, 1967.
214. Henon M. Ann. Astrophys., 1959, **29**, N 2, 126.
215. Hohl F. Astron. J., 1968, **73**, N 5, 98, 611.
216. Henon M. Bull. Astron., 1968, **3**, 241.
217. Henon M. Astron. and Astrophys., 1973, **24**, N 2, 229.
218. Hockney R. W., Brownrigg D. R. K. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, **167**, N 2, 351.
219. Hohl F. J. Comput. Phys., 1972, **9**, 10.
220. Hohl F. Astrophys. J., 1971, **168**, 343.
221. Hosking R. J. Austral. J. Phys., 1969, **22**, N 4, 505.
222. Hoyle F., Schwarzschild M. Astrophys. J., Suppl., 1955, **2**, N 13.
223. Hoyle F. Frontiers of Astronomy. N. Y. 1960.
224. Hoyle F., Fowler W. A. Nature, 1967, **213**, 373.
225. Hubble E. The Realm of the Nebulae. New Haven, Yale Univ. Press, 1937.

226. *Hunter C.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1963, **126**, N 4, 299.
227. *Hunter C.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **129**, N 3—4, 321.
228. *Hunter C.* Stud. Appl. Math., 1969, **48**, N 1, 55.
229. *Hunter C.* Astrophys. J., 1969, **157**, N 1, 183.
230. *Hunter C., Toomre A.* Astrophys. J., 1969, **155**, N 3, 747.
231. *Hunter C.* Astrophys. J., 1970, **162**, N 1, 97.
232. *Hunter C.* In: Dynamics of Stellar Systems. Hayli (Ed.). Dordrecht—Boston, D. Reidel Publ. Co. 1970.
233. *Hunter C.* Annual Rev. Fluid Mech., 1972, **4**, 219.
234. *Hunter C.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, **166**, 633.
235. *Hunter C.* Astron. J., 1975, **80**, N 10, 783.
236. *Idlis G. M.* Astron. J. (Rus), 1959, **3**, 860.
237. *Innanen K. A. J.* Roy. Astron. Soc. Canada, 1969, **63**, N 5, 260.
238. *Ipser J. R., Thorne K. S.* Preprint OAP-121 California Inst. Technol. Pasadena, 1968.
239. *Ipser J. R., Thorne K. S.* Astrophys. J., 1968, **154**, N 1, 251.
240. *Jackson J. D.* Plasma Phys., 1960, **1**, 171.
241. *Jeans J. H.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1916, **76**, N 7, 767.
242. *Jeans J.* Astronomy and Cosmology. Cambridge, 1929.
243. *Johnson H. M.* Astrophys. J., 1952, **115**, 124.
244. *Julian W. H.* Astrophys. J., 1969, **155**, N 1, 117.
245. *Julian W. H., Toomre A.* Astrophys. J., 1966, **146**, N 3, 810.
246. *Kadomtzev B. B., Pogutze O. P.* Phys. Rev. Letts., 1970, **25**, N 17, 1155.
247. *Kahn F. D., Woltjer L.* Astrophys. J., 1959, **130**, 705.
248. *Kahn F. D., Dyson J. E.* Annual Rev. Astron. and Astrophys., 1965, **3**, 47.
249. *Kalnajs A. J.* Ph. D. Dissert. Harvard Univ., 1965.
250. *Kalnajs A. J.* In «IAU Symposium, N 38». Dordrecht, D. Reidel, 1970.
251. *Kalnajs A. J.* Astrophys. J., 1971, **166**, N 2, 275.
252. *Kalnajs A. J.* Astrophys. J., 1972, **175**, N 1, 63.
253. *Kalnajs A. J.* Astrophys. J., 1973, **180**, 1023.
254. *Kalnajs A. J., Athanassoula G. E.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, **168**, 287.
255. *Kato S.* Publ. Astron. Soc. Japan, 1971, **23**, 467.
256. *Kato S.* Publ. Astron. Soc. Japan, 1973, **25**, 231.
257. *Kerr F. J.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1962, **123**, 327.
258. *Kerr F. J., Westerhout G.* In: Stars and Stellar Systems, v. 5. Chicago—London, Chicago Univ. Press, 1965.
259. *Kerr F. J.* Austral. J. Phys. Astrophys. Suppl., N 9, 1969.
260. *King I. R.* Astron. J., 1965, **70**, N 5, 376.
261. *Krall N., Rosenbluth M.* Phys. Fluids, 1963, **6**, 254.
262. *Kuiper G. P.* Astrophysics. J. A. Hynek (Ed.). N. Y., 1951.
263. *Kulsrud R. M., Mark J. W.-K., Caruso A.* Astrophys. and Space Sci., 1971, **14**, N 1, 52.
264. *Kulsrud R. M., Mark J. W.-K.* Astrophys. J., 1970, **160**, 471.
265. *Laplace P. S.* Mem. Acad. sci. (Mécanique Celeste, k. 3, p. VI), 1789 (1787).
- 265a. *Lighthill M. J. J.* Inst. Math. Appl., 1965, **1**, 269.
266. *Lee E. P.* Astrophys. J., 1967, **148**, 185.
267. *Lin C. C., Shu F. H.* Astrophys. J., 1964, **140**, N 2, 646.
268. *Lin C. C., Mestel L., Shu F.* Astrophys. J., 1965, **142**, N 4, 1431.
269. *Lin C. C.* SIAM J. Appl. Math., 1966, **14**, N 4, 876.
270. *Lin C. C., Shu F. H.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1966, **55**, N 2, 229.
271. *Lin C. C., Yuan C., Shu F. H.* Astrophys. J. 1969, **155**, N 3, 721.
272. *Lin C. C.* In «IAU Symposium, N 38», Dordrecht, D. Reidel, 1970.
273. *Lindblad B.* Stockholm Obs. Ann., 1958, **20**, N 6.
274. *Lindblad B.* Stockholm. Obs. Ann., 1963, **22**, 3.
275. *Lindblad P. O.* Popular arstok tidschr., 1960, **41**, 132.
276. *Lindblad P. O.* Stockholm Obs. Ann., 1960, **21**, 3.
277. *Lindblad P. O.* In: Interstellar Matter in Galaxies, I. Woltjer (Ed.). N. Y.
278. *Lundquist C.* Phys. Rev., 1951, **83**, 307.
279. *Lynden-Bell D.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1960, **120**, N 3, 204.
280. *Lynden-Bell D.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1962, **123**, 447.
281. *Lynden-Bell D.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1962, **124**, 279.
282. *Lynden-Bell D.* Astrophys. J., 1964, **139**, 1195.
283. *Lynden-Bell D.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1965, **129**, 299.
284. *Lynden-Bell D.* The Theory of Orbits in a Solar System and in Stellar Systems, 1966.
285. *Lynden-Bell D.* Lect. Appl. Math., 1967, **9**, 131.
286. *Lynden-Bell D.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1967, **136**, 101.
287. *Lynden-Bell D., Ostriker J. P.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1967, **136**, N 3, 293.
288. *Lynden-Bell D., Sanitt N.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1969, **143**, N 2, 176.
289. *Lynden-Bell D., Kalnajs A. J.* Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1972, **157**, 1.
- 289a. *Mark J. W.-K.* Astrophys. J., 1971, **169**, 455.
290. *Mark J. W.-K.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, **68**, N 9, 2095.
- 290a. *Mark J. W.-K.* Astrophys. J., 1974, **193**, 539.
291. *Maxwell J. C.* The Sci. Papers, v. 1. Cambridge, 1859, p. 287.

