

И.Я. ПОМЕРАНЧУК

---

*Собрание  
научных  
трудов*

II

# И. Я. ПОМЕРАНЧУК

*Собрание научных трудов*

*в трех томах*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

# И. Я. ПОМЕРАНЧУК

*Собрание научных трудов*

## II

ФИЗИКА  
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ  
И СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1972

**Собрание научных трудов в трех томах. Померанчук И. Я. Физика элементарных частиц. Электромагнитные и слабые взаимодействия. Том II. Изд-во «Наука», 1972, стр. 296.**

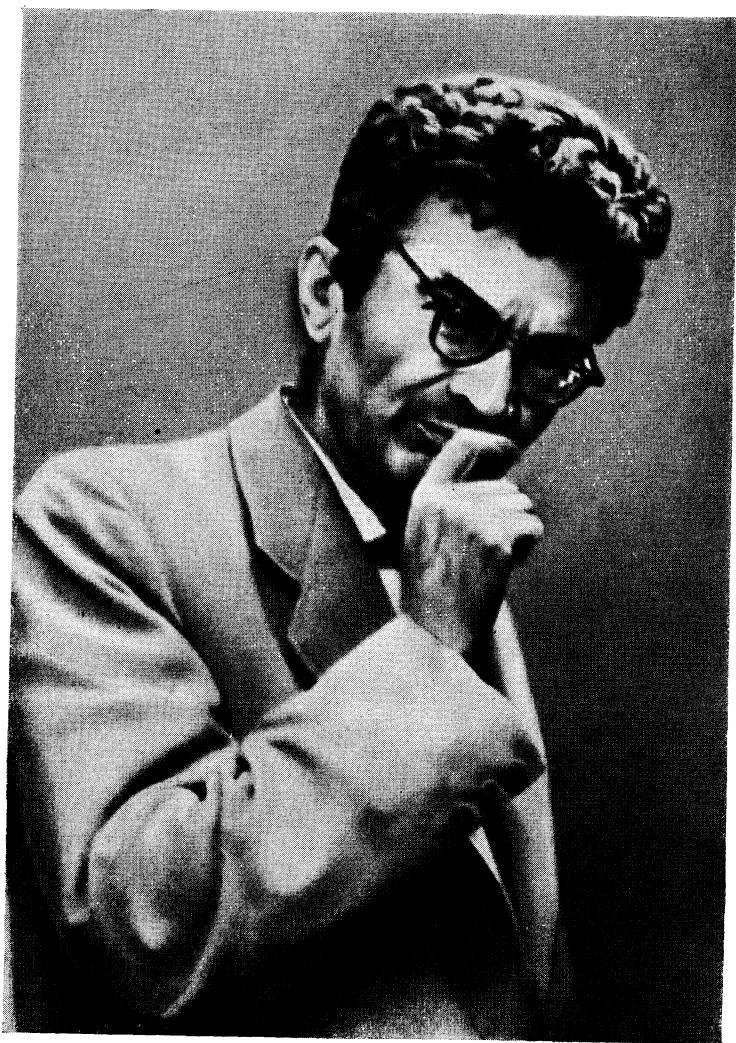
В собрание трудов выдающегося советского физика-теоретика академика И. Я. Померанчука включены почти все его научные статьи, опубликованные в различное время в отечественных и зарубежных периодических изданиях. Работы И. Я. Померанчука охватывают широкий круг физических вопросов, они содержат важные результаты в таких разделах современной физики, как физика элементарных частиц и ядерная физика, теория ядерных реакторов и теория твердых тел и жидкостей.

Во второй том вошли статьи по теории электромагнитных и слабых взаимодействий элементарных частиц.

Издание представляет значительный интерес для научных работников в области физики, инженеров-физиков, а также преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

**В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ** (ответственный редактор),  
**Б. Л. ИОФФЕ, И. Ю. КОБЗАРЕВ, Л. А. КОНДРАТЮК,**  
**Л. Б. ОКУНЬ**



ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ  
ПОМЕРАНЧУК

1964 г.

# I

## ТЕОРИЯ ФОТОНОВ, ЭЛЕКТРОНОВ И МЮОНОВ

---

33

### РАСSEЯНИЕ СВЕТА НА СВЕТЕ\*

*Совместно с А. Ахиезером и Л. Ландау*

В своей недавней статье Эйлер и Кокель<sup>1</sup> вычислили эффективное сечение для рассеяния света на свете. Вычисления были проведены для случая, когда малы частоты ( $\hbar\omega \ll mc^2$ ), взятые в системе отсчета, где суммарный импульс сталкивающихся квантов равен нулю.

Мы рассчитали поперечное сечение в противоположном случае больших частот ( $\hbar\omega \gg mc^2$ ). Для полного поперечного сечения было получено выражение вида

$$\sigma = \alpha x^4 \left( \frac{c}{\omega} \right)^4,$$

где  $\alpha = e^2/\hbar c$ , с постоянной  $a$ , вычисление которой затруднительно. Согласно Эйлеру и Кокелю,  $\sigma$  при малых частотах пропорционально  $\omega^6$ . Поэтому  $\sigma$  принимает максимальное значение в области  $\omega \sim mc^2$ .

Вычислить зависимость дифференциального поперечного сечения от угла рассеяния также затруднительно. Мы нашли, что при малых углах поляризация световых квантов не меняется. Дифференциальное сечение для малых углов равно

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2} \left( \frac{c}{\omega} \right)^2 \ln^4 \theta d\theta,$$

где  $\theta$  — угол рассеяния, а  $d\theta$  — элемент телесного угла. Эта

---

\* Nature, 1936, 138, 206. (См. перевод: Л. Д. Ландау. Собр. трудов, «Наука», 1969, т. 1, № 25.)

<sup>1</sup> Euler, Kockel. Naturwiss., 1935, 23, 246.

формула несправедлива для углов, существенно меньших, чем  $mc^2/\hbar\omega$ . В последнем случае вместо  $\theta$  под знаком логарифма следует подставить  $mc^2/\hbar\omega$ .

Относительная точность формулы составляет  $1/\ln \theta$ . Поперечное сечение возрастает с уменьшением угла, однако не очень быстро.

Поэтому нельзя утверждать, что эта область играет главную роль в интегральном сечении.

Детали вычислений будут опубликованы в другом месте<sup>1</sup>.

*Украинский физико-технический институт,  
Харьков*

---

<sup>1</sup> См. А. И. Ахиезер. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 263.— Прим. ред

## КОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ γ-ЛУЧЕЙ ЯДРАМИ\*

*Совместно с А. И. Ахиезером*

Рассматривается когерентное рассеяние γ-лучей ядрами, вытекающее из дираковской теории позитронов. Выводятся формулы для эффективного поперечника рассеяния.

В случае больших частот, удовлетворяющих соотношению  $\hbar\omega \gg mc^2$ , малые углы рассеяния играют исключительную роль. Именно дифференциальный поперечник для малых углов рассеяния обратно пропорционален квадрату угла рассеяния. Интегральный поперечник рассеяния имеет вид

$$\sigma = a\alpha^4 Z^4 \frac{c^2}{\omega^2} \log \frac{\hbar\omega}{mc^2},$$

где  $Z$  — атомный номер,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры и  $a$  — численный коэффициент, вычисление которого весьма затруднительно.

В случае малых частот, удовлетворяющих соотношению  $\hbar\omega \ll mc^2$ , интегральный поперечник рассеяния равен

$$\sigma = bZ^4 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^6 \frac{\omega^4}{c^4},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $b$  — неизвестный численный коэффициент.

Эффективный поперечник рассеяния имеет максимум при  $\hbar\omega \sim mc^2$ .

Из дираковской теории позитронов вытекает возможность когерентного рассеяния γ-лучей ядрами. Эта возможность осуществляется посредством образования фотоном в кулоновском поле ядра виртуальной пары, которая затем уничтожается с излучением другого фотона той же частоты. Разность импульсов первичного и вторичного фотонов передается при этом ядру.

Можно было бы думать, что при вычислении амплитуды вероятности рассматриваемого нами процесса методом теории возмущений имеет место следующая схема промежуточных состояний. Какой-либо электрон, находящийся в состоянии с отрицательной энергией, под влиянием фотона переходит в состояние с положительной энергией, затем испускает фотон, энергия которого равна энергии первого фотона, и переходит при этом в другое состояние с положительной энергией и, наконец, под влиянием кулоновского поля ядра возвращается в исходное состояние.

\* ЖЭТФ, 1937, 7, 567; Phys. Zs. Sowjet., 1936, 10, 649.



Эта схема промежуточных состояний дает для амплитуды вероятности выражение, пропорциональное третьей степени заряда электрона. В самом деле, с одной стороны, амплитуда вероятности содержит произведение трех матричных элементов возмущающей энергии электрона, соответствующих трем рассмотренным выше переходам, а возмущающая энергия, имеющая вид

$$V = -\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r} + \varepsilon(\alpha\mathbf{A} - A_0),$$

пропорциональна заряду электрона (в написанном выражении  $\varepsilon'$  означает заряд ядра,  $\mathbf{A}$  и  $A_0$  — векторный и скалярный потенциалы поля фотонов и  $\alpha$  — матрицы Дирака). С другой стороны, известно, что уравнение Дирака инвариантно по отношению к замене знака заряда электрона. С одинаковым правом мы можем считать, что отрицательные уровни энергии заняты как электронами, а позитронами, электроны же рассматривать как дырки в позитронном распределении. Из этой инвариантности уравнения Дирака следует, что все величины, которые могут быть наблюдаемы, должны быть не чувствительны к замене знака заряда электрона.

Амплитуда вероятности рассматриваемого нами процесса в силу когерентности рассеяния непосредственно связана с фазой рассеянной волны и является поэтому наблюдаемой величиной. Отсюда следует, что амплитуда вероятности не может содержать заряда электрона в третьей степени. Произведя вычисление по указанной выше схеме, мы должны, следовательно, получить нуль. Этот вывод и подтверждается расчетом.

Таким образом мы должны воспользоваться такой схемой промежуточных состояний, при которой имеет место не один переход электрона под влиянием поля ядра, а два перехода. Иначе говоря, когерентное рассеяние ядрами является эффектом четвертого приближения теории возмущений.

§ 1. Будем рассматривать всю совокупность электронов, находящихся в отрицательных состояниях, вместе с квантами как одну систему, характеризующуюся заданием импульсов электронов и чисел квантов. Нам необходимо вычислить вероятность перехода из состояния

$$0 \equiv \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, n_1(\mathbf{k}_1, \omega), n_3(\mathbf{k}_3, \omega)$$

в состояние

$$s \equiv \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, n_1 - 1(\mathbf{k}_1, \omega), n_3 + 1(\mathbf{k}_3, \omega),$$

где  $\mathbf{p}$  — импульсы электронов, находящихся в отрицательных состояниях, и  $n_1, n_3$  — числа квантов с импульсами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_3$  и частотой  $\omega$ . Амплитуда вероятности конечного состояния  $b_s$

выражается следующей, выведенной Вайскопфом, формулой:

$$b_s = \sum_{s', s'', s'''} \frac{V_{ss'} V_{s's''} V_{s''s'''} V_{s'''s''_0}}{E_{s's'} E_{s''s'''} E_{s'''s''_0}} e^{\frac{i}{\hbar} E_{s_0} t} - 1. \quad (1.1)$$

Здесь  $V_{s's''}$  означает матричный элемент возмущающей энергии без временного множителя, соответствующий переходу из состояния  $s'$  в состояние  $s''$ ;  $E_{s's''}$  — разность энергий в состояниях  $s'$  и  $s''$ . Суммирование распространяется на всевозможные промежуточные состояния системы  $s'$ ,  $s''$ ,  $s'''$ .

Возмущение  $V$  является суммой членов, каждый из которых представляет собой возмущающую энергию отдельного электрона. Последняя складывается из возмущения от фотонов и возмущения от ядра.

Возмущение от фотона  $V^{(p)}$  можно представить в виде

$$V^{(p)} = \varepsilon(\alpha\mathbf{A} - A_0) = i\varepsilon\gamma_4\boldsymbol{\gamma}A, \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}A$  означает четырехмерное произведение четырехмерного потенциала  $A_i(\mathbf{A}, iA_0)$  и четырехмерной матрицы  $\gamma_i$ ,  $\gamma_i$  суть эрмитовские матрицы, связанные с  $\alpha$  и  $\beta$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -i\beta\alpha_k, & k &= 1, 2, 3, \\ \gamma_4 &= \beta, \\ \gamma_k\gamma_l + \gamma_l\gamma_k &= 2\delta_{kl}I. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Заметим, что в дальнейшем под выражением вида  $ab$  мы будем понимать четырехмерное скалярное произведение четырехмерных векторов  $a_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$  и  $b_i(b_1, b_2, b_3, b_4)$ .

Считая пространство, в котором протекает явление, ограниченным и имеющим объем  $\Omega$ , запишем четырехмерный потенциал в виде

$$A_i = e_i \sqrt{\frac{\pi c^2}{\Omega}} (\zeta e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}\mathbf{r}} + \zeta^* e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (1.4)$$

Здесь  $k$  — импульс фотона и  $e_i$  — четырехмерная поляризация, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} e_i k_i &= ek = 0, \\ e_4 &= ie_0, & k_4 &= ik, \\ e^2 &= e^2 - e_0^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Переменная  $\zeta$ , входящая в (1.2), ответственна за те переходы, при которых число квантов  $n$  частоты  $\omega$  увеличивается на единицу. Отличный от нуля матричный элемент  $\zeta$  равен

$$\zeta_{n,n+1} = \sqrt{\frac{2(n+1)\hbar}{\omega}} e^{-i\omega t}. \quad (1.6)$$

Аналогичным образом переменная  $\zeta^*$ , ответственная за те переходы, при которых число квантов уменьшается на единицу,

имеет следующие отличные от нуля матричные элементы:

$$\xi_{n,n-1}^* = \sqrt{\frac{2\hbar n}{\omega}} e^{i\omega t}. \quad (1.6')$$

Возмущающая энергия электрона, происходящая от действия ядра  $V^{(n)}$ , имеет вид

$$V^{(n)} = -\frac{Ze^2}{r},$$

где  $Ze$  — заряд ядра.

Для удобства представим  $V^{(n)}$  в виде ряда Фурье

$$V^{(n)} = \sum_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{g}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{g} \mathbf{r}}, \quad (1.7)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{g}} = -\frac{4\pi\hbar^2 Ze^2}{\Omega |\mathbf{g}|^2}, \quad (1.8)$$

и суммирование производится по всем целочисленным векторам  $\mathbf{m}$ , связанным с  $\mathbf{g}$  соотношением

$$\mathbf{g} = \frac{2\pi\hbar\mathbf{m}}{\sqrt[3]{\Omega}}. \quad (1.8')$$

Переходя теперь к вычислению матричных элементов  $V_{ss'}$ , заметим, что переходы, при которых изменяется число квантов, происходят благодаря возмущению  $V^{(p)}$ , тогда как переходы без изменения числа квантов обязаны возмущению от ядра.

Напишем  $\psi$ -функцию системы электронов, необходимую для вычисления матричных элементов, в символическом виде:

$$\psi_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_1), & \psi_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{r}_2) \dots \\ \psi_{\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_1), & \psi_{\mathbf{p}_2}(\mathbf{r}_2) \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

где  $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$  — волновая функция отдельного электрона:

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}\mathbf{r} - Et) \right] u_{\mathbf{p}}, \quad (1.10)$$

$u_{\mathbf{p}}$  представляет собой четырехкомпонентную амплитуду плоской волны:

$$u_{\mathbf{p}}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1. \quad (1.11)$$

Легко показать, пользуясь (1.9), что матричные элементы

$$V_{ss'} = V_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \dots} \\ \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \dots \mathbf{n}'_1 \mathbf{n}'_2 \dots}$$

отличны от нуля в следующих случаях.

Если число квантов меняется, то  $V_{ss'}$  отлично от нуля лишь тогда, когда  $p_j' = p_j$  для всех индексов  $j$ , кроме одного какого-либо значения, и  $n_e' = n_e$  для всех  $e$ , кроме одного значения, для которого  $n' = n \pm 1$ . При этом мы имеем:

$$V_{\substack{p_1 p_2 \dots p_i n_1 \dots n_s \dots \\ p_1' p_2' \dots p_i' n_1 \dots n_s + 1 \dots}} = V_{\substack{p_i n_s \\ p_i' n_s + 1}}^{(p)} = i\varepsilon \sqrt{\frac{\pi c^2}{\Omega}} \sqrt{\frac{2\hbar(n_s + 1)}{\omega_s}} u_{p_i}^* \gamma_4 \gamma_e u_{p_i'} \quad (1.12)$$

$$V_{\substack{p_1 p_2 \dots p_i n_1 \dots n_s \dots \\ p_1' p_2' \dots p_i' n_1 \dots n_s - 1 \dots}} = V_{\substack{p_i n_s \\ p_i' n_s - 1}}^{(p)} = i\varepsilon \sqrt{\frac{\pi c^2}{\Omega}} \sqrt{\frac{2\hbar n_s}{\omega_s}} u_{p_i}^* \gamma_4 \gamma_e u_{p_i'} \quad (1.13)$$

$$-p_i - k_s + p_i' = 0.$$

Если числа квантов не меняются, то соответствующие матричные элементы, отличные от нуля, равны

$$V_{\substack{p_1 p_2 \dots p_i n_1 \dots n_s \dots \\ p_1' p_2' \dots p_i' n_1 \dots n_s \dots}} = V_{p_i p_i'}^{(n)} = -\frac{4\pi\hbar^3 Z e^2}{\Omega |g|^2} u_{p_i}^* u_{p_i'} \quad (1.14)$$

где

$$|g| = |p_i - p_i'|.$$

Для дальнейших вычислений перепишем (1.14) в следующем виде:

$$V_{\substack{p_1 p_2 \dots p_i n_1 \dots n_s \\ p_1 p_2 \dots p_i n_1 \dots n_s}} = i \frac{4\pi\hbar^3 Z e^2}{\Omega |g|^2} u_{p_i}^* \gamma_e u_{p_i'} \quad (1.15)$$

где

$$\gamma_e = i\gamma_4.$$

§ 2. Представив поле ядра в виде суммы плоских волн, которые для краткости будем называть псевдофотонами, мы можем при вычислении амплитуды вероятности когерентного рассеяния  $\gamma$ -лучей ядрами пользоваться следующей схемой промежуточных состояний. Электрон, находящийся в состоянии с отрицательной энергией, под действием фотона с импульсом  $\mathbf{k}_1$  переходит в состояние с положительной энергией; далее под влиянием псевдофотона с импульсом  $\mathbf{g}_2$  он переходит в другое состояние с положительной энергией. Излучив фотон с импульсом  $\mathbf{k}_3$  и псевдофотон с импульсом  $\mathbf{g}_4$ , электрон попадает в первоначальное состояние.

Таким образом, когерентное рассеяние  $\gamma$ -лучей ядрами можно описать как столкновение фотона  $\mathbf{k}_1$  с псевдофононом  $\mathbf{g}_2$ , в результате которого образуются фотон  $\mathbf{k}_3$  и псевдофотон  $\mathbf{g}_4$ . Поскольку при этом имеют место законы сохранения импульса и энергии и энергия псевдофотона равна нулю, то справедливы

следующие соотношения:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{g}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}_4, \quad (2.1)$$

$$|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_3|.$$

Вектор  $\Delta = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$  представляет собой импульс, переданный в процессе рассеяния ядру.

Чтобы вычислить амплитуду рассеяния  $\gamma$ -лучей ядрами  $b_s$ , достаточно вычислить амплитуду вероятности рассеяния фотона  $\mathbf{k}_1$  псевдофотоном  $\mathbf{g}_2$  и просуммировать затем ее по всем возможным импульсам псевдофотона  $\mathbf{g}_2$  (импульс псевдофотона  $\mathbf{g}_4$  определяется из закона сохранения (2.1)). Обозначив амплитуду вероятности рассеяния фотона  $\mathbf{k}_1$  псевдофотоном  $\mathbf{g}_2$  через  $b_g$ , мы можем, следовательно, написать

$$b_s = \int b_g \frac{\Omega d\mathbf{g}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2.2)$$

где  $d\mathbf{g} = dg_x dg_y dg_z$  и интегрирование совершается по всему пространству  $\mathbf{g}$ .

Амплитуда вероятности рассеяния фотона  $\mathbf{k}_1$  псевдофотоном  $\mathbf{g}_2$  может быть просто выражена через амплитуду вероятности рассеяния света светом<sup>1</sup>. В самом деле, мы имеем здесь те же промежуточные состояния, что и при рассеянии света светом, с той лишь разницей, что роль квантов с импульсами  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_4$  и частотами  $\omega_2$ ,  $\omega_4$  играют псевдокванты с импульсами  $\mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_4$  и частотами, равными нулю.

Амплитуда рассеяния света светом может быть представлена в виде

$$a_s = N_a \int f(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, e_1, e_2, e_3, e_4) d\mathbf{p}, \quad (2.3)$$

где  $N_a$  — нормировочный множитель,  $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$  — элемент пространства импульсов электрона и  $f$  — *Sprig* некоторой функции от матриц  $\gamma_i$ , импульса электрона  $\mathbf{p}$ , а также импульсов частот и поляризаций квантов  $\mathbf{k}_i$ ,  $\omega_i$ ,  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Если в этой формуле заменить  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_4$  соответственно на  $\mathbf{g}_2$ ,  $\mathbf{g}_4$ , положить частоты  $\omega_2$ ,  $\omega_4$  равными нулю (поскольку они относятся к псевдофотонам) и вместо четырехмерных поляризаций  $e_2$ ,  $e_4$  подставить  $(0, 0, 0, i)$  — поляризацию псевдофотона (1.15), то с точностью до нормировочного множителя мы и получим  $b_g$ .

Новый нормировочный множитель, которым мы должны заменить  $N_a$  для того, чтобы получить  $b_g$ , представляет собой произведение четырех множителей, входящих в состав матричных элементов (1.12), (1.13), (1.14), не содержащих волновых функций электрона  $u_p$ . Два из этих множителей должны быть

<sup>1</sup> A. Acheser. Phys. Zs. Sowjet., 1937, 11, 263.

взяты из матричных элементов, происходящих благодаря действию фотонов с импульсами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_3$  и частотой  $\omega$ , а два других — из матричных элементов возмущения, обусловленного действием ядра. Обозначая искомый нормировочный множитель в амплитуде  $b_g$  через  $N_b$ , можно, следовательно, написать:

$$N_b = ie \frac{\sqrt{\pi c^3}}{\Omega} \sqrt{\frac{2\hbar n_1}{\omega}} ie \sqrt{\frac{\pi c^3}{\Omega}} \sqrt{\frac{2\hbar (n_3 + 1)}{\omega}} i \frac{4\pi\hbar^2 Z e^2}{\Omega |\mathbf{g}_2|^2} i \frac{4\pi\hbar^2 Z e^2}{\Omega |\mathbf{g}_1|^2} = \frac{32\pi^3 Z^2 e^6 \hbar^5 c^2}{\Omega^3 \omega |\mathbf{g}_2|^2 |\mathbf{g}_1|^2}, \quad (2.4)$$

$$b_g^{(1)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_2)\{p-k_1-k_2\}_+ (e_3)\{p-k_1-k_2+k_3\}_+ (e_4)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p - \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)} \times \\ \times [(E_{p-k_1-k_2} + E_p + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)(E_{p-k_4} + E_p + \hbar\omega_1)]^{-1} \times \\ \times \frac{\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$b_g^{(2)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{-(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_4)\{p-k_1+k_4\}_- (e_2)\{p-k_3\}_+ (e_3)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p + \hbar\omega_1)(E_{p-k_1} + E_{p+k_2-k_3} + \hbar\omega_4)} \times \\ \times (E_{p-k_1} + E_p + E_{p-k_3} + E_{p+k_4-k_3} + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)^{-1} \times \\ \times \frac{\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$b_g^{(3)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{-(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_3)\{p-k_1+k_3\}_- (e_2)\{p-k_4\}_+ (e_4)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p + \hbar\omega_1)(E_{p-k_4} + E_p + \hbar\omega_4)} \times \\ \times (E_{p-k_1} + E_p + E_{p-k_4} + E_{p-k_1+k_3} + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)^{-1} \\ \times \frac{\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$b_g^{(4)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{-(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_2)\{p-k_1-k_2\}_+ (e_4)\{p-k_3\}_- (e_3)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p + \hbar\omega_1)(E_{p-k_1-k_2} + E_p + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)} \times \\ \times \frac{(E_{p-k_1-k_2} + E_{p-k_3} + \hbar\omega_4)^{-1} [\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1]}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$b_g^{(5)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{-(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_3)\{p-k_1+k_3\}_+ (e_4)\{p+k_2\}_- (e_2)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p + \hbar\omega_1)(E_{p-k_1} + E_{p+k_3} + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)} \times \\ \times \frac{(E_{p-k_1+k_3} + E_{p+k_2} + \hbar\omega_4)^{-1} [\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1]}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$b_g^{(6)} = \int N_b \sum_{\text{Perm}} \text{Spur} \frac{(e_1)\{p-k_1\}_+ (e_4)\{p+k_2-k_3\}_- (e_3)\{p+k_2\}_- (e_2)\{p\}_-}{16(E_{p-k_1} + E_p + \hbar\omega_1)(E_{p-k_1} + E_{p+k_2} + \hbar\omega_3 + \hbar\omega_4)} \times \\ \times \frac{(E_{p-k_1} + E_p + E_{p+k_2-k_3} + \hbar\omega_4)^{-1} [\exp[i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1]}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)} \frac{\Omega dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Таким образом,

$$b_g = N_b \left[ \int f(\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, e_1, e_2, e_3, e_4) d\mathbf{p} \right]_{\substack{\mathbf{k}_2=\mathbf{g}_2, \mathbf{k}_4=\mathbf{g}_4 \\ \omega_2=0, \omega_4=0}} \quad (2.5)$$

При вычислении амплитуды вероятности рассеяния света светом имеется шесть возможностей перехода системы электронов, причем каждое из промежуточных состояний, входящих в эти шесть возможностей, может осуществляться под действием любого из четырех квантов. Соответственно этим шести возможностям мы получаем шесть членов:  $b_g^{(1)}, b_g^{(2)}, b_g^{(3)}, b_g^{(4)}, b_g^{(5)}, b_g^{(6)}$ , которые в сумме дают  $b_g$ . Здесь символ  $\sum_{\text{Perm}}$  означает, что нужно произвести суммирование по 24 перестановкам индексов 1, 2, 3, 4 и затем положить

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{g}_2, \mathbf{k}_4 = \mathbf{g}_4, \omega_2 = \omega_4 = 0, \gamma e_2 = \gamma e_4 = i \gamma_4.$$

Символы  $\{p\}_{\pm}$  и  $(e)$  имеют следующее значение:

$$\begin{aligned} \{p\}_{\pm} &= c \frac{\gamma p + imc}{\pm E_p}, \\ p_4 &= i \frac{E_p}{c} = i \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}, \\ (e) &= \gamma e. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом амплитуда вероятности  $b_s$  состоит из  $6 \cdot 24 = 144$  членов. На основании соотношения (2.2) мы можем записать амплитуду вероятности в следующем виде:

$$\begin{aligned} b_s &= \text{const} \int \int f(\mathbf{p}, \mathbf{g}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3) \frac{\Omega d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\Omega d\mathbf{g}_2}{(2\pi\hbar)^3 |\mathbf{g}_2|^2 (\mathbf{g}_2 + \Delta)^2} \times \\ &\times \frac{\exp[i(\omega_3 - \omega_1)] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\text{const} = 32\pi^3 Z^2 \varepsilon^6 \hbar^5 c^2 / \Omega^3 \omega$  и  $f$  представляет собой сумму 144  $\text{Spr}'\text{ов}$ .

§ 3. При вычислении амплитуды вероятности рассеяния  $\gamma$ -лучей ядрами следует различать два случая: случай больших частот, когда  $k \gg mc$ , и случай малых частот, когда  $k \ll mc$ .

В этом параграфе мы будем рассматривать первый случай. При этом во всех членах можно пренебречь  $mc$ . Получающиеся выражения не представляется возможным проинтегрировать при любых углах рассеяния. Мы ограничимся поэтому рассмотрением малых углов рассеяния, которые, как показывают вычисления, имеют наиболее важное значение. Этот случай мы характеризуем следующими неравенствами:

$$k \gg \Delta \gg mc, \quad (3.1)$$

где  $\Delta = |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3|$ .

Рассматривая 144 члена, входящих в  $f(\mathbf{p}, \mathbf{g}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$  (см. формулу (2.7)), можно убедиться в том, что наиболее существенными являются следующие 12 членов, в знаменатели которых частоты фотонов входят с отрицательным знаком:

$$\frac{\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 - g_2\}_+ i\gamma_4 \{p + k_1\}_+ (e_1) \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{g}_2| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p}| - k)}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 + g_1\}_+ i\gamma_4 \{p + k_1\}_+ (e) \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}_1| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p}| - k)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + k_3 - k_1\}_- i\gamma_4 \{p - g_4\}_+ i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_1| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_4| - k)} \times \\ \times (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_4| - k)^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + k_3 - k_1\}_- i\gamma_4 \{p + g_2\}_+ i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_2| - k)} \times \\ \times (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_2| - k)^{-1}, \quad (3.5)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 + g_1\}_- i\gamma_4 \{p + k_1\}_+ e_1 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| + |\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}_1| - k)} \times \\ \times (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p}| - k)^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 - g_2\}_- i\gamma_4 \{p + k_1\}_+ (e_1) \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| + |\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{g}_2| - k)} \times \\ \times (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_1| + |\mathbf{p}| - k)^{-1}, \quad (3.7)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 - g_2\}_+ (e_1) \{p - g_4\}_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{g}_2| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{g}_2| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4| - k)}, \quad (3.8)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 + g_1\}_+ (e_1) \{p + g_2\}_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 + |\mathbf{g}_1| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}_1| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2| - k)}, \quad (3.9)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 + g_1\}_+ (e_1) \{p + g_2\}_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 + \mathbf{g}_1| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2| - k)}, \quad (3.10)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ i\gamma_4 \{p + k_3 - g_2\}_+ (e_1) (p - g_4)_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3 - \mathbf{g}_2| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4| - k)}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + g_2 - g_4\}_- i\gamma_4 \{p + g_2\}_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_4| - k)}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + g_2 - g_4\}_- i\gamma_4 \{p - g_4\}_- i\gamma_4 \{p\}_-}{16c^3 (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p}| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4| - k) (|\mathbf{p} + \mathbf{k}_3| + |\mathbf{p} - \mathbf{g}_4 + \mathbf{g}_2| - k)}. \quad (3.13)$$



В дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением шести членов (3.2), (3.4), (3.6), (3.8), (3.10) и (3.12), поскольку остающиеся члены отличаются от этих заменой  $\mathbf{g}_2$  на  $-\mathbf{g}_4$ . Поэтому при интегрировании членов (3.3), (3.5), (3.7), (3.9), (3.11), (3.13) по  $\mathbf{g}_4$  мы получим тот же результат, что и при интегрировании первых шести членов по  $\mathbf{g}_2$ .

Выберем потенциалы фотонов таким образом, чтобы скалярные потенциалы равнялись нулю. В этом случае имеют место следующие перестановочные соотношения:

$$(e_i)\gamma_4 = \gamma_4(e_i). \quad (3.14)$$

Пользуясь этими соотношениями, а также формулой

$$\gamma_4\{p\}_\pm = \{-p\}_\pm \gamma_4, \quad (3.15)$$

легко придать рассматриваемым нами членам следующий вид:

$$\frac{-\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+\{-p-k_3+g_2\}_+\{p+k_1\}_+(e_1)\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{g}_2|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1|+|\mathbf{p}|-k)}, \quad (3.16)$$

$$\frac{+\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+(e_1)\{p+k_3-k_1\}_-\{-p+k_1-k_3+g_2\}_+\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1|-k)} \times$$

$$\times (|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|+|\mathbf{p}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3-\mathbf{g}_2|+|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1|-k)^{-1}, \quad (3.17)$$

$$\frac{+\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+\{-p-k_1-g_2\}_-\{p+k_1\}_+(e_1)\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1|+|\mathbf{p}|-k)} \times$$

$$\times (|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|+|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1|+|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1+\mathbf{g}_2|-k)^{-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+\{-p-k_3+g_2\}_+(e_1)\{-p+k_1-k_3+g_2\}_-\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{g}_2|+|\mathbf{p}|-k)} \times$$

$$\times (|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{g}_2|+|\mathbf{p}-\mathbf{g}_2+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1|-k)^{-1}, \quad (3.19)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+\{-p-k_1-g_2\}_+(e_1)\{-p-g_2\}_-\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}+\mathbf{g}_2|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1+\mathbf{g}_2|+|\mathbf{p}+\mathbf{g}_2|-k)}, \quad (3.20)$$

$$\frac{-\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+(e_1)\{p+k_3-k_1\}_-\{-p-g_2\}_-\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}+\mathbf{g}_2|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1|-k)}, \quad (3.21)$$

причем здесь всюду положено

$$\mathbf{g}_4 = \mathbf{g}_2 + \Delta.$$

Рассматривая выражение (2.7) для амплитуды вероятности, мы видим, что знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль при  $\mathbf{g}_2 = 0$  и  $\mathbf{g}_2 = -\Delta$ . Однако при этих значениях  $\mathbf{g}_2$  сумма членов (3.16) — (3.21) обращается в нуль. Например, при  $\mathbf{g}_2 = 0$  мы имеем:

$$\frac{-\text{Spur}(e_3)\{p+k_3\}_+\{-p-k_3\}_+\{p+k_1\}_+(e_1)\{p\}_-}{16c^3(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_3|+|\mathbf{p}|-k)(|\mathbf{p}+\mathbf{k}_1|+|\mathbf{p}|-k)}, \quad (3.22)$$

$$\frac{+ \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + k_3 - k_1\}_- \{-p + k_1 - k_3\}_+ \{p\}_-}{16c^3 (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p + k_3 - k_1| - k)} \times \\ \times (|p + k_3| + |p| + |p - k_1 + k_3| + |p + k_3 - k_1| - k)^{-1}, \quad (3.23)$$

$$\frac{+ \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_1\}_- \{p + k_1\}_+ (e_1) \{p\}_-}{16c^3 (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k| + |p| - k)} \times \\ \times (|p + k_3| + |p| + |p + k_1| + |p + k_1| - k^{-1}) \quad (3.24)$$

$$\frac{- \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_3\}_+ (e_1) \{-p + k_1 - k_3\}_- \{p\}_-}{16c^3 (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p + k_3 - k_1| - k)}, \quad (3.25)$$

$$\times \frac{- \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_1\}_+ (e_1) \{-p\}_- \{p\}_-}{16c^3 (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_1| + |p| - k)}, \quad (3.26)$$

$$\frac{- \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ (e_1) \{p + k_3 - k_1\}_- \{-p\}_- \{p\}_-}{16c^3 (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p| - k) (|p + k_3| + |p + k_3 - k_1| - k)}. \quad (3.27)$$

Пользуясь легко доказываемыми на основании (1.3) формулами:

$$\{p\}_+ \{-p\}_- = 0, \quad (3.28)$$

$$\{p\}_\pm \{-p\}_\pm = 2 \{p\}_\pm i\gamma_4, \quad (3.29)$$

мы видим, что члены (3.23) и (3.24) равны нулю. Принимая во внимание формулу (3.15), можно преобразовать числители (3.22) и (3.26) к виду:

$$- \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ 2i\gamma_4 \{p + k_1\}_+ (e_1) \{p\}_- = \\ = - \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_1\}_+ 2i\gamma_4 (e_1) \{p\}_-, \quad (3.30)$$

$$- \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_1\}_+ (e_1) \{-p\}_- 2i\gamma_4 = \\ = - \text{Spur}(e_3) \{p + k_3\}_+ \{-p - k_1\}_+ (e_1) 2i\gamma_4 \{p\}_-, \quad (3.31)$$

откуда на основании (3.14) непосредственно следует, что сумма (3.30) и (3.31) равна нулю.

Аналогичным образом можно показать, что сумма (3.25) и (3.27) также равна нулю.

Точно так же доказывается, что сумма выражений (3.14) — (3.19) обращается в нуль при  $g_2 = -\Delta$ .

Таким образом, разложения суммы членов (3.16)... (3.21) вблизи  $g_2 = 0$  и  $g_2 = -\Delta$  не содержат нулевых членов. Что касается линейного члена, то при интегрировании он даст нуль; квадратичный же член не может дать особенности.

§ 4. Рассматривая выражение для амплитуды вероятности (2.7), где вместо  $f$  следует подставить сумму (3.16) — (3.21), мы непосредственно видим, что большие  $|g_2|$  не играют роли, так как при больших  $g_2$  ( $g_2 \gg p, k$ ) подынтегральная функция (2.7) убывает по крайней мере как  $1/g_2^5$ .

~~Аналогичное~~ обстоятельство имеет место и для больших

$p(p \gg k, g)$ . В самом деле при  $|\mathbf{p}| \gg k, g$  (3.16) — (3.21) принимают вид:

$$- \frac{\text{Spur}(e_1) \{p\}_+ \{-p\}_+ \{p\}_+ (e_1) \{p\}_-}{16c^3 \cdot 8 |\mathbf{p}|^3}, \quad (3.16')$$

$$+ \frac{\text{Spur}(e_2) \{p\}_+ (e_1) \{p\}_- \{-p\}_+ \{p\}_-}{16c^3 \cdot 16 |\mathbf{p}|^3}, \quad (3.17')$$

$$+ \frac{\text{Spur}(e_3) \{p\}_+ \{-p\}_- \{p\}_+ (e_1) \{p\}_-}{16c^3 \cdot 16 |\mathbf{p}|^3}, \quad (3.18')$$

$$- \frac{\text{Spur}(e_3) \{p\}_+ \{-p\}_+ (e_1) \{-p\}_- \{p\}_-}{16c^3 \cdot 16 |\mathbf{p}|^3}, \quad (3.19')$$

$$- \frac{\text{Spur}(e_3) \{p\}_+ \{-p\}_+ (e_1) \{-p\}_- \{p\}_-}{16c^3 \cdot 8 |\mathbf{p}|^3}, \quad (3.20')$$

$$- \frac{\text{Spur}(e_3) \{p\}_+ (e_1) \{p\}_- \{-p\}_- \{p\}_-}{16c^3 \cdot 8 |\mathbf{p}|^3}. \quad (3.21')$$

На основании формулы (3.28) легко видеть, что (3.17') и (3.18') обращаются в нуль. Члены же (3.16') и (3.20'), а также (3.19') и (3.21') сокращаются друг с другом, как это легко заключить, пользуясь формулой (3.29).

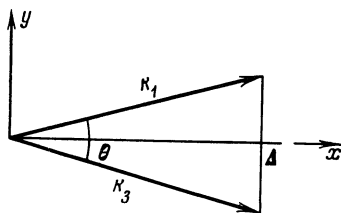
Заметим, что для доказательства того, что большие  $p$  не играют роли, нет необходимости пользоваться равенством нулю скалярных потенциалов фотонов. И при наличии последних часть интеграла, соответствующая большому импульсам  $p$ , равна нулю.

Как будет подтверждено результатом, наиболее существенными областями  $\mathbf{p}, \mathbf{g}$  в интеграле (2.7) являются следующие:

$$k \gg p, \quad g \cong \Delta \gg mc, \quad (4.1)$$

$$k \gg |\mathbf{k} - \mathbf{p}|, \quad g \gg mc. \quad (4.2)$$

Подстановкой  $\mathbf{k} - \mathbf{p} = \mathbf{q}$  мы приводим область (4.2) к (4.1); поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением области (4.1),



Выбирая координатные оси таким образом, как изображено на рисунке, мы имеем следующие разложения в области (4.1):

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}| &= |\mathbf{k}_3 - \mathbf{p}| = k - p_x, \\ |\mathbf{k}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{g}| &= k - p_x - g_x, \\ \{k_1 - p\}_\pm &= \pm \gamma_1 + i\gamma_4. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти разложения показывают, что подынтегральная функция в (2.7) не зависит от  $k$ . Вводя вместо  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{g}_2$  новые векторы  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\mathbf{p} = \Delta\eta, \quad \mathbf{g}_2 = \Delta\xi,$$

мы приводим (2.7) к виду

$$b_s = \text{const} \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{\Delta^6}{c^3\Delta^7} \int f(\xi, \eta, \mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) d\xi d\eta \frac{\exp [i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\Delta$ .

Интеграл, входящий в (4.4), не имеет нигде особых точек. Точное его вычисление оказывается невозможным ввиду сложности подынтегральной функции. Мы можем, однако, утверждать, что этот интеграл имеет вид

$$J = a_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_2 (\mathbf{n} \mathbf{e}_1) (\mathbf{n} \mathbf{e}_3), \quad (4.5)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — неизвестные численные коэффициенты.

Подставляя в (4.4) значение const, получим следующее выражение для амплитуды вероятности:

$$b_s = \frac{Z^2 e^6 \hbar^5 c^2}{\Omega^3 \omega} \frac{\Omega^2}{\hbar^6 \Delta c^3} J \frac{\exp [i(\omega_3 - \omega_1)t] - 1}{\hbar(\omega_3 - \omega_1)}. \quad (4.6)$$

Возводя  $b_s$  в квадрат, умножая на число состояний кванта  $\omega_3^2 \Omega d\omega_3 d\omega / (2\pi)^3 c^3$  ( $d\omega$  — элемент телесного угла кванта) и интегрируя по  $d\omega_3$ , получаем по разделению на  $t$  вероятность рассеяния ядрами в единицу времени

$$d\omega = \frac{Z^4 \varepsilon^{12}}{\hbar^4 c^5 \Omega \Delta^2} [a_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n})]^2 d\omega. \quad (4.7)$$

Деля  $d\omega$  на поток квантов, равный  $c/\Omega$ , получаем дифференциальный поперечник рассеяния  $d\sigma$ :

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{Z^4 \varepsilon^{12}}{\hbar^4 c^6 \Delta^2} [a_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) + a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n})]^2 d\omega = \\ &= Z^4 \alpha^6 \frac{\hbar^2}{\Delta^2} [a_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) + a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n})]^2 d\omega, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

Подставляя сюда вместо  $\Delta$   $k\theta$ , где  $\theta$  — угол рассеяния, имеем

$$d\sigma = Z^4 \alpha^6 \frac{\hbar^2}{k^2} [a_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) + a_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{n}) (\mathbf{e}_3 \mathbf{n})]^2 \frac{d\omega}{\theta^2}. \quad (4.9)$$

Эта формула показывает, что в случае малых углов рассеяния последнее происходит различно в зависимости от того, находятся ли поляризации в плоскости  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$  или в плоскости, перпендикулярной  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3)$ .

Ввиду быстрого возрастания  $d\sigma$  с уменьшением  $\theta$  малые углы рассеяния играют исключительную роль. Благодаря этому обстоятельству мы можем определить интегральный эффективный поперечник рассеяния с точностью до постоянного множителя. Заменим для этого в (4.8) элемент телесного угла  $d\Omega$  на  $2\pi \sin \theta d\theta \cong 2\pi \frac{\Delta d\Delta}{k^2}$  и проинтегрируем  $d\sigma$  по  $\Delta$ .

Так как при интегрировании мы получаем  $\log \Delta$ , то знание точных значений пределов интегрирования является несущественным. Поскольку при всех разложениях мы пренебрегали  $mc$ , за нижний предел интегрирования нужно взять  $\Delta$  порядка  $mc$ , за верхний предел в соответствии с условиями (3.1) мы возьмем  $k$ . В результате получаем выражение для интегрального поперечника рассеяния

$$\sigma = aZ^4 \alpha^6 \frac{\hbar^2}{k^2} \log \frac{k}{mc} = aZ^4 \alpha^6 \frac{c^2}{\omega^3} \log \frac{\hbar\omega}{mc^2}. \quad (4.10)$$

§ 5. Перейдем теперь к рассмотрению когерентного рассеяния ядрами при малых частотах, удовлетворяющих соотношению  $k \ll mc$ . Поскольку длина волны больше размеров рассеивающей системы, в данном случае имеет место дипольное рассеяние.

Как известно, эффективный поперечник для дипольного рассеяния пропорционален четвертой степени частоты. Имея в виду, что в нашем случае эффективный поперечник пропорционален  $Z^4 \epsilon^{12}$ , мы можем написать следующее выражение для  $\sigma$ :

$$\sigma = bZ^4 \left( \frac{\epsilon^2}{mc^2} \right)^6 \frac{\omega^4}{c^2},$$

где  $b$  — неизвестный численный коэффициент.

Заметим, что эту же формулу можно получить, разлагая амплитуду вероятности когерентного рассеяния  $b_s$  в ряд по степеням  $k/mc$ .

Сравнивая выражения для эффективного поперечника при больших и малых частотах, видим, что  $\sigma$  имеет максимум в области

$$\hbar\omega \cong mc^2.$$

Если считать постоянные  $a$  и  $b$ , входящие в формулы для эффективного поперечника, по порядку величины равными единице, то для максимального значения эффективного поперечника мы получим по порядку величины  $10^{-27} \text{ см}^2$ .

В заключение выражаем искреннюю благодарность профессору Л. Д. Ландау за указание темы и постоянное руководство работой.

ОБ УРОВНЯХ ЭНЕРГИИ СИСТЕМ С  $Z > 137^*$ 

Совместно с Я. Смородинским

Исследованы свойства атомных систем конечного радиуса с  $Z > 137$ . Показано, что для заряда  $Z = Z_{кр}$  энергия нижнего уровня системы становится равной  $-mc^2$ , что соответствует падению электронов на ядро. Приведена зависимость  $Z_{кр}$  от радиуса системы.

Как известно, уравнение Дирака для электрона в поле точечного заряда имеет дискретный энергетический спектр только в том случае, когда заряд меньше 137 (в единицах электронного заряда). В случае зарядов, больших 137, это уравнение не имеет стационарного решения для нижнего энергетического уровня ( $n = 0, l = 0$ ).

При  $Z = 137$  энергия, которая соответствует этому уровню, обращается в нуль, как видно из обычной формулы

$$W = mc^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{(n + \sqrt{1 - \gamma^2})^2} \right\}^{-1/2}.$$

Следует, однако, заметить, что такое критическое значение «137» имеет место только для точечного заряда. Представляет интерес исследовать поведение уровней энергии в системе с конечным радиусом. В этом случае исчезновение дискретных уровней энергии получается не для значения  $W = 0$ , как в случае точечного заряда. Напротив, с дальнейшим увеличением  $Z$  энергия нижнего дискретного уровня продолжает возрастать и достигает значения  $-mc^2$  для некоторого заряда  $Z$ , который назовем  $Z_{кр}$ . Только в том случае, если  $Z$  становится больше, чем  $Z_{кр}$ , первый дискретный уровень исчезает.

Такое поведение уровней энергии несвойственно электрически заряженной системе. Снайдер, Шифф и Вайнберг [1] показали, что значение нижнего уровня энергии электрона в прямоугольной потенциальной яме также становится равным  $-mc^2$ , если глубина ямы стремится к некоторой величине  $V_0$ . Дальнейшее увеличение глубины ямы приводит к тому, что этот уровень исчезает и переходит в непрерывный спектр (нижний континуум).

Для объяснения этого явления<sup>1</sup> предположим, что мы увеличиваем глубину ямы в отсутствие электрона. Если глубина ямы становится больше, чем  $V_0$ , в нижнем континууме (непре-

\* J. Phys. USSR, 1945, 9, 97. Перевод Г. А. Лобова.

<sup>1</sup> Такая интерпретация дана в работе Шиффа, Снайдера и Вайнберга.

рывный спектр с энергиями, меньшими —  $mc^2$ ), который заполнен электронами, появляется один незанятый уровень, возникающий из дискретного уровня. В этом случае незаряженный вакуум будет иметь один незанятый уровень, в то время как в отсутствие потенциальной ямы (или если глубина ямы меньше, чем  $V_0$ , или если заряд, как в нашем случае, меньше, чем  $Z_{кр}$ ) незаряженный вакуум есть вакуум, все уровни которого заняты.

Если поместить электрон в такую яму (или в поле такого заряда), то он перейдет на этот незанятый уровень, вакуум приобретает заряд —  $e$ , а электрон, так как это есть уровень ненаблюдаемого вакуума, перейдет в ненаблюдаемое состояние. Таким образом, результат состоит в исчезновении электрона и уменьшении заряда вакуума (или, иными словами, заряда нашей системы) на заряд одного электрона. Можно сказать, что произошло падение электрона на ядро<sup>1</sup>.

В этой работе мы приведем расчет величины  $Z_{кр}$  для данного конечного радиуса  $r_0$ . Имея в виду эту проблему, мы в первую очередь приведем решение уравнения Дирака именно для этого случая.

Решение уравнения Дирака мы исследуем для следующей простейшей модели с потенциалом

$$U = -\frac{Ze^2}{r_0} \quad \text{для } r < r_0$$

и

$$U = -\frac{Ze^2}{r} \quad \text{для } r > r_0.$$

Уравнение Дирака для радиальной волновой функции (умноженной на  $r$ ) электрона с угловым моментом  $l = 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dr} - \frac{1}{r} f_1 &= (-\kappa - w + u) f_2, \\ \frac{df_2}{dr} + \frac{1}{r} f_2 &= (-\kappa + w - u) f_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\kappa$ ,  $w$  и  $u$  — энергия покоя, полная и потенциальная энергия соответственно, измеренные в единицах  $\hbar c$ .

Легко видеть, что для малых  $r < r_0$  решения уравнений (1):

$$\begin{aligned} f_1 &= a \sin kr, \\ f_2 &= a \left( \cos kr - \frac{\sin kr}{kr} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $k^2 = (w - u)^2 - \kappa^2$  и  $a$  — константа.

Если выберем  $r_0$  достаточно малым, то мы можем положить

$$k^2 = \frac{\gamma^2}{r_0^2}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> В случае целого спина «падение» такого рода связано с комплексными собственными значениями. Уравнение Дирака не может иметь комплексных собственных значений, и в этом случае «падение» будет иметь столь специфический характер.

В этом приближении

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)_{r=r_0} = \operatorname{ctg} kr_0 - \frac{1}{kr_0} \approx \operatorname{ctg} \gamma - \frac{1}{\gamma}. \quad (4)$$

ведем обозначения:

$$\gamma = \frac{Z^2 e^2}{\hbar c}$$

и

$$\gamma \operatorname{ctg} \gamma - 1 = \zeta(\gamma), \quad (5)$$

тогда

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)_{r=r_0} = \gamma \zeta(\gamma). \quad (6)$$

Для значений  $r > r_0$ , но все еще малых, решения уравнений (1) имеют вид:

$$f_1 = b(r^{ig} + \beta r^{-ig}), \quad (7)$$

$$f_2 = \frac{b}{\gamma} [(1 - ig)r^{ig} + \beta(1 + ig)r^{-ig}],$$

где  $b$  и  $\beta$  — константы, последняя из которых может быть определена из условий непрерывности при  $r = r_0$ <sup>1</sup>, а  $g^2 = \gamma^2 - 1$ .

Из (7) имеем

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)_{r=r_0} = \gamma \frac{1 + \beta r_0^{-2ig}}{(1 - ig) + (1 + ig)\beta r_0^{-2ig}}. \quad (8)$$

Сравнивая равенства (6) и (8), получаем

$$\beta = -\frac{\zeta(\gamma)}{\zeta(\gamma)} \frac{(1 - ig) - 1}{(1 + ig) - 1} r_0^{2ig}. \quad (9)$$

Таким образом, для  $r < r_0$  (вблизи начала координат) волновые функции таковы:

$$f_1 = A \{ [1 - \zeta(\gamma)(1 + ig)] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{ig} - \text{к. с.} \}, \quad (10)$$

$$f_2 = A \left\{ \frac{1 - ig}{\gamma} [1 - \zeta(\gamma)(1 + ig)] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{ig} - \text{к. с.} \right\}.$$

Вместо функций  $f_1$  и  $f_2$  введем новые функции  $G_1$  и  $G_2$ , которые определяются равенствами [3]:

$$G_1 = f_1 \sin \frac{\varepsilon}{2} + f_2 \cos \frac{\varepsilon}{2}, \quad (11)$$

$$G_2 = -f_1 \sin \frac{\varepsilon}{2} + f_2 \cos \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $\varepsilon = \arccos W/mc^2$  (здесь  $W$  — энергия).

<sup>1</sup> Нормировка констант  $a$  и  $b$  для нас не важна, поэтому мы далее не будем определять этих констант.



Введем теперь новую переменную

$$x = 2 \left( 1 - \frac{W_1}{mc^2} \right)^{1/2} \frac{mc}{\hbar} r_0. \quad (12)$$

Для новых функций получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dx} + \frac{1}{x} G_2 &= -\frac{1}{2} G_1 + \frac{\gamma}{x \sin \varepsilon} (G_1 \cos \varepsilon - G_2), \\ \frac{dG_2}{dx} + \frac{1}{x} G_1 &= \frac{1}{2} G_2 + \frac{\gamma}{x \sin \varepsilon} (G_1 - G_2 \cos \varepsilon). \end{aligned} \quad (13)$$

Исключая из этих уравнений последовательно  $G_1$  и  $G_2$ , перейдем к уравнениям второго порядка:

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dG}{dx} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\gamma \operatorname{ctg} \varepsilon \pm \frac{1}{2}}{x} - \frac{1 - \gamma^2}{x^2} \right] G = 0, \quad (14)$$

где двойной знак ( $\pm$ ) во втором члене в квадратной скобке относится к двум уравнениям для  $G_1$  и  $G_2$  соответственно.

Если мы теперь положим

$$G = x^{-1/2} G', \quad (15)$$

то придем к уравнениям Уиттекера для функции  $G'$ :

$$\frac{d^2G'}{dx^2} + \left[ -\frac{1}{4} + \frac{\gamma \operatorname{ctg} \varepsilon \pm \frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{4}(1 - \gamma^2)}{x^2} \right] G' = 0. \quad (16)$$

Как показано в [2], решениями уравнений (16) являются функции Уиттекера:

$$G' = W_{ig, \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon \pm 1/2}(x). \quad (17)$$

Мы выбираем решение, которое убывает на бесконечности как  $e^{-x/2}$ . Второе решение уравнений (16) растет на бесконечности как  $e^{x/2}$  и не удовлетворяет условиям нашей задачи.

Используя разложение функции Уиттекера в ряд (для малых  $x$ ), из равенств (16) и (17) окончательно получаем:

$$\begin{aligned} G_1 &= C \left\{ \frac{\Gamma(-2ig)}{\Gamma(-ig - \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon)} x^{ig} + \text{к. с.} \right\}, \\ G_2 &= C \left( -1 + \frac{\gamma}{\sin \varepsilon} \right) \left\{ \frac{\Gamma(-2ig)}{\Gamma(-ig - \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon)} \cdot \frac{x^{ig}}{ig + \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \text{к. с.} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $C$  — новая константа нормировки.

Используя уравнения (11), можно также построить функции  $G_1$  и  $G_2$  непосредственно с помощью уравнений (10). Тогда сразу получим

$$G_1 = A \sin \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{1-ig}{\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right) [1 - \zeta(\gamma)(1+ig)] \left( \frac{r}{r_0} \right)^{ig} - \right. \\ \left. - \text{к. с.} \right\}, \quad (19)$$

и аналогичное выражение можно получить для  $G_2$ <sup>1</sup>.

Очевидно, что с точностью до нормировочных констант функции (18) и (19) должны быть тождественны. Это и есть то самое условие, которое определяет уровни энергии.

Хотя  $G_2$  и может быть получено из  $G_1$  с помощью (13), тем не менее достаточно сравнивать только выражения для  $G_1$ .

Преобразуя различные члены в фигурных скобках равенств (18) и (19), можно получить следующее уравнение:

$$\operatorname{Re} \frac{[1 - \zeta(\gamma)(1-ig)] \left( 1 + \frac{1+ig}{\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma(-2ig) x_0^{ig}}{\Gamma(-ig - \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon)} = 0, \quad (20)$$

где в соответствии с равенством (12)

$$x_0 = 2 \left( 1 - \frac{W}{mc^2} \right)^{1/2} \frac{mc}{\hbar} r_0. \quad (21)$$

Уравнение (20) для данного  $r_0$  определяет значения энергетических уровней рассматриваемой системы.

Для рассматриваемой нами проблемы существенны только уровни энергии системы, близкие к  $-mc^2$ . В этом случае уравнение (21) можно упростить. Поскольку  $\operatorname{ctg} \varepsilon$  очень большая (и отрицательная) величина, мы можем использовать асимптотическое разложение  $\Gamma$ -функции (формула Стирлинга) и тогда

$$\arg \Gamma(-ig - \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon) = -g \lg(-\gamma \operatorname{ctg} \varepsilon) = -g \lg \frac{\gamma W/mc^2}{(1 - W/mc^2)^{1/2}}.$$

Вычисляя аргумент выражения, стоящего под знаком  $\operatorname{Re}$  в (20), путем подстановки  $\operatorname{ctg} \varepsilon/2 = 0$  (так как, если  $W \approx -mc^2$ ,  $\varepsilon \approx \pi$ ) и используя очевидное соотношение

$$\arg \Gamma(-2ig) = \frac{\pi}{2} + \arg \Gamma(1 - 2ig),$$

<sup>1</sup> При постановке уравнений (18) и (19) в (13) полезно использовать следующие соотношения:

$$\frac{+\gamma + (1-ig) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}}{-\gamma + (1-ig) \operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}} = \frac{1 + \gamma/\sin \varepsilon}{-ig + \gamma \operatorname{ctg} \varepsilon} = \frac{ig - \gamma/\operatorname{tg} \varepsilon}{\gamma/\sin \varepsilon - 1}.$$

получим

$$g \lg \gamma \frac{2mcr_0}{\hbar} \frac{|W|}{mc^2} + \arg \Gamma(1 - 2ig) + \operatorname{arctg} \frac{g\zeta(\gamma)}{1 - \zeta(\gamma)} = n\pi \quad (22)$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Отметим, что из уравнения (20) следует двойной знак ( $\pm$ ) перед членом  $n\pi$ . Однако для данного  $r_0$  различные знаки соответствуют значениям  $g$ , которые также отличаются только знаком. Поскольку знак величины  $g$  остается неопределенным (в задачу входит только  $g^2$ ), мы сохраним только один знак минус и будем рассматривать, таким образом  $g$  как положительную величину. Значение  $n = 0$  необходимо исключить, так как в этом случае мы получаем дискретный уровень с отрицательной энергией для  $n = 0$  ( $Z = 137$ ), которая стремится к  $-\infty$ , если  $r \rightarrow 0$ . Тем не менее можно показать, что точные уравнения не имеют дискретных уровней с отрицательной энергией даже в случае точечного заряда.

Полагая теперь в формуле (22)  $|W| = mc^2$  и  $U = 0$ , получим уравнение для величины критического заряда для данного «радиуса» ядра  $r_0$ , иначе говоря для минимального заряда, в поле которого первый энергетический уровень переходит в нижний континуум:

$$\lg \gamma_{\text{кр}} \frac{2mcr_0}{\hbar} = \frac{1}{g_{\text{кр}}} \left[ - \operatorname{arctg} \frac{g_{\text{кр}}\zeta(\gamma_{\text{кр}})}{1 - \zeta(\gamma_{\text{кр}})} - \arg \Gamma(1 - 2ig_{\text{кр}}) - \pi \right]. \quad (23)$$

Для очень малых значений  $r_0$  ( $r_0 \ll \hbar/2mc$ ) уравнение (23) может быть записано в приближенном виде

$$g_{\text{кр}} = - \frac{\pi}{\lg \frac{2mcr_0}{\hbar}}. \quad (24)$$

Таким образом, в случае ядра конечного радиуса исчезновение дискретных уровней (и падение электронов) ожидается не для  $Z = 137$ , а для больших значений заряда, которые определяются уравнением (23). Например, для значения  $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$  см  $Z_{\text{кр}} = 200$ , для  $r_0 = 8 \cdot 10^{-13}$  см  $Z_{\text{кр}} = 175$ .

В заключение авторы выражают благодарность профессору Л. Ландау за интересные обсуждения в связи с рассмотренной проблемой.

Академия наук СССР

Получено 25 мая 1944 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg. Phys. Rev., 1940, 57, 315.
2. E. T. Whittaker, G. N. Watson. A Course of Modern Analysis, 4th ed., Ch. XVI. Cambridge, 1935.
3. В. А. Фок. Начала квантовой механики. Л., КУБУЧ, 1932, стр. 239.

## ПРАВИЛА ОТБОРА ПРИ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ\*1

Аннигиляция свободных электронов и позитронов была рассмотрена Дираком [1], который вычислил эффективное сечение аннигиляции с испусканием двух квантов. Полученное Дираком эффективное сечение является средним значением сечения, усредненным по взаимным ориентациям спина электрона и позитрона. Если не производить такого усреднения, то можно легко обнаружить, что в случае параллельных ориентаций спинов электрона и позитрона, когда суммарный спиновый механический момент равен единице, сечение двуквантовой аннигиляции стремится к нулю, когда относительная скорость позитрона и электрона стремится к нулю.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим дираковскую амплитуду вероятности  $a_2$  двуквантовой аннигиляции, считая импульсы электрона и позитрона равными нулю:

$$a_2 = \frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega \Omega} e^2 \left\{ \frac{(u_0^* \alpha e u') (u'^* \alpha e u)}{E_0 - E'} + \frac{(u_0^* \alpha e u'') (u''^* \alpha e u)}{E_0 - E''} \right\}, \quad (1)$$

где  $\Omega$  — объем, в который заключена система;  $e$  и  $\epsilon$  — поляризации испущенных квантов; энергия квантов равна  $mc^2$ ;  $u_0$  — спиновая функция покоящегося электрона;  $u$  — спиновая функция покоящегося позитрона;  $E_0$  — начальная энергия системы ( $E_0 = mc^2$ );  $E'$  — энергия промежуточного состояния, возникающего после испускания кванта с поляризацией  $e$ :

$$E' = 2mc^2 \pm \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 k^2} = 2mc^2 \pm \sqrt{2} mc^2 = 2mc^2 + w'$$

( $k$  — импульс кванта).

Опуская постоянный множитель, стоящий перед фигурными скобками, имеем

$$a_2 \sim - \frac{(u_0^* \alpha e u') (u'^* \alpha e u)}{w'} - \frac{(u_0^* \alpha e u'') (u''^* \alpha e u)}{w''}.$$

\* Докл. АН СССР, 1948, 60, 213. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 5 февраля 1948 г.)

<sup>1</sup> Результаты, изложенные в настоящей заметке, доложены в октябре 1947 г. на теоретическом семинаре в Физическом институте Академии наук СССР.

Совершаем обычные преобразования, учитывая при этом, что у двух испущенных квантов импульсы противоположны:

$$\begin{aligned} a_2 &\sim -\frac{1}{w'^2} (u_0^* \alpha e w' u') (u'^* \alpha \epsilon u) - \frac{1}{w''^2} (u_0^* \alpha \epsilon w'' u'') (u'' \alpha e u) = \\ &= -\frac{1}{2m^2 c^4} \{ u_0^* \alpha e (c \mathbf{k} + mc^2 \beta) \alpha \epsilon u + u_0^* \alpha \epsilon (-c \mathbf{k} + mc^2 \beta) \alpha e u \} = \\ &= -\frac{1}{2m^2 c^4} u_0^* \{ -c \mathbf{k} [(\alpha e)(\alpha \epsilon) - (\alpha \epsilon)(\alpha e)] - 2e \epsilon mc^2 \beta \} u. \end{aligned}$$

Так как  $\beta$  не связывает состояния с положительной и отрицательной энергией, то остается только первый член:

$$a_2 \sim u_0^* \alpha \mathbf{k} [(\alpha e)(\alpha \epsilon) - (\alpha \epsilon)(\alpha e)] u. \quad (2)$$

Ввиду того что оба кванта двигаются противоположно друг другу, достаточно рассмотреть два случая, когда поляризации  $e$  и  $\epsilon$  параллельны и перпендикулярны друг другу. Когда  $e$  параллельно  $\epsilon$ ,  $a_2$  исчезает. Если  $e$  и  $\epsilon$  перпендикулярны, то  $a_2$  приводится к виду

$$a_2 \sim u_0^* (\alpha \mathbf{k})(\alpha e)(\alpha \epsilon) u. \quad (3)$$

Векторы  $\mathbf{k}$ ,  $e$  и  $\epsilon$  в этом случае могут быть выбраны вдоль трех координатных осей:

$$a_2 \sim u_0^* \alpha_x \alpha_y \alpha_z u \sim u_0^* \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} u. \quad (4)$$

Согласно [2] мы видим, что  $a_2$  не исчезает только в том случае, когда сумма спинов равна нулю. Когда спины электрона и позитрона параллельны друг другу,  $a_2$  равна нулю. Таким образом, двухквантовая аннигиляция медленных позитронов осуществляется только в том случае, когда позитроны сталкиваются с электроном, имеющим спин, противоположный спину позитрона.

После ознакомления с изложенными выше результатами Л. Д. Ландау была доказана общая теорема [3], согласно которой два противоположно летящих кванта не могут находиться в состоянии с моментом количества движения, равным единице.

В применении к аннигиляции электронов и позитронов теорема Ландау не только приводит иным способом к (4), но и строго запрещает двухквантовую аннигиляцию в состоянии с общим моментом электрона и позитрона, равным единице (даже тогда, когда относительная скорость не равна нулю).

Невозможность двухквантовой аннигиляции у электрона и позитрона с общим моментом, равным единице, имеет важное значение при рассмотрении свойств позитрония атома, в котором

в качестве ядра находится позитрон. Такой позитроний будет благодаря аннигиляции обладать конечным временем жизни.

Аннигиляция электрона и позитрона в позитронии практически будет происходить только в  $S$ -состояниях, так как в других состояниях вероятность обнаружить электрон вблизи позитрона будет очень мала. В  $S$ -состояниях момент системы совпадает со спиновым моментом. Если спиновый момент позитрония равен нулю (парапозитроний), то возможна двухквантовая аннигиляция. Если спиновый момент равен единице (ортопозитроний), двухквантовая аннигиляция строго запрещена и может происходить только трехквантовая аннигиляция, вероятность которой в несколько сотен раз меньше двухквантовой аннигиляции. Таким образом должны существовать два сорта позитрониев, по-разному распадающихся.

1. Парапозитроний, распадающийся двухквантовым образом с временем жизни, равным  $\tau_0 = 1,25 \cdot 10^{-10}$  сек:

$$\frac{1}{\tau_0} = 4 \{ \sigma(v) v \}_{v \rightarrow 0} |\psi(0)|^2 = 4\pi \left( \frac{r_e^2}{mc^2} \right)^2 c \frac{m^3 e^6}{8\pi \hbar^6} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^5 \frac{mc^2}{\hbar}. \quad (5)$$

Здесь  $4\sigma(v)$  — сечение двухквантовой аннигиляции и позитрона, имеющих общий спиновый момент, равный нулю;  $\sigma(v)$  — усредненное по спинам сечение аннигиляции, вычисленное Дираком; 4 учитывает статистические веса состояний с моментом 0 и 1;  $\psi(0)$  — значение волновой функции позитрония в начале координат в основном состоянии;  $v$  — скорость.

2. Ортопозитроний, распадающийся трехквантовым образом и живущий значительно дольше, чем парапозитроний. Время жизни ортопозитрония в основном состоянии, согласно Е. М. Лифшицу [4], равно  $8,8 \cdot 10^{-8}$  сек, т. е. в 700 раз больше, чем время жизни парапозитрония.

Свойства позитрония были рассмотрены Д. Иваненко и А. Соколовым [5], которые, однако, приводят неправильные формулы для вероятности образования позитрония и не замечают того, что ортопозитроний не может распадаться двухквантовым образом. Поэтому приведенная ими цифра  $5 \cdot 10^{-10}$  сек не имеет отношения ко времени жизни позитрония. Та же цифра повторяется и в [6].

В заключение я хочу поблагодарить академика Л. Д. Ландау за интересное обсуждение результатов, изложенных в настоящей заметке.

Академия наук СССР

Получено 30 января 1948 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *P. A. M. Dirac*. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1930, 26, 361.
2. *В. Гайтлер*. Квантовая теория излучения. М., Гостехиздат, 1940, стр. 102.
3. *Л. Ландау*. Докл. АН СССР, 1948, 60, 207.
4. *Е. Лифшиц*. Докл. АН СССР, 1948, 60, 211.
5. *Д. Иваненко, А. Соколов*. Вестн. Моск. гос. ун-та, 1947, № 6, 3.
6. *Д. Иваненко, А. Соколов*. Докл. АН СССР, 1947, 58, 1329.

## ВРЕМЯ ЖИЗНИ МЕДЛЕННЫХ ПОЗИТРОНОВ\*

При определении времени жизни медленных позитронов иногда исходят из формулы (см. [1, стр. 225])

$$\tau = 1/NZ\sigma v, \quad (1)$$

где  $N$  — число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ,  $Z$  — атомный номер,  $\sigma$  — сечение аннигиляции позитрона и электрона,  $v$  — скорость позитрона. Однако при этом не учитывается отталкивание, которое испытывает позитрон, находящийся внутри атома, и благодаря которому медленный позитрон не может проникнуть внутрь атома и аннигилировать с внутренними электронами. Область атома, доступная позитрону, зависит от энергии, при которой происходит аннигиляция.

Как известно [1, стр. 241], почти все позитроны сначала замедляются до очень малых энергий, а потом аннигилируют. Ионизационное замедление позитрона прекращается тогда, когда его энергия оказывается порядка нескольких электрон-вольт. При этих энергиях расположены низшие энергетические уровни позитрона в конденсированных телах. Такой порядок величины низших уровней определяется величиной кулоновской энергии позитрона, находящегося между атомами кристалла. Таким образом в конденсированных телах позитроны аннигилируют, имея кинетическую энергию порядка нескольких электрон-вольт. В этих условиях позитрон может аннигилировать только с самыми наружными электронами атома, так как все остальные электроны находятся в таких местах, куда позитрон с энергией в несколько электрон-вольт не сможет проникнуть. Отталкивательный потенциал достигает значения порядка нескольких электрон-вольт уже на самом «краю» атома. Следует учесть, что вероятность нахождения электрона вблизи позитрона будет несколько повышена из-за притяжения между ними<sup>1</sup>. Поэтому если написать  $\tau$  в виде

$$\tau = 1/N\sigma v Z_e, \quad (2)$$

то  $Z_e$ , будучи порядка единицы, должно, по-видимому, быть больше единицы.

\* ЖЭТФ, 1949, 19, 183.

<sup>1</sup> Это соображение высказано А. Д. Сахаровым.

Сравнивая (1) и (2), мы видим, что время жизни позитрона определяется не числом электронов в  $1 \text{ см}^3$ , а числом ядер и зависит не от  $Z$ , а от структуры самой наружной электронной оболочки. В свинце  $\tau$  составляет не  $0,5 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$  [1], а по порядку величины равно  $10^{-9} - 10^{-8} \text{ сек}$ .

Изложенные соображения имеют прямое отношение к углам между двумя аннигиляционными квантами. Отступление этих углов от  $\pi$  вызвано импульсами относительного движения. Так как наружные электроны и позитрон в момент аннигиляции имеют импульсы порядка  $mc/137$ , то отклонение квантов от  $\pi$  должно быть меньше одного градуса. Это соответствует данным Власова и Цирельсона [2]. Заметим, что при аннигиляции на внутренних электронах получились бы значительно большие отклонения углов от  $\pi$ .

Переходя к замедлению позитронов в газах, необходимо определить время замедления позитронов, когда их энергия недостаточна для совершения ионизации или возбуждения атомов. Замедление при этом происходит путем упругих столкновений позитронов с атомами (молекулами). Учитывая, что энергия поляризационных сил

$$U \sim -e^2 a^3 / r^4 \quad (3)$$

( $a^3$  — объем атома) быстро падает с возрастанием  $r$ , при малых энергиях позитрона получается постоянное эффективное сечение рассеяния порядка квадрата размеров атома  $a$ :  $\sigma_s \sim \pi a^2$ . Теряемая в  $1 \text{ сек}$  энергия равна

$$-dE/dt = NvE(m/M)\sigma_s \quad (4)$$

( $M$  — масса атома,  $m$  — масса позитрона). Отсюда получаем время замедления до энергии  $E$

$$t = M/mvN\sigma_s. \quad (5)$$

Отношение (5) к времени аннигиляции (2) равно

$$t/\tau \approx (M/2m) [Z_e(\sigma v)/v\sigma_s] = \text{const } v^{-1}.$$

Если  $M/2m$  порядка  $10^5$ , то время замедления до тепловых энергий оказывается меньше, чем  $\tau$  (или сравнимо с ним). Таким образом позитроны в газах аннигилируют после замедления почти до тепловых энергий. Поэтому все предыдущие соображения относительно углов между аннигиляционными квантами применимы также и к газам.

Академия наук СССР

Получено 2 декабря 1948 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения. М., Гостехиздат, 1940.
2. Н. А. Власов, Э. А. Цирельсон. Докл. АН СССР, 1948, 59, 879.



## ОБ ЭЛЕКТРОНАХ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ЗАХВАТЕ $\mu$ -МЕЗОНОВ НА АТОМНЫЕ УРОВНИ\*

*Совместно с В. Л. Иоффе*

При захвате отрицательных  $\mu$ -мезонов легкими атомами в фотопластинках, по-видимому, оже-электроны в заметном числе не наблюдаются [1, 2]. (В фотопластинках могут быть замечены электроны с энергией, большей 15 кэв.)

Это обстоятельство не вызывало бы особого удивления, если бы не наличие у  $\mu$ -мезона в кулоновском поле метастабильного уровня  $2s$ . Действительно, отношение вероятностей оже-перехода  $\mu$ -мезона из непрерывного спектра в дискретный (или внутри дискретного спектра) и радиационного перехода в том случае, когда переход носит дипольный характер, имеет вид

$$\frac{W_{\text{оже}}}{W_{\text{рад}}} = 8 \left( \frac{m}{\mu} \right)^3 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left( \frac{\mu c^2}{E} \right)^3 \frac{mc}{\sqrt{2mE}} Z^3 \quad (1)$$

и оказывается значительно меньшим единицы при энергиях вылетающего электрона  $E > 15$  кэв. Наличие же метастабильного уровня  $2s$ , казалось бы, должно было привести к появлению заметного числа оже-электронов, так как вероятность захвата  $\mu$ -мезона на этот уровень не может быть очень малой, а, попав на уровень  $2s$ ,  $\mu$ -мезон способен перейти на уровень  $1s$  только при помощи испускания оже-электрона большой энергии из-за сильного запрета при радиационном  $2s \rightarrow 1s$  переходе.

Здесь, однако, необходимо иметь в виду следующее. Из-за конечности размеров ядра, вырожденные в чистом кулоновском поле уровня  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  (мы считаем спин  $\mu$ -мезона равным  $1/2$ ), смещаются, так что уровень  $2s_{1/2}$  оказывается расположенным выше  $2p_{1/2}$  и появляется возможность оже-перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$  с вылетом оже-электронов малой энергии ( $\sim 50$  эв). Оценим вероятность оже-перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$  и сравним ее с вероятностью оже-перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ , при котором вылетают оже-электроны больших энергий. (Вероятность радиационного перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$  значительно меньше вероятности такого же оже-перехода, и поэтому мы ее не рассматриваем.)

Смещение уровня из-за конечных размеров ядра дается формулой

$$\Delta E = \left( -e\varphi + \frac{Ze^2}{r} \right)_{\text{cp}} = \int \left( -e\varphi + \frac{Ze^2}{r} \right) |\psi_{\mu}(\mathbf{r})|^2 dV,$$

\* ЖЭТФ, 1952, 23, 123.

где  $\varphi$  — потенциал внутри ядра, а  $\psi_\mu$  — волновая функция мезона. Очевидно, что смещение будет заметным лишь для уровня  $2s$ , но не  $2p$ . Считая ядро равномерно заряженным шаром радиуса  $R \approx 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/2}$  см, для смещения уровня  $2s_{1/2}$  получим

$$\Delta E = \frac{2\pi}{5} Z e^2 R^2 |\psi_\mu(0)|^2 = \frac{1}{20} \frac{Z e^2 R^2}{a_\mu^3}, \quad (2)$$

причем  $a_\mu = \hbar^2/\mu Z e^2$ . Для  $Z = 6$   $\Delta E = 65$  эв, так что энергетически возможным будет являться выброс оже-электрона только из внешних электронных оболочек атома.

Матричный элемент оже-перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$  можно записать в виде

$$M = \int \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Psi_p^*(\mathbf{r}') \Psi_s(\mathbf{r}') \chi_f^*(\mathbf{r}) \chi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (3)$$

где  $\Psi_s(\mathbf{r}')$  и  $\Psi_p(\mathbf{r}')$  — волновые функции мезона в состояниях  $2s_{1/2}$  и  $2p_{1/2}$  соответственно,  $\chi_i(\mathbf{r})$  — начальная и  $\chi_f(\mathbf{r})$  — конечная волновые функции электрона. В качестве  $\chi_i$  возьмем волновую функцию последнего внешнего электрона, который будем предполагать находящимся в  $s$ -состоянии:

$$\chi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \quad (4)$$

( $a = \hbar^2/m e^2$ ), а в качестве конечной волновой функции электрона возьмем плоскую волну:  $\chi_f = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  (можно показать, что использование плоской волны вместо кулоновской функции не изменит сильно наши результаты). Беря для  $\Psi_p(\mathbf{r}')$  и  $\Psi_s(\mathbf{r}')$  волновые функции Паули для состояний  $2p_{1/2}$  и  $2s_{1/2}$ , найдем для матричного элемента выражение

$$M = 12i \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{e^2 a_\mu}{k a^{3/2}} \left( 1 - \frac{\arctg ka}{ka} \right),$$

и для вероятности оже-перехода  $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{1/2}$

$$W_{2s \rightarrow 2p} = 96 \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{1}{Z^2 a k} \left[ 1 - \frac{\arctg ka}{ka} \right]^2 \frac{m c^2}{\hbar}. \quad (5)$$

Аналогичным образом для вероятности оже-перехода  $2s \rightarrow 1s$  с испусканием электрона большой энергии находим

$$W_{2s \rightarrow 1s} = \frac{2^4}{3^{23} 2} \left( \frac{m}{\mu} \right)^{7/2} \frac{m e^4}{\hbar^3}. \quad (6)$$

Для  $Z = 6$  имеем  $W_{2s \rightarrow 2p} = 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ , а  $W_{2s \rightarrow 1s} = 2,4 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$ , и, следовательно, переход с испусканием мягких оже-электронов будет заметно преобладать.

Настоящий расчет, конечно, не свободен от произвола в связи с неопределенностью, возникающей при выборе начальной

волновой функции вылетающего электрона. Нужно, однако, заметить, что правильный учет этого обстоятельства, по-видимому, приведет к увеличению вероятности испускания мягких оже-электронов. В самом деле, из-за втягивания внешнего электрона внутрь атома (т. е. в область более сильного потенциала) волновая функция его уже не будет иметь вида (4), а будет (по модулю) больше этой величины. Далее, кроме учитываемого нами одного внешнего электрона может происходить также вылет некоторых внутренних электронов. Оба эти обстоятельства могут привести к заметному увеличению вероятности испускания мягких оже-электронов.

Таким образом мы приходим к выводу, что наличие метастабильного уровня не приведет к появлению заметного числа жестких оже-электронов.

Мы весьма благодарны М. И. Подгорецкому за интересные обсуждения затронутых выше вопросов.

Академия наук СССР

Получено 25 мая 1944 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. Braun, U. Camerini, K. Pouzll и др. Усп. физ. наук, 1949, 38, 526.
2. W. Fry. Phys. Rev., 1951, 83, 594.

О СПЕКТРЕ  $\mu$ -МЕЗОВОДОРОДА\*

Совместно с А. Д. Галаниным

Рассмотрим отрицательный  $\mu$ -мезон, захваченный протоном на одну из своих орбит. Время жизни такой системы достаточно велико для того, чтобы можно было наблюдать ее спектр, так как оно определяется временем жизни свободного  $\mu$ -мезона, т. е.  $2 \cdot 10^{-6}$  сек.

Радиус нормальной орбиты такого «атома» будет меньше, чем комптоновская длина волны электрона. Известно, что кулоновское поле протона на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона искажено так называемой поляризацией электронно-позитронного вакуума [1]. Поэтому можно ожидать, что в спектре мезоводорода должна наблюдаться «тонкая структура», причем расщепление уровней должно быть порядка  $\alpha = 1/137$  от энергии основного состояния, в то время как «обычная» тонкая структура является эффектом порядка  $\alpha^2$  (для электрона ввиду больших размеров его орбиты смещение уровней из-за поляризации вакуума есть эффект порядка  $\alpha^3$  и составляет только 3% ламбовского смещения).

Пусть  $\varphi_0(q)$  есть фурье-компонента внешнего потенциала. Согласно [2], этот потенциал индуцирует в вакууме поляризационный потенциал, равный

$$\varphi_p(q) = -\frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{4\kappa^2 + 2q^2}{3q^2} \left( 1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) - \frac{1}{9} \right] \varphi_0(q), \quad (1)$$

где  $\kappa$  — обратная комптоновская длина волны электрона;  $q^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$ , где  $\omega$  — частота и  $\mathbf{k}$  — волновой вектор внешнего потенциала, и  $4\kappa^2 \sin^2 \theta = q^2$ , откуда

$$\frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\sqrt{4\kappa^2 - q^2}}{q} \arcsin \frac{q}{2\kappa}.$$

Если  $\varphi_0(\mathbf{r})$  не зависит от времени ( $\omega = 0$ ), то

$$\varphi_p(\mathbf{k}) = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \frac{4\kappa^2 - 2\mathbf{k}^2}{3\mathbf{k}^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{4\kappa^2 - \mathbf{k}^2}}{|\mathbf{k}|} \operatorname{Arsh} \frac{|\mathbf{k}|}{2\kappa} \right) + \frac{1}{9} \right] \varphi_0(\mathbf{k}). \quad (2)$$

Так как для кулоновского поля заряда  $eZ$  имеем

$$\varphi_0(\mathbf{k}) = \frac{eZ}{2\pi^2 \mathbf{k}^2},$$

\* Докл. АН СССР, 1952, 86, 251. (Представлено академиком Л. Д. Ландау 14 июля 1952 г.)

то переходя затем к координатному представлению и интегрируя по углам, получаем

$$\varphi_p(r) = \frac{2e\alpha Z}{r\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{4x^2 - 2k^2}{3k^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{4x^2 + k^2}}{k} \operatorname{Arsh} \frac{k}{2x} \right) + \frac{1}{9} \right] \frac{\sin kr}{k} dk. \quad (3)$$

Отсюда для изменения энергии  $i$ -го уровня имеем

$$\Delta E_i = - \frac{2e^2\alpha Z}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{4x^2 - 2k^2}{3k^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{4x^2 + k^2}}{k} \operatorname{Arsh} \frac{k}{2x} \right) + \frac{1}{9} \right] \frac{dk}{k} \int \frac{\sin kr}{r} |\psi_i(r)|^2 dr. \quad (4)$$

Относя изменение энергии  $\Delta E$  к энергии основного уровня,  $E_0 = e^2 Z^2 / 2r_0$ , где  $r_0$  — радиус нормальной орбиты  $\mu$ -мезона в мезоводороде, и вводя  $r_0/Z$  как единицу длины, получаем

$$\frac{\Delta E_{nl}}{E_0} = - \frac{4\alpha}{3\pi^2} \int_0^\infty f(x) I_{nl}(2\epsilon x) dx, \quad (5)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \left\{ (1 - 2x^2) \left( 1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \operatorname{Arsh} x \right) + \frac{x^2}{3} \right\},$$

$$I_{nl}(k) = \int_0^\infty y \sin ky R_{nl}^2(y) dy,$$

$R_{nl}(y)$  — нормированная радиальная функция. Коэффициент  $\epsilon$  равен

$$\epsilon = \frac{m_e}{m_\mu \alpha Z},$$

где  $m_\mu$  — приведенная масса  $\mu$ -мезона,  $m_e$  — масса электрона.

Для первых уровней имеем

$$I_{10}(k) = \frac{16k}{(4+k^2)^2}, \quad I_{20}(k) = \frac{k(1-3k^2+2k^4)}{(1+k^2)^4},$$

$$I_{21}(k) = \frac{k(1-k^2)}{(1+k^2)^4}.$$

Подставив  $I_{nl}(2\epsilon x)$  в (5) и произведя приближенное интегрирование, получим смещение уровня в электрон-вольтах для различных  $Z$  (всегда отрицательное) (см. таблицу).

	$Z = 1$	$Z = 6$	$Z = 30$
1 S	1,8	320	20 000
2 S	0,2	47	3 200
2 P	0,014	27	2 500

Расщепление уровня  $n = 2$  для  $Z = 1$  составляет  $0,19 \text{ эв}$ , что примерно в 25 раз больше, чем «обычная» тонкая структура (в предположении, что  $\mu$ -мезон имеет спин  $1/2$  и подчиняется уравнению Дирака).

Смещение уровней  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  при  $Z \sim 6$  уже сейчас имеет экспериментальный интерес. При захвате  $\mu$ -мезона легким ядром в фотопластинке имеется заметная вероятность того, что мезон окажется на уровне  $2S_{1/2}$ . Переход с него на основной уровень запрещен и может осуществляться только с вылетом электронов Оже с энергией порядка  $70 \text{ кэв}$ . Экспериментально таких электронов Оже не наблюдается [3].

Объяснение заключается, вероятно, в том, что из-за конечных размеров ядра уровень  $2S_{1/2}$  поднимается приблизительно на  $60 \text{ эв}$ , а положение уровня  $2P_{1/2}$  не изменяется [4]. Тогда возможен переход с вылетом мягких электронов Оже (не наблюдаемых в фотопластинке) и последующий оптический переход на основное состояние.

Рассмотренное здесь явление уменьшает разницу  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$  до  $40 \text{ эв}$ , что еще достаточно для указанного объяснения отсутствия жестких электронов Оже.

Величина сдвига уровней при  $Z = 30$  приведена лишь для иллюстрации того, как по мере уменьшения размеров орбиты и втягивания ее внутрь поляризованной области вокруг точечного ядра перестает играть роль ее форма.

Разница в сдвиге уровней с различными  $n$  медленно уменьшается по мере увеличения  $Z$ .

Если существуют другие, кроме электрона, заряженные частицы, масса которых заметно меньше, чем масса  $\mu$ -мезона, то все они должны внести свой вклад в поляризацию вакуума и сдвиг уровней  $\mu$ -мезона. В частности, могут измениться количественные выводы о расстоянии между уровнями  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  в легких ядрах, что могло бы увеличить вероятность жестких электронов Оже при захвате  $\mu$ -мезона. Поэтому экспериментальное наблюдение тонкой структуры и смещения уровней в рассматриваемых спектрах, а также измерение вероятности появления жестких электронов Оже при захвате легким ядром  $\mu$ -мезона представило бы не только весьма интересное подтверждение выводов современной квантовой электродинамики, но явилось бы и средством проверки возможных гипотез о существовании других легких заряженных частиц, кроме электрона и позитрона.

Академия наук СССР

Получено 11 июня 1952 г.

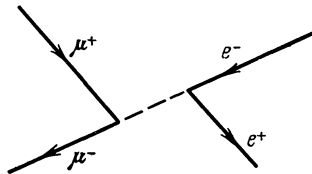
#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Serber. Phys. Rev., 1935, 48, 49;  
E. A. Uehling. Phys. Rev., 1935, 48, 55.
2. R. P. Feynman. Phys. Rev., 1949, 76, 769.
3. W. Fry. Phys. Rev., 1951, 83, 599.
4. Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 1952, 23, 123 (Собр. трудов, № 38.)

## ОБРАЗОВАНИЕ $\mu$ -МЕЗОННОЙ ПАРЫ ПРИ АННИГИЛЯЦИИ ПОЗИТРОНА\*

Совместно с В. В. Берестецким

Если  $\mu$ -мезонам несвойственно какое-либо специфическое взаимодействие, более существенное, чем электромагнитное, то экспериментальное исследование электродинамических процессов с участием  $\mu$ -мезонов может дать важные сведения о границах применимости современной теории поля и характере физических закономерностей вблизи этой границы, так как комптоновская длина волны  $\mu$ -мезона сравнима с теми размерами, вблизи которых можно ожидать коренных изменений в пространственно-временных понятиях<sup>1</sup>. Одним из таких процессов может служить превращение электронно-позитронной пары в пару  $\mu$ -мезонов (см. рисунок). Минимальная энергия  $E_n$ , необходимая позитрону для образования такой пары при столкновении с покоящимся электроном, составляет  $E_n = (2\mu/m)\mu c^2 \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ эв}$  ( $\mu$  — масса  $\mu$ -мезона,  $m$  — масса электрона). Этот процесс, как



и двуквантовая аннигиляция, является, в смысле теорий возмущений, процессом второго порядка. Эффективное сечение  $\sigma$  выражается следующим образом:

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} \frac{e^4}{mc^2 E} \left(1 + \frac{E_n}{2E}\right) \left(1 - \frac{E_n}{E}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

Вблизи порога реакции ( $E - E_n \ll E_n$ )

$$\sigma = (\pi/2)(e^2/\mu c^2)^2 [1 - (E_n/E)]^{1/2}.$$

\* ЖЭТФ, 1955, 29, 864.

<sup>1</sup> И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005; 104, 51 (Собр. трудов, № 61, 62).

При  $E \gg E_n$

$$\sigma = (\pi/3) (e^2/\mu c^2)^2 (E_n/E).$$

Максимальное сечение (при  $E \approx 1,5 E_n$ ) составляет на атом

$$\sigma_{\max} \approx 0,6Z(e^2/\mu c^2)^2 \approx Z \cdot 10^{-30} \text{ см}^2.$$

Оно приблизительно в 20 раз меньше, чем сечение двухфотонной аннигиляции  $\sigma_\gamma$  при таких энергиях:

$$\sigma_\gamma = Z(\pi e^4/mc^2 E) \ln(2E/mc^2) \approx Z(e^2/\mu c^2)^2 \ln(4\mu^2/m^2).$$

Сведения, о которых упоминалось выше, содержались бы в отклонении опытных данных от формулы (1).

Академия наук СССР

Получено 29 сентября 1955 г.



ПРОХОЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
 ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО. КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ.  
 МАГНИТОТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

---

41

**МАКСИМАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ,  
 КОТОРУЮ МОГУТ ИМЕТЬ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ  
 ПЕРВИЧНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ  
 ИЗ-ЗА ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗЕМНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ\***

Первичные электроны космических лучей, попадая в земное магнитное поле, не только отклоняются в нем (широтный эффект), но и теряют энергию на излучение в силу своего движения с ускорением. Для того чтобы это излучение могло быть описано с помощью классической электродинамики, необходимо, чтобы расстояние  $L$ , на котором сильно меняется лоренцово сокращенное поле, было бы большим по сравнению с  $\frac{\hbar}{mc} \frac{E}{mc^2}$  [1] (множитель  $E/mc^2$ , где  $E$  — энергия, появляется при переходе в систему координат, в которой электрон покоится). В земном магнитном поле таким расстоянием  $L$  является длина порядка радиуса Земли  $R$ . При энергиях электронов  $E$ , удовлетворяющих неравенству

$$E \leq mc^2 \frac{R}{(\hbar/mc)} \sim 10^{-6} \frac{10^8}{10^{-11}} = 10^{13} = 10^{25} \text{ эв},$$

квантовые эффекты в рассматриваемом излучении не играют роли. Расчет, основанный на классической электродинамике, показывает, что излучаемое излучение играет заметную роль, начиная с энергий в  $10^{16}$  эв, что значительно ниже тех энергий, при которых могут играть роль квантовые эффекты.

Согласно классической электродинамике, уравнение движения электрона с приближенным учетом силы лучистого трения имеет вид [2]

$$m \frac{dU_i}{dS} = -\frac{e}{c} F_{ik} U_k + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \frac{d^2 U_i}{dS^2} + U_i \left( U_k \frac{d^2 U_k}{dS^2} \right) \right\}, \quad (1)$$

\* ЖЭТФ, 1939, 9, 915; J. Phys. USSR, 1940, 2, 65.

где  $U_i$  — четырехмерная скорость,  $m$  — покоящаяся масса электрона,  $e$  — его заряд,  $c$  — скорость света,  $dS$  — дифференциал собственного времени. Как известно, смысл имеют только такие решения уравнения (1), которые могут быть получены методом последовательных приближений, рассматривая в первом приближении только лоренцову силу. Из уравнения (1) получаются следующие выражения для скорости изменения импульса и кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{c} \left( \mathbf{E} + \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \right) + \frac{2e^2}{3c^3(1-\beta^2)} \left\{ \mathbf{V} + \frac{3\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})}{(1-\beta^2)c^2} + \frac{\mathbf{V}}{c^2(1-\beta^2)} \left[ (\mathbf{V}\mathbf{V}) + \frac{3(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})^2}{c^2(1-\beta^2)^2} \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dE}{dt} = e(\mathbf{V}\mathbf{E}) + \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})}{(1-\beta^2)^2} + 3 \frac{(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})^2}{c^2(1-\beta^2)^3} \right), \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле. Дифференцирование по времени обозначается точкой над соответствующей величиной.

Применим уравнения (2) и (3) к движению электронов в земном магнитном поле. Из (2), учитывая только лоренцову силу, получаем:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{m} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right], \quad \ddot{\mathbf{V}} = \frac{e^2}{m^2} (1-\beta^2) \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \right]. \quad (4)$$

Подставляем (4) в (3)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2 \frac{1}{1-\beta^2} = -\frac{2}{3} r_0^2 c \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2 \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2. \quad (5)$$

Ниже будет показано, что поправка в  $\dot{\mathbf{V}}$  и  $\ddot{\mathbf{V}}$ , связанная с лоренцовым трением, мала. Из (5) видно, что потеря энергии электрона в магнитном поле Земли растет пропорционально квадрату энергии электрона. Поэтому при очень больших энергиях электронов рассматриваемое излучение играет существенную роль.

Магнитное поле Земли с большой степенью точности можно аппроксимировать полем диполя

$$\mathbf{B} = \frac{M\mathbf{r}^2 - 3\mathbf{r}(\mathbf{M}\mathbf{r})}{r^5},$$

где  $\mathbf{M}$  — вектор магнитного момента Земли,

$$\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2 = \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right]^2 r^4 - 6r^2 \left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right] \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{r} \right] \right) (\mathbf{M}\mathbf{r}) + 9 \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{r} \right]^2 (\mathbf{M}\mathbf{r})^2}{r^{10}}.$$

Как мы увидим, излучение в магнитном поле Земли становится существенным при таких энергиях, при которых широтный эффект не играет никакой роли. Поэтому траекторию электрона

мы можем считать прямой линией (см. рисунок)

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} r_0^2 c \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \times$$

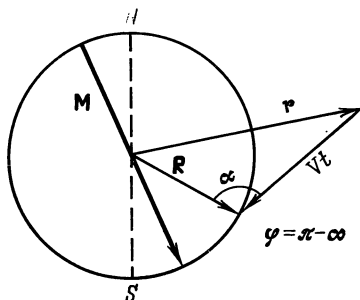
$$\times \left\{ \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^4 \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right]^2 - 6(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^2 \left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right] \left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right] (\mathbf{M}, \mathbf{R} - \mathbf{V}t) \right) \right)}{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^{10}} + \right.$$

$$\left. + 9 \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right]^2 (\mathbf{M}, \mathbf{R} - \mathbf{V}t)^2}{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^{10}} \right\},$$

$$\int_{E_0}^{E_g} \frac{dE}{E^2} = -\frac{2}{3} \frac{cr_0^2}{m^2 c^4} \int_{-\infty}^0 dt \left\{ \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right]^2}{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^7} - 6 \frac{\left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right] \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right] \right) (\mathbf{M}, \mathbf{R} - \mathbf{V}t)}{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^8} + \right.$$

$$\left. + 9 \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right]^2 (\mathbf{M}, \mathbf{R} - \mathbf{V}t)^2}{(\mathbf{R} - \mathbf{V}t)^{10}} \right\},$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{V}t$ ,  $E_0$  — энергия электрона на большом расстоянии от Земли,  $E_g$  — энергия электрона на поверхности Земли.



Произведя интегрирование, получаем:

$$\frac{1}{E_g} - \frac{1}{E_0} = \frac{2M^2 r_0^2}{3R^6 m^2 c^4} \left\{ \left[ \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right]^2}{M^2} - 6 \frac{\left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right] \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right] \right) (\mathbf{M}\mathbf{R})}{R^2 M^2} \right] \times \right.$$

$$\times \frac{3\varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi}{8 \sin^5 \varphi} + 6 \frac{\left( \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{M} \right] \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right] \right) (\mathbf{M}\mathbf{V})}{R c M^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\cos \varphi}{48 \sin^7 \varphi} (15\varphi - 15 \cos \varphi \sin \varphi - 10 \cos \varphi \sin^3 \varphi - 8 \cos \varphi \sin^5 \varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6} \right] + 9 \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right]^2 (\mathbf{M}\mathbf{R})^2}{384 M^2 R^4 \sin^9 \varphi} (105\varphi - 105 \cos \varphi \sin \varphi - 70 \cos \varphi \sin^3 \varphi -$$

$$- 48 \cos \varphi \sin^5 \varphi - 56 \cos \varphi \sin^7 \varphi) - 18 \frac{\left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{R} \right]^2 (\mathbf{M}\mathbf{R}) (\mathbf{M}\mathbf{V})}{R^3 M^2 c} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{\cos \varphi}{384 \sin^9 \varphi} (105 \varphi - 105 \cos \varphi \sin \varphi - 70 \cos \varphi \sin^3 \varphi - \right. \\ & - 56 \cos \varphi \sin^5 \varphi - 48 \cos \varphi \sin^7 \varphi) - \frac{1}{8} \left. \right] + 9 \left[ \frac{V}{c} R \right]^2 (MV)^2 \frac{1}{M^2 c^2 R^2} \times \\ & \times \left[ \frac{15 \varphi - 15 \cos \varphi \sin \varphi - 10 \cos \varphi \sin^3 \varphi + 8 \cos \varphi \sin^5 \varphi - \frac{1}{4}}{48 \sin^7 \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{2 \cos^2 \varphi - 1}{384 \sin^9 \varphi} (105 \varphi - 105 \cos \varphi \sin \varphi - 70 \cos \varphi \sin^3 \varphi - \right. \\ & \left. - 56 \cos \varphi \sin^5 \varphi - 48 \cos \varphi \sin^7 \varphi) \right] \} = \frac{1}{E_c}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(RV)}{RV}, \\ E_c &= \frac{3}{2} \frac{m^2 c^4 R^5}{r_0^2 M^2} \frac{1}{\Phi \left( \left( \frac{V}{c} M \right); \left( \frac{V}{c} R \right) \right)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Phi$  — функция от углов, заключенная в фигурные скобки в (6). Величина скорости  $V$  может быть заменена на скорость света  $c$  в интересующей нас области энергий, что и сделали в (6). Из (6) получаем

$$E_g = \frac{E_0 E_c}{E_0 + E_c}. \quad (8)$$

При  $E_0 \ll E_c$  энергия на поверхности Земли практически не отличается от  $E_0$ . Излучение в магнитном поле Земли играет малую роль. При  $E_0 > E_c$  энергия на поверхности Земли остается равной  $E_c$ , т. е. излучается весь избыток энергии электрона над  $E_c$ . Таким образом рассматриваемое нами излучение приводит к тому, что максимальная энергия первичных электронов космических лучей, поступающих в атмосферу, не может быть больше определенной критической энергии  $E_c$ . Эта критическая энергия зависит от геомагнитной широты и от угла падения электрона в соответствии с (7) и (6). Определим величину  $E_c$ :

$$\begin{aligned} M &= 8 \cdot 10^{25} \text{ (см. работу [3]),} \\ E_c &= \frac{3}{2} \frac{0,64 \cdot 10^{-12} \cdot 1293 \cdot 6 \cdot 10^{10}}{64 \cdot 10^{30} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \Phi} = \frac{1,3 \cdot 10^3}{\Phi} = \frac{8 \cdot 10^1 \text{ эв}}{\Phi}. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, в плоскости магнитного экватора (геомагнитная широта  $90^\circ$ ) при вертикальном падении электронов  $\Phi = 1/3$

$$E_c = 4 \cdot 10^{17} \text{ эв.}$$

При энергиях такого порядка отклоняющее действие магнитного поля Земли очень мало, и поэтому траекторию электрона можно считать с достаточной степенью точности прямой линией, что и было сделано в (6).

Вследствие излучения в магнитном поле Земли спектр поступающих в атмосферу первичных электронов оканчивается при энергиях порядка  $10^{17}$  эв. Оже с сотрудниками [4] наблюдали, по-видимому, легкие частицы с энергией в  $10^{14}$  эв.

Рассмотренная нами граница лежит не слишком далеко от этой цифры.

Возникает вопрос, существует ли аналогичная граница для энергий первичных квантов из-за образования ими пар в земном магнитном поле. Можно думать, что эта граница будет значительно выше, чем граница для электронов, а именно что она будет при таких энергиях квантов, при которых преобразованное поле в системе координат, где  $\hbar\omega' \ll mc^2$ , будет сравнимо с критическим полем, приводящим к образованию пар:

$$\frac{\hbar\omega}{mc^2} B \sim \frac{mc^2}{e(\hbar/mc)}, \quad \hbar\omega_{\text{крит}} \sim \frac{m^3c^5}{eB\hbar} \sim \frac{10^{-81} \cdot 10^{52}}{10^{-10} 10^{-27}} \sim 10^8 \sim 6 \cdot 10^{19} \text{ эв.}$$

В заключение докажем, что поправки  $\dot{V}$  и  $\ddot{V}$ , связанная с лущистым трением, мала.

Рассмотрим сперва ситуацию в той системе координат, где электрон в данный момент времени покоится. В этой системе все величины снабжаются штрихами:

$$m \frac{dU'_i}{dt'} = \frac{e}{c} F'_{i4} U'_4 + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2 U'_i}{dt'^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Первое приближение

$$\frac{d^2 U'_i}{dt'^2} = \frac{e}{c} \frac{U'_4}{m} \frac{dF'_{i4}}{dt'} + \frac{eF'_{i4}}{mc} \frac{dU'_4}{dt'} = \frac{eU'_4}{mc} \frac{dF'_{i4}}{dt'}.$$

Отношение лоренцова трения к лоренцовой силе

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3 F'_{i4}} \frac{dF'_{i4}}{dt'} \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3 F'_{i4}} \frac{F'_{i4}}{\tau'} \sim \frac{r_0 E}{c\tau mc^2} \sim \frac{r_0}{R} \frac{E}{mc^2},$$

где  $\tau$  — время (в земной системе), за которое поле заметно меняется. В интересующей нас области энергий это отношение значительно меньше единицы. В системе координат, где электрон в данный момент покоится, лоренцово трение значительно меньше, чем лоренцова сила. Так как, однако, эти две силы не параллельны друг другу, то отношение между ними не лоренц-инвариантно и зависит от системы координат. В частности, в земной системе координат лоренцово трение оказывается больше лоренцовой силы при тех энергиях электронов, которые нас интересуют. Существенным для нас, очевидно, является сравнение не сил, а ускорений, вызываемых этими силами (поскольку ускорениями определяется излучение). Легко показать, что поправка в ускорениях, вызываемая лоренцовым трением, оказывается ничтожной при

$E \sim E_c$ . Подставим в (2) вместо  $\dot{\mathbf{V}}$  такое выражение:

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{e \sqrt{1-\beta^2}}{m} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] + \mathbf{W}. \quad (10)$$

Для  $\mathbf{W}$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{m\mathbf{W}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{m\mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{W})}{c^2(1-\beta^2)^{3/2}} &= \frac{2e^4}{3m^2c^4} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] + \frac{2e^4\mathbf{V}}{3m^2c} \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \right) \frac{1}{1-\beta^2} + \\ &+ \frac{2e^2}{3c^3(1-\beta^2)} \left\{ \dot{\mathbf{W}} + \frac{e \sqrt{1-\beta^2}}{m} \left[ \frac{\mathbf{W}}{c} \mathbf{B} \right] - \frac{e(\mathbf{V}\mathbf{W})}{mc^2 \sqrt{1-\beta^2}} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] + \right. \\ &+ \frac{3e(\sqrt{1-\beta^2})^{-1}}{mc^2} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] (\mathbf{V}\mathbf{W}) + \frac{3\mathbf{W}(\mathbf{V}\mathbf{W})}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{3\mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{W})^2}{c^4(1-\beta^2)^2} + \\ &\left. + \frac{\mathbf{V}(\mathbf{V}\dot{\mathbf{W}})}{c^2(1-\beta^2)} + \frac{e\mathbf{V}(\mathbf{V}|\mathbf{W}\mathbf{B}|)}{mc^3 \sqrt{1-\beta^2}} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Учитывая справа только первые два члена, находим

$$\mathbf{W} = \frac{2}{3} \frac{r_0^2 \sqrt{1-\beta^2}}{m} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right]. \quad (12)$$

Оценим пренебреженные члены с помощью (12):

- 1)  $\dot{\mathbf{W}} = -\frac{4}{9} \frac{r_0^4}{m^2c} \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \right) \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] + \frac{2}{3} \frac{er_0^2(1-\beta^2)}{m^2c} \left[ \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] +$   
 $+ (1-\beta^2) \frac{4}{9} \frac{r_0^4}{m^2c} \left[ \left[ \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] = \frac{4}{9} \frac{r_0^4}{m^2c} \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right)^2 \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] -$   
 $- \frac{2}{3} \frac{er_0^2(1-\beta^2) B^2}{m^2c} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] + \frac{4}{9} \frac{r_0^4 B^2}{m^2c} (1-\beta^2) \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right],$
- 2)  $\frac{e \sqrt{1-\beta^2}}{mc} |\mathbf{W}\mathbf{B}| = \frac{2er_0^2}{3m^2c} \left[ \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] (1-\beta^2) =$   
 $= -\frac{2eB^2 r_0^2}{3m^2c} (1-\beta^2) \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right],$
- 3)  $\frac{2e |\mathbf{V}\mathbf{B}| |\mathbf{V}\mathbf{W}|}{mc^3 \sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{4}{3} \frac{er_0^2}{m^2c} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2,$
- 4)  $\frac{3\mathbf{W}(\mathbf{V}\mathbf{W})}{c^2(1-\beta^2)} = \frac{4}{3} \frac{r_0^4}{m^2c} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \right),$
- 5)  $\frac{3\mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{W})}{c^4(1-\beta^2)^2} = \frac{4}{3} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^4 \frac{\mathbf{V}r_0^4}{m^2(1-\beta^2)c^2},$
- 6)  $\frac{\mathbf{V}(\mathbf{V}\dot{\mathbf{W}})}{c^2(1-\beta^2)} = -\frac{4r_0^4\mathbf{V}}{9m^2c^2} \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2 \left\{ -B^2 + \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right]^2 \frac{1}{1-\beta^2} \right\},$
- 7)  $\frac{e\mathbf{V}(\mathbf{V}|\mathbf{W}\mathbf{B}|)}{mc^3 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2r_0^2\mathbf{V}e}{3m^2c^2} \left( \frac{\mathbf{V}}{c} \left[ \left[ \left[ \frac{\mathbf{V}}{c} \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \mathbf{B} \right] \right) = 0.$

Мы видим, что до тех пор пока

$$\frac{B}{\sqrt{1-\beta^2}} \leq \frac{e}{r_0^2} (E \leq 10^{22} \text{ эв}),$$

т. е. до тех пор пока поле в системе, связанной с электроном, мало по сравнению с «полем на краю электрона», формула (11) имеет место. Сравнивая (12) и (10), видим, что поправка в ускорении, связанная с лучистым трением, мала:

$$\frac{|W|}{\frac{e \sqrt{1-\beta^2}}{m} \left| \left[ \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{B} \right] \right|} \sim \frac{B r_0^2}{c} \ll 1.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. Д. Ландау и профессору П. Е. Тамму за ценные дискуссии при проведении работы.

*Физический институт Ленинградского  
государственного университета*

Получено  
13 июня 1939 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Weizsäcker*. Zs. f. Phys., 1934, 88, 612.
2. *Dirac*. Proc. Roy. Soc., 1938, [A], 167, 148; *Abraham*. Theorie der Elektrizität, Bd. 2, p. 122.
3. *Miehlücke*. Höhenstrahlung, 1938, p. 49.
4. *Auger*. J. de Phys. et de Rad., 1939, 1, 39.

## О КОНЦЕ ТРЕКА МЕЗОТРОНА В КАМЕРЕ ВИЛЬСОНА\*

*Совместно с А. Мигдалом*

В последнее время в литературе появилось несколько снимков, на которых виден конец мезотронного трека [1]. Исходя из предположения о распаде мезотрона, можно было бы ожидать, что такой трек окончится электронным следом, чего нет на приведенных в литературе фотографиях. Следует, однако, иметь в виду, что мезотрон, прекративший заметно ионизовать, обладает достаточной энергией, чтобы продиффундировать на некоторое расстояние от конца своего трека раньше, чем произойдет распад. К сожалению, указать точно длину диффузионного пути невозможно, так как она зависит от скорости мезотрона в момент окончания трека. Исходя из боровского условия для ионизации, эта скорость должна иметь порядок нескольких единиц на  $10^{-8}$  см/сек. После прекращения ионизации мезотрон замедляется в результате упругих столкновений с ядрами. Таким образом энергия мезотрона убывает, и коэффициент диффузии зависит от времени.

Из уравнения диффузии

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \Delta F \quad (1)$$

получим следующее выражение для вероятности нахождения мезотрона в единице объема:

$$F = \left( \frac{3}{2\pi \bar{r}^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{3r^2}{2\bar{r}^2}}, \quad (2)$$

где

$$\bar{r}^2 = 6 \int_0^{\infty} D dt;$$

коэффициент диффузии  $D$ , как известно, равен

$$D = \frac{1}{3} V \lambda = \frac{v}{3\tau_{\text{эф}} N},$$

где  $V$  — скорость мезотрона,  $N$  — число атомов в единице объ-

\* Докл. АН СССР, 1940, 27, 652; Phys. Rev., 1940, 57, 934.



ема. Эффективное сечение для диффузии  $\sigma_{\text{эф}}$  равно

$$\sigma_{\text{эф}} = \int \int (1 - \cos \theta) d\Omega = \frac{2\pi Z^2 e^4}{4E^2} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (3)$$

где  $\theta_0$  — угол, определяемый экранированием атомными электронами и равный по порядку величины

$$\theta_0 \sim \frac{\left(\frac{Ze^2}{E}\right)}{a_0 Z^{-1/3}} = \frac{Z^{1/3} e^4 m}{E \hbar^2}.$$

С помощью (3) получим

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{\pi Z^2 e^4}{E^2} \ln \frac{2}{\theta_0} - \frac{\pi Z^2 e^4}{E^2} \ln \frac{2E \hbar^2}{Z^{1/3} m e^4}. \quad (4)$$

Энергия, теряемая мезотроном на единице пути, равна

$$-\frac{dE}{dx} = N \int \sigma \frac{\left(2p \sin \frac{\theta}{2}\right)^2}{2M} d\Omega = N \pi \frac{Z^2 e^4}{E^2} E \frac{2\mu}{M} \ln \frac{2E \hbar^2}{Z^{1/3} m e^4} = N \sigma_{\text{эф}} E \delta, \quad (5)$$

где  $\mu$  — масса мезотрона,  $p$  — его импульс,  $M$  — масса атома.

Так как  $\delta = 2\mu/M \ll 1$ , то заметное изменение энергии мезотрона происходит в результате многих столкновений. Это обстоятельство делает законным применение уравнения диффузии.

Вычислим выражение  $\overline{r^2}$ , которое входит в функцию распределения (2):

$$\overline{r^2} = 6 \int_0^{\infty} D dt = 6 \int_{E_0}^0 D(E) \frac{dE}{(dE/dt)} = 6 \int_{E_0}^0 \frac{D(E) dE}{\delta \sigma_{\text{эф}} E N} = \frac{\lambda_0^2}{2\delta}, \quad (6)$$

где  $\lambda_0 = 1/N\sigma_{\text{эф}}$  — энергия мезотрона, соответствующая началу диффузии.

При  $E_0 = 10 \text{ кэВ}$  получаем в воздухе при нормальных условиях  $\sqrt{\overline{r^2}} = 1,0 \text{ см}$  (при  $\mu = 160m$ , где  $m$  — масса электрона).

Вычислим еще время, в течение которого произойдет замедление мезотрона:

$$\tau = \int_{E_0}^0 \frac{dE}{dE/dt} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{\delta \sigma_{\text{эф}} E N} = \frac{2\lambda_0}{3\delta V_0}. \quad (7)$$

В нашем примере  $\tau \sim 10^{-8} \text{ сек.}$

При энергии мезотрона, соответствующей  $\theta_0 \sim 1$ , формула (4) перестает быть верной. Однако это условие выполняется при таких

энергиях, при которых диффузия ничтожна. Поэтому полная диффузионная длина определяется выражением (6).

Отметим также, что потеря энергии при упругих столкновениях с ядрами после прекращения ионизации должна учитываться при определении энергии частиц по их пробегам в камере Вильсона или по суммарной ионизации в ионизационной камере.

В частности, каждый осколок, получающийся при делении урана, расходует на ядерные столкновения энергию порядка  $1 \text{ Мэв}$ .

*Физико-технический институт  
Академии наук СССР.  
Ленинград*

Получено  
20 марта 1940 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *H. Meier-Leibnitz. Zs. f. Phys., 1939, B112, 569; Y. Nishina, M. Takeuchi, T. Ichimiya. Phys. Rev., 1939, 55, 585 (L).*
2. *H. Bethe, M. Rose, N. Smith. Proc. Phil. Soc., 1938, 78, 573.*

## СПЕКТР МЯГКОЙ КОМПОНЕНТЫ В ВОЗДУХЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ\*

*Совместно с А. Курпичевым*

Спектр мягкой компоненты, обязанной электронам распада и составляющей главную часть мягкой компоненты в воздухе на небольших высотах, рассматривался Гайзенбергом и Эйлером [1] и Таммом и Беленьким [2].

Однако Гайзенберг и Эйлер пользовались несовершенной формой лавинной теории ливней [3, 4], аппарат которой после усовершенствования Ландау и Румером [5] может быть применен для получения значительно более точных результатов. Тамм и Беленький не учитывали точного спектра мезонов, заменяя его рассмотрением мезонов некоторой средней энергии. Такая замена не может быть обоснована при исследовании спектра мягкой компоненты в области энергий  $E$ , больших по сравнению с критической  $\epsilon$ , так как очевидно, что мягкая компонента с большой энергией может возникать только в результате распада мезонов с большой энергией, и поэтому форма спектра мягкой компоненты в этой области весьма чувствительна к виду спектра мезонов при больших энергиях мезонов.

Рассмотрение спектра мягкой компоненты при  $E \gg \epsilon$  представляет особый интерес в связи с рассмотрением переходных кривых при больших толщинах, куда проникают только ливни, обязанные воздушным мягким частицам с  $E \gg \epsilon$ . В следующей работе будут получены переходные кривые, исходя из найденного в этой работе спектра мягкой компоненты.

Для определения искомого спектра мы исходим из спектра электронов распада, непосредственно возникающих при распаде мезонов:

$$\Phi(E_0) dE_0 = \frac{X_0 \mu c^2 \gamma dE_0}{c \tau_0} \int_{E_0}^{\infty} \frac{dW}{W^2 (W + W_0)^{\gamma+1}}, \quad (1)$$

где  $\tau_0$  — время распада покоящегося мезона ( $\tau_0 = 2,5 \cdot 10^{-6}$  сек [6]);  $X_0$  — лавинная единица длины в воздухе;  $\mu$  — покоящаяся масса мезона;  $c$  — скорость света;  $W$  — энергия мезона;  $W_0$  — энергия, затрачиваемая мезоном на ионизацию при прохо-

\* Докл. АН СССР, 1943, 41, 19 (Представлено академиком С. И. Вавиловым 8 июня 1943 г.).

ждении от места образования до места наблюдения ( $W_0 \approx 2,2 \times 10^9$  эв для уровня моря при вертикальном направлении;  $W_0 \approx \text{const}/\cos \theta = aT/\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением движения мезонов и вертикалью,  $a = 2,2 \cdot 10^6$  эв,  $T$  — глубина воды в см).

Дифференциальный спектр мезонов мы берем в соответствии с Гайзенбергом и Эйлером [1] в виде

$$\frac{A\gamma dW}{(W + W_0)^{\gamma+1}},$$

где  $A$  — постоянная,  $\gamma \approx 2$ . При этом не учитывается распад мезонов, что представляется законным, так как нас будут интересовать мезоны с большой энергией, для которых распад не оказывает большого влияния на их спектр. Следует отметить при этом, что учет распада мезонов может быть проведен без больших затруднений [5]. С помощью (1) мы можем найти спектр мягкой компоненты  $F(E)$ :

$$F(E) = \int_E^{\infty} \Phi(E_0) dE_0 \int_0^{\infty} a(E_0, E, t) e^{\varphi(E_0, E, t)} dt, \quad (2)$$

где  $ae^{\varphi}$ , как обычно [5], означает число частиц с энергией, большей, чем  $E$ , в ливне, образованном начальной частицей с энергией  $E_0$ , причем ливень прошел путь  $t$  ( $t$  измеряется в лавинных единицах);  $F$  означает при этом, очевидно, интегральный спектр — число частиц с энергией, большей, чем  $E$ .

Так как единственная величина, зависящая от  $t$ , есть  $ae^{\varphi}$ , мы проведем сперва интегрирование по  $t$ . При этом главную роль играют  $t$ , при которых число частиц с энергией, большей  $E$ , достигает максимума ( $s = 1$ ) [7]:

$$\int_0^{\infty} ae^{\varphi} dt = a(s=1) e^{\varphi(s=1)} \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda_t''(s=1)}} = B \frac{E_0}{E}, \quad (3)$$

$$B = a \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda_t''}}, \quad \lambda_t'' = \left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)_{E_0, E=\text{const}}.$$

Здесь использовано соотношение  $\varphi(s=1) = \ln E_0/E$  [5],  $a$  — медленно меняющаяся функция по сравнению с  $e^{\varphi}$ ;

$$F(E) = \int_E^{\infty} \Phi(E_0) \frac{E_0}{E} B(1) dE_0 = \frac{1}{E} \int_E^{\infty} E_0 A dE_0 \int_E^{\infty} \frac{\mu c^2 X_0 dW_j(W)}{c\tau_0 W^2}, \quad (4)$$

$f(W)$  — дифференциальный спектр мезонов (он может и не совпадать с используемым в (1); в частности, в нем может содержаться учет распада мезонов).

Заменим порядок интегрирования в двойном интеграле (4)

$$F(E) = \frac{\mu c X_0}{E \tau_0} \int_E^\infty \frac{f(W) dW}{W^2} \int_E^W B E_0 dE_0 = \frac{\mu c X_0}{2E \tau_0} \int_E^\infty B(s=1, W, E) f(W) dW. \quad (5)$$

Отметим здесь, что  $a(E, E) = 0$ , поэтому значение внутреннего интеграла по  $E_0$  определяется верхним пределом.

Воспользуемся теперь выражением для  $f(W)$  в виде:

$$f(W) = \frac{A\gamma}{(W + W_0)^{\gamma+1}},$$

$$F(E_0) = \frac{A\gamma X_0 \mu c}{2E \tau_0} \int_E^\infty \frac{dW}{(W + W_0)^{\gamma+1}} B(s=1, W, t) \approx \frac{A\bar{B} X_0 \mu c}{2E \tau_0 (W_0 + rE)^\gamma},$$

$$r > 1, r \approx 1, r = \text{const.}$$

Так как  $B$  почти не зависит от энергии (исключая случай, когда  $W \rightarrow E$ ), мы можем вынести его из-под знака интеграла. Для заряженных частиц  $B$  равно [7, 8]

$$\frac{0,137 \sqrt{2\pi \left( \ln \frac{W}{E} - 1 \right)^{1,56}}}{\sqrt{\ln \frac{W}{E} - 0,37}} \approx 0,4.$$

Для фотонов  $B$  равно  $9/7 \cdot 0,4 \approx 0,5$ . Окончательно находим, пользуясь соотношением для полной заряженной мягкой компоненты  $F_0$ , обязанной электронам распада [2]:

$$F_e(E) = 0,4 F_0 \frac{\varepsilon W_0^\gamma}{E (Er + W_0)^{\gamma+1}} = \frac{0,4\varepsilon F_0}{E \left( 1 + \frac{rE}{W_0} \right)^\gamma}, \quad (6)$$

$$F_\gamma(E) = 0,8 F_0 \frac{\varepsilon}{E \left( 1 + \frac{rE}{W_0} \right)^\gamma},$$

$$F_0 = \frac{\mu c X_0}{2\tau_0 s} N_0, \quad (7)$$

где индекс  $\gamma$  означает кванты,  $e$  — электроны и позитроны,  $N_0$  — полное число мезонов.

Соотношение (7) легко получается в результате применения закона сохранения энергии, предполагая, что нейтрино уносит половину энергии мезонов.

Из (5) мы видим, что  $F(E)$  выражается непосредственно через интегральный спектр мезонов  $\int_E^\infty f(W) dW$ , так как  $B$  почти постоянно всюду, исключая случай  $W = E$ . Пользуясь (5), мы

можем получить спектр мягкой компоненты при необходимости, например, учета в спектре мезонов распада.

Точное вычисление коэффициента  $r$  затруднительно, так как это требует анализа неразвитого ливня с малым числом интересных нас частиц.

При  $E \gg W_0$  в интеграле по  $W$  в (5) главную роль играет область  $W \approx E$ , т. е. главную роль играют ливни с малым числом частиц, имеющих требуемую энергию  $\geq E$ . Отсюда следует, что численное значение коэффициентов 0,4 и 0,5 при  $E \gg W_0$  не может быть точным в этой области энергий (по тем же причинам, которые препятствуют вычислению  $r$ ).

Из (6) мы можем заключить о присутствии заметного количества частиц с  $E \gg \epsilon$ . Например, положив  $E = 4\epsilon$ , мы получим на уровне моря при  $r = 2$ ,  $\gamma = 2$

$$\frac{F_e + F_\gamma}{F_0} = \frac{0,9}{4 \left(1 + \frac{2,4}{22}\right)^2} = 12\%,$$

при  $r = 1,5$

$$\frac{F_e + F_\gamma}{F_0} = \frac{0,9}{4 \left(1 + 1,5 \frac{4}{22}\right)^2} = 13\%.$$

Можно сказать, что число частиц с энергией, большей, чем  $4\epsilon$ , на уровне моря составляет величину порядка 12—13% от общей мягкой заряженной компоненты, обязанной распаду мезотронов.

Метод, примененный здесь, легко может быть распространен на мягкую компоненту, обязанную  $\delta$ -электронам.

*Ереванский государственный университет  
Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР*

Получено  
8 июня 1943 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Гайзенберг, Э. Эйлер. Усп. физ. наук, 1939, 21, 130, 261.
2. И. Тамм, С. Беленький. J. Phys. USSR, 1939, 1, 177.
3. Н. Bhabha, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., 1937, A159, 432.
4. J. Carlson, J. Oppenheimer. Phys. Rev., 1937, 51, 220.
5. L. Landau, G. Rumer. Proc. Roy. Soc., 1938, A166, 213.
6. В. Rossi. Rev. Mod. Phys., 1939, 11, 296.
7. Л. Ландау. ЖЭТФ, 1940, 10, 1007.
8. В. Rossi, К. Greisen. Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 233.

## К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНЫХ ЭФФЕКТОВ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ\*

*Совместно с А. Курпичевым*

Как известно, при переходе космических лучей из среды с одним атомным номером  $Z_1$  в среду с другим атомным номером  $Z_2$  возникают переходные эффекты, связанные с зависимостью критической энергии  $\epsilon$  лавинной теории ливней от  $Z$ . Наиболее важным переходным эффектом является зависимость числа ливней от толщины экрана (кривая Росси). Чаще всего рассматривается такой эффект при переходе космических лучей из воздуха в свинец так как переходный эффект тем больше, чем больше разнятся между собою атомные номера субстанций. Кривые Росси дают одну из наиболее важных количественных закономерностей в космических лучах, причем лавинная теория ливней уже при своем возникновении [1, 2] сумела объяснить ряд качественных характеристик переходных кривых. Однако до сих пор отсутствует точный количественный расчет переходных кривых, основанный на лавинной теории ливней. Росси [3] произвел вычисления переходной кривой при различных предположениях относительно спектра мягкой компоненты в воздухе.

Анализ этого спектра, проведенный в [4], показывает, что его форма отлична от предполагаемой [3], и поэтому переходные кривые, полученные в [2], не могут быть обоснованы. Ландау [5] вычислил отношение максимума кривой Росси к ее хвосту в случае переходной кривой, обязанной ионизирующей и неионизирующей компонентам. Полученное им отношение не может быть, однако, непосредственно сравнено с экспериментальными данными по следующим причинам: 1) не учитывается тот факт, что в максимуме наблюдаются ливни не только от воздушных электронов и позитронов, но и от воздушных фотонов (следует отметить, что это обстоятельство существенно и при определении всей энергии, которая затрачивается на ионизацию мягкой компонентой воздуха при ее переходе в свинец); 2) используется неправильное распределение  $\delta$ -электронных ливней в воздухе по их величине; 3) там же применяется неверное соотношение между  $\delta$ -электронами и электронами распада в воздухе.

---

\* Докл. АН СССР, 1944, 42, 396 (Представлено академиком С. И. Вавиловым 8 июня 1943 г.).

В настоящей работе мы рассматриваем форму переходной кривой за максимум, а также оцениваем отношение максимума кривой Росси к ее хвосту. Выбор толщины экрана большей, чем те, на которых наблюдается максимум, обусловлен тем, что в максимуме кривая Росси обязана главным образом той части мягкой компоненты воздуха (или любой исходной среды), которая имеет энергию  $E$  порядка критической энергии воздуха. Так как спектр мягкой компоненты в этой области мало известен, то точное вычисление переходной кривой в области около максимума крайне затруднительно.

В дальнейшем мы подробно разберем форму переходной кривой за максимумом. Что касается отношения максимума кривой Росси к ее хвосту, то оно не может быть точно определено по тем же причинам, по которым не может быть точно определена кривая Росси вблизи максимума (из-за незнания спектра мягкой компоненты в воздухе при  $E \approx \epsilon$ ).

Мы определим зависимость числа частиц от толщины экрана. Измеряемые на опыте (например, в наиболее совершенных условиях Росси [3] и Спиваком [6]) число ливней с числом частиц, большим или равным двум или даже единице, при больших толщинах экрана должно показывать примерно ту же зависимость от толщины, как и просто число частиц, так как число регистраций измеряющей системы, как это будет показано отдельно, примерно пропорционально числу частиц в ливне.

Следует, однако, отметить, что обычно измеряемая системой счетчиков величина, строго говоря, не пропорциональна числу частиц в ливне, поэтому необходим тщательный анализ того, что именно измеряется, прежде чем производить сравнение теории с экспериментом. Можно лишь утверждать, что опыты, где измеряющая система считает ливни с числом частиц, равным или большим единицы [3], ближе подходят к измерению числа частиц, чем опыты, где необходимо наличие в ливне по крайней мере двух частиц.

Количество частиц  $N(t)$ , наблюдаемое под экраном, имеющим толщину  $t$ , определяется с помощью дифференциального спектра мягкой компоненты  $P(E_0)dE_0$

$$N(t) = \int ae^{\varphi(E, t)} P(E) dE. \quad (1)$$

Как обычно [7],  $ae^{\varphi(E, t)}$  означает число частиц, наблюдаемых на глубине  $t$  в ливне, начинающемся частицей с энергией  $E$ , а вообще различно в зависимости от того, является ли  $N(t)$  числом заряженных или незаряженных частиц,  $P$  может быть спектром заряженной или незаряженной мягкой компоненты. Если  $P$  относится к фотонам ( $P_\gamma$ ), то мы получим переходную кривую, называемую неионизирующей компонентой. Если  $P$  относится и к фотонам, и к электронам (+ и -), то мы получаем полную переходную



кривую. Для  $P$  подставляем выражение [4]

$$P = \left\{ \frac{\varepsilon W_0^\gamma}{E^2 (rE + W_0)^\gamma} + \frac{\gamma \varepsilon W_0^\gamma r}{E (rE + W_0)^{\gamma+1}} \right\} \times \text{const.} \quad (2)$$

Для фотонов  $\text{const} = 0,52 F_0$ , для электронов  $\text{const} = 0,4 F_0$ . Все обозначения такие же, как и в [3, 4];  $\varepsilon$  — критическая энергия воздуха;  $F_0$  — полная заряженная мягкая компонента в воздухе.

Введем новые обозначения:  $E = \varepsilon e^y$ ,  $W_0 = r \varepsilon e^{y_0}$ ,

$$N = \text{const} \int a e^\varphi \left[ \frac{e^{-y}}{(e^{y-y_0} + 1)^\gamma} + \frac{\gamma e^{-y_0}}{(e^{y-y_0} + 1)^{\gamma+1}} \right] dy. \quad (3)$$

Этот интеграл берем методом перевала.

Рассмотрим подробнее интеграл от первого члена в (3)

$$\begin{aligned} & \int a \exp [\varphi - y - \gamma \ln (1 + e^{y-y_0})] dy = \\ & = a(s_1) \sqrt{\frac{2\pi}{B_1}} \exp [y_1 - y_0 - \gamma \ln (1 + e^{y_1-y_0})]. \end{aligned} \quad (4)$$

Величина  $y_1$  определяется из равенства

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y_1} - 1 - \frac{\gamma \exp (y_1 - y_0)}{1 + \exp (y_1 - y_0)} = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y_1} = s_1;$$

$$s_1 - 1 - \gamma \frac{\exp (y_1 - y_0)}{1 + \exp (y_1 - y_0)} = 0; \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{i \lambda''(s_1)} + \frac{\gamma \exp (y_1 - y_0)}{(\exp (y_1 - y_0) + 1)^2}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем

$$y_1 - y_0 = \ln \frac{s_1 - 1}{\gamma + 1 - s_1}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{B}} \exp [\varphi_1 - y_0 - \gamma \ln (e^{y_1-y_0} + 1)] = \\ & = \frac{\exp [\varphi (y_1, s_1) - y_0] (\gamma + 1 - s_1)^{\gamma+1}}{(s_1 - 1)^\gamma \sqrt{\frac{1}{\lambda''(s_1) t} + \frac{(s_1 - 1)(\gamma + 1 - s_2)}{\gamma}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть второй член в (3). Он оказывается равным

$$\frac{\gamma a(s_2) e^{\varphi(y_2, s_2)} (\gamma + 1 - s_2)^{\gamma+1}}{(\gamma + 1)^{\gamma+1} \sqrt{\frac{1}{\lambda''(s_2) t} + \frac{s_2 (\gamma + 1 - s_2)}{\gamma + 1}}} e^{-y_0}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda'' &= d^2 \lambda / ds^2, \\ y_2 - y_0 &= \ln \frac{s_2}{\gamma + 1 - s_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Полная переходная кривая получается суммированием (8) и (9).

Вычисление  $N(t)$  должно производиться следующим образом: 1) задаемся значениями  $s_1$ ; 2) по формуле (7) находим  $y$ ; 3) при заданном  $y_1$  и  $s_1$  находим  $t$  (таблицы см. в [7]); 4) исходя из полученного значения  $y_1$  и заданного  $s_1$ , находим  $\varphi_1$  [7]. Задаваясь различными значениями  $s_1$ , получаем возможность построить кривую, дающую первый член в (3) при любой толщине. Аналогичная процедура, примененная ко второму члену в (3), дает нам вторую кривую. Накладывая первую и вторую кривые, получаем окончательно переходную кривую  $N(t)$ .

Необходимо отметить, что величина  $ae^\varphi$ , которой мы пользуемся как величиной числа частиц в ливне, на самом деле имеет смысл только для числа частиц в ливне, имеющих энергию  $E$ , много больше, чем критическая. Дело в том, что при определении  $ae^\varphi$  мы не учитываем ионизации. Совершенно несомненно, однако, что число частиц, имеющих  $E \gg \epsilon$  ( $E > 3 - 4\epsilon$ ), как функция  $t$  близко совпадает с числом ливней как функцией  $t$  (частица, имеющая  $E = 3 - 4\epsilon$ , при данном  $t$  превращается в маленький ливень, пройдя приблизительно одну лавинную единицу длины). Обе кривые будут сдвинуты друг относительно друга на  $\sim 1$  лавинную единицу длины<sup>1</sup>.

Следует отметить, что от  $\gamma$  и  $r$  теоретическая кривая зависит мало.

Из анализа формул (8) и (9) следует, что главную роль в переходной кривой в широком интервале значений  $t$  играют первичные энергии  $E_0$  порядка  $W_0$  ( $y \sim y_0$ ). В качестве нижнего предела для  $E$  мы взяли  $E = 2\epsilon_{\text{РБ}}$ ,  $\epsilon_{\text{РБ}} = 8 \text{ Мэв}$ .

Хорошее согласие между экспериментом [3, 6] и теорией указывает на то, что экспериментальные точки относятся к величине, пропорциональной числу частиц.

В общем виде вероятность регистрации пропорциональна величине  $\Pi (1 - e^{-\rho_k s_k})$ , где  $\rho_k$  — плотность частиц в месте, где расположен счетчик  $k$ ;  $s_k$  — его площадь. Более подробный анализ этого выражения показывает, что при  $t < 14 - 15$  измеряемая [3, 6] величина пропорциональна числу частиц в ливне. Соответствующие вычисления публикуются.

Обращаясь к определению отношения максимума кривой Росси к ее хвосту, мы ограничимся здесь приближенной оценкой, оставляя более точные вычисления для другого сообщения.

Количество ливней  $q$  на один мезон, обязанных  $\delta$ -электронам в хвосте кривой Росси в свинце, равно  $1/24n$  [5],  $n$  — число частиц в ливне.

При  $n = 2$  ( $n = 2$  играет главную роль в измерениях типа [7]) мы имеем для свинца  $q = 1/48$ .

<sup>1</sup> Уже отсюда, в частности, видно, что кривая, полученная в [3, 6], должна соответствовать  $N(t)$ .

В максимуме кривой России мы имеем ливни, обязанные воздушным частицам с энергией  $\approx \epsilon_A$ .

В самом деле, пробег ливней с  $E \approx \epsilon_A$  составляет примерно 2,5—3 ливнинные единицы, что соответствует положению максимума. Число частиц в таком ливне равно

$$0,3 \frac{\epsilon_A}{\epsilon_{Pb} \sqrt{\ln \frac{\epsilon_A}{\epsilon_{Pb}}}} = \frac{0,3}{1,6} 12 \approx 2.$$

Число ливней в максимуме определяется величиной мягкой компоненты в воздухе, имеющей энергию порядка  $\epsilon_A$  (включая и фотоны). На уровне моря искомая величина  $\approx 1/2$  всей мягкой компоненты на один мезон — порядка 30%. Отсюда для отношения максимума к хвосту получаем  $0,3 \cdot 48 = 14,4$ . Более подробный анализ, публикуемый в другом месте, показывает, что это отношение заключено между 10 и 15. Экспериментальное число [6] равно 7.

Причина расхождения, возможно, лежит в наличии проникающих ливней не каскадного происхождения.

*Ереванский государственный университет  
Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР*

Получено  
8 июня 1943 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *H. Bhabha, W. Heitler.* Proc. Roy. Soc., 1937, A159, 432.
2. *J. Carlson, J. Oppenheimer.* Phys. Rev., 1937, 51, 220.
3. *L. Janossi, B. Rossi.* Proc. Roy. Soc., 1940, A175, 88.
4. *А. Курничев, И. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1943, XLI, № 1 (Собр. трудов, № 43).
5. *Л. Ландау.* ЖЭТФ, 1941, 11, 32; J. Phys. USSR, 1943, 4, 375.
6. *П. Сливак.* J. Phys., 1941, 5, 5.
7. *L. Landau, G. Rumer.* Proc. Roy. Soc., 1938, A166, 213.

## ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ОБРАЗОВАНИЯ ПАР С ПОМОЩЬЮ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АТОМФОРМФАКТОРА\*

*Совместно с А. Кирпичевым*

Как известно [1, 2], при больших энергиях тормозное излучение и образование пар происходит на все больших расстояниях от ядра, и поэтому становится существенным экранирование ядерного поля атомными электронами. Благодаря этому логарифмический рост с энергией эффективных сечений прекращается. Предельное значение для эффективных сечений, соответствующее так называемому полному экранированию, обычно получается с помощью метода Томаса — Ферми.

Однако применение этого метода к легким элементам с малым количеством электронов  $Z$  не может быть строго обосновано. Поэтому представляется желательным найти более точное значение для эффективных сечений в случае малых  $Z$ . Как указано в [3], эффективные сечения для тормозного излучения  $\sigma_r$  и для образования пар  $\sigma_p$  просто выражаются через атомформфактор:

$$d\sigma_r = 4\alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{dk}{kE_0^2} \left\{ \left[ E_0^2 + (E_0 - k)^2 - \frac{2}{3} E_0 (E_0 - k) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_0^{\frac{\mu}{q}} |1 - F(q)|^2 \frac{dq}{q} + 1 \right] + \frac{1}{9} E_0 (E_0 - k) \right\}, \quad (1)$$

$$d\sigma_p = 4\alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{dE}{E_0^3} \left\{ \left[ E_0^2 + (E_0 - E)^2 + \frac{2}{3} E_0 (E_0 - E) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \int_0^{\frac{\mu}{q}} |1 - F(q)|^2 \frac{dq}{q} + 1 \right] - \frac{1}{9} E_0 (E_0 - E) \right\}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad F(q) = \frac{1}{Z} \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}/\hbar c} d\tau,$$

$Ze$  — заряд ядра;  $E_0$  в (1) — энергия электрона до излучения;  $E$  — после излучения;  $k$  — энергия излученного кванта;  $E_0$  в (2) — энергия фотона, образующего пару;  $E$  — энергия одной из компонент пары;  $\rho$  — плотность заряда в атоме;  $d\tau$  — элемент объема.

\* Докл. АН СССР, 1944, 45, 301 (Представлено академиком И. В. Курчатовым 25 марта 1944 г.).

Пользуясь (1) и (2), можно вычислить эффективные сечения на основе экспериментальных значений атомформфактора, известные, например, из рассеяния рентгеновских лучей.

Следует отметить, что разница между получаемыми таким образом эффективными сечениями и теми, которые дает метод Томаса — Ферми, невелика — порядка 7—8%. В большинстве вопросов, в которых важны значения  $\sigma_r$  и  $\sigma_p$ , особенно в большинстве лавинно-теоретических вопросов [4, 5], получаемая нами разница не отражается на порядке величины результатов. Существует, однако, область явлений, связанных с большими лавинными ливнями (ливнями Оже) [6—8], для которых очень важную роль [9] играет вопрос о толщине атмосферы в радиационных единицах [5]. Изменение эффективного сечения (а следовательно, и радиационной единицы длины) на 8% влечет за собой изменение толщины атмосферы на 2,1 единицы<sup>1</sup>. Такое изменение приводит, например, к тому, что плотность частиц в ливнях, создаваемых «первичными» электронами и имеющими максимум, на Юнгфрау изменяется в  $e^{1,4} = 4$  раза. Этот результат весьма важен для теории совпадений между счетчиками, которые вызываются ливнями Оже.

Используя приведенные в [11] данные об атомформфакторе, получаем следующие значения для радиационного логарифма<sup>2</sup>.

$$L_r = \int_0^t |1 - F(q)|^2 \frac{dq}{q} + 1.$$

Z	8	9	11	12	13	14	17	19	20	26
$L_r$ из экспериментальных данных	4,95	4,85	4,75	4,71	4,68	4,65	4,65	4,64	4,62	4,55
$L_r$ по Томасу — Ферми	4,56	4,52	4,45	4,42	4,40	4,37	4,31	4,27	4,25	4,17

Из рассмотрения вывода видим, что метод Томаса — Ферми уменьшает значения эффективных сечений. Это уменьшение в среднем составляет 6—8%. Радиационные единицы ( $t$ -единицы) длины на самом деле меньше, чем получаемые по методу Томаса — Ферми (см. таблицу).

	Вода	Алюминий	Аргон	Железо
$t$ -единица по экспериментальным данным, $g/cm^2$	35	22,4	19,4	13,3
$t$ -единица по методу Томаса — Ферми, $g/cm^2$	38	23,9	20,8	14,4

<sup>1</sup> Обычное значение для толщины атмосферы равно  $26 t$  [10].

<sup>2</sup> Равного по Томасу — Ферми  $L_r = \ln 191 Z^{-1/3}$ .

Хотя для азота мы не обработали данных, рассматриваемый эффект для него будет не меньше, чем для кислорода. Отсюда можно заключить, что в воздухе  $t$ -единица на 9—10% меньше, чем обычно принимаемая, т. е. вместо 38 она равна 35 см вод. эквивалента.

Изменение  $t$ -единиц влечет за собой соответствующее изменение критической энергии  $\epsilon$  лавинной теории.

В заключение мы хотели бы поблагодарить профессора Л. Ландау за интерес к этому вопросу.

*Ереванский государственный университет  
Физико-технический институт  
Академии наук СССР. Ленинград*

Получено  
6 декабря 1943 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *H. Bethe, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., 1934, A146, 83.*
2. *W. Heitler. The Quantum Theory of Radiation.*
3. *H. Bethe. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1934, 30, 542.*
4. *H. Bhabha, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., 1937, A159, 432.*
5. *J. Carlson, J. Oppenheimer. Phys. Rev., 1937, 51, 220.*
6. *P. Auger, P. Ehrenfest, A. Fréon, R. Maze. J. Phys., 1939, 10, 1.*
7. *P. Auger, R. Maze, T. Grivet-Meyer. C. r., 1938, 206, 1791.*
8. *P. Auger. Rev. Mod. Phys., 1939, 11, 288.*
9. *I. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1944, 8, 17 (Собр. трудов, № 46).*
10. *E. Fermi. Phys. Rev., 1940, 57, 485.*
11. *Landolt-Börnstein. 3 Ergänzungs-Band, 1931, S. 584.*

## К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ О БОЛЬШИХ ЛАВИННЫХ ЛИВНЯХ\*

Находится зависимость плотности частиц  $\rho$  в больших лавинных ливнях от их расстояния до оси ливня (§ 1). Полученное выражение пригодно не только в максимуме ливня, но и в любом его месте. Выражение для  $\rho$  применяется для вычисления зависимости числа совпадений двух счетчиков от их взаимного расстояния (§ 3). Подробное сравнение теорий с экспериментальными данными Оже и его сотрудников обнаруживает серьезное расхождение между теорией и экспериментом (§ 3). Указано на наличие корреляционного эффекта (§ 2), который приводит к повышенной вероятности совпадений при малых расстояниях между счетчиками. Вычислено число совпадений, обязанное корреляционному эффекту (§ 2), и указана область расстояний между счетчиками, для которой этот эффект существен.

### Введение

Как известно [1—3], Оже с сотрудниками установили существование больших ливней частиц в воздухе, возникающих в верхних слоях атмосферы и затем развивающихся при прохождении через нее. Оже предположил, что наблюдавшиеся им ливни являются большими лавинными ливнями, начинающимися от электронов, позитронов и квантов очень больших энергий (до  $10^{14}$ — $10^{15}$  эв), попадающих в верхние слои атмосферы<sup>1</sup>. То же предположение было положено в основу Эйлером и Вергеландом [4, 5], Бете [6] и Нордгеймом [7] при теоретическом анализе экспериментальных данных Оже на основании лавинной теории ливней. Хильберри [8, 9], измеривший количество больших ливней как функцию высоты, сравнивая свои данные с лавинной теорией [10, 11], пришел к выводу, что в больших ливнях (ради краткости мы иногда будем их называть ливнями Оже) должна существовать мезотронная компонента, точнее — проникающая компонента. Цель настоящей статьи заключается в доказательстве того, что совокупность экспериментальных данных, полученных Оже относительно больших ливней, не может быть теоретически интерпретирована без введения проникающей компоненты в большие ливни. Под сово-

\* ЖЭТФ, 1944, 14, 252; J. Phys. USSR, 1944, 8, 17.

<sup>1</sup> Положение не изменится существенно, если такие мягкие частицы большой энергии не попадают из мирового пространства, а создаются в верхних слоях атмосферы протонами [22].

купностью экспериментальных данных мы будем преимущественно понимать следующее: 1) зависимость числа больших ливней от высоты (высотная характеристика); 2) зависимость числа совпадений между двумя счетчиками при их раздвижении на данной высоте от расстояния между счетчиками (совпадетельная характеристика). Оказывается, что без введения проникающей компоненты в ливни Оже можно на основании лавинной теории объяснить только одну из двух указанных выше характеристик. Одновременное объяснение двух характеристик требует введения нелавинной компоненты в большие ливни, если только можно быть уверенным в отсутствии побочных эффектов при измерении совпадений между счетчиками.

Для интерпретации совпадетельной характеристики необходимо знать, как должно меняться число совпадений между двумя счетчиками при изменении расстояния между ними. Как видно будет ниже, ответ на поставленный вопрос требует знания зависимости плотности частиц в ливне от расстояния до его оси. Поэтому мы сначала займемся выяснением пространственной структуры ливней (плотность частиц, т. е. число частиц на  $1 \text{ см}^2$  как функция расстояния от оси ливня), затем (§ 2) рассмотрим своеобразный корреляционный эффект, приводящий к повышенной вероятности совпадений двух счетчиков при малых расстояниях между ними, и, наконец (§ 3), на основании полученных в § 1 и 2 формул проанализируем экспериментальные данные о ливнях Оже.

### § 1. Плотность в больших лавинных ливнях

Вопрос о зависимости плотности частиц  $\rho$  в ливнях от расстояний  $r$  до оси ливня рассматривался Эйлером и Вергеландом [4, 5], Бете [6] и Нордгеймом [7]. Полученные Эйлером и Вергеландом результаты содержат, однако, неправильные поперечные размеры ливня (так называемый радиус ливня) и неправильные средние углы рассеяния. Далее, полученные Эйлером и Вергеландом формулы для  $\rho(r)$  могут применяться только вблизи максимума лавины; во всех остальных случаях Эйлер и Вергеланд дают графики для  $\rho(r)$ . Оказывается, что при помощи решения уравнений лавинной теории ливней, полученных Ландау и Румером [12], можно найти простое выражение для  $\rho(r)$ , пригодное не только вблизи максимума частиц лавинного ливня, но и в любом месте ливня. Бете и Нордгейм указывают в своих кратких сообщениях <sup>1</sup> размеры ливня, значительно большие, чем указанные Эйлером и Вергеландом. Их радиус ливня, по-видимому, ближе соответствует действительному. Однако в сообщениях Бете и Нордгейма также нет выражений для  $\rho(r)$  в общем случае (не только вблизи максимума). Поэтому в дальнейшем мы выведем в общем виде выражение для зависимости  $\rho(r)$ .

<sup>1</sup> Краткий вывод результатов Нордгейма см. в [13, стр. 306—307].



Как уже указывалось Эйлером и Вергеландом [4, 5], Бете [6] и Нордгеймом [7], угловое расхождение частиц в ливнях, а также их боковое отклонение от оси ливня (т. е. от линии, вдоль которой двигалась первичная частица, создающая ливень) обусловлены кулоновским рассеянием электронов и позитронов, входящих в состав ливня. Так как кванты, излученные отклоненными заряженными частицами, будут иметь направление излучающих частиц<sup>1</sup>, то из-за рассеяния электронов и позитронов возникает и угловое расхождение квантов в ливнях. Точные значения для среднего квадрата угла рассеяния  $\overline{\theta^2}$  электронов (+ и -), и квантов, как функции их энергии, были найдены Ландау [14]. Он же получил точные значения для среднего квадрата отклонения частицы от оси ливня и нашел средний квадратичный радиус ливня  $\sqrt{\overline{R^2}}$ , который при атмосферном давлении оказался равным<sup>2</sup> 125 м ( $R_0^2$  есть средний квадрат расстояния частицы от оси ливня). Так как рассеяние частиц в ливнях практически не зависит от пути, пройденного ливнем [4—7], то такой же вывод, очевидно, относится и к  $R_0$ . Полученные в [14] выражения для  $\overline{\theta^2}$  применимы только в том случае, если энергия частиц  $E$  велика по сравнению с критической энергией лавинной теории  $\epsilon$ . Но все явления уплотнения частиц вблизи оси ливня обязаны мало рассеивающимся частицам, обладающим большой энергией по сравнению с  $\epsilon$ . Заметим, между прочим, что их средний угол рассеяния мал по сравнению с единицей; даже при  $E = \epsilon$  в воздухе  $\sqrt{\overline{\theta_\pi^2}} = 0,15$  [14]. Поэтому точные формулы Ландау могут быть применены. Для среднего квадрата расстояния  $\overline{r^2}$  заряженных частиц в ливнях от оси ливня и для среднего квадрата угла рассеяния заряженных частиц  $\overline{\theta_\pi^2}$  Ландау дает следующие выражения:

$$\overline{r^2} = \frac{625}{E^2}, \quad \overline{\theta_\pi^2} = \frac{225}{E^2},$$

$E$  в Мэв,  $\sqrt{\overline{r^2}}$  в единицах длины лавинной теории,  $\sqrt{\overline{\theta_\pi^2}}$  в радианах. Вводя сюда лавинную единицу длины в воздухе при нормальных условиях, получаем<sup>3</sup>

$$\sqrt{\overline{r^2}} = \frac{25}{E} 330 \text{ м} = \frac{\epsilon}{E} 80 \text{ м} = \frac{\epsilon}{E} R, \quad (1.1)$$

$R = 80 \text{ м}$  при нормальных условиях и растет обратно пропорционально атмосферному давлению  $P$ .

<sup>1</sup> Угол между излученным квантом и излучающим зарядом порядка  $mc^2/E$  ( $m$  — масса электрона,  $c$  — скорость света,  $E$  — энергия электрона, приближенно равная энергии кванта). Этот угол значительно меньше, чем угол, получающийся из-за кулоновского рассеяния.

<sup>2</sup> Я весьма обязан профессору Ландау за указание того, что  $R_0 = 125 \text{ м}$ , а не 250 м, как ошибочно указано в его заметке [14].

<sup>3</sup>  $\epsilon$  для воздуха с учетом эффекта Ферми [19] равно  $10^8 \text{ эв}$  [14].

Средняя плотность  $\bar{\rho}(E)$  заряженных частиц с энергией  $E$  получается делением на  $\pi r^2$  их числа, равного [12, 13]

$$\frac{A(E_0Et) e^{\varphi(E_0Et)}}{E},$$

где  $E_0$  — энергия первичной частицы, создающей ливень;  $t$  — расстояние, пройденное ливнем (в лавинных единицах длины):

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_E &= \frac{E^2}{\varepsilon^2} \frac{e^{\varphi(E_0Et)} A(E_0Et)}{\pi R^2 E}, & r < \frac{\varepsilon}{E} R, \\ \bar{\rho}_E &= 0, & r > \frac{\varepsilon}{E} R. \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.2) получено, считая, что в пределах площади  $\pi r^2$  величина  $\rho_E$  является постоянной. Это на самом деле неверно. При  $\sqrt{\theta_{\pm}^2} \ll 1$  распределение в пределах  $\pi r^2$  меняется от центра к периферии на величину порядка единицы. Так как частицы с заданной энергией могут быть и вне  $\pi r^2$ , причем их число вне  $\pi r^2$  немногим меньше, чем внутри его, можно думать, что совершается ошибка не более нескольких десятков процентов, когда  $\bar{\rho}_E$  получается делением числа частиц с энергией  $E$  на  $\pi r^2$ . Эта ошибка мало зависит от энергии, и поэтому из  $\bar{\rho}_E$  получается  $\rho$  с погрешностью того же порядка в отношении абсолютной величины, но с точной зависимостью  $\rho$  от  $r$ , получение чего является нашей основной задачей.

Заметим, что распределение частиц заданной энергии по расстояниям от оси ливня (Вилльямс [15], Ферми [16]) не является гауссовым, так как частицы одной и той же энергии проходят различный путь. Во всяком случае, при  $r > \sqrt{r^2}$  вероятность найти частицу очень быстро падает с расстоянием, так что без большой погрешности мы можем считать эту вероятность равной нулю (как это сделано в (1.3)).

Если нас интересует полная плотность заряженных частиц на расстоянии  $r$  от оси ливня, мы должны проинтегрировать  $\bar{\rho}_E$  по энергиям, причем учесть, что частицы, имеющие достаточно большие энергии, не могут отклониться на расстояние  $r$  от оси. Максимальная энергия частицы, могущей отклониться на заданное расстояние от оси ливня, равняется

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \varepsilon \frac{R}{r}, & y_{\min} &= \ln \frac{E_0}{E_{\max}} = \ln \frac{E_0}{\varepsilon} \frac{r}{R} = \eta - \ln \frac{R}{r}, \\ & & R &= 80 \text{ м.} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Все здесь и в дальнейшем (кроме очевидных исключений) относится к воздуху при нормальных условиях.

Для получения  $\rho(r)$  мы должны проинтегрировать  $\bar{\rho}_E$  по энергиям, выбрав в качестве верхнего предела интегрирования (1.3)<sup>1</sup>

$$\rho(r) = \int A e^{\varphi} \frac{E^2}{\varepsilon^2} \frac{dE}{\pi R^2 E} = \int A e^{\varphi - 2y} dy \frac{E_0^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{\pi R^2}.$$

В первом приближении этот интеграл может быть взят разложением в ряд подынтегральной функции по степеням  $y - \eta$ , где  $\eta = \ln(E_0/\varepsilon)$ . Очевидно, что главную роль в интеграле играют энергии порядка (1.3), т. е. большие по сравнению с  $\varepsilon$ . Поэтому мы можем в качестве нижнего предела интегрирования подставить величину порядка  $\varepsilon$  ( $y_{\max} \approx \eta$ ), так как этот предел несуществен. (При  $E \ll \varepsilon$   $E A e^{\varphi}$  падает с уменьшением энергии [12].)

Обозначая  $(d \ln A / dy)_{\eta} = q$ , получаем

$$\frac{E_0^2}{\pi R^2 \varepsilon^2} (A e^{\varphi - 2y})_{\eta} \int_{\eta - \ln \frac{R}{2}}^{\eta} \exp[(q + s - 2)y - \eta] dy = \frac{(A e^{\varphi})_{\eta}}{\pi R^2 (2 - q - s)} \times \\ \times \left[ \exp\left[(q + s - 2) \ln \frac{r}{R}\right] - 1 \right] = \frac{(A e^{\varphi})_{\eta}}{\pi R^2} \frac{1}{2 - s - q} \left(\frac{R}{r}\right)^{2 - s - q}. \quad (1.4)$$

Для ливня, начинающегося от электрона [13, стр.284],  $q = 0,3 \frac{1}{t}$ ;

для ливня, начинающегося от фотона,  $q = 0,2 \frac{1}{t}$ . При выводе (1.4) мы считали, что  $2 - s - q$  должно быть больше нуля, так как в противном случае ( $s > 2 - q \approx 2$ ,  $q \ll 1$ ) мы имеем дело с ливнем, находящимся далеко за максимумом частиц в нем. В таком ливне доля частиц большой энергии ( $E \gg \varepsilon$ ) очень мала, и поэтому уплотнение частиц вблизи оси в нем малоб. Ясно, что в явлениях, связанных с уплотнением частиц в ливнях вблизи оси, главную роль будут играть ливни с  $s$ , отличающимся от  $2 - q$ . В дальнейшем это будет подробно показано. Так как  $(A e^{\varphi})_{\eta}$  есть число частиц  ${}^2 N_{\eta}$  в ливне, имеющих энергию, большую, чем  $\varepsilon$  на данной глубине, то (1.4) можно записать так:

$$\rho(r) = \frac{N_{\eta}}{\pi R^2 (2 - s - q)} \left(\frac{R}{r}\right)^{2 - s - q}. \quad (1.5)$$

При  $s = 1$  (максимум ливня) это выражение было получено<sup>3</sup> в [4—7].

Заметим, что  $N_{\eta}$  отличается небольшим численным фактором  $\approx 1$  от полного числа частиц на данной глубине  $N_0$ :  $N_{\eta} = \text{const} \cdot N_0$ ,  $\text{const} \approx 1$  и мало зависит от  $t$  и  $E_0$  (исключая очень малые  $t$ ).

<sup>1</sup> Все обозначения ( $\varphi$ ,  $\eta$ ,  $s$  и другие) такие же, как в [12] и [13].

<sup>2</sup> Ради краткости мы все время говорим о частицах, имея в виду заряженные частицы.

<sup>3</sup> Не считая небольшой поправки, связанной с  $q$ .

Формула (1.5) неприменима при очень малых  $r$ , так как разложение  $\varphi + \ln A$  в ряд по степеням  $y - \eta$  перестает сходиться. Если разложить  $\varphi + \ln A$  с точностью до членов второго порядка в  $y - \eta$ , то при  $y = y_{\min}$  получаем [12, 13]:

$$\begin{aligned} (\varphi + \ln A)_{y_{\min}} &\approx (\varphi + \ln A)_\eta + (s + q)(y_{\min} - \eta) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_\eta (y_{\min} - \eta)^2 = (\varphi + \ln A)_\eta - \\ &- (s + q) \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{t \lambda_1''(s)} \ln^2 \frac{R}{r}, \quad (1.6) \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{1}{[\partial y / \partial s]} = \frac{1}{t \lambda_1''(s)}. \end{aligned}$$

В члене второго порядка в (1.6) мы не пишем  $\partial^2 \ln A / \partial y^2$  ввиду его малости. Когда член второго порядка в (1.6) становится порядка единицы, разложение, приведенное к (1.5), перестает быть применимым. Отсюда определяется минимальное значение  $r_{\min}$ , при котором еще можно пользоваться (1.5):

$$\ln \frac{R}{r_{\min}} = \sqrt{2t \lambda_1''}, \quad r_{\min} = e^{-\sqrt{2t \lambda_1''}} R. \quad (1.7)$$

Например, при  $t_s = 1$  (максимум ливня),  $t = \frac{2}{3} 26 = 17,3$  (глубина, примерно соответствующая Юнгфрауих [1—3], где производились некоторые из измерений Оже и его сотрудников) получаем:

$$\begin{aligned} r_{\min} &= R e^{-\sqrt{2 \cdot 17,3 \cdot 1,56}} = R e^{-7,35} = \frac{R}{10^3} \frac{2}{3} = \frac{R}{1500}, \\ r_{\min} &= \frac{80 \cdot 10^3}{1500} \approx 5 \text{ см}. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемых условиях можно пользоваться (1.5) вплоть до расстояний от оси ливня, равных примерно 10 см, если речь идет о плотности частиц в лавинном ливне, образованном частицей заданной энергии.

Можно получить более точное, чем (1.5), выражение для  $\rho(r)$ , которое, правда, не имеет простого аналитического вида типа (1.5). Именно, интеграл (1.4), определяющий  $\rho(r)$ , приводится при помощи новой переменной  $z = y + \ln R/r$  к следующему виду:

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \frac{E_0^2}{\pi R^2 e^2} \int_{\eta}^{\eta + \ln \frac{R}{r}} A \exp \left[ \varphi \left( t, z - \ln \frac{R}{r} \right) \right] \exp \left( -2z + 2 \ln \frac{R}{r} \right) dz = \\ &= \frac{E_0^2}{\pi r^2 e^2} \int_{\eta}^{\eta + \ln \frac{R}{r}} A \exp \left[ \varphi \left( t, z - \ln \frac{R}{r} \right) - 2z \right] dz. \end{aligned}$$

В полученном выражении главную роль играют  $z$ , близкие к нижнему пределу  $\eta$  (считая, что  $s\left(t, \eta - \ln \frac{R}{r}\right) < 2$ ). Поэтому является законным разложение  $\left[s_1 = s\left(t, \eta - \ln \frac{R}{r}\right), q_1 = q\left(t, \eta - \ln \frac{R}{r}\right)\right]$ :

$$Ae^\varphi = [Ae^\varphi]_{\eta - \ln \frac{R}{r}} \exp [(s_1 + q_1)(z - \eta)].$$

При помощи этого разложения находим  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E_0^2}{\pi r^2 g^2} e^{-2\eta} \int_{\eta}^{\eta + \ln \frac{R}{r}} \exp [(s_1 + q_1 - 2)(z - \eta)] dz (Ae^\varphi)_{\eta - \ln(R/r)} = \\ &= \frac{(Ae^\varphi)_{\eta - \ln(R/r)}}{\pi r^2} \frac{1}{2 - s_1 - q_1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.8) можно получить (1.5), если произвести разложение  $(\varphi + \ln A)_{\eta - \ln(R/r)}$  в ряд по степеням  $\ln(R/r)$  и пренебречь разницей между  $s$  и  $s_1$  ( $q$  и  $q_1$ ). (1.8) является значительно более точным выражением, чем (1.5), если  $s_1 < 2$ , так как (в отличие от (1.5), где играет роль разложение в ряд  $\varphi + \ln A$  для интервала изменения независимой переменной  $y$ , равного  $\ln(R/r)$ ) в (1.8) мы использовали разложение в ряд по степеням  $z - \eta$  только для интервала изменения  $z$ , равного  $1/(2 - s_1 - q_1)$ <sup>1</sup>. Этот интервал крайне слабо зависит от  $r$  ( $s$  — очень медленно меняющаяся функция своего аргумента) и, кроме того, он порядка единицы, в то время как  $\ln(R/r)$  может быть равным 7—8. При помощи разложения типа (1.6) можно оценить точность формулы (1.8). Она оказывается равной

$$\frac{1}{2} \frac{1}{t \lambda''(s_1) (s_1 + q_1 - 2)^2}.$$

При  $t = 17,3$ ,  $s_1 = 1$  неточность (1.8) равна 2%. Эта неточность мало зависит от  $r$ .

Из (1.5) следует, что вблизи оси ливня имеет место уплотнение частиц. В максимуме частиц ливня  $\rho \sim 1/r$ ; перед максимумом  $\rho$  растет с уменьшением  $r$  быстрее, чем  $1/r$ . За максимумом  $\rho$  растет медленнее, чем  $1/r$  при уменьшении  $r$ . Такое поведение  $\rho$  понятно, потому что перед максимумом ливень богаче частицами больших энергий ( $E \gg \varepsilon$ ), а за максимумом беднее ими. Так как уплотнение частиц вблизи оси обязано частицам большой энергии, ясно, что ливень за максимумом будет более размытым, чем в максимуме, а в максимуме частиц более размытым, чем до максимума.

Зависимость  $\rho$  от  $E_0$  дается выражениями  $(Ae^\varphi)_{\eta - \ln(R/r)}$  в (1.8) или  $(Ae^\varphi)_\eta$  в (1.5). Согласно (1.5)  $\rho$  пропорционально числу частиц

<sup>1</sup> Такая разница является следствием того, что в (1.5) мы разлагали вблизи  $y = \eta$  ( $E = \varepsilon$ ), а в (1.8) вблизи существенных энергий  $\varepsilon \frac{R}{r}$  ( $y = \eta - \ln \frac{R}{r}$ ).

$N_\eta$ , имеющих энергию, большую, чем  $\varepsilon$ .  $N_\eta$  отличается только численным множителем порядка единицы от полного числа частиц  $N_0$  в ливне. При  $s = 1$  (максимум числа частиц в ливне)  $N_0$  равно [14, 17, 18]

$$N_0 = \frac{0,3E_0}{\sqrt{\ln \frac{E_0}{\varepsilon}} \varepsilon}.$$

Следовательно, вблизи максимума<sup>1</sup>

$$\rho = \text{const} \frac{0,3E_0}{\pi r R \varepsilon \sqrt{\ln \frac{E_0}{\varepsilon}}}, \quad \text{const} \sim 1. \quad (1.9)$$

В заключение отметим, что при очень малых  $r$  (например, меньших, чем (1.7))  $\rho$  будет возрастать медленнее с уменьшением  $r$ , чем по формуле (1.5). Этот вывод следует из того обстоятельства, что при очень больших энергиях распределение частиц по энергиям убывает быстрее с ростом энергии, чем по закону  $dE/E^{s(t,\eta)+1}$  [ $s = \text{const} = s(t - \eta)$ ], который отбрасывает за применимости (1.5).

Зависимость  $\rho$  от  $r$ , очевидно, должна приводить к зависимости числа совпадений между двумя счетчиками от расстояния между ними (§ 3).

## § 2. Корреляционный эффект и вызванная им зависимость совпадений от расстояния

Наряду с эффектом плотности, приводящим к зависимости числа совпадений от расстояния, существует еще другой эффект, приводящий к такой зависимости (правда, с другой функцией от расстояния в выражении для числа совпадений). Наличие другого эффекта, который имел бы место даже при постоянной, не зависящей от  $r$  плотности  $\rho$ , обязано своеобразной корреляции, которая иногда существует между положением двух частиц в ливне. Именно когда происходит образование двух частиц в ливне (+ и — электронов при образовании пары, и ли электрона и фотона при тормозном излучении), образующиеся две частицы находятся в одном и том же месте пространства (отвлекаясь от совершенно несущественной разницы положений частиц порядка  $\hbar^2/me^2 = = 5 \cdot 10^{-9}$  см). Поэтому, если образование двух частиц произошло недалеко от счетной системы, пара не успеет разойтись на большое расстояние (1.4). Обе частицы будут распределены на небольшой площади, благодаря чему их плотность окажется повышенной. Вклад совпадения частиц, образованных недалеко от системы, должен сильно зависеть от расстояния  $D$  между счетными системами, так как при уменьшении этого расстояния считаеые частицы смогут образоваться на все меньшем расстоянии  $l$  от системы. Минимальные расстояния  $l_{\min}$  определяются из условия, чтобы

<sup>1</sup> Пренебрегая величинами порядка  $q$  в (1.5) и (1.8).

частицы успели разойтись на расстояние, не меньшее, чем расстояние между счетными системами. Так как число совпадений, связанное рассматриваемому корреляционному эффекту, сильно зависит от  $l_{\min}$ , то оно оказывается очень чувствительным к изменению  $D$ .

Определим зависимость плотности образовавшихся в одном месте двух частиц от пройденного ими пути. Как известно [15, 16], средний квадрат угла рассеяния  $\overline{\theta}_l^2$ , обязанный многократному рассеянию, пропорционален пройденному частицей расстоянию  $l$ , если не учитывать потери энергии частицами. (Этот неучет законен, ибо в корреляционном эффекте главную роль играют частицы, проходящие малые пути, так что потери энергии таких частиц малы).  $\overline{\theta}_l^2$  для электрона ( $\pm$ ) с энергией  $E$  имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_l^2 &= \frac{8\pi Z^2 e^4}{E^2} n \left( \ln \frac{a_0}{\lambda Z^{1/3}} \right) l = \frac{\pi m c^2 L_i}{2Z\alpha L_r E} l \frac{L_r^2}{L_i^2} \frac{32Z^4 \alpha^2 n}{\pi} \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \ln \frac{a_0}{\lambda Z^{1/3}} = \\ &= \left( \frac{\varepsilon}{E} \right)^2 \frac{l}{X} \frac{8\alpha Z^2}{\pi} \frac{L_r}{L_i^2} \ln \frac{a_0}{\lambda Z^{1/3}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$L_i = \ln \frac{m c^2}{I Z} 0,2 A Z \frac{\varepsilon}{m c^2}; \quad L_r = \ln \frac{190}{\hbar^{1,3}}.$$

$X$  — радиационная единица длины;  $n$  — число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ;  $a_0 = \hbar^2/mc^2$ ;  $2\pi\lambda$  — длина волны;  $\alpha = e^2/\hbar c$ ;  $L_i$  — логарифм, входящий в выражение для потерь энергии электронами из-за столкновений с атомными электронами (ионизационные потери и потери на образование  $\delta$ -электронов). Главную роль, как будет показано ниже, в корреляционном эффекте играют частицы с энергиями порядка  $\varepsilon$ . Для них необходимо учитывать эффект Ферми [19] при определении ионизационных потерь. Как было показано Ландау<sup>1</sup>, эффект Ферми приводит к замене в  $L_i (E/mc^2)^2$  ( $m$  — покоящаяся масса,  $Z$  — заряд ядра,  $c$  — скорость света) выражением

$$0,2AZ \quad \text{при} \quad E \gg mc^2 \sqrt{0,2AZ}, \quad (2.2)$$

$A$  — атомный объем. Если  $E = \varepsilon$ , то в воздухе при  $\varepsilon = 200mc^2$ ,  $A = 22\,400$ ,  $Z = 7,2$  условие (2.2) уже начинает выполняться:

$$E/mc^2 = 200 > \sqrt{224 \cdot 10 \cdot 7,2} = 15 \cdot 12 = 180.$$

Здесь следует отметить, что  $L_r$  — логарифм, входящий в эффективные сечения для тормозного излучения и для образования пар, — определен при малых  $Z$  с не очень большой точностью ввиду недостаточно хорошей применимости метода Томаса — Ферми при малых  $Z$ . Для наших целей эта неточность несущественна.

<sup>1</sup> Устное сообщение.

При помощи (2.4) находим поперечное отклонение частицы, прошедшей путь  $l$ , считая при этом угол отклонения частицы малым<sup>1</sup> ([16], стр. 268, формула (1.68))

$$\sqrt{l_i^2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon^2}{3E^2}} \frac{l^{3/2}}{\sqrt{X}} \sqrt{2 \frac{8\alpha Z^2}{\pi} \frac{L_r}{L_i}}. \quad (2.3)$$

В (2.3) используется равенство  $\ln(a_0/\lambda Z^{1/3}) = 2L_r$ , имеющее место при  $\hbar c/\lambda = \varepsilon$ . Учитывая сказанное после (1.2), плотность частиц, соответствующая (2.3), равна

$$\rho_l = \frac{3}{32\pi} \frac{X}{l^3} \frac{L_i^2}{L_r^2} \frac{\pi}{\alpha Z^2} \frac{E^2}{\varepsilon^2}, \quad (2.4)$$

если поперечное расстояние от первоначального направления движения меньше, чем

$$\sqrt{\frac{32}{3}} \frac{\varepsilon}{E} \frac{l^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{L_r}{X^{1/2}} \sqrt{\alpha Z^2} \frac{L_r}{L_i}.$$

В противоположном случае  $\rho_l = 0$ .

Пусть на расстоянии  $l$  от счетной системы образуется пара заряженных частиц с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ . Расстояние  $l$  отсчитываем по прямой, перпендикулярной к линии, соединяющей обе счетные системы  $A$  и  $B$ . Вероятность  $W$  того, что частицы зарегистрируются одновременно двумя системами  $A$  и  $B$ , будет пропорциональна эффективным площадям  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$ , если  $\rho\sigma_A \ll 1$  и  $\rho\sigma_B \ll 1$ . Ниже будет показано, что это условие выполняется. Расстояние от места образования частиц до  $A$  и  $B$  можно считать одинаковым, так как  $l \gg D$ :

$$W = 2 \frac{X^2 L_i^4 E_1^2 E_2^2}{\alpha^2 Z^4 l^6 \varepsilon^4} \sigma_A \sigma_B \frac{9}{1024}. \quad (2.5)$$

Множитель 2 появляется из-за того, что частица 1 может быть зарегистрирована как первым, так и вторым счетчиками (соответственно частица 2 будет регистрироваться вторым или первым счетчиком). Выражение (2.5) нужно проинтегрировать по различным местам образования частиц в плоскости  $l = \text{const}$ . Вводя полярные координаты  $y, \varphi$ , мы должны интегрировать по  $y$  от 0 до  $y_{\text{max}}$ , равного

$$\sqrt{\frac{32}{3}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} E} \frac{L_r}{L_i} \frac{l^{3/2}}{X^{1/2}} \sqrt{\alpha Z^2}, \quad (2.6)$$

$E$  — наибольшая энергия из  $E_1$  и  $E_2$ .

В результате интегрирования получается ( $E_1 > E_2$ )

$$\frac{9}{512} \frac{32}{3} \frac{\pi X^2 L_i^4 E_1^2 E_2^2 \sigma_A \sigma_B}{\alpha^2 Z^4 L_r^4 \varepsilon^4} \frac{\varepsilon^2}{E_1^2} \frac{L_r^2}{L_i^2} \frac{l^3}{X} \alpha Z^2 = \frac{3}{16} \pi \frac{X L_i^2 E_2^2 \sigma_A \sigma_B}{\alpha Z^2 L_r^2 \varepsilon^2}. \quad (2.7)$$

<sup>1</sup> Угол  $\sqrt{\theta_i^2}$  мал даже при  $l \approx X$  (он составляет при  $E = \varepsilon 0,3 \text{ рад}$  [14]). В нашем случае  $l \ll X$ .



Число совпадений  $n_c$  получится из (2.7) интегрированием по всем парам, образующимся в  $1 \text{ см}^3$  в единицу времени, и интегрированием по  $l$ :

$$n_c = \frac{3XL_i^2\sigma_A\sigma_B}{16L_r^2\varepsilon^2\alpha Z^2} \int dE_2 dE_0 dl f(E_2 E_0) E_2^2 \frac{1}{l^3}, \quad l > l_{\min};$$

$f(E_2 E_0)$  — число пар, образующихся в  $1 \text{ см}^3$  в единицу времени с энергиями компонент пар, равными  $E_2$  и  $E_0 - E_2$  ( $E_0 - E_2 = E_1$ ).  $E_0$  — энергия фотона, образующего пару:

$$l_{\min} = \left[ \frac{\sqrt{3}V\pi}{\sqrt{32}} \sqrt{X} D (\sqrt{\alpha Z^2})^{-1} \frac{L_i}{L_r} \left( \frac{\varepsilon}{E_0 - E_2} \right)^{-12/3} \right]. \quad (2.8)$$

Сначала интегрируем по  $l$ :

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{3}{32} \pi \frac{XL_i^2\sigma_A\sigma_B}{L_r^2\varepsilon^2\alpha Z^2} \left( \frac{\sqrt{\alpha Z^2} L_r \varepsilon \sqrt{32}}{\sqrt{3} \sqrt{\pi X} D L_i} \right)^{1/3} \int dE_2 dE_0 f(E_2 E_0) \frac{E_2^2}{(E_0 - E_2)^{4/3}} = \\ &= \frac{L_i^{2/3} \sigma_A \sigma_B X^{1/3} \left( \frac{3}{32} \right)^{1/3}}{\pi^{-1/3} L_r^{2/3} \varepsilon^{2/3} D^{4/3} (\alpha Z^2)^{1/3}} \int \frac{E_2^2 dE_2 dE_0 f(E_2 E_0)}{(E_0 - E_2)^{4/3}}, \quad E_2 < E_0/2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из (2.9) мы видим, что число совпадений, обязанных корреляционному эффекту, очень быстро растет при уменьшении расстояния между счетчиками ( $\sim 1/D^{1/3}$ ). Число совпадений обратно пропорционально расстоянию между счетчиками в степени  $4/3$ . Как будет показано в § 3, зависимость числа совпадений от расстояния, обязанная зависимости  $\rho$  от  $r$ , приводит к значительно более медленному возрастанию числа совпадений при уменьшении  $D$ . Поэтому при очень малых  $D$  корреляционный эффект может стать более существенным.

Для определения абсолютного значения  $n_c$  необходимо вычислить интеграл, входящий в (2.9). Точное вычисление требует знания функций распределения фотонов, образующих пары. Мы здесь ограничимся оценкой порядка величины (2.9). Как будет видно в § 3, для анализа данных относительно ливней Оже достаточно знать только порядок величины  $n_c$ .

Обращаясь к интегралу

$$\int dE_0 \int f(E_2 E_0) dE_2 \frac{E_2^2}{(E_0 - E_2)^{4/3}}, \quad E_2 < E_0/2, \quad (2.10)$$

можно доказать, что главную роль в нем играют  $E_2$  и  $E_0$  порядка  $\varepsilon$ . Это следует главным образом из того, что при  $E_0, E_2$  равновесный лавинный спектр убывает примерно как  $1/E_0^2$  [20].

В самом деле,  $f(E_2 E_0)$  определяется при помощи функции распределения фотонов  $\varphi$  следующим образом:

$$f(E_2 E_0) = \varphi(E_0) 4xZ^2 L_r \frac{{}^{2/3}E_2(E_0 - E_2) + (E_0 - E_2)^2 + E_2^2}{E_0^3} \left( \frac{e^1}{mc^2} \right)^2 n \quad (2.11)$$

(множитель при  $\varphi$  есть дифференциальное эффективное сечение для образования пары фотонов с энергией  $E_0$  [21], умноженное на число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ).

Подставляем (2.11) в (2.10):

$$\begin{aligned} & 4\alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) nL_r \int \frac{dE_0 \varphi(E_0)}{E_0^3} \int \frac{dE_2}{(E_0 - E_2)^{1/3}} \left[ (E_2 - E_0)^2 \frac{4}{3} + \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} (E_2 - E_0) E_0 + E_0^2 \right] [(E_2 - E_0)^2 - 2E_0(E_0 - E_2) + E_0^2] = \\ & = 0,44\alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right) nL_r \int E_0^{2/3} \varphi(E_0) dE_0. \end{aligned}$$

Из только что проведенного интегрирования по  $E_2$  видно, что главную роль в интеграле по  $E_2$  играют  $E_2$  порядка  $E_0$ . В интеграле

$$\int dE_0 E_0^{2/3} \varphi(E_0) \quad (2.12)$$

главную роль играют  $E_0 \sim \varepsilon$ , так как при  $E_0 \gg \varepsilon$   $\varphi \sim 1/E_0^2$  [20], а при  $E_0 \ll \varepsilon$   $\varphi$  стремится к постоянному значению [12, стр. 220]. (Основная масса частиц, имеющих энергию  $\sim \varepsilon$ , принадлежит, как известно, к равновесному спектру. Таким образом,  $n_c$  обязано равновесному<sup>1</sup> спектру.)

Оставляя точное вычисление (2.12) для отдельного сообщения, мы здесь используем приближенное равенство

$$\int dE_0 E_0^{2/3} \varphi(E_0) \approx \varepsilon^{2/3} N_p \quad (2.13)$$

( $N_p$  — общее число фотонов, падающих на  $1 \text{ см}^2$  в единицу времени перпендикулярно линии, соединяющей оба счетчика).

При помощи (2.13) получаем окончательное выражение для  $n_c$ :

$$\begin{aligned} n_c &= 0,44 \left( \frac{3}{32} \right)^{1/3} \frac{1}{\pi^{-1/3}} \alpha Z^2 n \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 L_i \varepsilon^{2/3} N_p \frac{L_i^{2/3} \sigma_A \sigma_B X_1^{1/3}}{L_r^{2/3} \varepsilon^{2/3} D^{4/3} (\alpha Z^2)^{1/3}} = \\ &= 0,11\pi \frac{\sigma_A \sigma_B N_p^{3/3}}{X^2 \varepsilon^{2/3} \pi^2 \varepsilon^2 (32)^{1/3}} \left( \frac{L_i}{L_r} \right)^{2/3} \frac{1}{(\alpha Z^2)^{1/3}} = \frac{0,11 \sigma_A \sigma_B N_p}{\pi^{-1/3} X_1^{2/3} D^{1/3}}, \quad (2.14) \\ X_1 &= X \frac{L_r}{L_i} \sqrt{\alpha Z^2 \frac{32}{3}}. \end{aligned}$$

В воздухе при нормальных условиях  $X_1 = 90 \text{ м}$ .

$N_p$  в (2.14) означает число фотонов, движущихся перпендикулярно линии, соединяющей два счетчика. По отношению к фотонам, движущимся под углом  $\theta$  к перпендикуляру, расстояние  $D$  заменяется на  $D \cos \theta$ . Считая линию, соединяющую оба счетчика,

<sup>1</sup> Что касается мезона.

горизонтальной, мы можем легко проинтегрировать (2.14) по всем направлениям движения фотонов<sup>1</sup>:

$$n_c^0 = 2\pi n_c \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{(\cos \theta)^{4/3}} = \frac{2\pi n_c}{5} \cdot 3.$$

Выражаем здесь  $N_p$  через интегральное число фотонов:

$$N_p^0 = N_p 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} N_p.$$

Окончательное выражение для  $n_c^0$ :

$$n_c^0 = \frac{0,25 A \sigma_B N_p^3}{\pi^{-1,3} \lambda_1^{-2/3} D^{4/3}}. \quad (2.15)$$

При выводе (2.14) мы считали, что  $l_{\text{эф}} \gg 0$ . Отношение  $l_{\text{эф}}/D$  согласно (2.8) при энергиях порядка  $\epsilon'$  равно<sup>2</sup>

$$\frac{l_{\text{эф}}}{D} \approx \left( \sqrt{\frac{3\pi}{32}} \sqrt{X} D^{-1/2} \frac{L_i}{\sqrt{\alpha Z^2} L_r} \right)^{2/3} \gg \left( \frac{X}{D} \right)^{1/3} \gg 1. \quad (2.16)$$

Докажем далее справедливость нашего предположения

$$\rho \sigma_A \ll 1, \quad \rho \sigma_B \ll 1.$$

Среднее значение  $\rho \sigma$  оказывается равным

$$\rho \sigma \approx \frac{\sigma}{D^2} (\ll 1),$$

если эффективная площадь счетной системы значительно меньше, чем  $D^2$ . Заметим, что если на систему падает ливень, состоящий из  $\nu$  фотонов, то  $\rho \sigma$  нужно умножить на  $\nu$ . Но в равновесном спектре удельный вес ливней с большим  $\nu$  очень мал, так что среднее значение  $\nu$  порядка единицы.

В заключение этого параграфа укажем, что полученные в нем результаты непосредственно применимы к равновесному с мезонами фотонному спектру, хотя при переходе к неравновесному спектру результаты, отличные от полученных, могут ожидать только для ливней с очень малым  $s$ , в которых удельный вес фотонов больших энергий велик. При  $s \sim 1$  наши формулы могут применяться.

Кроме рассмотренного здесь корреляционного эффекта суще-

<sup>1</sup> Равновесный с мезонами фотонный спектр под углом  $\theta$  к вертикали пропорционален  $\cos^n \theta$ ,  $n \approx 2$ . Фотоны с  $\hbar \omega \approx \epsilon$  в подавляющем большинстве принадлежат к равновесному спектру.

<sup>2</sup> Они играют главную роль в (2.12).

стует корреляция, вызванная одновременной регистрацией мезона и созданного им недалеко от счетной системы  $\delta$ -электрона. Простой подсчет показывает, что в воздухе такого типа корреляция мала по сравнению с рассмотренной.

### § 3. Число совпадений, обязанных ливням Оже. [Сравнение теории с экспериментом]

С помощью полученных в § 1 и 2 результатов можно найти выражение для числа совпадений произвольного числа счетных систем как функцию от взаимных расстояний, высоты над уровнем моря и эффективных площадей. В дальнейшем мы ограничимся случаем совпадений двух счетчиков. Совпадения в этом случае могут зависеть от расстояния как за счет зависимости  $\rho$  от  $r$  (§ 1), так и за счет корреляционного эффекта<sup>1</sup>. В § 2 было получено выражение для двукратных совпадений  $n_c$ , обязанных корреляционному эффекту. Мы получим теперь число совпадений  $n_d$ , определяющееся зависимостью  $\rho(r)$ . Вероятность регистраций ливней счетчиком, имеющим площадь  $\sigma$ , пропорциональна  $1 - e^{-\rho(r)\sigma}$ . Поэтому число совпадений  $n_d$  равно

$$n_d = \int \{1 - \exp(-\rho_{E_0}(r)\sigma_A)\} \{1 - \exp(-\rho_{E_0}(r + D')\sigma_B)\} \times \\ \times f(E_0) dE_0 r dr d\varphi. \quad (3.1)$$

Векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{D}'$  — двумерные. Они расположены в плоскости, перпендикулярной к оси ливня. Вектор  $\mathbf{D}'$  по абсолютной величине равен  $D \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между осью ливня и прямой, перпендикулярной к линии, соединяющей оба счетчика;  $f(E_0) dE_0$  — число ливней на  $1 \text{ см}^2$  в единицу времени и создающихся частицей с энергией  $E_0$ .

Угловая зависимость ливней Оже неизвестна. Но из сильного падения числа таких ливней с ростом глубины от Юнгфрауих и до поверхности моря следует резкое падение числа ливней Оже при увеличении их угла с вертикалью ( $\theta$ ). Поэтому в дальнейшем мы будем полагать  $\theta = 0$ .

В отличие от  $n_c$  предположение  $\rho \sigma \ll 1$  не всегда выполняется. Однако мы его введем здесь по следующим основаниям. Как будет показано ниже, экспериментальная зависимость числа совпадений от расстояния дает более сильное возрастание числа совпадений при сближении счетчиков, чем это получается из теории, даже если предположить, что  $\rho \sigma \ll 1$ . Очевидно, что при  $\rho \sigma \gtrsim 1$  теоретическая зависимость  $n(D)$  ( $n = n_d + n_c^0$ ) может только еще больше расходиться с экспериментом.

<sup>1</sup> Корреляционный эффект (§ 2), очевидно, ничего не может дать для трех и более кратных совпадений. В этих случаях нужно рассматривать корреляцию между двукратными совпадениями и третьим счетчиком.

При помощи (1.8) получаем:

$$\begin{aligned}
 n_d &= \iint \frac{r dr d\varphi \sigma_A \sigma_B}{\pi^2 r^2 (\mathbf{r} + \mathbf{D})^2} A(\eta_A, t) A(\eta_B, t) \exp[\varphi(\eta_A, t) + \varphi(\eta_B, t) - v\eta] \times \\
 &\times f_0 d\eta = \iint \frac{d\eta d\varphi \sigma_A \sigma_B A(\eta_A, t)}{\pi^2 r (r^2 + D^2 + 2rD \cos \varphi)} A(\eta_B, t) \exp[\varphi(\eta_A, t) + \\
 &+ \varphi(\eta_B, t) - v\eta] f_0 d\eta, \quad (3.2) \\
 \eta_A &= \eta - \ln \frac{R}{2}, \quad \eta_B = \eta - \ln \frac{R}{|\mathbf{r} - \mathbf{D}|}.
 \end{aligned}$$

Здесь использовано обычно делаемое предположение о характере спектра первичных электронов (+ и -) и квантов [23] (в  $n_d$  главную роль играют такие большие энергии, при которых роль равновесного с мезонами лавинного спектра мала)

$$f dE_0 = f_0 \frac{\varepsilon^v dE_0}{E_0^{v+1}} = f_0 e^{-v\eta} d\eta, \quad v \approx 2. \quad (3.3)$$

Пределы интегрирования по  $r$  будут установлены ниже (см. (3.5)).

После работы Шайна, Джессе и Воллана [22] спектр  $f(E_0)dE_0$  при больших энергиях должен рассматриваться не как спектр частиц, падающих из мирового пространства, а как спектр частиц, создающихся в верхних слоях атмосферы под действием, по всей вероятности, протонов. Для нашего анализа эта разница не играет роли. Существенно только предположение (обычно всеми делаемое), что спектр  $f(E_0)dE_0$  имеется уже в готовом виде в верхних слоях атмосферы. Если это не так и мягкие частицы, образующие этот спектр, создаются вдоль всей атмосферы, результаты нашего анализа могут быть изменены.

В интеграле (3.2) главную роль играют большие энергии (при  $v$  порядка 2). Количество мягких частиц таких больших энергий определяется неравновесной мягкой компонентой, т. е. мягкой компонентой, не являющейся вторичным эффектом мезонов<sup>1</sup>, а продуктом первичного спектра мягких частиц  $f_0 e^{-v\eta} d\eta$ . Именно поэтому при переходе от (3.1) к (3.2) мы использовали (3.3).

Интеграл по  $\eta$  берем обычным образом [12, 13]

$$\begin{aligned}
 n_d &= \frac{f_0}{\pi^2} \int \frac{r dr d\varphi \sigma_A \sigma_B A^2(\eta_1' t)}{r (r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi)} \exp \left[ 2\varphi(\eta_1' t) - v\eta_1' - v \ln \frac{R}{r} \right] \times \\
 &\times \sqrt{\pi \lambda''(s_1) t}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

В показателе и в  $A$  мы можем пренебречь разностью между  $r$  и  $|\mathbf{r} + \mathbf{D}|$ . Подробнее об этом будет сказано ниже (после (3.8)).  $\eta_1'$  определяется из равенства

$$\frac{d \ln A(\eta_1' v)}{d\eta} + s(\eta_1') - \frac{1}{2} v = 0. \quad (3.5)$$

<sup>1</sup> Равновесная мягкая компонента играет главную роль при малых энергиях, для нас не представляющих интереса (см. по этому вопросу, например, [17]).

С хорошей точностью это равенство можно заменить на следующее<sup>1</sup>:

$$s \left( \eta_{эф} - \ln \frac{R}{r}, t \right) = \frac{\nu}{2} \quad (3.5')$$

( $d \ln A/d\eta \ll 1$ ). Решение этого (как и (3.5)) уравнения дает для  $\eta_{эф}$  соотношение

$$\eta_{эф} = \text{const} + \ln \frac{R}{r} = \eta_0 + \ln \frac{R}{r}, \quad (3.6)$$

$\text{const} = \eta_0$  зависит от  $\nu$  и  $t$ .

Согласно (3.6) эффективные энергии зависят от  $r$ , т. е. от расстояния до оси ливня. При различных расстояниях от оси ливня совпадения вызываются, вообще говоря, различными энергиями. Зависимость  $E_{эф}$  от  $r$  не является слабой. Максимальное значение  $\ln R/r$  в экспериментах Оже с сотрудниками [1] было

$$\ln \frac{80 \cdot 10^2}{10} \frac{3}{2} = \ln 1200 = 7,1$$

( $3/2$  появляется из-за изменения атмосферного давления на Юнгфрауих),

$$E_{эф} \left( \frac{R}{1200} \right) - E_{эф}(R) = e^{7,1} = 1200.$$

Энергии, играющие главную роль, меняются в тысячу раз при изменении расстояния между счетчиками от нескольких сотен метров до нескольких десятков сантиметров.

Установим теперь пределы интегрирования по  $r$ :

$$n_d = \frac{i_{05} A^{\nu} B}{\pi^{3/2} R^{\nu}} \sqrt{\lambda''(s_1)} t \exp [2\varphi(\eta'_1) - \nu \eta'_1] A^2(\eta'_1) \times \\ \times \int \frac{dr r^{\nu-1} d\varphi}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi}. \quad (3.7)$$

В качестве верхнего предела интегрирования здесь нужно выбрать величину порядка радиуса ливня, т. е. того расстояния от оси, которое имеет большинство частиц в ливне. Вместо радиуса ливня можно подставить средний квадратичный радиус ливня  $R_0$ , равный, согласно Ландау [14], 125 м при нормальном давлении и 190 м на уровне Юнгфрауих. Учитывая, что при гауссовом распределении частиц разница между  $\bar{r}$  и  $\sqrt{r^2}$  составляет  $\frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} = 20\%$ , можно думать, что и в нашем случае не гауссова распределения частиц заданной энергии погрешность, вносимая заменой  $\bar{r}$  на  $\sqrt{r^2}$ , — не более 20%. Разница между  $\bar{r}$  и  $\sqrt{r^2}$  тем больше, чем размытее распределение. Из-за уплотнения частиц вблизи оси подынтегральное выражение в (3.7) показыва-

<sup>1</sup>  $\frac{d \ln A(s)}{dr} = \frac{d \ln A}{ds} \left( \frac{ds}{d\eta} \right)_t = \frac{d \ln A}{ds} \frac{1}{t \lambda''(s)}$  [12].

ет сильный рост при малых  $r$  ( $\rho^2 \sim 1/r^{4-2s}$ ). Поэтому степень размытости нашего распределения меньше, чем у гауссова распределения. Это дает основание думать, что погрешность соотношения  $r_{\max} = R_0$  не более 20%.

Нижний предел для  $r$ , очевидно, равен 0 в том случае, если всюду  $\rho\sigma < 1$ . В противоположном случае минимальное значение для  $r$  получается из условия  $\rho(r_{\min}\sigma) = 1$ . Область меньших  $r$  не играет роли, так как  $(1 - e^{-\rho(r)\sigma A})(1 - e^{-\rho(r)\sigma B})$  при таких  $r$  практически постоянно, а элемент площади  $rdrd\varphi$  быстро падает с уменьшением  $r$ .

Таким образом

$$n_d = \frac{\sigma_A \sigma_B}{\pi^{3/2} R^\nu} f_0 \exp [2\varphi(\eta'_1) - \nu\eta'_1] A_2(\eta'_1) \sqrt{\lambda''(s_1)t} \times \\ \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{\min}}^{R_0} \frac{r^{\nu-1} dr}{r^2 + D^2 - 2rD \cos \varphi} \cdot \quad (3.8)$$

Интегрирование по  $r$  дает различный результат в зависимости от того, что больше,  $\nu$  или 2. Если  $\nu < 2$ , главную роль в (3.8) играют малые  $r$ :

$$n_d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda''(s_1)t} \exp [2\varphi(\eta'_1) - \nu\eta'_1] A^2(\eta'_1) \frac{af_0\sigma_A\sigma_B}{(2-\nu)(D^{2-\nu})R^\nu}, \\ D \gg r_{\min}(\nu); \quad (3.9) \\ n_d = \text{const} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\lambda''(s_1)t} \exp [2\varphi(\eta'_1) - \nu\eta'_1] \times \\ \times A^2(\eta'_1) \frac{bf_0\sigma_A\sigma_B}{(2-\nu)r_{\min}^{2-\nu}R^\nu}, \quad D \ll r_{\min}(\nu),$$

$a$  и  $b$  — численные коэффициенты порядка единицы.

При  $\nu < 2$   $n_d$  обратно пропорционально расстоянию между счетчиками в степени  $2 - \nu$ . Когда  $D \ll r_{\min}$  [ $\rho(r_{\min})\sigma = 1$ ], число совпадений не зависит от  $D$  и остается равным числу совпадений при  $D = r_{\min}$ .

Если  $\nu > 2$ , главную роль в (3.8) играют большие расстояния от оси ливня:

$$n_d = \frac{\sigma_A \sigma_B f_0 2}{\sqrt{\pi} R^\nu (\nu - 2)} \exp [2\varphi(\eta'_1) - \nu\eta'_1] A^2(\eta'_1) (R_0^{\nu-2} - a_1 D^{\nu-2}) \times \\ \times \sqrt{\lambda''(s_1)t}, \quad D \gg r_{\min}(\nu); \quad (3.10) \\ n_d = \text{const} = \frac{2\sigma_A \sigma_B f_0}{\sqrt{\pi} R^\nu (\nu - 2)} (R_0^{\nu-2} - b_1 r_{\min}^{\nu-2}) \sqrt{\lambda''(s_1)t}, \quad D \ll r_{\min}(\nu),$$

$a_1$  и  $b_1$  — численные коэффициенты порядка единицы.

Число совпадений слабо зависит в этом случае от расстояния между счетчиками. Например, если  $\nu = 5/2$ ,  $s = 5/4$ , то, беря  $t = 17,3$  (высота Юнгфрауих), находим [12, 14]  $Ae^{\varphi(\eta, t)}$ :

$$t/\eta'_1 = 1,5; \quad \eta'_1 = 17,3/1,5 = 11,5; \quad \varphi(\eta'_1, t) = 0,95 \cdot 11,5 = 10,9; \\ A = 1/15;$$

$$\rho_{\text{эф}} = \frac{1}{\pi r^2} \frac{e^{10,9}}{15} = \frac{4 \cdot 10^3}{\pi r^2}.$$

Площадь счетчиков в опытах Оже была равна  $100 \text{ см}^2$ .  $r_{\text{min}}$  в этих условиях равно  $\frac{4 \cdot 10^5}{\pi r^2} = 1$ ;  $r_{\text{min}} = 360 \text{ см}$ . Таким образом, при изменении расстояния между счетчиками от  $10 \text{ см}$  до  $2-3 \text{ м}$  число совпадений, вызванных ливнями Оже, вообще не должно меняться больше, чем на несколько процентов, в то время как при изменении  $D$  от  $3$  до  $60 \text{ м}$   $n_d$  должно уменьшиться всего в  $2$  раза. При уменьшении  $D$  от  $2-3 \text{ м}$  до  $10 \text{ см}$  число совпадений не должно зависеть от  $D$ . Такое поведение  $n_d$  резко отличается от полученного Оже с сотрудниками на Юнгфрауих [1] и на Пик дю Миди [2].

Особый случай получается при  $\nu = 2$ . В интеграле (3.8) играют роль как малые, так и большие расстояния:

$$n_d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_A \sigma_B^{j_0}}{R^2} \ln \frac{R_0}{a_2 D} \exp [2\varphi(\eta'_1) - 2\eta'_1] A^2(\eta'_1) \sqrt{\lambda''(s_1) t}, \quad (3.11)$$

$$n_d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_A \sigma_B^{j_0}}{R^2} \ln \frac{R_0}{b_2 r_{\text{min}}} \exp [2\varphi(\eta'_1) - 2\eta'_1] A^2(\eta'_1) \sqrt{\lambda''(s_1) t},$$

$a_1$  и  $b_1$  — постоянные порядка единицы.

Главную роль играют здесь  $\eta'_1$ , соответствующие  $s = 1$ , т. е. такие энергии, которым на данной глубине соответствует максимум частиц. Для них [12]  $\varphi(\eta'_1, t) = t$ ,  $\sigma \approx \frac{1}{2} \frac{0,3}{r^2 \sqrt{t\pi}} e^t$  [13],  $t = 17,3$ ,

$$\rho = \frac{1,8}{50} \frac{10^7}{r^2} = 3,6 \frac{10^5}{r^2} = \left( \frac{800}{r} \right)^2, \quad r_{\text{min}} = 8000 \text{ см} = 80 \text{ м}.$$

$n_d$  не должно, таким образом, зависеть от  $D$  при возрастании  $D$  от  $10 \text{ см}$  до  $50-80 \text{ м}$  и показывает логарифмическое падение при росте  $D$  сверх  $80 \text{ м}$ . Отношение  $n_d(60)/n_d(3)$  получается приближенно равным единице.

Экспериментальное значение [1] на Юнгфрауих для этого отношения равно  $4,5$ .