292. Mestel L. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1963, **126**, N 5—6, 553.
293. Michie R. W. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1963, **125**, N 2, 127.
294. Miller R. W., Prendergast K. H., Quirk W. J. Astrophys. J. 1970, **161**, N 3, 903.
295. Münch G. Publ. Astron. Soc. Pacific, 1959, **71**, 101.
- 295a. O'Neil T. Phys. Fluids, 1965, **8**, 2255.
296. Oort J. H. Bull. Astron. Netherl., 1932, **6**, 249.
297. Oort J. H. Scient. Amer., 1956, **195**, 101.
298. Oort J. H., Kerr F. J., Westerhout G. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1958, **118**, 319.
299. Oort J. H. In: «Interstellar Matter in Galaxies». L. Woltjer (Ed.). N. Y., W. A. Benjamin, 1962.
300. Ostriker J. P., Bodenheimer P. Astrophys. J., 1973, **180**, 171.
301. Ostriker J. P., Peebles P. J. E. Astrophys. J., 1973, **186**, N 2, 467.
302. Peebles P. J., Dicke R. H. Astrophys. J., 1968, **154**, 898.
303. Piddington J. H. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1973, **162**, 73.
304. Piddington J. H. Astrophys. J., 1973, **179**, 755.
305. Plummer H. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1911, **71**, 460.
306. Prendergast K. H. Astron. J., 1964, **69**, 147.
307. Prendergast K. H., Tomer E. Astron. J., 1970, **75**, 674.
308. Quirk W. J. Astrophys. J., 1971, **167**, N 1, 7.
309. Rohm R.-G. Ph. D. Thesis. Cambridge, MIT, 1965.
310. Roberts P. H., Stewartson K. Astrophys. J., 1963, **137**, N 3, 777.
311. Roberts W. W. Astrophys. J., 1969, **158**, 123.
312. Roberts W. W., Roberts M. S., Shu F. H. Astrophys. J., 1975, **196**, 381.
313. Rosenbluth M. N., Krall N., Rostocker N. Nuclear Fusion, Suppl., 1962, **2**, 143.
314. Rougoor G. W. Bull. Astron. Inst. Netherl., 1964, **17**, 318.
315. Rubin V. C., Ford W. K. Astrophys. J., 1970, **159**, N 2, 379.
316. Russel H. N. Astronomy, Part 1, 1926.
317. Sandage A. The Hubble Atlas of Galaxies. Washington, Carnegie Inst. 1961.
318. Sandage A., Freeman K. C., Stokes N. R. Astrophys. J., 1970, **160**, 831.
319. Schmidt M. In: Galactic Structure. A. Blaauw and M. Schmidt (Eds). Univ. Chicago Press, 1965.
320. Shane W. W., Bieger-Smith G. P. Bull. Astron. Netherl., 1966, **18**, 263.
321. Shapley H., Sawyer H. B. Harv. Obs. Bull., 1927, N 852.
322. Shu F. H. Astron. J., 1968, **73**, N 10, 201.
323. Shu F. H. Ph. D. Dissert. thesis. Harvard Univ., 1968.
324. Shu F. H. Astrophys. J., 1970, **160**, N 1, 89.
325. Shu F. H. Astrophys. J., 1970, **160**, N 1, 99.
326. Shu F. H., Stachnic R. V., Yost J. C. Astrophys. J., 1971, **166**, N 3, 465.
327. Spiegel E. A. Sympos. Origine Syst. Solaire, Nice, 1972. Paris, 1972.
328. Strömberg P. In: Proc. IAU Sympos. N 31, Noordwick, 1966.
329. Strömberg P. In: IAU Sympos. N 31. Dordrecht, D. Reidel, 1967.
330. Sweet P. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1963, **125**, 285.
331. Toomre A. Lectures in Geophysical Fluid Dynamics at the Woods Hole Oceanographic Institution, 1966.
332. Toomre A. Astrophys. J., 1963, **138**, 385.
333. Toomre A. Astrophys. J., 1964, **139**, N 4, 1217.
334. Toomre A. Astrophys. J., 1969, **158**, 899.
335. Tremaine S. D. Preprint California Inst. Technol. Pasadena, 1976.
336. Vandervoort P. O. Astrophys. J., 1967, **147**, N 1, 91.
337. Vandervoort P. O. Mem. Soc. roy. sci. Liege, 1967, **15**, 209.
338. Vandervoort P. O. Astrophys. J., 1970, **161**, 67, 87.
339. Vaucouleurs G. de. Mem. Mt. Stromlo Obs., 1956, **111**, N 3.
340. Vaucouleurs G. de. Astrophys. J., 1963, Suppl., **8**, N 76, 31.
341. Vaucouleurs G. de. Rev. Popular. Astron., 1963, **57**, N 520, 6.