Из рассмотрения формул (3.6), (3.7) и (3.8) видно, что расстояния  $r$  от оси, играющие наиболее существенную роль, либо велики по сравнению с  $D$  (см. (3.7), (3.8)), либо порядка  $D$  (см. (3.6)). Поэтому  $|r + D|$  и  $r$  всегда имеют одинаковый порядок величины. Этим оправдывается замена  $A(\eta_2)e^{\varphi(\eta_2)}$  на  $A(\eta_1)e^{\varphi(\eta_1)}$ , так как  $|\eta_2 - \eta_1| \lesssim 1$ , разность между  $s(\eta_2)$  и  $s(\eta_1)$  порядка  $[12, 13] 1/\lambda''(s_1)t \approx 0,04$  на Юнгфрауих.

Кроме зависимости  $n_d$  от  $D$ , (3.9), (3.10) и (3.11) дают нам еще зависимость  $n_d$  от  $t$ , т. е. от глубины места наблюдения в атмосфере. Эта зависимость заключена в факторе  $[s'(\eta', t) = 1/2\nu]$

$$\exp [2\varphi(\eta'_1, t) - \nu\eta'_1]. \quad (3.12)$$



Когда  $s < 1$  ( $\nu < 2$ ), число совпадений, обязанных ливням Оже, должно расти по мере увеличения глубины [12, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \varphi(st) - \frac{1}{2} \nu \eta \right] &= -\lambda(s) + s\lambda'(s) - \frac{\nu}{2} \frac{d\eta}{dt} = -\lambda(s) + s\lambda'(s) - \\ &- \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} t\lambda'(s) = -\lambda(s) + \frac{\nu}{2} \lambda'(s) - \frac{\nu}{2} \lambda'(s) = -\lambda(s), \\ \left[ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = s \frac{d}{dt} t\lambda'(s) - \lambda(s) = s\lambda'(s) - \lambda(s); \eta = t\lambda'(s) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Если  $\nu < 2$ ,  $-\lambda(\nu/2) > 0$ , что и доказывает наше утверждение. При  $\nu > 2$   $-\lambda(\nu/2) < 0$ , и число ливней Оже с увеличением глубины падает;  $\nu = 2$  дает число ливней Оже, не зависящее от глубины.

Если считать, что  $\rho\sigma$  больше единицы, число ливней Оже будет падать при увеличении глубины при всяком  $\nu$ . Такой результат является следствием того, что в (3.1)  $\eta_{\text{эф}}$  определяется в этом случае из условия  $\rho\sigma = 1$ . Это означает, что  $Ae^\varphi = \text{const}$  (не зависит от  $t$ ), и вся зависимость от  $t$  переносится на  $e^{-\nu\eta}$ . С ростом  $t$   $\eta$ , дающее заданную величину  $Ae^\varphi$ , растет, а следовательно,  $n_d$  падает. Очевидно при этом, что зависимость  $n_d$  от  $D$  будет иметь более слабый характер, чем полученный из условия  $\rho\sigma \ll 1$ .

Перед тем как произвести сравнение формул (3.9) — (3.11) с опытом, необходимо установить соотношение между совпадениями  $n_c$  (2.15) и  $n_d$ . Для того чтобы это сделать, необходимо зафиксировать значение  $f_0$  в (3.9) — (3.11) и, кроме того, проверить правильность выбора  $R_0$ , сделанного нами. Из измерений числа двукратных совпадений  $n(D)$  можно получить значение  $\sqrt{r^2} \approx R_0$ , пользуясь формулами

$$R_0^2 \approx \overline{r^2} = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^\infty n(D) D^3 dD}{2 \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^\infty n(D) D dD}, \quad (3.14)$$

где  $DdDd\varphi_D$  — элемент площади.

Выражение (3.14) справедливо при  $\rho\sigma \ll 1$ . Но это условие, по-видимому, выполнено в опытах Оже на Юнгфрауих, так как  $n(D)$  в этих опытах сильно меняется при изменении  $D$ , что не могло бы иметь места при  $\rho\sigma \gg 1$ . Доказательство (3.14):

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^\infty n(D) D dD \sim \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^{2\pi} d\varphi_r \int_0^\infty D dD \int_0^\infty r dr \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{D}) = \\ &= \left| \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho r dr d\varphi_r \right|^2, \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^{2\pi} d\varphi_r \int_0^{\infty} D dD \int_0^{\infty} r dr (r^2 + D^2 + 2rD \cos \varphi) \rho(r) \rho(r + D) \approx$$

$$\approx 2 \int_0^{2\pi} d\varphi_r \int_0^{\infty} r^3 dr \rho(r) \int_0^{2\pi} d\varphi_D \int_0^{\infty} D dD \rho(D) = 2\bar{r}^2 \left| \int_0^{2\pi} r dr d\varphi(r) \right|^2,$$

$$\bar{r}^2 = I_2/2I_0.$$

Если обратиться к экспериментальной кривой для  $n(D)$ , полученной Оже с сотрудниками на Юнгфрауих [3], то интегралы  $\int_0^{\infty} n(D) D^3 dD$  и  $\int_0^{\infty} n(D) D dD$  не сходятся, что видно из следующей таблицы:

$D, м^*$	1	10	50	75	140	270
$n(D)D^2$	$0,4 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	$37 \cdot 10^3$	$56 \cdot 10^3$	$74 \cdot 10^3$	$115 \cdot 10^3$
$n(D)D^4$	$0,4 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^4$	$10^7$	$3 \cdot 10^8$	$15 \cdot 10^8$	$85 \cdot 10^8$

\* Здесь выделены большие  $D$  как играющие главную роль.

Заметим, что если экстраполировать кривую Оже до  $D > 300 м$  на основании наклона кривой в интервале от 100 до 300 м, то интегралы  $I_0$  и  $I_2$  расходятся. Поэтому  $n(D)$  должна при  $D > 300 м$  убывать быстрее, чем в интервале 100—300 м.

Очевидно, что в интегралах  $I_0$  и  $I_2$  главную роль играют расстояния, большие, чем 300 м. Поэтому из рассматриваемых опытов невозможно определить экспериментальный радиус ливня. Можно лишь утверждать, что он должен быть больше, чем  $300/\sqrt{2} = 214 м$ . Такой вывод основан на том, что если в интеграле  $I_0 \sim \int n(D) D dD$  главную роль играют  $D > 300 м$ , то в интеграле  $I_2 \sim \int n(D) D^3 dD$  будут играть главную роль заведомо большие расстояния. Сравнивая полученную цифру с теоретическим значением  $R_0 = 190 м$ , мы видим, что цифра, данная Ландау, лучше сходится с экспериментальной. Представляется крайне желательным определение числа совпадений при расстояниях между счетчиками, значительно больших, чем 300 м, — максимальные расстояния в опытах Оже с сотрудниками. Опыты с совпадениями счетчиков, раздвинутых на расстояния вплоть до 1 км, должны дать возможность точного экспериментального определения радиуса ливня.

Из согласия между лавинно-теоретическим радиусом  $R_0$  и экспериментом следует, что периферия ливня состоит преимущественно из электронов (+ и —) и фотонов, поведение которых удовлетворительно описывается лавинной теорией. Поэтому мы можем, сравнивая число совпадений на больших расстояниях с формулами (3.8) — (3.11), получить значение для  $f_0$ . Мы этого, однако, делать не будем ввиду обнаруженных ниже расхождений между

теорией и экспериментом. Число совпадений  $n_c^0$  может играть роль на Юнгфрауих только при  $D$  порядка нескольких сантиметров. В самом деле,  $n_c^0$  при  $\sigma_A = \sigma_B = 10^2$  см равно ( $N_p^0 \approx 1/\text{см}^2$  в минуту, полагая  $N_p^0$  порядка числа электронов (+ и -) на этой же высоте)

$$n_c^0 = 10/D^{4/3}. \quad (3.15)$$

Экспериментальное число совпадений при  $10 \text{ см} < D < 60 \text{ м}$  передается формулой

$$5 \sqrt{10/D}. \quad (3.16)$$

Из сравнения (3.13) и (3.12) следует, что при  $D \geq 3 \text{ см}$   $n_c^0$  не играет роли. На поверхности моря  $n_c^0 = 1/D^{4/3}$ , а экспериментальное число совпадений при  $D=4 \text{ м}$  равно  $0,5 \sqrt{10/400}$ .

Если при  $D \ll 4 \text{ м}$  падение экспериментального числа совпадений, обязанных ливням Оже, по отношению к Юнгфрауих происходит также в 10 раз, то  $n_c^0$  играет роль при  $D < 10 \text{ см}$ .

На Юнгфрауих наблюдаемое Оже с сотрудниками число совпадений не связано с  $n_c^0$ . Корреляционный эффект играет роль только при очень малых  $D$  и на больших глубинах или при измерении в легких конденсационных веществах (например, в воде).

Зависимость  $n$  от  $D$ , полученная Оже в интервале от 10 см до 50—100 м, может быть хорошо аппроксимирована законом  $n \sqrt{D} = \text{const}$ , как видно из следующего вывода:

$D, \text{ м}$	0,1	0,3	1	4	10	20	50	75
$n$	300	150	100	50	35	25	15	10
$n \sqrt{D}$	90	80	100	100	110	110	105	85

Таким образом,  $n(D)$  сильно зависит от  $D$ . Такого типа зависимость требует применения формул типа (3.6). Но уже при  $s = 1$  с логарифмической (не удовлетворяющей опыту) зависимостью  $n(D)$  величина  $r_{\min}$  равна 80 м. Если  $\nu = 3/2$  (чтобы при  $D \gg r_{\min}$  получить  $n \sim 1/\sqrt{D}$ , как того требует эксперимент),

$$s = 3/4, \quad Ae^{\varphi} = e^{\frac{17.3 \cdot 0.95}{0.66}} \frac{1}{15} = 3,5 \cdot 10^9,$$

$$r_{\min} = 10 \cdot 6 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

Таким образом, из-за эффекта большой абсолютной величины для зависимости  $n \sim 1/\sqrt{D}$  не остается области применения, и  $n$  не должно практически зависеть от  $D$  при  $10 \text{ см} < D < 100\text{--}200 \text{ м}^1$ , если  $\nu = 3/2$ .

<sup>1</sup> К этому следует добавить [24], что получающиеся при  $\nu = 3/4$  эффективные энергии настолько велики, что если бы электроны (+ и -) с такими энергиями поступали из мирового пространства, они из-за излучения в земном маг-

Мы видим, что полученная Оже с сотрудниками зависимость  $n \sim 1/\sqrt{D}$  ( $10 \text{ см} < D < 50-100 \text{ м}$ ) не может быть получена из теории, так как если считать  $\rho\sigma \ll 1$ , то при  $\nu = 3/2$  такая зависимость, правда, получается, но зависимость  $n$  от  $t$  имеет неправильный знак. На самом же деле  $\rho\sigma$  при  $\nu = 3/4$  велико и поэтому  $n$  очень слабо должно зависеть от  $D$ . Для получения правильной зависимости от  $t$  необходимо при  $\rho\sigma \ll 1$  выбрать  $\nu$  из условия:

$$\lambda \left( \frac{\nu}{2} \right) \frac{26}{3} = 2,3, \quad \lambda \left( \frac{\nu}{2} \right) = 0,27.$$

(Число ливней Оже падает от Юнгфрауих до поверхности моря в 10 раз. Расстояние между счетчиками 4 м [2].) Отсюда  $\nu/2 = 1,33$ , а показатель степени в первом спектре равен 2,66. (Дифференциальный спектр  $f_0 \frac{e^{2,66} dE}{E_0^{3,66}}$ . Обычно считается  $\nu < 2$ .) Но при таком выборе  $\nu$  зависимость  $n$  от  $D$  слишком слаба и не удовлетворяет эксперименту.

Если бы оказалось, что совпадения при  $D < 30 \div 40 \text{ м}$  обязаны не ливням Оже, а каким-либо другим явлениям или другой компоненте, возможно, имеющейся в ливнях Оже и сконцентрированной вблизи оси ливня, открылась бы возможность интерпретации всей кривой, ибо самое трудное — объяснение резкого роста  $n(D)$  при уменьшении  $D$  от  $10-20 \text{ м}$  до  $10 \text{ см}$ . Гипотетическая вторая компонента, находящаяся вблизи оси, должна состоять из мало рассеивающихся частиц большой энергии. Для нее зависимость  $\rho(r)$  должна иметь более крутой характер, чем лавинно-теоретическая (1.5) и (1.8). Проникающие частицы в ливнях Оже были действительно обнаружены экспериментально [2, 3].

Мы здесь принимали толщину атмосферы равной 26. Если бы оказалось, что действительная толщина меньше (скажем, не 26, а 22 или 20), произведение  $\rho\sigma$  над Юнгфрауих было бы значительно меньше, и открывались бы добавочные возможности для объяснения экспериментальных данных. Вычисления  $L_r$  из экспериментальных данных о рассеянии рентгеновских лучей производятся и будут вскоре опубликованы.

Итак, для одновременного объяснения высотной и совпадающей характеристик имеются две возможности:

1. Совпадения при  $D < 10 \div 20 \text{ м}$  обусловлены паразитными, не имеющими отношения к ливням Оже, эффектами. Теория ливней Оже должна объяснять зависимость  $n(D)$ , полученную только при  $D > 10 \div 20 \text{ м}$ . Комбинируя это обстоятельство с уменьшением  $\rho$  из-за утоньшения атмосферы ( $t$  Юнгфрауих  $< 17,3$ ),

---

нитном поле приходили бы к поверхности Земли с значительно меньшими, чем их начальная энергия  $E_0$ , энергиями, равными  $E_0 E_g (E_0 + E_g)$ , где  $E_g = 4 \cdot 10^{17} \text{ эв}$  на экваторе при вертикальном падении.

по-видимому, будет возможно дать полное объяснение всех экспериментальных данных.

2. Совпадения при  $D < 10 \div 20$  м вызваны второй проникающей компонентой, сконцентрированной вблизи оси. Для нее  $\rho$  сильно зависит от  $r$ . Вероятнее всего, что такими проникающими частицами являются мезотроны. Совокупность действия мезотронной компоненты и уменьшения толщины атмосферы также, по-видимому, дает возможность объяснения всей совокупности экспериментальных данных. Из-за полученных нами расхождений между теорией и экспериментом мы здесь не делаем из опытов никаких определенных заключений о характере первичного спектра (о показателе  $\nu$  (3.3) и о величине  $f_0$ ).

Эта работа возникла в результате многочисленных дискуссий с профессором А. И. Алиханяном относительно больших лавинных ливней. Считаю своим приятным долгом принести здесь искреннюю благодарность профессору А. И. Алиханяну, а также Б. С. Джеблепову за подробную информацию относительно экспериментального материала. Мне доставляет также удовольствие поблагодарить здесь профессора Л. Д. Ландау за интересные дискуссии и важные указания относительно теоретической стороны вопроса и постоянный интерес к работе.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Получено  
14 января 1944 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. P. Auger, T. Criber-Mayer. C. r., 1938, 207, 228.
2. P. Auger, R. Maze, P. Ehrenfesta, A. Freon. J. Phys. et le Rad., 1939, 10, 39.
3. P. Auger, P. Ehrenfest, R. Maze, J. Daudin, Robley, A. Freon. Rev. Mod. Phys., 1939, 11, 228.
4. H. Euler, N. Wergeland. Naturwiss., 1939, 27, 484.
5. H. Euler, N. Wergeland. Astrophys. Norw., 1940, 3, 165.
6. H. Bethe. Phys. Rev., 1941, 59, 648 (A).
7. L. Northheim. Phys. Rev., 1941, 59, 929 (A).
8. N. Hilberry. Phys. Rev., 1941, 59, 763.
9. N. Hilberry. Phys. Rev. 1941, 60, 1.
10. H. Bhabha, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., 1937, A, 159, 432.
11. J. Carlson, J. Oppenheimer. Phys. Rev., 1937, 51, 220.
12. L. Landau, G. Rumer. Proc. Roy. Soc., 1938, A, 166, 213.
13. B. Rossi, C. Greisen. Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 240.
14. L. Landau. J. Phys. USSR, 1940, 3, 237.
15. E. Fermi. Proc. Roy. Soc., A, 1939, 169, 531.
16. E. Fermi. In: B. Rossi. Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 265.
17. W. Heisenberg. In: Euler. Zs. f. Phys., 1940, 116, 103.
18. H. Bethe. Phys. Rev., 1940, 57, 1062 (A).
19. E. Fermi. Phys. Rev., 1940, 57, 485.
20. I. Tamm, S. Belenky. J. Phys. USSR, 1939, 1, 177.
21. H. Bethe, W. Heitler. Proc. Roy. Soc., 1934, A, 146, 83.
22. M. Schein, W. Jesse, E. Wollan. Phys. Rev., 1941, 59, 615.
23. P. Blackett. Proc. Phys. Soc., 1941, 53, 203.
24. I. Pomeranchuk. J. Phys. USRR, 1940, 2, 65 (Собр. трудов, № 41).

## О МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ, ДОСТИЖИМОЙ В БЕТАТРОНЕ\*

Совместно с Д. Д. Иваненко

Недавно Керстом [1] был сконструирован новый прибор — бетатрон, с помощью которого уже удалось получить пучок электронов, имеющих энергию 20 Мэв. Принцип действия бетатрона заключается в ускорении электронов вихревым электрическим полем, возникающим при изменении во времени магнитного поля, закручивающего электрон. В отличие от циклотрона, пригодность которого ограничена нерелятивистской областью, в бетатроне нет пределов для достижимых энергий из-за зависимости массы от скорости частиц.

Однако следует указать на наличие другого обстоятельства, приводящего к появлению предела энергий, которые могут быть достигнуты в бетатроне. Такой причиной является тормозное излучение электронов в закручивающем их магнитном поле. Действительно, в магнитном поле электрон движется ускоренно и, в соответствии с классической электродинамикой, излучает энергию. Легко видеть, что квантовые эффекты ввиду больших размеров орбиты не играют роли. Как указано в работе [2], электрон, движущийся в магнитном поле с напряженностью  $H$ , излучает на единицу пути энергию, равную

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{vH}{c} \right)^2 \quad (1)$$

( $e$  — заряд,  $m$  — масса электрона,  $v$  — скорость,  $E$  — энергия. При выводе (1) предполагается, что  $E \gg mc^2$ ). В бетатроне Керста на большей части пути  $v \cong c$  и перпендикулярно  $H$ , поэтому

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2}{3} r_0^2 \left( \frac{EH}{mc^2} \right)^2 \left( r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \right). \quad (2)$$

Предельная энергия  $E_0$  определится из условия, что (2) будет равно энергии, приобретенной электроном в вихревом электрическом поле на единицу пути [3]:

$$\frac{2}{3} r_0^2 \left( \frac{E_0 H}{mc^2} \right)^2 = \frac{e \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|}{2\pi R_0 c} = e R_0 |\dot{H}| \quad (3)$$

\* Докл. АН СССР, 1944, 44, 343 (Представлено академиком В. А. Фоком 27 марта 1944 г.).

( $R_0$  — радиус равновесной орбиты,  $\Phi$  — поток индукции,  $\dot{H} = dH/dt$ ). Отсюда

$$E_0 = mc^2 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{e}{c} \left| \frac{R_0 \dot{H}}{r_0^2 H^2} \right|}. \quad (4)$$

При используемых до сих пор значениях  $H$ ,  $\dot{H}$  и  $E$  мы получаем  $E_0 \approx 5 \cdot 10^8$  эв. Это значение всего в несколько раз больше, чем энергии, которые предполагается получить в строящемся бетатроне на  $10^8$  эв.

Согласно (4)  $E_0$  обратно пропорционально применяемому магнитному полю и прямо пропорционально корню квадратному из энергии, приобретаемой в вихревом электрическом поле на единицу пути. Поэтому для увеличения  $E_0$  необходимо перейти к меньшим  $H$  или большим частотам.

Излучение в магнитном поле должно также оказать влияние на фокусировку пучка, так как с ростом  $H$  энергия электронов в данном случае будет расти медленнее, чем при отсутствии лучистого торможения. Этот вопрос, однако, заслуживает отдельного рассмотрения.

*Институт физики  
Московского государственного университета.  
Физико-технический институт  
Академии наук СССР. Ленинград*

Получено  
20 января 1944 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *D. W. Kerst*. Phys. Rev., 1942, 61, 93.
2. *I. Pomeranchuk*. J. Phys. USSR, 1940, 2, 65 (Собр. трудов, № 41).
3. *D. W. Kerst, R. Serber*. Phys. Rev., 1941, 80, 53.

## ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*

*Совместно с Л. Арцимовичем*

Изучается спектральное и угловое распределение излучения быстрых электронов в магнитном поле. Показано, что практически вся энергия излучения сосредоточена в плоскости орбиты. Частотный спектр состоит из ряда равноотстоящих линий. Центр тяжести спектра лежит в области волн, длина которых равна радиусу орбиты, деленному на  $(W/m_0c^2)^3$ , где  $W$  — энергия электрона. Для невзаимодействующих электронов отмечено отсутствие интерференции интенсивностей излучения и выведен признак «малости» взаимодействия электронов. Рассматривается влияние лучистого торможения на орбиту электрона и выводится формула для величины сжатия орбиты под влиянием этой силы.

На основании теоретических расчетов обсуждается вопрос о максимальной энергии, получаемой в бетатроне.

Как было указано [1, 2], при движении релятивистских электронов в магнитном поле возникает заметное излучение электромагнитных волн, вызываемое ускорением, испытываемым электроном в магнитном поле. На единицу пути теряется энергия, равная

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{m_0c^2} \right)^2 \left[ \frac{v}{c} \cdot \mathbf{H} \right]^2 \left( \frac{W}{m_0c^2} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{3} r_0^2 [\beta \mathbf{H}]^2 \left( \frac{W}{m_0c^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $W$  — энергия электрона (включая его покоящуюся энергию),  $m_0$  — покоящаяся масса,  $c$  — скорость света,  $r_0 = e^2/m_0c^2$ ,  $v$  — скорость электрона,  $\beta = v/c$ ,  $e$  — заряд электрона,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля (рис. 1). Из (1) явствует, что излучение в данном поле  $\mathbf{H}$  пропорционально  $W^2$ , т. е. особенно велико в релятивистской области. В [1] показано, что этот эффект приводит к установлению верхнего предела для энергий заряженных космических частиц, поступающих на Землю. В [2] установлено, что излучение в магнитном поле приводит к практически важному ограничению возможностей получения очень больших энергий в электронном ускорителе Керста [3]. В настоящем сообщении рассматриваются некоторые свойства излучения, возникающего в электронном ускорителе.

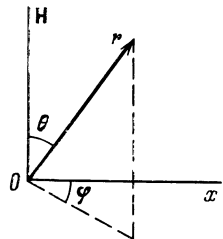


Рис. 1

\* ЖЭТФ, 1946, 16, 379; J. Phys. USSR, 1945, 9, 267.



## § 1. Угловое распределение излучения

Вектор Пойнтинга  $S$  быстро движущегося заряда имеет вид [4]:

$$S = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{[\mathbf{r} [\mathbf{r} + \beta \mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}}]]^2}{(r + \beta r)^6} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi r^2 c^3} \frac{(1 - \beta^2) \cos^2 \theta + (\beta + \sin \theta \cos \varphi)^2}{(1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)^6}, \quad (2)$$

$$\cos \theta = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{H}), \quad \sin \theta \cos \varphi = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (3)$$

где  $r$  — расстояние от точки наблюдения до заряда.

Все величины в (2) необходимо брать в запаздывающий момент времени,  $t' = t - r/c$ . Формула (2) дает излучение в единицу обычного времени  $t$ , но выраженное через запаздывающее время  $t'$ .

Связь между обоими временами имеет вид [4]

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{r}{r + \beta r} = \frac{1}{1 + \beta \sin \theta \cos \varphi}. \quad (4)$$

Нас интересует случай, когда  $1 - \beta \ll 1$ . Это условие даст возможность упростить дальнейшие вычисления.

В (2) входит как угол  $\theta$  между направлением наблюдения и магнитным полем  $\mathbf{H}$ , так и угол  $\varphi$ , связанный с направлением скорости электрона  $\mathbf{v}$ . В приборах типа бетатрона Керста электроны движутся по круговой орбите, заполняя ее равномерно. Поэтому необходимо проинтегрировать (2) по всем значениям  $\varphi$ , от 0 до  $2\pi$ . При этом главную роль будут играть  $\varphi$ , близкие к  $\pi$ . Таким образом релятивистский электрон излучает в заданном направлении не все время равномерно (как это, например, практически имеет место в нерелятивистской области), а основная масса излучения проявляется в момент, когда скорость электрона имеет тот же азимут, что и направление наблюдения. Это обстоятельство играет большую роль при определении частотного спектра излучения (см. § 2).

Положим

$$\varphi = \pi + x, \quad x = \omega_0 t'.$$

Тогда

$$\cos \varphi = -1 + \frac{x^2}{2},$$

$$1 + \beta \sin \theta \cos \varphi = 1 - \beta \sin \theta + \frac{\beta x^2}{2} \sin \theta.$$

Интеграл по  $x$  можно распространить до  $\pm \infty$ , так как подынтегральная функция быстро падает при больших  $x$ . Мы получаем следующее выражение для среднего значения  $S$ :

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} S dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} S \frac{dt}{dt'} \frac{dt'}{d\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{e^2 \dot{v}^2}{8\pi^2 r^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(1 - \beta^2) \cos^2 \theta + (\beta - \sin \theta + \sin \theta \frac{x^2}{2})^2] dx}{(1 - \beta \sin \theta + \frac{x^2}{2} \sin \theta)^5}. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно

$$\bar{S} = \frac{e^2 v^2}{4\pi r^2 c^3} \frac{1}{2^{3/2}} \left[ \frac{3}{2(1-\beta \sin \theta)^{3/2}} - \frac{5(1-\beta)}{8(1-\beta \sin \theta)^{7/2}} \right]. \quad (5a)$$

Согласно полученному результату максимум излучения происходит вблизи  $\theta = \pi/2$ , т. е. сосредоточен в плоскости орбиты. Область  $\varepsilon$  углов  $\theta = \pi/2$ , в пределах которой заключено практически все излучение, получается из (5a) равной

$$\varepsilon_{\text{эф}} \approx \sqrt{2(1-\beta)} \approx \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 c^2}{W}. \quad (6)$$

При энергиях, превышающих покоящуюся энергию в 100 или больше раз ( $W > 50 M\text{эв}$ ), практически все излучение сосредоточено в интервалах углов порядка нескольких десятых градуса по отношению к плоскости орбиты.

Интегрируя (5a) по всем углам  $\theta$ , получаем снова (1).

## § 2. Частотный спектр излучения

Как уже отмечалось, электрон в релятивистской области излучает в заданном направлении неравномерно во времени. Поле такого электрона существенно зависит от угла между скоростью электрона и направлением наблюдения. Благодаря этому обстоятельству в разложении полей на гармонические составляющие появляются в большом количестве высшие гармоники основной частоты, равной частоте  $\omega_0 = eHc/W$  обращения электрона по орбите. (Ввиду периодического характера движения спектр состоит из дискретных линий — обертонов основного тона.)

Определяющий частотное разложение фактор заключен в множителе  $1/(1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)^3$ , входящем в напряжение полей релятивистского электрона.

Если разложить в ряд Фурье напряжение электрического поля, то амплитуда Фурье  $k$ -й гармоники основной частоты  $\omega_0$  пропорциональна интегралу:

$$E_k \sim \int_0^{2\pi/\omega_0} dt' \frac{dt}{dt'} \frac{[\mathbf{r}[\mathbf{r} + \beta \mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}}]]}{(1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)^3} e^{ik\omega_0 t'}. \quad (7)$$

Угол  $\varphi$  есть линейная функция времени  $t'$ :  $\varphi = \pi + \omega_0 t'$ . Главную роль играют значения  $\varphi$  вблизи  $\pi$ . Поэтому

$$E_k \sim \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{(\mathbf{r} + \beta \mathbf{r})(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) - \dot{\mathbf{v}}\mathbf{r}(\mathbf{r} + \beta \mathbf{r})}{(1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)^2} dt' e^{ik\omega_0 t'} = - \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{\dot{\mathbf{v}} dt' r' e^{ik\omega_0 t'}}{1 - \beta \sin \theta + \frac{\omega_0^2 t'^2}{2}}. \quad (7a)$$

Согласно (7а) главную роль играют значения  $t' \leq \sqrt{1 - \beta \sin \theta / \omega_0^2}$ . В этих условиях можно, используя (4), написать

$$e^{ik\omega_0 t} = \exp \{ ik\omega_0 [t_0 + (1 + \beta \sin \theta \cos \varphi) t'] \}. \quad (8)$$

До тех пор пока частота  $k\omega_0 (1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)$  мала по сравнению с единицей, деленной на интервал времени  $t'$ , в течение которого заметно меняется подынтегральная функция в (7а), мы можем  $\exp [ik\omega_0 t' (1 + \beta \sin \theta \cos \varphi)]$  заменить на единицу. Те гармоники, у которых такое условие выполнено, имеют таким образом примерно одинаковую интенсивность, не зависящую от  $k$ . Указанный только что интервал времени  $t'$  равен (по порядку величины)

$$\frac{\sqrt{1 - \beta \sin \theta}}{\omega_0}.$$

При излучении под углом  $\theta$  к магнитному полю спектр будет состоять из совокупности равноотстоящих (на величину  $\omega_0$ ) монохроматических линий, имеющих примерно одинаковую интенсивность до тех пор, пока порядок гармоники  $k$  удовлетворяет неравенству

$$k \leq \frac{1}{(1 - \beta \sin \theta)^{3/2}}, \quad (9)$$

т. е. пока  $\omega$  не превышает величины

$$\omega_{\max} \sim \frac{\omega_0}{(1 - \beta \sin \theta)^{3/2}} = \frac{eHc}{(1 - \beta \sin \theta)^{3/2} W}. \quad (10)$$

Когда  $k$  превышает предел (9), в (7а) появляется быстро осциллирующая функция времени  $t'$ , и соответствующие гармоники получают быстро спадающую интенсивность. Общее поведение спектра изображено на рис. 2.

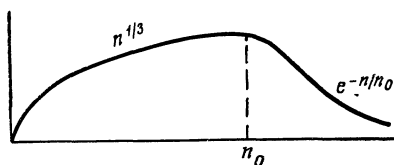


Рис. 2

Более подробный расчет показывает, что при  $1 \ll n \ll (W_0/mc^2)^3$  ( $n$  — порядок гармоники) интенсивность  $n$ -й гармоники основной частоты пропорциональна  $(mc^2/W)^2 n^{1/3}$ . При  $n \gg (W_0/mc^2)^3$  интенсивность пропорциональна  $n^{-1/2} e^{-(mc^2/W)^3 n} \times (\sqrt{m_0 c^2 / W})^{-1}$ . При суммировании по всем  $n$  главную роль играют  $n \sim (W/m_0 c^2)^3$ .

Число гармоник в спектре зависит от  $\theta$ . При  $\theta = 0$  остается только одна основная гармоника, как этого и следовало ожидать из-за симметрии движения вокруг направления наблюдения. Число гармоник растет при увеличении  $\theta$  и достигает максимума в плоскости орбиты (где заключен максимум излучения). Главная часть излучения падает на область частот вблизи

$$\frac{\omega_0}{(1-\beta)^{3/2}} = 2^{3/2} \left( \frac{W}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{eH}{m_0 c^2}.$$

Эффективная длина волны излучения равна

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{2\pi m_0 c^2}{eH} \left( \frac{m_0 c^2}{W} \right)^2. \quad (11)$$

Сравнивая (11) с радиусом орбиты  $r = W/eH$ , видим, что  $\lambda_{\text{эф}} \ll r$  при  $W \ll m_0 c^2$ . В нерелятивистской области имеет место обратное соотношение. Там частота излучения равна частоте обращения и длина волны относится к  $r$ , как скорость света относится к скорости электрона:

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{c}{v} > 1.$$

В предельном релятивистском случае лоренцово сокращение поля приводит к тому, что эффективная длина волны излучения оказывается значительно меньшей, чем радиус орбиты. В системе CGS мы имеем

$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{10^4}{H} \left( \frac{m_0 c^2}{W} \right)^2 \text{ см}. \quad (12)$$

При  $H = 10^4$  э и  $W = 100$  Мэв излучаются волны длиной  $\lambda \gg 10^{-4}$  см.

### § 3. Излучение системы взаимодействующих электронов

Все изложенные до сих пор результаты относились к одному электрону, движущемуся в магнитном поле. При переходе к излучению многих движущихся одновременно электронов возникает вопрос о влиянии их взаимодействия друг с другом, а также вопрос об интерференции излучения отдельных электронов друг с другом. Если бы электроны заполняли идеально равномерно всю орбиту, то очевидно, что их суммарное излучение было бы равно нулю из-за взаимного гасящего действия (постоянный ток). Благодаря флуктуативным отклонениям распределения от равномерного возникает излучение, объясненное этим флуктуациям. Мы покажем, что до тех пор пока можно пренебрегать взаимодействием электронов друг с другом и рассматривать флуктуации по формуле Пуассона, интерференционный член в излучении исчезает и мы

получаем излучение, пропорциональное числу электронов (а не их квадрату) и описываемое формулами (1) — (12) предыдущих параграфов. В § 4 мы установим границы такого рассмотрения, в котором взаимодействие электронов не учитывается.

Если электроны между собой не взаимодействуют, то между положениями на орбите различных электронов корреляция отсутствует. Следует подчеркнуть здесь, что нас интересует корреляция в «продольном» расположении электронов вдоль орбиты, т. е. корреляция в координатах  $\varphi$  (см. рис. 1).

Если значение  $\varphi$  для одного электрона задано, то координата  $\varphi$  для другого электрона может принимать любые значения от 0 до  $2\pi$  с одинаковой вероятностью. При таких условиях флуктуации следуют распределению Пуассона. Нас интересует та часть силы, оказываемой на  $i$ -й электрон со стороны  $k$ -го, которая направлена вдоль орбиты, так как сила лучистого трения, действующая на  $i$ -й заряд со стороны его же поля, направлена противоположно его скорости (параллельно орбите). Вопрос заключается в том, будет ли в составе силы взаимодействия параллельная компонента (могущая, например, компенсировать собственную силу лоренцова трения). Легко видеть, что при усреднении по всем положениям  $v$ -го электрона по орбите сила, с которой он действует на  $i$ -й электрон, не может содержать продольной компоненты. Напряженности электрического ( $\mathbf{E}$ ) и магнитного ( $\mathbf{H}$ ) полей получаются из потенциалов Лиенара — Вихерта

$$\mathbf{H} = \text{rot} \frac{e\beta}{(r + r\beta)_{t - \frac{r}{c}}} \mathbf{E} = -\nabla \frac{e}{(r + r\beta)_{t - \frac{r}{c}}} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e\beta}{(r + r\beta)_{t - \frac{r}{c}}}. \quad (13)$$

Если (13) усреднить по всем значениям  $\varphi$  (с одинаковой вероятностью), то полученное выражение для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будет соответствовать полям постоянного тока, текущего по орбите.

Следует отметить, что усреднение, о котором здесь говорится, осуществляется за время одного цикла ускорения благодаря неодинаковости скорости различных электронов. Если разница энергии электронов равна  $\epsilon W$ , то разность скоростей будет  $c \frac{\delta W (mc^2)^2}{W^3}$ . Изменение взаимного расстояния за время ускорения  $T$  окажется равным  $cT \frac{\delta W}{W^3} (mc^2)^2$ .

Для того чтобы произошло усреднение, необходимо выполнить неравенство

$$cT \frac{\delta W (mc^2)^2}{W^3} \gg \lambda.$$

Здесь  $\lambda$  — эффективная длина волны излучения. Пользуясь (12), находим  $\frac{\delta W}{mc^2} \gg \frac{r}{cT}$ . Это условие на практике всегда соблюдается. У постоянного тока отсутствует проекция электрического поля

вдоль орбиты (из соображений симметрии эта проекция должна быть постоянной вдоль орбиты, следовательно,  $\int Edl \neq 0$ , что противоречит условию стационарности).

Таким образом, до тех пор пока флуктуации в расположении электронов на орбите подчиняются закону Пуассона, излучение системы электронов, движущихся на орбите, равно сумме излучений каждого отдельного электрона (складываются интенсивности, интерференционные эффекты отсутствуют). Рассматривая совокупность электронов как источник электромагнитных волн, следует его сравнивать не с антенной (излучение пропорционально квадрату числа электронов), а с электрической лампой (излучение пропорционально числу электронов).

#### § 4. Границы применимости рассмотрения невзаимодействующих электронов

Для того чтобы можно было не учитывать при рассмотрении излучения взаимодействие электронов друг с другом, необходимо, чтобы при практически применяемых концентрациях электронов флуктуации в их распределении вдоль орбиты следовали закону Пуассона. Благодаря взаимодействию электронов появляются силы, действующие как в радиальном направлении (разбухание пучка из-за кулоновского отталкивания), так и силы, действующие вдоль орбиты и вызываемые неоднородностью в распределении электронов вдоль орбиты (флуктуации, интересующие нас). Так как собственная сила лучистого трения каждого электрона действует вдоль орбиты, то нас будут интересовать, как и в § 3, только те силы взаимодействия, которые связаны с флуктуациями в распределении электронов вдоль орбиты. Если концентрации электронов таковы, что добавочные потенциалы, возникающие при максимальных эффективных флуктуациях, малы по сравнению с разностями  $\delta W$  кинетических энергий отдельных электронов, движущихся одновременно на орбите, то очевидно, что такие флуктуации не смогут заметно изменить относительное движение электронов вдоль орбиты. Оно останется случайно распределенным. В этих условиях флуктуации не будут рассасываться из-за взаимодействия и следовать закону Пуассона.

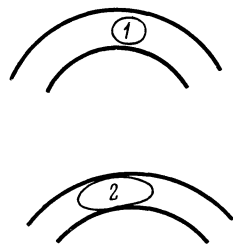


Рис. 3

Величина флуктуационного потенциала зависит от размера области, в пределах которой происходит флуктуация плотности. Нам необходимо сравнить наибольший флуктуационный потенциал с  $\delta W$ . На рис. 3 изображен электронный пучок, радиус которого —  $\rho$ , радиус орбиты —  $r$ . Если область, в которой происхо-

дит флуктуация числа электронов, имеет радиус, меньший  $\rho$  (область 1 на рис. 3), то среднее число электронов в ней порядка  $n l^3$  ( $n$  — средняя плотность электронов в пучке,  $l$  — линейные размеры области). Средняя флуктуация в числе электронов, заключенных в этом объеме, при пуассоновском распределении будет равна  $\sqrt{n l^3}$ . Потенциал  $V$ , создаваемый такой флуктуацией в нерелятивистской области, определяется средним расстоянием частиц друг от друга. Для области 1 на рис. 3 это расстояние — порядка  $l$  и при этом

$$V_l \sim \frac{e}{l} \sqrt{n l^3} = e \sqrt{n l}. \quad (14)$$

Пока  $l \ll \rho$ , потенциал  $V_l$  растет с увеличением  $l$ . Когда  $l \gg \rho$ , мы приходим к области 2 на рис. 3. Объем ее теперь равен  $\pi \rho^2 l$ . Среднее обратное расстояние в пределах такой области порядка  $(1/l) \lg l / \rho$  и, следовательно,

$$V_l \sim \frac{e}{l} \lg \frac{l}{\rho} \sqrt{\pi \rho^2 l n} = \frac{e}{\sqrt{l}} \sqrt{\pi \rho^2 n} \lg l / \rho. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует, что в нерелятивистской области наибольшие потенциалы создаются в результате флуктуаций в объемах со всеми линейными размерами порядка радиуса электронного пучка.

В релятивистской области необходимо вместо кулоновского потенциала пользоваться лиенар-вихертовским. В нем содержится добавочный множитель

$$\frac{1}{1 - \beta \cos \varphi \sin \theta} = \frac{1}{1 - \beta \cos \psi}$$

( $\psi$  — угол между направлением наблюдения и скоростью). В областях типа 1 этот угол порядка единицы, в областях типа 2 он имеет вид:

$$\psi \sim \frac{\rho}{l} \sqrt{\ln \frac{\rho^2}{l^2 (1 - \beta)}} \quad \text{при } l \ll l_0 \sqrt{\rho r}, \quad (16)$$

$$\psi \sim \frac{l}{r} \quad \text{при } l \gg l_0. \quad (17)$$

Вместо (15) мы теперь имеем:

$$V_l \sim e l^{3/2} \sqrt{\frac{\pi n}{\rho^2}} \ln \frac{\rho^2}{e^2 (1 - \beta)} \quad (l \ll l_0), \quad (18)$$

$$V_l \sim e \frac{\sqrt{\pi n \rho r^2}}{l^{3/2}} \quad (l \gg l_0). \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) выведены в предположении, что

$$\left( \frac{m c^2}{W} \right)^2 \ll \psi_{\min}^2 = \frac{\rho}{r}, \quad W \gg m c^2 \sqrt{\frac{r}{\rho}}. \quad (20)$$

На практике  $r/\rho \sim 10^3$  и, следовательно,  $W$  должно быть велико по сравнению с  $10$  Мэв. В интересующем нас случае получения электронов очень большой энергии условие (20) можно считать выполненным.

Из (18) и (19) следует, что наибольшие флуктуационные потенциалы происходят за счет флуктуации в объемах длиной  $l_0$ :

$$V_{\max} \sim e \left( \frac{r}{\rho} \right)^{3/4} \sqrt{\pi \rho n} \ln \frac{\rho^2}{r^2(1-\beta)} \quad \text{при} \quad W \gg mc^2 \sqrt{\frac{r}{\rho}}. \quad (21)$$

За счет релятивистских эффектов  $V_{\max}$  возрастает (по сравнению с нерелятивистским значением) в  $(r/\rho)^{3/4}$  раз.

Критерием применимости распределения Пуассона является неравенство  $eV_{\max} \ll \delta W$ . Согласно (21) оно может быть записано в следующем виде:

$$n \ll \frac{\delta W^2}{e^4} \frac{\sqrt{\rho}}{r^{3/2}} \frac{1}{\ln^2 \frac{\rho}{r(1-\beta)}}. \quad (22)$$

Величина  $n$  может быть выражена через среднее значение электронного тока на аноде бетатрона

$$n = \frac{\bar{i}T}{2\pi^2 r \rho^2 l}.$$

Здесь  $\bar{i}$  — среднее значение электронного тока и  $T$  — период изменения магнитного поля. Неравенство (22) запишется теперь в виде

$$\delta W \gg \frac{e^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2}} \bar{i}^{-1/2} T^{1/2} r^{1/4} \rho^{-5/4} \ln \frac{\rho}{r(1-\beta)}.$$

Положим  $r = 50$  см,  $\rho = 10^{-2}$  см,  $\bar{i} = 3 \cdot 10^{-4}$  CGSE (0,1 ма). При этих данных для  $\Delta W$  получается условие  $\delta W \gg 100$  эв.

В бетатроне разброс электронов по энергиям вызывается двумя факторами: неодновременностью впуска электронов в рабочее пространство и ионизационными потерями энергии. Отношение отрезка времени, используемого для впуска электронов, ко всему времени ускорения по порядку величины равно отношению начальной энергии электронов к конечной. Такое различие в начальных моментах ускорения должно приводить к разбросу энергии порядка начальной энергии электронов. Отсюда следует, что разброс по энергиям, вызываемый этой причиной, должен быть по крайней мере порядка  $10^3$  эв.

Ионизационные потери при вакууме  $\sim 10^{-6}$  мм рт. ст. и времени ускорения  $\sim 10^{-2}$  сек будут составлять  $10^2 - 10^3$  эв.

Мы приходим к выводу, что из-за обеих указанных причин  $\delta W$  будет во много раз превосходить 60 эв, а эта последняя величина получена при самых выгодных предположениях относительно роли объемных зарядов. Следовательно, влиянием взаимодействия электронов на их излучение в бетатроне можно пренебречь.



## § 5. Влияние излучения на траекторию электрона в бетатроне

Принцип действия бетатрона Керста, как известно, заключается в том, что электрон непрерывно ускоряется вихревым электрическим полем, оставаясь все время на стабильной круговой орбите, радиус которой определяется условием

$$H(r_0) = \frac{\bar{H}}{2}. \quad (23)$$

Здесь  $H(r_0)$  — напряженность магнитного поля на орбите, а  $\bar{H}$  — среднее значение напряженности магнитного поля по площади круга, охватываемого орбитой. Вследствие того, что напряженность поля во всех точках пространства, где происходит ускорение, изменяется со временем по одному и тому же закону, условие (23) будет выполняться в течение всего периода ускорения электрона при постоянном значении  $r_0$ . Однако это условие справедливо лишь в том случае, если излучение электрона в магнитном поле мало. Если излучение велико, то сила лучистого торможения, которая в данном случае направлена против скорости электрона, будет оказывать заметное влияние на его движение. Импульс электрона при наличии излучения будет возрастать со временем медленнее, чем это необходимо для того, чтобы в возрастающем магнитном поле радиус орбиты оставался постоянным. Поэтому радиус орбиты начнет уменьшаться и стабильная круговая орбита превратится в спираль, которая будет свертываться по направлению к центру.

Превращение стабильной орбиты в сжимающуюся спираль, происходящее вследствие лучистого торможения, может прекратить правильное функционирование всего механизма ускорения значительно раньше того момента, когда энергия, теряемая электроном на излучение, станет равной энергии, приобретаемой от вихревого электрического поля.

Изменение радиуса орбиты нетрудно вычислить для случая, когда оно мало по сравнению с  $r_0$ .

Мы можем написать следующие уравнения движения:

$$\frac{dp}{dt} = eE - \Delta W, \quad (24)$$

$$\frac{pc}{e} = Hr. \quad (25)$$

Здесь  $p$  — импульс электрона;  $E$  — напряженность электрического поля;  $\Delta W$  — сила лучистого торможения, численно равная энергии, теряемой на излучение на 1 см пути;  $r$  — радиус траектории. Второе из этих равенств указывает, что мы считаем движение мало отличающимся от кругового (в каждый данный момент электрон движется по круговой орбите радиуса  $r$ ). Исключо-

чая  $p$  из (24) и (25), получаем уравнение траектории

$$\frac{e}{c} \frac{d}{dt} (Hr) = eE - \Delta W. \quad (26)$$

При  $\Delta W = 0$  радиус орбиты не зависит от времени и равен  $r_0$ . При малых изменениях  $r$  все величины, входящие в уравнение (26), можно разложить в ряд по степеням  $x = r - r_0$  и ограничиться первыми членами разложения. Отметим прежде всего, что в выражениях для  $E$  член, содержащий  $x$  в первой степени, исчезает, так как  $E'(r_0) = 0$ . Для доказательства напомним выражение, определяющее величину  $E$ :

$$E = \frac{1}{rc} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r H r dr.$$

В электронном ускорителе  $H = H_m(r) \psi(t)$ , где  $H_m(r)$  — максимальное значение напряженности магнитного поля в данной точке. Следовательно,

$$E = \frac{1}{rc} \psi'(t) \int_0^r H_m(r) r dr,$$

$$E'(r) = \frac{1}{c} \psi'(t) \left\{ H_m(r) - \frac{1}{r^2} \int_0^r H_m(r) r dr \right\}.$$

Второй член в скобках, очевидно, равен  $1/2 \overline{H_m(r)}$ . Отсюда согласно условию (23) следует, что выражение для  $E'(r)$  обращается в нуль при  $r = r_0$ . Принимая во внимание указанное свойство функции  $E(r)$ , можно написать

$$\frac{e}{c} \frac{d}{dt} \{H(r_0)r_0 + xH(r_0) + r_0xH'(r_0)\} = eE(r_0) - \Delta W,$$

отсюда получаем:

$$\frac{d}{dt} \{xH(r_0) + r_0xH'(r_0)\} = -\frac{c}{e} \Delta W,$$

$$x \{H(r_0) + r_0H'(r_0)\} = -\frac{c}{e} \int_0^t \Delta W dt.$$

Вблизи стабильной орбиты

$$H \sim r^{-n}, \quad H' \sim nr^{-n-1} \quad (n < 1),$$

следовательно,

$$x = -\frac{c}{eH(r_0)(1-n)} \int_0^t \Delta W dt.$$

Подставляя сюда выражение для  $\Delta W$ , получаем после некоторых упрощений

$$\frac{x}{r} = -\frac{2c}{3(1-n)} \frac{\rho^2}{m_0^2 c^4} |V_m H_m^2(r_0)| \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \psi^4(t) dt. \quad (27)$$

В этой формуле  $W_m$  обозначает максимальное значение энергии электрона, которое могло бы быть достигнуто в приборе при отсутствии излучения.

Если  $W_m$  выражается в электрон-вольтах, то формула (27) принимает следующий вид:

$$\frac{x}{r} = -3,8 \cdot 10^{-15} \frac{H_m^2(r) W_m}{1-n} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t \psi^4(t) dt. \quad (28)$$

Допустимое значение относительного уменьшения радиуса —  $x/r$  определяется конструкцией электронного ускорителя и, по-видимому, не может превышать 0,2—0,25. Из формулы (28) при заданных величинах  $H_m$ ,  $W_m$  и  $n$  и заданном законе возрастания магнитного поля со временем можно определить тот момент времени, когда будет достигнуто это значение  $x/r$ , и вычислить предельную энергию электронов. Рассмотрим для простоты тот случай, когда поле возрастает по линейному закону. Тогда  $\psi(t) = t/T$ , где  $T$  — полное время возрастания поля от нуля до максимального значения. Из (28) следует

$$\frac{t}{T} = 4 \cdot 10^3 \sqrt[4]{\frac{(x)}{r_0} \frac{1-n}{T H_m^2(r_0) W_m}}. \quad (29)$$

Энергия электрона в момент времени  $t$  равна

$$W_t = 300 H r = 300 H_m(r) r \frac{t}{T}.$$

Отсюда

$$\frac{W_t}{W_m} = \frac{t}{T} \frac{H_m(r) r}{H_m(r_0) r_0} = \frac{t}{T} \left\{ 1 - \frac{(x)}{r_0} (1-n) \right\}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{W_t}{W_m} = 4 \cdot 10^3 \left\{ 1 - \frac{(x)}{r_0} (1-n) \sqrt[4]{\frac{(x)}{r_0} \frac{1-n}{T H_m^2(r_0) W_m}} \right\}. \quad (30)$$

Формулы (29) и (30), очевидно, имеют смысл только в том случае, если величина  $t/T$ , найденная с помощью первой из них, оказывается меньше единицы. На рис. 4 изображена зависимость отношения  $W_t/W_m$  от величины  $W_m H_m^2(r_0)$  при  $n = 0,5$ ,  $T = 10^{-2}$  сек,  $(x)/r = 0,2$ . Предельная энергия значительно отличается от максимальной только при  $W_m H_m^2(r_0) > 2 \cdot 10^{16}$ .

В бетатронах, которые были построены до настоящего времени, излучение не играет существенной роли и практически не влияет на процесс ускорения электронов. Так, например, для бетатрона General Electric Company, который рассчитан на получение электронов с энергией  $10^8$  эв и является, по-видимому, самым большим из всех построенных и строящихся электронных ускорителей, величина —  $x/r$ , вычисленная по формуле (28), составляет в конце

периода ускорения всего лишь 0.04. Это означает, что орбита смещается внутрь на 2,5 мм.

Однако влиянием лучистого торможения нельзя будет пренебрегать тогда, когда возникает необходимость в проектировании и постройке сверхмощных бетатронов, предназначенных для получения электронов с энергией порядка  $10^9$  эв.

При постройке приборов, рассчитанных на ускорение электронов до энергии порядка  $10^8$  эв, мы столкнемся с лучистым торможением только в том случае, если пожелаем воспользоваться магнитными полями с напряженностью в несколько десятков тысяч эрстед. Применение таких полей могло бы оказаться весьма ценным, поскольку при этом удалось бы значительно уменьшить габариты и вес прибора. Но так как излучение при данном  $W_m$  пропорционально  $H_m^2 (r_0)$ , то применение очень больших магнитных полей нецелесообразно. Действительно, если при  $W_m = 10^8$  эв положить  $H_m$  равным  $3 \cdot 10^4$  э, то из-за лучистого торможения относительное уменьшение радиуса будет равно 0,2 уже при  $W = 10^7$  эв (при указанных выше значениях  $T$  и  $n$ ).

Следует подчеркнуть, что излучение энергии быстрыми электронами в магнитном поле отнюдь не приводит к тому, что появляется принципиальная верхняя граница для ускорения электронов вихревым электрическим полем. Из формулы (30) мы видим, что предельная энергия пропорциональна  $H_m^{1/2} r_0^{3/4}$ , и поэтому при увеличении размеров бетатрона и напряженности магнитного поля она возрастает и в принципе может достигать сколь угодно большой величины. Не ограничивая принципиально величину энергии, которая может быть достигнута в бетатроне, лучистое торможение чрезвычайно усиливает те затруднения, которые возникают при

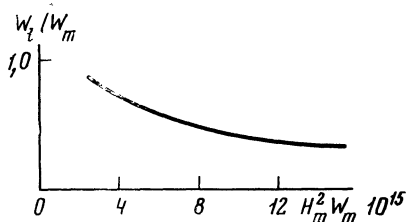


Рис. 4

переходе к энергиям порядка  $10^9$  эв, так как при наличии лучистого торможения для получения электрона заданной энергии необходимо строить приборы значительно больших размеров, чем это было необходимо, если бы излучение отсутствовало.

Можно представить себе несколько способов борьбы с влиянием лучистого торможения на работу сверхмощных электронного ускорителей. Для полной компенсации силы лучистого торможения необходимо, чтобы напряженность электрического поля превы-

шала на величину  $\Delta W$  то значение, которое она должна иметь при отсутствии излучения. Этого можно достигнуть, если увеличивать магнитный поток через площадь орбиты быстрее, чем магнитное поле на орбите. В начальной стадии ускорения, пока энергия электрона мала, должно удовлетворяться условие (23). В конце ускорения магнитный поток должен быть больше, чем это следует из (23), на величину  $2\pi r c \int \Delta W dt$ . Этот добавочный поток можно создать при помощи дополнительных катушек, питаемых от отдельного источника напряжения. В практическом отношении этот способ компенсации лучистого трения вряд ли окажется удобным, так как для создания добавочного потока потребуется большая затрата мощности и, кроме того, для питания дополнительной обмотки будут нужны очень высокие напряжения из-за несинусоидальной формы кривой возрастания потока со временем.

Более удобным способом компенсации лучистого трения является дополнительное ускорение электронов электрическим полем высокой частоты с амплитудой, возрастающей в течение каждого цикла ускорения пропорционально  $\Delta W$ . Период высокочастотного электрического поля, очевидно, должен быть равен  $2\pi r/c$ , т. е. длина волны должна быть равна длине окружности стабильной орбиты. Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $r_0 = 3 \cdot 10^2$  см,  $H_m = 10^4$ ,  $T = 2 \cdot 10^{-2}$  сек. При этом  $W_m = 900$  Мэв. В конце ускорения потери на излучение будут составлять 20 кэв на один оборот по орбите. Поэтому если высокочастотное электрическое поле ускоряет электроны через каждые полоборота (так же как в циклотроне), то разность потенциалов между электродами (дуантами) в конце каждого полного цикла ускорения должна быть равна 10 кэв. Длина волны должна быть равна  $1,9 \cdot 10^3$  см. Такое высокочастотное поле с модулированной амплитудой (частота модуляции 50 гц) вполне осуществимо.

В заключение считаем необходимым выразить благодарность Л. Д. Ландау за совместное обсуждение некоторых вопросов, рассмотренных в нашей статье.

Физико-технический институт  
Академии наук СССР.  
Ленинград

Получено  
28 февраля 1945 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *I. Pomernanchuk*. J. Phys. USSR, 1940, 2, 65 (Собр. трудов, № 41).
2. *Д. Иваненко, И. Померанчук*. Докл. АН СССР, 1944, 44, 343 (Собр. трудов, № 47).
3. *D. Kerst*. Phys. Rev., 1941, 60, 47.
4. *W. Heitler*. Quantum Theory of Radiation. Oxford, 1937.

## ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*

1. Из классической электродинамики легко получается выражение<sup>1</sup> для энергии, теряемой электроном на излучение при движении в магнитном поле. Этот эффект в нерелятивистской области энергий электрона очень мал. В релятивистской области излучение на единицу пути растет пропорционально квадрату энергии электрона.

2. В применении к космическим лучам излучение устанавливает верхний предел для энергий, с которыми могут поступать на поверхность Земли электроны и позитроны, если они входят в состав первичного излучения, идущего из мирового пространства [2]. Наличие такого верхнего предела должно сказаться только на явлениях, связанных с частицами очень больших энергий ( $\geq 4 \cdot 10^{17}$  эв). В частности, излучение должно приводить к широтной зависимости частоты появления больших лавинных ливней в воздухе и больших гофмановских толчков [3]. Постановка соответствующих экспериментов дала бы возможность однозначного ответа на вопрос о существовании первичного излучения большой энергии электронов и позитронов.

3. В применении к электронным ускорителям типа бетатрона Керста излучение приводит к установлению предела энергий, которые могут быть получены в таком приборе. Порядок величины предельной энергии  $E_0$  получается из равенства силы лучистого торможения и ускоряющей силы электрического вихревого поля:

$$E_0 \approx mc^2 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{eR\dot{H}}{H^2 r_0^2 c}}, \quad (1)$$

где  $m$  — покоящаяся масса электрона,  $e$  — его заряд,  $r_0$  — его электромагнитный радиус,  $R$  — радиус орбиты,  $H$  — напряжение магнитного поля на орбите,  $\dot{H} = dH/dt$ . В бетатроне с применяемыми параметрами ( $RH$ ,  $\dot{H}$ )  $E_0$  оказывается порядка нескольких сотен миллионов электрон-вольт. Более точное вычисление  $E_0$  должно учитывать дефокусирующее действие излучения. Такой

\* Известия АН СССР, серия физ., 1946, 10, 316. (Краткое содержание доклада на сессии ОФМН АН СССР 20 марта 1946 г.).

<sup>1</sup> См., например, [1].

расчет был проведен Л. А. Арцимовичем, который показал, что наличие дефокусирующего действия приводит к снижению предельной энергии примерно в 2 раза по сравнению с (1) [4].

Из (1) можно заключить, что излучение играет в бетатроне Керста тем меньшую роль, чем больше частота изменения поля и чем меньше само поле  $H$ .

4. Излучение, испускаемое электроном, движущимся по круговой орбите, сконцентрировано практически полностью в небольшой области углов по отношению к плоскости орбиты. Этот результат имеет место при  $E_0 \gg mc^2$ . Область углов, в пределах которой имеет место излучение, составляет величину порядка  $\frac{mc^2}{E_0} \ll 1$ .

Таким образом, излучение релятивистских электронов соответствует в смысле угловой зависимости наложению мультиполей высокого порядка.

5. Нерелятивистский электрон, двигаясь по кругу, испускает излучение, частота которого совпадает с частотой обращения. В релятивистской области, из-за лоренцовского сокращения поля быстро движущегося электрона, практически все излучение падает на долю высших обертонов частоты обращения. Интенсивность высших гармоник сравнительно мало меняется вплоть до частот, равных  $(E_0/mc^2)^3 \omega_0$ , где  $\omega_0$  — частота обращения. При еще больших частотах интенсивность соответствующих линий экспоненциально падает. Частотный спектр состоит из совокупности равноотстоящих линий, причем высшие обертоны имеют тем большую асимметрию по углам, чем больше порядок обертона.

6. При переходе от излучения отдельного электрона к излучению системы электронов, движущихся одновременно, возникает вопрос о влиянии взаимодействия электронов на их излучение. Если бы электроны были идеально равномерно распределены вдоль орбиты, то электронный ток был бы постоянным и излучение отсутствовало бы. В реальных условиях всегда имеются флуктуации в распределении электронов; наличие таких флуктуаций делает ток электронов непостоянным во времени и приводит к излучению. При достаточно малых концентрациях электронов можно не учитывать их взаимодействия при рассмотрении флуктуаций в их распределении по орбите. Получающиеся при этом флуктуации следуют закону Пуассона и дают излучение, в точности равное сумме излучений отдельных электронов. Если бы в каком-нибудь ускорителе (например, в ускорителе, предложенном Векслером [5]; см. также проект «синхротрона» в [6]) электроны заполняли только часть орбиты, то, кроме только что указанного некогерентного излучения, возникло бы когерентное излучение, пропорциональное квадрату числа электронов. Оно происходило бы благодаря интерференции малых гармоник излучения различных электронов. Максимальная гармоника, до которой излучение различных электронов еще когерентно, — порядка отношения длины орбиты и размерам той части орбиты, которая занята электронами.

7. Пределы тех концентраций электронов на орбите, вплоть до которых можно не рассматривать взаимодействие электронов, определяются из требования, чтобы пуассоновы флуктуации, ответственные за излучение, могли бы еще беспрепятственно осуществляться. При возникновении флуктуаций в распределении электронов вдоль пучка появляются электрические потенциалы, стремящиеся рассеять флуктуацию. С другой стороны, благодаря неодинаковости энергий у отдельных электронов они будут двигаться с различными скоростями и благодаря этому будет наблюдаться тенденция к постоянному возникновению флуктуаций помимо тех флуктуаций, которые связаны с начальными условиями ускорения. Если разброс энергий электронов значительно больше, чем потенциалы, стремящиеся рассеять флуктуацию, флуктуации будут все время такими же, как в случае распределения Пуассона. Сравнивая наибольшие флуктуационные потенциалы с разбросом энергий  $W$ , мы получаем следующее условие независимости флуктуаций:

$$W \gg e^2 \sqrt{nr \left(\frac{R}{2r}\right)^{3/2}} \ln \left[ \frac{r}{R} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $n$  — число электронов на траектории в  $1 \text{ см}^3$ ,  $r$  — радиус электронного пучка. В (2) предполагается, что  $\frac{E}{mc^2} \gg \sqrt{\frac{R}{r}}$ . Это условие выполнено при релятивистских энергиях.

Если электронный ток составляет даже  $1 \text{ А}$ ,  $r = 1 \text{ мм}$ ,  $R = 10 \text{ см}$ , то для соблюдения условия (2)  $W$  должно удовлетворять неравенству

$$W \gg 1 \text{ эв}. \quad (3)$$

В реальных условиях  $W$  на несколько порядков величины больше, чем  $1 \text{ эв}$ . Можно также убедиться в том, что неодинаковость скоростей в реальном пучке такова, что за время ускорения взаимные расстояния электронов будут меняться на величины, большие, чем эффективная длина волны излучения<sup>1</sup>.

Таким образом, в реальных условиях концентрации электронов настолько малы, что взаимодействие их друг с другом не сказывается на их излучении в магнитном поле, если гармоники не слишком низки.

Академия наук СССР

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля. М., Гостехиздат, 1941, стр. 174.
2. J. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1940, 2, 65 (Собр. трудов, № 41).
3. А. Мигдал. ЖЭТФ, 1945, 15, 313.
4. L. Arzimovich, J. Pomeranchuk. J. Phys. USSR, 1945, 9, 267 (Собр. трудов, № 48).
5. McMillan. Phys. Rev., 1945, 7—8.

<sup>1</sup> Отсюда следует, что усреднение по флуктуациям будет осуществляться уже в пределах одного импульса в ускорителе.



## О ФЛУКТУАЦИЯХ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПРОБЕГОВ\*

Рассматривается влияние многократного рассеяния на ионизационный пробег. Получены выражения для удлинения траектории, вызываемого многократным рассеянием (§ 1), а также для средней квадратичной флуктуации длины траектории при заданных начальной и конечной точках (§ 2).

Рассмотрены флуктуации при образовании  $\delta$ -частиц в толстых слоях вещества. Найдено распределение вероятностей потерь энергии в этом случае. Оно оказывается гауссовым (§ 3). Указаны пределы точности определения покоящейся массы при измерении толщины фильтров, поглощающих частицы с заданным импульсом (§ 3).

§ 1. При определении величины ионизационных пробегов в таких условиях, когда измеряется толщина фильтра, поглощающего частицу, обычно предполагается, что частица движется прямолинейно, не испытывая многократного рассеяния. Однако соотношение между пробегом и энергией, даваемое теорией ионизационных потерь, относится не к прямолинейному смещению частицы от начала ее пути до остановки, а к полной длине пути, искривленного из-за рассеяния. Эта полная длина пути благодаря флуктуациям рассеяния сама также флуктуирует, вследствие чего задание толщины фильтра, поглощающего частицу, не вполне однозначно определяет начальную энергию частицы. Другим источником такой неоднозначности являются флуктуации при образовании  $\delta$ -частиц, которые не рассматриваются существующей теорией ионизационных пробегов.

Целью настоящей статьи является определение влияния кулоновского многократного рассеяния на ионизационный пробег, измеряемый методом поглощения, а также определение флуктуаций величины пробега, вызванных флуктуациями при образовании  $\delta$ -частиц. При этом мы будем рассматривать случай, когда единственными потерями энергии являются ионизационные. Так как в дальнейшем нас будут интересовать условия, когда флуктуации пробегов могут считаться малыми, возможно раздельное рассмотрение флуктуаций, вызванных многократным рассеянием, и флуктуаций, обязанных  $\delta$ -частицам.

---

\* ЖЭТФ, 1948, 18, 759.

Пусть нам задано начальное и конечное положения частицы (точки  $A$  и  $B$ ); определим среднюю длину искривленной траектории  $AB$ . Вводя поперечные по отношению к прямолинейному отрезку  $AB$  координаты  $y$  и  $z$  и обозначая посредством  $t$  координату вдоль  $AB$ , получаем

$$\bar{s} = \int_A^B dt [1 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2]^{1/2}.$$

Предполагая угол рассеяния небольшим, находим

$$s = t + 1/2 \int_A^B dt [(dy/dt)^2 + (dz/dt)^2] = t + 1/2 \int_A^B \bar{\theta}^2 dt, \quad (1)$$

$\bar{\theta}^2$  — средний квадрат угла многократного рассеяния.

Переходим от интегрирования по пути  $t$  к интегрированию по энергии, считая углы рассеяния малыми. Длину  $t$  будем измерять в лавинных единицах [1]:

$$-dE/dt = a/\beta^2, \quad a = \pi m L_i / 2 Z \alpha L_r, \quad \bar{s} - t = 1/2 \int_{\mu}^{E_0} (\beta^2 \bar{\theta}^2 / a) dE, \quad (2)$$

где  $L_i$  — ионизационный логарифм,  $L_r$  — радиационный логарифм,  $m$  — покоящаяся энергия электрона,  $a = e^2/\hbar c$ ,  $E_0$  — полная начальная энергия частицы.

Подставляем сюда вместо  $\bar{\theta}^2$  его выражение [2] как функцию энергии, считая  $a$  в первом приближении постоянной, получаем

$$\bar{s} - t = \frac{1}{2} \frac{E_s^2}{\mu a^2} \int_{\mu}^{E_0} \ln \left( \frac{(\mu + E) p_0}{(\mu + E_0) p} \right) dE \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right)$$

( $p_0$  — начальный импульс,  $\mu$  — покоящаяся энергия частицы,  $E_s = 21 M\text{эв}$ ). Производя интегрирование, находим среднее удлинение траектории по отношению к прямолинейному смещению, вызванное многократным рассеянием:

$$\overline{\Delta s} = \bar{s} - t = \frac{E_s^2}{2a^2} \ln \frac{(E_0 + \mu)^2}{4E_0\mu}. \quad (3)$$

При выводе (3) мы считали  $a$  постоянной, пренебрегая логарифмической зависимостью  $a$  от энергии. Так как в интеграле определяющем  $\overline{\Delta s}$ , главную роль играют энергии  $E$  порядка  $E_0$ , то изменение логарифма с изменением энергии не должно приводить к большому отклонению от (3).

Для того чтобы максимально уменьшить погрешность, вызванную заменой  $a$  на постоянную, мы можем использовать следующий прием. Заменим в интеграле (2) величину  $a$  на ее значение при  $E = E_1$ , где  $\mu < E_1 < E$ . Энергию  $E_1$  подберем так, чтобы

члены первого порядка в разложении  $a$  в ряд по степеням  $E - E_1$  при интегрировании обращались в нуль. В соответствии с этим, раскрывая точное выражение для  $\bar{\theta}^2$  ([2], формула (1.55)), мы преобразовываем его к следующему виду:

$$\bar{\theta}^2 = E_s^2 \int_E^{E_0} du / (u^2 - \mu^2) a(u). \quad (4)$$

Подставим (4) в (2):

$$\bar{s} - t = \frac{E_s^2}{2} \int_{\mu}^{E_0} \frac{dE}{a(E)} \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) \int_E^{E_0} \frac{du}{(u^2 - \mu^2) a(u)}.$$

Разложим далее  $a(E)$  и  $a(u)$  в ряд по степеням  $E - E_1$ ,  $u - E_1$ :  $a(E) = a(E_1) + (da/dE_1)(E - E_1)$ ,  $a(u) = a(E_1) + (u - E_1)(da/dE_1)$ .

Отношение  $E_1 (da/dE_1)$  к  $a(E_1)$  — порядка единицы, деленной на ионизационный логарифм (считая, что  $E_1$  не очень близко к  $\mu$ ; это предположение согласно (5) действительно выполняется). Таким образом  $\bar{s} - t$  получается в виде ряда по обратным степеням ионизационного логарифма.

Рассмотрим члены нулевого и первого порядка в этом разложении

$$\begin{aligned} \bar{s} - t = & \frac{E_s^2}{4a^2(E_1)\mu} \int_{\mu}^E dE \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) \ln \frac{(E_0 - \mu)(E + \mu)}{(E_0 + \mu)(E - \mu)} - \\ & - \frac{E_s^2}{2a^3(E_1)} \frac{da}{dE_1} \left\{ \int_{\mu}^{E_0} dE (E - E_1) \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) \int_E^{E_0} \frac{du}{u^2 - \mu^2} + \right. \\ & \left. + \int_{\mu}^{E_0} dE \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) \int_E^{E_0} \frac{(u - E_1) du}{u^2 - \mu^2} \right\}; \end{aligned}$$

$E_1$  выбираем так, чтобы второй член обратился в нуль. Это условие дает

$$E_1 = 1/2 \left[ E_0 - \mu - 2\mu \ln \frac{E_0 + \mu}{2\mu} + K \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^2 \right] \left[ \ln \frac{(E_0 + \mu)^2}{4E_0\mu} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Здесь

$$K = 4 \int_0^{\infty} (1 - b^2 e^{-2t})^{-1} (1 - b e^{-t})^{-1} e^{-2t} t dt, \quad b = (E_0 - \mu)/(E_0 + \mu). \quad (6)$$

Если начальная энергия  $E_0 = 2\mu$  (кинетическая энергия равна энергии покоя), чему в случае мезотронов с массой  $\mu = 200 m$  соответствует кинетическая энергия, равная  $\approx 10^8$  эв, то  $E_1$  равно  $\sim 1,75 \mu$ .

При пользовании (5) формула (3) имеет точность порядка  $L_i^{-2}$ ,  $L_i$  — ионизационный логарифм. Так как  $L_4$  — порядка 10–20,

то с помощью (5) мы достигаем у (3) точности порядка 1%, если  $a$  заменить на  $a(E_1)$ .

Когда  $E_0 = 2\mu$ ,  $\bar{s} - t$  равно в свинце одной лавинной единице. Так как пробег мезотрона с этой энергией в свинце равен примерно 10 лавинным единицам, то систематическое среднее увеличение пути из-за рассеяния составляет в этих условиях 10% по отношению к полному прямолинейному смещению.

Подставляя вместо  $a$  его значение, находим

$$\bar{s} - t = \frac{2Z^2\alpha^2 E_s^2}{\pi^2 m^2} \frac{L_r^2}{L_i^2(E_1)} \ln \frac{(E_0 + \mu)^2}{4E_0\mu}. \quad (7)$$

Вводя ионизационный пробег без учета многократного рассеяния

$$t = (E_0 - \mu)^2 / \mu \bar{a} = (2L_r Z \alpha / \pi m \bar{L}_i) (E_0 - \mu)^2 E_0^{-1}$$

( $\bar{L}_i$  — значение ионизационного логарифма для некоторой средней энергии), получаем отношение  $\bar{s} - t$  к  $t$ :

$$\frac{\bar{s} - t}{t} \approx \frac{Z\alpha E_s^2 E_0}{\pi m (E_0 - \mu)^2} \frac{L_r}{L_i(E_1)} \ln \frac{(E_0 + \mu)^2}{4E_0\mu}. \quad (8)$$

Так как главную роль в интеграле, определяющем  $\bar{s} - t$ , играют энергии порядка  $E_0$ , то углы рассеяния малы, если  $E_0 > 10^7$  эв [2]. Поэтому предположение о малости  $\bar{\theta}^2$ , сделанное в (1), справедливо, если начальные энергии  $E_0$  больше, чем  $10^7$  эв.

§ 2. Кроме систематического увеличения пути  $s$  по сравнению с кажущимся  $t$  многократное рассеяние вызывает также флуктуации путей около  $\bar{s}$  (при заданном прямолинейном смещении  $t$ ). Определим среднюю квадратичную флуктуацию пробегов

$$\begin{aligned} \overline{s^2} - \bar{s}^2 &= \overline{(s - t)^2} - \overline{(\bar{s} - t)^2} = 1/4 \left( \overline{\int dt \theta^2} \right)^2 - 1/4 \left( \int dt \bar{\theta}^2 \right)^2 = \\ &= 1/4 \int_0^t d\xi \int_0^t d\tau (\bar{\theta}_\xi^2 \bar{\theta}_\tau^2 - \bar{\theta}_\xi^2 \bar{\theta}_\tau^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть  $\tau > \xi$ . Предполагая углы малыми, мы можем их представить двумерными векторами. Введем разность углов между углом  $\theta_\xi$ , соответствующим глубине  $\xi$ , и углом  $\theta_\tau$ , соответствующим глубине  $\tau$ :  $\theta_\tau = \theta_\xi + \vartheta$ . Многократное рассеяние в случае малых углов приводит к тому, что вектор  $\theta$  меняется с увеличением  $t$  так же, как и координаты частицы, совершающей броуновское движение (с коэффициентом диффузии, зависящим от  $t$ ). Поэтому в выражении для  $\theta_\tau$  векторы  $\theta_\xi$  и  $\vartheta$  статистически независимы ( $\tau > \xi$ ):

$$\overline{\theta_\tau^2} = \overline{\theta_\xi^2} + \overline{\vartheta^2}. \quad (10)$$

Воспользовавшись этим соотношением, переписываем (9) в виде

$$\begin{aligned} & 1/4 \int_0^t d\xi \int_{\xi}^t d\tau \left[ \overline{(\theta_{\xi}^2 + 2\theta_{\xi}\vartheta + \vartheta^2)\theta_{\xi}^2} - \overline{(\theta_{\xi}^2 + 2\theta_{\xi}\vartheta + \vartheta^2)\theta_{\xi}^2} \right] + \\ & + 1/4 \int_0^t d\xi \int_0^{\xi} d\tau \left[ \overline{(\theta_{\tau}^2 + 2\theta_{\tau}\varphi + \varphi^2)\theta_{\tau}^2} - \overline{(\theta_{\tau}^2 + 2\theta_{\tau}\varphi + \varphi^2)\theta_{\tau}^2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь вектор  $\varphi$  определяется аналогично  $\vartheta$ :  $\theta_{\xi} = \theta_{\tau} + \varphi$ ,  $\xi > \tau$ . Учитывая равенства:

$$\begin{aligned} \overline{\theta_{\xi}\vartheta} = \overline{\theta_{\xi}\vartheta} = 0, \quad \overline{\theta_{\tau}\varphi\theta_{\tau}^2} = \overline{\varphi\theta_{\tau}\theta_{\tau}^2} = 0, \quad \overline{\theta_{\xi}\vartheta\theta_{\xi}^2} = \overline{\vartheta\theta_{\xi}\theta_{\xi}^2} = 0, \\ \overline{\varphi^2\theta_{\tau}^2} = \overline{\varphi^2\theta_{\tau}^2}, \quad \overline{\theta_{\tau}\varphi} = \overline{\theta_{\tau}\varphi} = 0, \quad \overline{\vartheta^2\theta_{\xi}^2} = \overline{\vartheta^2\theta_{\xi}^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

находим

$$\begin{aligned} \overline{s^2} - \bar{s}^2 &= 1/4 \int_0^t d\xi \int_{\xi}^t [\overline{\theta_{\xi}^4} - \overline{(\theta_{\xi}^2)^2}] d\tau + 1/4 \int_0^t d\xi \int_0^{\xi} [\overline{\theta_{\tau}^4} - \overline{(\theta_{\tau}^2)^2}] d\tau = \\ &= 1/4 \int_0^t (t - \xi) d\xi [\overline{\theta_{\xi}^4} - \overline{(\theta_{\xi}^2)^2}] + 1/4 \int_0^t d\tau [\overline{\theta_{\tau}^4} - \overline{(\theta_{\tau}^2)^2}] \int_{\tau}^t d\xi = \\ &= 1/2 \int_0^t d\tau [\overline{\theta_{\tau}^4} - \overline{(\theta_{\tau}^2)^2}] (t - \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

При вычислении  $\overline{\theta_{\tau}^4} - \overline{(\theta_{\tau}^2)^2}$  мы можем считать гауссовским распределение вероятностей рассеяния по углам [3]. Это имеет место в том случае, когда флуктуации пробегов невелики. В дальнейшем только такой случай и будет рассматриваться. Вероятность рассеяния на углы  $\theta_x$  и  $\theta_y$  полагаем равной

$$W d\theta_x d\theta_y = (1/\pi\overline{\theta^2}) e^{-\theta^2/\overline{\theta^2}} d\theta_x d\theta_y \quad (14)$$

( $\overline{\theta^2}$  есть функция толщины слоя  $t$ ). Отсюда  $\overline{\theta^4}$  оказывается равным  $2(\overline{\theta^2})^2$ :

$$\overline{s^2} - \bar{s}^2 = 1/2 \int_0^t d\tau (\overline{\theta^2})^2 (t - \tau). \quad (15)$$

Переходим теперь к интегрированию по энергиям, считая ионизационный логарифм постоянным:

$$\overline{s^2} - \bar{s}^2 = \frac{E_s^4}{8\mu^2 a_{\text{эф}}^4} \int_{\mu}^{E_0} \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) dE \frac{(E - \mu)^2}{E} \ln^2 \frac{(E_0 - \mu)(E + \mu)}{(E_0 + \mu)(E - \mu)}. \quad (16)$$

Здесь аргументом  $a_{\text{эф}}$  является энергия  $E_2$ ,  $\mu < E_2 < E_0$ , выбираемая согласно тому же способу, что и энергия  $E_1$  из (5). Интег-

рал, входящий в (16), преобразуем, введя новую переменную  $t$  согласно

$$b(E + \mu)/(E - \mu) = e^t, \quad b = (E_0 - \mu)/(E_0 + \mu),$$

после чего разлагаем подынтегральное выражение по степеням  $b < 1$  и интегрируем почленно. В результате простого вычисления получаем для средней квадратичной флуктуации пробега

$$\begin{aligned} \overline{s^2} - \bar{s}^2 &= \frac{E_s^4}{2a_{\text{эф}}^4} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^{2n} = \\ &= \frac{E_s^4}{2a_{\text{эф}}^4} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^4 \left\{ -\frac{(E_0 + \mu)^4}{(E_0 - \mu)^2} \ln \left[ 1 - \frac{(E_0 - \mu)^2}{(E_0 + \mu)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(E_0 + \mu)^2}{(E_0 - \mu)^2} - \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Отношение  $\overline{s^2} - \bar{s}^2$  к квадрату среднего пробега равно

$$\frac{\overline{s^2} - \bar{s}^2}{\bar{s}^2} = \frac{E_s^4 E_0^2}{2a_{\text{эф}}^4 (E_0 + \mu)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^{2n}. \quad (18)$$

Мы пренебрегли здесь разницей в значениях  $a_{\text{эф}}$ , входящей в  $\overline{s^2} - \bar{s}^2$  и  $a_{\text{эф}}$ , входящей в выражение для среднего ионизационного пробега.

При  $E_0 = 2\mu$  согласно (18) мы получаем в свинце  $(\overline{s^2} - \bar{s}^2)^{1/2} t^{-1} \approx 0,075$ ; флуктуации пробега из-за многократного рассеяния в этих условиях составляют 7,5% прямолинейного смещения и лишь немногим меньше систематического увеличения пробега, равного согласно (3) 10% прямолинейного смещения.

В интеграле (15) главную роль играют энергии  $E$  порядка  $E_0$ . Поэтому при  $E_0 > 10^7$  предположение о малости  $\bar{\theta}^2$  можно считать выполненным при вычислении  $\overline{s^2} - \bar{s}^2$ . Так как  $a \sim 1/Z$ , то флуктуации пробега тем меньше, чем меньше  $Z$ :

$$(\overline{s^2} - \bar{s}^2)^{1/2} = \frac{2^{3/2} Z^2 \alpha^2 L_r^2 E_s^2 (E_0 - \mu)^2}{\pi^2 m^2 (E_0 + \mu)^2 L_i^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)^2} \left( \frac{E_0 - \mu}{E_0 + \mu} \right)^{2n} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Отношение этой величины к  $t$  пропорционально  $Z$ , как это и следовало ожидать. При  $E_0 = 2\mu$  в алюминии относительная флуктуация составляет 1,5—2% вместо 7,5% в свинце.

**§ 3.** Кроме флуктуаций ионизационных пробегов, вызванных многократным рассеянием, существуют еще флуктуации в ионизационных потерях энергии около среднего значения потерь, даваемого обычной теорией ионизации [4]. При заданном пути ионизационные потери флуктуируют около среднего значения. Такие флуктуации, очевидно, приводят к флуктуациям ионизационных

пробегах, которые необходимо прибавить к флуктуациям, вызванным многократным рассеянием и рассмотренным в § 2. Простое наложение обеих флуктуаций имеет место только в том случае, когда обе флуктуации малы. Именно этот случай нас интересует.

Флуктуации ионизационных потерь в тонких слоях вещества были исследованы Ландау [5]. Нас здесь интересуют, однако, флуктуации в толстых слоях, сравнимых с полным ионизационным пробегом. В этих условиях результаты, полученные Ландау, неприменимы. Поэтому мы рассмотрим здесь флуктуации ионизационных потерь, предполагая с самого начала большую толщину вещества. В дальнейшем мы уточним, что является критерием, различающим тонкие и толстые слои.

Рассмотрим сначала слой вещества, на протяжении которого среднее изменение энергии из-за ионизационных потерь еще невелико по сравнению с самой энергией. Это дает нам возможность считать энергию постоянным параметром, благодаря чему можно легко найти распределение вероятностей ионизационных потерь в этих условиях.

Пусть  $w(\Delta) d\Delta$  есть вероятность потерь от  $\Delta$  до  $\Delta + d\Delta$  на пути  $t$ . Функция  $w$  удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\partial w(\Delta)/\partial t = \int_0^{\epsilon_{\max}} \varphi(\epsilon) \{w(\Delta - \epsilon) - w(\Delta)\} d\epsilon. \quad (20)$$

Здесь  $\varphi(\epsilon) d\epsilon$  — вероятность потери энергии от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$  в одном элементарном акте,  $\varphi(\epsilon)$  и  $\epsilon_{\max}$  зависят от энергии как от параметра. Разложим  $w$  в ряд Фурье

$$w = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} g(z, t) e^{iz\Delta} dz;$$

$g(z, t)$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \partial g/\partial t &= g \int_0^{\infty} \varphi(\epsilon) \{e^{-i\epsilon z} - 1\} dz, \\ g(z, t) &= g(z, 0) \exp \left[ it \int_0^{\infty} \varphi(\epsilon) \{e^{-i\epsilon z} - 1\} d\epsilon \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

При достаточно больших толщинах  $t$  можно разложить  $e^{-i\epsilon z}$  в ряд по степеням  $z$  (условие применимости разложения см. (35))

$$g(z, t) = g(z, 0) \exp \left\{ -izt \int_0^{\epsilon_{\max}} \varphi(\epsilon) \epsilon d\epsilon - 1/2 z^2 t \int_0^{\epsilon_{\max}} \epsilon^2 \varphi(\epsilon) d\epsilon \right\}. \quad (22)$$

Если при  $t = 0$  частица имеет определенную энергию  $E$ , то  $w(\Delta, 0)$  является  $\delta$ -функцией от  $\Delta$ . Поэтому  $g(z, 0)$  равно единице:

$$w = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ iz \left( \Delta - t \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \right) - \right. \\ \left. - (z^2 t/2) \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \right\} dz, \quad (23)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = a/\beta^2,$$

где  $a/\beta^2$  — средняя потеря энергии на единицу пути (напомним, что в качестве единицы пути мы выбрали лавинную единицу).

В интеграле  $\int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$  главную роль играют  $\varepsilon$  порядка  $\varepsilon_{\max}$ . Так как  $\varepsilon_{\max}$  в наших условиях велико по сравнению с ионизационными потенциалами основной массы электронов, то при вычислении  $\varphi(\varepsilon)$  можно считать электроны свободными и пользоваться выражением

$$\varphi(\varepsilon) = a/\beta^2 \varepsilon^2 L_i \quad (24)$$

( $L_i$  — ионизационный логарифм). Введем обозначения

$$u^2 = 1/2 \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = a\varepsilon_{\max}/2\beta^2 L_i. \quad (25)$$

Согласно (23) — (25)  $w(\Delta t)$  принимает вид

$$w = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ iz \left( \Delta - t \frac{a}{\beta^2} \right) - z^2 t u^2 \right\} dz = (4\pi u^2)^{-1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -(\Delta - at\beta^{-2})^2 / 4u^2 t \right\}. \quad (26)$$

Мы получили вероятность в виде гауссова распределения около средней потери энергии, равной (при  $E = \text{const}$ )  $at/\beta^2$ . (В нерелятивистском случае формулы (26) и (28) без вывода приводятся в [6].) Средняя квадратичная флуктуация равна

$$\overline{(\Delta - at/\beta^2)^2} = 2u^2 t = a\varepsilon_{\max} t \beta^{-2} L_i^{-1}. \quad (27)$$

Для того чтобы учесть изменение энергии при замедлении частицы, мы должны вместо умножения на  $t$  в (27) (и в выражении для средней потери) произвести интегрирование по  $dt$ , превращая далее это интегрирование в интегрирование по энергии. Такая



замена соответствует сохранению гауссовой формы распределения вероятностей, причем ширина распределения накапливается в соответствии с путем, проходимым частицей. В результате получаем:

$$w(\Delta, t(E)) = (4\pi u^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{4u^2} \left( \Delta - \int_E^{E_0} \frac{a}{\beta^2} \frac{dt}{dE} dE \right)^2 \right\},$$

$$u^2 = \frac{1}{2} \int_E^{E_0} \frac{a \varepsilon_{\max}(E)}{\beta^2 L_i} \left| \frac{dt}{dE} \right| dE. \quad (28)$$

Используя соотношения  $|dE/dt| = a/\beta^2$  и  $\varepsilon_{\max} = 2m\mu^{-2}(E^2 - \mu^2)$ , приводим  $u^2$  к виду

$$u^2 = m\mu^{-2} \int_E^{E_0} L_i^{-1} dE (E^2 - \mu^2). \quad (29)$$

Заменяем  $L_i$  на постоянную, равную величине  $L_i$ , при промежуточном значении энергии (аналогично § 1, (5)):

$$u^2 = 1/3 m (E_0 - E) \mu^{-2} L_i^{-1} (E_0^2 + EE_0 + E^2 - 3\mu^2). \quad (30)$$

Полагая здесь  $E = \mu$ , получаем полную среднюю квадратичную флуктуацию потерь энергии на длине пути, равной среднему ионизационному пробегу:

$$2u^2 = 2/3 m (E_0 - \mu)^2 \mu^{-2} L_i^{-1} (E_0 + 2\mu). \quad (31)$$

Относительная средняя квадратичная флуктуация получится из (31) делением на  $(E_0 - \mu)^2$ , так как на всем пробеге теряется энергия, равная  $E_0 - \mu$ :

$$v = 2^{1/2} u (E_0 - \mu)^{-1} = [2/3 m (E_0 + 2\mu) \mu^{-2} L_i^{-1}]^{1/2}. \quad (32)$$

Флуктуациям ионизационных потерь можно сопоставить флуктуации ионизационных пробегов. Ионизационный пробег связан с начальной энергией соотношением

$$t = (E_0 - \mu)^2 / a E_0.$$

Отсюда

$$\Delta t/t = (2\Delta E_0 / (E_0 - \mu)) - (\Delta E_0 / E_0) = \Delta E_0 (E_0 + \mu) / (E_0 - \mu) E_0.$$

Подставляя (32) вместо  $\Delta E_0 / (E_0 - \mu)$ , определяем эквивалентное  $\Delta t/t$ :

$$\Delta t/t = [2m (E_0 + 2\mu) / 3\mu^2 L_i]^{1/2} (E_0 + \mu) / E_0. \quad (33)$$

При  $E_0 = 2\mu$   $\Delta t/t$  оказывается равным 4—5%.

Полная флуктуация ионизационных пробегов складывается из (33) и  $\Delta_{\mu}^2(19)$ . С уменьшением  $z$  возрастает относительная роль флуктуаций потерь (33) по сравнению с флуктуациями, вызванными рассеянием.

В некоторых случаях связь между пробегом и начальной энергией используется для определения массы покоя частицы [7]. Флуктуации в пробегах вызывают в этом случае неопределенность в значении массы покоя  $\mu$ . При заданном значении начального импульса частицы получается соотношение

$$-\Delta\mu/\mu = E_0^2(2E_0 + \mu)^{-1}\mu^{-1}(\Delta t/t), \quad (34)$$

В свинце при  $E_0 = 2\mu$   $\Delta\mu/\mu$  равно 9—10%. В алюминии в тех же условиях  $\Delta\mu/\mu \approx 6\%$ .

Определим теперь условия, налагаемые на толщину вещества для того, чтобы можно было применить наши формулы для флуктуаций ионизационных пробегов. Разложение  $e^{-iz}$  в ряд по степеням  $iz$  требует, чтобы  $\varepsilon_{\max}z_{\text{эф}}$  было малым по сравнению с единицей.  $z_{\text{эф}}$  представляет собой значение  $z$ , которое играет главную роль в интеграле (22):  $z_{\text{эф}} \approx (tu^2)^{-1/2}$ . Таким образом, мы приходим к условию

$$\varepsilon_{\max}/(tu^2)^{1/2} \ll 1.$$

Подставляя сюда вместо  $u^2$  его значение, согласно (25) получаем условие

$$\left[ \frac{2\varepsilon_{\max}^3 L_i}{ta} \right]^{1/2} = 2 \frac{(E^2 - \mu^2)}{\mu E} \left( \frac{mL_i}{at} \right)^{1/2} \ll 1. \quad (35)$$

Так как  $at$  порядка начальной энергии частицы, то (35) можно считать выполненным.

В заключение я хочу поблагодарить академика Л. Ландау за ценные указания при проведении настоящей работы.

Академия наук СССР

Получено 20 декабря 1947 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Rossi, K. Greisen.* Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 253.
2. *B. Rossi, K. Greisen.* Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 263.
3. *С. З. Беленький.* Лавинные процессы в космических лучах. М., Гостехиздат, 1948.
4. *B. Rossi, K. Greisen.* Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 245.
5. *Л. Ландау.* J. Phys. USSR, 1944, 8, 201.
6. *M. S. Livingston H. A. Bethe.* Rev. Mod. Phys., 1937, 9, 283.
7. *А. Алиханян, А. Алиханов, А. Вайсенбергер.* ЖЭТФ, 1948, 18, 301.

**ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ  
ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ  
И ОБРАЗОВАНИЯ ПАР ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ\***

*Совместно с Л. Д. Ландау*

Теоретический анализ [1] методов получения формул Бете — Гайтлера (Б.—Г.) [2] для тормозного излучения и образования пар приводит к заключению, что они должны быть применимы вплоть до сколь угодно больших энергий. Этот вывод, однако, относится к радиационным процессам, происходящим на одном изолированном атоме. Если рассматривать радиационные процессы в среде, то можно установить, что при достаточно больших энергиях теория Б.—Г. будет несправедлива.

Для того чтобы самым простым образом выяснить вопрос, рассмотрим сперва испускание квантов, имеющих энергию  $^1 \omega$ , много меньшую, чем энергия электрона  $E$ . В этом случае законно классическое рассмотрение, приводящее к следующему выражению для энергии, излученной в элемент телесного угла  $d\Omega$  и в интервале частот  $d\omega$  [3]:

$$dI_{n\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega \left| \int [\mathbf{n} d\mathbf{r}] \exp \{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]\} \right|^2, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{V}(t) dt, \quad \mathbf{k} = n\omega. \quad (1)$$

Формулы Б.—Г. при малых  $\omega$  получаются из (1), если считать, что  $\mathbf{V}$  внезапно меняется при столкновении электрона с одним атомом, т. е.  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1$ ,  $V_1 = V_{1z}$  при  $t < 0$  и  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$  при  $t > 0$ . Умножая (1) на вероятность заданного рассеяния электрона, можно получить результаты Б.—Г. [4], при этом мы приходим к интегралам:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}\mathbf{V}_1] \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp [i(\omega - k_2 V_1)t] + [\mathbf{n}\mathbf{V}_2] \int_0^{\infty} dt \exp [i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}_2)t], \\ \mathbf{k}_2 \mathbf{V} = k V_{2z} \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) + [k\vartheta] \mathbf{V}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

( $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и осью  $z$ ).

При малых  $\vartheta$  (эффективные  $\vartheta \sim m/E$ ,  $m$  — покоящаяся энергия электрона) существенный интервал времени оказывается порядка

$$t_e \sim E^2/m^2\omega. \quad (3)$$

\* Докл. АН СССР, 1953, 92, 535.

<sup>1</sup>  $\hbar = c = 1$ .

С ростом  $E$  время  $t_e$  очень сильно растет, и вследствие этого играют роль расстояния от электрона до ядра, которые значительно превосходят атомные размеры.

Начиная с  $E = \sqrt{m^2 L \omega}$ , где  $L$  — лавинная единица длины [2], существенны расстояния порядка  $L$ . В этих условиях совершенно очевидно, что результаты Б.—Г. не могут быть правильными, так как электроны, позитроны и кванты существенно поглощаются на этой длине. Однако формулы Б.—Г. нарушаются при значительно меньших энергиях из-за многократного кулоновского рассеяния на расстоянии  $t_e$ . Учитывая это рассеяние, получаем

$$kr(t) = V(0)k \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \int \left(1 - \frac{\theta_t^2}{2}\right) dt + k\theta \int \theta_t dt, \quad (4)$$

где  $\theta_t$  связано с  $V$  следующим образом:

$$V(t) = V(0) + \theta_t, \quad V(0)\theta_t = 0. \quad (5)$$

Величина  $\theta_t$  обязана многократному рассеянию. Подставим (4) в (1), считая для простоты  $\vartheta = 0$ . Из-за многократного рассеяния в показателе (1) появляется член

$$\frac{1}{2} k \int \theta_t^2 dt. \quad (6)$$

Для оценки его влияния заменим  $\theta_t^2$  на  $\bar{\theta}_t^2$ , беря последнее из теории многократного рассеяния [5]. Выражение (6) по порядку величины равно

$$\omega E_s^2 t^2 / E^2 L. \quad (7)$$

Подставляя сюда вместо  $t$  (3), получаем

$$E_s^2 E^2 / m^4 \omega L. \quad (8)$$

Когда  $E = E_0(\omega)$ , где

$$E_0(\omega) = \frac{m^2}{E_s} \sqrt{\omega L} = \frac{m^2}{E_s} \sqrt{\frac{m^2 \omega}{4Z^2 n e^3 \ln 191Z^{-1/3}}} \quad (9)$$

( $n$  — число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ), в показателе (1) появляется добавочный член порядка единицы и, следовательно, формулы Б.—Г. перестают быть применимы при излучении частоты  $\omega$ .

Если  $\omega \sim E$ , классическое рассмотрение по порядку величины еще справедливо, и из (9) мы находим

$$E_0(E) \equiv E_0 = \frac{m^4 L}{E_s^2} = \frac{m^3}{4E_s^2 Z^2 n e^3 \ln(191Z^{-1/3})}. \quad (10)$$

Так как  $(E_s/m)^2 = 1700$ , то  $E_0 = 1/1700 m^2 L$ . Для свинца это дает энергию, равную  $5 \cdot 10^{12}$  эв; у элементов в конце системы Мен-

делеева  $E_0$  падает до  $2 \cdot 10^{12}$  эв. Когда  $E > E_0$ , излучение почти всех квантов не может следовать Б.—Г., то же относится и к образованию пар. При меньших энергиях радикальные отклонения от Б.—Г. должны быть при малых  $\omega$ , удовлетворяющих неравенству

$$\omega \lesssim E^2/E_0. \quad (11)$$

Академия наук СССР

Получено 22 июля 1953 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *C. F. v. Weizsäcker. Zs. f. Phys., 1934, 88, 612.*
2. См., например, *С. З. Беленький. Лавинные процессы в космических лучах. М., 1948.*
3. *Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля. М.—Л., ГТТИ, 1948, стр. 200.*
4. *A. Nordsteck. Phys. Rev., 1937, 52, 59.*
5. См., например, *Б. Росси, К. Грейвен. Взаимодействие космических лучей с веществом. М., ИЛ, 1948, стр. 44.*

## ЭЛЕКТРОННО-ЛАВИННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ\*

*Совместно с Л. Д. Ландау*

Как было указано [1], развитая Бете и Гайтлером (Б.— Г.) теория тормозного излучения электронов и позитронов, а также образования электронно-позитронных пар  $\gamma$ -квантами неприменима при достаточно больших энергиях частиц из-за многократного рассеяния электронов и позитронов в среде. В работе [1] был лишь оценен порядок величины энергий, при которых должны наступать заметные отклонения от формул Б.— Г. Сейчас мы рассмотрим радиационные процессы в таких условиях, при которых теория Б.— Г. несправедлива.

Рассмотрим сперва излучение квантов малых частот ( $\omega \ll E$ ). Энергия, излученная в элементе телесного угла  $d\mathbf{n}$  и в интервале частот  $d\omega$ , дается формулой (1) [1].

Для того чтобы получить более точные соотношения, проинтегрируем (1) [1] по всем направлениям кванта  $\mathbf{n}$ . Теряемая в интервале  $d\omega$  энергия  $dI$  равна

$$\begin{aligned}
 dI &= \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega \iiint ([\mathbf{n} d\mathbf{r}_1] [\mathbf{n} d\mathbf{r}_2] \exp [i\omega(t_1 - t_2) - \\
 &- i(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\omega] d\mathbf{n} = \frac{e^2}{4\pi^2} \omega^2 d\omega \iiint \exp [i\omega(t_1 - t_2)] \times \\
 &\times [d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 - (\mathbf{n} d\mathbf{r}_1)(\mathbf{n} d\mathbf{r}_2)] \exp [-i(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\omega] d\mathbf{n} = \\
 &= \frac{e^2}{\pi} \omega^2 d\omega \iint [d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + (d\mathbf{r}_1 \nabla_{\mathbf{g}})(d\mathbf{r}_2 \nabla_{\mathbf{g}})] \frac{\sin g}{g} \exp [i\omega(t_1 - t_2)], \quad (1) \\
 &\mathbf{g} = \omega(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).
 \end{aligned}$$

Так как эффективные значения  $g$  велики по сравнению с единицей, то в (1) можно не дифференцировать  $1/g$ :

$$\begin{aligned}
 dI &= \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \frac{\exp [i\omega(t_1 - t_2)]}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \times \\
 &\times \left[ \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 - \frac{(\mathbf{V}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{V}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} \right] \sin g. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{V}(\tau) d\tau = \int_0^{t_1 - t_2} \mathbf{V}(t_2 + \tau) d\tau. \quad (3)$$

\* Докл. АН СССР, 1953, 92, 735.

Представим  $V(t_2 + \tau)$  в следующем виде:

$$V(t_2 + \tau) = V_2 \left(1 - \frac{\theta_\tau^2}{2}\right) + \theta_\tau, \quad V_2 \theta_\tau = 0, \quad (4)$$

где  $\theta_\tau$  — угол многократного рассеяния за время  $\tau$ . Выражения (3) и (4) дают

$$r_1 - r_2 = V_2(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} V_2 \int_0^{t_1 - t_2} \theta_\tau^2 d\tau + \int_0^{t_1 - t_2} \theta_\tau d\tau.$$

Пользуясь малостью  $\theta$  и вводя переменные  $T = t_2$ ,  $t_1 - t_2 = t$ , приводим (2) к виду

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t} \times \\ \times \left[ \frac{\left(\int_0^t \theta_\tau d\tau\right)^2}{t^2} - \frac{\theta_t \int_0^t \theta_\tau d\tau}{t} \right] \sin \omega \left[ Vt - \frac{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau}{2} + \frac{\left(\int_0^t \theta_\tau d\tau\right)^2}{2t} \right]. \quad (5)$$

Черта означает усреднение по всем углам  $\theta_\tau$ . Если пренебречь  $\theta_\tau$  под знаком синуса, то из (5), пользуясь теорией многократного рассеяния [2], получим обычную формулу Б. — Г. в области  $\omega \ll E$ .

Теряемая в единицу времени в интервале  $d\omega$  энергия равна

$$dI = \frac{e^2 \omega d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{i\omega t} \times \\ \times \left[ \frac{\left(\int_0^t \theta_\tau d\tau\right)^2}{t^2} - \frac{\theta_t \int_0^t \theta_\tau d\tau}{t} \right] \sin \omega \left[ Vt - \frac{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau}{2} + \frac{\left(\int_0^t \theta_\tau d\tau\right)^2}{2t} \right]. \quad (6)$$

Точное проведение усреднения в (6) затруднительно ввиду того, что усредняемая величина  $\theta_\tau$  входит под знаком синуса. Поэтому для оценки порядка величины мы заменим все члены в (6) в отделимости на их средние значения, пользуясь [2]:

$$\overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t |t|}{2E^2 L}, \quad \overline{\theta_t \int_0^t \theta_\tau d\tau} = \overline{\int_0^t (\theta_\tau + \varphi, \theta_\tau) d\tau} = \overline{\int_0^t \theta_\tau^2 d\tau} = \frac{E_s^2 t |t|}{2E^2 L}, \\ \overline{\left(\int_0^t \theta_\tau d\tau\right)^2} = 2 \overline{\int_0^t d\tau \int_0^\tau \overline{\theta_\tau \theta_\nu} d\nu} = 2 \overline{\int_0^t \theta_\nu^2 (t - \nu) d\nu} = \frac{E_s^2 |t|^3}{3E^2 L}. \quad (7)$$

Пользуясь (7), имеем

$$\begin{aligned}
 dI &\approx -\frac{e^2}{3\pi E^2} \frac{\omega d\omega}{L} E_s^2 \int_0^\infty dt \cos \omega t \sin \omega V \left( t - \frac{E_s^2 t^2}{12E^2 L} \right) \approx \\
 &\approx \frac{e^2 \omega d\omega}{6\pi E^2 L} E_s^2 \int_0^\infty dt \sin \left[ (1-V) \omega t + \frac{E_s^2 t^2 \omega}{12E^2 L} \right] = \\
 &= \frac{4d\omega}{3L} \int_0^\infty dX \sin \left( X + \frac{E^2 X^2}{3E_0 \omega} \right), \quad (8) \\
 E_0 &= \frac{m^4 L}{E_s^2}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\omega \ll E^2/E_0$ . Интеграл, входящий в (8), равен  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3E_0 \omega}{E^2}}$ ,  $dI$  оказывается порядка

$$dI \approx \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{L} \sqrt{\frac{\omega E_0}{E^2}}. \quad (9)$$

Отсюда определяется число испущенных в единицу времени квантов в интервале частоты  $d\omega$ :

$$dN = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{E_0}{E^2 L^2}}. \quad (10)$$

Так как условие  $\omega \ll E^2/E_0$  всегда будет удовлетворено для квантов достаточно малой энергии, то из (10) следует, что инфракрасная катастрофа в тормозном излучении никогда не имеет места, так как при  $\omega \rightarrow 0$  спектр из  $d\omega/\omega$  перестраивается в  $d\omega/\sqrt{\omega}$ . Полное число излученных квантов тем самым оказывается конечным.

Переходя к случаю, когда  $\omega \sim E$ , необходимо пользоваться квантовым рассмотрением. Точное проведение его связано с трудными вычислениями. Поэтому мы ограничимся только оценками, справедливыми по порядку величины.

В матричный элемент, определяющий излучение, входит существенным множителем выражение

$$\exp [i(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{K}, \mathbf{r})], \quad (11)$$

где  $\mathbf{p}$  — импульс электрона до излучения,  $\mathbf{p}'$  — после него,  $\mathbf{K}$  — импульс кванта. Учитывая малость углов между  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , рассмотрим сперва случай, когда они все параллельны. Разность  $\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{K}$  равна  $m^2 K/2EE'$ . Поэтому  $r_{\text{эф}}$  порядка

$$\frac{EE'}{m^2 K}; \quad (12)$$



$\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  меняются из-за многократного рассеяния. Проекции  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}'$  на направление  $\mathbf{K}$  на расстоянии  $r_{\text{эф}}$  меняются на величину  $E \frac{E_s^2}{E^2} \frac{r_{\text{эф}}}{L}$ ,  $E' \frac{E_s^2}{E'^2} \frac{r_{\text{эф}}}{L}$  соответственно. С учетом этого (11) приобретает вид

$$e^{i \frac{m^2 r_{\text{эф}} K}{2EE'}} e^{i \frac{r_{\text{эф}}^2 E_s^2 K}{4EE'L}}. \quad (13)$$

$r_{\text{эф}}$  равно

$$\sqrt{\frac{LEE'}{E_s^2 K}} = \frac{EE'}{m^2 K} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}}, \quad (14)$$

если  $E_0 K/EE' \ll 1$ , и равно (12), если  $E_0 K/EE' \gg 1$ . Таким образом, если  $E' < E_0$ ,  $K \approx E$ , то соответствующий акт излучения будет следовать Б.—Г., в противном случае матричный элемент будет меньше, чем у Б.—Г.:

$$M = M_{\text{Б.-Г.}} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}}. \quad (15)$$

Вероятность испускания кванта данного направления приобретает вид

$$W = W_{\text{Б.-Г.}} \frac{E_0 K}{EE'}. \quad (16)$$

Однако телесный угол, в пределах которого испускаются кванты, возрастает. Если угол между  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{p}$  равен  $\vartheta$ , то в (11) появляется множитель  $e^{iK r_{\text{эф}}^2/2}$ . Согласно (14) этот множитель не будет уменьшать излучения вплоть до  $\vartheta^2$  порядка

$$\vartheta^2 \sim \frac{m^2}{EE'} \sqrt{\frac{EE'}{KE_0}} = \vartheta_{\text{Б.-Г.}}^2 \sqrt{\frac{EE'}{KE_0}}. \quad (17)$$

(Выражение для  $\vartheta_{\text{Б.-Г.}}^2$  легко получается из (12)).

Поэтому проинтегрированная по всем направлениям кванта вероятность излучения имеет вид

$$A dK = dK A_{\text{Б.-Г.}} \sqrt{\frac{E_0 K}{EE'}} \sim \frac{dK}{L} \sqrt{\frac{E_0}{EKE'}}. \quad (18)$$

Дифференциальное число квантов имеет минимум при  $K = E/2$ . Когда  $E - K \sim E_0$ ,  $A$  переходит в выражение Б.—Г.

Полное число излученных квантов в единицу времени конечно и равно

$$\int_0^E A dK = a_e \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_0}{E}}, \quad a_e \sim 1. \quad (19)$$

Энергия  $I$ , излученная в единицу времени:

$$I = \int_0^E KA dK = \frac{b}{L} \sqrt{EE_0} = \frac{E}{L(E)}, \quad b \sim 1. \quad (20)$$

Из (20) мы заключаем, что длина, на которой излучается энергия порядка  $E$ , растет с ростом энергии пропорционально  $\sqrt{E}$ . Потери энергии на единицу длины пропорциональны не  $E$ , как у Б. — Г., а  $\sqrt{E}$ . Проникающая способность электронов и позитронов растет, когда  $E > E_0$ . Вероятность образования пар  $\gamma$ -квантами в соответствии с (18) равна

$$dA_\gamma = \frac{a_\gamma}{L} \sqrt{\frac{E_0}{E_+E_-K}} dE_+, \quad a_\gamma \sim 1, \quad E_+, \quad E_- > E_0. \quad (21)$$

Если  $E_-, E_+ \lesssim E_0$ , то  $dA_\gamma$  переходит в выражение Б. — Г. Интегрирование (21) дает полную вероятность образования пар  $A_\gamma$  за единицу времени

$$A_\gamma = \frac{\pi a_\gamma}{L} \sqrt{\frac{E_0}{E}}. \quad (22)$$

Пробег квантов также растет пропорционально корню квадратному из энергии квантов.

Согласно (20) и (22), когда  $E/E_0, K/E_0 \sim 300 \div 500$ , пробег «мягкой компоненты» в веществах типа свинца становится равным 10—15 см и сравнивается с пробегом нуклонов большой энергии. При сверхвысоких энергиях мягкая компонента приобретает свойства жесткой компоненты.

Так как инфракрасная «катастрофа» отсутствует, то должны быть изменены выражения для радиационных поправок к различным процессам (упругому рассеянию электронов ядрами, комптон-эффекту, рассеянию электронов электронами), для которых важное значение имело существование инфракрасной катастрофы.

Академия наук СССР

Получено 22 июля 1953 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Ландау, И. Померанчук. Докл. АН СССР, 1953, 92, 535. (Собр. трудов, № 51).
2. См., например, Б. Росси, К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. М., ИЛ, 1948, стр. 44.

## О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ\*

*Совместно с Г. М. Гарибяном*

1. При прохождении заряженной частицы из одной среды в другую происходит перестройка поля частицы, в результате которой часть поля отрывается от частицы, т. е. образуется переходное излучение [1], при этом основная доля этого излучения испускается в крайнерелятивистском случае вперед по направлению движения частицы [2]. Если частица входит, например, из вакуума в среду, то спектральное распределение интенсивности переходного излучения постоянно в интервале от оптических частот до граничной частоты  $\omega_{гр} = (\sqrt{\sigma}/2) E/\mu c^2$ , где  $\sigma = 4\pi N e^2/m$ ,  $E$  и  $\mu$  — полная энергия и масса покоя частицы. При этом существенным является то обстоятельство, что переходное излучение определенной частоты отрывается от поля частицы не сразу после прохождения границы раздела сред, а через некоторое время, т. е. имеется зона формирования переходного кванта. Очевидно, что для образования переходного кванта существенно, чтобы на длине этой зоны формирования траектория частицы была бы прямолинейной, так как задача о переходном излучении решается именно в таком предположении. Зона формирования кванта частоты  $\omega$  равна [2]  $(c/\omega) [(\mu c^2/E)^2 + \sigma/2\omega^2]^{-1}$ . Из этой формулы видно, что зона формирования переходного излучения для некоторых частот может оказаться весьма большой, откуда следует, что многократное рассеяние приведет в некоторой части спектра к расстройству процесса излучения.

Таким образом, если поляризационные свойства среды приводят к появлению переходного излучения, то учет многократного рассеяния (т. е. опять-таки наличие среды) может привести к тому, что обычный механизм этого излучения нарушится.

2. Если без учета многократного рассеяния траектория частицы задавалась вектором  $v\hat{t}$ , то теперь она будет задаваться некоторым вектором  $r(t)$ . В экспонентах фурье-интегралов мы будем иметь член  $\mathbf{k}r(t)$ , который, как показано в [3], даст лишнее слагаемое

$$\frac{1}{2} \omega \int_0^t \theta_i^2 dt,$$

\* ЖЭТФ, 1959, 37, 1828.

где  $\theta_i$  — угол многократного рассеяния. Так же как в [3], заменим  $\theta_i^2$  на средний квадрат угла многократного рассеяния и подставим для  $t$  время, необходимое, чтобы сформировался квант частоты  $\omega$ . Обычные формулы для переходного излучения перестанут быть применимыми, если это слагаемое окажется порядка или больше единицы:

$$\frac{1}{4} \frac{\omega}{c} \left( \frac{E_s}{E} \right)^2 \frac{1}{L} \left[ \frac{c/\omega}{(\mu c^2/E)^2 + \sigma/2\omega^2} \right]^2 \geq 1, \quad (1)$$

где  $L$  — радиационная единица длины,  $E_s = 21 \text{ Мэв}$ . Последнюю формулу можно представить в виде

$$\frac{\sigma}{2\omega^2} \left( \frac{E}{\mu c^2} \right)^2 - \frac{E_s}{2\mu c^2} \sqrt{\frac{c}{\omega L}} \frac{E}{\mu c^2} + 1 \leq 0. \quad (2)$$

При этом надо учитывать, что  $\omega$  и  $E$  в этом неравенстве не произвольны, а подчинены условию  $\omega \leq (\sqrt{\sigma}/2) E/\mu c^2$ .

Принимая во внимание, что для  $E/\mu c^2 \geq 1$  левая часть формулы (2) положительна и что корни выражения (2) комплексны при

$$\omega < (8\sigma L/c) (\mu c^2/E_s)^2, \quad (3)$$

легко видеть, что многократное рассеяние не будет влиять на формирование квантов с частотами, удовлетворяющими условию (3), независимо от энергии частицы. Если же окажется, что  $\omega_{\text{гр}} < (8\sigma L/c) (\mu c^2/E_s)^2$ , т. е.

$$E/\mu c^2 < E_1/\mu c^2 = (16L \sqrt{\sigma}/c) (\mu c^2/E_s)^2, \quad (4)$$

то многократное рассеяние не будет влиять на излучение переходных квантов всех испускаемых частицей частот.

Пусть теперь неравенство (4) не выполняется, и рассмотрим излучение квантов с частотами, не удовлетворяющими условию (3). Из двух корней выражения (2) (разрешенного относительно  $\omega$ ) к нашей задаче имеет отношение корень

$$\omega_1 = (\sigma E/E_s)^{2/3} (L/c)^{1/3}, \quad (5)$$

удовлетворяющий условию  $\omega_1 < \omega_{\text{гр}}$ . Таким образом, при

$$\omega_1 \ll \omega < \omega_{\text{гр}} \quad (6)$$

влияние многократного рассеяния существенно. Следовательно, при невыполнении условия (4) частица излучает переходные кванты до частоты  $\sim \omega_1$ , согласно обычным формулам для переходного излучения. Излученная в этом интервале частот энергия будет порядка

$$I \approx (e^2/c) (\sigma E/E_s)^{2/3} (L/c)^{3/2}, \quad (7)$$

тогда как число квантов

$$N_2' \approx \frac{1}{137} \frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{\sigma E}{E_s} \left( \frac{L}{c} \right)^{1/2} \omega'^{-3/2} \right]. \quad (8)$$

Таким образом, учет влияния многократного рассеяния фактически приводит к тому, что в спектре переходного излучения будут, грубо говоря, отсутствовать частоты, большие  $\omega_1$  (так как для этих частот нарушается когерентность излучения с разных участков траектории), тогда как число переходных квантов останется почти неизменным.

Отметим также, что в отличие от тормозного излучения, когда многократное рассеяние не оказывало влияния на излучение квантов предельно большой энергии (близких к энергии частицы), в переходном излучении многократное рассеяние при  $E > E_1$  всегда расстраивает излучение квантов с частотами, близкими к граничной частоте.

3. Так как одновременно с переходным излучением в веществе будет генерироваться и тормозное излучение, то представляет интерес сравнить число тормозных и переходных квантов в соответствующих интервалах частот. При этом надо обязательно учитывать влияние поляризации среды и многократного рассеяния [3—6] на тормозное излучение.

Если энергия частицы удовлетворяет условию (4), то для числа тормозных квантов, испущенных в единицу времени в интервале частот от оптических до  $\omega_{\text{ГР}}$ , имеем формулу [4], учитывающую влияние поляризации среды на тормозное излучение:

$$N' = \frac{m}{12\pi^2 L N \hbar} \left( \frac{E_s}{E} \right)^2 \frac{\omega_{\text{ГР}}^2}{2}. \quad (9)$$

Число же тормозных квантов, испущенных в зоне формирования переходного излучения, будет равно

$$N = \frac{1}{137} \frac{1}{6\pi} \frac{c}{L \sqrt{\epsilon}} \left( \frac{E_s}{\mu c^2} \right)^2 \frac{E}{\mu c^2}. \quad (10)$$

Это число надо сравнить с числом переходных квантов [2]

$$N_2' = \frac{1}{137} \frac{2}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{E}{\mu c^2} \right) - \frac{1}{2} (1 + \ln 2) \right]. \quad (11)$$

Из последних двух формул видно, что число переходных квантов больше числа тормозных квантов. Даже для частиц с энергиями, близкими к  $E_1$ , число переходных квантов примерно в  $\ln(E/\mu c^2)$  раз больше числа тормозных квантов.

Пусть теперь  $E > E_1$ . Тогда для частот, меньших  $\omega_1$ , остается справедливой формула (9), в которой вместо  $\omega_{\text{ГР}}$  надо подставить  $\omega_1$ . В результате для числа тормозных квантов, испущенных в зоне

формирования переходных квантов до частот  $\sim \omega_1$ , получим выражение

$$N = 1/137 \cdot 12\pi. \quad (12)$$

Для переходного же излучения получим следующее число квантов:

$$N'_2 \approx \frac{1}{137} \frac{2}{3\pi} \ln \left[ \frac{L \sqrt{\sigma}}{c} \left( \frac{E}{E_s} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Мы видим, что переходных квантов опять больше числа тормозных квантов.

В заключение отметим, что, строго говоря, переходное излучение надо было бы сравнивать не с обычными формулами для тормозного излучения, рассчитанными в предположении бесконечной однородной среды и учитывающими многократное рассеяние, а с формулами, в которых учтено также влияние границы раздела сред на тормозное излучение.

*Физический институт  
Академии наук Армянской ССР.*

Получено  
4 сентября 1959 г.

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики  
Академии наук СССР*

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк. ЖЭТФ, 1946, 16, 15.
2. Г. М. Гарибян. ЖЭТФ, 1959, 37, 527.
3. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1953, 92, 535, 735 (Собр. трудов, № 51, 52).
4. М. Л. Тер-Микаелян. Докл. АН СССР, 1954, 94, 1033.
5. А. Б. Мигдал. Докл. АН СССР, 1954, 96, 49.
6. Е. Л. Фейнберг. УФН, 1956, 68, 193.

### КУЛОНОВСКИЕ СИЛЫ И СТРОЕНИЕ НЕЙТРОНА\*

Согласно представлениям мезонной теории ядерных сил, поле ядерных сил должно быть ассоциировано с заряженными частицами — мезонами, обмениваясь которыми тяжелые элементарные частицы взаимодействуют между собой. В настоящее время свойства мезонов мало известны. Однако из имеющихся экспериментальных данных [1—3] можно вывести, что спин мезонов не может быть равным единице. Если не вводить обмен сразу парами мезонов, то необходимо рассматривать частицы с целым спином. Исключая спин единица, мы имеем в своем распоряжении только две возможности — так называемые скалярные и псевдоскалярные мезоны.

В отсутствие источников (протонов или нейтронов) мезонное поле со спином нуль определяется уравнением Клейна — Гордона — Шредингера — Фока

$$\left(\frac{\hbar c}{i} \nabla - e\mathbf{A}\right)^2 \psi + m^2 c^4 \psi = \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2 \psi, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, деленная на  $2\pi$ ;  $c$  — скорость света;  $m$  — покоящаяся масса;  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал электромагнитного поля;  $\varphi$  — его скалярный потенциал.

Применим уравнение (1) к рассмотрению мезонного поля, окружающего тяжелые частицы. Очевидно, что в случае протона мы должны положить  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  равными нулю, так как общий заряд системы равен единице, причем этот единичный заряд то находится в тяжелой частице в состоянии протона, то находится в мезонном поле, а тяжелая частица при этом находится в состоянии

\* Докл. АН СССР, 1943, 41, 162. (Представлено академиком С. И. Вавиловым 8 июня 1943 г.)

нейтрона. Мезонное поле, окружающее протон, определяется таким образом уравнением

$$-\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \varepsilon^2 \psi. \quad (2)$$

Зависимость  $\psi$  от времени определяется выражением

$$\psi = \psi_0 e^{-i\varepsilon \frac{t}{\hbar}}. \quad (3)$$

Очевидно, что в (2)  $\varepsilon$  может принимать любое значение. Величина  $\varepsilon$  определяется из разницы масс протона и нейтрона, так как плотность источников  $\rho$  мезонного поля составлена из волновых функций протона  $\Phi_p$  и нейтрона  $\Phi_n$  обычным образом:

$$\rho \approx \Phi_n^* L \Phi_p = \Phi_{n0}^* L \Phi_{p0} \exp \left[ \frac{i(E_n - E_p)t}{\hbar} \right], \quad (4)$$

где  $L$  — некоторый оператор, который зависит от того, являются ли мезоны скалярными или псевдоскалярными [4, 5]. Существенно то, что этот оператор не содержит зависящего от времени множителя. Комбинируя (3) и (4), имеем

$$|\varepsilon| = |E_n - E_p|. \quad (5)$$

Оказывается, что  $\varepsilon$  совершенно однозначно определяется из уравнения (1), если его применить к описанию мезонного поля, окружающего нейтрон. В этом случае, в отличие от протона,  $\Phi$  и  $\mathbf{A}$  не равны нулю. так как мезонное поле и тяжелая частица обладают общим зарядом, равным нулю, причем нейтрон превращается в протон и отрицательный мезон, между которыми существуют электромагнитные взаимодействия. Применим (1) к этому случаю, полагая  $\mathbf{A}$  в первом приближении равным нулю и  $\Phi = e^2/r$ , где  $r$  — расстояние до источника поля,  $e$  — заряд электрона.

Решения полученного таким образом уравнения неоднократно исследовались (см., например, [6]).  $\psi_0$  в состояниях с наименьшей энергией имеет вид:

$$\psi_0 = \text{const } r^\gamma \exp \left( -\frac{r}{\hbar c} \sqrt{m^2 c^4 - \varepsilon^2} \right), \quad (6)$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \quad (7)$$

(орбитальный момент  $l = 0$ ). Обычно  $\gamma$ , соответствующее отрицательному значению корня, отбрасывают. Действительно, к проблеме водородного атома это решение не имеет отношения. В нашем же случае именно это решение дает нам мезонное поле вокруг нейтрона:

$$\gamma = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} = -1 + \alpha^2. \quad (8)$$



Что касается  $\varepsilon$ , то при этом  $\gamma$  она оказывается равной  $\frac{e^2}{\hbar c} mc^2$  (с точностью до  $\alpha^3$ ):

$$-\varepsilon = \frac{e^2}{\hbar} mc^2. \quad (9)$$

Эта величина удовлетворительно передает разность масс протона и нейтрона и по величине, и по знаку, если  $m \approx 200 m_0$ , где  $m_0$  — электронная масса<sup>1</sup>. С помощью (9) и (8) найдем  $\psi_0$ :

$$\psi_0 \approx \text{const} \frac{1}{r^{1-\alpha^2}} \exp \left[ -\frac{r mc}{\hbar} \left( 1 - \alpha^2 \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (10)$$

Это выражение с точностью до величин  $\sim \alpha^2$  совпадает с «обычным» мезонным потенциалом в случае скалярных мезонов, который получается, например, применением методов теории возмущения (Юкава). Отсюда следует, что именно  $\gamma$  из (8) должно быть взято для того, чтобы получить мезонное поле нейтрона.

До сих пор мы пренебрегали действием магнитного поля спина протона. Учитывая сферическую симметричность  $\psi_0$  и сопоставляя протону дираковское значение магнитного момента, получаем уравнение

$$-\hbar^2 c^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi + \frac{e^4 \hbar^2}{4M^2 c^2 r^6} [sr]^2 \psi = (\varepsilon - e\varphi)^2 \psi, \quad (11)$$

где  $s_x, s_y, s_z$  — матрицы Паули, они действуют на спиновую переменную протона;  $M$  — масса протона. Рассматривая последний член слева как малое возмущение, находим  $\Delta \varepsilon$ :

$$\Delta \varepsilon = \frac{e^2 \hbar^2 \int \psi^* \frac{[sr]^2}{r^6} \psi d\tau}{8M^2 c^2 \int \psi^* \left( \varepsilon_0 + \frac{e^2}{r} \right) \psi d\tau}. \quad (12)$$

Числитель в (12) расходится при малых  $r$  как  $1/r^3$ . Очевидно, что  $r_{\min} \gg \hbar/Mc$ , так как поле спина при  $r \leq \hbar/Mc$  будет значительно меньше, чем по формуле  $A = e\hbar [sr] / 2Mc r^3$ .

$$-\Delta \varepsilon \ll \frac{2}{9} \frac{e^4 \hbar^2 M^3 c^3}{8M^2 c^2 e^2 \hbar^3 \left( \ln \frac{M}{m} + 1 \right)} = \frac{\alpha M c^2}{3 \cdot 36} \approx 70 \text{ кэв.}$$

Таким образом, положение нейтронного уровня у скалярного мезона меняется магнитным взаимодействием незначительно. Мы видим, что поведение скалярных мезонов дает возможность непосредственно количественно объяснить разность масс нейтрона и протона.

Если аналогично рассмотреть положение с псевдоскалярными мезонами, то необходимо обратиться к состояниям с орбитальным

<sup>1</sup>  $m \approx 200 m_0$  является наиболее вероятным результатом опытных измерений массы мезона.

моментом  $l = 1$ . Вместо (9) в этом случае мы получаем для  $\varepsilon$  (не учитывая магнитного поля спина) значение

$$\varepsilon_0 < 0, \quad |\varepsilon_0| = \frac{1}{4} \alpha m c^2. \quad (13)$$

Магнитное поле спина ухудшает положение. Применяя к (1) теорию возмущения и учитывая наличие орбитального момента, имеем

$$\Delta\varepsilon = -\frac{e^2\hbar}{2Mc} \hbar c \frac{\int \psi^* s_z \frac{1}{i} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \frac{d\tau}{r^3}}{\int \psi^* \left( \varepsilon_0 - \frac{e^2}{r} \right) \psi d\tau}. \quad (14)$$

Выражение для  $\Delta\varepsilon$  расходится при малых  $r$ . По тем же причинам, что и в (12),  $r_{\min}$  должно быть  $\gg \hbar/Mc$ . Учитывая, что  $\psi$  при  $r \ll \hbar/mc$  имеет вид  $\text{const} \frac{e^{-\frac{rmc}{\hbar}}}{r^2} p(\cos\theta, \varphi)$ , легко получить следующее выражение:

$$\Delta\varepsilon = e^2 \frac{\hbar}{2Mc} \frac{\hbar c}{e^2} s_z \mu_z \frac{2}{4r_{\min}^2},$$

где  $\mu_z$  — магнитное квантовое число мезона. Если спин нейтрона равен  $1/2$  (как это обычно принимается), тогда при  $s_2 = 1$   $\mu_z = 1$ , так как для отрицательного заряда, как известно, собственные значения умножаются на отрицательную плотность. При  $\mu_z = 1$  проекция момента мезона будет  $-\hbar$ , что совместно с  $s_z = 1$  дает полный момент нейтрона, равный  $1/2\hbar$ :

$$\Delta\varepsilon = e^2 \frac{\hbar}{8Mc} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{r_{\min}^2},$$

где  $r_{\min}$  есть то минимальное расстояние, до которого имеет смысл интегрировать в (14):  $\hbar/Mc \ll r_{\min} < \hbar/mc$ .

Но даже если вместо  $r_{\min}$  подставить  $\hbar/mc$ , то для  $\Delta\varepsilon$  получается

$$\Delta\varepsilon > 2e^2 \frac{\hbar}{8Mc} \frac{1}{\alpha} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{m}{4M} n.c^2 = \frac{mc^2}{36} = 2,8MV \quad (-\varepsilon_0 \approx 250 \text{ кэВ}).$$

Существенно, что  $\Delta\varepsilon > 0$ , поэтому  $\varepsilon + \varepsilon_0 > 0$ , т. е. нейтрон должен иметь массу, меньшую, чем протон. Псевдоскалярные мезоны дают неправильное значение для разности масс нейтрона и протона.

Обращаясь к аномальным моментам нейтрона и протона, следует указать, что псевдоскалярные мезоны дают момент примерно в 100 раз больше требуемого. Аномальный момент  $k$  оказывается равным

$$k = + \frac{e\hbar c}{2} \frac{\int \psi^* \frac{1}{i} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} d\tau}{\int \psi^* \left( -\frac{e^2}{r} + \varepsilon_0 \right) \psi d\tau} = \frac{e\hbar c}{e^2} r_{\min} \mu_z.$$

Даже если  $r_{\min} = \hbar/Mc$ ,  $|k| = 274k_0$ ,  $k_0$  — протонный магнитный момент согласно Дираку. На самом деле  $r_{\min}$ , вероятно, больше, чем  $\hbar/Mc$ ; во всяком случае, если  $r_{\min} < \hbar/Mc$ , то нужно учитывать движение протона. Псевдоскалярные мезоны дают неправильный по порядку величины аномальный магнитный момент наряду с неправильным значением массы нейтрона.

Если спин нейтрона был бы равен  $3/2$ , то знак разности масс был бы у всех псевдоскалярных мезонов правильный [ $\Delta\epsilon$  в (14) было бы  $< 0$ ].

Мы приходим к заключению, что одни псевдоскалярные мезоны не могут дать объяснения свойств нейтрона. Обращаясь снова к скалярным мезонам, следует отметить, что, вопреки широко распространенным взглядам, они дают аномальный магнитный момент правильного порядка величин, но, по-видимому, не равного нейтронному. Существование такого своеобразного момента вызывается действием на мезонное состояние магнитного поля спина протона. В самом деле, при наличии внешнего магнитного поля мы вместо (11) имеем

$$-\hbar^2 c \Delta \psi + m^2 c^4 \psi + \frac{e^4 \hbar^2}{4M^2 c^2 r^6} [\text{sr}]^2 \psi + \frac{e^3 \hbar}{2Mc} ([\text{sr}] [\text{Br}]) \frac{\psi}{r^3} = (\epsilon - e\varphi)^2 \psi$$

(следует помнить о сферической симметрии  $\psi$ ). Последний член слева дает магнитный момент, равный

$$Bk = - \frac{e^3 \hbar \int \psi^* ([\text{sr}] [\text{Br}]) \psi \frac{d\tau}{r^3}}{4Mc \int \psi^* \left( \epsilon_0 - \frac{e^2}{r} \right) \psi d\tau} = \frac{1}{6} e \frac{\hbar}{Mc} \frac{B}{\ln \frac{m}{M} + 1}.$$

Полученный момент не соответствует экспериментальным данным, хотя правилен по порядку величины. Мы сталкиваемся здесь с существенной трудностью. Быть может, необходимо рассматривать взаимодействие тяжелых частиц сразу с несколькими мезонами.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Получено 8 июня 1943 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Schein, P. Gill.* Rev. Mod. Phys., 1939, 11, 267.
2. *R. F. Christ, S. Kusaka.* Phys. Rev., 1941, 59, 414.
3. *J. R. Oppenheimer.* Phys. Rev., 1941, 59, 462.
4. *Pauli.* Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 203.
5. *N. Kemmer.* Proc. Roy. Soc. A, 1938, 166, 127.
6. *Луи де Бройль.* Магнитный электрон. Харьков, 1936, стр. 80—81.

## РАССЕЯНИЕ МЕЗОНОВ, СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С НУКЛОНАМИ\*

Как известно, для описания взаимодействия между мезонами и нуклонами нельзя применять теорию возмущений. Рассматривая псевдоскалярные мезоны, Паули и Данков использовали метод для описания взаимодействия нуклонов с мезонным полем, дающим возможность не прибегать к теории возмущений. В формулы, полученные Паули и Данковым (эффективное сечение для рассеяния мезонов протоном или нейтроном, аномальный магнитный момент и собственная «мезонная» энергия нуклонов). входит некоторая длина  $a$  — размеров источника (нуклона). Считая ее равной комптоновской длине волны протона  $h/Mc$ , Паули и Данков, получают удовлетворительные результаты для рассеяния мезонов и магнитного момента нуклонов. Однако следует отметить, что при этой величине  $a$  собственная энергия  $E$  по абсолютной величине оказывается значительно больше, чем  $Mc^2$ . Согласно формуле (63) [1]

$$E = -\frac{3}{4} \frac{g^2}{\kappa^2} hcJ. \quad (1)$$

Из формулы (14) [1] следует, что  $J \geq 1/a^3$ :

$$|E| \geq \frac{3}{4} \frac{g^2}{\kappa a} \frac{hc}{\kappa a^2}. \quad (2)$$

Подставляя сюда  $g^2/\kappa a = 7$  [1] и полагая массу мезона равной  $1/_{10}$  массы протона, мы получим при  $a = h/Mc$

$$|E| \geq \frac{3}{4} \cdot 7 \cdot 10 Mc^2 = 52,5 Mc^2. \quad (3)$$

Этот результат показывает, что выбор  $a$ , сделанный в [1], приводит к трудностям, связанным с необходимостью рассмотрения собственной массы нуклона. Вопрос о собственной массе мог бы не играть роли только в том случае, если бы уравнение (1) давало  $E$  порядка  $Mc^2$  или меньше. Оправдание выбора  $a$  в [1] может быть сделано только при рассмотрении собственной массы нуклона.

\* Докл. АН СССР, 1944, 44, 13. (Представлено академиком А. И. Алихановым 10 ноября 1943 г.)

Если, наоборот, исходить из [1] и выбирать  $a$  из требования, чтобы  $E$  было порядка  $Mc^2$ , тогда эффективное сечение рассеяния  $q = 6\pi a^2$  (формула (104с) [1]) оказывается равным:

$$a = \left( \frac{3}{4} \frac{g^2}{\kappa^2} \frac{h}{Mc} \right)^{1/3}, \quad (4)$$

$$q = 6\pi \left( \frac{3}{4} \frac{g^2}{\kappa^2} \frac{h}{Mc} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

Аномальный магнитный момент (формула (126) [1]) при  $a$ , взятом из (4), оказывается равным.

$$M_z = \frac{e}{36\kappa} \frac{g^2}{\kappa} \left( \frac{3}{4} \frac{\kappa^2 Mc}{g^2 h} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Приравнивая (6) наблюдаемому магнитному моменту нейтрона (1,93 протонного момента), находим

$$g = 2,5. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), находим

$$q = 4 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (8)$$

Согласно имеющимся экспериментальным данным [2], наблюдаемое аномальное рассеяние мезонов соответствует в 1000 раз меньшему эффективному сечению ( $q = 5 \cdot 10^{-23} \text{ см}^2$ ). Таким образом, удовлетворительное рассмотрение рассеяния мезонов нуклонами в рамках существующих теоретических представлений делается невозможным, если не входить при этом в детали теории собственной массы нуклонов.

*Физико-технический институт  
Академии наук СССР.  
Ленинград*

Получено 11 декабря 1943 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *W. Pauli, S. Dancoff. Phys. Rev., 1942, 62, 85.*
2. *R. P. Shutt. Phys. Rev., 1942, 61, 6.*

## ОБОБЩЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО $\lambda$ -ПРОЦЕССА И НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ В УСТРАНЕНИИ БЕСКОНЕЧНОСТЕЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ\*

Представляется возможным так обобщить предельный  $\lambda$ -процесс Венцеля — Дирака, чтобы освободить теорию от всех расходящихся выражений (включая и логарифмические). Однако это может быть сделано различными способами, что приводит к различным конечным выражениям для собственной энергии частиц.

Как известно, Венцель [1] обнаружил существование некоторого предельного процесса, приводящего к уравнениям классического поля, свободным от расходимостей. Дирак [2] перевел этот процесс на квантовый язык, заменяя обычные соотношения коммутации для фурье-компонент поля

$$[a(\mathbf{k}), \overset{+}{a}(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \quad (1)$$

соотношениями

$$[a(\mathbf{k}), \overset{+}{a}(\mathbf{l})] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \cos k\lambda, \quad (2)$$

$$\lambda^2 = \lambda^2 - \lambda_4^2 < 0,$$

где  $\lambda = (\lambda, \lambda_4)$ . При  $\lambda \rightarrow 0$  (2) переходит в (1).

Здесь  $a(\mathbf{k})$  связано с оператором поля  $\phi$  обычным образом:

$$\phi = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} [a(\mathbf{k}) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] + \overset{+}{a}(\mathbf{k}) \exp [-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]]. \quad (3)$$

Формулы (3) и (1) имеют место в таком виде только для скалярного поля. Их обобщение на случай более общих полей не приносит с собой принципиально новых моментов, поэтому в этом сообщении рассматривается только случай скалярного поля.

С помощью (2) удастся устранить все классические бесконечности, т. е. бесконечности, которые получаются уже при чисто классическом рассмотрении как частиц, так и поля  $\phi$ . Эти классические бесконечности приводят к интегралам:

$$\int_0^{\infty} k^{2n} dk = \infty \quad (4)$$

\* ЖЭТФ, 1947, 17, 667; Phys. Rev., 1949, 76, 298.

в случае (1) и

$$\int_0^{\infty} k^{2n} \cos k\lambda \cdot dk = 0 \quad (4')$$

в случае (2) [3, стр. 202].

При переходе к квантовой теории задача заключается в решении системы квантовых уравнений, описывающих взаимодействие «частиц» с полем  $\varphi$ . Считая «частицы» имеющими спин  $1/2$ , мы приходим к уравнениям (в естественных единицах):

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\alpha_k}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \beta M \psi &= g \zeta \rho \psi, \\ \square \varphi - \mu^2 \varphi &= -g \psi^* \beta \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Если поле  $\varphi$  квантовать, а  $\psi$  не квантовать, т. е. не заполнять отрицательных состояний «частиц», то, кроме классических (четных) бесконечностей, возникают, как правило, и «квантовые бесконечности» благодаря нулевым колебаниям поля (поперечная масса, Валлер [4]). Эти бесконечности проявляются в виде интегралов:

$$\int_0^{\infty} k^{2n+1} dk = \infty \quad (6)$$

при пользовании (1) и

$$\lim_{\lambda_4 \rightarrow 0} \int_0^{\infty} k^{2n+1} dk \cos k\lambda_4 = (-)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{\lambda_4^{2n+2}} \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Таким образом,  $\lambda$ -процесс Венцеля — Дирака не устраняет квантовых бесконечностей. Именно поэтому Дирак [5] предложил рассматривать отрицательные вероятности, приводящие к замене пределов интегрирования от нуля до  $\infty$  пределами от  $-\infty$  до  $\infty$ . Однако при этом возникают существенные трудности в интерпретации, делающие введение отрицательных вероятностей нежелательным. Далее, отрицательные вероятности и простой  $\lambda$ -процесс не уничтожают логарифмических расходящихся [3, 6].

В настоящей заметке будет показана возможность так обобщить  $\lambda$ -процесс, чтобы можно было суммировать наряду с классическими также и квантовые расходящиеся интегралы. При этом, однако, возникает существенная неоднозначность, по-видимому, сказывающаяся также и на «классических» интегралах (4). Как и в случае обычного  $\lambda$ -процесса (2), мы будем менять соотношения коммутации [1].

Если перейти от  $a(\mathbf{k})$  к  $\varphi$ , то для  $\varphi$  мы имеем следующие правила коммутации в обычной форме:

$$[\varphi(r_1), \varphi(r_2)] = \Delta_1(r_1 - r_2), \quad (8)$$

где  $r = (r, t)$  или в представлении Фурье [7]:

$$[\varphi(r_1), \varphi(r_2)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(k, r_1 - r_2)}{\omega} dk, \quad (9)$$

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2.$$

При пользовании (2) вместо (9) мы приходим к выражению

$$[\varphi(r_1)\varphi(r_2)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\cos k\lambda}{\omega(\mathbf{k})} \sin(k, r_1 - r_2) d\mathbf{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ \Delta_1(r_1 - r_2 + \lambda) + \Delta_1(r_1 - r_2 - \lambda) \}. \quad (10)$$

Переписав (10) в виде

$$[\varphi(r_1)\varphi(r_2)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int D(k) \frac{\sin(k, r_1 - r_2)}{\omega} dk, \quad (11)$$

выясним общее выражение для  $D$ ; для этого используем требование, чтобы правая часть (11) не содержала второй  $\Delta_2$  функции [7] (напомним, что наличие  $\Delta_2$  лишило бы уравнения смысла, так как величины, входящие в уравнения, нигде не коммутировали бы, т. е. не существовало бы вообще никаких решений; см. Блох [8] и Марков [9]).

Так как  $\Delta_2$  определяется выражением [7]

$$\Delta_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{\cos(k, r_1 - r_2)}{\omega(\mathbf{k})},$$

то  $D$  должно иметь вид

$$D = \sum_n A_n(\lambda_n) \cos k\lambda_n, \quad (12)$$

где  $\lambda_n$  — произвольные четырехмерные векторы, удовлетворяющие условию

$$\lambda_n^2 = \lambda_n^2 - \lambda_{4n}^2 < 0, \quad (13)$$

если мы хотим, чтобы классические бесконечности оказывались равными нулю (см. ниже (20)). Сумма в (12) может содержать и интегралы по  $\lambda$ . Величины  $A(\lambda_n)$  подчинены условию

$$\sum_n A_n(0) = 1 \quad (14)$$

(при  $\lambda_n = 0$  осуществляется переход к обычной теории).

Фактор (12) приводит к следующим соотношениям коммутации для  $\varphi$ :

$$[\varphi(r_1), \varphi(r_2)] = \frac{1}{2} \sum_n A(\lambda_n) \{ \Delta_1(r_1 - r_2 + \lambda_n) + \Delta_1(r_1 - r_2 - \lambda_n) \}. \quad (15)$$



Векторы  $\lambda_n$  должны быть такими, чтобы сумма или интеграл, стоящие в (15), обращались в нуль в какой-то области пространства  $r, t$ . Этому требованию легко удовлетворить, выбрав, например, все  $\lambda_n$  меньшими некоторой определенной величины. Заметим, что (12) есть наиболее общий вид, только если мы ограничиваемся функциями, разложимыми в сумму (интеграл) Фурье. Использование функций, неразложимых в такие суммы (интегралы), заслуживает отдельного рассмотрения.

С помощью (12) четные (классические) бесконечности уничтожаются каждым членом в отдельности. Для уничтожения нечетных бесконечностей мы постараемся так подобрать величины  $A$ , чтобы различные члены в сумме (12) давали результаты, сокращающиеся друг с другом. Проиллюстрируем это следующим примером. Найдем  $D$ , уничтожающее все четные и первую нечетную бесконечность. Для этого рассмотрим выражение

$$D = \frac{4}{3} \cos k\lambda - \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2} k\lambda. \quad (16)$$

Переходим в систему координат, где только  $\lambda_4 \neq 0$ :

$$D = \frac{4}{3} \cos \omega\lambda_4 - \frac{1}{3} \cos \frac{\omega\lambda_1}{2}. \quad (17)$$

Пусть (ради простоты) покоящаяся масса  $\mu$  у квантов поля  $\varphi$  равна нулю ( $\omega = k$ )

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} Dk dk &= \frac{4}{3} \int_0^{\infty} k \cos k\lambda_4 dk - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} k \cos \frac{k\lambda_1}{2} dk = \\ &= -\frac{4}{3} \frac{1}{\lambda_4^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(\lambda_1/2)^2} = 0 \end{aligned}$$

(см. [3, стр. 202]).

В общем виде, если мы хотим уничтожить первые  $p$  нечетных расходимостей, то  $A$  должны удовлетворять равенствам (если все  $\lambda_n$  имеют не равную нулю только компоненту  $\lambda_4$ )

$$\sum \frac{A(\lambda_n)}{\lambda_{4n}^{2m+2}} = 0, \quad m = 1, \dots, p-1. \quad (18)$$

Таким образом, не вводя отрицательных вероятностей, простым обобщением  $\lambda$ -процесса можно освободить теорию от нечетных бесконечностей.

Однако сразу же мы наталкиваемся здесь на существенную неоднозначность теории. Условие, чтобы теория не содержала нечетных бесконечностей, может быть удовлетворено и в том случае, если (18) заменяется условием

$$\lim \sum_n \frac{A_n}{\lambda_{4n}^{2m+2}} = B_m, \quad m = 0, 1, \dots, p-1, \quad (18')$$

где  $B_m$  — произвольное конечное число. В частности, вместо (17) можно рассмотреть следующее выражение ( $B$  — произвольное число):

$$D = \frac{4}{3} \cos k\lambda - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3}{4} B\lambda^2 \right) \cos \frac{k\lambda}{2},$$

$$\int_0^\infty \left[ \frac{4}{3} \cos k\lambda - \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} B\lambda^2 \right) \cos \frac{k\lambda}{2} \right] k dk =$$

$$= -\frac{1}{3\lambda^2} + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} B\lambda^2 \right) \frac{4}{\lambda^2} = B.$$

Неоднозначность теории имеет место, по-видимому, также и при рассмотрении классических (четных) бесконечностей. Можно так подобрать  $D(k)$ , чтобы придать любое конечное значение интегралу  $\int_0^\infty D(k) dk$ . Но для этого нужно рассматривать наряду с времениподобными векторами  $\lambda$  также и пространственноподобные векторы  $\mu$ :

$$\mu^2 - \mu_4^2 > 0.$$

В самом деле,

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \cos(\mathbf{k}\mu - \omega\mu_4) = 2\pi \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cos(\mu k \cos\theta - \omega\mu_4) =$$

$$= \frac{2\pi}{\mu} \int_0^\infty \frac{dk}{k} [\sin(\mu k + \omega\mu_4) + \sin(\mu k - \omega\mu_4)]. \quad (19)$$

Ради простоты будем считать, что  $\omega = k$ .

Если  $\mu > \mu_4$ , (19) оказывается равным  $2\pi^2/\mu$ . Если бы  $\mu$  было времениподобным вектором (типа  $\lambda$ , (13)), то (19) давало бы нуль.

Отсюда  $D$ -фактор, дающий интегралу  $\int_0^\infty dk D(k)$  любое значение, очевидно, имеет вид

$$D = \cos k\lambda + \frac{B}{2\pi^2} \sqrt{\mu^2 - \mu_4^2} \cos k\mu, \quad (20)$$

$$D(0) = 1, \quad \lambda^2 - \lambda_4^2 < 0, \quad \mu^2 - \mu_4^2 > 0,$$

$B$  — произвольное число;

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \left[ \cos k\lambda + \frac{B}{2\pi^2} \sqrt{\mu^2 - \mu_4^2} \cos k\mu \right] =$$

$$= \frac{B \sqrt{\mu^2 - \mu_4^2}}{\mu} = B \sqrt{1 - \frac{\mu_4^2}{\mu^2}}. \quad (20')$$

Устремляя  $\mu$  к нулю, мы получаем в пределе любое число между  $0$  и  $B$ .

В общем виде мы можем рассматривать вместо (12) следующее

выражение для  $D$ :

$$D = \sum_n \{A_n(\lambda_n) \cos k\lambda_n + F_n(\mu_n) \cos \mu_n k\}, \quad (21)$$

$$\lambda_n^2 < 0, \quad \mu_n^2 > 0.$$

Если мы хотим для классического интеграла  $\int_0^\infty dk$  получить любое конечное значение, мы должны подчинить  $D$  условию (если все  $\mu_n$  имеют  $\mu_4 = 0$ ):

$$\lim_{\mu_n \rightarrow 0} \sum_n \frac{F(\mu_n)}{\mu_n} = B. \quad (22)$$

В случае нечетных (квантовых) расходимостей мы приходим к условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} \sum_n \left( \frac{A_n(\lambda_n)}{\lambda_n^{2m+2}} \right) (2m+1)! - (2m)! \left( \frac{F(\mu_n)}{\mu_n^{2m+2}} \right) = B_{2m+1}. \quad (22')$$

Как и в случае обычного  $\lambda$ -процесса, в пределе  $\lambda_n \rightarrow 0$ ,  $\mu_n \rightarrow 0$  теория становится релятивистски инвариантной и примыкает к обычно рассматриваемой системе уравнений, но из которых изъяты четные и нечетные бесконечности.

Однако согласно (20) при пользовании векторами  $\mu_n$  результат зависит от способа устремления  $\mu_n$  к нулю. Это, возможно, указывает на незаконность употребления пространственноподобных векторов. Паули (частное сообщение) предложил усреднить (20') по поверхности четырехмерного гиперboloида  $\mu^2 = |\mu^2| - \mu_4^2 = s^2 = \text{const}$ ;  $|\mu| = s \text{ ch } \chi$ ,  $\mu_4 = s \text{ sh } \chi$ :

$$\sqrt{1 - \frac{\mu_4^2}{|\mu|^2}} = \frac{1}{\text{ch } \chi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \text{ch } \chi d\chi \bigg/ \int_0^x \text{ch}^2 \chi d\chi \rightarrow 0.$$

(Элемент площади гиперboloида равен  $\text{ch}^2 \chi d\chi d\Omega$  [14].) Такое инвариантное усреднение дает для классического расходящегося интеграла  $\int_0^\infty dk$  нуль.

Недавно Густафсон [10, 11] применил к устранению расходимостей новый метод решения гиперболических уравнений, предложенный М. Риссом [12]. Густафсону удалось устранить наряду с четными (классическими) также и нечетные бесконечности. В методе Рисса применяется некоторый предельный процесс. Вопрос о соотношении предельного процесса Рисса — Густафсона с обобщенным предельным  $\lambda$ -процессом пока не ясен.

В заключение мы рассмотрим еще логарифмические расходимости, возникающие при наиболее последовательном решении (5), а именно, когда и  $\phi$  есть оператор, и  $\psi$  есть оператор (иначе, за-

полнение вакуума отрицательными состояниями и рассмотрение эффектов «поляризации» вакуума). При этом возникают интегралы типа

$$\int_0^{\infty} \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (23)$$

[3, стр. 203].

Обычный  $\lambda$ -процесс и отрицательные вероятности не устраняют логарифмической расходимости этого интеграла. Обобщенный  $\lambda$ -процесс легко может это сделать. Проиллюстрируем это примерами.  $D$ -фактор, уничтожающий все четные расходимости и логарифмическую, имеет вид (после перехода в систему координат, где  $u$   $\lambda$  остается только четвертая компонента  $\lambda_4$ ):

$$D = 2 \cos k\lambda - \cos a\lambda^2 k, \quad D(0) = 1; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \{2 \cos k\lambda - \cos a\lambda^2 k\} = \\ = -2 \left( \ln \frac{\lambda m}{2} + \gamma \right) + \left( \ln \frac{a\lambda^2 m}{2} + \gamma \right) = - \left[ \ln \frac{m}{2} + \gamma - \ln a \right], \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера [3, стр. 204].

Примером  $D$ -фактора, уничтожающего все четные, первую нечетную и логарифмическую расходимости, является следующее выражение:

$$D = \frac{2}{3} \left[ 4 \cos k\lambda - \cos \frac{k\lambda}{2} \right] - \frac{1}{3} \left[ 4 \cos ak\lambda^2 - \cos \frac{ak\lambda^2}{2} \right]. \quad (26)$$

В общем виде для уничтожения наряду с  $p$  первыми нечетными расходимостями, также и логарифмической расходимости необходимо к (18), (22), (22') добавить равенство

$$\sum_n A_n \ln \lambda_n = 0. \quad (27)$$

Хотя таким образом обобщенный  $\lambda$ -процесс (12), (21) делает конечными или равными нулю все расходящиеся выражения, имеющиеся в теории элементарных частиц, он, как мы видели, приводит к трудностям, связанным с неоднозначностью получаемых конечных результатов. Кроме (18'), (20'), неоднозначность появляется и в логарифмических расходимостях (23). Поясним эту «логарифмическую» неоднозначность примером.

Возьмем наряду с (26) другое  $D$ , удовлетворяющее тем же условиям:

$$D = 2 \cos k\lambda - \frac{1}{2} \cos \frac{k\lambda}{2} - \frac{1}{6} \left( 4 \cos kb\lambda^3 - \cos \frac{kb\lambda^3}{2} \right). \quad (28)$$

Рассмотрим логарифмическую расходимость сначала с фактором (26), а затем (28). Используя (25), мы находим в случае (26) конеч-

ный результат, равный

$$-\frac{2}{3} \left[ 4 \left( \ln \frac{m}{2} + \gamma \right) - \ln \frac{m}{2} - \gamma \right] + \quad (29)$$
$$+ \frac{1}{3} \left[ 4 \ln \frac{am}{2} + 4\gamma - \ln \frac{am}{4} - \gamma \right] = - \left( \ln \frac{m}{2} - \gamma + \ln a + \frac{\ln 2}{3} \right).$$

$D$ -фактор (28) дает следующий конечный результат:

$$-\left[ 2 \left( \ln \frac{m}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{2} \left( \ln \frac{m}{4} + \gamma \right) \right] + \frac{1}{6} \left[ 4 \left( \ln \frac{mb}{2} + \gamma \right) - \right. \\ \left. - \left( \ln \frac{mb}{4} + \gamma \right) \right] = - \left\{ \ln \frac{m}{2} + \gamma - \frac{\ln b}{2} + \frac{\ln 2}{3} \right\}. \quad (30)$$

Так как  $a$  и  $b$  независимы, то (29) и (30) не совпадают.

В общем виде (27) может быть заменено на условие

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_n \{ A(\lambda_n) \ln \lambda_{4n} + F(\mu_n) \ln |\mu_n| \} = B_0,$$

где  $B_0$  — произвольное конечное число.

Мы видим, что как четные, так и нечетные и логарифмические расходимости суммируются неоднозначным образом. В частности, согласно (18'), (22') поперечная масса (Валлер [4], Гайтлер [13]) может быть сделана равной чему угодно. Поэтому результат Густафсона [11], согласно которому поперечная масса равна  $-\frac{e^2}{\hbar c} m$ , связан со специальным выбором предельного процесса Рисса [12].

Существенная неоднозначность результатов, получаемых с помощью предельных процессов (12), (21), указывает либо на их непригодность для решения фундаментальных трудностей теории элементарных частиц, либо на необходимость дополнить их новыми постулатами — «правилами отбора».

В заключение я хотел бы поблагодарить профессора В. Паули за дискуссию по поводу результатов, полученных в работе.

Академия наук СССР

Получено 10 декабря 1946 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *B. Wentzel*. Zs. f. Phys., 1933, 86, 479, 635; 1934, 87, 726.
2. *P. A. M. Dirac*. Ann. de l'Inst. Poincaré, 1939, 9, 13.
3. *W. Pauli*. Rev. Mod. Phys., 1943, 15, 175.
4. *J. Waller*. Zs. f. Phys., 1930, 62, 673.
5. *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc., A, 1942, 180, 1.
6. *V. Weisskopf*. Zs. f. Phys., 1934, 89, 90; Phys. Rev., 1939, 56, 72.
7. *W. Pauli*. Rev. Mod. Phys., 1941, 13, 203.
8. *F. Bloch*. Phys. Zs. Sowjet., 1934, 5, 301.
9. *M. Markov*. J. Phys. USSR., 1946, 10, 333.
10. *T. Gustafson*. Nature, 1946, 157, 734.
11. *T. Gustafson*. Nature, 1946, 158, 273.
12. *M. Riesz*. Congress Internat. d. math. Oslo, 1936, 11, 44; Confér. à la Réunion Internat. d. Math. à Paris, 1937.
13. *W. Heitler*. The quantum theory of radiation. Ed. 2<sup>th</sup>. Oxford, 1944, p. 183.

## ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ И ЗАРЯДА В КОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ\*

*Совместно с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе*

В работе [1] была получена точная система ковариантных уравнений для задачи одного нуклона, взаимодействующего с нейтральным псевдоскалярным мезонным полем. При этом, однако, уравнения были записаны в форме, мало удобной для проведения перенормировки собственной массы и заряда. В самом деле, массовые операторы в уравнениях для  $G_n$  и  $D_n$  появлялись там только в результате выполнения итераций (см. [1], ф-ла (18)), что делало затруднительным проведение перенормировок в общем виде. Введем поэтому с самого начала в уравнения массовый оператор  $M(p, p')$ . Уравнения запишем так:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m_0)G(p, p') - \gamma_5 \int \langle \Phi(p - q) \rangle G(q, p') d^4q - \\ - \int M(p, q)G(q, p') d^4q = \delta(p - p'), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M(p, p') = \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int G(p + k, k') \left[ \gamma_5 \delta(k' - k'' - p') + \frac{\delta M(k', p')}{\delta \langle \Phi(k'') \rangle} \right] \times \\ \times D(k'', k) d^4k d^4k'' d^4k', \end{aligned} \quad (2)$$

$$(k^2 - \mu_0^2) D(k, k') - \int P(k, k'') D(k'', k') d^4k'' = \delta(k - k'), \quad (3)$$

$$P(k, k') = - \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \text{Sp} \gamma_5 \int \frac{\delta G(p + k, p)}{\delta \langle \Phi(k') \rangle} d^4p \quad (4)$$

(обозначения [1]:  $\Phi = -ig_0\phi$ ,  $\phi$  — внешнее мезонное поле). Так же как и в [1], представляем функции  $G$ ,  $M$ ,  $D$ ,  $P$  в виде функциональных рядов по  $\langle \Phi(k) \rangle$ . После исключения  $\delta$ -функций, выражающих закон сохранения импульса (см. [1], ф-ла (10)), получим систему уравнений:

$$\{\hat{p} - m_0 - M_0(p)\} G_0(p) = 1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_n(F, s_1, \dots, s_n) = G_0(p) [\gamma_5 + M_1(F, s_n)] G_{n-1}(p - s_n, s_1, \dots, s_{n-1}) + \\ + G_0(p) \sum_{m=0}^{n-2} M_{n-m}(p, s_{m+1}, \dots, s_n) G_m\left(p - \sum_{i=m+1}^n s_i, s_1, \dots, s_m\right) \quad (n \neq 0), \end{aligned} \quad (6)$$

\* Докл. АН СССР, 1954. 98, 361.

$$\{k^2 - \mu^2 - P_0(k)\} D_0(k) = 1, \quad (7)$$

$$D_n(k, s_1, \dots, s_n) = D_0(k) \sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}(k, s_{m+1}, \dots, s_n) \times \\ \times D_m\left(k - \sum_{i=m+1}^n s_i, s_1, \dots, s_m\right) \quad (n \neq 0), \quad (8)$$

$$M_n(p, s_1, \dots, s_n) = \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int d^4 k \sum_{m=0}^n \left\{ G_{n-m}(p+k, s_{m+1}, \dots, s_n) \times \right. \\ \times \left[ \gamma_5 + M_1\left(p+k - \sum_{i=m+1}^n s_i, k + \sum_{i=1}^m s_i\right) \right] + \sum_{l=m+1}^n \sum_{j=m+1}^{l+1} G_{n-l}(p+k, s_{l+1}, \dots, s_n) M_{l-m+1}\left(p-k - \sum_{i=l+1}^n s_i, s_{m+1}, \dots, s_{j-1}, k + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m s_i, s_j, \dots, s_l\right) \left. \right\} D_m\left(k + \sum_{i=1}^m s_i, s_1, \dots, s_m\right), \quad (9)$$

$$P_n(k, s_1, \dots, s_n) = -\frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \text{Sp} \gamma_5 \sum_{j=1}^{n+1} \int d^4 p G_{n+1}(p+k, s_1, \dots, s_{j-1}, k - \\ - \sum_{i=1}^n s_i, s_j, \dots, s_n). \quad (10)$$

Произведем теперь в системе уравнений (5) — (10) перенормировку массы и заряда, т. е. вместо фиктивных массы нуклона  $m_0$ , массы мезона  $\mu_0$  и заряда  $g_0$  введем экспериментальные значения  $m$ ,  $\mu$  и  $g$ .

Заметим, что фиктивная масса нуклона  $m_0$  входит только в уравнение (5) для  $G_0$ , так что перенормировку массы нуклона достаточно произвести лишь в этом уравнении. Если экспериментальная масса нуклона равна  $m$ , то функция Грина нуклона  $G_0(p)$  должна иметь полюс при  $\hat{p} = m$ , т. е. должно выполняться равенство  $m - m_0 - M_0(m) = 0$ . Исключая отсюда  $m_0$ , приводим (5) к виду

$$\{\hat{p} - m - [M_0(p) - M_0(m)]\} G_0(p) = 1. \quad (11)$$

Тогда при  $\hat{p} \rightarrow m$   $G_0(p)$  будет равно  $G_0(p) = (\hat{p} - m)^{-1} [1 - M'_0(m)]$  вместо правильного выражения  $G_0(p) = (\hat{p} - m)^{-1}$ . Поступим поэтому следующим образом: член в лагранжиане, соответствующий свободному движению нуклона, запишем так:

$$L_0 = Z_2^{-1} \bar{\psi} (\hat{p} - m) \psi$$

и произведем перенормировку нуклонных волновых функций:  $\psi = Z_2^{1/2} \psi^*$ ,  $\bar{\psi} = Z_2^{1/2} \bar{\psi}^*$ . При этом функция Грина нуклона  $G_0(p)$

перенормируется как  $G_0 = Z_2 G_0^*$ . Запишем (11) в виде

$$\{\hat{p} - m - (\hat{p} - m) M_0'(m) - [M_0(p) - M_0(m) - (\hat{p} - m) M_0'(m)]\} G_0(p) = 1. \quad (12)$$

Тогда ясно, что при  $Z_2^{-1} = 1 - M_0'(m)$  уравнение для  $G_0^*(p)$  будет

$$\{\hat{p} - m - \tilde{M}_0(p)\} G_0^*(p) = 1, \quad (13)$$

где

$$\tilde{M}_0(p) = M_0^*(p) - M_0^*(m) - (\hat{p} - m) M_0^{**}(m), \quad M_0^* = Z_2 M_0 \quad (14)$$

и, следовательно,  $G_0^*(p) \rightarrow (\hat{p} - m)^{-1}$  при  $\hat{p} \rightarrow m$ . Тем самым перенормировка массы нуклона закончена. Совершенно аналогично производится перенормировка массы мезона. Связь экспериментальной массы мезона  $\mu$  с фиктивной  $\mu_0$  будет даваться уравнением  $\mu^2 = \mu_0^2 + P_0(\mu^2)$  и, если мезонные волновые функции и функцию Грина  $D_0(k^2)$  перенормировать как  $\varphi = Z_3^{1/2} \varphi^*$ ,  $D_0 = Z_3 D_0^*$ ,  $Z_3^{-1} = 1 - P_0'(\mu^2)$ , то уравнение для перенормированной функции  $D_0^*(k^2)$  будет иметь вид

$$\{k^2 - \mu^2 - \tilde{P}_0(k^2)\} D_0^*(k^2) = 1, \quad (15)$$

где

$$\tilde{P}_0(k^2) = P_0^*(k^2) - P_0^*(\mu^2) - (k^2 - \mu^2) P_0^{**}(\mu^2), \quad P_0^* = Z_3 P_0. \quad (16)$$

Необходимо еще произвести перенормировку заряда  $g_0$ . Для того чтобы определить связь между экспериментальным зарядом  $g$  и фиктивным зарядом  $g_0$ , рассмотрим задачу о взаимодействии нуклона с внешним мезонным полем  $\langle \varphi(k^2) \rangle$ . Если при этом нуклон можно считать свободным ( $\hat{p} = m$ ), а внешнее поле слабым и удовлетворяющим уравнению  $(k^2 - \mu^2) \langle \varphi(k^2) \rangle = 0$  (т. е.  $k^2 = \mu^2$ ), то энергия взаимодействия должна выражаться через экспериментальный заряд  $g$  и перенормированные функции нуклона  $\bar{\psi}^*$ ,  $\psi^*$  и внешнее мезонное поле так <sup>1</sup>:

$$g \bar{\psi}^*(p) \gamma_3 \psi^*(p - k) \langle \varphi(k) \rangle^*. \quad (17)$$

<sup>1</sup> При выполнении двух равенств  $\hat{p} = m$  и  $k^2 = \mu^2$  не будет сказываться внутренняя структура нуклона, что необходимо для определения экспериментального заряда  $g$  и силы внешнего поля  $\varphi^*$ . В электродинамике ( $\mu = 0$ ) это соответствовало бы взаимодействию с полем с большими длинами волн. В мезодинамике  $\varphi(k^2)$  в общем случае подчиняется уравнению  $(k^2 - \mu^2)\varphi = -I$ , где  $I$  — нуклонный ток. Условие  $k^2 = \mu^2$  означает, что  $\varphi$  не зависит от нуклонных токов [2]. Члены, пропорциональные  $(k^2 - \mu^2)^n \varphi(k^2) \sim I^{(n)}(k^2)$ , вносят в (20) выражения, зависящие от нуклонного тока и его производных, которые не могут входить в перенормировку.



С другой стороны, в этом случае энергия взаимодействия должна быть равна

$$g_0 \bar{\psi}(m) [\gamma_5 + M_1(m, \mu)] \psi(m) \langle \varphi(\mu) \rangle, \quad (18)$$

так как взаимодействие с внешним полем описывается функцией  $G_1(p, k) \langle \varphi(k) \rangle = G_0(p) [\gamma_5 + M_1(p, k)] G_0(p - k) \langle \varphi(k) \rangle$ , в которой вместо функций Грина  $G_0(p)$  и  $G_0(p - k)$ , соответствующих внешним линиям, нужно подставить волновые функции нуклонов.

Приравнивая (17) и (18) и используя связь между перенормированными и перенормированными волновыми функциями, находим соотношение между  $g$  и  $g_0$ :

$$g_0^2 = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} g^2, \quad (19)$$

где  $Z_1^{-1} = 1 + \gamma_5 M_1(m, \mu) = 1 + L$ , поскольку  $M_1(m, \mu)$  должно иметь вид  $\gamma_5 L$ , где  $L$  не содержит матриц  $\gamma$ . Общее выражение для взаимодействия нуклона с внешним мезонным полем, когда  $\hat{p} \neq m$  и  $k^2 \neq \mu^2$ , должно, согласно (19), перенормироваться следующим образом:

$$g_0 \bar{\psi}(p) [\gamma_5 + M_1(p, k)] \psi(p - k) \langle \varphi(k) \rangle = \bar{g} \psi^*(p) \{\gamma_5 + \tilde{M}_1(p, k)\} \psi^*(p - k) \langle \varphi^*(k) \rangle, \quad (20)$$

где

$$\tilde{M}_1(p, k) = M_1^*(p, k) - M_1^*(m, \mu), \quad M_1^* = Z_1 M_1. \quad (21)$$

Величины  $G_n, D_n, M_n, P_n$ , которые являются коэффициентами разложения функций  $G, D, M, P$  по  $g_0 \langle \varphi \rangle$ , должны перенормироваться таким образом, чтобы при всех членах разложения данной функции в функциональный ряд возникал один и тот же множитель. Так как  $g_0 \langle \varphi \rangle = Z_1 Z_2^{-1} g \langle \varphi \rangle^*$ , то для  $G_n, D_n, M_n, P_n$  получается:

$$\begin{aligned} G_n &= Z_1^{-n} Z_2^{n+1} G_n^*, & D_n &= Z_1^{-n} Z_2^n Z_3 D_n^*, \\ M_n &= Z_1^{-n} Z_2^{n-1} M_n^*, & P_n &= Z_1^{-n} Z_2^n Z_3^{-1} P_n^*. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (19) и (22) в уравнения (5) — (10) и учитывая (13) — (16), (20), (21), получаем следующую систему уравнений для перенормированных функций  $G_n^*, D_n^*, M_n^*, P_n^*$  (в сокращенной записи):

$$\begin{aligned} \{\hat{p} - m - [M_0^*(p) - M_0^*(m) - (\hat{p} - m) M_0^{*'}(m)] G_0^*(p) &= 1, \\ G_n^* &= G_0^* [\gamma_5 + M_1^*(p, s_n) - M_1^*(m, \mu)] G_{n-1}^* + G_0^* \sum_{m=0}^{n-2} M_{n-m}^* G_m^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_n^* &= \frac{g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \gamma_5 \int d^4 k \sum_{m=0}^n \{ G_{n-m}^* [\gamma_5 + M_1^*(p, \dots, k) - M_1^*(m, \mu)] + \\
&+ \sum_{l=m+1}^n G_{n-l}^* M_{l-m+1}^* \} D_m^*, \\
\{ k^2 - \mu^2 - [P_0^*(k^2) - P_0^*(\mu^2) - (k^2 - \mu^2) P_0^{*'}(\mu^2)] \} D_0^*(k^2) &= 1, \\
D_n^* &= D_0^* \sum_{m=0}^{n-1} P_{n-m}^* D_m^*, \quad P_n^* = - (g^2/4\pi^3 i) Z_1 \text{Sp } \gamma_5 \int d^4 p G_{n+1}^*. \quad (23)
\end{aligned}$$

Все множители  $Z_1, Z_2, Z_3$  выпали из (23), за исключением  $Z_1$  в уравнениях для  $M_n^*$  и  $P_n^*$ . Наличие этого множителя обусловлено следующим обстоятельством. Вставка вершинных частей во все вершины диаграмм для  $M_n$  и  $P_n$ , кроме самых левых, возникает за счет членов с  $M_1$ , стоящих в правых частях уравнений для  $G_n$  и  $M_n$ . Перенормировка их осуществляется путем замены  $M_1(p, k)$  на  $M_1(p, k) - M_1(m, \mu)$ . Вставка же вершинной части в самую левую вершину диаграммы для  $M_n$  происходит от членов  $\sim M_{n+1}$ . Поэтому перенормировка таких вершинных частей должна производиться путем вычитания выражений типа  $M_1(m, \mu) M_n$ . Можно проверить, что, решая уравнения (23) методом итераций, мы получим результаты теории возмущений с учетом перенормировок, причем метод перенормировки совпадает с развитым в работах [3, 4]. Все бесконечности при этом сократятся.

Однако попытка обрыва системы (23) на  $m$ -м члене с последующим точным решением конечного числа уравнений наталкивается на некоторые трудности, если  $M_1^*(m, \mu)$  является бесконечным. Действительно, тогда бесконечные интегралы, возникающие из множителя  $Z_1$  (в уравнениях для  $M_n, n < m$ ), не будут совпадать с интегралами от  $M_{n+1}$  и имевшее место сокращение бесконечностей нарушится. Поэтому при решении каждой конкретной оборванной системы необходимо будет определять  $Z_1$  таким образом, чтобы ликвидировать все бесконечности, возникающие от левых углов диаграмм. Отметим, что при проведении перенормировки мы использовали только чисто физические аргументы о необходимости замены фиктивных масс и заряда на экспериментальные. Такая замена должна быть выполнена независимо от того, конечны или бесконечны массовый и поляризационный операторы. Вопрос о том, исключены ли этим из теории все бесконечности или нет (например, рассеяние мезона на мезоне), должен быть решен путем исследования полученной системы уравнений.

Академия наук СССР

Поучено 22 февраля 1954 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Иоффе. Докл. АН СССР, 1954, 95, 761.
2. J. Ashkin, A. Simon, R. Marshak. Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 634.
3. F. J. Dyson. Phys. Rev., 1949, 75, 1736.
4. A. Salam. Phys. Rev., 1951, 82, 217.

# ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА НУКЛОНА И МЕЗОНА В ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ\*

*Совместно с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе*

Рассматривается асимптотика (при  $|p^2| \gg m^2$ ) функций Грина нуклона и мезона в псевдоскалярной (со скалярной связью) теории с малой константой связи. Исходными являются уравнения, предложенные в работе [1]. В отличие от [1] производится перенормировка массы и заряда согласно методу, развитому в [2], и показывается, что этот метод устраняет все появляющиеся в данной задаче бесконечности.

## § 1. Формулировка уравнений

В работе [2] были получены ковариантные уравнения для задачи одного нуклона, взаимодействующего с псевдоскалярным мезонным полем, и произведена в них перенормировка массы и заряда. В настоящей работе мы применим этот метод перенормировки массы и заряда к задаче, имеющей методический интерес, — к исследованию асимптотического (при  $|p^2| \gg m^2$ ) поведения функций Грина нуклона  $G(p)$  и мезона  $D(p^2)$ <sup>1</sup> при малых  $g^2$ . При этом мы убедимся, что остающийся в уравнениях работы [2] множитель  $Z_1$ , в котором могут содержаться бесконечности, автоматически исключается и не входит в результат. Таким образом на конкретном примере будет проиллюстрирован метод исключения бесконечностей, не связанный с теорией возмущений.

Для изучения асимптотики функций Грина нужно отобразить из системы бесконечного числа «зацепляющихся» уравнений наиболее существенные члены. Из теории возмущений известно, что асимптотически диаграммы для  $G(p)$  и  $D(p^2)$  ведут себя, как  $g^{2n} \left( \ln \frac{p^2}{m^2} \right)^m$ , где  $m \leq n$  [3, 4]. При  $g^2 \ll 1$  наиболее существенны диаграммы с  $n = m$ . Как было показано в работе [1], условие  $n = m$  позволяет бесконечную систему уравнений свести к трем уравнениям для трех функций  $G(p)$ ,  $D(p^2)$  и  $\Gamma_5(p, p - k; -k)$ . Функция  $\Gamma_5(p, p - k; -k)$  фактически зависит от двух импульсов (например, от начального  $p$  и конечного  $p - k$  импульсов нуклона). Для удобства дальнейших оценок мы пишем три импульса, причем

\* ЖЭТФ, 1955, 29, 51.

<sup>1</sup> В работе [2] эти функции обозначались через  $G_0(p)$ ,  $D_0(p^2)$ , остальные обозначения совпадают с [2]. Ссылки на формулы работы [2] будут обозначаться как II.

точкой с запятой отделяем импульс мезона. В случае псевдоскалярной симметричной теории эти функции подчиняются следующей системе уравнений [1]:

$$\left\{ \hat{p} - m_0 - 3 \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int d^4 k G(p-k) \Gamma_5(p-k, p; k) D(k^2) \right\} G(p) = 1, \quad (1)$$

$$\left\{ k^2 - \mu_0^2 + 2 \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \int d^4 p \text{Sp} \gamma_5 G(p) \Gamma_5(p, p+k; k) G(p+k) \right\} D(k^2) = 1, \quad (2)$$

$$\Gamma_5(p, p-k; -k) = \gamma_5 - \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \int \Gamma_5(p, p-q; -q) G(p-q) \times \\ \times \Gamma_5(p-q, p-q-k; -k) G(p-q-k) \Gamma_5(p-q-k, p-k; q) \times \\ \times D(q^2) a^4 q. \quad (3)$$

Выясним соответствие этих уравнений с системой зацепляющихся уравнений работы [2]. Уравнения (1) и (2) непосредственно совпадают<sup>1</sup> с уравнениями (5), II и (7), II, если туда подставить выражения для  $M_0(p)$  из (9), II и  $P_0(k^2)$  из (10), II и учесть, что  $\Gamma_5 = \gamma_5 + M_1(p, k)$ . Если в уравнениях (5) — (10), II мы положим  $M_n = 0$  при  $n \geq 2$  и  $P_n = 0$  при  $n \geq 1$ , то из (6), II и (9), II получим уравнение, несколько отличающееся от (3):

$$\Gamma_5(p, p-k; -k) = \gamma_5 - \frac{g_0^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int G(p-q) \Gamma_5(p-q, p-q-k; -k) \times \\ \times G(p-q-k) \Gamma_5(p-q-k, p-k; q) D(q^2) d^4 q. \quad (4)$$

Если мы будем решать итерациями систему уравнений (1), (2), (4), то обнаружим, что не получаются все диаграммы интересу-

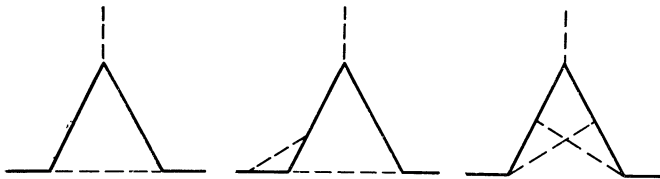


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

ющего нас класса. Именно будут отсутствовать диаграммы, получаемые вставкой вершинных частей в крайний левый угол основной диаграммы рис. 1 для  $\Gamma_5$  (см., например, диаграмму, изображенную на рис. 2).

<sup>1</sup> Симметричная псевдоскалярная теория отличается от нейтральной появлением в уравнении (1) коэффициента 3 перед интегралом, а в уравнениях (2) и (3) коэффициентов 2 и  $-1$  соответственно.

Между тем все диаграммы, в которых каждое интегрирование по внутренним мезонным линиям приводит в неперенормированной теории к расходимостям, будут принадлежать к интересующему нас классу. Действительно, после перенормировки каждая расходимость заменится на  $\ln p^2/m^2$ , и асимптотически такие диаграммы будут вести себя как  $g^{2n} (\ln p^2/m^2)^n$ , т. е. должны нами учитываться. В частности, диаграмма, изображенная на рис. 2, должна учитываться, так как асимптотически она имеет вид

$$g^4 \left( \ln \frac{p^2}{m^2} \right)^2.$$

Поэтому в уравнениях (9), II для  $M_n$  с  $n \geq 2$  не следует полагать  $M_n = 0$ , а нужно учесть совокупность таких членов, которые соответствуют вставке вершинных частей в крайний левый угол диаграммы рис. 1. При этом нужно отобрать только такие члены, в которых каждое интегрирование по внутренним мезонным линиям приводит к расходимостям, и не учитывать «перекрывающихся» диаграмм (например, вида рис. 3, которая ведет себя асимптотически как  $g^4 \ln p^2/m^2$ ). Действуя указанным образом, мы приходим от уравнения (4) к уравнению (3).

Приведем теперь перенормировку массы и заряда в уравнениях (1) — (3). Поскольку уравнения (1) и (2) совпадают с соответствующими уравнениями работы II, то перенормировка в них должна производиться так же, как и в II. Поэтому остается лишь перенормировать уравнение (3). Согласно методу, развитому в II, введем вместо  $\Gamma_5(p, p-k; -k)$  перенормированную функцию  $\Gamma_5^*(p, p-k; -k) = Z_1 \Gamma_5(p, p-k; -k)$ , где  $Z_1^{-1} = \gamma_5 \Gamma_5(m, m, \mu)$  и  $m$  — экспериментальная масса нуклона, а  $\mu$  — экспериментальная масса мезона. Используем также связь перенормированных функций Грина нуклона и мезона с неперенормированными (см. (22), II)  $G^* = Z_2^{-1} G$ ,  $D^* = Z_3^{-1} D$ , где

$$Z_2 = 1 + M_0^*(m), \quad Z_3 = 1 + P_0^*(\mu^2), \quad (5)$$

и экспериментального заряда  $g$  с фиктивным зарядом  $g_0$ :  $g_0^2 = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} g^2$ . Тогда вместо (3) получим следующее уравнение для перенормированной функции  $\Gamma_5^*(p, p-k; -k)$ ;

$$\begin{aligned} \Gamma_5^*(p, p-k; -k) &= Z_1 \gamma_5 - \frac{g^2}{4\pi^2 i} \int \Gamma_5^*(p, p-q; -q) G^*(p-q) \times \\ &\times \Gamma_5^*(p-q, p-q-k; -k) G^*(p-q-k) \times \\ &\times \Gamma_5^*(p-q-k, p-k; q) D^*(q^2) d^4q. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) удобно записать иначе, выразив  $Z_1$  через перенормированные функции и экспериментальный заряд:

$$Z_1^{-1} = 1 + \gamma_5 M_1(m, \mu) = 1 + \gamma_5 Z_1^{-1} M_1^*(m, \mu), \quad (7)$$

так как  $M_1^* = Z_1 M_1$ . Отсюда

$$Z_1 = 1 - \gamma_5 M_1^*(m, \mu) \quad (7')$$

и (6) приобретает следующий вид:

$$\Gamma_5^{\wedge}(p, p - k; -k) = \gamma_5 + M_1^*(p, k) - M_1^{\wedge}(m, \mu), \quad (8)$$

где

$$M_1^*(p, k) = -\frac{g^2}{4\pi^3 i} \int \Gamma_5^*(p, p - q; -q) G^*(p - q) \Gamma_5^*(p - q, p - q - k; -k) G^*(p - q - k) \Gamma_5^*(p - q - k, p - k; q) D^*(q^2) d^4 q. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) совместно с перенормированными уравнениями (23), II для функций  $G^*(p)$  и  $D^*(k^2)$ .

$$\{\hat{p} - m - [M_0^{\wedge}(p) - M_0^*(m) - (\hat{p} - m) M_0'(m)]\} G^*(p) = 1, \quad (10)$$

$$M_0^*(p) = 3 \frac{g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \gamma_5 \int G^*(p - k) \Gamma_5^*(p - k, p; k) D(k^2) d^4 k, \quad (11)$$

$$\{k^2 - \mu^2 - [P_0^*(k^2) - P_0^*(\mu^2) - (k^2 - \mu^2) P_0'(\mu^2)]\} D(k^2) = 1, \quad (12)$$

$$P_0^*(k^2) = -2 \frac{g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \text{Sp} \gamma_5 \int G^*(p) \Gamma_5^*(p, p + k; k) G(p + k) d^4 p \quad (13)$$

и формулой (7') для  $Z_1$  составляют полную систему для определения асимптотического поведения функций  $G^*$  и  $D^*$ .

## 2. Уравнение для функции Грина нуклона

Интересуясь лишь асимптотикой функций<sup>1</sup>  $G, D, \Gamma_5$ , мы можем пренебрегать  $m^2$  и  $\mu^2$  по сравнению с  $p^2$  и  $k^2$ . Поэтому решения уравнений (7) — (13) будем искать в виде<sup>2</sup>:

$$G(p) = \hat{p}^{-1} F(p^2), \quad D(k^2) = k^{-2} \varphi(k^2), \quad (14)$$

где  $F$  и  $\varphi$  — медленно меняющиеся (например, логарифмические) функции своих аргументов.

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем под  $G, D, \Gamma_5$  будут пониматься уже перенормированные функции и значок \* будет опускаться.

<sup>2</sup> Метод решения уравнений (10) — (13) в значительной степени заимствован из работы [1], где такие уравнения, но без проведения программы перенормировок в самих уравнениях, до их решения, рассматривались для случая электродинамики. Несмотря на сходство выкладок, мы будем проводить их достаточно подробно, чтобы яснее проиллюстрировать особенности, возникающие при работе с перенормированными уравнениями. Результаты настоящей работы получены также в работе [5], которая была выполнена по методу [1].

Общий вид функции  $\Gamma_5(p, p - k; -k)$ , когда ее аргументы велики по сравнению с  $m$  и  $|k^2| \gg |p^2|$ , следующий:

$$\begin{aligned} & \Gamma_5(p - k, p; k) = \\ & = \gamma_5 \{s_0 [(p - k)^2, p^2, k^2] - \frac{\hat{k} \hat{p}}{k^2 + p^2} s_1 [(p - k)^2, p^2, k^2]\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция  $s_0 [(p - k)^2, p^2, k^2]$  — медленно меняющаяся функция своих аргументов, причем зависит только от наибольшего из них (этот вывод подсказывается теорией возмущений, когда легко вычислить  $s_0$  в первом приближении, и подтверждается дальнейшими вычислениями).

При  $|k^2| \gg |p^2|$  вторая часть в (15) много меньше первой; ее, однако, и в этом случае надо учитывать, поскольку при подстановке ее в массовый оператор (11) мы получим все еще логарифмический расходящийся интеграл. Это связано с тем, что функция  $s_1$  (как можно получить в теории возмущений и подтвердить дальнейшими вычислениями) является функцией двух аргументов  $s_1 = s_1(p^2, k^2)$  и при  $|k^2| \gg |p^2|$  возрастает как  $\ln k^2/p^2$ , а при  $|k^2| \sim |p^2|$  стремится к постоянной, которой мы будем пренебрегать.

На первый взгляд кажется, что в перенормированном массовом операторе, входящем в уравнение (10), будут при интегрировании по четырехмерному  $k$ -пространству играть роль импульсы  $k^2$  порядка  $p^2$ . Это верно, однако, лишь в том случае, когда в  $\Gamma_5$  берется первый член из (15) —  $\gamma_5 s_0$ . В самом деле, из теории возмущений известно, что вычитание из  $M_0(p)$  выражений  $M_0(m)$  и  $(p - m) M_0'(m)$  не приводит к исключению всех бесконечностей. Именно остаются так называемые « $b$ -расходимости» [6, 7], исключение которых в теории возмущений производится вычитанием бесконечных частей от  $\Gamma_5$ , вставляемой поочередно в левую и в правую вершины диаграмм для массового оператора. В нашем методе перенормировки эти бесконечности компенсируются множителем  $Z_1$ , стоящим в уравнении (11). То, что именно функция  $s_1(p^2, k^2)$  ответственна за « $b$ -расходимости», можно проверить на примере первого приближения теории возмущений.

Отсюда следует, что при подстановке в массовый оператор функции, пропорциональной  $s_1$ , мы получим интеграл, в котором существенную роль играет область импульсов виртуальных мезонов  $|k^2| \gg |p^2|$ .

Следуя [1], будем считать вектор  $p_\mu$  в (10) пространственным ( $p_4^2 - p^2 < 0$ ). Тогда будут отсутствовать смещенные полюсы [6], и при интегрировании по  $k_4$  можно перевести интегрирование на мнимую ось ( $k_4 \rightarrow ik_4$ ). Такое преобразование мы будем называть переходом к «евклидовой метрике». Сначала рассмотрим ту часть массового оператора, которая возникает при подстановке функции  $\gamma_5 s_0$  вместо  $\Gamma_5$ . Эту часть массового оператора будем обозначать индексом (0). Поскольку перенормировка делает интеграл по  $k$  сходящимся, то можно считать, что все интегрирования произво-

дятся до некоторого верхнего предела порядка  $p$ . Поскольку результат будет лишь логарифмически зависеть от верхнего предела, точнее его знание несущественно. Учитывая формулы (14) и (15), получаем для  $M_0^{(0)}(p)$  следующий интеграл:

$$M_0^{(0)}(p) = -3 \frac{g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \hat{p} \int \frac{1 - (\hat{k} \hat{p}/p^2)}{(p - k)^2 k^2} F(k^2) s_0(k^2) \varphi(k^2) d^4 k \quad (16)$$

(мы использовали медленность изменения функций  $F$  и  $s_0$  и заменили их аргументы с  $(p - k)^2$  на  $k^2$ ). Общий вид массового оператора  $M_0(p)$  таков:

$$M_0(p) = \hat{p} f_1(p^2) + m f_2(p^2),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  зависят только от  $p^2$ . Очевидно, что в перенормировочном члене  $\hat{p} M_0'(m)$  при больших  $|p^2|$  существенно только  $\hat{p} f_1(m^2)$ . Таким образом  $\hat{p} M_0^{(0)}(m)$  определяется той же формулой (16), только под знаком интеграла следует положить  $p^2 = m^2$ .

Переходя к евклидовой метрике и вводя сферическую систему координат

$$d^4 k = 4\pi k^3 \sin^2 \alpha dk d\alpha, \quad (17)$$

получаем (нижний предел по порядку равен  $m^2$ )

$$M_0^{(0)}(p) = -\frac{3g^2}{2\pi^2} Z_1 \frac{\hat{p}}{|p^2|} \int_{m^2}^{|p^2|} dk^2 F(k^2) s_0(k^2) \varphi(k^2) \times \\ \times \int_0^\pi \frac{1 - (k/|p|)}{1 - (k^2/|p^2|) - (2k/|p|) \cos \alpha} \sin^2 \alpha d\alpha. \quad (18)$$

Интеграл по углу  $\alpha$  равен  $\frac{\pi}{4} \left( 2 - \frac{k^2}{|p^2|} \right)$ , если  $|k^2| < |p^2|$  и  $\frac{\pi}{4} \frac{|p^2|}{k^2}$ , если  $|k^2| > |p^2|$ .

Следовательно, мы получим:

$$M_0^{(0)}(p) = -\frac{3g^2}{8\pi} Z_1 \frac{\hat{p}}{|p^2|} \int_{m^2}^{|p^2|} dk^2 F(k^2) s_0(k^2) \varphi(k^2) \left( 2 - \frac{k^2}{|p^2|} \right), \\ \hat{p} M_0^{(0)'}(m) = -\frac{3g^2}{8\pi} Z_1 \hat{p} \int_{m^2}^{|p^2|} \frac{dk^2}{k^2} F(k^2) s_0(k^2) \varphi(k^2).$$

Из этих формул видно, что главным членом является  $\hat{p} M_0^{(0)'}(m)$ . Переходя к логарифмической переменной  $z = \ln k^2/m^2$  и обозначая  $\xi = \ln \left( -\frac{p^2}{m^2} \right)$ ,  $\lambda = \frac{g^2}{4\pi}$ , имеем

$$M_0^{(0)}(p) - M_0^{(0)}(m) - (\hat{p} - m) M_0^{(0)'}(m) = \frac{3}{2} \lambda Z_1 \hat{p} \int_0^\xi F(z) s_0(z) \varphi(z) dz. \quad (19)$$



Перейдем теперь к рассмотрению второй части массового оператора, которая получается, если в  $\Gamma_5$  взять член, содержащий  $s_1$ . Будем обозначать эту часть  $M_0(p)$  индексом <sup>(1)</sup>. Мы получим, очевидно,

$$M_0^{(1)}(p) = -\frac{3g^2}{4\pi^3 i} Z_1 \gamma_5 \int (\hat{p} - \hat{k})^{-1} \gamma_5 \frac{\hat{k} \hat{p}}{k^2} \frac{1}{k^2} s_1(p^2, k^2) F(k^2) \varphi(k^2) d^4k, \quad (20)$$

причем существенная область интегрирования, как уже было указано, лежит при  $|k| \gg |p|$ . Мы можем поэтому пренебречь в множителе  $(\hat{p} - \hat{k})^{-1}$  под знаком интеграла величиной  $\hat{p}$  по сравнению с  $\hat{k}$ , а нижний предел интеграла, от которого результат зависит логарифмически, считать равным  $p$ . После перехода к евклидовой метрике и интегрирования по углам, получим

$$M_0^{(1)}(p) = -3\lambda Z_1 \hat{p} \int_{\xi}^{\infty} F(z) \varphi(z) s_1(\xi, z) dz. \quad (21)$$

Очевидно, что перенормировочный член равен

$$(\hat{p} - m) M_0^{(1)'}(m) = -3\lambda Z_1 \hat{p} \int_0^{\infty} F(z) \varphi(z) s_1(0, z) dz. \quad (22)$$

Подставляя (18), (21), (22) в (10), мы можем, после сокращения на  $\hat{p}$ , следующим образом записать одномерное интегральное уравнение для функции Грина нуклона:

$$1 + \frac{3}{2} \lambda Z_1 \int_{\xi}^{\infty} F(z) \varphi(z) [s_0(z) + 2s_1(\xi, z)] dz - \\ - \frac{3}{2} \lambda Z_1 \int_0^{\infty} F(z) \varphi(z) [s_0(z) + 2s_1(0, z)] dz = \frac{1}{F(\xi)}. \quad (23)$$

Перейдем к составлению одномерного уравнения для  $\Gamma_5$  и рассмотрим, прежде всего, уравнение для функции  $s_0(p^2)$ . Положение здесь аналогично тому, которое имело место при рассмотрении  $M_0^{(0)}(p)$ : из-за перенормировки (вычитание  $M_1(m, \mu)$ ) интеграл, определяющий  $\Gamma_5$ , сходится при  $|q| \sim |p|$  (или порядка  $|k|$ , поскольку в той  $\Gamma_5$ , которая нужна для вычисления массового оператора,  $|p|$  и  $|k|$  — одного порядка). Поэтому, так же как для  $M_0^{(0)}(p)$ , главным членом является  $M_1(m, \mu)$ , который в  $\ln p^2/m^2$  раз больше, чем  $M_1(p, k)$ . Рассматривая уравнение для  $s_0$ , можно в правой части (9) не учитывать в  $\Gamma_5$  малых добавок, пропорциональных  $s_1$ , поскольку они привели бы к интегралам не логарифмического вида, и результат оказался бы, по крайней мере, в  $\ln p^2/m^2$  раз

меньше главного члена. Таким образом уравнение для  $s_0$  имеет вид

$$s_0(p^2) = 1 + \frac{g^2}{4\pi^3 i} \int (\hat{p} - \hat{q})^{-1} \gamma_5 (\hat{p} - \hat{q} - \hat{k})^{-1} \gamma_5 q^{-2} s_0^3(q^2) \times \\ \times F^2(q^2) \varphi(q^2) d^4 q \Big|_{k^2=\mu^2}^{p=m}, \quad (24)$$

причем интегрирование должно производиться до  $|q| \sim |p|$ . Переходя к одномерному уравнению тем же методом, что и при получении уравнения для функции Грина нуклона, получаем

$$s_0(\xi) = 1 - \lambda \int_0^{\xi} s_0^3(z) F^2(z) \varphi(z) dz. \quad (25)$$

Попутно отметим, что  $Z_1$ , как это следует из (7), отличается от (25) только тем, что интегрирование по  $z$  производится до бесконечности, так что

$$Z_1 = s_0(\infty) = 1 - \lambda \int_0^{\infty} s_0^3(z) F^2(z) \varphi(z) dz. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь уравнение для функции  $s_1$ . Нас будет интересовать такая область импульсов, которая существенна для подстановки  $s_1$  в уравнение для  $G$ . Перепишем еще раз интеграл (9), явно указав все импульсы:

$$M_1(x - k, p; k) = - \frac{g^2}{4\pi^3 i} \int \Gamma_5(p - k, p - k + q; q) G(p - k + q) \times \\ \times \Gamma_5(p - k + q, p + q; k) G(p + q) \Gamma_5(p + q, p; -q) D(q^2) d^4 q. \quad (27)$$

Как указывалось выше (см. (20)), существенна область импульсов, когда  $|k| \gg |p|$ . С другой стороны, функция  $s_1$  обращается в нуль, если нуклоны обладают импульсами одного порядка (ниже показано, что это утверждение оправдано). Поэтому в  $\Gamma_5$ , стоящей в (27) слева, функцию  $s_1$  учитывать не следует. В следующей  $\Gamma_5$ , стоящей в середине, нуклонные импульсы, вообще говоря, разного порядка. Однако, если выписать часть этой  $\Gamma_5$ , содержащую функцию  $s_1$ , т. е.

$$\frac{\hat{k}(\hat{p} + \hat{q})}{k^2} s_1[(p + q)^2, k^2],$$

то можно убедиться, что в возникающем при этом интеграле будут существенны самые большие импульсы  $|q| \sim |k|$ . Но тогда у функции  $s_1[(p + q)^2, k^2]$  аргументы оказываются одного порядка, и она обращается в нуль. Таким образом функцию  $s_1$  нужно сохранить только в правом углу. Подставив (14) и имея в виду равенство

$$\gamma_5(\hat{p} - \hat{k} + \hat{q})^{-1} \gamma_5(\hat{p} + \hat{q})^{-1} \gamma_5 = - \gamma_5(\hat{p} + \hat{q} - \hat{k})^{-2} \left[ 1 - \frac{\hat{k}(\hat{p} + \hat{q})}{(p + q)^2} \right],$$

получим

$$M_1(p-k, p; k) = \frac{g^2}{4\pi^3 i} \gamma_3 \int (\hat{p} + \hat{q} - \hat{k})^{-1} \left[ 1 - \frac{\hat{k}(\hat{p} + \hat{q})}{(p+q)^2} \right] q^{-2} \times \\ \times \left[ s_0 + \frac{\hat{q}\hat{p}}{q^2} s_1(p^2, q^2) \right] s_0 \cdot s_0 F[(p-k+q)^2] F[(p+q)^2] \varphi(q^2) d^4 q. \quad (28)$$

Теперь легко выделить члены, пропорциональные  $\hat{k}\hat{p}$ , которые определяют  $s_1$ . Мы получим

$$\frac{\hat{k}\hat{p}}{k^2} s_1(p^2, k^2) = \frac{g^2}{4\pi^3 i} \int \frac{d^4 q}{q^2} (\hat{p} - \hat{k} + \hat{q})^{-2} \left[ \frac{\hat{k}(\hat{p} + \hat{q})}{(p+q)^2} s_0 + \frac{\hat{k}\hat{p}}{(p+q)^2} \times \right. \\ \left. \times s_1(p^2, q^2) \right] s_0 \cdot s_0 F[(p-k+q)^2] F[(p+q)^2] \varphi(q^2). \quad (29)$$

Интеграл по  $q$  сходится, но если  $|k| \gg |p|$ , то при  $|p| \ll |q| \ll \ll |k|$  подынтегральное выражение будет иметь вид  $dq/q$  и, следовательно, интеграл будет логарифмически возрастать с ростом  $|k^2|$ , т. е. функция  $s_1$  содержит  $\ln k^2/p^2$ . Если же  $|k| \sim |p|$ , то логарифмического роста интеграла не происходит, и  $s_1$  мало. Этот результат оправдывает сделанные ранее предположения о виде функции  $s_1$ .

В (29) не отмечены аргументы функций  $s_0$ . Так как существенная область интегрирования лежит при  $|p| \ll |q| \ll |k|$ , то аргумент первой функции  $s_0$  равен  $q^2$ , а аргументы двух других функций  $s_0$  одинаковы и равны  $k^2$ . Аргументы функций  $F$  можно считать равными: у одной  $k^2$ , а у другой  $q^2$ . Поскольку интеграл, определяющий функцию  $s_1$ , сходящийся, то учитывать перенормировочный член  $M_1(m, \mu)$  не нужно.