342. Vaucouleurs G. de. Astrophys. J., 1964, Suppl., **8**, N 74, 31.
343. Vaucouleurs G. de, Vaucouleurs A. de, Freeman K. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1968, **139**, N 4, 425.
344. Vaucouleurs G. de, Freeman K. C. Vistas in Astron., 1973, **14**, 163.
345. Volders L. Bull. Astron. Netherl., 1959, **14**, 323.
346. Weaver H. In: IAU Symp. N 38, D. Reidel, Dordrecht, 1970.
347. Van Weizsäcker C. F. Z. Astrophys., 1944, **22**, 319.
348. Van Weizsäcker C. F. Naturwissenschaften, 1946, **33**, 8.
349. Westerhout G. Bull. Astron. Inst. Netherl., 1958, **14**, 215.
350. Wielen R. Astron. Rechen-Inst., Heidelberg Mitt., 1971, Ser. A, N 47.
351. Wilson C. P. Astron. J., 1975, **80**, 175.
352. Wooley R. van der R. Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1956, **116**, N 3, 296.
353. Wooley R. van der R. Observatory, 1961, **81**, N 924, 161.
354. Wu C.-S. Phys. Fluids, 1968, **11**, N 3, 545.
355. Wyse A. B., Mayall N. U. Astrophys. J., 1942, **95**, 24.
356. Yabushita S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1969, **143**, N 3.
357. Yabushita S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1966, **133**, N 3, 247.
358. Yabushita S. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1969, **142**, N 2, 201.
359. Yuan C. Astrophys. J., 1969, **158**, N 3, 871.
360. Yuan C. Astrophys. J., 1969, **158**, N 3, 889.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	Предисловие . . . . .	3
	Введение . . . . .	7
Глава	I. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО СЛОЯ . . . . .	22
	§ 1. Равновесные состояния бесстолкновительного плоского слоя . . . . .	23
	§ 2. Гравитационная (джинсовская) неустойчивость слоя относительно длинноволновых возмущений . . . . .	25
	§ 3. Вывод интегродифференциальных уравнений для нормальных мод плоского гравитирующего слоя . . . . .	29
	§ 4. Симметричные возмущения плоского слоя с изотропной функцией распределения вблизи от границы устойчивости . . . . .	33
	§ 5. Перпендикулярные колебания однородного бесстолкновительного слоя . . . . .	35
	Задачи . . . . .	49
Глава	II. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА . . . . .	57
	§ 1. Равновесные цилиндрические конфигурации . . . . .	57
	§ 2. Джинсовская неустойчивость ограниченного по радиусу цилиндра . . . . .	60
	§ 3. Устойчивость цилиндра относительно желобковых возмущений . . . . .	73
	§ 4. Локальный анализ устойчивости цилиндров (желобковые возмущения) . . . . .	77
	§ 5. Сравнение с колебаниями несжимаемого цилиндра . . . . .	84
	§ 6. Желобковые колебания неоднородного цилиндра с круговыми орбитами частиц . . . . .	86
	Задачи . . . . .	91
Глава	III. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ . . . . .	102
	§ 1. Равновесные функции распределения . . . . .	104
	§ 2. Устойчивость систем с изотропным распределением частиц по скоростям . . . . .	114
	§ 3. Устойчивость систем гравитирующих частиц, вращающихся по круговым траекториям . . . . .	124
	3.1. Устойчивость однородного шара (124) 3.2. Устойчивость однородной системы частиц с орбитами, близкими к круговым (131)	
	3.3. Устойчивость однородного шара с отличным от нуля моментом вращения (132) 3.4. Устойчивость неоднородных систем (136)	
	§ 4. Устойчивость систем гравитирующих частиц, вращающихся по эллиптическим орбитам . . . . .	138
	4.1. Устойчивость шара с произвольными эллиптическими орбитами частиц (138) 4.2. Неустойчивость вращающегося шара Фримана (141)	
	§ 5. Устойчивость систем с радиальными траекториями частиц . . . . .	144
	§ 6. Обсуждение результатов . . . . .	148
	Задачи . . . . .	151