Перейдем к евклидовой метрике и проинтегрируем по углам. При этом можно пренебрегать  $p^2$  и  $q^2$  по сравнению с  $k^2$  и  $p^2$  по сравнению с  $q^2$  (но не  $\hat{q}$  по сравнению с  $\hat{p}$  в члене  $\hat{p} + \hat{q}$ ). Пределы интегрирования по  $q^2$  можно считать равными  $p^2$  и  $k^2$ ; точное значение их несущественно. В результате получим

$$s_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \lambda s_0^2(\eta) F(\eta) \int_{\xi}^{\eta} [s_0(z) + 2s_1(\xi, z)] F(z) \varphi(z) dz, \quad (30)$$

где

$$\xi = \ln \left( -\frac{p^2}{m^2} \right), \quad \eta = \ln \left( -\frac{k^2}{m^2} \right).$$

Уравнение (30) можно решить, выразив  $s_1(\xi, \eta)$  через  $s_0$ ,  $F$ ,  $\varphi$ . Это удобно сделать [1], введя функцию

$$q(\xi, \eta) = \frac{s_1(\xi, \eta)}{s_0^2(\eta) F(\eta)}. \quad (31)$$

Из (30) и (25) легко находим

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [s_0(\eta) q(\xi, \eta)] = \frac{1}{2} \lambda s_0^2(\eta) F(\eta) \varphi(\eta), \quad (32)$$

откуда

$$s_0(\eta) q(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \lambda \int_{\xi}^{\eta} s_0^2(z) F(z) \varphi(z) dz; \quad (33)$$

при этом мы учли, что  $q(\xi, \xi) = 0$ . Таким образом

$$s_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \lambda s_0(\eta) F(\eta) \int_{\xi}^{\eta} s_0^2(z) F(z) \varphi(z) dz. \quad (34)$$

Теперь при помощи формулы (34) мы можем доказать сделанное нами раньше утверждение о том, что подстановка  $s_1$  в уравнение для функции Грина нуклона приведет к интегралам, расходящимся даже после вычитания членов  $M_0(m)$  и  $(p - m) M'_0(m)$ . Действительно, продифференцируем (23) по  $\xi$ . Тогда, если бы вычитание  $M_0(m)$  и  $(p - m) M'_0(m)$  делало бы интеграл сходящимся, то после одного (или в крайнем случае двух) дифференцирований мы должны были бы получить конечные выражения. На самом же деле, как нетрудно видеть из (23) и (34), после любого числа дифференцирований интеграл по  $\xi$  в (23) будет оставаться логарифмически расходящимся. Таким образом, подтверждено наше предположение о том, что в тех частях массового оператора, которые содержат  $s_1(p^2, k^2)$ , основную роль играют импульсы  $|k^2| \gg |p^2|$ .

### 3. Уравнение для функции Грина мезона

Рассмотрим сначала малые поправки к  $\Gamma_5$ , которые необходимо учитывать при решении уравнений (12), (13) для функции Грина мезона. Поскольку поляризационный оператор расходится квадратично, то малые поправки к  $\Gamma_5$ , убывающие как  $1/p^2$ , приводят еще к логарифмически расходящимся интегралам и должны учитываться. С другой стороны, функцию  $s_1$  в поляризационном операторе можно не учитывать. Действительно, в уравнение (13) входит  $\Gamma_5(p, p + k; k)$ , причем в малых поправках к  $\Gamma_5$  нас будут интересовать случаи, когда  $|p^2| \gg |k^2|$ . Это обусловлено тем, что в полной аналогии с массовым оператором подстановка в поляризационный оператор малых поправок к  $\Gamma_5$  приводит к интегралам, расходящимся после вычитания  $P_0(\mu^2)$  и  $(k^2 - \mu^2) P'_0(\mu^2)$  (« $b$ -расходимость» в поляризационном операторе, которая компенсируется множителем  $Z_1$  в (13)). Поэтому функцию  $s_1(p^2, k^2)$ , обращающуюся в нуль при равных нуклонных импульсах, можно не учитывать.

Следовательно,  $\Gamma_5(p, p + k; k)$  нужно подставлять в (13) в следующем виде:

$$\Gamma_5(p, p + k; k) = \gamma_5 \left[ s_0 + \frac{k^2}{p^2 + k^2} s_2(k^2, p^2) \right], \quad (35)$$

где  $s_2(k^2, p^2)$  — медленно меняющаяся функция своих аргументов. Можно показать, что в  $\Gamma_5(p, p + k; k)$  не нужно учитывать малых

поправок вида  $(\hat{k}\hat{p}(kp)/p^4)s_3$ . Действительно, рассматривая неоднородный член в уравнении для  $s_3$ , т. е. выражение, получающееся при подстановке в правую часть уравнения (9)  $\gamma_5 s_0$  вместо  $\Gamma_5$ , можно убедиться, что при множителе  $\hat{k}\hat{p}(kp)/p^4$  не возникает  $\ln p^2/k^2$  при  $|p^2| \gg |k^2|$ . Это и означает, что добавки такого вида в  $\Gamma_5$  не следует учитывать.

Составим уравнение для  $s_2(k^2, p^2)$  при  $|p^2| \gg |k^2|$ . Запишем  $M_1(p, p+k; k)$  с явным указанием всех импульсов

$$M_1(p, p+k; k) = -\frac{g^2}{4\pi^3 i} \int \Gamma_5(p, p-q; -q) G(p-q) \times \\ \times \Gamma_5(p-q, p-q+k; k) G(p-q+k) \Gamma_5(p-q+k, p+k; q) \times \\ \times D(q^2) d^4 q. \quad (36)$$

Функция  $s_2(k^2, p^2)$  равна нулю (с логарифмической точностью), если импульс мезона  $|k^2|$  — того же порядка, что и импульс нуклона  $|p^2|$  (это подсказывается теорией возмущений и оправдывается дальнейшими результатами). Отсюда следует, что в (36) функцию  $s_2$  нужно оставить только в средней из трех  $\Gamma_5$ , а в двух крайних положить  $\Gamma_5 = \gamma_5 s_0$ . Сделаем замену переменных  $p-q = q'$  в (36). Быстро меняющиеся множители в функциях  $G, D$  будут равны

$$(\hat{p} - \hat{q})^{-1} (\hat{p} - \hat{q} + \hat{k})^{-1} q^{-2} = \left[ 1 + \frac{\hat{q}'\hat{k}}{q'^2} \right] \frac{1}{(q'+k)^2 (p+q')^2}. \quad (37)$$

Учитывая, что  $|k^2| \ll |q'^2| \ll |p^2|$ , легко установить аргументы всех медленно меняющихся функций:

$$M_1(p, p+k; k) = \frac{g^2}{4\pi^3 i} \gamma_5 \int \left[ 1 + \frac{\hat{q}'\hat{k}}{q'^2} \right] \frac{d^4 q'}{(q'+k)^2 (p+q')^2} \times \\ \times s_0^2(p^2) F^2(q'^2) \varphi(p^2) \left[ s_0(q'^2) + \frac{k^2}{q'^2} s_2(k^2, q'^2) \right]. \quad (38)$$

В неоднородном члене уравнения для  $s_2$  (т. е. содержащем  $s_0(q'^2)$ ) только второй член в квадратных скобках (37) может дать вклад, пропорциональный  $\frac{k^2}{p^2} \ln \frac{p^2}{k^2}$ . Напротив, в члене, пропорциональном  $s_2$ , в (38) следует сохранить только первый член в скобках (37). Таким образом, мы получим следующее уравнение для функции  $s_2$ :

$$\frac{k^2}{p^2} s_2(k^2, p^2) = \frac{g^2}{4\pi^3 i} \int \frac{d^4 q'}{(q'+k)^2 (p+q')^2} s_0^2(p^2) F^2(q'^2) \varphi(p^2) \times \\ \times \left[ \frac{\hat{q}'\hat{k}}{q'^2} s_0(q'^2) + \frac{k^2}{q'^2} s_2(k^2, q'^2) \right], \quad (39)$$

причем пределы интегрирования должны быть взяты от  $|q'| \sim$

$\sim |k|$  до  $|q'| \sim |p|$ . Переходя к евклидовой метрике и интегрируя по углам, получаем следующее одномерное уравнение для  $s_2$ :

$$s_2(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{2} s_0^2(\eta) \varphi(\eta) \int_{\xi}^{\eta} [s_0(z) - 2s_2(\xi, z)] F^2(z) dz, \quad (40)$$

где  $\xi = \ln(-k^2/m^2)$ ,  $\eta = \ln(-p^2/m^2)$ . Решение (40) производится аналогично решению уравнения (30) для  $s_1$ . Положим

$$p(\xi, \eta) = \frac{s_2(\xi, \eta)}{s_0^2(\eta) \varphi(\eta)}. \quad (41)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [s_0(\eta) p(\xi, \eta)] = -\frac{\lambda}{2} s_0^2(\eta) F^2(\eta) \quad (42)$$

и

$$s_0(\eta) p(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{2} \int_{\xi}^{\eta} s_0^2(z) F^2(z) dz. \quad (43)$$

Отсюда

$$s_2(\xi, \eta) = -\frac{\lambda}{2} s_0(\eta) \varphi(\eta) \int_{\xi}^{\eta} s_0^2(z) F^2(z) dz. \quad (44)$$

Из (44) видно, что  $s_2(k^2, p^2)$  обращается в нуль при  $|k^2| \sim \sim |p^2|$ . Кроме того, легко проверить, что после подстановки  $s_2$  в поляризационный оператор получается расходящееся выражение даже после вычитания величин  $P_0(\mu^2)$  и  $(k^2 - \mu^2) P_0'(\mu^2)$ .

Сведем, наконец, уравнение для функции Грина мезона к одномерному виду. Здесь будет иметь место полная аналогия с составлением одномерного уравнения для функции Грина нулона.

Если вместо  $\Gamma_5(p, p+k; k)$  в (13) взять  $\gamma_5 s_0$ , то получившиеся интегралы благодаря перенормировке (вычитанию величин  $P_0(\mu^2)$  и  $(k^2 - \mu^2) P_0'(\mu^2)$ ) будут сходиться при  $|p^2| \sim |k^2|$ . При этом членами  $P_0(k^2)$  и  $P_0(\mu^2)$  можно будет пренебречь на тех же основаниях, что и в уравнении для  $G(p)$ . Оставшийся член  $-(k^2 - \mu^2) P_0'(\mu^2)$  — сводится к одномерному интегралу неоднократно использованном нами способом и дает

$$-(k^2 - \mu^2) P_0^{(0)'}(\mu^2) = 4\lambda Z_1 k^2 \int_0^{\xi} s_0(z) F^2(z) dz. \quad (45)$$

В интеграле, получаемом подстановкой  $\gamma_5(k^2/p^2) s_2(k^2, p^2)$  вместо  $\Gamma_5(p, p+k; k)$ , играют роль импульсы  $|p^2| \gg |k^2|$ .

Действуя совершенно так же, как при выводе уравнения для  $G(p)$ , получаем

$$P_0^{(1)}(k^2) - (k^2 - \mu^2) P_0^{(1)'}(\mu^2) = -8\lambda Z_1 k^2 \int_{\xi}^{\infty} F^2(z) s_2(\xi, z) dz + \\ + 8\lambda Z_1 k^2 \int_0^{\infty} F^2(z) s_2(0, z) dz. \quad (46)$$

Собирая вместе (12), (13), (45), (46), получаем одномерное интегральное уравнение для функции Грина мезона

$$1 + 4\lambda Z_1 \int_{\xi}^{\infty} F^2(z) [s_0(z) - 2s_2(\xi, z)] dz - 4\lambda Z_1 \int_0^{\infty} F^2(z) [s_0(z) - \\ - 2s_2(0, z)] dz = \frac{1}{\varphi(\xi)}. \quad (47)$$

#### 4. Асимптотика функций Грина нуклона и мезона

Решим систему уравнений (23), (35), (30), (40), (47). Перепишем при помощи (30) и (31) уравнение (23) так:

$$\frac{1}{F(\xi)} = 1 + 3Z_1 q(\xi, \infty) - 3Z_1 q(0, \infty), \quad (48)$$

а уравнение (47) при помощи (40) и (41) так:

$$\frac{1}{\varphi(\xi)} = 1 - 8Z_1 p(\xi, \infty) + 8Z_1 p(0, \infty). \quad (49)$$

Дифференцируя (48) и (49) по  $\xi$  и используя (33), (43) и (26), находим:

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{F(\xi)} = 3Z_1 \frac{\partial q(\xi, \infty)}{\partial \xi} = -\frac{3}{2} \lambda s_0^2(\xi) F(\xi) \varphi(\xi), \quad (50)$$

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\varphi(\xi)} = -8Z_1 \frac{\partial p(\xi, \infty)}{\partial \xi} = -4\lambda s_0^2(\xi) F^2(\xi), \quad (51)$$

тогда как дифференцирование (25) дает

$$\frac{ds_0(\xi)}{d\xi} = -\lambda s_0^3(\xi) F^2(\xi) \varphi(\xi). \quad (52)$$

Начальные условия к дифференциальным уравнениям (50) — (52) следуют из интегральных уравнений (23), (25) и (47)

$$F(0) = s_0(0) = \varphi(0) = 1. \quad (53)$$

Уравнения (50) — (52) легко решаются. Решение, соответствующее начальным условиям (53), имеет вид:

$$F(\xi) = (1 - 5\lambda\xi)^{-3/10}, \\ s_0(\xi) = (1 - 5\lambda\xi)^{1/5}, \\ \varphi(\xi) = (1 - 5\lambda\xi)^{-1/5}. \quad (54)$$

Подстановка полученных решений (54) в интегральные уравнения показывает, что интегральные уравнения удовлетворяются, если при интегрировании обходить особенность, считая, что

$$\xi = \ln \left( -\frac{p^2}{m^2(1-i\epsilon)} \right) = \ln \left( -\frac{p^2}{m^2} \right) + i\epsilon,$$

где  $\epsilon > 0$ .

При малых  $\lambda\xi$  можно разложить (54) в ряд по  $\lambda\xi$ . Результат непосредственного вычисления асимптотики  $G$ ,  $\Gamma_5$ ,  $D$  по теории возмущений, как и следовало ожидать, оказался совпадающим с разложением (54) в ряд (проверка проводилась до второго порядка включительно). Отметим, что при решении интегральных уравнений множитель  $Z_1$  сократился, и сами решения (54) оказались конечными и свободными от какого-либо произвола.

Решения (54) для функций Грина нуклона и мезона имеют полюс<sup>1</sup> в точке  $\ln(-p^2/m^2) = 1/5\lambda$ . Физически наличие такого полюса означало бы появление бессмысленных решений, ибо масса  $\kappa$ , соответствующая такому полюсу, должна была бы быть чисто мнимой (чтобы при  $p^2 = \kappa^2$  было возможно равенство  $\ln(-\kappa^2/m^2) = 1/5\lambda$ ). Бессмысленность полученного решения вблизи полюса или за ним можно усмотреть также и с другой точки зрения. Экспериментальный заряд  $g$  связан с фиктивным зарядом  $g_0$  соотношением  $g_0^2 = Z_1^2 Z_2^{-2} Z_3^{-1} g^2$ . Ясно, что как экспериментальный заряд  $g$ , так и фиктивный заряд  $g_0$  должны быть действительными величинами (последнее следует из требования эрмитовости гамилтониана взаимодействия). Следовательно, произведение  $Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}$  должно быть действительным и положительным. Но, подсчитывая его при помощи решения (54), формул (5) и (55), можно убедиться, что  $Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}$  комплексно, если решения (54) считать верными вблизи и за полюсом.

Таким образом, мы приходим к противоречию, выход из которого заключается в том, что решения (54) верны лишь в области до полюса. Действительно, рассматривая отброшенные нами перекрывающиеся диаграммы, например изображенную на рис. 3, можно увидеть, что отношение вклада от нее к вкладу от учтенных нами диаграмм будет порядка

$$\frac{\lambda}{(1-5\lambda\xi)^\alpha},$$

где  $\alpha$  — какое-то положительное дробное число. Поэтому вблизи полюса при  $1-5\lambda\xi \lesssim \lambda$  вклад от перекрывающихся диаграмм уже

<sup>1</sup> В нейтральной псевдоскалярной теории решения имеют следующий вид:

$$F(\xi) = (1-5\lambda\xi)^{-1/10},$$

$$s_0(\xi) = (1-5\lambda\xi)^{-1/5},$$

$$\varphi(\xi) = (1-5\lambda\xi)^{-2/5}.$$

Полюс появляется и в этом варианте теории.<sup>1</sup>Его наличие обусловлено, по-видимому, какими-то общими причинами.



не будет малым, и наши решения теряют смысл. Физически это соответствует тому, что на малых расстояниях взаимодействие с малой константой связи (слабое взаимодействие на обычных расстояниях) становится сильным. Таким образом, для построения асимптотики функций Грина при столь больших импульсах необходимо учитывать значительно большее число диаграмм, чем это мы сделали, опустив все перекрывающиеся диаграммы.

Более точное определение границы применимости полученных формул в области больших импульсов требует дополнительного анализа, поскольку при  $1 - 5\lambda\xi \sim \lambda$  в разложениях (54) по степеням  $(\lambda\xi)^n$  оказываются существенными члены  $n \sim \lambda^{-1}$ , т. е. лежащие в области, где асимптотический ряд теории возмущений начинает уже расходиться. То обстоятельство, что метод перенормировок, рассмотренный в работе [2], привел в данной задаче к исключению бесконечностей, позволяет надеяться, что его можно будет применить и при решении более сложных задач.

В заключение авторы выражают признательность академику Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосову и И. М. Халатникову за предоставление возможности ознакомления с рукописью работы [1] до опубликования и полезные обсуждения.

Академия наук СССР

Получено 13 мая 1954 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497, 773, 1177; 96, 261.
2. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1954, 98, 361 (Собр. трудов, № 57).
3. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., Гостехиздат, 1953, стр. 210.
4. А. Д. Галанин. ЖЭТФ, 1954, 27, 417.
5. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.
6. F. J. Dyson. Phys. Rev., 1949, 75, 1736.
7. A. Salam. Phys. Rev., 1951, 82, 217.

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ УОРДА НА СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ ДЛИН ВОЛН СВЕТА У ЧАСТИЦ СО СПИНОМ НУЛЬ\*

Теорема Уорда [1] устанавливает связь между вершинной частью, относящейся к бесконечно большому длине волн, и функцией Грина соответствующего заряда:

$$\Gamma_{\mu}(p, p, 0) = \frac{\partial G_F^{-1}(p)}{\partial p_{\mu}}. \quad (1)$$

Волновой вектор электромагнитного поля  $k_{\mu}$  в этом соотношении имеет все проекции, равные нулю.

Оказывается, что в случае заряженных частиц со спином нуль можно установить связь между функцией  $G_F$  и вершинной частью, отвечающей взаимодействию с полем произвольной длины волны, но удовлетворяющим условию

$$k^2 = 0, \quad k_{\mu} \neq 0 \quad (2)$$

(т. е. с полем светового кванта произвольной длины волны). Возможность такого соотношения обязана следующим соображениям. Условие градиентной инвариантности приводит к замене  $p$  на  $p - A$  в выражении для функции Грина. Производя разложение  $G_F(p - A)$  по степеням  $A$  и беря линейный член по  $A$ , мы получим в случае частиц со спином, не равным нулю, не все выражение для  $\Gamma(p, p - k, k)$ , так как не будут должным образом учтены члены, обязанные спиновому магнитному моменту (или более высоким моментам в случае частиц со спином  $> 1/2$ ). Если спин равен нулю, то такие члены отсутствуют. Однако даже в случае спина нуль замена  $p$  на  $p - A$  в  $G_F$  не может дать всю вершинную часть, так как в нее может входить член, пропорциональный внешнему току  $j_{\mu} = k^2 A_{\mu}$ . Если  $k^2 = 0$ , то и такие члены будут отсутствовать. Таким образом,  $\Gamma(p, p - k, k)$  может быть получено из  $G_F(p - A)$  только при указанных выше условиях.

Используем выражение для  $G_F$ , данное Леманом [2]:

$$G_F(x - x') = \int_0^{\infty} \rho(\kappa^2) d\kappa^2 G_F^0(x - x', \kappa^2) = \int_0^{\infty} \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \times \\ \times \frac{1}{p^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \delta(x - x'), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad p_{\mu} = -i\partial_{\mu}. \quad (3)$$

\* Докл. АН СССР, 1955, 100, 41.

Здесь  $G_F^0(x - x', \kappa^2)$  — функция Грина частицы массы  $\kappa$ , не взаимодействующей с полем [3]. С точностью до линейных членов <sup>1</sup> во внешнем поле (3) дает (с учетом условия  $\partial_\mu A_\mu = 0$ )

$$G_F(x, x', A) = \int_0^\infty \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \frac{1}{(p - A)^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \delta(x - x') = \\ = G_F(x - x') + \int_0^\infty \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \frac{1}{p^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} 2(Ap) \frac{1}{p^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \delta(x - x'). \quad (4)$$

Разлагая  $\delta(x - x')$  в ряд Фурье, находим, подставляя  $A_\mu$  в виде  $a_\mu e^{ikx}$ :

$$G_{1F}(x, x') = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \int \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \frac{1}{(q + k)^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} 2(aq) \frac{1}{q^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \times \\ \times \exp[iq(x - x') + ikx] = \int \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{\exp[iq(x - x') + ikx] 2(aq)}{(q + k)^2 - q^2} \times \\ \times \left[ \frac{1}{q^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(q + k)^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \right]. \quad (5)$$

Беря фурье-компоненту от (5), получаем в соответствии с (3)

$$G_{1F}(p + k, p, k) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \rho(\kappa^2) d\kappa^2 \left[ \frac{1}{p^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{(p + k)^2 - \kappa^2 + i\varepsilon} \right] \times \\ \times \frac{2(ap)}{(p + k)^2 - p^2} = \frac{2(ap)}{-p^2 + (p + k)^2} [G_F(p) - G_F(p + k)] \quad (6)$$

(здесь уже  $p$  не дифференциальный оператор, а число). С другой стороны [4],  $G_{1F}$  определяется вершинной частью следующим образом:

$$G_{1F}(p + k, p, k) = -G_F(p + k) \Gamma_\mu(p + k, p, k) a_\mu G_F(p), \quad (7)$$

поэтому  $\Gamma$  согласно (6) и (7) равно

$$\Gamma_\mu(p + k, p, k) = \frac{2p_\mu}{(p + k)^2 - p^2} \left[ \frac{1}{G_F(p + k)} - \frac{1}{G_F(p)} \right]. \quad (8)$$

Если  $k_\mu \rightarrow 0$ , то из (8) следует обычная теорема Уорда [1].

Академия наук СССР

Получено 9 октября 1954 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ward. Phys. Rev., 1950, 78, 182.
2. H. Lehmann. Nuovo Cimento, 1954, 11, 342.
3. Р. Фейнман. Сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики». М., ИЛ, 1954, стр. 152.
4. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1954, 98, 361 (Собр. трудов, № 57).

<sup>1</sup> В нелинейных членах могут быть выражения типа  $F_{\mu\nu}^2$ , поэтому замена  $p$  на  $p - A$  ограничена линейными членами.

## О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ\*

*Совместно с Л. Д. Ландау*

В основе квантовой электродинамики лежит идея о точечном взаимодействии между квантами и электронами. Как известно, при таком взаимодействии непосредственное вычисление приводит к бесконечностям. В последние годы была создана релятивистски-инвариантная теория возмущений [1] и показано, что на ее основе можно разработать однозначную процедуру, приводящую к конечным выражениям для тех эффектов, для которых раньше получались бесконечности. Иной подход к решению уравнений квантовой электродинамики был развит в [2]. Он исходит из рассмотрения точечного взаимодействия как предела некоторого «размазанного» взаимодействия с конечным радиусом, когда этот радиус уменьшается до нуля. При этом константа  $e_1$ , стоящая в виде множителя при взаимодействии, является функцией радиуса «размазывания»  $1/\Lambda$ . С ростом  $\Lambda$  (приближение к центру частицы)  $e_1$  растет. Это связано с очевидным свойством поляризации вакуума уменьшать всякий заряд, «внесенный» в вакуум (см. также [3]).

Пока  $e_1^2 \ll 1$ , связь между  $e_1$  и перенормированным зарядом  $e$  осуществляется при помощи  $D$ -функции, найденной в [2]. Фурье-компонента этой функции равна

$$D(k^2) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}}. \quad (1)$$

Здесь  $\nu$  — эффективное число различных слабо взаимодействующих частиц в природе (подробнее по этому поводу см. [2]). Формула (1) справедлива, когда  $k^2 \gg m^2$  ( $m$  — масса электрона). Если же  $k^2 \ll m^2$ , то в (1)  $k^2$  нужно заменить на  $m^2$ .

Связь между  $e_1^2$  и  $e^2$ , как известно, получается из соотношения

$$e^2 = e_1^2 \lim_{k^2 \rightarrow 0} k^2 D(k^2) = \frac{e_1^2}{1 + \frac{\nu e_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}. \quad (2)$$

\* Докл. АН СССР, 1955, 102, 489.

Выражения (1) и (2) переходят в более простые:

$$D(k^2) = \frac{3\pi}{ve_1^2} \frac{1}{\ln \frac{\Lambda}{k^2}} \frac{1}{k^2}, \quad (3)$$

$$e^2 = \frac{3\pi}{v} \frac{1}{\ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \quad (4)$$

когда выполнено условие

$$\frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda}{k^2} \gg 1. \quad (5)$$

При  $e_1^2$ , не очень малых по сравнению с единицей, это условие удовлетворяется уже для таких  $k^2$ , которые не исчезающе малы по сравнению с  $\Lambda^2$ .

Обратная пропорциональность  $D$ -функции  $e_1^2$  указывает на возможность пренебречь в лагранжиане системы электронов и квантов действием свободного электромагнитного поля<sup>1</sup>.

В самом деле, во взаимодействие поля с электронами входит  $e_1 A$ , а в свободное поле само  $A$ . Если отбрасывается действие свободного поля, то среднее значение по физическому вакууму от

$$\langle T A(X) A(Y) \rangle \quad (6)$$

должно быть обратно пропорционально  $e_1^2$ . С другой стороны, (6) лишь несущественным множителем отличается от  $D$ -функции, которая таким образом оказывается обратно пропорциональной  $e_1^2$ . Именно этот результат и зафиксирован в (3).

Если лагранжиан свободного поля перестает играть существенную роль уже при  $e_1^2 \ll 1$ , то представляется естественным думать, что при дальнейшем возрастании  $e_1^2$  роль свободного поля будет еще меньше. Поэтому  $D$ -функция должна быть обратно пропорциональна  $e_1^2$  и при  $e_1^2 > 1$ . Отсюда следует, что  $e_1^2 D$  не зависит от  $e_1^2$  и поэтому всегда имеет вид

$$e_1^2 D = \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda^2}{k^2}} \frac{1}{k^2} \quad (7)$$

(если только  $k^2$  не очень близко к  $\Lambda^2$ ). Выражения (2) и (7) приводят к следующей связи  $e_1^2$  и  $e^2$ :

$$e^2 = \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \rightarrow 0, \quad \Lambda^2 \rightarrow \infty. \quad (8)$$

<sup>1</sup> При этом подразумевается, что  $k^2$  не очень близко к  $\Lambda^2$ .

Обращение  $e$  в нуль может быть пояснено следующим образом. Пусть в сфере радиуса  $1/\Lambda$  находится сколь угодно большой заряд  $e_1(\Lambda)$ . Тогда на расстоянии  $1/k$ , всего лишь в несколько раз больше, чем  $1/\Lambda$ , будет заряд  $\sqrt{e_1^2 k^2 D(k^2)} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{\Lambda^2} \frac{1}{v \ln \frac{1}{k^2}}}$ , равный по по-

рядку величины единице. Это означает, что «внесенный» заряд  $e_1$ , имеющий протяжение  $1/\Lambda$ , окружается плотным облаком размера-ми также порядка  $1/\Lambda$ , образованным поляризованными зарядами, в результате чего полный заряд внутри радиуса  $2/\Lambda$  будет порядка единицы. (Ситуация здесь напоминает ту, которая осуществляется вблизи кулонова центра с зарядом, большим, чем  $\sqrt{137}$ .)

Быстрое падение  $e_1^2$  до единицы фактически означает отсутствие широкой области сильного взаимодействия в электродинамике, обсуждаемой в [2]. Только существование этой области могло бы сделать  $e^2 \neq 0$ .

Мы приходим к фундаментальному выводу, что из формальной квантовой электродинамики, по-видимому, следует равенство нулю заряда электрона. Оговорка «по-видимому» относится к некоторой нестрогости изложенной выше аргументации.

Полученный нами результат указывает на логическую незамкнутость квантовой электродинамики. Следует подчеркнуть при этом, что указываемая здесь несостоятельность теории вызвана непосредственно не бесконечностями (что считалось последние 25 лет), а обращением физического взаимодействия в нуль.

Физические следствия из внутренних противоречий квантовой электродинамики могут быть различными.

Энергии  $\Lambda_0$ , при которых

$$e^2 \approx \frac{3\pi}{v \ln \frac{\Lambda_0^2}{m^2}}, \quad (8a)$$

во всяком случае очень велики. При этих энергиях эффекты гравитационного взаимодействия могут превышать электромагнитные. Соблазнительна идея, что «кризис» электродинамики происходит именно при тех энергиях, при которых гравитационное взаимодействие сравнивается с электромагнитным. Поскольку эффективный заряд в критической зоне порядка единицы, это соответствует

$$\kappa \Lambda_0^3 \sim 1, \quad (9)$$

где  $\kappa$  — гравитационная постоянная; (8a) и (9) дают для  $v$  значение  $v \approx 12$ . При такой точке зрения величина физического заряда  $e$  автоматически определялась бы из теории. Если  $v < 12$ , гравита-

ционные эффекты наступят значительно раньше, чем эффективный заряд станет порядка единицы. Напротив, при  $v > 12$  гравитационные эффекты не «спасут» электродинамики, так как они наступят слишком поздно.

Вывод о том, что  $e = 0$ , был нами получен из рассмотрения только чисто электромагнитных взаимодействий. Не исключена возможность того, что учет неэлектромагнитных взаимодействий частиц (типа  $\mu - e$ -распада<sup>1</sup> и др.) может сильно изменить свойства электродинамики при больших энергиях, что соответственно отразится на перенормировке заряда.

Изложенный выше способ рассмотрения вопроса о перенормировке заряда не переносится непосредственно на мезонную теорию [4]. Если, однако, обращение  $e$  в нуль есть отражение общих свойств всякого точечного взаимодействия, то современная мезонная теория окажется полностью несостоятельной. При этом надо иметь в виду, что из-за большого значения  $g^2$  роль гравитации в мезонной области совершенно ничтожна. По той же причине в мезонных теориях нет области применимости теории возмущений.

В электродинамике такая область заведомо есть ввиду малости  $e^2$ , и ее свойства не могут серьезно измениться при любом изменении электродинамики в области больших энергий.

Исправление существующих теорий в том случае, если из теории следует, что  $g$  наряду с  $e$  также равно нулю, потребовало бы введения совершенно новых физических представлений. Такие представления должны были бы дать возможность отразить в теории свойства протяженных элементарных частиц. Это означает, что в физику была бы введена новая универсальная длина, которая автоматически ограничивала бы  $\Lambda$  сверху. Существование новой длины должно было бы проявиться не только в мезонной области, но и в чисто электромагнитных процессах. Не исключена поэтому возможность того, что все электромагнитные процессы, сопровождаемые большими передачами импульса, происходят совсем иначе, чем предсказывает современная теория. Эти отклонения могут наступить в таких условиях, когда передаваемый импульс в системе центра инерции порядка нескольких сотен мегаэлектрон-вольт, если новая длина  $\leq 10^{-13}$  см. Таким образом, эксперимент типа комптон-эффекта при энергиях порядка  $(2-5) \cdot 10^{10}$  эв мог бы явиться решающим для современной теории поля. Аналогичную роль могут играть такие явления, как аннигиляция позитронов очень большой энергии ( $10^{10}-10^{11}$  эв), рассеяние на большие углы электронов электронами той же области энергий и другие эффекты при тех же условиях. Важные сведения для теории могут дать эксперименты, сделанные при меньших энергиях, но зато с большой точностью.

---

<sup>1</sup> На возможную роль этого взаимодействия обратил наше внимание Я. Б. Зельдович.

Надо, однако, подчеркнуть, что обычное тормозное излучение или образование пар  $\gamma$ -квантами даже в области сверхбольших энергий не может пролить свет на область применимости электродинамики. Дело в том, что, как хорошо известно [5], тормозное излучение обязано в системе покоя электрона его взаимодействию с мягкими квантами ( $\omega \sim m$ ) совершенно независимо от того, чему равна начальная энергия частицы в лабораторной системе. Такого же типа соображения относятся и к явлению образования пар.

Академия наук СССР

Получено 2 марта 1955 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. Фейнман. В сб.: Новейшее развитие квантовой электродинамики. М., ИЛ, 1954, стр. 138—205; Ю. Швингер. Там же, стр. 12—108; Ф. Дайсон. Там же, стр. 205—238; Phys. Rev., 1949, 75, 486; A. Salam. Phys. Rev., 1951, 82, 217.
2. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497; 95, 773; 95, 1177; 96, 261.
3. H. Lehmann. Nuovo Cimento, 1954, 11, 342.
4. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.
5. С. F. Weizsacker. Zs. f. Phys., 1934, 88, 612.



## РАВЕНСТВО НУЛЮ ПЕРЕНОРМИРОВАННОГО ЗАРЯДА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ\*

В недавно опубликованных работах Ландау, Абрикосова и Халатникова [1] было найдено решение уравнений квантовой электродинамики, которые определяют гринаовские функции электрона  $G$  и фотона  $D$  и соответствующие их электромагнитному взаимодействию вершинные части  $\Gamma_\mu$ . В эти уравнения входит неперенормированный заряд  $e_1$ , являющийся функцией радиуса (фиктивного) размазывания частиц  $\Lambda^{-1}$ . Такое размазывание при  $\Lambda \rightarrow \infty$  является воплощением точечного взаимодействия как предела «размазанного», когда радиус этого «размазанного» взаимодействия обращается в нуль. С ростом  $\Lambda$   $e_1$  растет [2] в силу свойства поляризации вакуума уменьшать всякий «внешний» заряд, внесенный в вакуум. (Зависимость  $e_1$  от  $\Lambda$  отражает, грубо говоря, зависимость эффективного заряда электрона от расстояния до центра электрона.) Решения уравнений квантовой электродинамики, найденные в [1], применимы, согласно оценкам, сделанным в [1], только при таких условиях, когда  $e_1^2 \ll 1$ . Это ограничение не дает возможности исследовать свойства квантовой электродинамики при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , так как при этом не исключено обращение  $e_1$  в бесконечность. В [1] использовалось простейшее «размазывание» с одним параметром  $\Lambda^{-1}$  в координатном пространстве ( $\Lambda$  в импульсном пространстве). Более общий тип «размазывания» был рассмотрен Абрикосовым и Халатниковым [3], которые ввели точечное взаимодействие  $e_1 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x)$  как предел «размазанного»:

$$e_1 \int F(x-y, x-z) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(y) A_\mu(z) dy dz, \quad (1)$$

в котором «ширина» распределения по  $y$  и  $z$  различна. Как они показали, радиус «размазывания» по  $A$  (по  $z$ )  $\Lambda_k^{-1}$  всегда больше, чем радиус  $\Lambda_p^{-1}$  (по  $y$ ), на который «смещается»  $\psi(y)$  относительно  $\bar{\psi}(x)$ :  $\Lambda_p > \Lambda_k$ .

Используя двухпредельное «размазывание», Абрикосов и Халатников получили решение уравнений квантовой электродинамики, причем после перенормировок их результаты совпадают с [1], так как перенормированные величины не содержат никаких

\* Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005.

параметров «размазывания». Решения, найденные ими, имеют следующий вид, когда  $d_l = 0$  [1]:

$$D_{\mu\nu}(k^2) = k^{-2} \left[ 1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 k^{-2} \right]^{-1} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

$$\Lambda_k^2 \gg k^2 \gg m^2;$$

$$G(p) = \hat{p}^{-1}, \quad p^2 \gg m^2, \quad \Gamma_\mu = \gamma_\mu. \quad (2)$$

Если  $k^2 > \Lambda_k^2$ , то  $D = k^{-2}$ .

Связь между перенормированным зарядом  $e$  и  $e_1$ , полученная в [3], имеет следующий вид:

$$e^2 = e_1^2 \left[ 1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 m^{-2} \right]^{-1}. \quad (3)$$

При  $k^2 = \Lambda_k^2$   $D$ -функция меняется скачкообразно от значения, равного  $\Lambda_k^{-2} \left[ 1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \right]^{-1}$ , до  $\Lambda_k^{-2}$ . При больших значениях  $(3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}$  этот скачок  $D$ -функции может быть большим. Однако в дальнейшем мы покажем, что «резкость» выключения взаимодействия и вызванное этой «резкостью» скачкообразное изменение  $D$ -функции не является существенным обстоятельством. «Обрезающий» фактор может иметь любую форму, совместимую с требованием калибровочной инвариантности. Такой фактор вводится заменой  $\gamma_\mu$  на  $\gamma_\mu \Phi [p^2 \Lambda_p^{-2}; (p-k)^2 \Lambda_p^{-2}; k^2 \Lambda_k^{-2}]$ . Функцию  $\Phi$  можно считать равной без ограничений необходимой общности произведению двух функций:

$$\Phi = f(k^2 \Lambda_k^{-2}) g [p^2 \Lambda_p^{-2}, (p-k)^2 \Lambda_p^{-2}]. \quad (4)$$

С учетом функции  $\Phi$   $D$ -функция и  $\Gamma_\mu$  приобретают следующий вид:

$$D_{\mu\nu} = k^{-2} \left[ 1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 f^2(k^2 \Lambda_k^{-2}) \ln \Lambda_p^2 k^{-2} \right]^{-1} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (5)$$

$$\Gamma_\mu(p, p-k; k) = \gamma_\mu \Phi [p^2 \Lambda_p^{-2}; (p-k)^2 \Lambda_p^{-2}; k^2 \Lambda_k^{-2}].$$

$\Phi(x, y, z) \rightarrow 1$  при  $x \ll 1, y \ll 1, z \ll 1$ ;  $\Phi \rightarrow 0$  при  $x \gg 1, y \gg 1$  или  $z \gg 1$ . Когда  $\Lambda_p = \Lambda_k = \Lambda$ , (2) – (5) переходят в формулы, полученные в [1]. Рассмотрим теперь случай, когда  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  удовлетворяют неравенству<sup>1</sup>

$$\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1. \quad (6)$$

Опираясь на это неравенство, можно показать, что формулы (2), (5) справедливы при любых  $e_1^2$ , как малых, так и больших. Для доказательства этого утверждения рассмотрим те члены в уравнениях, определяющих  $G, D, \Gamma$ , которые считались малыми в работе Ландау, Абрикосова и Халатникова. Используемые ими уравнения Дайсона – Швингера, определяющие  $G$  и  $D$ , являются точными. В отличие от этого  $\Gamma$  определялось из приближенного

<sup>1</sup> На важность этого неравенства обратил внимание Л. Д. Ландау.

«треугольного» уравнения, имеющего вид (в символической форме) (в вершинах полные  $\Gamma$ ):

$$\Gamma_{\mu} = \gamma_{\mu} + e_i^2 \quad (7)$$

$$\Gamma_n = e_i^{2n} \quad (8)$$

В (7) не учитываются все перекрывающиеся диаграммы и эффекты, связанные с рассеянием света светом. Рассмотрим произвольную  $n$ -кратно перекрывающуюся диаграмму (8), дающую вклад в  $\Gamma$ . Здесь имеется  $2n$  функций  $G$ ,  $n$  функций  $D$ ,  $2n$  функций  $\Gamma$ . В этой диаграмме содержится  $n$  4-кратных интегралов по  $k_1, \dots, k_n$ . Как известно, все интегрирования, кроме одного, не дают логарифмических расходимостей<sup>1</sup>. Поэтому в логарифмической шкале мы имеем только однократное интегрирование. Пусть импульсы  $p, p - k, k$  одного порядка и удовлетворяют неравенству

$$p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2 \ll \Lambda_k^2. \quad (9)$$

(Аналогично [1] можно считать все эти импульсы пространственно-подобными.) Подставляя в интеграл вместо  $G, D, \Gamma$  их значения (5), получаем

$$\Gamma_n \sim e_1^{2n} \int_{p^2} [f(q^2 \Lambda_k^{-2})]^{2n} [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 f^2(q^2 \Lambda_k^{-2}) \ln \Lambda_p^2 q^{-2}]^{-n} \frac{dq^2}{q^2}. \quad (10)$$

Подчеркнем, что здесь верхний предел определяется  $\Lambda_k^2$ , а не  $\Lambda_p^2$  ( $\Lambda_p$  появляется только при интегрировании по  $p$ ). Воспользуемся теперь условием  $(3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 q^{-2} \gg 1$ , которое в интересующем нас случае  $e_1^2 \gg 1$  является следствием из (6). Тогда функция  $f$  выпадает из (10), но интегрирование по  $q^2$  ограничено условием<sup>2</sup>  $q^2 < \Lambda_k^2$ . Так как неравенство (6) обеспечивает медленную (логарифмическую) зависимость всех функций от  $q^2$ , то замена верхнего предела интегрирования на  $\Lambda^2$  не вносит серьезных погрешностей. Выпадение функций  $f$  в остальных графиках аналогично показанному выше примеру. Независимость результатов от вида  $f$  означает возможность произвольного вида обрезания<sup>3</sup>. Краткости ради в дальнейшем мы не будем писать  $f$ -функций и заменять их на «резкое» обрезание интегралов.

$$\Gamma_n = C_{n-1} \{ e_1^2 [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1} \}^{n-1} - C_{n-1} \{ e_1^2 [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 p^{-2}]^{-1} \}^{n-1}, \quad (11)$$

где  $C_{n-1}$  — числовой множитель.

<sup>1</sup> Мы считаем здесь и в дальнейшем, что  $d_l = 0$ .

<sup>2</sup> При этом необходимо, чтобы функция  $f$  убывала с ростом  $q^2$  тем быстрее, чем больше  $e_1^2$ .

<sup>3</sup> Соображения о выпадении функции  $f$  принадлежат Л. Д. Ландау.

Так как  $p^2 \ll \Lambda_k^2$ , то второй член в (11) меньше первого и по порядку величины  $\Gamma_n$  равно

$$\Gamma_n \approx C_{n-1} \{e_1^2 [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}\}^{n-1}. \quad (12)$$

При очень малых  $e_1^2$  (12) переходит в соотношение  $\Gamma_n \approx C_{n-1} e_1^{2(n-1)}$ , дающее повод думать, что при  $e_1^2 \gtrsim 1$  вклад перекрывающихся диаграмм может стать большим. Однако если  $(3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg \gg 1$ , что при  $e_1^2 \gtrsim 1$  достигается уже при не слишком больших значениях  $\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}$ , то (12) дает следующее выражение для  $\Gamma_n$ :

$$\Gamma_n \approx C_{n-1} [\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-(n-1)} \ll 1. \quad (13)$$

Если вместо условия (9) векторы  $p, p - k, k$  удовлетворяют неравенству

$$k^2 \ll \Lambda_k^2 \ll p^2 \approx (p - k)^2 \ll \Lambda_p^2, \quad (14)$$

то для величины перекрывающихся диаграмм мы получим еще меньшее значение, чем согласно (13). В самом деле, в этом случае сплошные линии в (8) нужно заменить на  $\hat{p}^{-1}$  (все  $k_\alpha$  малы по сравнению с  $p$ ). От  $k_\alpha$  будут зависеть только «пунктирные» множители, каждый из которых равен  $k^{-2} [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 k^2]^{-1}$ . Учитывая, что сплошных линий  $2n$ , мы приходим к следующей оценке  $\Gamma_n$ , когда выполнено (14):

$$\begin{aligned} \Gamma_n &\sim e_1^{2n} p^{-2n} \int^{\Lambda_k^2} dk_1 \dots dk_n \prod_1^n k_x^{-2} [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 k_x^2]^{-1} \sim \\ &\sim \{e_1^2 \Lambda_k^2 p^{-2} [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}\}^n \leq \{\Lambda_k^2 p^{-2} v^{-1} [\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}\}^n \ll 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, вклад всех перекрывающихся диаграмм в  $\Gamma$  имеет вид  $\sum_1^\infty C_n \{3\pi v^{-1} [\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}\}^n$  и всегда мал независимо от величины  $e_1^2$ . Хотя этот ряд, по-видимому, асимптотический [4], а не сходящийся, тем не менее его сумма аппроксимируется первыми членами, когда они быстро падают с ростом  $n$ .

Пользуясь двухпредельной техникой, легко можно показать, что все диаграммы, содержащие рассеяние света светом, дают малый вклад в  $\Gamma$ , каково бы ни было значение  $e_1^2$ . Тот же вывод относится и к неперекрывающимся диаграммам, входящим в (7).

Таким образом, все отклонения  $\Gamma_\mu$  от  $\gamma_\mu$  малы независимо от того, чему равно значение  $e_1^2$ . В силу логарифмичности ситуации (все существенные величины зависят только от логарифмов переменных) из теоремы Уорда следует, что при  $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$  гриновская функция электрона  $G$  должна быть равна  $\hat{p}^{-1}$ . В этом можно также убедиться и непосредственно, производя вычисление любой диаграммы, входящей в массовый оператор, определяющий  $G$ .

При  $\Gamma = \gamma_\mu$  и  $G = \hat{p}^{-1} D$ -функция однозначно определяется из уравнения Швингера — Дайсона в виде (2). Полученные выше результаты означают применимость формулы (3) при любых  $\Lambda_p, \Lambda_k$ , удовлетворяющих условию (6). Это обстоятельство приводит к фундаментальному выводу о том, что перенормированный заряд  $e$  оказывается равным нулю в соответствии с (3):

$$e^2 = e_1^2 [1 + (3\pi)^{-1} v e_1^2 \ln \Lambda_p^2 m^{-2}]^{-1} \rightarrow 3\pi v^{-1} [\ln \Lambda_p^2 m^{-2}]^{-1} \rightarrow 0, \quad \Lambda_p \rightarrow \infty.$$

Этот результат подтверждает вывод о том, что  $e^2 = 0$ , сделанный Ландау и Померанчуком [5] на основании общего анализа формул (2)<sup>1</sup>. Следует отметить, что пользование двухпредельной техникой весьма существенно упростило анализ уравнений квантовой электродинамики по сравнению с той ситуацией, которая складывается при пользовании одним пределом. В этой связи следует подчеркнуть, что условие (6) гарантирует логарифмический характер всех функций даже при больших  $e_1^2$ . Это чрезвычайно облегчает оценку всех интегралов.

Обращение  $e^2$  в нуль есть следствие того, что «затравочный» заряд  $e_1$  под действием мощной поляризации вакуума окружается облаком противоположно заряженных зарядов, в результате чего уже на расстоянии от «центра» заряда, лишь немногим большим, чем размер затравочного заряда  $\Lambda^{-1}$ , полный заряд системы ( $e_1 +$  заполяризованные заряды) оказывается порядка единицы, каким бы большим не был заряд  $e_1$ . Не существует области сильного взаимодействия! В области же слабого взаимодействия уже на основании [1] при  $\Lambda \rightarrow \infty$   $e^2$  оказывается нулем.

В заключение я считаю своим приятным долгом поблагодарить Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова за подробные и чрезвычайно полезные дискуссии по поводу этой работы, а также Е. С. Фрадкина за интересные дискуссии по поводу обращения  $e^2$  в нуль.

Академия наук СССР

Получено 27 мая 1955 г.

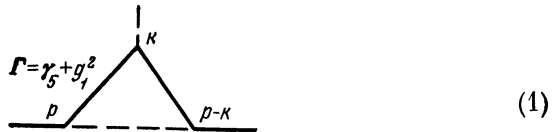
#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497, 773, 1177.
2. G. Källén. Helv. Phys. Acta, 1952, 25, 417; H. Lehmann. Nuovo Cimento, 1954, 11, 342.
3. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
4. С. А. Hurst. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1952, 48, 625; А. Peterman. Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 291; R. Utiyama, T. Imamura. Prog. Theor. Phys., 1953, 9, 431; F. J. Dyson. Phys. Rev., 1952, 85, 631; W. Thirring. Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 33.
5. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 102, 489 (Собр. трудов, № 60).

<sup>1</sup> Мысль о том, что  $e^2 = 0$ , была также высказана Е. С. Фрадковым.

## О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ МЕЗОННОГО ЗАРЯДА В ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ С ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СВЯЗЬЮ\*

В работе [1] было показано, что квантовая электродинамика частиц со спином  $1/2$  приводит к равенству нулю перенормированного электрического заряда. Представляет большую важность вопрос о том, является ли этот результат свойством всякого точечного взаимодействия. Наиболее существенным при этом представляется случай мезон-нуклонных взаимодействий. В настоящем сообщении мы рассмотрим перенормировку мезонного заряда  $g$  в псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью. Существенное упрощение в рассмотрении, так же как и в электродинамике, наступает при пользовании двухпредельной техникой решения неперенормированных мезонных уравнений Швингера—Дайсона, развитой Абрикосовым и Халатниковым [2]. Полученные ими результаты были выведены, полагая неперенормированный мезонный заряд  $g_1$  малым по сравнению с единицей. Это давало возможность пользоваться при определении вершинной части  $\Gamma(p, p-k; k)$  «треугольным» уравнением, учитывающим только неперекрывающиеся диаграммы [3] (в вершинах полные  $\Gamma$ ).



$$\Gamma = \gamma_5 + g_1^2 \quad (1)$$

Пределы обрезания по импульсам нуклонов  $\Lambda_p$  и мезонов  $\Lambda_k$  удовлетворяют соотношению  $\Lambda_p \geq \Lambda_k$ .

Найденные в [2] выражения для функций Грина нуклона  $G$ , мезона  $D$  и  $\Gamma$  имеют вид:

$$G(p) = \hat{p}^{-1} Q^{-3/10}(p), \quad D(k^2) = k^{-2} Q^{-4/5}(k) [1 + \pi^{-1} g_1^2 (L_p - L_k)]^{-1},$$

$$\Gamma = \gamma_5 Q^{+1/5}(x),$$

$$Q(x) = 1 + 5(4\pi)^{-1} g_1^2 (L_k - \xi) [1 + \pi^{-1} g_1^2 (L_p - L_k)]^{-1}, \quad \xi = \ln \frac{x^2}{m^2}, \quad (2)$$

$$L_k = \ln \Lambda_k^2 m^{-2}, \quad L_p = \ln \Lambda_p^2 m^{-2}.$$

\* Докл. АН СССР, 1955, 104, 51.

$x = p$  в выражении для  $G$  и  $x = k$  в выражении для  $D$ . В  $\Gamma(p, p - k; k)$   $x$  с логарифмической точностью равно  $p$ , когда  $p^2 \sim \sim (p - k)^2 \sim k^2$ . Если аргументы  $\Gamma$  неодинаковы, то входит наибольший;  $m$  — масса нуклона.

Условиями применимости формул (2) являются:

$$\begin{aligned} \text{для } G: \Lambda_k^2 &\geq p^2 \gg m^2; \\ \text{для } D: \Lambda_k^2 &\gg k^2 \gg m^2; \\ \text{для } \Gamma: \Lambda_k^2 &\geq p^2, \quad (p - k)^2, \quad k^2 \gg m^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Если  $p^2$  или  $k^2$  становятся меньше  $m^2$ , то  $\xi$  заменяется нулем. Когда неравенства (3) заменяются на следующие:

$$p^2 > \Lambda_k^2, \quad k^2 > \Lambda_k^2, \quad (4)$$

вместо (2) справедливы формулы:

$$G = \hat{p}^{-1}, \quad D = k^{-2}, \quad \Gamma = 0. \quad (5)$$

Если  $k^2 \ll \Lambda_k^2$ , но  $\lambda_p^2 \gg p^2 \gg \lambda_k^2$ , то  $\Gamma = \gamma_5$ .

Связь между  $g_1$  и перенормированным зарядом  $g$  имеет вид:

$$g^2 = g_1^2 [1 + \pi^{-1} g_1^2 (L_p - L_k)]^{-1}, \quad g_1^2 = g^2 [1 - \pi^{-1} g^2 (L_p - L_k)]^{-1}. \quad (6)$$

С ростом  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$   $g_1^2$  растет.

Функция  $D$  испытывает скачок при  $k^2 = \Lambda_k^2$  от значения  $\Lambda_k^{-2}$  до  $\Lambda_k^{-2} [1 + \pi^{-1} g_1^2 (L_p - L_k)]^{-1}$ . Этот скачок связан с «резким» выключением взаимодействия при возрастании  $k^2$  сверх значения  $\Lambda_k^2$ . При плавном выключении такого скачка не будет. Так же как и в электродинамике [1], можно показать, что скачок  $D$ -функции несуществен для дальнейших доказательств. Если  $\Lambda_p = \Lambda_k$ , то (2) переходят в «однопредельные» формулы Абрикосова, Галанина и Халатникова [4]. Пусть  $g_1^2 \ll 1$ , но  $\pi^{-1} g_1^2 (L_p - L_k) = \pi^{-1} g_1^2 \times \times \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1$ . Тогда формулы (2) переходят в более простые:

$$\begin{aligned} G(p) &= \hat{p}^{-1} Q_0^{-3/10}(p), \quad D = k^{-2} Q_0^{-4/5}(k) \frac{\pi}{g_1^2} (L_p - L_k)^{-1}, \\ \Gamma &= \gamma_5 Q_0^{1/5}(x), \quad Q_0(x) = 1 + 5/4 (L_p - L_k)^{-1} (L_k - \ln x^2 m^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Формулы (7) указывают на возможность пренебрежения в лагранжиане действием свободного мезонного поля  $\int dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx_\alpha} \right)^2 + \mu^2 \phi^2 \right]$ . Действительно, в этом случае в уравнения  $\phi$  входит только вместе с  $g_1$  в виде комбинации  $g_1 \phi$ . Поэтому среднее по вакууму от величины  $T \langle \phi(x) \phi(y) \rangle$ , которому пропорциональна  $D$ -функция, оказывается пропорционально  $g_1^{-2}$  (аналогично тому

положению, которое имеется в электродинамике [1,5])<sup>1</sup>. Функция  $G(x, y)$ , будучи средним по вакууму значением от величины  $T\psi(x)\psi(y)$ , не должна в этих условиях зависеть от  $g_1^2$ . Вершинная часть, будучи равной [7]  $\left\{ \frac{\delta}{\delta g_1 \Phi(z)} G^{-1}(x, y, g_1 \Phi) \right\}_{\Phi=0}$ , также не будет зависеть от  $g_1$ . Именно эти зависимости зафиксированы в (7).

Мы приходим к выводу, что даже при малых  $g_1^2$  свободное поле перестает играть роль. Представляется естественным думать, что при дальнейшем возрастании  $g_1$  роль свободного поля будет еще меньше. Поэтому зависимость всех величин от  $g_1^2$  должна соответствовать (7) и при  $g_1^2 > 1$ . Отсюда следует, что функция  $g_1^2 D$  не должна зависеть от  $g_1^2$  и, следовательно, ее зависимость от  $k^2$  будет при больших  $g_1^2$  такая же, как и при малых  $g_1^2$ . Те же соображения относятся к  $G$  и  $\Gamma$ . Это значит, что при любых  $g_1^2$  (т. е. при любых сколь угодно больших  $\Lambda_p^2, \Lambda_k^2$  (6))  $D, G$  и  $\Gamma$  должны совпадать с (7). Отсюда следует, что в формуле, связывающей  $g^2$  и  $g_1^2$ :

$$g^2 = g_1^2 [1 + \pi^{-1} g_1^2 (L_p + 1/4 L_k)]^{-1} = \pi (L_p + 1/4 L_k)^{-1} \rightarrow 0,$$

$L_p$  и  $L_k$  могут стремиться к бесконечности. Поэтому  $g^2$  оказывается (так же как и в электродинамике [1, 5]) равным нулю. Важность этого результата делает желательным его подтверждения путем непосредственного рассмотрения уравнений, определяющих  $G, D$  и  $\Gamma$ .

Академия наук СССР

Получено 3 июля 1955 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005 (Собр. трудов, № 61).
2. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
3. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497; 95, 1157.
4. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.
5. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 102, 489 (Собр. трудов, № 60).
6. К. Yamazaki. Progr. Theor. Phys., 1952, 7, 449.  
И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос. Докл. АН СССР, 1954, 97, 209;  
Е. С. Фрадкин. Докл. АН СССР, 1954, 98, 47; Н. Н. Боголюбов. Докл. АН СССР, 1954, 99, 225; S. F. Edwards, R. E. Peierls. Proc. Roy. Soc., 1954, A224, 24; P. T. Matthews, A. Salam. Nuovo Cimento, 1954, 12, 563;  
K. Symanzik. Zs. Naturforsch., 1954, 9a, 809.
7. J. Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, 455.

<sup>1</sup> Этот результат особенно наглядно виден при пользовании представленном  $D$ -функции в виде континуального интеграла [6]

$$D(x, y) = \int T \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle [\exp iS(g_1 \Phi)] d\Phi / \int [\exp iS(g_1 \Phi)] d\Phi.$$

Здесь отброшено действие свободного поля. Производя замену переменных  $\Phi \rightarrow g_1 \Phi$ , мы сразу видим, что  $D \sim g_1^{-2}$ .



**ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ  
ПЕРЕНОРМИРОВАННОГО МЕЗОННОГО ЗАРЯДА  
В ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ  
С ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СВЯЗЬЮ\***

В предыдущем сообщении [1] были приведены некоторые общие соображения, указывающие на то, что перенормированный мезонный заряд  $g$  обращается в нуль в псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярным взаимодействием. Рассмотрим этот вопрос более подробно, исследуя свойства  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  при произвольных  $g^1_{21}$ , опираясь на двухпредельную технику Абрикосова и Халатникова [2].

Формулы (2), (5), (7) [1] были выведены при учете только неперекрывающихся диаграмм [3]. Не учитывались перекрывающиеся диаграммы и диаграммы, содержащие рассеяние мезона мезоном. Определим вклад всех этих отброшенных членов. Рассмотрим  $n$ -кратноперекрывающуюся диаграмму, входящую в  $\Gamma$ . Будем при этом считать выполненными следующие условия:

$$p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2 \ll \Lambda_k^2 \ll \Lambda_p^2. \quad (1)$$

Учитывая, что в этой диаграмме содержится только одно логарифмическое интегрирование, получаем (аналогично тому, как это делается в электродинамике [4])

$$\begin{aligned} \Gamma_n &\sim g_1^{2n} \int_{\ln p^2 m^{-2}}^{L_k} d\xi [Q(\xi)]^{n(-3/6+2/6-1/6)+4/6} \left[1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k)\right]^{-n} = \\ &= \frac{4\pi}{5n-6} \left\{ g_1^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{n-1} [Q_k(\xi)]^{6/6-n} \Big|_{\ln p^2 m^{-2}}^{L_k} = \\ &= \frac{4\pi}{5n-6} \left\{ g_1^2 \left[1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{n-1} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[1 + \frac{5}{4\pi} \left(1 + \frac{L_p - L_k}{\pi} g_1^2\right)^{-1} (L_k - \ln p^2 m^{-2})\right]^{6/6-1} \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Второй член в фигурных скобках меньше единицы и при  $p^2 \ll \Lambda_k^2$  мал. Отбросив его, мы можем только увеличить величину

\* Докл. АН СССР, 1955, 105, 461.

<sup>1</sup> Все обозначения совпадают с обозначениями в [1].

$\Gamma_n$ . В соответствии с этим имеем

$$\Gamma_n \leq C_n \left\{ g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1} \right\}^{n-1}, \quad (3)$$

где  $C_n$  — числовой множитель.

При очень малых  $g_1^2$   $\Gamma_n = C_n g_1^{2(n-1)}$ . Это соотношение может дать повод думать, что при больших  $g_1^2$   $\Gamma_n$  становится неограниченно большим. Однако это не так. Даже при  $L_p - L_k \sim 1$  (т. е. при  $\Lambda_p^2 \sim \Lambda_k^2$ )  $\Gamma_n$  с ростом  $g_1^2$  стремится к постоянному пределу, равному

$$\Gamma_n = C_n [\pi (L_p - L_k)^{-1}]^{n-1}. \quad (4)$$

Если мы теперь будем считать, что переход к точечному нуклону осуществляется так:  $\Lambda_p^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_k^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1$ , то  $\Gamma_n$  согласно (4) оказывается малым при любых значениях  $g_1^2$ . Ряд всех перекрывающихся диаграмм оказывается следующим:

$$\sum_2^{\infty} C_n \left\{ g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1} \right\}^{n-1}. \quad (5)$$

Этот ряд, по-видимому, является асимптотическим [5]. При малых  $g_1^2$  его сумма мала ввиду малости  $g_1^2$ . При больших  $g_1^2$  тот же результат следует из большого значения  $L_p - L_k$ . (Если, однако, брать  $L_p - L_k \sim 1$ , то функция, изображаемая рядом (5), начиная с  $g_1^2 \sim 1$ , перестает зависеть от  $g_1^2$ , хотя и не может быть аккуратно представлена в виде (5). Однако независимость этой функции от  $g_1^2$  дает основание не учитывать ее, так как при  $g_1^2 \sim 1$  сумма (5) порядка единицы, тогда как  $\Gamma$ , определяемое (2) [1], в этих условиях будет порядка  $(L_k - \ln p^2 m^{-2})^{1/5} \gg 1$  при  $p^2 \ll \Lambda_k^2$ .)

До сих пор мы считали, что выполнено условие (1). Если импульс нуклона превышает  $\Lambda_k$ :

$$k^2 \ll \Lambda_k^2 \ll p^2 \ll \Lambda_p^2, \quad (6)$$

то оценка величины  $\Gamma_n$  производится следующим образом. Все нуклонные линии можно заменить на  $\hat{p}^{-1}$  (аналогично [4]). Интегралы по импульсам мезонов определяются областью  $k^2 \sim \Lambda_k^2$ . При этом  $D \sim k^{-2} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1}$ . В результате находим

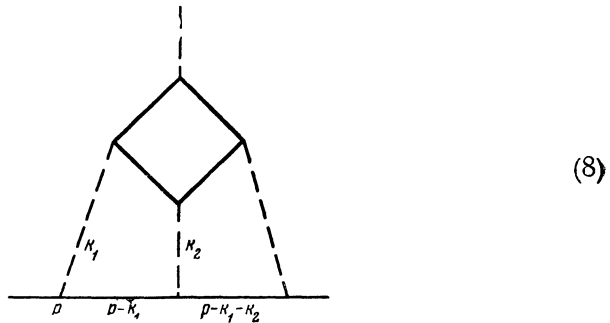
$$\Gamma_n \sim (\Lambda_k^2 p^{-2})^n \left\{ g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1} \right\}^n. \quad (7)$$

$\Gamma_n$  в этом случае оказывается малым не только в силу появления  $L_p - L_k$  в знаменателе, но и благодаря дополнительному множи-

<sup>1</sup> Более внимательное рассмотрение случая  $\Lambda_p = \Lambda_k$  дает указания на то, что он эквивалентен случаю, когда  $L_p - L_k \sim 1$ .

телю  $\Lambda_k^{2n} p^{-2n}$ . Таким образом, и при условии (6) перекрывающиеся диаграммы не играют роли.

Обратимся теперь к диаграммам, содержащим рассеяние мезона мезоном. Простейшая диаграмма такого рода, входящая в  $\Gamma$ , имеет вид



Пусть  $p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2$ . Матричный элемент, дающий рассеяние мезона мезоном, равен в соответствии с (2) [1]

$$\begin{aligned} \text{---} \frac{k_1}{k_1} \text{---} \square \text{---} \frac{k_3}{k_3} \text{---} &\sim g_1^4 \int_{k^2}^{\Lambda_k^2} Q^{1/6-4g/10} \frac{dp^2}{p^2} \sim g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right] \times \\ &\times \frac{4\pi}{3} \{ Q^{3/6}(k^2) - 1 \} + g_1^4 (L_p - L_k), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k$  — наибольший из векторов  $k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3$ .

Первый член в (9) происходит от импульсов нуклонов, лежащих в пределах  $k^2 \ll p^2 \ll \Lambda_k^2$ , второй в интервале  $\Lambda_k^2 \ll p^2 \ll \Lambda_p^2$ .

Вычитаемое в фигурных скобках в (9) мало, и мы можем его опустить. Подставляя (9) в (8) и учитывая, что в (8) содержится однократное логарифмическое интегрирование, находим

$$\begin{aligned} (8) &\sim g_1^4 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-3} \int_{p^2}^{\Lambda_k^2} Q (k^2)^{-12/5} \frac{dk^2}{k^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{4\pi}{3} Q^{3/6}(k^2) \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right] + g_1^2 (L_p - L_k) \right\} = \\ &= \frac{4\pi^2}{3} g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \left( 1 + \frac{L_p - L_k}{\pi} g_1^2 \right)^{-1} (L_k - \ln p^2 m^{-2}) \right]^{-1/6} \right\} + \\ &+ \frac{4\pi}{7} g_1^4 (L_p - L_k) \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-2} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \left( 1 + \frac{L_p - L_k}{\pi} g_1^2 \right)^{-1} (L_k - \ln p^2 m^{-2}) \right]^{-2/6} \right\}. \end{aligned}$$

Вычитаемое в обеих фигурных скобках мало, если  $p^2 \ll \Lambda_k^2$ , и может быть опущено (это преувеличивает значение (8))

$$(8) \sim \frac{4\pi^2}{3} g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-1} + \frac{4\pi}{7} g_1^4 (L_p - L_k) \times \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-2}. \quad (10)$$

При больших  $g_1^2$  получаем

$$(8) \sim (L_p - L_k)^{-1} \ll 1. \quad (11)$$

Таким образом, (8) перестает зависеть от  $g_1^2$ , когда оно становится большим. Предельное значение, к которому стремится (8), оказывается малым при  $L_p - L_k \gg 1$ .

Хотя эффект однократного рассеяния мезона мезоном оказывается, таким образом, несущественным, следует отметить, что ряд последовательных актов рассеяния мезона мезоном не дает сходящегося ряда и при пользовании двухпредельной техникой. Сравним две диаграммы:

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ \text{---} \frac{k_2}{k_1} \square \frac{k_1+k_2-k_3}{k_3} \text{---} & \text{---} \frac{k_2}{k_1} \square \frac{k_1+k_2-f}{f} \square \frac{k_1+k_2-k_3}{k_3} \text{---} \end{array} \quad (12)$$

$A$  равна (9),  $B$  содержит однократный логарифмический интеграл по  $f^2$  и в соответствии с (9) оказывается равной

$$B \sim \int_{k^2}^{\Lambda_k^2} \frac{df^2}{f^2} \left\{ \frac{4\pi}{3} g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right] Q^{9/8}(f^2) + g_1^4 (L_p - L_k) \right\}^2 \times Q^{-9/8}(f^2) \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right]^{-2}, \quad (13)$$

где  $k$  — наибольший из векторов  $k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3$ .

При вычислении (13) член, содержащий  $g_1^4 (L_p - L_k)$ , может быть опущен, если  $k^2 \ll \Lambda_k^2$  ( $Q(k^2) \gg 1$ , когда  $k^2 \ll \Lambda_k^2$ , так что  $\ln \Lambda_k^2 k^{-2} \gg \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}$ ):

$$B \sim g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \right] Q^{9/8}(k^2). \quad (14)$$

(14) совпадает по порядку величины с (9) в таких условиях, когда  $Q \gg 1$  ( $k^2 \ll \Lambda_k^2$ ). Таким образом,  $B$  и  $A$  того же порядка<sup>1</sup>. Это обстоятельство делает весьма желательным детальное

<sup>1</sup> Отметим при этом, что мы не вводили в гамильтониан член типа  $\lambda\phi^4$ , который обеспечивает перенормировку рассеяния мезона мезоном в обычной теории возмущений.

рассмотрение совокупности всех диаграмм, приводящих к рассеянию мезонов мезонами<sup>1</sup>. Учитывая, однако, общие соображения, основанные на выпадении действия свободного поля уже при малых  $g_1^2$ , и что: 1) совокупность всех перекрывающихся диаграмм оказывается малой; 2) каждая диаграмма, входящая в  $\Gamma$  и содержащая рассеяние мезона мезоном, содержит малый множитель  $(L_p - L_k)^{-1}$  (11), можно с большой степенью уверенности считать, что выражения для  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  в виде (2) [1] справедливы при любых значениях  $g_1^2$  (т. е. при любых сколь угодно больших значениях  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ ). Это обстоятельство приводит к тому, что перенормированный мезонный заряд оказывается в силу (6) [1] равным нулю. Этот результат соответствует выводу из квантовой электродинамики частиц со спином  $1/2$ .

Обращение  $e$  и  $g$  в нуль в разобранных теориях означает необходимость радикальных изменений в основах существующих физических теорий. В первую очередь такое изменение было бы связано с введением в теорию новой длины, которая сделала бы, грубо говоря, невозможным стремление  $\Lambda$  к бесконечности [6].

Необходимо иметь в виду, что новая длина  $r_0$  не может быть очень малой, так как в этом случае  $g^2$  в соответствии с (6) [1] окажется тоже малым. Из соотношения

$$g^2 = g_1^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 \left( L_p + \frac{1}{4} L_k \right) \right]^{-1}$$

следует (полагая  $L_p = L_k = L$  и вместо  $L$  подставляя сюда  $\ln m^{-2} r_0^{-2}$  ( $\Lambda = r_0^{-1}$ ))

$$g^2 \leq \frac{4\pi}{5} [\ln m^{-2} r_0^{-2}]^{-1}.$$

Если  $r_0 \ll m^{-1}$ , то  $g^2 \ll 1$ . Такое значение  $g^2$  не может соответствовать данным, полученным из взаимодействий  $\pi$ -мезонов и нуклонов [7]. Таким образом,  $r_0$  должна быть больше или порядка комптоновской длины нуклона  $2 \cdot 10^{-14}$  см. Л. Д. Ландау указал, что эта оценка величины  $r_0$  может вызвать удивление, если мы вспомним о существовании ливней, состоящих из большого числа  $\pi$ -мезонов и нуклонов. Если толкование этих ливней проводить на основании теории Ферми [8] — Ландау [9], то придется признать очень вероятным большие передачи импульса, вплоть до величины порядка 100  $m$ . С другой стороны, если  $r_0 \sim m^{-1}$ , то при «наивном» понимании смысла  $r_0$  надо было бы считать передачу импульса значительно больше  $m$  маловероятным событием. Трудность этого рода подчеркивает необходимость тщательного рассмотрения

<sup>1</sup> К. А. Тер-Мартirosян, И. Т. Дятлов, В. В. Судаков просуммировали всю совокупность диаграмм рассеяния мезона мезоном и показал и, что рассеяние мезона мезоном не меняет вывода о том, что  $g^2 = 0$ .

псевдовекторной связи и более общих типов точечного взаимодействия.

В заключение я хотел бы поблагодарить Л. Д. Ландау за ряд существенных указаний, а также А. А. Абрикосова, Б. Л. Иоффе, Е. С. Фрадкина и И. М. Халатникова за интересные дискуссии по поводу этой работы.

Академия наук СССР

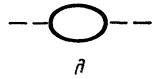
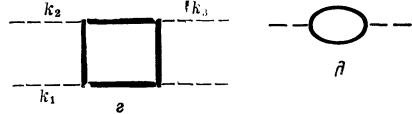
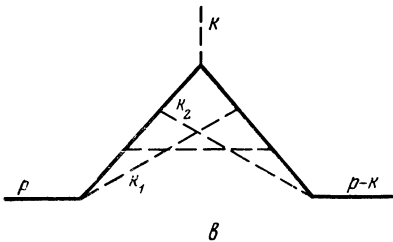
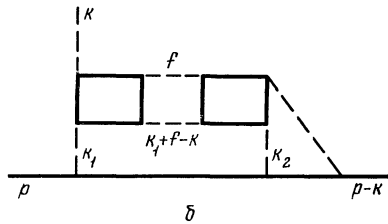
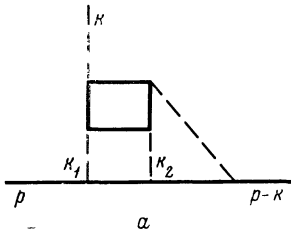
Получено 12 июня 1955 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 104, 51 (Собр. трудов, № 62).
2. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
3. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497.
4. И. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005 (Собр. трудов, № 64).
5. F. J. Dyson. Phys. Rev., 1952, 85, 634; A. Peterman. Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 294; R. Utiyama, T. Imamura. Progr. Theor. Phys., 1953, 9, 431.
6. Л. Горьков. Докл. АН СССР, 1955, 105, 65.
7. V. Kroll. M. Ruderman. Phys. Rev., 1954, 93, 233 (Сб. «Проблемы современной физики», 1955, 3, 167).
8. E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 570.
9. Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, серия физ., 1953, 17, 51.

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ С ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СВЯЗЬЮ\*

В работах [1, 2] был разобран вопрос о перенормировке мезонного заряда  $g$ . При этом обнаружилось, что найденные Абрикосовым и Халатниковым [3] выражения для вершинной части  $\Gamma$ , функции Грина нуклона  $G$  и функции Грина мезона  $D$  справедливы не только при  $g_1^2 \ll 1$  ( $g_1$  — неперенормированный мезонный заряд), как это предполагалось в [3], но и при любых  $g_1^2$ .



В доказательстве этого утверждения имеется один пункт, не разобранный с достаточной полнотой. Речь идет о влиянии рассеяния мезона мезоном на вершинную часть. Хотя простейшая диаграмма  $a$ , включающая интересующий нас эффект (в обозначениях [1, 2] она пропорциональна  $[\ln \lambda_p^2 \lambda_k^{-2}]^{-1}$ )<sup>1</sup>, мала и не может играть роли, тем не менее диаграмма  $b$ , содержащая еще один акт рассеяния мезонов, оказывается такого же порядка, что и  $a$ . Таким образом, возникает задача о суммировании большого числа различных диаграмм, обязанных рассеянию мезона мезоном. Хотя вряд ли совокупность этих диаграмм может изменить вывод о равенстве

\* ЖЭТФ, 1955, 29, 869.

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем используются обозначения работ [1, 2], но вместо  $\Delta$  пишем  $\lambda$ .

нулю перенормированного мезонного заряда  $g$ , сделанный в [1, 2], все же в [2] было привлечено внимание к важности рассмотрения рассеяния мезона мезоном.

В [1, 2] была использована двухпредельная техника обрезания расходящихся членов уравнений, определяющих  $G$ ,  $\Gamma$  и  $D$ , развитая Абрикосовым и Халатниковым [3]. При этом использовалось следующее соотношение между предельными импульсами обрезания при интегрировании по импульсам нуклонов  $\lambda_p$  и мезонов  $\lambda_k$ :  $\ln \lambda_p^2 \lambda_k^{-2} \gg 1$ .

Если существенно усилить это неравенство

$$\ln \lambda_p^2 m^{-2} \gg \ln \lambda_k^2 m^{-2}, \quad \lambda_p \rightarrow \infty, \quad \lambda_k \rightarrow \infty, \quad (1)$$

то при такой аппроксимации точечного взаимодействия, как предела «размазанного» [4] с конечными  $\lambda_p$  и  $\lambda_k$ , можно получить точные решения уравнений для  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  с полным учетом рассеяния мезона мезоном. Мы докажем сейчас, что при использовании (1)  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  в псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью оказываются равными:

$$G = \hat{p}^{-1}, \quad p^2 \gg m^2; \quad (2)$$

$$D = k^{-2} [1 + \pi^{-1} g_1^2 \ln \lambda_p^2 k^{-2}]^{-1}, \quad \lambda_k^2 \gg k^2 \gg m^2, \quad (3)$$

$$D = k^{-2}, \quad k^2 \gg \lambda_k^2;$$

$$\Gamma(p, p - k; k) = \Gamma_5, \quad \lambda_p^2 \gg p^2 \gg m^2, \quad \lambda_p^2 \gg (p - k)^2 \gg m^2, \\ \lambda_k^2 \gg k^2 \gg m^2,$$

$$\Gamma(p, p - k; k) = 0, \quad p^2 > \lambda_p^2 \quad \text{или} \quad k^2 > \lambda_k^2. \quad (4)$$

В формулах (2) — (4) использована только одна диаграмма  $\partial$ , входящая в  $D$ . Убедимся теперь, что любая неучтенная диаграмма несущественна. Рассмотрим сначала произвольную  $n$ -кратноперекрывающуюся диаграмму, входящую в  $\Gamma(p, p - k; k)$ . Пусть  $p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2$ . Учитывая, что такой диаграмме  $s$  соответствует только одно логарифмическое интегрирование [ $p^2 \ll k_i^2, k_n^2, \dots, k_n^2 \ll \lambda_n^2$ ], находим значение оператора  $b$ , в который входит  $n + 1$   $D$ -функций,  $2n + 3$   $\Gamma$ -функций и  $2(n + 1)$   $G$ -функций:

$$b \sim g_1^{2(n+1)} \int_{p^2}^{\lambda_k^2} \frac{dk^2}{k^2} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 \ln \lambda_p^2 k^{-2} \right]^{-n-1} \ll \frac{\ln \lambda_k^2 p^{-2}}{[\ln \lambda_p^2 \lambda_k^{-2}]^{n+1}} \ll 1,$$

$$[\ln \lambda_p^2 \lambda_k^{-2} = \ln \lambda_p^2 m^{-2} - \ln \lambda_k^2 m^{-2} \approx \ln \lambda_p^2 m^{-2}]. \quad (5)$$

Мы при этом считали, что  $g_1^2$  не мало по сравнению с единицей. Если  $n = 0$ , то мы имеем совокупность неперекрывающихся диаграмм, равную по порядку величины  $\ln(\lambda_k^2 p^{-2}) / \ln(\lambda_p^2 \lambda_k^{-2}) \ll 1$ . Мы видим, что все перекрывающиеся и неперекрывающиеся диаграммы дают ничтожный вклад в  $\Gamma$  при использовании (1).

Обратимся к рассеянию мезона мезоном. Элементарный квадра-



тик (см. диаграмму  $z$ ) равен  $g_1^4 \ln \lambda_p^2 k^{-2}$ , где  $k^2$  — наибольшая из величин  $k_1^2, k_2^2, k_3^2, (k_1 + k_2 - k_3)^2$ . В соответствии с этим, а также учитывая, что диаграмме  $a$  соответствует только одно логарифмическое интегрирование (предполагая, что  $p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2$ ) в области  $p^2 \ll k_1^2 \sim k_2^2 \ll \lambda_k^2$ , находим следующую оценку оператора  $a$ :

$$a \sim g_1^6 \int_{p^2}^{\lambda_k^2} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 \ln \lambda_p^2 k_1^{-2} \right]^{-3} |\ln \lambda_p^2 k_1^{-2}| \frac{dk_1^2}{k_1^2} \ll \frac{\ln \lambda_k^2 m^{-2}}{[\ln (\lambda_p^2 m^{-2})]^{-2}} \ll 1.$$

Если перейти от  $a$  к  $b$ , то войдет еще одно логарифмическое интегрирование по  $f^3$ , приводящее к множителю:

$$g_1^4 \int_{q^2}^{\lambda_k^2} \frac{df^2}{f^2} \left[ 1 + \frac{1}{\pi} g_1^2 \lambda_p^2 f^{-2} \right]^{-2} \ln \lambda_p^2 f^{-2} \approx \frac{\ln \lambda_k^2 m^{-2}}{\ln \lambda_p^2 m^{-2}} \ll 1.$$

Мы видим, что условие (1) обеспечивает быструю сходимость ряда последовательных актов рассеяния мезона мезоном, делающую излишней детальное рассмотрение всех диаграмм рассеяния мезона мезоном. Изложенные выше оценки доказывают справедливость формул (1) — (3) при любых  $g_1^2$ . В отличие от [1—2], рассеяние мезона мезоном заведомо играет ничтожную роль. Следствием из (1) — (3) является обращение в нуль неперенормированного мезонного заряда

$$g^2 = g_1^2 [1 + \pi^{-1} g_1^2 \ln \lambda_p^2 m^{-2}]^{-1} \rightarrow \pi [\ln \lambda_p^2 m^{-2}]^{-2} \rightarrow 0.$$

Отметим, что пользование условием (1) чрезвычайно сильно упрощает задачу нахождения  $G, D$  и  $\Gamma$ . Проведенное здесь рассмотрение показывает, что рассеяние мезона мезоном (без привлечения члена  $\lambda\phi^4$ ) не меняет вывода, сделанного в [1—2], о равенстве нулю перенормированного мезонного заряда  $g$ .

Недавно Тер-Мартirosян, Дятлов и Судаков, используя остроумную технику, определили величину совокупности существенных диаграмм, дающих рассеяние мезона мезоном, и установили, что в том случае, когда импульсы мезонов малы по сравнению с некоторым  $\lambda$ , вся совокупность диаграмм лишь численным множителем отличается от простейшего графика  $z$ . При этом на  $\lambda_p$  и  $\lambda_k$  не накладывалось никаких условий. Результат Тер-Мартirosяна, Дятлова и Судакова указывает на независимость вывода о равенстве  $g = 0$  от соотношения между  $\lambda_p$  и  $\lambda_k$ .

Академия наук СССР

Получено 24 сентября 1955 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 104, 51 (Собр. трудов, № 62).
2. И. Я. Померанчук. Докл. АН СССР, 1955, 105, 461 (Собр. трудов, № 63).
3. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
4. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. Докл. АН СССР, 1954, 95, 497.

## РАВЕНСТВО НУЛЮ ПЕРЕНОРМИРОВАННОГО ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И В МЕЗОННОЙ ТЕОРИИ\*

Обсуждаются решения уравнений квантовой электродинамики для частицы со спином  $1/2$ , получаемые рядом авторов сначала с введением одного параметра «размазывания» и впоследствии с введением двух таких параметров. Доказывается в разд. 1, что получаемые решения верны для всех значений перенормированного электрического заряда  $e_1$  (как для  $e_1 \ll 1$ , так и для  $e_1 \gg 1$ ) и что теории обоих типов приводят к следствию, что перенормированный заряд  $e$  оказывается равным нулю. В разд. 2 исследуется, выполняется ли такое же свойство для мезонного заряда  $g$  в псевдоскалярной теории. Используя двухпредельную технику, развитую Абрикосовым и Халатниковым, автор приходит к заключению, что  $g$  также равно нулю. В разд. 3 детально рассматривается проблема обращения в нуль перенормированного мезонного заряда, исследуя свойства функций  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  при произвольных  $g_1^2$ . Результат такого анализа соответствует ранее сформулированным выводам и подтверждает обращение  $g$  в нуль.

### 1. Равенство нулю перенормированного заряда в квантовой электродинамике

В статье Ландау, Абрикосова и Халатникова [1] было найдено решение уравнений квантовой электродинамики, которое определяет гриновские функции электрона  $G$  и фотона  $D_{\mu\nu}$ , а также вершинную часть  $\Gamma_\mu$ , соответствующую их электромагнитному взаимодействию. Эти уравнения содержат перенормированный заряд  $e_1$ , являющийся функцией (фиктивного) радиуса размазывания  $1/\Lambda$  частиц. Это размазывание при  $\Lambda \rightarrow \infty$  соответствует точечному взаимодействию как пределу размазанного при радиусе взаимодействия, стремящемся к нулю. Заряд  $e_1$  увеличивается [2], когда  $\Lambda$  растет, что отражает свойство вакуумной поляризации уменьшать любой внешний заряд, помещенный в вакуум (грубо говоря, зависимость  $e_1$  от  $1/\Lambda$  отражает распределение эффективного электронного заряда на некотором расстоянии от его центра). Решения уравнений квантовой электродинамики, найденные в [1], могут быть справедливы, согласно вычислениям, выполненным в [1], только при  $e_1^2 \ll 1$ . Это ограничение препятствует изучению свойств квантовой электродинамики при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , так как

\* Nuovo Cimento, 1956, 3, 1186. Перевод М. В. Терентьева.

$e_1$ , по-видимому, становится бесконечным при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Упомянутые выше авторы использовали очень простое размазывание с одним параметром  $1/\Lambda$  в координатном пространстве (или  $\Lambda$  в импульсном пространстве). Более общий тип размазывания был изучен Абрикосовым и Халатниковым [3], которые ввели точечное взаимодействие  $e_1 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x)$  как предельный случай размазанного:

$$e_1 \int F \left( \frac{x+y}{\Lambda_p^{-1}}, \frac{x-z}{\Lambda_k^{-1}}, \frac{y-z}{\Lambda_k^{-1}} \right) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(y) A_\mu(z) dy dz, \quad (1.1)$$

в котором «ширина» распределения по  $y$  и  $z$  различна. Они доказали, что радиус размазки для поля  $A$  (по координате  $z$ ) всегда больше, чем  $1/\Lambda_p$  (размазка по  $y$ ), определяющей масштаб сдвига  $\psi(y)$  по отношению к  $\psi(x)$ :

$$1/\Lambda_k \geq 1/\Lambda_p. \quad (1.2)$$

Используя размазывание с двумя параметрами, Абрикосов и Халатников получили решения уравнений квантовой электродинамики. После перенормировки их результаты совпадают с [1], так как перенормированные величины не содержат параметров размазки. Решения, полученные в [3] (когда  $d_l = 0$  [1]), имеют вид:

$$D_{\mu\nu}(k^2) = \frac{1}{k^2} \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{1 + (v e_1^2 / 3\pi) \ln \Lambda_p^2 / k^2}, \quad G(p) = \hat{p}^{-1}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu, \quad p^2 \gg m^2, \quad \Lambda_k^2 \gg k^2 \gg m^2.$$

Если  $k^2 > \Lambda_k^2$ , то  $D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$ ,  $\Gamma = 0$ .

Связь между перенормированным зарядом  $e$  и зарядом  $e_1$  может быть представлена в виде (см. [3])

$$e^2 = \frac{e_1^2}{1 + (v/3\pi) e_1^2 \ln \Lambda_p^2 / m^2}. \quad (1.4)$$

При  $k^2 = \Lambda_k^2$  функция  $D$  меняется скачком от величины  $\Lambda_k^{-2} [1 + (v/3\pi) e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}$  к величине  $\Lambda_k^{-2}$ . Если велика величина  $(v/3\pi) e_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}$ , то функция  $D$  претерпевает большой скачок.

Мы докажем ниже, что резкость выключения взаимодействия и возникающие при этом скачки  $D$ -функции совершенно не существенны. «Обрезающий» фактор может принимать любую возможную форму, не противоречащую градиентной инвариантности (поперечности поляризованного тока). Такой фактор вводится подстановкой величины  $\gamma_\mu \Phi(p^2 \Lambda_p^{-2}, (p-k)^2 \Lambda_p^{-2}; k^2 \Lambda_k^{-2})$  вместо  $\gamma_\mu$ . Функция

$\Phi$ , без ограничения общности, может быть представлена в виде произведения двух функций:

$$\Phi = f\left(\frac{k^2}{\Lambda_k^2}\right) g\left(\frac{p^2}{\Lambda_p^2}, \frac{(p-k)^2}{\Lambda_p^2}\right),$$

$$f \rightarrow 0, \quad k^2 > \Lambda_k^2; \quad f \rightarrow 1, \quad k^2 < \Lambda_k^2; \quad (1.5)$$

$$(x, y) \rightarrow 0, \quad x > 1, \quad y > 1; \quad g(x, y) \rightarrow 1, \quad x < 1, \quad y < 1.$$

При таком выборе  $\Phi$ -функции  $D$  и  $\Gamma$  принимают следующий вид:

$$D_{\mu\nu}(k^2) = k^{-2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left\{ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} f^2 \left( \frac{k^2}{\Lambda_k^2} \right) \ln \Lambda_p^2 k^{-2} \right\}^{-1},$$

$$\Gamma_\mu(p, p-k; k) = \gamma_\mu \Phi(p^2 \Lambda_p^{-2}, (p-k)^2 \Lambda_p^{-2}; k^2 \Lambda_k^{-2}). \quad (1.6)$$

(При  $\Lambda_p = \Lambda_k = \Lambda$  формулы (1.3), (1.6) совпадают с полученными в [1].) Мы будем рассматривать теперь случай, когда  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  удовлетворяют неравенству<sup>1</sup>

$$\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1, \quad \Lambda_p^2 \rightarrow \infty, \quad \Lambda_k^2 \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Используя эти неравенства, можно доказать, что формулы (1.3), (1.6) верны для всех значений  $e_1^2$  как малых, так и больших.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим те члены уравнений, определяющих  $G$ ,  $D$ ,  $\Gamma$ , которые Ландау, Абрикосовым и Халатниковым интерпретировались как малые.

Уравнения Швингера — Дайсона, которые использовались в [1] для определения  $G$  и  $D$ , являются точными. Однако  $\Gamma$  определялась из приближенных «трехвершинных» уравнений, которые (в символической форме) имеют вид

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + \Gamma \quad \Bigg| \quad \Gamma = \gamma + \dots \quad (1.8)$$

Графики, которые не учитывались в [1], отделены вертикальной линией.

<sup>1</sup> На важность этого неравенства указал Л. Д. Ландау.

Все перекрывающиеся диаграммы и эффекты типа рассеяния света на свете не учитывались в [1]. Рассмотрим произвольный перекрывающийся  $n$ -кратный график, дающий вклад в  $\Gamma$ :

В нем содержится  $2n$   $G$ -функций,  $n$   $D$ -функций и  $2n$   $\Gamma$ -функций. Этот график содержит  $n$  четырехкратных интегралов по  $k_1 \dots k_n$ . Как известно, все интегрирования, за исключением одного, не дают логарифмической расходимости<sup>1</sup>. Поэтому мы имеем только один логарифмический интеграл. Пусть импульсы  $p$ ,  $p - k$ ,  $k$  одного порядка и удовлетворяют неравенству

$$p^2 \ll \Lambda_k^2, \quad p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2. \quad (1.10)$$

(Так же, как и в [1], мы можем рассматривать все эти импульсы пространственноподобными.) Подставляя в интеграл вместо  $\Gamma_n$ ,  $G$  и  $D$  их выражения (1.6), получаем

$$\Gamma_n \sim e_1^{2n} \int_{p^2}^{f^{2n} \left( \frac{q^2}{\Lambda_k^2} \right) \frac{dq^2}{q^2}} \left\{ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} f^2 \left( \frac{q}{\Lambda_k^2} \right) \ln \frac{\Lambda_p^2}{q^2} \right\}^{-n}. \quad (1.11)$$

Необходимо подчеркнуть, что верхний предел определяется величиной  $\Lambda_k^2$ , а не  $\Lambda_p^2$  ( $\Lambda_p$  появляется только при интегрировании по  $p$ ).

Теперь используем условие

$$\frac{e_1^{2\nu}}{3\pi} \ln \Lambda_p^2 / q^2 \gg 1, \quad (1.11')$$

вытекающее из (1.7) в случае  $e_1^2 \gg 1$ , представляющем для нас интерес. Неравенство (1.11') приводит к исчезновению  $f$  из уравнения (1.11), при этом интегрирование по  $q^2$  ограничивается условием  $q^2 < \Lambda_k^2$ . Поскольку неравенство (1.7) обеспечивает медленную (логарифмическую) зависимость всех функций от  $q^2$ , подстановка  $\Lambda_k^2$  в качестве верхнего предела интегрирования не приводит к заметным ошибкам. Функция  $f$  выпадает (так же как и  $g$ ) из каждого графика, так же как в рассмотренном примере<sup>2</sup>. Не-

<sup>1</sup> Мы предполагаем (здесь и в дальнейшем), что  $d_l = 0$  [1].

<sup>2</sup> Замечание, что  $f$ -функция исчезает, было сделано Л. Д. Ландау.

зависимость результатов от вида  $f$  обеспечивает возможность выбора обрезания произвольной формы. Для краткости мы не будем писать явно  $f$ -функции, а будем вводить резкое обрезание в интегралы:

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= C_{n-1} \left[ e_1^2 \left\{ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \Lambda_p^2/q^2 \right\}^{-1} \right]^{n-1} \left[ \frac{\Lambda_k^2}{p^2} \right] = \\ &= C_{n-1} \left\{ e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \right]^{-1} \right\}^{n-1} - \\ &- C_{n-1} \left\{ e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \Lambda_p^2 p^{-2} \right]^{-1} \right\}^{n-1}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $C_{n-1}$  — численный фактор.

Так как  $p^2 \ll \Lambda_k^2$ , второй член в (1.12) меньше, чем первый, и в соответствии с этим порядок величины  $\Gamma_n$  равен

$$\Gamma_n \leq C_{n-1} \left\{ e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \right]^{-1} \right\}^{n-1}. \quad (1.13)$$

В случае очень малых значений  $e_1^2$  (1.13) превращается в

$$\Gamma_n \sim C_{n-1} e_1^{2(n-1)}, \quad (1.14)$$

что могло бы привести к заключению, что для  $e_1^2 \gg 1$  вклад перекрывающихся диаграмм может стать большим. Но если  $ve_1^2/3\pi \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1$  (при  $e_1^2 > 1$  это уже достигается при не очень больших значениях  $\Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}$ ), то условие (1.13) дает вместо (1.14) следующее выражение:

$$\Gamma_n \sim \frac{C_{n-1}}{[\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{n-1}} \ll 1. \quad (1.15)$$

Если вместо условия (1.10) векторы  $p$ ,  $p - k$  и  $k$  удовлетворяют неравенству

$$k^2 \ll \Lambda_k^2 \ll p^2 \approx (p - k)^2 \ll \Lambda_p^2, \quad (1.16)$$

то мы получим для величины перекрывающихся графиков значение, меньшее, чем (1.15). Фактически в этом случае сплошным линиям в (1.9) соответствует фактор  $\hat{p}^{-1}$  (все  $k$  малы по сравнению с  $p$ ). Только «пунктирные» факторы будут зависеть от  $k$  и каждый из них равен

$$\frac{1}{k^2} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \Lambda_p^2 k^{-2} \right]^{-1} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right).$$

Учитывая, что имеется  $2n$  сплошных линий, мы получаем следую-

щее выражение для  $\Gamma_n$  в том случае, если выполняются условия (1.16):

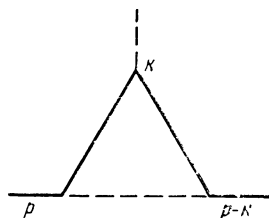
$$\Gamma_n \sim \frac{e_1^{2n}}{p^{2n}} \int^{\Lambda_k^2} d\bar{k}_1 \dots d\bar{k}_n \prod_{\alpha=1}^n k_\alpha^{-2} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{k_\alpha^2} \right]^{-1} \sim$$

$$\sim \frac{\Lambda_k^{2n}}{p^{2n}} \left\{ e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^{-1} \right\}^n \leq \frac{\Lambda_k^{2n}}{p^{2n}} \left[ \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^{-n} \ll 1. \quad (1.17)$$

Таким образом, вклад всех перекрывающихся графиков в  $\Gamma$  равен

$$\sum_1^\infty C_n \left\{ e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^{-1} \right\}^n,$$

Эта величина всегда мала независимо от значения  $e_1^2$ . Хотя эти ряды являются, по-видимому, асимптотическими [4], тем не менее величина, которой этот ряд соответствует, аппроксимируется первыми членами ряда, где эти члены быстро убывают с ростом  $n$ . Если калибровка потенциалов выбрана в соответствии с условием  $d_l = 0$ , то, как показано в [1], вклад неперекрывающихся диаграмм в  $\Gamma_\mu$ :



$$(1.18)$$

оказывается малым, если  $e_1^2 \ll 1$ .

Так как этот оператор не содержит логарифмических расходимостей, его величина имеет следующий порядок:

$$\frac{e_1^2}{1 + (ve_1^2/3\pi) \ln \Lambda_p^2 k^{-2}} < \frac{1}{\ln \Lambda_p^2 k^{-2}} < \frac{1}{\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}} \ll 1, \quad (1.19)$$

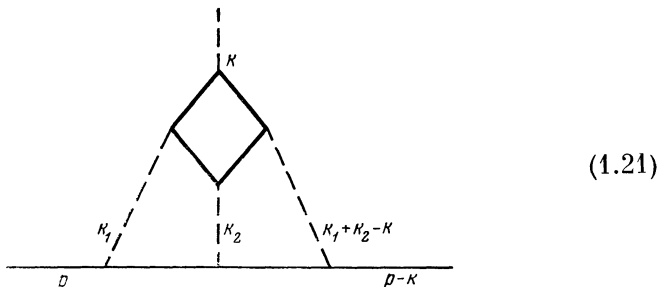
если  $p^2 \sim k^2 \sim (p - k)^2$ . Если выполняется неравенство  $p^2 \gg \Lambda_k^2$  ( $k^2 \ll \Lambda_k^2$ ), то вместо (1.19) мы получим для оператора (1.18) оценку

$$\sim \frac{e_1^2 \Lambda_k^2}{p^2} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^{-1} \leq \frac{\Lambda_k^2}{p^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}} \ll 1. \quad (1.20)$$

До сих пор мы рассматривали случаи, когда  $p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2$  или  $p^2 \gg \Lambda_k^2 \gg k^2$ . Легко видеть, что даже для случая неравенства

$\Lambda_k^2 \gg p^2 \gg k^2$  данные выше оценки выполняются для всех перекрывающихся операторов, входящих в  $\Gamma$ , так же как и для (1.18).

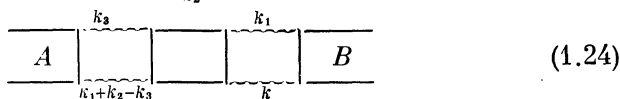
Мы видим, что все перекрывающиеся операторы и (1.18) дают малый вклад в  $\Gamma$  при любых значениях  $e_1^2$ . Рассмотрим теперь эффекты в  $\Gamma$ , вызванные рассеянием света на свете. Здесь простейшая диаграмма выглядит так:



Вычисляя (1.21), мы должны иметь в виду, что простейший график, описывающий рассеяние света на свете, сходится и имеет порядок  $e_1^4$ . Поэтому при условии  $p^2 \sim (p - k)^2 \sim k^2 \ll \Lambda_k^2$  интеграл (1.21) с логарифмической точностью сводится к однократному интегралу ( $k_1^2 \sim k_2^2 \sim (k_1 + k_2)^2 \gg k^2$ ) и имеет порядок

$$e_1^6 \int \frac{\Lambda_k^2}{k^2} \frac{dk_1^2}{k_1^2} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{k_1^2} \right]^3 \sim \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^2 e_1^4 < < \left( \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right)^{-2} \ll 1. \quad (1.22)$$

Для оценки произвольного графика, содержащего рассеяние света на свете, необходимо сравнить две диаграммы<sup>1</sup>:



Если  $\overline{A}$  с рассматриваемой здесь логарифмической точностью не зависит от  $k_3$ , то переход от (1.23) к (1.24) приводит к дополнитель-

<sup>1</sup>  $\overline{A}$  и  $\overline{B}$  могут быть связаны друг с другом также и другими линиями. Существенно, однако, что (1.24) отличается от (1.23) только квадратиком.



ному фактору:

$$e_1^4 \int \frac{\Lambda_k^2 d\bar{k}_3}{k_3^2 (k_1 + k_2 - k_3)^2} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{k_3^2} \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{(k_1 + k_2 - k_3)^2} \right]^{-1} \sim$$

$$\sim e_1^4 \int \frac{\Lambda_k^2 dk_3}{k_3^4} \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{k_3^2} \right]^{-2} \sim e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \right]^{-1} \leq \frac{1}{\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}} \ll 1. \quad (1.25)$$

Независимость  $\overline{A}$  от  $k_3$  может быть, например, в следующем случае:

$$\overline{A} \left[ \begin{array}{c} \text{---} k_3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} k_1 + k_2 - k_3 \text{---} \end{array} \right] = \overline{C} \left[ \begin{array}{c} \text{---} q \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} k_1 + k_2 - q \text{---} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \text{---} k_3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} k_1 + k_2 - k_3 \text{---} \end{array} \right]$$

(квадратик не зависит от моментов сталкивающихся фотонов, если  $k^2 \gg m^2$ ). Если, напротив,  $\overline{A}$  зависит от  $k_3$ , то  $\overline{A}$  уменьшается с ростом  $k_3$ . Грубо мы можем представить этот случай следующим способом:

$$\overline{A} \left[ \begin{array}{c} \text{---} k_3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} k_1 + k_2 - k_3 \text{---} \end{array} \right] = \overline{p} \left[ \begin{array}{c} \text{---} 4 \quad 3 \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} 1 \quad 2 \quad k_1 + k_2 - k_3 \text{---} \end{array} \right] \quad (1.26)$$

Зависимость линии (2.3) от  $k_3$  приводит к дополнительному фактору  $(\hat{p} - \hat{k}_1 - \hat{k}_2 + \hat{k}_3)^{-1}$ , который обеспечивает сходимость интеграла по  $k_3$ , в противоположность с логарифмической расходимостью интеграла (1.25). Соответственно переходя от (1.23) к (1.24), если  $\overline{A}$  зависит от  $k_3$ , мы получим фактор, который будет даже меньше, чем тот, который появляется в уравнении (1.25). Таким образом, введение любого графика, выражающего рассеяние света на свете, приводит к ряду по малому параметру  $[\ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2}]^{-1}$ , как и в случае перекрывающихся графиков.

Таким образом, все отклонения  $\Gamma_\mu$  от  $\gamma_\mu$  малы независимо от величины  $e_1^2$ . Благодаря логарифмичности всей ситуации (это означает, что все существенные величины являются медленно меняющимися логарифмическими функциями) из теоремы Уорда следует, что при  $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$  гриновская функция электрона должна равняться  $\hat{p}^{-1}$ . Это может быть проверено непосредственно вычислением любого графика, входящего в массовый оператор, определяющий  $G$ .

При  $\Gamma_\mu = \gamma_\mu$  и  $G = \hat{p}^{-1}$   $D$ -функция однозначно определяется из уравнений Швингера — Дайсона в виде (1.3).

Полученные выше результаты обосновывают возможность применения равенств (1.3) при любых  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ , удовлетворяющих ус-

ловию (1.7). Это обстоятельство приводит к следующему фундаментальному выводу: перенормированный заряд  $e$  оказывается равным нулю в соответствии с (1.4):]

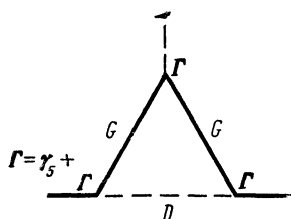
$$e^2 = e_1^2 \left[ 1 + \frac{ve_1^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda_p^2}{m^2} \right]^{-1} \rightarrow \frac{3\pi}{v} \frac{1}{\ln \Lambda_p^2/m^2} \rightarrow 0, \quad \Lambda_p^2 \rightarrow \infty. \quad (1.27)$$

Физические аргументы, приводящие к обращению в нуль заряда, были даны в статье Ландау и Померанчука [5]<sup>1</sup>. Они были основаны на том факте, что уже при  $e_1^2 \ll 1$  влияние свободного электромагнитного поля оказывается, согласно равенству (1.3), пренебрежимо малым. Это обстоятельство делает очень правдоподобным, что и при  $e_1^2 \gg 1$  эффекты от свободного электромагнитного поля исчезают. Тогда становится возможным сделать заключение, что  $e^2 = 0$ . Нужно отметить, что использование двухпредельной процедуры значительно упрощает анализ уравнений квантовой электродинамики по сравнению с аналогичной ситуацией, когда используется однопредельная техника. В этой связи нужно отметить, что условие (1.7) обеспечивает логарифмическую зависимость всех функций даже при  $e_1^2 \gg 1$ . Это в большой степени упрощает вычисление всех интегралов. Если мы вернемся к однопредельной теории, весьма вероятно, что мы увидим, в качестве результата сложного рассмотрения, что ситуация здесь соответствует двухпредельной теории, когда оба предела одного порядка. Здесь вклад перекрывающихся графиков (а также эффектов рассеяния света на свете) более не зависит от  $e_1^2$ , когда  $e_1^2$  больше единицы. Это означает, что ситуация с большими  $e_1^2$  эквивалентна случаю с  $e_1^2 \sim 1$ . Поскольку в случае  $e_1^2 \sim 1$  уравнения выполняются по порядку величины, поэтому они должны выполняться для всех значений  $e_1^2$ . Таким образом, однопредельная теория дает  $e^2 = 0$ , так же как и двухпредельная, но в последнем случае весь анализ становится совершенно очевидным. Обращение в нуль  $e$  возникает из-за того, что голый заряд  $e_1$  окружается облаком противоположных зарядов под влиянием процесса интенсивной поляризации вакуума; в результате этого процесса полный заряд системы ( $e_1 + +$  поляризационные заряды) оказывается порядка единицы на расстояниях, едва превышающих размер голого заряда  $1/\Lambda$ , причем это не зависит от того, насколько велик заряд  $e_1$ . Область сильного взаимодействия отсутствует. С другой стороны, в области слабого взаимодействия  $e^2$  оказывается равным нулю при  $\Lambda \rightarrow \infty$  согласно [1].

<sup>1</sup> Идея об исчезновении заряда была также высказана Е. С. Фрадкным.

## 2. Перенормировка мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью

В разд. 1 был получен результат, что квантовая электродинамика частиц со спином  $1/2$  приводит к обращению в нуль перенормированного электрического заряда. Важная проблема состоит в выяснении, является ли этот эффект свойством любого точечного взаимодействия. Наиболее существенный случай — это мезон-нуклонное взаимодействие. В этом разделе рассматривается перенормировка мезонного заряда  $g$  в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. Рассмотрение проблемы упрощается, так же как в электродинамике, если использовать для решения неперенормированных уравнений Швингера—Дайсона двухпредельную технику Абрикосова и Халатникова [3]. Их результаты выведены в предположении, что неперенормированный мезонный заряд мал по сравнению с единицей. Это делает применимым для определения вершинной части  $\Gamma(p, p - k; k)$  «трехвершинное» уравнение, которое учитывает только неперекрывающиеся диаграммы [1]:



$$(2.1)$$

Обрезающие факторы для нуклонных и мезонных импульсов  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  удовлетворяют условию  $\Lambda_p \geq \Lambda_k$ . Полученные в [3] гриновская функция  $G$  для нуклона и  $D$  для мезона, а также вершинная часть  $\Gamma$  имеют вид:

$$G = \hat{p}^{-1} Q(p)^{-3/2}, \quad D = k^{-2} Q(k)^{-4/2} \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1},$$

$$\Gamma = \gamma_5 Q^{1/2}, \quad Q(x) = 1 + \frac{5}{4\pi} g_1^2 (L_k - \ln x^2 m^{-2}) \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1},$$

$$L_p = \ln \Lambda_p^2 m^{-2}, \quad x = k \text{ в } D,$$

$$L_k = \ln \Lambda_k^2 m^{-2}, \quad x = p \text{ в } G.$$

$$(2.2)$$

Величина  $x$  в  $\Gamma(p, p - k, k)$  совпадает с логарифмической точностью с наибольшей из величин  $p^2$ ,  $(p - k)^2$ ,  $k^2$ ;  $m$  — масса нукло-

на. Формулы (2.2) применимы при условии:

$$\begin{aligned} \Lambda_k^2 &\gg p^2 \gg m^2, \\ \Lambda_k^2 &\gg k^2 \gg m^2, \\ \Lambda_k^2 &\gg p^2, (p-k)^2, k^2 \gg m^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

для  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  соответственно.

Если  $p^2$  или  $k^2$  становятся меньше, чем  $m^2$ , то вместо  $\ln x^2 m^{-2}$  должен быть подставлен нуль. Если приведенные выше неравенства изменяются

$$\Lambda_p^2 \gg p^2 \gg \Lambda_k^2, \quad k^2 \ll \Lambda_k^2, \quad (2.4)$$

то вместо (2.2) возникают следующие формулы:

$$G = \hat{p}^{-1}, \quad \Gamma = \gamma_5. \quad (2.5)$$

Если  $p^2 > \Lambda_p^2$  или  $k^2 > \Lambda_k^2$ , то  $\Gamma = 0$ ,  $G = \hat{p}^{-1}$ ,  $D = k^{-2}$ . Связь между  $g_1$  и перенормированным зарядом  $g$  имеет вид:

$$g^2 = \frac{g_1^2}{1 + (g_1^2/\pi) \left( L_p + \frac{1}{4} L_k \right)}, \quad g_1^2 = \frac{g^2}{1 - (g^2/\pi) \left( L_p + \frac{1}{4} L_k \right)}. \quad (2.6)$$

При  $k^2 = \Lambda_k^2$  функция  $D$  меняется от  $\Lambda_k^{-2}$  до  $\Lambda_k^{-2} [1 + (g_1^2/\pi) (L_p - L_k)]^{-1}$ . Этот скачок связан с «резким» исчезновением взаимодействия, когда  $k^2$  становится больше  $\Lambda_k^2$ . Скачка нет в том случае, когда исчезновение плавное. Можно доказать, что так же, как в электродинамике [6], наличие скачка у  $D$ -функции не отражается на дальнейшем анализе. С ростом  $\Lambda_p$ ,  $\Lambda_k$   $g_1^2$  возрастает. Если  $\Lambda_p = \Lambda_k$ , то (2.2) сводится к однопредельной формуле Абрикосова, Галанина и Халатникова [7]. Если  $g_1^2 \ll 1$ , но

$$\frac{1}{\pi} g_1^2 (L_p - L_k) \gg 1, \quad \frac{1}{\pi} g_1^2 \ln \Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1,$$

то формулы (2.2) упрощаются:

$$G(p) = \hat{p}^{-1} Q^{-3/4_0}(p), \quad D(k) = k^{-2} Q_0^{-4/5}(k) \frac{\pi}{g_1^2} (L_p - L_k)^{-1},$$

$$\Gamma(p, p-k, k) = \gamma_5 Q_0^{1/5}(x), \quad Q_0(x) = 1 + \frac{5}{4} \frac{L_k - \ln x^2 m^{-2}}{L_p - L_k}. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) подсказывает возможность пренебрежения влиянием свободного мезонного поля в лагранжиане. Фактически  $\Phi$  входит в уравнения только вместе с зарядом  $g_1$  в комбинации  $g_1 \Phi$ . Поэтому усреднение по вакууму выражения  $\langle T \Phi(x) \Phi(y) \rangle$ , которому пропорциональна  $D$ -функция, приводит к зависимости

$g_1^{-2}$  (аналогично случаю электродинамики [5, 8] <sup>1</sup>). Функция  $G$ , являющаяся средним по вакууму от  $T\psi(x)\psi(y)$ , в этих условиях не должна зависеть от  $g_1$ . Вершинная часть пропорциональна [10]

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta g_1 \varphi(z)} G^{-1}[x, y, g_1 \varphi(z)] \right\}_{g_1 \varphi=0}$$

и также не должна была бы зависеть от  $g_1^2$ . Эти свойства отражены в (2.7).

Мы приходим к выводу, что даже при малых  $g_1^2$  действие свободного поля не играет существенной роли. Можно предположить, что роль свободного поля будет только уменьшаться при дальнейшем увеличении  $g_1^2$ . Поэтому зависимости всех величин от  $g_1^2$  должны описываться формулами (2.6) также и при  $g_1^2 \gg 1$ . Следовательно, функция  $g_1^2 D$  не должна зависеть от  $g_1^2$ , и поэтому ее зависимость от  $k^2$  при больших  $g_1^2$  будет такой же, как и при малых  $g_1^2$ . Это означает, что для любых значений  $g_1^2$  (т. е. для как угодно больших значений  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  в формуле (2.6),  $\Gamma$ ,  $D$  и  $G$  должны совпадать с (2.7). Следовательно, в формуле, связывающей  $g_1^2$  и  $g^2$ ,

$$g^2 = \frac{g_1^2}{1 + (g_1^2 \cdot \pi) \left( L_p - \frac{1}{i} L_k \right)},$$

$L_p$  и  $L_k$  ( $\Lambda_p$ ,  $\Lambda_k$ ) можно устремить к бесконечности. Поэтому  $g^2$ , так же как в электродинамике, оказывается равным нулю. Важность этого результата делает желательным его доказательство с помощью непосредственного рассмотрения уравнений, определяющих  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  при  $g_1^2 > 1$ .

### 3. Об обращении в нуль перенормированного мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью

Предыдущий раздел содержал общее рассмотрение, имеющее целью доказательство того, что перенормированный мезонный заряд  $g$  исчезает в псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярным взаимодействием.

<sup>1</sup> Этот результат легко видеть в том случае, когда функция представляется в виде функционального интеграла [9]

$$D(x, y) = \int T\varphi(x)\varphi(y) \exp \left[ i \int (g_1 \varphi) \right] \delta\varphi / \int \exp \left[ i \int (g_1 \varphi) \right] \delta\varphi.$$

Здесь мы пренебрегаем частью действия от свободного поля. Заменяя переменные  $\varphi \rightarrow g_1 \varphi$ , мы немедленно получаем, что  $D \sim g_1^{-2}$ .

Рассмотрим эту проблему в деталях, исследуя свойства  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$  при произвольных значениях  $g_1^2$  с помощью двухпредельной техники, развитой Абрикосовым и Халатниковым [3].

Формулы (2.2), (2.5), (2.7) были получены из рассмотрения только неперекрывающихся графиков [1]. Перекрывающиеся графики, так же как графики, содержащие рассеяние мезона на мезоне, не учитывались. Определим вклад всех членов, которыми пренебрегалось. Мы рассмотрим  $n$ -кратный перекрывающийся график, входящий в  $\Gamma$ . Мы предположим, что выполняются следующие неравенства:

$$p^2 \sim (p-k)^2 \sim k^2 \ll \Lambda_k^2 \ll \Lambda_p^2. \quad (3.1)$$

Учитывая, что эта диаграмма содержит только одно логарифмическое интегрирование, получим (с помощью операций, аналогичных используемым в электродинамике [8]):

$$\begin{aligned} \Gamma_n &\sim g_1^{2n} \int_{p^2}^{\Lambda_k^2} \frac{dq^2}{q^2} Q(q)^{-\left(\frac{3}{2}i_0\right)2n - \left(\frac{1}{2}i_0\right)n + \left(\frac{1}{2}i_0\right)(2n+1)} \left[1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k)\right]^{-n} = \\ &= \frac{4\pi}{5} \frac{1}{n - \frac{1}{2}i_0} \left\{ g_1^2 \left[1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{n-1} Q(q)^{\left(\frac{1}{2}i_0\right)n} \Big|_{p^2}^{\Lambda_k^2} = \\ &= \frac{4\pi}{5n-6} \left\{ g_1^2 \left[1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{n-1} \times \\ &\times \left\{ 1 - \left[1 + \frac{5}{4\pi} g_1^2 \left(L_k - \ln \frac{p^2}{m^2}\right)\right] \left[1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{\left(\frac{1}{2}i_0\right)n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Второй член в скобках  $\ll 1$  и при  $p^2 \ll \Lambda_k^2$  пренебрежимо мал. Если этот член не учитывается,  $\Gamma_n$  может только увеличиться. Поэтому мы получаем

$$\Gamma_n \lesssim C_n \left\{ g_1^2 \left[1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k)\right]^{-1} \right\}^{n-1}, \quad (3.3)$$

где  $C_n$  — числовой фактор.

При очень малых  $g_1^2$  имеем  $\Gamma_n = C_n g_1^{2(n-1)}$ . Эта связь могла бы привести к выводу, что  $\Gamma_n$  возрастает неограниченно при больших  $g_1^2$ . Но на самом деле это не так. Даже в случае  $L_p \sim L_k \sim 1$  (т. е. при  $\Lambda_p^2 \sim \Lambda_k^2$ ) при возрастании  $g_1^2$  функция  $\Gamma_n$  не превышает предельного значения:

$$\Gamma_n \lesssim C_n \left( \frac{\pi}{L_p - L_k} \right)^{n-1}. \quad (3.4)$$

Если мы предположим теперь, что переход к точечному нуклону происходит при  $\Lambda_p^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_k^2 \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_p^2 \Lambda_k^{-2} \gg 1$ , то, согласно (3.4),

$\Gamma_n$  оказывается малой при любых значениях  $g_1^2$ . Ряд для всех перекрывающихся диаграмм имеет вид

$$\sum C_n \left\{ g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1} \right\}^n. \quad (3.5)$$

Этот ряд является, по-видимому, асимптотическим [4]. При малых  $g_1^2$  его сумма мала, так как  $g_1^2$  мал. При больших  $g_1^2$  тот же результат связан с большой величиной  $L_p - L_k$ . Однако при  $L_p - L_k \sim \sim 1$  функция, выражаемая суммой (3.5), не зависит от  $g_1^2$  при  $g_1^2 \gtrsim \gtrsim 1$ , хотя она и не может быть представлена точно в виде ряда (3.5). Но независимость этой функции от  $g_1^2$  позволяет пренебречь ею, так как при  $g_1^2 \sim 1$  сумма (3.5) также имеет порядок единицы, в то время как выражение (2.7) имеет порядок  $(L_k - \ln p^2 m^{-2})^{1/2} \gg \gg 1$  в тех же условиях, если  $p^2 \ll \ll \Lambda_k^2$ .

До сих пор мы предполагали, что условие (3.1) выполнено. Если нуклонный импульс больше, чем  $\Lambda_k$ :

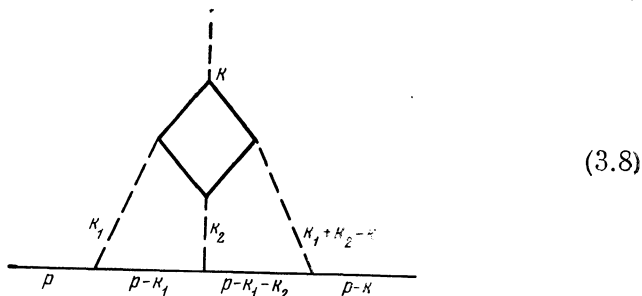
$$k^2 \ll \ll \Lambda_k^2 \ll \ll p^2 \ll \ll \Lambda_p^2. \quad (3.6)$$

то оценка величины  $\Gamma_n$  выполняется следующим образом. Все нуклонные линии могут быть взяты в виде  $\hat{p}^{-1}$  (как и в [8]). Все интегралы по мезонным импульсам определяются в основном областью  $k^2 \sim \sim \Lambda_k^2$ : здесь  $D \sim \sim k^{-2} \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1}$ . В результате получаем

$$\Gamma_n \sim \sim \gamma_5 \left( \frac{\Lambda_k^2}{p^2} \right)^n \left\{ g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1} \right\}^n. \quad (3.7)$$

В этом случае  $\Gamma_n$  оказывается малой не только из-за фактора  $L_p - L_k$  в знаменателе, но также из-за дополнительного множителя  $(\Lambda_k^2/p^2)^n$ . Таким образом, в области (3.6) перекрывающиеся диаграммы также не играют роли.

Перейдем теперь к диаграммам, содержащим мезон-мезонное рассеяние. Простейший входящий в  $\Gamma_n$  график такого типа имеет вид



Предположим, что  $p^2 \sim \sim (p - k)^2 \sim \sim k^2$ .

Матричный элемент для мезон-мезонного рассеяния согласно (2.2) имеет вид

$$\begin{array}{c}
 k_2 \\
 \cdots \cdots \cdots \\
 \boxed{\phantom{000}} \\
 \cdots \cdots \cdots \\
 k_1 \qquad k_3
 \end{array}
 = b \left[ g_1^4 \int_{k^2}^{\Lambda_k^2} Q^{-(12'_{10})+(4'_{10})} \frac{dk^2}{k^2} + g_1^4 (L_p - L_k) \right] =$$

$$= b g_1^4 (L_p - L_k) + b g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right] \{ Q^{(3'_{10})}(k) - 1 \} \frac{4\pi}{3}, \quad (3.9)$$

где  $b$  — числовой фактор ( $\sim 1$ ), а  $k$  — наибольший из векторов:  $k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3$ .

Первый член в (3.9) возникает из-за области нуклонных импульсов в интервале  $\Lambda_k^2 \gg p^2 \gg k^2$ , второй член из-за импульсов в интервале  $\Lambda_p^2 \gg p^2 \gg \Lambda_k^2$ . В (3.9) член  $(-1)$  мал по сравнению с  $Q^{3/2}$  и можно им пренебречь. При этом мы можем только переоценить мезон-мезонное рассеяние. Подставляя (3.9) в (3.8) и учитывая, что (3.8) содержит только одно логарифмическое интегрирование, мы получим для (3.8) значение

$$\begin{aligned}
 & \sim b g_1^4 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-3} \int_{k^2}^{\Lambda_k^2} Q^{-(12'_{10})}(k) \frac{dk^2}{k^2} \left\{ \frac{4\pi}{3} Q^{3/2}(k) \times \right. \\
 & \times \left. \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right] + g_1^2 (L_p - L_k) \right\} = \\
 & = b g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1} \frac{4\pi^2}{3} Q^{-1/2}(k) \Big|_{p^2}^{\Lambda_k^2} + \frac{4\pi}{7} b g_1^4 (L_p - L_k) \times \\
 & \times \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-2} Q^{-5/2}(k) \Big|_{p^2}^{\Lambda_k^2} = \frac{4\pi^2}{3} b g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - \right. \\
 & \left. - L_k) \right]^{-1} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \frac{L_k - \ln p^2 m^{-2}}{(L_p - L_k)(g_1^2/\pi) + 1} \right]^{-4/5} \right\} + \\
 & + \frac{4\pi}{7} b g_1^4 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-2} (L_p - L_k) \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{5g_1^2}{4\pi} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \frac{L_k - \ln p^2 m^{-2}}{1 + (g_1^2/\pi)(L_p - L_k)} \right]^{-7/5} \right\}.
 \end{aligned}$$

Второй член мал во всех фигурных скобках, если  $p^2 \ll \Lambda_k^2$ , и им можно пренебречь (это только увеличивает выражение (3.8)).



Мы получим, таким образом, для (3.8) значение

$$\sim \frac{4\pi^2}{3} b g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-1} + \frac{4\pi}{7} b g_1^4 (L_p - L_k) \times \\ \times \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-2}. \quad (3.10)$$

При больших  $g_1^2$  мы получаем для выражения (3.8) оценку

$$\sim (L_p - L_k)^{-1}. \quad (3.11)$$

Таким образом, (3.8) перестает зависеть от  $g_1^2$ , когда  $g_1^2$  становится большим. Предельное значение (3.8) оказывается малым при  $L_p - L_k \gg 1$ .

Несмотря на то что однократное мезон-мезонное рассеяние оказывается малым эффектом, необходимо отметить, что ряд последовательных актов мезон-мезонного рассеяния не дает сходящегося ряда, даже если используется двухпредельная техника. Сравним две диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} k_1 & & k_1 & & k_1 + k_2 - f \\ \hline & \square & & \square & \square & \\ \hline & k_2 & & k_3 & & f & & k_3 \\ & A & & B & & \end{array} \quad (3.12)$$

Диаграмма  $A$  совпадает с (3.9),  $B$  содержит логарифмический интеграл только по  $f^2$  и согласно (3.9) оказывается равной

$$B \sim b^2 \int_{k^2}^{\Lambda_k^2} \frac{d^2 f}{f^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{3} g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right] Q^{(3/2)}(f) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{7} g_1^4 (L_p - L_k) \right\}^2 Q^{(3/2)}(f) \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right]^{-2}, \quad (3.13)$$

где  $k$  — наибольший из векторов  $k_1, k_2, k_3, k_1 + k_2 - k_3$ . При вычислении (3.13) член, содержащий  $g_1^4 (L_p - L_k)$ , может быть выброшен, если  $k^2 \ll \Lambda_k^2$  ( $Q(k) \gg 1$ ), и мы получаем

$$B \approx g_1^2 \left[ 1 + \frac{g_1^2}{\pi} (L_p - L_k) \right] Q^{(3/2)}(k). \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) совпадает по порядку величины с (3.9), если  $Q \gg 1$  ( $k^2 \ll \Lambda_k^2$ ). Таким образом,  $B$  и  $A$  оказываются одного порядка. Этот факт делает желательным детальное рассмотрение всех диаграмм мезон-мезонного рассеяния. Однако, принимая во внимание общие соображения, основанные на уменьшении вклада

части интеграла действия, соответствующего свободному полю, уже при малых значениях  $g_1^2$ , а также тот факт, что:

1) вся совокупность перекрывающихся диаграмм оказывается малой;

2) каждая диаграмма, содержащая мезон-мезонное рассеяние и входящая в  $\Gamma$ , имеет малый фактор  $(L_p - L_k)^{-1}$  (см. (3.14)), — мы можем утверждать, что с большой степенью вероятности выражения для  $G$ ,  $D$  и  $\Gamma$ , приведенные в (2.2), правильны при любых  $g_1^2$  (т. е. при как угодно больших значениях  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ ). Это обстоятельство приводит к тому, что перенормированный мезонный заряд согласно (2.6) обращается в нуль [6]. Этот результат соответствует выводу из квантовой электродинамики частиц со спином  $1/2$  [5, 8].

Недавно Горьков и Халатников обнаружили, что в квантовой электродинамике частиц со спином нуль перенормированный заряд также равен нулю [11].

Отмеченные выше факты обращения в нуль перенормированных зарядов, вероятно, показывают, что все точечные взаимодействия должны приводить к тому же результату. С этой точки зрения было бы наиболее важным выяснить, приводит ли векторная связь к аналогичному результату.

Обращение в нуль зарядов точечных частиц потребовало бы радикальных изменений в основах существующих теорий. Прежде всего такие изменения могли бы привести к введению новой длины в теорию, и это могло бы, грубо говоря, запретить возрастание  $\Lambda$  до бесконечности.

Необходимо помнить, что новая длина  $r_0$  не может быть слишком малой. В этом случае согласно (2.6)  $g^2$  тоже было бы малым. Из формулы

$$g^2 = \frac{g_1^2}{1 + (g_1^2/\pi) \left( L_p + \frac{1}{4} L_k \right)}$$

следует, что при заданных значениях  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$   $g^2$  достигает максимума при  $g_1^2 = \infty$ :

$$g^2 \leq \frac{\pi}{L_p + \frac{1}{4} L_k}.$$

Предполагая, что  $L_p = L_k = L$ , и подставляя  $\ln(1/m^2 r_0^2)$  вместо  $L$  ( $\Lambda = 1/r_0$ ), получаем

$$g^2 \leq \frac{4\pi}{5} \left[ \ln \frac{1}{r_0^2 m^2} \right]^{-1}.$$

Если  $r_0 \ll 1 m$ , то  $g^2 \ll 1$ . Это значение  $g^2$  противоречит данным, полученным из взаимодействий  $\pi$ -мезонов и нуклонов (особенное внимание необходимо обратить на теорему Кролля — Рудермана

[12]). Таким образом,  $r_0$  должно быть больше или порядка комптоновской длины волны нуклона,  $2 \cdot 10^{-14}$  см. Наиболее вероятно, чтобы  $r_0$  оказалось в интервале  $10^{-14} < r_0 < 10^{-13}$ . Однако, как было отмечено Ландау, эта величина  $r_0$  может привести к некоторым трудностям, если вспомнить о существовании ливней, образованных большим числом  $\pi$ -мезонов и нуклонов, так называемых взрывных ливней. Теория Ферми [13] — Ландау [14] для таких ливней с необходимостью приводит к выводу о высокой вероятности событий с большим переданным импульсом, вплоть до значений порядка  $\sim 100 m$  (для столкновений нуклон-нуклонного типа это соответствует энергии быстрого нуклона порядка  $10^{13}$  эв в лабораторной системе). С другой стороны, если  $r_0 \sim 1/m$ , то, правда при несколько «наивном» понимании  $r_0$ , передачи импульса, значительно превышающие  $m$ , должны быть очень маловероятны. Трудности с взрывными ливнями (если они действительно взрывные) только еще раз подчеркивают необходимость тщательного изучения таких проблем, как мезон-мезонное рассеяние с псевдоскалярной связью<sup>1</sup>, псевдовекторная связь и более общие типы точечных взаимодействий. Однако может случиться, что существующие теории  $\pi$ -мезонных ливней придется пересмотреть и что фактически нет больших передач импульса. Эксперименты, имеющие целью обнаружение новой фундаментальной длины, могли бы быть жизненно важными для прогресса теории элементарных частиц.

Эксперименты с  $\pi$ -мезонами, нуклонами и другими элементарными частицами, обладающими *сильными* взаимодействиями, *не могут* непосредственно служить этой цели. Пока отсутствует новая теория, легко возможна неоднозначная интерпретация этих опытов, поскольку в случае сильных взаимодействий все процессы очень сложны (можно считать, что, с теоретической точки зрения,  $\pi$ -мезоны, нуклоны и частицы, им подобные, даже слишком сложны. С точки зрения атомной физики они больше соответствовали бы сложным атомам, чем водородоподобным атомам). Основные эксперименты должны выполняться с частицами, имеющими слабое взаимодействие (электрон — электрон, электрон —  $\gamma$ -квант,  $\gamma$ -квант —  $\mu$ -мезон).

В заключение я хотел бы выразить мою благодарность Л. Д. Ландау за его ценные замечания, а также А. А. Абрикосову, Б. Л. Иоффе, Е. С. Фрадкуну и И. М. Халатникову за их активное участие в обсуждениях работы.

Академия наук СССР

Получено 24 ноября 1955 г.

<sup>1</sup> Недавно Тер-Мартirosян и Судаков выполнили очень тонкие вычисления мезон-мезонного рассеяния и показали, что оно не нарушает вывода о  $g^2 = 0$ . Такой же результат был получен автором в предположении  $\ln \Lambda_p^2 m^{-2} \gg \gg \ln \Lambda_k^2 m^{-2}$ , ( $\Lambda_p \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ ).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников.* Докл. АН СССР, 1954, 95, 497, 773, 1177.
2. *B. Källén.* Helv. Phys. Acta, 1952, 25, 417; *H. Lehmann.* Nuovo Cimento. 1954, 11, 342.
3. *А. А. Абрикосов, И. М. Халатников.* Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
4. *F. J. Dyson,* Phys. Rev., 1952, 85, 631; *W. Thirring.* Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 33; *C. A. Hurst.* Proc. Cambr. Phys. Soc., 1952, 48, 625; *A. Peterman.* Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 291; *R. Utiyama, T. Imamura.* Progr. Theor. Phys., 1953, 9, 431.
5. *Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 102, 489 (Собр. трудов, № 60).
6. *И. Я. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 104, 51; 1955, 105, 461. (Собр. трудов, №№ 62, 63).
7. *А. Д. Галанин, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников.* Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.
8. *И. Я. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005 (Собр. трудов, № 61).
9. *И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос.* Докл. АН СССР, 1954, 97, 209; *Е. С. Фрадкин.* Докл. АН СССР, 1954, 98, 47; *Н. Н. Боголюбов.* Докл. АН СССР, 1954, 99, 225; *Ю. А. Гельфанд.* ЖЭТФ, 1955, 28, 140; *К. Yamazaki.* Progr. Theor. Phys., 1952, 7, 449; *S. F. Edwards, R. E. Peierls.* Proc. Roy. Soc., 1954, A224, 24; *P. T. Matthews, A. Salam.* Nuovo Cimento, 1954, 12, 563; *K. Symonzik.* Zs. f. Naturfor., 1954, 9a, 809.
10. *J. Schwinger.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, 455, 459.
11. *Л. П. Горьков, И. М. Халатников.* Докл. АН СССР, 1955, 104, 197.
12. *N. Kroll, M. Ruderman.* Phys. Rev., 1954, 93, 233.
13. *E. Fermi.* Progr. Theor. Phys., 1950, 5, 570.
14. *Л. Д. Ландау.* Изв. АН СССР, серия физ., 1953, 17, 61.

## РАВЕНСТВО НУЛЮ ПЕРЕНОРМИРОВАННОГО ЗАРЯДА В ТЕОРИЯХ ПОЛЯ С ТОЧЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ\*

Совместно с В. В. Судаковым и К. А. Тер-Мартirosяном

Дан краткий обзор результатов, полученных применением метода Ландау, Абрикосова и Халатникова к теории псевдоскалярных мезонов. Простейшие соображения перенормируемости приводят к независимому выводу точных выражений для функций Грина и вершинной части. Полученные соотношения между  $g_0^2$ ,  $g_c^2$  и импульсом обрезания  $\Lambda$  таковы, что теория неизбежно приводит к результату, что для точечного взаимодействия (т. е. в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) перенормированный заряд должен быть равен нулю.

Показано, что если ввести два обрезających импульса  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  (соответствующих нуклонному и мезонному импульсам), этот результат может быть строго доказан для любой величины  $g_0^2$  при условии, что соответствующие пределы по отдельности растут достаточно быстро, если  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ . В процессе доказательства оцениваются члены, которыми в уравнении для вершинной части пренебрегается в нулевом приближении. Эти члены соответствуют диаграммам с пересекающимися мезонными линиями и замкнутыми нуклонными петлями.

Показано, что для двух различных способов обрезаний:

- а)  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  и  $[\ln \Lambda_k^2/m^2] [\ln \Lambda_p^2/\Lambda_k^2]^{-1} \ll 1$ ,  
 б)  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  и только  $\{\ln [\Lambda_p^2/\Lambda_k^2]\}^{-1} \ll 1$ ,

вклад этих диаграмм пренебрежимо мал для любых  $g_0$ .

Во втором случае показано, что суммарный вклад бесконечной последовательности диаграмм мезон-мезонного рассеяния имеет тот же порядок величины, что и простейшая диаграмма этого ряда.

Рассмотрена теория с псевдовекторной связью, которая является перенормируемой в случае разложения в ряд обычной теории возмущений. Показано, что перенормировка может быть выполнена без разложения в ряд; перенормированный заряд также равен нулю. Этот результат строго получен только для специального типа обрезаний, а именно, когда выполняется неравенство

$$в) \Lambda_k^2/m^2 [\ln (\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)]^{-1} \ll 1.$$

В заключение обсуждается возможность экспериментальной проверки несостоятельности теории поля с точечным взаимодействием.

\* Phys. Rev., 1956, 103, 784. Перевод О. Д. Далькарова.

# 1. Введение

В работах Ландау, Абрикосова и Халатникова [1] был предложен новый подход к проблеме решения уравнений квантовой теории поля. Точечное взаимодействие трактовалось этими авторами как предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$  нелокального взаимодействия, «размазанного» в радиусе  $1/\Lambda$ , причем в общем случае голая константа  $g_0^2$  зависит от  $\Lambda$ .

Если, кроме того, предположить<sup>1</sup>, что  $g_0^2 \ll 1$ , то появляется возможность представить любую из величин (функция Грина, вершинная часть и т. д.) для больших импульсов, когда  $-p^2 \gg m^2$ ,  $m$  — нуклонная масса (или масса электрона в электродинамике), в виде следующего ряда:

$$f_0 [g_0^2 \ln (\Lambda^2 / -p^2)] + g_0^2 f_1 [g_0^2 \ln (\Lambda^2 / -p^2)] + (g_0^2)^2 f_2 [g_0^2 \ln (\Lambda^2 / -p^2)] + \dots \quad (1)$$

Существенное различие между этим разложением и обычным рядом теории возмущений заключается в том, что все члены, пропорциональные различным степеням величины  $\kappa = g_0^2 \ln (\Lambda^2 / -p^2)$ , собраны вместе в виде замкнутого выражения  $f_n (\kappa)$ . Величина  $\kappa$  не может считаться малой даже для  $g_0^2 < 1$ , так как  $\ln (\Lambda^2 / -p^2)$  может быть произвольно большим<sup>2</sup>. В принципе функции  $f_n (\kappa)$  могут быть найдены с помощью интегральных уравнений Дайсона — Швингера. На самом деле Ландау, Абрикосовым и Халатниковым был определен таким образом член нулевого порядка  $f_0 (\kappa)$  в разложении типа (1) для функции Грина и вершинной части в электродинамике.

Аналогичные вычисления для псевдоскалярной мезонной теории были проведены Абрикосовым, Галаниным и Халатниковым [3]. В случае  $-p^2 \gg m^2$  были получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &\simeq \gamma_3 \alpha (g_0^2, \Lambda^2 / -p^2), \\ G(p) &\simeq \frac{1}{\gamma p} \beta (g_0^2, \Lambda^2 / -p^2), \\ D(p) &\simeq \frac{1}{p^2} d (g_0^2, \Lambda^2 / -p^2), \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Как будет видно, это условие не является существенным для дальнейшего изложения.

<sup>2</sup> Обычный ряд теории возмущений

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{n\nu} (g_0^2)^\nu [\ln (\Lambda^2 / -p^2)]^\nu$$

(см., например, [2]) следует из (1), если  $f_n (\kappa)$  в (1) переписать в следующей форме:

$$f_n (\kappa) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{n+\nu, \nu} \kappa^\nu.$$

где <sup>1</sup> в случае симметричной псевдоскалярной теории

$$\alpha = Q^{1/6}, \quad \beta = Q^{-3/10}, \quad d = Q^{-4/6} \quad (3)$$

и для нейтральной теории

$$\alpha = Q^{-1/6}, \quad \beta = Q^{-3/10}, \quad d = Q^{-2/6}, \quad (4)$$

где

$$Q = 1 + (5g_0^2/4\pi) \ln(\Lambda^2/p^2). \quad (5)$$

Зависимость  $g_0^2$  от  $\Lambda$  и  $g_c^2$  имеет следующую форму [1]:

$$g_0^2 = \frac{g_c^2}{1 - (5g_c^2/4\pi)L}, \quad (6)$$

где  $L = \ln(\Lambda^2/m^2)$  или <sup>2</sup>

$$g_c^2 = \frac{g_0^2}{1 + (5g_0^2/4\pi)L}. \quad (7)$$

Структура выражения (7) такова, что независимо от способа изменения  $g_0^2$  с  $\Lambda$  (единственное условие  $g_0^2 \geq 0$  — требование эрмитовости теории) мы получаем  $g_c^2 \rightarrow 0$ , когда  $\Lambda \rightarrow \infty$  или  $L \rightarrow \infty$ . (Если  $g_0^2 L \rightarrow \infty$ , когда  $L \rightarrow \infty$ , то  $g_c^2 \leq 4\pi/5L \rightarrow 0$ ; если, однако,  $g_0^2 L \rightarrow N$ , где  $N$  — произвольная константа, то  $g_c^2 \leq N/L \rightarrow 0$ .)

Итак, современная теория поля приводит к выводу о том, что перенормированный заряд нуклона равен нулю.

На первый взгляд это заключение может казаться неправильным, так как согласно (6)  $g_0^2$  возрастает с  $\Lambda$ . Начиная с некоторого  $\Lambda$  условие  $g_0^2 < 1$  перестанет выполняться и разложение по степеням  $g_0^2$ , на котором основываются выводы (3), (4) и (7), окажется неудовлетворительным.

Нетрудно видеть, однако, что все соотношения останутся справедливыми для любого  $g_0^2$ , которое не мало, при условии, что «размазанное» взаимодействие с самого начала берется в общей форме [6] и точечное взаимодействие

$$g_0 \bar{\psi}(x) \gamma_5 \tau_\alpha \psi(x) \varphi_\alpha(x)$$

рассматривается как предел для  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_p \rightarrow \infty$  взаимодействия ( $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$  — нуклонный и мезонный предельные импульсы)

$$g_0 \int F_{\Lambda_p \Lambda_k}(x-y, x-z) \bar{\psi}(x) \gamma_5 \tau_\alpha \psi(y) \varphi_\alpha(z) dy dz,$$

<sup>1</sup> Для больших импульсов вершинная часть  $\Gamma_5(p, p-k)$  зависит от максимального из импульсов  $p$ ,  $k$  и  $p-k$ . В дальнейшем предполагается (если нет особых оговорок), что  $p$  — наибольший из импульсов.

<sup>2</sup> Соотношения между  $g_0^2$  и  $g_c^2$ , аналогичные (6) и (7), были получены Ли [4] для специального типа взаимодействия. См. также [5].

где  $F_{\Lambda_p \Lambda_k}(x-y, x-z)$  не равно нулю, если  $z$  и  $y$  находятся вблизи  $x$ , внутри областей с радиусами  $1/\Lambda_p$  и  $1/\Lambda_k$  соответственно. Для  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda_p \rightarrow \infty$

$$F_{\Lambda_p \Lambda_k}(x-y, x-z) \rightarrow \delta(x-y) \delta(x-z)$$

и  $\Lambda_p$  всегда больше, чем  $\Lambda_k$  (в противном случае результаты не отличаются от случая обычного обрезания). После перенормировки результат не должен зависеть от способа стремления к пределу, так как перенормированные величины не содержат никаких «размазывающих» параметров.

Можно показать (см. [6] и ниже), что в двухпредельной технике обрезания все соотношения остаются точно такими же (в области импульсов —  $p^2 < \Lambda_k^2$ ), как и для однопредельного обрезания, единственное отличие состоит в том, что вместо  $\Lambda$  во все формулы входит величина  $\Lambda_k$  и  $g_0^2$  заменяется на

$$\tilde{g}_0^2 = \frac{g_0^2}{1 + (g_0^2/\pi)(L_p - L_k)} \quad (8)$$

в симметричной теории и на

$$\tilde{g}_0^2 = \frac{g_0^2}{1 + (g_0^2/2\pi)(L_p - L_k)} \quad (9)$$

в нейтральной теории: здесь  $L_p = \ln(\Lambda_p^2/m^2)$ ,  $L_k = \ln(\Lambda_k^2/m^2)$ .

Величина  $\tilde{g}_0$  произвольно мала для любой величины  $g_0$ , если разность

$$L_p - L_k = \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)$$

достаточно велика. Следовательно, разложение (1) (в котором  $g_0^2$  заменяется на  $\tilde{g}_0^2$ ) всегда сходится. Более того, первый член ((2), (3), (4) или (7)) ряда такого типа (нулевой порядок по  $\tilde{g}_0^2$ ) будет равен для достаточно малых  $\tilde{g}_0^2$  [7] сумме всего ряда (1) с любой степенью точности.

Итак, соотношение (7), переписанное в виде

$$g_c^2 = \frac{\tilde{g}_0^2}{1 + (5\tilde{g}_0^2/4\pi)L_k}, \quad (10)$$

справедливо с любой степенью точности для произвольного  $g_0$  при условии, что  $\ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)$  достаточно велик.

Для  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  или  $L_k \rightarrow \infty$  это приводит к  $g_c^2 \rightarrow 0$  для произвольной зависимости  $g_0$  от  $\Lambda$ .

Итак, современная мезонная теория с точечным взаимодействием оказывается несостоятельной, так как приводит к абсурдному заключению об отсутствии физического взаимодействия (это утверждение в равной степени применимо к электродинамике [8] <sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Л. Ландау указал на появление этой трудности в современной теории еще



к мезонной теории со скалярной связью и, как будет показано ниже, к теории с псевдовекторной связью).<sup>1</sup>

В этой статье мы дадим простой вывод точных выражений (2) — (5) для функций Грина и формулы (6) для «голового» заряда с помощью свойств перенормируемости (разд. 2). В разд. 3 будет рассмотрен случай двухпредельного обрезания [6]. Оценки применимости формул (2) — (9) в нулевом порядке будут даны в разд. 4—7 с помощью техники двухпредельного обрезания.

Для этих целей проделаны оценки членов, которые соответствуют диаграммам с пересекающимися мезонными линиями и замкнутыми нуклонными петлями, т. е. членов, которыми пренебрегается в нулевом (по  $\tilde{g}_0^2$ ) приближении.

Показано, что для двух возможных случаев ограничений: если в пределе  $L_k \rightarrow \infty$ ,  $L_p - L_k = \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)$  так велико, что

$$L_k/(L_p - L_k) \approx L_k/L_p \ll 1 \quad (а)$$

(так называемое «сверхдвухпредельное обрезание»), и если только

$$(L_p - L_k)^{-1} \ll 1, \quad (б)$$

вклад этих диаграмм пренебрежимо мал для произвольных  $g_0^2$ .

В случае (б) просуммирован вклад бесконечной последовательности диаграмм мезон-мезонного рассеяния, которые оказываются важными в рассматриваемой проблеме, и показано, что суммарный вклад имеет тот же порядок, что и простейшая диаграмма для этого процесса.

Итак, результат (7) (или (10)) и заключение о том, что  $g_c \rightarrow 0$  для  $L_k \rightarrow \infty$ , могут быть строго доказаны не только при условии (а), но также и в случае (б).

Мы рассмотрим (в разд. 9) отдельно теорию с псевдовекторной связью, в которой обычное разложение по  $g_0^2$  не может быть перенормировано.

Однако в более частном случае обрезания, чем (б), для которого

$$\frac{\Lambda_k^2}{m^2(L_p - L_k)} = \frac{\Lambda_k^2}{m^2 \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)} \ll 1, \quad (в)$$

т. е.

$$\frac{\Lambda_p^2}{\Lambda_k^2} \gg \exp\left(\frac{\Lambda_k^2}{m^2}\right),$$

когда  $L_k \rightarrow \infty$ , не представляет трудности доказательство возможности перенормировки для псевдовекторной связи, причем перенормированный заряд также будет равен нулю.

<sup>1</sup> в начале 1954 г.; Фрадкин независимо предположил в конце 1954 г., что перенормированный заряд должен быть равен нулю.

## 2. Вывод формул (2) — (6) для функций Грина и вершинной части из условий перенормировки

Выражения (2) — (5), как и следовало ожидать, обладают свойством перенормируемости:

$$\begin{aligned} \alpha(g_0^2, \Lambda^2 / -p^2) &= \alpha_c(g_c^2, -p^2/m^2) / \alpha_c(g_c^2, \Lambda^2/m^2), \\ \beta(g_0^2, \Lambda^2 / -p^2) &= \beta_c(g_c^2, -p^2/m^2) / \beta_c(g_c^2, \Lambda^2/m^2), \\ d(g_0^2, \Lambda^2 / -p^2) &= d_c(g_c^2, -p^2/m^2) / d_c(g_c^2, \Lambda^2/m^2), \\ g_0^2 &= g_c^2 \alpha_c^2(g_c^2, \Lambda^2/m_c^2) \beta_c^2(g_c^2, \Lambda^2/m^2) d_c(g_c^2, \Lambda^2/m^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Условия (11) могут быть получены из (3) или (4), если переписать выражения для  $Q$  в виде  $Q = Q_0 Q_c$ , где

$$\begin{aligned} Q_c &= 1 - (5g_c^2/4\pi) \ln(-p^2/m^2), \\ Q_0 &= 1 + (5g_0^2/4\pi) \ln(\Lambda^2/m^2), \end{aligned}$$

если определить  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$  и  $d_c$  аналогично  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$ , но с заменой  $Q$  на  $Q_c$ . (Последнее уравнение (11) будет тогда определять зависимость  $g_0^2$  от  $\Lambda$  (6).)

Покажем, что точные выражения (3) и (4) для функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  могут быть получены без решения интегрального уравнения с помощью только условий перенормировки (6) и соображений, аналогичных приведенным в статье Гелл-Мана и Лоу [2] (см. также литературу в статье [10]).

Введем следующую величину:

$$\begin{aligned} g^2(\xi) &= g_0^2 \alpha^2(g_0^2, L - \xi) \beta^2(g_0^2, L - \xi) d^2(g_0^2, L - \xi) = \\ &= g_c^2 \alpha_c^2(g_c^2, \xi) \beta_c^2(g_c^2, \xi) d_c^2(g_c^2, \xi), \end{aligned} \quad (12)$$

которая может быть названа эффективным зарядом для данной величины  $-p^2$  и которая не зависит от  $\Lambda$ . Перепишем теперь в новых обозначениях логарифмы величины  $L^2 / -p^2$  и  $-p^2 / m^2$ , т. е.  $L - \xi = \ln(\Lambda^2 / -p^2)$  и  $\xi = \ln(-p^2 / m^2)$  как функции  $\alpha$ ,  $\alpha_c$  и т. д. Если мы обозначим  $\alpha' = d\alpha/d\xi$  и т. д., то нетрудно видеть, что логарифмические производные функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  по  $\xi$  могут быть выражены как функции только  $g^2$ :

$$\begin{aligned} \alpha'/\alpha &= \alpha'_c/\alpha_c = F_1(g^2), \\ \beta'/\beta &= \beta'_c/\beta_c = F_2(g^2), \\ d'/d &= d'_c/d_c = F_3(g^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим, например, первое из этих уравнений. Согласно (12)  $\xi = \xi(g_c^2, g^2)$  и, следовательно, величина  $\alpha'_c/\alpha_c$ , которая зависит от  $g_c^2$  и  $\xi$ , может быть выражена в виде функций  $g_c^2$  и  $g^2$ . Следовательно, отношение  $\alpha'_c/\alpha_c$ , которое равно  $\alpha'/\alpha$ , может быть пред-

ставлено в форме

$$\alpha'(g_0^2, L - \xi)/\alpha(g_0^2, L - \xi) = F_1 [g_0^2, g^2(g_0^2, L - \xi)]. \quad (14)$$

Здесь подчеркнуто, что согласно (12)  $g^2 = g^2(g_0^2, L - \xi)$ .

Если  $g_0^2$  фиксировано, а  $L$  и  $\xi$  изменяются таким образом, что  $L - \xi$  остается постоянной, то перенормированный заряд  $g_c^2$ , который согласно (11) зависит от  $g_0^2$  и  $\Lambda$ , будет изменяться, если остальные величины в (14) не фиксированы. Соотношение (14) будет, следовательно, выполняться, только если  $F_1$  не зависит от  $g_c^2$ . В этом случае мы приходим к первому уравнению (13) — другие уравнения могут быть доказаны аналогичным образом.

Можно определить точный вид функций  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  в (13), предположив, что  $\xi \rightarrow L$ . При этом условии величина  $\ln(\Lambda^2/p^2) = L - \xi$  невелика и для  $g_0^2 < 1$ ,  $g_0^2(L - \xi)$  также малая величина, т. е. применима обычная теория возмущений. Согласно (12) для  $\xi \rightarrow L$   $g^2 \rightarrow g_0^2$  и  $\alpha = \beta = d = 1$ .

Простые вычисления, выполненные с логарифмической точностью (т. е. при учете только логарифмически расходящихся частей интегралов), приводят в первом порядке теории возмущений для симметричной псевдоскалярной теории<sup>1</sup> к выражениям:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + (g_0^2/4\pi)(L - \xi), \\ \beta &= 1 - (3g_0^2/4\pi)(L - \xi), \quad g_0^2(L - \xi) < 1, \\ d &= 1 - (g_0^2/\pi)(L - \xi). \end{aligned}$$

Итак, для  $\xi \rightarrow L$  получим:

$$\alpha'/\alpha = -g_0^2/4\pi, \quad \beta'/\beta = 3g_0^2/4\pi, \quad d'/d = g_0^2/\pi.$$

<sup>1</sup> Например, для вершинной части после учета изоспиновых переменных и матриц получаем

$$G_5(p, p - k) = \gamma_5 - \frac{g_0^2}{\pi i} \int_0^L \gamma_5 (\hat{p} - \hat{l} - m)^{-1} \gamma_5 (\hat{p} - \hat{k} - \hat{l} - m)^{-1} \gamma_5 (l^2 - \mu^2)^{-1} d^4 l,$$

где в фейнмановских обозначениях:  $\hat{p} \equiv \gamma p \equiv \gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}$ ,  $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ ,  $d^4 k = (2\pi)^{-2} dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$ ,  $iG_0(p) = i(\hat{p} - m)^{-1}$  соответствует нуклонной линии и  $4\pi i D_0(l) = 4\pi i (l^2 - \mu^2)^{-1}$  — мезонной,  $S$ -матрица определена следующим образом:

$$S = T \left\{ \exp \left[ g_0 \int \bar{\Psi} \gamma_5 \tau_a \Psi \Phi_a dx \right] \right\}.$$

Для интегрирования с логарифмической точностью существенна область, в которой  $l$  много больше любого из импульсов  $p$  или  $k$  (т. е. в логарифмической шкале область  $\xi \leq z \leq L$ , где  $z = \ln(-l^2/m^2)$ ). Пренебрегая в этой области импульсами  $p$  и  $k$  и массами  $m$  и  $\mu$  по сравнению с  $l$ , получаем для интеграла величину

$$(-\gamma_5) \int_{\xi}^L (a^4/k^4) = (-i/4) \gamma_5 \int_{\xi}^L dz = (-i/4) \gamma_5 (L - \xi).$$

Значения  $\alpha$  приведены в последующем тексте.

Подставив в (13), получим в первом порядке по  $g^2$ :

$$F_1(g^2) = -g^2/4\pi, \quad F_2(g^2) = 3g^2/4\pi, \quad F_3(g^2) = g^2/\pi.$$

Так как согласно (8) и (9)  $(g^2)' / g^2 = 2F_1 + 2F_2$ , мы приходим к следующему выражению:

$$[g^2(\xi)]' / g^2(\xi) = (5/4\pi) g^2(\xi).$$

Интегрируя это уравнение по  $\xi$  от  $\xi$  до  $L$  (и учитывая, что согласно (12)  $g^2(L) = g_0^2$ ), имеем

$$g^2(\xi) = \frac{g_0^2}{1 + (5g_0^2/4\pi)(L - \xi)} = \frac{g_0^2}{Q(\xi)}. \quad (15)$$

Подставив это выражение для  $g^2(\xi)$  и явный вид  $F_1, F_2$  и  $F_3$  в (13), интегрируя по  $\xi$ , получаем формулу (3). Аналогично в случае нейтральной псевдоскалярной теории:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - (g_0^2/4\pi)(L - \xi), \\ \beta &= 1 - (g_0^2/8\pi)(L - \xi), \quad g_0^2(L - \xi) < 1, \\ d &= 1 - (g_0^2/\pi)(L - \xi), \end{aligned}$$

и мы получаем  $F_1(g^2) = g^2/4\pi, F_2(g^2) = g^2/8\pi, F_3(g^2) = g^2/2\pi$ . Выражение для  $g^2(\xi)$  тождественно при этом выражению (15), и после интегрирования (13) по  $\xi$  немедленно получаем формулы (4) для  $\alpha, \beta$  и  $d$ .

### 3. Случай двухпредельного обрезания

Рассмотрим более подробно теорию с двумя пределами обрезания. Покажем, что все формулы будут тождественны уже полученным при условии, что во всех формулах следует заменить  $g_0^2$  на  $\tilde{g}_0^2$  и  $\Lambda$  на  $\Lambda_k$ .

После исключения спиновых переменных и матриц (простые операции) получим интегральные уравнения Дайсона — Швингера для симметричной<sup>1</sup> псевдоскалярной теории в форме:

$$\Gamma_5(p, p - k) = \theta\gamma_5 - \frac{g_0^2}{\pi i} \int \Gamma_5 G(p - l) \Gamma_5 G(p - k - l) \Gamma_5 D(l) d^4 l, \quad (16)$$

$$\left[ \hat{p} - m - \frac{3g_0^2}{\pi i} \int \Gamma_5 G(p - k) \theta\gamma_5 D(k) d^4 k \right] G(p) = 1, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ k^2 - \mu^2 + \frac{2g_0^2}{\pi i} \int \text{Sp} [G(p) \Gamma_5 G(p - k) \theta\gamma_5 - \right. \\ &\quad \left. - (G(p) \Gamma_5 G(p - k) \theta\gamma_5)_{k^2 = \mu^2}] d^4 p \right\} D(k) = 1 \quad (18) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> В нейтральной теории интегральный член в уравнении для  $\Gamma_5$  положителен, а в уравнениях для  $G$  и  $D$  интегралы входят без коэффициентов 3 и 2.

(обозначения см. прим. на стр. 210). Здесь  $\theta = \theta_{\Lambda_k \Lambda_p}(p, p - k)$  — фурье-компонента размазывающей функции  $F_{\Lambda_p \Lambda_k}(x - y, x - z)$  (для  $\Lambda_k \rightarrow \infty, \Lambda_p \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 1$ ). По определению  $\theta = 0$ , если  $-p^2 > \Lambda_p^2$  или  $-k^2 > \Lambda_k^2$ . В области больших импульсов все величины изменяются очень медленно (логарифмически) и, следовательно, конкретный вид этой функции не важен.

Уравнения (17) и (18) есть точные выражения, в то время как (16) является приближенным уравнением. Последнее уравнение отвечает учету только простейшей диаграммы (рис... 1, *a*) и не учитывает более сложных неприводимых диаграмм (в обычном дайсоновском смысле) с пересекающимися мезонными линиями (например, диаграммы на рис. 1, *b, c* и др.) или с замкнутыми нуклонными петлями — диаграммы на рис. 1, *d, e* и т. д.<sup>1</sup>

Возможность пренебрежения этими диаграммами в разложении типа (1) в нулевом приближении по  $g_0^2$  (или  $\tilde{g}_0^2$ ) будет исследована в дальнейшем более подробно.

Если  $\Lambda_p = \Lambda_k = \Lambda$ , функции (2) — (3) являются решениями уравнений (16) — (18) в случае больших импульсов. Действительно, все интегралы обрезаются при  $-p^2 = \Lambda^2$ , поэтому существ-

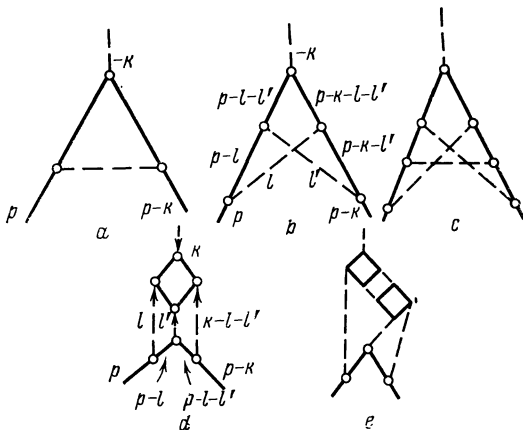


Рис. 1. Вершинные части диаграмм с пересекающимися мезонными линиями (*b, c*) и нуклонными петлями (*d, e*)

венны значения  $p$  и  $k$ , не превышающие этого значения. В случае двухпредельного обрезания  $\Lambda_p \gg \Lambda_k$  и  $\Gamma_5 = 0$ , если хотя бы один из импульсов  $p$  или  $k$  достигает предельного значения (т. е. если  $\theta = 0$ , то согласно (16)  $\Gamma_5 = 0$ ). Итак интегралы (16) и (17) обрезаются при импульсе  $\Lambda_k$ , а (18) при  $\Lambda_p$ . Более того, из (18) следует, что  $d(\eta) = 1$ , если  $-k^2 > \Lambda^2$  или  $\eta = \ln(-k^2/m^2) \gg \gg L_k$ , так как в этом случае функции  $\Gamma_5$  и  $\theta$  равны нулю в интегральном члене в (18).

<sup>1</sup> Все линии и точки на рис. 1 соответствуют точным функциям  $G, D$  и  $\Gamma$ .

Для  $-k^2 < \Lambda_k^2$ . т. е.  $\eta \leq L_k$ , интегральный член в (18) равен нулю. Обозначим  $(k^2 - \mu^2) \Pi$  ту часть интеграла, которая соответствует интегрированию по области  $\Lambda_k^2 < (-p^2) < \Lambda_p^2$ :

$$(k^2 - \mu^2) \Pi = \frac{2g_0^2}{\pi i} \int_{\Lambda_k}^{\Lambda_p} \text{Sp} [G(p) \Gamma_5 G(p-k) \gamma_5 - (G(p) \Gamma_5 G(p-k) \gamma_5)_{k^2=\mu^2}] d^4 p. \quad (19)$$

Как будет показано ниже, в наиболее важной области  $\mu^2 \ll \ll (-k^2) \ll \Lambda_k^2$  безразмерная (положительная) величина  $\Pi$  практически не зависит от  $k^2$ . Принимая во внимание (19), уравнение (18) может быть переписано в форме

$$\left\{ (k^2 - \mu^2) (1 + \Pi) + \frac{2g_0^2}{\pi i} \int_{\Lambda_k}^{\Lambda_p} \text{Sp} [G(p) \Gamma_5 G(p-k) \gamma_5 - (G(p) \Gamma_5 G(p-k) \gamma_5)_{k^2=\mu^2}] d^4 p \right\} D(k) = 1.$$

Подставляя в это уравнение, а также в (16) и (17)

$$D(k) = (1 + \Pi)^{-1} \tilde{D}(k) \quad (\text{или} \quad d(\eta) = (1 + \Pi)^{-1} d(\eta)), \quad (20)$$

получаем для  $\Gamma_5$ ,  $G$  и  $\tilde{D}$  выражения (16), (17) и (18), которые аналогичны соответствующим формулам в случае одного предела обрезания  $\Lambda = \Lambda_k$ . при условии, однако, что  $g_0^2$  заменяется на

$$\tilde{g}_0^2 = (1 + \Pi)^{-1} g_0^2. \quad (21)$$

Очевидно, что в области  $\xi \leq L_k$  решениями для  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  и  $d(\xi)$  будут функции (3), (5) (или (4), (5) для нейтральной теории), полученные выше, если сделать замену  $\Lambda$  на  $\Lambda_k$  и  $g_0^2$  на  $\tilde{g}_0^2$ . Для  $\xi = L_k$  эти функции равны единице; для  $\xi > L_k$  в области  $L_k < \xi \leq L_p$  функции  $\alpha(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  также остаются равными единице. В отличие от  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $d(\eta)$  для  $\eta = L_k$  испытывает скачок [6] от  $(1 + \Pi)^{-1}$  (в соответствии с (20)) для  $\eta = L_k - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  до  $d = 1$  для  $\eta > L_k$ . Приближенные графики  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  и  $d(\xi)$  показаны на рис. 2.

Подставляя в (19) величины (2) для функций  $\Gamma_5$ ,  $D$ ,  $G$  согласно сказанному выше и полагая  $\alpha = \beta = d = 1$  в области интегриро-

<sup>1</sup> Это является следствием того, что интегральный член в (18) равен нулю, когда  $\eta > L_k$ , согласно сделанному выше предположению о поведении функции  $\theta$ .

вания, легко вычислить интеграл

$$\frac{2g_0^2}{\pi i} \int_{L_k}^{L_p} \text{Sp} \left[ \frac{1}{\hat{p}} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}} \gamma_5 - \frac{1}{\hat{p}} \gamma_5 \frac{1}{\hat{p}} \gamma_5 \right] d^4 p \approx$$

$$\approx \frac{k^2 g_0^2}{\pi} \int_{L_k}^{L_p} d\xi = \frac{k^2 g_0^2}{\pi} (L_p - L_k).$$

Следовательно,

$$\Pi = (g_0^2/\pi) (L_p - L_k), \quad (22)$$

и (21) аналогично соотношению (8). В нейтральной теории нет множителя 2 перед интегралом в (18), и  $\Pi$  в этом случае равно

$$\Pi = (g_0^2/2\pi) (L_p - L_k).$$

Итак, мы получаем (9).

Соотношения (7), (8) и (9), которые приводят к нулевому перенормированному нуклонному заряду для точечного взаимодействия, существенным образом зависят от явного вида (3) или (4) функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$ . Вид этих функций определяется уравнения-

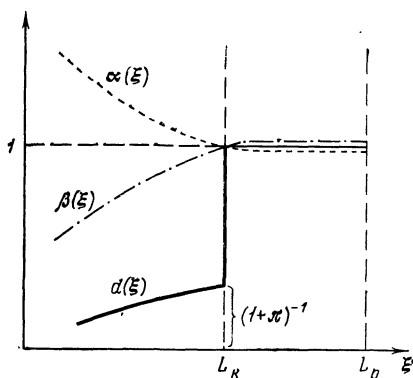


Рис. 2. Поведение функций  $\alpha(\xi)$ ,  $\beta(\xi)$  и  $d(\xi)$  в симметричной теории с двумя пределами обрезания

ми (16), (17) и (18). (Подчеркнем еще раз, что вывод формул (3) и (4) из условий перенормируемости эквивалентен асимптотическому решению уравнений (16) — (18).)

#### 4. Оценка точности нулевого приближения теории

Рассмотрим теорию с двумя пределами обрезания  $\Lambda_k$  и  $\Lambda_p$  (в которой  $g_0^2$  заменяется на  $\tilde{g}_0^2$  в (16) — (18)). Докажем, что в этом случае оказывается справедливым пренебрежение диаграммами, изображенными на рис. 1,  $b - e$ , т. е. диаграммами с пересекающимися мезонными линиями и нуклонными петлями.

Прежде чем отбросить эти члены в (16), их необходимо оценить. Для этой цели должны быть использованы функции (2), (3) и (5) в нулевом приближении (по  $\tilde{g}_0^2$ ).

В общем виде можно показать, что диаграмма с  $n$  пересекающимися мезонными линиями (такого же типа, как на рис. 1,  $b$ ,  $c$  и т. д.) соответствует в (16) члену порядка  $(\tilde{g}_0^2)^{n-1}$  (более точно, члену такого порядка в ряде типа (1), если  $g_0^2$  заменяется на  $\tilde{g}_0^2$  и  $\Lambda$  на  $\Lambda_k$ ).

Это есть простое следствие того факта, что в интегрировании по  $n$  виртуальным мезонным импульсам только один из интегралов расходится (логарифмически) и результат интегрирования пропорционален  $\ln(\Lambda_k^2 - p^2)$ . Итак, вклад диаграммы такого типа должен быть следующего порядка (в оценке используются свободные функции  $D$ ,  $G$  и  $\Gamma$ ):

$$\gamma_5 (\tilde{g}_0^2)^n \ln(\Lambda^2 - p^2) = \gamma_5 (\tilde{g}_0^2)^{n-1} [\tilde{g}_0^2 \ln(\Lambda^2 - p^2)], \quad (23)$$

т. е. порядка  $(\tilde{g}_0^2)^{n-1}$ , поскольку  $\tilde{g}_0^2 \ln(\Lambda^2 - p^2)$  в разложении типа (1) есть величина нулевого порядка. Более точные оценки, получаемые путем подстановки в интегралы выражений (3) или (4) для  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$ , дают вместо  $\tilde{g}_0^2 \ln(\Lambda^2 - p^2)$  числовую функцию  $F_n(\tilde{g}_0^2 \times \ln(\Lambda^2 - p^2))$  порядка единицы. Мы продемонстрируем это в простейшем случае, когда  $n = 2$ ; соответствующая диаграмма показана на рис. 1,  $b$ .

Используя выражения (2) для  $\Gamma_5$ ,  $G$  и  $\tilde{D}$  ( $cD = \tilde{D}/(1 + \Pi)$ ), получаем, что вклад этой диаграммы

$$5 \left( \frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \right)^2 \int \Gamma_5 G(p-l) \Gamma_5 G(p-l-l') \Gamma_5 G(p-l-l'-k) \times \\ \times \Gamma_5 G(p-k-l') \Gamma_5 \tilde{D}(l) \tilde{D}(l') d^4 l d^4 l'$$

(в симметричной теории множитель 5 появляется вследствие изотопических переменных:  $\tau_\mu \tau_\nu \tau_\alpha \tau_\mu \tau_\nu = 5\tau_\alpha$ ; его нет в случае нейтральной теории) может быть представлен в форме

$$- \gamma_5 \left( \frac{\tilde{g}_0^2}{4\pi} \right)^2 5 \int_{\xi}^{L_k} \alpha^5(z) \beta^4(z) \tilde{d}^2(z) dz.$$

Здесь нужно принять во внимание, что важна только логарифмическая область  $\xi \leq z \leq L_k$  [ $z = \ln -l^2/m^2$ ], в которой  $l$  и  $l'$  много больше, чем  $p$  и  $k$ ; кроме того, для фиксированной величины  $l$  интеграл по  $l'$

$$4i \int \frac{\hat{l} \hat{l}'}{(l+l')^2 l'^4} d^4 l'$$

сходится и равен единице, поэтому важны значения  $l' \sim l$  (соответственно мы можем всегда положить  $z' = \ln(-l'^2/m^2) \approx z$ ,



$G(p - k - l - l') \approx G_1^4(p - l - l') \approx G(-l - l') \approx -(\hat{l} + \hat{l}')^{-1} \beta(z)$  и т. д.). Введя переменную  $\tilde{q} = 1 + (5\tilde{g}_0^2/4\pi)(L_k - z)$  и выполнив интегрирование, получим следующий результат:

$$\gamma_5 \tilde{g}_0^2 \frac{(-1)}{4\pi} \int_1^{\tilde{Q}} \alpha^5(\tilde{q}) \beta^4(\tilde{q}) \tilde{d}^2(\tilde{q}) d\tilde{q}, \quad (24)$$

который подтверждает оценку (23) для  $n = 2$ , если  $\tilde{g}_0^2 \ln(\Lambda_k^2 / -p^2)$  заменить в (23) функцией  $F_2(\tilde{Q})$ :

$$F_2(\tilde{Q}) = -\frac{1}{4\pi} \int_1^{\tilde{Q}} \alpha^5 \beta^4 \tilde{d}^2 d\tilde{q} = -\frac{5}{16\pi} (1 - \tilde{Q}^{-4/5}),$$

которая для произвольных  $\tilde{Q} = 1 + (5\tilde{g}_0^2/4\pi)(L_k - \xi)$  есть величина порядка единицы или меньше.

Итак, в нулевом по  $\tilde{g}_0^2$  приближении все диаграммы с пересекающимися мезонными линиями оказываются несущественными. Более трудно оказывается оценить вклад в (16) в всех возможных диаграмм на рис. 1, *d*, *e* и т. д., содержащих произвольное число нуклонных петель.

Рассмотрим диаграмму на рис. 1, *d*, которая содержит в вершине мезон-мезонного рассеяния любую произвольную диаграмму этого процесса, представленную на рис. 3—6 и т. д. (скажем,

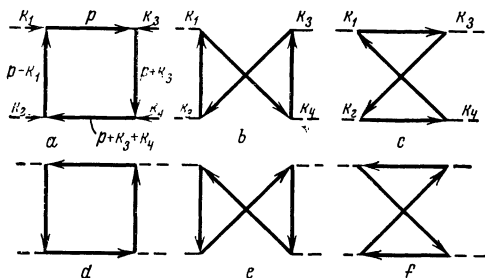


Рис. 3. Диаграммы однократного мезон-мезонного рассеяния

диаграмм с номером  $n$ ). Вклад такой диаграммы (см. рис. 1, *d*) может быть представлен в форме

$$-A \left( \frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \right)^2 \int \Gamma_5 G(p - l) \Gamma_5 G(p - l - l') \Gamma_5 \tilde{D}(l) \times \\ \times \tilde{D}(l') \tilde{D}(k - l - l') R_n(l, l', -k, k - l - l') d^4 l d^4 l',$$

где

$$\left( \frac{\tilde{g}_0^2}{4\pi i} \right) R_n(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (25)$$

(причем  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$ ) обозначает вклад, соответствующий  $n$ -й диаграмме мезон-мезонного рассеяния;  $A$  обозначает

коэффициент, зависящий от изотопических спиновых переменных <sup>1</sup>; этот коэффициент отсутствует в нейтральной теории. Учитывая в интеграле только логарифмическую область  $\xi \leq z \leq L_k$ , получаем по аналогии с (24)

$$\begin{aligned} \gamma_5 \left( \frac{\tilde{g}_0^2}{4\pi} \right)^2 \int_{\xi}^{L_k} \alpha^3(z) \beta^2(z) \tilde{d}^3(z) A R_n(z) dz = \\ = \gamma_5 \frac{\tilde{g}_0^2}{20\pi} \int_1^{\tilde{Q}} \alpha^3(\tilde{q}) \beta^2(\tilde{q}) \tilde{d}^3(\tilde{q}) A R_n(\tilde{q}) d\tilde{q}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $R_n(z)$  и  $R_n(\tilde{q})$  означают выражения типа  $R_n(l, l', -k, k - l - l')$ , где  $l, l'$  и  $k - l - l'$  — достаточно большие величины одного порядка. (В этом случае сумма любых двух импульсов, от которых зависит  $R_n$ , будет того же порядка величины, что и  $l, l'$  или  $k - l - l'$ ; как будет показано, при выполнении этого условия  $R_n$  зависит только от одной переменной,  $R_n = R_n(z)$ .)

Рассмотрим сначала простейшие диаграммы для одно- и двукратного рассеяния (рис. 3 и 4). Согласно (25)  $R_0$  соответствует вкладу шести диаграмм на рис. 3 для однократного рассеяния, а

$$R_1 = R_{1a} + R_{1b} + R_{1c}$$

отвечает вкладу диаграмм на рис. 4. для двукратного рассеяния

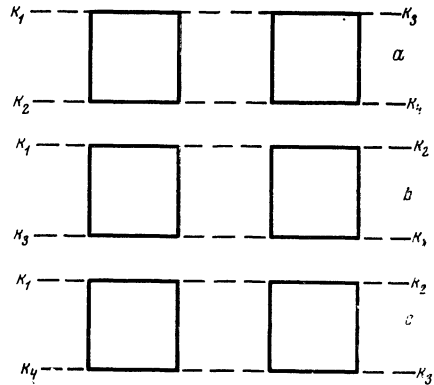


Рис. 4. Диаграммы двукратного рассеяния. Если каждый из квадратов на рис. 4, а заменить одной из диаграмм на рис. 3, то получается 18 идентичных диаграмм. Таким образом, всего имеется  $18 \times 3 = 54$  различных диаграмм

(удвоение числа этих диаграмм (108) может быть получено из рис. 4, если каждый квадратик на рис. 4 заменить одной из диаграмм на рис. 3. Рис. 4, а будет состоять тогда из двух наборов, каждый из которых содержит по 18 идентичных диаграмм). Например, после

<sup>1</sup> Если в симметричной теории  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  обозначают изотопические спиновые переменные мезонных линий  $l, l', -k$  и  $k - l - l'$  на рис. 1, d, то  $A = \tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_3} \tau_{a_4}$  и  $R_n(l, l', -k, k - l - l') = R_{a_1 a_2 a_3 a_4}(l, l', -k, k - l - l')$  зависят от этих переменных.

выделения  $\tilde{g}_0^2 / 4\pi i$  согласно (25) диаграмме на рис. 3, а будет соответствовать следующее выражение:

$$R_{0a} = \frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \int^{\Lambda_p} \text{Sp} [\Gamma_5 G(p) \Gamma_5 G(p + k_3) \Gamma_5 G(p + k_3 + k_4) \times \\ \times \Gamma_5 G(p - k_1)] d^4 p \text{Tr} (\tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_4} \tau_{a_3}). \quad (27)$$

(В нейтральной теории коэффициент  $\text{Tr} (\tau_{a_1} \tau_{a_2} \tau_{a_4} \tau_{a_3})$ , разумеется, отсутствует.) Для любой из 18 диаграмм на рис. 4, а мы можем вычислить величину  $R_{1a}$ , где

$$2R_{1a}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \int^{\Lambda_k} R_0(k_1, k_2, l, l') \tilde{D}(l) \tilde{D}(l') \times \\ \times R_0(-l, -l', k_3, k_4) d^4 l, \quad (28)$$

причем  $l' = -l - k_1 - k_2 = -l + k_3 + k_4$ . Очевидно, что  $R_0$  и  $R_1$  — величины одного порядка (нулевого порядка по  $\tilde{g}_0^2$ ), поскольку  $\tilde{g}_0^2$  в (27) и (28) «поглотился» логарифмически расходящимся интегралом. Это может быть легко показано непосредственным вычислением. Рассмотрим для этого только логарифмическую область  $\eta \leq \xi \leq L_p$  в (27) [ $\eta = \ln(-k^2/m^2)$  — квадрат наибольшего мезонного импульса] и область  $\eta \leq z \leq L_k$  в (28), тогда получим

$$R_0 = \rho_0 \delta_s, \\ \rho_0(\tilde{Q}) = (16/3)(\tilde{Q}^{3/5} - 1) + (4\tilde{g}_0^2/\pi) \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2), \quad (29) \\ \delta_s = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} + \delta_{a_1 a_3} \delta_{a_2 a_4} + \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3},$$

$$R_1 = \rho_1 \delta_s, \quad \rho_1(\tilde{Q}) = -\frac{11}{10} \int_1^{\tilde{Q}} \rho_0^2(\tilde{q}) \tilde{d}^2(\tilde{q}) d\tilde{q}. \quad (30)$$

для симметричной теории или аналогично

$$R_0(\tilde{Q}) = 24(1 - \tilde{Q}^{-1/5}) + (6\tilde{g}_0^2/\pi) \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2), \quad (31)$$

$$R_1(\tilde{Q}) = -\frac{3}{10} \int_1^{\tilde{Q}} R_0^2(\tilde{q}) \tilde{d}^2(\tilde{q}) d\tilde{q} \quad (32)$$

для нейтральной теории.

Подставляя эти величины в (26), можно оценить вклад в (16) диаграмм на рис. 1, *d*, *e*, содержащих один или два нуклонных квадрата. Рассмотрим для простоты случай  $\tilde{Q} \gg 1$  (т. е.  $\tilde{g}_0^2 (L_k - \eta) \gg 1$ ), когда (26) максимально. В этом случае мы можем подставить в (26) согласно (29)  $\rho_0 \approx (16/3) \tilde{Q}^{3/5}$  или согласно (31)  $R_0 \approx 24 + (6\tilde{g}_0^2/\pi) \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2) = \text{const}$ . Тогда получим следующие выражения соответственно в случае симметричной и нейтральной тео-

рии для вклада диаграмм на рис. 1, *d*:

$$\begin{aligned} \gamma_5 (5\tilde{g}_0^2/3\pi) (1 - \tilde{Q}^{-1/2}) &\approx \gamma_5 5\tilde{g}_0^2/3\pi, \\ \gamma_5 (R_0/24\pi) \tilde{g}_0^2 (1 - \tilde{Q}^{-1}) &\approx \gamma_5 (R_0/24\pi) \tilde{g}_0^2 \quad (R_0 = \text{const}). \end{aligned} \quad (33)$$

(В (33) учтено, что в симметричной теории  $A\delta_s = 5\tau_{a_3}$ .) Полученные величины порядка  $\tilde{g}_0^2$  и равны нулю, если  $\tilde{g}_0 \rightarrow 0$ .

Вклад диаграмм типа 1, *e* для двукратного рассеяния может быть аналогично оценен с помощью (30) или (32). Соответствующие величины также порядка  $\tilde{g}_0^2$  и, следовательно, в нулевом приближении теории ими следует пренебречь. (В симметричной теории, например, вклад диаграммы 1, *e* для  $\tilde{Q} \ll 1$  отличается от вклада диаграммы 1, *d* только численным множителем, так как в этом случае согласно (30)

$$\rho_1(\tilde{Q}) \approx -\frac{11}{10} \left(\frac{16}{3}\right)^2 \int_1^{\tilde{Q}} \tilde{q}^{-2/3} d\tilde{q} = -\frac{11}{6} \left(\frac{16}{3}\right)^2 \tilde{Q}^{3/2}.$$

### 5. Сводимые и несводимые диаграммы мезон-мезонного рассеяния

Трудность рассмотрения состоит, однако, в том, что, кроме диаграмм на рис. 1, *d* и *e* для одно- и двукратного рассеяния, существует еще бесконечное множество аналогичных диаграмм с

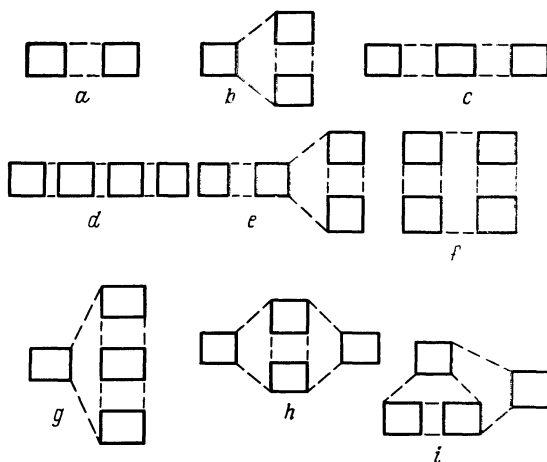


Рис. 5. Примеры «сводимых» диаграмм

большим числом нуклонных квадратов, каждая из которых соответствует вкладу того же порядка в амплитуду рассеяния<sup>1</sup>. При-

<sup>1</sup> На это было указано Ландау и это не относится к электродинамике. В последнем случае (из-за сокращения расходимостей в суммарном вкладе диаграмм рис. 3) величина  $R_1$  порядка  $e_0^2$  по отношению к  $R_0$  будет соответствовать диаграммам на рис. 4 с двумя квадратами. Следовательно, дальнейшее рассмотрение относится только к мезонным теориям.

нимая это во внимание, можно утверждать, что существует бесконечное число диаграмм мезон-мезонного рассеяния, дающих такой же вклад, как (29) и (30) или (31) и (32).

Эти диаграммы могут быть названы «сводимыми». Нуклонные квадраты в этих диаграммах связаны мезонными линиями таким образом, что всякие два нуклонных квадрата, связанные мезонными линиями, могут быть заменены одним квадратом и, следовательно, любая диаграмма такого типа приводится к одной из диаграмм на рис. 3 (например, диаграммы на рис. 5 — «сводимые», в то время как на рис. 6 — «несводимые»). И обратно, с помощью одной из диаграмм на рис. 3 мы можем получить любую диаграмму на рис. 4, 5, *b* и *c* и т. д. Замена одного нуклонного квадрата двумя не изменит порядок величины вклада этой диаграммы, который отличается только появлением лишнего коэффициента  $\tilde{g}_0^4$  и двух расходящихся интегралов (по мезонному и нуклонному импульсам). В результате, грубо говоря, эти диаграммы будут отличаться множителем  $\tilde{g}_0^4 L_p L_k \sim 1$  (если  $L_p \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{g}_0^2 L_p \rightarrow \pi$  и  $\tilde{g}_0^4 L_p L_k \rightarrow \pi \tilde{g}_0^2 L_k$ ).

Переход от диаграммы на рис. 3 к одной из диаграмм на рис. 4 является хорошим примером компенсации лишнего коэффициента  $\tilde{g}_0^2$  появлением расходящегося интеграла. Аналогично, простые оценки показывают, что величина высшего порядка по  $\tilde{g}_0$  соответствует «несводимым» диаграммам.

Если обозначить через

$$(\tilde{g}_0^2/4\pi i) P'(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

вклад всей совокупности диаграмм мезон-мезонного рассеяния

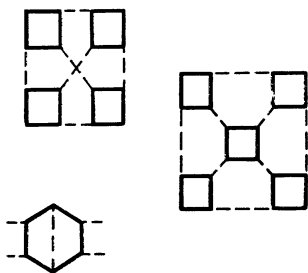


Рис. 6. Примеры «несводимых» диаграмм

(т. е. точное выражение для амплитуды мезон-мезонного рассеяния), то в области больших импульсов  $k_i$  величина  $P'$  может быть представлена в виде ряда, аналогичного (1):

$$P' = P(\tilde{\kappa}) + \tilde{g}_0^2 N(\tilde{\kappa}) + \dots, \quad \tilde{\kappa} = \tilde{g}_0^2 \ln(\Lambda_k^2 / -k^2).$$

Первый член этого ряда, который определяется суммой бесконеч-

ного ряда

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(k_1, k_2, k_3, k_4), \quad (34)$$

содержит вклады только сводимых диаграмм.

Соответственно полный вклад в (16) диаграмм типа рис. 1, *d*, *e* и т. д. с произвольным числом нуклонных квадратов определяется выражением (26), в котором  $R_n$  заменено на полную сумму  $P$ . Оценку полученного таким образом выражения можно сделать, если просуммировать ряд (34) или, по крайней мере, показать, что ряд не расходится.

В дальнейшем будет показано, что трудности, связанные с необходимостью оценки суммы (34) (так называемая «паркетная» проблема), могут быть преодолены, если рассмотреть специальный тип обрезания (б) (так называемое «сверхдвухпредельное обрезание»).

Возможность оценки суммы в (34) будет обсуждена в разд. 7.

## 6. «Сверхдвухпредельное обрезание»

Если при  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  выполнено условие (б), вклад в (34) всех членов суммы, исключая  $R_0$ , будет бесконечно мал и

$$\lim_{\Lambda_k \rightarrow \infty} P = R_0.$$

В самом деле, так как

$$\tilde{Q} = 1 + \frac{\tilde{g}_0^2}{4\pi} \frac{L_k - \eta}{1 + (g_0^2/\pi)(L_p - L_k)},$$

где  $\eta \leq L_k$ , мы получаем для  $L_p - L_k \rightarrow \infty$

$$\tilde{Q} \rightarrow 1 + \frac{\tilde{g}_0^2}{4} \left( \frac{L_k - \eta}{L_p - L_k} \right) \rightarrow 1$$

и, следовательно, согласно (30) или (32)  $R_1 \rightarrow 0$ .

Аналогично все другие члены ряда (34) также равны нулю, так как при замене в любой диаграмме одного нуклонного квадрата двумя появляется лишний коэффициент  $\tilde{g}_0^A L_p L_k$ , который стремится к нулю в рассматриваемом пределе.

Если  $L_k / L_p \ll 1$ ,  $R_0$  согласно (29) или (30) становится константой порядка единицы и согласно (26) для  $P = R_0 = \text{const}$  вклад в (16) всех диаграмм типа 1, *d*, *e* и т. д. будет пропорционален  $L_k / L_p$  и равен нулю для  $L_k \rightarrow \infty$ . (Более точно, в пределе  $L_k \rightarrow \infty$ ,  $(L_k / L_p) \rightarrow 0$  и вклад в (16) любой диаграммы с  $n$ -квадратами пропорционален  $(L_k / L_p)^n$ .)

## 7. Вычисление амплитуды мезон-мезонного рассеяния (34)<sup>1</sup>

Сумма (34) «сводимых» диаграмм удовлетворяет интегральному уравнению, вид которого зависит только от величины  $R_0$ . Для того чтобы получить это уравнение, введем понятие приводимых и неприводимых диаграмм.

Диаграммами, приводимыми по отношению к «разделению» мезонных линий  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$ , будут называться такие диаграммы, которые могут быть разделены по крайней мере на две части, связанные между собой только двумя мезонными линиями. Предположим, более того, что отделение выполняется таким образом, что линии  $k_1$  и  $k_2$  связаны с одной частью, а  $k_3$  и  $k_4$  — с другой (например, диаграммы на рис. 4, *a*, 7, *a* и *c* являются приводимыми). Диаграммы, не обладающие этим свойством, являются неприводимыми по отношению к разделению  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$  (например, диаграммы на рис. 3, 4, *b*, *c*, 7, *b*, *d*)<sup>2</sup>.

Рассмотрим сначала все диаграммы мезон-мезонного рассеяния (т. е. сводимые и несводимые). Обозначим через  $P'$  вклад всех диаграмм, через  $R'(k_1, k_2; k_3, k_4)$  — сумму всех неприводимых диаграмм (в смысле отделения  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$ ) и через  $F(k_1, k_2; k_3, k_4)$  — сумму всех приводимых диаграмм, т. е.

$$P'(k_1, k_2, k_3, k_4) = R'(k_1, k_2; k_3, k_4) + F(k_1, k_2; k_3, k_4), \quad (35)$$

где  $P'$  симметрична по отношению к любой перестановке мезон-

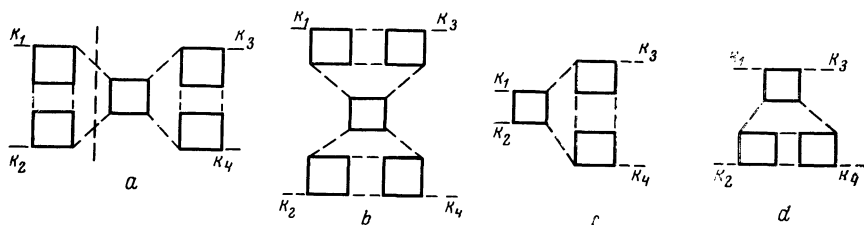


Рис. 7. Диаграммы *a* и *c* — приводимы, в то время как диаграммы *b* и *d* неприводимы в смысле отделения  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$

На Рис. 7, *a* показан способ отделения части диаграммы, связанной с  $k_1$  и  $k_2$  от остальной части диаграммы

ных линий, в то время как  $R'$  и  $F$  инвариантны только при перестановке  $k_1$  и  $k_2$  или  $k_3$  и  $k_4$  или, если  $k_1$  и  $k_2$  заменяются на  $k_3$  и  $k_4$ . Величины  $P'$  и  $R'$  удовлетворяют интегральному уравнению, ана-

<sup>1</sup> Вычисления были выполнены совместно с И. Т. Дятловым [9].

<sup>2</sup> Приводимость или неприводимость диаграммы в этом смысле зависит от того, как расположены в ней мезонные линии. Так, диаграммы на рис. 4, *a* приводимы в смысле отделения  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$ , в то время как диаграммы на рис. 4 *b*, *c* неприводимы.

логичному уравнению Бете — Солпитера:

$$P'(k_1, k_2, k_3, k_4) = R'(k_1, k_2; k_3, k_4) - \frac{\tilde{g}_0^2}{2\pi i} \int \hat{R}'(k_1, k_2; l, l') \tilde{D}(l) \times \\ \times \tilde{D}(l') P'(-l, -l', k_3, k_4) d^4l, \quad (36)$$

где  $l' = -l - k_1 - k_2$ .

Приведем краткий вывод этого уравнения. Рассмотрим произвольную приводимую диаграмму (по отношению к разделению  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$ ) и выберем положение линии разделения таким образом, чтобы часть, относящаяся к  $k_1$  и  $k_2$ , была всегда неприводима (по отношению к отделению  $k_1$  и  $k_2$  от  $l$  и  $l'$ ). Пример такого разделения показан на рис. 7, а. Обозначим через  $\rho_n(k_1, k_2; l, l')$  и  $\sigma_m(-l, -l', k_3, k_4)$  вклады от обеих частей диаграммы; тогда очевидно, что для полного вклада получим следующее выражение:

$$f'_{nm}(k_1, k_2; k_3, k_4) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \int \rho'_n(k_1, k_2; l, l') \tilde{D}(l) \times \\ \times \tilde{D}(l') \sigma'_m(-l, -l', k_3, k_4) d^4l. \quad (37)$$

Просуммируем обе части этого уравнения по всем возможным диаграммам, т. е. по  $n$  и  $m$ , тогда получим уравнение

$$2F'(k_1, k_2; k_3, k_4) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \int \hat{R}'(k_1, k_2; l, l') \times \\ \times \tilde{D}(l) \tilde{D}(l') P'(-l, -l'; k_3, k_4) d^4l, \quad (38)$$

которое эквивалентно (36). В уравнении (38) учтено, что, рассматривая все возможные диаграммы в обеих частях приводимой диаграммы, связанные линиями  $l$  и  $l'$ , мы получаем два одинаковых набора диаграмм. Как результат этого, в левой стороне (38) появляется коэффициент 2, аналогично уравнению (28).

Рассмотрим теперь только сводимые диаграммы, и соответствующие суммы для них обозначим через  $P$ ,  $R$  и  $F$ . В этом случае мы можем применить полностью предыдущие рассуждения и в результате получить следующие уравнения:

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = R(k_1, k_2; k_3, k_4) + F(k_1, k_2; k_3, k_4), \\ F(k_1, k_2; k_3, k_4) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{\pi i} \int \hat{R}(k_1, k_2; l, l') \tilde{D}(l) \tilde{D}(l') \times \\ \times P(-l, -l', k_3, k_4) d^4l. \quad (39)$$

Для решения нашей проблемы мы можем использовать соотношения (39), заметив при этом, что любая «сводимая» диаграмма с необходимостью является приводимой по отношению к отделению некоторой определенной пары мезонных линий от другой



пары (при условии, конечно, что эта диаграмма не является простой диаграммой типа изображенных на рис. 3). Несомненно, что после стягивания любая как угодно сложная «сводимая» диаграмма может быть преобразована в одну из трех диаграмм, изображенных на рис. 4, для которых это утверждение очевидно.

Итак,

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = R_0(k_1, k_2, k_3, k_4) + F(k_1, k_3; k_2, k_4) + \\ + F(k_1, k_4; k_2, k_3) + F(k_1, k_2; k_3, k_4). \quad (40)$$

Учитывая (39), получаем

$$R(k_1, k_2; k_3, k_4) = R_0(k_1, k_2, k_3, k_4) + \\ + F(k_1, k_2; k_3, k_4) + F(k_1, k_3; k_2, k_4)$$

и

$$F(k_1, k_2; k_3, k_4) = -\frac{g_n^2}{2\pi i} \int [R_0(k_1, k_2, l, l') + F(k_1, l; k_2, l') + \\ + F(k_1, l'; k_2, l)] \tilde{D}(l) \tilde{D}(l') [R_0(l, -l', k_3, k_4) + F(-l, k_3; -l', k_4) + \\ + F(-l, k_4; -l', k_3) + F(-l, -l'; k_3, k_4)] d^4 l. \quad (41)$$

Уравнение (41) однозначно определяет функцию  $\bar{F}$ , если известно  $R_0$ .

Если мезонный импульс достаточно велик и рассматривается только логарифмическая область, т. е.  $-l^2 \gg -(k_1 + k_2)^2$ , то (41) принимает более простой вид. Более подробное исследование структуры выражения (41) показывает, что если импульсы  $k_1$  и  $k_2$  достаточно велики, то  $F$  будет зависеть только от двух переменных:  $\zeta = \ln[-(k_1 + k_2)^2/m^2]$  и  $\eta = \ln(-k^2/m^2)$ , где  $k$  — наибольший из импульсов  $k_1$  и  $k_2$ , т. е. в этом случае <sup>1</sup>

$$F(k_1, k_2; k_3, k_4) = \Phi(\eta, \zeta).$$

Если, однако, все суммы  $k_i + k_j$  мезонных импульсов есть величины одного порядка (этот случай представляет наибольший интерес при подстановке в (26)) или если существуют два больших импульса, принадлежащих к различным парам — первый к  $k_1$  и  $k_2$ , а второй к другой паре, тогда  $\eta = \zeta$  и  $F$  зависит только от одной переменной  $F = F(\eta) = \Phi(\eta, \eta)$  (по определению  $\eta$  всегда  $\geq \zeta$ ).

Трудность решения уравнения (41) состоит в том, что функция  $F$  от одной переменной оказывается связанной с величиной  $F(-l, -l'; k_3, k_4) \approx \Phi(z, \eta)$ , зависящей при  $l \rightarrow \infty$  от двух переменных.

<sup>1</sup> Предполагается, что наибольший из импульсов  $k_3$  и  $k_4$  (импульс  $k'$ ) того же порядка величины, что и  $k_3 + k_4 = -(k_1 + k_2)$ ; другими словами,  $F = \Phi(\eta, \zeta, \eta')$ , где  $\eta' = \ln(-k'^2/m^2)$ .

Например, для нейтральной теории получаем

$$F(\eta) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{8\pi} \int_{\eta}^{L_k} [R_0(z) + 2F(z)] [R_0(z) + 2F(z) + \Phi(z, \eta)] \tilde{d}^2(z) dz. \quad (42)$$

Следовательно,  $F(\eta)$  может быть определена, только если известна  $\Phi(z, \eta)$ . По этой причине сначала рассмотрим случай, когда  $k_1$  и  $k_2$  велики по сравнению с их суммой. Тогда получим

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, \xi) = & -\frac{\tilde{g}_0^2}{8\pi} [R_0(\eta) + 2F(\eta)] \int_{\xi}^{\eta} [R_0(z) + 2F(z) + \Phi(z, \xi)] \tilde{d}^2(z) dz - \\ & -\frac{\tilde{g}_0^2}{8\pi} \int_{\xi}^{\eta} [R_0(z) + 2F(z)] [R_0(z) + 2F(z) + \Phi(z, \xi)] \tilde{d}^2(z) dz \quad (43) \end{aligned}$$

и согласно (42)  $\Phi(\eta, \eta) = F(\eta)$ . Уравнения (42) и (43) имеют единственное решение, которое может быть легко получено для  $\tilde{g}_0^2 (L_k - \eta) < 1$  или  $\tilde{g}_0^2 (L_k - \eta) > 1$ . Для симметричной теории все вычисления даны в Приложении, там же приведены соответствующие этому случаю уравнения типа (42) — (43).

Если все возможные суммы  $k_i + k_j$  есть величины одного порядка, то, как мы сейчас покажем, уравнения (42) и (43) эквивалентны простому уравнению для функции<sup>1</sup>

$$P(\eta) = R_0(\eta) + 3F(\eta).$$

Для этого выведем заново уравнение, аналогичное (41). С самого начала, однако, ограничим наше рассмотрение асимптотическими значениями функций и будем рассматривать только логарифмическую область  $\eta \leq z \leq L_k$ .

Произвольная приводимая диаграмма в смысле разделения  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3$  и  $k_4$  состоит из набора диаграмм (по крайней мере двух), связанных мезонными линиями  $l_i$ ,  $l'_i = -l_i + k_1 + k_2$  (рис. 8), причем каждая из этих диаграмм неприводима относительно разделения пары линий  $l_i$ ,  $l'_i$  от  $l_{i+1}$ ,  $l'_{i+1}$  (см. рис. 8). Если импульсы  $l_i$  и  $l_{i+1}$  достаточно велики, то вклад  $i$ -й диаграммы  $f_{n_i}$  будет зависеть в таком случае только от большего из этих импульсов. Запишем это следующим образом:

$$f_{n_i}(z_i, z_{i+1}), z_i = \ln(-l_i^2/m^2),$$

где  $f_{n_i}$  зависит только от большей из величин  $z_i, z_{i+1}$ . В этом слу-

<sup>1</sup> В симметричной теории каждая из трех функций различным образом зависит от изоспиновых переменных, т. е.  $P(\eta) = R_0(\eta) + F_a(\eta) + F_b(\eta) + F_c(\eta)$ , где индексы  $a, b$  и  $c$  соответствуют трем диаграммам на рис. 4 (т. е.  $F_a = F(k_1k_2; k_3k_4)$ ,  $F_b = F(k_1k_3; k_2k_4)$ ,  $F_c = F(k_1k_4; k_2k_3)$ ).

чае, аналогично (37), получаем для полного вклада диаграммы на рис. 8

$$f_{n_0 n_1 \dots n_N}(\eta) = \left( \frac{-\tilde{g}_0^2}{4\pi} \right)^N \int_{\eta}^{L_k} dz_1 \dots \int_{\eta}^{L_k} dz_N f_{n_0}(\eta, z_1) \tilde{d}^2(z_1) f_{n_1}(z_1, z_2) \times \\ \times d^2(z_2) \dots d^2(z_N) f_{n_N}(z_N, \eta), \quad (44)$$

где  $N$  — число неприводимых диаграмм в цепочке на рис. 8, соответствующей данной приводимой диаграмме. Область интегрирования по  $z_1, z_2, \dots, z_N$  может быть разделена на  $N$  областей, в каждой из которых одна из переменных, скажем  $z_i$ , меньше, чем другие. Соответственно (44) может быть представлено как сумма  $N$  интегралов по этим областям

$$f_{n_0 n_1 \dots n_N}(\eta) = \sum_{i=1}^N \frac{-\tilde{g}_0^2}{4\pi} \int_{\eta}^{L_k} f_{n_0 n_1 \dots n_{i-1}}(z_i) \tilde{d}^2(z_i) f_{n_i n_{i+1} \dots n_N}(z_i) dz_i. \quad (45)$$

Здесь  $f_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}}(z_i)$  определена точно таким же образом, как и в (44), т. е. как вклад части рассматриваемой диаграммы (часть I на рис. 8), которая присоединена к линиям  $k_1, k_2$  и  $l_i, l'_i$  и которая должна давать вклад, если  $k_1$  и  $k_2$  — величины того же порядка, что и  $l_i, l'_i$ . Аналогично  $f_{n_i n_{i+1} \dots n_N}(z_i)$  соответствует части II на рис. 8.