Глава	IV. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ СИСТЕМ . . . . .	158
§ 1.	Равновесные функции распределения . . . . .	160
§ 2.	Устойчивость трехосного эллипсоида и эллиптического диска . . . . .	173
	2.1. Устойчивость трехосного эллипсоида (173) 2.2. Устойчивость эллиптических дисков Фримана (179)	
§ 3.	Устойчивость двухосных бесстолкновительных эллипсоидальных систем . . . . .	182
	3.1. Устойчивость сфероидов Фримана (182) 3.2. Критерий устойчивости Пиблса — Острайкера. Устойчивость «горячих» в плоскости вращения однородных эллипсоидов (189) 3.3. Вековая и динамическая неустойчивость. Характеристическое уравнение для собственных частот колебаний эллипсоидов Маклорена (193) Задачи . . . . .	194
Глава	V. РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ . . . . .	211
§ 1.	Равновесные состояния плоских газовых и бесстолкновительных систем . . . . .	214
	1.1. Системы с круговыми орбитами частиц (214) 1.2. Плазменные системы с магнитным полем (221) 1.3. Газовые системы (223) 1.4. «Горячие» бесстолкновительные системы (224)	
§ 2.	Устойчивость «холодного» вращающегося диска . . . . .	228
	2.1. Мембранные колебания диска (228) 2.2. Колебания в плоскости диска (244)	
§ 3.	Устойчивость плазменного диска с магнитным полем . . . . .	259
§ 4.	Устойчивость «горячего» вращающегося диска . . . . .	267
	4.1. Приближенно коротких длин волн (267) 4.2. Интегральное уравнение для нормальных мод бесстолкновительных дисковых систем (276) 4.3. Точные спектры малых возмущений (282) Задачи . . . . .	296
Глава	VI. НЕДЖИНСОВСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГРАВИТИРУЮЩИХ СРЕД . . . . .	306
§ 1.	Пучковая неустойчивость в гравитирующей среде . . . . .	306
§ 2.	Градиентные неустойчивости в гравитирующей среде . . . . .	313
§ 3.	Анизотропная («шланговая») неустойчивость в бесстолкновительных гравитирующих системах . . . . .	317
§ 4.	Гидродинамические неустойчивости гравитирующей среды . . . . .	321
	4.1. Гидродинамические неустойчивости в модели плоскопараллельного потока (321) 4.2. Гидродинамические неустойчивости гравитирующего цилиндра (325) Задачи . . . . .	328
Глава	VII. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ . . . . .	330
§ 1.	Солитоны в гравитирующих системах . . . . .	330
	1.1. Спиральные волны плотности в плоских галактиках — движущиеся солитоны (330) 1.2. Солитоны в самогравитирующем газовом слое конечной толщины (333)	
§ 2.	Эффект Мазитова — О'Нейла в гравитирующих системах . . . . .	337
	2.1. Введение (337) 2.2. Постановка задачи (339) 2.3. Движение частиц в поле волны (341) 2.4. Нелинейная эволюция функции распределения (342) 2.5. Нелинейная эволюция монохроматической волны (344) 2.6. Область применимости теории (346) 2.7. Оценки установившейся амплитуды монохроматической волны (347)	
§ 3.	Модуляционная неустойчивость газового слоя . . . . .	347
§ 4.	Нелинейная теория гравитационной неустойчивости однородной расширяющейся среды . . . . .	348
§ 5.	Взрывная неустойчивость вращающегося гравитирующего диска . . . . .	350
	Задача . . . . .	351