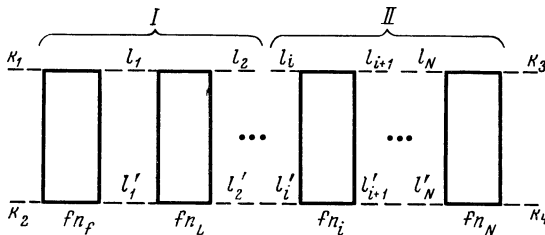


Рис. 8. Разделение приводимой диаграммы на  $N$  неприводимых диаграмм в смысле отделения линий  $l_i$  и  $l'_i$  от  $l_{i+1}$  и  $l'_{i+1}$

По определению

$$\sum_{n_0} f_{n_0}(z_1) = R(z_1) \quad (46)$$

— вклад всех неприводимых диаграмм (по отношению к разделению линий  $k_1$  и  $k_2$  от  $l_1, l'_1$ ) и

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sum_{n_0, n_1, \dots, n_{i-1}} 2^{1-i} f_{n_0 n_1 \dots n_{i-1}}(z_i) = F(z_i) \quad (47)$$

— вклад всех приводимых диаграмм (в этом смысле).

Коэффициент  $2^{i-1}$  (аналогично множителю 2 в (38)) учитывает тот факт, что при суммировании по всем неприводимым диаграммам в каждой «сводимой» части (часть I на рис. 8) появляется  $2^{i-1}$  совершенно одинаковых приводимых диаграмм.

Согласно (46), (47) и (39)

$$P(z) = R(z) + F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n_0 n_1 \dots n_{i-1}} 2^{i-1} f_{n_0 n_1 \dots n_{i-1}}(z). \quad (48)$$

Умножая уравнение (45) на  $1/2^N$  и суммируя по  $N$  и всем  $n_i$ , получаем в соответствии с (47) и (48)

$$F(\eta) = -\frac{\tilde{g}_0^2}{8\pi} \int_{\eta}^{L_k} P(z) \tilde{d}^2(z) P(z) dz. \quad (49)$$

В нейтральной теории  $P(\eta) = R_0(\eta) + 3F(\eta)$  и, следовательно,

$$P(\eta) = R_0(\eta) - \frac{3\tilde{g}_0^2}{8\pi} \int_{\eta}^{L_k} P^2(z) \tilde{d}^2(z) dz. \quad (50)$$

В симметричной теории  $P$  зависит от изотопических спиновых переменных  $a_i$ ,  $P_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\eta) = P(\eta) \delta_s$ , где  $\delta_s$  определено в (29).

Следовательно, для вычисления функции  $F_a$ , соответствующей диаграмме на рис. 4,  $a$ , которая неприводима относительно разделения  $k_1$  и  $k_2$  от  $k_3, k_4$ , можно воспользоваться следующим выражением:

$$\sum_{\nu, \mu=1}^3 P_{a_1 a_2 \nu \mu}(z) P_{\nu \mu a_3 a_4}(z) = [2\delta_s + 5\delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4}] P^2(z).$$

Итак, для величины  $P(\eta) \delta_s = \rho_0 \delta_s + F_a + F_b + F_c$  будем иметь

$$P(\eta) = \rho_0(\eta) - \frac{11\tilde{g}_0^2}{8\pi} \int_{\eta}^{L_k} P^2(z) \tilde{d}^2(z) dz. \quad (51)$$

В рассматриваемом здесь приближении (нулевой порядок по  $\tilde{g}_0^2$  в разложении типа (1)) уравнения (50) или (51) точно определяют  $P(\eta)$ .

Эти уравнения могут быть легко решены после подстановки в них выражений (3) — (4) для функций  $\tilde{d}$  и (29) — (31) для функций  $\rho_0$  и  $R_0$ . Рассмотрим наиболее общий случай, когда помимо обычного взаимодействия в гамильтониан включено прямое

взаимодействие вида <sup>1</sup>  $\lambda_0 \varphi^4$ . Единственное изменение в этом случае состоит в добавлении некоторых постоянных в формулы (29) или (31). Соответственно в (50) или (51) необходимо подставлять следующие величины:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= (16/3)(x-1) + \bar{b}_0, \quad x = \tilde{Q}^{3/2}; \\ R_0 &= 24(1-x) + \bar{b}_0, \quad x = \tilde{Q}^{3/2} \end{aligned} \quad (52)$$

для симметричной и нейтральной теории (здесь  $\bar{b}_0$  — константа) <sup>2</sup> После введения согласно (52) переменной  $x$  уравнения (50) и (51) с учетом (3) и (4), могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned} P(\bar{b}_0, x) &= \frac{16}{3}(x-1) + \bar{b}_0 - \frac{11}{6} \int_1^x P^2(\bar{b}_0, x) \frac{dx}{x^2}, \\ P(\bar{b}_0, x) &= 24(1-x) + \bar{b}_0 - \frac{3}{2} \int_x^1 P^2(\bar{b}_0, x) \frac{dx}{x^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь, как и в дальнейшем, первая формула относится к симметричной теории, а вторая — к нейтральной. Дифференцируя (53) по  $x$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\bar{b}_0, x)}{dx} &= \frac{16}{3} - \frac{11}{6} \left( \frac{P(\bar{b}_0, x)}{x} \right)^2, \\ \frac{dP(\bar{b}_0, x)}{dx} &= -24 + \frac{3}{2} \left( \frac{P(\bar{b}_0, x)}{x} \right)^2, \end{aligned} \quad (54)$$

<sup>1</sup> При наличии этого взаимодействия  $S$ -матрица имеет вид

$$T \left\{ \exp \left[ g_0 \int \bar{\psi} \gamma_5 \tau_\alpha \psi \varphi_\alpha dx + \frac{\lambda_0}{i4!} \int \delta_s \varphi_{a_1} \varphi_{a_2} \varphi_{a_3} \varphi_{a_4} dx \right] \right\}$$

— в симметричной теории и

$$T \left\{ \exp \left[ g_0 \int \bar{\psi} \gamma_5 \psi \varphi dx + \frac{\lambda_0}{i4!} \int \varphi^4 dx \right] \right\}$$

— в нейтральной теории.

<sup>2</sup> Эта константа равна

$$(4/\pi) \tilde{g}_0^2 \ln (\Lambda_p^2 / \Lambda_k^2) + (4\pi \tilde{\lambda}_0 / \tilde{g}_0^2) \quad (\text{или } 4 + (4\pi \lambda_0 / g_0^2))$$

— в симметричной теории и

$$(6/\pi) \tilde{g}_0^2 \ln (\Lambda_p^2 / \Lambda_k^2) + (4\pi \tilde{\lambda}_0 / \tilde{g}_0^2) \quad (\text{или } 6 + (4\pi \lambda_0 / g_0^2))$$

— в нейтральной теории. Выражения в скобках соответствуют случаю  $(\tilde{g}_0^2/\pi) \ln (\Lambda_p^2 / \Lambda_k^2) \gg 1$ , для которого  $(\tilde{g}_0^2/\pi) \ln (\Lambda_p^2 / \Lambda_k^2) \cong 1$ ,  $\tilde{\lambda}_0 = Q_0^{-1} \lambda_0$ .

где согласно (53)  $P(\bar{b}_0, 1) = \bar{b}_0$ . Решая уравнение (54) с граничными условиями, находим

$$P(\bar{b}_0, x) = \frac{16}{11} x \frac{B - x^{-19/3}}{B + (8/11) x^{-19/3}}, \quad x = \tilde{Q}^{3/2}; \quad (55)$$

$$P(\bar{b}_0, x) = \frac{(145)^{1/2} + 1}{3} x \frac{B - x\sqrt{145}}{B + \frac{(145)^{1/2} + 1}{(145)^{1/2} - 1} x\sqrt{145}}, \quad x = \tilde{Q}^{-1/2};$$

где

$$B = \left(1 + \frac{1}{2} \bar{b}_0\right) \left(1 - \frac{11}{16} \bar{b}_0\right), \quad (56)$$

$$B = \left(1 + \frac{(145)^{1/2} + 1}{48} \bar{b}_0\right) \left/ \left(1 + \frac{(145)^{1/2} - 1}{48} b_0\right)\right.$$

Эти формулы показывают, что  $P(\bar{b}_0, x)$  — величина того же порядка, что и  $R_0(x)$ . Подставляя (55) в (26), получаем, как и в (33), что для  $\tilde{Q} \gg 1$  вклад в (16) всех диаграмм с произвольным числом нуклонных петель имеет следующий порядок:

$$\gamma_5 \frac{5\tilde{g}_0^2}{11\pi} (1 - \tilde{Q}^{-1/2}) \approx \gamma_5 \frac{5\tilde{g}_0^2}{11\pi},$$

$$\gamma_5 \frac{(145)^{1/2} + 1}{72\pi} \tilde{g}_0^2 (1 - \tilde{Q}^{-1/2}) \approx \gamma_5 \frac{(145)^{1/2} + 1}{72\pi} \tilde{g}_0^2$$

для симметричной и нейтральной теорий. Очевидно, что для  $\tilde{g}_0^2 \rightarrow 0$  этот вклад равен нулю.

## 8. Перенормировочные свойства амплитуды рассеяния $P(b_0, x)$ .

Вывод формул (54), (55) из свойств перенормируемости

В обычной процедуре перенормировки амплитуда мезон-мезонного рассеяния<sup>1</sup>

$$(g_0^2/4\pi) P(b_0, x)$$

умножается после перенормировки на величину

$$Z_3^2 = d_c^{-2} (g_c^2, L) = d^2 (g_0^2, L).$$

Согласно (12)  $g_c^2 = g_0^2/Q_0$ ,  $Q_0 = 1 + (5g_0^2/4\pi) L$  и, учитывая (3) и (4), имеем  $Z_3^2 = Q_0^{-2/3}$  в симметричной теории и  $Z_3^2 = Q_0^{-1/2}$  в нейтральной

<sup>1</sup> Для простоты мы рассматриваем случай  $\Lambda_p = \Lambda_k = \Lambda$ , когда  $\tilde{g}_0^2 = g_0^2$ ,  $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0$  и величина  $\bar{b}_0$  (см. прим. на стр. 225) равна  $4\pi\lambda_0/g_0^2$ . В случае двухпредельного обрезания величины  $D$ ,  $d$ ,  $g_0^2$ ,  $\lambda_0$ ,  $b_0$  должны быть заменены на  $\bar{D}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{g}_0^2$ ,  $\bar{\lambda}_0$  и  $\bar{b}_0$ .

ной теории. Итак, получаем

$$Z_3^2 \frac{g_0^2}{4\pi} P(b_0, x) = \frac{g_c^2}{4\pi} \frac{P(b_0, x)}{x_0}, \quad (57)$$

где  $x_0 = Q_0^{3/5}$  в симметричной теории и  $x_0 = Q_0^{-1/5}$  в нейтральной теории. После перенормировки  $P(b_0, x)$  заменяется во всех формулах на

$$P_c(x) = P(b_0, x)/x_0,$$

которая является амплитудой мезон-мезонного рассеяния после перенормировки<sup>1</sup>. Так как  $x = x_0 x_c$  (где  $x_0$  и  $x_c$  определяются через  $Q_0$  и  $Q_c$ , так же как  $x$  определяется через  $Q$ ), то в соответствии с (55) имеем

$$P_c(x) = P(b_c, x_c), \quad (58)$$

где  $P$  — функция (55),  $b_c$  — функция  $b_0$ ,  $g_0^2$  и  $L$ , определенная следующими формулами:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2} b_c\right) / \left(1 - \frac{11}{16} b_c\right) &= \left[\left(1 + \frac{1}{2} b_0\right) / \left(1 - \frac{11}{16} b_0\right)\right] x_0^{19/3}, \\ \left(1 + \frac{(145)^{1/2} + 1}{48} b_c\right) / \left(1 + \frac{(145)^{1/2} - 1}{48} b_c\right) &= \\ &= \left[\left(1 + \frac{(145)^{1/2} + 1}{48} b_0\right) / \left(1 + \frac{(145)^{1/2} - 1}{48} b_0\right)\right] x_0^{-\sqrt{145}}. \end{aligned}$$

Если  $P(b_0, x)$  и  $P_c(x)$  заменить величинами:

$$\mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) = \frac{P(b_0, x)}{b_0} = \frac{g_0^2}{4\pi\lambda_0} P\left(\frac{4\pi\lambda_0}{g_0^2}, x\right), \quad (59)$$

$$\mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, \xi) = \frac{g_c^2}{4\pi\theta_c} P_c(x) = \frac{g_c^2}{4\pi\lambda_c} \frac{P(b_0, x)}{x_0}, \quad (60)$$

где согласно (59)  $\mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, 0) = 1$  (так как  $P(b_0, 1) = b_0$  для  $\xi = L$ ,  $x = 1$ ), то перенормировочные соотношения (57) можно переписать в форме, которая полностью аналогична (11).

$\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_c$  являются вершинными частями диаграмм мезон-мезонного рассеяния до и после перенормировки. Согласно (57)

$$\lambda_0 \mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) = \lambda_c d_c^2(g_c^2, \lambda_c, L) \mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, \xi), \quad (61)$$

где  $Z_3^{-2}$  заменяется  $d_c^2(L)$ . Положив  $\xi = L$ , получаем

$$\lambda_0 = \lambda_c d_c^2(g_c^2, \lambda_c, L) \mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, L). \quad (62)$$

<sup>1</sup> Необходимо заметить, что  $P_c(x)$  согласно (55) остается конечною для любой величины  $b_0$ .

Эта формула определяет зависимость  $\lambda_0$  от  $\lambda_c$ ,  $L$  и  $g_c^2$ , точная форма которой приведена выше. Подставляя в (61) величину  $\lambda_c$  из (62), получаем аналогично (11)

$$\mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) = \mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, \xi) / \mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, L). \quad (63)$$

Уравнения (11), (62) и (63) полностью определяют процедуру перенормировки, если только принять во внимание, что  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  в соотношении (6) зависят, при учете прямого мезон-мезонного взаимодействия, от  $\lambda_0$ ; и  $\alpha_c$ ,  $\beta_c$  и  $d_c$  зависят от  $\lambda_c$ .

Покажем, что уравнения (54) и (55) для амплитуды мезон-мезонного рассеяния могут быть получены из этих уравнений аналогично тому, как были получены выше выражения (3) и (4) для функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$ . Введем аналогично (12) эффективный заряд прямого мезон-мезонного взаимодействия

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \lambda_0 \mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) d^2(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) \equiv \\ &\equiv \lambda_c \mathcal{P}_c(g_c^2, \lambda_c, \xi) d_c^2(g_c^2, \lambda_c, \xi). \end{aligned} \quad (64)$$

С помощью метода, аналогичного тому, который был использован, чтобы получить (13), найдем из (11) и (63):

$$\begin{aligned} \alpha' / \alpha &= \alpha'_c / \alpha_c = F_1(g^2, \lambda), \\ \beta' / \beta &= \beta'_c / \beta_c = F_2(g^2, \lambda), \\ d' / d &= d'_c / d_c = F_3(g^2, \lambda), \\ \mathcal{P}' / \mathcal{P} &= \mathcal{P}'_c / \mathcal{P}_c = F_4(g^2, \lambda), \end{aligned} \quad (65)$$

где функции  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  зависят только от эффективных зарядов (12) и (64). В качестве примера приведем доказательство для  $F_4$ . Из (12) и (64) получаем:

$$\xi = \xi(g_c^2, g^2, \lambda), \quad \lambda_c = \lambda_c(g_c^2, g^2, \lambda),$$

следовательно, отношение  $\mathcal{P}'_c / \mathcal{P}_c$ , которое есть функция  $g_c^2$ ,  $\lambda_c$  и  $\xi$ , может быть выражено как функция  $g_c^2$ ,  $g^2$  и  $\lambda$ . Итак,  $\mathcal{P}' / \mathcal{P}$ , которое равно  $\mathcal{P}'_c / \mathcal{P}_c$ , может быть представлено в следующей форме:

$$\mathcal{P}'(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) / \mathcal{P}(g_0^2, \lambda_0, L - \xi) = F_4(g_c^2, g^2, \lambda). \quad (66)$$

Если величины  $g_0^2$  и  $\lambda_0$  фиксированы в этом уравнении и  $L$  и  $\xi$  изменяются таким образом, что разность  $L - \xi$  остается константой, то можно легко заметить (см. аналогичное уравнение (14)), что единственной изменяющейся величиной в (66) будет  $g_c^2$ . Равенство (66), следовательно, может выполняться только, если  $F_4$  не зависит от  $g_c^2$ , т. е. мы приходим к уравнению (65). Аналогичное доказа-



тельство может быть проведено и в остальных случаях. Логарифмические производные эффективных зарядов (12) и (64)

$$\begin{aligned} [g^2]' / g^2 &= 2F_1(g^2, \lambda) + 2F_2(g^2, \lambda) + F_3(g^2, \lambda), \\ \lambda' / \lambda &= F_4(g^2, \lambda) + 2F_3(g^2, \lambda) \end{aligned} \quad (67)$$

могут рассматриваться (если известны функции  $F$ ) как дифференциальные уравнения для  $g^2(\xi)$  и  $\lambda(\xi)$ . Эти уравнения могут быть решены, учитывая следующие граничные условия:  $g^2(L) = g_0^2$ ,  $\lambda(L) = \lambda_0$ . Предположим, что  $\xi \rightarrow L$ ,  $\lambda_0 \ll 1$ ,  $g_0^2 \ll 1$  (и  $\lambda_0 \sim g_0^2$ ), и, используя теорию возмущений, определим функции  $F_i$ . Для  $F_1, F_2$  и  $F_3$  получим прежние выражения (так как прямое мезонное взаимодействие в этом случае будет эффектом высшего порядка) и, следовательно, для  $g^2(\xi)$  получим выражение (15)

$$g^2(\xi) = g_0^2 / Q(\xi).$$

Чтобы получить  $F_4$ , необходимо определить  $P$  в первом порядке по  $g_0^2$  и  $\lambda_0$ .

Из диаграмм на рис. 9 мы имеем для симметричной и нейтральной теорий:

$$\lambda_0 \mathcal{P}^0 = \lambda_0 + \frac{g_0^4}{\pi^2} (L - \xi) - \frac{11}{2} \lambda_0^2 (L - \xi),$$

$$\lambda_0 \mathcal{P}^0 = \lambda_0 + \frac{3g_0^4}{2\pi^2} (L - \xi) - \frac{3}{2} \lambda_0^2 (L - \xi)$$

(три члена в этих формулах соответствуют диаграммам  $a$ ,  $b$  и  $c$  на рис. 9). Итак,  $F_4 = (\mathcal{P}' / \mathcal{P})_{\xi \rightarrow L} = \frac{11}{2} \lambda - \frac{g^4}{\pi^2 \lambda}$  — для симметричной теории и  $F_4 = (3/2) \lambda - (3g^4 / 2\pi^2 \lambda)$  — для нейтральной теории.

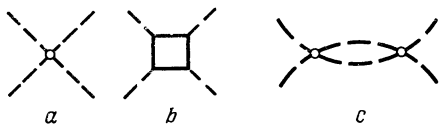


Рис. 9. Существенные диаграммы в теории возмущений для  $\lambda_0 \sim g_0^2$

Подставляя в (67) эти значения  $F_4$  и величины  $g^2$ , определенные выше, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} = \frac{11}{2} \lambda(\xi) - \frac{g_0^4}{\pi^2 \lambda(\xi) Q(\xi)} + \frac{2g_0^2}{\pi Q(\xi)},$$

$$\frac{\lambda'(\xi)}{\lambda(\xi)} = \frac{3}{2} \lambda(\xi) - \frac{3g_0^4}{2\pi^2 \lambda(\xi) Q(\xi)} + \frac{g_0^2}{\pi Q(\xi)}.$$

Эти уравнения непосредственно приводят к (54), если согласно (64) сделать подстановку  $\lambda(\xi) = (g_0^2 / 4\pi) P(b_0, x) \tilde{a}^2(x)$  и перейти к переменной  $x = Q^{1/2}$  — для симметричной теории и  $x = Q^{-1/2}$  — для нейтральной теории [10].

## 9. Равенство нулю мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью

Хорошо известно, что в рамках обычной теории возмущений теория с псевдовекторной связью неперенормируема. Это, однако, не может использоваться как аргумент против возможности подхода, в котором разложение по степеням  $g_0^2$  не применяется.

Рассмотрим теорию с двумя пределами обрезания. Ограничимся наиболее простым случаем

$$(\Lambda_k^2/m^2) [\ln (\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)]^{-1} \ll 1. \quad (в)$$

Покажем, что в этом случае <sup>1</sup> уравнения Швингера — Дайсона:

$$\Gamma(p, p-k) = \theta \gamma_5 \hat{k} + \frac{g_0^2}{m^2 \pi i} \int \Gamma G(p-l) \Gamma G(p-k-l) \Gamma D(l) d^4 l + \dots, \quad (68)$$

$$\left[ \hat{p} - m - \frac{3g_0^2}{\pi i m^2} \int \theta \gamma_5 \hat{k} G(p-k) \Gamma D(k) d^4 k \right] G(p) = 1, \quad (69)$$

$$\left\{ k^2 - \mu^2 + \frac{2g_0^2}{m^2 \pi i} \int \text{Sp} [\Gamma G(p) \theta \gamma_5 \hat{k} G(p-k) - (\Gamma G(p) \theta \gamma_5 \hat{k} G(p-k))_{k^2=\mu^2}] d^4 p \right\} D(k) = 1 \quad (70)$$

(где  $\theta$  — обрезаящая функция,  $\mu$  — наблюдаемая масса мезона и  $m$  — «голая» нуклонная масса, которая, как будет показано ниже, равна наблюдаемой массе) имеют простое решение вида

$$G(p) = (\hat{p} - m)^{-1};$$

$$\Gamma(p, p-k) = \begin{cases} \gamma_5 \hat{k}, & \text{если импульс меньше предельного,} \\ 0 & \text{в обратном случае;} \end{cases} \quad (71)$$

$$D(k) = \left[ 1 + \frac{4g_0^2}{\pi} \ln (\Lambda_p^2/\Lambda_k^2) \right]^{-1} \tilde{D}(k), \quad (72)$$

$$\tilde{D}(k) = (k^2 - \mu^2)^{-1}.$$

Прежде всего докажем, что (72) является следствием (70) и (71). Подставив (71) в (70), получим для подынтегрального выражения

$$\text{Sp} \left[ \gamma_5 \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_5 \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \right] = \text{Sp} \left[ \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - m} \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \right] - \frac{8m^2 k^2}{(p^2 - m^2)((p-k)^2 - m^2)}.$$

<sup>1</sup> В этом случае рассматривается только нейтральная теория.  $S$ -матрица имеет вид  $T \{ \exp [(g_0/m) \int \bar{\psi} \gamma_5 (-i \gamma_\mu \partial_\mu \varphi) \psi dx] \}$ , где  $g_0$  — безразмерная константа связи.

Член

$$\text{Sp} \left[ \hat{k} \frac{1}{\hat{p}-m} \hat{k} \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}-m} \right] = \hat{k} \frac{1}{\hat{p}-m} - \hat{k} \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}-m}$$

не дает вклада в интеграл (70) (см. [11])<sup>1</sup>.

Второй член может быть переписан в следующей форме:

$$\frac{-8m^2k^2}{(p^2-m^2)((p-k)^2-m^2)} = \frac{-8m^2k^2}{(p^2-m^2)^2} - 8m^2k^2 \frac{2pk-k^2}{(p^2-m^2)^2[(p-k)^2-m^2]}. \quad (73)$$

Нетрудно видеть, что второй член в (73) приводит к сходящемуся интегралу в (70), в то время как интеграл от первого члена расходится логарифмически. Эта часть интеграла в области  $\Lambda_k^2 < (-p^2) < \Lambda_p^2$  может быть записана в форме  $(k^2 - \mu^2) \Pi$ , где

$$\Pi = (4g_0^2/\pi) \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2).$$

Учитывая в (10) только наибольшую, логарифмически расходящуюся часть интеграла и вынося величину  $(1 + \Pi)$  за скобки в (70), получаем следующее выражение для  $\tilde{D} = (1 + \Pi) D(k)$ :

$$\tilde{D}^{-1}(k) \approx (k^2 - \mu^2) [1 - (4g_c^2/\pi) \ln(\Lambda_k^2/k^2)], \quad (74)$$

$$g_c^2 = (1 + \Pi)^{-1} g_0^2 = \frac{g_0^2}{1 + (4g_0^2/\pi) \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)}, \quad (75)$$

которое тождественно (72), так как  $g_c^2 \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)$  согласно (в) бесконечно малая величина. В соответствии с (74) и (72)  $g_c^2$  есть перенормированный заряд. Итак, если (72) подставить в (68) и (69),  $g_0^2$  заменится на  $g_c^2$  и свободная функция распространения  $\tilde{D}$  заменится всюду на  $D$ .

Уравнения (68) и (69) будут выполнены в этом случае, т. е. интегральные члены, содержащиеся в них, бесконечно малы. Чтобы доказать это, оценим интегральный член в (69)

$$M(p) = -\frac{3g_c^2}{m^2\pi i} \int_{\Lambda_k}^{\Lambda_k} \gamma_5 \hat{k} \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}-m} \gamma_5 \hat{k} \frac{\gamma_5 d^4 k}{k^2 - \mu^2}.$$

Мы имеем

$$M(p) \approx \hat{p} \frac{3}{4} g_c^2 \Lambda_k^2 / m^2 \quad (76)$$

<sup>1</sup> Необходимо заметить, что если процедуру обрезания выполнить таким образом, что  $\text{Sp} [\hat{k} (\hat{p}-m)^{-1} \hat{k} (\hat{p}-\hat{k}-m)^{-1}]$  приводит к нулевому результату, то доказательство равенства нулю перенормированного заряда оказывается более простым.

с точностью до членов порядка  $m^2/-p^2$ ,  $-p^2/\Lambda_k^2$  по сравнению с 1. Если  $-p^2$  не мал по сравнению с  $\Lambda_k^2$ , величина  $M(p)$  будет даже меньше.

Если, однако,  $\hat{p} = m$ , то величина  $M(m) = \Delta m$  будет соответствовать изменению массы вследствие взаимодействия с мезонным полем. В этом случае, разлагая  $(\hat{p} - \hat{k} - m)^{-1}$  в ряд по  $m$ , получаем

$$M(m) = \Delta m \approx \frac{3}{4} m g_c^2 \Lambda_k^2 / m^2. \quad (77)$$

Согласно (75) и (в),  $g_c^2 \Lambda_k^2 / m^2 \ll 1$ , (76) и (77) — пренебрежимо малые величины ((77), в частности, показывает, что  $\Delta m / m \ll 1$ , т. е. «голая» нуклонная масса равна наблюдаемой).

В точном уравнении (68), кроме члена, выписанного выше, который соответствует простейшей диаграмме на рис. 1, *a*, должны быть приняты во внимание также и другие члены, соответствующие диаграммам с пересекающимися мезонными линиями и нуклонными петлями (см. рис. 1).

Рассмотрим сначала случай, когда импульсы  $p$ ,  $p - k$ ,  $k$ , соответствующие свободным концам в (68), малы по сравнению с  $\Lambda_k$ . Не составляет труда оценить вклад в (68) члена

$$\frac{g_c^2}{m^2 \pi i} \int^{\Lambda_k} \gamma_5 \hat{l} \frac{1}{\hat{p} - \hat{l}} \gamma_5 \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - \hat{l}} \gamma_5 \hat{l} \frac{d^4 l}{l^2} \approx \gamma_5 \hat{k} \frac{g_c^2}{4\pi} \frac{\Lambda_k^2}{m^2}.$$

Очевидно, что это выражение пренебрежимо мало по сравнению с  $\gamma_i \hat{k}$ .

Рассмотрим теперь произвольную диаграмму типа рис. 1, *b* и *c* с  $n$  пересекающимися мезонными линиями. Вклад такого типа диаграмм пропорционален  $(g_c^2)^n$ ; под интегралом мы имеем  $n$  функций  $\bar{D} = (k^2 - \mu^2)^{-1}$ ,  $2n$  функций  $G$  и  $2n$  функций  $\Gamma$ , число интегрирований по импульсам мезонов  $k_1, k_2 \dots k_n$ , равно  $n$ . Порядок величины этого интеграла можно только переоценить, если интегрировать независимо по каждому  $-k_i^2$ , начиная с  $-p^2$  (или  $-k^2$ , так как для  $-p^2 \ll \Lambda_k^2$  и  $-k^2 \ll \Lambda_k^2$  нижний предел не важен вследствие квадратичной расходимости интегралов). Итак, мы получаем следующую оценку для вклада  $I_n$  от рассматриваемой диаграммы

$$I_n \approx \gamma_5 \hat{k} C_n (g_c^2)^n (\Lambda_k^2 / m^2)^n, \quad (78)$$

где  $C_n$  — численный коэффициент. Очевидно, что величина (78) как угодно мала при  $g_c^2 \Lambda_k^2 / m^2 \ll 1$ .

Рассмотрим теперь диаграммы типа рис. 1, *d*, *e* и т. д., которые включают мезон-мезонное рассеяние. Элементарный «квадрат» на рис. 3 в случае псевдовекторной связи не приводит к расходимости и дает вклад по порядку величины, равный

$$g_c^2 (-k^2 / m^2)^2, \quad (79)$$

если  $(-k^2) \sim (-k_1^2) \sim (-k_2^2) \sim (-k_3^2)^2 \sim -(k_1 + k_2 + k_3)^2$ . Сравним теперь эту величину с вкладом диаграммы на рис. 4, содержащей два квадрата. Используя (71) и (72), получаем следующую оценку для этой диаграммы:

$$\frac{g_c^8 k^4}{m^8} \int^k d^4l \sim g_c^4 \left( \frac{-k^2}{m^2} \right)^2 \left( g_c^2 \frac{\Lambda_k^2}{m^2} \right)^2. \quad (80)$$

Итак, по порядку величины (80) отличается от (79) на коэффициент  $(g_c^2 \Lambda_k^2/m^2)^2 \ll 1$  и, следовательно, бесконечно мало по сравнению с (79). Тогда вклад последовательной серии диаграмм мезон-мезонного рассеяния сходится достаточно быстро и практически равен (79). Другими словами, вклад всех диаграмм с нуклонными петлями типа рис. 1, *d* и *e* практически равен вкладу  $S_{1d}$  одной диаграммы на рис. 1*d*; эта величина может быть непосредственно оценена

$$S_{1d} \sim \gamma_5 \hat{k} C_{1d} \left( g_c^2 \frac{\Lambda_k^2}{m^2} \right)^3 \ll \gamma_5 \hat{k},$$

где  $C_{1d}$  — константа.

Полученные таким образом оценки показывают, что вклад всех диаграмм с пересекающимися линиями и нуклонными петлями, типа показанных на рис. 1, может быть представлен в виде ряда

$$\gamma_5 \hat{k} \sum_n B_n \left( g_c^2 \frac{\Lambda_k^2}{m^2} \right)^n \approx \gamma_5 \hat{k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \frac{\pi}{4} \frac{\Lambda_k^2}{m^2 \ln(\Lambda_p^2/\Lambda_k^2)} \right]^n, \quad (81)$$

где  $B_n$  — численные множители. Очевидно, что этот ряд является асимптотическим. Однако его сумма может быть сделана как угодно малой по сравнению с  $\gamma_5 \hat{k}$  при выполнении условия (в). Итак,  $\Gamma$  действительно равна  $\gamma_5 \hat{k}$  в соответствии с (71).

До сих пор мы считали импульсы  $p$  и  $k$  малыми по сравнению с  $\Lambda_k$ . Если это условие не выполнено, различие между  $\Gamma$  и  $\gamma_5 \hat{k}$  будет даже меньше, чем в случае, рассмотренном выше (аналогично случаю электродинамики или теории с псевдоскалярной связью). Например, если

$$-p^2 \gg \Lambda_k^2, \quad -k^2 \ll \Lambda_k^2,$$

то величина  $1/\hat{p}$  (вместо  $1/\hat{k}$ ) соответствует нуклонной линии в диаграммах на рис. 1, *b*, *c* и т. д. Вместо (78) получим следующую оценку вкладов диаграмм с  $n$  пересекающимися мезонными линиями:

$$I_n \simeq \gamma_5 \hat{k} C'_n \left( \frac{\Lambda_k^2}{-p^2} \right)^n \left( g_c^2 \frac{\Lambda_k^2}{m^2} \right)^n,$$

которая меньше, чем соответствующая величина в (78).

Итак, усиливая неравенство (в) в пределе  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ , мы можем с любой степенью точности удовлетворить уравнениям (68)—(70) с функциями (71) и (72).

Соотношение (75), которое устанавливает связь между перенормированным и «голым» зарядами, указывает, что для  $\Lambda_k \rightarrow \infty$

$$g_c^2 \rightarrow 0$$

аналогично результату, полученному в электродинамике и теории с псевдоскалярной связью.

## 10. Заключение

Результат  $g_c^2 \rightarrow 0$  был получен строго для теории с псевдоскалярной связью двумя различными способами (а) и (б) предельного перехода  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ . В обоих случаях в пределе  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  физическое взаимодействие исчезало; итак, при этих условиях результат  $g_c^2 \rightarrow 0$  на зависит от способа обрезания. Существенно, что в теории не возникает неоднозначности в результатах и после перенормировки все результаты не зависят от формфакторов, т. е. от природы процесса обрезания (параметры типа  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ , которые характеризуют «размазанность», не появляются в теории после перенормировки; они остаются только в формулах, относящихся к перенормированным величинам). Это означает, что, с точки зрения теории, различные способы обрезания эквивалентны, т. е. в пределе  $\Lambda_k \rightarrow \infty$  возможны любые соотношения<sup>1</sup> между  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ .

Другими словами, физические результаты для фиксированных конечных расстояний не зависят от способа обрезания, т. е. от соотношений между  $\Lambda_p$  и  $\Lambda_k$ , которые в пределе относятся к бесконечно малым расстояниям.

Из предыдущего рассмотрения видно, что необходимы два предела обрезания для того, чтобы величина эффективного заряда  $g_0$  была малой во всей области импульсов, вплоть до  $\Lambda_k$ , вне зависимости от того, насколько велик был голый заряд  $g_0$ . При этом благодаря малости  $g_0^2$  все величины медленно (логарифмически) зависят от импульсов и могут быть разложены в ряд типа (1). Следовательно, введение двух пределов обрезания существенно упрощает решение проблемы, так как в этом случае теория с произвольным значением  $g_0$  непосредственно приводит к выводу о малости перенормированного заряда (если  $\Pi \gg 1$ ) и справедливости разложения (1) и формулы (7) (иначе, проблема непосредственно приводит

<sup>1</sup> Это не означает, что размазывающая функция  $\theta$  может быть введена произвольным образом. Она должна удовлетворять требованию, чтобы  $\theta \Lambda_k \rightarrow 1$ , когда  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ . Так как перенормированные теории включают логарифмические и даже квадратично расходящиеся интегралы, важно, чтобы  $\theta \Lambda_k$  стремилась к единице достаточно быстро с увеличением импульса. В противном случае будут нарушены некоторые более общие условия (например, представление Лемана), которые должны выполняться в любой физически обоснованной теории. Результаты, получаемые в этом случае, не будут иметь физического смысла.

к случаю, когда взаимодействие выключено, если (б)  $\Pi^{-1} \ln (\Lambda_k^2/m^2) \rightarrow 0$  или (в)  $\Pi^{-1} \Lambda_k^2/m^2 \rightarrow 0$ ). Так как результаты не зависят от способа обрезания, то равенство нулю перенормированного заряда  $g_c^2$  можно также ожидать и в теории с одним пределом обрезания, в которой  $\Lambda_p = \Lambda_k$ . (Согласно (7) для достаточно малых  $g_0$  это утверждение заведомо справедливо.) Если, однако,  $g_0^2$  не мало в теории с одним пределом обрезания, все функции будут зависеть (не логарифмически) от импульса вблизи верхнего предела и для решения проблемы потребуется более тонкая математическая техника. Несмотря на это, уже сейчас можно высказать некоторые общие соображения, которые указывали бы на равенство нулю перенормированного заряда.

Для простоты рассмотрим случай электродинамики, где  $e_0^2 \ll \ll 1$ . Тогда [4]  $\alpha = \beta = 1$  и

$$d(k) = [1 + (e_0^2/3\pi) \ln (\Lambda^2/-k^2)]^{-1} \approx (3\pi/e_0^2) [\ln (\Lambda^2/-k^2)]^{-1}.$$

Последнее равенство относится к случаю, когда  $(e_0^2/3\pi) \ln (\Lambda^2/-k^2) \geq 1$ . Обратная пропорциональность между функцией  $D = = k^{-2} d(k)$  и  $e_0^2$  указывает, что в лагранжиане системы можно пренебречь членами, относящимися к свободному полю. (Нетрудно видеть, что в этом случае среднее по вакууму от  $T(A_\mu(x) A_\nu(y))$  обратно пропорционально  $e_0^2$ .) Если, однако, лагранжиан свободного поля не играет сколько-нибудь существенной роли при  $e_0^2 \ll 1$ , естественно предположить, что с уменьшением  $e_0^2$  его роль будет становиться даже меньше. Следовательно,  $[d(k)]^{-1}$  должно быть также пропорционально  $e_0^2$  для  $e_0^2 > 1$ , т. е.  $e_0^2 d(k)$  не зависит от  $e_0^2$  и всегда имеет форму  $e_0^2 d(k) \approx 3\pi [\ln (\Lambda^2/-k^2)]^{-1}$  (если только  $-k^2$  не приближается к  $\Lambda^2$  слишком близко). Итак, для  $e_c^2$  получаем

$$e_c^2 = 3\pi [\ln (\Lambda^2/m^2)]^{-1} \rightarrow 0$$

даже в случае, когда  $e_0^2 < 1$ .

Следует указать также, что для двух пределов обрезания можно рассмотреть справедливое в этом случае разложение различных величин в ряд типа (4) по степеням произвольно малой величины  $\tilde{g}_0^2$ . Итак, для  $\Gamma$  или  $g_c^2$  мы получаем следующие разложения:

$$\Gamma_5 - \gamma_5 = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{g}_0^2)^n B_n \left( \tilde{g}_0^2 \ln \frac{\Lambda_k^2}{-p^2} \right),$$

$$g_c^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{g}_0^2)^n G_n \left( \tilde{g}_0^2 \ln \frac{\Lambda_k^2}{m^2} \right),$$

где, например,  $G_1(x) = [1 + (5x/4\pi)]^{-1}$  и т. д.

Рассмотренные выше ряды являются асимптотическими [12] и расходящимися, однако их суммы (как и для любого асимптотического ряда) могут быть аппроксимированы несколькими первыми членами с любой степенью точности, если эти члены уменьшаются с  $n$  достаточно быстро. Это непосредственно видно на примере  $\Gamma_5$ . Аналогично могут быть рассмотрены разложения в ряд для других величин. Следовательно, для  $\tilde{g}_0^2 \rightarrow 0$  возможно разложение в ряд типа (1) любой величины, встречающейся в теории.

Очевидно, что равенство нулю перенормированного заряда — общая трудность, которая появляется в любой теории с точечным взаимодействием. Эта трудность возникает в электродинамике, в псевдоскалярной и псевдовекторной мезонных теориях, в мезонной теории со смесью различных взаимодействий, в теориях с мезонами и нуклонами разных типов, которые могут превращаться друг в друга без ограничений, если взаимодействие имеет вид  $\Sigma_{\alpha\beta\gamma} \psi_\alpha \psi_\beta \varphi_\gamma$ , или с определенными ограничениями<sup>1</sup> и, наконец, даже в случае мезонного поля, которое взаимодействует с самим собой и энергия взаимодействия имеет вид  $\lambda_0 \varphi^4$ . Соотношение между перенормированной константой  $\lambda_c$  и  $\lambda_0$  в последнем случае может быть непосредственно определено из (62) и (60), так как согласно (62)

$$\lambda_c = (g_0^2/4\pi) P(b_0, x_0) d^2(L).$$

Это уравнение в пределе  $g_0^2 \rightarrow 0$  (который означает, что свободные нуклоны и мезоны непосредственно взаимодействуют друг с другом) приводит к следующему выражению для  $\lambda_c$ :

$$\lambda_c = \frac{\lambda_0}{1 + (11/2) \lambda_0 \ln(\Lambda_k^2/m^2)} \quad (82)$$

— для симметричной теории и

$$\lambda_c = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{3}{2} \lambda_0 \ln(\Lambda_k^2/m^2)} \quad (83)$$

— для нейтральной теории.

В этих формулах  $\lambda_0$  всегда больше нуля, так как в противном случае минимуму энергии

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right)^2 - \mu^2 \varphi^2 \right] + \frac{\lambda_0}{4!} \varphi^4(x)$$

будет соответствовать произвольно большая величина  $\varphi$ , что является очевидным абсурдом.

Из формул (82) — (83) следует, что для точечного взаимодействия (при  $\Lambda_k \rightarrow \infty$ ) перенормированная константа  $\lambda_c$  также равна нулю.

<sup>1</sup> Теории, включающие смеси различных типов взаимодействий и несколько мезонов, были исследованы с этой точки зрения А. Д. Галаниным [13].



Тот факт, что перенормированный заряд равен нулю, указывает на существование определенного оператора, который, в случае точечного взаимодействия, преобразует оператор энергии  $\mathcal{H}$  к виду

$$\tilde{\mathcal{H}} = U^{-1} \mathcal{H} U,$$

в котором остается только сумма операторов энергий свободных полей, а оператор взаимодействия исчезает. Итак, существенная трудность современной теории состоит в том, что в предельном случае точечного взаимодействия мы имеем исчезновение любого типа физического взаимодействия.

В заключение рассмотрим возможность экспериментальной проверки несостоятельности теории. Очевидно, что важными экспериментами будут те, в которых принимают участие слабо взаимодействующие частицы (электроны, фотоны и, возможно,  $\mu$ -мезоны), поскольку количественные результаты теории относятся именно к этим частицам. Если несостоятельность теории есть следствие изменения обычных свойств пространства на расстояниях порядка  $1/\Lambda$ , то можно ожидать, что отличие теории и эксперимента будет наблюдаться, если величина существенного импульса будет порядка или больше  $\Lambda$ . Более того, характерная длина должна быть одного порядка для электродинамики и для мезонных теорий. Уравнение (76) показывает, что  $\Lambda^2/m^2$  не может быть очень велико, так как тогда физический заряд мезона  $g_c^2$  будет мал, что противоречит эксперименту. Следовательно,  $\Lambda$  по порядку величины равно  $m$ , где  $1/m = \hbar/M_p c \sim 10^{-14}$  см. Эта длина соответствует электронам с энергией 400—1000 Мэв. Итак, отклонение от теории в электрон-электронном рассеянии (формула Мёллера) можно ожидать при энергии электрона в системе центра масс порядка 400—1000 Мэв (т. е.  $10^4$  —  $10^6$  Мэв в лабораторной системе). По этой причине представляют большой интерес точные измерения поперечных сечений комптон-эффекта, мёллеровского рассеяния, рождение пар и т. д. при этих энергиях.

Если  $\mu$ -мезоны также слабо взаимодействующие частицы (т. е. не существует замеченного в [14] аномального  $\mu$ -мезонного рассеяния), то эксперименты с  $\mu$ -мезонами могут оказаться весьма важными. Наиболее обещающими представляются эксперименты по рождению мезонных пар  $\gamma$ -квантами бэвных энергий, а также эксперименты по образованию  $\mu$ -мезонами  $\delta$ -электронов высокой энергии.

Существенную помощь при получении некоторых результатов, представленных в этой статье, оказали дискуссии с Л. Д. Ландау, и авторы выражают ему свою искреннюю благодарность. Мы также пользуемся случаем выразить нашу признательность И. Дятлову, В. Берестецкому, А. Галанину и Б. Иоффе за стимулирующие обсуждения.

Предельный вид решения уравнения (41)  
в симметричной теории

Рассмотрим здесь в случае симметричной теории уравнения, аналогичные (42) и (43). Если импульсы  $k_1$  и  $k_2$  очень велики, так что максимальный из них,  $k$ , много больше, чем  $(k_1 + k_2)$  (т. е.  $\eta > \xi$ ,  $\eta = \ln(-k^2/m^2)$ ,  $\xi = \ln[-(k_1 + k_2)^2/m^2]$ ), мы сможем записать решение (41) в виде

$$F(k_1, k_2; k_3, k_4) = \Phi(\eta, \xi) \delta_s + \Phi_1(\eta, \xi) \delta_{a_1, a_2} \delta_{a_3, a_4}. \quad (a)$$

Считая  $\eta = \xi$ ,  $\Phi(\eta, \eta) = F(\eta)$ ,  $\Phi_1(\eta, \eta) = F_1(\eta)$ , получаем

$$F(k_1, k_2; k_3, k_4)|_{\eta=\xi} = F(\eta) \delta_s + F_1(\eta) \delta_{a_1, a_2} \delta_{a_3, a_4}.$$

Согласно (40) для неизвестной суммы

$$P_{a_1 a_2 a_3 a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4),$$

отвечающей вкладу всех сводимых диаграмм, имеем:

$$\begin{aligned} P_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\eta, \xi) &= P(\eta, \xi) \delta_s + P_1(\eta, \xi) \delta_{a_1, a_2} \delta_{a_3, a_4} \\ P_{a_1 a_2 a_3 a_4}(\eta, \eta) &= P(\eta) \delta_s + P_1(\eta) \delta_{a_1, a_2} \delta_{a_3, a_4}, \end{aligned} \quad (б)$$

где

$$\begin{aligned} P(\eta, \xi) &= \rho_0(\eta) + 2F(\eta) + \Phi(\eta, \xi), \\ P_1(\eta, \xi) &= \Phi_1(\eta, \xi) - F_1(\eta) \end{aligned} \quad (в)$$

и

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(\eta, \eta) = \rho_0(\eta) + 3F(\eta), \\ P_1(\eta) &= P_1(\eta, \eta) \equiv 0. \end{aligned} \quad (г)$$

Подставляя (а) в (41), рассмотрим отдельно в (41) области<sup>1</sup> интегрирования  $\xi \leq z \leq \eta$  и  $\eta \leq z \leq L_k$ . Приравнявая коэффициенты перед  $\delta_s$  и  $\delta_{a_1, a_2} \delta_{a_3, a_4}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -\frac{1}{3} [\rho_0(x) + 2F(x) + F_1(x)] \int_x^y [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + \\ &+ F_1(\tau) + \Phi(\tau, y)]_1 \frac{d\tau}{\tau^2} - \frac{1}{3} \int_1^x [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + \\ &+ F_1(\tau)] [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + F_1(\tau) + \Phi(\tau, y)] \frac{d\tau}{\tau^2}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Следует учесть, что в первой области  $R_0$ ,  $F(k_1, l; k_2, l')$  и  $F(k_1, l'; k_2, l)$  зависят от  $\eta$ , а во второй — от  $z$ .

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = & -\frac{1}{3} \int_x^y \left\{ \left( \frac{5}{2} \right) [\rho_0(x) + 2F(x)] [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + \Phi(\tau, y)] + \right. \\ & \left. + \Phi_1(\tau, y) \right\} + F_1(x) [\Phi_1(\tau, y) - F_1(\tau)] \Big\} \frac{d\tau}{\tau^2} - \\ & -\frac{1}{3} \int_1^x \left\{ \left( \frac{5}{2} \right) [\rho_0(\tau) + 2F(\tau)] [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + \Phi(\tau, y) + \right. \\ & \left. + \Phi_1(\tau, y)] + F_1(\tau) [\Phi_1(\tau, y) - F_2(\tau)] \right\} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad (д) \end{aligned}$$

где  $\eta$ ,  $\xi$  и  $z$  заменены более удобными переменными  $x$ ,  $y$  и  $\tau$  соответственно:  $x = \tilde{Q}^{3/8}(\eta)$ ,  $y = \tilde{Q}^{3/8}(\xi)$ ,  $\tau = \tilde{Q}^{3/8}(z)$ ,  $(g_0^2/4\pi) \tilde{d}^2(z) dz = -1/3 d\tau/\tau^2$ . Полагая в (в)  $x = y$ , получаем два добавочных уравнения:

$$\begin{aligned} F(x) = & -\frac{1}{3} \int_1^x [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + F_1(\tau)] \times \\ & \times [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + F_1(\tau) + \Phi(\tau, x)] \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad (е) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(x) = & -\frac{1}{3} \int_1^x \left\{ (5/2) [\rho_0(\tau) + 2F(\tau)] [\rho_0(\tau) + 2F(\tau) + \right. \\ & \left. + \Phi(\tau, x) + \Phi_1(\tau, x)] + F_1(\tau) [\Phi_1(\tau, x) - F_1(\tau)] \right\} \frac{d\tau}{\tau^2}, \end{aligned}$$

которые эквивалентны уравнению (42) в нейтральной теории. Следует заметить, что уравнения (53) и (54), полученные непосредственно для  $P(x) = \rho_0(x) + 3F(x)$ , эквивалентны двум уравнениям (д) и (е) или (42) и (43), т. е. они могут быть легко получены из последних после математических преобразований. Однако этот вывод здесь мы не приводим.

Для простоты рассмотрим случай, когда  $\rho_0(x)$  определяется формулой (52) для  $b_0 = 0$ , т. е.  $\rho_0(k) = (16/3)(x-1)$ . Докажем, что в предельном случае  $x-1 \ll 1$ ,  $y-1 \ll 1$  (т. е.  $\tilde{g}_0^2(L-\eta) \ll 1$ ,  $\tilde{g}_0^2(L-\xi) \ll 1$ ) и  $x > 1$ ,  $y > 1$  (т. е.  $\tilde{g}_0^2(L-\eta) \gg 1$ ,  $\tilde{g}_0^2(L-\xi) \gg 1$ ) можно достаточно легко получить решение уравнений (д) и (е).

Случай  $x-1 \ll 1$  и  $y-1 \ll 1$  эквивалентен обычной теории возмущений. Система (д) и (е) может быть легко решена методом итераций, если положить в нулевом приближении с правой стороны этих уравнений  $F = F_1 = \Phi = \Phi_1 = 0$ . Мы получаем:

$$F(x) = -\left(1/3\right) \int_1^x \rho_0^2(\tau) d\tau = -\left(1/9\right) \left(16/3\right)^2 (x-1)^3,$$

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &\approx -\left(\frac{5}{18}\right)\left(\frac{16}{3}\right)^2(x-1)^3, \\
 \Phi(x, y) - F(x) &= -\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{16}{3}\right)^2(x-1)[(y-1)^2 - (x-1)^2], \\
 \Phi_1(x, y) - F_1(x) &= -\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{16}{3}\right)^2(x-1)[(y-1)^2 - (x-1)^2].
 \end{aligned}$$

Если эти выражения подставить в правую часть (д) и (е), то все функции могут быть определены в виде ряда по степеням  $(x-1)$  и  $(y-1)$ .

Если  $x \gg 1$  и  $y \gg 1$ , то в (д) и (е) оказываются существенными большие значения переменной интегрирования  $\tau \gg 1$ . Следовательно, пренебрегая единицей по сравнению с  $\tau$  (или  $x$ , или  $y$ ), мы подставляем  $\rho_0(\tau) = \left(\frac{16}{3}\right)\tau$  и заменяем во втором члене (д) и (е) нижний предел интегрирования (единицу) на нуль. Покажем, что (д) и (е) имеют решение в форме:

$$F(x) = Ax, \quad F_1(x) = A_1x, \quad (\text{ж})$$

где величины констант  $A$  и  $A_1$  могут быть определены решением (д) и (е), т. е. подставляя (ж) в (д) и (е) и дифференцируя (е) по  $x$  дважды,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{B}{3x^2} [Bx + \Phi(x, y)], \\
 \frac{\partial^2 \Phi_1(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{3x^2} \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)(B - A_1)[(B - A_1)x + \right. \\
 &\quad \left. + \Phi(x, y) + \Phi_1(x, y)] + A_1[\Phi_1(x, y) - A_1x] \right\},
 \end{aligned}$$

где  $B = \left(\frac{16}{3}\right) + 2A + A_1$ . Это дифференциальное уравнение необходимо решать, учитывая граничные условия:

$$\begin{aligned}
 \Phi(0, y) = \Phi_1(0, y) &= 0, \\
 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=y} &= \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=y} = 0,
 \end{aligned}$$

которые следуют из (д), если принять во внимание выражение (ж) для  $F$  и  $F_1$ .

Нетрудно видеть, что решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -Bx + \frac{B}{\mu} x^\mu y^{1-\mu}, \\
 \Phi_1 &= A_1x - \frac{5B}{3\mu} x^\mu x^{1+\mu} + \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{5}{3}\right)B - A_1\right] x^\nu y^{1-\nu},
 \end{aligned}$$

где  $\mu > 0$  и  $\nu > 0$  — положительные корни уравнений:

$$\mu(\mu - 1) = \frac{1}{3}B, \quad \nu(\nu - 1) = \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}(B - A). \quad (\text{з})$$

Из условий  $\Phi(x, x) = F(x) = Ax$ ,  $\Phi_1(x) = A_1x$  находим:

$$A = [(1 - \mu)/\mu]B, \quad A_1 = -\left(\frac{5}{3}\right)[(\nu/\mu) - 1]B. \quad (\text{и})$$

Последнее уравнение вместе с (з) дает

$$\nu = 1 + (5/6)(B/\mu),$$

и, следовательно,

$$A_1 = - (5/3) [(1/\mu) - 1] B - (25/18)(B^2/\mu^2). \quad (\kappa)$$

Подставляя выражения (и) и (к) для констант  $A$  и  $A_1$  в определение  $B$

$$B = (16/3) + 2A + A_1,$$

получаем следующее уравнение для  $B$ :

$$B^2 + \frac{2}{3}\mu^2 B - (32/9)\mu^2 = 0,$$

которое должно быть решено вместе с уравнением (з) для  $\mu$ . Мы получаем единственное решение для положительных величин  $\mu$  и  $\nu$ :

$$B = (16/3)(7/11)^2, \quad \mu = 49/33, \quad \nu = 73/33.$$

Согласно (и) и (к) имеем:

$$A = - (16/3)(16/121), \quad B = - (16/3)(40/121).$$

В соответствии с (ж), (в) и (г) получаем

$$P(x, y) = \begin{cases} 16/3(x-1)\{1 - (88/27)(x-1)^2 - (8/3)[(y-1)^2 - \\ - (x-1)^2] + \dots\}, & x-1 < 1, y-1 < 1; \\ (16/3)x\{1 + (5/3)(x^{49/33}y^{-49/33} - x^{16/33}y^{-16/33}) + \dots\}, & x > 1, y > 1; \end{cases}$$

$$P_1(x, y) = \begin{cases} - (5/12)(16/3)^2(x-1)\{[(y-1)^2 - (x-1)^2] + \dots\}, & x-1 < 1, y-1 < 1; \\ (16/11)x(x^{16/33}y^{-16/33} - 1), & x > 1, y > 1; \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} (16/3)(x-1)\{1 - (88/27)(x-1)^2 + \dots\}, & x-1 < 1; \\ (16/3)x, & x > 1. \end{cases} \quad (\lambda)$$

Легко видеть, что для  $b_0 = 0$ ,  $B = 1$  формула (55) для  $P(x)$  удовлетворяет в случае  $x-1 < 1$  и  $x > 1$  тем же самым граничным условиям, что и формула (л). Однако здесь мы получили выражение для  $P_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ , не только для  $\eta = \xi$ , но также и в случае, когда  $\eta > \xi$ .

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Л. Ландау, А. Абрикосов, И. Халатников.* Докл. АН СССР, 1954, 95, 497, 773, 1177.
2. *M. Gell-Mann, F. Low.* Phys. Rev., 1954, 95, 1300.
3. *А. Абрикосов, А. Галанин, И. Халатников.* Докл. АН СССР, 1954, 97, 793.
4. *T. D. Lee.* Phys. Rev., 1954, 95, 1329.
5. *G. Källén, W. Pauli.* Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-Fys. Medd., 1955, 30, № 7.
6. *А. Абрикосов, И. Халатников.* Докл. АН СССР, 1955, 103, 993.
7. *И. Я. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 104, 51; 105, 461 (Собр. трудов, № 62, 63).
8. *Л. Ландау, И. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 102, 489 (Собр. трудов, № 60); *И. Померанчук.* Докл. АН СССР, 1955, 103, 1005 (Собр. трудов, № 61).
9. *И. Т. Дятлов, К. А. Тер-Мартirosян.* ЖЭТФ, 1956, 30, 416; *И. Дятлов, В. Судаков, К. Тер-Мартirosян.* ЖЭТФ, 1957, 32, 767; *В. В. Судаков.* Докл. АН СССР, 1956, 111, 338.
10. См. также в этой связи: *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Докл. АН СССР, 1954, 103, 400; *Nuovo Cimento*, 1956, 3, 845; *Д. В. Ширков.* Докл. АН СССР, 1954, 105, 972; *J. C. Taylor.* Proc. Roy. Soc. (London), 1956, 234, 296.
11. *Е. Н. Аврорин, Е. С. Фрадкин.* ЖЭТФ, 1956, 30, 756.
12. *C. A. Hurst.* Proc. Cambr. Phil. Soc., 1952, 48, 625; *A. Peterman.* Helv. Phys. Acta, 1953, 26, 291.
13. *А. Д. Галанин.* ЖЭТФ, 1954, 26, 417.
14. *J. L. Lloyd, A. W. Wolfendale.* Proc. Roy. Soc. (London), 1955, A68, 1045; *А. И. Алиханов, Г. П. Елисеев.* Изв. АН СССР, серия физ., 1956, 19, 732.

# ФИЗИКА СТРАННЫХ ЧАСТИЦ И РЕЗОНАНСОВ. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

67

## О $\beta$ -РАСПАДЕ НЕЙТРОНА \*

*Совместно с В. Б. Берестецким*

Поскольку масса нейтрона превышает массу атома водорода на 755 *кэв*, он может, находясь в свободном состоянии, претерпевать  $\beta$ -распад. В литературе встречаются указания на то, что период такого  $\beta$ -распада должен быть порядка 15—30 *мин* [1]. Эту оценку легко получить из периода  $\beta$ -распада одного из легких ядер с близкой границей  $\beta$ -спектра. Так, например,  $C^{11}$  при границе  $\beta$ -спектра 950 *кэв* имеет период 20,5 *мин*.

Однако следует иметь в виду, что такое сравнение предполагает, что условия превращения нуклона в ядре и в свободном состоянии приблизительно одинаковы. Это оправдывается не во всех вариантах теории  $\beta$ -распада, эквивалентных в отношении формы спектра разрешенных переходов. Именно в псевдоскалярном варианте теории взаимодействие нуклонов с электронно-нейтринным полем мало при малых скоростях тяжелых частиц. Так как энергия отдачи при распаде свободного нейтрона мала по сравнению с кинетическими энергиями нуклонов в ядре, то вероятность  $\beta$ -распада нейтрона оказывается значительно уменьшенной по сравнению с вероятностью  $\beta$ -распада ядра с одинаковой границей  $\beta$ -спектра.

Вероятность распада нейтрона с вылетом электрона с импульсом  $p_e$  и нейтрино с импульсом  $p_\nu$  в псевдоскалярном варианте теории равна <sup>1</sup>

$$dw = 2\pi \frac{p_e^2 p_\nu^2 dp_e dO_e dO_\nu}{(2\pi)^6} g^2 \frac{1}{2} \sum \left| \int (\psi_n^* \rho_2 \psi_p) (\varphi_\nu^* \rho_2 \varphi_e) d\tau \right|^2, \quad (1)$$

\* ЖЭТФ, 1949, 19, 756.

<sup>1</sup> В теории  $\beta$ -распада фактически возможны (на это указывал Л. Д. Ландау), не 5, а 10 вариантов, так как, считая, например, волновую функцию ней-

где  $\psi_n$  и  $\psi_p$  — волновые функции свободного нейтрона и протона,  $\varphi_e$  и  $\varphi_\nu$  — волновые функции электрона и нейтрино,  $\rho_2$  — матрица,  $dO_e$  и  $dO_\nu$  — элементы телесных углов, определяющих направления импульсов легких частиц;  $\Sigma$  означает суммирование по всем спиновым состояниям частиц. Мы пользуемся релятивистскими единицами ( $\hbar = c = m_e = 1$ ). В системе координат, в которой нейтрон до распада покоится, имеем

$$dw = 2\pi \frac{p_e^2 p_\nu^2 d p_e d O_e d O_\nu}{(2\pi)^6} g^2 \frac{(p_e + p_\nu)^2}{2M^2} \left( 1 - \frac{p_e p_\nu}{E p_\nu} \right), \quad (2)$$

где  $M$  — масса нуклона, а  $E$  — энергия электрона. Интегрируя (2) по углам, получаем энергетический спектр электронов распада

$$w(E) dE = \frac{g^2}{4\pi^3 M^2} E \sqrt{E^2 - 1} (E_0 - E)^2 \times \\ \times \left[ E^2 - 1 - (E_0 - E)^2 - \frac{2}{3E} (E^2 - 1)(E_0 - E) \right] dE, \quad (3)$$

где  $E_0$  — разность масс нейтрона и протона. Полная вероятность распада получается интегрированием (3) по энергиям

$$w = (g^2/2\pi^3) f(E_0)/2M^2, \quad (4)$$

где

$$f(E_0) = \int_1^{E_0} E \sqrt{E^2 - 1} (E_0 - E)^2 \times \\ \times \left[ (E^2 - 1) + (E_0 - E)^2 - \frac{2}{3E} (E^2 - 1)(E_0 - E) \right] dE.$$

Вероятность  $\beta$ -распада ядра может быть выражена следующим образом:

$$dW = 2\pi \frac{p_e^2 p_\nu^2 d p_e d O_e d O_\nu}{(2\pi)^6} g^2 \left( 1 - \frac{p_e p_\nu}{E p_\nu} \right) \left| \int \Psi_1^* \sum_n \frac{\sigma_n p_n}{M} \Psi_2 d\tau \right|^2 \quad (5)$$

Здесь  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  — нерелятивистские волновые функции ядра в начальном и конечном состояниях,  $\sigma$  — оператор спина, суммирование производится по всем нейтронам ядра (множитель  $\exp [i (\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu) \mathbf{r}]$  заменяется единицей). Оценку матричного элемента в (5) можно произвести следующим образом:

$$\left| \int \Psi_1^* \sum_n \sigma_n p_n \Psi_2 d\tau \right| = E_0 M R_{12}, \quad (6)$$

трио псевдоспинорной, можно составлять из функций легких частиц при помощи тех же матриц величины с противоположными обычным свойствами преобразования при отражении. Например, в псевдоскалярном варианте возможно сочетание  $(\Psi_n^* \rho_2 \Psi_p)$ ,  $(\varphi_\nu^* \beta \varphi_e)$ . Для нас обе эти возможности эквивалентны, так как существенны лишь функции тяжелых частиц.



где  $E_0$  — выделяющаяся энергия, а  $R_{12}$  — «радиус перехода» — величина порядка ядерных размеров. Интегрируя (5) по углам и энергиям, получаем для полной вероятности  $\beta$ -распада ядра

$$W = (g^2/2\pi^3)(E_0 R_{12})^2 F(E_0), \quad (7)$$

где

$$F(E_0) = \int_1^{E_0} E \sqrt{E^2 - 1} (E - E_0)^2 dE.$$

Таким образом, при одинаковом значении  $E_0$  отношение вероятностей  $\beta$ -распада нейтрона и ядра составляет

$$\frac{w}{W} = \frac{j(E_0)}{F(E_0)} \frac{1}{2(MR_{12}E_0)^2}. \quad (8)$$

Если принять для  $R_{12}$  значение, например,  $4 \cdot 10^{-13}$  см, то  $w/W \approx \approx 10^{-4}$ . Таким образом, согласно псевдоскалярному варианту теории  $\beta$ -распада, период распада нейтрона должен значительно (в  $10^3 - 10^4$  раз) превышать время жизни ядер с той же границей  $\beta$ -спектра. Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные [2] носят лишь весьма предварительный характер. Они определенно указывают лишь на то, что период превышает 15 мин. Дальнейшие экспериментальные исследования могли бы быть существенными для выбора правильного варианта теории  $\beta$ -распада.

Заметим еще, что угловое распределение электронов и нейтрино (5) не противоречит существующим в настоящее время опытным данным [3].

Академия наук СССР

Получено 26 мая 1949 г.

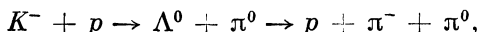
#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. Бете. Физика ядра. ОНТИ, 1936; Г. Бете. Лекции по теории ядра. М., ИЛ, 1949.
2. A. H. Snell, Z. C. Miller. Phys. Rev., 1948, 74, 1217.
3. J. S. Allen, H. R. Paneth, A. H. Morrish. Phys. Rev., 1949, 75, 570.

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ЗАХВАТЕ $K$ -МЕЗОНОВ\*

*Совместно с В. Б. Берестецким*

Явление захвата  $K$ -мезона протоном с последующим распадом возникающего при этом гиперона, т. е. реакция



может быть использована для определения спина  $\Lambda$ -частицы по угловой корреляции  $\pi$ -мезонов.

Если спин  $K$ -мезона равен нулю, то начальная система имеет момент, равный  $1/2$  (если  $K$ -мезон захватывается в  $s$ -состоянии). Тогда имеют место следующие угловые распределения  $I_j(\theta)$  в зависимости от спина  $\Lambda$ -частицы  $j$  и угла  $\theta$  между направлениями  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  относительных импульсов соответственно систем  $(\Lambda, \pi^0)$  и  $(p, \pi^-)$  ( $I_{1/2}(\theta) = 1$ ):

$$\begin{aligned} I_{3/2}(\theta) &= 1 + P_2(\cos \theta) \sim 1 + 3 \cos^2 \theta, \\ I_{5/2}(\theta) &= 1 + \frac{8}{7} P_2(\cos \theta) + \frac{6}{7} P_4(\cos \theta) \sim 1 - 2 \cos^2 \theta + \\ &\quad + 5 \cos^4 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

(ср. аналогичные формулы для распада  $\Xi$ -частицы [1]). Если спин  $K$ -мезона равен единице, то начальная система может иметь момент как  $1/2$ , так и  $3/2$ , ввиду чего формулы угловых корреляций становятся неоднозначными.

Если система находится во внешнем магнитном поле, то зависимость угловых распределений от поля  $H$  может служить для определения магнитного момента  $\Lambda$ -частицы. Функция корреляции при наличии магнитного поля имеет следующий вид (см., например, [2]):

$$I = \sum_n \frac{1}{2n+1} A_n \sum_{\nu=-n}^n \frac{1}{1+i\omega\tau} Y_{n\nu}^*(\mathbf{n}_1) Y_{n\nu}(\mathbf{n}_2), \quad (2)$$

где  $\omega$  — соответствующая ларморовская частота,  $\tau$  — время жизни  $\Lambda$ -частицы,  $A_n$  — коэффициенты при  $P_n$  в формулах (1). Если гиромагнитное отношение для  $\Lambda$ -частиц равно протонному, то  $\omega\tau$  достигает значения  $\approx 0,3$  при  $H \approx 3 \cdot 10^4$  эс.

\* ЖЭТФ, 1956, 31, 350.

В частности, при  $j = 3/2$  формула (2) принимает следующий вид:

$$I = 1 + P_2(\cos \theta_1) P_2(\cos \theta_2) + 3/4 \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \omega\tau \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] / (1 + \omega^2\tau^2) + 3/4 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 [\cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) - 2\omega\tau \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2)] / (1 + 4\omega^2\tau^2), \quad (3)$$

где  $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2$  — сферические углы векторов  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  в системе координат, в которой ось  $z$  направлена по магнитному полю.

Академия наук СССР

Получено 15 мая 1956 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. Gatto. Nuovo Cimento, 1955, 2, 841.
2. K. Alder. Phys. Rev., 1951, 84, 368.

## О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ $K$ -МЕЗОНОВ\*

Совместно с В. Л. Иоффе и Л. Б. Окунем

Проведены оценки поперечных сечений рассеяния на малые углы  $K$ -мезонов дейтронами как с изменением, так и без изменения заряда. На основе этих результатов обсуждается вопрос о числе различных типов  $K$ -мезонов. Исследуются возможные интерпретации различия в рассеянии  $K$ -мезонов свободными и связанными нуклонами.

### 1. Рассеяние $K$ -мезонов дейтронами

Как известно, массы и времена жизни  $K$ -мезонов, распадающихся на два  $\pi$ -мезона ( $K_{\pi_2}$ -распад) или на три  $\pi$ -мезона ( $K_{\pi_3}$ -распад), в пределах точности экспериментальных данных, по-видимому, одинаковы. Если предположить, что спины этих  $K$ -мезонов равны нулю (никаких экспериментальных фактов, которые свидетельствовали бы против этого, не обнаружено), то возникают следующие возможности.

а) За  $K_{\pi_2}$  и  $K_{\pi_3}$  распады ответствен единственный тип  $K$ -мезона (например,  $\tau$ -мезон). В этом случае, если все  $\pi$ -мезоны рассматриваются как псевдоскалярные частицы, четность системы  $\pi$ -мезонов, получающихся в одной из схем распада, должна отличаться от четности распадающегося  $K$ -мезона.

б) За  $K_{\pi_2}$  и  $K_{\pi_3}$  распады ответствен различные  $K$ -мезоны, один из которых  $\theta$  является скалярной частицей, а другой  $\tau$ — псевдоскалярной. В этом случае равенство масс и времен жизни требует объяснения.

В настоящее время нельзя исключить ни одной из этих двух возможностей. Необходимы дальнейшие эксперименты, чтобы установить, существует один или два типа  $K$ -мезонов. В связи с этим может оказаться, что особый интерес представляет изучение реакции зарядового обмена и неупругого рассеяния  $K$ -мезонов на дейтронах:

$$K^+ + d \rightarrow K^0 + 2p, \quad (1)$$

$$K^+ + d \rightarrow K^+ + p + n. \quad (2)$$

В условиях, когда рассеянный  $K^+$ -мезон (или рождающийся  $K^0$ -мезон) испускается в направлении вперед и его импульс примерно

\* Nucl. Phys., 1956/1957, 2, 277. Перевод Г. А. Лобова.

равен импульсу начального  $K^+$ -мезона. При этом энергия нуклонов, получающихся в реакциях (1) и (2), должна быть порядка нескольких мегаэлектрон-вольт.

Эффективные сечения реакций (1) и (2) можно легко рассчитать в импульсном приближении, как для случая, когда четность  $K$ -мезона изменяется в указанных реакциях (это возможно, если существуют два типа  $K$ -мезонов —  $\theta$  и  $\tau$ ), так и для случая, когда четность  $K$ -мезона не меняется.

Рассмотрим процессы рассеяния и изменения заряда  $K^+$ -мезонов на нуклонах в том случае, когда четность меняется:

$$\tau^+ + p \rightarrow \theta^+ + p, \quad (3)$$

$$\tau^+ + n \rightarrow \theta^+ + n, \quad (4)$$

$$\tau^+ + n \rightarrow \theta^0 + p. \quad (5)$$

Амплитуды этих реакций имеют вид  $\rho_i(\sigma \mathbf{k}) \exp(i\varphi_i)$  ( $i = 3, 4, 5$ ), где  $\mathbf{k}$  — импульс  $K$ -мезона, а  $\rho$  и  $\varphi$  — функции  $\mathbf{k}$ ; тогда соответствующие эффективные сечения равны  $\sigma_i = \rho_i^2 k^2$ .

Эффективные сечения для реакций (1) и (2), рассчитанные в импульсном приближении, можно выразить через  $\rho_i$  и  $\varphi_i$  следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \rho_5^2 k^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} [\rho_3^2 + \rho_4^2 - 2\rho_3\rho_4 \cos(\varphi_3 - \varphi_4)] k^2.$$

Требование изотопической инвариантности приводит к условию

$$\rho_3 \exp(i\varphi_3) = \rho_4 \exp(i\varphi_4) + \rho_5 \exp(i\varphi_5).$$

Таким образом, если эффективное сечение  $\sigma_1$  не равно нулю, то эффективное сечение  $\sigma_2$  также должно быть отлично от нуля и наоборот.

Легко видеть, что, исключая случай, когда  $\rho_4 = \rho_3$ ,  $\varphi_4 = \varphi_3$ , эффективные сечения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не обращаются в нуль. С другой стороны, аналогичным образом можно показать, что если четность  $K$ -мезона остается постоянной (не меняется) в процессе реакции, то эффективные сечения процессов (1) и (2) будут стремиться к нулю как  $(\Delta k/2\alpha)^2$ , когда  $\Delta k$  стремится к нулю. Здесь  $\Delta k$  — изменение импульса  $K$ -мезона в процессе реакции,  $\alpha = \sqrt{M\varepsilon}$ , где  $M$  — масса нуклона, а  $\varepsilon$  — энергия связи дейтрона. Таким образом, испускание  $K$ -мезонов в реакциях (1) и (2) под углом  $\theta$ , который значительно меньше, чем  $\theta_0 = 2\sqrt{M\varepsilon/k} = \sqrt{2M\varepsilon/M_K E}$ , должно означать существование двух типов  $K$ -мезонов,  $\theta$  и  $\tau$ , которые переходят друг в друга в сильных взаимодействиях.

В том случае, если реакции (1) и (2) запрещены для малых углов, возникают две возможности: 1) существует только один тип  $K$ -мезона (скалярный или псевдоскалярный); 2) существует два типа  $K$ -мезонов, но их взаимное превращение в сильных взаимодействиях запрещено. (Не исключено, конечно, что эффективные сечения реакций (1) и (2) могут быть малы вследствие малости эффективного сечения реакции (5).)

Необходимо подчеркнуть, что та интерпретация экспериментальных результатов, которая здесь предложена, существенным образом базируется на предположении, что спин  $K$ -мезона равен нулю. В этом случае, если спин  $K$ -мезона не равен нулю, процессы распада и зарядового обмена для  $K$ -мезонов, которые рассеиваются на малые углы, могут иметь место даже, если четность  $K$ -мезона остается неизменной в процессе реакции.

## 2. Рассеяние $K$ -мезонов свободными и связанными нуклонами

Экспериментально было обнаружено, что эффективное сечение взаимодействия  $K$ -мезонов со свободными протонами значительно больше, чем эффективное сечение взаимодействия  $K$ -мезонов с нуклонами, связанными в ядрах [1, 2].

Действительно, эффективное сечение для водорода порядка 20—28 мбарн, в то время как эффективное сечение на один нуклон в тяжелых ядрах фотоэмульсий порядка 6—9 мбарн.

Как нам кажется, предположение [3], что  $K$ -мезоны взаимодействуют с нуклонами главным образом в состоянии с изотопическим спином  $T = 1$ , не единственное возможное объяснение этого расхождения. В этом случае эффективное сечение процесса зарядового обмена и эффективное сечение упругого рассеяния  $K^+$ -мезонов нейтронами равны друг другу, причем каждое из них составляет  $1/4$  от эффективного сечения рассеяния  $K$ -мезона на протоне. Даже если учесть, что зарядовый обмен в тяжелых ядрах является затрудненным процессом (смотри ниже), все равно эффективное сечение на один ядерный нейтрон  $\geq 1/4$  от эффективного сечения на один протон. Это результат, который трудно согласовать с экспериментальными данными.

Лучшее согласие с экспериментом может быть получено, предполагая, что сумма триплетной и синглетной изотопических амплитуд мала. Тогда  $\sigma_4 \ll \sigma_5 \approx \sigma_3$ , так что эффективное сечение процесса зарядового обмена в  $K^+$ -мезон-нейтронных столкновениях значительно больше, чем эффективное сечение упругого рассеяния. Однако реакция зарядового обмена в ядрах для  $K$ -мезонов с энергией, меньше или порядка 50 Мэв, является затрудненным процессом. Объяснением этого является то, что при зарядовом обмене нейтрон должен переходить в протон, но поскольку все протонные состояния в ядре заняты, то получающийся протон должен или перейти на возбужденный ядерный уровень, или в непрерывный спектр. (Аналогичное уменьшение эффективного сечения в процессах зарядового обмена известно для  $\pi$ -мезонов [4]. В ядрах для  $\pi$ -мезонов с энергией 50 Мэв эффективное сечение зарядового обмена на один нуклон в 5—10 раз меньше, чем эффективное сечение зарядового обмена на свободном нуклоне.) В результате этого ядерные нейтроны практически не участвуют в рассеянии  $K$ -мезонов. Необходимо подчеркнуть, что эффективное

сечение рассеяния на ядерных протонах в этом случае не изменяется. Прямой проверкой предположения о большом эффективном сечении зарядового обмена может служить исследование рассеяния  $K$ -мезонов в дейтерии на большие углы, поскольку в этом случае принцип Паули несуществен.

Другим возможным объяснением аномально малой величины эффективного сечения взаимодействия  $K$ -мезонов с ядрами является то, что могут существовать два типа  $K$ -мезонов (скалярный и псевдоскалярный). Если в нуклон- $K$ -мезонном рассеянии четность мезона изменяется, то спин нуклона будет переворачиваться. В ядрах этот процесс должен быть затруднен в силу принципа Паули (аналогично случаю зарядового обмена). Таким образом, если эффективное сечение процесса с изменением четности составляет значительную долю полного эффективного сечения  $K$ -мезон-нуклонного взаимодействия, то эффективные сечения для ядер должны существенно уменьшиться. Уменьшение такого типа должно быть значительным для  $K$ -мезонов, энергии которых меньше или порядка  $50 \text{ Мэв}$ , при больших энергиях эффективное сечение на один нуклон в ядре должно стать сравнимым с эффективным сечением рассеяния на свободном нуклоне.

Академия наук СССР

Получено 10 августа 1956 г.

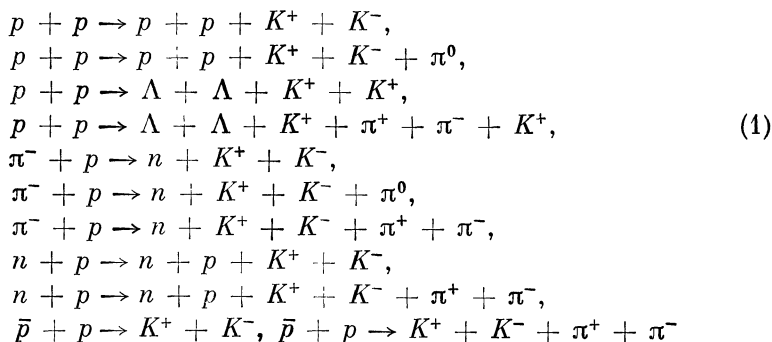
#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Lannuti, W. W. Chupp, G. Goldhaber, S. Goldhaber, E. Helmy, E. L. Iloff, A. Pevsner, D. M. Ritson. Phys. Rev., 1956, 101, 1617.
2. N. N. Biswas, L. Ceccarelli-Febrichesi, M. Ceccarelli, M. Cresti, K. Gottstein, N. C. Varshneya, P. Waloshek. Nuovo Cimento, 1956, 3, 1481.
3. S. Goldhaber. Communication at Rochester Conference, 1956.
4. G. Saphir. Phys. Rev., 1955, 98, 269; W. J. Spry. Phys. Rev., 1954, 95, 1295.

## ЗАМЕЧАНИЕ О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ $K$ -МЕЗОНОВ\*

Энергетический спектр  $\pi$ -мезонов в  $K_{\pi 3}$ -распаде наводит на мысль, что  $K_{\pi 2}(\theta)$ - и  $K_{\pi 3}(\tau)$ -мезоны являются, по-видимому, не тождественными частицами [1]. Для того чтобы решить, существует один или два различных типа  $K$ -мезонов, требуются дальнейшие эксперименты. Некоторые из этих экспериментов рассмотрены в работах [2, 3].

В данной работе мы хотим обратить внимание на эксперименты другого типа, которые являются также пригодными для этой цели. Рассмотрим реакции на протонах, в которых рождаются два  $K$ -мезона и любые другие частицы. В качестве примеров могут служить следующие реакции:



и т. д. (здесь через  $\bar{p}$  обозначен антипротон).

Рассмотрим теперь вероятность того, что получающиеся  $K$ -мезоны распадаются на два  $\pi$ -мезона или на три  $\pi$ -мезона. Если существует только один тип  $K$ -мезонов, то вероятности распада обоих рожденных  $K$ -мезонов на два или три  $\pi$ -мезона или одного из  $K$ -мезонов на два  $\pi$ -мезона, а другого на три  $\pi$ -мезона, очевидно, будут соответственно равны

$$W_0^2, \quad W_\tau^2, \quad 2W_0W_\tau, \tag{2}$$

где  $W_0$  — вероятность распада на два  $\pi$ -мезона, а  $W_\tau$  — вероятность распада на три  $\pi$ -мезона.

\* Nucl. Phys., 1956/1957, 2, 281. Перевод Г. А. Лобова.



Однако если  $\theta$  и  $\tau$  являются различными частицами, то ситуация будет отличаться от предыдущей. Пусть  $a^2$  есть вероятность образования двух  $\theta$  мезонов в любой из реакций (1) (величина  $a^2$ , конечно, может зависеть от типа реакции). Вследствие симметрии  $\theta \rightarrow \tau$ ,  $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ ,  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  [4] вероятность образования двух  $\tau$ -мезонов в той же самой реакции также должна быть равна  $a^2$ . Тогда вероятность образования  $\tau$ - и  $\theta$ -мезонов равна  $1 - 2a^2$ .

Если  $W_\theta$  — вероятность  $\theta$ -распада в пучке, который содержит одинаковые количества  $\theta$ - и  $\tau$ -мезонов, то вероятность  $\theta$ -распада  $\theta$ -мезона равна  $2W_\theta$ , а вероятность  $\tau$ -распада  $\tau$ -мезона будет равна  $2W_\tau$ .

Таким образом, вероятности того, что оба  $K$ -мезона будут распадаться на два или три  $\pi$ -мезона или один из  $K$ -мезонов распадется на два  $\pi$ -мезона, а другой на три  $\pi$ -мезона, соответственно равны:

$$4W_\theta^2 a^2, \quad 4W_\tau^2 a^2, \quad 4W_\tau W_\theta (1 - 2a^2). \quad (3)$$

Следовательно, исключая случай, когда  $a^2 = 1/4$ , выражения (3) должны отличаться от (2), и это обстоятельство может быть использовано для того, чтобы определить, существует один или два различных типа  $K$ -мезонов.

Если существуют два типа  $K$ -мезонов, которые не превращаются друг в друга в сильных взаимодействиях, то следует ожидать рождения только  $\theta\theta$  или  $\tau\tau$  пар в тех случаях, когда образуются только  $K$ -мезоны (но не гипероны). В этом случае  $a^2 = 1/2$ , и выражение (3) дает

$$2W_\theta^2, \quad 2W_\tau^2, \quad 0. \quad (4)$$

Академия наук СССР

Получено 20 августа 1956 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Reports at the Rochester Conference, 1956.
2. *M. Gell-Mann. Conference on High Energy Physics. Moscow, 1956.*
3. *B. Ioffe, L. Okun, I. Pomeranchuk. Nucl. Phys., 1956—1957, 2, 277 (Собр. трудов, № 69).*
4. *T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., 1956, 102, 290.*

## О ВОЗМОЖНОМ ДИПОЛЬНОМ МОМЕНТЕ ПЕРЕХОДА У $\Lambda$ -ЧАСТИЦ\*

*Совместно с В. Л. Иоффе*

В настоящее время, по-видимому, можно считать экспериментально доказанным [1], что система двух  $\pi$ -мезонов, возникающих при распаде  $\theta^+$ -мезона, имеет спин нуль и положительную четность, тогда как система  $3\pi$ -мезонов, возникающих при распаде  $\tau^+$ -мезона, находится в состоянии  $0^-$ . Это заставляет считать, что (если не предполагать несохранения четности)  $\theta$  и  $\tau$  являются различными частицами. Для объяснения существования двух различающихся по четности  $K$ -мезонов с весьма близкими массами было сделано предположение [2] о том, что кроме двух сортов  $K$ -мезонов ( $\theta$  и  $\tau$ ) существуют также два сорта гиперонов ( $\Lambda_\theta$  и  $\Lambda_\tau$ ,  $\Sigma_\theta$  и  $\Sigma_\tau$ ), причем все взаимодействия (кроме слабых) инвариантны относительно одновременной замены  $\theta \rightarrow \tau$  и  $\Lambda_\theta \rightarrow \Lambda_\tau$ ,  $\Sigma_\theta \rightarrow \Sigma_\tau$ .

Если принять такое предположение, то разность масс между  $\Lambda_\theta$  и  $\Lambda_\tau$ , обусловленная только слабыми взаимодействиями, окажется чрезвычайно малой (порядка  $10^{-6}$  эв), так что возникает возможность переходов  $\Lambda_\theta \rightleftharpoons \Lambda_\tau$  под действием внешнего электромагнитного поля<sup>1</sup>. В том случае, когда электромагнитное поле мало меняется на протяжении размеров  $\Lambda$ -частицы, переходы подобного рода эффективно сведутся к возникновению дипольного момента перехода. Ясно, что такой дипольный момент  $\mathbf{d}$  может быть направлен только по спину  $s$   $\Lambda$ -частицы, так что

$$\mathbf{d} = er_0 s C_p, \quad (1)$$

где  $r_0$  — некоторая постоянная размерности длины, определяемая размерами  $\Lambda$ -частицы (всюду в дальнейшем  $\hbar = c = 1$ ), и  $C_p$  — оператор перестановки  $\Lambda_\theta$  и  $\Lambda_\tau$  [2]:

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наличие у  $\Lambda$ -частицы дипольного момента может привести к ряду наблюдаемых явлений.

Рассмотрим сначала рассеяние  $\Lambda$ -частиц кулоновским полем ядра. Энергия взаимодействия имеет вид

$$U = - \frac{Ze^2 r_0}{r^3} r s C_p. \quad (2)$$

\* Докл. АН СССР, 1957, 113, 1251.

<sup>1</sup> Мы исходим при этом из наиболее общего предположения о том, что каждый из мезонов  $\theta$  и  $\tau$  взаимодействует с обоими сортами гиперонов, так что, например, могут рождаться совместно как  $\theta$  и  $\Lambda_\theta$ , так и  $\theta$  и  $\Lambda_\tau$ .

Ограничиваясь борновским приближением<sup>1</sup> и предполагая  $\Lambda$ -частицу нерелятивистской, находим для амплитуды рассеяния выражение

$$f_{\text{кул}} = 2iZe^2r_0m \frac{sq}{q^2}, \quad (3)$$

где  $m$  — масса  $\Lambda$ -частицы;  $q$  — передаваемый ядру импульс,  $q = 2p \sin(\theta/2)$ . Если считать спин  $\Lambda$ -частицы равным  $1/2$ , то дифференциальное сечение окажется равным

$$d\sigma_{\text{кул}} = \frac{1}{4} \pi (Ze^2)^2 r_0^2 \frac{m}{E \sin^2(\theta/2)} \sin \theta d\theta. \quad (4)$$

Основную роль в полном сечении играет область малых углов. Поэтому полное сечение можно получить, интегрируя (4) по интервалу углов, соответствующему изменению прицельного параметра от радиуса ядра  $R$  до борновского радиуса  $a$ . Это дает

$$\sigma_{\text{кул}} = \pi (Ze^2)^2 r_0^2 \frac{m}{E} \ln \frac{a}{R}. \quad (5)$$

Числовая оценка показывает, что (при  $r_0 \sim 1/\mu_\pi = 1,4 \cdot 10^{-13}$  см) сечение кулоновского рассеяния с переходом  $\Lambda_\theta \rightarrow \Lambda_\tau$  при энергиях  $\Lambda$ -частиц порядка десятков мегаэлектрон-вольт превосходит ядерное. Так, для  $Z \sim 30$  и  $E \sim 10$  Мэв  $\sigma_{\text{кул}}/\sigma_{\text{яд}} \sim 5$ . Если  $\Lambda_\theta$  и  $\Lambda_\tau$  имеют существенно различное время жизни, то наличие сильного кулоновского взаимодействия можно было бы наблюдать, установив на пути долгоживущих  $\Lambda$ -частиц тонкую пластинку вещества с большим  $Z$  и наблюдая увеличение числа  $\Lambda$ -распадов.

Любопытно отметить, что из-за зависимости амплитуды кулоновского рассеяния (3) от спина и благодаря интерференции кулоновского рассеяния с ядерным может возникнуть поляризация  $\Lambda$ -частиц в плоскости, перпендикулярной падающему пучку. Степень поляризации определяется при этом равенством

$$P = - \frac{q}{q^2} \frac{2Ze^2r_0m \operatorname{Im} f_0}{|f_0|^2 + (Ze^2r_0m/q)^2}, \quad (6)$$

где  $f_0$  — амплитуда ядерного рассеяния с переходом  $\Lambda_\theta \rightarrow \Lambda_\tau$ . Кроме того, в том случае, когда спин  $\Lambda$ -частицы больше  $1/2$ , наличие в (3) члена  $sq$  приведет к возникновению «выстроенного» пучка  $\Lambda$ -частиц, т. е., например, в случае  $s = 3/2$  после рассеяния число  $\Lambda$ -частиц с проекцией спина на  $q$ , равной  $\pm 3/2$ , будет больше числа  $\Lambda$ -частиц с проекцией спина, равной  $\pm 1/2$ .

Другим явлением, к которому может привести наличие у  $\Lambda$ -частицы дипольного момента перехода, является возникновение

<sup>1</sup> Оценка применимости борновского приближения получается из обычного условия  $|U| \ll v/r$ . Беря в качестве  $r$  минимальное расстояние — радиус ядра  $R$ , находим из (2) верхнюю оценку  $E \gg 1/8 (Ze^2)^2 (r_0/R)^2 m$ . В практически интересных случаях это условие выполняется неплохо: так, при  $Z = 30$  и  $r_0 = 1/\mu_\pi$  оно сводится к  $E \gg 0,5$  Мэв.

уровней в кулоновском поле ядра. Действительно, поскольку потенциальная энергия  $U \sim Ze^2 r_0 / r^2$ , а кинетическая энергия  $\sim 1/mr^2$ , то при  $Ze^2 r_0 m \gtrsim 1$  можно ожидать возникновения уровней. В этом случае уравнение Шредингера вне ядра имеет вид

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \Delta - \frac{Ze^2 r_0}{2r^3} \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} C_p \right\} \psi = E \psi. \quad (7)$$

Вместо двухкомпонентных функций  $\psi = \begin{Bmatrix} \psi_{\Lambda_0} \\ \psi_{\Lambda_\tau} \end{Bmatrix}$  удобно ввести функции  $\varphi = 1/2 (\psi_{\Lambda_0} - \psi_{\Lambda_\tau})$  и  $\chi = 1/2 (\psi_{\Lambda_0} + \psi_{\Lambda_\tau})$ , в которых уравнение (7) приобретает диагональную форму:

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \Delta + \frac{Ze^2 r_0}{2r^3} \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} \right\} \varphi = E \varphi \quad (8)$$

и аналогичное уравнение для  $\chi$ . Ограничимся рассмотрением системы  $S$ -уровней. Решение будем искать в виде

$$\varphi = \frac{1}{r} \left[ u(r) + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}}{r} w(r) \right]. \quad (9)$$

Подстановка (9) в (8) приводит к следующей системе уравнений для волновых функций вне ядра:

$$d^2 u / dr^2 - \alpha w / r^2 = \kappa^2 u, \quad (10a)$$

$$d^2 w / dr^2 - 2w / r^2 - \alpha u / r^2 = \kappa^2 w, \quad (10b)$$

где  $\alpha = Ze^2 r_0 m$  и  $\kappa^2 = 2m |E|$ . Уравнения (10a), (10b) можно решить, положив  $w = Cu$ , где  $C$  — постоянная. Значения постоянной  $C$  определяются таким образом, чтобы (10a) совпадало с (10b). Этого можно достичь, если  $C$  удовлетворяет уравнению

$$\alpha C = \alpha / C + 2, \quad (11)$$

откуда

$$C_{1,2} = (1 \mp \sqrt{1 + \alpha^2}) / \alpha. \quad (12)$$

Общее решение запишется тогда в виде  $u = u_1 + u_2$ ,  $w = C_1 u_1 + C_2 u_2$ , где  $u_1$  и  $u_2$  подчиняются уравнениям

$$u_{1,2}'' - \alpha C_{1,2} u_{1,2} / r^2 = \kappa^2 u_{1,2}. \quad (13)$$

Решения уравнений (13), обращающиеся в нуль при  $r \rightarrow \infty$ , можно записать следующим образом [3]:

$$u_1 = A \{ J_{iq}(ixr) - e^{-\pi q} J_{-iq}(ixr) \}, \quad q = \sqrt{(\alpha^2 + 1)^{1/2} - 5/4}; \quad (14a)$$

$$u_2 = B \{ e^{i\pi p} J_{-p}(ixr) - J_p(ixr) \}, \quad p = \sqrt{(\alpha^2 + 1)^{1/2} + 5/4}. \quad (14b)$$

Мы примем, что внутри ядра взаимодействие описывается потенциальной ямой с глубиной  $V$ . Решения соответствующих уравнений для области внутри ядра тогда будут:

$$u = A_1 \sin kr, \quad w = B_1 [\sin kr/kr - \cos kr], \quad k^2 = 2m(V - |E|). \quad (15)$$

Решения (14) и (15) должны быть сшиты на границе ядра  $R$ . Мы будем рассматривать такие уровни, для которых  $kR \ll 1$ , ибо только для них  $\Lambda$ -частица находится вне ядра и энергия уровня определяется в основном кулоновскими силами. Поскольку нас интересует случай тяжелых ядер, то можно считать  $kR \gg 1$ . Используя эти два условия и сшивая решения (14) и (15) при  $r = R$ , приходим к следующему уравнению для определения собственных значений  $\kappa$ :

$$kR = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}(1+\sqrt{1+\alpha^2})} \left\{ \left[ \operatorname{ctg} kR - \frac{(1+\sqrt{1+\alpha^2})^2}{\alpha^2} \operatorname{tg} kR \right] \times \right. \\ \times \left[ \frac{1}{2} + q \operatorname{ctg} \left( q \ln \frac{\kappa R}{2} - \psi \right) \right] - \left( \frac{1}{2} - p \right) \left( -\frac{(1+\sqrt{1+\alpha^2})^2}{\alpha^2} \times \right. \\ \left. \left. \times \operatorname{ctg} kR + \operatorname{tg} kR \right) \right\}, \\ \psi = \frac{1}{2i} \ln \frac{\Gamma(iq+1)}{\Gamma(-iq+1)}. \quad (16)$$

В левой части (16) стоит большая величина  $kR$ . Это требует, чтобы был велик стоящий в правой части  $\operatorname{ctg} \left( q \ln \frac{\kappa R}{2} - \psi \right)$ . Отсюда для энергии  $n$ -го уровня находим

$$E_n = \frac{2}{mR^2} \exp \left\{ -2 \frac{n\pi - \psi}{\sqrt{(\alpha^2 + 1)^{1/2} - 5/4}} \right\}. \quad (17)$$

Как следует из (17), связанные состояния возникают при  $(\alpha^2 + 1)^{1/2} > 5/4$ , т. е. при  $Ze^2 r_0 m > 3/4$ . Формула (17) верна при  $n \geq 1$ . Если считать  $r_0 \sim 1/\mu_\pi$ , то для тяжелого ядра ( $Z \sim 80$ ) энергия первого уровня будет составлять величину порядка 50–100 кэв. Нетрудно подсчитать полное число уровней. Последние уровни должны соответствовать движению  $\Lambda$ -частицы на расстояниях порядка боровского радиуса атома  $a$ , т. е.  $\sqrt{2mE_n a} \sim 1$ . Таким образом, полное число уровней определяется соотношением

$$\frac{n\pi - \psi}{\sqrt{(\alpha^2 + 1)^{1/2} - 5/4}} \sim \ln \frac{a}{R} \quad (18)$$

и составляет (при  $r_0 \sim 1/\mu_\pi$ ) около 7 для тяжелых ядер.

Заметим, что размытие уровней, связанное с поглощением  $\Lambda$ -частиц ядрами при  $(kR)^{-1} \ll 1$ , оказывается малым, поскольку, как следует из (16), в этом случае несущественно, является ли  $k$  действительным или комплексным.

Академия наук СССР

Получено 24 декабря 1956 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Orear, G. Harris, S. Taylor. Phys. Rev., 1956, 102, 1676.
2. T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., 1956, 102, 290.
3. M. Morse, H. Feshbach. Methods of Theoretical Physics, pt II, 1953, p. 1665.

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ $\Xi$ -ГИПЕРОНОВ С НУКЛОНАМИ И ЛЕГКИМИ ЯДРАМИ\*

*Совместно с Л. Б. Окунем и И. М. Шмушкевичем*

Определяются спиновые корреляции  $\Lambda$ -частиц, возникающих при реакции  $\Xi^- + p \rightarrow \Lambda + \Lambda$  (медленные  $\Xi^-$ ). Экспериментальное изучение таких корреляций даст возможность установить четность  $\Xi^-$ -частиц.

При взаимодействии медленного  $\Xi^-$ -гиперона с протонами возможны следующие реакции:

$$\Xi^- + p \rightarrow \Xi^- + p \text{ — упругое рассеяние,} \quad (1)$$

$$\Xi^- + p \rightarrow \Xi^0 + n \text{ — перезарядка,} \quad (2)$$

$$\Xi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \Lambda^0 \text{ — поглощение.} \quad (3)$$

Другие процессы (типа  $\Xi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \Lambda^0$  и др.) имеют порог, и при малых энергиях ими можно пренебречь. (Мы исходим при этом из того, что странность  $\Xi^-$  равна 2.) Если окажется, что время жизни  $\Xi^-$ -гиперона достаточно велико и можно экспериментировать с медленными  $\Xi^-$ -гиперонами, то особенный интерес представляло бы изучение реакции (3) с наблюдением последующих распадов  $\Lambda$ -гиперонов. В частности, изучение этой реакции позволило бы установить относительную четность  $\Xi^-$ -гиперона и нуклона.

В основе дальнейшего анализа лежит предположение о том, что распад  $\Lambda$ -гиперона происходит с несохранением четности. Если четность при распаде  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  не сохраняется, то амплитуду этого распада можно представить в виде:

$$a_\Lambda = a + b\sigma\mathbf{n}. \quad (4)$$

Здесь  $a$  и  $b$  — вообще говоря, комплексные числа,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении вылета  $\pi$ -мезона.