Глава VIII. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	355
§ 1. Общие замечания . . . . .	355
§ 2. Сферические и эллипсоидальные системы . . . . .	358
2.1. Сферически-симметричные системы (358) 2.2. Эллипсоидальные системы (361)	
§ 3. Спиральная структура галактик . . . . .	365
3.1. О «материальной» и «волновой» точках зрения на природу спиральных рукавов (366) 3.2. О «двухрукавности» спиральной структуры (368) 3.3. Основные трудности волновой теории спиральной структуры Линя и Шу (371) 3.4. Спиральная структура как неустойчивая мода дисковых галактик (378) 3.5. Гравитационная неустойчивость на периферии галактик (380) 3.6. Влияние резонансных звезд (382) 3.7. Другие механизмы генерации (397) 3.8. «Отстающий» характер спиральных рукавов (399) 3.9. Сравнение теории Линя и Шу с наблюдениями (405)	
§ 4. Другие приложения . . . . .	411
4.1. О критической массе колец Сатурна (411) 4.2. О законе планетных расстояний (413) 4.3. Изгиб плоскости Галактики (416) 4.4. Неустойчивости при столкновениях элементарных частиц (418)	
ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .	419
§ 1. Бесстолкновительное кинетическое уравнение и уравнение Пуассона в разных координатных системах . . . . .	419
§ 2. Отделение угловых переменных в задаче о малых возмущениях сферически-симметричных бесстолкновительных систем . . . . .	422
§ 3. Вывод дисперсионного уравнения для возмущений трехосного эллипсоида Фримана . . . . .	423
§ 4. Вывод характеристического уравнения для собственных частот эллипсоида вращения Фримана . . . . .	427
§ 5. ВКБ-решения уравнения Пуассона с учетом предэкспоненциальных членов и решение кинетического уравнения в постэпциклическом приближении . . . . .	432
5.1. Связь потенциала и поверхностной плотности (432) 5.2. Вычисление отклонка звездного диска на заданное возмущение потенциала (434)	
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	438

*Валерий Львович Поляченко,  
Алексей Максимович Фридман*

**РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ  
ГРАВИТИРУЮЩИХ СИСТЕМ**

Утверждено к печати  
Сибирским институтом  
земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн  
Сибирского отделения  
Академии наук СССР

Редактор *Е. М. Черкасов*

Редакторы издательства: *Э. С. Павлинова, В. П. Сироткина*

Художник *Т. К. Самигулин*

Художественный редактор *Т. П. Поленова*

Технические редакторы

*А. М. Сатарова, Л. Н. Золотухина*

Корректоры

*М. С. Бочарова, Р. П. Шаблеева*

Сдано в набор 1/X 1976 г.

Подписано к печати 29/XI 1976 г.

Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 2

Усл. печ. л. 39,2. Уч.-изд. л. 38,1. Тираж 2000 экз.

T-17789. Тип. зак. 4307

Цена 2 р. 53 к.

Издательство «Наука»

103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография издательства «Наука»

121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.