Угловое распределение  $\pi$ -мезонов при распаде поляризованного  $\Lambda$ -гиперона будет иметь при этом вид

$$1 + \kappa s\mathbf{n}, \quad (5)$$

где  $s$  — единичный вектор в направлении спина  $\Lambda$ -гиперона, а параметр асимметрии  $\kappa$  равен

$$\kappa = (a^*b + b^*a)/(|a|^2 + |b|^2). \quad (6)$$

\* ЖЭТФ, 1958, 34, 1246.

Таким образом,  $\pi$ -мезоны должны вылетать преимущественно по (или против) направлению поляризации  $\Lambda$ -гиперона.

С другой стороны, спины двух  $\Lambda$ -гиперонов, образовавшихся в реакции (3), коррелированы между собой в силу принципа Паули. В таблице приведены спиновые и орбитальные состояния двух  $\Lambda$ -гиперонов для случая, когда  $\Xi^-$ -гиперон захватывается протоном из  $S$ -состояния. (Мы предполагаем, что спин  $\Xi$ -гиперона, так же как спин  $\Lambda$ -гиперона, равен  $1/2$ .)

Состояние системы $\Xi^- + p$	Состояние системы $\Lambda + \Lambda$	
	Четность $\Xi = +1$	Четность $\Xi = -1$
$^1S_0$ $^3S_1$	$^1S_0$ Реакция (3) запрещена	$^3P_0$ $^3P_1$

Таким образом, при положительной четности  $\Xi^-$ -частицы нужно принимать во внимание амплитуду только одного перехода ( $^1S_0 \rightarrow ^1S_0$ ). Вычисляя при помощи (4) угловое распределение  $\pi$ -мезонов, возникающих при распаде двух  $\Lambda$ -гиперонов, получаем

$$W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 1 - \kappa^2(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2). \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{n}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — единичный вектор в направлении движения  $\pi$ -мезона в системе покоя того гиперона, при распаде которого данный  $\pi$ -мезон возник.

Существенно, что формула (7) верна как для поляризованных, так и для неполяризованных  $\Xi$ -частиц, и получившееся распределение не зависит от направления разлета  $\Lambda$ -частиц.

При отрицательной четности  $\Xi$ -гиперонов нужно ввести в рассмотрение две амплитуды  $\lambda$  и  $\mu$  для двух возможных в процессе (3) переходов  $^3S_1 \rightarrow ^3P_1$  и  $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$  соответственно. В этом случае для углового распределения  $\pi$ -мезонов, образующихся при распаде  $\Lambda$ -частиц, вычисления дают

$$\begin{aligned}
 W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = & 1 + \frac{|\alpha|^2}{3 + |\alpha|^2} \kappa^2(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) + \frac{3 - 2|\alpha|^2}{3 + |\alpha|^2} \kappa^2(\mathbf{k} \mathbf{n}_1)(\mathbf{k} \mathbf{n}_2) + \\
 & + \frac{3}{3 + |\alpha|^2} (\xi \mathbf{k})(\mathbf{k}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^* + \alpha}{3 + |\alpha|^2} ([\mathbf{k} \mathbf{k} \xi])(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) + \\
 & + i \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha - \alpha^*}{3 + |\alpha|^2} \{([\mathbf{k} \xi] \mathbf{n}_1)(\mathbf{k} \mathbf{n}_2) + ([\mathbf{k} \xi] \mathbf{n}_2)(\mathbf{k} \mathbf{n}_1)\}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha = \mu/\lambda$ ,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении разлета  $\Lambda^0$ -гиперонов и  $\xi$  — вектор поляризации  $\Xi^-$ -гиперонов, т. е. среднее значение спина  $\Xi^-$ -частиц.

Усреднение (8) по направлениям  $\mathbf{k}$  дает

$$W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 1 + \frac{1}{3} \kappa^2(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) + \frac{1 - \sqrt{2/3}(\alpha + \alpha^*)}{3 + |\alpha|^2} \kappa \xi(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2). \quad (9)$$

Сравнение экспериментальных данных с формулами (7) или (8) и (9) могло бы способствовать определению четности  $\Xi$ -гиперона. Заметим в этой связи, что если  $\Xi^-$  не поляризованы ( $\zeta = 0$ ), то при отрицательной четности  $\Sigma^-$ -гиперона образующиеся  $\pi$ -мезоны должны лететь преимущественно в одном и том же направлении. Если же четность  $\Xi^-$  положительна, то  $\pi$ -мезоны преимущественно будут разлетаться в противоположных направлениях. Далее, если усреднить (9) по  $\mathbf{n}_2$ , то получится

$$W(\mathbf{n}_1) = 1 + \frac{1 - \sqrt{2/3}(\alpha + \alpha^*)}{3 + |\alpha|^2} \kappa(\zeta \mathbf{n}_1). \quad (10)$$

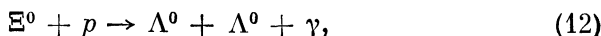
Усреднение же (7) по  $\mathbf{n}_2$  приводит к изотропному распределению для  $\mathbf{n}_1$ :

$$W(\mathbf{n}_1) = 1. \quad (11)$$

Формулы (7) — (11) для процесса (3) верны как при захвате медленных  $\Xi^-$ -частиц из непрерывного спектра, так и при захвате из связанных состояний системы  $\Xi^- + p$ . Неясно, однако, какой вклад будет при этом вноситься захватом из связанных  $P$ -состояний. Если этот вклад будет достаточно велик, то угловые распределения образующихся  $\pi$ -частиц будут заметным образом отличаться от полученных здесь. Поэтому анализ экспериментальных данных при помощи формул (8) — (10) или (7) и (11) может производиться при отборе таких случаев, которые соответствуют захвату из непрерывного спектра, т. е. при захвате из пучка медленных  $\Xi^-$ -частиц. Критерием для такого отбора в принципе может служить установление того факта, что суммарный импульс образующихся четырех частиц ( $2p + 2\pi^-$ ) хотя мал, но не равен нулю.

Если четность  $\Xi^-$  равна  $+1$  и если взаимодействие между  $\Xi$  и  $p$  таково, что имеется уровень<sup>1</sup> в состоянии  ${}^3S_1$ , то, как видно из таблицы, это состояние системы  $\Xi^- + p$  будет метастабильно, так как распад на два  $\Lambda^0$ -гиперона запрещен.

Наиболее вероятным представляется распад этой системы с испусканием жесткого  $\gamma$ -кванта:



который можно было бы обнаружить как непосредственно, так и по отсутствию баланса энергии — импульса.

Если система  $\Xi + \text{нуклон}$  имеет связанные состояния и если расщепление уровней ( $\Xi^- + p$ ) и ( $\Xi^0 + n$ ), обусловленное в основном разностью масс  $\Xi^-$  и  $\Xi^0$ -гиперонов, мало по сравнению с расщеплением уровней с  $T = 1$ ,  $(\Xi^-p + \Xi^0n) / \sqrt{2}$  и  $T = 0$ ,  $(\Xi^-p - \Xi^0n) / \sqrt{2}$ , то система ( $\Xi + \text{нуклон}$ ) будет находиться в состоянии с определенным изотопическим спином  $T$ . При этом  ${}^3S_1$ -состояние с  $T = 0$  будет аналогично дейтрону ( $J = 1, T = 0, P = +1$ ).

<sup>1</sup> Эти требования не противоречат модели странных частиц, предложенной недавно Гелл-Манном [1], согласно которой четность всех гиперонов равна  $+1$ , а их взаимодействие с  $\pi$ -мезонами так же сильно, как взаимодействие с  $\pi$ -мезонами нуклонов.



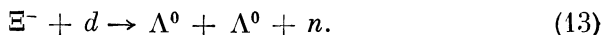
Следует отметить, что если изотопический спин является хорошим квантовым числом для системы  $\Xi +$  нуклон, то все связанные состояния этой системы с  $T = 1$  будут метастабильны, так как для них запрещена реакция (3).

Реакция (12) может наблюдаться и в том случае, если отсутствует ядерное связанное состояние системы  $\Xi +$  нуклон, но

$$m_{\Xi^-} + m_p - V_{\text{кул}} < m_n + m_{\Xi^0}.$$

В этом случае кулоновский уровень  ${}^3S_1$  будет метастабилен, так как реакция перезарядки (2) будет запрещена энергетически.

Интерес представляет также взаимодействие медленного  $\Xi^-$ -гиперона с дейтроном

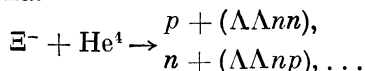


Изучение углового распределения гиперонов в этом случае может дать сведения о взаимодействии между собой двух  $\Lambda$ -гиперонов. Например, наличие уровня вблизи нуля у системы двух  $\Lambda$ -гиперонов привело бы к тому, что были бы предпочтительны малые углы между ними. При этом неизвестная пока амплитуда взаимодействия между  $\Lambda$  и нейтроном, знание которой необходимо для интерпретации реакции (13), может быть получена независимо из реакций типа



рассмотренных в работе [2].

Захват  $\Xi^-$  в  $\text{He}^4$  может привести к ряду неупругих процессов; в том числе возможны реакции образования гиперядер, содержащих два  $\Lambda$ -гиперона:



Наличие таких гиперядер должно приводить к характерным каскадным распадам.

Заметим, что в зависимости от относительной четности  $\Xi$  и нуклонов отношение сечения неупругого взаимодействия и упругого рассеяния на  $\text{He}^4$  будет различным (в случае отрицательной четности  $\Xi$  неупругие процессы будут подавлены, так как одна из частиц, образовавшихся в неупругой реакции, должна будет вылететь в  $P$ -состоянии, а энергия, выделяемая в этом случае, мала (30 Мэв минус энергия связи  $\text{He}^4$  плюс энергия связи образовавшихся осколков)).

Авторы благодарны В. В. Судакову за полезные обсуждения.

Академия наук СССР

Получено 10 декабря 1957 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Gell-Mann. Phys. Rev., 1957, 106, 1296.
2. Л. Б. Окунь, И. М. Шмушкевич. ЖЭТФ, 1956, 30, 979.

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧЕТНОСТИ $K$ -МЕЗОНА\*

*Совместно с Л. Б. Окунем*

Определение четности  $K$ -мезонов и гиперонов по-прежнему является одной из центральных задач экспериментальной физики элементарных частиц. Поскольку сильные взаимодействия сохраняют странность, а слабые не сохраняют четность, мы можем говорить только об относительной четности  $K$ -мезонов и гиперонов, т. е. о знаке  $P_K P_N P_\Lambda$ ,  $P_K P_N P_\Sigma$  и т. д. Ниже рассмотрен эксперимент, который дает возможность определить знак  $P_K P_N P_\Lambda$ .

Рассмотрим захват медленного  $K^-$ -мезона протоном из  $S$ -состояния, приводящий к реакциям:

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0 + \pi^0, \quad (1)$$

$$K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^-. \quad (2)$$

Поскольку в сильных взаимодействиях четность сохраняется, то четность системы  $\Lambda + 2\pi$  должна равняться четности системы  $K + p$ . Рассмотрим две возможности.

1. Пусть  $P_K P_N P_\Lambda = +1$ . В этом случае амплитуды перехода для обеих реакций имеют вид:

$$A_1 = -(a + bp^2 + cq^2)/\sqrt{2} + \dots, \quad A_2 = (a + bp^2 + cq^2) + \dots$$

Здесь  $\mathbf{q}$  — разность импульсов двух  $\pi$ -мезонов, а  $\mathbf{p}$  — сумма их импульсов, равная импульсу  $\Lambda$ -гиперона. Энергия, выделяемая в реакциях (1) и (2), если  $K$ -мезон имел нулевую кинетическую энергию, составляет соответственно 47 и 38  $M\text{эв}$ , и максимальные импульсы  $p$  и  $q$  порядка  $\mu_\pi$  (мы пользуемся единицами  $\hbar = c = 1$ ). Если предположить, что размер области, в которой имеет место сильное взаимодействие  $1/m_p < r < 1/\mu_\pi$ , то можно считать, что  $pr < 1$  и  $qr < 1$ , и ограничиться членами, не зависящими от  $p$  и  $q$ . В этом случае

$$A_1 = -a/\sqrt{2}, \quad A_2 = a, \quad (3)$$

и мы получаем, что угловые распределения в реакциях (1) и (2) сферически симметричны,  $\Lambda$ -гиперон не поляризован и, следовательно, угловое распределение  $\pi$ -мезонов, возникающих при его распаде, изотропно. Если бы энергвыделение в реакциях (1) и (2)

\* ЖЭТФ, 1958, 34, 997.

было одинаковым, то из (3) мы получили бы для сечений реакций (1) и (2)

$$\sigma_2/\sigma_1 = 2. \quad (4)$$

Учет разности масс  $\pi^\pm$ - и  $\pi^0$ -мезонов в фазовом объеме изменяет это соотношение:

$$\sigma_2/\sigma_1 = 1,34. \quad (5)$$

2. Пусть  $P_K P_N P_\Lambda = -1$ . В этом случае амплитуда перехода должна иметь вид

$$A_1 = -a\sigma\rho/\sqrt{2}, \quad A_2 = a\sigma\rho + b\sigma\eta, \quad (6)$$

где  $\sigma$  — матрицы Паули. Мы опять оставили в выражении для  $A$  минимальные степени  $p$  и  $q$ . Вычисляя угловое распределение с учетом возможной поляризации  $\Lambda$ -гиперона, получаем:

$$d\sigma_1(p, q, \xi) = 1/4 |a|^2 p^2 d\rho_f, \quad (7)$$

$$d\sigma_2(p, q, \xi) = 1/2 \{p^2 |a|^2 + q^2 |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a^*b) pq + 2 \operatorname{Im}(a^*b) \xi [pq]\} d\rho_f, \quad (8)$$

где  $\xi$  — единичный вектор в направлении поляризации  $\Lambda$ -гиперона,  $d\rho_f$  — плотность состояний.

Мы видим из (7), что сечение реакции (1) по-прежнему изотропно и не зависит от поляризации  $\Lambda$ -гиперона, однако в отличие от случая  $P_K P_N P_\Lambda = +1$  теперь матричный элемент пропорционален  $p$  и вероятность вылета  $\Lambda$ -гиперонов малой энергии резко уменьшается. Сечение реакции (2) анизотропно в этом случае и зависит от поляризации  $\Lambda$ -гиперона.  $\Lambda$ -гиперон будет, вообще говоря, поляризован в направлении, нормальном плоскости, в которой лежат продукты реакции. В силу несохранения четности при распаде это приведет к тому, что число  $\pi$ -мезонов, возникших при распаде  $\Lambda$ -гиперонов и вылетевших вверх и вниз относительно плоскости реакции, будет различно. Угловое распределение двух  $\pi$ -мезонов и  $\Lambda$ -гиперона в реакции (2) оказывается пропорциональным  $1 + \alpha \cos \theta$  ( $\theta$  — угол между  $p$  и  $q$ ), где

$$\alpha = 2 \operatorname{Re}(a^*b) pq / (p^2 |a|^2 + q^2 |b|^2).$$

Если усреднить (7) и (8) по углам и энергиям, то отношение полного числа заряженных  $\pi$ -мезонов к полному числу нейтральных  $\pi$ -мезонов равно

$$\sigma_2 : \sigma_1 = 1,34 (1 + \bar{q}^2 |b|^2 / 2\bar{p}^2 |a|^2).$$

Использование реакций (1) и (2) для определения знака  $P_K P_N P_\Lambda$  затрудняется тем обстоятельством, что сечение этих реакций составляет не более  $2-3 \cdot 10^{-3}$  от полного сечения неупругого взаимодействия  $K^-$ -мезонов с протонами. Другая существенная трудность заключается в том, что для однозначной интерпретации полученных в реакциях (1) и (2) распределений необходима уверенность, что  $K^-$ -мезон был захвачен протоном именно из  $S$ -состояния.

**β-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ФОРМФАКТОР НУКЛОНА\****Совместно с В. В. Берестецким*

Одним из характерных свойств β-взаимодействия является быстрый рост эффективности вызванных им процессов с энергией. Однако наличие сильных взаимодействий приводит к возникновению у нуклонов формфакторов, которые могут существенно изменить зависимость β-процессов от энергии. Исследования β-превращений при высоких энергиях, например процесса превращения электрона в нейтрино

$$e + p \rightarrow n + \nu, \quad (1)$$

могут служить для измерения этих формфакторов.

В настоящее время, по-видимому, можно считать установленным [1, 2], что β-взаимодействие состоит из векторного и аксиально-векторного взаимодействий. Общее выражение для матричного элемента процесса (1) должно иметь следующий вид [3, 4]:

$$M = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_e) \left\{ \bar{u}_n \left[ a \gamma_\mu + i \frac{b}{M} \hat{q} \gamma_\mu + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_5 \left( c \gamma_\mu + \frac{id}{M} q_\mu \right) \right] u_p \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $u_\nu$ ,  $u_e$ ,  $u_n$ ,  $u_p$  — амплитуды нейтрино, электрона, нейтрона и протона;  $q$  — разность импульсов электрона и нейтрино;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — вещественные функции от  $q^2$ , определяющие векторную ( $a$ ,  $b$ ) и аксиально-векторную ( $c$  и  $d$ ) вершинные функции нуклона. Если справедлива гипотеза Гелл-Манна и Фейнмана [1], то вершинная функция векторного β-взаимодействия тождественна электромагнитной вершинной функции. Поэтому функции  $a$  ( $q^2$ ) и  $b$  ( $q^2$ ) могут быть определены из опытов по рассеянию электронов [5].

Приведем выражение для дифференциального сечения процесса (1). Энергию электрона будем считать большой по сравнению с его массой. При этом последний член в (2), содержащий функцию

\* ЖЭТФ, 1959, 36, 1321.

$d(q^2)$ , не даст вклада в сечение:

$$d\mathfrak{s} = \frac{g^2}{(4\pi)^2} d\sigma \frac{1}{\varepsilon^2 + M^2} \left\{ (a^2 + c^2) \left( 4f^4 - 2f^2 q^2 + \frac{q^4}{2} \right) - (a^2 - c^2) M^2 q^2 + \right. \\ \left. + (ac + 2bc) (q^4 - 4f^2 q^2) + b^2 \left( q^4 + \frac{4q^2 f^4}{M^2} - \frac{2f^2 q^4}{M^2} \right) + 2abq^4 \right\}, \\ q^2 = \varepsilon^2 (1 - \cos \vartheta), \quad f^2 = \varepsilon^2 (1 + \sqrt{1 + M^2/\varepsilon^2}),$$

где  $M$  — масса нуклона,  $\varepsilon$  и  $\vartheta$  — энергия и угол рассеяния в системе центра инерции.

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики  
Академии наук СССР*

Получено 6 января 1959 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *R. P. Feynman, M. Gell-Mann.* Phys. Rev., 1958, **109**, 193.
2. *E. C. G. Sudarshan, R. E. Marshak.* Proc. of the Padua-Venice Conference, 1957; Phys. Rev., 1958, **109**, 1860.
3. *А. И. Ахиезер, Л. Н. Розенцвейг, И. М. Шмушкевич.* ЖЭТФ, 1957, **33**, 765.
4. *M. Goldberger, S. Treiman.* Phys. Rev., 1958, **110**, 1478.
5. *R. Hofstadter, F. Bumler, M. R. Yearson.* Rev. Mod. Phys., 1958, **30**, 482.

## ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО МЕЗОНА\*

*Совместно с И. Ю. Кобааревым и Л. Б. Окунем*

Рассмотрено взаимодействие нейтрального векторного мезона с фотоном. Эти две частицы могут переходить друг в друга. В связи с этим исследуется вопрос о диагонализации функций Грина векторного мезона и фотона.

В последнее время в литературе [1—4] усиленно обсуждается возможность существования гипотетического нейтрального векторного мезона  $\rho^0$ , обладающего сильным взаимодействием. Взаимодействие  $\rho^0$ -мезона с сохраняющимся током сильно взаимодействующих частиц  $j_s$

$$\sqrt{4\pi} g B_\mu j_{s\mu}$$

$B_\mu$  —  $\rho^0$ -мезонное поле,  $g$  — константа взаимодействия) очень похоже на взаимодействие фотона с током заряженных частиц  $j_e$

$$\sqrt{4\pi} e A_\mu j_{e\mu}$$

( $A_\mu$  — фотонное поле,  $e$  — электрический заряд). Так как спин, пространственная и зарядовая четности фотона  $\gamma$  и  $\rho^0$ -мезона одинаковы, то возможен виртуальный переход  $\rho^0 \rightarrow \gamma$ , происходящий за счет того, что имеются сильно взаимодействующие заряженные частицы, дающие вклад как в ток  $j_s$ , так и в ток  $j_e$ <sup>1</sup>. Из соображений градиентной инвариантности следует, что амплитуда такого перехода имеет вид

$$P_{\mu\nu}^{\rho\gamma} = (\delta_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) P(k^2) \quad (P(k^2) \sim ge),$$

где  $k$  — импульс мезона,  $\mu, \nu$  — поляризационные индексы мезона и фотона. Так как  $j_s$  и  $j_e$  — сохраняющиеся токи, то второй член в  $P_{\mu\nu}^{\rho\gamma}$  никогда не дает вклада и может быть отброшен. В дальнейшем мы будем считать, что

$$P_{\mu\nu}^{\rho\gamma} = k^2 \delta_{\mu\nu} P(k^2).$$

\* ЖЭТФ, 1961, 41, 495.

<sup>1</sup> В рамках модели Сакаты мы можем считать, что

$$\begin{aligned} j_s &= \bar{p}\gamma_\alpha p + \bar{n}\gamma_\alpha n + \bar{\Lambda}\gamma_\alpha \Lambda, \\ j_e &= -\bar{p}\gamma_\alpha p + \bar{e}\gamma_\alpha e + \bar{\mu}\gamma_\alpha \mu \end{aligned}$$

(см. в связи с этим [2]). В оба этих тока входит протон.

Простейшая диаграмма для  $P(k^2)$  изображена на рис. 1. Такая диаграмма при обычном способе вычисления содержит квадратичную расходимость, дающую градиентно-неинвариантный вклад. Ввиду этого квадратично расходящуюся часть интеграла необходимо отбросить, аналогично тому, как это делается при вычислении поляризации вакуума в электродинамике. (Заметим, что рассматриваемая петля в точности совпадает с соответствующей петлей для фотонной поляризации вакуума.) Остающаяся часть интеграла содержит логарифмическую расходимость. В электродинамике эта расходящаяся величина входит в перенормировку заряда. В нашем же случае мы должны ввести для  $\rho - \gamma$ -перехода специальную постоянную.

Наличие  $\rho - \gamma$ -перехода приводит [1] к появлению полюса при  $k^2 = m^2$  ( $m$  — масса мезона) в амплитуде  $p - e(p - e)$ -рассеяния за счет диаграмм, изображенных на рис. 2. Соответствующий матричный элемент имеет вид

$$M \sim eg \frac{1}{k^2 - m^2} k^2 P(k^2) \frac{1}{k^2} = \frac{egP(k^2)}{k^2 - m^2}.$$

Такой полюс появится также и в  $e - e$ -рассеянии за счет более сложных диаграмм.

За счет  $\rho - \gamma$ -перехода может также происходить излучение  $\rho^0$ -мезона при столкновениях электронов с амплитудой, пропорциональной соответствующей вершинной части (рис. 3), равной

$$ek^{-2} P(k^2) k^2 |_{k^2=m^2} = eP(m^2).$$

Заметим, что выбранная нами амплитуда  $\rho - \gamma$ -перехода не дает вклада в вершинные части для фотонов при  $k^2 = 0$  и поэтому не сказывается на излучении реальных фотонов. В противном случае нарушилась бы теорема Уорда в электродинамике и исчезло бы равенство между электромагнитными зарядами  $p$  и  $e$  [5].

Мы видим, что наличие  $\rho - \gamma$ -перехода эффективно приводит к появлению взаимодействия  $\rho^0$ -мезона с электрическим током с константой, равной  $eP(m^2) \sim e^2g$ . Мы проведем теперь более подробное рассмотрение вопроса. Введем  $D$ -функции для  $\rho$ -мезона  $D^{\rho\rho}$  (рис. 4, а), фотона  $D^{\gamma\gamma}$

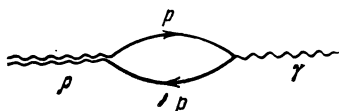


Рис. 1

(рис. 4, б), а также новую функцию  $D^{\rho\gamma}$  для диаграмм, изображенных на рис. 4, в. Отметим, что заштрихованные петли обозначают полную совокупность диаграмм (связных и несвязных).

Рассмотрим рассеяние электрона электроном ( $e - e$ ), электрона протоном ( $e - p$ ), электрона нейтроном ( $e - n$ ) и протона протоном ( $p - p$ ). Соответствующие полюсные амплитуды равны:

$$\begin{aligned} M_{ne} &= geD^{\rho\gamma}, & M_{nn} &= g^2D^{\rho\rho}, \\ M_{pe} &= geD^{\rho\gamma} + e^2D^{\gamma\gamma}, & M_{pp} &= g^2D^{\rho\rho} + 2geD^{\rho\gamma} + e^2D^{\gamma\gamma}, \\ M_{ee} &= e^2D^{\gamma\gamma}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для простоты мы не будем рассматривать диагональных поляриза-ций вакуума  $P^{\rho\rho}$  и  $P^{\gamma\gamma}$  и учтем только амплитуду  $P^{\rho\gamma}$ , описы-вающую совокупность связанных графиков для  $\rho - \gamma$ -перехода. Суммируя цепочки графиков, получаем:

$$\begin{aligned} D^{\gamma\gamma} &= 1/k^2 + P^2(k^2)/(k^2 - m^2 - k^2 P^2(k^2)), \\ D^{\rho\rho} &= 1/(k^2 - m^2 - k^2 P^2(k^2)), \\ D^{\rho\gamma} &= P(k^2)/(k^2 - m^2 - k^2 P^2(k^2)). \end{aligned} \quad (2)$$

Введем теперь диагонализированные функции распространения для  $\gamma$ -кванта и  $\rho$ -мезона:

$$D_{diag}^{\gamma\gamma} = 1/k^2, \quad D_{diag}^{\rho\rho} = 1/(k^2 - m^2 - k^2 P^2(k^2)).$$

Тогда из (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} M_{ee} &= e^2 D_{diag}^{\gamma\gamma} + (eP)^2 D_{diag}^{\rho\rho}, \\ M_{nn} &= g^2 D_{diag}^{\rho\rho}, \quad M_{ne} = g e P D_{diag}^{\rho\rho}, \\ M_{pe} &= (g + eP)(eP) D_{diag}^{\rho\rho} + e^2 D_{diag}^{\gamma\gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полученные формулы (3) можно интерпретировать следующим образом: 1) масса фотона по-прежнему равна нулю; 2) электриче-ский заряд не изменился; 3) полюс  $D_{diag}^{\rho\rho}$  определяет перенор-мированную массу  $\rho$ -мезона  $M^2$ , где

$$M^2 - m^2 - M^2 P^2(M^2) = 0 \quad \text{или} \quad M^2 = m^2/(1 - P(M^2));$$

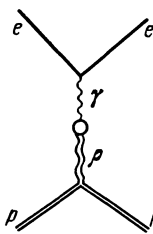


Рис. 2

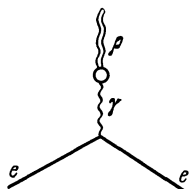


Рис. 3

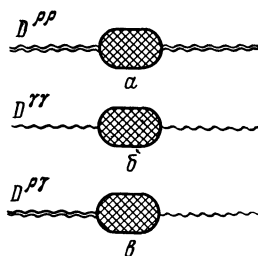


Рис. 4

4) перенормированный заряд для взаимодействия  $\rho$ -мезона с  $j_s$  равен

$$g_{ren} = gZ^{1/2},$$

где

$$Z = [1 - P^2(M^2) - M^2 \partial P^2 / \partial k^2]^{-1} \Big|_{k^2=M^2};$$

5) в результате диагонализации возникло взаимодействие  $\rho$ -мезона с током  $j_e$  с вершинной частью  $P(k^2)$  и перенормированным за-рядом, равным

$$h_{ren} = eP(M^2)Z^{1/2}.$$



Так как  $P(k^2)$  содержит логарифмическую расходимость,  $h_{ren}$  не может быть фактически вычислено и должно входить в виде новой постоянной.

Произведенную нами диагонализацию можно иллюстрировать следующим примером. Рассмотрим лагранжиан  $\rho$ - и  $\gamma$ -полей, содержащий  $\rho - \gamma$ -переход и взаимодействие с внешними токами  $J_s$  и  $J_e$ :

$$L = \frac{1}{2} B_\mu (k^2 - m^2) B_\mu + \frac{1}{2} A_\mu k^2 A_\mu - A_\mu B_\mu \lambda k^2 - e J_{e\mu} A_\mu - g J_{s\mu} B_\mu$$

( $A_\mu$  — фотонное,  $B_\mu$  — мезонное поля). Введем теперь перенормированные (диагональные) поля<sup>1</sup>:

$$A' = A - \lambda B, \quad B' = \sqrt{1 - \lambda^2} B;$$

$$A = A' - \lambda B' / \sqrt{1 - \lambda^2}; \quad B = B' / \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Тогда лагранжиан запишется в виде

$$A'_\mu k^2 A'_\mu + B'_\mu (k^2 - M^2) B'_\mu - g_{ren} B'_\mu J_{s\mu} - e A'_\mu J_{e\mu} - h J_{e\mu} B'_\mu,$$

где

$$M^2 = m^2 / (1 - \lambda^2), \quad g_{ren} = g / \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad h = \lambda e / \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

Мы видим, что в результате диагонализации произошла перенормировка массы  $\rho$ -мезона и константы сильного взаимодействия  $g$  и появилось взаимодействие  $\rho$ -мезона с током  $J_e$  с константой  $h$ . Полученные выражения  $M^2$ ,  $g_{ren}$  и  $h$  совпадают с полученными ранее в случае, если  $P(k^2) = \lambda = \text{const}$ .

Авторы благодарны А. Д. Галанину, Б. Л. Иоффе и К. А. Тер-Мартиросяну за полезные обсуждения.

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
Академии наук СССР*

Получено  
28 февраля 1961 г.

*Примечание при корректуре (14 июля 1961 г.).* Вопрос о  $\rho - \gamma$ -переходе частично был рассмотрен в статье Хаффа (R. W. Huff. Phys. Rev., 1958, 112, 1021), с которой мы ознакомились после того, как наша работа была направлена в печать.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Y. Nambu. Phys. Rev., 1957, 106, 1366.
2. Y. Fujii. Progr. Theor. Phys., 1959, 21, 232; И. Кобзарев, Л. Окунь. ЖЭТФ, 1961, 41, 499.
3. J. J. Sakurai. Phys. Rev., 1960, 114, 1784.
4. M. Gell-Mann, R. P. Feynman. Proc. of X Rochester Conf., 1960, p. 499, 508.
5. M. Gell-Mann. Proc. of X Rochester Conf., 1960, 792.
6. S. Okubo. Nuovo Cimento, 1960, 16, 963; G. Feinberg, P. Kabir, S. Weinberg. Phys. Rev. Letters, 1959, 3, 527; N. Gabibo, R. Gatto, C. Zemach. Nuovo Cimento, 1960, 16, 168.

<sup>1</sup> Аналогичная процедура диагонализации содержится в ряде работ [6].

# НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ $\omega$ , $\varphi$ И $f^0$ -МЕЗОНОВ\*

Совместно с Б. Л. Иоффе и И. Ю. Кобзаревым

1. В схеме унитарной симметрии  $SU_3$  обычно предполагается (см., например, [1, 2]), что состояния  $\omega$ - и  $\varphi$ -мезонов являются смесью двух состояний: унитарного синглета  $\psi_1$  и состояния с  $T = 0$  и  $Y = 0$ , принадлежащего унитарному октету,  $\psi_8$ , т. е.

$$\omega = \alpha\psi_8 + (1 - \alpha^2)^{1/2}\psi_1, \quad \varphi = (1 - \alpha^2)^{1/2}\psi_8 - \alpha\psi_1. \quad (1)$$

Параметр смешивания  $\alpha$ , определенный Окубо [1] исходя из наблюдаемых на эксперименте масс  $\omega$ - и  $\varphi$ -мезонов и теоретического значения массы состояния  $T = 0$ ,  $Y = 0$  унитарного октета, полученного по массовой формуле Гелл-Манна — Окубо, оказался  $\alpha \approx 0,64$ .

Рассмотрим в схеме унитарной симметрии распады некоторого резонансного состояния  $A \rightarrow C + \varphi$  и  $A \rightarrow C + \omega$ . Будем считать, что эти распады разрешены в  $SU_3$ -схеме и что состояния  $A$  и  $C$  относятся к представлениям различной размерности группы  $SU_3$ . Тогда очевидно, что в матричный элемент перехода из (1) дает вклад только состояние унитарного октета и, следовательно, при учете только  $SU_3$ -инвариантных взаимодействий отношение квадратов матричных элементов переходов  $A \rightarrow C + \varphi$  и  $A \rightarrow C + \omega$  будет равно

$$|M_{A \rightarrow C + \varphi}|^2 / |M_{A \rightarrow C + \omega}|^2 = (1 - \alpha^2) / \alpha^2. \quad (2)$$

Если энергии, выделяемые при распадах  $A \rightarrow C + \varphi$ ,  $A \rightarrow C + \omega$ , невелики, то необходимо учесть различие масс  $\omega$ - и  $\varphi$ -мезонов. Это можно сделать, записав матричный элемент в виде  $M_{\varphi, \omega} = a (k_{\varphi, \omega})^l$ , где  $l$  — орбитальный момент системы  $C + \omega$  или  $C + \varphi$ ,  $k_{\varphi}$  и  $k_{\omega}$  — импульсы  $\varphi$ - и  $\omega$ -мезонов в системе покоя частицы  $A$ . Отношение вероятностей процессов  $A \rightarrow C + \varphi$  и  $A \rightarrow C + \omega$  тогда будет равно

$$\frac{w(A \rightarrow C + \varphi)}{w(A \rightarrow C + \omega)} = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \left( \frac{k_{\varphi}}{k_{\omega}} \right)^{2l+1}. \quad (3)$$

Если  $A$  и  $C$  относятся к представлениям унитарной группы одинаковой размерности, то, очевидно, никаких заключений об этом отношении сделать нельзя.

\* ЖЭТФ, 1965, 48, 375.

Соотношение (3) дает возможность исследовать схему унитарной симметрии в различных аспектах. Если размерности представлений, к которым относятся частицы  $A$  и  $C$ , известны, с помощью (3) может быть проверена гипотеза о том, что  $\varphi$  и  $\omega$  описываются смесью унитарных синглета и октета. Если же размерности представлений неизвестны, то на основании измеренного на опыте отношения  $w(A \rightarrow C + \varphi)/w(A \rightarrow C + \omega)$  и (3) можно получить определенную информацию об этих размерностях.

Примером реакции рассмотренного выше типа является распад  $B$ -мезона с массой  $1220 \text{ Мэв}$ :  $B \rightarrow \pi + \omega$  (см. [3]). Согласно полученным в [3] экспериментальным данным<sup>1</sup>

$$w(B \rightarrow \pi + \varphi)/w(B \rightarrow \pi + \omega) < 0,2 \pm 0,1,$$

в то время как из (3) при  $l = 0$  следует  $[(1 - \alpha^2)/\alpha^2] (k_\varphi/k_\omega) = 0,58$ . Из сопоставления этих двух цифр следует, что если  $B$ -мезон имеет спин и четность  $1^+$ , то он должен принадлежать к октету. Это заключение противоречит предложенной Владимирским [4] схеме, в которой  $B$ -мезон с  $J^p = 1^+$  входит в 27-супермультиплет. Если (в пользу чего говорят данные работы [5]) спин и четность  $B$ -мезона равны  $J^p = 1^-$  (или  $2^-$ ), то  $l = 1$  и согласно (3)

$$w(B \rightarrow \pi + \varphi)/w(B \rightarrow \pi + \omega) \approx 0,1.$$

Такая величина этого отношения не противоречит эксперименту при существующей точности и, следовательно, такой  $B$ -мезон может принадлежать к любому из представлений, входящему в произведение  $\{8\} \times \{8\}$ , в том числе и в 27-супермультиплет [4].

2. В настоящее время имеются указания [6—10] на то, что  $f^0$ -мезон с массой  $1250 \text{ Мэв}$  является изоскалавром. Если  $f^0$ -мезон лежит на вакуумной траектории, как было предложено Чу, Гелл-Манном, Фраучи и Захариазеном [11, 12], то он должен являться унитарным синглетом. Тогда амплитуды реакций

$$\text{мезон (1.1) + барион (1.1)} \rightarrow \text{барион (3.0) + } f^0 \quad (4)$$

должны выражаться через одну унитарную амплитуду. Возникающие при этом соотношения между амплитудами различных зарядовых каналов легко получаются с помощью  $U_2$ -преобразований [13] и изотопической инвариантности, так что соответствующие амплитуды равны:

$$\begin{aligned} \text{I. } \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0 + f^0 : a, & \text{II. } \pi^+ + p &\rightarrow \Delta^{++} + f^0 : \sqrt{3} \cdot a, \\ \text{III. } K^- + p &\rightarrow \Sigma_8^0 + f^0 : a/\sqrt{2}, & \text{IV. } \bar{K}^0 + p &\rightarrow \Sigma_8^+ + f^0 : a. \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Приведенная в тексте верхняя оценка отношения  $w(B \rightarrow \pi + \varphi)/w(B \rightarrow \pi + \omega)$  получена из экспериментальных данных из [3] в предположении, что все наблюдавшиеся в данном опыте  $\varphi$ -мезоны возникли при распаде  $B$ -мезонов.

Проверка соотношений между сечениями пар реакций I, II, III и IV в (5) могла бы дать сведения об унитарном спине  $f^0$ -мезона. Эти соотношения целесообразно проверять при энергиях, не близких к порогу рождения  $f^0$ -мезона в реакции IV и при не малых передаваемых импульсах. Заметим, что соотношения I—IV верны также и в случае рождения  $n$   $f^0$ -мезонов.

3. Вероятности различных каналов распада  $f^0$ -мезона, если он является унитарным синглетом, находятся в следующих соотношениях:

$$w(f^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) : w(f^0 \rightarrow K^+ + K^-) : w(f^0 \rightarrow \eta^0 + \eta^0) : w(f^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0) : w(f^0 \rightarrow K^0 + \bar{K}^0) = k_\pi^{2l+1} : k_K^{2l+1} : 1/2 k_\eta^{2l+1} : 1/2 k_\pi^{2l+1} : k_K^{2l+1}, \quad (6)$$

где  $l$  — спин  $f^0$ -мезона, который, как предполагается, равен двум.

Возможность того, что  $f^0$ -мезон не лежит на вакуумной траектории, не может быть исключена в настоящее время. В этом случае  $f^0$ -мезон не обязан быть унитарным синглетом, а может, например, принадлежать к унитарному октету. Соотношения между сечениями различных процессов в реакции IV для мезона — члена унитарного октета с  $T = 0$  были получены в [13]. Вероятности различных каналов распада  $f^0$ -мезона, если он входит в унитарный октет, должны относиться как

$$w(f^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) : w(f^0 \rightarrow K_1^+ + K_1^-) : w(f^0 \rightarrow \eta^0 + \eta^0) : w(f^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0) : w(f^0 \rightarrow K^0 + \bar{K}^0) = k_\pi^{2l+1} : 1/4 k_K^{2l+1} : 1/2 k_\eta^{2l+1} : 1/2 k_\pi^{2l+1} : 1/4 k_K^{2l+1}. \quad (7)$$

Как следует из (7) и (6), в случае  $f^0$ -мезона — члена унитарного октета вероятность распада его на  $K^0$ -мезоны должна быть в четыре раза меньше, чем в случае  $f^0$ -мезона — унитарного синглета. Подставляя в (6) и (7) числа для измеряемого на опыте [6] отношения

$$R = w(f^0 \rightarrow K_1^0 + K_1^0) / w(f^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-),$$

при массе  $f^0$ -мезона 1260  $M_{\text{эв}}$  имеем:

$$\begin{aligned} f^0 &\text{ — унитарный синглет, } R = 0,048; \\ f^0 &\text{ — член унитарного октета, } R = 0,012. \end{aligned} \quad (88)$$

Соотношения (6) — (8) получены в предположении равного нулю радиуса взаимодействия частиц, возникающих при распаде  $f^0$ -мезона. Учет конечности радиуса взаимодействия должен увеличить величину (8). Точность значений  $R$  из (8), рассматриваемых как нижняя граница, определяется нарушением унитарной симметрии, и можно думать, что так же, как и в других случаях [14], она будет не хуже 30—50%.

Согласно экспериментальным данным [6],  $R = 0,022 \pm 0,01$ . Возможно, это указывает на то, что  $f^0$  не является унитарным синглетом. Разумеется, нельзя исключить также и большого нарушения унитарной симметрии в этом случае. Кроме того, наблюдавшийся в [6] распад, возможно, принадлежит  $A_2$ -мезону [15].

Если  $f^0$  принадлежит к унитарному октету, то к нему должен принадлежать также триплет  $\pi_{2^+}$  и два дублета  $K_{2^+}$  и  $\bar{K}_{2^+}$ . Парциальные ширины распадов этих мезонов, являющихся унитарными аналогами  $f^0$ -распадов, следующим образом связаны с шириной распада  $f^0$  на  $\pi^+\pi^-$ ,  $\pi^0\pi^0$ , практически равной его полной ширине  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi_{2^+}^+ \rightarrow \eta\pi^+) &= \Gamma(\pi_{2^+}^0 \rightarrow \eta\pi^0) = \frac{2}{3} (q_1/k_\pi)^5 \Gamma, \\ \Gamma(\pi_{2^+}^+ \rightarrow K^+\bar{K}^0) &= (q_2/k_\pi)^5 \Gamma, \\ \Gamma(\pi_{2^+}^0 \rightarrow K^+K^-) &= \frac{1}{2} (q_2/k_\pi)^5 \Gamma, \\ \Gamma(\pi_{2^+}^0 \rightarrow K_1^0K_1^0) &= \Gamma(\pi_{2^+}^0 \rightarrow K_2^0K_2^0) = \frac{1}{4} (q_2/k_\pi)^5 \Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \Gamma(K_{2^+}^+ \rightarrow \eta K^+) &= \Gamma(K_{2^+}^0 \rightarrow \eta K^0) = \frac{1}{6} (q_3/k_\pi)^5 \Gamma, \\ \Gamma(K_{2^+}^+ \rightarrow K^+\pi^0) &= \Gamma(K_{2^+}^0 \rightarrow K^0\pi^0) = \frac{1}{2} (q_4/k_\pi)^5 \Gamma, \\ \Gamma(K_{2^+}^+ \rightarrow K^0\pi^+) &= \Gamma(K_{2^+}^0 \rightarrow K^+\pi^-) = (q_4/k_\pi)^5 \Gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $q_i$  — импульсы мезонов, возникающих в данном распаде. Измерение соответствующих парциальных ширин и сравнение их с формулами (9), (10) может оказаться полезным при попытке отождествить наблюдаемые на опыте резонансы с членами рассмотренного выше унитарного октета. Например, мезоном  $\pi_{2^+}$  может оказаться резонанс  $A_2$  с массой 1310 Мэв и  $J^P = 2^+$ . Тогда по формуле Гелл-Манна — Окубо масса резонанса  $K_{2^+}$  должна быть равной 1270 Мэв. Резонанс  $K$  со странностью  $S = \pm 1/2$  и  $I_z = \pm 1/2$ , по-видимому, наблюдался [16] при массе 1215 Мэв. Квантовые числа его в настоящее время неизвестны.

Авторы благодарны А. Г. Мешковскому и В. А. Шебанову за сообщение результатов работы [6] до опубликования и Л. Б. Окуню за полезные обсуждения.

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики*

Получено 5 ноября 1964 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Okubo. Phys. Letters, 1963, 5, 165.
2. C. L. Glashow. Phys. Rev. Letters, 1963, 11, 48.
3. M. Abolins, R. L. Lander, W. A. Mehlhop, N. H. Xuong, P. M. Yager. Phys. Rev. Letters, 1963, 11, 381.
4. В. В. Владимировский. Ядерная физика, 1965, 2, 1087.

5. *D. D. Carmony, R. L. Lander, C. Rindfleisch, N. H. Xuong, P. Yager.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 254.
6. *В. В. Бармин, А. Г. Долголенко, И. А. Ерофеев, Ю. С. Крестников, А. Г. Мешковский, Г. Д. Тихомиров, Ю. В. Требуховский, В. А. Шебанов.* Препринт ИТЭФ, № 223, 1964; Ядерная физика, 1965, 1, 324.
7. *G. Venson, L. Lovell, E. Marquit, B. Roe, D. Sinclair, J. Van der Velde, P. Van Rookhuuzen.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 600.
8. *N. Gelfand, G. Lütjens, M. Nussbaum, J. Steinberger, H. O. Cohn, W. B. Bugg, G. T. Condo.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 567.
9. *L. Sodickson, M. Wahlig, L. Mandli, D. Frisch, O. Fackler.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 485.
10. *J. J. Lee, B. R. Roe, D. Sinclair, J. C. Van der Velde.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 342.
11. *G. F. Chew, S. C. Frautschi.* Phys. Rev. Letters, 1961, 5, 580.
12. *S. C. Frautschi, M. Gell-Mann, F. Zachariasen.* Phys. Rev., 1964, 126, 2204.
13. *S. Meshkov, C. A. Levinson, H. J. Lipkin.* Phys. Rev. Letters, 1963, 10, 361.
14. *S. L. Glashow, A. H. Rosenfeld.* Phys. Rev. Letters, 1963, 10, 192.
15. *S. U. Chung, O. I. Dahl, L. M. Hardy, R. I. Hess, G. R. Kalbfleisch, J. Kirz, D. H. Miller, S. A. Smith.* Phys. Rev. Letters, 1964, 12, 621.
16. *R. Armenteros.* Intern. Conf. on High Energy Physics at Dubna, 1964; Препринт ОИЯИ, Е-1804, 1964.

## «ТЕНЕВАЯ ВСЕЛЕННАЯ» И НЕЙТРИННЫЙ ОПЫТ\*

Совместно с Л. Б. Окунем

Для объяснения  $\theta$ -распада долгоживущего  $K^0$ -мезона [1—3] Нишиджима и Сафури предложили недавно гипотезу «теневого Вселенной» [4]. Согласно этой гипотезе, наряду с нашей Вселенной  $U_a$  существует Вселенная  $U_b$ . Каждой частице  $a$  из  $U_a$  отвечает частица  $b$  из  $U_b$ . Сильные и электромагнитные взаимодействия внутри каждой из Вселенных одинаковы, но между частицами из разных Вселенных отсутствуют. Слабое взаимодействие существует между частицами  $a$ , а также между  $a$  и  $b$ , слабое взаимодействие между частицами  $b$  отсутствует, так что если бы не было переходов  $a \leftrightarrow b$ ,  $K^b$ -мезоны были бы стабильны. Такой вид слабого взаимодействия предотвращает ненаблюдаемые распады  $K^a$ -мезонов на  $b$ -частицы (например,  $\pi^b$ -мезоны).

В модели «теневого Вселенной»  $K^0$ -мезоны вырождены: существуют  $K_1^a$  с  $\Gamma_a = 10^{10} \text{ сек}^{-1}$  и  $K_1^b$  с  $\Gamma_b = 0$ . Из-за переходов в вакууме  $K_1^a \leftrightarrow K_1^b$  возникают два диагональных состояния  $K_1$  и  $K_3$ :

$$\begin{aligned} i\dot{K}_a &= \lambda_a K_a + \lambda K_b, \\ i\dot{K}_b &= \lambda K_a + \lambda_b K_b, \\ \lambda_a &= \mu_a - i\Gamma_a/2, \\ \lambda_b &= \mu_b. \end{aligned} \quad (1)$$

Частоты диагональных состояний равны

$$\lambda_{1,3} = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2} \pm \sqrt{\frac{(\lambda_a - \lambda_b)^2}{4} + \lambda^2}. \quad (2)$$

Если предположить, что  $\beta = \frac{\lambda}{\lambda_a - \lambda_b} \ll 1$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 - i\Gamma_1/2 = \lambda_a + \beta^2(\lambda_a - \lambda_b), \\ \lambda_3 &= \mu_3 - i\Gamma_3/2 = \lambda_b - \beta^2(\lambda_a - \lambda_b). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда следует, что  $\Gamma_1 \approx \Gamma_a \approx 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\Gamma_3 \approx \beta^2 \Gamma_a$ . При  $\beta \sim 0,1$   $\Gamma_3 \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$ .

\* Письма ЖЭТФ, 1965, 1, 28; Phys. Letters, 1965, 16, 338.

Состояния  $K_a$  и  $K_b$  в вакууме описываются функциями:

$$\begin{aligned} K_a &= e^{-i\lambda_1 t} + \beta^2 e^{-i\lambda_3 t}, \\ K_b &= \beta (e^{-i\lambda_1 t} - e^{-i\lambda_3 t}). \end{aligned} \quad (4)$$

Вероятность  $\theta^0$ -распада долгоживущей компоненты равна

$$\Gamma_3 \beta^2 e^{-\Gamma_3 t}. \quad (5)$$

Опыты [1—3] показывают, что время жизни долгоживущей  $\theta^0$ -компоненты близко к времени жизни  $K_2^0$ -мезона. Но эти опыты, по видимому, не могут окончательно «закрыть» гипотезу «теневого Вселенной».

Цель этой заметки — отметить, что гипотеза «теневого Вселенной» находится в резком противоречии с результатами нейтринного эксперимента [5]. Действительно, число  $K^0$ -мезонов, образованных в мишени нейтринного эксперимента, порядка  $10^{15}$ . Если учесть, что детектор находится примерно в 50 м от мишени и имеет эффективный размер  $\sim 10$  м (искровая камера), то число  $\theta$ -распадов в детекторе составило бы согласно (5)  $\sim 10^{11} - 10^{12}$  (при средней энергии  $K$ -мезонов  $\sim 5$  Бэв). Это число практически не изменится, если учесть наличие железной защиты толщиной 25 м. Это утверждение является основным в данной заметке и основано на том, что наличие среды вносит изменения только в коэффициент  $\lambda_a$  в уравнении (1), оставляя остальные коэффициенты неизменными. Это изменение порядка  $\sigma CN \sim 10^{-26} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 10^{23} \sim \sim 1,5 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$  мало по сравнению с разностью  $\lambda_a - \lambda_b$  и становится одного порядка с ней только за счет релятивистских эффектов при  $E/m \sim 10$ . Таким образом, и в веществе  $\beta \ll 1$  и  $\Gamma_3 \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$ . Этот результат легко понять качественно, если учесть, что  $K_b$  с веществом не взаимодействуют, а  $K_a$  поглощаются в среде ненамного сильнее, чем в вакууме (при  $E/m \sim 1$  длина взаимодействия больше распадной длины). В результате железная стена оказывается «прозрачной» для  $K_3$ -мезонов. Так как число возможных  $\theta$ -распадов не превышало в нейтринном опыте  $10^2$ , то расхождение между опытом и моделью «теневого Вселенной» составляет 10 порядков. (Число  $10^2$  является, по видимому, верхней границей, оно характеризует фон нейтринного опыта, не связанный с нейтринно; полное число нейтринных событий было  $\sim 10^4$ .)

Приведенные выше соображения не относятся к гипотезам [6, 7], согласно которым долгоживущий  $\theta_L$ -мезон может обладать сильным взаимодействием. Здесь, однако, остается непонятным вырождение масс долго- и короткоживущего  $\theta$ -мезонов, так как их сильные взаимодействия различны (различны сечения их рождения). Для проверки этих гипотез было бы разумно поставить на пути пучка  $K^0$ -мезонов поглотитель и выяснить, имеет ли  $\theta_L$ -мезон то же сечение поглощения, что  $K_2^0$ -мезон. Помещение в пучок  $K_2^0$ -мезонов пластинок предлагалось рядом авторов



[8—12] с целью наблюдения интерференции распадов  $K_2^0$ - и  $K_1^0$ -мезонов и планируется в ряде экспериментов. Наше предложение отличается тем, что пластинка должна быть довольно толстой и должна находиться на большом расстоянии от детектора, чтобы регенерированные  $K_1^0$ -мезоны не дошли до него.

В заключение заметим, что если существует два  $CP$ -четных  $K$ -мезона:  $K_1$  и  $K_3$ , то должны существовать два  $CP$ -нечетных  $K$ -мезона:  $K_2$  и  $K_4$ . Представляют интерес поэтому поиски двух экспонент в обычных распадах  $K_2^0$ -мезона ( $K_{\pi^+}$ ,  $K_{\mu^+}$ ,  $K_{e^+}$ ).

Авторы благодарны за полезные обсуждения В. Н. Грибову, В. Кафтанову, И. Ю. Кобзареву, Б. М. Понтекорво.

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики*

Получено 10 мая 1965 г.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Christenson, J. Cronin, V. Fitch, R. Turlay.* Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 138.
2. *X. De Bouard, D. Dekkers, B. Jordan, R. Mermod, T. R. Willits, K. Winter, P. Scharff, L. Valentin, M. Vivargent, M. Bott-Bodenhausen.* Phys. Letters, 1965, 15, 58.
3. *W. Galbraith, G. Manning, A. E. Taylor, B. D. Jones, J. Malos, A. Astbury, N. H. Lipman, T. G. Walker.* Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 383.
4. *K. Nishijima, M. H. Saffouri.* Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 205.
5. *G. Bernardini.* Труды Конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1964.
6. *H. J. Lipkin, A. Abashian.* Phys. Letters, 1965, 14, 151.
7. *J. Uretsky.* Phys. Letters, 1965, 14, 154.
8. *M. Levy, M. Nauenberg.* Phys. Letters, 1964, 12, 155.
9. *R. Sachs.* Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 348.
10. *J. Bernstein, N. Cabibbo, T. D. Lee.* Phys. Letters, 1964, 12, 146.
11. *В. Л. Любошиц, Э. О. Оконов, М. И. Подгорецкий, У Цзун-фань.* Препринт ОИЯИ, Д-1926, 1964.
12. *В. В. Владимировский, М. В. Терентьев.* Явление регенерации и полный опыт в пучке  $K^0$ -мезонов. Препринт ИТЭФ, № 323, 1965.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ РАЗНОСТИ МАСС БАРИОНОВ И $SU(6)$ -СИММЕТРИЯ \*

*Совместно с А. Д. Долговым, Л. В. Окунем и В. В. Соловьевым*

Как известно,  $SU(6)$ -симметрия [1] приводит к следствиям [2], находящимся в ряде случаев в поразительном согласии с опытом. Ниже приведен результат расчета электромагнитных разностей масс барионов 56-плета. Мы исходим из модели «нерелятивистских» кварков [3], предполагая, что они находятся в состоянии с полным орбитальным моментом, равным нулю, и что электромагнитные разности масс барионов обусловлены тремя эффектами:

- 1) различием в электромагнитных массах  $u$ -кварка и  $s$ -,  $d$ -кварков (член вида  $\sim \Delta \sum_i \lambda_i^e$ );
- 2) кулоновским взаимодействием между кварками (член вида  $\sim \epsilon \sum_{ik} \lambda_i^e \lambda_k^e$ );
- 3) взаимодействием между магнитными моментами кварков (член вида  $\sim M \sum_{ik} \lambda_i^e \lambda_k^e \sigma_i \sigma_k$ ).

Такой вид магнитного взаимодействия имеет место, если отсутствуют суперзаряженные частицы. В этом случае полные магнитные моменты кварков должны быть пропорциональны их зарядам:

$$\mu_u : \mu_d : \mu_s = 2 : (-1) : (-1).$$

Таким образом, электромагнитные разности масс барионов могут быть выражены через три параметра  $\Delta$ ,  $\epsilon$ ,  $M$ , как это показано в таблице.

Выражения для  $\Delta m$ , приведенные в таблице, разумеется, удовлетворяют соотношениям, вытекающим из  $SU(3)$ -симметрии [9].

Если определить параметры  $\Delta$ ,  $\epsilon$ ,  $M$  по экспериментальным расщеплениям  $n - p$ ,  $\Sigma^- - \Sigma^0$  и  $\Sigma^- - \Sigma^+$ , то получим:

$$\Delta \approx 2 \text{ Мэв}, \quad \epsilon \approx 1,2 \text{ Мэв}, \quad M \approx 0,5 \text{ Мэв}.$$

Вычисленные с помощью этих значений параметров остальные разности масс приведены в последнем столбце таблицы. Уточнение имеющихся экспериментальных данных по разностям масс в декуплете позволит проверить предсказания модели<sup>1</sup>.

Заметим, что сделанные выше естественные предположения

\* Ядерная физика, 1965, 1, 730; Phys. Letters, 1965, 15, 84.

<sup>1</sup> Когда эта работа была уже написана, авторы получили препринт [12], в котором измерена разность масс  $\Delta^0 - \Delta^{++}$  (см. последний столбец таблицы).

о характере взаимодействия, осуществляющего расщепление, эквивалентны требованию того, что электромагнитный ток преобразуется по регулярному представлению  $SU(6)$  [2], причем временная и пространственная части тока принадлежат, вообще говоря, к различным представлениям, что отвечает на языке модели наличию, наряду с кулоновским взаимодействием между кварками, взаимодействия между их магнитными моментами. Таким образом  $j_4 \sim (35, 8, 1)$ ,  $j \sim (35, 8, 3)$ , где  $\sim$  означает «преобразуется подобно», а цифры в скобках — размерности соответственно  $SU(6)$ ,  $SU(3)$  и  $SU(2)$ -представлений. Учитывая сказанное, для электромагнитного расщепления 56-плета можно получить следующую формулу:

$$\delta M = aQ + bQ^2 + c [3U(U + 1) - 2I(I + 1)],$$

где  $Q$  — заряд частицы,  $I$  — пространственный спин,  $U$  —  $U$ -спин. Легко проверить, что этот результат совпадает с полученным выше, причем параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеют следующие значения:

$$a = -\frac{1}{2} (2\Delta + \varepsilon + 5M) \approx -3,85 M\varepsilon,$$

$$b = \frac{3}{2} \varepsilon - M \approx -1,3 M\varepsilon,$$

$$c = -\frac{2}{3} M \approx -\frac{1}{3} M\varepsilon.$$

То, что электромагнитное расщепление барионов определяется тремя константами, очевидно из того факта, что в разложении на неприводимые представления произведения представлений  $35 \times 35 \times 56^* \times 56$  общими являются  $35$  и  $405$ , причем в оператор электромагнитного расщепления дают вклад компоненты  $(35, 8, 1)$ ,  $(405, 8, 1)$  и  $(405, 27, 1)$  с  $U = 0$ . Электромагнитное расщепление мезонов, принадлежащих представлению  $35$ , описывается в отличие от барионов, вообще говоря, шестью константами, поэтому в данном случае не возникает каких-либо дополнительных соотношений.

Когда этот расчет был близок к концу, появилась статья Сакиты [10] и препринт Сингха [11], посвященные электромагнитным разностям масс в 56-плете. Результат Сакиты [10] отвечает двум свободным параметрам ( $M = 0$  или  $C = 0$ ) и противоречит экспериментальным данным по расщеплению барионного октуплета. Соотношения Сингха содержат четыре свободных параметра. Это связано с тем, что он рассматривает как независимые вклады с  $T = 2$  ( $r$ ) и  $T = 1$  ( $q$ ), содержащиеся в 27 из 405. Если положить у Сингха  $r = -\frac{1}{6} q$  и исправить некоторые опечатки, его результаты совпадут с нашими и будут удовлетворять требованиям симметрии по  $U$ -спину.

Как видно из предыдущего, параметр  $M$  оказался того же порядка, что и  $\varepsilon$ . Это означает на языке модели, что взаимодействие между магнитными моментами кварков того же порядка, что и взаимодействие между их зарядами. Это было бы естественным,

											$\Xi^* \rightarrow \Xi^* \pi^0$		
											$Y^0 \rightarrow Y^+$	$Y^- \rightarrow Y^0$	
	$n - p$	$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0$	$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^+$	$\langle \Sigma^0 / \Lambda \rangle$	$\Xi^- \rightarrow \Xi^0$	$\Delta^+ \rightarrow \Delta^{++}$	$\Delta^- \rightarrow \Delta^{++}$	$\Delta^0 \rightarrow \Delta^+$	$\Delta^- \rightarrow \Delta^+$	$\Delta^0 \rightarrow \Delta^+$	$\Delta^- \rightarrow \Delta^0$	$\Delta^0 \rightarrow \Delta^{++}$	
$\Delta$	+1	+1	+2	0	+1	+1	+3	+1	+2	+1	+2	+1	+2
$\varepsilon$	-1	+2	+1	0	+2	-4	-3	-1	+1	+2	+2	-5	-5
$M$	+1	+1	+5	$+\sqrt{3}$	+4	+4	+3	+1	-1	-2	+5	+5	+5
$\Delta m_{\text{всп}}, M_{\varepsilon\varepsilon}$	$1,3$ [4]	$4,75 \pm 0,1$ [4, 5]	$7,6 \pm 0,3$ [4, 5]	?	$6,5 \pm 1$ [4]	?	$0,6 \pm 5,0$ [6]	?	$4,4 \pm 2$ [7] или $17 \pm 7$ [8]	$5,7 \pm 3,0$ [13]	$0,45 \pm 0,85$ [42]		
$\Delta m_{\text{теор}}, M_{\varepsilon\varepsilon}$				0,9	6,4	-0,8	3,9	1,3	4,7	3,4	0,5		

если бы кварки, вопреки ферми-дираковской статистике, находились в  $S$ -состоянии, и представляется странным, если считать, что кварки находятся в полностью антисимметричном орбитальном состоянии с  $L = 0$  типа

$$(r_1^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_3^2)(r_3^2 - r_1^2),$$

где  $r_1, r_2, r_3$  — радиус-векторы кварков. Но что не является странным в  $SU(6)$ -симметрии?

Авторы благодарны В. Сингху, приславшему препринт своей работы [11], Я. Б. Зельдовичу и И. Ю. Кобзареву, сделавшим ряд ценных критических замечаний.

1. После того как письмо было отправлено в редакцию, появился ряд работ, в которых также вычисляются электромагнитные разности масс для 56-плета (B. S a k i t a. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 643; С. Н. С h a n, A. Q. S a r k e r. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 731; Д. В. В о л к о в. Письма в ЖЭТФ, 1965, 1, 129; Т. К. К u o, Т. Y a o. Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 79). В первых двух не учитываются магнитные взаимодействия. Их результаты, по-видимому, хуже согласуются с имеющимися экспериментальными данными. В последних двух получены те же результаты, что и у нас.

2. Кроме того, недавно были получены более точные значения разностей масс  $\Sigma$ -гиперонов (D o s c h. Phys. Letters, 1965, 14, 239):

$$\Sigma^0 - \Sigma^+ = 3,03 \pm 0,13 \text{ Мэв}, \quad \Sigma^- - \Sigma^0 = 4,86 \pm 0,07 \text{ Мэв}.$$

Это приведет к незначительному численному изменению теоретических предсказаний.

*Институт теоретический  
и экспериментальный физики*

Получено  
5 ноября 1964 г

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Gürsey, L. Radicati. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 173; A. Pais. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 175.
2. M. Beg, B. W. Lee, A. Pais. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 514.
3. M. Gell-Mann. Phys. Letters, 1964, 8, 214; L. Zweig. CERN, preprint.
4. A. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtieri, W. Biswas, P. Bastien, J. Kirz, M. Roos. Rev. Mod. Phys., 1964, 36, 977.
5. R. A. Burnstein, T. B. Day, B. Rehoe, B. Sechi-Zorn, G. Snow. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 66.
6. G. Gidal, A. Kernan, S. Kim. Preprint, UCRL — 11543; J. Kirz, J. Schwartz, R. Tripp. Phys. Rev., 1963, 130, 2481.
7. D. O. Huwe. Preprint, UCRL — 11291, 1964.
8. W. A. Cooper, H. Filthuth, A. Fridman, E. Malamud, E. S. Geselwa, J. C. Kluyver, A. G. Tenner. Phys. Letters, 1964, 8, 365.
9. S. Coleman, S. Glashow. Phys. Rev. Letters, 1961, 6, 423; N. Cabibbo, R. Gatto. Nuovo Cimento, 1961, 21, 872; S. P. Rosen. Phys. Rev. Letters, 1963, 11, 100; M. Nauenberg. Nuovo Cimento, 1964, 34, 1254; S. Okubo. Rochester. preprint, UR — 875—26, 1964; E. C. G. Sudarshan. Rochester preprint, NYO — 10268, 1963; R. Socolov, S. Coleman. Phys. Rev., 1964, 135, B1451.
10. B. Sakita. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 643.
11. V. Singh. Tata Institute preprint, 1964.
12. M. G. Olsson. University of Wisconsin, preprint COO — 881—42.
13. G. M. Pjerrou, P. E. Schlein, W. E. Slater et al. Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 275.

## О ВОЗМОЖНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ЗЕРКАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ\*

Совместно с И. Ю. Кобзаревым и Л. В. Окунем

В связи с обнаружением нарушения  $CP$ -инвариантности в распаде  $K_2^0 \rightarrow 2\pi$  обсуждается возможность существования наряду с обычными частицами ( $L$ ) «зеркальных» частиц ( $R$ ), введение которых восстанавливает эквивалентность левого и правого. Показано, что «зеркальные» частицы не могут взаимодействовать с обычными частицами ни сильно, ни полусильно, ни электромагнитно. Допустимо слабое взаимодействие между  $L$ - и  $R$ -частицами, обусловленное обменом нейтрино.  $L$ - и  $R$ -частицы должны иметь общее гравитационное взаимодействие. Обсуждается вопрос о существовании макроскопических тел (звезд) из  $R$  вещества и возможность их обнаружения.

### 1. Зеркальные частицы и $CPT$ -инвариантность

В настоящее время представляется почти несомненным, что в опытах [1—4] действительно наблюдается распад  $K_2^0 \rightarrow 2\pi$  и  $CP$ -инвариантность нарушается. Это означает, что эквивалентность правого и левого отсутствует в мире наблюдаемых частиц.

$CP$ -неинвариантность в отличие от неинвариантности относительно собственной группы Лоренца не приводит к реальным теоретическим осложнениям. Действительно, лагранжиан с комплексными константами дает  $CP$ -неинвариантную, но унитарную, аналитическую и  $CPT$ -инвариантную  $S$ -матрицу. Вопрос о том, можно ли понять, как природа выбрала между «правым» и «левым» вариантом, остается на долю будущей теории.

Следует подчеркнуть, что в  $CP$ -неинвариантной теории зеркальное отражение само по себе (без обращения времени) не переводит физический процесс в другой физический процесс. Такой переход происходит только под действием  $CPT$ -преобразования. Таким образом, отражение пространственных осей обязательно должно сопровождаться отражением временных осей; пространственные и временные координаты не являются в этом смысле независимыми. Эта ситуация является качественно новой. До сих пор физики верили, что «мировой» лагранжиан, описывающий элементарные частицы, инвариантен относительно всех тех преоб-

\* Ядерная физика, 1966, 3, 1154.

разований, которые оставляют инвариантным лоренцов интервал:  $t^2 - x^2$ . Эта вера не была уничтожена открытием  $P$ -неинвариантности в 1956 г., так как гипотеза сохранения комбинированной четности, выдвинутая Ландау [5], давала возможность рассматривать  $CP$ -преобразование как физическую реализацию пространственной инверсии. При этом  $T$ -преобразование оставалось независимым и имело обычную интерпретацию.

Если при нарушении  $CP$ -инвариантности попытаться сохранить независимость  $P$ - и  $T$ -отражений и тем самым сохранить симметрию между правым и левым в природе, то следует предположить, что наряду с нашим миром существует зеркальный мир и элементарные частицы удвоены. Возможность существования зеркального мира рассматривали в связи с несохранением  $P$  в слабых взаимодействиях Ли и Янг [6], которые предположили, что наряду с известными частицами, которые они назвали левыми ( $L$ ), существуют также правые частицы ( $R$ ). Согласно идее работы [6], при операции зеркального отражения нужно наряду с обычным  $CP$ -преобразованием совершать операцию перехода  $L \rightleftharpoons R$ , которую мы будем обозначать  $A^1$ . Физической инверсии отвечает операция  $CPA$ , относительно которой полный лагранжиан инвариантен.

В качестве примера мы приведем  $CPA$ -инвариантный лагранжиан, описывающий распады  $\Lambda \rightarrow p\pi^-$  в случае, когда  $CP$  нарушается в обычном слабом взаимодействии:

$$\mathcal{L} = \bar{p}_L (\alpha + \beta\gamma_5) \Lambda_L \Phi_{\pi L}^* + \bar{p}_L^C (\alpha^* - \beta^*\gamma_5) \Lambda_L^C \Phi_{\pi L} + \\ + \bar{p}_R^C (\alpha - \beta\gamma_5) \Lambda_R^C \Phi_{\pi R} + \bar{p}_R (\alpha^* + \beta^*\gamma_5) \Lambda_R \Phi_{\pi R}^*. \quad (1)$$

Здесь  $\Lambda_L^C = \gamma_2 \gamma_4 \bar{\Lambda}_L$  и соответственно для  $p_L^C$ ,  $\Lambda_R^C$ ,  $p_R^C$ . Члены  $\Lambda_L^C$  и  $\Lambda_R^C$  эрмитовски сопряжены членам с  $\Lambda_L$  и  $\Lambda_R$ . Первые два члена описывают распады «наших» частиц и античастиц:  $\Lambda_L \rightarrow \rightarrow p_L \pi_L^-$  и  $\bar{\Lambda}_L \rightarrow \bar{p}_L \pi_L^+$ . Асимметрии в распадах  $\Lambda_L \rightarrow p_L \pi_L^-$  и  $\bar{\Lambda}_R \rightarrow \bar{p}_R \pi_R^+$  равны по величине и противоположны по знаку<sup>2</sup>.

Для модели, в которой  $CP$ -инвариантность нарушается в сверхслабом взаимодействии с  $|\Delta S| = 2$  [7],  $CPA$ -инвариантный лагранжиан для перехода  $K_2 \rightarrow K_1$  с точностью до общего множителя будет иметь вид

$$\mathcal{L} = i(K_1^L K_2^L - K_1^R K_2^R). \quad (3)$$

<sup>1</sup> Уточним, что в [6] рассматривалось не  $CPA$ -, а  $PA$ -преобразование.

<sup>2</sup> Вместо  $CPA$ -инвариантности можно рассмотреть  $PA$ -инвариантность. В этом случае соответствующий лагранжиан будет иметь вид

$$L = \bar{p}_L (\alpha + \beta\gamma_5) \Lambda_L \Phi_{\pi L}^* + \bar{p}_L^C (\alpha^* - \beta^*\gamma_5) \Lambda_L^C \Phi_{\pi L} + \bar{p}_R (\alpha - \beta\gamma_5) \Lambda_R \Phi_{\pi R}^* + \\ + \bar{p}_R^C (\alpha^* + \beta^*\gamma_5) \Lambda_R^C \Phi_{\pi R}. \quad (2)$$

В дальнейшем мы для определенности будем обсуждать случай  $CPA$ -инвариантности.

Соответственно в случае  $C$ -неинвариантной, но  $P$ -инвариантной электродинамики [8, 9] эффективный лагранжиан, описывающий  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ - и  $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ -распады, можно символически написать как:

$$L_{2\gamma} \sim e^2 (\pi_L^0 2\gamma + \pi_R^0 2\gamma), \quad (4)$$

$$L_{3\gamma} \sim e^3 (\pi_L^0 3\gamma - \pi_R^0 3\gamma), \quad (5)$$

причем  $L_{3\gamma}$  —  $CP$ -нечетно.

## 2. Взаимодействие между $L$ - и $R$ -частицами

Основная цель данной работы — рассмотреть возможные типы взаимодействий между обычными ( $L$ ) и зеркальными ( $R$ ) частицами.

В работе Ли и Янга [6] допускалась возможность электромагнитного и даже сильного взаимодействия левых и правых частиц. Мы покажем ниже, что в действительности это не совместимо с экспериментальными данными. Существующие экспериментальные данные исключают также полусильное взаимодействие.

В отличие от фотонов нейтрино могут быть общими для двух миров, а гравитоны должны быть общими, если мы хотим, чтобы введение  $R$ -мира вообще имело физический смысл.

## 3. Электромагнитное взаимодействие.

### Общие фотоны (?)

Начнем со случая общего электромагнитного взаимодействия. В рассматриваемой теории должны существовать два  $\pi^0$ -мезона:  $\pi_L^0$  и  $\pi_R^0$  ( $\pi_R^0 = -CPA\pi_L^0$ ). При наличии общего фотона возможен переход

$$\pi_R^0 \rightleftharpoons 2\gamma \rightleftharpoons \pi_L^0.$$

Тогда возникнут два состояния:

$$\pi_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_R^0 - \pi_L^0), \quad \pi_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_R^0 + \pi_L^0),$$

где  $\pi_1^0$  —  $CPA$ -четен ( $CA$ -нечетен), а  $\pi_2^0$  —  $CPA$ -нечетен ( $CA$ -четен). Мы будем считать, что электромагнитное взаимодействие  $CPA$ -четно,  $P$ -четно, и, следовательно,  $CA$ -четно, но не обязательно  $C$ -четно [8, 9].  $\gamma$ -Квант по предположению при  $CA$ -преобразовании переходит сам в себя. Тогда  $\pi_1^0$ , который  $CA$ -нечетен, не может распадаться на два  $\gamma$ -кванта — ни реальных, ни виртуальных, но может распадаться на три  $\gamma$ -кванта. Так как ширина такого распада мала, то такой  $\pi_1^0$ -мезон был бы долгоживущим, что противоречит опыту. Так, например, в реакции перезарядки  $\pi^- \rightarrow \pi^0$  часть образовавшихся  $\pi^0$ -мезонов не распадались бы на два  $\gamma$ -кванта. То же относится и к  $\pi^0$ -мезонам, возникающим при распадах  $\Lambda^0$ -гиперона и  $K^0$ -мезона в реакции  $\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 K^0$ .



Этот вывод сохраняется также, если наряду с общим электромагнитным взаимодействием  $R$ - и  $L$ -частицы имеют общее сильное взаимодействие.

Таким образом, должны существовать фотоны двух типов:  $\gamma_L$  и  $\gamma_R$ . Отсюда следует, что частицы, общие для двух миров, обязательно должны быть нейтральными, иначе бы нарушались бы отдельные законы сохранения  $L$ -тока и  $R$ -тока. Такими частицами могли бы в принципе быть нейтральные изоскалярные мезоны, нейтрино, пионы  $W^0$ ,  $\bar{W}^0$  [10], гравитоны, а также другие неизвестные пока нейтральные частицы.

#### 4. Сильное взаимодействие.

##### Общие мезоны (?)

Рассмотрим теперь случай, когда существуют два фотона:  $\gamma_L$  и  $\gamma_R$  и общим для  $L$ - и  $R$ -частиц является только сильное взаимодействие. В этом случае будут существовать два  $\pi^0$ -мезона с близкими временами жизни, что само по себе не исключается опытом. Эти  $\pi^0$ -мезоны будут распадаться на  $\gamma_L\gamma_L$ ,  $\gamma_R\gamma_R$ ,  $\gamma_L\gamma_R$ . Сильное взаимодействие между  $L$ - и  $R$ -частицами должно быть изотопически инвариантно. Поэтому перемешивание  $\pi_L^0$  и  $\pi_R^0$  (имеющих  $T = 1$ ) будет происходить с участием виртуальных фотонов и будет электромагнитно малым (порядка  $\alpha^2$ , см. рис. 1). За время жизни  $\pi^0$ -мезона произойдет частичное перемешивание  $\pi_L^0$  и  $\pi_R^0$ . Таким образом, наблюдаемые на опыте  $\pi^0$ -мезоны должны были бы испускать в некоторой доле случаев  $\gamma_R$ -кванты. Если учесть, что при удвоении фотонов лептоны также необходимо удвоить (так как иначе нарушится обычное соотношение между сечениями  $ee$ - и  $er$ -рассеяния), то наблюдаемая вероятность распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma e^+ e^-$  оказалась бы меньше обычной (которая согласуется с вычисленной по стандартной теории):  $\gamma_R$ -кванты конвертировались бы в невидимые  $R$ -лептоны. К сожалению, мы не можем оценить степень перемешивания  $\pi_L^0 \leftrightarrow \pi_R^0$ , и поэтому рассмотрим другие аргументы, исключаящие сильное взаимодействие между  $L$ - и  $R$ -частицами.

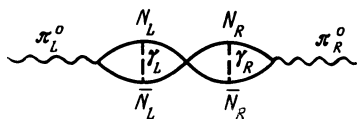


Рис. 1

Вообще говоря, наличие общего сильного взаимодействия между  $L$ - и  $R$ -мирами привело бы к существенным изменениям свойств сильных взаимодействий. В реакциях образования пар наряду с обычными парами  $\bar{N}_L N_L$ , где  $N$  — нуклон, рождались бы  $\bar{N}_R N_L$ . Судьба таких  $R$ -античастиц зависела бы от того, возможны ли связанные мезонные состояния типа  $\bar{N}_R N_L$ . Если бы такие мезонные состояния были возможны, то они были бы стабильны в силу того, что  $R$ - и  $L$ -нуклоны не переходят друг в друга даже в слабых взаимодействиях. (В противном случае при  $\beta$ -распаде образовывались бы аномальные ядра, содержащие

*R*-нуклоны.) Опыты [11—14] указывают на отсутствие в природе стабильных заряженных частиц, более легких, чем дейтрон (кроме, разумеется, протона и электрона). Если бы связанные состояния типа  $\bar{N}_R N_L$  были невозможны, то *R*-антинуклон не аннигилировал бы в обычном веществе. К сожалению, данные по аннигиляции антипротонов, полученные в опытах [15], не имеют отношения к делу, так как *R*-антипротоны не имеют электрического *L*-заряда, с *L*-квантами не взаимодействуют и ионизационных треков не оставляют.

Сильное взаимодействие между *L*- и *R*-частицами привело бы к сильному перемешиванию изоскалярных *L*- и *R*-мезонов ( $\omega_L^0 \leftrightarrow \omega_R^0$ ,  $\eta_L^0 \leftrightarrow \eta_R^0$  и т. д.). В результате образовались бы *A*-четные и *A*-нечетные состояния, которые с равной вероятностью распадались бы на видимые *L*- и невидимые *R*-частицы (в особенности это относится к  $\eta$ -мезонам, которые распадались бы в  $\alpha^2$  раз медленнее, чем перемешивались). Мы можем заключить таким образом, что имеющиеся экспериментальные данные противоречат гипотезе о существовании сильного взаимодействия между *L*- и *R*-частицами.

Что касается полусильного взаимодействия между *L*- и *R*-частицами, то оно исключается данными, полученными в нейтринном опыте в ЦЕРНе [16]. Действительно, железная стена толщиной 25 м в этом опыте пропустила бы значительное число  $\mu_R$ -мезонов ( $> 10^6$  частиц), если бы их сечение взаимодействия было всего лишь на порядок меньше ядерного. В нейтринном опыте регистрируются нейтрино, рождающиеся с интенсивностью  $\pi$ -мезонов и взаимодействующие на 13—14 порядков слабее. Поэтому зеркальные частицы и, в частности,  $\mu_R$ -мезоны, рождающиеся в  $10^6$  раз слабее обычных и поглощающиеся с сечением в  $10^6$  раз меньше ядерного ( $\sim 10^{-32}$  см<sup>2</sup>), если бы они существовали, были бы надежно зарегистрированы в этом опыте. Таким образом, можно утверждать, что взаимодействие между *L* и *R*-адронами исключено, если константа этого взаимодействия  $g^2$  удовлетворяет неравенству  $g^2 > 10^{-6}$ .

## 5. Слабое взаимодействие.

### Общие нейтрино<sup>1</sup>

Никакие из сделанных опытов не противоречат тому, что общими для *L*- и *R*-частиц являются нейтрино. При этом лагранжиан слабого взаимодействия может иметь, например, вид

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_L^+ j_L + j_R^+ j_R), \quad (6)$$

<sup>1</sup> Вопрос о месте нейтрино в обсуждаемой схеме удвоения был поставлен перед нами Б. М. Понтекорво.

где

$$j_L = \bar{\nu}_e O_L e_L + \bar{\nu}_\mu O_L \mu_L + \cos \theta \bar{\nu}_L O_L n_L + \sin \theta \bar{\nu}_L O_L \lambda_L, \quad (7)$$

$$j_R = \nu_e O_R e_R + \bar{\nu}_\mu O_R \mu_R + \cos \theta \bar{\nu}_R O_R n_R + \sin \theta \bar{\nu}_R O_R \lambda_R.$$

В  $V - A$ -теории  $O_R = O_L = \gamma_5 (1 + \gamma_5)$ . В общем же случае  $O_R = (CP)^{-1} O_L (CP)$ . Такой лагранжиан отвечает тому, что  $W$ -бозоны, если они существуют, должны быть двух типов:  $W_L$  и  $W_R$ . К сожалению, опыты по обнаружению превращения нейтрино в правые частицы не представляются реальными. Например, рождение

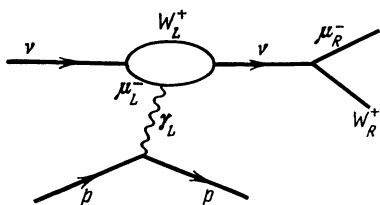


Рис. 2

в нейтринном опыте  $R$ -частиц, описываемое рис. 2, можно было бы наблюдать лишь по протону отдачи с кинематикой, не согласующейся с упругим  $\nu p$ -рассеянием. При этом следует учесть, что для подобных экспериментов нужно знать импульс нейтрино и уметь исключать случаи, когда протон отдачи испускает тормозной квант.

Неожиданные результаты в связи с рассматриваемыми свойствами нейтрино могла бы дать нейтринная астрономия. Если вблизи от нашей Солнечной системы существует яркий  $R$ -объект, испускающий, подобно нашему Солнцу, потоки нейтрино, то он не был бы наблюдаем ни по фотонам ( $\gamma_R$ ), ни по корпускулярным излучениям ( $e_R, p_R$ ), но мог бы оказаться самым ярким объектом на «нейтринном небосводе».

## 6. Слабое взаимодействие. Общие $W^0$ -бозоны (?)

Существование общих  $W^0$ -бозонов с универсальной константой взаимодействующих с  $L$ - и  $R$ -частицами исключается экспериментом, так как в этом случае в распадах гиперонов и  $K$ -мезонов наряду с  $\pi_L^0$ -мезоном испускался бы ненаблюдаемый  $\pi_R^0$ -мезон, а вместо пар  $\pi_L^+ \pi_L^-$  — ненаблюдаемые пары  $\pi_R^+ \pi_R^-$ .

## 7. Гравитационное взаимодействие. Общие гравитоны

Если  $R$ -материя существует, то она должна взаимодействовать с  $L$ -материей гравитационным образом. Если  $R$ -материя имеет еще какое-либо общее взаимодействие с обычной материей, то необходимо, чтобы в гравитационное взаимодействие входил суммарный тензор  $L$ -материи и  $R$ -материи с общей константой  $G$ . В противном случае взаимодействие между обычной материей и

*R*-материей, при котором тензор энергии — материи для обычной материи не сохранялся бы, приводило к противоречивости уравнений гравитации. На первый взгляд кажется, что если гравитон является единственной общей частицей, то константы  $G_L$  и  $G_R$  могут быть разные, в частности, допустим предельный случай гравитона, не взаимодействующего с *R*-материей. Очевидно, однако, что при  $G_R = 0$  и отсутствии других взаимодействий с *L*-веществом само утверждение о существовании *R*-материи теряет физический смысл. Если  $G_L \neq G_R \neq 0$ , то возникнут трудности, связанные с тем, что суммарный «гравитационный заряд» замкнутой системы, обладающей внутренней кинетической энергией, менялся бы по мере того, как эта энергия переходила от ее *L*-компонент к ее *R*-компонентам. Такое несохранение гравитационного заряда должно было бы привести к появлению у гравитона массы и, следовательно, к конечному радиусу гравитационного взаимодействия в силу аргументов, аналогичных тем, которые были использованы Любошицем, Оконовым и Подгорецким [17] для доказательства невозможности дальнедействующих сил, связанных с гиперзарядом. Если бы *R*-материя взаимодействовала с нашими частицами только гравитационным образом, то она обладала бы очень своеобразными свойствами. Например, *R*-материя могла бы образовывать макроскопические тела, абсолютно невидимые и абсолютно проницаемые (свободно проходящие через обычную материю). Прохождение такого *R*-объекта с массой порядка планетной через Солнечную систему проявлялось бы только в возмущении планетных орбит, сильном при близком прохождении. Некоторое количество *R*-материи могло бы находиться в центральных областях Солнца и планет, двигаясь вместе с ними и проявляясь только в том, что их масса, определенная из гравитационных эффектов, больше их «физической» массы. Такая ситуация, однако, является очень искусственной. *R*-вещество, захватываемое тяготением Земли при ее образовании, скорей всего должно было иметь некоторый импульс относительно центра масс системы *L*-Земля + *R*-Земля. В этом случае *L*-Земля и *R*-Земля совершали бы колебания относительно общего центра тяжести. При заметной массе *R*-Земли эти колебания были бы обнаружимы. Даже если в некоторый момент амплитуда таких колебаний была равна нулю, колебания, как заметил Франк-Каменецкий, возникли бы под влиянием метеорной бомбардировки. Таким образом, присутствие больших количеств *R*-вещества в нашей Солнечной системе маловероятно.

Заметим, что если бы вблизи нашей Солнечной системы находилась двойная звезда из *R*-вещества, то она могла бы явиться источником столь мощного гравитационного излучения, что его можно было бы зарегистрировать [18].

## 8. *CPA*-инвариантность в модели двух $\Lambda$ -кварков (?)

Выше мы считали, что при  $A$ -преобразовании все адроны переходят в свои зеркальные двойники. Можно, однако, потребовать, чтобы это относилось не ко всем адронам, а только к части их. Такому требованию удовлетворяет составная модель Владимирского [19], в которой имеются два  $\Lambda$ -кварка ( $\Lambda_a$  и  $\Lambda_b$ ) с одинаковыми сильными взаимодействиями.  $A$ -преобразование означает в этой модели замену  $\Lambda_a \leftrightarrow \Lambda_b$ .  $A$ -инвариантность нарушается, согласно [19], взаимодействием, более слабым, чем электромагнитное, и поэтому точность соответствующей изогруппы  $SU_2(\Lambda_a, \Lambda_b)$  лучше, чем обычной изогруппы  $SU_2(p, n)$ . Ниже мы покажем, что требование  $CPA$ -инвариантности приводит в рамках модели двух кварков к противоречию с опытами, относящимися к нейтральным  $K$ -мезонам. Дело в том, что в модели двух  $\Lambda$ -кварков имеется четыре нейтральных  $K$ -мезона:  $K_1^a, K_1^b, K_2^a, K_2^b$ , переходящих друг в друга. Диагональными состояниями являются два состояния с положительной  $CPA$ -четностью —  $E_1$  и  $E_2$  и два состояния с отрицательной  $CPA$ -четностью —  $O_1$  и  $O_2$ . Первые представляют собой линейные суперпозиции состояний  $K_1^a + K_1^b$  и  $K_2^a - K_2^b$ , вторые — линейные суперпозиции состояний  $K_1^a - K_1^b$  и  $K_2^a + K_2^b$ . Система  $\pi^+\pi^-$  в  $S$ -состоянии  $CPA$ -четна, поэтому распады в эту систему доступны только  $CPA$ -четным мезонам:  $E_1$  и  $E_2$ . Если времена жизни  $E_1$  и  $E_2$  сравнимы ( $\tau_{E_1} \sim \tau_{E_2} \sim 10^{-10}$  сек), то нельзя объяснить результаты опыта Кристенсона и др. [1—3]. Если же предположить, что  $\tau_{E_1} \sim 10^{-10}$ , а  $\tau_{E_2} \sim 10^{-8}$  сек, то опыт Кристенсона и др. объяснить, быть может, и можно было бы, однако в этом случае за время порядка  $10^{-10}$  сек на  $\pi^+\pi^-$  распадалась бы не  $1/3$  всех  $K^0$ -мезонов, родившихся в некоторой реакции, а только  $1/6$ . Такое заключение противоречит данным по парному рождению  $K^0$ -мезонов ( $\pi^-p \rightarrow \Lambda^0 K^0$ ) [20] и перезарядке ( $K^+n \rightarrow K^0p$ ) [21].

## 9. Заключение

Проведенное выше рассмотрение имеющихся экспериментальных данных приводит нас к следующим выводам.

1. Зеркальные частицы, если они вообще существуют, взаимодействуют с нашими частицами сравнительно слабо.

2. В пределах Солнечной системы зеркальных частиц существенно меньше, чем обычных.

Оба эти вывода отнюдь не означают, что зеркальные частицы вообще не существуют или если даже существуют, то отсутствуют в пределах Солнечной системы вообще и внутри Земли в частности.

3. Если вблизи Солнечной системы существуют звезды и  $R$ -вещества, то такие звезды были бы не обнаружимы обычными

методами, но могли бы наблюдаться по их нейтральному и гравитационному излучению.

Основной результат данной работы, заключающийся в том, что зеркальное вещество может взаимодействовать с обычным только очень слабо и что верхняя граница его концентрации в Солнечной системе не велика, не придает дополнительной привлекательности гипотезе о существовании зеркальной материи.

Авторы благодарны В. Н. Грибову, В. И. Когану, С. Б. Пикельнеру, Б. М. Понтекорво, Д. А. Франк-Камецкому, И. С. Шапиро за интересные обсуждения.

*Институт теоретической  
и экспериментальной физики*

Получено  
29 декабря 1965 г.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 138.
2. X. de Bouard, D. Dekkers, B. Jordan, R. Mermod, T. R. Willits, K. Winter, P. Scharff et al. Phys. Letters, 1965, 15, 58.
3. W. Galbraith, G. Manning, A. E. Taylor, B. D. Jones, J. Malos et al. Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 383.
4. V. L. Fitch, R. F. Roth, J. S. Russ, W. Vernon. Phys. Rev. Letters, 1965, 15, 73.
5. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1957, 32, 405.
6. T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., 1956, 104, 254.
7. L. Wolfenstein. Phys. Rev. Letters, 1964, 13, 562.
8. J. Bernstein, G. Feinberg, T. D. Lee. Phys. Rev., 1965, 139B, 1650.
9. S. Barshay. Phys. Letters, 1965, 17, 78.
10. T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., 1960, 119, 1440.
11. L. Gilly, B. Leontic, A. Lundby, R. Mennier, J. P. Stroot, M. Szeptyka. Proc. Roch. Conf., 1960, p. 808.
12. G. von Dardel, R. M. Mermod, G. Weber, R. Winter. Proc. Roch. Conf., 1960, p. 836.
13. V. T. Cocconi, T. Fazzini, G. Fidicaro, M. Legros, N. H. Lipman, H. A. W. Merrison. Phys. Rev. Letters, 1960, 5, 19.
14. D. E. Dorfan, J. Eades, L. M. Lederman, W. Lee, C. C. Ting. Phys. Rev. Letters, 1965, 14, 1003.
15. E. Amaldi, G. Baroni, G. Belletini, C. Castagnoli, M. Ferro-Luzzi, A. Manfredini. Nuovo Cimento, 1959, 14, 977.
16. G. Bernardini. Proc. of the Conf. on High Energy Physics. Dubna, 1964.
17. В. Л. Любошиц, Э. О. Ожонов, М. И. Подгорецкий. ЯФ, 1, 490, 1965.
18. В. Б. Брагинский. УФН, 1965, 85, 433.
19. В. В. Владимировский. Ядерная физика, 1965, 2, 1087.
20. D. A. Glaser. Proc. of 1958 Conf. on High Energy Physics at CERN, p. 273.
21. J. L. Brown, J. A. Kadyk, G. H. Trilling, B. R. Roe, D. Sinclair, J. C. Vander Velde. Phys. Rev., 1963, 130, 769.

# СО Д Е Р Ж А Н И Е

## I

### ТЕОРИЯ ФОТОНОВ, ЭЛЕКТРОНОВ И МЮОНОВ

33. Рассеяние света на свете. (Совместно с А. Ахиезером и Л. Ландау). 1936 . . . . .	5
34. Когерентное рассеяние $\gamma$ -лучей ядрами. (Совместно с А. И. Ахиезером). 1936 . . . . .	7
35. Об уровнях энергии систем с $Z > 137$ . (Совместно с Я. Смородинским). 1945 . . . . .	21
36. Правила отбора при аннигиляции электронов и позитронов. 1948	27
37. Время жизни медленных позитронов. 1949 . . . . .	30
38. Об электронах, образующихся при захвате $\mu$ -мезонов на атомные уровни. (Совместно с Б. Л. Иоффе). 1952 . . . . .	32
39. О спектре $\mu$ -мезоводорода. (Совместно с А. Д. Галаниным). 1952	35
40. Образование $\mu$ -мезонной пары при аннигиляции позитрона. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1955 . . . . .	38

## II

### ПРОХОЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО. КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ. МАГНИТНОТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

41. Максимальная энергия, которую могут иметь на поверхности Земли первичные электроны космических лучей из-за излучения в земном магнитном поле. 1939 . . . . .	40
42. О конце трека мезотрона в камере Вильсона. (Совместно с А. Мигдалом). 1940 . . . . .	47
43. Спектр мягкой компоненты в воздухе при больших энергиях. (Совместно с А. Кирпичевым). 1943 . . . . .	50
44. К теории переходных эффектов в космических лучах. (Совместно с А. Кирпичевым). 1944 . . . . .	54
45. Экранирование эффективных сечений для тормозного излучения и образования пар с помощью экспериментальных значений атомформфактора. (Совместно с А. Кирпичевым). 1944 . . . . .	59
46. К интерпретации экспериментальных данных о больших лавинных ливнях. 1944. . . . .	62
47. О максимальной энергии, достижимой в бетатроне. (Совместно с Д. Д. Иваненко). 1944 . . . . .	85
48. Излучение быстрых электронов в магнитном поле. (Совместно с А. Арцимовичем). 1945 . . . . .	87
49. Излучение релятивистских электронов в магнитном поле. 1946	101
50. О флуктуациях ионизационных пробегах. 1948 . . . . .	104

51. Пределы применимости теории тормозного излучения электронов и образования пар при больших энергиях. (Совместно с Л. Д. Ландау). 1953 . . . . .	114
52. Электронно-лавинные процессы при сверхвысоких энергиях. (Совместно с Л. Д. Ландау). 1953 . . . . .	117
53. О пределах применимости теории переходного излучения. (Совместно с Г. М. Гарибьяном). 1959 . . . . .	122

### III

#### КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ

54. Кулоновские силы и строение нейтрона. 1943 . . . . .	126
55. Рассеяние мезонов, сильно взаимодействующих с нуклонами. 1944.	131
56. Обобщение предельного $\lambda$ -процесса и неоднозначность в устранении бесконечностей квантовой теории элементарных частиц. 1947, 1949 . . . . .	133
57. Перенормировка массы и заряда в ковариантных уравнениях квантовой теории поля. (Совместно с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе). 1954 . . . . .	141
58. Об асимптотике функций Грина нуклона и мезона в псевдоскалярной теории со слабым взаимодействием. (Совместно с А. Д. Галаниным и Б. Л. Иоффе). 1955.	146
59 Обобщение теоремы Уорда на случай конечных длин волн света у частиц со спином нуль. 1955 . . . . .	161
60. О точечном взаимодействии в квантовой электродинамике. (Совместно с Л. Д. Ландау). 1955 . . . . .	163
61. Равенство нулю перенормированного заряда в квантовой электродинамике. 1955 . . . . .	168
62. О перенормировке мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. 1955 . . . . .	173
63. Об обращении в нуль перенормированного мезонного заряда в псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. 1955 . .	176
64. Решение уравнений псевдоскалярной мезонной теории с псевдоскалярной связью. 1955. . . . .	182
65. Равенство нулю перенормированного заряда в электродинамике п в мезонной теории. 1956. . . . .	185
66. Равенство нулю перенормированного заряда в теориях поля с точечным взаимодействием. (Совместно с В. В. Судаковым и К. А. Тер-Мартirosяном). 1956 . . . . .	204

### IV

#### ФИЗИКА СТРАННЫХ ЧАСТИЦ И РЕЗОНАНСОВ. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

67. О $\beta$ -распаде нейтрона. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1949	246
68. Корреляционные явления при захвате $K$ -мезонов. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1956 . . . . .	249
69. О числе различных типов $K$ -мезонов. (Совместно с Б. Л. Иоффе и Л. Б. Окунем). 1956 . . . . .	251

295



70. Замечание о числе различных типов $K$ -мезонов. 1956 . . . . .	255
71. О возможном дипольном моменте перехода у $\Lambda$ -частиц. (Совместно с Б. Л. Иоффе). 1957 . . . . .	257
72. О взаимодействии $\Xi$ -гиперонов с нуклонами и легкими ядрами. (Совместно с Л. Б. Окунем и И. М. Шмушкевичем). 1958 . . . . .	261
73. Об определении четности $K$ -мезона. (Совместно с Л. Б. Окунем). 1958 . . . . .	265
74. $\beta$ -взаимодействие и формфактор нуклона. (Совместно с В. Б. Берестецким). 1959. . . . .	267
75. Об электромагнитном взаимодействии нейтрального векторного мезона. (Совместно с И. Ю. Кобzareвым и Л. Б. Окунем). 1961 . . . . .	269
76. Некоторые следствия из унитарной симметрии для процессов с участием $\omega$ , $\phi$ и $f^0$ -мезонов. (Совместно с Б. Л. Иоффе и И. Ю. Кобzareвым). 1965 . . . . .	273
77. «Теневая Вселенная» и нейтринный опыт. (Совместно с Л. Б. Окунем). 1965 . . . . .	278
78. Электромагнитные разности масс барионов и $SU(6)$ -симметрия. (Совместно с А. Д. Долговым, Л. Б. Окунем и В. В. Соловьевым). 1965 . . . . .	281
79. О возможности экспериментального обнаружения зеркальных частиц. (Совместно с И. Ю. Кобzareвым и Л. Б. Окунем). 1966 . . . . .	285

**ИСААК ЯКОВЛЕВИЧ ПОМЕРАНЧУК**

Собрание научных трудов. Том II

**Физика элементарных частиц.**

**Электромагнитные и слабые взаимодействия**

Утверждено к печати Отделением ядерной физики Академии наук СССР

Редактор Л. А. Кондратьев. Редактор издательства Л. В. Кудрявцева  
Художник Э. Л. Эрман. Художественный редактор И. И. Власик.  
Технический редактор П. С. Кашина

Сдано в набор 8/II-1972 г. Подписано в печати 20.VII-1972 г.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага № 1. Усл. печ. л. 18,5. Уч.-изд. л. 17,1  
Тираж 2700. Т-13015. Тип. зак. 180. Цена 1 р. 44.

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
85	11 стр.	$\left(\frac{vH}{c}\right)^2$	$\left[\frac{vH}{c}\right]^2$
87	7 св.	разноотстоящих	равноотстоящих
176	9 св.	произвольных	произвольных <sup>1</sup>
	10 св.	$g_{21}^1$	$g_1^2$
229	6 св.	$b_0$	$\bar{b}_0$
276	27 св.	$S = \pm 1/2$	$S = + 1$

И. Я. Померанчук, Т. П.